THESE

pour l'obtention du Grade de

Docteur de l'Université de Poitiers

ECOLE SUPERIEURE d'INGENIEURS DE POITIERS
(Diplôme National - Arrêté du 30 mars 1992)
Ecole Doctorale : Sciences pour l'Ingénieur

SPECIALITE
Acoustique et Dynamique des Ecoulements Instationnaires

Présentée par
François GOLANSKI

Méthode hybride pour le calcul du rayonnement acoustique d'écoulements anisothermes à faibles nombres de Mach

Directeur de thèse : **Jean-Christophe VALIERE**
Co-directeur de thèse : **Christian PRAX**

Soutenue le 2 décembre 2004

JURY

Rapporteurs	
C. BAILLY	Professeur, Ecole Centrale de Lyon
P. COMTE	Professeur, Université Louis Pasteur, Strasbourg I
Examinateurs	
E. LAMBALLAIS	Professeur, Université de Poitiers
C. PRAX	Maître de Conférences, Université de Poitiers
P. SAGAUT	Professeur, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI
J.-C. VALIERE	Professeur, Université de Poitiers

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire d'études aérodynamiques de l'université de Poitiers. Je remercie toutes les personnes de ce laboratoire, et en particulier de l'équipe d'acoustique, avec lesquelles j'ai eu l'occasion de travailler.

Une partie des simulations de cette thèse a été menée sur le NEC-SX5 de l'IDRIS (Institut du développement et des ressources en informatique scientifique) que je remercie.

Je remercie vivement Messieurs Christophe Bailly et Pierre Comte, d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail et d'avoir su me donner en aussi peu de temps une nouvelle vision sur mes propres résultats. Je remercie également Monsieur Pierre Sagaut d'avoir accepté de participer au jury et d'en être le président.

Je remercie particulièrement Christian Prax et Jean-Christophe Valière, d'avoir accepté d'encadrer cette thèse, et de la confiance qu'ils m'ont témoigné tout au long de ces années.

Je remercie également très chaleureusement Eric Lamballais pour l'aide qu'il m'a apporté tout au long de ce travail qui lui doit beaucoup. Son enthousiasme communicatif et les excellents moments passés au cours de mon DEA ont été déterminants dans ma décision de poursuivre en thèse.

Merci à Jean-Cristophe Vergez pour son aide informatique et pour sa disponibilité. Merci également à Véronique Fortuné pour son aide dans la compréhension du sujet, pour m'avoir permis d'utiliser son code de calcul compressible *Compact3d* et de m'avoir appris à l'utiliser.

Je remercie aussi Caroline, dont les conseils m'ont aidé à retrouver confiance à certains moments difficiles.

J'associe bien sûr à ces remerciements, tous mes collègues thésards et stagiaires pour les bons moments que nous avons pu passer ensemble et bien sûr pour l'aide qu'ils ont tous pu m'apporter. Merci donc à Estelle, Nadia, Solenn, Anthony, Carlos, Cyril, Florent, Franck, Jérôme, Jeff, Laurent, Romu, Ludo(s), Michel et Yann.

Merci enfin à mes parents, à Jean-Christophe, Anne-Marie, Murielle et Clément. Leur compréhension a été bien au-delà de ce que j'étais en droit d'attendre.

Table des matières

Introduction **1**

1 Simulation numérique en aéroacoustique **5**
1.1 Classification générale 6
1.2 Les méthodes hybrides 6
1.2.1 Les analogie aéroacoustiques 6
1.2.2 Les méthodes de propagation 9
1.3 Le calcul direct 11
1.4 Les Equations d'Euler Linéarisées 15
1.4.1 Le développement des schémas et conditions aux limites 15
1.4.2 Le couplage CFD/EEL 17
1.4.3 Applications des EEL à des écoulements particuliers 18

2 Ecoulements à faible nombre de Mach **19**
2.1 Le modèle physique 19
2.1.1 Modèle compressible 19
2.1.2 Développement de l'approximation 20
2.2 Résolution numérique 22
2.2.1 Avancement global 22
2.2.2 Equation de Poisson pour la pression 23
2.2.3 Evaluation du terme de variation de masse volumique 24
2.2.4 Résolution de l'équation de Poisson 26
2.2.5 Condition de sortie 30
2.3 Application à la couche de mélange 30
2.3.1 Généralités 30
2.3.2 Couche de mélange en développement temporel 32
2.3.3 Couche de mélange isotherme en développement spatial 37
2.3.4 Couche de mélange anisotherme en développement spatial 41
2.4 Conclusion 50

3 Les Equations d'Euler Linéarisées **53**
3.1 Formulation 53
3.1.1 Eléments sur la théorie des modes de perturbations 53
3.1.2 Méthodes numériques 54
3.1.3 Les différents types de sources 54

3.2 Conditions aux limites . . . 55
3.2.1 Choix du type de conditions aux limites . . . 55
3.2.2 Conditions de Tam et Dong . . . 57
3.3 Filtrage spatial . . . 59
3.3.1 Filtre compact . . . 60
3.4 Validations du code de calcul . . . 61
3.4.1 Source impulsionnelle en écoulement uniforme . . . 61
3.4.2 Source quadripolaire . . . 65
3.4.3 Cas particulier du modèle temporel . . . 70
3.5 Conclusion . . . 70

4 De la LMNA vers les EEL **73**
4.1 Traitement des sources : extension du modèle LMNA . . . 73
4.2 Validation : simulation temporelle . . . 77
4.2.1 Détails de la simulation . . . 77
4.2.2 Interpolation temporelle des données LMNA . . . 81
4.2.3 Cas isotherme . . . 84
4.2.4 Cas anisotherme . . . 92
4.3 Couche de mélange spatiale isotherme . . . 99
4.3.1 Nature des termes sources . . . 101
4.3.2 Stabilité - Equations d'Euler Linéarisées réduites . . . 102
4.3.3 Problème de l'étendue des sources acoustiques . . . 102
4.3.4 Résultats . . . 104
4.4 Couche de mélange spatiale anisotherme . . . 108
4.4.1 Maillage et paramètres . . . 109
4.4.2 Résultats . . . 109
4.5 Conclusion . . . 116

5 Influence de la température **119**
5.1 Modélisation de la viscosité . . . 119
5.2 Simulations bidimensionnelles . . . 125
5.2.1 Influence de T_1/T_2 sur l'émission globale . . . 125
5.2.2 Comparaisons des contributions de chaque terme source . . . 126
5.3 Simulations tridimensionnelles . . . 130
5.3.1 Champs dynamiques . . . 131
5.3.2 Rayonnement acoustique . . . 134
5.4 Conclusion . . . 138

Conclusion **141**

Bibliographie **143**

A Discrétisation spatiale **151**
A.1 Généralités . . . 151
A.2 Formulation matricielle . . . 153
A.3 Cas particulier des termes visqueux . . . 155

A.4 Maillage non-uniforme 156
A.4.1 Calcul de la dérivée première 156
A.4.2 Calcul de la dérivée seconde 157

Introduction

Au cours du siècle dernier, les évolutions scientifiques et techniques ont bouleversé le mode de vie occidental. Ces modifications, sous les traits de la mécanisation, l'industrialisation et l'urbanisation se sont accompagnées de tous types de pollutions. Ainsi, l'environnement quotidien de la plupart d'entre nous est-il devenu de plus en plus bruyant.
Pour éviter une dérive catastrophique de cette situation, nous sommes obligés d'intégrer la prise en compte de cette nuisance à différents niveaux de la société. Ceci passe notamment par l'instauration de normes sur le bruit - en matière d'urbanisme, d'habitat, d'équipements industriels ou individuels, et de transport - qui doivent être quantifiables, vérifiables et applicables.

Sur l'échelle des pollutions sonores, les transports occupent une place de choix, et en leur sein le transport aérien est très bien placé. Dans le domaine du transport aérien, le bruit intense produit par les premiers avions à réaction s'est très vite présenté comme un frein potentiel aux développements prometteurs du secteur annoncés par des performances remarquables. C'est sur cette préoccupation que s'est développée l'aéroacoustique. Les travaux de Lighthill au début des années cinquante donnaient une base efficace pour se confronter au problème difficile de l'étude et de la réduction du bruit d'origine aérodynamique.

Parmi ces écoulements bruyants, certains font intervenir des températures élevées qui jouent un rôle non négligeable dans les mécanismes de production et de propagation acoustique. Pourtant, pour des raisons parfois techniques (liées par exemple aux difficultés expérimentales), cet aspect ne fait pas partie des sujets les plus abordés de l'aéroacoustique, même sur des questions aussi liées à la température que le bruit de jet.

Avec l'augmentation rapide des performances des ordinateurs, tous les domaines de la science développent des moyens numériques d'investigation. En aéroacoustique, ces recherches doivent permettre à terme de réduire les coûts d'expérimentations par la réalisation de pré-études numériques voire même dans certains cas par leur remplacement.

A l'heure actuelle, les méthodes numériques pour l'aéroacoustique ne permettent pas à l'ingénieur de réaliser des prévisions fiables pour des configurations réalistes. Même pour des écoulements très bruyants, l'énergie acoustique représente une part infime de l'énergie en jeu dans un écoulement. Son calcul requiert donc une précision très importante que les codes de mécanique des fluides courants ne peuvent pas atteindre : on commence tout juste à voir apparaître des modules aéroacoustiques dans les codes commerciaux de

mécanique des fluides. Il reste donc beaucoup de travail de développement de méthodes numériques et de modèles simplificateurs.

En théorie, la résolution complète des équations de Navier-Stokes sur un domaine spatial étendu permet d'obtenir la dynamique d'un écoulement et le champ acoustique qu'il produit sans adopter d'hypothèses simplificatrices. Ceci demande des moyens de calculs considérables et n'est applicable que dans des configurations d'écoulements académiques simples. Parmi les solutions qui donnent la possibilité de traiter des situations plus réalistes, les démarches dites hybrides consistent à décomposer le problème en plusieurs parties et à utiliser pour chacune des outils, modèles ou hypothèses adaptés.

Les écoulements libres à faibles nombres de Mach autorisent à considérer séparément le calcul de la dynamique et celui de l'acoustique. Le passage d'informations de l'un à l'autre est alors modélisé par des sources acoustiques d'origines aérodynamiques. Cette décomposition permet de réduire les temps de calcul de l'étape dynamique en utilisant l'hypothèse d'incompressibilité. En effet, pour ce type d'écoulements, les effets de compressibilité sont négligeables alors qu'ils entraînent des contraintes numériques fortes. Pour le cas des écoulements anisothermes, cette hypothèse ne peut être adoptée qu'en ayant recours à une classe particulière de modèles incompressibles qui négligent les variations de masse volumique liées aux effets de compressibilité (principalement l'acoustique pour les écoulements à faibles nombres de Mach) tout en tenant compte de celles dues aux phénomènes thermiques.

Outre leur utilité dans une démarche de réduction des coûts de calcul, les méthodes hybrides autorisent - de par leur principe même - à dissocier simplement plusieurs types de phénomènes physiques en jeu. Elles constituent donc un outil intéressant d'investigation scientifique permettant artificiellement de prendre en compte ou de négliger certains mécanismes.

Objectifs de la thèse

En suivant la démarche globale présentée ci-dessus, les objectifs visés par ce travail sont :

- le développement d'un code de résolution des équations de Navier-Stokes selon une approximation d'écoulements à faibles nombres de Mach (appele LMNA - pour Low Mach Number Approximation - par la suite . Ce développement s'appuie sur des couches de mélange isothermes et anisothermes en développement temporel et spatial ;

- le développement d'un code de propagation acoustique basé sur la résolution des équations d'Euler linéarisées. Ce code utilise les mêmes schémas de discrétisation spatiale que le précédent ;

- la définition prcise des sources permettant le transfert des informations dynamiques aux équations de propagation. Cette étape est très dépendante des modèles choisis pour le calcul de l'écoulement et de la propagation (par exemple, les sources à intégrer dans

un propagateur sont différentes si elles sont issues d'une simulation compressible ou incompressible). Cette démarche est donc entreprise ici de sorte à assurer le lien le plus à même de conserver la cohérence globale de l'étude ;
– la mise en œuvre du couplage avec l'application aux couches de mélanges isothermes, anisothermes en développement temporel puis spatial.

Plan de l'étude

Ce mémoire s'articule autour de cinq chapitres.

Le premier chapitre présente les spécificités des méthodes numériques pour l'aéroacoustique, avec les différentes approches connues à ce jour. Une rapide présentation de précédents travaux réalisés avec le même type de démarche que celle suivie dans cette étude est effectuée.

Le second chapitre est consacré à l'approximation d'écoulements à faibles nombres de Mach adoptée dans l'étape dynamique. Le cadre mathématique de cette approximation est présenté et les méthodes numériques employées pour la résolution des équations obtenues sont exposées. Les applications aux cas des couches de mélange temporelle et spatiale sont effectuées.

La présentation des équations d'Euler linéarisées et de la formulation retenue dans le programme est donnée dans le troisième chapitre. Les méthodes numériques choisies y sont présentées. Des validations de ce code dans différentes situations représentatives de l'utilisation qui en sera faite par la suite sont réalisées.

Le quatrième chapitre correspond à la concrétisation de la démarche hybride entreprise. Il s'agit de l'étape concernant le couplage entre les deux phases précédentes par la définition des sources acoustiques d'origine aérodynamique. La démarche conduisant à leur obtention est présentée en détail. La formulation est validée grâce à la couche de mélange temporelle par comparaison à des résultats de calculs directs. L'extension à la couche de mélange spatiale est entreprise en écoulements isothermes et anisothermes.

Au cours du cinquième chapitre, nous étudions l'influence du rapport de températures sur l'émission acoustique. Ce chapitre est un complément à une étude réalisée au LEA sur le bruit de couches de mélange anisothermes, où une situation anisotherme était comparée à une situation isotherme. Ici, différents écoulements anisothermes sont étudiés. Des simulations bi- et tridimensionnelles de couches de mélange en développement temporel sont adjointes à l'analogie de Lighthill.

Nous concluons par un bilan de l'étude réalisée, et par quelques perspectives.

Chapitre 1

Simulation numérique en aéroacoustique

La CAA (Computational Aero-Acoustics) est à un stade de maturité beaucoup moins avancé que la CFD (pour Computational Fluid Dynamics). Il a pu alors sembler naturel de profiter de l'expérience acquise en CFD. Malheureusement, les objectifs et les contraintes liées à la CFD et la CAA sont parfois différents, et la transposition des méthodes numériques employées en mécanique des fluides n'est pas immédiate. La revue [107] est consacré aux spécificités numériques liées à l'aéroacoustique. En se basant sur le cas d'un jet supersonique, Tam y met en évidence les difficultés propres à la CAA.

Le premier problème posé par l'aéroacoustique est la grande disparité des échelles de longueurs. Les schémas de discrétisation spatiale utilisés doivent être précis sur des échelles allant des plus petites longueurs représentatives de la turbulence dans la région des sources et des plus hautes fréquences, aux échelles de l'ordre des plus grandes longueurs d'ondes présentes dans le rayonnement acoustique. Contrairement à un problème purement aérodynamique, il est souvent nécessaire en aéroacoustique d'étudier un domaine spatial bien plus étendu que la seule région de l'écoulement. Ces deux contraintes simultanées obligent à utiliser des schémas numériques qui conservent une précision importante avec un maximum de 6 à 7 points par longueur d'onde.

En plus de ces différences dans les échelles de longueurs, il existe des grandes variations sur les grandeurs comme les vitesses rencontrées ou les pressions. Typiquement, le rayonnement d'un écoulement subsonique oblige à prendre en compte des fluctuations de vitesses inférieures au mm/s pour les vitesses acoustiques mais dont la propagation se fait à quelques centaines de m/s et des vitesses de quelques dizaines de m/s pour les fluctuations aérodynamiques. Ainsi, en dehors de la vitesse de propagation, les fluctuations acoustiques sont couramment de l'ordre de 10^4 à 10^5 fois plus faibles que les fluctuations aérodynamiques. En utilisant des méthodes numériques dédiées à la CFD, il serait possible de rencontrer des erreurs numériques du même ordre que les grandeurs acoustiques.

1.1 Classification générale

Il existe plusieurs façons d'envisager numériquement le problème de la prédiction aéroacoustique. D'après Lighthill [77] (cité dans [27]), on peut diviser les stratégies de simulation en CAA en trois grandes catégories :

1. Une première stratégie consiste à calculer l'écoulement en champ proche sans tenir compte de l'acoustique. Cette première étape sert à déterminer les sources qui permettront ensuite de déterminer le champ acoustique à l'aide d'une analogie aéroacoustique.
2. Dans la seconde stratégie, les champs dynamique et acoustique sont calculés uniquement dans une petite région englobant l'écoulement. Les grandeurs obtenues aux frontières sont ensuite utilisées pour fournir, avec une équation d'ondes, le champ acoustique lointain.
3. La dernière méthode consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes pour déterminer l'écoulement avec sa composante acoustique dans l'ensemble du domaine d'étude.

Les stratégies 1 et 2 conduisent aux méthodes dites "hybrides" alors que le point 3 concerne les méthodes de calcul direct. Parmi les méthodes hybrides, la catégorie 1 regroupe les analogies aéroacoustiques et la 2 concerne les méthodes de propagation en champ lointain. Chacune de ces façons de procéder a ses propres avantages et ses limitations, et aucune d'entre elles n'apporte de solution idéale pour l'ensemble des problèmes soulevés par l'aéroacoustique. Ainsi, elles ont profité de développements dépendant des possibilités techniques, des besoins industriels, ou de la progression des connaissances scientifiques connexes.

1.2 Les méthodes hybrides

1.2.1 Les analogie aéroacoustiques

L'analogie de Lighthill

L'analogie de Lighthill [75] est à l'origine du développement de l'aéroacoustique dans la seconde moitié du vingtième siècle. Le principe de cette analogie est de reformuler les équations de Navier-Stokes de façon à faire apparaître une équation de propagation dans un milieu homogène au repos où la célérité du son est c_∞. Lighthill manipule les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \tag{1.2}$$

En éliminant les termes en ρu_i, il obtient

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_\infty^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{1.3}$$

où

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + (p - c_\infty^2 \rho)\delta_{ij} - \tau_{ij} \tag{1.4}$$

est le tenseur de Lighthill.
Le tenseur de Lighthill représente les sources acoustiques. Le terme $\rho u_i u_j$ représente la production de bruit par les fluctuations de vitesses turbulentes. Le second terme $(p - c_\infty^2 \rho)\delta_{ij}$, généralement appelé source d'origine entropique, traduit la génération de bruit par des fluctuations de températures ou des sources de chaleur. Le terme τ_{ij} prend en compte le bruit lié aux dissipations visqueuses.

Dans la plupart des cas, l'analogie de Lighthill ne permet pas de rendre compte correctement de l'influence d'un écoulement sur la propagation d'une onde. Pour y parvenir, il faudrait connaître précisément le tenseur de Lighthill, c'est-à-dire que celui-ci devrait être déterminé par un calcul compressible sur tout le domaine contenant des interactions acoustique/écoulement [20]. Ceci limite beaucoup l'intérêt de cette analogie. De plus, en supposant que ces conditions soient réalisées, l'analogie de Lighthill ne permet pas de dissocier ce qui relève de la génération du bruit par l'écoulement, et ce qui relève de la modification de son rayonnement.

L'équation de Phillips

Pour inclure la possibilité que le milieu de propagation soit en mouvement, Phillips (1960) [92] a formulé une analogie en introduisant la variable $\pi = \ln(p/p_0)$ (où p est la pression). Il obtient

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2 \frac{\partial \pi}{\partial x_i}\right) = \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c_v}\frac{ds}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right) \tag{1.5}$$

où $\frac{d}{dt}$ est l'opérateur différentiel de dérivation en suivant le mouvement

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{1.6}$$

En comparaison à l'analogie de Lighthill, le membre de gauche traduit la propagation dans un milieu en mouvement dans lequel la célérité du son peut être variable. La formulation des sources (membre de droite) est différente de celle de Lighthill mais conduit à une décomposition similaire en bruit d'origine turbulente, entropique et visqueuse.
En négligeant la dissipation visqueuse et la conduction thermique, le terme entropique ds/dt s'annule et l'équation de Phillips se réduit à

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2 \frac{\partial \pi}{\partial x_i}\right) = \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \tag{1.7}$$

On peut alors introduire une décomposition en écoulement moyen et turbulent $u_i = U(x_2)\delta_{1i} + u_i'$, et $\pi = \pi_0 + \pi'$ où la pression moyenne π_0 est supposée uniforme. La linéarisation de l'équation de Phillips conduit à

$$\frac{D^2\pi'}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(c_0^2 \frac{\partial \pi'}{\partial x_i}\right) = 2\gamma \frac{\partial u_2'}{\partial x_1}\frac{\partial U}{\partial x_2} + \left\{\gamma \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} - \overline{\gamma \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}\right\} \tag{1.8}$$

où D/Dt est l'opérateur de dérivation en suivant l'écoulement moyen. Le membre de droite fait apparaître des sources provenant d'interactions entre l'écoulement moyen et la turbulence appelé bruit de cisaillement, et un terme ne contenant que les fluctuations de vitesse turbulente appelé bruit propre.
Néanmoins, l'opérateur de propagation obtenu dans le membre de gauche ne contient pas la réfraction des ondes par l'écoulement moyen [78].

L'équation de Lilley

L'équation de Lilley (1972) est la première équation de propagation à traduire tous les effets de l'écoulement sur la propagation dans l'opérateur (et non partiellement dans le terme source). Cette équation est obtenue en différenciant une fois les deux membres de l'équation de Phillips (1.5) :

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{d^2\pi}{dt^2}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2\frac{\partial\pi}{\partial x_i}\right)\right\}+2\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2\frac{\partial\pi}{\partial x_j}\right)=-2\gamma\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$
$$+2\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_i}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{c_v}\frac{ds}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}\right)\right\} \tag{1.9}$$

L'opérateur de propagation de l'équation de Lilley décrit les fluctuations de pression acoustique mais aussi celles liées aux instabilités de natures aérodynamiques.
Cette équation fournit des éléments qui ne sont pas accessibles à partir de l'analogie de Lighthill. La contrepartie est une difficulté de résolution beaucoup plus grande [55] (équation d'ordre trois non linéaire) conduisant le plus souvent à procéder à diverses simplifications avant d'entreprendre sa résolution. Pour exemple, dans [27], les auteurs ont linéarisé le membre de gauche et transféré tous les termes non-linéaires vers les sources.

Autres analogies

D'autres analogies ont été développées par le passé. Parmi ces travaux, nous pouvons citer ceux de Curle [31], et Ffowcs Williams & Hawkings [39] permettant la prise en compte de parois solides. Powell [93] et Howe [62] ont développé des formulations destinées à exprimer la nature des termes sources à partir de la vorticité.

Les Equations d'Euler Linéarisées

Dans les analogies de Lighthill et Phillips, l'identification des interactions entre acoustique et écoulement est ambiguë. Dans l'équation de Lilley, ces interactions sont clairement associées à la génération ou à la propagation, mais la difficulté de résolution de cette équation oblige à introduire des hypothèses sur l'écoulement (généralement supposé unidirectionnel cisaillé).
Les EEL (pour Equations d'Euler Linéarisées) présentent une autre alternative dans ce type d'approche. En effet, elles permettent une distinction claire entre la propagation et la génération du son, et toutes les interactions linéaires entre l'écoulement et l'acoustique sont prises en compte.

Leur forme (système différentiel d'ordre un) les rend faciles à résoudre, même pour des situations d'écoulements et de géométries quelconques.
Puisque c'est l'approche que nous avons suivi, nous reviendrons un peu plus en détail sur l'utilisation des EEL dans une partie spécifique.

1.2.2 Les méthodes de propagation

La méthode de Kirchhoff

A partir de la connaissance d'une grandeur acoustique ϕ sur une surface fermée (Σ) englobant toutes les sources et tous les effets non-linéaires, la méthode de Kirchhoff permet d'étendre le champ acoustique à tout le milieu dans lequel la propagation vérifie l'équation d'onde linéaire homogène.
La formule de Kirchhoff pour une surface (Σ) fixe dans un milieu au repos s'écrit

$$\phi(\overrightarrow{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\left[\frac{\phi}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{1}{c_\infty r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right]_{\tau'} \mathrm{d}\sigma \tag{1.10}$$

Les notations de l'équation (1.10) sont explicitées sur la figure (1.1).

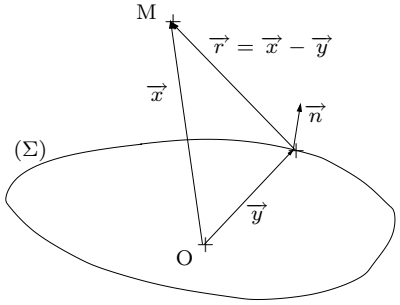


Fig. 1.1: Représentation de la surface de Kirchhoff et des paramètres

Dans (1.10), $[.]_{\tau'}$ signifie que les variables sont évaluées à l'instant $\tau' = t - r/c_\infty$.
Généralement, cette méthode est la deuxième étape d'une méthode hybride et s'appuie sur la détermination de tout le champ aérodynamique à l'intérieur de (Σ) par une simulation compressible.
A la différence des analogies décrites précédemment, qui intègrent les données sur tout le volume source, on se ramène ici à l'intégration sur une surface englobant toutes les sources et non-linéarités. En contrepartie, dans certains cas, les analogies permettent l'accès au champ acoustique à partir d'un calcul CFD incompressible alors que la méthode de Kirchhoff nécessite la connaissance précise d'une grandeur acoustique sur (Σ). De plus, la dissociation des origines du bruit (les différentes composantes des sources pour les analogies) n'est pas accessible dans cette approche, la rendant moins attractive du point de vue de l'analyse des mécanismes de génération.

Pour beaucoup d'écoulements, le choix de la surface de contrôle est problématique dans la partie aval, où il est difficile de fermer (Σ) sans tronquer le domaine non-linéaire. Des

adaptations ont été développées pour pallier cette difficulté, et pour étendre ses applications au cas de la propagation au sein d'un milieu en écoulement uniforme.

Cette méthode a récemment été appliquée à un jet libre à haut nombre de Reynolds [113] et au bruit de cavité [50]. Dans ces deux études, la région des sources a été déterminée par simulation des grandes échelles.

L'équation des ondes convectées et les EEL

Tout comme pour les techniques basées sur le principe de Kirchhoff, l'idée de prolonger le champ de la région des sources - qui nécessite une résolution compressible des équations de Navier-Stokes sur une région d'étendue limitée - a conduit à proposer des modèles plus simples décrivant seulement la propagation dans la région située au-delà de la zone de production sonore. Ces méthodes ont été proposées par Freund *et al.* [47].
Pour la région de propagation, il est possible de choisir l'équation des ondes convectées

$$\frac{D^2p}{Dt^2} - c_\infty^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \tag{1.11}$$

où

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.12}$$

ou bien les équations d'Euler linéarisées.
Dans les deux cas, le couplage entre la région de l'écoulement (dans laquelle sont résolues les équations de Navier-Stokes compressibles) et la région acoustique est réalisé par un chevauchement des deux domaines. La figure (1.2) représente cette superposition.
L'interface joue le rôle de zone d'entrée du calcul de propagation. Les fluctuations calculées par les équations de Navier-Stokes dans cette zone servent de données au modèle de propagation. En outre, cette région remplace la condition limite nécessaire aux équations de Navier-Stokes à cette frontière : les grandeurs du calcul CWE (pour Convective Wave Equation) ou EEL sont déterminées à partir des variables des équations de Navier-Stokes, et les variables de la région source sont calculées à partir de celles des CWE ou des EEL. Ce point implique une différence importante entre l'utilisation de l'équation des ondes convectées et les EEL. En effet, à l'interface, les variables des équations de Navier-Stokes et des EEL sont identiques. Le transfert d'un système à l'autre est donc immédiat. Par contre, l'équation des ondes convectées ne traite que la pression. L'évolution de la densité est donc obtenue à partir de la pression par la condition d'isentropie ($p' = c_\infty^2 \rho'$) et les vitesses sont déduites de la pression par un résultat analytique tiré de l'équation de quantité de mouvement des EEL : l'avancement temporel des vitesses à l'interface est obtenu par les gradients de pression.

Les conditions aux limites identiques peuvent être utilisées avec les équations de Navier-Stokes et les équations d'Euler linéarisées alors qu'elles sont différentes pour l'équation

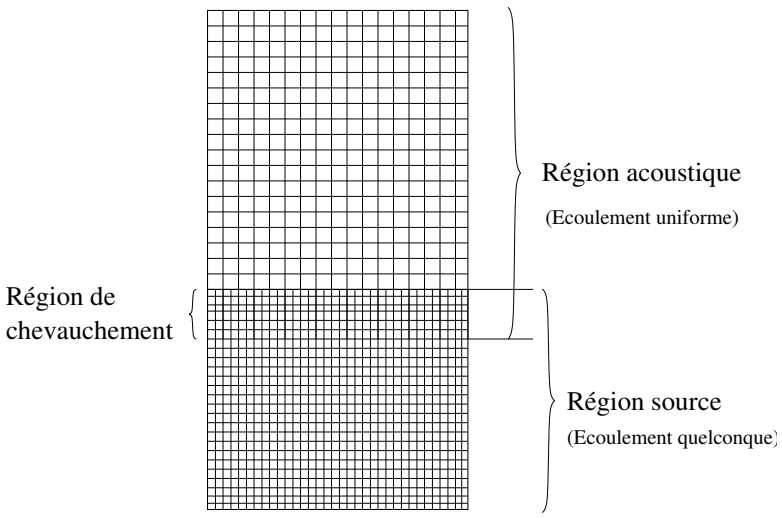


Fig. 1.2: Décomposition du domaine pour l'équation des ondes convectées ou les EEL.

des ondes convectées. Ceci peut entraîner l'apparition d'instabilités pour l'utilisation de cette dernière [47]. Finalement, le seul avantage (mais d'importance) de l'équation des ondes convectées sur les équations d'Euler linéarisées est son coût de calcul plus faible.

1.3 Le calcul direct

Du point de vue du principe, il semble difficile d'imaginer plus simple que la simulation numérique directe (appelée DNS pour Direct Numerical Simulation). En effet, en DNS, le principe est de résoudre intégralement les équations de Navier-Stokes sans avoir recours à quelque modèle que ce soit.
Dans ce type de méthode, puisqu'aucun modèle n'est utilisé, tous les phénomènes physiques présents dans l'écoulement doivent être calculés précisément. Ce point est à la fois le principal avantage de la DNS et son défaut majeur. C'est son principal avantage car un calcul de DNS n'est entaché d'aucune approximation et sa validité n'est limitée par aucune modélisation. Offrant les possibilités fournies par la simulation numérique, ce type de calcul donne alors un accès précieux à toute grandeur physique en tout point de l'espace et à chaque instant avec une précision remarquable. En contrepartie, pour respecter le principe de base cité ci-dessus, il est nécessaire d'adopter une discrétisation suffisamment fine pour représenter les plus petites échelles (typiquement l'échelle de dissipation de Kolmogorov) et suffisamment étendue pour contenir les plus grandes échelles (liées à la géométrie globale du problème). La gamme de ces échelles est alors à relier directement au nombre de degrés de liberté nécessaires pour représenter correctement la turbulence. Une analyse détaillée de ce problème [74] conduit à un maillage contenant un nombre de points de l'ordre de $Re_L^{9/4}$ en turbulence tridimensionnelle et Re_L en turbulence bidimensionnelle (Re_L étant le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de longueur de la turbulence).

En réalité la résolution n'a pas à être strictement égale à l'échelle de longueur de Kolmogorov mais doit seulement être du même ordre de grandeur : Moin et Mahesh [86] citent plusieurs DNS (effectuées par méthodes spectrales) ayant obtenues un bon accord avec des résultats expérimentaux, et pour lesquelles l'échelle de longueur de Kolomogorov n'était pas résolue.
En tout état de cause, ces résultats ont été obtenus par des méthodes spectrales, et les mêmes résultats avec des schémas aux différences finies auraient nécessité des résolutions plus fines que celles des dits travaux (la résolution nécessaire dépendant d'ailleurs du type de schéma utilisé) [86].
Même dans le meilleur des cas, les coûts de calculs rendent la DNS inutilisable à des nombres de Reynolds de l'ordre de ceux rencontrés dans les écoulements réels. Néanmoins, si on ne s'obstine pas à vouloir faire de la DNS un outil pour l'ingénieur, on peux voir en elle un intéressant outil de recherche. Nous passerons rapidement sur le fait que dans certains cas, il n'est pas indispensable de réaliser une simulation à un nombre de Reynolds élevé pour que celle-ci soit comparable à un écoulement se produisant effectivement à ce nombre de Reynolds [86]. Le propos de ce mémoire relevant de l'aéroacoustique numérique, nous nous concentrerons dans la suite de cette partie sur l'utilisation de la DNS dans ce domaine, sans nous étendre d'avantage sur la DNS en général.

Comme nous l'avons fait remarquer dans le paragraphe précédent, la DNS peut fournir des résultats de référence pour la mise au point de modèles, au même titre qu'une expérience en laboratoire. C'est dans ce rôle qu'elle apparaît le plus souvent dans la littérature.

On peut citer l'article de Colonius *et al.* [27], où le bruit rayonné par les appariements tourbillonnaires au sein d'une couche de mélange est étudié par DNS et par l'analogie de Lilley. Une étude approfondie des différentes parties des termes sources y est réalisée. Dans cette étude, la simulation directe sert à la fois de donnée d'entrée pour le calcul des sources (dans la région de l'écoulement) et de résultat de référence (dans la région de propagation) pour valider l'analogie.

Mitchell *et al.* [85] étudient le bruit d'appariement dans un jet axisymétrique. Il comparent les résultats fournis par l'analogie de Lighthill et par la méthode de Kirchhoff aux résultats du calcul direct. Pour l'analogie de Lighthill, la lente décroissance des sources en aval oblige à modéliser ces sources dans une région proche de la fin du domaine. La comparaison au calcul direct leur permet une analyse quantitative de cette méthode, montrant notamment ses limites pour les plus hautes fréquences. Pour la méthode de Kirchhoff, la confrontation à la DNS permet aux auteurs de faire un choix raisonné de la position de la surface de contrôle.
Ces mêmes auteurs ont étudié, sur le même principe, le rayonnement d'ondes de Mach d'un jet supersonique axisymétrique [84]. Dans cette étude, l'analogie de Lighthill et la méthode de Kirchhoff sont comparées au calcul direct. La méthode de Tam et Burton [109, 110] basée sur une analyse de stabilité linéaire reliant les ondes d'instabilités de la couche cisaillée au rayonnement acoustique lointain est aussi comparée au calcul direct.

La même démarche a été appliquée très récemment au cas d'un jet subsonique par Jiang

et al. [67]. L'objet de l'étude était de valider la méthode de résolution de l'équation de Lilley dans le domaine temporel utilisé.

Puisque l'inconvénient majeur du calcul direct est son coût élevé, certains auteurs ont entrepris de réduire celui-ci en diminuant la taille du domaine de simulation. Des conditions de périodicité dans une ou plusieurs directions de l'espace permettent par exemple cette réduction de domaine. Ce type de technique a été utilisé pour la première fois à des fins aéroacoustiques par Lele & Ho [73] pour l'analyse du bruit rayonné par une couche de mélange temporelle. Des comparaisons avec l'analogie de Lighthill, dont la résolution est simplifiée par le jeu des périodicités, ont montré un très bon accord.
Avec le même type de configuration, Whitmire et Sarkar [115] et Sarkar et Hussaini [98] valident l'utilisation de l'analogie de Lighthill pour un écoulement de turbulence développée. Ils obtiennent de même un bon accord entre le calcul direct et l'analogie. Le soin à apporter au forçage de la turbulence est en outre souligné dans [115]. Celui-ci est alors appliqué uniquement sur une partie incompressible de la vitesse, pour ne pas introduire de sources acoustiques artificielles.

Fortuné *et al.* [41–44] utilisent un domaine périodique pour étudier le bruit de couches de mélange anisotherme en développement temporel. L'analogie de Lighthill y est appliquée à partir des données aérodynamiques obtenues par DNS compressible. Des comparaisons entre les contributions des termes sources aérodynamiques et entropiques sont fournies. Il est montré que la prise en compte de ce second terme est nécessaire même pour des écarts de températures peu importants. L'inversion observée expérimentalement aux environs de Mach 0.7 entre le rayonnement de jets chauds et froid est aussi reproduite.

Réalisée dans un autre but que celui de validation d'une analogie, Freund [46] effectue une simulation compressible directe d'un jet à Mach 0.9 et à Reynolds 3600, configuration pour laquelle il dispose de données expérimentales. Il en tire les sources de l'analogie de Lighthill dans le domaine de Fourier. Ceci lui permet de distinguer les sources capables de rayonner en champ lointain parmi l'ensemble des sources. Il observe qu'elles sont localisées à la fin du cône potentiel. En tenant compte de leur contribution volumétrique, il montre que le rayonnement est dominé par les sources situées un peu avant la fin du cône potentiel à une distance de l'axe du jet correspondant au rayon de la buse.

Il existe deux types de situations un peu en marge du calcul direct en aéroacoustique. Il s'agit de la simulation DNS incompressible, qui ne peux pas être incluse dans le calcul direct du bruit puisqu'elle nécessite l'utilisation d'une analogie pour donner l'accès à l'acoustique, et de la LES (pour Large Eddy Simulation) compressible qui donne directement accès aux grandeurs acoustique mais sans résoudre directement les petites échelles.

Le premier cas a pourtant été utilisé en tant que référence par Seror *et al.* [99] pour évaluer l'effet du filtrage des petites échelles par la LES lors d'un calcul hybride unissant une simulation LES à l'analogie de Lighthill. Le cas de la turbulence isotrope a été choisi comme première étape d'une étude plus complète. A cet effet, les auteurs déterminent le tenseur de Lighthill filtré tel qu'il devrait être estimé en LES, et tel qu'il est accessible. La

prise en compte des deux formulations, accessibles en DNS et DNS filtrée rend possible l'estimation de l'erreur induite par la méthode hybride. Ils réalisent aussi une comparaison des prédictions issues d'une vrai simulation LES (par opposition à une DNS filtrée) et montrent qu'une correction du tenseur de Lighthill adaptée au filtrage permet d'améliorer la prédiction acoustique.

La LES quant à elle peut être classée parmi les méthodes directes puisqu'elle permet l'accès aux fluctuations acoustiques sans utilisation de modèle acoustique. Seule une partie de la turbulence, correspondant aux plus petites échelles, y est modélisée. Partant du constat que le bruit des écoulements est dominé par les grosses structures et que le spectre associé aux plus petites échelles est large bande et beaucoup plus faible, il paraît possible d'utiliser la simulation des grandes échelles pour l'aéroacoustique.

Dès 1994, Mankbadi *et al.* réalisent une simulation des grandes échelles pour un jet supersonique à haut nombre de Reynolds (1.27×10^6) et à $M = 1.5$. Ils utilisent deux types de forçage : un champ de perturbation aléatoire montre la nature ondulatoire des grosses structures, et un forçage harmonique qui montre que la formation des grosses structures est alors favorisée. Les résultats prouvent la faisabilité théorique du calcul acoustique à partir de la LES. Cependant, les moyens de calculs ne permettent pas encore l'accès direct au champ lointain. Les auteurs réalisent alors une prédiction basée sur l'analogie de Lighthill qui conduit à des résultats en accord qualitatif avec les tendances connues pour cette configuration. Les auteurs soulignent la difficulté liée à la très lente décroissance de l'intensité des sources acoustiques de l'analogie de Lighthill dans l'axe du jet.

Bogey *et al.* [15, 18] réalisent une simulation des grandes échelles pour un jet circulaire tridimensionnel à $M = 0.9$ et $Re = 65000$ qu'ils valident par comparaisons à des données expérimentales. Les spectres acoustiques à 30° et 90° confirment l'interprétation selon laquelle le bruit émis dans une direction proche de l'axe du jet est dominé par les grosses structures alors que pour des angles élevés, les petites échelles turbulentes participent d'avantage. Le maximum du niveau acoustique obtenu se situe aux alentours de 30°. De plus, les diagrammes de directivité obtenus numériquement et à partir des données expérimentales pour des nombres de Reynolds allant de 3600 à 5.4×10^5 montrent un comportement comparable suggérant une faible dépendance au nombre de Reynolds du rayonnement des grosses structures.

En 2004, Uzun *et al.* [113] ont accompli une simulation des grandes échelles pour un jet rond tridimensionnel dans la même configuration que Bogey *et al.* [16, 17] à très haut nombre de Reynolds ($Re = 4 \times 10^5$) et à $M = 0.9$. Ils ont ainsi obtenu un calcul fournissant à la fois le champ aérodynamique proche et le champ acoustique lointain. Cependant, le principal objectif des auteurs est d'étudier les méthodes hybrides axées sur les équations de Ffowcs-Williams - Hawkings, Kirchhoff et Lighthill. D'après les auteurs, leurs résultats sont valables jusqu'à une fréquence de coupure plus élevées que toutes les simulations réalisées jusqu'alors. Cette configuration fournit l'exemple pratique des performances accessibles en terme de nombre de Reynolds avec les performances des calculateurs actuels. Un exemple du champ de dilatation qu'ils obtiennent est présenté

sur la figure (1.3).

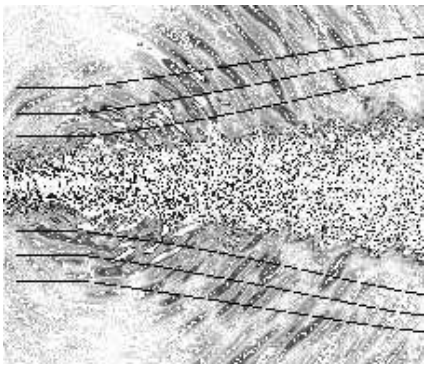


Fig. 1.3: Champ de dilatation pour un jet obtenu par LES à $M = 0.9$ et $Re = 4 \times 10^5$ [113].

1.4 Les Equations d'Euler Linéarisées

Les Equations d'Euler Linéarisées connaissent depuis quelques années un succès grandissant. Les méthodes hybrides ont montré leurs qualités et en leur sein, celles basées sur la résolution des EEL représentent désormais une voie très utilisée. Tenant compte des qualités qu'elles proposent, et qui ont été évoquées plus haut, elles ont fait l'objet d'une grande quantité de travaux depuis une dizaine d'années. On peut classer ces travaux en deux grandes catégories.
La première catégorie englobe des études traitant de méthodes numériques de résolution des EEL. Au sein de cette problématique on peut considérer d'une part le développement de schémas numériques, et d'autre part le traitement des conditions aux limites. Ces deux problèmes étant intimement liés, ils sont régulièrement abordés conjointement. Il faut noter ici que dans certains cas, ces thèmes sont abordés pour les EEL en même temps que dans un cadre plus global de la CAA.
Le deuxième problème traité est celui du couplage des EEL avec des méthodes CFD, la définition des sources étant un élément déterminant de cet aspect.
Enfin, à partir du moment où les outils de résolution ont commencé à devenir suffisamment efficaces, fiables et maîtrisés, les EEL ont pu être utilisées comme un instrument d'étude destiné à enrichir la compréhension des mécanismes aéroacoustiques.

1.4.1 Le développement des schémas et conditions aux limites

Un des éléments clés de la CAA est le développement et l'utilisation de schémas numériques précis d'ordres élevés présentant de faibles erreurs de dispersion et de dissipation. Ces caractéristiques sont requises en DNS, en LES mais aussi pour la résolution des EEL. De fait, le développement de tels schémas a été réalisé en appui (suivant les cas) sur une ou plusieurs de ces approches.

Dans leur article [106], présentant le schéma DRP, Tam et Webb utilisent les équations d'Euler et d'Euler linéarisées comme support de développement théorique et comme exemple d'application.

Dans [59] et [3], Hixon puis Ashcroft et Zhang optimisent les schémas compacts de manière à réduire leur domaine de dépendance et simplifier la mise en œuvre de conditions aux limites. Ils testent leur schéma en appliquant les EEL au cas de la diffraction d'une onde par un cylindre, issu du programme d'évaluation des performances en CAA [105].

Djambazov *et al.* [34] utilisent le même cas test pour analyser leur méthode de discrétisation des EEL par une méthode de volumes finis. Le développement de leur schéma, moins précis qu'une méthode aux différences finies d'ordre élevé est justifié par le gain apporté au traitement de géométries complexes.

Hu *et al.* [66], proposent une optimisation des schémas de Runge-Kutta de manière à réduire la dissipation et la dispersion numérique. Afin de tirer profit de cette optimisation, ils insistent sur la nécessité de porter une attention particulière à la mise en œuvre des conditions aux limites, et traitent des exemples de frontières ouvertes et de parois rigides à partir de la résolution des EEL.

Deux types de conditions aux limites sont couramment rencontrées en CAA : les frontières ouvertes destinées à traduire une situation de champ libre, et les frontières destinées à simuler la présence d'une paroi solide. Le premier type fait l'objet depuis les débuts de l'aéroacoustique numérique d'un nombre très important de travaux. Les problèmes en espace ouvert auxquels nous nous intéressons dans ce travail nous ont conduit à utiliser ce type de frontières. Leur traitement est donc présenté un peu plus loin dans ce mémoire (Cf. §3.2). En revanche, nous n'utilisons pas de conditions de paroi. Voici donc quelques exemples de réalisations traitant de cette problématique.

Afin de conserver les avantages offerts par l'utilisation de schémas aux différences finies d'ordres élevés sur maillage cartésiens, Kurbatskii et Tam [69] ont développé une méthode basée sur l'utilisation de points fantômes permettant de simuler la présence d'une paroi incurvée. Ils résolvent les EEL sur différents cas tests et obtiennent des résultats concluants en termes d'efficacité et de précision. Ils soulèvent ainsi le problème du choix entre utiliser un maillage cartésien avec des schémas aux différences finies d'ordres élevés ou des maillages curvilignes (ou non-structurés) avec des méthodes de type volumes finis ou éléments finis dans les cas de géométries complexes.

D'autres auteurs envisagent le problème de l'introduction de géométrie complexe par l'adaptation du maillage à la configuration géométrique des cas traités. Par exemple, Redonnet [95], réalise une transformation entre un maillage cartésien sur lequel sont appliqués des schémas aux différences finies optimisés pour l'aéroacoustique et un maillage adapté à la géométrie par l'intermédiaire de métriques. Ces transformations sont validées sur des cas de références par l'utilisation des équations d'Euler (linéarisées ou non suivant les cas traités).

1.4.2 Le couplage CFD/EEL

Les travaux cités dans la section précédente visent à améliorer les techniques numériques propres aux besoins des calculs de propagation. La génération des bruits est un autre volet majeur d'une chaîne de calcul aéroacoustique reposant sur une méthode hybride. Cet élément du problème global ne pouvant être exploré qu'à partir du moment où l'aspect propagation est maîtrisé, il est apparu dans la littérature un peu plus récemment. La définition correcte des sources à inclure dans les EEL est conditionnée par le type de méthode CFD utilisée et du type de formulation des équations d'Euler linéarisées.

Pour prédire le bruit des écoulements turbulents, le cadre proposé par les méthodes hybrides a naturellement incité les auteurs à profiter de l'expérience acquise en CFD. Le modèle SNGR (pour Stochastic Noise Generation and Radiation) [4, 8] consiste à réaliser une chaîne de calcul dont l'écoulement moyen turbulent est modélisé par une méthode RANS (pour Reynolds Averaged Navier-Stokes). Ce type de résolution ne pouvant fournir qu'un champ stationnaire, l'étape suivante est la reconstruction de sources instationnaires à partir d'un modèle stochastique de turbulence. Les propriétés statistiques des sources construites sont donc conformes à celles de l'écoulement simulé. Elles sont finalement introduites dans les équations d'Euler linéarisées. Béchara *et al.* [8] et Bailly [4] appliquent le modèle SNGR au cas d'un jet libre. La comparaison avec des résultats expérimentaux montrent une bonne capacité prédictive du modèle. Les auteurs notent cependant les insuffisances inhérentes à cette démarche, notamment l'impossibilité de rendre compte de l'amplification convective de sources entraînées à des vitesses élevées.

Les insuffisances de la méthode précédente découlent de l'utilisation de données stationnaires pour alimenter un calcul acoustique (par nature instationnaire). Les progrès réalisés en DNS et LES ouvrent maintenant la porte à l'estimation des sources instationnaires directement issues du calcul CFD. C'est l'approche exploitée dans ce mémoire. Nous aurons donc l'occasion d'y revenir très longuement. Citons tout de même ici l'article de Bailly *et al.* [5] définissant les termes sources issus d'une simulation aéroacoustique directe.

Le code utilisé dans [5] résout les EEL formulées en variables primitives. Billson *et al.* [12] définissent une formulation similaire adaptée à une formulation conservative des EEL. Ils comparent leurs résultats à ceux d'un calcul direct et obtiennent un bon accord.

A la manière du modèle SNGR, Bauer [7] réalise un couplage RANS/EEL afin d'étudier le bruit de bord de fuite. A la différence du modèle SNGR, la turbulence synthétique introduite comme source dans les EEL n'est pas destinée directement à exciter le mode acoustique. Dans ce modèle, le bruit est produit par les interactions entre le mode de vorticité créé par les sources synthétiques et le bord de fuite. Les premiers résultats montrent une directivité en accord avec ceux de [63].

1.4.3 Applications des EEL à des écoulements particuliers

L'étude des jets a été un des principaux moteurs dans le développement de l'aéroacoustique. Il est donc peu surprenant de retrouver ce thème dans les recherches utilisant les équations d'Euler linéarisées. La première application du modèle SNGR a été l'étude d'un jet libre turbulent à $125m/s$ et $300m/s$ [8].

Plus récemment, les EEL couplées à un calcul de type RANS ont été utilisées pour le cas du bruit de cavité par Blom *et al.* [13]. La construction des sources est réalisée dans ce cas par une méthode proche du modèle SNGR.

Les équations d'Euler linéarisées ont aussi été utilisées pour des écoulements internes. Longatte *et al.* [79, 80] ont se sont servi du modèle SNGR pour prédire le bruit provoqué par un diaphragme au sein d'un écoulement en conduite.

Chapitre 2

L'approximation d'écoulement à faible nombre de Mach

2.1 Le modèle physique

L'approximation d'écoulement à faible nombre de Mach choisie et mise en œuvre dans ce travail est un modèle développé dans [81] dans le cadre de la simulation numérique d'écoulements réactifs.
Ce modèle est basé sur un développement asymptotique des équations de Navier-Stokes compressibles.
L'objet de ce chapitre est la présentation des hypothèses liées à l'approximation considérée ainsi que des développements mathématiques conduisant à la formulation utilisée par la suite.

2.1.1 Modèle compressible

Nous nous intéressons dans cette étude au bruit rayonné par des écoulements turbulents de fluides newtoniens décrits par les équations de Navier-Stokes compressibles. Plus particulièrement, nous nous limiterons au champ des écoulements de gaz parfait sans source de chaleur. Dans ces conditions les équations de Navier-Stokes adimensionnelles en coordonnées cartésiennes $x_i = (x, y, z)$ peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (p+E) u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{Re}\frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{M^2 Re Pr(\gamma-1)}\frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \tag{2.3}$$

$$p = \frac{\rho T}{\gamma M^2} \tag{2.4}$$

où $u_i = (u, v, w)$ sont les composantes de vitesses, p, ρ, T sont respectivement la pression, la masse volumique et la température. L'énergie totale par unité de volume E, et le tenseur

des contraintes visqueuses τ s'écrivent respectivement

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho u_i u_i \tag{2.5}$$

et

$$\tau_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \tag{2.6}$$

Ces équations sont adimensionnées en utilisant les grandeurs dimensionnelles (repérées par l'exposant *) L^*_{ref}, U^*_{ref}, ρ^*_{ref}, T^*_{ref} et $t^*_{ref} = L^*_{ref}/U^*_{ref}$ comme références de longueur, vitesse, masse volumique, température et temps. La pression est adimensionnée par $p^*_{ref} = \rho^*_{ref} {U^*_{ref}}^2$. $\gamma = c^*_p/c^*_v$ est le rapport des chaleur spécifique à pression et volume constants, et la constante des gaz parfaits est $r^* = c^*_p - c^*_v$. Les trois paramètres adimensionnels de l'écoulement considéré sont le nombre de Reynolds $Re = \rho^*_{ref} U^*_{ref} L^*_{ref}/\mu^*$, le nombre de Prandtl $Pr = \mu^* c^*_p/k^*$ et le nombre de Mach $M = U^*_{ref}/\sqrt{\gamma r^* T^*_{ref}}$ où μ^* et k^* sont respectivement la viscosité cinématique et la conductivité thermique du fluide.
Ces équations décrivent complètement le problème que nous nous posons. Cependant, malgrès les progrès récents en ce qui concerne les moyens de calcul, leur résolution directe (c'est-à-dire sans avoir recours à des hypothèses simplificatrices où modèles complémentaires) reste inaccessible dans la plupart des configurations. Dans le domaine de la recherche, on fait tout de même parfois l'effort de résoudre ces équations par le biais de la DNS en vue d'établir des solutions de références pour la validation de modèles où de nouvelles méthodes. Dans cette optique, la résolution par DNS des équations (2.1 - 2.4) issue de [41] est utilisée dans certaines parties de ce mémoire pour différentes étapes de validations.

2.1.2 Développement de l'approximation

Comme nous l'avons vu précédemment, la résolution complète des équations de Navier-Stokes compressibles est très contraignante en termes de moyens de calculs. Ceci est bien sûr vrai pour les écoulements subsoniques, et peut même être considéré de plus en plus pénalisant à mesure que l'on descend dans l'échelle des nombres de Mach. En effet, pour les écoulements subsoniques, les contraintes de stabilité numériques (CFL) sur la valeur maximale du pas de temps utilisé sont imposées par la valeur de la vitesse du son au lieu d'une vitesse caractéristique de l'écoulement comme une vitesse de convection par exemple. Ce point peut être considéré comme le plus pénalisant pour des écoulements fortement subsoniques car le rapport entre la vitesse du son et les vitesses caractéristiques y est plus élevé limitant alors de façon importante l'efficacité du code.
Selon Charentenay *et al.* [32], dans le domaine des écoulements réactifs, des auteurs ont cherché à modifier l'acoustique puis à le filtrer complètement. Ces développements n'étant bien sûr valables que dans les cas où l'acoustique n'agit pas sur les phénomènes que l'on souhaite observer. Dans le cas des écoulements réactifs, cette limite concerne l'action de l'acoustique sur la dynamique de l'écoulement ainsi que sur les réactions chimiques en jeu. Dans notre cas, la seule limitation est celle concernant l'action éventuelle des phénomènes

acoustiques sur la dynamique de l'écoulement.

