



HAL
open science

Homogénéisation et simulation numérique de structures piézoélectriques perforées et laminées

Houari Mechkour

► **To cite this version:**

Houari Mechkour. Homogénéisation et simulation numérique de structures piézoélectriques perforées et laminées. Mathématiques [math]. Université de Marne la Vallée, 2004. Français. NNT: . tel-00008496

HAL Id: tel-00008496

<https://theses.hal.science/tel-00008496>

Submitted on 15 Feb 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION DU
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE MARNE-LA-VALLÉE
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

HOUARI MECHKOUR

HOMOGENÉISATION ET SIMULATION NUMÉRIQUE DE STRUCTURES PIÉZOÉLECTRIQUES PERFORÉES ET LAMINÉES

Soutenue le 19 Novembre 2004, devant le jury composé de :

ALAIN DAMLAMIAN	Professeur, Université de Paris XII	Président
BERNADETTE MIARA	Professeur, ESIEE-Paris	Directrice de thèse
PATRIZIA DONATO	Professeur, Université de Rouen	Rapporteur
ROGER OHAYON	Professeur, CNAM-Paris	Rapporteur
MICHEL BERNADOU	Professeur, Pôle Scientifique Léonard de Vinci	Examineur
OLIVIER POLIT	Professeur, Université de Paris X	Examineur
MICHEL BELLIEUD	Maître de Conférences, Université de Perpignan	Examineur

À la mémoire et à l'esprit de mon cher père,

À ma mère,

À mes soeurs,

À mes frères,

À toute ma famille,

Remerciements



Je tiens particulièrement à exprimer ma reconnaissance à Madame Bernadette Miara de m'avoir beaucoup appris lors de ce travail de thèse, avec patience, générosité et disponibilité. Je suis particulièrement reconnaissant pour la confiance et le soutien qu'elle m'a toujours accordés.

Je suis très honoré que les Professeurs Patrizia Donato et Roger Ohayon aient accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je les prie de trouver ici l'expression de ma plus grande gratitude.

Je suis très heureux de la participation au Jury de Messieurs Alain Damlamian, Michel Bernadou, Olivier Polit et Michel Bellieud. Je leur exprime ma plus grande reconnaissance.

Ce travail doit aussi beaucoup à l'ambiance joyeuse et chaleureuse dans laquelle il a été effectué. Je pense ici à tous les membres des laboratoires SIGTEL et MOSIM, ainsi qu'au personnel de l'ESIEE.

Par ailleurs, je souhaite exprimer ma sincère gratitude aux membres du Laboratoire de Mathématiques Appliquées (LMAC) de l'Université Technologique de Compiègne où j'ai exercé l'année dernière les fonctions d'ATER, pour l'accueil chaleureux qu'ils m'ont réservé et la confiance qu'ils m'ont accordés, me permettant ainsi d'achever ma thèse dans les meilleures conditions possibles.

Je tiens aussi à remercier pour leurs accueil, les membres du Laboratoire de Modélisation, Analyse Non Linéaire et Optimisation (MANO) de l'Université de Perpignan, où j'exerce actuellement les fonctions d'ATER.

Tous ceux qui ont consacré du temps pour une relecture attentive de cette thèse et m'ont apporté leurs remarques et leurs judicieux conseils. A chacun, je vous exprime ma gratitude.

Un grand merci également à Geneviève Baudoin, Josette Durand, Véronique Fèvre, Martine Elichabe, Michèle Skala et Jean Louis Bazire, pour leur gentillesse et leur aide.

Mes remerciements vont aussi à tous mes amis qui m'ont accompagné et soutenu durant ces longues années.

Enfin, je remercie toute ma famille, de m'avoir soutenu et encouragé dans la poursuite de mes études. Cette thèse leur est dédiée.

Houari

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	vii
Introduction générale	1
I Homogénéisation de l'équation de la piézoélectricité	9
1 Rappels sur le problème tridimensionnel	11
1.1 Description du problème de la piézoélectricité	11
1.1.1 Cadre physique	11
1.1.2 Description de la géométrie et des forces envisagées	12
1.1.3 Formulation du problème	12
1.2 Existence et unicité d'une solution	13
1.2.1 Rappels des inégalités de Poincaré et de Korn	13
1.2.2 Deux formulations variationnelles du problème	14
1.2.3 Théorème d'existence et d'unicité	16
1.3 Le problème de point selle	17
2 Homogénéisation d'un corps piézoélectrique perforé	19
2.1 Géométrie du domaine perforé	20
2.2 Position du problème traité	21
2.3 Le problème variationnel et l'estimation a priori	22
2.3.1 Problème variationnel	23
2.3.2 Rappel sur les inégalités de Poincaré et de Korn dans un domaine perforé	24
2.3.3 Estimation a priori	24
2.4 La convergence à deux échelles	25
2.4.1 Rappel sur la notion de la convergence double échelle	26
2.4.2 Quelques résultats préliminaires de la convergence double échelle	27
2.5 Le résultat principal	29
2.6 Calcul des tenseurs effectifs homogénéisés	33
2.7 Les propriétés du problème homogénéisé	36
2.7.1 Les propriétés du tenseur de rigidité homogénéisé	36
2.7.2 Les propriétés du tenseur de diélectricité homogénéisé	40
2.7.3 Les propriétés du tenseur de piézoélectricité homogénéisé	42
2.7.4 Théorème d'existence et d'unicité du problème homogénéisé	44
2.8 Comportement asymptotique des énergies	45

2.9	Un résultat de correcteur	46
2.10	Conclusion	49
3	Homogénéisation d'une plaque mince piézoélectrique perforée	51
3.1	Géométrie du domaine	52
3.1.1	Géométrie de la surface moyenne	52
3.1.2	Définition de la configuration d'une plaque perforée	52
3.2	Description du problème	53
3.2.1	Problème modèle	54
3.2.2	Problème variationnel	55
3.2.3	Théorème d'existence et d'unicité	55
3.3	Analyse asymptotique d'une plaque piézoélectrique perforée	56
3.3.1	Résultats de convergence	56
3.3.2	Problème local	60
3.3.3	Conclusions et commentaires	60
3.4	Homogénéisation d'une plaque piézoélectrique perforée	61
3.4.1	Problèmes modèles	61
3.4.2	Problèmes variationnels	62
3.4.3	Résultat de convergence pour le problème membranaire	63
3.4.4	Résultat de correcteur pour le problème membranaire	65
3.4.5	Résultat de convergence pour le problème en flexion	65
3.4.6	Résultat de correcteur pour le problème en flexion	74
3.5	Conclusions et commentaires	75
4	Homogénéisation de coques piézoélectriques périodiques de type Koiter	77
4.1	Introduction	77
4.2	Géométrie de la coque étudiée	78
4.2.1	Définition de la coque	78
4.2.2	Géométrie des microstructures	78
4.3	Rappels sur la méthode d'éclatement périodique	78
4.4	Position du problème	82
4.5	Résultat de convergence	83
4.6	Résultat de correcteur	95
4.7	Conclusions et commentaires	96
II	Simulation numérique des structures piézoélectriques	99
5	Homogénéisation numérique des matériaux piézoélectriques perforés	101
5.1	Introduction	101
5.2	Modélisation numérique par la méthode des éléments finis	102
5.2.1	Mise sous forme matricielle du problème variationnel	103
5.2.2	Implémentation de la méthode des éléments finis	105
5.2.3	Présentation des résultats numériques	109
5.3	Implémentation d'une méthode analytique	111
5.3.1	Présentation de la méthode	112
5.3.2	Calcul analytique des tenseurs homogénéisés	117
5.4	Validation de la méthode des éléments finis	117
5.5	Influence de la distribution des perforations sur les propriétés effectives	119

5.6	Influence de la géométrie des perforations sur les propriétés effectives	121
5.7	Influence de la rotation des perforations sur les propriétés effectives	123
5.8	Synthèse et discussion	127
6	Homogénéisation numérique des matériaux piézocomposites laminés	129
6.1	Introduction	129
6.2	Problèmes locaux et tenseurs effectifs	130
6.3	Application hydrostatique	131
6.4	Remarques et commentaires	135
6.5	Description d'un modèle piézocomposite bilaminé perforé	135
	6.5.1 Application en hydrophonie (imagerie biomédicale)	136
	6.5.2 Application en filtrage spatial	137
6.6	Effet d'ordre des convergences	141
	Conclusions et perspectives	149
	Référence	153

Table des figures

2.1	Une structure perforée Ω_ε et sa cellule de base Y	20
3.1	La plaque piézoélectrique mince perforée $\Omega_{h\varepsilon} = \omega_\varepsilon \times]-h, +h[$	53
5.1	Comportement macroscopique des tenseurs homogénéisés	111
5.2	Comparaison entre les deux techniques	118
5.3	Distribution géométrique carrée et la cellule de référence	119
5.4	Distribution géométrique hexagonale et la cellule de référence	119
5.5	Comparaison entre les deux modèles carré et hexagonal	120
5.6	COmportement du facteur de couplage	121
5.7	Cellule de base Y dont la perforation est de type circulaire.	122
5.8	Cellule de base Y dont la perforation est de type carrée.	122
5.9	Cellule de base Y dont la perforation de type hexagonale	122
5.10	Les propriétés effectives pour trois géométries différentes	123
5.11	Structure perforée Ω_ε et sa cellule de base Y avec une rotation d'angle $\alpha = 0^\circ$	124
5.12	Structure perforée Ω_ε et sa cellule de base Y avec une rotation d'angle $\alpha = 45^\circ$	124
5.13	Structure perforée Ω_ε et sa cellule de base Y avec une rotation d'angle $\alpha = 90^\circ$	125
5.14	Comportement des tenseurs homogénéisés	125
5.15	Comparaison des propriétés hydrostatiques entre les trois rotations	126
5.16	Comparaison des propriétés acoustiques entre les trois rotations	126
6.1	La structure du piézocomposite bilaminée	130
6.2	Le comportement macroscopique d'un matériau bilaminé 3 – 1	133
6.3	Variation des coefficients hydrostatiques d'un matériau bilaminé 3 – 1	134
6.4	Structure piézocomposite bilaminée Epoxy/PZT-5A de type 1 – 3 perforée Ω_ε	135
6.5	Variation des coefficients hydrostatiques d'un matériau bilaminé perforé 2 – 1	136
6.6	Prototype de A.Preumont	137
6.7	Description du modèle de A.Preumont	138
6.8	Comparaison entre les résultats de l'homogénéisation et ceux de A.Preumont	139
6.9	Comparaison entre les résultats de l'homogénéisation et ceux de A.Preumont	140
6.10	Comparaison entre les deux distributions dans le modèle de A.Preumont.	140
6.11	Structure piézocomposite bilaminée 2 – 2 Piezoceramic/Epoxy.	141
6.12	Le comportement macroscopique d'un matériau bilaminé 2 – 2	143
6.13	La comparaison entre les deux coefficients \tilde{C}_{11} et \hat{C}_{11}	145
6.14	La comparaison entre les deux coefficients \tilde{C}_{12} et \hat{C}_{12}	146
6.15	La comparaison entre les deux coefficients \tilde{C}_{22} et \hat{C}_{22}	146
6.16	La comparaison entre les deux chemins des deux passages aux limites.	147

Liste des tableaux

5.1	Les valeurs des coefficients des matériaux piézoélectriques : PZT-5A et PZT-7A.	110
5.2	Les propriétés effectives d'un matériau PZT perforé	126
6.1	Les propriétés des matériaux PZT-5A et Araldite.	133
6.2	Les propriétés de PVDF.	139

Introduction générale

Motivations et orientations

Les objectifs de ce travail consistent à fournir des éléments de réponses aux deux principaux problèmes suivantes :

- Une étude mathématique pour comprendre les propriétés macroscopiques des structures piézoélectriques, dont les géométries contiennent une repartition périodique de micro-structure dans le cas d'un corps, d'une plaque et d'une coque périodique de type Koiter.
- Une modélisation numérique des structures piézoélectriques particulières (laminées, fibrées et perforées), afin d'atteindre deux buts : D'une part, valider les modélisations qui existent déjà dans la littérature d'ingénieurs et d'autre part, se servir de cette simulation dans les applications industrielles des matériaux piézoélectriques notamment dans les domaines de l'hydrophonique, de l'imagerie biomédicale et de contrôle de vibrations.

Plan de la thèse

Cette thèse comporte deux parties :

- ⊗ La première partie est consacrée à l'étude de l'homogénéisation et l'analyse asymptotique de l'équation de la piézoélectricité dans des structures périodiquement perforées, dans le cas d'un corps, d'une plaque et d'une coque de type Koiter.
- ⊗ Dans la deuxième partie on évoque la modélisation numérique de quelques structures piézoélectriques particulières comme les structures laminées, fibrées et perforées, dont le but est de comprendre les propriétés macroscopiques de ces structures, afin d'améliorer certaines applications industrielles (capteurs, actionneurs, etc...).

Elle est structurée de la manière suivante :

Première partie : Modélisation mathématique

La première partie est constituée de quatre chapitres. Elle sera consacrée à l'étude de l'homogénéisation et l'analyse asymptotique de l'équation de la piézoélectricité dans des structures périodiques particulièrement des structures perforées et laminées.

Chapitre I : Rappels sur le problème tridimensionnel

Dans le premier chapitre, on formule le problème dans le cas tridimensionnel, et on présente deux formulations variationnelles associées à ce problème. Après un rappel sur les inégalités de Korn et de Poincaré sur les domaines perforés, on présente l'équivalence entre les deux formulations variationnelles et on donne un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème étudié. Enfin, on présente des arguments basés sur l'analyse convexe pour montrer

que la solution du problème étudié s'écrit sous forme d'un point selle d'une fonctionnelle, on justifiera aussi rigoureusement la négligence de quelques phénomènes physiques sur le modèle de la piézoélectricité dans cette étude. On présente à la fin des conclusions et des commentaires sur le problème de la piézoélectricité.

Chapitre II : Homogénéisation d'un corps piézoélectrique perforé

Dans le second chapitre, on s'intéresse à l'homogénéisation de l'équation de la piézoélectricité dans un corps tridimensionnel périodiquement perforé, dans le but de mieux comprendre le comportement asymptotique de l'état électromécanique (champs de déplacement et le potentiel électrique) lorsque le paramètre associé à la taille des perforations tend vers zéro. On donne le problème homogénéisé et un théorème d'existence et d'unicité de la solution de ce problème. On détermine explicitement tous les tenseurs de rigidité, de piézoélectricité et de diélectricité homogénéisés (effectifs), ainsi que toutes leurs propriétés comme la symétrie et l'ellipticité. On énonce un résultat de correcteur pour le champ des déplacements mécaniques et le potentiel électrique scalaire limites, ce qui permettra de justifier les premiers termes du développement asymptotique associé à chacun des déplacements mécaniques ainsi que le potentiel électrique. On présentera à la fin, un résultat qui décrit le comportement asymptotique de chacune des énergies : mécanique, électrique et totale, associées à ce type de matériau. On termine ce chapitre par des conclusions d'intérêts mathématiques et physiques. Cette étude fait l'objet de deux publications [54] et [56].

Chapitre III : Analyse asymptotique et homogénéisation d'une plaque piézoélectrique perforée

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse au comportement d'une plaque de faible épaisseur (mince) piézoélectrique périodiquement perforée, lorsque l'épaisseur et la taille des trous sont destinés à tendre vers zéro dans cet ordre. Après le premier passage à la limite, on obtient deux problèmes distincts : un problème membranaire et un autre en flexion. Le premier problème est analogue au problème tridimensionnel du chapitre précédent. Pour cela, on reprend les mêmes travaux afin d'établir le problème homogénéisé et un théorème d'existence et d'unicité avec la détermination de tous les tenseurs homogénéisés et quelques propriétés liées à ces tenseurs. Pour le problème en flexion, on utilise la technique de la double échelle, afin d'avoir le problème homogénéisé ainsi que la détermination du coefficient de flexion homogénéisé avec ses propriétés. On donne aussi pour chacun des deux problèmes des résultats de correcteurs. Enfin, on termine ce chapitre par quelques conclusions. Ce travail est l'objet de la publication [57].

Chapitre IV : Homogénéisation de coques piézoélectriques périodiques de Koiter

Dans le quatrième chapitre, partant résultats obtenus par Haenel [42] après un passage à la limite sur le problème tridimensionnel de coques piézoélectriques lorsque l'épaisseur tend vers zéro, on applique une nouvelle technique dite de *l'éclatement périodique* récemment introduite par Cioranescu, Damlamian et Griso [24] sur le problème d'une coque piézoélectrique périodique de type Koiter, décrit dans un système de coordonnées curvilignes, afin de trouver le modèle homogénéisé.

Enfin on donne un résultat de convergence forte (correcteur) pour le potentiel électrique et les déplacements mécaniques. Pour cela on utilise l'opérateur de moyennisation introduit dans [24]. Ce travail est fait en collaboration avec M. Ghergu et G. Griso, et fera l'objet de la publication [37].