L'approximation utilisée dans ce travail est la même que celle de [29,81] dont la démarche présentée maintenant est extraite. L'idée de départ étant de filtrer les phénomènes acoustiques tout en conservant l'action des effets thermiques sur la dynamique de l'écoulement, on introduit le paramètre $\varepsilon = \gamma M^2$. L'approximation d'écoulement à faible nombre de Mach est ensuite obtenue en développant toutes les inconnues du problème en fonction de ce paramètre de la façon suivante :

$$\rho = \rho^{(0)} + \varepsilon\rho^{(1)} + \dots \tag{2.7}$$
$$u_i = u_i^{(0)} + \varepsilon u_i^{(1)} + \dots \tag{2.8}$$
$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \dots \tag{2.9}$$

Pour conserver la cohérence du développement, la pression est obtenue en utilisant la loi d'état (2.4) : $p = \frac{\rho^{(0)}T^{(0)}}{\varepsilon} + \rho^{(1)}T^{(0)} + \rho^{(0)}T^{(1)} + \dots$,
soit

$$p = \frac{p^{(0)}}{\varepsilon} + p^{(1)} + \dots \tag{2.10}$$

En introduisant ces expressions dans les équations complètes, et en ne conservant que l'ordre le plus bas en ε, on obtient

$$\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial\rho^{(0)}u_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0 \tag{2.11}$$
$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = 0, \forall i = 1,2,3 \tag{2.12}$$
$$\rho^{(0)}\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} = \frac{1}{RePrT^{(0)}}\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial x_j^2} \tag{2.13}$$
$$p^{(0)} = \rho^{(0)}T^{(0)} \tag{2.14}$$

L'équation (2.12) conduit directement à un champ de pression $p^{(0)}$ uniforme. $p^{(0)}$ peut donc être interprété [29,81] comme un champ de pression thermodynamique. Ce champ de pression peut être dépendant du temps (si l'on considère un milieu clos [89]) ou indépendant du temps si l'on considère un milieu ouvert. Nous nous limiterons par la suite à ce dernier cas.
Afin de fermer le système, nous utilisons le développement de l'équation de quantité de mouvement à l'ordre supérieur

$$\frac{\partial\rho^{(0)}u_i^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial\rho^{(0)}u_i^{(0)}u_j^{(0)}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\frac{\partial\tau_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} \tag{2.15}$$

Pour compléter l'interprétation des termes de pression, l'équation (2.15) nous conduit à interpréter $p^{(1)}$ comme une pression dynamique.
Ces considérations permettent d'établir un nouveau système d'équations régissant la dynamique de l'écoulement :

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0 \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)} u_j^{(0)}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\frac{\partial \tau_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} \tag{2.17}$$

$$\rho^{(0)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} = \frac{1}{RePrT^{(0)}} \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial x_j^2} \tag{2.18}$$

$$p^{(0)} = \rho^{(0)} T^{(0)} \tag{2.19}$$

dans lequel $p^{(0)}$ est une constante qui dépend des conditions à l'infini, les inconnues étant $\rho^{(0)}$, $u_i^{(0)}$, $T^{(0)}$ et $p^{(1)}$.
Compte tenu du développement en ε qui est à la base de ce modèle, ce dernier n'est bien sûr valable que pour des écoulements à petit nombre de Mach. Ce modèle rejoint en ce point le modèle d'écoulement incompressible classique.
Il est intéressant de noter que par cette approximation, l'équation de l'énergie ne contient plus de dérivation temporelle. Elle ne représente donc pas une équation d'évolution mais elle peut être vue comme une équation diagnostique, qui doit être vérifiée à tout instant. Toujours concernant l'équation de l'énergie, les termes de production de chaleur due aux dissipations visqueuses ne sont plus pris en compte.
Enfin, il est important de noter que ce modèle ne traduit pas la présence d'ondes acoustiques [81], et que dans le cas d'un écoulement initialement homogène en température, il revient exactement aux équations de Navier-stokes incompressibles habituelles. On peut parler, pour décrire rapidement les propriétés de ce modèle, d'approximation d'écoulement incompressible à masse volumique variable, dans le sens où les variations de masse volumiques dues aux variations de températures sont prises en compte, mais celles dues aux fluctuations de pression ne le sont pas.

2.2 Résolution numérique

2.2.1 Avancement global

En suivant la démarche proposée par [81], le problème décrit par les équations (2.16-2.19) peut être reformulé pour sa résolution numérique de la façon suivante

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} = F_\rho \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)}}{\partial t} = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + F_{u_i} \tag{2.21}$$

$$p^{(0)} = \rho^{(0)} T^{(0)} \tag{2.22}$$

où

$$F_\rho = -u_j^{(0)}\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial x_j} - \frac{1}{RePrT^{(0)}}\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial x_j^2} \tag{2.23}$$

$$F_{u_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{Re}\tau_{ij}^{(0)} - \rho^{(0)}u_i^{(0)}u_j^{(0)}\right) \tag{2.24}$$

Pour obtenir ces expressions, l'équation de conservation de la masse (2.16) est reformulée en utilisant directement l'équation de la conservation de l'énergie (2.18), qui rappelons-le, n'est pas ici une équation d'évolution.
Les équations (2.20) et (2.21) sont intégrées par un schéma de Runge-Kutta d'ordre trois à trois étapes dans lequel le traitement du terme de pression conduit à introduire une décomposition supplémentaire. La discrétisation temporelle est

$$\frac{\left(\rho^{(0)}\right)^{(k+1)} - \left(\rho^{(0)}\right)^{(k)}}{\Delta t} = \alpha_k F_\rho^{(k)} + \beta_k F_\rho^{(k-1)} \tag{2.25}$$

$$\frac{\left(\rho^{(0)}u_i^{(0)}\right)^{(k+1)} - \left(\rho^{(0)}u_i^{(0)}\right)^{(k)}}{\Delta t} = \alpha_k F_{u_i}^{(k)} + \beta_k F_{u_i}^{(k-1)} - \gamma_k\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} \tag{2.26}$$

où

$$\tilde{p} = \frac{1}{\gamma_k \Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} p^{(1)} dt \tag{2.27}$$

et α_k, β_k $(k = 1, 2, 3)$ sont les coefficients du schéma de Runge-Kutta et $\gamma_k = \alpha_k + \beta_k$. Le schéma ayant trois sous-pas de temps, on a $t_1 = t_n$ et $t_4 = t_{n+1}$ avec $\Delta_t = t_{n+1} - t_n$.

2.2.2 Equation de Poisson pour la pression

Au début d'un sous-pas de temps, c'est-à-dire à un instant t_k, $F_\rho^{(k)}$, $F_\rho^{(k-1)}$, $F_{u_i}^{(k)}$, $F_{u_i}^{(k-1)}$ sont obtenus par (2.23) et (2.24). Par contre, d'après sa définition (2.27), $\tilde{p}$ n'est pas connu. Il est donc nécessaire d'introduire un étape supplémentaire. Comme dans [29, 81], l'équation (2.26) est résolue par la méthode de projection [23] qui consiste à réaliser la décomposition par un champ intermédiaire noté avec un exposant $^{(\star)}$

$$\frac{\left(\rho^{(0)}u_i^{(0)}\right)^{(\star)} - \left(\rho^{(0)}u_i^{(0)}\right)^{(k)}}{\Delta t} = \alpha_k F_{u_i}^{(k)} + \beta_k F_{u_i}^{(k-1)} \tag{2.28}$$

$$\frac{\left(\rho^{(0)}u_i^{(0)}\right)^{(k+1)} - \left(\rho^{(0)}u_i^{(0)}\right)^{(\star)}}{\Delta t} = -\gamma_k\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} \tag{2.29}$$

En prenant la divergence de (2.29) et en utilisant (2.16), on obtient l'équation de Poisson pour la pression

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x_i \partial x_i} &= \frac{1}{\gamma_k \Delta t}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho^{(0)}u_i^{(0)}\right)^{(\star)} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho^{(0)}u_i^{(0)}\right)^{(k+1)}\right)\\ &= \frac{1}{\gamma_k \Delta t}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho^{(0)}u_i^{(0)}\right)^{(\star)} + \left(\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t}\right)^{(k+1)}\right)\end{aligned} \tag{2.30}$$

La première égalité correspond à l'équation de Poisson classiquement utilisée dans le cadre des équations incompressibles. La différence apparaît avec le terme de variation temporelle de masse volumique. Ce terme est une importante source d'instabilité, comme cela est souligné dans [29]. En effet, n'étant pas connu à l'instant du calcul où l'équation de Poisson doit être résolue, il doit être estimé à l'aide d'une approximation qui mérite une attention toute particulière.

2.2.3 Evaluation du terme de variation de masse volumique

Nous avons réalisé une série d'essais sur différentes approximations de $\left(\partial\rho^{(0)}/\partial t\right)^{(k+1)}$ et schémas d'intégration temporelle dans une configuration de couche de mélange temporelle. Les premiers essais, qui ont été menés à partir des recommandations de [29] sur la base du schéma d'Adams-Bashforth d'ordre trois et de l'approximation explicite d'ordre deux suivante,

$$\left(\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial t}\right)^{(k+1)} = \frac{3{\rho^{(0)}}^{(k+1)} - 4{\rho^{(0)}}^{(k)} + {\rho^{(0)}}^{(k-1)}}{2\Delta t} + o\left(\Delta t^2\right) \tag{2.31}$$

se sont avérés instables (contrairement aux observations des auteurs).
L'utilisation des approximations du premier ordre

$$\left(\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial t}\right)^{(k+1)} = \frac{{\rho^{(0)}}^{(k+1)} - {\rho^{(0)}}^{(k)}}{\Delta t} + o\left(\Delta t\right) \tag{2.32}$$

et

$$\left(\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial t}\right)^{(k+1)} = F_\rho^{(k)} + o\left(\Delta t\right) \tag{2.33}$$

a permis de stabiliser le calcul (on peut noter que dans le cas du schéma d'Adams-Bashforth d'ordre trois, la notion de sous-pas de temps n'existe pas, et les indices k représentent alors les indices correspondant aux pas de temps).
Ce schéma d'Euler nous a aussi permis de comparer l'utilisation des schémas d'Adams-Bashforth et de Runge-Kutta. C'est ce dernier qui s'est montré le plus performant en terme de rapidité de calcul et de précision, et dans toute la suite, les calculs ont été réalisés avec le schéma de Runge-Kutta d'ordre trois.
A ce stade de la discussion se pose la question de l'ordre global de l'intégration temporelle. Outre les problèmes de stabilité intrinsèques à la simulation aérodynamique, cette question revêt une importance toute particulière dans la mesure où nous avons comme objectif d'utiliser les résultats de nos calculs d'écoulements pour déterminer des sources acoustiques. Comme nous l'avons vu précédement, les grandeurs acoustiques sont de plusieurs ordres de grandeurs plus faibles que les fluctuations aérodynamiques. Des erreurs qui pourraient paraître négligeables au regard de la dynamique peuvent être gravement pénalisantes en ce qui concerne une prédiction acoustique.
Dans le cas présent, on peut s'attendre à ce que l'introduction de l'approximation (2.32) ou (2.33) du premier ordre fasse chuter l'ordre trois atteint grâce au schéma de Runge-Kutta. Cependant, d'après [89], le fait d'introduire une erreur de troncature d'ordre un à

chaque sous-pas de temps peut être compensé par un jeu d'annulation de l'erreur entre les sous-pas de temps pour obtenir une erreur d'ordre trois à la fin du pas de temps entier. Nous n'avons pas pu observer ce phénomène au cours de nos investigations et avons donc décidé d'augmenter l'ordre d'avancement global en changeant l'approximation utilisée pour la variation temporelle de masse volumique.
Afin de quantifier l'impact du choix de l'approximation du terme qui fait l'objet de cette partie, nous avons réalisé un cas test rapide sur la base de l'écoulement de couche de mélange temporelle, qui sera détaillé par la suite. Pour chacune des approximations utilisées, nous avons réalisé cinq calculs avec les pas de temps $dt = 10^{-3}$, 8. 10^{-3}, 16. 10^{-3}, 32. 10^{-3} et 64. 10^{-3}. En considérant le calcul à $dt = 10^{-3}$ comme solution de référence, nous avons calculé l'erreur commise par les autres calculs selon la norme L_2. Les résultats de ce test sont présentés sur la figure (2.1) pour l'erreur commise sur la composante u_x de la vitesse. Puisque les conclusions sont les mêmes pour toutes les autres grandeurs de l'écoulement, seuls les résultats concernant u_x sont présentés.
Bien que du deuxième ordre, l'approximation

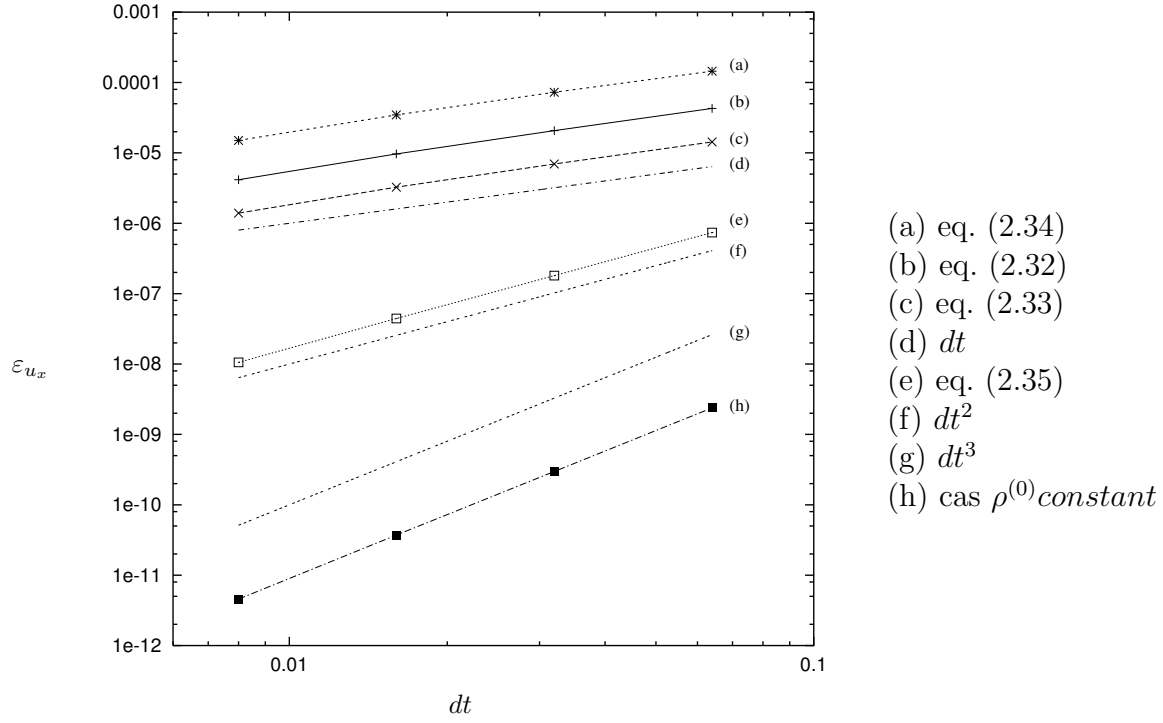


Fig. 2.1: Erreur selon la norme L_2 sur u_x en fonction du pas de temps dt pour différentes approximations de la dérivée temporelle de la masse volumique $\left(\partial\rho^{(0)}/\partial t\right)^{(k+1)}$

$$\left(\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial t}\right)^{(k+1)} = -F_\rho^{(k)} + \frac{{\rho^{(0)}}^{(k+1)} - {\rho^{(0)}}^{(k)}}{\frac{1}{2}\gamma_k \Delta t} + o\left(\Delta t^2\right) \tag{2.34}$$

ne permet pas d'obtenir un avancement global d'ordre supérieur à un. Le défaut de ce schéma - lorsqu'il est associé au schéma de Runge-Kutta - est qu'il fait appel à des

grandeurs connues à chaque sous-pas de temps. Or, pour le schéma de Runge-Kutta, rien ne garantit que ces grandeurs soient évaluées avec une précision déterminée. Seules les grandeurs calculées aux pas de temps complets sont assurées d'être obtenues avec une précision connue.
Partant de ce constat, le schéma

$$\left(\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t}\right)^{(k+1)} = \left(1 + \sum_{l=1}^{k} \gamma_k\right) F_\rho^{(n)} - \sum_{l=1}^{k} \gamma_k F_\rho^{(n-1)} + o\left(\Delta t^2\right) \tag{2.35}$$

qui a la propriété de ne faire appel qu'à des quantités connues aux pas de temps entiers permet d'obtenir un résultat d'ordre 2.
Pour résumer, la figure (2.1) montre clairement que tous les schémas faisant appel à des quantités évaluées aux sous-pas de temps (courbes (a), (b) et (c)) ne permettent d'obtenir qu'un schéma global d'ordre un, et ceci indépendamment de l'ordre intrinsèque de l'approximation utilisée pour $\left(\partial\rho^{(0)}/\partial t\right)^{(k+1)}$. Le second ordre est obtenu avec une approximation d'ordre 2 (courbe (e)) faisant appel à des quantités correspondant aux pas de temps entiers. La courbe (h) permet de vérifier que dans le cas de l'écoulement isotherme, pour lequel le terme de variation de masse volumique disparaît, l'ordre trois du schéma de Runge-Kutta est retrouvé.
La contrepartie inhérente au choix de l'approximation (2.35), est l'augmentation du niveau de mémoire de 25% par rapport au schéma RK3 avec les approximations (2.32,2.33) pour les stockage de $(F_\rho)^{(n)}$ et $(F_\rho)^{(n-1)}$.
La méthode présentée ici semble d'un bon rapport entre la précision, la stabilité et la simplicité (plus précisément la simplicité avec laquelle on fait évoluer un code incompressible "classique" vers un code à masse volumique variable). Il faut noter qu'il serait possible de faire appel à d'autres techniques plus efficaces comme dans [88] qui utilise une méthode de type prédicteur/correcteur, ou dans [89] qui introduit une équation de Poisson à coefficients variables.

2.2.4 Résolution de l'équation de Poisson

Au cours de cette étude, nous utilisons deux types de configurations pour la simulation des écoulements : la configuration temporelle et la configuration spatiale. Les propriétés de périodicité ou de non-périodicité spatiales impliquent alors des différences quant à la résolution de l'équation de Poisson (2.30).

Simulation d'écoulement en développement temporel

Dans ce cas, l'utilisation de conditions aux limites exclusivement périodiques ou semi-périodiques (Cf. annexe A) nous permettent de résoudre (2.30) intégralement dans l'espace spectral [22, 71]. Le passage au domaine spectral se fait en développant chaque variable en série de Fourier discrète

$$f(x,y,z) = \sum_{l=-\frac{n_x}{2}}^{\frac{n_x}{2}-1} \sum_{m=-\frac{n_y}{2}}^{\frac{n_y}{2}-1} \sum_{n=-\frac{n_z}{2}}^{\frac{n_z}{2}-1} \hat{f}(k_x,k_y,k_z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \tag{2.36}$$

où (n_x, n_y, n_z) et (k_x, k_y, k_z) sont respectivement les nombres de nœuds et les nombres d'ondes dans les directions x, y et z définis par

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} l \quad ; \quad k_y = \frac{2\pi}{L_y} m \quad ; \quad k_z = \frac{2\pi}{L_z} n.$$

La dérivation dans l'espace physique devient alors tout naturellement une multiplication dans l'espace spectral

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial f}{\partial x}} &= ik_x \hat{f} \\ \widehat{\frac{\partial f}{\partial y}} &= ik_y \hat{f} \\ \widehat{\frac{\partial f}{\partial z}} &= ik_z \hat{f}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Dans le cas d'une dérivation réalisée dans l'espace physique à l'aide des schémas compacts, on a en réalité

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial f}{\partial x}} &= ik_x' \hat{f} \\ \widehat{\frac{\partial f}{\partial y}} &= ik_y' \hat{f} \\ \widehat{\frac{\partial f}{\partial z}} &= ik_z' \hat{f} \end{aligned} \tag{2.38}$$

où k_x', k_y' et k_z' sont les nombres d'ondes modifiés introduits dans [72]

$$\begin{aligned} k_x' \Delta x &= \frac{2a\sin(k_x\Delta x) + 2b\sin(2k_x\Delta x)}{1 + 2\alpha\cos(k_x\Delta x)} \\ k_y' \Delta y &= \frac{2a\sin(k_y\Delta y) + 2b\sin(2k_y\Delta y)}{1 + 2\alpha\cos(k_y\Delta y)} \\ k_z' \Delta z &= \frac{2a\sin(k_z\Delta z) + 2b\sin(2k_z\Delta z)}{1 + 2\alpha\cos(k_z\Delta z)}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Les relations (2.38) sont utilisées afin de conserver l'homogénéité entre les différents opérateurs de dérivation (dans l'espace physique par les schémas compacts et dans l'espace spectral par la multiplication). De cette façon, les dérivations par les schémas compacts et dans l'espace spectral sont équivalentes.
Dans l'espace spectral, l'équation (2.30) s'écrit alors

$$-({k_x'}^2 + {k_y'}^2 + {k_z'}^2)\hat{\tilde{p}} = \frac{1}{\gamma_k \Delta t} \left(ik_j' \widehat{\left(\rho^{(0)} u_j^{(0)}\right)}^{\star} + \left(\widehat{\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t}} \right)^{(k+1)} \right) \tag{2.40}$$

Le cas particulier ${k_x'}^2 = {k_y'}^2 = {k_z'}^2 = 0$ est traité en reprenant directement l'équation (2.29). Dans ce cas, elle s'écrit

$$\frac{\left(\widehat{\rho^{(0)} u_i^{(0)}}\right)^{(k+1)} - \left(\widehat{\rho^{(0)} u_i^{(0)}}\right)^{(\star)}}{\Delta t} = 0 \tag{2.41}$$

On peut remarquer que la présence du terme de variation de masse volumique n'implique pas de traitement spécial pour ce cas particulier.

Simulation d'écoulement en développement spatial

La périodicité dans la direction principale de l'écoulement n'existe plus et le passage au domaine spectral n'est plus possible dans cette direction. La méthode utilisée, initiée dans [70], consiste alors à résoudre partiellement l'équation dans l'espace spectral pour les directions y et z et dans l'espace physique pour la direction x. L'équation (2.30) s'écrit alors

$$\gamma_k \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} - \left({k'_y}^2 + {k'_z}^2 \right) \right) \hat{\tilde{p}} = \frac{\partial (\widehat{\rho^{(0)} u^{(0)}})^\star}{\partial x} + i k'_y (\widehat{\rho^{(0)} v^{(0)}})^\star + i k'_z (\widehat{\rho^{(0)} w^{(0)}})^\star + \left(\widehat{\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t}} \right)^{(k+1)}, \tag{2.42}$$

soit avec la notation matricielle utilisée dans l'annexe (A)

$$\gamma_k \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} \mathbf{A_x^{-1} B_x A_x^{-1} B_x} - ({k'_y}^2 + {k'_z}^2)\mathbf{I} \right) \hat{\tilde{\mathbf{p}}} = \hat{\mathbf{D}} \tag{2.43}$$

où $\hat{\mathbf{D}}$ représente le second membre de (2.42) en notation matricielle.
La technique de [70] pour résoudre cette équation consiste à reformuler ce système ayant pour inconnue le vecteur $\hat{\tilde{\mathbf{p}}}$ en

$$\begin{cases} \gamma_k \Delta t \left(\mathbf{B_x} \hat{\tilde{\mathbf{p}}}' - ({k'_y}^2 + {k'_z}^2) \Delta x \mathbf{A_x} \hat{\tilde{\mathbf{p}}} \right) = \Delta x \mathbf{A_x} \hat{\mathbf{D}} \\ \Delta x \mathbf{A_x} \hat{\tilde{\mathbf{p}}}' - \mathbf{B_x} \hat{\tilde{\mathbf{p}}} = 0 \end{cases} \tag{2.44}$$

dont les inconnues sont les vecteurs $\hat{\tilde{\mathbf{p}}}$ et $\hat{\tilde{\mathbf{p}}}'$. La résolution de (2.42) revient alors à inverser un système du type $\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{V}} = \hat{\mathbf{D}}$ où $\hat{\mathbf{C}}$ est une matrice à onze diagonales si $\hat{\mathbf{V}}$ est arrangée avec les composantes de $\hat{\tilde{\mathbf{p}}}$ et $\hat{\tilde{\mathbf{p}}}'$ en alternance (Cf. [70, 71])

$$\hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{2(i-1)} \\ V_{2i} \\ \vdots \\ V_{2(n_x-1)} \\ V_{2n_x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\tilde{p}}_1 \\ \hat{\tilde{p}}'_1 \\ \vdots \\ \hat{\tilde{p}}_i \\ \hat{\tilde{p}}'_i \\ \vdots \\ \hat{\tilde{p}}_{n_x} \\ \hat{\tilde{p}}'_{n_x} \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

Cette technique permet d'éviter l'inversion de la matrice pleine

$$\frac{1}{\Delta x^2} \mathbf{A_x^{-1} B_x A_x^{-1} B_x} - ({k'_y}^2 + {k'_z}^2)\mathbf{I} \tag{2.46}$$

de dimensions $n_x \times n_x$, et de la remplacer par l'inversion de la matrice $\hat{\mathbf{C}}$ de dimensions $2n_x \times 2n_x$ à 11 diagonales, l'inversion de ce type de matrice étant beaucoup moins consommatrice de temps de calculs.
Il est important de noter que dans le modèle spatial, contrairement au modèle temporel, le cas particulier $k'_y = k'_z = 0$ est impossible à traiter de façon identique pour les configurations isotherme (calcul incompressible classique) et non-isotherme (calcul avec l'approximation d'écoulements à faibles nombres de Mach). En effet, dans le cas du modèle incompressible à masse volumique constante, le mode $k'_y = k'_z = 0$ conduit l'expression (2.42) à s'écrire

$$\gamma_k \Delta t \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\hat{\tilde{p}} \;=\; \frac{\partial(\widehat{\rho^{(0)}u^{(0)}})^\star}{\partial x} \tag{2.47}$$

qui nous donne en dérivant (2.29) dans la direction x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\widehat{\rho^{(0)}u^{(0)}}\right)^{(k+1)} = 0 \tag{2.48}$$

(le traitement dans les autres directions est similaire à celui d'une simulation temporelle). L'intégration de cette équation indique finalement que la quantité $\left(\widehat{\rho^{(0)}u^{(0)}}\right)^{(k+1)}$ est indépendante de x. Cette constante d'intégration est directement déduite de la condition d'entrée au sous-pas de temps $(k+1)$

$$\left(\widehat{\rho^{(0)}u^{(0)}}\right)^{(k+1)}(x,0,0) = \left(\widehat{\rho^{(0)}u^{(0)}}\right)^{(k+1)}(0,0,0). \tag{2.49}$$

Physiquement, cette condition revient à l'égalité des débits à travers toutes les sections à $x = cte$ du domaine.

Dans le cas du modèle à masse volumique variable, le mode $k'_y = k'_z = 0$ conduit avec (2.42) à

$$\gamma_k \Delta t \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\hat{\tilde{p}} = \frac{\partial(\widehat{\rho^{(0)}u^{(0)}})^\star}{\partial x} + \left(\frac{\widehat{\partial\rho^{(0)}}}{\partial t}\right)^{(k+1)} \tag{2.50}$$

Il apparaît alors très clairement qu'il est impossible de compter sur la même simplification que dans le cas isotherme : nous devons intégrer (2.50). Avec (2.29) l'intégration de (2.50) conduit à l'étape de correction (pour le mode 0 uniquement)

$$\left(\widehat{\rho^{(0)}u^{(0)}}\right)^{(k+1)} = -\int \left(\frac{\widehat{\partial\rho^{(0)}}}{\partial t}\right)^{(k+1)} \mathrm{d}x + Cte \tag{2.51}$$

Cette intégration est mise en œuvre par l'utilisation des schémas compacts. Pour la direction x, l'écriture matricielle de l'opérateur de dérivation est

$$\mathbf{A_x u'} = \frac{1}{\Delta_x}\mathbf{B_x u} \tag{2.52}$$

qui nous permet d'obtenir $\mathbf{u}$ connaissant $\mathbf{u'}$ par

$$\mathbf{u} = \Delta_x \mathbf{B_x^{-1} A_x u'} \tag{2.53}$$

La constante d'intégration est déterminée par la condition d'entrée au sous-pas de temps $k+1$.

2.2.5 Condition de sortie

La configuration spatiale impose d'utiliser un modèle physique à la limite aval du domaine approximant l'évacuation naturelle du fluide. La condition utilisée ici est une équation de convection appliquée à toute grandeur q de l'écoulement $(q = \rho u_i, T)$ avec $(i = 1, 2, 3)$:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U_m \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0 \tag{2.54}$$

où U_m est une approximation de la vitesse moyenne sur la section de sortie.

2.3 Application à la couche de mélange

2.3.1 Généralités

La couche de mélange est un écoulement que l'on rencontre dans de très nombreuses situations en mécanique des fluides. Il intervient dès que deux courants de fluides (pouvant avoir des masses volumiques et des températures différentes) ayant des vitesses différentes sont en contact l'un avec l'autre. L'interface de ces deux fluides est une région très instable qui est le siège du développement d'une zone de turbulence lorsque les vitesses en jeu sont suffisamment élevées.
Brown et Roshko [21] ont mis en évidence, par leurs visualisations expérimentales de couches de mélange, l'existence de grosses structures tourbillonnaires (donc organisées) au sein d'écoulements turbulents. Ils ont prouvé que ces structures organisées existent même à des nombres de Reynolds élevés. Ces mouvements à grande échelle sont le résultat du développement d'instabilités de type Kelvin-Helmholtz.
Winant et Browand [116] ont montré que le processus d'appariement, par lequel deux tourbillons successifs interagissent en s'enroulant l'un avec l'autre pour ne plus former qu'une structure, conditionne l'élargissement de la couche de mélange.
Oster et Wygnanski [90] ont montré la possibilité d'agir sur le développement des grosses structures en appliquant un forçage au début de la couche de mélange. Suivant le type de forçage imposé, la formation des tourbillons ainsi que les appariements peuvent être accélérés ou retardés.

L'analyse de stabilité est fondamentale pour la compréhension d'un écoulement turbulent. C'est cette étude qui permet d'identifier quels types de perturbations vont entraîner les plus importantes modifications dans l'écoulement. Dans le cas de la couche de mélange, les études de stabilité linéaires ont permis de déterminer le mode le plus instable. Michalke [83] a calculé que la longueur d'onde du mode le plus instable associé à un profil de vitesse en tangente hyperbolique est

$$\lambda_a \simeq 7\delta_{\omega 0}. \tag{2.55}$$

Pour une couche de mélange de nombre de Reynolds suffisamment élevé (de l'ordre de 40 pour une couche de mélange temporelle [74]) cette longueur d'onde peut être considérée comme indépendante de la viscosité.

Comme nous venons de le voir, le processus d'appariement pilote l'élargissement des couches de mélange. Il a par ailleurs été vérifié que cet élargissement diminue à mesure que le nombre de Mach augmente. L'effet du rapport des masses volumiques des deux courants ne pouvant expliquer à lui seul cette réduction, Brown et Roshko en ont déduit qu'il s'agissait là d'un effet de la compressibilité [21]. Bogdanoff [14] a introduit la notion de nombre de Mach convectif, permettant de réduire la dépendance de l'élargissement de la couche de mélange à un paramètre unique. Ce nombre est défini par

$$M_c = \frac{U_1^* - U_2^*}{c_1^* + c_2^*} \tag{2.56}$$

où U_1^*, c_1^*, U_2^*, c_2^* sont les vitesses du fluide et les célérités du son dans les parties rapide ($_1$) et lente ($_2$). De nombreux travaux ont été réalisés dans le but de comprendre les mécanismes physiques liés au phénomène de compressibilité.
D'autre part, si le développement initial des couches de mélange, par la formation des tourbillons de Kelvin-Helmholtz, est essentiellement bidimensionnel, la poursuite du mélange vers l'aval fait apparaître des structures tridimensionnelles qui viennent se superposer aux premiers tourbillons. Bernal et Roshko [10] ont étudié expérimentalement le développement de ces tourbillons longitudinaux.

Deux types de simulations de la couche de mélange peuvent être envisagées numériquement. La couche de mélange en développement spatial est une représentation de la couche de mélange telle qu'elle peut être réalisée au cours d'une expérience de laboratoire. En d'autres termes, le repère d'observation est le repère du laboratoire. Dans ces conditions, les deux courants entrent par une extrémité du domaine et ressortent par l'autre. Les tourbillons se déplacent dans ce domaine d'observation et finissent par sortir du domaine. C'est la configuration qui correspond aux visualisations de Brown et Roshko [21] de la figure (2.2). La couche de mélange obtenue dépend de la condition d'entrée. Une perturbation de type bruit blanc permet de simuler une couche de mélange dont le comportement est proche de la réalité dès l'entrée du domaine. En revanche une perturbation excitant préférentiellement certains modes d'instabilités permet de contrôler le développement initial de l'écoulement.

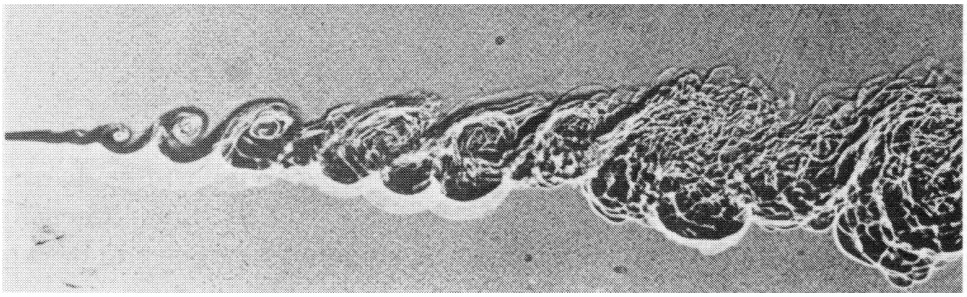


Fig. 2.2: Couche de mélange spatiale [21].

La couche de mélange en développement temporel est obtenue en observant l'écoulement depuis un repère se déplaçant à la même vitesse que les grosses structures. Les entrée et

sortie du domaine correspondent alors à des conditions de périodicité et le comportement de la couche de mélange est contrôlé par la condition initiale.

La couche de mélange temporelle permet de diminuer la taille du domaine de simulation. Pour un même coût de calcul, elle permet donc d'étudier des écoulements à plus haut nombre de Reynolds. En revanche elle ne permet pas d'observer autant de tourbillons qu'une représentation spatiale. De plus, la condition de périodicité modifie le taux d'élargissement de la couche de mélange, et la dissymétrie naturelle entre la partie lente et rapide est mal représentée. Enfin, le champ acoustique lié à ce modèle ne contient pas toutes les propriétés de décroissance et de directivité de son homologue spatial. Le modèle spatial présente des difficultés numériques supplémentaires, comme le traitement des conditions d'entrée et de sortie, qui sont cruciales pour les applications aéroacoustiques.
Finalement, ces deux approches se complètent assez bien, et le choix de l'une ou l'autre est à faire en fonction de l'objectif visé.

2.3.2 Couche de mélange en développement temporel

Dès le début de ce travail sur les méthodes hybrides destinées à l'étude du rayonnement acoustique des écoulements turbulents anisothermes, la couche de mélange en développement temporel s'est imposée comme modèle de développement. Ce modèle était déjà utilisé au LEA pour la simulation aéroacoustique par DNS compressible [41]. Des résultats étaient d'ores et déjà disponibles pour valider ceux à venir, et les propriétés de périodicité permettant de réduire les domaines de calculs rendaient cette configuration très attractive.

Présentation de la configuration

La couche de mélange temporelle est un écoulement se développant entre deux courants de vitesses, températures et masse volumiques différentes. La figure (2.3) décrit la configuration utilisée dans cette étude. L'écoulement simulé se produit dans un rectangle de dimensions $(L_x^* \times L_y^*)$ entre des courants de vitesses, températures, et masse volumiques (U_1^*, T_1^*, ρ_1^*) dans la partie supérieure du domaine et (U_2^*, T_2^*, ρ_2^*) dans la partie inférieure. Les paramètres dimensionnels choisis comme références pour ces calculs CFD sont $L_{ref}^* = \delta_\omega^*$ (où δ_ω^* est l'épaisseur initiale de vorticité de la couche de mélange), $U_{ref}^* = U_1^* - U_2^*$, $T_{ref}^* = T_2^*$ et $\rho_{ref}^* = \rho_2^*$. Comme nous l'avons vu dans la partie 2.1.2, le modèle d'écoulement à faible nombre de Mach est régi par les nombres de Reynolds et de Prandtl, qui sont ici fixés à $Re = 400$ et $Pr = 0.75$. La pression initiale p^* est supposée uniforme. Le champ initial de vitesse moyenne est le profil en tangente hyperbolique :

$$\langle u^* \rangle (y^*) = \frac{U_1^* + U_2^*}{2} + \frac{U_1^* - U_2^*}{2} \tanh\left(\frac{2y^*}{\delta_\omega^*}\right). \tag{2.57}$$

Les vitesses U_1^* et U_2^* sont choisies pour que la vitesse de convection $U_c^* = \frac{c_1^* U_2^* + c_2^* U_1^*}{c_1^* + c_2^*}$ des tourbillons primaires [14] soit nulle. Puisque les simulations réalisées au cours de ces travaux sont destinées à être validées grâce aux résultats de DNS compressible [41], le

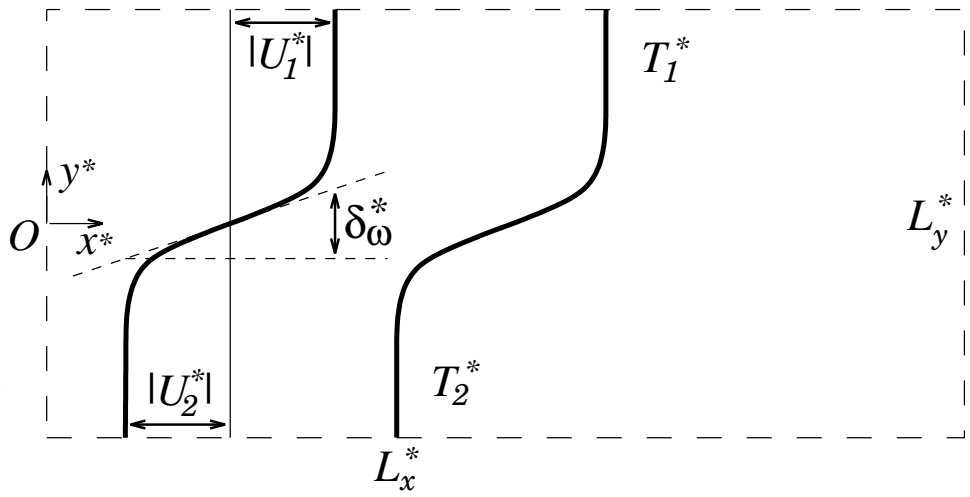


Fig. 2.3: Configuration de la couche de mélange temporelle

champ de température des cas anisothermes est initialisé de façon identique aux champs compressibles. Il est obtenu à partir du champ de vitesse moyenne par la relation de Crocco-Buseman

$$\begin{aligned} T^*(y^*) &= \frac{1}{2c_p^*}\left[-\langle u^*\rangle^2(y^*) - U_1^*U_2^* + \langle u^*\rangle(y^*)(U_1^*+U_2^*)\right] \\ &+ (T_1^*-T_2^*)\frac{\langle u^*\rangle(y^*)}{U_1^*-U_2^*} + \frac{T_2^*U_1^* - T_1^*U_2^*}{U_1^*-U_2^*} \end{aligned} \tag{2.58}$$

Dans ces relations, $< \cdot >$ désigne la moyenne suivant la direction périodique :

$$\langle\alpha\rangle(y,t) = \frac{1}{L_x}\int_0^{L_x}\alpha(x,y,t)dx. \tag{2.59}$$

Condition initiale

Nous ajoutons un champ de perturbation incompressible au champ moyen pour déstabiliser l'écoulement. Ce champ de perturbation permet d'exciter les instabilités de Kelvin - Helmholtz et de déclencher la création de tourbillons. Nous avons choisi de perturber l'écoulement de façon à avoir la formation de quatre tourbillons, obtenant ainsi la possibilité d'observer deux appariements. La perturbation imposée à l'instant initial dans la direction transversale est

$$\tilde{v}(x,y) = e^{-\sigma\left(\frac{y}{\delta_\omega}\right)^2}\left[A_0\cos\left(\frac{2\pi}{L_x}x\right) + \sum_{i=1}^{2}A_i\cos\left(2i\frac{2\pi}{L_x}x\right)\right] \tag{2.60}$$

La composante $\tilde{u}$ est déduite de $\tilde{v}$ par la relation d'incompressibilité. La dimension L_x du domaine dans la direction périodique de l'écoulement est choisie de sorte à coïncider avec le nombre d'instabilités excitées : ici $L_x = 4\lambda_a$ où $\lambda_a = 7.06\delta_\omega$ est la longueur d'onde de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz de la couche de mélange temporelle non-visqueuse [83].

Résultats de simulations : cas isotherme

L'objet des premières simulations CFD est de valider la qualité des résolutions numériques des équations de l'approximation LMNA. Pour ce faire, nous comparons les résultats d'une simulation compressible isotherme à ceux d'une simulation LMNA. Ces simulations sont à $Re = 400$ et le nombre de Mach de la simulation compressible est $M = 0.2$. Comme dans le cas d'un modèle incompressible, il est impossible de définir le nombre de Mach dans le cas du modèle LMNA. En réalité, une simulation LMNA fournit une évolution dynamique pour un nombre de Mach théorique nul. Pour rendre les comparaisons possibles, nous appliquons un redimensionnement des vitesses et de l'échelle de temps en fonction du nombre de Mach de l'écoulement compressible avec lequel nous voulons faire la comparaison. Par la suite, pour faciliter les commentaires, discussions ou explications, nous parlerons tout de même de simulations LMNA en donnant un nombre de Mach : ce nombre de Mach étant le nombre de Mach de la simulation compressible avec laquelle nous réalisons la comparaison.
Le développement dynamique de la couche de mélange que nous simulons est dominé par des structures tourbillonnaires qui sont très bien représentées par la vorticité. La figure (2.4) montre les isocontours de vorticité obtenus par ces deux simulations à différents instants de la simulation. Nous pouvons voir sur cette figure le très bon accord entre les deux types de simulations. On peut tout de même remarquer que la simulation LMNA conduit à un développement tourbillonnaire légèrement plus rapide que son homologue compressible, ce décalage étant conforme aux effets attendus de la compressibilité sur le développement dynamique.
On retrouve bien sûr à $t = 18.8$ la formation de quatre tourbillons de Kelvin-Helmholtz [41], suivie de leurs appariements successifs pour aboutir à un tourbillon unique à partir de $t \simeq 187$.

Résultats de simulations : cas anisotherme

Le cas isotherme ayant donné satisfaction en montrant que le modèle LMNA permet de reproduire l'évolution dynamique simulée par un code de DNS compressible (au moins jusqu'à $M = 0.2$), il nous faut aussi réaliser cette validation dans le cas qui nous intéresse le plus, à savoir le cas où les deux flux (repérés par les indices $_1$ et $_2$) sont initialement de températures (et masses volumiques) différentes.
Pour ce test de validation, nous avons choisi de prendre une configuration déjà étudiée à l'aide de DNS compressible au LEA [41, 42, 44]. Cette configuration est en tout point identique à la précédente, excepté pour le rapport initial des températures : T_1/T_2 qui est maintenant fixé à 2. Les isocontours de vorticité sont représentés sur la figure (2.5) aux mêmes instants que pour le cas isotherme.
Encore une fois, l'accord entre les deux types de méthodes est excellent. On peut noter la présence de vorticité contrarotative (en pointillés sur la figure (2.5) qui est une caractéristique des écoulements anisothermes. Ce phénomène s'explique par l'apparition dans un écoulement inhomogène en masse volumique d'un couple dit barocline [28, 96]. L'équation de la vorticité potentielle est très utile pour l'analyse de la dynamique des tourbillons et tout particulièrement pour l'analyse des effets baroclines sur la vorticité.

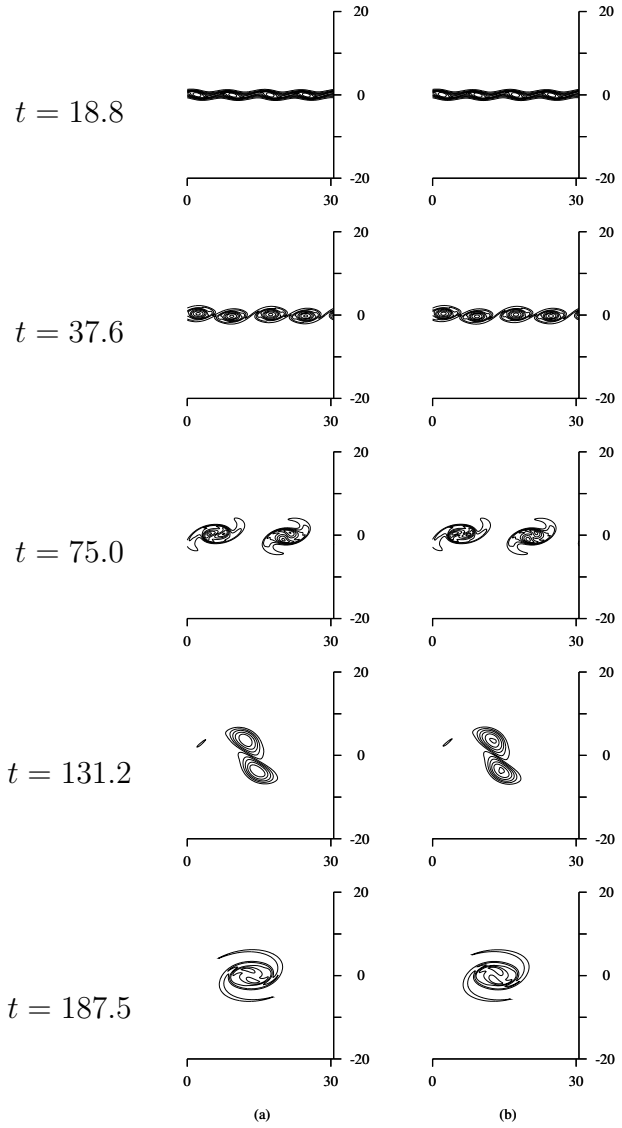


Fig. 2.4: Ecoulement isotherme à $Re = 400$ et $M = 0.2$. Isocontours de vorticité à différents instants pour la simulation compressible (a) et la simulation LMNA (b). Les niveaux d'isocontours sont séparés de 0.1.

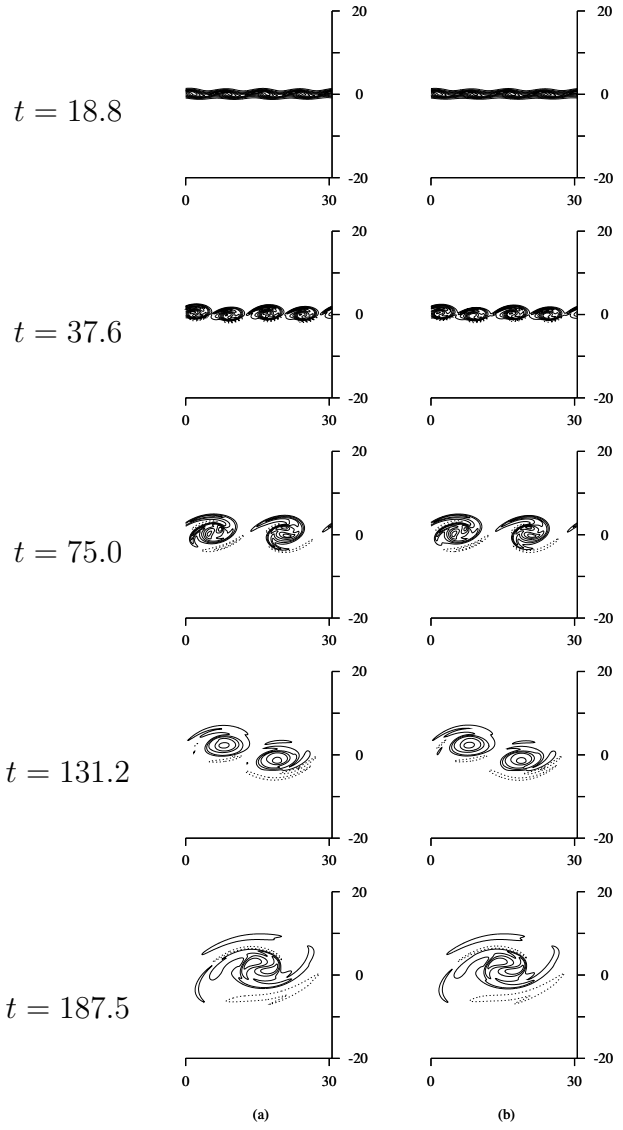


FIG. 2.5: Ecoulement anisotherme à $Re = 400$, $M = 0.2$, $T_1/T_2 = 2$. Isocontours de vorticité à différents instants pour la simulation compressible (a) et la simulation LMNA (b). Les niveaux d'isocontours sont séparés de 0.1. Les traits pleins représentent les contours négatifs et les traits pointillés représentent les contours positifs

Dans le cas général d'un écoulement tridimensionnel compressible, cette équation s'écrit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\overrightarrow{\omega}}{\rho}\right) = \overline{\overline{grad}}\,(\overrightarrow{u})\left(\frac{\overrightarrow{\omega}}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho^3}\left(\overrightarrow{grad}p \wedge \overrightarrow{grad}\rho\right) + \frac{\nu}{\rho}\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{\omega} \tag{2.61}$$

Lorsque l'écoulement est bidimensionnel et que l'on néglige le terme visqueux, cette équation devient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_z}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^3}\left(\overrightarrow{grad}p \wedge \overrightarrow{grad}\rho\right) \cdot \overrightarrow{z} \tag{2.62}$$

La figure (2.6) permet d'identifier l'effet de ce couple sur la vorticité des côtés chaud et froid de la couche de mélange. Les gradients de pression et de masse volumique sont représentés sur cette figure. L'inversion du gradient de pression de part et d'autre du point-selle conduit à une inversion du vecteur barocline $\overrightarrow{grad}p \wedge \overrightarrow{grad}\rho$. Ainsi, dans la région chaude la vorticité est renforcée par l'effet barocline alors qu'elle est réduite dans la région froide.

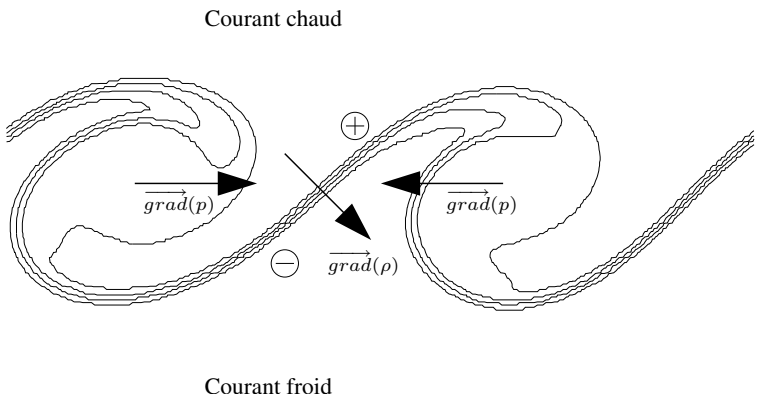


Fig. 2.6: Effet du couple barocline sur la vorticité : les signes $\oplus$ et $\ominus$ indiquent les zones de part et d'autre du point-selle pour lesquelles la vorticité est renforcée ou réduite par le couple barocline (sur cette figure, les tourbillons sont matérialisés par les isocontours de masse volumique).

Le même accord entre les deux méthodes est retrouvé une nouvelle fois sur la figure (2.7) ou sont représentés des isocontours de masse volumique aux mêmes instants que ceux de la figure (2.5).

2.3.3 Couche de mélange isotherme en développement spatial

Ce cas constitue un premier pas de validation du code développé ici. Nous rappelons que le modèle LMNA est strictement identique, dans le cas isotherme, au modèle incompressible classique des équations de Navier-Stokes. Ce dernier a déjà été implémenté et validé au LEA [71] dans une configuration de couche de mélange en développement spatial : nous disposons ainsi d'un outil de validation, permettant des comparaisons directes.

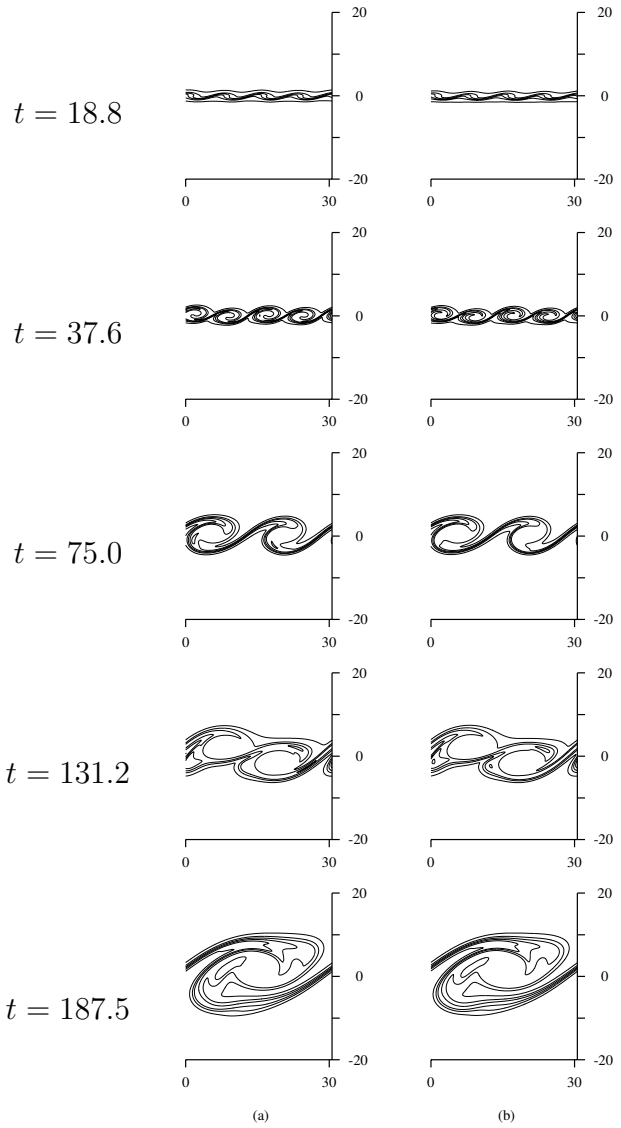


FIG. 2.7: Ecoulement anisotherme à $Re = 400$, $M = 0.2$, $T_1/T_2 = 2$. Isocontours de masse volumique à différents instants pour la simulation compressible (a) et la simulation LMNA (b). Les niveaux d'isocontours sont compris entre 0.5 et 1.0 ($pas = 0.1$).

Configuration d'écoulement

De nombreux travaux numériques ont été réalisés sur la couche de mélange spatiale en vue de développer des méthodes numériques notamment pour simuler des conditions d'écoulements les plus réalistes possibles. L'objectif est ici bien différent puisqu'il s'agit de fournir des données issues de DNS à un code de propagation acoustique. Bien entendu, seule l'utilisation d'une configuration réaliste devra à terme permettre une prédiction acoustique acceptable. Dans un premier temps, nous nous contenterons d'une configuration relativement académique permettant de bien identifier des sources dont la localisation spatiale sera prédéterminée.

Simulation forcée : à la lumière de travaux antérieurs [11, 12, 15, 19, 27], nous avons tenté dans un premier temps de simuler le développement d'une couche de mélange plane forcée sur le mode le plus instable et sur le premier sous-harmonique. Cette configuration est donc très proche de celle utilisée précédement dans le cas du modèle temporel.
La condition d'entrée est un profil de vitesse en tangente hyperbolique

$$u^*(0,y^*) = \frac{U_1^* + U_2^*}{2} + \frac{U_1^* - U_2^*}{2}\tanh\left(\frac{2y^*}{\delta_{\omega 0}^*}\right) \tag{2.63}$$

où $\delta_{\omega 0}^*$ est l'épaisseur de vorticité à l'entrée du domaine, auquel se superpose le champ de perturbation

$$\tilde{v}(0,y^*) = e^{-\sigma\left(\frac{y^*}{\delta_\omega^*}\right)^2}\left[A_0\sin\left(\omega_0^* t^*\right) + A_1\sin\left(\frac{\omega_0^*}{2}t^* + \varphi_0\right)\right] \tag{2.64}$$

Dans le cas isotherme, le rapport de températures T_1^*/T_2^* à l'entrée du domaine est maintenu constant égal à 1 tout au long de la simulation. Dans les cas anisothermes, un profil en tangente hyperbolique est imposé

$$T^*(0,y^*) = \frac{T_1^* + T_2^*}{2} + \frac{T_1^* - T_2^*}{2}\tanh\left(\frac{2y^*}{\delta_{\omega 0}^*}\right) \tag{2.65}$$

La fréquence du mode le plus instable est calculée dans [15] à l'aide des résultats de [83] par la relation

$$f_0 = 0.132\left(\frac{U_1^* + U_2^*}{2\delta_{\omega 0}^*}\right) \tag{2.66}$$

Cette configuration d'écoulement est représentée sur la figure (2.8). Les vitesses d'entrée des courants supérieur et inférieur sont choisis de manière à garder $U_1 - U_2 = 1$ et nous choisissons de prendre un rapport $U_1/U_2 = 2$. Pour les premières simulations, nous allons définir un écoulement à $Re = 200$. Ce nombre de Reynolds relativement faible, nous permet de réaliser des simulations de durées raisonnables pour des validations de code.

Comparaison entre le code LMNA et le code incompressible

L'objet de cette partie est de vérifier que le code de résolution du modèle LMNA fournit des résultats en accord avec le code incompressible dans les cas isothermes.

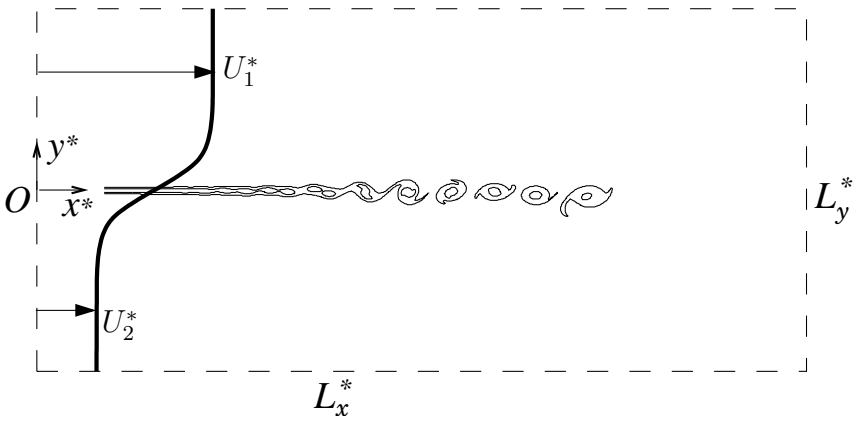


FIG. 2.8: Configuration de couche de mélange spatiale.

La première configuration testée est telle que $U_1 = 2$ et $U_2 = 1$. Les paramètres de la perturbation à l'entrée sont $\sigma = 5$, $A_0 = 2.5.10^{-3}$, $A_1 = A_0/2$ et $\varphi_0 = \pi/2$ (Cf. equation (2.64)). Les dimensions du domaine de calcul sont $L_x = 200$, $Ly = 100$. Le maillage cartésien utilisé est uniforme, avec $d_x = 0.5$ et $d_y = 0.25$.
La figure (2.9) compare les champs de vorticité obtenus par *incompact3d* et par le code LMNA *quasincompact3d* au même instant. La configuration utilisée, à savoir, la condition initiale, les conditions d'entrée et de sorties sont rigoureusement identiques.

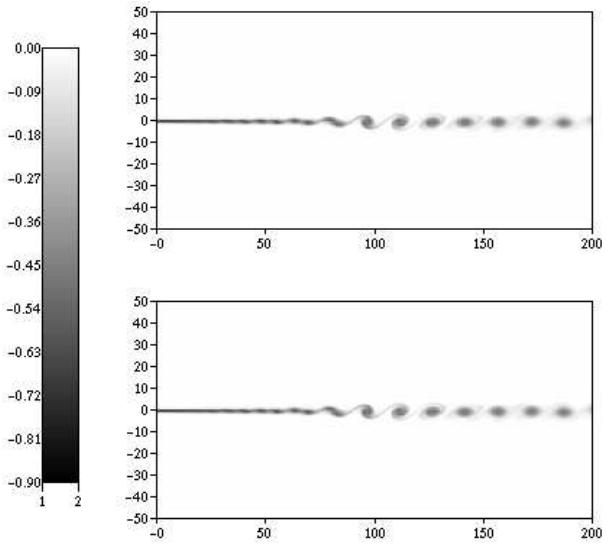


FIG. 2.9: Champs de vorticité calculés par les codes incompressible (en bas) et LMNA (en haut) dans les mêmes conditions.

Cette figure montre un accord remarquable confirmant que le code *quasincompact3d* reproduit bel et bien le modèle incompressible habituel lorsqu'il est utilisé avec un champ de température uniforme.

Les profils de vorticité le long d'une droite située au centre de la couche de mélange à différents instants sont présentés sur la figure (2.10). De très faibles écarts peuvent apparaître à certains instants (comme sur la vue (d) de la figure (2.10)). Ils peuvent s'expliquer par la différence de formulation des termes de convection : dans le code *incompact3d*, les équations de Navier-Stokes incompressibles sont résolues sous la forme

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.67}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + H_i = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_m}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{2.68}$$

où H_i est écrit sous la forme rotationnelle [71] $u_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ (et $p_m = p + \frac{1}{2}u_j.u_j$ est la pression modifiée). Dans *quasincompact3d*, ces termes non-linéaires sont écrits sous la forme divergente $\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}$. Du point de vue des équations continues, ces formulations sont équivalentes, par contre, leur transposition discrète est différente. Elles ne présentent pas le même comportement par rapport aux erreurs d'aliasing lorsque l'on utilise des méthodes spectrales ou des schémas aux différences finies d'ordre élevé [68].

2.3.4 Couche de mélange anisotherme en développement spatial

Contrairement aux écoulements précédents, nous n'avons pas en notre possession d'autres outils permettant de représenter une couche de mélange anisotherme spatiale. Nous ne pouvons donc plus procéder à une comparaison directe des valeurs instantanées avec des résultats de références. Quatre types de contrôles doivent nous assurer de la validité des résultats des simulations anisothermes spatiales. Le premier consiste en la vérification des propriétés de conservation. Le second concerne la condition de sortie. Les deux derniers s'attachent à vérifier le bon comportement du taux d'élargissement et du rapport d'entraînement volumétrique en fonction du rapport des masses volumiques.

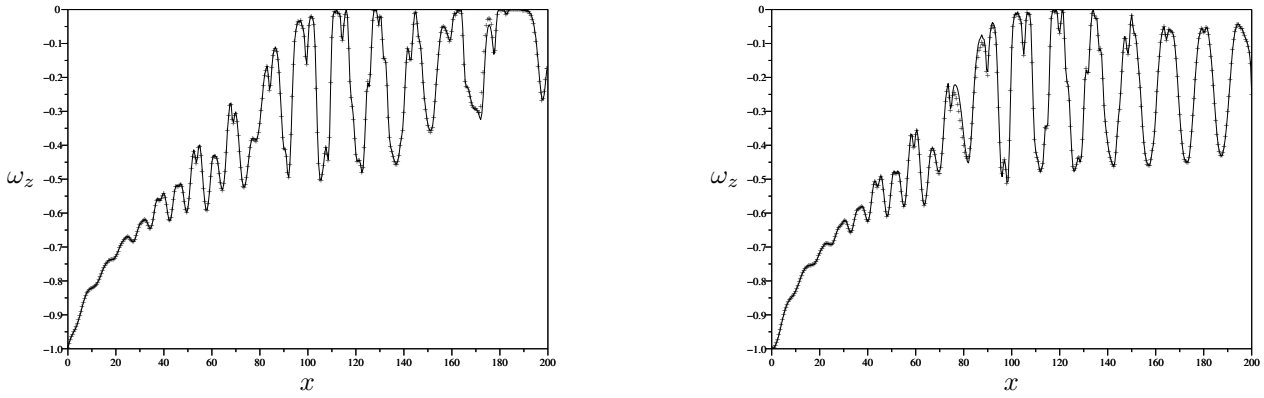
Propriétés de conservation

Le problème compressible initial a été largement reformulé (abandon d'une partie des équations par le développement asymptotique, réarrangement des équations de conservation de la masse et de l'énergie (2.20), ...). En conséquence, on peut se demander [29] si l'algorithme numérique obtenu conserve la masse (eq. (2.16)) et l'énergie (eq. (2.18)). Les auteurs de [29] ont vérifié la conservation globale sur l'ensemble du domaine de simulation des quantités mentionnées ci-dessus. Ils ont défini un critère permettant de contrôler si la résolution (spatiale et temporelle) utilisée est compatible avec le nombre de Reynolds de l'écoulement : pour les équations (2.16) et (2.18) la grandeur

$$\Theta = \frac{\left\langle (LHS - RHS)^2 \right\rangle}{\sqrt{\left\langle (LHS)^2 \right\rangle \left\langle (RHS)^2 \right\rangle}}, \tag{2.69}$$

où LHS et RHS désignent respectivement les membres de gauche et de droite et $< . >$ représente la moyenne sur le domaine de calcul, doit rester proche de zéro. Pour l'équation

(a) t=125 (b) t=250



(c) t=375 (d) t=500

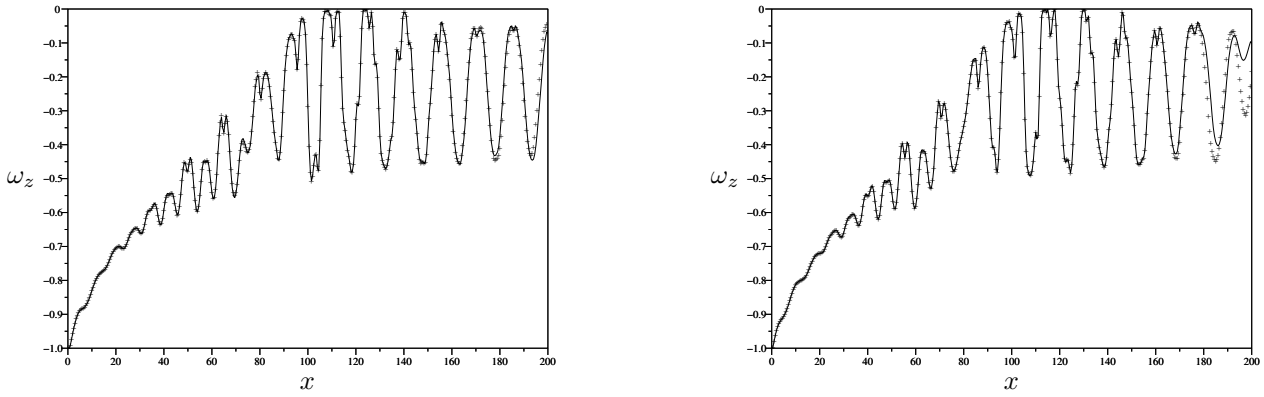


FIG. 2.10: Profils de vorticité le long de la couche de mélange (en $y = 0$) par *incompact3d* (——) et *quasin-compact3d* (+) dans une même configuration isotherme.

de conservation de la masse, LHS et RHS sont obtenus en écrivant l'équation (2.16) sous la forme

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)}}{\partial x_i}. \tag{2.70}$$

Tant que la résolution est suffisante, Θ_X ($X = m$ ou e si le critère est appliqué sur l'équation de continuité ou de l'énergie) doit rester proche de zéro. Une divergence de Θ_X au cours du calcul est le signe d'une résolution insuffisante. Cook & Riley [29] ont notamment remarqué qu'une déviation de Θ_X est le signe que la simulation va devenir instable.
Le défaut de ce critère est sa forme globale : si un écart se produit en raison d'un évènement très localisé, il est impossible de le savoir. Pour être sûr que nous n'observons que les effets de la résolution, nous excluons l'entrée et la sortie du domaine car les modifications fortes appliquées aux équations dans ces parties sont de nature à rompre localement les propriétés de conservation.

Le premier test réalisé porte sur une configuration donnée pour laquelle seuls le nombre de Reynolds et les pas de discrétisation spatiale et temporelle varient. Cette expérience utilise une couche de mélange anisotherme telle que $U_1/U_2 = 2$, $T_1/T_2 = 2$. Les dimensions du domaine sont $L_x = 100$ et $L_y = 20$. Le maillage cartésien utilisé est uniforme. Deux résolutions spatiales et deux pas de temps sont utilisés. La perturbation imposée en entrée est de même nature que celle utilisée pour la comparaison isotherme entre les modèles incompressible et LMNA mais l'amplitude vaut ici $A_0 = 0.01$. Le tableau (2.1) présente les différentes simulations effectuées pour ce test (dans tous les cas $dx = dy = \Delta$). Les nombres de Reynolds ont volontairement été choisis petits pour réduire les coûts de calculs.

Désignation	Re	Δ	dt
(a)	100	0.2	0.04
(b)	200	0.2	0.04
(c)	200	0.1	0.04
(d)	200	0.2	0.02

Tab. 2.1: Configurations testées pour la vérification des propriétés de conservation.

La figure (2.11) montre les évolutions de Θ_m et Θ_e au cours du temps pour les simulations (a) à (d).
Avec une résolution identique, les évolutions de Θ_m et Θ_e sont très différentes pour les deux nombres de Reynolds (simulations (a) et (d)). Pour $Re = 100$, les propriétés de conservation sont bien vérifiées, alors qu'elles augmentent rapidement pour $Re = 200$. Le régime oscillant atteint à partir de $t \simeq 80$ indique que la résolution de ce test est très proche de la limite de stabilité de l'algorithme. Le calcul (c) dont les résultats se superposent presque exactement à ceux de (b) montrent que la résolution spatiale n'est pas responsable des oscillations observées. En revanche, la simulation (d), identique à la

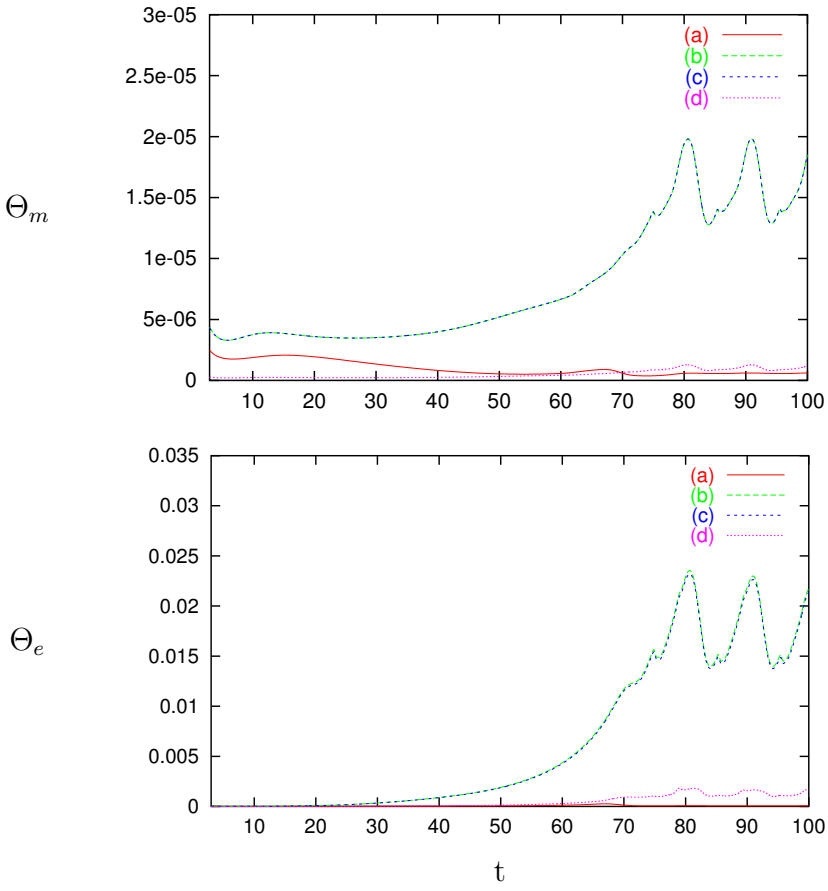


FIG. 2.11: Evolutions de Θ_m et Θ_e au cours du temps pour deux nombres de Reynolds (La désignation des résultats est donnée dans le tableau (2.1)).

(b) au pas de temps près montre que la réduction du pas de temps permet de retrouver quasiment le même comportement que pour le nombre de Reynolds le plus faible.

La limite du nombre de Courant (CFL) pour une discrétisation par les schémas compacts d'ordre 6 et le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 calculée par Lele [72] pour l'équation de convection

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U_0 \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{2.71}$$

est

$$CFL = \frac{U_0 dt}{\Delta} < \frac{\sqrt{3}}{1.989}. \tag{2.72}$$

Pour $\Delta = 0.2$ et $U_0 = 2$ (valeurs qui correspondent aux cas (a), (b) et (d)), la condition de stabilité par le critère CFL est $dt < 0.087$.
Cette valeur est largement supérieure à celle nécessaire pour vérifier correctement la conservation globale de l'énergie. La raison de cette différence est certainement due à la présence du terme $\partial\rho^{(0)}/\partial t$ dans l'équation de Poisson (2.30). En effet, nous avons déjà montré la sensibilité de l'ordre global de résolution temporelle au type d'approximation employé pour ce terme. Nous savons notamment que, pour l'approximation choisie dans le cas présent, l'algorithme global est d'ordre 2 en temps. De ce point de vue, il n'est pas surprenant que la limite calculée pour le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 ne corresponde pas avec cette limite pratique.
Il faut noter que ce test n'a été accompli que pour un rapport de masses volumiques donné. Une augmentation de l'écart des masses volumiques ne peux qu'accroître l'influence de $\partial\rho^{(0)}/\partial t$. En conséquence, toute augmentation notable du rapport de masses volumiques doit entraîner une réduction du pas de temps limite assurant la stabilité de la résolution.

Condition de sortie

Le contrôle du bon fonctionnement de la condition de sortie fait partie des tests à réaliser pour s'assurer de la qualité de la solution obtenue. Idéalement, pour deux simulations qui ne diffèrent que par les dimensions du domaine, les solutions doivent être identiques dans la partie commune du domaine.
Pour le cas spatial traité ici, il n'y a pas de modification de traitement de la condition limite dans la direction transversale par rapport à l'écoulement temporel. Nous n'avons donc pas de doute à avoir vis-à-vis de son traitement. Par contre, la condition de sortie est plus à même d'introduire un dysfonctionnement que la condition périodique, car elle nécessite un modèle physique supplémentaire traduit ici par l'équation (2.54).

Ce test compare les solutions d'une simulation identique à la précédente mais à $Re = 400$ et sur des domaines de longueurs 105 et 135. Les pas de maillages sont $dx = 0.15$ et $dy = 0.133$ pour un pas de temps $dt = 0.03$. Les champs de vorticité obtenus sont ceux de la figure (2.12).
L'accord remarquable entre les deux simulations est confirmé par la figure (2.13) représentant le profil de vorticité le long de la ligne $y = 0$ au même instant que sur (2.12).
Nous pouvons donc conclure que la condition de sortie remplit tout à fait son rôle.

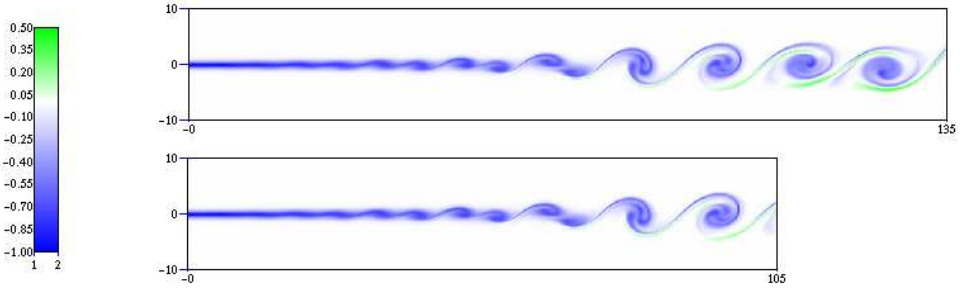


FIG. 2.12: Vorticité pour deux simulations anisothermes sur des domaines de longueurs différentes.

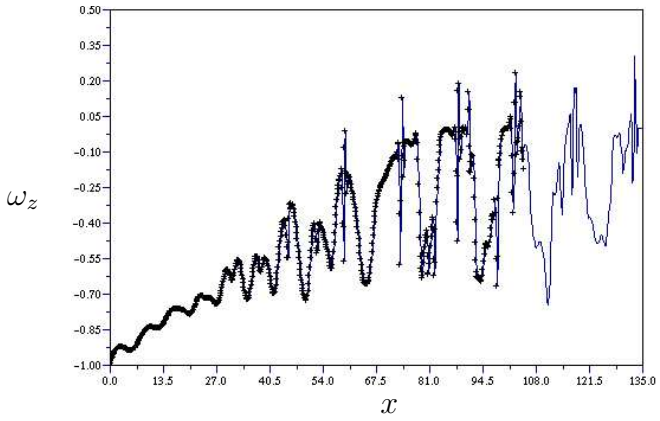


FIG. 2.13: Profils de vorticité pour les deux simulations anisothermes sur des domaines de longueurs différentes. (+) Domaine de longueur 105 ; —— Domaine de longueur 135.

Taux d'élargissement

L'étude du taux d'élargissement est un élément important de la dynamique des couches de mélange. Nous nous attachons ici à vérifier que nos simulations présentent un comportement conforme aux résultats connus sur cette grandeur.
Les valeurs des masses volumiques dans la partie lente et rapide jouent un rôle essentiel sur l'élargissement et sur la dynamique d'appariement. Soteriou et Ghoniem [100] ont consacré une étude numérique traitant de l'influence du rapport des masses volumiques sur différentes caractéristiques de la couche de mélange, dont le taux d'élargissement. Ils ont réalisé des simulations de couches de mélange spatiales par la méthode des éléments de transport Lagrangiens. Deux cas très caractéristiques ont été distingués : le cas d'écoulements non-forcés et celui de couches de mélange forcées sur le mode le plus instable et son premier sous-harmonique. Ils ont ainsi montré que le taux d'élargissement évolue très différemment en fonction du rapport

$$s = \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{2.73}$$

dans ces deux situations. Pour une simulation non-forcée, le taux d'élargissement augmente lorsque l'écoulement lent devient plus dense. Dans la situation forcée, le taux d'élargissement ne réagit pas de façon monotone aux évolutions de ρ_2/ρ_1 mais le paramètre qui permet de prévoir le comportement de la couche de mélange de façon uniforme est le rapport de quantité de mouvement

$$m = \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2. \tag{2.74}$$

Plus m est éloigné de 1, plus la couche de mélange s'élargit rapidement.
Dans nos applications acoustiques, nous utilisons des simulations forcées. Nous vérifions donc dans cette partie que la couche de mélange simulée vérifie le comportement constaté dans [100]. La figure (2.14) représente les paramètres utilisés dans [100] pour définir le taux d'élargissement. Les données de cette figure concernent le champ moyen sur l'ensemble des réalisations temporelles à partir de l'instant où un état quasi-périodique est atteint.

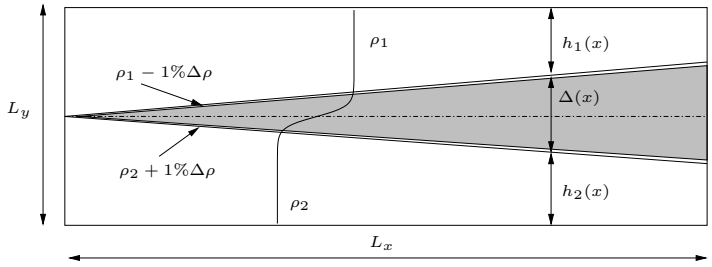


Fig. 2.14: Représentation des paramètres utilisés pour définir le taux d'élargissement. Les droites définies à $\rho_1 - 1\%\Delta\rho$ et $\rho_2 + 1\%\Delta\rho$ sont les droites des moindres carrés.

Le taux d'élargissement Δ' est finalement déduit de $\Delta(x)$ par

$$\Delta' = \frac{\Delta(x)}{x} - x_0 \tag{2.75}$$

où $\Delta(x)$ et x_0 sont estimés à partir du champ moyen de ρ par la méthode des moindres-carrés.
Nous réalisons ces estimations de Δ' pour trois rapports s différents (0.5, 2 et 3). Ces trois simulations sont toutes identiques, au rapport des masses volumiques près. Le nombre de Reynolds est $Re = 400$. Le rapport des vitesses est $r = U_2/U_1 = 0.5$. Comme dans [100], le forçage est appliqué sur le mode le plus instable et son premier sous-harmonique. Ces deux perturbations sont en phase l'une par rapport à l'autre. Le domaine de simulation choisi est $L_x \times L_y = 135 \times 30$. Dans tous les cas, le maillage utilisé est uniforme. Les paramètres des simulations sont résumés dans le tableau (2.2).

Dénomination	s	m	nx	ny	dt	A_0
SG-0.5	0.5	0.125	901	451	0.015	0.01
SG-2.0	2	0.5	901	301	0.03	0.01
SG-3.0	3	0.75	901	301	0.03	0.01

TAB. 2.2: Paramètres des simulations pour l'étude du taux d'élargissement.

Les valeurs obtenues pour Δ' sont rassemblées sur la figure (2.15), où elles sont comparées à celles de Soteriou et Ghoniem.

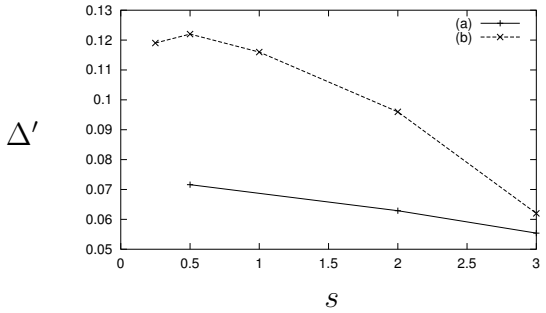


FIG. 2.15: Taux d'élargissement Δ' en fonction de $s = \rho_2/\rho_1$. (a) Résultats LMNA ; (b) Résultats de Soteriou et Ghoniem [100].

Nos valeurs ont des écarts importants avec celles de [100]. Cependant, elles observent la même tendance, à savoir que l'éloignement de m par rapport à 1 (qui a les même variations que s dans notre cas où U_2/U_1 ne varie pas d'une simulation à l'autre) entraîne une augmentation de Δ'. L'écart observé peut s'expliquer par une différence sur l'amplitude du terme de forçage qui agit directement sur le déclenchement des appariements et donc sur Δ'.
Les champs instantanés de vorticité pour ces trois simulations sont exposés sur la figure (2.16). La différence d'élargissement entre $s = 0.5$ et les deux autres simulations est visible. Entre les deux autres simulations, la différence d'expansion est très légère. On peut cependant noter que les tourbillons ont tendance à être étirés dans la direction

longitudinale lorsque s augmente. Il est très clair sur cette figure que les niveaux de vorticité augmentent quand s décroît, c'est-à-dire quand le courant rapide devient plus dense.

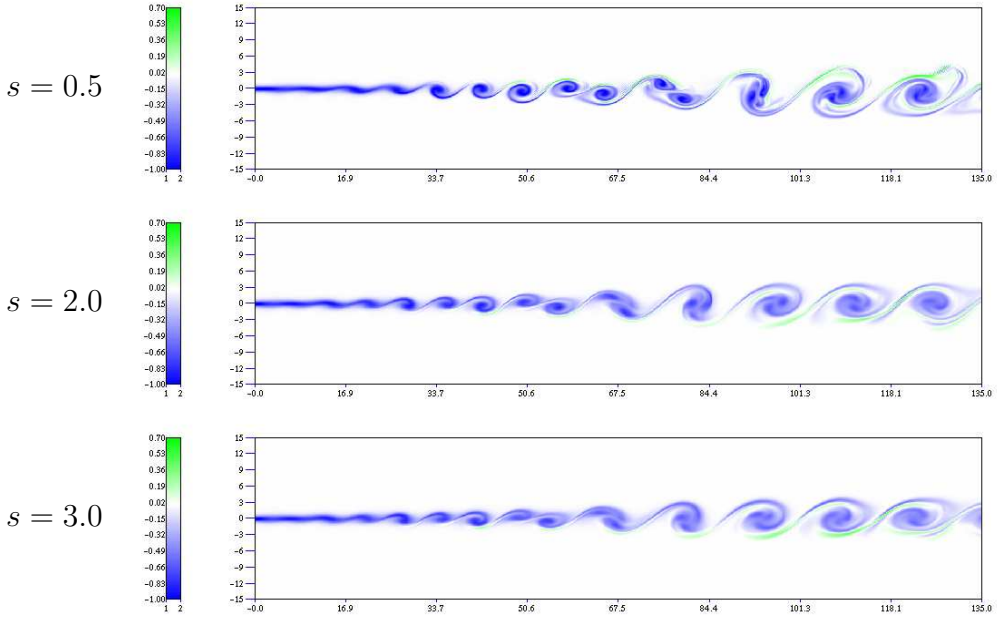


Fig. 2.16: Champs de vorticité pour les trois simulations à $s = 0.5$ (en haut), $s = 2.0$ (au milieu), et $s = 3.0$ (en bas).

Rapport d'entraînement volumétrique

Le rapport d'entraînement volumétrique caractérise le rapport entre la quantité de fluide entraînée dans la couche de mélange par la partie rapide sur celle entraînée par la partie lente. En utilisant la représentation géométrique de la figure (2.14), on peut calculer le déficit de fluide entre l'entrée et une section d'abscisse x contenu dans les parties (lente ou rapide) non mélangées. Ce déficit donne le volume de fluide qui a été entraîné d'une des deux parties vers la zone de mélange. On obtient ainsi une valeur locale du rapport d'entraînement volumétrique

$$E_v(x) = \frac{U_1(0)h_1(0) - U_1(x)h_1(x)}{U_2(0)h_2(0) - U_2(x)h_2(x)}. \tag{2.76}$$

La valeur globale est ensuite obtenue par une moyenne des valeurs locales

$$E_v = \frac{1}{N_s}\sum_{n=1}^{N_s} Ev(x_n) \tag{2.77}$$

où N_s est le nombre de positions locales prises en compte.

Ce paramètre est pour nous un bon repère, car comme pour le taux d'élargissement, il dépend du rapport des vitesses et du rapport des masses volumiques [33]. Au contraire du taux d'élargissement, le rapport d'entraînement se comporte de la même façon dans les situations d'écoulements forcés et non-forcés [100]. Il doit donc également être indépendant de l'amplitude du forçage employé, et nous devons finalement être en mesure de comparer nos valeurs à celles obtenues à partir des relations empiriques de [33]. La formule empirique de E_v est

$$E_v = s^{1/2}\left[1 + 0.68\left(\frac{1-r}{1+r}\right)\right]. \tag{2.78}$$

Les valeurs d'entraînement volumétrique obtenues et la courbe représentant la loi (2.78) sont reportées sur la figure (2.17).

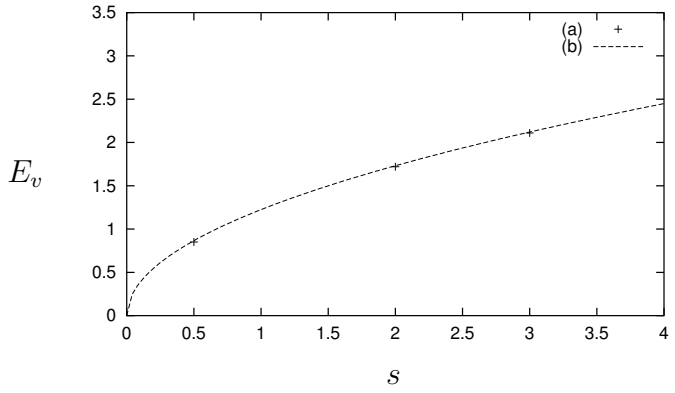


FIG. 2.17: Rapport d'entraînement volumétrique E_v en fonction de $s = \rho_2/\rho_1$. (a) Résultats LMNA ; (b) Loi empirique (2.78) de [33].

L'accord avec la loi (2.78) est excellent et confirme l'indépendance vis-à-vis du forçage. Ce résultat nous assure du bon comportement des solutions numériques obtenues.
Il faut noter que les valeurs de E_v obtenues numériquement ne concernent pas toutes les positions x_n disponibles sur la grille : seules les positions $x_n > (x_n)_{min}$ sont prises en compte. En effet pour des valeurs inférieures le dénominateur de $E_v(x_n)$ est très proche de zéro et fait diverger E_v. La valeur limite est la plus petite position pour laquelle E_v converge vers une valeur stable. Les courbes représentant E_v en fonction de $(x_n)_{min}$ pour chacune des simulations sont représentées sur la figure (2.18). La valeur finalement retenue pour le calcul de (2.77) est $(x_n)_{min} = 6$.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'approximation d'écoulements à faibles nombres de Mach. Cette approximation permet de calculer des écoulements anisothermes quasi-incompressibles dans le sens où les variations de masse volumique ne tiennent compte que

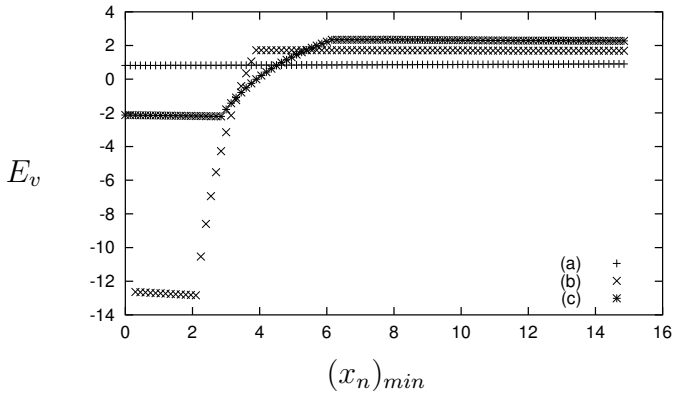


Fig. 2.18: Rapport d'entraînement volumétrique E_v en fonction de la première position prise en compte pour le calcul de (2.77). (a) $s = 0.5$; (b) $s = 2$; (c) $s = 3$. $(x_n)_{min} = 6$ est la valeur retenue pour le tracé de la figure (2.17).

des fluctuations de température.

Les techniques numériques utilisées ont été présentées et discutées. Le point clé de la méthode choisie que constitue l'inversion d'une équation de Poisson a été analysé en détail dans le cadre d'écoulements à masse volumique variable. L'importance de l'approximation du terme de variation temporelle de masse volumique a été mentionnée. Il a été montré que ce terme conditionne l'ordre global d'avancement temporel ainsi que la stabilité de la solution.

Des exemples d'applications aux cas des couches de mélange isothermes et anisothermes en développement temporel et spatial ont été présentés et utilisés pour la validation du code. Ces validations ont été réalisées par des comparaisons aux résultats fournis par d'autres codes - incompressible ou compressible - ou à des données de la littérature. Ce modèle représente avec précision la dynamique des écoulements anisothermes à bas nombre de Mach : toutes les caractéristiques propres aux écoulements à masse volumique variable ont été retrouvées.

Chapitre 3

Les Equations d'Euler Linéarisées

Ce chapitre est consacré à la présentation des équations d'Euler linéarisées et des techniques mises en œuvre pour leur résolution. Des validations du propagateur sont présentées.

3.1 Formulation

Les équations d'Euler linéarisées pour une petite perturbation $\mathbf{U}' = [\rho', u_i', p']$ autour d'un écoulement moyen stationnaire $\mathbf{U_0} = [\rho_0, u_{0i}, p_0]$ s'écrivent

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho_0 u_j' + \rho' u_{0j}\right) = S_\rho \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \rho_0 u_i'}{\partial t} + \left(\rho_0 u_j' + \rho' u_{0j}\right)\frac{\partial u_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho_0 u_{0j} u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = S_i \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(p' u_{0j} + \gamma p_0 u_j'\right) + (\gamma - 1)\left[p'\frac{\partial u_{0j}}{\partial x_j} - u_j'\frac{\partial p_0}{\partial x_j}\right] = S_e \tag{3.3}$$

où $\mathbf{S} = [S_\rho; S_i; S_e]$ représente les sources à l'origine des perturbations.

3.1.1 Eléments sur la théorie des modes de perturbations

Bien que reconnue incomplètement satisfaisante dans le cas d'écoulements porteurs non uniformes, la théorie des modes de perturbations due à Chu & Kovásznay [24] permet souvent d'aider à l'analyse des solutions des équations d'Euler linéarisées. Elle permet notamment de formaliser le lien avec les développements mathématiques nécessaires au traitement des conditions aux limites.
Sans entrer dans les détails de cette théorie nous rappelons qu'elle conduit pour les EEL à l'introduction de trois modes de perturbations :

le mode acoustique est caractérisé par des fluctuations isentropiques couplées en pression et en masse volumique, et par des fluctuations irrotationnelles en vitesses ;

le mode rotationnel est caractérisé par des fluctuations en vitesses dont la divergence est nulle sans perturbations en pression ni en masse volumique ;

le mode entropique est constitué uniquement de fluctuations en masse volumique.

Les modes entropiques et rotationnel sont convectés par l'écoulement porteur, alors que le mode acoustique se propage à la vitesse du son par rapport à l'écoulement porteur.
Il est important de garder à l'esprit que cette décomposition ne tient pas compte des éventuelles interactions entre les modes dès lors que l'on se trouve en présence d'un écoulement porteur non-uniforme. Une telle situation peut par exemple conduire au fait que la densité contienne des fluctuations correspondant au mode entropique (et donc convectées par l'écoulement porteur) alors que seul le mode acoustique a été excité. De même cette décomposition ne tient compte que d'un ordre de grandeur : des fluctuations de pression d'un ordre de grandeur peuvent donc être associées au mode rotationnel considéré à l'ordre supérieur.

3.1.2 Méthodes numériques

Pour le code développé au cours de ce travail de thèse, la résolution numérique de ces équations est basée sur les mêmes techniques de discrétisation que celles utilisées par les codes DNS incompressible, LMNA et compressible. Les dérivations spatiales sont effectuées en utilisant les schémas aux différences finies compacts [72] sur un maillage cartésien. L'intégration temporelle est effectuée par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4.

3.1.3 Les différents types de sources

Suivant le type de simulations réalisées, nous avons la possibilité d'utiliser différents types de sources $\mathbf{S} = [S_\rho, S_i, S_e]$.
Dans les cas de simulations de validations et de caractérisation des propriétés de propagation, nous pouvons avoir recours à des sources impulsionnelles ou entretenues. Dans le premier cas, la source est modélisée par l'intermédiaire des conditions initiales sur la perturbation $\mathbf{U}'$. Dans le second cas, c'est la définition de $\mathbf{S}(\mathbf{t})$ qui caractérise le type de sources.
En supposant un milieu homogène au repos, de masse volumique ρ_0, les EEL se réduisent à

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = S_\rho \tag{3.4}$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_i'}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} = S_i \tag{3.5}$$

Par élimination de u_i', on obtient alors l'équation de propagation en milieu homogène au repos

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial S_\rho}{\partial t} - \frac{\partial S_i}{\partial x_i} \tag{3.6}$$

On peut alors identifier les sources dipolaires et quadripolaires telles qu'elles sont habituellement définies pour l'équation d'ondes [6,30]. Ainsi, une distribution de force externe

F_i agissant sur le fluide telle que $S_i = F_i$ est équivalente à une source dipolaire et une distribution $S_i = \partial T_{ij}/\partial x_j$ est équivalente à une source quadripolaire. Par le même raisonnement, on peut associer une distribution S_ρ à une source monopolaire.

3.2 Conditions aux limites

3.2.1 Choix du type de conditions aux limites

En aéroacoustique, il est très fréquent de s'intéresser à la propagation en espace libre.
Expérimentalement, l'étude de ce type de problèmes se fait en milieu dit anéchoïque, c'est-à-dire dans des espaces dont les parois sont traitées pour éviter au mieux la réflexion des ondes acoustiques.
Numériquement, on ne peut faire autrement que de modéliser tout problème sur un domaine fini. Il est donc nécessaire de s'assurer de la transparence des frontières numériques vis-à-vis de la propagation. Le traitement numérique de ces conditions aux limites est couramment désigné dans la littérature par le sigle NRBC (pour Non-Reflecting Boundary Conditions).
L'efficacité de ces conditions aux limites du domaine de calcul est un point très important en aéroacoustique numérique. Un taux de réflexion des frontières trop élevé conduit inévitablement à la création artificielle d'ondes pouvant avoir des caractéristiques (amplitudes ou longueurs d'ondes) proches de celles que l'on cherche à modéliser. Il est alors impossible de les identifier avec certitude et de faire la différence entre les ondes physiques et ces ondes "parasites".

La mise au point de ces conditions constitue un axe de recherche important de la CAA. Un grand nombre de travaux ont été réalisés et publiés depuis une trentaine d'années [26, 49], conduisant à des améliorations importantes dans le traitement de ces conditions aux limites.

Notre propos ne se situe pas dans le cadre de cette activité spécifique. Cependant, il est impératif pour nous de choisir et d'adapter les conditions nous permettant d'obtenir la précision nécessaire à nos investigations. La figure (3.1) extraite de [26] résume bien la situation que nous avons à traiter. Sur la partie gauche, de cette figure, la zone source est entièrement contenue dans le domaine de simulation. En dehors de la région S, les ondes s'atténuent naturellement en se propageant et les effets non-linéaires deviennent négligeables. Moyennant des hypothèses sur le milieu ambiant dans la région L, il existe un certain nombre de méthodes plus ou moins efficaces permettant de définir les conditions aux limites. Ce cas sera traité dans la suite de cette partie.
En revanche, sur la partie droite de la figure (3.1), la région S traverse la frontière du domaine de simulation. Des effets non-linéaires viennent alors mettre à mal les méthodes mentionnées ci-dessus. A notre connaissance, il n'existe pas à ce jour de formulation mathématique rigoureuse permettant de résoudre ce problème. Un certain nombre de techniques basées sur l'adjonction en sortie de domaine de zones sacrifiées (dites zones tampons ou zones éponges,...), ayant pour unique rôle d'atténuer progressivement les effets perturbant de la turbulence vis-à-vis des conditions de sortie ont alors été développées. Il

existe maintenant une certaine maîtrise de ces techniques, mais leur défaut principal est leur manque d'universalité : pour être efficaces, elles nécessitent toutes d'être mises au point au cas par cas, en fonction de l'écoulement étudié et seule une démarche empirique permet de s'assurer de leur efficacité. Nous y reviendrons plus en détail dans la partie sur la simulation de la couche de mélange spatiale.

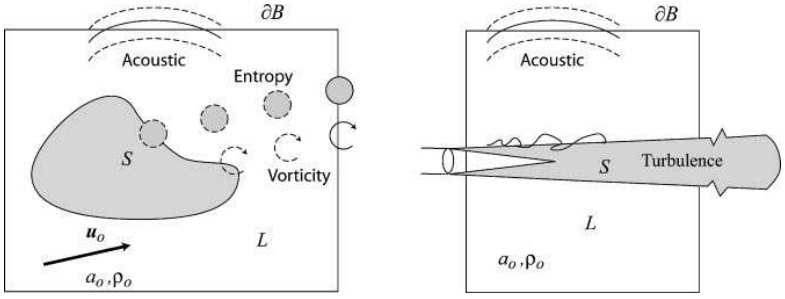


FIG. 3.1: Représentation d'un domaine de simulation. A droite, un domaine de simulation pour un jet turbulent : la région source s'étend au-delà du domaine de simulation (figure extraite de [26]).

Trois grandes familles de méthodes se sont démarquées dans la littérature concernant les conditions correspondant au cas de gauche de la figure (3.1). Afin d'affiner notre choix, nous nous sommes en partie basé sur les résultats de [60], article dans lequel les auteurs ont établi une comparaison entre les méthodes de Thomson [112], Giles [48] et de Tam & Webb [106]. La méthode de Thomson est une méthode aux caractéristiques quasi-unidimensionnelle, celle de Giles est basée sur la décomposition de la solution en modes de Fourier, et Tam & Webb utilisent une analyse asymptotique des EEL. Il ressort de cette étude que dans le cas des frontières en aval d'écoulement, seules les conditions de Tam & Webb conduisent à un taux de réflexion acceptable. Les deux autres n'obtiennent de bonnes performances que dans le cas d'écoulement quasi-unidimensionnel perpendiculaire à la frontière. De plus, même dans ce cas particulier, la méthode asymptotique fournit de meilleurs résultats que les deux autres.

Hu [64] a introduit en CAA la méthode de Perfectly Matched Layer (PML) initialement développée dans le cadre de l'étude du rayonnement électromagnétique par Bérenger [9]. Cette technique consiste à dissiper progressivement toutes les perturbations calculées dans une zone accolée à la frontière du domaine. Ceci est obtenu en décomposant chacune des inconnues du problème, et en ajoutant un terme de dissipation aux équations concernant la direction normale à la frontière considérée. Cette technique d'abord perçue comme une solution efficace s'est révélée instable dans le cas de simulations de longues durées [1,108]. Des améliorations ont ensuite été apportées à la formulation de cette méthode [2,65,82]. Ce n'est que très récemment que Hagstrom & Nazarov [57] ont étendu l'étude des PML aux cas d'écoulements non-uniformes. Ils n'ont pu obtenir des résultats satisfaisant qu'au prix d'une optimisation des paramètres de la PML pour le cas étudié.

Lorsque nous avons commencé cette étude, ces résultats n'étaient pas publiés et les meilleures conditions disponibles pour le cas d'écoulement non-uniformes étaient alors celles de Tam et Dong.

3.2.2 Conditions de Tam et Dong

Dans les simulations en configuration spatiale (par opposition aux simulations temporelles pour lequel l'écoulement est périodique dans sa direction principale), nous utilisons les conditions de Tam et Dong [104]. Ces conditions sont dérivées des conditions de Tam et Webb [106]. Il s'agit plus précisément de leur généralisation aux cas d'écoulements porteurs non-uniformes.
Dans cette partie, nous exposons le principe de fonctionnement de cette technique et sa mise en œuvre.

Les conditions de Tam & Dong font partie des méthodes dites asymptotiques : elles sont obtenues en considérant que les frontières sont "suffisamment éloignées" des sources. Cette hypothèse permet de remplacer les équations complètes au voisinage des frontières par des équations que vérifient les solutions asymptotiques associées à chaque mode de fluctuation. Comme nous l'avons vu précédement, les équations d'Euler linéarisées supportent trois types de modes de fluctuations, et les conditions aux limites doivent être capables de permettre la sortie de ces trois modes. La méthode développée par Tam & Dong distingue deux types de frontières : les frontières pour lesquelles l'écoulement porteur est débitant et celles pour lesquelles il ne l'est pas. En effet, les modes entropique et rotationnel étant convectés par l'écoulement porteur n'ont pas à être pris en compte pour l'évacuation à une frontière non débitante. De plus, pour des écoulements subsoniques, le mode acoustique se propage dans toutes les directions. Sa sortie est donc à assurer à toutes les frontières du domaine. La figure (3.2) résume la situation pour le cas de la propagation au sein d'un écoulement dont la direction principale est $\overrightarrow{x}$.

Deux hypothèses majeures gouvernent l'obtention des conditions de Tam & Dong :
– l'écoulement porteur est seulement faiblement non-uniforme ;
– dans le champ lointain, les perturbations acoustiques se propagent radialement par rapport à la source.

Ces deux hypothèses permettent dans un premier temps de déterminer une approximation de la vitesse de groupe aux frontières. A partir de la théorie des rayons, cette vitesse est la somme vectorielle de la vitesse d'entraînement par le champ porteur et de la vitesse de propagation. Sur la figure (3.3), $\overrightarrow{V}$ représente la vitesse de groupe en un point de la frontière, $\overrightarrow{U_0}$ la vitesse du champ porteur en ce point et $\overrightarrow{c_0}$ la vitesse de propagation acoustique locale.

La vitesse de groupe est donnée par

$$V(r,\theta) = \overrightarrow{U_0}.\overrightarrow{e_r} + \sqrt{c_0^2 - \left(\overrightarrow{U_0}.\overrightarrow{e_\theta}\right)^2}. \tag{3.7}$$

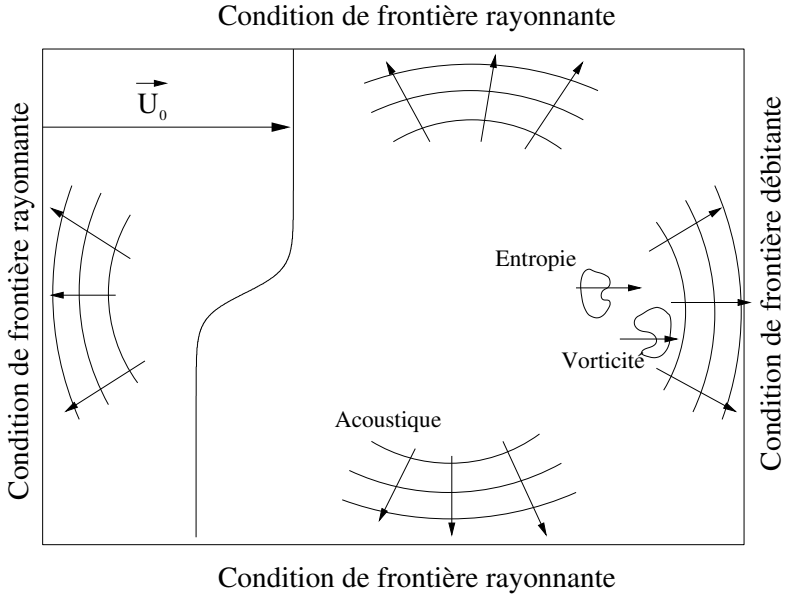


FIG. 3.2: Les différents types de frontières des conditions de Tam & Dong.

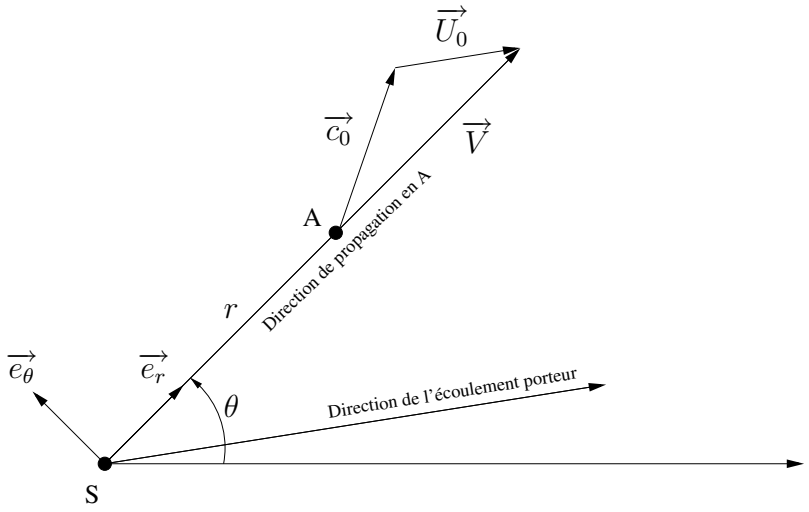


FIG. 3.3: Détermination de la vitesse de groupe.

Tam *et al.* [104, 106] montrent alors que la condition de frontière rayonnante s'écrit

$$\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\rho\\u_i\\p\end{bmatrix}+\frac{x_j}{r}\frac{\partial}{\partial x_j}\begin{bmatrix}\rho\\u_i\\p\end{bmatrix}+\frac{1}{2r}\begin{bmatrix}\rho\\u_i\\p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Pour la condition de frontière débitante, ils obtiennent les équations

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u_{0j}\frac{\partial\rho}{\partial x_j} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial p}{\partial t}+u_{0j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{p}{c_0^2}\right) \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_{0j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{-1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{r}\left(x_j\frac{\partial p}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2r}p=0 \tag{3.11}$$

Mise en œuvre

D'après ce qui précède, les équations de ces conditions aux limites font intervenir les positions relatives des frontières et des sources. Dans le cas du rayonnement d'un écoulement turbulent, il existe au sein de l'écoulement une distribution continue de sources et les conditions limites utilisées doivent être capable de permettre la sortie des ondes émises par toutes ces sources. Pour leur mise en œuvre ces conditions limites supposent que toutes les sources sont situées au centre du domaine de calcul. Cette considération introduit inévitablement une augmentation du taux de réflexion des frontières par rapport au cas idéal d'une source ponctuelle dont la position serait connue et prise en compte exactement. Plus les sources seront réparties sur une étendue importante, et moins les conditions limites fonctionneront de façon optimale. Cependant, ce type de conditions est utilisé pour trouver une solution en espace libre. Le domaine de calcul est donc généralement assez étendu pour que l'écart de position des sources par rapport au centre du domaine soit négligeable par rapport à la distance entre les frontières et le centre du domaine.

Les équations résolues sont finalement les EEL (3.1 - 3.3) pour les points intérieurs du domaine, et les équations (3.8 - 3.11) sur les points frontières.

Le traitement des points réalisant l'interface entre une frontière rayonnante et une frontière débitante (les deux coins de droite sur la figure (3.2)) est établi en considérant ce type de points comme appartenant à la frontière rayonnante.
Notons enfin que l'inhomogénéité en température ne conduit à aucune modification des conditions aux limites. La seule contrainte à prendre en considération est la nécessité d'utiliser les valeurs locales de masse volumique ρ_0 et de vitesse du son c_0.

3.3 Filtrage spatial

Des tests préliminaires incluant le traitement des conditions de frontières non réfléchissantes ont permis de révéler la nécessité d'utiliser un filtrage spatial des grandeurs calculées.