Deuxième partie : Simulation numérique

La seconde partie est subdivisée en deux chapitres. Elle sera consacrée à la modélisation numérique des structures piézoélectriques perforées et piézocomposites laminées.

Chapitre V : Homogénéisation numérique des matériaux piézoélectriques perforés

Dans ce chapitre, on propose une modélisation numérique des matériaux piézoélectriques périodiquement perforés, cette modélisation sera basée sur deux approches complémentaires : La première est la méthode des éléments finis et la seconde est une méthode analytique. On effectue une analyse paramétrique sur l'influence de la géométrie et la distribution des perforations sur les propriétés effectives de ce type de structure, ainsi on étudiera l'influence de la rotation des perforations non symétriques par rapport à l'axe d'isotropie du matériau piézoélectrique.

On valide l'implémentation de notre méthode (les éléments finis), par une étude comparative dans un cas bien précis où on peut déterminer les tenseurs homogénéisés de façon explicite par une technique analytique.

Chapitre VI : Homogénéisation numérique des matériaux piézocomposites laminés

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude des propriétés macroscopiques des matériaux piézocomposites laminés. Cette étude va nous donner l'idée de proposer un prototype d'un matériau piézocomposite bilaminé perforé, où on recupère des résultats intéressants pour des applications industrielles en hydrophonique, en imagerie biomédicale et en contrôle de vibrations. Par un exemple dans le cas d'un matériau piézocomposite laminé, on évaluera l'effet de l'ordre de passage à la limite entre l'épaisseur et la taille des perforations. Une partie de ce chapitre a été l'objet de la publication [55].

Piézoélectricité : généralités

La *piézoélectricité* peut être considérée comme une interaction entre deux phénomènes électromécaniques qui couplent les champs élastique et électrique. Une déformation mécanique du matériau génère un champ électrique, c'est l'effet direct de la piézoélectricité ou effet capteur. Inversement, l'application d'un champ électrique ou d'une différence de potentiel induit des déformations mécaniques, c'est l'effet inverse de piézoélectricité ou effet actionneur.

Bien qu'ayant été prédit par Coulomb et découvert par Becquerel en 1819, l'effet de la piézoélectricité n'a été correctement expliqué qu'en 1880 par les frères Jacques et Pierre Curie (par expérimentation sur le quartz et le sel de Rochelle). La loi de comportement de ce type de matériaux a été établie par Lippmann [1881] en se basant sur des considérations thermodynamiques.

Les matériaux piézoélectriques permettent de réaliser un contrôle actif ou passif des structures élastiques par des systèmes distribués de capteurs et d'actionneurs collés sur la surface sous forme de pastilles ou intégrés dans la structure sous forme de fibres. Ils détectent les déformations par l'effet direct (effet capteur) et peuvent servir pour déformer le matériau par l'effet inverse (effet actionneur). Les matériaux piézoélectriques ont d'autres avantages, par exemple leur réponse linéaire à de faibles excitations ou encore leur relative sensibilité aux variations de température lorsqu'ils sont utilisés en dessous d'une température de transition appelée température de Curie.

Parmi les matériaux piézoélectriques les plus utilisés, on trouve les piézocéramiques et les piézopolymères, dont les zirconates titanates (PZT) découverts en 1959 et les polyvinylidènes fluorides (PVDF, PolyVini-DiFluor) qui ont été commercialisés en 1987. D'autres matériaux ont été découverts ou synthétisés pour des applications, afin d'améliorer leur rendement mécanique. Les matériaux piézoélectriques tels que les piézocéramiques et le PVDF sont en général de masse négligeable par rapport à la structure à contrôler et peuvent être flexibles dans le cas du PVDF. Il en résulte, un bon rendement de conversion d'énergie électrique en énergie mécanique et donc un rôle actionneur très efficace.

Ces matériaux ont surtout trouvé des applications dans le contrôle des vibrations dans les domaines de l'automobile, l'aérospatiale, le contrôle de forme (ailes d'avion, ailes ou objectifs des télescopes), le contrôle en acoustique des nuisances sonores et dans la biomécanique pour la conception de certains organes humains tels que le pancréas, le foie ou le rein. Il existe des matériaux naturels ou synthétiques, pouvant être polarisés pour exhiber ces propriétés piézoélectriques, comme la peau et les os qui ont des propriétés similaires. D'autres applications sont données dans la littérature (pour plus de détails, on pourra consulter Banks *et al.* [8]).

Modèle mathématique de la piézoélectricité

Commençons d'abord par rappeler certaines notions d'électromagnétismes et des hypothèses préliminaires faites en piézoélectricité linéaire, afin d'écrire le problème tridimensionnel de la piézoélectricité.

Dans un domaine Ω simplement connexe de \mathbb{R}^3 de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ régulière, l'interaction

électromagnétique est traduite par les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{J} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{rot} \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (0.0.1)$$

où \mathbf{E} et \mathbf{H} sont respectivement le champ électrique et le champ magnétique. \mathbf{D} et \mathbf{B} désignent respectivement l'induction électrique et magnétique. \mathbf{J} représente le vecteur courant. Ces champs vectoriels sont reliés par la loi du comportement électromagnétique

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \\ \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \end{cases} \quad (0.0.2)$$

où \mathbf{P} est le vecteur de polarisation électrique et \mathbf{M} est le vecteur de magnétisation ou d'aimantation, ϵ_0 est la permittivité absolue qui désigne la permittivité du vide, μ_0 est la perméabilité absolue. Pour compléter la description de cette interaction électromagnétique, on introduit une autre équation d'équilibre, dite équation de Maxwell-Gauss ou équation de conservation de la charge

$$-\mathbf{div} \mathbf{D} = q, \quad (0.0.3)$$

avec q la densité volumique de charge au sein du matériau. Cette équation est valable dans un milieu non aimanté. Dans ce qui suit, le matériau considéré dans notre étude est un isolant d'où $q = 0$. La dernière équation de Maxwell s'ajoute aux équations précédentes et traduit la loi de conservation du flux magnétique

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0, \quad (0.0.4)$$

l'équation de conservation de la charge électrique q est définie par

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{div} \mathbf{J} = 0. \quad (0.0.5)$$

Les conditions aux limites sont déterminées à partir des équations de Maxwell écrites sous forme d'intégrales. Pour une approche mathématique, l'hypothèse de simple connexité du domaine Ω et la régularité de sa frontière Γ permettent à partir de l'équation (0.0.4) de déduire que la loi de conservation (0.0.4) implique l'existence d'un vecteur \mathbf{A} , appelé potentiel magnétique vectoriel, tel que

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}. \quad (0.0.6)$$

Cette dernière équation combinée avec la deuxième équation de Maxwell-Faraday du système (0.0.1) implique que la somme de vecteurs $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ admet un rotationnel nul, donc dérive d'un potentiel scalaire ϕ , d'où

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (0.0.7)$$

En général, le matériau piézoélectrique est un milieu continu et électriquement neutre, pour cela il est qualifié d'isolant. Dans beaucoup d'applications, on peut se restreindre à l'approximation quasi-électrostatique, ce qui revient à supposer que la transformation est thermodynamiquement adiabatique (pas d'échange de chaleur et donc pas d'effet Joule). Cela nous conduit à

$$\begin{cases} q = 0, \\ \mathbf{J} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (0.0.8)$$

On suppose aussi que seul l'effet de l'interaction électro-mécanique est important, on néglige donc la partie magnétique.

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{A} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (0.0.9)$$

Cette dernière hypothèse a été confirmée expérimentalement par H.F. Tiersten [90]. Précisons maintenant dans quelles conditions on peut travailler avec l'approximation quasi-électrostatique (0.0.8). Pour simplifier l'analyse, nous supposons, que le corps est une plaque de longueur L . Considérons, dans une oscillation électromagnétique, un mode propre introduit par le phénomène de déformation de longueur d'onde λ et de vitesse de phase v . La période d'oscillation T est donnée par $T = \frac{\lambda}{v}$. Notons par x la variable d'espace et t la variable temps, faisons le changement de variable

$$\begin{cases} \zeta &= \frac{x}{L}, \\ \tau &= \frac{2\pi t}{T}, \end{cases}$$

la deuxième équation du système (0.0.1) devient

$$\text{rot}_\zeta \mathbf{E} = -\frac{2\pi L}{T} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} = -2\pi v \frac{L}{\lambda} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau}.$$

Il se dégage donc un critère pour l'approximation quasi-électrostatique : si la longueur d'onde de l'oscillation électromagnétique est très grande par rapport à la longueur de la plaque, on peut faire l'approximation quasi-électrostatique et ignorer \mathbf{A} , ceci serait équivalent à effectuer au départ l'hypothèse de simplification sur $\nabla\phi$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right| \ll \left| \nabla \phi \right|.$$

Cette hypothèse est tirée de l'expérimentation. Alors l'équation (0.0.7) s'écrit sous la forme

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi,$$

les inconnues se réduisent au déplacement \mathbf{u} et au potentiel ϕ . On définit désormais l'enthalpie électrique H du corps piézoélectrique par

$$H(\epsilon, E_i) = U - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D},$$

où ϵ est la partie linéaire du tenseur des déformations ($2\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \partial_i u_j + \partial_j u_i$), $\mathbf{E} = (E_i)$, avec U étant son énergie interne. En différenciant par rapport au temps on obtient

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{D} = \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} - D_i \frac{\partial E_i}{\partial t}, \quad (0.0.10)$$

avec $\mathbf{D} = (D_i)$ et $\sigma = (\sigma_{ij})$ est le tenseur des contraintes. Aussi, puisque on a

$$H = H(\epsilon, E_i).$$

En différenciant l'équation précédente par rapport au temps on obtient

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial E_i} \frac{\partial E_i}{\partial t}.$$

Puis en identifiant les termes obtenus avec les termes de l'équation (0.0.10), on déduit

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} - \left(D_i + \frac{\partial H}{\partial E_i} \right) \frac{\partial E_i}{\partial t} = 0,$$

pour $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial t}$ et $\frac{\partial E_i}{\partial t}$. On obtient

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ji}} \right), \\ D_i = -\frac{\partial H}{\partial E_i}. \end{cases} \quad (0.011)$$

Comme on s'intéresse dans la suite, aux modèles linéaires de structures piézoélectriques, on ne considère que la partie quadratique de l'enthalpie qui est définie par

$$H(\epsilon, E_i) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - e_{kij} E_k \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} d_{ij} E_i E_j. \quad (0.012)$$

On déduit de (0.011) et (0.012) la deuxième loi de comportement qui exprime le tenseur des contraintes σ et le vecteur des déplacements électriques \mathbf{D} en fonction du tenseur linéaire des déformations $\epsilon = (\epsilon_{ij})$, le gradient du potentiel électrique ou le champ électrique \mathbf{E} , par un système d'équations constitutives sous une forme matricielle compacte à l'aide de la notation de Voigt (Dieulesaint et Royer [30])

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \\ D_i = e_{ikl} \epsilon_{kl} + d_{ij} E_j. \end{cases} \quad (0.013)$$

On déduit de la relation (0.012) que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial^2 H}{\partial \sigma_{kl} \partial \sigma_{ij}}, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial E_k \partial E_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial E_i \partial E_k}. \end{cases} \quad (0.014)$$

ce qui implique que

$$\begin{cases} c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl}, \\ d_{ij} = d_{ji}, \\ e_{kij} = e_{kji}, \quad e_{kij} = -e_{jik}. \end{cases} \quad (0.015)$$

c_{ijkl} sont les coefficients d'élasticités à champ électrique nul (matériau piézoélectrique de court-circuité) et les termes e_{kij} sont des coefficients piézoélectriques à champ électrique ou déformation nuls. Les termes d_{ij} sont des coefficients de permittivité à déformation nulle qui constituent un tenseur symétrique défini positif. Signalons que la matrice piézoélectrique e_{kij} est anti-symétrique. Il n'existe donc pas de matériaux piézoélectriques isotropes.

Remarque 0.0.1

Les hypothèses physiques introduites pour la piézoélectricité consistent à négliger les effets magnétiques et thermiques et à considérer l'interaction électro-mécanique uniquement. Pour la piézoélectricité linéaire, on se restreint à l'élasticité linéaire, en restant dans le cadre des petites déformations.

Première partie

Homogénéisation de l'équation de la piézoélectricité

Chapitre 1

Rappels sur le problème tridimensionnel

Il s'agit de formuler le problème aux limites, considéré sur un domaine tridimensionnel. Nous allons rappeler la loi de comportement des matériaux piézoélectriques en précisant les inconnues choisies, ainsi que les différents efforts mécaniques et électriques envisagés.

On utilise deux formulations variationnelles associées au problème étudié : une dont la forme bilinéaire est elliptique mais non symétrique. La seconde avec une forme bilinéaire symétrique mais non elliptique. Nous montrerons par la suite que ces deux formulations sont équivalentes et que les problèmes variationnels ont une solution unique, que l'on démontre en appliquant le lemme de Lax-Milgram en considérant la première formulation ou en appliquant des arguments d'analyse convexe tout en considérant la seconde. Le travail de cette thèse s'appuie sur les résultats obtenus par Bernadou et Haenel [13] et Haenel [42] dans une coque tridimensionnelle, et dans une plaque bidimensionnelle par Rahmoune [75] et Sène [80].

Ce chapitre est composé de trois parties organisées de la manière suivante : Après une description du cadre physique relatif au problème de la piézoélectricité, on présente le cadre géométrique dans lequel on va travailler, et le problème tridimensionnel de la piézoélectricité, ainsi que les hypothèses *a priori* liées à des phénomènes physiques négligés par le modèle traité. Dans la deuxième partie, on rappelle les inégalités de Poincaré et de Korn ainsi que quelques lemmes qui seront suivis par la formulation du problème étudié sous forme de deux formulations variationnelles. On donne également un résultat d'existence et d'unicité. Enfin, à l'aide des arguments de l'analyse convexe, on présente le problème de *point selle* associé au problème de la piézoélectricité, ainsi que certaines remarques sur les deux formulations variationnelles obtenues, et nous interprétons par la suite, des observations concernant le problème de la piézoélectricité, d'un point de vue mathématique et physique.

1.1 Description du problème de la piézoélectricité

Pour simplifier la description du problème, on se contente uniquement du cas stationnaire, l'adaptation au cas quasi-statique ou dynamique est immédiate.

1.1.1 Cadre physique

On suppose que la variation de température et du champ magnétique sont négligeables. Cette hypothèse est raisonnable pour les matériaux piézoélectriques utilisés habituellement

comme les céramiques, les polymères et les piézo-composites, donc cela signifie que l'on dispose uniquement d'un couplage électro-mécanique.

On se place dans le cadre de la *piézoélectricité en petites déformations* et on choisit de formuler le problème en deux inconnues: le déplacement mécanique et le potentiel électrique. Nous considérons que le potentiel électrique comme étant l'inconnue électrique plutôt que son gradient (voir Banks *et al.* [8]), ceci est justifié par les conditions aux limites qui seront imposées par la suite sur le potentiel électrique.

1.1.2 Description de la géométrie et des forces envisagées

Soit Ω un ouvert borné simplement connexe de \mathbb{R}^3 de la variable $x = (x_1, x_2, x_3)$, de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ Lipschitzienne. L'état électromécanique d'un milieu piézoélectrique est déterminé par le couple (\mathbf{u}, φ) tel que \mathbf{u} est le champ des déplacements élastiques et φ est le potentiel électrique.

On considère deux décompositions de la frontière Γ , correspondant respectivement aux conditions aux limites mécaniques (indiquées par un exposant M) et aux conditions aux limites électriques (indiquées par un exposant E):

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_0^M \cup \Gamma_1^M & \text{avec } \Gamma_0^M \cap \Gamma_1^M &= \emptyset, & \text{et } \text{mes}(\Gamma_0^M) > 0 \\ \Gamma &= \Gamma_0^E \cup \Gamma_1^E & \text{avec } \Gamma_0^E \cap \Gamma_1^E &= \emptyset, & \text{et } \text{mes}(\Gamma_0^E) > 0. \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

On suppose que le milieu est :

- i) soumis à une densité de force volumique \mathbf{f} dans Ω ,
- ii) soumis à une densité surfacique de force q , agissant sur la partie Γ_1^M ,
- iii) encastré sur la partie Γ_0^M de la frontière,
- iv) libre de charges électriques dans le milieu et sur la partie Γ_1^E de la frontière,
- v) soumis à un potentiel fixé $\bar{\varphi}$ sur la partie Γ_0^E de la frontière.