En effet, l'évacuation des différents modes de perturbations contenus dans la solution des EEL provoque l'apparition d'oscillations numériques en dents de scie n'ayant aucune réalité physique. Ce phénomène a déjà été signalé dans [95]. Ces oscillations parasites sont de très faibles amplitudes et n'affectent pas directement le champ calculé. Cependant, elle sont très mal évacuées du domaine de simulation et, à la manière de ce qui est décrit dans [25] dans le cas de maillages non-uniformes, provoquent la création d'ondes de plus grandes amplitudes, indissociables des ondes physiques dès qu'elles atteignent une des frontières. Le champ calculé est alors largement altéré. Le filtrage spatial permet de supprimer ces ondes parasites dès leur apparition évitant ainsi de contaminer la solution. Plus précisément, il élimine ces perturbations en supprimant les échelles non résolues par les schémas compacts.

3.3.1 Filtre compact

En cohérence avec les schémas de dérivation utilisés, le filtrage spatial est réalisé à l'aide des filtres compacts [72]. Leur formulation générale est

$$\begin{aligned} \beta\hat{f}_{i-2} + \alpha\hat{f}_{i-1} + \hat{f}_i + \alpha\hat{f}_{i+1} \quad &+ \quad \beta\hat{f}_{i+2} = \\ af_i + \frac{b}{2}\left(f_{i+1} + f_{i-1}\right) \quad &+ \quad \frac{c}{2}\left(f_{i+2} + f_{i-2}\right) + \frac{d}{2}\left(f_{i+3} + f_{i-3}\right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

où $\hat{f}_i$ représente la valeur filtrée de f au nœud i.
Comme pour les schémas de dérivation, l'analyse de Fourier permet d'analyser le fonctionnement des filtres de façon naturelle. La fonction de transfert d'un tel filtre [72] est donnée par

$$T(w) = \frac{a + b\cos(w) + c\cos(2w) + d\cos(3w)}{1 + 2\alpha\cos(w) + 2\beta\cos(2w)} \tag{3.13}$$

où w représente le nombre d'onde.
L'expression (3.12) défini un ensemble de filtres qui peuvent avoir différentes caractéristiques en termes de précision et de fonction de transfert suivant le jeu de coefficients $(\alpha, \beta, a, b, c, d)$. Nous utilisons le filtre compact d'ordre 6. Les relations imposées entre les coefficients pour avoir cet ordre de précision sont

$$\beta = \frac{3 - 2\alpha}{10} \quad a = \frac{2 + 3\alpha}{4} \quad b = \frac{6 + 7\alpha}{8} \quad c = \frac{6 + \alpha}{20} \quad d = \frac{2 - 3\alpha}{40} \tag{3.14}$$

Il existe donc pour ce filtre, un degré de liberté pour le choix de α et la fonction de transfert obtenue dépend finalement uniquement de ce choix. La figure (3.4) présente différentes fonctions de transferts associées à différentes valeurs de α. Cette figure montre que plus α est petit, plus les grandes échelles de longueurs sont affectées par le filtre. Il est donc important de ne choisir α ni trop faible, afin de ne pas filtrer des ondes ayant une signification physique, ni trop élevé, pour filtrer tout de même efficacement les ondes parasites.

Nous verrons dans la section suivante, l'influence du choix de α sur un exemple dont la solution analytique est connue. Ce cas nous permettra de faire un choix raisonné de ce paramètre.

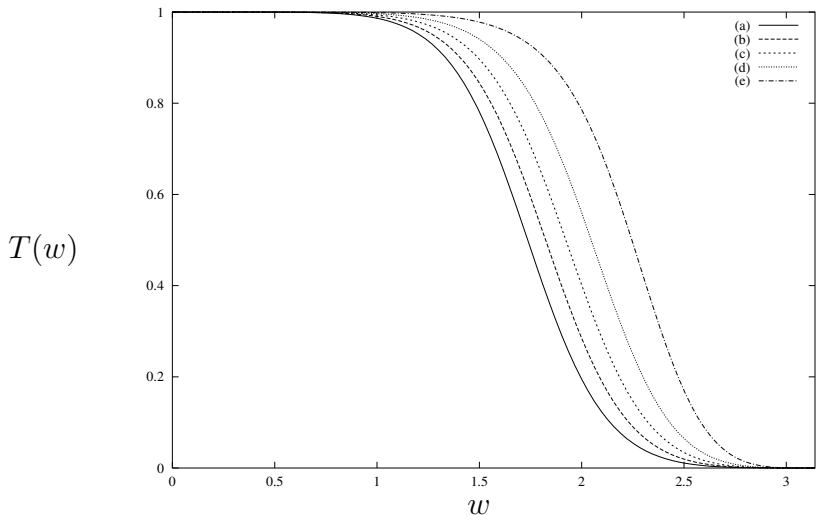


Fig. 3.4: Fonction de transfert T du filtre compact d'ordre 6 en fonction du nombre d'onde w pour : (a) $\alpha = 0.2$, (b) $\alpha = 0.3$,(c) $\alpha = 0.4$,(d) $\alpha = 0.5$,(e) $\alpha = 0.6$.

3.4 Validations du code de calcul

Avant de réaliser le couplage entre un code de simulation directe de l'écoulement et un propagateur, la validation des différents outils pris indépendamment est nécessaire. Pour le propagateur, cette étape contient plusieurs aspects.

Le premier point consiste en la vérification des propriétés de propagation : en ayant recours à des méthodes numériques inadaptées, un code de résolution des EEL peut s'avérer trop dispersif ou dissipatif et ainsi ne pas répondre aux exigences de la CAA. Le second point est la vérification de l'efficacité des conditions aux limites utilisées. C'est un point capital en aéroacoustique numérique, qui fait l'objet aujourd'hui encore de recherches intenses.
Dans un premier temps nous allons étudier l'influence du paramètre α du filtrage (*Cf.* partie 3.3.1). Nous nous attacherons ensuite à estimer la qualité obtenue sur le traitement des conditions aux limites sur des cas tests académiques. Dans un second temps, une partie des simulations conduites au cours de ce travail de thèse étant basée sur une configuration d'écoulement temporel, l'efficacité des conditions aux limites pour cette situation sera examinée.

3.4.1 Source impulsionnelle en écoulement uniforme

Dans cette partie nous traitons de la propagation d'une perturbation générée par une source impulsionnelle au sein d'un écoulement uniforme. Ce problème classique a notamment servi à la validation du schéma DRP ainsi que des conditions aux limites de Tam & Webb [106] où la solution analytique du problème est exposée.
Comme nous l'avons vu précédement, les équations d'Euler linéarisées peuvent décrire les

évolutions des modes acoustique, entropique, et rotationnel. Afin de caractériser au mieux le code développé, nous allons examiner les évolutions correspondant à ces trois modes de fluctuations.

Les sources correspondant à chacun de ces modes de fluctuations vérifient les propriétés suivantes [106] :
– fluctuations de densité et de pression sans fluctuations de vitesses pour le mode acoustique ;
– fluctuations de densité uniquement pour le mode entropique ;
– fluctuations de vitesses (à divergence nulle) uniquement pour le mode rotationnel.
Dans ce test, à l'instant initial, les sources correspondant à chacun de ces modes sont données par les relations suivantes :
– Mode acoustique

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho & = & \varepsilon_a e^{-\alpha_a((x-x_a)^2+(y-y_a)^2)} \\ u & = & 0 \\ v & = & 0 \\ p & = & c_0^2 \varepsilon_a e^{-\alpha_a((x-x_a)^2+(y-y_a)^2)} \end{array}\right. \tag{3.15}$$

– Mode entropique

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho & = & \varepsilon_e e^{-\alpha_e((x-x_e)^2+(y-y_e)^2)} \\ u & = & 0 \\ v & = & 0 \\ p & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.16}$$

– Mode rotationnel

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho & = & 0 \\ u & = & \varepsilon_h y e^{-\alpha_h((x-x_h)^2+(y-y_h)^2)} \\ v & = & \varepsilon_h x e^{-\alpha_h((x-x_h)^2+(y-y_h)^2)} \\ p & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.17}$$

Dans ces expressions, α_x ($x = a$, e ou h) est relié à la demi-largeur de la gaussienne b_x par $\alpha_x = \ln 2/b_x^2$. Comme dans [106], un cas unique synthétisant le comportement du code vis-à-vis de chacun des modes est présenté ici. Nous calculons au cours d'une unique simulation le champ produit par la superposition de chacune de ces perturbations. Les paramètres de ces simulations sont $\varepsilon_a = 0.01$, $b_a = 3$, $\varepsilon_e = 0.001$, $b_e = 5$ et $\varepsilon_h = 0.0004$, $b_h = 5$. Le domaine de simulation est un carré de coté $L_x = L_y = L = 200$.

Les trois modes se développant différemment (les modes entropique et rotationnel sont uniquement convectés par l'écoulement alors que le mode acoustique se propage à la vitesse du son), les sources sont localisées à l'instant initial de sorte que les fronts de l'ensemble des perturbations atteignent la frontière aval en même temps. Les impulsions initiales sont donc imposées en $(x_a, y_a) = (0, 0)$ (soit le centre du domaine) et $(x_h, y_h) = (x_e, y_e) = (L/3, 0)$ (voir la figure (3.5)).

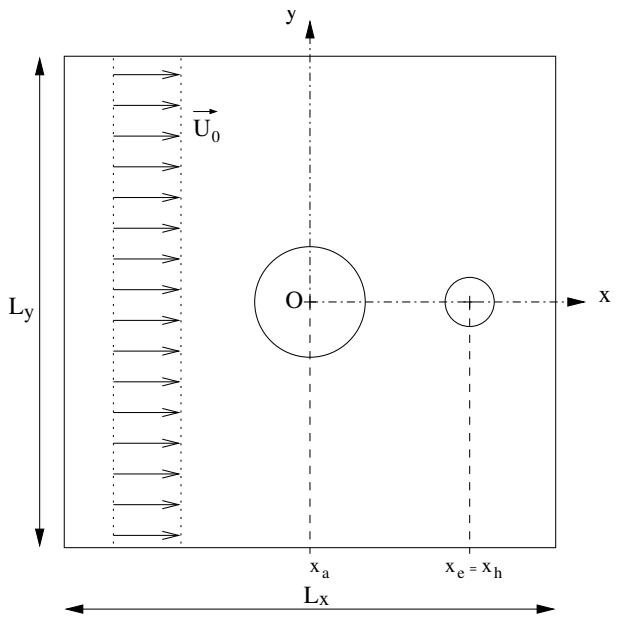


Fig. 3.5: Source impulsionnelle en écoulement uniforme : localisation des sources à l'instant initial.

Choix du paramètre de filtrage spatial

Pour effectuer ce choix nous comparons les solutions du problème décrit ci-dessus obtenues d'une part avec la solution analytique et d'autre part avec notre code pour différentes valeurs de α.
Nous traçons sur la figure (3.6) le profil de la perturbation de masse volumique le long de l'axe $y = 0$ juste avant que les perturbations n'atteignent la frontière aval du domaine. L'instant choisi correspond à 500 itérations de la simulation. Le tracé ainsi obtenu correspond à une simulation ayant duré suffisamment longtemps pour être en mesure d'observer une dérive éventuelle du résultat et n'est pas biaisé par les conditions de sortie. Cette figure présente les profils obtenus pour $\alpha = 0.4$, 0.5, 0.6 et 0.64. Les figures (3.6-(1)) et (3.6-(2)) montrent que les amplitudes des pics du mode acoustique sont sous-estimées et que des oscillations apparaissent aux pieds de ces mêmes pics. En observant les isocontours de la figure (3.7), nous pouvons constater que les oscillations visibles pour les valeurs faibles de α révèlent l'introduction de dispersion numérique par un filtrage de nombre d'onde de coupure trop petit. Enfin, signalons que pour les quatre cas présentés ici, le filtrage a rempli son rôle en supprimant les oscillations en dents de scie créées à la frontière aval. La valeur la mieux adaptée dans notre cas est donc $\alpha = 0.64$ puisqu'elle conduit à un filtrage efficace sans réduire la qualité de la discrétisation spatiale.

Evaluation des conditions de frontières non-réflechissantes

La figure (3.8) montre les profils de densité obtenus le long de l'axe $y = 0$ à différents instants par les EEL et par la solution analytique de référence. Ces figures présentent un accord excellent entre les deux méthodes : les courbes sont quasiment superposées deux à

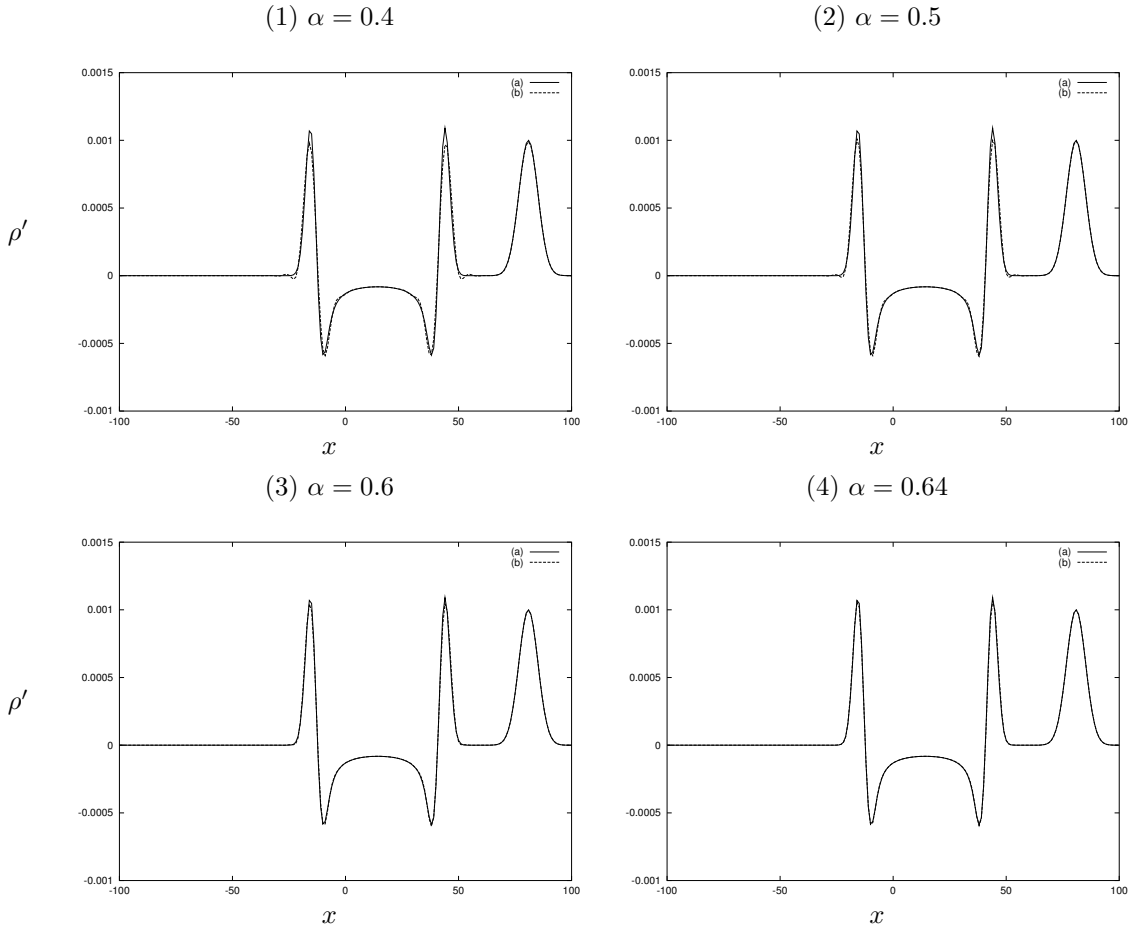


FIG. 3.6: Profils de ρ' le long de l'axe $y = 0$ à $t = 28.45$ pour différentes valeurs du paramètre de filtrage spatial α. (a) Solution analytique, (b) EEL.

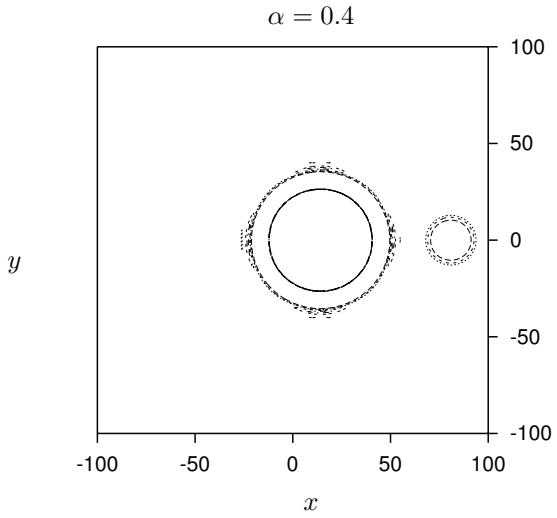


Fig. 3.7: Isocontours de ρ' pour $\alpha = 0.4$ après 500 itérations. Isocontours tracés à -5.10^{-5},-2.10^{-5},-1.10^{-5},1.10^{-5},2.10^{-5},5.10^{-5}

deux. Les figures (3.8) et (3.9) permettent de vérifier que les schémas numériques utilisés n'introduisent pas de dispersion et de dissipation numérique. En effet, la forme circulaire des différents fronts est conservée tout au long du calcul, et l'amplitude des perturbations est en accord quasiment parfait avec la solution analytique. La solution obtenue correspond également très bien à celle fournie dans [95,106] à partir du schéma DRP. Comme le montre la figure (3.10), les réflexions produites par la sortie des perturbations conduisent à des fluctuations de masse volumique n'excédant pas 0.5% de l'amplitude initiale de l'excitation acoustique. Ce résultat, du même ordre de grandeur que ceux de [95, 106] valide la mise en œuvre des conditions aux limites dans le code.

3.4.2 Source quadripolaire

Afin de valider la bonne prise en compte des caractéristiques de propagation de notre code en écoulement non-uniforme, nous reproduisons la simulation du champ rayonné par une source quadripolaire située dans un jet bidimensionnel de Bickley. Nous comparons alors nos résultats à ceux de [56]. L'écoulement moyen est défini par l'expression

$$u_0(x,y) = \frac{M}{\cosh^2\left((1+\sqrt{2})y/b\right)} \tag{3.18}$$

où M est le nombre de Mach du jet basé sur la vitesse maximale au milieu du jet et sur la célérité du son dans le milieu au repos et b est la demi-largeur du jet. Ces paramètres sont fixés à $M = 0.5$ et $b = 25$.
La source quadripolaire imposée est de la forme $S_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$ ou

$$T_{ij} = \frac{20A}{\pi}\begin{bmatrix} -\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right)e^{-\alpha y^2} & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi y}{20}\right)e^{-\alpha x^2} \end{bmatrix}.\sin(\omega t) \tag{3.19}$$

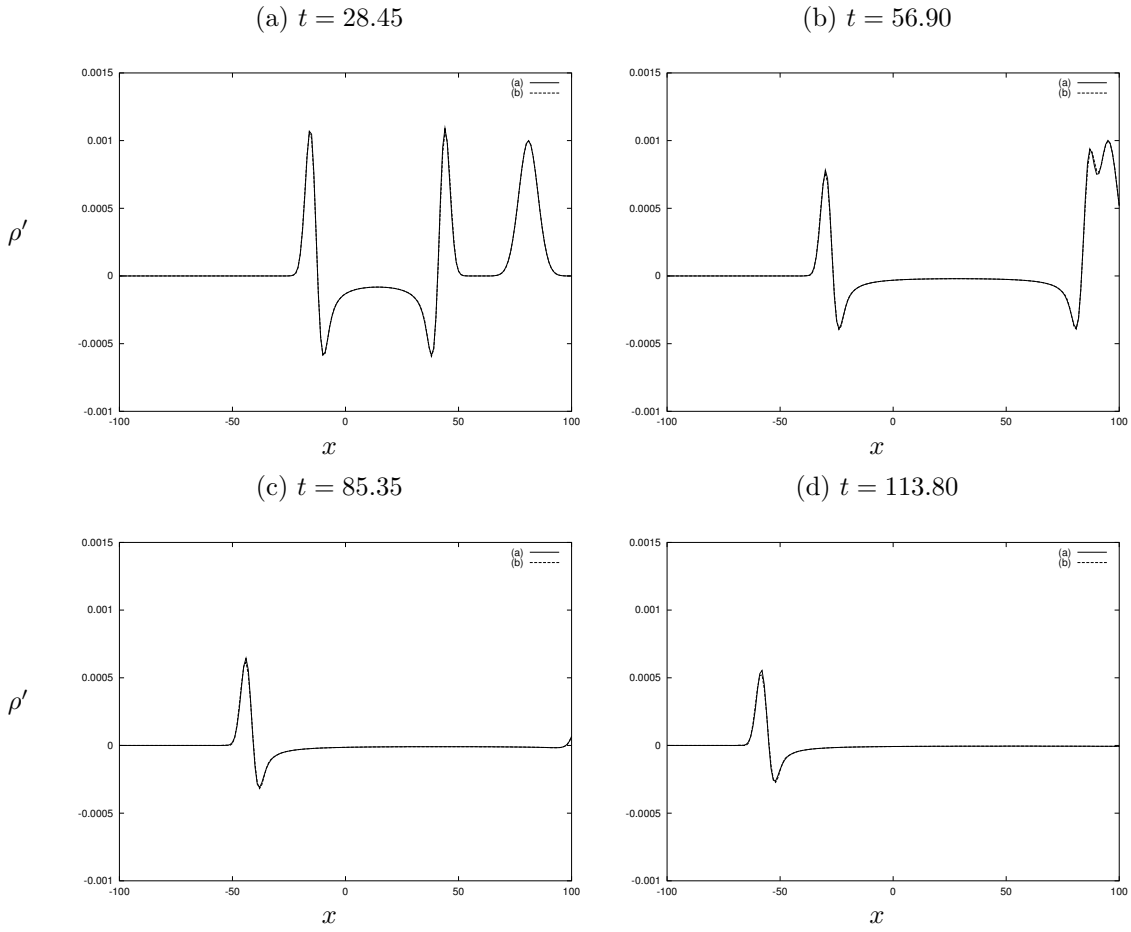


FIG. 3.8: Profils de ρ' le long de l'axe $y = 0$ à différents instants. (a) Solution analytique, (b) EEL.

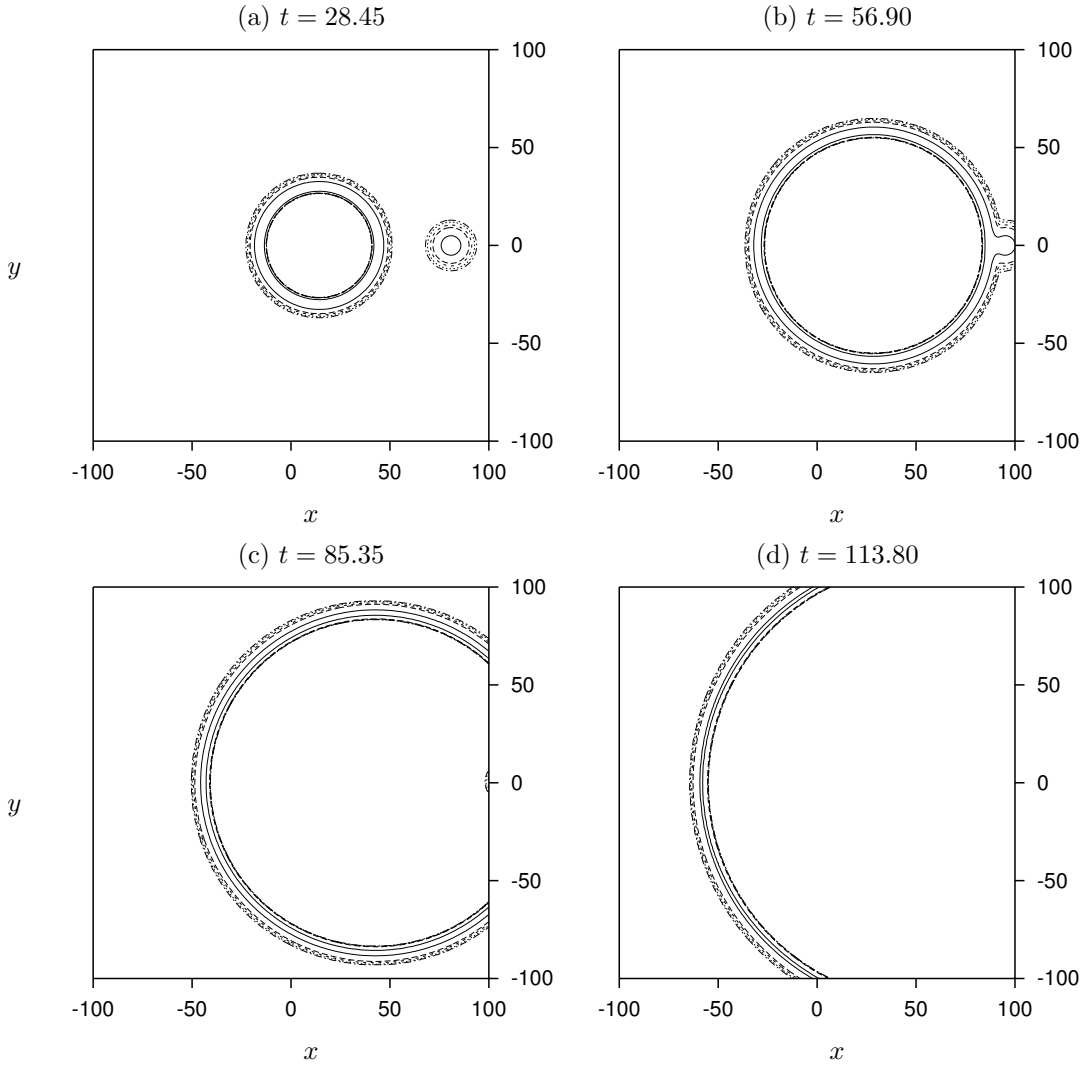


Fig. 3.9: Isocontours de ρ' à différents instants obtenus par les EEL. Isocontours $\rho' = 1.10^{-5}, 2.10^{-5}, 5.10^{-5}, 1.10^{-4}, 2.10^{-4}$.

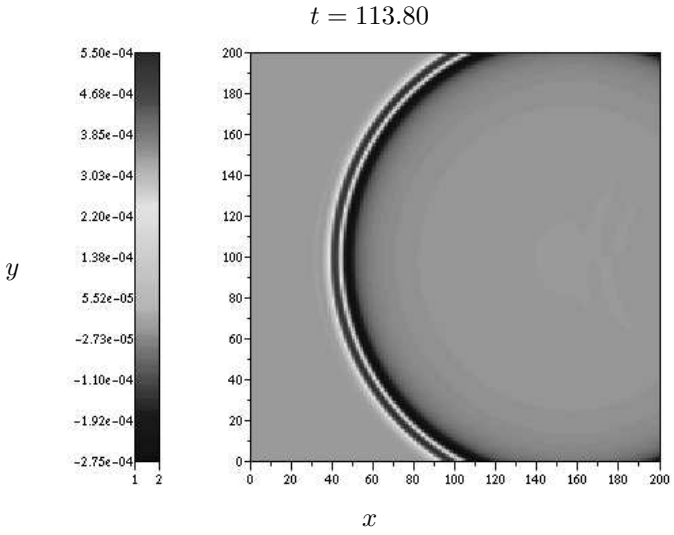


FIG. 3.10: Niveaux de ρ' après la sortie aval des perturbations.

et est appliquée sur la région $(x, y) \in [-10; 10] \times [-10; 10]$. Les valeurs des paramètres définissant la source sont $\alpha = \frac{\ln 2}{5}$, $\omega = \frac{2\pi}{60}$ et $A = 0.01$.
Les dimensions du domaine de simulation sont $L_x \times L_y = 400 \times 400$ et le maillage régulier vérifie $dx = dy = 1$. Le pas de temps de simulation $dt \simeq 0.427$ est choisi pour permettre une comparaison directe aux résultats de [56].
La figure (3.11) montre un accord remarquable entre les isocontours de pression que nous obtenons et ceux de [56]. On peut cependant noter que des perturbations de nature rotationnelle apparaissent dans notre cas de façon un peu plus marquée dans l'axe du jet autour de la position $x = 150$.
Puisque l'étude de la génération et de la propagation en milieu inhomogène en température fait partie de nos objectifs, nous présentons ici les résultats d'une simulation calquée sur la précédente mais pour laquelle la température augmente dans le jet. L'évolution de la masse volumique est donnée par la relation

$$\rho_0(x, y) = \left[1 - \frac{1 - k_\rho}{\cosh^2\left((1 + \sqrt{2})y/b\right)}\right] \rho_{ref} \tag{3.20}$$

où ρ_{ref} est la masse volumique du milieu au repos. Cette répartition avec $k_\rho = 0.5$ conduit à un rapport maximal de températures entre le milieu extérieur et le jet égal à 2. Tous les autres paramètres sont inchangés par rapport au problème isotherme. La figure (3.12) montre les isocontours de pression obtenus à partir de cette simulation. Visiblement les conditions de Tam & Dong fonctionnent encore bien dans ce cas inhomogène en température. Les modifications notables du rayonnement par rapport au jet isotherme sont d'une part une atténuation importante de la focalisation des ondes dans le jet en amont et une zone de silence plus marquée dans l'axe aval du jet. Par le fait, l'émission vers l'amont, initialement canalisée par le jet subit les effets de la réfraction de l'énergie sonore en s'élargissant vers la zone extérieure, plus froide. D'autre part, les

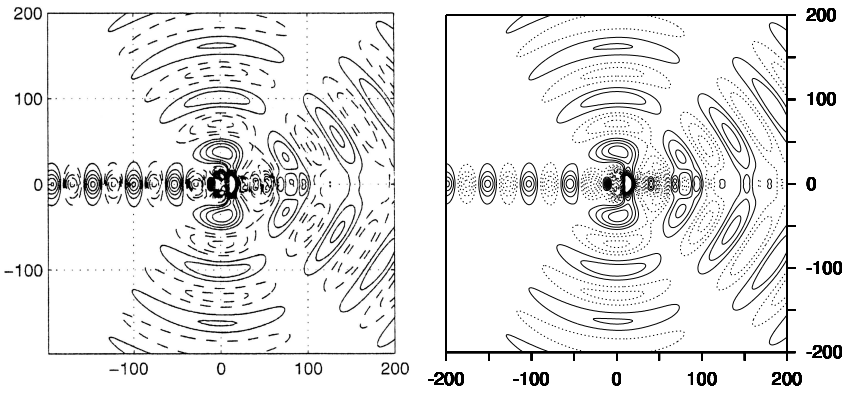


Fig. 3.11: Isocontours de pression pour une source quadripolaire. Gauche : simulation de [56] ; Droite : notre simulation. —— isocontours de 0.001 à 0.011 (pas de 0.001) ; - - - - isocontours de -0.011 à -0.001 (pas de 0.001)

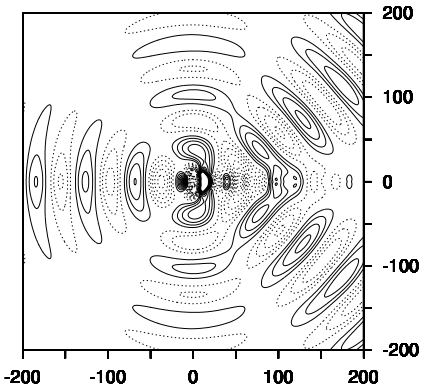


Fig. 3.12: Isocontours de pression pour une source quadripolaire dans un jet de Bickley inhomogène en température. —— isocontours de 0.001 à 0.011 (pas de 0.001) ; - - - - isocontours de -0.011 à -0.001 (pas de 0.001)

ondes se propagent plus vite au sein du jet (la vitesse du son y est plus élevée que dans la région isotherme). Ce test permet donc de vérifier le comportement cohérent de la solution vis-à-vis des effets d'anisothermie sur la propagation acoustique.

3.4.3 Cas particulier du modèle temporel

Dans le cas du modèle de couche de mélange en développement temporel (Cf. section 2.3.2), les ondes acoustiques se propagent principalement de façon unidimensionnelle dans le champ lointain [73]. Cette propriété a déjà été utilisée pour simplifier la résolution de l'analogie de Lighthill [41,42,115]. Dans ce cas une condition de frontière non réfléchissante unidimensionnelle est mieux adaptée que les conditions de Tam & Dong. Nous utilisons alors une condition basée sur une méthode aux caractéristiques unidimensionnelle proposée par Giles [48]. Cette condition a déjà montré son efficacité pour les calculs compressibles pris comme références [41, 42] dans la partie 4 de ce document. Rappelons que dans la direction principale de l'écoulement, une condition de périodicité est imposée. Ceci permet d'éviter tout problème d'évacuation en présence d'un écoulement inhomogène. Il n'y a donc pas besoin dans ce cas d'exciter les modes entropique et rotationnel.
Pour valider la mise en œuvre de cette condition, nous utilisons le cas d'une source impulsionnelle acoustique plane définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \rho & = & \varepsilon_a e^{-\alpha_a (y-y_a)^2} \\ u & = & 0 \\ v & = & 0 \\ p & = & c_0^2 \varepsilon_a e^{-\alpha_a (y-y_a)^2} \end{array}\right. \tag{3.21}$$

L'écoulement moyen est choisi pour correspondre à la configuration générale utilisée par la suite. Il est défini par

$$u_0(x,y) = \frac{u_1+u_2}{2} + \frac{u_1-u_2}{2}\tanh(y/2) \tag{3.22}$$

$$\rho_0(x,y) = \frac{\rho_1+\rho_2}{2} + \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\tanh(y/2) \tag{3.23}$$

où $u_1 = -u_2 = 0.1c_0$ et $\rho_2 = 2 \times \rho_1 = \rho_{ref}$. Les paramètres définissant la source sont $\varepsilon_a = 0.01$ et $\alpha_a = \ln 2/9$. Les résultats (figure (3.13)) montrent que la condition de Giles fonctionne presque parfaitement, donnant une pression résiduelle après évacuation de l'ordre du zéro machine.

3.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de présenter la formulation des équations d'Euler linéarisées utilisée au cours de cette étude. Nous avons présenté les méthodes numériques employées pour les discrétisations spatiale et temporelle ainsi que les techniques spécifiques au traitement des frontières pour la simulation du champ libre. L'utilité du filtrage spatial a été mentionnée. La mise en œuvre a été validée par plusieurs comparaisons à des solutions analytiques ou numériques.

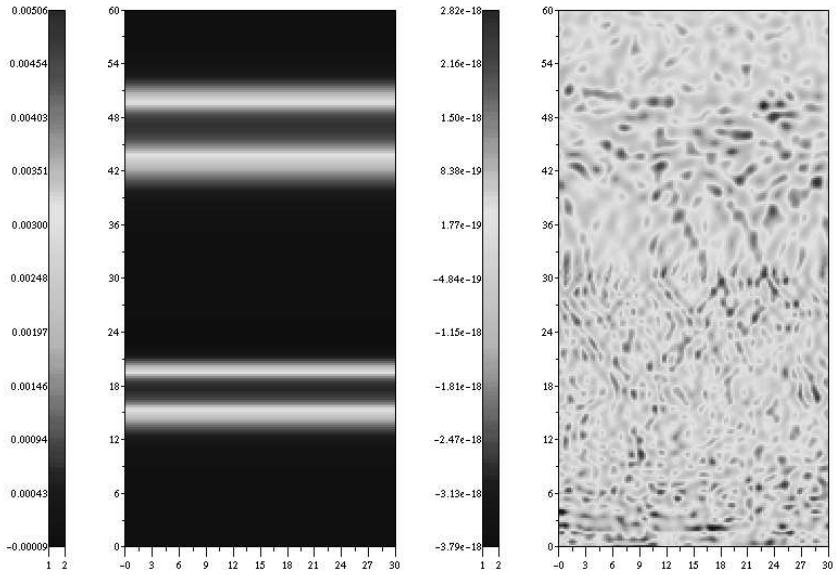


Fig. 3.13: Isovaleurs de pression pour une onde plane. Gauche : avant évacuation ; Droite : après évacuation.

Chapitre 4

De la LMNA vers les EEL

Ce chapitre présente la détermination des sources acoustiques permettant de réaliser l'interface entre une simulation anisotherme par approximation LMNA et une prédiction acoustique reposant sur les EEL. Les sources obtenues sont ensuite utilisées sur le cas d'une couche de mélange temporelle (ce point est également traité dans [54]), puis sur celui d'une couche de mélange en développement spatial.

4.1 Traitement des sources : extension du modèle LMNA

Le modèle aérodynamique est basé sur un développement asymptotique par rapport au paramètre $\varepsilon = \gamma M^2$: pour rappel, les équations de la LMNA sont obtenues par le développement des équations compressibles à l'ordre le plus faible en ε. Une propriété essentielle de la LMNA étant de "filtrer" les quantités acoustiques [81], l'idée sous-jacente dans cette partie est la suivante : par l'étude du développement des équations compressibles à l'ordre immédiatement supérieur à celui de la LMNA, nous cherchons à obtenir des renseignements sur ce qui est négligé par le modèle CFD. Par ce biais, nous espérons construire un ensemble cohérent entre la détermination d'un champ aérodynamique, un système permettant de décrire la propagation d'ondes acoustiques au sein de ce champ, et des termes sources adaptés à ces deux volets, ensemble qui constituera ainsi une méthode aéroacoustique hybride. Cette démarche s'apparente à celle utilisée dans les méthodes dites de "splitting technique" [35, 58, 87], à la différence que ces techniques sont développées en vue de l'utilisation d'outils de résolution spécifiques. Dans notre cas, l'objectif est d'utiliser un système d'équations (les EEL) développées pour un cas plus général. Il est aussi possible de voir un rapport étroit avec la théorie des modes de perturbations de [24] en ce sens que l'on souhaite utiliser des quantités connues à l'ordre le plus bas pour déterminer des sources générant des fluctuations à l'ordre supérieur.

Le point de départ consiste donc en un développement des équations de Navier-Stokes à l'aide de l'approximation à faible nombre de Mach à un ordre immédiatement supérieur à celui utilisé pour le calcul CFD : Ainsi, l'ordre un pour les équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement, et l'ordre zéro pour l'équation de l'énergie. On

obtient le système suivant

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho^{(0)} u_j^{(1)} + \rho^{(1)} u_j^{(0)}\right) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(1)}}{\partial t} + \rho^{(1)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial t} + \left(\rho^{(0)} u_j^{(1)} + \rho^{(1)} u_j^{(0)}\right) \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho^{(0)} u_j^{(0)} u_i^{(1)}}{\partial x_j} = \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(p^{(1)} u_j^{(0)} + \gamma p^{(0)} u_j^{(1)}\right) + (\gamma - 1)\, p^{(1)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} = \quad (4.3)$$

$$\frac{\gamma - 1}{Re} \tau_{kj}^{(0)} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\gamma}{RePr} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x_j^2}$$

Ce système d'équations fait apparaître des termes ayant trait avec des effets visqueux. Dans le cas d'ondes acoustiques se propageant sur de faibles distances, la viscosité n'a qu'un effet très faible sur les caractéristiques de propagation. De plus, il a été montré dans [75, 76] que pour un écoulement libre se développant à un nombre de Reynolds suffisamment haut, les sources d'origines visqueuses sont négligeables devant le bruit de cisaillement. Afin de tenir compte de ces faits établis, les termes $\frac{1}{Re}\frac{\partial \tau_{ij}^{(1)}}{\partial x_j}$ dans l'équation (4.2) et $\frac{\gamma-1}{Re}\tau_{kj}^{(0)}\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\gamma}{RePr}\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x_j^2}$ dans (4.3) seront négligés. Nous obtenons alors le système suivant

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho^{(0)} u_j^{(1)} + \rho^{(1)} u_j^{(0)}\right) = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(1)}}{\partial t} + \rho^{(1)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial t} + \left(\rho^{(0)} u_j^{(1)} + \rho^{(1)} u_j^{(0)}\right) \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho^{(0)} u_j^{(0)} u_i^{(1)}}{\partial x_j} = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(p^{(1)} u_j^{(0)} + \gamma p^{(0)} u_j^{(1)}\right) + (\gamma - 1)\, p^{(1)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} = 0 \quad (4.6)$$

A ce stade, on peut remarquer une grande similitude formelle entre ce système d'équations et les équations d'Euler linéarisées (3.1-3.3). Pour l'instant nous ne parlons que de formalisme car l'interprétation physique des grandeurs vérifiant ces équations n'a pas été développée. Les deux systèmes en question présentent des ressemblances dès lors que l'on remplace dans l'un ou l'autre, (et nous insistons ici sur le fait que nous ne parlons que de la forme des équations sans pour l'instant introduire d'interprétations physiques), les grandeurs (p_0,u_{i0},ρ_0,T_0) des EEL (voir chapitre 3) par ($p^{(0)}$,$u_i^{(0)}$,$\rho^{(0)}$,$T^{(0)}$) et (p',u_i',ρ',T') des EEL par les ($p^{(1)}$,$u_i^{(1)}$,$\rho^{(1)}$,$T^{(1)}$).
Cependant, cette similitude n'est pas totale. La première différence réside dans la présence du terme $\rho^{(1)}\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial t}$ dans l'équation (4.5). Ce premier point rejoint la remarque faite plus haut sur les différences entre notre approche et celle utilisée dans le développement des "splitting technique". Dans le cas présent, nous cherchons à utiliser le formalisme courant des EEL. Notre attitude vis-à-vis des différences entre le système obtenu par le développement en ε et les EEL va être d'adapter notre développement pour le rendre compatible avec les EEL. Nous allons donc supprimer le terme $\rho^{(1)}\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial t}$ de l'équation (4.5).

Cela ne peut bien sûr pas se faire raisonnablement sans en mesurer toutes les conséquences au préalable. Du point de vue des EEL, celles-ci sont généralement obtenues (comme nous l'avons vu précédement) en considérant des petites perturbations autour d'un écoulement "moyen" ou "porteur" stationnaire, le terme correspondant à $\rho^{(1)}\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial t}$ s'annulant par cette hypothèse. Dans notre cas, $u_i^{(0)}$ est le champ de vitesse déterminé par la LMNA, et n'a donc aucune raison d'être stationnaire. Le lien apparaissant entre u_{i0} et $u_i^{(0)}$ est alors $u_{i0} = \left\langle u_i^{(0)} \right\rangle$ où $\langle . \rangle$ est un opérateur de moyenne qu'il conviendra de définir plus en détail. Le second point concernant ces différences est l'absence dans (4.4-4.6) d'un terme de la forme $-(\gamma-1)u_j^{(1)}\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}$ présent dans l'équation de l'énergie des EEL. Compte-tenu de (2.12), ce terme s'annule systématiquement dans le cas (traité ici) des écoulements libres. La dernière différence formelle est l'absence d'un terme de gradient de pression $\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i}$ dans l'équation de quantité de mouvement. En ajoutant ce gradient de pression dans les membres de gauche et de droite de (4.5), nous obtenons

$$\frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(1)}}{\partial t} + \left(\rho^{(0)} u_j^{(1)} + \rho^{(1)} u_j^{(0)}\right) \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho^{(0)} u_j^{(0)} u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} = \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i}. \tag{4.7}$$

Cette opération, calquée sur celle utilisée pour obtenir l'analogie de Lighthill, est sans conséquence tant que les termes de pression ne sont pas interprétés. L'équation obtenue est semblable à l'équation de quantité de mouvement des EEL, pour laquelle un terme de forçage (le membre de droite) défini les sources acoustiques d'origine aérodynamique.
C'est là le point clef de ce développement, nous allons interpréter $p^{(1)}$ différemment selon qu'il soit considéré dans le membre de gauche ou dans le membre de droite de (4.7). Pour faciliter le raisonnement, nous allons ré-écrire le système d'équations obtenues sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho^{(0)} u_j^{(1)} + \rho^{(1)} u_j^{(0)}\right) = 0 \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(1)}}{\partial t} + \left(\rho^{(0)} u_j^{(1)} + \rho^{(1)} u_j^{(0)}\right) \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho^{(0)} u_j^{(0)} u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} = S_i \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(p^{(1)} u_j^{(0)} + \gamma p^{(0)} u_j^{(1)}\right) + (\gamma-1)\, p^{(1)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_j} = 0 \tag{4.10}$$

Ce système d'équations, étant similaire aux EEL, est capable de supporter les trois modes de fluctuations présents au sein d'un milieu fluide, à savoir les modes entropique, acoustique et rotationnel. $p^{(1)}$ obtenue par le système ci-dessus peut contenir potentiellement des fluctuations correspondants à chacun de ces modes, et la théorie des modes de perturbations [24,37] n'étant pleinement utilisable que pour un écoulement moyen uniforme, l'interprétation qui peut être faite dans d'autres cas sur l'origine des perturbations qu'elles soient en pression, vitesse ou masse volumique est beaucoup plus hasardeuse. Cependant, les modes rotationnel et entropique sont convectés par l'écoulement, donc des fluctuations associées à ces modes ne peuvent s'étendre au-delà de la zone d'écoulement. Seules les fluctuations de nature acoustique peuvent se propager en dehors de cette zone. Les fluctuations de pression données par les EEL en dehors de cette région ne peuvent donc être

que de nature acoustique.
Pour ce qui est du terme de forçage, il doit être d'origine aérodynamique, et donc calculé à partir des résultats du calcul CFD. L'équation (2.15) du modèle LMNA- dans laquelle on néglige les effets visqueux pour les raisons citées précédement - conduit alors naturellement à exprimer S_i en fonction des quantités aérodynamiques connues

$$S_i = -\left[\frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)} u_j^{(0)}}{\partial x_j}\right] \tag{4.11}$$

Ce terme source est cohérent avec ceux définis dans la littérature [5, 19, 58] pour le cas d'un écoulement homogène en température. En effet, le terme supplémentaire

$$S_i^t = -\frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)}}{\partial t} \tag{4.12}$$

à divergence nulle dans le cas isotherme ne peut pas exciter le mode acoustique [24]. Dans ce cas, le terme source S_i peut donc être réduit à

$$S_i^u = -\frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)} u_j^{(0)}}{\partial x_j} \tag{4.13}$$

Ce terme, identique à celui défini par [5, 19], contient le bruit de cisaillement et le bruit propre de la turbulence [8].
Dans le cas anisotherme, la partie S_i^t n'est plus à divergence nulle et constitue ainsi une source acoustique supplémentaire. La nécessité de faire intervenir un terme source supplémentaire dans le cas anisotherme (et plus généralement dans le cas d'une répartition inhomogène de masse volumique) se retrouve avec toutes les approches de type hybride. Avec les analogies de Lighthill, Phillips et Lilley, ce terme supplémentaire est interprété comme un bruit d'entropie. En ce qui nous concerne, l'interprétation la plus immédiate est que le terme S_i^t correspond aux variations temporelles de quantité de mouvement en présence d'une distribution inhomogène de masse volumique. Comme cela est expliqué dans [102], les inhomogénéités de masse volumique créent des variations d'accélérations entre les particules voisines au sein de la zone turbulente. L'équation (2.15) dans laquelle les termes visqueux sont négligés peut être ré-écrite en

$$\frac{Du_i^{(0)}}{Dt} + \frac{u_i^{(0)}}{\rho^{(0)}}\frac{D\rho^{(0)}}{Dt} = -\frac{1}{\rho^{(0)}}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} \tag{4.14}$$

où

$$\frac{D\cdot}{Dt} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + u_i^{(0)}\frac{\partial \cdot}{\partial x_i} \tag{4.15}$$

Finalement, comparées au cas isotherme (plus généralement homogène en masse volumique) pour lequel

$$\frac{Du_i^{(0)}}{Dt} = -\frac{1}{\rho^{(0)}}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} \tag{4.16}$$

les fluctuations de pression du cas anisotherme sont gouvernées par les mêmes fluctuations d'accélération $\frac{Du_i^{(0)}}{Dt}$ auxquelles viennent s'ajouter des fluctuations dues aux inhomogénéités de masse volumique $\frac{u_i^{(0)}}{\rho^{(0)}}\frac{D\rho^{(0)}}{Dt}$.

4.2 Validation : simulation temporelle

La validation du modèle s'appuie sur les résultats obtenus et les outils développés lors de travaux précédents au LEA [41, 42] concernant le développement de couches de mélange isotherme et anisotherme en évolution temporelle par simulation numérique directe compressible. Les résultats de simulations compressibles serviront donc de référence.
Dans les contextes de développements de solutions de référence ou de démarches hybrides et plus généralement d'expérimentation numérique, la couche de mélange temporelle présente, en dépit de son caractère académique, un certain nombre d'avantages. En premier lieu, la couche de mélange est un écoulement fondamental largement étudié donc largement documenté. En second lieu, le modèle temporel possède des propriétés physiques permettant de s'affranchir d'un certain nombre de difficultés numériques comme l'évacuation des modes acoustiques et rotationnel en frontières amont et aval. Enfin, le domaine numérique peut-être moins étendu que celui d'une configuration spatiale : les contraintes matérielles de temps de calcul et de mémoire sont alors réduites. On peut noter que la configuration temporelle a déjà été utilisée pour l'étude aéroacoustique d'un écoulement de turbulence développée [115].
Ainsi, nous procédons en deux étapes. Dans un premier temps, nous réalisons une validation de la configuration d'écoulement dans le cas isotherme. En effet, dans ce cas, les termes sources sont largement connus et validés [5,15,19,38]. Le test isotherme nous permet donc de confirmer l'aptitude de la simulation de couche de mélange temporelle à fournir une solution spatio-temporelle comparable à la simulation compressible de référence. La seconde étape est la validation des sources dans le cas anisotherme à partir de la même configuration de calcul.

4.2.1 Détails de la simulation

Configuration géométrique

L'écoulement utilisé ici est celui défini dans la partie 2.3.2. Le champ dynamique n'est calculé que dans la région de la couche de mélange où sont présentes les instabilités génératrices de bruit. Les EEL sont par contre résolues sur un domaine de dimension transversale beaucoup plus grande se superposant en partie au domaine dynamique. Ainsi, les quantités acoustiques sont observables dans une région où les sources sont absentes mais où la propagation s'effectue en tenant compte du mouvement moyen du milieu. Ceci nous permet d'observer les quantités acoustiques dans une région où l'écoulement est uniforme. Comme le montre la figure (4.1), les simulations dynamiques sont effectuées sur un domaine de dimensions $(L_x^* \times L_y^*)$ dans une région que nous appelons "zone source" puisque les sources sont calculées dans cette partie. La couche de mélange est initialement centrée sur l'axe $y = 0$. La propagation acoustique est simulée sur le domaine entier de taille $(L_x^* \times L_y'^*)$, et l'observation des quantités acoustiques est réalisée uniquement sur la partie située au-delà de $L_y^*/2$. Nous avons décentré le domaine par rapport aux simulations dynamiques pour aller plus loin dans le champ acoustique sans trop augmenter le temps de calcul. Pour réaliser les comparaisons, les calculs compressibles de [41,42] sont repris et étendus à l'ensemble du domaine. Pour bénéficier le plus largement mais aussi le plus simplement possible du gain en temps de calcul offert par les équations d'Euler

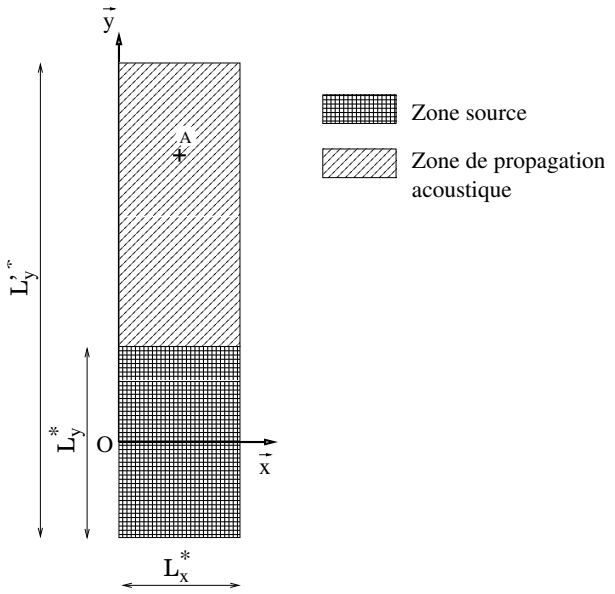


FIG. 4.1: Localisation des zones source et d'observation de la propagation acoustique

linéarisées, le maillage utilisé pour la résolution de ces dernières ne garde qu'un noeud sur deux (dans chaque direction) du maillage utilisé pour les simulations compressible et à masse volumique variable. La figure (4.2) résume les différentes configurations de maillages utilisés pour cette étape de validation.

Conditions de frontières

Dans la direction principale de l'écoulement, la condition de frontière est bien entendu identique à celle de la simulation dynamique, à savoir une condition périodique. Dans l'autre direction en revanche, une condition de frontière non-réflechissante doit être utilisée. Une propriété intéressante de la couche de mélange temporelle [73], est que les ondes acoustiques se propagent principalement dans la direction y dans le champ lointain. Cette propriété a déjà été utilisée pour simplifier la résolution de l'analogie de Lighthill dans [41, 42, 115]. Pour la condition de frontière dans la direction y, cette propriété permet d'utiliser une condition non-réflechissante unidimensionnelle. Ici, la condition unidimensionnelle de [48] basée sur la méthode des caractéristiques est utilisée. Cette condition a d'ailleurs déjà prouvé son efficacité pour les calculs compressibles pris comme références [41, 42].

Expression du champ porteur

Comme nous l'avons vu dans la partie 4.1, le champ aérodynamique donné par la simulation dynamique n'est pas stationnaire (ce qui est d'ailleurs impératif pour générer du bruit), or les équations d'Euler linéarisées sont écrites pour des petites perturbations autour d'un champ moyen stationnaire. Il convient donc de traiter au préalable le champ

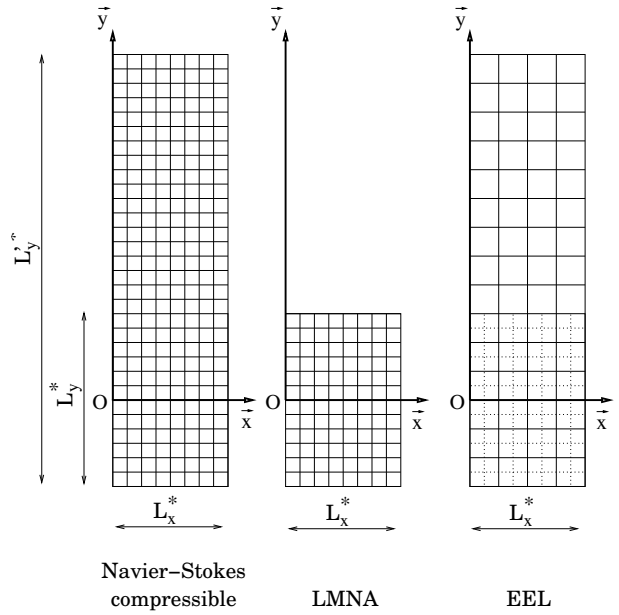


FIG. 4.2: Représentation des différents maillages

aérodynamique pour que les effets de l'écoulement moyen sur la propagation soient correctement pris en compte. C'est la démarche la plus courante suivie par les auteurs utilisant ces équations [5, 15, 19]. Dans des études traitant de simulations d'écoulements en développement spatial, le champ moyen est déduit des quantités instantanées en réalisant une moyenne sur une période correspondant à plusieurs évènements du phénomène étudié : dans le cas de la couche de mélange, les auteurs font la moyenne sur une période correspondant à plusieurs appariements tourbillonnaires. Dans le cas d'un écoulement en développement temporel, une telle opération n'est pas réalisable car le référentiel d'étude est mobile par rapport au référentiel terrestre, et l'observation des appariements ne se fait que sur une période. Nous tentons alors de transposer l'effet d'une moyenne temporelle au cas présent. Ce dernier peut être vu comme une approximation du modèle spatial pour laquelle l'écoulement est observé dans une fenêtre suivant les grosses structures. Selon [14, 91], ces structures se déplacent à une vitesse moyenne qui peut être estimée par $U_c = \frac{c_1 U_2 + c_2 U_1}{c_1 + c_2}$ (où c_1 et c_2 sont les vitesses du son dans les milieux de masse volumique ρ_1 et ρ_2). Alors, le référentiel d'observation du modèle temporel $\mathcal{R}_t$ peut être considéré comme un référentiel en translation uniforme par rapport au référentiel $\mathcal{R}_s$ associé à la simulation spatiale correspondante. La figure (4.3) résume cette situation. Considérons le cas d'une grandeur $\alpha(M)$ évaluée dans chacun de ces référentiels. Sa valeur dans $\mathcal{R}_t$ est $\alpha_t\left(x(t), y(t)\right)$ et sa valeur dans $\mathcal{R}_s$ est $\alpha_s\left(X, y\right)$ avec $x(t) = X - U_c.t$. Appliquons le calcul de la moyenne temporelle de la grandeur évaluée dans $\mathcal{R}_s$ sur un intervalle de temps T.

$$\overline{\alpha_s}(X, y) = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha_s(X, y, t) dt \tag{4.17}$$

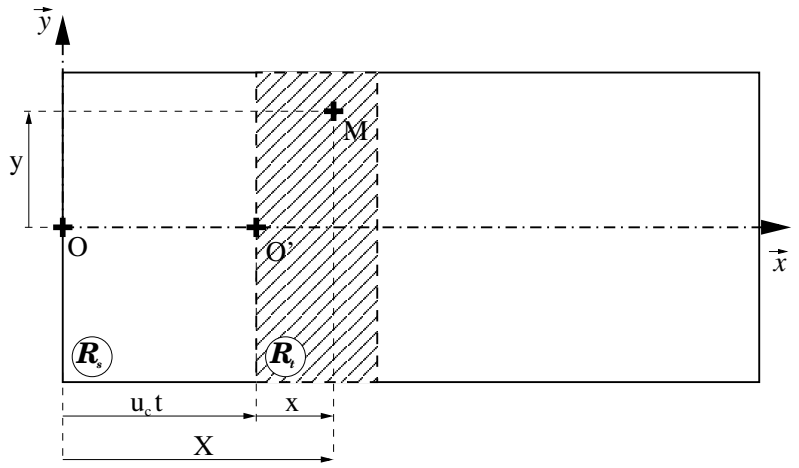


FIG. 4.3: Positions relatives de référentiels associés à des simulations temporelle et spatiale

En posant $x(t) = X - U_c.t$ et $L = U_c.T$ on obtient immédiatement

$$\overline{\alpha_s}(X,y) = \frac{1}{L}\int_{X-L}^{X} \alpha_s(X,y,t)dx \tag{4.18}$$

$$= \frac{1}{L}\int_{X-L}^{X} \alpha_t\left(x(t),y(t)\right)dx \tag{4.19}$$

Finalement,

$$\overline{\alpha_s}(X,y) = \langle\alpha_t\rangle\left(y(t)\right) \tag{4.20}$$

où

$$\langle\cdot\rangle = \frac{1}{L}\int_{X-L}^{X} \cdot dx \tag{4.21}$$

Cette relation montre que la moyenne temporelle des grandeurs du modèle spatial sur une durée T revient au même que la moyenne dans la direction $\overrightarrow{x}$ sur la longueur de la fenêtre d'observation du cas temporel lorsque T est le temps nécessaire à la fenêtre d'observation pour passer complètement au dessus d'un point fixe dans $\mathcal{R}_s$.
Il est cependant à noter que le temps T ne peut pas être, dans le cas de la couche de mélange temporelle, aussi grand que le temps correspondant à plusieurs périodes d'appariement. Dans le cas traité ici, cet aspect est compensé par la nature très déterministe de notre configuration. Finalement, les équations d'Euler linéarisées sont résolues pour une perturbation $\left(\rho^{(1)}, p^{(1)}, u_i^{(1)}\right)$, autour de l'écoulement moyen (ρ_0, p_0, u_{0i}), avec

$$\begin{aligned}
\rho_0(y,t) &= \left\langle\rho^{(0)}\right\rangle(y,t)\\
p_0(y,t) &= \left\langle\rho^{(0)}\right\rangle(y,t)\\
u_{0i}(y,t) &= \left\langle\rho^{(0)}\right\rangle(y,t)
\end{aligned}$$

4.2.2 Interpolation temporelle des données LMNA

La différence d'échelles de vitesse entre un calcul dynamique et un calcul de propagation acoustique conduit à utiliser des références différentes entre ces deux types de réalisations. Pour que les résultats de la partie dynamique puissent servir de données à la partie acoustique, il est nécessaire de faire correspondre exactement ces grandeurs (calculées par rapport aux grandeurs de références du code DNS) à leurs équivalents pour le code EEL. Les grandeurs de références sont données dans le tableau (4.1).

Ainsi, les instants dimensionnels correspondants à des itérations de chacun des calculs

Grandeur	DNS	EEL
U_{ref}	ΔU^*	c_0^*
L_{ref}	δ_ω^*	δ_ω^*
t_{ref}	$\delta_\omega^*/\Delta U^*$	δ_ω^*/c_0^*

TAB. 4.1: Grandeurs de références pour les différents types de calculs

sont :

$$\begin{aligned} t^{*d} &= t^d_{num} t^d_{ref} = (it^d - 1) dt^d_{num} t^d_{ref} = (it^d - 1) dt^d_{num} \frac{\delta^*_\omega}{\Delta U^*} \\ t^{*a} &= t^a_{num} t^a_{ref} = (it^a - 1) dt^a_{num} t^a_{ref} = (it^a - 1) dt^a_{num} \frac{\delta^*_\omega}{c^*_0} \end{aligned}$$

où l'exposant ^{a} fait référence au calcul acoustique et ^{d} au calcul dynamique.
La correspondance exacte doit être $t^{*d} = t^{*a}$. Cette égalité conduit à

$$(it^a - 1) = \frac{dt^d_{num}}{dt^a_{num}} \frac{c^*_0}{\Delta U^*} (it^d - 1) \tag{4.22}$$

Par la relation (4.22), le rapport $\frac{it^a - 1}{it^d - 1}$ nous donne le nombre d'itérations du calcul acoustique entre deux itérations du calcul dynamique.
Cette relation dépend de trois paramètres : les pas de temps de chaque simulation et le rapport $\frac{c_0^*}{\Delta U^*}$. Les pas de temps peuvent être choisis de façon indépendantes sur des critères numériques propres à chaque type de simulation (critères de stabilité, de précision, ...). Le rapport $\frac{c_0^*}{\Delta U^*}$ est caractéristique de l'écoulement que l'on souhaite étudier. Ce rapport défini un nombre de Mach de l'écoulement. En toute rigueur, il s'agit du nombre de Mach qu'aurait l'écoulement compressible correspondant à la simulation hybride en cours. En effet, pour l'approximation incompressible ou à masse volumique variable, le nombre de Mach est sans signification puisque les effets de compressibilité sont négligés et tout se passe comme si le son se propageait à une vitesse infinie. Pour résumer concrètement, toute simulation incompressible (ou à masse volumique variable) est en fait à nombre de Mach nul, mais peut être ramenée, par redimensionnement de la vitesse et du temps, à un écoulement de n'importe quel nombre de Mach situé dans la limite de validité de l'approximation incompressible.

La relation (4.22) montre donc la nécessité de procéder à une étape d'interpolation des champs dynamiques (et des sources calculées à partir de ces champs) pour les faire correspondre avec la discrétisation temporelle de l'étape de simulation acoustique.
Pour les travaux présentés dans ce mémoire toutes les interpolations temporelles ont été réalisées par un schéma de type spline cubique. Notre choix s'est porté sur ce type d'interpolation car son caractère non-local conduit à une solution d'une grande régularité dont la continuité est assurée jusqu'à la dérivée seconde. De plus, l'interpolation spline cubique génère très peu d'ondes numériques parasites [94]. Ces propriétés sont fondamentales en aéroacoustique numérique puisqu'en raison des différences d'échelles entre la dynamique (qui produit les sources) et l'acoustique, les moindres oscillations ou discontinuités sur le champs de sources peuvent produire des sources artificielles d'amplitudes similaires voire supérieures à celles recherchées.

Erreur d'interpolation

L'erreur d'interpolation commise est souvent difficile à évaluer. Pour une interpolation polynomiale, par exemple, augmenter l'ordre d'interpolation ne conduit pas forcément à augmenter la précision du résultat. Dans le cas présent, nous pouvons nous poser la question de l'erreur d'interpolation de la façon suivante : comment choisir les pas de temps du calcul acoustique, et l'intervalle entre les sauvegardes du calcul dynamique pour que l'étape d'interpolation temporelle ne conduise pas à une erreur trop importante sur le champ de sources et par suite sur le champ acoustique. La relation (4.23) donne le nombre de points d'interpolation temporelle pour les sources calculées entre deux sauvegardes distantes de N^d itérations du calcul dynamique.

$$N^a_{inter} = \frac{dt^d_{num}}{dt^a_{num}} \frac{c^*_0}{\Delta U^*} N^d \tag{4.23}$$

Le paramètre N^d est très important du point de vue des contraintes numériques de la méthode. C'est ce paramètre qui détermine le niveau de stockage nécessaire pour la réalisation d'une simulation complète. N^d est inversement proportionnel au nombre de champs instantanés sauvegardés pour la détermination des sources et du champ porteur. Nous avons donc besoin de déterminer la valeur minimale de N^d nous permettant d'assurer la précision de l'étape acoustique.

Pour obtenir à la fois une idée précise des erreurs commises dans nos calculs et des renseignements concrets sur les valeurs de N^d utilisables, nous avons réalisé un test à partir d'un champ de vitesse calculé lors d'une simulation dynamique.
Le cas choisi est la simulation isotherme d'une couche de mélange en développement spatial ayant les caractéristiques suivantes :
- Etape CFD : $U_1 = 2$, $U_2 = 1$, $Re = 200$, $dt^d_{num} = 0.1$. La simulation doit s'effectuer avec ce pas de temps sur 5000 itérations pour conduire à une vingtaine d'appariements. Les dimensions du domaine de simulation sont $L_x = 300$, $L_y = 100$ discrétisées par $n_x = 601$ et $n_y = 401$ points.

- Etape EEL : Nous souhaitons simuler une couche de mélange dont les nombres de Mach dans la région supérieure et inférieure sont respectivement $M_1 = 0.5$ et $M_2 = 0.25$ qui nous donnent $c_0^*/\Delta U^* = 0.25$ pour la relation (4.23). Le maillage de la simulation DNS nous conduit à un maillage pour la simulation EEL tel que le pas de temps limite imposé par le nombre de CFL serait de l'ordre de $dt^a_{num} = 0.3$.

Tous ces paramètres nous conduisent avec (4.23) à $N^a_{inter} = 1.33N^d$. Comme le rapport N^a_{inter}/N^d doit être entier, le nombre de points d'interpolation dans le cas d'un choix de N^d le plus défavorable ($N^d = 1$) est $N^a_{inter} = 2$. Ceci conduit à une simulation EEL dont le pas de temps physique correspondra au tiers du pas de temps physique de la simulation dynamique.
Un moyen d'évaluer numériquement l'erreur d'interpolation consiste à réaliser une simulation dynamique avec un pas de temps $dt^d_{num}/3$. Pendant cette simulation les valeurs de u_x et u_y en un point sont sauvegardées à chaque instant. Ces données constituent la référence de ce test et forment l'ensemble $\mathcal{A}$. La figure (4.4) montre schématiquement le principe de ce test.

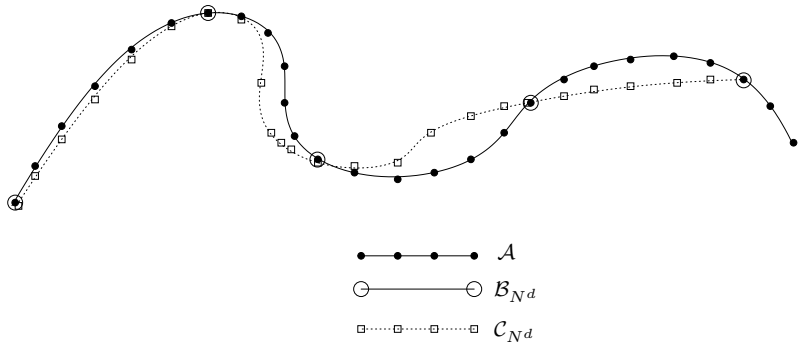


Fig. 4.4: Principe de l'estimation de l'erreur d'interpolation : $\mathcal{A}$ est le champ de référence. $\mathcal{C}_{N^d}$ est calculé par interpolation de $\mathcal{B}_{N^d}$ (Constitué par 1 point de $\mathcal{A}$ sur $3N^d$). L'erreur d'interpolation est l'écart entre les points de $\mathcal{A}$ et ceux de $\mathcal{C}_{N^d}$.

Des champs $\mathcal{B}_{N^d}$ sont ensuite extraits de $\mathcal{A}$ en ne conservant qu'un échantillon sur $3N^d$. Ces champs $\mathcal{B}_{N^d}$ correspondent à des champs calculés dans les conditions habituelles de nos simulations.
Enfin nous pratiquons l'interpolation spline cubique sur le champs $\mathcal{B}_{N^d}$ avec $3N^d$ points d'interpolation. Le champ $\mathcal{C}_{N^d}$ ainsi obtenu représente finalement le résultat de notre procédure d'interpolation réalisée dans la situation adoptée en pratique où la simulation dynamique est effectuée avec un pas de temps (initialement prévu) dt^d_{num} en ne sauvegardant qu'un champ instantané sur N^d.
La différence entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}_{N^d}$ donne alors une bonne estimation de l'erreur d'interpolation commise dans une situation pratique réelle.
Cela reste cependant une estimation dans un cas particulier, légèrement faussée par le fait

que la simulation de référence est conduite avec $dt = dt^d_{num}/3$ et que les champs $\mathcal{B}_{N^d}$ ne sont donc pas rigoureusement identiques à ceux utilisés lors de la simulation réelle. Quoi qu'il en soit, le pas de temps dt^d_{num} de la simulation réelle doit être choisi suffisamment petit pour que la différence mentionnée ci-dessus soit négligeable (et ainsi respecter le principe de la simulation numérique directe).

N^d	ε_{u_x} (%)	ε_{u_y}(%)
4	0.03	0.20
5	0.08	0.50
6	0.18	1.20
7	0.28	2.00
8	0.40	4.00
9	0.50	6.00

TAB. 4.2: Erreur d'interpolation en fonction de l'intervalle de sauvegarde N^d. ε_{u_x} et ε_{u_y} représentent les erreurs relatives commises sur u_x et u_y par rapport au champ de référence

Les résultats obtenus par cette méthode sont rassemblés dans le tableau (4.2) où sont donnés les erreurs maximales commises par rapport à la valeur maximale du champ de référence. Naturellement, pour les deux grandeurs testées, l'erreur augmente en même temps que l'intervalle entre les sauvegardes. Les différences entre ε_{u_x} et ε_{u_y} s'expliquent par la différence de valeur de référence dans le calcul de l'erreur relative ($\simeq 2$ pour u_x et $\simeq 0.5$ pour u_y) alors que les erreurs absolues sont du même ordre. Ce test montre que nous devons rester avec des intervalles de sauvegardes inférieurs à 6 pour garder une erreur d'interpolation maximale de l'ordre de 1%. Au-delà, cette erreur augmente rapidement : un passage de l'espacement des sauvegardes de 7 à 9 itérations multiplie environs par trois l'erreur d'interpolation qui devient alors importante. Dans la suite, nous nous limiterons à environs une sauvegarde toutes les six itérations.

4.2.3 Cas isotherme

Le cas traité ici est directement extrait de celui simulé dans la partie 2.3.2. Comme nous l'avons vu dans la partie 2.1.2, l'approximation d'écoulement à faible nombre de Mach revient exactement au modèle incompressible des équations de Navier-Stokes si l'écoulement considéré est homogène en température. Les données dynamiques utilisées pour la reconstitution de l'acoustique du cas isotherme sont donc obtenues par le code incompressible *incompact3D*. Dans un premier temps, nous résolvons les EEL à partir du terme de forçage utilisé généralement en simulation isotherme S^u_i [5, 12, 19, 103]. Ensuite, nous utilisons le terme de forçage complet S_i, et comparons ces deux résultats. L'écoulement simulé correspond à un écoulement ayant un nombre de Mach $M = 0.2$.

Paramètres numériques

Les domaines utilisés ont les dimensions suivantes : les simulations EEL et DNS compressible s'étendent sur $L_x = 30.7$ et $L'_y = 150.0$ (voir fig. (4.1)) pour une grille comportant (256×1251) points dans le cas de la DNS compressible et (128×626) points pour les équations d'Euler linéarisées. La simulation incompressible reprend le domaine présenté dans la partie dynamique, à savoir $L_x = 30.7$ et $L_y = 60$ pour une grille comportant (256×501) nœuds.

Simulations avec terme source simplifié

Dans cette section, nous utilisons le terme source S_i^u. Sur les figures présentées, les indications de temps sont adimensionnées par la référence utilisée dans les simulations compressibles et EEL, soit $t^*_{ref} = \delta^*_\omega / \sqrt{\gamma r^* T^*_{ref}}$.
La figure (4.5) présente des champs instantanés de masse volumique dans la région acoustique et de vorticité dans la région des sources. Les champs de vorticité, déjà présentés dans les parties concernant la dynamique, sont montrés ici afin d'associer les évènements de nature acoustique à ceux de nature aérodynamique qui en sont à l'origine.
Sur la figure (4.5), les instants (a) et (b) montrent un excellent accord entre la référence et le résultat hybride.
Pour les instants (c), (d) et (e), une différence notable apparaît entre les deux simulations dans la région la plus proche des sources (y voisin de $L_y/2$) où nous avons supposé que les perturbations sont seulement de nature acoustique. Au delà, l'accord demeure très bon. La différence notée pour ces trois instants semble s'accroître à mesure que l'on avance en temps dans la simulation, mais ne montre pas d'évolution dans la direction transversale : en d'autres mots, il semble que le calcul hybride fasse apparaître des fluctuations ne se propageant pas mais qui sont uniquement convectées par l'écoulement. L'augmentation de ces fluctuations, qui ne sont pas de nature acoustique, semble être liée à l'élargissement de la couche de mélange.
En plus du phénomène précédent, l'instant (f) de la figure (4.5) montre une différence sensible entre les deux calculs sous la forme d'un décalage temporel entre les deux simulations. L'évolution de la masse volumique en un point de la région acoustique (point A de coordonnées $x = 15.35$,$y = 101.76$ sur la figure (4.1)) permet de vérifier et de quantifier ce décalage. La figure obtenue est la figure (4.6) sur laquelle nous avons utilisé le temps retardé pour associer plus directement les évènements se produisant en A à ceux leur ayant donné naissance (globalement au milieu de la couche de mélange). Sur la figure (4.6), les deux courbes se correspondent bien. On peut noter l'apparition d'un décalage à partir de $t_r = t - t_d \simeq 100$. Ce décalage, déjà observé sur les champs instantanés, est également bien visible sur la figure (4.7), sur laquelle sont tracées les évolutions temporelle de $\langle\rho\rangle$, moyenne de ρ le long du segment $y = 101.76$. L'origine du décalage temporel observé sur le champ de masse volumique acoustique est directement lié à l'avance prise par la simulation incompressible sur la simulation compressible. La figure (4.8) présentant l'évolution de la vorticité au milieu de la couche de mélange ($x = 15.35, y = 0$) suit la même évolution. Puisque les sources acoustiques sont directement déduites du champ dynamique, une avance sur ce dernier conduit irrémédiablement à une avance sur le champ acoustique rayonné. La différence de dynamique entre les simulations incompressible et

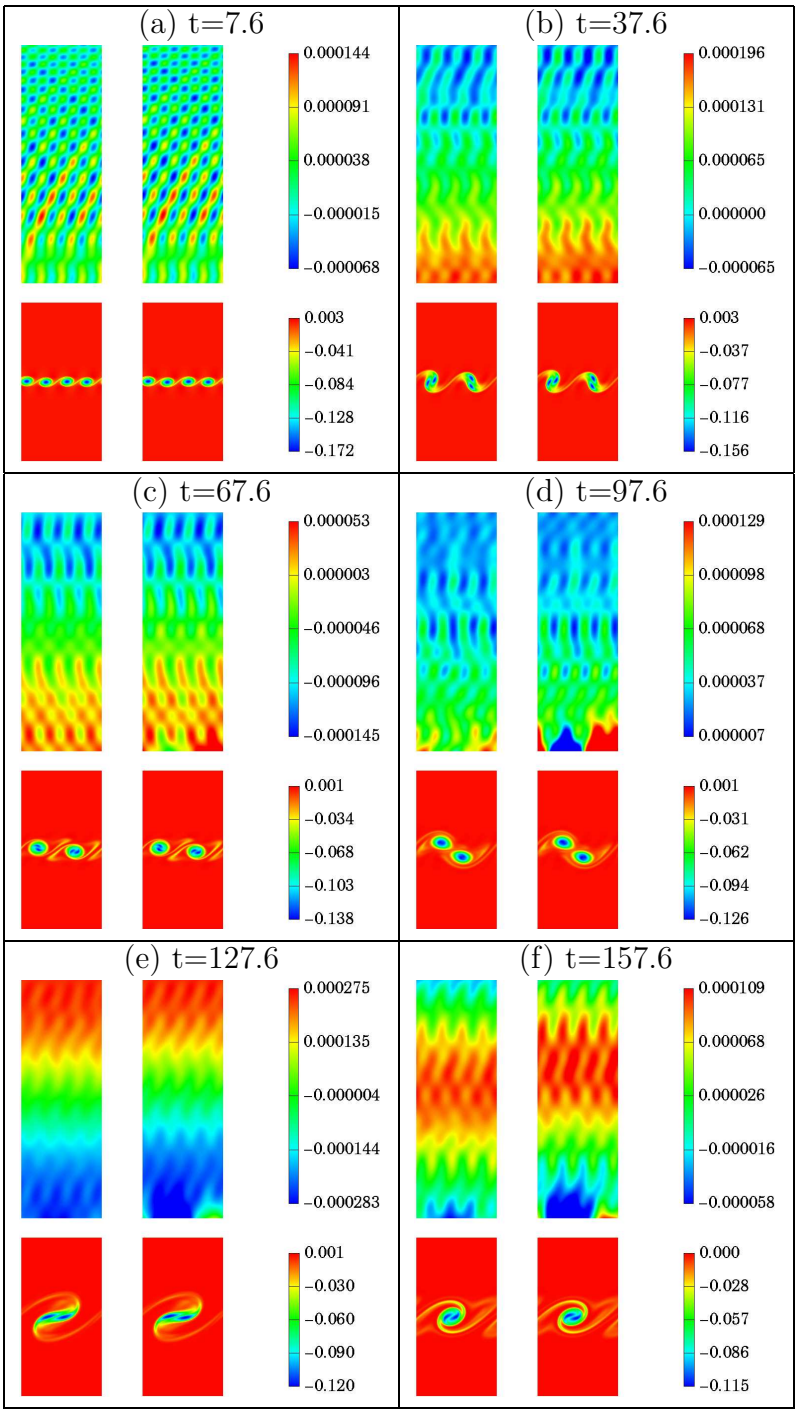


FIG. 4.5: Cas isotherme - visualisation de champs instantanés pour $M = 0.2$ avec le terme source partiel (4.13). Pour chaque instant, gauche : DNS Compressible ; droite : méthode hybride

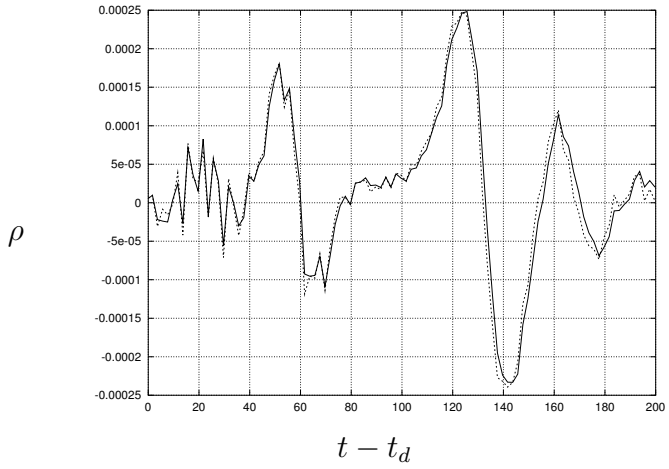


Fig. 4.6: Evolution temporelle de ρ en A $(15.36, 101.76)$.—— DNS compressible ; - - - - méthode hybride

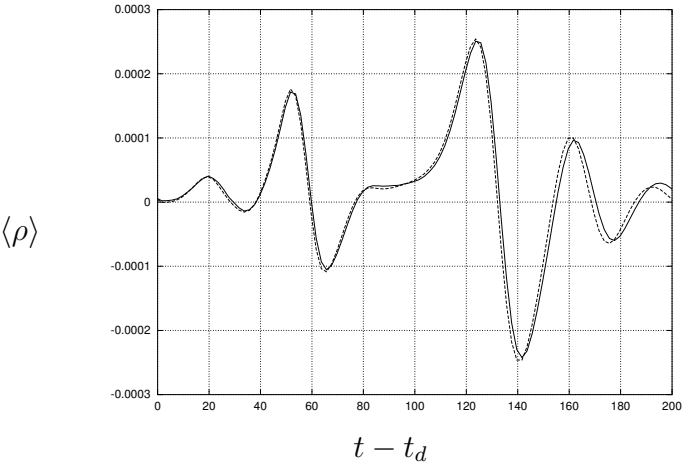


Fig. 4.7: Evolution temporelle de $\langle\rho\rangle$ le long de $y = 101.76$.—— DNS compressible ; - - - - méthode hybride

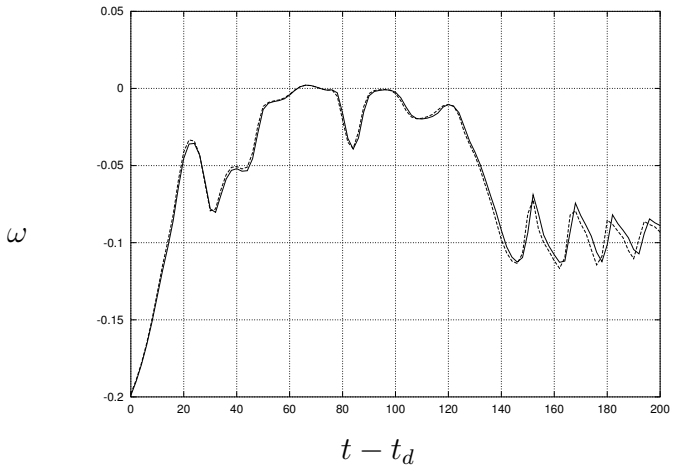


FIG. 4.8: Evolution temporelle de la vorticité ω en ($x = 15.35, y = 0$).—— DNS compressible ; - - - - méthode hybride

compressible s'explique par l'absence des effets stabilisants de la compressibilité.

Pour clarifier ce point, il convient de revenir un instant sur le rôle de la compressibilité dans le développement tourbillonnaire. Au chapitre 2, nous avons utilisé l'équation (2.62) de la vorticité potentielle pour expliquer la création d'anti-vorticité par effet barocline. Pour un écoulement initialement homogène en température, cette équation permet d'analyser les effets de la compressibilité sur la vorticité [45]. En effet, en situation isotherme, le couple barocline est négligeable, et (2.62) indique que la vorticité potentielle est conservée en suivant le mouvement. Or la compressibilité du fluide entraîne une augmentation de ρ aux points selles et une diminution aux cœurs des tourbillons. Le conservation de la vorticité potentielle entraîne donc une augmentation de la vorticité aux points selles et une diminution aux cœurs des tourbillons. Les tourbillons traduisant la concentration de vorticité, il apparaît alors que la compressibilité agît en défaveur de leur développement.

Nous présentons sur la figure (4.9) le champ compressible à l'instant (f) au côté du champ hybride à un instant qui tient compte de l'écart dynamique. L'accord est alors tout à fait concluant quant à l'interprétation proposée. On peut constater que l'approche temporelle s'avère être un test efficace en CAA qui nous a permis de valider la méthode proposée.

Simulation avec terme source complet

Nous nous intéressons à la prise en compte de l'intégralité du terme source $S_i = S_i^t + S_i^u$. Rappelons que dans une configuration isotherme, la partie S_i^t est un champ à divergence nulle qui ne contribue pas à l'émission acoustique. C'est ce que nous vérifions dans ce paragraphe.
La dérivation temporelle requise pour l'évaluation de ce terme est réalisée par l'approxi-

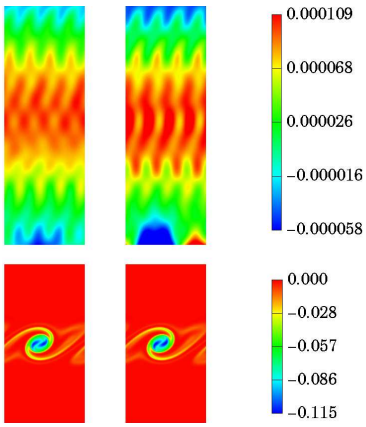


FIG. 4.9: Visualisations instantanées de masse volumique (haut) et de vorticité (bas) pour la simulation compressible (à gauche t=157.6) et pour la simulation hybride (à droite t=155.6).

mation explicite d'ordre 3

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_n = \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{11}{6}f_n - 3f_{n-1} + \frac{3}{2}f_{n-2} - \frac{1}{3}f_{n-3}\right]. \tag{4.24}$$

L'utilisation des termes sources complets montre (figure (4.10)) des résultats comparables à ceux de la figure (4.5) . Les champs obtenus sont bien, à un point près, les mêmes que ceux donnés par la simulation basée sur les termes sources partiels. La différence concerne le champ de masse volumique proche de la frontière entre les deux zones de calculs. Dans le cas présent, les différences avec le cas compressible apparaissent plus tard dans la simulation et de façon beaucoup moins marquée. Il semble donc que dans le cas isotherme, bien que n'étant pas indispensable du point de vue du rayonnement acoustique en champ lointain, l'utilisation du terme source complet permette une meilleure représentation du champ à la limite de la zone de production, ceci vraisemblablement en raison de l'élargissement de la couche de mélange et de la zone influencée par le mode rotationnel.

Effets des deux termes sources dans la zone de production

Afin de compléter l'analyse sur l'influence des deux termes sources, nous nous intéressons à la zone de production sonore, qui est le siège des passages de structures et de leurs appariements. Les champs de masse volumique obtenus par simulation compressible d'une part, et par simulation d'EEL avec sources complètes ou partielles sont représentés sur la figure (4.11). Ces visualisations montrent que l'utilisation du terme source partiel S_i^u conduit à une surestimation importante du champ de masse volumique dans la région source. Dans notre cas, cela se traduit par une augmentation forte du champ de masse volumique dans la zone proche de la frontière entre le domaine source et le domaine acoustique. Cette augmentation s'étend même au-delà de la région des sources. Néanmoins, cette déviation

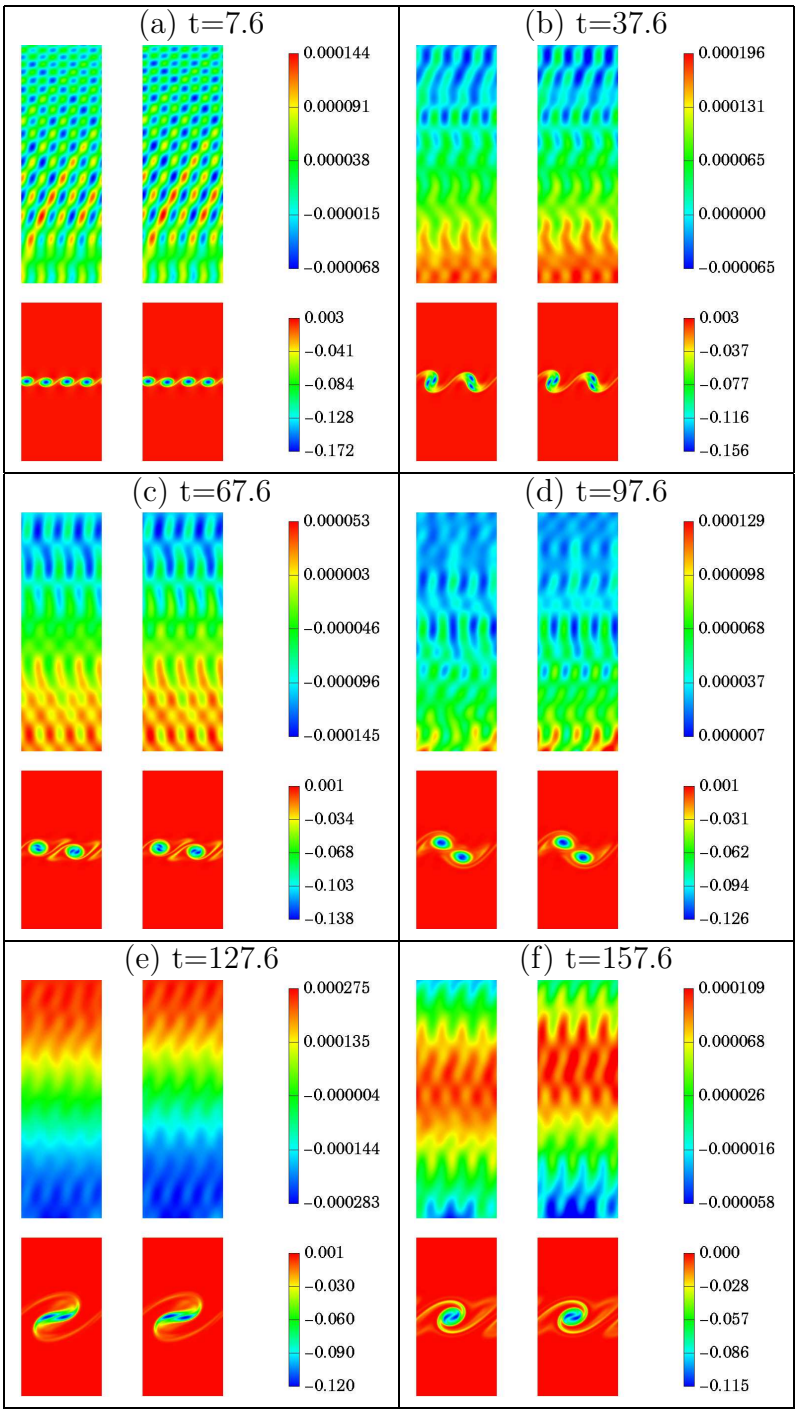


FIG. 4.10: Cas isotherme - visualisation de champs instantanés pour $M = 0.2$ avec le terme source complet S_i . Pour chaque instant, gauche : DNS Compressible ; droite : méthode hybride

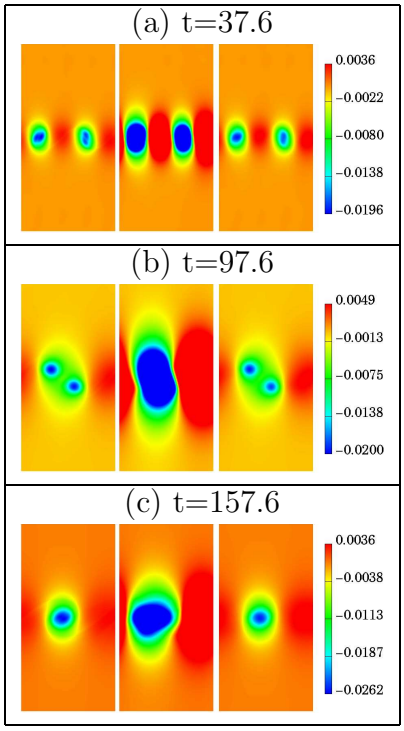


FIG. 4.11: Cas isotherme - visualisation de champs instantanés de masse volumique pour $M = 0.2$ dans la zone source. Pour chaque instant, Gauche : DNS Compressible ; Milieu : EEL + terme source partiel S_i^u ; Droite : EEL + terme source complet S_i

ne se propage pas en tant qu'onde acoustique, et ne vient donc pas modifier le champ acoustique observé en champ plus lointain.
Une première conclusion pratique concernant les sources en configuration isotherme est que l'utilisation du terme source complet traduit convenablement la présence de l'ensemble des modes concernés dans la région de production sonore et de champ proche et permet en outre d'observer un champ de masse volumique fidèle à une représentation compressible dès la frontière séparant la région de production de la région de propagation.
D'autre part, ce résultat confirme que le terme source S_i défini pour le cas anisotherme est valable dans le cas isotherme, et compatible du point de vu acoustique avec le terme source partiel S_i^u.

4.2.4 Cas anisotherme

L'aptitude de la simulation temporelle à valider l'approche hybride ayant été démontrée dans la partie précédente, nous nous intéressons à présent aux écoulements anisothermes et à la validation de S_i en particulier.

La couche de mélange étudiée ici évolue à $M = 0.2$ avec $T_1 = 2T_2$. Nous rappelons que nous avons choisi de définir le nombre de Mach par $M = U^*_{ref}/\sqrt{\gamma r^* T^*_{ref}}$ et que dans le cas anisotherme $T^*_{ref} = T^*_2$.
De la même façon que pour l'écoulement isotherme, la figure (4.12) présente des champs instantanés de masse volumique acoustique dans la zone de propagation et de vorticité dans la région source. Les résultats compressibles et hybrides montrent là aussi un accord remarquable. Un léger décalage temporel est observé mais semble moins marqué dans le cas présent. La figure (4.13) présente l'évolution temporelle de la masse volumique au point A. Comme il a été précisé dans la partie 4.2.2, il est possible de réaliser des prédictions acoustiques correspondant à des écoulements de nombres de Mach différents à partir d'un calcul unique de la dynamique. Nous avons donc réalisé des simulations correspondant à des nombres de Mach 0.3 et 0.4. Etant donnée l'hypothèse d'incompressibilité retenue pour le calcul dynamique, les nombres de Mach choisis sont supérieurs afin d'approcher d'une limite de validité du modèle.
Les figures (4.14) et (4.15) présentent les champs calculés pour $M = 0.3$ et $M = 0.4$. L'accord avec le résultat compressible reste bon au moins jusqu'à $M = 0.4$. En effet, pour les trois simulations, les niveaux ainsi que les caractéristiques spatiales sont bien respectées. La différence de prévision demeure le décalage temporel, comme le confirment les figures (4.16) et (4.17) présentant les évolutions temporelles de la masse volumique acoustique au point A.
Nous proposons une estimation quantitative des résultats hybrides en comparaison aux résultats compressibles par la définition de l'erreur sur la fluctuation de masse volumique de la façon suivante :

$$E_\rho(t-\tau) = \frac{\frac{1}{S}\iint_S |\rho_{LEE} - (\rho_{comp} - \rho_1)|\, dS}{\left(\frac{1}{S}\iint_S |(\rho_{comp} - \rho_1)|\, dS\right)_{MAX}} \tag{4.25}$$

L'intégration est réalisée uniquement sur la zone de propagation et τ est le temps nécessaire

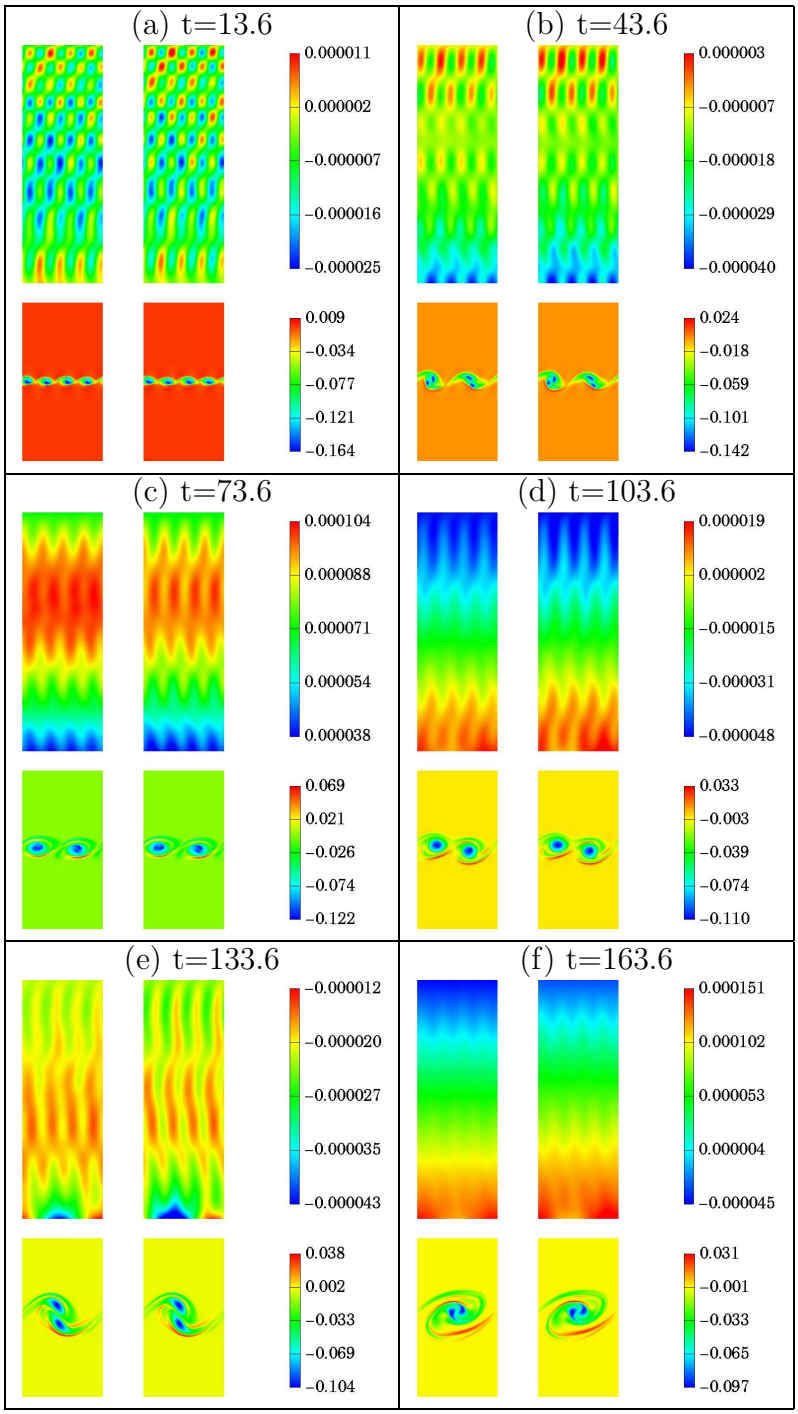


FIG. 4.12: Cas anisotherme - visualisation de champs instantanés pour $M = 0.2$. Pour chaque instant, gauche : DNS Compressible ; droite : méthode hybride

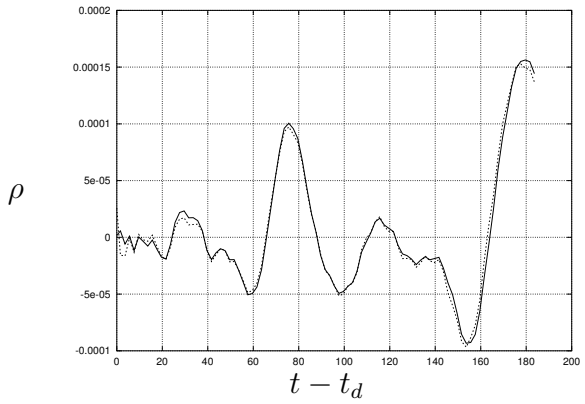


FIG. 4.13: Cas anisotherme à $M = 0.2$. Evolution temporelle de ρ en A $(15.36, 101.76)$.—— DNS compressible ; - - - - méthode hybride

à une onde acoustique émise à partir du milieu de la couche de mélange pour quitter le domaine de simulation. Pour les trois simulations décrites plus haut l'évolution de cette erreur au cours du temps est visible sur la figure (4.18). On observe sur ce critère, que la qualité de la prédiction acoustique est moins bonne lorsque le nombre de Mach augmente (du moins jusqu'à $t = 120$). Ce résultat va dans le sens des hypothèses sur la compressibilité de l'écoulement. Au-delà de $t = 120$, l'erreur augmente plus fortement, ceci même à faible nombre de Mach. Le décalage cumulé entre les dynamiques des écoulements compressible et incompressible est alors le phénomène qui est à l'origine de l'augmentation globale de l'erreur.

Observation du champ proche

Nous avons montré - dans le cas isotherme - des comparaisons entre les champs de masse volumique obtenus dans le domaine source par les simulations hybrides et compressibles (cf. fig. (4.11)). Dans le cas précédent, $p^{(0)}$ et $\rho^{(0)}$ étaient tous les deux uniformes sur tout le domaine. Dans le cas anisotherme, le champ $\rho^{(0)}$ n'est bien sûr plus uniforme et pour éviter les ambiguïtés possibles sur une définition adaptée des fluctuations de ρ dans le cadre des simulations compressibles, nous avons réalisé la comparaison des termes de pression dans la zone d'écoulement. En effet, aussi bien dans le cas compressible que par la méthode hybride, les valeurs de pression fluctuent autour d'une valeur constante. Nous obtenons la figure (4.19).
Nous observons un bon accord entre ces deux simulations. Ce résultat confirme *a posteriori* le raisonnement suivi lors de la détermination des termes sources, en particulier en ce qui concerne l'interprétation de la signification physique de $p^{(1)}$ selon la région de l'espace où il est observé.
En effet, dans la région acoustique, nous avons trouvé un bon accord avec les simulations compressibles (en réalité observé sur la masse volumique, mais ces deux grandeurs sont proportionnelles dans cette région), montrant que $p^{(1)}$ obtenu par les EEL est la pression

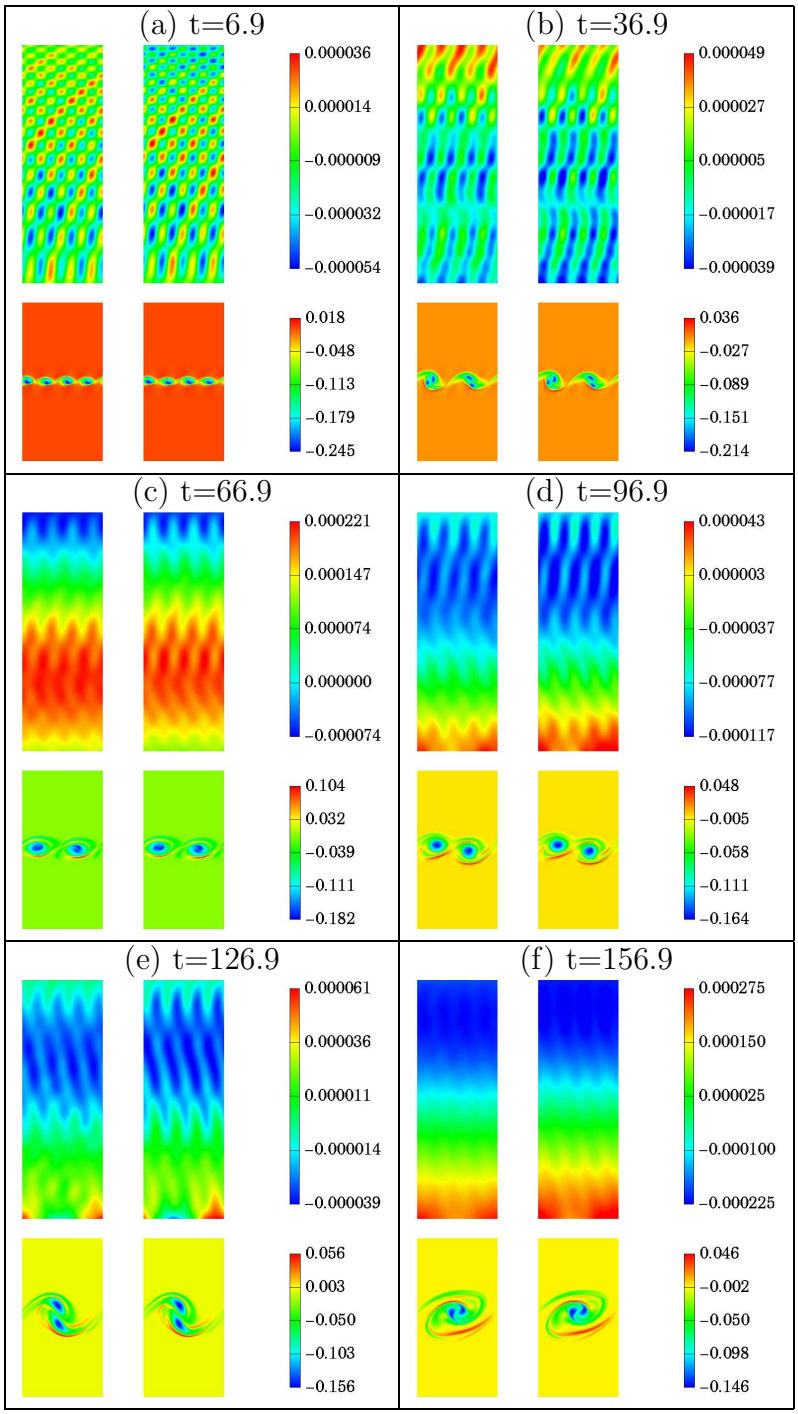


FIG. 4.14: Cas anisotherme - visualisation de champs instantanés pour $M = 0.3$. Pour chaque instant, gauche : DNS Compressible ; droite : méthode hybride

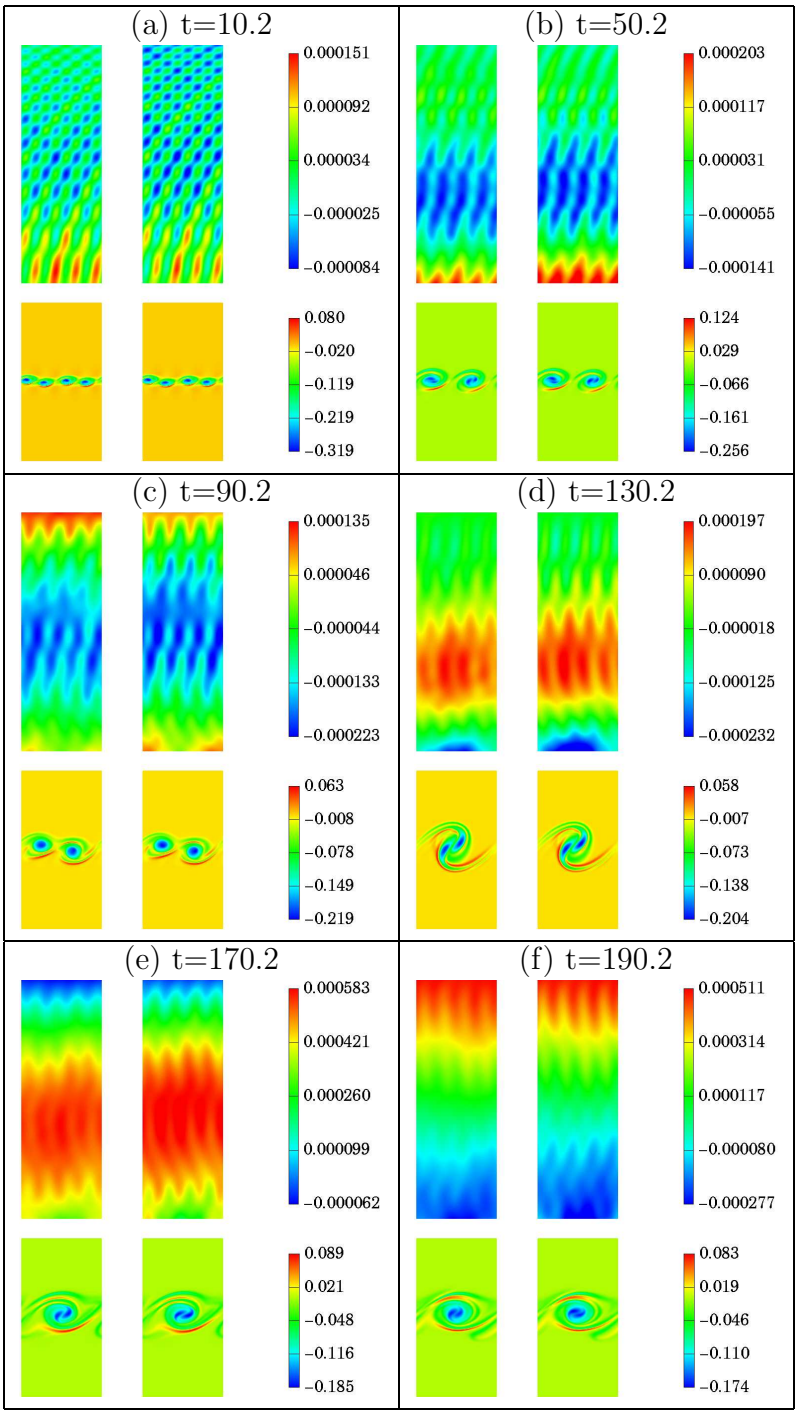


FIG. 4.15: Cas anisotherme - visualisation de champs instantanés pour $M = 0.4$. Pour chaque instant, gauche : DNS Compressible ; droite : méthode hybride

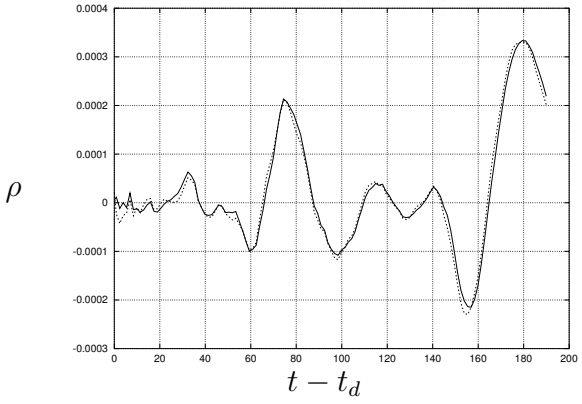


Fig. 4.16: Simulation anisotherme à $M = 0.3$. Evolution temporelle de ρ en A $(15.36, 101.76)$.—— DNS compressible ; - - - - méthode hybride

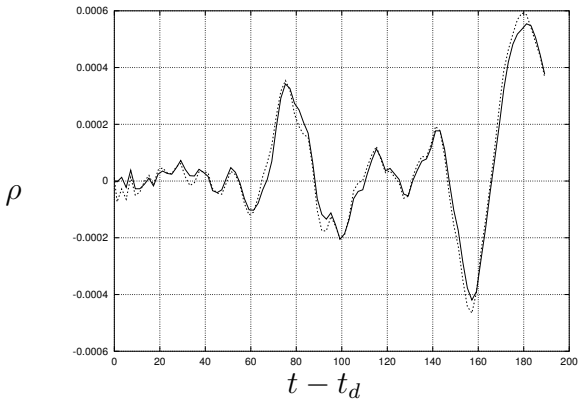


Fig. 4.17: Simulation anisotherme à $M = 0.4$. Evolution temporelle de ρ en A $(15.36, 101.76)$.—— DNS compressible ; - - - - méthode hybride

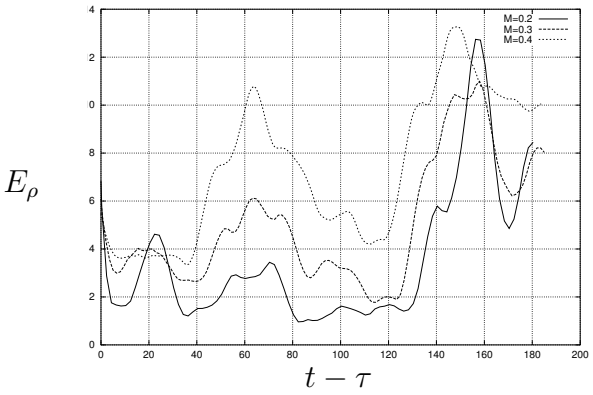


FIG. 4.18: Simulations anisothermes. Evolution temporelle de l'erreur relative moyenne.