Remarque 1.1.1 *Les matériaux piézoélectriques sont des diélectriques parfaits, c'est pourquoi on considère qu'il n'y a pas de charges électriques dans le milieu (voir Banks et al. [8]).* ■

1.1.3 Formulation du problème

On adoptera tout au long de ce travail, la convention d'Einstein de sommation des indices répétés, on utilise l'alphabet latin pour les indices variants de 1 à 3. Les vecteurs de \mathbb{R}^3 sont représentés en caractères gras. On désignera par n la normale extérieure sur $\partial\Omega$. Les équations régissant le comportement piézoélectrique sont

$$\begin{cases} -\mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}, \varphi) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ -\mathbf{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.1.2)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_0^M, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u}, \varphi) \cdot n_j = q_i & \text{sur } \Gamma_1^M, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \bar{\varphi} & \text{sur } \Gamma_0^E, \\ \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi) \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_1^E, \end{array} \right. \end{cases} \quad (1.1.3)$$

le tenseur des contraintes linéarisées $\sigma = (\sigma_{ij})$ et le vecteur des déplacements électriques $\mathbf{D} = (D_i)$, sont reliés par la loi de comportement des matériaux piézoélectriques suivant

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(\mathbf{u}, \varphi) = c_{ijkl}s_{kl}(\mathbf{u}) + e_{kij}\partial_k\varphi & \text{dans } \Omega, \\ D_i(\mathbf{u}, \varphi) = -e_{ikl}s_{kl}(\mathbf{u}) + d_{ij}\partial_j\varphi & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.1.4)$$

$$1 \leq i, j, k, l \leq 3,$$

avec $(\mathbf{div} \sigma)^i = \partial_j\sigma_{ij}$, $\mathbf{div} \mathbf{D} = \partial_i D_i$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $x = (x_i) \in \Omega$. Le tenseur des déformations linéarisé est donné par

$$s_{kl}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_k u_l + \partial_l u_k) \quad (1.1.5)$$

Le tenseur de l'élasticité tridimensionnelle (c_{ijkl}) est symétrique et défini positif, il vérifie

$$\begin{cases} c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij} = c_{ijlk}, \\ c_{ijkl} \in L^\infty(\bar{\Omega}), \\ \exists \alpha_c > 0 : c_{ijkl}(x)X_{ij}X_{kl} \geq \alpha_c X_{ij}X_{ij}, \forall x \in \bar{\Omega}, \forall X_{ij} = X_{ji} \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Le tenseur piézoélectrique (de couplage) (e_{ikl}^ε) est symétrique et vérifie

$$\begin{cases} e_{ikl} = e_{ilk}, \\ e_{ikl} \in L^\infty(\bar{\Omega}). \end{cases} \quad (1.1.7)$$

Le tenseur diélectrique (d_{ij}^ε) est symétrique, défini positif et vérifie

$$\begin{cases} d_{ij} = d_{ji}, \\ d_{ij} \in L^\infty(\bar{\Omega}), \\ \exists \alpha_d > 0 : d_{ij}(x)X_iX_j \geq \alpha_d X_iX_i, \forall x \in \bar{\Omega}, \forall X_i \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.1.8)$$

1.2 Existence et unicité d'une solution

On présente maintenant, un bref rappel de quelques lemmes notamment celui du mouvement rigide, ainsi que les inégalités de Korn et de Poincaré (pour plus de détails autour de ce rappel, on peut se référer à Ciarlet [20] [21]).

1.2.1 Rappels des inégalités de Poincaré et de Korn

Définissons

$$\mathbf{V}_M(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0^M \right\}$$

(i) (*Lemme du mouvement rigide*)

Si $\text{mes}(\Gamma_0^M) > 0$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_M(\Omega)$ et $s_{ij}(\mathbf{v}) = 0$, alors $\mathbf{v} = 0$. ■

(ii) (*Inégalité de Poincaré*)

Soit Ω un ouvert borné, alors pour chaque fonction $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega)$, alors il existe une constante C strictement positive telle que :

$$\| \mathbf{u} \|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \| \nabla \mathbf{u} \|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad \blacksquare$$

(iii) (*La première inégalité de Korn*)

Soit Γ_0 une partie de la frontière Γ de Ω telle que $\text{mes}(\Gamma_0)$ non nulle, on définit l'espace

$$\mathbf{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \}$$

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ lipschitzienne, alors on a

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega), \quad \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq 2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2. \blacksquare$$

(iv) (*La seconde inégalité de Korn*)

Soit Ω un domaine borné lipschitzien de \mathbb{R}^n , alors on a

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_{\Gamma_0}^1(\Omega)} \leq C \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^n u_i u_i + \sum_{i,j=1}^n s_{ij}(\mathbf{u}) s_{ij}(\mathbf{u}) \right] dx, \blacksquare \quad (1.2.9)$$

avec $\mathbf{u} = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$, $s(\mathbf{u}) = (s_{ij}(\mathbf{u}))$ et $s_{ij}(\mathbf{u})$ est le tenseur des déformations linéarisé défini par (1.1.5).

(v) (Ciarlet [20] [21])

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n à frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe \mathcal{C}^2 et $\text{mes}(\Gamma_0^M) > 0$, alors il existe une constante C strictement positive telle que

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_M(\Omega)} \leq C \sum_{i,j=1}^n \|s_{ij}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_M(\Omega)$$

1.2.2 Deux formulations variationnelles du problème

On opère comme dans la thèse de Haenel [42], deux formulations variationnelles équivalentes associées au problème aux limites seront décrites.

Définissons les deux espaces suivants

$$\mathbf{V}_M(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0^M \right\}, \quad (1.2.10)$$

$$W_{E_{\bar{\varphi}}}(\Omega) = \left\{ \psi \in H^1(\Omega), \psi = \bar{\varphi} \text{ sur } \Gamma_0^E \right\}, \quad \forall \bar{\varphi} \in H^{1/2}(\Gamma_0^E), \quad (1.2.11)$$

en particulier avec

$$W_{E_0}(\Omega) = \left\{ \psi \in H^1(\Omega), \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_0^E \right\}.$$

On munit les espaces $\mathbf{V}_M(\Omega)$ et $W_{E_0}(\Omega)$ par les normes suivantes

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_M(\Omega)} &= \|\nabla \mathbf{v}\|_{(L^2(\Omega))^9}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_M(\Omega), \\ \|\psi\|_{W_{E_0}(\Omega)} &= \|\psi\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \psi \in W_{E_0}(\Omega). \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Nous supposons que les données du problème (1.1.2)-(1.1.3)-(1.1.4) sont suffisamment régulières, par exemple $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^3$, $q_i \in L^2(\Gamma_1^M)$ et $\bar{\varphi} \in H^{1/2}(\Gamma_0^E)$, et que (\mathbf{u}, φ) est une solution suffisamment régulière de ce problème.

Soit $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_M(\Omega)$, en multipliant la première équation du système (1.1.2) par les composantes de $\mathbf{v} = (v_i)$ et en intégrant sur Ω , on obtient

$$-\int_{\Omega} \partial_j \left(c_{ijkl} s_{kl}(\mathbf{u}) + e_{kij} \partial_k \varphi \right) v_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx. \quad (1.2.13)$$

En appliquant la formule de Green sur l'équation (1.2.13) et en tenant compte des conditions aux limites (1.1.3), on aura

$$\int_{\Omega} \left[c_{ijkl} s_{kl}(\mathbf{u}) + e_{kij} \partial_k \varphi \right] s_{ij}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_1^M} q_i v_i \, d\Gamma. \quad (1.2.14)$$

De même, soit $\psi \in W_{E_0}(\Omega)$. En multipliant la deuxième équation du problème (1.1.2) par ψ et en intégrant sur Ω , on obtient

$$- \int_{\Omega} \partial_i \left(- e_{ikl} s_{kl}(\mathbf{u}) + d_{ij} \partial_j \varphi \right) \psi \, dx = 0.$$

En appliquant la formule de Green et en tenant compte des conditions aux limites (1.1.3), on aboutit à

$$\int_{\Omega} \left[- e_{ikl} s_{kl}(\mathbf{u}) + d_{ij} \partial_j \varphi \right] \partial_i \psi \, dx = 0. \quad (1.2.15)$$

En additionnant les deux équations (1.2.14) et (1.2.15) on obtient le problème variationnel suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \varphi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega), \text{ tel que,} \\ a_1((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) = L(\mathbf{v}, \psi), \quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega), \end{array} \right. \quad (1.2.16)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) = \int_{\Omega} \left\{ \left[c_{ijkl} s_{kl}(\mathbf{u}) + e_{kij} \partial_k \varphi \right] s_{ij}(\mathbf{v}) \right. \\ \quad \left. + \left[- e_{ikl} s_{kl}(\mathbf{u}) + d_{ij} \partial_j \varphi \right] \partial_i \psi \right\} \, dx, \\ L(\mathbf{v}, \psi) = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_1^M} q_i v_i \, d\Gamma. \end{array} \right. \quad (1.2.17)$$

En soustrayant les deux équations (1.2.14) et (1.2.15), on obtient un second problème variationnel

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \varphi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega), \text{ tel que,} \\ a_2((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) = L(\mathbf{v}, \psi), \\ \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega), \end{array} \right. \quad (1.2.18)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) = \int_{\Omega} \left\{ \left[c_{ijkl} s_{kl}(\mathbf{u}) + e_{kij} \partial_k \varphi \right] s_{ij}(\mathbf{v}) \right. \\ \quad \left. - \left[- e_{ikl} s_{kl}(\mathbf{u}) + d_{ij} \partial_j \varphi \right] \partial_i \psi \right\} \, dx, \\ L(\mathbf{v}, \psi) = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_1^M} q_i v_i \, d\Gamma. \end{array} \right. \quad (1.2.19)$$

Admettons provisoirement, que chacun des deux problèmes (1.2.16)-(1.2.17) et (1.2.18)-(1.2.19) a une solution unique, ce qui sera démontré dans la Proposition 1.2.3.

Proposition 1.2.1 (Haenel [42])

Les deux problèmes (1.2.16)-(1.2.17) et (1.2.18)-(1.2.19) sont équivalents. ■

Preuve :

La preuve de cette proposition, a été donnée par Haenel [42]. Soit (\mathbf{u}, φ) une solution de (1.2.16)-(1.2.17). Puisque pour tout $\psi \in W_{E_0}(\Omega)$, $-\psi \in W_{E_0}(\Omega)$, on a

$$a_1((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, -\psi)) = L(\mathbf{v}, \psi) \quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega),$$

or pour tout $(\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega)$, on a

$$a_1((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, -\psi)) = a_2((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)).$$

Donc (\mathbf{u}, φ) est aussi une solution de (1.2.18)-(1.2.19). De même, on montre que toute solution de (1.2.18)-(1.2.19) est aussi solution de (1.2.16)-(1.2.17). ■

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel (1.2.16)-(1.2.17), il est intéressant de considérer le problème homogène correspondant au premier problème variationnel (1.2.16)-(1.2.17).

Lemme 1.2.1

Si $\bar{\varphi}$ est un élément de $H^{1/2}(\Gamma_0^E)$, il existe un relèvement $\hat{\varphi}$ de $\bar{\varphi}$ dans $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire une fonction $\hat{\varphi} \in H^1(\Omega)$ telle que $\hat{\varphi}|_{\Gamma_0^E} = \bar{\varphi}$. ■

On pose alors

$$\check{\varphi} = \varphi - \hat{\varphi},$$

ce qui conduit à la proposition suivante

Proposition 1.2.2 (Haenel, [42])

La solution (\mathbf{u}, φ) du problème variationnel (1.2.16)-(1.2.17) est donnée par $\varphi = \bar{\varphi} + \hat{\varphi}$ avec $(\mathbf{u}, \bar{\varphi})$ solution du problème variationnel suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \varphi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega), \text{ tel que,} \\ a_1((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) = \bar{L}(\mathbf{v}, \psi) \quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega), \end{cases} \quad (1.2.20)$$

où $a_1((\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot))$ est définie en (1.2.17) et $\bar{L}_1(\cdot, \cdot)$ est définie par

$$\bar{L}_1(\mathbf{v}, \psi) = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_1^M} q_i v_i \, d\Gamma + \int_{\Omega} \{-e_{kij} \partial_k \hat{\varphi} s_{ij}(\mathbf{v}) + d_{ik} \partial_k \hat{\varphi} \partial_i \psi\} \, dx \quad (1.2.21)$$

1.2.3 Théorème d'existence et d'unicité

Avant d'énoncer le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème aux limites (1.1.2)-(1.1.3), on énonce quelques propriétés des formes : linéaire $L_1(\cdot)$ et bilinéaire $a_1(\cdot, \cdot)$ définies par le système (1.2.17) (Les démonstrations des résultats suivants, se trouvent dans Haenel [42]).

Lemme 1.2.2

Si $f_i \in L^2(\Omega)$ et $q_i \in L^2(\Gamma_1^M)$, alors la forme linéaire $\bar{L}(\cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbf{V}_M(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega)$. ■

Lemme 1.2.3

Si $\text{mes}(\Gamma_0^M) > 0$ et $\text{mes}(\Gamma_0^E) > 0$, alors la forme bilinéaire $a_1((\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot))$ est continue et elliptique sur $\mathbf{V}_M(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega)$. ■

Dans la proposition suivante, on énonce le résultat de l'existence et de l'unicité de la solution du problème homogène (1.2.20).

Proposition 1.2.3

Si $\text{mes}(\Gamma_0^M) > 0$ et $\text{mes}(\Gamma_0^E) > 0$, si $f_i \in L^2(\Omega)$ et $q_i \in L^2(\Omega)$, alors le problème variationnel (1.2.20) admet une solution unique. ■

Corollaire 1.2.1

Si $\text{mes}(\Gamma_0^M) > 0$ et $\text{mes}(\Gamma_0^E) > 0$, si $f_i \in L^2(\Omega)$, $q_i \in L^2(\Gamma_1^M)$ et $\bar{\varphi} \in H^{1/2}(\Gamma_0^E)$, alors le problème variationnel (1.2.16)-(1.2.17) admet solution unique. ■

Remarque 1.2.1

- i) Si $\text{mes}(\Gamma_0^E) = 0$, le problème (1.2.20) aurait une solution unique dans l'espace $\mathbf{V}_M(\Omega) \times (W_{E_0}(\Omega)/\mathbb{R})$, c'est-à-dire que le potentiel est défini à une constante additive près.
- ii) Le problème de la piézoélectricité admet donc deux formulations variationnelles. Souvent on utilise la première, dont la forme bilinéaire est définie positive, mais non-symétrique puisque la matrice de la piézoélectricité globale est antisymétrique. Dans une autre situation il est envisageable d'utiliser la deuxième formulation variationnelle, dont la forme bilinéaire est symétrique mais non-elliptique.

iii) Dans l'expression

$$a_1((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{u}, \varphi)) = \int_{\Omega} \left\{ c_{ijkl} s_{ij}(\mathbf{u}) s_{kl}(\mathbf{u}) + d_{ij} \partial_i \varphi \partial_j \varphi \right\} dx,$$

les termes liés aux tenseurs piézoélectriques ont disparu. Ceci est dû à la réversibilité du phénomène de la piézoélectricité. ■

1.3 Le problème de point selle

Haenel dans sa thèse a montré que les deux problèmes variationnels (1.2.16)-(1.2.17) et (1.2.18)-(1.2.19) sont équivalents et puisque le problème (1.2.16)-(1.2.17) admet une solution unique, donc le problème (1.2.18)-(1.2.19) admet également une solution unique. Cependant, on peut démontrer directement sous les hypothèses du Corollaire 1.2.1, que le problème (1.2.18)-(1.2.19) a une solution unique, en utilisant des arguments d'analyse convexe.

Pour cela, soit $\hat{\varphi}$ un relèvement de $\bar{\varphi}$ dans $H^1(\Omega)$ (cf. Lemme 1.2.1), alors la solution (\mathbf{u}, φ) du problème variationnel (1.2.18)-(1.2.19) est donnée par $\varphi = \check{\varphi} + \hat{\varphi}$ avec $(\mathbf{u}, \check{\varphi})$ solution du problème homogène correspondant suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \check{\varphi}) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega), \text{ tel que,} \\ a_2((\mathbf{u}, \check{\varphi}), (\mathbf{v}, \psi)) = \bar{L}_2(\mathbf{v}, \psi) \quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega), \end{cases} \quad (1.3.22)$$

où $a_2((\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot))$ est définie en (1.2.19) et $\bar{L}_2(\cdot, \cdot)$ est définie par

$$\begin{aligned} \bar{L}_2(\mathbf{v}, \psi) &= \int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_1^M} q_i v_i \, d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Omega} \{-e_{kij} \partial_k \hat{\varphi} s_{ij}(\mathbf{v}) + d_{ik} \partial_k \hat{\varphi} \partial_i \psi\} \, dx. \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

D'après Ekeland-Temam [32] (VI-1-6, pp.157), (\mathbf{u}, φ) est une solution du problème (1.2.18)-(1.2.19), si et seulement si (\mathbf{u}, φ) est solution du problème de *point selle* suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \varphi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega), \text{ tel que,} \\ S(\mathbf{u}, \varphi) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_M(\Omega)} \sup_{\psi \in W_{E_0}(\Omega)} S(\mathbf{v}, \psi), \end{cases} \quad (1.3.24)$$

où la fonctionnelle $S(\cdot, \cdot)$ est définie sur $\mathbf{V}_M(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega)$, par

$$S(\mathbf{v}, \psi) = \frac{1}{2} a_2(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \bar{L}_2(\mathbf{v}, \psi), \quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega).$$

On démontre ensuite que le problème de point selle (1.3.24) a une solution unique.

On peut vérifier que

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_M(\Omega), \text{ l'application} \\ \psi \in W_{E_0}(\Omega) \longrightarrow S(\mathbf{v}, \psi) \text{ est strictement concave et semi-continue supérieurement.} \end{cases} \quad (1.3.25)$$

$$\begin{cases} \forall \psi \in W_{E_0}(\Omega), \text{ l'application} \\ \mathbf{v} \in \mathbf{V}_M(\Omega) \longrightarrow S(\mathbf{v}, \psi) \text{ est strictement convexe et semi-continue inférieurement.} \end{cases} \quad (1.3.26)$$

Donc la fonctionnelle $S(\cdot, \cdot)$ a au plus, un point selle sur $\mathbf{V}_M(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega)$.

Remarque 1.3.1

i) La théorie de la piézoélectricité linéarisé présentée dans cette étude, ne tient pas compte des phénomènes : magnétique et thermique. De plus, d'autres phénomènes physiques sont ignorés par le modèle mathématique de la piézoélectricité linéarisé utilisé ici, notamment la température et la polarisation rémanente. Cela montre que ce modèle même s'il approche au mieux la réalité physique, reste incomplet pour décrire tous les phénomènes physiques associés à ce type de matériaux (pour plus de détails, on pourra consulter Banks et al. [8]).

ii) Dans le cas quasi-statique, le comportement mécanique est régi par les équations de l'élastodynamique, tandis que le comportement électrique est régi par les équations de Maxwell statiques, ce qui revient à dire que l'opérateur d'évolution apparait seulement dans la première équation du système (1.1.2) (Pour l'étude des propriétés de ce problème d'évolution, on pourra consulter l'article de Miara [59]).

Chapitre 2

Homogénéisation d'un corps piézoélectrique perforé

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'homogénéisation de l'équation de l'interaction électromécanique d'un corps piézoélectrique tridimensionnel périodiquement perforé. Pour se faire, on utilise la technique de la convergence à deux échelles introduite par Nguetseng [64] et précisée pour ses applications en homogénéisation périodique par la suite par Allaire [1], [2].

La notion de *la convergence à deux échelles* [1] [2] ou récemment la méthode de *l'éclatement périodique* [24] sont particulièrement bien adaptées à l'homogénéisation périodique des équations aux dérivées partielles où interviennent deux échelles d'espace (macroscopique et microscopique), puisqu'à l'aide des ces deux méthodes, en une seule et même étape, on récupère le problème homogénéisé et on répond à la question de la convergence. Une approche classique de ce type de problèmes consiste à appliquer successivement la méthode des développements asymptotiques à deux échelles (pour trouver formellement le problème homogénéisé ainsi que le problème local), puis répondre à la question de la convergence par la méthode de l'énergie de L.Tartar [86] [85] ou bien les méthodes *G-convergence*, *Γ -convergence*, afin de prouver rigoureusement la convergence.

Considérons Ω un domaine borné connexe de \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) de bord $\partial\Omega$ Lipschitz et faisons à l'intérieur des trous, on obtient un ouvert Ω_ε (ε un paramètre strictement positif). On va se placer dans le cas où $\varepsilon \rightarrow 0$, c'est-à-dire on creuse dans Ω des trous de taille de plus en plus petites, répartis régulièrement mais de plus en plus petits, donc notre milieu est modélisé par une répétition périodique d'une cellule élémentaire de taille ε . Notre objectif est l'étude du comportement limite (lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$) du problème de la piézoélectricité.

Plusieurs études ont été faites sur l'homogénéisation des structures piézoélectriques pour étudier les propriétés des coefficients homogénéisés (effectifs) notamment les travaux de Kalamkarov et Georgiades [44] et de Castillero *et al.* [19] sur des matériaux laminés, et les travaux de Ruan *et al.* [79] et de celui de Feng et Wu [35]) sur des matériaux fibrés. Ces auteurs se sont servis de la technique des échelles multiples pour examiner les propriétés effectives des structures étudiées. En utilisant la méthode de G-convergence Telega *et al.* [87] [88] [89] se sont intéressés aux matériaux piézocomposites. Les résultats que nous obtenons complètent le résultat de Telega [87], et nous permettent en particulier d'exploiter les problèmes locaux et les tenseurs effectifs.

Ce chapitre est composé de neuf sections organisées de la manière suivante : Dans la première section, on présentera le cadre géométrique dans lequel on va travailler. Dans la section suivante, on présentera le problème étudié. Dans la troisième section, nous formulerons le problème variationnel pour aboutir à l'estimation a priori sur le champ des déplacements mécaniques et le potentiel électrique. Dans la section suivante, on présentera un bref rappel sur la notion de la convergence à deux échelles avec l'illustration de quelques résultats fondamentaux qui lui sont liés, et par la suite on établira le premier résultat de convergence du problème étudié. Dans la cinquième section, on énoncera le théorème principal de convergence, qui décrit le comportement asymptotique de l'état électromécanique lorsque le paramètre de la taille des perforations tend vers zéro. Les expressions de tous les tenseurs d'élasticité, de piézoélectricité (de couplage) et de diélectricité homogénéisés seront données dans la section suivante. Dans la septième section, on étudiera les propriétés (symétrie, ellipticité,...) des coefficients des tenseurs homogénéisés (effectifs), ce qui permet d'établir la forme alternative du théorème de convergence, à partir duquel on déduit un théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème homogénéisé. Dans la section suivante, on donnera un résultat qui décrit le comportement asymptotique des énergies : mécanique, électrique et totale. Dans la dernière section on prouvera un résultat de correcteur, qui nous permettra de justifier les deux premiers termes des développements asymptotiques de la solution du problème traité.

2.1 Géométrie du domaine perforé

Soit Ω un ouvert borné simplement connexe de \mathbb{R}^3 de la variable $x = (x_1, x_2, x_3)$, de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ Lipschitzienne. Posons ε comme un paramètre associé à une microstructure contenue dans Ω , destiné à converger vers zéro.

Soit $Y = (0, 1)^3$ la période de base (la cellule de référence) de variable microscopique $y = (y_1, y_2, y_3)$, on prend un ouvert Y^* tel que $Y^* \subset\subset Y$ qui représente la partie de Y occupée par le matériau de telle sorte que $Y - Y^*$ soit le trou (le vide), on suppose que Y^* est de frontière lipschitzienne et que $\overline{Y - Y^*} \subset \overline{Y}$.

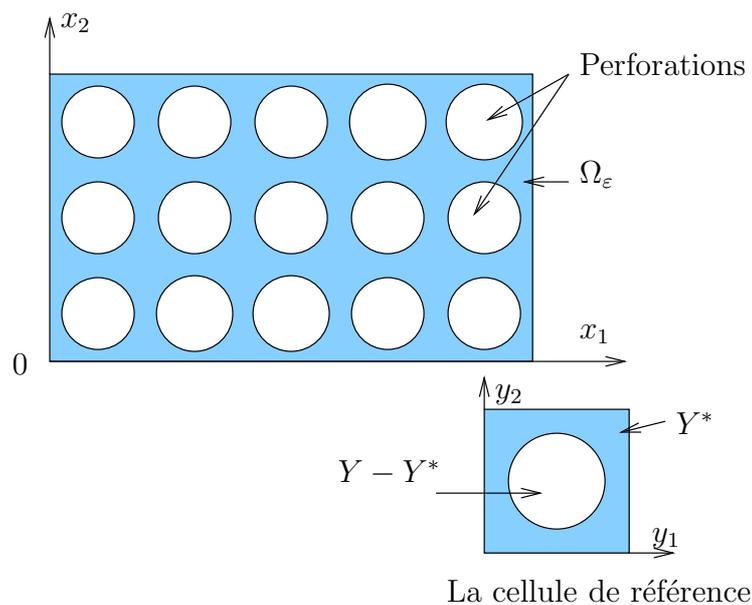


FIG. 2.1 – Une structure perforée Ω_ε et sa cellule de base Y .

On définit le domaine perforé Ω_ε comme un sous-domaine de Ω de l'union de toutes les translations εY -périodiques de εY^* , qui sont strictement incluses dans Ω (c'est-à-dire les trous ne coupent pas le bord de Ω , voir figure 2.1), c'est-à-dire

$$\Omega_\varepsilon = \left(\bigcup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \varepsilon(Y^* + \mathbf{k}) \right) \cap \Omega.$$

Posons χ la fonction caractéristique de S^* , telle que S^* représente l'intégralité du matériau par Y -périodique de Y^* . On peut donc définir analytiquement Ω_ε comme suit

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ x \in \Omega / \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1 \right\}.$$

Autrement dit, Ω_ε est l'ensemble Ω dont on a retiré les perforations déduites de εY par toutes les translations de longueur $m\varepsilon$ avec $m \in \mathbb{Z}$ dans toutes les directions.

Remarque 2.1.1 *Il convient de signaler qu'il existe une fonction $\theta \in L^\infty(\Omega)$, telle que*

$$\chi_{\Omega_\varepsilon} \rightharpoonup \theta \quad \text{faiblement} * \text{ dans } L^\infty(\Omega). \quad \blacksquare$$

En effet, ce dernier résultat est une conséquence du lemme classique (voir Cioranescu et Donato [27], Lewiński et Telega [49]) suivant

Lemme 2.1.1

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in L^p(Y)$, Y -périodique. On définit la fonction f^ε par : $f^\varepsilon = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ p.p $x \in \Omega$. On a

$$\begin{cases} f^\varepsilon(x) \rightharpoonup \mathcal{M}_Y(f) \quad \text{faiblement} & \text{dans } L^p(\Omega) \text{ pour } 1 \leq p < \infty, \\ f^\varepsilon(x) \rightharpoonup \mathcal{M}_Y(f) \quad \text{faiblement} * & \text{dans } L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

où $\mathcal{M}_Y(f) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(y) dy$. \blacksquare

2.2 Position du problème traité

On adoptera tout au long de ce travail, la convention d'Einstein sur la sommation des indices répétés, on utilisera l'alphabet latin pour les indices variant de 1 à 3. Les vecteurs de \mathbb{R}^3 sont représentés en caractères gras, on désignera par n^ε la normale extérieure à Ω_ε . On notera par \mathbf{u}^ε le champ des déplacements élastiques et par φ^ε le potentiel électrique, les équations régissant le comportement piézoélectrique sont

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ -\operatorname{div} \mathbf{D}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} (\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) = (\mathbf{0}, 0) & \text{sur } \partial\Omega, \\ \sigma^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \cdot n^\varepsilon = 0 & \text{sur les bords des trous } \partial\Omega_\varepsilon - \partial\Omega, \\ \mathbf{D}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \cdot n^\varepsilon = 0 & \text{sur les bords des trous } \partial\Omega_\varepsilon - \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

où $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega_\varepsilon)$, le tenseur des contraintes linéarisées $\sigma^\varepsilon = (\sigma_{ij}^\varepsilon)$ et le vecteur des déplacements électriques $\mathbf{D}^\varepsilon = (D_i^\varepsilon)$, sont reliés par la loi de comportement

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) = c_{ijkl}^\varepsilon s_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) + e_{kij}^\varepsilon \partial_k \varphi^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ D_i^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) = -e_{ikl}^\varepsilon s_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) + d_{ij}^\varepsilon \partial_j \varphi^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ 1 \leq i, j, k, l \leq 3, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

avec $(\mathbf{div} \sigma^\varepsilon)^i = \partial_j \sigma_{ij}^\varepsilon$, $\text{div } \mathbf{D}^\varepsilon = \partial_i D_i^\varepsilon$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $x = (x_i) \in \Omega$ et

$$\begin{cases} c_{ijkl}^\varepsilon = c_{ijkl}(x, \frac{x}{\varepsilon}), \\ e_{kij}^\varepsilon = e_{kij}(x, \frac{x}{\varepsilon}), \\ d_{ij}^\varepsilon = d_{ij}(x, \frac{x}{\varepsilon}). \end{cases}$$

Le tenseur des déformations linéarisé est donné par $s_{kl}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_k u_l + \partial_l u_k)$ et le tenseur de l'élasticité tridimensionnelle $\mathcal{C}^\varepsilon = (c_{ijkl}^\varepsilon)$ est symétrique et défini positif uniformément en ε , il vérifie

$$\begin{cases} c_{ijkl}^\varepsilon = c_{jikl}^\varepsilon = c_{klij}^\varepsilon = c_{ijlk}^\varepsilon, \\ c_{ijkl}(x, y) \in L^\infty(\Omega; C_{\text{per}}(Y)), \\ \exists \alpha_c > 0 \text{ indépendante de } \varepsilon : c_{ijkl}^\varepsilon X_{ij} X_{kl} \geq \alpha_c X_{ij} X_{ij}, \quad \forall X_{ij} = X_{ji} \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Le tenseur piézoélectrique (de couplage) $\mathcal{E}^\varepsilon = (e_{ikl}^\varepsilon)$ est symétrique, il vérifie

$$\begin{cases} e_{ikl}^\varepsilon = e_{ilk}^\varepsilon, \\ e_{ikl}(x, y) \in L^\infty(\Omega; C_{\text{per}}(Y)). \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Le tenseur diélectrique $\mathcal{D}^\varepsilon = (d_{ij}^\varepsilon)$ est symétrique et défini positif uniformément en ε , il vérifie

$$\begin{cases} d_{ij}^\varepsilon = d_{ji}^\varepsilon, \\ d_{ij}(x, y) \in L^\infty(\Omega; C_{\text{per}}(Y)), \\ \exists \alpha_d > 0 \text{ indépendante de } \varepsilon : d_{ij}^\varepsilon X_i X_j \geq \alpha_d X_i X_i, \quad \forall X_i \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

où $C_{\text{per}}(Y)$ est l'espace des fonctions continues et Y -périodiques.

2.3 Le problème variationnel et l'estimation a priori

Le but principal de cette section est d'obtenir une estimation a priori sur le champ des déplacements mécaniques et le vecteur du potentiel électrique. Pour se faire, on identifie le problème variationnel correspondant au problème aux limites (2.2.1)-(2.2.2)-(2.2.3).

2.3.2 Rappel sur les inégalités de Poincaré et de Korn dans un domaine perforé

Dans cette partie, on présentera un rappel sur les inégalités de Korn et de Poincaré dans des domaines perforés, dont on se servira par la suite, afin d'établir l'estimation a priori sur le champ des déplacements et le vecteur de potentiel électrique. Pour plus de détails sur ces inégalités, on peut consulter le travail de Cioranescu et Sain-Jean-Paulin [25] et les ouvrages de Oleinik *et al.* [66], de Lewiński et Telega [49] et l'article d'Allaire-Murat [4]. Dans tous les lemmes suivants, on prend la géométrie décrite dans la section 2.1 comme une géométrie du domaine perforé.

Lemme 2.3.1 (*Inégalité de Poincaré sur un domaine perforé*)

Il existe une constante C strictement positive indépendante de ε , telle que pour chaque fonction $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ satisfait $v = 0$ sur $\partial\Omega$, on a

$$\|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \quad (2.3.9)$$

Théorème 2.3.1 (*Inégalité de Korn sur un domaine perforé*)

Soit Ω_ε un domaine perforé, alors pour chaque fonction $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)$, il existe une constante C indépendante de ε , telle qu'on a l'inégalité suivante

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C \left(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_\varepsilon)} + \|s(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_\varepsilon)} \right). \quad (2.3.10)$$

$$\text{avec } \|s(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_\varepsilon)} = \left(\sum_{i,j=1}^3 \|s_{ij}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right)^{1/2}$$

2.3.3 Estimation a priori

Sur les espaces $\mathbf{V}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ et $W_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$, on peut définir les deux normes suivantes

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} = \left(\sum_{i,j=1}^3 \|s_{ij}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$$

$$\|\psi\|_{W_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} = \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \quad \forall \psi \in W_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$$

Les deux espaces $\mathbf{V}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ et $W_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ munis de ces deux normes sont des espaces de Hilbert.