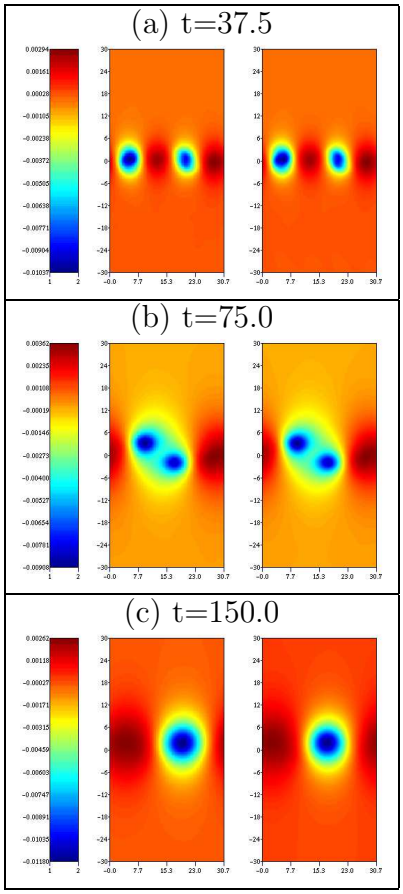


FIG. 4.19: Simulation anisotherme - visualisation de champs instantanés de fluctuations de pression pour $M = 0.2$ et $T_1/T_2 = 2$ dans la zone source. Pour chaque instant, Gauche : EEL ; Droite : DNS Compressible.

acoustique dans cette région. D'autre part, la figure (4.19) montre que dans la région des sources, $p^{(1)}$ est très proche de la pression compressible. Ainsi, dans la région des sources, $p^{(1)}$ peut effectivement être interprétée comme la pression dynamique.
Pour la masse volumique, ces comparaisons n'apportent pas de conclusions probantes. A l'heure actuelle, nous pensons que cette différence est due à la présence du mode entropique, qui n'est pas correctement excité dans nos simulations. Ce mode, excité de façon inappropriée, conduit probablement à des fluctuations démesurées qui empêchent toutes comparaisons sur les autres modes. De façon analogue, les fluctuations de masse volumique observées en isotherme avec le terme source incomplet majoraient largement celle du mode de vorticité.

4.3 Simulation d'une couche de mélange isotherme en développement spatial

Ce paragraphe est consacré au passage du calcul dynamique vers la simulation aéroacoustique pour la couche de mélange en développement spatial. Cette étape permet de valider la mise en œuvre de toutes les techniques mises au point dans les parties précédentes ou données dans la littérature, avant de les appliquer à un écoulement anisotherme.
A la lumière de travaux de précédents auteurs [11, 12, 15, 19, 27], nous nous intéressons à une couche de mélange spatiale très proche de celle déjà utilisée dans la partie 2.3.3. Les paramètres de cet écoulement sont : $Re = 350$, $U_1 = 1.33$, $U_2 = 0.33$, $L_x = 300$, $L_y = 100$, $dx = 0.5$, $dy = 0.25$ (le maillage cartésien utilisé ici est uniforme). Le forçage de la condition d'entrée (Cf. équation (2.64)) est réalisé sur f_0 et $f_0/2$ avec $\sigma = 5$, $A_0 = 0.01$, $A_1 = A_0/2$ et $\varphi_0 = \pi/2$.
Le domaine d'étude est représenté sur la figure (4.20). Le calcul CFD est réalisé sur la région centrale, appelée zone source, et fournit les sources nécessaires à la résolution des EEL qui est effectuée sur le domaine complet (zone source plus zone de propagation acoustique).
Le forçage sur le mode fondamental et le premier sous-harmonique conduit, comme pour la configuration temporelle, à un développement "maîtrisé" des structures tourbillonnaires. En particulier, le lieu d'appariement est fixe pour un paramétrage donné [15, 19, 27, 101]. Nous obtenons ainsi un écoulement dont la source principale est bien localisée et fixe dans le domaine de simulation. Cette situation est très favorable pour une validation [11,12,15,19]. En choisissant le rapport $U_1/U_2 = 4$, nous nous rapprochons d'un cas traité dans [15]. La comparaison de nos solutions avec celles de [15] nous permet finalement de valider nos procédures avant de passer au cas anisotherme.
Nous obtenons le champ de vorticité de la figure (4.21) sur laquelle il convient de faire quelques remarques.
Nous localisons approximativement le premier appariement aux environs de $x = 40$. La figure (4.21) ne permet pas de le voir, mais l'observation de la vorticité au cours du temps confirme l'invariance de cette position. Dans une situation comparable, le premier appariement de [15] est localisé aux environs de $x = 70$. Au cours de nos différents tests, nous avons constaté qu'en plus du déphasage φ_0 entre les deux perturbations [97], leur amplitude influence le lieu d'appariement.

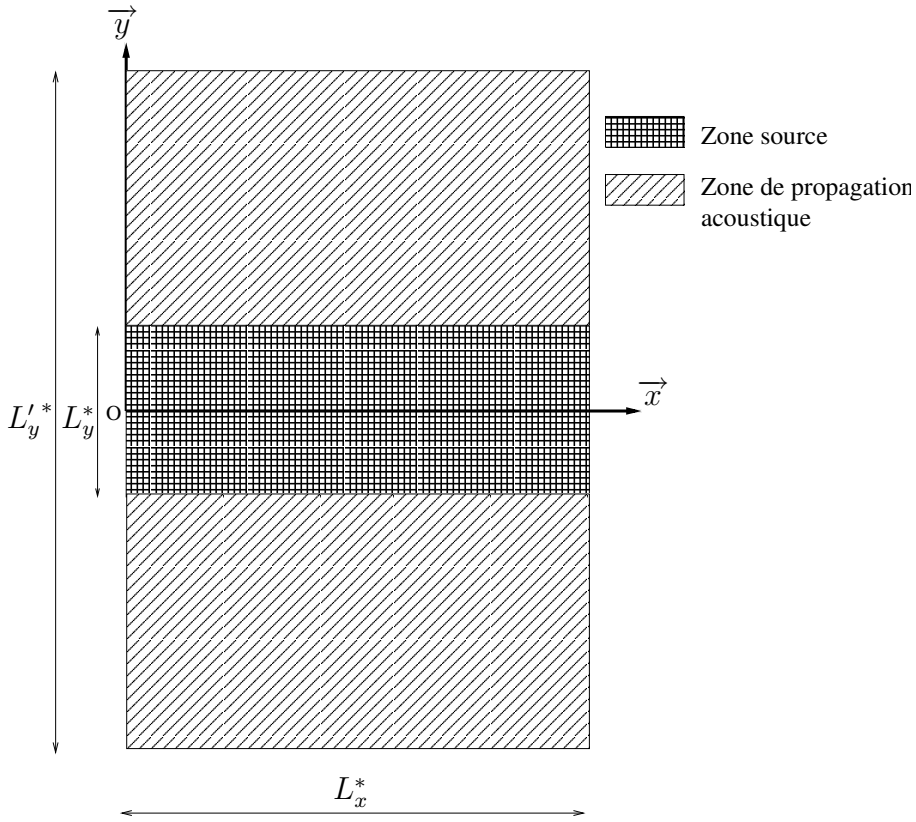


FIG. 4.20: Répartition des différentes parties du domaine de simulation

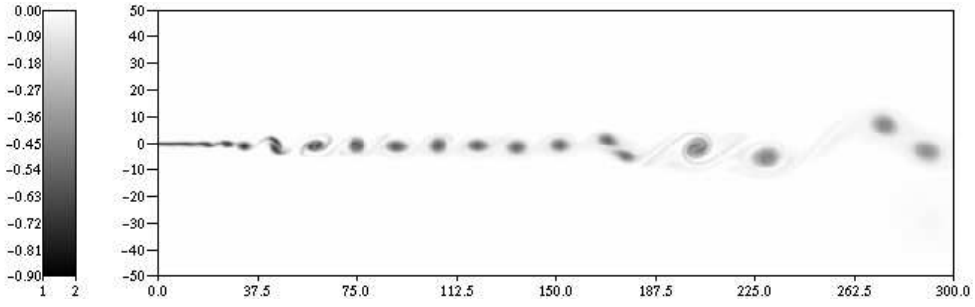


FIG. 4.21: Couche de mélange isotherme forcée à f_0 et $f_0/2$: champ instantané de vorticité

La présence d'appariements successifs constitue en revanche une différence importante avec les développements dynamiques des couches de mélange de [11, 12, 15, 19]. Dans ces travaux, l'appariement n'est suivi que par une rangé de tourbillons sans appariements secondaires. L'absence d'appariements secondaires est expliquée par C. Bogey [15] par un effet de la zone éponge appliquée en fin de domaine. Dans [101], le but des auteurs n'était pas une étude acoustique. Ils ont donc estimé que seule l'évacuation des structures tourbillonnaires était importante pour leur étude. Ils n'ont alors pas utilisé de zone éponge dans leur configuration de couche de mélange, et ont observé que pour un domaine de simulation suffisamment long, la couche de mélange retrouvait un processus d'appariement plus naturel que celui provoqué par le forçage. Ils ont constaté un second appariement dans une région proche de $x = 140$.
Notre couche de mélange suit un développement dynamique différents de celui de [11, 12, 15, 19], mais qui reste néanmoins physiquement acceptable.
Comme nous cherchons ici à retrouver le rayonnement issu du premier appariement. Ils nous faut dans la partie de la méthode hybride dédiée à l'acoustique faire en sorte que cette partie de l'écoulement ne vienne pas perturber notre estimation du rayonnement recherché. En d'autres termes, nous devons nous attendre à la présence de sources acoustiques importantes dans la région comprise entre $x \simeq 150$ et la sortie du domaine, dont nous devrons inhiber artificiellement le rayonnement.

4.3.1 Nature des termes sources

Le développement des équations d'Euler linéarisées peut faire intervenir une décomposition en une partie moyenne stationnaire de l'écoulement, et une partie fluctuante. Pour les sources, cette décomposition permet de distinguer plusieurs types de phénomènes à l'origine du bruit. Rappelons l'expression du terme source S^u :

$$S_i^u = -\frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)} u_j^{(0)}}{\partial x_j}. \tag{4.26}$$

Introduisons la décomposition

$$u_i^{(0)} = u_{0i} + u_i^t \tag{4.27}$$

où u_{0i} est une moyenne temporelle de $u_i^{(0)}$. Dans cette partie ne concernant que les écoulements isothermes, nous n'introduisons pas de décomposition sur la masse volumique. Il vient alors

$$S_i^u = \underbrace{-\frac{\partial \rho^{(0)} u_{0i} u_{0j}}{\partial xj}}_{(S_m^u)_i} \underbrace{-\frac{\partial \rho^{(0)} \left(u_{0i} u_j^t + u_i^t u_{0j}\right)}{\partial x_j}}_{(S_c^u)_i} \underbrace{-\frac{\partial \rho^{(0)} u_i^t u_j^t}{\partial x_j}}_{(S_p^u)_i}. \tag{4.28}$$

Cette décomposition est bien connue [8]. Le premier terme S_m^u qui est stationnaire par définition, n'intervient pas dans les sources acoustiques. Le terme S_c^u représentant les interactions entre le champ moyen et les fluctuations turbulentes est appelé bruit de cisaillement (shear noise). Le terme S_p^u représentant les interactions entre les fluctuations

elles-mêmes est appelé bruit propre (self noise).

Il est courant de rencontrer cette décomposition dans les travaux impliquant des méthodes hybrides. Nous l'indiquons ici pour éviter toute ambiguïté sur le traitement appliqué aux sources. Par la suite, nous indiquerons lorsque nous aurons recours à cette dissociation.

4.3.2 Stabilité - Equations d'Euler Linéarisées réduites

En présence d'un écoulement moyen, il existe des couplages entre les trois modes de fluctuations. Les sources acoustiques sont alors capables d'exciter le mode rotationnel. Ce mode de nature convective reste limité à la région de l'écoulement et de ce point de vue, sa présence n'est pas pénalisante. Par contre, au sein d'une couche de mélange, lorsque ce mode contient la fréquence du mode le plus instable, il peut entraîner l'apparition d'instabilités convectives qui peuvent soit perturber les conditions aux limites, soit faire diverger la solution.

Ce problème a été étudié en détail dans [79] où il a été montré que, dans les EEL, les termes liés aux gradient de vitesses moyennes sont en partie responsables du couplage entre le mode acoustique et le mode rotationnel. Un opérateur "réduit" ne tenant pas compte de ces termes a donc été développé et s'est montré efficace sur quelques cas tests. L'inconvénient de cette technique est que l'opérateur obtenu ne tient pas compte d'une partie de la réfraction par l'écoulement cisaillé. Des tests à partir d'une source monopolaire harmonique émettant à la fréquence des appariements, avec les EEL complètes et réduites [6] ont montré que même à une fréquence relativement basse, l'erreur commise reste acceptable.

Dans toute la suite, nous utilisons donc aussi un opérateur "réduit".

4.3.3 Problème de l'étendue des sources acoustiques

Comme nous l'avons mentionné dans la partie 3.2, le problème de l'étendue des sources est un souci constant en aéroacoustique numérique. La situation dans laquelle nous nous trouvons à partir du couplage DNS/EEL, est très bien résumée par la figure (3.1). Au sein d'une couche de mélange, les structures tourbillonnaires crées peuvent perdurer sur une distance importante. D'un point de vue aéroacoustique, cela se traduit par l'existence de perturbations appartenant au mode rotationnel sur une grande longueur. Dans le cas de simulations directes, nous avons vu dans la partie 3.2 que la présence du mode rotationnel aux frontières du domaine de calcul impose l'utilisation d'une zone (dite "zone tampon", ou "zone éponge", ...) dont le rôle unique, mais essentiel, est de dissiper ce mode avant la frontière. Dans le cadre d'une approche hybride, la présence de structures tourbillonnaires se traduit par la persistance de sources acoustiques en aval de la région d'étude.

Zone éponge

La méthode choisie pour réaliser la zone éponge a été utilisée dans [11, 12, 15, 19], et

consiste en l'ajout d'un terme d'amortissement. Dans l'expression suivante :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + N(q) = -\frac{c_0 \sigma(x,y)}{dx}(q - q_0), \tag{4.29}$$

q représente une inconnue du problème, q_0 un état nominal de cette inconnue, et $\sigma(x,y)$ permet de définir la région dans laquelle l'amortissement est appliqué, l'intensité avec laquelle il est appliqué et la transition entre cette région d'atténuation et le reste du domaine. $N(q)$ représente le reste de l'opérateur associé aux équations résolues (les EEL dans notre cas).
La difficulté de mise en œuvre de cette méthode réside dans l'adaptation de $\sigma(x,y)$ au problème traité. Une transition trop rapide entre le domaine de calcul et la zone éponge provoque la création d'une interface générant des sources artificielles. En revanche un traitement d'intensité trop faible ou trop localisé rend la zone tampon inopérante.

Nous nous sommes aperçu qu'une amplitude de σ trop élevée dans la zone tampon favorisait l'amplification des instabilités mentionnées dans la partie précédente. Afin d'augmenter l'efficacité de la zone tampon, nous n'appliquons l'amortissement que sur les équations de conservation de la masse et de l'énergie. Ceci permet de ne pas modifier le comportement du mode rotationnel au sein de cette zone.

La persistance de sources dans la partie finale du domaine mentionnée plus haut nous a conduit à paramétrer la zone éponge de façon à empêcher tout rayonnement significatif des sources qui y sont situées. Ceci distingue notre cas de ceux cités ci-dessus, où le rôle de cette zone était uniquement de réduire suffisamment les perturbations atteignant la frontière.

Troncature des sources

Le couplage DNS/EEL présente une originalité par rapport au calcul direct. La simulation dynamique est réalisée sans l'utilisation de zone éponge (alors que pour un calcul direct, la zone éponge doit agir à la fois sur le rayonnement acoustique et sur la dynamique), ainsi les sources calculées à partir de la solution incompressible (où issues de l'approximation LMNA pour l'étude anisotherme) peuvent être non-nulles aux frontières du domaine. Leur prise en compte dans l'étape acoustique introduit alors des sources au rayonnement très intense polluant rapidement tout le domaine. Vis-à-vis de ces sources parasites, la zone éponge évoquée ci-dessus est inefficace. Nous avons donc choisi de faire tendre les sources progressivement vers zéro aux frontières du domaine source. Ceci est réalisé naturellement dans la direction transversale si le domaine de simulation DNS est suffisamment large. Dans la direction principale de l'écoulement, nous appliquons une pondération artificielle forçant les sources à zéro. Sans précaution supplémentaire, cette manœuvre est de nature à introduire des sources artificielles. Nous nous attachons donc à inclure cette opération dans la zone éponge, où le rayonnement dû à ces sources artificielles est rapidement amorti.
Nous ajoutons pour la même raison une zone d'amortissement à l'entrée du domaine.

Paramètres d'amortissement et de pondération

Finalement, les paramètres de la fonction d'amortissement et de pondération sont les suivants.

L'amortissement à l'entrée est maximum en $(x, y) = (0, 0)$ et décroît exponentiellement à mesure que la distance par rapport à ce point augmente : $\sigma(x, y) = \sigma_M^e e^{-\alpha_e(x^2+y^2)}$.

Dans la zone éponge proprement dite, $\sigma(x, y)$ augmente paraboliquement à partir de 0 en x_{min} jusqu'à σ_M^s en x_{max} puis est constant sur l'intervalle $[x_{max}, L_x]$. Dans la direction y, $\sigma(x, y)$ est constant pour $|y| < y_{min}(x)$ et décroît linéairement pour s'annuler en $|y| = L_y/2$ (où comme dans la configuration temporelle, le domaine source est de largeur L_y). La fonction $y_{min}(x)$ est linéaire. Elle permet à la zone tampon de conserver une largeur adaptée à l'élargissement de la couche de mélange.

La zone éponge utilisée est représentée sur la figure (4.22). Les valeurs des paramètres indiqués ci-dessus sont $\sigma_M^e = 0.15$, $\alpha_e = 0.01$, $\sigma_M^s = 0.2$, $x_{min} = 80$, $x_{max} = 150$, $y_{min}(x_{min}) = 10$ et $y_{min}(L_x) = 40$.

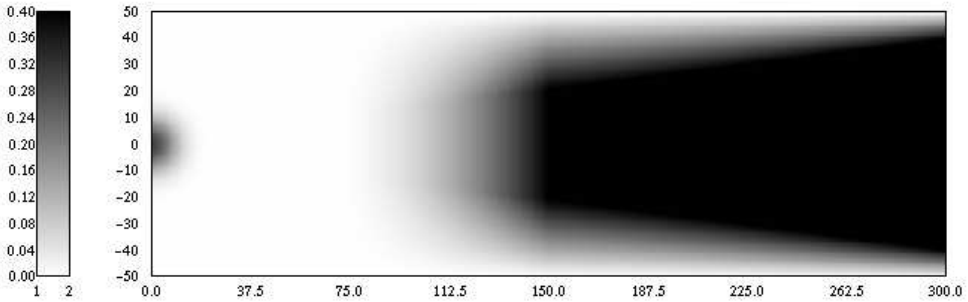


FIG. 4.22: Valeurs de la fonction d'amortissement $\sigma(x, y)$ dans la région source.

La pondération est appliquée aux sources par $S_i'(x, y) = f_{pond}(x) \times S_i(x, y)$ où S_i est l'expression de la source extraite de la simulation dynamique et S_i' la source effectivement retenue pour les EEL. La forme de f_{pond} est donnée sur la figure (4.23).

4.3.4 Résultats

Paramètres

La couche de mélange étudiée dans cette partie correspond à l'interface entre un écoulement rapide de nombre de Mach $M_1 = U_1/c_0 = 0.5$ et un écoulement à $M_2 = U_2/c_0 = 0.125$, soit un écoulement de nombre de Mach convectif $M_c = (U_2 - U_1)/2 \simeq 0.187$.

Le maillage de la zone des sources est repris exactement à partir de celui de la DNS, en ne conservant qu'une maille sur deux dans la direction y. Dans la direction x, nous conservons la résolution du calcul dynamique qui devient alors la même que suivant y. Ceci conduit finalement à un maillage cartésien uniforme de 601×201 points dans la région source pour une résolution $dx = dy = 0.5$. Dans la région de propagation le maillage est étiré

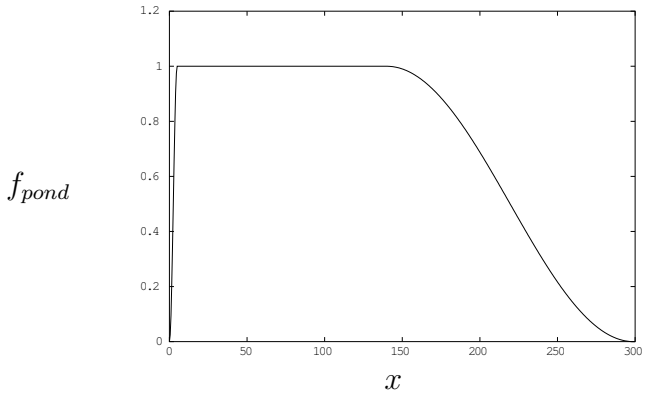


Fig. 4.23: Profil de la fonction de pondération f_{pond} dans la région des sources.

avec une fonction d'étirement (Cf. annexe A)

$$\varphi(s) = \begin{cases} \kappa(s-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(L'_y - \kappa)\left(\frac{s-(1-s_0)}{1-s_0}\right)^2 & \text{si} \quad s < s_0 \\ \kappa(s-\frac{1}{2}) & \text{si} \quad s_0 < s < 1-s_0 \\ \kappa(s-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(L'_y - \kappa)\left(\frac{s-s_0)}{1-s_0}\right)^2 & \text{si} \quad 1-s_0 < s \end{cases} \tag{4.30}$$

où s_0 correspond au nombre de points dans la région étirée et $\kappa = \frac{L'_y}{2s_0-1}$ correspond à la largeur de cette zone (φ est représentée schématiquement sur la figure (4.24)). Pour le cas présenté ici, le maillage complet contient 601×401 points pour $(L_x \times L'_y) = (300 \times 500)$. Le pas de temps de la résolution des équations d'Euler linéarisées est $dt \simeq 0.26$ et les sources sont estimées à partir de champs de vitesses sauvegardés tous les quatre pas de temps.

Utilisation de S^u complet

Nous obtenons avec l'utilisation du terme source S^u complet, incluant le bruit propre et le bruit de cisaillement, le champ de dilatation de la figure (4.25). Nous retrouvons la directivité obtenue dans [15] par calcul direct de LES dont nous reproduisons le résultat sur la figure (4.26).

La comparaison des directivités est tout à fait satisfaisante aussi bien dans la partie rapide que dans la partie lente. Le décalage dans la direction x se retrouve dans les lieux d'appariements, qui sont légèrement différents dans les deux simulations. La comparaison des amplitudes est moins aisée car les deux solutions correspondent à des nombres de Reynolds très différents : 350 pour notre résolution et 12800 pour celle de [15], or il a été montré numériquement dans [41] que des différences d'amplitudes très nettes apparaissent pour des nombres de Reynolds de 400 à 3200. Pour contrôler l'évolution de l'amplitude des fluctuations obtenues, nous comparons le profil du champ de divergence le long d'une droite d'abscisse $x = 35$, à une courbe en $1/\sqrt{y}$ typique de la décroissance des ondes acoustiques en propagation bidimensionnelle [15]. Le résultat de la figure (4.27) permet de contrôler le réalisme de la solution.

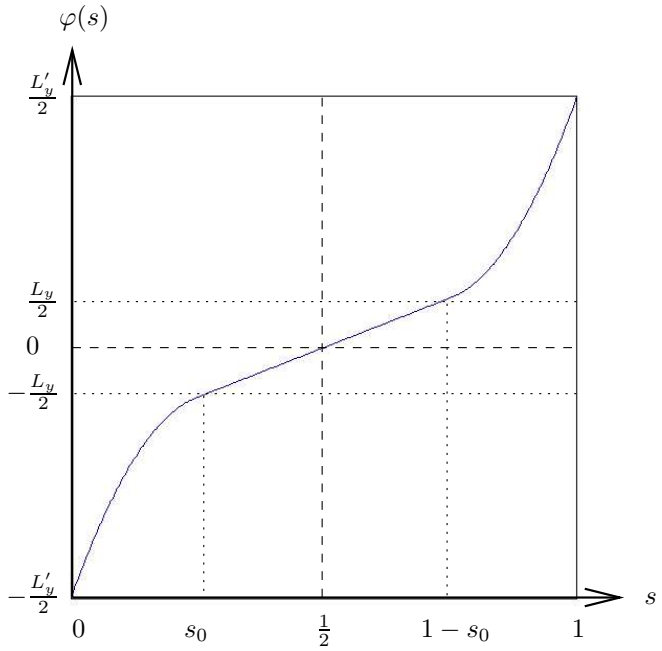


FIG. 4.24: Evolution de la fonction d'étirement dans la direction transversale.

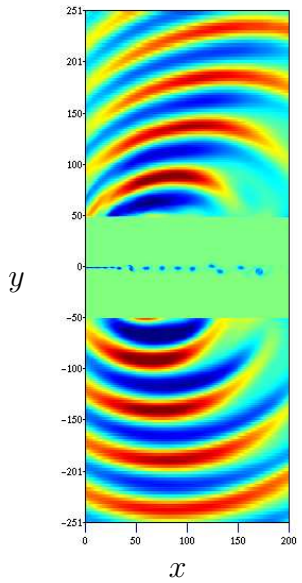


FIG. 4.25: Solution obtenue par la méthode hybride avec l'utilisation de S^u.Milieu : champ de vorticité (niveaux de -0.9 à 0). Haut et bas : champ de dilatation (niveaux de -2.5×10^{-5} à 2.5×10^{-5}).

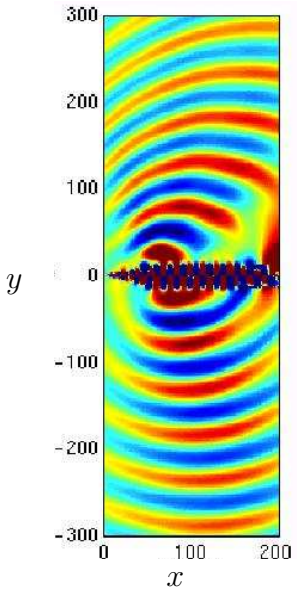


Fig. 4.26: Solution extraite de [15] obtenue par calcul direct en simulation des grandes échelles. Champ de dilatation (niveaux de -1.6 à $1.6s^{-1}$).

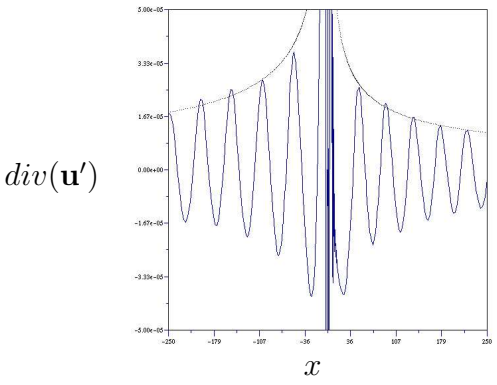


Fig. 4.27: —— Profil du champ de divergence en fonction de y en $x = 35$. - - - Courbe en $1/\sqrt{y}$

Comparaison du bruit propre et du bruit de cisaillement

La formulation linéarisée donne accès de façon simple aux différentes composantes identifiées comme sources. Nous pouvons alors comparer les champs rayonnés par les termes S_c^u et S_p^u. La figure (4.28) présente le champ de dilatation total ainsi que les composantes dues aux termes de cisaillement et de bruit propre.

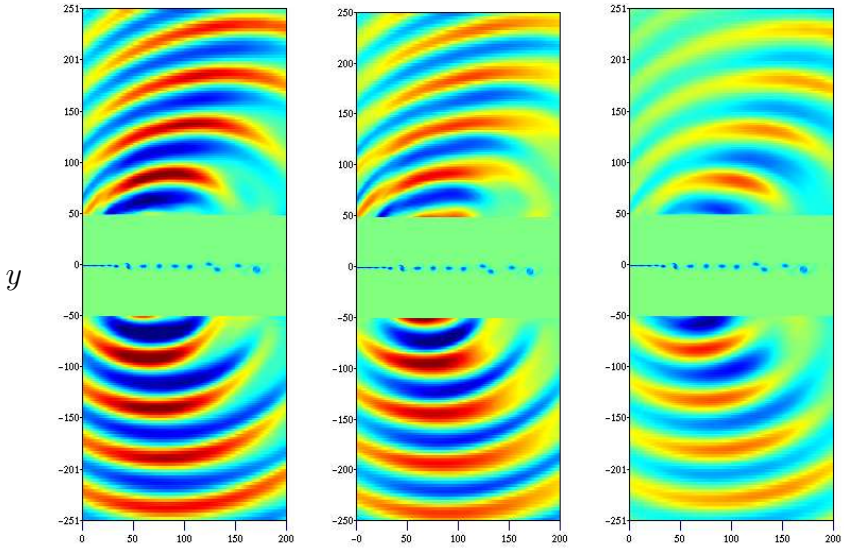


FIG. 4.28: Champs de vorticité et de dilatation dans les régions de production et de propagation pour S^u (à gauche), S_c^u (au milieu) et S_p^u (à droite). Les niveaux de dilatation vont de -2.5×10^{-5} à 2.5×10^{-5}.

Le champ de dilatation produit par la source de bruit propre S_p^u présente une directivité plus marquée que le bruit de cisaillement dans la partie rapide, avec une direction privilégiée aux environs de 60 ° par rapport à la direction aval de la couche de mélange. Pour cet écoulement, le terme prépondérant est le bruit de cisaillement, mais les deux composantes du bruit sont du même ordre de grandeur.

4.4 Simulation d'une couche de mélange anisotherme en développement spatial

Nous étudions une couche de mélange spatiale dont la configuration est très proche de la précédente. L'écoulement étudié ici se caractérise par $T_1 \neq T_2$ (et donc $\rho_1 \neq \rho_2$).

Le taux d'élargissement d'une couche de mélange dont les deux courants ont des masses volumiques différentes dépend fortement du rapport des masses volumiques dans le cas d'un écoulement non forcé, et du rapport

$$m = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 \tag{4.31}$$

lorsqu'il s'agît d'un écoulement forcé (Cf. partie 2.3.4). Une couche de mélange forcée s'élargit plus rapidement lorsque m s'éloigne de un. Nous souhaitons nous approcher de la configuration isotherme décrite précédement pour étudier le bruit créé par un appariement. Le taux d'élargissement étant principalement piloté par les appariements, la couche de mélange recherchée doit avoir un taux d'élargissement modéré. La définition de m montre que le rapport $U_1/U_2 = 4$ correspondant à la couche de mélange isotherme du paragraphe précédent éloigne rapidement m de un. Pour cette raison, nous avons choisi dans un premier temps de réduire ce rapport en fixant $U_1 = 2$, $U_2 = 1$. Pour approcher au maximum m de l'unité, nous imposons un rapport de températures dans le même sens que le rapport des vitesses en fixant $T_1 = 2$ et $T_2 = 1$, ce qui conduit à $m = 0.5$.

4.4.1 Maillage et paramètres

Lors du calcul LMNA, la présence des effets anisothermes impose une résolution plus fine que les simulations isothermes. Pour réduire les temps de calcul et les quantités de données stockées (puis interpolées), nous appliquons un étirement du maillage dans la direction longitudinale. Le maillage est uniforme jusqu'à $x_0 = 150$ avec $dx \simeq 0.15$. A partir de x_0, la fonction d'étirement φ (Cf annexe A) est parabolique sur une longueur $L_x - x_0 = 150$ pour 251 nœuds. Dans l'autre direction, la largeur du domaine est $L_y = 60$ discrétisée par $n_y = 401$ nœuds distants de $dy \simeq 0.15$.

Afin de garantir la stabilité de la simulation malgré cet étirement important, nous augmentons artificiellement la viscosité dans cette région. Celle-ci subit une progression parabolique, pour atteindre à la sortie du domaine une valeur dix fois plus élevée que dans le reste du domaine.
Cette région étirée constituera par la suite la zone éponge dans laquelle seront appliqués la pondération des sources et l'amortissement.
Le pas de temps de cette simulation est $dt_{LMNA} = 0.03$. Les données nécessaires au calcul des sources sont sauvegardées toutes les 6 itérations. Le nombre de Reynolds est $Re = 400$. Les paramètres de la zone d'amortissement sont $\sigma_M^e = 0.105$, $\sigma_M^s = 0.06$, $\alpha_e = 0.003$. Pour éviter les problèmes de création de sources parasites à la transition entre le maillage uniforme et la zone d'étirement, nous plaçons le début de la zone tampon un peu en amont : $x_{min} = 120$, $x_{max} = 210$, $y_{min}(x_{min}) = 10$ et $y_{min}(L_x) = 40$. Pour réduire les temps de calcul, nous avons diminué le domaine CFD dans la direction transversale à $L_y = 60$. Cette largeur n'est pas suffisante pour dissiper complètement le rayonnement des sources à masquer dans la zone tampon. Dans ce cas, nous faisons décroître le terme d'amortissement pour qu'il atteigne zéro en $y = \pm 50$ (au lieu de $y = \pm L_y/2$). La pondération des sources est réalisée sur les intervalles $[0; 20]$ et $[200; 295]$.
Dans la direction y, le maillage est étiré à partir de la région de propagation. Il contient 501 nœuds au total, dont 201 dans la zone source.

4.4.2 Résultats

La figure (4.29) montre des champs instantanés de vorticité et de masse volumique. Les régions d'anti-vorticité (en vert) sont bien visibles du côté le plus dense, et les "tresses"

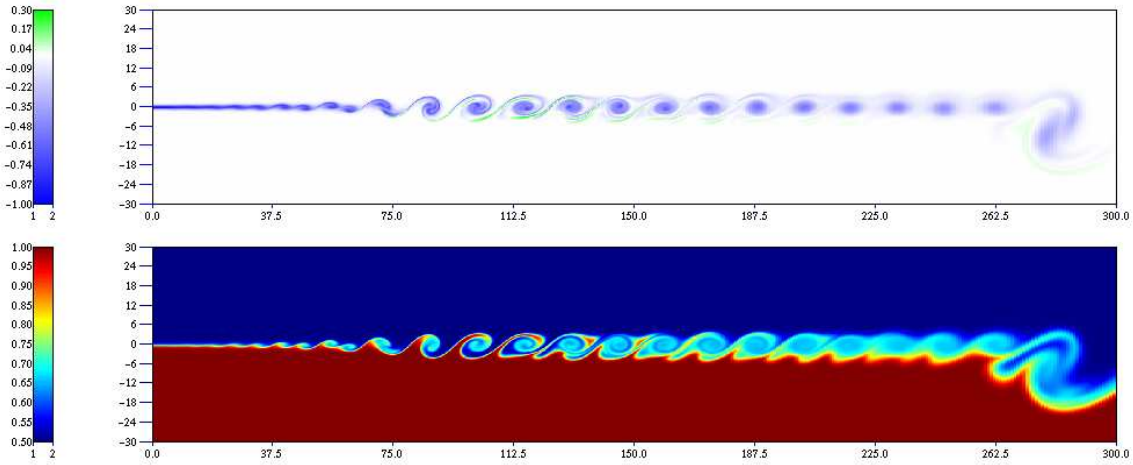


FIG. 4.29: Champs instantanés de vorticité (en haut) et de masse volumique (en bas) pour la simulation anisotherme. $U_1 = 2$, $U_2 = 1$, $T_1 = 2$ et $T_2 = 1$. Le maillage est étiré en x à partir de $x_0 = 150$.

du côté le moins dense de l'écoulement sont renforcées. L'augmentation de la viscosité à partir de $x_0 = 150$ est bien visible sur les tourbillons.

Cette couche de mélange présente comme attendu un appariement suivi d'une succession de tourbillons convectés. L'appariement se produit aux environs de $x = 75$ soit au milieu de la région dans laquelle le maillage est uniforme. En conséquence, cet écoulement doit effectivement nous permettre d'étudier le bruit d'appariement. La figure (4.29) correspond à un instant proche de la fin du calcul des sources. L'appariement visible vers la fin du domaine est une structure dérivant des premiers tourbillons créés au début de la simulation. Les sources sont prises en compte à partir du moment où cette structure à atteint le début de la région étirée.

Rayonnement acoustique

En premier lieu nous calculons le rayonnement acoustique à partir du terme source complet $S = S^u + S^t$. Pour cette simulation, les écoulements dans les parties haute et basse ont des nombres de Mach $M_1 = U_1/c_1 = 0.35$ et $M_2 = U_2/c_2 = 0.25$. Le nombre de Mach convectif est $M_c = \frac{U_1 - U_2}{c_1 + c_2} = 0.104$.

Le pas de temps est $dt_{EEL} \simeq 0.065$. La vitesse de référence de la simulation acoustique étant c_2, nous obtenons $N^a_{inter} = 12$ (Cf. eq. (4.23)), soit 11 pas de temps de simulation acoustique entre chaque sauvegarde des sources.

Les champs dilatation de la région de propagation et de vorticité de la région source sont reportés sur la figure (4.30).

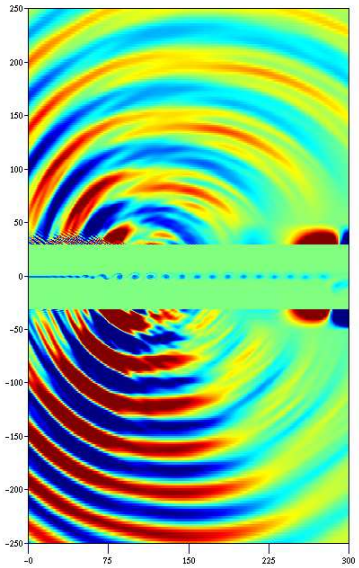


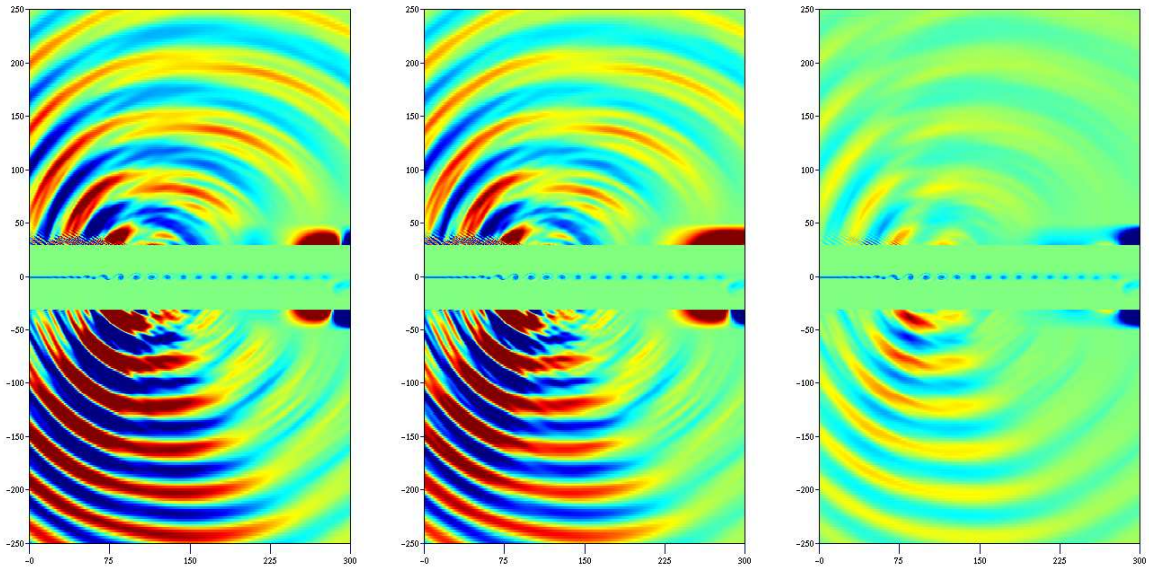
Fig. 4.30: Solution obtenue par la méthode hybride avec l'utilisation du terme source complet pour la simulation anisotherme. Milieu : champ de vorticité (niveaux de -1 à 0.3). Haut et bas : champ de dilatation (niveaux de -1.0×10^{-4} à 1.0×10^{-4}).

Le centre d'émission semble être situé à la fin de l'appariement. Le rayonnement est beaucoup plus intense dans la partie basse (côté froid). La différence de directivité entre les parties haute et basse est beaucoup plus marquée que dans le cas isotherme. Naturellement, nous retrouvons un rapport des longueurs d'ondes entre le haut et le bas de l'ordre de $\sqrt{\rho_2/\rho_1}$. La remontée assez prononcée des ondes vers l'amont s'explique par l'effet de réfraction accentué par le gradient de température.
Les zones de silence limitées à environ 37 $^\circ$ de l'axe x dans la partie supérieure, et -65 $^\circ$ dans la partie inférieure sont à considérer avec prudence. En effet, le début de l'amortissement de la zone tampon est situé relativement près de l'appariement et les ondes émises en incidence très faible de part et d'autres de la couche de mélange subissent l'amortissement sur une distance assez importante. Le champ obtenu dans ces régions est donc sous-estimé. Les lobes très intenses situés de part et d'autre de la couche de mélange à la sortie du domaine ($30 < |y| < 50$) sont des fluctuations du champ dans la zone tampon. Elles n'ont aucune signification physique et ne se propagent pas : cette portion du domaine n'est donc pas à prendre en considération.

Séparation des sources

L'objet de cette partie est de considérer l'émission acoustique provenant de la partie anisotherme S^t et celle provenant de la partie isotherme S^u. La formulation hybride linéaire permet de faire ces observations, de la même façon que nous avons séparé le bruit de cisaillement et le bruit propre. La figure (4.31) montre les champs de dilatation obtenus

par résolution des EEL en dissociant les contributions de chaque source.



$S = S^u + S^t$ $S = S^t$ $S = S^u$

FIG. 4.31: Champs instantanés de dilatation obtenus par résolution des EEL à partir des contributions séparées des sources de l'écoulement anisotherme. Champs de vorticité : niveaux de -1 à 0.3. Champ de dilatation : niveaux de -1.0×10^{-4} à 1.0×10^{-4}.

Les différences de niveaux sont très nettes : à ce nombre de Mach, la composante S^t est largement prépondérante en tout point de l'espace. Les deux composantes S^u et S^t semblent émettre en phase. En dehors de ces différences de niveaux, et en dépit de la formulation mathématique des sources, les caractéristiques des champs rayonnés ne permettent pas d'attribuer à l'un plus qu'à l'autre une nature dipolaire ou quadripolaire. Pour l'un comme pour l'autre, les effets de réfraction par les gradients de vitesse mais surtout de température modifient radicalement la structure du rayonnement.

Des champs instantanés des sources ayant conduit à ce résultat sont présentés sur la figure (4.32). Concernant l'ensemble, les niveaux sont plus intenses pour S^t que pour S^u, et cette tendance est frappante pour la projection suivant y. Encore une fois, ces champs ne dénotent pas de structure indicatives de la nature des sources.

Résultat isotherme de comparaison

La simulation isotherme présentée ici, est conçue de manière à être la plus proche possible de la précédente. Le rapport des vitesses est le même ($U_1/U_2 = 2$), ce qui conduit à $M_1 = 0.5$ et $M_2 = 0.25$, soit un nombre de Mach convectif $M_c = 0.125$. Tous les

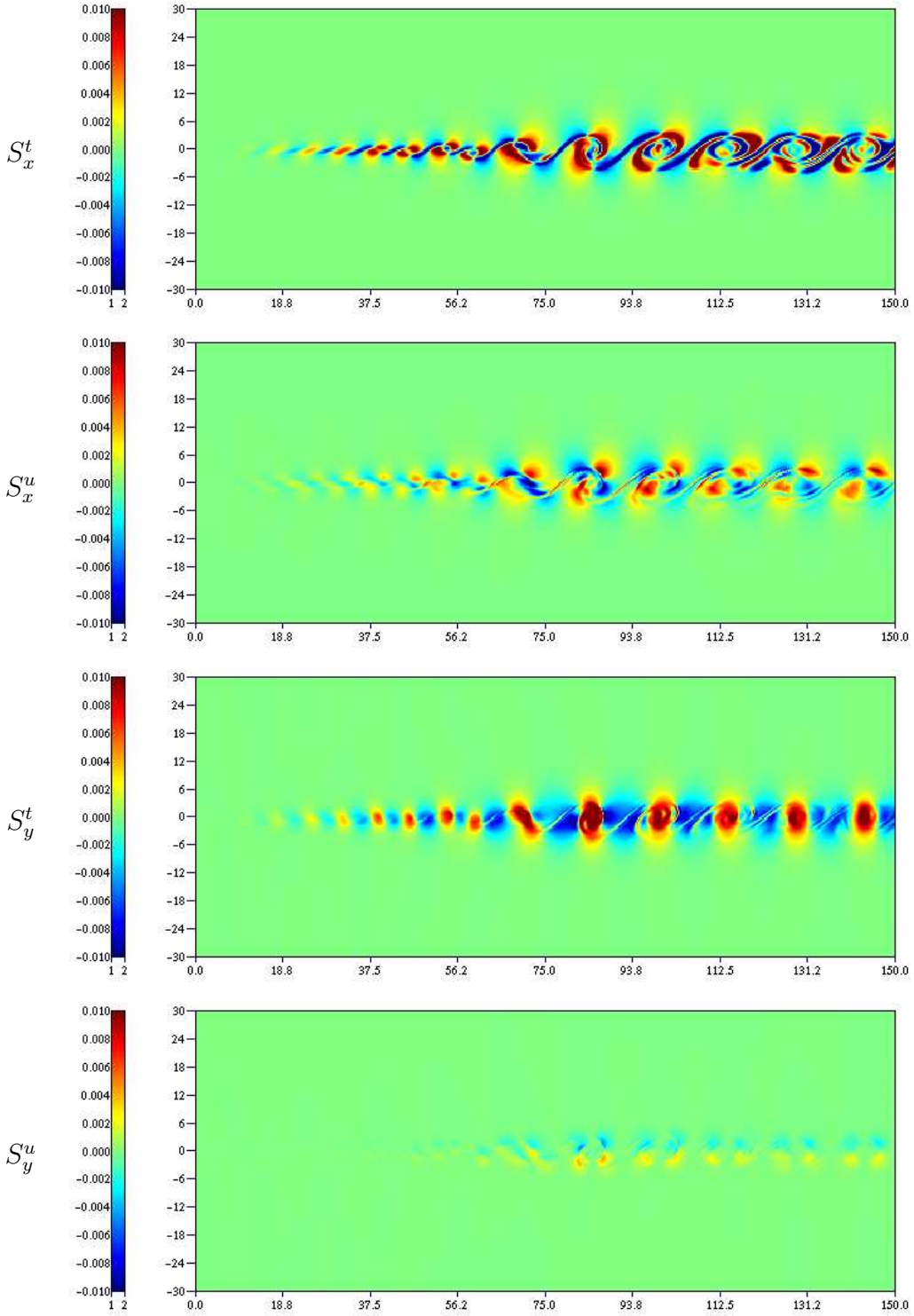


Fig. 4.32: Sources acoustiques pour l'écoulement anisotherme.

autres paramètres physiques prennent les mêmes valeurs que pour la simulation anisotherme précédente. Cette couche de mélange est très proche de celle de Billson *et al.* [12]. Numériquement, puisque la version isotherme est plus stable, les paramètres du maillage et les pas de temps sont différents. Le maillage du calcul incompressible contient 721×401 points dont 186 points pour la région d'étirement longitudinal et le pas de temps est $dt_{CFD} = 0.1$. Les sources sont sauvegardées tous les quatre pas de temps. Tous les noeuds sont conservés dans la direction x, alors que seul un sur deux est utilisé dans l'autre direction.

Le paramètre d'interpolation temporelle est fixé à $N^a_{inter} = 12$. Il conduit à un pas de temps pour la simulation acoustique $dt_{EEL} \simeq 0.145$.

Dans la direction transversale le maillage de la simulation anisotherme est conservé, avec 501 points dont 150 dans chaque partie de propagation (supérieure et inférieure). La zone tampon est la même, par contre l'amplitude de l'amortissement à l'entrée a du être réduite à $\sigma^e_M = 0.112$ et $\alpha_e = 0.005$. La figure (4.33) présente le résultat de cette simulation.

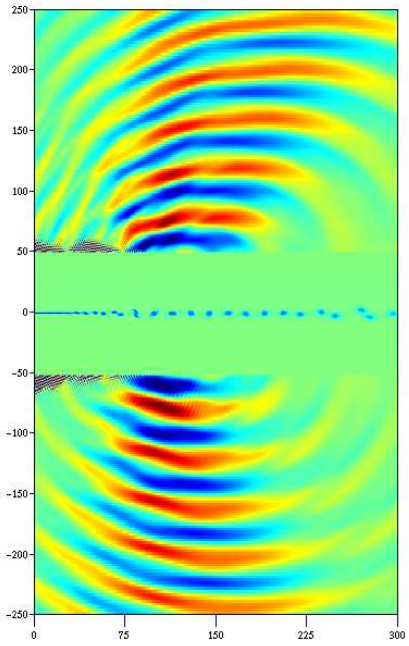


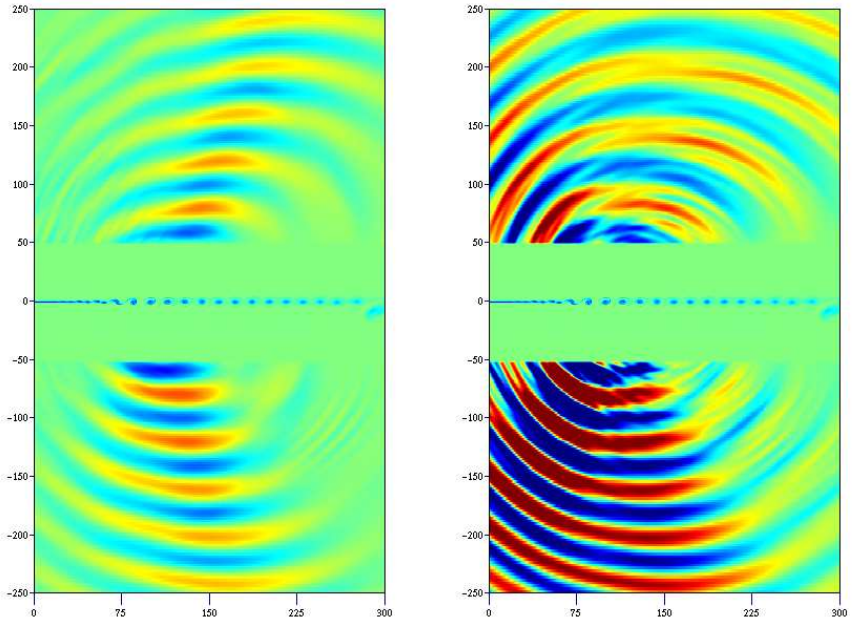
FIG. 4.33: Solution obtenue par la méthode hybride avec l'utilisation du terme source complet pour une simulation isotherme. Milieu : champ de vorticité (niveaux de -1 à 0.3). Haut et bas : champ de dilatation (niveaux de -1.0×10^{-5} à 1.0×10^{-5}).

Le champ rayonné est beaucoup moins intense que celui du cas anisotherme (les niveaux de la figure (4.33) sont saturés à 10^{-5} alors que ceux de (4.31) le sont à 10^{-4}). De plus, la dissymétrie entre les parties lente et rapide n'est que très légère et comme dans le cas

de la partie 4.3, la différence de niveaux entre les deux côtés est beaucoup plus faible que dans le cas anisotherme.

Elément d'analyse sur les effets anisothermes

On peut penser qu'il sera difficile de reconnaître le rayonnement produit par une série de dipôles ou de quadripôles lorsque la propagation s'effectue dans un milieu inhomogène (célérité du son variable, réfraction...). Ainsi, l'idée d'étudier le rayonnement des sources produites par un écoulement anisotherme, mais replacées dans un milieu où la propagation ne sera pas influencée par la réfraction due aux variations de masse volumique peut paraître séduisante. C'est l'expérience que nous avons réalisé et qui est présentée sur la figure (4.34).
Dans cette simulation, l'intégralité des sources issue de la couche de mélange anisotherme sont retenues : $S = S^t + S^u$. En revanche, l'écoulement porteur ne contient pas le gradient de température.



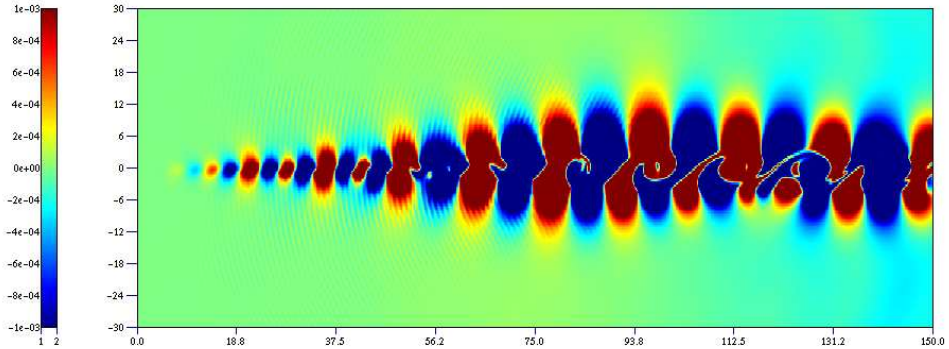
$\rho_0 = 1$ $\qquad$ $\rho_0 = \overline{\rho^{(0)}}$

Fig. 4.34: Propagation des ondes émises par un même écoulement anisotherme dans deux milieux différents (niveaux de -10^{-4} à 10^{-4}). A gauche : propagation dans un milieu de température homogène. A droite : propagation dans le milieu inhomogène.