Proposition 2.3.1 (**Estimation a priori**)

Pour tout couple $(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \in \mathbf{V}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) \times W_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ solution du problème variationnel (2.3.7)-(2.3.8), on a l'estimation a priori uniformément par rapport à ε suivante

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)} + \|\varphi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C, \quad (2.3.11)$$

où C est une constante strictement positive et indépendante de ε . ■

Démonstration

En remplaçant dans la formulation variationnelle (2.3.7)-(2.3.8), \mathbf{v} par \mathbf{u}^ε et ψ par φ^ε , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \left\{ \left[c_{ijkl}^\varepsilon s_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) + e_{kij}^\varepsilon \partial_k \varphi^\varepsilon(x) \right] s_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) + \left[-e_{ikl}^\varepsilon s_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) + d_{ij}^\varepsilon \partial_j \varphi^\varepsilon(x) \right] \partial_i \varphi^\varepsilon(x) \right\} dx \\ = \int_{\Omega_\varepsilon} f_i(x) u_i^\varepsilon(x) dx. \end{aligned}$$

Après une simplification, nous obtenons :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left\{ c_{ijkl}^\varepsilon(x) s_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) s_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) + d_{ij}^\varepsilon(x) \partial_i \varphi^\varepsilon(x) \partial_j \varphi^\varepsilon(x) \right\} dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f_i(x) u_i^\varepsilon(x) dx.$$

Puisque les deux tenseurs c^ε et d^ε sont uniformément définis positifs en ε , alors à partir de l'équivalence des normes signalée ci-dessus, on a

$$\begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon} c_{ijkl}^\varepsilon(x) s_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) s_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) dx & \geq \alpha_c \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)}^2, \\ \int_{\Omega_\varepsilon} d_{ij}^\varepsilon(x) \partial_i \varphi^\varepsilon(x) \partial_j \varphi^\varepsilon(x) dx & \geq \alpha_d \|\varphi^\varepsilon\|_{W_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)}^2, \end{cases}$$

avec α_c et α_d sont deux constantes indépendantes de ε , par conséquent, on a

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left\{ c_{ijkl}^\varepsilon s_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) s_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) + d_{ij}^\varepsilon \partial_i \varphi^\varepsilon(x) \partial_j \varphi^\varepsilon(x) \right\} dx \geq \bar{\alpha} \left\{ \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\varphi^\varepsilon\|_{W_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)}^2 \right\},$$

avec $\bar{\alpha} = \min(\alpha_c, \alpha_d)$. Donc on obtient l'estimation a priori suivante

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} + \|\varphi^\varepsilon\|_{W_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} \leq C,$$

avec C est une constante indépendante de ε . Par conséquent, à l'aide des inégalités de Korn et de Poincaré sur des domaines perforés, on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} &\geq c_1 \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)} \\ \|\varphi^\varepsilon\|_{W_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} &\geq c_2 \|\varphi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \end{aligned}$$

avec c_1, c_2 constantes indépendantes de ε , et à partir des deux dernières inégalités, les deux quantités $\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)}$ et $\|\varphi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ sont uniformément bornées par rapport à ε . ■

Remarque 2.3.2

L'une des difficultés pour l'application de l'homogénéisation sur des domaines perforés reste l'impossibilité d'extraire directement une sous-suite convergente à l'aide de la compacité faible dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega_\varepsilon)$, du fait que notre suite $(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ est définie sur des espaces $H^1(\Omega_\varepsilon)$ variant en fonction de ε . Pour cela on propose de construire une extension de \mathbf{u}^ε par 0 sur $\Omega - \Omega_\varepsilon$ et on démontre ensuite la convergence du développement asymptotique de cette extension via la convergence à deux échelles (voir [1], [2]). ■

Dans le paragraphe suivant, on rappelle la notion de la convergence à double échelle, ainsi que quelques résultats fondamentaux liés à cette notion de convergence (Allaire [1], [2]).

2.4 La convergence à deux échelles

Dans l'objectif d'obtenir un résultat de convergence pour le problème (2.2.1)-(2.2.2)-(2.2.3), on propose une approche basée sur la notion de *la convergence à deux échelles*. Cette notion a été introduite dans Nguetseng [64] et précisée pour ses applications en homogénéisation périodique par Allaire [1], [2], puis généralisée pour le cas multi-échelle par par Allaire et Briane [3], ainsi que par Ene et Saint Jean-Paulin [34].

L'idée de cette convergence est basée en premier lieu sur l'obtention d'une estimation a priori sur le champ des déplacements et le potentiel électrique. Ensuite, on utilise la propriété de la compacité relative (faible) avec une procédure classique de prolongement et un choix des fonctions tests dans le problème variationnel. Finalement, nous passons à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ pour obtenir simultanément le problème homogénéisé et les problèmes locaux.

2.4.1 Rappel sur la notion de la convergence double échelle

Notons par $C_{\text{per}}^\infty(Y)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables dans \mathbb{R}^3 et périodiques, de période Y , $H_{\text{per}}^1(Y)$ (resp. $L_{\text{per}}^2(Y)$) le complété de $C_{\text{per}}^\infty(Y)$ pour la norme de $H^1(Y)$ (resp. $L^2(Y)$).

On rappelle tout d'abord la définition de la convergence à deux échelles et les propriétés liées à cette notion.

• Définition de la convergence à deux échelles

Définition 2.4.1

On dit qu'une suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^2(\Omega)$ converge à deux échelles (ou converge au sens deux échelles) vers une limite $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ si et seulement si, pour toute fonction $\varphi(x, y) \in C_0^\infty(\Omega; C_{\text{per}}^\infty(Y))$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy. \quad \square$$

Cette définition peut s'étendre au cas vectoriel comme suit

Définition 2.4.2

On dit qu'une suite $(\mathbf{u}^\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset [L^2(\Omega)]^N$, ($N = 3$) converge à deux échelles (ou converge au sens deux échelles) vers une limite $\mathbf{u}_0(x, y) \in [L^2(\Omega \times Y)]^N$ si et seulement si, pour toute fonction $\varphi(x, y) \in [C_0^\infty(\Omega; C_{\text{per}}^\infty(Y))]^N$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega} \int_Y \mathbf{u}_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy. \quad \blacksquare$$

Rappelons ci-dessous, quelques résultats liés à la notion de la convergence double échelle.

• Résultats fondamentaux

1. De toute suite $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^2(\Omega)$ uniformément bornée en ε , on peut extraire une sous-suite et il existe une fonction $w_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$, telle que la sous-suite notée encore $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge à deux échelles vers $w_0(x, y)$.
2. Soit $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite qui converge à deux échelles vers $w_0(x, y)$, alors $(w^\varepsilon)_\varepsilon$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers w , défini par $w(x) = \int_Y w_0(x, y) dy$ et on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \geq \|w_0\|_{L^2(\Omega \times Y)} \geq \|w\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pour la démonstration complète voir G.Nguetseng [64] et G.Allaire [1], [2].

2.4.2 Quelques résultats préliminaires de la convergence double échelle

Pour toute fonction \mathbf{v}^ε définie dans Ω_ε , on note par $\tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon$ le prolongement par zéro de \mathbf{v}^ε à Ω tout entier, défini par

$$\tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon(x) = \begin{cases} \mathbf{v}^\varepsilon(x) & \text{si } x \in \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega - \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (2.4.12)$$

De même, pour tout opérateur \mathcal{P} tel que $\mathcal{P} = \nabla$ ou $\mathcal{P} = s_{ij}$, on note $\tilde{\mathcal{P}}$ son prolongement, défini par

$$\tilde{\mathcal{P}} \mathbf{v}^\varepsilon(x) = \begin{cases} \mathcal{P} \mathbf{v}^\varepsilon(x) & \text{si } x \in \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega - \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

A partir de l'estimation a priori (2.3.11) et d'après le résultat fondamental de la convergence à deux échelles on aboutit au résultat suivant

Proposition 2.4.1

1. Il existe deux fonctions $\mathbf{u}(x) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$, telle que les deux suites $(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(\tilde{\varphi}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ convergent à deux échelles vers $\chi(y)\mathbf{u}(x)$ et $\chi(y)\varphi(x)$ respectivement.
2. Il existe deux fonctions $\mathbf{u}_1(x, y) \in \mathbf{L}^2[\Omega; \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y^*)/\mathbb{R}]$ et $\varphi_1(x, y) \in L^2[\Omega; H_{\text{per}}^1(Y^*)/\mathbb{R}]$, telles que,

$$\tilde{\nabla} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \longrightarrow \chi(y) \left[\nabla_x \mathbf{u}(x) + \nabla_y \mathbf{u}_1(x, y) \right] \text{ au sens deux échelles,}$$

$$\tilde{\nabla} \varphi^\varepsilon(x) \longrightarrow \chi(y) \left[\nabla_x \varphi(x) + \nabla_y \varphi_1(x, y) \right] \text{ au sens deux échelles.}$$

3. On a aussi

$$\tilde{s}_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) \longrightarrow \chi(y) \left[s_{ij,x}(\mathbf{u}(x)) + s_{ij,y}(\mathbf{u}_1(x, y)) \right] \text{ au sens deux échelles.}$$

Les indices x et y indiquent les variables de la dérivation. χ est la fonction caractéristique de Y^* .

Preuve :

La démonstration est basée sur les idées développées dans G.Nguetseng [64] et G.Allaire [1], [2].

1. A partir de l'estimation a priori (2.3.11), on peut conclure que les quatre suites $(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon)_\varepsilon$, $(\tilde{\nabla} \mathbf{u}^\varepsilon)_\varepsilon$, $(\tilde{\varphi}^\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\tilde{\nabla} \varphi^\varepsilon)_\varepsilon$ restent aussi bornées, alors par l'application du résultat fondamental sur la convergence à deux échelles, on peut extraire des sous-suites, qui convergent à deux échelles vers $\mathbf{u}_0(x, y)$, $\eta_0(x, y)$, $\varphi_0(x, y)$ et $\xi_0(x, y)$ respectivement. Par définition de l'extension posée (2.4.12), on conclut directement que

$$\mathbf{u}_0(x, y) = \eta_0(x, y) = \varphi_0(x, y) = \xi_0(x, y) = 0 \text{ si } y \in Y - Y^*.$$

Nous allons préciser la forme de chacune des limites $\mathbf{u}_0(x, y)$ et $\varphi_0(x, y)$. Pour cela, soient $\phi(x, y) \in \mathbf{C}_0^\infty[\Omega; \mathbf{C}_{\text{per}}^\infty(Y)]$, $\psi(x, y) \in C_0^\infty[\Omega; C_{\text{per}}^\infty(Y)]$, $\Theta(x, y) \in \mathbf{C}_0^\infty[\Omega; \mathbf{C}_{\text{per}}^\infty(Y)]$ et $\Psi(x, y) \in C_0^\infty[\Omega; C_{\text{per}}^\infty(Y)]$, qui sont égales à zéro si $y \in Y - Y^*$. Par définition on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \phi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega} \int_{Y^*} \mathbf{u}_0(x, y) \phi(x, y) dx dy, \quad (2.4.13)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \mathbf{u}^\varepsilon(x) \Theta(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega} \int_{Y^*} \eta_0(x, y) \Theta(x, y) dx dy, \quad (2.4.14)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi^\varepsilon(x) \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega} \int_{Y^*} \Phi_0(x, y) \psi(x, y) dx dy, \quad (2.4.15)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \varphi^\varepsilon(x) \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega} \int_{Y^*} \xi_0(x, y) \Psi(x, y) dx dy. \quad (2.4.16)$$

Une intégration par parties, donne

$$\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \varphi^\varepsilon(x) \cdot \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = - \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi^\varepsilon(x) \left[\varepsilon \operatorname{div}_x \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \operatorname{div}_y \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right] dx, \quad (2.4.17)$$

$$\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \Theta(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = - \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \left[\varepsilon \operatorname{div}_x \Theta(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \operatorname{div}_y \Theta(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right] dx. \quad (2.4.18)$$

Par passage à la limite et en utilisant (2.4.13) avec (2.4.14) et (2.4.15) avec (2.4.16), on obtient

$$0 = - \int_{\Omega} \int_{Y^*} \mathbf{u}_0(x, y) \operatorname{div}_y \Theta(x, y) dx dy,$$

$$0 = - \int_{\Omega} \int_{Y^*} \varphi_0(x, y) \operatorname{div}_y \Psi(x, y) dx dy.$$

Ceci implique que $\mathbf{u}_0(x, y)$ et $\Phi_0(x, y)$ sont indépendantes de y sur Y^* , autrement dit, il existe $\mathbf{u}(x) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\Phi(x) \in L^2(\Omega)$, tels que

$$\mathbf{u}_0(x, y) = \chi(y) \mathbf{u}(x),$$

$$\varphi_0(x, y) = \chi(y) \varphi(x).$$

2. Choisissons maintenant des fonctions tests, qui vérifient $\operatorname{div}_y \Theta(x, y) = \operatorname{div}_y \Psi(x, y) = 0$, dans les deux équations (2.4.17) et (2.4.18), on obtient

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \Theta(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = - \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \cdot \operatorname{div}_x \Theta(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx, \quad (2.4.19)$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \varphi^\varepsilon(x) \cdot \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = - \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi^\varepsilon(x) \cdot \operatorname{div}_x \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx. \quad (2.4.20)$$

Passons à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on aboutit à

$$\int_{\Omega} \int_{Y^*} \eta_0(x, y) \Theta(x, y) dx dy = - \int_{\Omega} \int_{Y^*} \mathbf{u}(x) \operatorname{div}_x \Theta(x, y) dx dy,$$

$$\int_{\Omega} \int_{Y^*} \xi_0(x, y) \Psi(x, y) dx dy = - \int_{\Omega} \int_{Y^*} \varphi(x) \operatorname{div}_x \Psi(x, y) dx dy.$$

Par une intégration par parties et pour $\Theta(x, y) \in \mathbf{L}^2[\Omega; \mathbf{L}_{\text{per}}^2(Y^*)]$ et $\Psi(x, y) \in L^2[\Omega; L_{\text{per}}^2(Y^*)]$, avec $\text{div}_y \Theta(x, y) = \text{div}_y \Psi(x, y) = 0$ et $\Theta(x, y) \cdot n_y = \Psi(x, y) \cdot n_y = 0$ sur $\partial Y^* - \partial Y$, on obtient

$$\int_{\Omega} \int_{Y^*} [\eta_0(x, y) - \nabla \mathbf{u}(x)] \Theta(x, y) \, dx \, dy = 0, \quad (2.4.21)$$

$$\int_{\Omega} \int_{Y^*} [\xi_0(x, y) - \nabla \varphi(x)] \Psi(x, y) \, dx \, dy = 0. \quad (2.4.22)$$

D'après [1], il existe $\mathbf{u}_1(x, y) \in \mathbf{L}^2[\Omega; \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y^*)]$ et $\Phi_1(x, y) \in L^2[\Omega; H_{\text{per}}^1(Y^*)]$, tels que

$$\eta_0(x, y) = \chi(y) [\nabla \mathbf{u}(x) + \nabla_y \mathbf{u}_1(x, y)], \quad (2.4.23)$$

$$\xi_0(x, y) = \chi(y) [\nabla \varphi(x) + \nabla_y \Phi_1(x, y)]. \quad (2.4.24)$$

3. On peut déduire ce résultat directement, car

$$\tilde{\nabla} \mathbf{u}^\varepsilon(x) \longrightarrow \chi(y) [\nabla_x \mathbf{u}(x) + \nabla_y \mathbf{u}_1(x, y)] \text{ au sens double échelle,}$$

d'où en particulier

$$\frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i}(x) \longrightarrow \left[\frac{\partial u^j}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial u_1^j}{\partial y_i}(x, y) \right] \text{ au sens deux échelles,}$$

et par définition on a : $s(\mathbf{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon + \nabla^t \mathbf{u}^\varepsilon)$, on déduit directement que

$$\tilde{s}_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) \longrightarrow \chi(y) [s_{ij,x}(\mathbf{u}(x)) + s_{ij,y}(\mathbf{u}_1(x, y))] \text{ toujours au sens double échelle. } \blacksquare$$

D'après le résultat fondamental de la convergence à double échelle et le lemme 2.1.1, on établit le résultat ci-dessous :

Corollaire 2.4.1

La suite $(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon)$ (resp. $(\tilde{\varphi}^\varepsilon)$) converge faiblement dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (resp. $L^2(\Omega)$) vers $\theta \mathbf{u}$ (resp. $\theta \varphi$), avec $\theta = \int_Y \chi(y) \, dy$ (on rappelle que θ est la limite faible * de $\chi_{\Omega_\varepsilon}$ dans $L^\infty(\Omega)$). \blacksquare

2.5 Le résultat principal

Notre problème maintenant est le suivant : \mathbf{u} , \mathbf{u}_1 , φ et φ_1 vérifient-t-ils une équation du même type que celle de notre problème modèle (2.2.1)-(2.2.2)-(2.2.3).

Pour cela, en suivant l'idée de Nguetseng [64] et G.Allaire [1], on utilise la méthode d'identification des limites double échelle, qui consiste à choisir dans le problème variationnel (2.3.7)-(2.3.8), des fonctions tests du type

$$\begin{cases} \mathbf{v}^\varepsilon(x) = \mathbf{v}(x, \frac{x}{\varepsilon}) = \mathbf{v}^0(x) + \varepsilon \mathbf{v}^1(x, \frac{x}{\varepsilon}), \\ \psi^\varepsilon(x) = \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) = \psi^0(x) + \varepsilon \psi^1(x, \frac{x}{\varepsilon}), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{v}^0 \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega), & \mathbf{v}^1 \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega; \mathbf{C}_{\text{per}}^\infty(Y)), \\ \psi^0 \in C_0^\infty(\Omega), & \psi^1 \in C_0^\infty(\Omega; C_{\text{per}}^\infty(Y)). \end{cases}$$

Pour une fonction quelconque $\mathbf{v}(x, y)$, nous avons

$$\frac{d\mathbf{v}}{dx_i} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y_i},$$

qui implique

$$s_{ij}(\mathbf{v}) = s_{ij,x}(\mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} s_{ij,y}(\mathbf{v}),$$

donc, on peut facilement voir que

$$\begin{cases} s_{ij}(\mathbf{v}^\varepsilon)(x) = s_{ij,x}(\mathbf{v}^0)(x) + s_{ij,y}(\mathbf{v}^1)\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon s_{ij,x}(\mathbf{v}^1)\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \\ \frac{d\psi^\varepsilon}{dx_i}(x) = \frac{\partial \psi^0}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial \psi^1}{\partial y_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \frac{\partial \psi^1}{\partial x_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right). \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\varepsilon} \left\{ \left[c_{ijkl}^\varepsilon s_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) + e_{kij}^\varepsilon \partial_k \varphi^\varepsilon \right] \left[s_{ij,x}(\mathbf{v}^0)(x) + \left\{ s_{ij,y}(\mathbf{v}^1) + \varepsilon s_{ij,x}(\mathbf{v}^1) \right\} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] \right. \\ & - \left. \left[-e_{kij}^\varepsilon s_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) + d_{ij}^\varepsilon \partial_j \varphi^\varepsilon \right] \left[\partial_{ix} \psi^0(x) + \left\{ \partial_{i,y} \psi^1 + \varepsilon \partial_{i,x} \psi^1 \right\} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] \right\} dx \\ & = \int_{\Omega_\varepsilon} f_i(x) \left[v_i^0(x) + \varepsilon v_i^1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right] dx. \end{aligned} \quad (2.5.25)$$

Sous les hypothèses (2.2.4), (2.2.5) et (2.2.6), nous avons

$$\begin{cases} \chi_{\Omega_\varepsilon}(x) c_{ijkl}^\varepsilon(x) \longrightarrow \chi(y) c_{ijkl}(x, y) & \text{au sens deux échelles,} \\ \chi_{\Omega_\varepsilon}(x) e_{kij}^\varepsilon(x) \longrightarrow \chi(y) e_{kij}(x, y) & \text{au sens deux échelles,} \\ \chi_{\Omega_\varepsilon}(x) d_{ij}^\varepsilon(x) \longrightarrow \chi(y) d_{ij}(x, y) & \text{au sens deux échelles.} \end{cases}$$

D'après la proposition précédente et en passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on aboutit à

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y \chi(y) \left[c_{ijkl}(x, y) \left(s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right) + e_{kij}(x, y) \left(\partial_{k,x} \varphi + \partial_{k,y} \varphi_1 \right) \right] \left[s_{kl,x}(\mathbf{v}) + s_{kl,y}(\mathbf{v}^1) \right] dx dy \\ & - \int_{\Omega} \int_Y \chi(y) \left[-e_{ikl}(x, y) \left(s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right) + d_{ij}(x, y) \left(\partial_{j,x} \varphi + \partial_{j,y} \varphi_1 \right) \right] \left[\partial_{i,x} \psi + \partial_{i,y} \psi^1 \right] dx dy \\ & = \int_{\Omega} \int_Y f_i(x) \chi(y) v_i(x) dx dy, \end{aligned}$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{Y^*} \left[c_{ijkl}(x, y) \left(s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right) + e_{kij}(x, y) \left(\partial_{k,x} \varphi + \partial_{k,y} \varphi_1 \right) \right] \left[s_{kl,x}(\mathbf{v}^0) + s_{kl,y}(\mathbf{v}^1) \right] dx dy \\ & + \int_{\Omega} \int_{Y^*} \left[-e_{ikl}(x, y) \left(s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right) + d_{ij}(x, y) \left(\partial_{j,x} \varphi + \partial_{j,y} \varphi_1 \right) \right] \left[\partial_{i,x} \psi^0 + \partial_{i,y} \psi^1 \right] dx dy \\ & = \theta \int_{\Omega} f_i(x) v_i(x) dx, \end{aligned} \quad (2.5.26)$$

Par densité des fonctions de $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ (resp. $C_0^\infty(\Omega)$) dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ (resp. $H_0^1(\Omega)$), l'équation (2.5.26) reste vérifiée pour tout $\mathbf{v}^0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et $\psi^0 \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $\mathbf{v}^1 \in \mathbf{L}^2[\Omega; \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y^*)/\mathbb{R}]$ et $\psi^1 \in L^2[\Omega; H_{\text{per}}^1(Y^*)/\mathbb{R}]$.

Par une intégration par parties et en prenant successivement dans l'équation (2.5.26),

$$\begin{cases} \mathbf{v}^0 = \psi^0 = 0 \text{ et } \mathbf{v}^1 \neq 0, \psi^1 \neq 0, \\ \mathbf{v}^1 = \psi^1 = 0 \text{ et } \mathbf{v}^0 \neq 0, \psi^0 \neq 0, \end{cases}$$

on conclut que l'équation (2.5.26), est la formulation variationnelle associée au problème suivant :

$$\begin{cases} -\partial_j \left\{ \int_{Y^*} \left[c_{ijkl}(x, y) \left(s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right) + e_{kij}(x, y) \left(\partial_{k,x}\varphi + \partial_{k,y}\varphi_1 \right) \right] dy \right\} = \theta f_i(x), \\ -\partial_i \left\{ \int_{Y^*} \left[-e_{ikl}(x, y) \left(s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right) + d_{ij}(x, y) \left(\partial_{j,x}\Phi + \partial_{j,y}\varphi_1 \right) \right] dy \right\} = 0. \end{cases} \quad (2.5.27)$$

D'après la densité des fonctions tests qu'on a choisies, une intégration par parties montre que

$$\forall(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{L}^2[\Omega; \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y^*)/\mathbb{R}],$$

$$\forall(\psi^0, \psi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2[\Omega; H_{\text{per}}^1(Y^*)/\mathbb{R}],$$

l'équation (2.5.26) est la formulation variationnelle du problème suivant

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \int_{Y^*} \left[c_{ijkl}(x, y) \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right] + e_{kij}(x, y) \left[\partial_{k,x}\varphi + \partial_{k,y}\varphi_1 \right] \right] dy \right\} = \theta f_i(x) \text{ dans } \Omega, \\ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \int_{Y^*} \left[-e_{ikl}(x, y) \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right] + d_{ij}(x, y) \left[\partial_{j,x}\varphi + \partial_{j,y}\varphi_1 \right] \right] dy \right\} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ c_{ijkl}(x, y) \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right] + e_{kij}(x, y) \left[\partial_{k,x}\varphi + \partial_{k,y}\varphi_1 \right] \right\} = 0 \text{ dans } \Omega \times Y^*, \\ -\frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ -e_{ikl}(x, y) \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right] + d_{ij}(x, y) \left[\partial_{j,x}\varphi + \partial_{j,y}\varphi_1 \right] \right\} = 0 \text{ dans } \Omega \times Y^*, \end{cases} \quad (2.5.28)$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x) = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega, \\ \varphi(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \left\{ c_{ijkl}(x, y) \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right] + e_{kij}(x, y) \left[\partial_{k,x}\varphi + \partial_{k,y}\varphi_1 \right] \right\} \cdot n_j = 0 \text{ sur } \partial Y^* - \partial Y, \\ \left\{ -e_{ikl}(x, y) \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right] + d_{ij}(x, y) \left[\partial_{j,x}\varphi + \partial_{j,y}\varphi_1 \right] \right\} \cdot n_i = 0 \text{ sur } \partial Y^* - \partial Y. \end{cases} \quad (2.5.29)$$

et

$$\begin{cases} y \rightarrow \mathbf{u}_1(x, y) \text{ est } Y^* - \text{périodique en } y, \\ y \rightarrow \varphi_1(x, y) \text{ est } Y^* - \text{périodique en } y, \end{cases} \quad (2.5.30)$$

Afin d'établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.5.28)-(2.5.29)-(2.5.30), il suffit de vérifier les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram. Pour cela il est clair que sous les hypothèses (2.2.4), (2.2.5) et (2.2.6), la forme bilinéaire définie par le membre gauche de l'équation (2.5.26) est continue et coercive dans l'espace de Hilbert $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{L}^2[\Omega; \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y^*)/\mathbb{R}] \times H_0^1(\Omega) \times L^2[\Omega; H_{\text{per}}^1(Y^*)/\mathbb{R}]$ (voir Allaire [1]) muni de la norme suivante :

$$\| s_x(\mathbf{u})(x) + s_y(\mathbf{u})(x, y) \|_{L^2(\Omega \times Y^*)} + \| \nabla_x \varphi(x) + \nabla_y \varphi_1(x, y) \|_{L^2(\Omega \times Y^*)} .$$

Ce qui est de la coercivité, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{Y^*} \left[c_{ijkl}(x, y)(s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1)) + e_{kij}(x, y)(\partial_{k,x}\varphi + \partial_{k,y}\varphi_1) \right] \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right] dx dy \\ + & \int_{\Omega} \int_{Y^*} \left[-e_{ikl}(x, y)(s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1)) + d_{ij}(x, y)(\partial_{j,x}\varphi + \partial_{j,y}\varphi_1) \right] \left[\partial_{i,x}\varphi + \partial_{i,y}\varphi_1 \right] dx dy \\ = & \int_{\Omega} \int_{Y^*} c_{ijkl}(x, y) \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right] \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right] dx dy \\ + & \int_{\Omega} \int_{Y^*} d_{ij}(x, y) \left[(\partial_{j,x}\varphi + \partial_{j,y}\varphi_1) \right] \left[\partial_{i,x}\varphi + \partial_{i,y}\varphi_1 \right] dx dy \\ \geq & \alpha_c \int_{\Omega} \int_{Y^*} \left[s_{ij,x}(\mathbf{u}) + s_{ij,y}(\mathbf{u}_1) \right]^2 dx dy + \alpha_d \int_{\Omega} \int_{Y^*} \left[\partial_{i,x}\varphi + \partial_{i,y}\varphi_1 \right]^2 dx dy \\ \geq & \min(\alpha_c, \alpha_d) \left\{ \int_{\Omega} \int_{Y^*} \left[s_{ij,x}(\mathbf{u}) + s_{ij,y}(\mathbf{u}_1) \right]^2 dx dy + \int_{\Omega} \int_{Y^*} \left[\partial_{i,x}\varphi + \partial_{i,y}\varphi_1 \right]^2 dx dy \right\}. \end{aligned}$$

Donc, après cette démonstration, on peut énoncer le théorème principal de convergence suivant

Théorème 2.5.1 (*Théorème de convergence*)

Les quatres suites $(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon)_\varepsilon$, $(\tilde{s}(\mathbf{u}^\varepsilon))_\varepsilon$, $(\tilde{\varphi}^\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\tilde{\nabla} \varphi^\varepsilon)_\varepsilon$ convergent à deux échelles vers $\chi(y)\mathbf{u}(x)$, $\chi(y)[s_x(\mathbf{u}) + s_y(\mathbf{u}_1)]$, $\chi(y)\varphi(x)$ et $\chi(y)[\nabla_x \varphi + \nabla_y \varphi_1]$ respectivement, où $(\mathbf{u}(x), \mathbf{u}_1(x, y), \varphi(x), \varphi_1(x, y))$ sont l'unique solution dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{L}^2[\Omega; \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y^*)/\mathbb{R}] \times H_0^1(\Omega) \times L^2[\Omega; H_{\text{per}}^1(Y^*)/\mathbb{R}]$ du système homogénéisé à deux échelles sous une forme variationnelle suivante

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [c_{Y^*}(\mathbf{u}_1 + \Pi^{rs} s_{rs,x}(\mathbf{u}), \mathbf{v}^1 + \Pi^{rs} s_{rs,x}(\mathbf{v}^0)) \\ & + e_{Y^*}(\mathbf{v}^1 + \Pi^{rs} s_{rs,x}(\mathbf{v}^0), \varphi_1 + \Pi^k \partial_{k,x}\varphi)] dx = \theta \int_{\Omega} f_i v_i^0 dx, \end{aligned} \quad (2.5.31)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [-e_{Y^*}(\mathbf{u}_1 + \Pi^{rs} s_{rs,x}(\mathbf{u}), \psi^1 + \Pi^k \partial_{k,x}\psi^0) \\ & + d_{Y^*}(\varphi_1 + \Pi^k \partial_{k,x}\varphi, \psi^1 + \Pi^k \partial_{k,x}\psi^0)] dx = 0, \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

pour chaque $\mathbf{v}^0 \in H_0^1(\Omega)^N$, $\psi^0 \in H_0^1(\Omega)$ et $\mathbf{v}^1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y^*)^N)$ et $\psi^1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y^*))$, avec les formes bilinéaires $c_{Y^*}(\cdot, \cdot)$, $e_{Y^*}(\cdot, \cdot)$ et $d_{Y^*}(\cdot, \cdot)$ sont définies par

$$\begin{cases} c_{Y^*}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{Y^*} c_{ijkl} s_{kl,y}(\mathbf{u}) s_{ij,y}(\mathbf{v}) dy, \\ e_{Y^*}(\mathbf{u}, \psi) &= \int_{Y^*} e_{kij} s_{ij,y}(\mathbf{u}) \partial_{k,y}\psi dy, \\ d_{Y^*}(\varphi, \psi) &= \int_{Y^*} d_{kl} \partial_{l,y}\varphi \partial_{k,y}\psi dy. \end{cases} \quad (2.5.33)$$

avec θ est la fraction volumique du matériau (i.e. $\theta = \langle \chi \rangle = \int_{Y^*} \chi(y) dy = |Y^*|^{-1}$), où $|Y^*|$ désigne la mesure de Y^* , et

$$\begin{cases} \Pi_i^{rs} = y_s \delta_{ir} \\ \Pi^k = y_k \end{cases}$$

Remarque 2.5.1

Le problème homogénéisé à deux échelles (2.5.31)-(2.5.32)-(2.5.33) est un système de quatre inconnues (\mathbf{u} , \mathbf{u}_1 , φ , φ_1), avec deux variables d'espace x et y (i.e. les deux échelles macroscopique et microscopique) mixtes.

Pour cela dans le paragraphe suivant, on va proposer de découpler le système (2.5.31)-(2.5.32)-(2.5.33) sous forme de deux problèmes : **un problème homogénéisé et des problèmes locaux**, qui nous permet par la suite d'exprimer ce théorème de convergence sous sa forme alternative. ■

2.6 Calcul des tenseurs effectifs homogénéisés

La linéarité du problème étudié, nous permet de poser

$$\mathbf{u}_1(x, y) = s_{mh,x}(\mathbf{u}(x)) \mathbf{w}^{mh}(y) + \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_n} \mathbf{q}^n(y), \quad (2.6.34)$$

$$\varphi_1(x, y) = s_{mh,x}(\mathbf{u}(x)) \varphi^{mh}(y) + \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_n} \psi^n(y), \quad (2.6.35)$$

où les fonctions \mathbf{w}^{mh} , \mathbf{q}^n , φ^{mh} et ψ^n sont des fonctions Y^* -périodiques en y et indépendantes de x . Elles sont définies comme les solutions des problèmes locaux (cellulaires) suivants :

- Les fonctions locales (auxiliaires) \mathbf{w}^{mh} et φ^{mh} définies sur Y^* , sont les solutions de ces deux équations

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ c_{ijkl}(x, y) \left[\tau_{mh}^{kl} + s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh}) \right] + e_{kij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} \right\} = 0 \text{ dans } Y^*, \\ -\frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ -e_{ikl}(x, y) \left[\tau_{mh}^{kl} + s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh}) \right] + d_{ij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_j} \right\} = 0 \text{ dans } Y^*, \\ \mathbf{w}^{mh}, \varphi^{mh} \quad Y^* \text{ - périodiques,} \end{cases} \quad (2.6.36)$$

avec

$$\tau_{mh}^{kl} = \frac{1}{2} \left[\delta_{km} \delta_{lh} + \delta_{kh} \delta_{lm} \right] \quad 1 \leq k, l, m, h \leq 3,$$

est le tenseur unitaire d'ordre quatre et δ_{ij} représente le symbole de Kronecker.