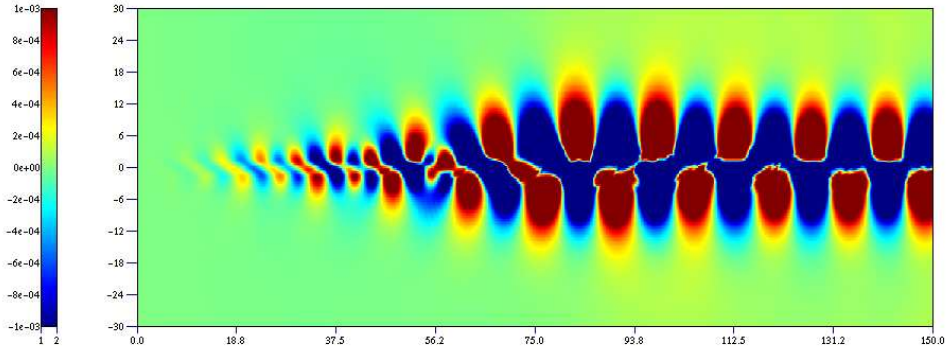
Comme il était prévisible, la transposition d'une unique distribution de sources disposée dans deux milieux au sein desquels la température est très différente provoque une modification de l'efficacité sonore et de la puissance rayonnée. La directivité est fortement modifiée et l'énergie sonore se répartit plus uniformément de part et d'autre de l'écoulement.

Cette représentation reste toutefois peu parlante quant à la nature des sources mises en jeu.

En fait, l'identification visuelle des types de sources ne peut s'envisager que dans la région des sources elles mêmes et trop difficilement sur le champ rayonné dans une situation complexe. La figure (4.35) reproduit les champs de pression obtenus par les EEL dans la zone source et sans l'influence du champ porteur.



Pression obtenue avec S^t



Pression obtenue avec S^u

FIG. 4.35: Champs de pression obtenus dans la zone source par les EEL sans champ porteur. Haut : avec S^t uniquement ; Bas : avec S^u uniquement.

Nous retrouvons bien des fluctuations de type dipolaires pour le champ de pression calculé par S^t, et un champ quadripolaire pour celui induit par S^u. Sur le champ produit par S^t, ces structures sont très marquées avant l'appariement ($x < 75$) et semblent réapparaître à la fin de l'appariement ($x > 130$). Entre ces deux positions, la disposition des lobes de pression est moins nette et paraît intermédiaire entre les deux types de sources.

4.5 Conclusion

Ce chapitre représente la concrétisation de la méthode hybride par la réunion des deux outils présentés dans les chapitres précédents. Le trait d'union entre ces méthodes est la

définition des sources permettant de transmettre les informations sur la dynamique de l'écoulement aux équations de propagation acoustique.

Par extension du développement asymptotique de l'approximation LMNA, nous avons déterminé les sources acoustiques à intégrer aux EEL. Nous avons vérifié que le résultat est cohérent avec les expressions connues et validées pour des situations isothermes.

La phase d'interpolation temporelle nécessaire pour le transfert d'informations d'une composante de la démarche hybride à l'autre a été explicitée. Pour assurer la régularité des sources, elle repose sur l'interpolation de type spline cubique.

La procédure ainsi définie a été appliquée au cas de la couche de mélange en développement temporel dans des situations isothermes et anisothermes. Le bon accord avec des résultats de calculs directs a montré la pertinence de l'ensemble de cette technique.

Ce travail a ensuite été étendu à la couche de mélange spatiale isotherme. Cette phase a permis de mettre en œuvre des techniques de la littérature pour se préserver des interactions entre les sources et les frontières numériques. Des confrontations à d'autres résultats numériques de la littérature ont validé nos simulations.

Enfin, nous avons traité le cas d'une couche de mélange spatiale anisotherme. La prépondérance de la composante des sources liée directement aux effets anisothermes a été retrouvée dans cette situation à très faible nombre de Mach. Nous avons observé des différences importantes de rayonnement par rapport à l'écoulement isotherme, avec notamment une émission plus forte du côté froid et une intensification de l'émission vers l'amont. Enfin, nous avons été à même de retrouver une structure dipolaire sur le champ de pression de la région source obtenu avec le terme spécifique au cas anisotherme.

Chapitre 5

Influence de la température

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'influence du rapport des températures initiales de l'écoulement anisotherme.

A l'aide de la configuration de couche de mélange temporelle que nous utilisons ici, V. Fortuné [41,42], a analysé plusieurs aspects de l'influence du rapport initial des températures de la couche de mélange sur l'émission acoustique. Elle a pu étudier l'influence du nombre de Mach sur l'intensité acoustique rayonnée en montrant par exemple que la couche de mélange anisotherme ($T_1/T_2 = 2$) est plus bruyante que la couche de mélange isotherme tant que le nombre de Mach est plus petit que $M \sim 0.7$ et que le contraire se produit pour des nombres de Mach supérieurs. Elle a ainsi pu retrouver des observations expérimentales sur des jets subsoniques chauds et froids [40,111]. De plus, en utilisant l'analogie de Lighthill et en étudiant les contributions séparées des différentes parties du tenseur de Lighthill, elle a pu montrer que le terme "entropique" prenait une part prépondérante de l'ensemble des sources même pour des écarts très faibles de températures.
Dans cette partie, nous prolongeons cette étude numérique des effets de la température en étudiant des cas de couches de mélange anisothermes pour différents rapports T_1/T_2. De plus le modèle LMNA / EEL montre que l'on peut identifier deux termes susceptibles de constituer une source de bruit (*Cf.* chap. 4). Le premier (S^u) est effectivement une source de bruit commune aux situations isothermes et non-isothermes. Le second (S^t) ne contribue pas à l'émission sonore dans un milieu isotherme. Des termes similaires apparaissent dans l'analogie de Lighthill et il est alors intéressant d'analyser les deux approches.

5.1 Modélisation de la viscosité

Rappelons que les grandeurs de référence pour l'adimensionnement sont choisies dans la partie inférieure du domaine d'étude ($\rho_2 = 1, T_2 = 1$).

Dans les parties concernant la validation des termes sources, le rapport des températures des écoulements anisothermes a été fixé arbitrairement à 2. Comme pour les simulations compressibles présentées dans [41], nous n'avons pas tenu compte jusqu'ici de l'effet de la température sur la viscosité. Dans la partie que nous abordons ici, cette dépendance sera d'autant plus importante que nous souhaitons augmenter le rapport de températures.

Nous étudierons donc des simulations dynamiques prenant en compte ou non les inhomogénéités de viscosité. La dépendance en température sera tirée de la loi de Sutherland correspondant au cas de l'air dans les conditions atmosphériques

$$\frac{\mu}{\mu_2} = \left(\frac{T}{T_2}\right)^{3/2} \frac{1.4}{0.4 + \frac{T}{T_2}} \tag{5.1}$$

La suite de cette partie compare des résultats de simulations pour trois rapports de températures, avec ou sans prise en compte de la loi de Sutherland. Pour clarifier la dénomination des essais réalisés, nous introduisons la nomenclature du tableau (5.1).

Référence	T_1/T_2	μ
T1	1	cte
T2	2	cte
T3	3	cte
T4	4	cte
T2μ	2	$\mu = \mu(T)$
T3μ	3	$\mu = \mu(T)$
T4μ	4	$\mu = \mu(T)$

TAB. 5.1: Nomenclature des simulations.

Comparaisons à rapports de températures constants

Pour un rapport de température $T_1/T_2 = 2$, les champs de vorticité de la figure (5.1) montrent que la dynamique des écoulements obtenus est quelque peu modifiée par la prise en compte des effets de la température sur la viscosité. On peut observer à la fois des amplitudes plus faibles sur la simulation T2μ ainsi qu'une avance des évènements nettement visibles sur la figure (5.1-c) de T2μ sur T2.

Pour le rapport $T_1/T_2 = 3$, les résultats de la figure (5.2) montrent de façon plus marquée les mêmes effets que ceux observés pour le rapport 2. Les figures (5.2-a) et (5.2-b) affichent des niveaux de vorticité fortement atténués et l'avance de la simulation T3μ est très nette pour le second appariement (parties c et d).
Enfin, la figure (5.3) pour les simulations T4 et T4μ confirme de façon encore plus prononcée les remarques précédentes. Une autre façon d'observer l'influence de la prise en compte de la variation de viscosité est de comparer les évolutions des simulations T2, T3 et T4 d'une part, et celles des simulations T2μ, T3μ et T4μ d'autre part.

Comparaisons entre simulations à $\mu = cte$

Des champs instantanés de vorticité pour les trois simulations à $\mu = cte$ sont présentées sur la figure (5.4) où sont sélectionnés des instants caractéristiques de l'évolution de la couche de mélange. A l'instant (a), les tourbillons viennent de se former. L'étape (b) se

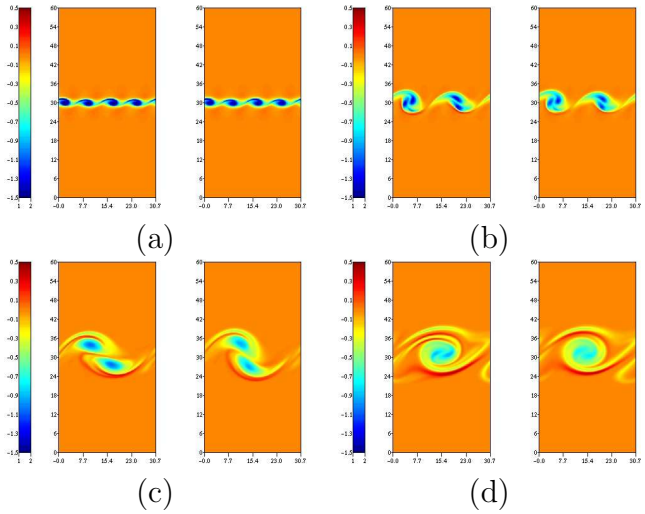


Fig. 5.1: Champs instantanés de vorticité pour les simulations T2 (à gauche) et T2μ (à droite). (a) t=25 ; (b) t=60 ; (c) t=140 ; (d) t=200.

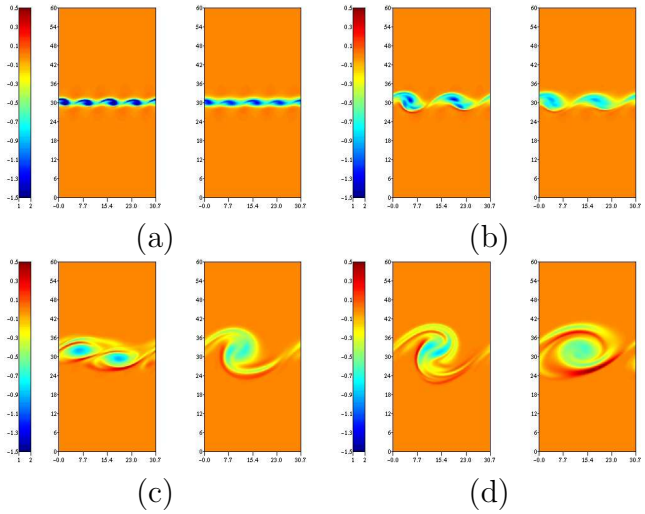


Fig. 5.2: Champs instantanés de vorticité pour les simulations T3 (à gauche) et T3μ (à droite). (a) t=25 ; (b) t=60 ; (c) t=150 ; (d) t=190.

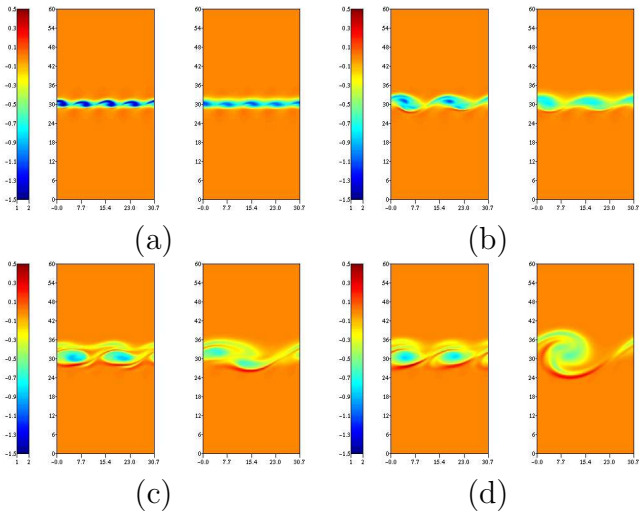


FIG. 5.3: Champs instantanés de vorticité pour les simulations T4 (à gauche) et T4μ (à droite). (a) t=25 ; (b) t=60 ; (c) t=120 ; (d) t=160.

situe au début du premier appariement, alors que l'instant (c) marque approximativement la fin de celui-ci. A ce stade, on peut observer que le premier appariement se produit un peu plus tard et dure plus longtemps lorsque le rapport T_1/T_2 augmente. Les étapes (d) et (e) montrent les champs de vorticité pendant le second appariement. Il est alors très clair que le retard observé pour le premier appariement s'accentue pendant le second, et que la simulation T4 prend un retard très important pendant cette phase. La suite de l'évolution dynamique n'est pas montrée ici, mais il faut attendre $t \sim 400$ pour que la simulation T4 termine son second appariement, alors que les deux autres simulations l'ont quasiment déjà terminé à $t = 200$. Le mécanisme du second appariement est en fait complètement perturbé.

Comparaisons entre simulations à $\mu = \mu(T)$

Tout comme la figure (5.4), la figure (5.5) présente les champs de vorticité obtenus avec différents rapports de températures par des simulations tenant compte de la loi de Sutherland. Nous visualisons les champs aux mêmes instants que précédemment.
Cette fois les simulations T**X**μ ne montrent plus les décalages temporels des simulations T**X**, et les évènements se succèdent avec une dynamique assez proche quelque soit le rapport de températures.

Conclusion

Ces tests montrent l'impact de la prise en compte de la loi de Sutherland sur la dynamique de la couche de mélange aux rapports de températures envisagés. Nous avons notamment pu constater l'effet des variations de masse volumique et de viscosité sur le déclenchement

(a) t=25

(b) t=50

(c) t=100

(d) t=150

(e) t=200

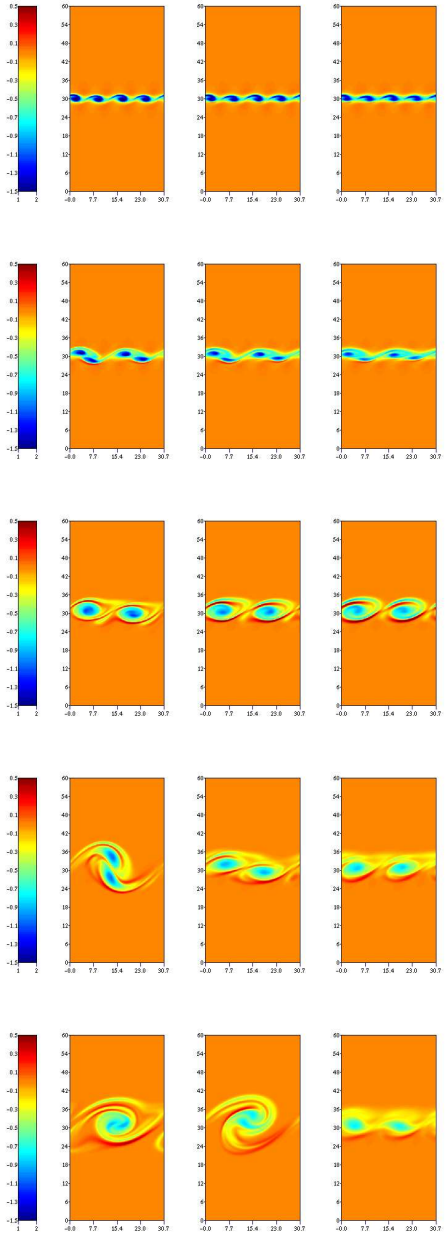


Fig. 5.4: Champs instantanés de vorticité pour les simulations T2 (gauche), T3 (milieu) et T4 (droite).

(a) t=25

(b) t=50

(c) t=100

(d) t=150

(e) t=200

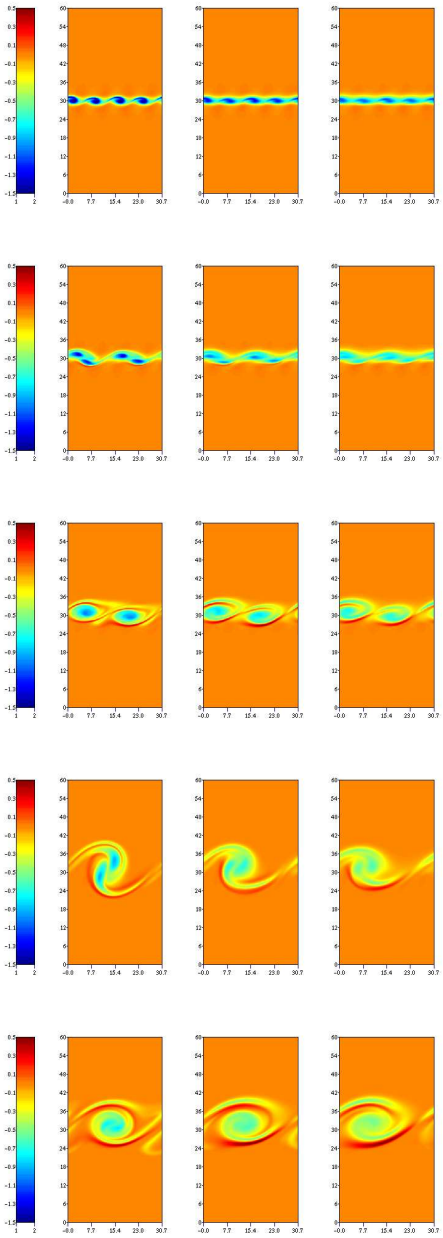


FIG. 5.5: Champs instantanés de vorticité pour les simulations T2μ (gauche), T3μ (milieu) et T4μ (droite).

du second appariement : celui-ci est retardé par une augmentation du rapport initial de masses volumiques, et rapproché du premier lorsque la loi de Sutherland est introduite.
Il convient d'apporter une nuance sur ce point : le développement d'une couche de mélange forcée est dans les premiers instants très dépendante des conditions d'application de l'excitation. Les instants auxquels se produisent les appariements sont notamment liés au déphasage entre les différents modes appliqués. D'autres conditions initiales pourraient donc conduire à une influence différente de la température et de la viscosité sur les instants de réalisation des appariements.
Finalement, l'utilisation de la loi de Sutherland permet de prendre en compte la diffusion de la vorticité par la viscosité de façon plus réaliste aux rapports de températures rencontrés. De plus, l'évolution dans le temps des solutions numériques obtenues avec une condition initiale commune à tous les rapports de températures sont directement comparables entre elles.

5.2 Simulations bidimensionnelles

Les simulations LMNA précédentes nous ont permis de calculer des sources acoustiques correspondant à chacun de ces cas. Nous pouvons donc les utiliser pour étudier l'influence du rapport des températures sur l'émission acoustique de nos couches de mélange. Compte tenu des conclusions sur la dynamique de l'écoulement, seules les simulations tenant compte de la dépendance en température de la viscosité (T1.1μ, T2μ, T3μ et T4μ) sont étudiées.

5.2.1 Influence de T_1/T_2 sur l'émission globale

L'étude numérique compressible menée dans [41] sur les configurations de couche de mélange temporelle T1.1 et T2 a montré que la présence d'une différence de températures (même faible, 10% pour T1.1) est à l'origine d'une source acoustique supplémentaire généralement appelée source entropique dans l'analogie de Lighthill. Pour les faibles nombres de Mach, l'émission sonore est ainsi augmentée d'une configuration isotherme à une configuration anisotherme.
Dans le cas de nos résolutions par les EEL, le terme supplémentaire est le terme S^t. Dans cette partie, nous cherchons d'une part à vérifier que nous retrouvons bien le comportement déjà connu pour T1.1 et T2, et d'autre part à observer ce qui se produit pour des rapports de températures supérieurs. En effet, les études expérimentales [40,61] explorent l'émission de jets chauds pour des rapports de températures allant jusqu'à environ trois.
L'évolution de la contribution du terme quadripolaire (4.13) avec l'augmentation du rapport de températures est connue : elle diminue en subissant la diminution moyenne de $\rho^{(0)}$ (on a même longtemps pensé que chauffer un jet réduisait son émission acoustique en diminuant la masse volumique du terme source $\rho u_i u_j$ de l'analogie de Lighthill [40]). A partir des résultats expérimentaux, on peut donc s'attendre à ce que celle du terme (4.12) augmente. Par contre, seule une séparation des deux termes peut nous apprendre l'évolution de chacun.
Nous nous intéressons donc à l'influence du rapport T_1/T_2 sur l'émission acoustique glo-

bale d'une part, et sur les contributions comparées des deux termes sources identifiés d'autre part.
Sur la figure (5.6), nous pouvons observer l'évolution temporelle de $\langle\rho\rangle(t)$ sur la frontière inférieure du domaine (côté froid) pour un écoulement correspondant à un nombre de Mach de 0.2. Sur cette figure les amplitudes de $\langle\rho\rangle$ augmentent de T1.1μ à T2μ. Par

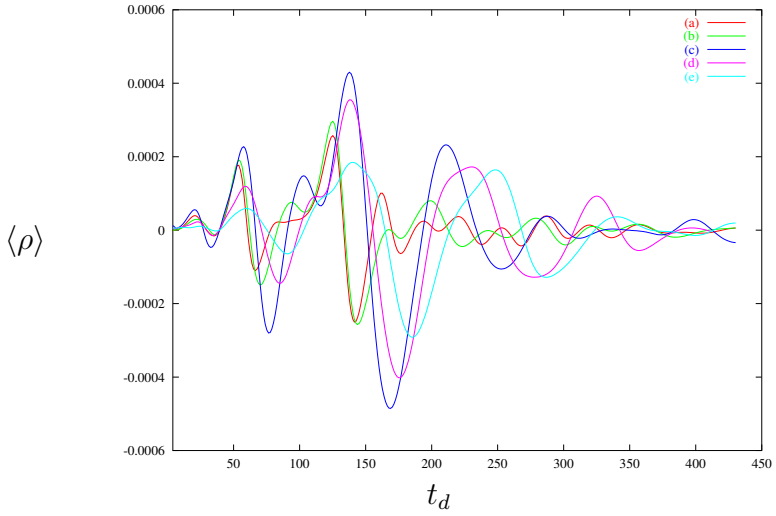


FIG. 5.6: Evolution temporelle de $\langle\rho\rangle$ sur la frontière inférieure du domaine à $M = 0.2$. (a) isotherme ; (b) T1.1μ ; (c) T2μ ; (d) T3μ ; (e) T4μ.

contre, l'émission acoustique est réduite de T2μ à T4μ. Ces résultats suggèrent que dans le cas du nombre de Mach considéré ici (0.2), le bruit rayonné par la couche de mélange diminue avec la température. La tendance observée n'est donc pas comparable aux constats expérimentaux sur les jets chauds [40, 61]. En effet, toutes ces études s'accordent pour dire que pour des nombres de Mach inférieurs à environ 0.7 le bruit des jets augmente avec la température. Cette différence n'est en soit pas complètement surprenante puisque la configuration de couche de mélange temporelle ne reflète qu'une partie de la physique d'un jet.
Les courbes des figures (5.7), (5.8) et (5.9) représentant la comparaison de nos résultats avec ceux de simulations de DNS compressibles réalisées avec les mêmes conditions restent par contre en parfait accord.

5.2.2 Comparaisons des contributions de chaque terme source

Il est intéressant de considérer les contributions séparées de chacun des termes sources pour nous éclairer sur les raisons des tendances du rayonnement global. Ainsi, il est couramment admis que le terme S^u rayonne de moins en moins à mesure que le rapport T_1/T_2 augmente. Puisque l'émission globale diminue, nous ne pouvons pas dire a priori si la part due au terme S^t diminue aussi, ou si elle augmente (mais sans pouvoir compenser la diminution de S^u).

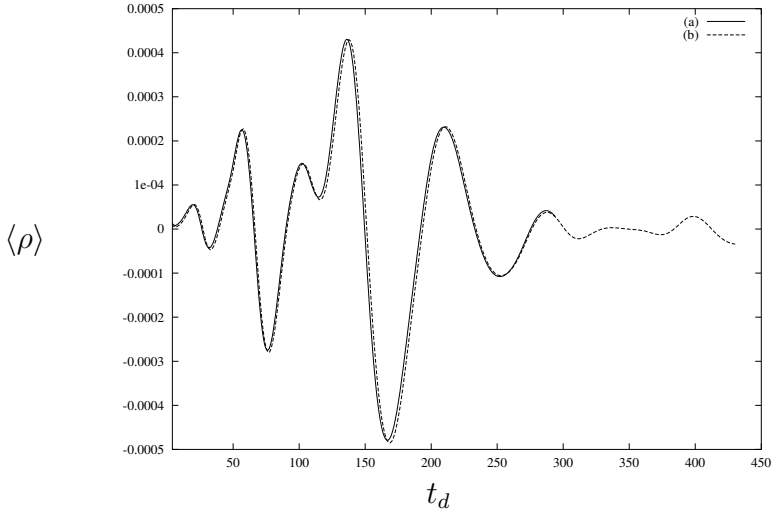


Fig. 5.7: Configuration T2μ. evolution de $< \rho >$ sur la frontière inférieure du domaine par : (a) DNS compressible ; (b) LMNA + EEL

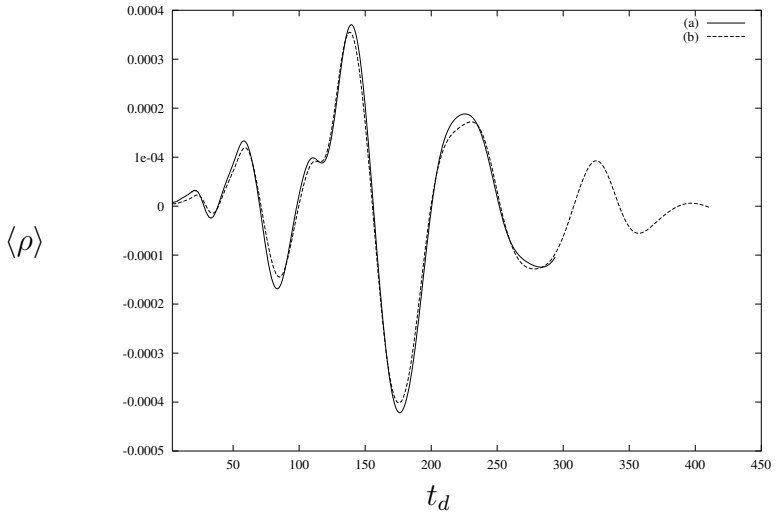


Fig. 5.8: Configuration T3μ. evolution de $< \rho >$ sur la frontière inférieure du domaine par : (a) DNS compressible ; (b) LMNA + EEL

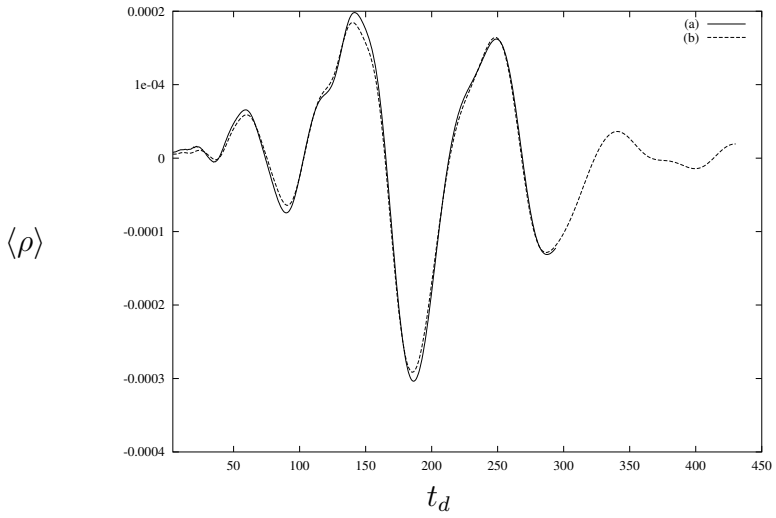


FIG. 5.9: Configuration T4μ. evolution de $< \rho >$ sur la frontière inférieure du domaine par : (a) DNS compressible ; (b) LMNA + EEL

La figure (5.10) montre les contributions séparées des termes S^t et S^u sur la frontière inférieure du domaine de simulation. Il apparaît alors que conformément au raisonnement courant, la contribution de S^u décroît avec l'augmentation du rapport de températures. Concernant le terme S^t, les amplitudes de $\langle\rho_t\rangle$ en fonction du rapport des températures augmentent de T1.1μ à T2μ mais décroissent de T2μ à T4μ.
Pour T1.1μ, le terme S^t commence à contribuer à l'émission acoustique globale mais sa part reste inférieure à celle de l'autre terme. En revanche, pour les trois rapports suivants, la prépondérance du terme S^t par rapport à S^u est très marquée. Le cas isotherme est reporté sur toutes ces figures.

Les résultats précédents vont globalement à l'encontre de ceux connus sur les jets chauds. La conclusion obtenue dans [41, 42, 44] à partir de simulations isothermes et anisothermes dont les rapports de températures restent inférieurs à 2 nous parait donc devoir être complétée.
Il ressort de ces travaux ainsi que de [53] que la nature bi- ou tridimensionnelle de la simulation dynamique réalisée à un impact direct sur le rayonnement acoustique obtenu. Il a été montré dans ces travaux que pour la configuration de couche de mélange forcée étudiée, le dernier appariement est le plus bruyant pour la configuration bidimensionnelle, alors qu'une configuration tridimensionnelle conduit à un maximum d'émission lors du premier appariement. D'autre part, les simulations bidimensionnelles conduisent à une surestimation du champ rayonné. Ces différences importantes, sur lesquelles nous reviendrons plus en détails par la suite, nous conduisent à simuler des configurations tridimensionnelles pour différents rapports de températures.

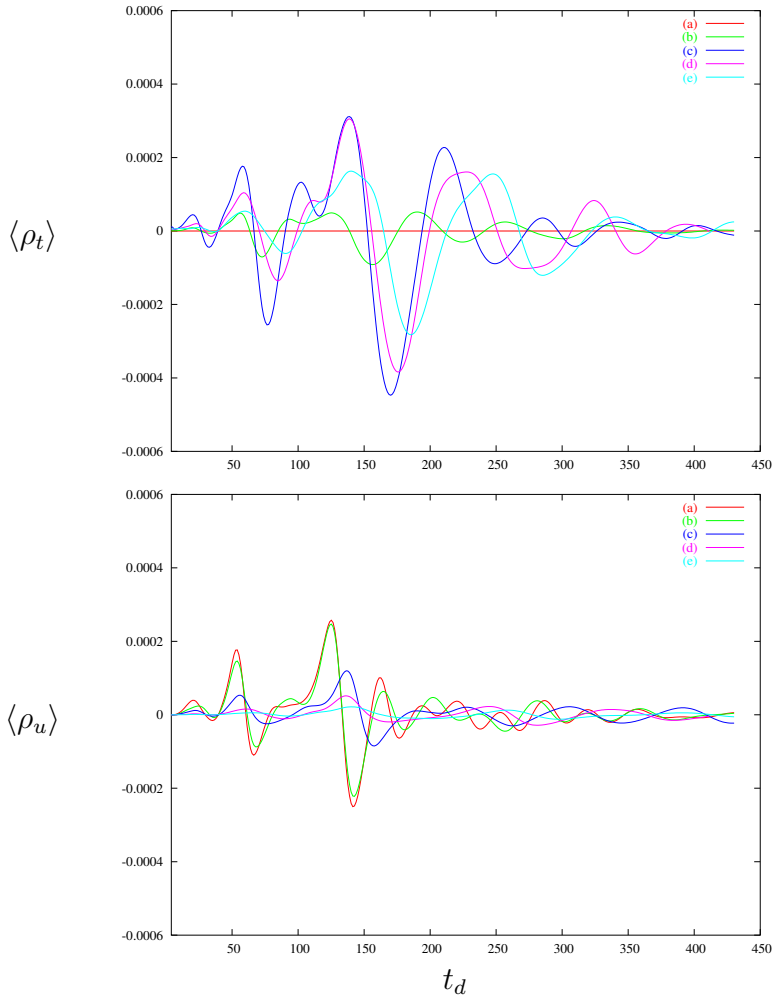


Fig. 5.10: Evolution temporelle de $\langle \rho_t \rangle$ et $\langle \rho_u \rangle$ sur la frontière inférieure du domaine à $M = 0.2$. (a) isotherme ; (b) T1.1μ ; (c) T2μ ; (d) T3μ ; (e) T4μ.

5.3 Simulations tridimensionnelles

La configuration tridimensionnelle utilisée dans cette partie est en suite directe de précédents travaux réalisés au L.E.A [41, 44, 51–53].
La tridimensionnalisation du champ dynamique est ici obtenue en superposant un bruit corrélé tridimensionnel à la perturbation initiale bidimensionnelle (qui rappelons le consiste en un forçage du mode le plus instable de la couche de mélange et des deux premiers sous-harmoniques).
Pour information, la perturbation tridimensionnelle est un bruit aléatoire de composantes $(\tilde{u_a}, \tilde{v_a}, \tilde{w_a})$. L'amplitude et le spectre d'énergie de ce bruit sont fixés arbitrairement. La détermination de cette perturbation tridimensionnelle n'a pas fait l'objet de notre part de recherches poussées et nous avons réutilisé la technique issue de [41, 44]. Tous les paramètres concernant cette condition initiale sont strictement identiques à ceux de [44].

Le domaine de simulation est tel que $L_x = 30.7$, $L_y = 60.0$ et $L_z = 30.7$ pour la dimension supplémentaire. La discrétisation spatiale se fait sur $(n_x \times n_y \times n_z) = (150 \times 501 \times 150)$ points. Les conditions limites sont identiques à celles du cas 2D et une condition périodique est imposée dans la direction z. La figure (5.11) donne une représentation du cas traité ici.

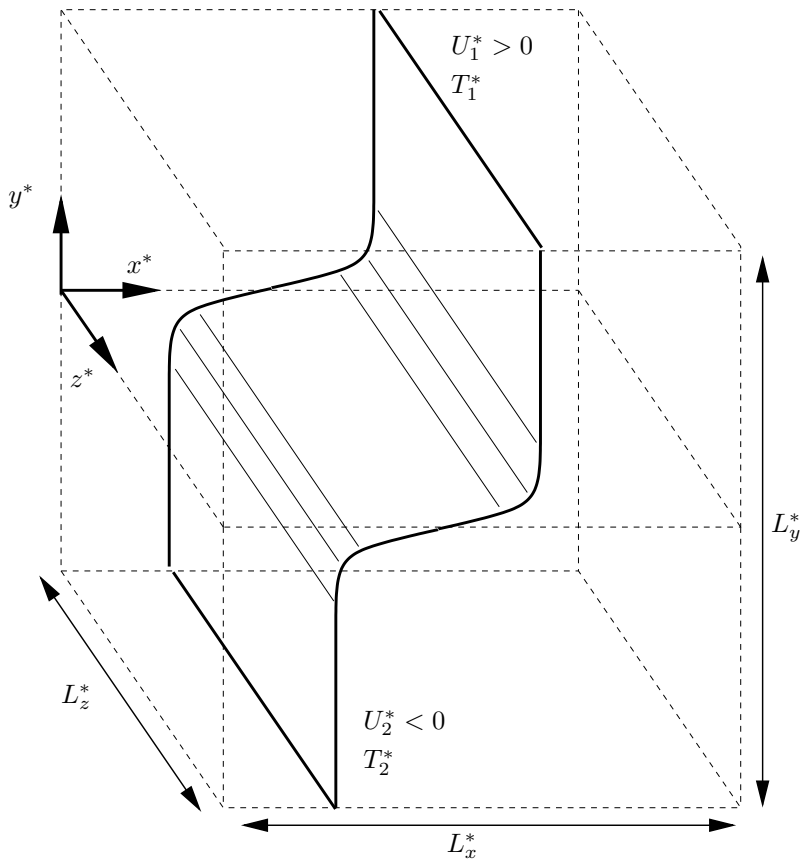


FIG. 5.11: Représentation de la configuration tridimensionnelle.

Contrairement aux simulations bidimensionnelles, nous avons ici recours à l'utilisation du filtrage spatial pour assurer la stabilité du code. A ce stade de nos développements nous maîtrisons encore mal les raisons pour lesquelles nous devons filtrer. Il est possible que la formulation conservative des équations du modèle LMNA conduise dans ces cas anisothermes à l'apparition d'erreurs d'aliasing provoqués par les produits faisant intervenir le terme de masse volumique (voir [114]). Il a été montré dans [53] par des comparaisons avec des simulations compressibles directes, que ce filtrage réalisé à l'aide des filtres compacts [72], ne dégrade en rien la précision de la solution.

Le pas de temps des simulations T2μ-3D et T3μ-3D est $dt = 0.048$ et le pas de temps de la simulation T4μ-3D est $dt = 0.024$. De plus l'extrapolation du terme $\left(\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t}\right)^{(k+1)}$ de l'équation (2.30) est réalisée à partir de l'approximation (2.35) pour les simulations T2μ-3D et T3μ-3D alors que l'approximation (2.33) est utilisée pour le cas T4μ-3D. Ces différences de traitement sont dues à la dégradation de stabilité du code lorsque l'on augmente le rapport de températures. Ces problèmes de stabilité ont déjà été évoqués dans le paragraphe 2.2.3, et nécessiterons à l'avenir d'avoir recours à d'autres solutions plus efficaces en termes de précision et de coûts de calculs. Pour des raisons de contraintes de temps nous avons choisi de laisser temporairement de côté ces problèmes.

5.3.1 Champs dynamiques

Pour les simulations mentionnées ci-dessus, nous représentons des iso-surfaces d'enstrophie à différents instants. L'enstrophie correspond au module du champ de vorticité et s'écrit

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2\right) \tag{5.2}$$

Cette grandeur permet, au moins dans le cas d'écoulements cisaillés libres, d'identifier les structures cohérentes [36]. A notre connaissance, il n'existe pas de critère objectif pour le choix du niveau des iso-surfaces représentées [36, 71], et ce choix doit alors être fait empiriquement. Sur les figures (5.12) et (5.13), le niveau d'enstrophie est $\Omega = 0.075\Omega_0$ où Ω_0 est le maximum d'enstrophie à l'instant initial. Cette valeur a été choisie de façon à rendre compte au mieux de l'évolution de chacune des simulations et de faciliter leur comparaison. Une valeur plus élevée ne permet pas de montrer un nombre suffisant de structures de la simulation T4μ-3D pour en apprécier correctement le développement. La valeur de Ω_0 est identique pour les trois simulations, et est obtenue analytiquement à partir du profil initial en tangente hyperbolique :

$$\Omega_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta U}{\delta_\omega}\right)^2. \tag{5.3}$$

Les évolutions de chacune des trois simulations sont présentées sur deux figures différentes. Le cas isotherme correspondant à cette configuration est présenté pour fournir une meilleur vision d'ensemble des tendances liées aux gradients de température. La figure (5.12) décrit la première partie des simulations, soit jusqu'au début du deuxième appariement. Pendant

cette phase, toutes les évolutions sont très semblables. La différence essentielle est, comme dans le cas bidimensionnel, la différence de rapidité d'apparition des tourbillons de Kelvin-Helmholtz et du premier appariement. Plus le rapport de température augmente, plus l'évolution est lente.

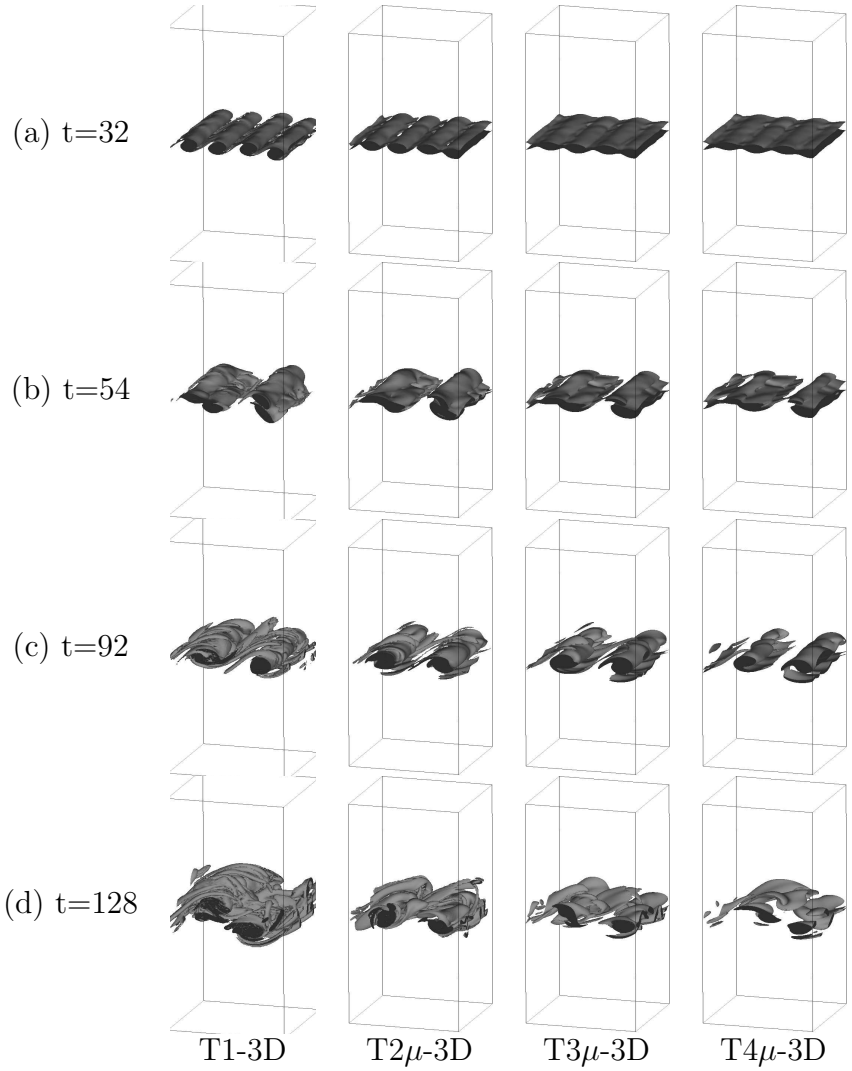


FIG. 5.12: Iso-surfaces d'enstrophie ($\omega = 0.075\omega_0$) pour les simulations tridimensionnelles (première partie). De gauche à droite : simulations T1-3D, T2μ-3D, T3μ-3D et T4μ-3D

De la figure (5.12-d) à (5.13-a), on peut voir que la phase du deuxième appariement commence pour les trois simulations. Mais, alors que pour les simulations T1-3D et T2μ-3D, cette étape s'accompagne de l'apparition de structures tridimensionnelles très nombreuses, la simulation T4μ-3D présente ce second appariement de façon plus marquée. Plus précisément, pour le plus faible rapport de températures, le second appariement est masqué par l'apparition des petites structures tridimensionnelles, alors que dans le cas

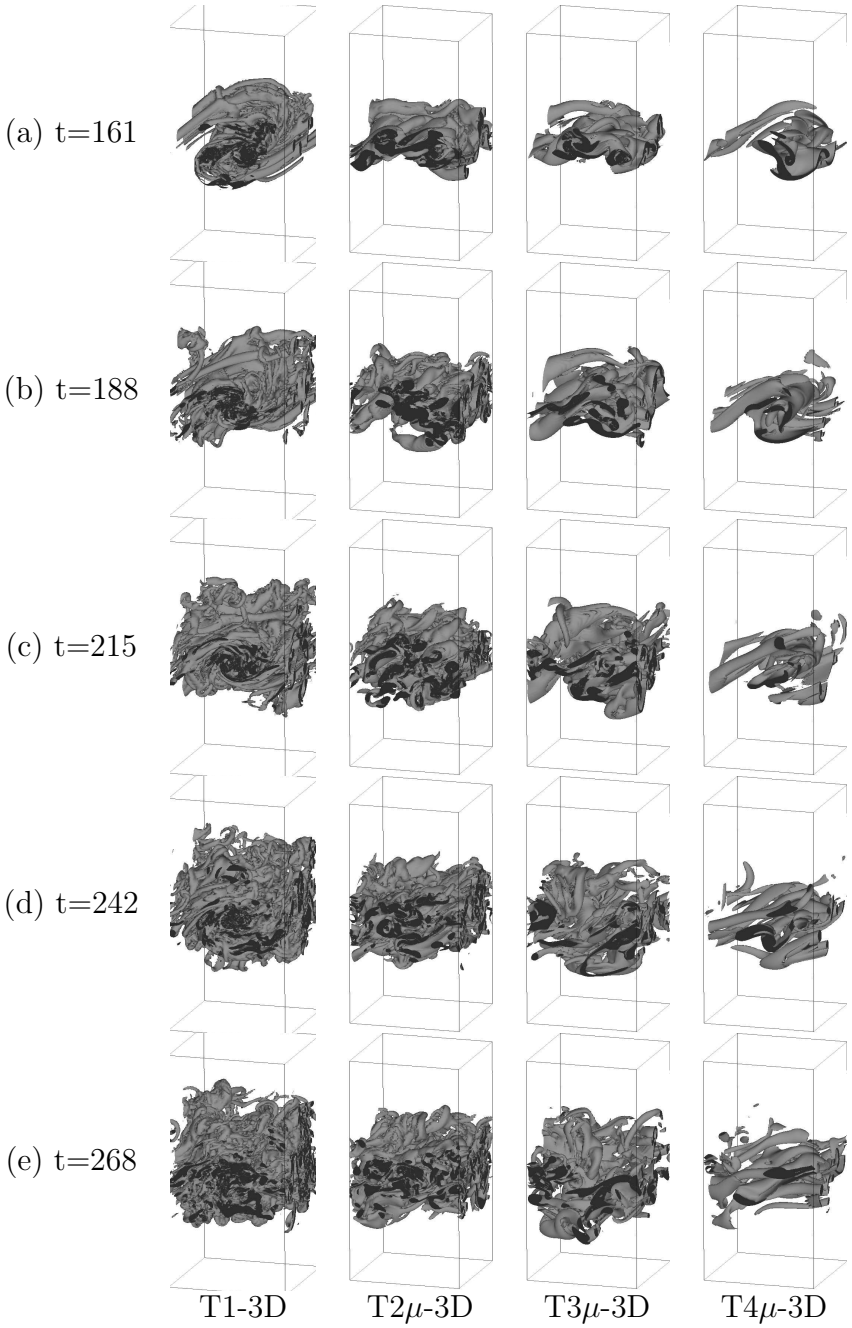


Fig. 5.13: Iso-surfaces d'enstrophie ($\omega = 0.075\omega_0$) pour les simulations tridimensionnelles (deuxième partie). De gauche à droite : simulations T1-3D, T2μ-3D, T3μ-3D et T4μ-3D

du plus grand rapport, cet appariement est visible et s'accompagne plutôt de l'apparition de tourbillons longitudinaux. De la simulation isotherme à la configuration T4μ-3D, le nombre de petites structures diminue assez progressivement, avec cependant une transition plus franche entre T3μ-3D et T4μ-3D.

5.3.2 Rayonnement acoustique

Pour la configuration tridimensionnelle, la restitution des grandeurs acoustiques n'est pas réalisée à partir des EEL (au moment où nous réalisons cette étude, le code n'est pas validé en 3D. De plus nous disposons d'un outil de résolution de l'analogie de Lighthill [41,44,51–53]). Une simulation temporelle tridimensionnelle combinée avec une résolution de l'analogie de Lighthill nous permet d'accéder aux grandeurs acoustiques moyennes sur une frontière du domaine de simulation et donc de fournir des résultats comparables à ceux des figures (5.6) à (5.10). Dans les cas d'études cités ci-dessus, l'analogie de Lighthill a fourni des résultats en parfait accord avec les simulations de DNS compressibles et avec les EEL. C'est donc cette analogie que nous allons utiliser dans cette partie.

Analogie de Lighthill

Comme dans le cas des EEL, le recours à l'analogie de Lighthill nécessite d'adapter avec précaution l'expression des sources au modèle LMNA. Ce problème a été traité en détail dans [51–53], nous n'indiquerons donc ici que les grandes lignes de ce traitement.

L'analogie de Lighthill consiste à reformuler les équations de Navier-Stokes de manière à construire un opérateur de propagation [75,76]. Cette manipulation conduit à l'expression

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_\infty^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \tag{5.4}$$

où c_∞ représente la vitesse du son dans le milieu ambiant et T_{ij} est le tenseur de Lighthill. T_{ij} s'exprime par

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + (p - c_\infty^2 \rho)\delta_{ij} - \tau_{ij} \tag{5.5}$$

où δ_{ij} vaut 1 lorsque $i = j$ et 0 sinon.

Tant qu'aucune hypothèse supplémentaire n'est posée, cette équation est une reformulation exacte des équations de Navier-Stokes. En pratique, on résout cette équation en considérant les sources connues et en trouvant la solution de l'équation de propagation inhomogène. C'est à ce stade que l'analogie de Lighthill n'est plus exacte et ne constitue plus une simple reformulation des équations de la mécanique des fluides. La solution de (5.4) s'écrit alors

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_\infty^2} \iiint_V \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}(\mathbf{y}, \tau) \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \tag{5.6}$$

où $\rho(\mathbf{x}, t)$ est la masse volumique acoustique exprimée en $\mathbf{x}$ à l'instant t générée par les sources contenues dans le volume V, et $\tau = t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c_\infty$ est le temps retardé.

L'équation (5.6) nous montre que la connaissance de T_{ij} sur tout le volume source permet l'obtention de la masse volumique acoustique. Il reste donc a exprimer ce que devient T_{ij} dans le cadre de l'approximation d'écoulement à faible nombre de Mach.

Expression des sources

Nous introduisons les développements en ε de chaque grandeur représentant l'écoulement (Cf. partie 2) dans l'expression du tenseur de Lighthill. En tenant compte de la relation $c_\infty^2 = \gamma T_\infty/\varepsilon$, nous obtenons

$$T_{ij} = \underbrace{\rho^{(0)} u_i^{(0)} u_j^{(0)}}_{\left(T_{ij}^{(0)}\right)_a} + \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{\left(p^{(0)} - \gamma T_\infty \rho^{(0)}\right) \delta_{ij}}_{\left(T_{ij}^{(0)}\right)_b} + \underbrace{\left(p^{(1)} - \gamma T_\infty \rho^{(1)}\right) \delta_{ij}}_{\left(T_{ij}^{(1)}\right)_b} + \cdots \tag{5.7}$$

Dans cette expression du tenseur de Lighthill, on retrouve dans le terme $(T_{ij})_a$ la composante des sources d'origines aérodynamiques et dans le terme $(T_{ij})_b$ les sources couramment appelées "sources entropiques". Il faut noter que les sources d'origines visqueuses n'apparaissent pas dans cette expression car elles ont été négligées, comme cela est habituellement le cas pour les écoulements libres [75].
La difficulté présentée par cette formulation apparaît dans le terme $(T_{ij})_b$ qui contient une composante d'ordre -1 et une composante d'ordre 0. Il apparaît alors clairement que pour des nombres de Mach très bas, c'est le terme $\left(T_{ij}^{(0)}\right)_b$ qui devient prédominant. Dans ce cas, les autres termes deviennent négligeables. En revanche, pour des nombres de Mach modérément bas, les termes d'ordres 0 peuvent avoir une contribution non négligeable. Dans une telle situation, les termes $\left(T_{ij}^{(0)}\right)_a$ et $\left(T_{ij}^{(1)}\right)_b$ se retrouvent sur un pied d'égalité du point de vue de leur ordre de grandeur. Alors, la présente décomposition ne nous permet pas de préjuger de leurs importances relatives. Ceci ne serait pas problématique si ces deux termes étaient sur un pied d'égalité du point de vue de l'approximation LMNA. Plus précisément, $\left(T_{ij}^{(0)}\right)_a$ ne fait intervenir que des quantités accessibles par cette approximation, alors que $\left(T_{ij}^{(1)}\right)_b$ dépend de $\rho^{(1)}$ qui est négligée dans la dynamique de l'écoulement. A partir de ce constat, il a été montré numériquement dans [51–53] qu'il était possible de recourir à l'analyse en ordre de grandeur terme par terme. Dans ce cas $\left(T_{ij}^{(0)}\right)_a$ est toujours conservé et $\left(T_{ij}^{(1)}\right)_b$ est toujours négligeable par rapport à $\left(T_{ij}^{(0)}\right)_b$.
Finalement, l'expression du tenseur de Lighthill déterminé à partir du modèle LMNA est

$$T_{ij} = \underbrace{\rho^{(0)} u_i^{(0)} u_j^{(0)}}_{\left(T_{ij}^{(0)}\right)_a} + \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{\left(p^{(0)} - \gamma T_\infty \rho^{(0)}\right) \delta_{ij}}_{\left(T_{ij}^{(0)}\right)_b} \tag{5.8}$$

Analogie de Lighthill et modèle temporel

Comme nous l'avons vu dans les parties précédentes, le modèle temporel conduit à des propriétés acoustiques particulières. Compte tenu des périodicités dans les directions x et

z, les ondes acoustiques, à partir d'une distance y suffisamment grande, se propagent principalement dans la direction y. Les analyses de [73,115], déjà utilisées dans les précédents travaux du LEA cités ci-dessus, permettent alors d'utiliser une formulation de l'analogie de Lighthill très simple qui correspond à un problème de propagation unidimensionnelle. Plus précisément, on peux montrer [73] qu'en décomposant une grandeur acoustique Φ en $\Phi = \langle\Phi\rangle + \Phi'$ où

$$\langle\Phi\rangle = \frac{1}{L_x L_z}\int_0^{L_x}\int_0^{L_z}\Phi \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5.9}$$

on obtient à partir d'une certaine distance de la région active de l'écoulement la superposition d'une onde évanescente (la décroissance de Φ' est en $1/\sqrt{y}$) et d'une onde progressive dont l'amplitude reste constante ($\langle\Phi\rangle = \langle\Phi\rangle\,(y \pm c_\infty t)$.
L'introduction de l'opérateur de moyenne (5.9) conduit alors à la formulation de l'analogie de Lighthill

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle\rho\rangle - c_\infty^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\langle\rho\rangle = \frac{\partial^2}{\partial y^2}q(y,t) \tag{5.10}$$

où

$$q(y,t) = \left\langle \rho^{(0)} {v^{(0)}}^2 \right\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\left\langle p^{(0)} - \gamma T_\infty \rho^{(0)} \right\rangle \tag{5.11}$$

La solution de cette équation, obtenue à l'aide des fonctions de Green, est alors donnée par

$$\langle\rho\rangle\,(y,t) = \frac{1}{2c_\infty^2}\int_{y'=-\frac{L_y}{2}}^{y'=+\frac{L_y}{2}}\frac{\partial}{\partial y'}\langle q\rangle\left(y', t - \frac{|y-y'|}{c_\infty}\right)\mathrm{d}y' + \frac{1}{2}\left(\rho_1+\rho_2\right) - \rho_\infty \tag{5.12}$$

Le terme constant $\frac{1}{2}\left(\rho_1+\rho_2\right) - \rho_\infty$ provient des conditions aux limites aux frontières supérieure et inférieure du domaine et intervient lorsque les masses volumiques sont différentes de part et d'autre de la couche de mélange [41, 44].

Résultats

Les résultats de l'analogie de Lighthill sont montrés sur la figure (5.14) par l'évolution de $\langle\rho\rangle$ relevée à la frontière inférieure du domaine.
De la même façon que pour l'analyse des champs dynamiques, les évolutions de chaque simulation peuvent être divisées en deux parties distinctes. La première partie concerne les instants $t_d < 100$ et correspond à la formation des quatre tourbillons initiaux suivie du premier appariement. Sur cette première partie, il est très clair que le rayonnement acoustique diminue avec l'augmentation du rapport des températures, ce qui est en accord avec le résultat obtenu pour la configuration bidimensionnelle (voir fig. (5.6) pour $t < 100$). La différence avec la solution 2D apparaît pour $t > 100$. Pour le cas bidimensionnel (voir fig. (5.6)), les pics de rayonnement subissaient le même classement suivant le rapport de température en considérant indifféremment le premier ou le second appariement. En

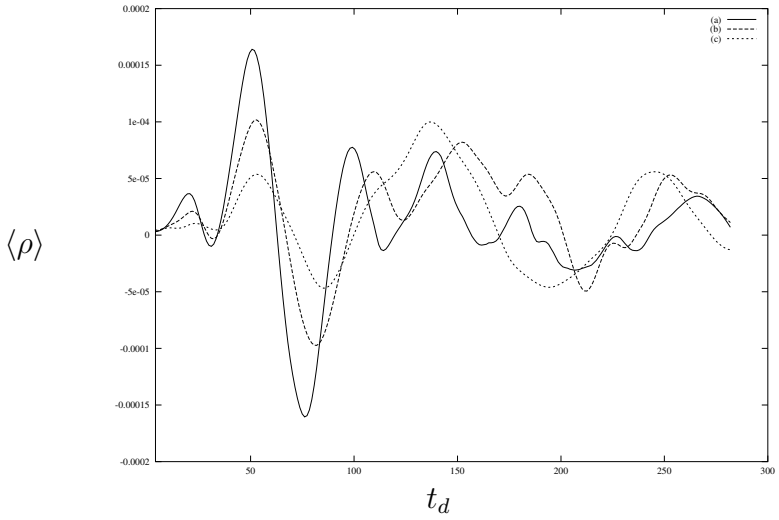


Fig. 5.14: Evolution temporelle de $\langle\rho\rangle$ sur la frontière inférieure du domaine à $M = 0.2$. (a) T2μ-3D ; (b) T3μ-3D ; (c) T4μ-3D.

revanche, la configuration tridimensionnelle conduit à une inversion de la configuration dominante pour $t > 100$, avec les pics de masse volumique de la simulation T4μ-3D supérieurs à ceux de T3μ-3D, eux mêmes plus intenses que ceux de T2μ-3D. Cette inversion est moins marquée que la comparaison fournie par le premier appariement. Liée à l'observation des champs instantanés d'enstrophie des figures (5.12) et (5.13), cette comparaison montre que tant que l'écoulement reste globalement bidimensionnel, l'augmentation de la température réduit l'émission acoustique, mais lorsque les structures cohérentes diminuent en taille, le rayonnement acoustique diminue. Dans le cas de notre écoulement, l'augmentation du rapport des températures réduit la création des petites structures et conduit à une augmentation du rayonnement dans la deuxième phase des simulations.

Les contributions de chaque terme source peuvent être comparées à partir de la figure (5.15), ou le rayonnement obtenus à partir de $\left(T_{ij}^{(0)}\right)_a$ est observé par l'intermédiaire de $\langle\rho_a\rangle$ et celui de $\left(T_{ij}^{(0)}\right)_b$ par $\langle\rho_b\rangle$.

Pour la première partie des simulations, les deux termes sources se conduisent de façon identique. Pour la seconde partie, la différence de structure observée sur la dynamique, ne se répercute pas de la même façon sur la contribution de $\left(T_{ij}^{(0)}\right)_a$. Néanmoins, les différences entre les trois simulations pour cette deuxième partie sont très faibles, et il faut garder à l'esprit que la contribution de ce terme à l'ensemble de l'émission acoustique est quasiment négligeable.

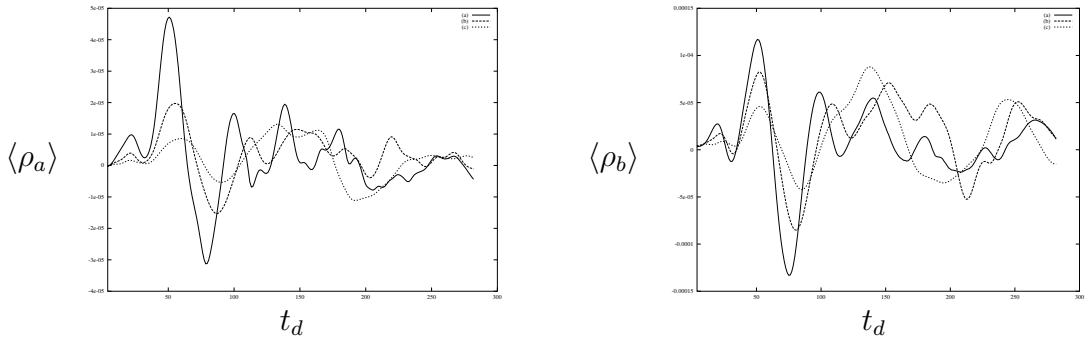


FIG. 5.15: Evolution temporelle de $\langle \rho_a \rangle$ et $\langle \rho_b \rangle$ sur la frontière inférieure du domaine à $M = 0.2$. (a) T2μ-3D ; (b) T3μ-3D ; (c) T4μ-3D.

5.4 Conclusion

Si l'on se contente d'observer les pics d'émission, les résultats présentés ci-dessus semblent aller à l'encontre des résultats connus sur le bruit des jets. Cependant ces pics reflètent le lien très fort entre nos couches de mélange temporelles et le développement tourbillonnaire conditionné par le choix des conditions initiales. Ainsi, ce cas ne peut évidement pas représenter l'ensemble des mécanismes de production sonore rencontrés dans un jet. L'analyse tridimensionnelle montre d'ailleurs que la modification de la structure de l'écoulement a une influence importante sur le rayonnement obtenu et que le passage de l'écoulement bidimensionnel au tridimensionnel nuance fortement le résultat bidimensionnel.

Pour compléter la discussion, il est intéressant de tracer l'évolution du maximum de l'intensité acoustique émise en champ lointain (obtenue dans le cas du modèle temporel par le maximum au cours du temps de la valeur moyenne le long de la frontière inférieure du domaine) par chaque composante des sources en fonction de la valeur du rapport des températures. Ce tracé est donné sur la figure (5.16) pour le cas bidimensionnel (étant donné que ce tracé est réalisé sur les maximums, la figure obtenue dans le cas tridimensionnel aurait la même allure) .

Conformément aux prévisions bien connues, la contribution du terme S^u décroît avec l'augmentation du rapport de températures. Par contre, l'émission globale commence par augmenter jusqu'à T2μ, pour diminuer ensuite jusqu'à T4μ. En observant la courbe de la composante due à S^u, on peut tenter d'interpréter ce comportement par un raisonnement en deux points : en premier lieu comme cela a été montré dans la littérature, l'anisothermie fait apparaître de nouvelles sources acoustiques qui font augmenter l'intensité acoustique rayonnée par rapport au cas isotherme. La modification de la dynamique contribue à l'augmentation de cette composante jusqu'à un rapport de températures d'environ deux. Puis le même raisonnement que pour le terme S^u peut être appliqué, à savoir, une augmentation du rapport des températures fait réduire la masse volumique moyenne, et par suite le rayonnement acoustique du à ce terme.

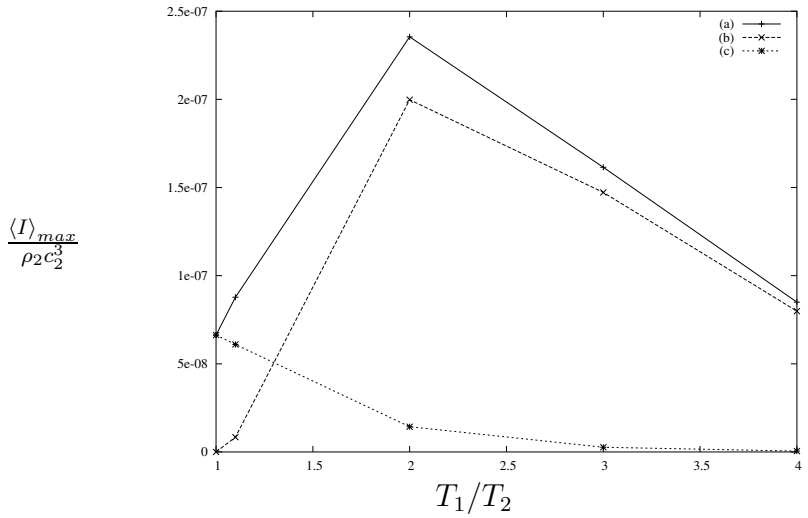


Fig. 5.16: Evolution du maximum de l'intensité acoustique moyenne le long de la frontière inférieure du domaine en fonction du rapport des températures (seule la configuration 2D est présentée). (a) Sources complètes ; (b) S^t ; (c) S^u.

Il est intéressant de constater que si l'on compare les émissions acoustiques de la couche de mélange isotherme à celle du cas T4μ, les niveaux obtenus sont sensiblement égaux, avec une contribution nulle de S^t dans le cas isotherme et une contribution nulle de S^u dans le cas T4μ. Le passage de l'un à l'autre traduisant finalement une inversion complète de la nature des sources mises en jeu.
La limite à cette étude est bien montrée par le cas 3D. L'analyse que nous venons de mener conduirait au mêmes conclusions pour une configuration 3D dont la condition initiale engendrerait un seul appariement.

Conclusion

L'étude réalisée dans ce travail de thèse consiste au développement d'un outil de calcul pour la prédiction du bruit rayonné par des écoulements non isothermes. L'approche la plus naturelle serait la simulation numérique directe de l'écoulement par la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles. Cependant, les contraintes numériques sont grandes pour la simulation de toutes les échelles très différentes de la turbulence et de l'acoustique et les difficultés liées à de bonnes conditions aux limites pour l'acoustique sont extrêmement nombreuses. Sans compter les dimensions du domaine de simulation qui doivent être augmentées pour atteindre le champ lointain.

La voie choisie ici est basée sur une séparation du calcul dynamique et du calcul acoustique. Ceci est rendu possible dans le contexte des écoulements anisothermes par l'utilisation d'une approximation à faible nombre de Mach. Ce type de modèle permet de supprimer les effets de compressibilité tout en conservant les variations de masse volumique liées à la température.

L'acoustique, qui est filtrée par ce type de méthode, est retrouvée dans un deuxième temps par le développement des équations de l'approximation LMNA à l'ordre supérieur. Cette procédure conduit après certaines hypothèses aux équations d'Euler linéarisées et aux termes sources adaptés.

La méthode hybride proposée a été testée sur une couche de mélange anisotherme en développement temporel, configuration parfaitement adaptée à une validation avec des simulations compressibles. Les résultats montrent un excellent accord jusqu'à des nombres de Mach assez élevés ($M = 0.4$). La simulation de couche de mélange en développement spatial présente d'autres difficultés de mise en œuvre notamment au niveau de la troncature artificielle du domaine source. Des simulations ont été réalisées pour une couche de mélange isotherme et traduisent un comportement similaire à des résultats de la littérature. La couche de mélange anisotherme montre les effets très importants de la réfraction des ondes vers la région froide et, pour les nombres de Mach considérés, la prépondérance du terme source spécifique aux écoulements non isothermes vis-à-vis du terme quadripolaire.

Aujourd'hui, différents aspects techniques de la procédure générale proposée restent à considérer.
La mise en œuvre numérique du modèle LMNA réalisée ici n'est pas optimale et mérite d'être approfondie et améliorée. Une des difficultés pénalisant l'efficacité du modèle réside

à ce jour dans le traitement du second membre de l'équation de Poisson, lié aux variations temporelles de masse volumique. Le traitement proposé réduit l'ordre de résolution temporel et entraîne des problèmes de stabilité.
La phase d'interpolation temporelle, nécessaire dans la stratégie suivie, doit aussi être considérée avec attention afin d'optimiser la gestion des ressources informatiques.
Enfin, une difficulté inhérente aux méthodes hybrides réside dans la troncature inévitable des sources au niveau des zones d'entrée et de sortie du domaine, et à l'ajustement des zones tampons qui nécessite des mises au point préalables et font appel à l'expérience de l'utilisateur. Les méthodes connues à ce jour présentent toutes ce manque d'universalité.

Les difficultés techniques évoquées ne remettent pas en cause le bon comportement de la méthode développée qui reste encourageant. Ce travail reste une étude exploratoire des possibilités qu'offrent la LMNA en aéroacoustique numérique. Ainsi, on peut envisager que la méthode soit applicable à d'autres problèmes où les inhomogénéités de masse volumique ne sont pas seulement liées à la température, mais aussi, par exemple, à des mélanges d'espèces chimiques ou de gaz de masses volumiques différentes.
Des études récentes ont montré que la LES constitue un outil puissant pour l'aéroacoustique. Il peut donc être bénéfique de transposer la méthode étudiée ici à une démarche hybride basée sur la résolution des équations de l'approximation d'écoulement à faible nombre de Mach par simulation des grandes échelles. Ceci permettrait d'étendre le champ d'application à des écoulements à nombre de Reynolds plus élevés.

Bibliographie

[1] S. Abarbanel & D. Gottlieb, A mathematical analysis of the PML method, *J. Comp. Phys.*, **134**, pp. 357–363, 1997.

[2] S. Abarbanel, D. Gottlieb & J. S. Hesthaven, Well-posed perfectly matched layers for advective acoustics, *J. Comp. Phys.*, **154**, pp. 266–283, 1999.

[3] G. Ashcroft & X. Zhang, Optimized prefactored compact schemes, *J. Comp. Phys.*, **190**, pp. 459–477, 2003.

[4] C. Bailly, *Modélisation du rayonnement acoustique des écoulements turbulents libres subsoniques et supersoniques*, Thèse de doctorat, Ecole centrale Paris, 1994.

[5] C. Bailly, C. Bogey & D. Juvé , Computation of flow noise using source terms in linearized Euler's equations, *AIAA paper*, **00-2047**, 2000.

[6] C. Bailly & D. Juvé, Numerical simulation of acoustic propagation problems using linearized Euler equations, *AIAA Journal*, **38(1)**, pp. 22–29, 2000.

[7] M. Bauer, Computation of trailing edge noise with synthetic turbulence, dans *Computational aeroacoustics : from acoustic source modeling to far-field radiated noise prediction. Euromech colloquium n° 449, December 9-12,2003, Chamonix, France*, 2003.

[8] W. Béchara, C. Bailly, P. Lafon & S. Candel, Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows, *AIAA Journal*, **32(3)**, pp. 455–463, 1994.

[9] J.-P. Bérenger, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *J. Comp. Phys.*, **114**, pp. 185–200, 1994.

[10] L. P. Bernal & A. Roshko, Streamwise vortex structure in plane mixing layers, *J. Fluid Mech.*, **170**, pp. 499–525, 1986.

[11] M. Billson, *Computational techniques for turbulence generated noise*, Thèse de doctorat, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 2004.

[12] M. Billson, L.-E. Erikson & L. Davidson, Acoustic souce terms for the linear Euler equations on conservative form, *AIAA paper*, **02-2582**, 2002.

[13] C. Blom, B. Verhaar, J. VAN DER Heijden & B. Soermarwoto, A linearized Euler method based prediction of turbulence induced noise using time-averaged flow properties, *AIAA paper*, **01-1100**, 2001.

[14] D. Bogdanoff, Compressibility effects in turbulent shear layers, *AIAA Journal*, **21(6)**, pp. 926–927, 1983.

[15] C. Bogey, *Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale Lyon, 2000.

[16] C. Bogey & C. Bailly, Direct computation of the sound of a high reynolds number jet, dans *CEAS workshop from CFD to CAA, 7-8 november, Athens, Greece*, pp. 1–21, 2002.

[17] C. Bogey & C. Bailly, Selective filtering versus eddy viscosity for subgrid modelling in the LES of a subsonic jet, dans *5th ERCOFTAC workshop on direct and large eddy simulation (DLES-5), August 27-29, Munich University of Technology, Germany, dit par R. Friedrich, B. J. Geurts & O. Métais, Ercoftac series vol. 9*, pp. 23–30, Kluwer, Dordrecht, ISBN 1-4020-2032-5, 2003.

[18] C. Bogey, C. Bailly & D. Juvé , Flow field and sound radiation of a mach 0.9 jet computed by LES, dans *RTO AVT Symposium on aging mechanisms and control : Part A - Developments in computational Aero- and Hydro- acoustics, Manchester, UK, RTO-MP-079(I)*, 2001.

[19] C. Bogey, C. Bailly & D. Juvé , Computation of flow noise using source terms in linearized Euler's equations, *AIAA Journal*, **40(2)**, pp. 235–243, 2002.

[20] C. Bogey, X. Gloerfelt & C. Bailly, Illustration of the inclusion of sound-flow interactions in Lighthill's equation, *AIAA Journal*, **41(8)**, pp. 1604–1606, 2003.

[21] G. L. Brown & A. Roshko, On density effects and large structure in turbulent mixing layers, *J. Fluid Mech.*, **64(4)**, pp. 775–816, 1974.

[22] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni & T. A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[23] A. J. Chorin, A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, *J. Comp. Phys.*, **2**, pp. 12–26, 1967.

[24] B. T. Chu & L. S. G.Kovasznay, Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas, *J. Fluid Mech.*, **3(5)**, pp. 494–514, 1958.

[25] T. Colonius, Numerically nonreflecting boundary and interface conditions for compressible flow and aeroacoustic computations, *AIAA Journal*, **35(7)**, pp. 1126–1133, 1997.

[26] T. Colonius, Modeling artificial boundary conditions for compressible flow, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **36**, pp. 315–345, 2004.

[27] T. Colonius, S. K..Lele & P. Moin, Sound generation in a mixing layer, *J. Fluid Mech.*, **330**, pp. 375–409, 1997.

[28] P. Comte, Y. Fouillet & M. Lesieur, Simulation numérique des zones de mélange compressibles, *Revue Scient. Tech. Def.*, **3ème trim.**, pp. 1–21, 1992.

[29] A. Cook & J. Riley, Direct numerical simulation of a turbulent reactive plume on a parallel computer, *J. Comp. Phys.*, **129**, pp. 263–283, 1996.

[30] D. J. Crighton, Basic principles of aerodynamic noise generation, *Prog. Aerospace Sci.*, **16(1)**, pp. 31–96, 1975.

[31] N. Curle, The influence of solid boundaries on aerodynamic sound, *Proc. Roy. Soc. London*, **231**, pp. 505–514, 1955.

[32] J. DE Charentenay, D.Thévenin & B. Zamuner, Comparison of direct numerical simulations of turbulent flames using compressible low-mach number formulations, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **39**, pp. 497–515, 2002.

[33] P. E. Dimotakis, Two-dimensional shear layer entrainment, *AIAA Journal*, **24(11)**, pp. 1791–1796, 1986.

[34] G. Djambazov, C.-H. Lai & K. Pericleous, Development of numerical techniques for near-field aeroacoustic computations, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **29**, pp. 719–731, 1999.

[35] G. Djambazov, C.-H. Lai, K. Pericleous & Z.-K. Wang, A coarse grid extraction of sound signals for computational aeroacoustics, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **40**, pp. 1515–1525, 2002.

[36] Y. Dubief & F. Delcayre, On coherent-vortex identification in turbulence, *J. of Turb.*, **1**, 2000.

[37] G. Elias, Equations exactes de propagation des ondes acoustiques en milieu inhomogène, dans *INRIA, Acoustique dans les écoulements, Rocquencourt (France), 25-29 septembre*, 2000.

[38] R. Ewert, M. Meinke & W. Schröder, Comparison of source term formulations for a hybrid CFD/CAA method, *AIAA paper*, **01-2200**, 2001.

[39] J. E. Ffowcs Williams & D. L. Hawkings, Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion, *Proc. Roy. Soc. London A*, **264**, pp. 321–342, 1969.

[40] M. J. Fisher, P. A. Lush & M. Harper Bourne, Jet noise, *J. Sound Vib.*, **28(3)**, pp. 563–585, 1973.

[41] V. Fortuné, *Etude par simulation numérique directe du rayonnement acoustique de couches de mélange isothermes et anisothermes*, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2000.

[42] V. Fortuné, E. Lamballais & Y. Gervais, Etude par simulation numérique directe temporelle des effets de la température sur l'émission acoustique des couches de mélange, *C. R. Acad. Sci.*, **328**, pp. 693–700, 2000.

[43] V. Fortuné, E. Lamballais & Y. Gervais, Study of temperature effects on radiated noise from mixing layers using DNS, *AIAA paper*, **2001-2257**, 2001.

[44] V. Fortuné, E. Lamballais & Y. Gervais, Noise radiated by a non-isothermal, temporal mixing layer. Part I : Direct computation and prediction using compressible DNS, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **18(1)**, 2004.

[45] Y. Fouillet, *Contribution à l'étude par expérimentation numérique des écoulement cisaillés libres : effets de compressibilité*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988.

[46] J. B. Freund, Acoustic sources in a turbulent jet : a direct numerical simulation study, *AIAA paper*, **99-1858**, 1999.

[47] J. B. Freund, S. K. Lele & P. Moin, Matching of near/far-field equation sets for direct computation of aerodynamic sound, *AIAA paper*, **93-4326**, 1993.

[48] M. B. Giles, Nonreflecting boundary conditions for Euler equation calculations, *AIAA Journal*, **28(12)**, pp. 2050–2058, 1989.

[49] D. Givoli, Non-reflecting boundary conditions, *J. Comp. Phys.*, **94**, pp. 1–29, 1991.

[50] X. Gloerfelt, C. Bailly & D. Juvé, Direct computation of the noise radiated by a subsonic cavity flow and application of integral methods, *J. Sound Vib.*, **266(1)**, pp. 119–146, 2003.

[51] F. Golanski, Prédiction du bruit rayonné par une couche de mélange anisotherme, 2000, rapport de D.E.A. Université de Poitiers.

[52] F. Golanski, V. Fortuné & E. Lamballais, Prediction of noise radiated by a non-isothermal mixing layer using a low Mach number approximation, dans *RTO AVT Symposium on aging mechanisms and control : Part A - Developments in computational Aero- and Hydro- acoustics, Manchester, UK, RTO-MP-079(I)*, 2001.

[53] F. Golanski, E. Lamballais & V. Fortuné, Noise radiated by a non-isothermal, temporal mixing layer. Part II : Prediction using DNS in the framework of low Mach number approximation, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, soumis en 2003.

[54] F. Golanski, C. Prax, E. Lamballais, V. Fortuné & J.-C. Valière, An aeroacoustic hybrid approach for non-isothermal flows at low Mach number, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **45**, pp. 441–461, 2004.

[55] M. Goldstein, *Aeroacoustics*, Mc Graw Hill International, 1976.

[56] L. Gréverie & C. Bailly, Construction d'un opérateur de propagation à partir des équations d'Euler linéarisées, *C. R. Acad. Sci.*, **326**, pp. 741–746, 1998.

[57] T. Hagstrom & I. Nazarov, Absorbing layers and radiation boundary conditions for jet flow simulations, *AIAA paper*, **2002-2606**, 2002.

[58] J. Hardin & D. Pope, An acoustic/viscous splitting technique for computational aeroacoustics, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **6**, pp. 323–340, 1994.

[59] R. Hixon, Prefactored small-stencil compact schemes, *J. Comp. Phys.*, **165**, pp. 522–541, 2000.

[60] R. Hixon, S.-H. Shih & R. Mankbadi, Evaluation of boundary conditions for computational aeroacoustics, *AIAA Journal*, **33(11)**, pp. 2006–2012, 1995.

[61] R. G. Hoch, J. P. Duponchel , B. J. Cocking & W. D. Bryce, Studies of the influence of density on jet noise, *J. Sound Vib.*, **28(4)**, pp. 649–668, 1973.

[62] M. S. Howe, Contributions to the theory of aerodynamic sound, with applications to excess jet noise and the theory of the flute, *J. Fluid Mech.*, **71(4)**, pp. 625–673, 1975.

[63] M. S. Howe, Edge-source acoustic Green's function for an airfoil of arbitrary chord, with application to trailing edge noise, *Quart. J. Mech. App. Math.*, **50(01)**, pp. 139–155, 2001.

[64] F. Q. Hu, On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a perfectly matched layer, *J. Comp. Phys.*, **129**, pp. 201–219, 1996.

[65] F. Q. Hu, A stable, perfectly matched layer for linearized Euler equations in unsplit physical variables, *J. Comp. Phys.*, **173**, pp. 455–480, 2001.

[66] F. Q. Hu, M. Y. Hussaini & J. Manthey, Low-dissipation and low-dispersion Rung-Kutta schemes for computational acoustics, *J. Comp. Phys.*, **124(1)**, pp. 177–191, 1996.

[67] X. Jiang, E. J. Avital & K. H. Luo, Direct computation and aeroacoustic modelling of a subsonic axisymetric jet, *J. Sound Vib.*, **270**, pp. 525–538, 2004.

[68] A. G. Kravchenko & P. Moin, On the effect of numerical errors in Large Eddy Simulations turbulent flows, *J. Comp. Phys.*, **131**, pp. 310–322, 1997.

[69] K. A. Kurbatskii & C. K. W. Tam, Cartesian boundary treatment of curved walls for high-order computational aeroacoustic schemes, *AIAA Journal*, **35(1)**, pp. 133–140, 1997.

[70] E. Lamballais, *Simulation numérique de la turbulence dans un canal plan tournant*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.

[71] S. Lardeau, *Simulation numérique directe du contrôle d'écoulements cisaillés libres par injection de fluide*, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2001.

[72] S. K. Lele, Compact finite difference scheme with spectral-like resolution, *J. Comp. Phys.*, **103**, pp. 16–42, 1992.

[73] S. K. Lele & C. M. Ho, *Acoustic radiation from temporally evolving free shear layers*, Rapport technique, Stanford University, 1994.

[74] M. Lesieur, *Turbulence in Fluids*, Kluwer Academic Pubishers, 1997.

[75] M. J. Lighthill, On sound generated aerodynamically I General theory, *Proc. Roy. Soc. London A*, **211**, pp. 567–587, 1952.

[76] M. J. Lighthill, On sound generated aerodynamically II Turbulence as a source of sound, *Proc. Roy. Soc. London A*, **223**, pp. 1–32, 1954.

[77] M. J. Lighthill, Report on the final panel discussion on computational aeroacoustics, dans *ICASE Report 92-53*, 1992.

[78] G. Lilley, The generation and radiation of supersonic jet noise. Vol IV : Theory of turbulence generated jet noise, noise radiation from upstream sources and combustion noise, *AFAPL report*, **53**, 1972.

[79] E. Longatte, *Modélisation de la propagation et de la génération du bruit au sein des écoulements turbulents internes*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, 1998.

[80] E. Longatte, P. Lafon & S. Candel, Computation of noise generation by turbulence in internal flows, *AIAA paper*, **98-2332**, 1998.

[81] P. A. McMurtry, W.-H. Jou, J. J. Riley & R. W. Metcalfe, Direct numerical simulations of a reacting mixing layer with chemical heat release, *AIAA Journal*, **24(6)**, pp. 962–970, 1986.

[82] J. Métral & O. Vacus, Stabilisation des couches PML pour les équations d'Euler linéarisées, *C. R. Acad. Sci.*, **330**, pp. 347–352, 2002.

[83] A. Michalke, On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile, *J. Fluid Mech.*, **19**, pp. 543–556, 1964.

[84] B. E. Mitchell, S. K. Lele & P. Moin, Direct computation of Mach wave radiation in an axisymetric supersonic jet, *AIAA Journal*, **35(10)**, pp. 113–142, 1997.

[85] B. E. Mitchell, S. K. Lele & P. Moin, Direct computation of the sound generated by vortex pairing in an axisymetric jet, *J. Fluid Mech.*, **383**, pp. 113–142, 1999.

[86] P. Moin & K. Mahesh, Direct numerical simulation : A tool in turbulence research, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **30**, pp. 539–578, 1998.

[87] C.-D. Munz, S. Roller, R. Klein & K. Geratz, The extension of incompressible flow solvers to the weakly compressible regime, *Comput. Fluids*, **32**, pp. 173–196, 2003.

[88] H. N. Najm, P. S. Wyckoff & O. M. Knio, A semi-implicit numerical scheme for reacting flow, *J. Comp. Phys.*, **143**, pp. 381–402, 1998.

[89] F. Nicoud, Conservative high-order finite-difference schemes for low-mach number flows, *J. Comp. Phys.*, **158**, pp. 71–97, 2000.

[90] D. Oster & I. Wygnanski, The forced mixing layer between parallel streams, *J. Fluid Mech.*, **123**, pp. 91–130, 1982.

[91] D. Papamoschou & A. Roshko, The compressible turbulent shear layer : an experimental study, *J. Fluid Mech.*, **197**, pp. 453–477, 1988.

[92] O. Phillips, On the generation of sound by supersonic turbulent shear layer, *J. Fluid Mech.*, **9(1)**, pp. 1–28, 1960.

[93] A. Powell, Theorie of vortex sound, *J. Acoust. Soc. Am.*, **36**, pp. 177–195, 1964.

[94] W. A. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky & W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1989.

[95] S. Redonnet, *Simulation de la propagation acoustique en présence d'écoulements quelconques et de structures solides par résolution numérique des équations d'Euler*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1, 2001.

[96] J. Reinaud, L. Joly & P. Chassaing, The baroclinic secondary instability of the two-dimensional shear layer, *Phys. Fluids*, **12(10)**, pp. 2489–2505, 2000.

[97] J. Riley & R. W. Metcalfe, Direct numerical simulation of a perturbed, turbulent mixing layer, *AIAA paper*, **80-0274**, 1980.

[98] S. Sarkar & M. Y. Hussaini, Computation of the sound generated by isotropic turbulence, *ICASE report*, **93–74**, october 1993.

[99] C. Seror, P. Sagaut, C. Bailly & D. Juvé, On the radiated noise computed by large-eddy simulation, *Phys. Fluids*, **13(2)**, pp. 476–487, 2001.

[100] M. Soteriou & A. F. Ghoniem, Effects of the free-stream density ratio on free and forced spatially developing shear layers, *Phys. Fluids*, **7(8)**, pp. 2036–2051, 1995.

[101] S. Stanley & S. Sarkar, Simulations of spatially developing two-dimensional shear layers and jets, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **9**, pp. 121–147, 1997.

[102] W. C. Strahle, Noise production by fluid inhomogeneities, *AIAA Journal*, **14(7)**, pp. 985–987, 1976.

[103] C. Talotte, Y. Addad, D. Laurence, M. Jacob, H. Giardi & F. Crouzet, Comparison of large eddy simulation and experimental results of the flow around a forward-backward facing step, dans *Proceedings of the ASME FEDSM'02*, tome FEDSM2002-31337, 2002.

[104] C. Tam & Z. Dong, Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow, *AIAA paper*, **95-007**, 1995.

[105] C. Tam & J. Hardin, *Second computational aeroacoustics workshop on benchmark problems*, NASA CP-3352, 1997.

[106] C. Tam & J. Webb, Dispersion-Relation-Preserving finite difference schemes for computational acoustics, *J. Comp. Phys.*, **107**, pp. 262–281, 1993.

[107] C. K. W. Tam, Computational aeroacoustics : Issues and methods, *AIAA Journal*, **33(10)**, pp. 1788–1796, 1995.

[108] C. K. W. Tam, L. Auriault & F. Cambuli, Perfectly matched layer as an absorbing boundary condition for the linearized Euler equations in open and ducted domains, *J. Comp. Phys.*, **144**, pp. 213–234, 1998.

[109] C. K. W. Tam & D. E. Burton, Sound generated by instability waes of supersonic flow, pt. 1, two dimensional mixing layers, *J. Fluid Mech.*, **138**, pp. 249–271, 1984.

[110] C. K. W. Tam & D. E. Burton, Sound generated by instability waes of supersonic flow, pt. 2, axisymetric jets, *J. Fluid Mech.*, **138**, pp. 273–295, 1984.

[111] H. K. Tanna, P. D. Dean & M. J. Fisher, The influence of temperature on shock free supersonic jet noise, *J. Sound Vib.*, **39(4)**, pp. 429–428, 1975.

[112] K. W. Thompson, Time dependent boundary conditons for hyperbolic systems, II, *J. Comp. Phys.*, **89**, pp. 439–461, 1990.

[113] A. Uzun, A. S. Lyrintzis & G. A. Blaisdell, Coupling of integral acoustics methods with les for jet noise prediction, *AIAA paper*, **2004-0517**, 2004.

[114] D. Virk & F. Hussain, Influence of initial conditions on compressible vorticity dynamics, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **5**, pp. 309–334, 1993.

[115] J. Whitmire & S. Sarkar, Validation of acoustic-analogy predictions for sound radiated by turbulence, *Phys. Fluids*, **12(2)**, pp. 381–391, 2000.

[116] C. D. Winant & F. K. Browand, Vortex pairing : the mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, **63(2)**, pp. 237–255, 1974.

Annexe A

Discrétisation spatiale

Dans tous les codes utilisés ou développés au cours de cette étude, les discrétisations spatiales sont effectuées à l'aide de schémas aux différences finies hermitiens, aussi appelés schémas compacts, étudiés en détails dans [72]. Les schémas compacts ont la propriété d'avoir un comportement quasi-spectral, autrement dit, ils permettent de garder une très bonne approximation de la dérivée sur une large gamme de nombres d'ondes. De plus, pour un ordre donné, leur domaine de dépendance est plus faible que celui des schémas explicites classiques, d'où leur dénomination de schémas "compacts". Pour un même domaine de dépendance, l'erreur commise sur la vitesse de phase et la vitesse de groupe reste proche de zéro sur une plus large gamme de nombres d'ondes que pour les opérateurs explicites classiques et optimisés (DRP de [106]) (fig. II-11 et II-12 de [95]).
La contrepartie à toutes ces qualités (recherchées en CAA compte tenu de l'objectif visant à représenter précisément toutes les échelles de l'écoulement) est une augmentation du coût de calcul par rapport aux schémas explicites. Cependant, ce sur-coût peut être compensé par le fait que les schémas explicites nécessitent un maillage plus fin que les schémas compacts pour représenter un phénomène couvrant un registre de longueurs d'ondes donné avec une précision donnée.

A.1 Généralités

Soit une distribution uniforme de points d'indices i tels que $\xi_i = (i-1)\Delta\xi$. Les schémas compacts permettent d'exprimer la dérivée première d'une fonction f aux noeuds ξ_i, $f_i = f'(\xi_i) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}(\xi_i)$ en fonction des valeurs prises par f aux nœuds voisins par

$$\alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} = a\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta\xi} + b\frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{\Delta\xi}. \tag{A.1}$$

Cette formulation est appelée formulation implicite car pour déterminer f'_i, il faut connaître les valeurs de f'_{i-1} et f'_{i+1}. Ceci implique un calcul simultané de toutes les dérivées pour tous les nœuds de la grille (le cas $\alpha = 0$ conduit à un schéma explicite).
De la même façon, on peut obtenir une approximation de la dérivée seconde $f''_i = f''(\xi_i) =$

$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi_i)$ par

$$\alpha f''_{i-1} + f''_i + \alpha f''_{i+1} = a\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta\xi^2} + b\frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{\Delta\xi^2}. \tag{A.2}$$

L'ordre de ces approximations varie selon le choix de (α, a, b) et peut aller jusqu'à six.
Ces approximations ne peuvent être utilisées qu'à partir du troisième nœud. Selon les conditions de frontières utilisées, différentes solutions sont adoptées pour les évaluations des dérivées aux nœuds 1 et 2 (et par symétrie aux nœuds $n_\xi - 1$ et n_ξ). Trois possibilités sont envisagées dans les codes utilisés ici : les conditions de frontières peuvent être périodique, de glissement libre ou quelconque.
La **condition périodique** est utilisée dans le modèle temporel et correspond à $f_{n_\xi+2} = f_2$ $f_{n_\xi+1} = f_1$ et $f_0 = f_{n_\xi}$ (les mêmes relations sont utilisées pour les dérivées première et seconde). Dans ce cas, les approximations (A.1, A.2) peuvent être utilisées sur tous les nœuds du domaine.
La **condition de glissement libre** est utilisée aux frontières supérieure et inférieure du domaine pour les calculs dynamiques. Cette condition correspond au glissement sans frottement. Suivant les composantes calculées, cette condition peut être vue comme une symétrie ou une antisymétrie locale. Les grandeurs qui s'annulent à cette frontière (u_y en $y = \pm\frac{L_y}{2}$) sont considérées comme localement impaires et celles dont le gradient dans la direction normale à la frontière s'annule (u_x en $y = \pm\frac{L_y}{2}$) sont considérées comme localement paires. Ces exemples sont schématisés sur la figure (A.1). Ce cas permet, comme le

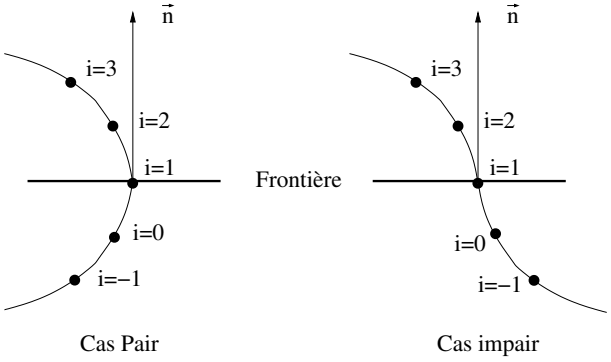


FIG. A.1: Représentation graphique des deux types de conditions pour le glissement libre

cas périodique, de conserver le même schéma sur tout le domaine.
Enfin, une **condition d'entrée-sortie** est utilisée pour les frontières amont et aval des écoulements dans les codes CFD et acoustique. Ces conditions permettent d'adapter n'importe quel modèle physique en frontière de domaine sans préjuger du comportement des variables. Ces conditions nécessitent de dégrader les schémas à l'approche de la frontière. Aux nœuds 2 et $n_x - 1$ on utilise (A.1, A.2) dans lesquels on impose $b = 0$. Aux nœuds 1 et n_ξ, il est nécessaire de décentrer les schémas. Nous utilisons alors les schémas d'ordre

deux

$$f'_1 + \alpha_1 f'_2 = \frac{1}{\Delta\xi}(a_1 f_1 + b_1 f_2 + c_1 f_3) \tag{A.3}$$

$$f''_1 + \alpha_1 f''_2 = \frac{1}{\Delta\xi^2}(a_1 f_1 + b_1 f_2 + c_1 f_3 + d_1 f_4). \tag{A.4}$$

A.2 Formulation matricielle

La nature implicite de ces schémas conduit à une détermination simultanée de tous les f'_i (et de tous les f''_i). Le calcul des dérivées revient donc à résoudre des systèmes linéaires dont les f'_i (et les f''_i) sont les inconnues. La représentation matricielle s'impose alors naturellement pour formaliser ces résolutions.
Pour une direction ξ donnée, les systèmes d'équations donnant les valeurs des dérivées première et seconde s'écrivent

$$\mathbf{A}'_\xi \mathbf{f}' = \frac{1}{\Delta\xi}\mathbf{B}'_\xi \mathbf{f} \tag{A.5}$$

$$\mathbf{A}''_\xi \mathbf{f}'' = \frac{1}{\Delta\xi}\mathbf{B}''_\xi \mathbf{f} \tag{A.6}$$

où $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}'$ et $\mathbf{f}''$ sont les vecteurs de dimension n_ξ dont les composantes sont respectivement les valeurs de f, f' et f'' aux nœuds d'indices i. $\mathbf{A}'_\xi$, $\mathbf{A}''_\xi$, $\mathbf{B}'_\xi$ et $\mathbf{B}''_\xi$ sont des matrices de dimensions $n_\xi \times n_\xi$. Leur composition varie en fonction de la condition de frontière utilisée dans la direction ξ.
Pour une **Condition périodique**, $\mathbf{A}'_\xi$ et $\mathbf{B}'_\xi$ sont respectivement tridiagonale et pentadiagonale cycliques et s'écrivent

$$\mathbf{A}'_\xi = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & & & & & & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & & & & & & \\ & \alpha & 1 & \alpha & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \alpha & 1 & \alpha & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \alpha & 1 & \alpha & \\ & & & & & & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & & & & & & & \alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

$$\mathbf{B}'_\xi = \begin{pmatrix} 0 & a & b & & & & & -b & -a \\ -a & 0 & a & b & & & & & -b \\ -b & -a & 0 & a & b & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -b & -a & 0 & a & b & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -b & -a & 0 & a & b \\ b & & & & & -b & -a & 0 & a \\ a & b & & & & & -b & -a & 0 \end{pmatrix} \tag{A.8}$$

Pour une **Condition de glissement libre**, $\mathbf{A}'_\xi$ et $\mathbf{B}'_\xi$ s'écrivent respectivement pour une fonction paire,

$$\mathbf{A}'_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & & \\ \alpha & 1 & \alpha & & & & & & \\ & \alpha & 1 & \alpha & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \alpha & 1 & \alpha & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \alpha & 1 & \alpha & \\ & & & & & & \alpha & 1 & \alpha \\ & & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

$$\mathbf{B}'_\xi = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \\ -a & -b & a & b & & & & & \\ -b & -a & 0 & a & b & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -b & -a & 0 & a & b & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -b & -a & 0 & a & b \\ & & & & & -b & -a & b & a \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

et pour une fonction impaire,

$$\mathbf{A}'_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & & & & & & & \\ \alpha & 1 & \alpha & & & & & & \\ & \alpha & 1 & \alpha & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \alpha & 1 & \alpha & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \alpha & 1 & \alpha & \\ & & & & & & \alpha & 1 & \alpha \\ & & & & & & & 2\alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

$$\mathbf{B}'_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 2a & 2b & & & & & & \\ -a & b & a & b & & & & & \\ -b & -a & 0 & a & b & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -b & -a & 0 & a & b & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -b & -a & 0 & a & b \\ & & & & & -b & -a & b & -a \\ & & & & & & 2a & 2b & 0 \end{pmatrix} \tag{A.12}$$

Pour une **condition d'entrée-sortie**, $\mathbf{A}'_\xi$ et $\mathbf{B}'_\xi$ s'écrivent

$$\mathbf{A}'_\xi = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & & & & & & & \\ \alpha_2 & 1 & \alpha_2 & & & & & & \\ & \alpha & 1 & \alpha & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \alpha & 1 & \alpha & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \alpha & 1 & \alpha & \\ & & & & & & \alpha_{n_\xi-1} & 1 & \alpha_{n_\xi-1} \\ & & & & & & & \alpha_{n_\xi} & 1 \end{pmatrix} \tag{A.13}$$

$$\mathbf{B}'_\xi = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & & & & & & \\ -a_2 & 0 & a_2 & & & & & & \\ -b & -a & 0 & a & b & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -b & -a & 0 & a & b & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -b & -a & 0 & a & b \\ & & & & & & -a_{n_\xi-1} & 0 & a_{n_\xi-1} \\ & & & & & & c_{n_\xi} & b_{n_\xi} & a_{n_\xi} \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

Les matrices $\mathbf{A}''_\xi$ et $\mathbf{B}''_\xi$ ne sont pas données ici, car leur construction est similaire à celles présentées.
Les coefficients sont donnés par [72] :

– Pour la dérivée première :

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = \alpha_{n_\xi} = 2 & ; & a_1 = a_{n_\xi} = \frac{-5}{2} & ; \quad b_1 = b_{n_\xi} = 2 \quad ; \quad c_1 = c_{n_\xi} = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = \alpha_{n_\xi-1} = \frac{1}{4} & ; & a_2 = a_{n_\xi-1} = \frac{3}{4} & \\ \alpha = \frac{1}{3} & ; & a = \frac{7}{9} & ; \quad b = \frac{1}{36} \end{array} \tag{A.15}$$

– Pour la dérivée seconde :

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = \alpha_{n_\xi} = 11 & ; & a_1 = a_{n_\xi} = 13 & ; \quad b_1 = b_{n_\xi} = -27 \\ c_1 = c_{n_\xi} = 15 & ; & d_1 = d_{n_\xi} = -1 & \\ \alpha_2 = \alpha_{n_\xi-1} = \frac{1}{10} & ; & a_2 = a_{n_\xi-1} = \frac{6}{5} & \\ \alpha = \frac{2}{11} & ; & a = \frac{12}{11} & ; \quad b = \frac{3}{44} \end{array} \tag{A.16}$$

A.3 Cas particulier des termes visqueux

La formulation adoptée pour la résolution de l'approximation d'écoulement à faible nombre de Mach conduit à estimer les termes visqueux sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right). \tag{A.17}$$

Ceci revient numériquement au même que d'estimer la quantité

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \tag{A.18}$$

et nous sommes finalement conduit à remplacer le calcul d'une dérivée seconde $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$ par l'utilisation d'une dérivée première itérée deux fois. Si ces deux opérations sont équivalentes pour la formulation continue, elles ne le sont pas lorsque l'on considère le problème discret. Le calcul par dérivées premières itérées ne permet pas une bonne estimation aux nombres d'ondes élevés.
Il a été remarqué dans [41] que cette sous-estimation de la dissipation peut conduire à une déstabilisation de certains calculs (en cas de légère sous-résolution).
Pour pallier cette difficulté tout en conservant la formulation générale des équations, nous introduisons (comme cela est réalisé dans le code compressible de [41]) une correction qui consiste à calculer les termes visqueux sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \underbrace{-\mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}_{correction}. \tag{A.19}$$

A.4 Maillage non-uniforme

Dans cette partie, nous détaillons l'utilisation des schémas compacts sur une grille cartésienne non-uniforme.
Les développements indiqués ici correspondent à un étirement dans une direction ξ pouvant être indifféremment x, y ou z.
La discrétisation sur un maillage non-uniforme est réalisée en appliquant les schémas compacts sur un domaine de calcul dont la grille est uniforme, et en appliquant au résultat une transformation de l'espace de calcul vers l'espace physique (représenté par un maillage non-uniforme).
La coordonnée d'un nœud i (pour la direction considérée) dans le domaine de calcul est $s_i = s(i) = (i-1)\Delta s$ où $\Delta s = 1/(n_\xi - 1)$ et $\xi_i = \xi(i)$ dans le domaine physique. La transformation du domaine uniforme au domaine étiré est caractérisée par la fonction φ telle que

$$\xi = \varphi(s). \tag{A.20}$$

A.4.1 Calcul de la dérivée première

La différentiation de (A.20) conduit à

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial \xi}. \tag{A.21}$$

La relation (A.1) permettant d'estimer la dérivée première sur la grille de calcul s'écrit

$$\alpha \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{s_{i-1}} + \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{s_i} + \alpha \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{s_{i+1}} = a\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta s} + b\frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{\Delta s}. \tag{A.22}$$

En posant $\varphi'_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial s}(s_i)$ et $f'_i = \dfrac{\partial f}{\partial \xi}(\xi_i)$, nous obtenons

$$\alpha\varphi'_{i-1}f'_{i-1} + \varphi'_i f'_i + \alpha\varphi'_{i+1}f'_{i+1} = a\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta s} + b\frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{\Delta s}. \tag{A.23}$$

Cette relation s'écrit sous la même forme matricielle que pour le cas du maillage uniforme mais les valeurs des paramètres α, α_1, α_2, $\alpha_{n_\xi - 1}$ et α_{n_ξ} sont "corrigées" par un coefficient φ'_j dépendant du noeud considéré.
Ceci s'écrit pour l'exemple d'une condition périodique

$$\mathbf{A}'_\xi \mathbf{f}' = \frac{1}{\Delta s}\mathbf{B}'_\xi \mathbf{f} \tag{A.24}$$

où

$$\mathbf{A}'_\xi = \begin{pmatrix} \varphi'_1 & \alpha\varphi'_2 & & & & & & \alpha\varphi'_{n_\xi} \\ \alpha\varphi'_1 & \varphi'_2 & \alpha\varphi'_3 & & & & & \\ & \alpha\varphi'_2 & \varphi'_3 & \alpha\varphi'_4 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \alpha\varphi'_{n_\xi-3} & \varphi'_{n_\xi-2} & \alpha\varphi'_{n_\xi-1} & \\ & & & & & \alpha\varphi'_{n_\xi-2} & \varphi'_{n_\xi-1} & \alpha\varphi'_{n_\xi} \\ \alpha\varphi'_1 & & & & & & \alpha\varphi'_{n_\xi-1} & \varphi'_{n_\xi} \end{pmatrix} \tag{A.25}$$

A.4.2 Calcul de la dérivée seconde

En poursuivant la même démarche, nous pouvons écrire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\varphi'^2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \frac{\varphi''}{\varphi'^3}\frac{\partial f}{\partial s}. \tag{A.26}$$

La dérivée seconde n'étant utilisée que pour le terme visqueux (A.19)

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\mu\frac{\partial u_i}{\partial \xi}\right) - \mu\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi}\right) + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2}, \tag{A.27}$$

nous ré-écrivons les termes de correction à partir du maillage uniforme, (Cf. (A.21) et (A.26)), ce qui conduit à

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\mu\frac{\partial u_i}{\partial \xi}\right) - \frac{\mu}{\varphi'^2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_i}{\partial s}\right) + \mu\frac{1}{\varphi'^2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial s^2}. \tag{A.28}$$

La seule dérivée seconde à évaluer intervient donc uniquement dans le terme $\mu \frac{1}{\varphi'^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial s^2}$. Comme pour la dérivée première, nous écrivons à l'aide de (A.2)

$$\alpha\varphi'^2_{i-1}\left(\frac{1}{\varphi'^2_{i-1}}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right|_{i-1}\right) + \varphi'^2_i\left(\frac{1}{\varphi'^2_i}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right|_{i}\right) + \varphi'^2_{i+1}\left(\frac{1}{\varphi'^2_{i+1}}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right|_{i+1}\right) = a\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{\Delta s^2} + b\frac{f_{i+2}-2f_i+f_{i-2}}{\Delta s^2}. \tag{A.29}$$

Finalement la dérivée seconde du terme de correction (A.19), est obtenue en résolvant le système

$$\mathbf{A}''_\xi \mathbf{f}'' = \frac{1}{\Delta s}\mathbf{B}''_\xi \mathbf{f} \tag{A.30}$$

où $\mathbf{A}''_\xi$ est, comme pour la dérivée première, la matrice obtenue pour les schémas compacts sur un maillage uniforme dont les composantes sont corrigées pas un facteur φ'^2_i.

Il faut bien noter que cette méthode ne permet pas d'obtenir $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$ mais $\frac{1}{\varphi'^2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$ qui est directement le terme que nous avons à calculer dans (A.19).

Méthode hybride pour le calcul du rayonnement acoustique d'écoulements anisothermes à faibles nombres de Mach

Cette étude propose une approche aéroacoustique hybride pour le calcul du bruit rayonné par des écoulements subsoniques turbulents anisothermes. La partie aérodynamique est obtenue à l'aide d'une simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes dans une approximation à faible nombre de Mach. Cette formulation permet de se libérer des effets de la compressibilité - numériquement pénalisants - tout en préservant l'influence des phénomènes relatifs à la dilatation thermique sur l'écoulement. La propagation acoustique est calculée par la résolution des équations d'Euler linéarisées. La définition rigoureuse des sources acoustiques constitue le lien entre ces deux étapes. Des sources spécifiques aux écoulements anisothermes, compatibles avec celles déjà connues pour les écoulements isothermes, sont obtenues. Cette approche est d'abord validée pour des couches de mélange isothermes et anisothermes par comparaison à des calculs directs. D'autres validations sont réalisées pour une couche de mélange isotherme spatiale et confrontés à des résultats de la littérature. Les contributions au bruit des différents termes sources sont examinées pour une couche de mélange spatiale anisotherme. L'évolution du rayonnement acoustique en fonction du rapport de températures est étudié pour une couche de mélange temporelle. Les résolutions numériques reposent sur une discrétisation spatiale par des schémas aux différences finies d'ordres élevés (schémas compacts) et des schémas d'intégration en temps de Runge-Kutta. Ces schémas d'ordres élevés, et les conditions aux limites performantes respectent les exigences numériques spécifiques à l'aéroacoustique.

Mots clés : Aéroacoustique numérique - Méthode hybride - Equations d'Euler linéarisées - Analogie de Lighthill - Ecoulements anisothermes - Sources acoustiques - Couche de mélange

A hybrid method for the computation of the non isothermal flow radiated noise at low Mach numbers

This study proposes a hybrid aeroacoustic approach for the calculation of the noise radiated by non isothermal turbulent subsonic flows. The aerodynamic part is obtained using a direct numerical simulation of the Navier-Stokes equations in a Low Mach number approximation. This formulation makes it possible to be released from the effects of compressibility - numerically penalizing - while preserving the influence of the phenomena relating to thermal dilation on the flow. The acoustic propagation is calculated by the resolution of the linearized Euler's equations. The rigorous definition of the acoustic sources constitutes the link between these two stages. The specific sources from the non isothermal flows, compatible with those already known for the isothermal flows, are obtained. This approach is initially validated for isothermal and non isothermal mixing layers by comparison with direct calculations. Other validations are carried out for a spatial isothermal mixing layer and confronted with results of the literature. The contribution to the radiated noise of the estimated source terms, is examined for a non isothermal spatial mixing layer. The evolution of acoustic radiation according to the ratio of temperatures is studied for a temporal mixing layer. The numerical resolutions are based on a spatial discretization by high order finite difference schemes (compact schemes) and Runge-Kutta schemes for the temporal integrations. These high order schemes, and the accurate boundary conditions respect the numerical requirements specific to the computational aeroacoustics.

Key words : Computational aeroacoustic (CAA) - Hybrid Method - Linearized Euler's equations (LEE) - Lighthill's Analogy - Non isothermal flows - Acoustic sources - Mixing layer