- Les fonctions locales (auxiliaires) \mathbf{q}^n et ψ^n définies sur Y^* , sont les solutions de ces deux équations

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ c_{ijkl}(x, y) s_{kl, y}(\mathbf{q}^n) + e_{kij}(x, y) \left[\delta_{kn} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y_k} \right] \right\} = 0 & \text{dans } Y^*, \\ -\frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ -e_{ikl}(x, y) s_{kl, y}(\mathbf{q}^n) + d_{ij}(x, y) \left[\delta_{jn} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y_j} \right] \right\} = 0 & \text{dans } Y^*, \\ \varphi^n, \psi^n & Y^* - \text{périodiques.} \end{cases} \quad (2.6.37)$$

Il convient avant de continuer, de noter le lemme suivant :

Lemme 2.6.1 *Sous les hypothèses $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)$ et $\mathbf{g} \in H^{-1}(\Omega)$, et sous les mêmes hypothèses de bornitudes et d'ellipticités sur les tenseurs, le problème suivant*

$$\begin{cases} -\mathbf{div} \sigma(\mathbf{u}, \varphi) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ -\mathbf{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi) = \mathbf{g} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \sigma(\mathbf{u}, \varphi) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution unique dans l'espace $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$

Proposition 2.6.1

- Le problème (2.6.36), admet une solution $(\mathbf{w}^{mh}, \varphi^{mh})$ dans $\mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y^*) \times H_{\text{per}}^1(Y^*)$ à un couple (vecteur, scalaire) constant additif près.
- Le problème (2.6.37), admet une solution (\mathbf{q}^n, ψ^n) dans $\mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y^*) \times H_{\text{per}}^1(Y^*)$ à un couple (vecteur, scalaire) constant additif près. ■

Avant de démontrer cette proposition, on va d'abord énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 2.6.1

Le problème (2.6.36) (resp. le problème (2.6.37)), admet une unique solution $(\mathbf{w}^{mh}, \varphi^{mh})$ (resp. (\mathbf{q}^n, ψ^n) dans $\tilde{\mathbf{H}}_{\text{per}}^1(Y^*) \times \tilde{H}_{\text{per}}^1(Y^*)$ où naturellement

$$\tilde{H}_{\text{per}}^1(Y^*) = \left\{ v \in H^1(Y^*), v \text{ est } Y^* - \text{périodique, } \int_{Y^*} v \, dy = 0 \right\},$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\text{per}}^1(Y^*) = \left\{ \mathbf{v} = (v_i)_{1 \leq i \leq 3} \in \mathbf{H}^1(Y^*) = [H^1(Y^*)]^3, \mathbf{v} \text{ est } Y^* - \text{périodique, } \int_{Y^*} \mathbf{v} \, dy = 0 \right\}. \blacksquare$$

Preuve :

En écrivant le problème (2.6.36), sous la forme

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ c_{ijkl}(x, y) s_{kl, y}(\mathbf{w}^{mh}) + e_{kij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} \right\} = \frac{\partial}{\partial y_j} (c_{ijmh}(x, y)), \\ -\frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ -e_{ikl}(x, y) s_{kl, y}(\mathbf{w}^{mh}) + d_{ij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_j} \right\} = \frac{\partial}{\partial y_i} (-e_{imh}(x, y)). \end{cases} \quad (2.6.38)$$

De même, le problème (2.6.37), s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + e_{kij}(x, y) \frac{\partial \psi^n}{\partial y_k} \right\} &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left(e_{nij}(x, y) \right), \\ -\frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ -e_{ikl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + d_{ij}(x, y) \frac{\partial \psi^n}{\partial y_j} \right\} &= \frac{\partial}{\partial y_i} \left(d_{in}(x, y) \right). \end{cases} \quad (2.6.39)$$

Donc ces deux derniers problèmes, sont deux problèmes de piézoélectricité non isolants puisqu'il existe un terme de charges électriques non nulles. On peut écrire les deux formulations variationnelles associées aux problèmes (2.6.36) et (2.6.37) respectivement sous la forme suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{w}^{mh}, \varphi^{mh}) \in \tilde{\mathbf{H}}_{\text{per}}^1(Y^*) \times \tilde{H}_{\text{per}}^1(Y^*), \text{ tels que} \\ c_{Y^*}(\mathbf{w}^{mh} + \Pi^{mh}, \mathbf{v}) + g_{Y^*}(\mathbf{v}, \varphi^{mh}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_{\text{per}}^1(Y^*), \\ -g_{Y^*}(\mathbf{w}^{mh} + \Pi^{mh}, \eta) + d_{Y^*}(\varphi^{mh}, \eta) = 0, \quad \forall \eta \in \tilde{H}_{\text{per}}^1(Y^*), \end{cases} \quad (2.6.40)$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{q}^n, \psi^n) \in \tilde{\mathbf{H}}_{\text{per}}^1(Y^*) \times \tilde{H}_{\text{per}}^1(Y^*), \text{ tels que} \\ c_{Y^*}(\mathbf{q}^n, \mathbf{v}) + g_{Y^*}(\mathbf{v}, \psi^n + \Pi^n) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_{\text{per}}^1(Y^*); \\ -g_{Y^*}(\mathbf{q}^n, \eta) + d_{Y^*}(\psi^n + \Pi^n, \eta) = 0, \quad \forall \eta \in \tilde{H}_{\text{per}}^1(Y^*). \end{cases} \quad (2.6.41)$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram sur les deux problèmes (2.6.40) et (2.6.41), sous les hypothèses de régularités (2.2.4), (2.2.5) et (2.2.6) sur les tenseurs élastique, piézoélectrique et diélectrique respectivement, on déduit que chacun des deux problèmes (2.6.36) et (2.6.37) admet une solution unique. ■

En remplaçant les expressions (2.6.34) et (2.6.35) dans cette équation

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ c_{ijkl}(x, y) \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right] + e_{kij}(x, y) \left[\partial_{kx} \varphi + \partial_{ky} \varphi_1 \right] \right\} = 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial s_{mh,x}(\mathbf{u})}{\partial y_j} \left\{ c_{ijkl}(x, y) \left[\tau_{mh}^{kl} + s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh}) \right] + e_{kij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} \right\} \\ & + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \left\{ c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + e_{kij}(x, y) \left[\delta_{kn} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y_k} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.6.42)$$

De même, en remplaçant ainsi, les expressions (2.6.34) et (2.6.35) dans l'équation suivante :

$$-\frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ -e_{ikl}(x, y) \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right] + d_{ij}(x, y) \left[\partial_{jx} \varphi + \partial_{jy} \varphi_1 \right] \right\} = 0,$$

on obtient,

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial s_{mh,x}(\mathbf{u})}{\partial y_i} \left\{ -e_{ikl}(x, y) \left[\tau_{mh}^{kl} + s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh}) \right] + d_{ij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_j} \right\} \\ & + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \left\{ -e_{ikl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + d_{ij}(x, y) \left[\delta_{jn} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y_j} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.6.43)$$

Après des calculs élémentaires, on peut définir les nouveaux coefficients des tenseurs homogénéisés (effectifs) comme suit

$$\begin{aligned} c_{ijmh}^H &= \left\langle c_{ijkl}(x, y) \left[\tau_{mh}^{kl} + s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh}) \right] + e_{kij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} \right\rangle, \\ &= \left\langle c_{ijmh}(x, y) + c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh}) + e_{kij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.6.44)$$

$$\begin{aligned} e_{nij}^H &= \left\langle c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + e_{kij}(x, y) \left[\delta_{kn} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y_k} \right] \right\rangle, \\ &= \left\langle c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + e_{nij}(x, y) + e_{kij}(x, y) \frac{\partial \psi^n}{\partial y_k} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.6.45)$$

$$\begin{aligned} f_{imh}^H &= \left\langle e_{ikl}(x, y) \left[\tau_{mh}^{kl} + s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh}) \right] - d_{ij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_j} \right\rangle, \\ &= \left\langle e_{imh}(x, y) + e_{ikl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh}) - d_{ij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_j} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.6.46)$$

$$\begin{aligned} d_{in}^H &= \left\langle -e_{ikl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + d_{ij}(x, y) \left[\delta_{jn} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y_j} \right] \right\rangle, \\ &= \left\langle d_{in}(x, y) + d_{ij}(x, y) \frac{\partial \psi^n}{\partial y_j} - e_{ikl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.6.47)$$

où $\langle h \rangle = \int_{Y^*} h(y) dy$ la moyenne sur Y^* de h .

Remarque 2.6.1

Chacune des fonctions \mathbf{w}^{mh} et \mathbf{q}^n (resp. φ^{mh} et ψ^n) ne sont définies qu'à un vecteur additif (resp. une constante additive) près, mais ces vecteurs (resp. constantes) n'interviennent pas dans le calcul des coefficients effectifs homogénéisés. ■

2.7 Les propriétés du problème homogénéisé

Enonçons maintenant quelques propositions concernant certaines propriétés des coefficients homogénéisés c_{ijkl}^H , d_{ij}^H , e_{ijk}^H et f_{nij}^H .

2.7.1 Les propriétés du tenseur de rigidité homogénéisé

Nous allons à présent donner un résultat concernant l'ellipticité et la symétrie du tenseur de rigidité homogénéisé.

Proposition 2.7.1

Les coefficients c_{ijkl}^H du tenseur de rigidité homogénéisé $\mathcal{C}^H = (c_{ijkl}^H)$ défini par (2.6.44), vérifient

$$(i) \quad c_{ijkl}^H = c_{klij}^H = c_{ijlk}^H = c_{jilk}^H \quad \forall 1 \leq i, j, k, l \leq 3,$$

(ii) c_{ijkl}^H est elliptique.

La deuxième assertion signifie qu'il existe $\alpha_c^H > 0$, tel que pour tout tenseur d'ordre 2 X_{ij} symétrique ($X_{ij} = X_{ji}$), on a

$$c_{ijkl}^H X_{ij} X_{kl} \geq \alpha_c^H X_{ij} X_{ij}. \quad \blacksquare$$

Preuve :

(i) **Symétrie**

Il est évident qu'une partie de la symétrie est vérifiée, c'est

$$c_{ijmh}^H = c_{jimh}^H = c_{jihm}^H.$$

Intéressons-nous à la démonstration de

$$c_{ijmh}^H = c_{mhij}^H.$$

L'idée est de transformer l'expression de c_{ijmh}^H de manière à obtenir une formule symétrique. Si on définit un tenseur Σ d'ordre 2, par $\Sigma^{kl} = \frac{1}{2}(y_k \vec{e}_l + y_l \vec{e}_k)$, ainsi qu'une matrice H^{kl} de dimension 3×3 par : $H^{kl} = s_y(\Sigma^{kl})$, il est clair que les coefficients de cette matrice sont donnés par

$$[H^{kl}]_{mh} = \tau_{mh}^{kl} = \frac{1}{2} [\delta_{km} \delta_{lh} + \delta_{kh} \delta_{lm}] \quad 1 \leq k, l, m, h \leq 3.$$

A partir de ces nouvelles notations on peut réécrire le problème (2.6.36), sous la forme suivante

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y} (\Sigma^{mh} + \mathbf{w}^{mh}) + e_{kij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} \right\} & = 0 \text{ dans } Y^*, \\ -\frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ -e_{ikl}(x, y) s_{kl,y} (\Sigma^{mh} + \mathbf{w}^{mh}) + d_{ij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_j} \right\} & = 0 \text{ dans } Y^*, \\ \mathbf{w}^{mh}, \varphi^{mh} & Y^* - \text{périodiques.} \end{cases} \quad (2.7.48)$$

Soit $(\mathbf{w}^{ij}, \varphi^{ij})$ solution de

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ c_{kj\alpha\beta}(x, y) s_{\alpha\beta,y} (\Sigma^{ij} + \mathbf{w}^{ij}) + e_{\alpha kj}(x, y) \frac{\partial \varphi^{ij}}{\partial y_\alpha} \right\} & = 0 \text{ dans } Y^*, \\ -\frac{\partial}{\partial y_k} \left\{ -e_{k\alpha\beta}(x, y) s_{\alpha\beta,y} (\Sigma^{ij} + \mathbf{w}^{ij}) + d_{kj}(x, y) \frac{\partial \varphi^{ij}}{\partial y_j} \right\} & = 0 \text{ dans } Y^*, \\ \mathbf{w}^{ij}, \varphi^{ij} & Y^* - \text{périodiques.} \end{cases} \quad (2.7.49)$$

Les coefficients du tenseur de rigidité se réécrivent de la manière suivante

$$c_{ijmh}^H = \int_{Y^*} c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y} (\Sigma^{mh} + \mathbf{w}^{mh}) dy + \int_{Y^*} e_{kij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} dy. \quad (2.7.50)$$

La deuxième intégrale dans le membre de droite de l'expression (2.7.50), est évaluée de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\int_{Y^*} e_{kij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} dy &= \int_{Y^*} e_{k\alpha\beta}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} dy, \\
&= \frac{1}{2} \int_{Y^*} e_{k\alpha\beta}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} (\delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} + \delta_{\alpha j} \delta_{\beta i}) dy, \\
&= - \int_{Y^*} e_{k\alpha\beta}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} s_{\alpha\beta, y}(\mathbf{w}^{ij}) dy \\
&+ \int_{Y^*} e_{k\alpha\beta}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} s_{\alpha\beta, y}(\Sigma^{ij} + \mathbf{w}^{ij}) dy. \tag{2.7.51}
\end{aligned}$$

En utilisant la formulation variationnelle de la première équation du problème (2.7.48), avec un choix de fonction test $\mathbf{v} = \mathbf{w}^{ij}$, on obtient

$$\int_{Y^*} e_{k\alpha\beta}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} s_{\alpha\beta, y}(\mathbf{w}^{ij}) dy = \int_{Y^*} c_{\alpha\beta kl}(x, y) s_{kl, y}(\Sigma^{mh} + \mathbf{w}^{mh}) s_{\alpha\beta, y}(\mathbf{w}^{ij}) dy. \tag{2.7.52}$$

En multipliant la deuxième équation du problème (2.7.49), par φ^{mh} et en intégrant par parties, on aboutit à

$$\int_{Y^*} e_{k\alpha\beta}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} s_{\alpha\beta, y}(\Sigma^{ij} + \mathbf{w}^{ij}) dy = \int_{Y^*} d_{k\alpha}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} \frac{\partial \varphi^{ij}}{\partial y_\alpha} dy. \tag{2.7.53}$$

En regroupant ces résultats et en utilisant la définition 2.7.50, on aboutit à

$$\begin{aligned}
c_{ijmh}^H &= \int_{Y^*} c_{ijkl}(x, y) s_{kl, y}(\Sigma^{mh} + \mathbf{w}^{mh}) dy + \int_{Y^*} e_{kij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} dy, \\
&= \int_{Y^*} c_{ijkl}(x, y) s_{kl, y}(\Sigma^{mh} + \mathbf{w}^{mh}) dy + \int_{Y^*} c_{\alpha\beta kl}(x, y) s_{kl, y}(\Sigma^{mh} + \mathbf{w}^{mh}) s_{\alpha\beta, y}(\mathbf{w}^{ij}) dy \\
&+ \int_{Y^*} d_{k\alpha}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} \frac{\partial \varphi^{ij}}{\partial y_\alpha} dy, \\
&= \int_{Y^*} c_{\alpha\beta kl}(x, y) s_{kl, y}(\Sigma^{mh} + \mathbf{w}^{mh}) s_{\alpha\beta, y}(\Sigma^{ij}) dy + \int_{Y^*} d_{k\alpha}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} \frac{\partial \varphi^{ij}}{\partial y_\alpha} dy \\
&+ \int_{Y^*} c_{\alpha\beta kl}(x, y) s_{kl, y}(\Sigma^{mh} + \mathbf{w}^{mh}) s_{\alpha\beta, y}(\mathbf{w}^{ij}) dy, \\
&= \int_{Y^*} c_{\alpha\beta kl}(x, y) s_{kl, y}(\Sigma^{mh} + \mathbf{w}^{mh}) s_{\alpha\beta, y}(\Sigma^{ij} + \mathbf{w}^{ij}) dy \\
&+ \int_{Y^*} d_{k\alpha}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} \frac{\partial \varphi^{ij}}{\partial y_\alpha} dy. \tag{2.7.54}
\end{aligned}$$

Il est alors immédiat par la formule (2.7.54), que les coefficients du tenseur de rigidité vérifient

$$c_{ijmh}^H = c_{mhij}^H.$$

Ceci achève la démonstration de la première partie de la proposition sur la symétrie. Dans le paragraphe suivant, on s'intéresse à montrer l'ellipticité du tenseur d'élasticité homogénéisé.

(ii) **Ellipticité**

Nous allons étudier l'ellipticité, pour cela rappelons que $\mathcal{C}^H = (c_{ijkl}^H)$ est elliptique, s'il existe $\alpha_c^H > 0$ pour tout tenseur d'ordre 2 X_{ij} symétrique ($X_{ij} = X_{ji}$), tel que

$$\exists \alpha_c^H > 0, \quad c_{ijkl}^H X_{ij} X_{kl} \geq \alpha_c^H X_{ij} X_{ij}.$$

En considérant l'expression (2.6.44) du tenseur c_{ijmh}^H , il en suit :

$$\begin{aligned} c_{ijmh}^H X_{ij} X_{mh} &= \int_{Y^*} c_{ijmh}(x, y) X_{ij} X_{mh} dy + \int_{Y^*} c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh}) X_{ij} X_{mh} dy \\ &+ \int_{Y^*} e_{kij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} X_{ij} X_{mh} dy, \\ &= \int_{Y^*} c_{ijmh}(x, y) X_{ij} X_{mh} dy + \int_{Y^*} c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh} X_{mh}) X_{ij} dy \\ &+ \int_{Y^*} e_{kij}(x, y) \frac{\partial (\varphi^{mh} X_{mh})}{\partial y_k} X_{ij} dy, \\ &= \int_{Y^*} c_{ijkl}(x, y) (s_{kl,y}(\mathbf{w}) + P_{kl}) P_{ij} dy + \int_{Y^*} e_{kij}(x, y) \frac{\partial \zeta}{\partial y_k} P_{ij} dy, \end{aligned}$$

avec $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{mh} X_{mh}$, $\zeta = \varphi^{mh} X_{mh}$ et $P_{ij} = \tau_{mh}^{ij} X_{mh} = X_{ij}$, où (\mathbf{w}, ζ) est un point selle de la fonctionnelle suivante

$$(\mathbf{v}, \Psi) \longrightarrow J(\mathbf{v}, \Psi)$$

$$J(\mathbf{v}, \Psi) = \frac{1}{2} \int_{Y^*} \left\{ c_{ijkl} (s_{ij,y}(\mathbf{v}) + P_{ij}) (s_{kl,y}(\mathbf{v}) + P_{kl}) + 2e_{kij} \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} (s_{ij,y}(\mathbf{v}) + P_{ij}) - d_{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \frac{\partial \Psi}{\partial y_j} \right\} dy,$$

et par la linéarité du problème (2.7.48), on peut écrire le problème variationnel associé sous la forme

$$\begin{cases} \int_{Y^*} \left\{ c_{ijkl} (s_{kl,y}(\mathbf{w}) + P_{kl}) s_{ij,y}(\mathbf{v}) + e_{kij}(x, y) \partial_k \zeta \right\} dy = 0, \\ \int_{Y^*} \left\{ -e_{ikl} (s_{kl,y}(\mathbf{w}) + P_{kl}) \partial_i \Psi + d_{ij}(x, y) \partial_i \zeta \partial_j \Psi \right\} dy = 0. \end{cases} \quad (2.7.55)$$

En remplaçant maintenant dans le problème (2.7.55), (\mathbf{v}, Ψ) par (\mathbf{w}, ζ) , on peut déduire que

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}, \zeta) &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{Y^*} c_{ijkl}(x, y) (s_{kl,y}(\mathbf{w}) + P_{kl}) P_{ij} dy + \int_{Y^*} e_{kij}(x, y) \frac{\partial \zeta}{\partial y_k} P_{ij} dy \right\}, \\ &= \frac{1}{2} c_{ijmh}^H X_{ij} X_{mh}. \end{aligned}$$

Donc, par définition du point selle on a

$$J(\mathbf{w}, \Psi) \leq J(\mathbf{w}, \zeta) \leq J(\mathbf{v}, \zeta) \quad \forall (\mathbf{v}, \Psi) \text{ fonctions périodiques,}$$

or

$$J(\mathbf{w}, 0) = \frac{1}{2} \int_{Y^*} c_{ijkl}(x, y) (s_{ij,y}(\mathbf{w}) + P_{ij}) (s_{kl,y}(\mathbf{w}) + P_{kl}) dy.$$

Par la coercivité des coefficients du tenseur d'élasticité c_{ijkl} , on obtient

$$\begin{aligned} c_{ijmh}^H X_{ij} X_{mh} &= 2J(\mathbf{w}, \zeta), \\ &\geq J(\mathbf{w}, 0), \\ &= \frac{1}{2} \int_{Y^*} c_{ijkl}(x, y) \left(s_{ij,y}(\mathbf{w}) + P_{ij} \right) \left(s_{kl,y}(\mathbf{w}) + P_{kl} \right) dy, \\ &> 0, \end{aligned}$$

alors le tenseur d'élasticité homogénéisé $\mathcal{C}^H = (c_{ijkl}^H)$, est défini positif. ■

2.7.2 Les propriétés du tenseur de diélectricité homogénéisé

Nous allons à présent montrer une proposition concernant certaines propriétés d'ellipticité et de symétrie des coefficients du tenseur de diélectricité homogénéisé $\mathcal{D}^H = (d_{in}^H)$.

Proposition 2.7.2

Les coefficients d_{in}^H du tenseur de diélectricité homogénéisé $\mathcal{D}^H = (d_{in}^H)$, défini par (2.6.47), vérifient :

(i) $d_{in}^H = d_{ni}^H, \quad \forall 1 \leq i, n \leq 3,$

(ii) d_{in}^H est elliptique.

La dernière assertion signifie, qu'il existe $\alpha_d^H > 0$, tel que, pour tout vecteur X_i , on a

$$d_{in}^H X_i X_n \geq \alpha_d^H X_i X_i. \quad \blacksquare$$

Preuve :

(i) **Symétrie**

Nous allons à présent exprimer ces coefficients sous une autre forme afin d'établir la propriété de symétrie, autrement dit, montrer que

$$d_{in}^H = d_{ni}^H.$$

Le problème (2.6.37), s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + e_{kij}(x, y) \frac{\partial(y_n + \psi^n)}{\partial y_k} \right\} = 0 \text{ dans } Y^*, \\ -\frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ -e_{ikl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + d_{ij}(x, y) \frac{\partial(y_n + \psi^n)}{\partial y_j} \right\} = 0 \text{ dans } Y^*, \\ \mathbf{q}^n, \psi^n \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ Y^* - \text{périodiques.} \end{array} \quad (2.7.56)$$

Considérons (\mathbf{q}^i, ψ^i) , solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^i) + e_{kij}(x, y) \frac{\partial(y_i + \psi^i)}{\partial y_k} \right\} = 0 \text{ dans } Y^*, \\ -\frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ -e_{ikl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^i) + d_{ij}(x, y) \frac{\partial(y_i + \psi^i)}{\partial y_j} \right\} = 0 \text{ dans } Y^*, \\ \mathbf{q}^i, \psi^i \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ Y^* - \text{périodiques.} \end{array} \quad (2.7.57)$$

En écrivant les coefficients du tenseur diélectrique, de la façon suivante :

$$d_{in}^H = \int_{Y^*} -e_{ikl}(x, y) s_{kl, y}(\mathbf{q}^n) dy + \int_{Y^*} d_{ij}(x, y) \frac{\partial(y_n + \psi^n)}{\partial y_j} dy. \quad (2.7.58)$$

La première intégrale dans le membre de droite de l'expression précédente, est évaluée de la manière suivante

$$\begin{aligned} \int_{Y^*} -e_{ikl}(x, y) s_{kl, y}(\mathbf{q}^n) dy &= \int_{Y^*} -e_{\alpha kl}(x, y) s_{kl, y}(\mathbf{q}^n) \delta_{\alpha i} dy, \\ &= \int_{Y^*} -e_{\alpha kl}(x, y) s_{kl, y}(\mathbf{q}^n) \frac{\partial y_i}{\partial y_\alpha} dy, \\ &= \int_{Y^*} -e_{\alpha kl}(x, y) s_{kl, y}(\mathbf{q}^n) \frac{\partial \psi^i}{\partial y_\alpha} dy \\ &\quad - \int_{Y^*} -e_{\alpha kl}(x, y) s_{kl, y}(\mathbf{q}^n) \frac{\partial(y_i + \psi^i)}{\partial y_\alpha} dy. \end{aligned} \quad (2.7.59)$$

En utilisant la formulation variationnelle de la deuxième équation du problème (2.7.56), avec un choix de fonction test $\Phi = \psi^i$, on obtient

$$\int_{Y^*} -e_{\alpha kl}(x, y) s_{kl, y}(\mathbf{q}^n) \frac{\partial \psi^i}{\partial y_\alpha} dy = \int_{Y^*} d_{\alpha j}(x, y) \frac{\partial(y_n + \psi^n)}{\partial y_j} \frac{\partial \psi^i}{\partial y_\alpha} dy.$$

En regardant d'abord la deuxième intégrale de (2.7.59). En multipliant la première équation du système (2.7.57) par ψ^n et en intégrant par parties, on aboutit à

$$\int_{Y^*} -e_{\alpha kl}(x, y) s_{kl, y}(\mathbf{q}^n) \frac{\partial(y_i + \psi^i)}{\partial y_\alpha} dy = - \int_{Y^*} c_{kl\alpha\beta}(x, y) s_{\alpha\beta, y}(\mathbf{q}^i) s_{kl, y}(\varphi^n) dy.$$

Finalement, on regroupe ces derniers résultats et en utilisant la définition 2.7.58, on arrive à

$$\begin{aligned} d_{in}^H &= \int_{Y^*} -e_{ikl}(x, y) s_{kl, y}(\mathbf{q}^n) dy + \int_{Y^*} d_{ij}(x, y) \frac{\partial(y_n + \psi^n)}{\partial y_j} dy, \\ &= \int_{Y^*} d_{\alpha j}(x, y) \frac{\partial(y_n + \psi^n)}{\partial y_j} \frac{\partial \psi^i}{\partial y_\alpha} dy - \int_{Y^*} c_{kl\alpha\beta}(x, y) s_{\alpha\beta, y}(\mathbf{q}^i) s_{kl, y}(\mathbf{q}^n) dy \\ &\quad + \int_{Y^*} d_{ij}(x, y) \frac{\partial(y_n + \psi^n)}{\partial y_j} dy, \\ &= \int_{Y^*} d_{\alpha j}(x, y) \frac{\partial(y_n + \psi^n)}{\partial y_j} \frac{\partial \psi^i}{\partial y_\alpha} dy - \int_{Y^*} c_{kl\alpha\beta}(x, y) s_{\alpha\beta, y}(\mathbf{q}^i) s_{kl, y}(\mathbf{q}^n) dy \\ &\quad + \int_{Y^*} d_{\alpha j}(x, y) \frac{\partial(y_n + \psi^n)}{\partial y_j} \frac{\partial y_i}{\partial y_\alpha} dy, \\ &= \int_{Y^*} d_{\alpha j}(x, y) \frac{\partial(y_n + \psi^n)}{\partial y_j} \frac{\partial(y_i + \psi^i)}{\partial y_\alpha} dy - \int_{Y^*} c_{kl\alpha\beta}(x, y) s_{\alpha\beta, y}(\mathbf{q}^i) s_{kl, y}(\mathbf{q}^n) dy. \end{aligned} \quad (2.7.60)$$

Nous avons par la formule (2.7.60) immédiatement, que les coefficients du tenseur de diélectricité homogénéisé $\mathcal{D}^H = (d_{in}^H)$ sont symétriques.

(ii) **Ellipticité**

Nous nous intéressons dans ce paragraphe, à l'ellipticité, pour cela, rappelons que $\mathcal{D}^H = (d_{in}^H)$ est elliptique, si pour tout vecteur X_i , on a

$$\exists \alpha_d^H > 0, \quad d_{in}^H X_i X_n \geq \alpha_d^H X_i X_i.$$

En considérant l'expression (2.6.47) du tenseur $\mathcal{D}^H = (d_{in}^H)$, il résulte que

$$\begin{aligned} d_{in}^H X_i X_n &= \int_{Y^*} d_{in}(x, y) X_i X_n dy - \int_{Y^*} e_{ikl}(x, y) s_{kl, y}(\mathbf{q}^n) X_i X_n dy \\ &+ \int_{Y^*} d_{ij}(x, y) \frac{\partial \psi^n}{\partial y_j} X_i X_n dy, \\ &= \int_{Y^*} d_{in}(x, y) X_i X_n dy - \int_{Y^*} e_{ikl}(x, y) s_{kl, y}(\mathbf{q}^n X_n) X_i dy \\ &+ \int_{Y^*} d_{ij}(x, y) \frac{\partial (\psi^n X_n)}{\partial y_j} X_i dy, \\ &= \int_{Y^*} d_{ij}(x, y) \left(Q_j + \frac{\partial \xi}{\partial y_j} \right) Q_i dy - \int_{Y^*} e_{ikl}(x, y) s_{kl, y}(\varsigma) Q_i dy, \end{aligned}$$

avec $\xi = \psi^n X_n$, $\varsigma = \varphi^n X_n$ et $Q_i = \delta_{in} X_n = X_i$, de même rappelons que (ξ, ς) est un point selle de la fonctionnelle suivante :

$$(\mathbf{v}, \Psi) \longrightarrow G(\mathbf{v}, \Psi)$$

$$G(\mathbf{v}, \Psi) = \frac{1}{2} \int_{Y^*} \left\{ c_{ijkl} s_{ij, y}(\mathbf{v}) s_{kl, y}(\mathbf{v}) + 2e_{kij} s_{ij, y}(\mathbf{v}) \left(Q_k + \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} \right) - d_{ij} \left(Q_i + \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \right) \left(Q_j + \frac{\partial \Psi}{\partial y_j} \right) \right\} dy.$$

Donc, par définition du point selle on a

$$G(\xi, \Psi) \leq G(\xi, \varsigma) \leq G(\mathbf{v}, \varsigma) \quad \forall (\mathbf{v}, \Psi) \text{ fonctions périodiques,}$$

or

$$G(0, \varsigma) = -\frac{1}{2} \int_{Y^*} d_{ij}(x, y) \left(Q_i + \frac{\partial \varsigma}{\partial y_i} \right) \left(Q_j + \frac{\partial \varsigma}{\partial y_j} \right) dy.$$

Mais, si on utilise la deuxième équation du système (2.6.39), on obtient

$$\begin{aligned} G(0, \varsigma) &= -\frac{1}{2} \int_{Y^*} d_{ij}(x, y) \left(Q_j + \frac{\partial \varsigma}{\partial y_j} \right) Q_i dy - \frac{1}{2} \int_{Y^*} d_{ij}(x, y) \left(Q_j + \frac{\partial \varsigma}{\partial y_j} \right) \frac{\partial \varsigma}{\partial y_i} dy, \\ &= -\frac{1}{2} \int_{Y^*} d_{ij}(x, y) \left(Q_j + \frac{\partial \varsigma}{\partial y_j} \right) Q_i dy + \frac{1}{2} \int_{Y^*} e_{ikl}(x, y) s_{kl, y}(\varsigma) X_i dy, \\ &= -\frac{1}{2} d_{in}^H X_i X_n, \\ &< 0. \end{aligned}$$

Donc le tenseur de diélectricité homogénéisé $\mathcal{D}^H = (d_{in}^H)$ est défini positif. ■

2.7.3 Les propriétés du tenseur de piézoélectricité homogénéisé

Nous allons montrer l'identité entre les coefficients des deux tenseurs e_{nij}^H et f_{nij}^H , ainsi qu'une propriété de symétrie pour le tenseur de piézoélectricité (de couplage) homogénéisé. Pour cela on énonce la proposition suivante :

Proposition 2.7.3

Les coefficients e_{nij}^H du tenseur de piézoélectricité homogénéisé $\mathcal{E}^H = (e_{nij}^H)$, défini par (2.6.45), vérifient :

$$e_{nij}^H = e_{nji}^H.$$

De plus, on a l'identité suivante

$$e_{nij}^H = f_{nij}^H.$$

Preuve :

Pour la symétrie, on a par définition des coefficients e_{nij}^H (en utilisant notamment le fait que $c_{ijkl}(x, y) = c_{jikl}(x, y)$ et $e_{kji}(x, y) = e_{kij}(x, y)$)

$$\begin{aligned} e_{nij}^H &= \int_{Y^*} \left\{ c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + e_{kij}(x, y) \left(\delta_{kn} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y_k} \right) \right\} dy, \\ &= \int_{Y^*} \left\{ c_{jikl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + e_{kji}(x, y) \left(\delta_{kn} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y_k} \right) \right\} dy, \\ &= e_{nji}^H. \end{aligned} \quad (2.7.61)$$

Il est alors immédiat qu'on obtienne la symétrie du tenseur de piézoélectricité homogénéisé $\mathcal{E}^H = (e_{nij}^H)$. En écrivant les coefficients e_{nij}^H , sous forme

$$\begin{aligned} e_{nij}^H &= \int_{Y^*} \left\{ c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + e_{kij}(x, y) \left(\delta_{kn} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y_k} \right) \right\} dy, \\ &= \int_{Y^*} \left\{ e_{nij}(x, y) + e_{kij}(x, y) \frac{\partial \psi^n}{\partial y_k} + c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) \right\} dy. \end{aligned} \quad (2.7.62)$$

De même, en écrivant les coefficients f_{nij}^H , sous la forme

$$\begin{aligned} f_{nij}^H &= \int_{Y^*} \left\{ e_{nkl}(x, y) \left(\tau_{ij}^{kl} + s_{kl,y}(\mathbf{w}^{ij}) \right) - d_{nt}(x, y) \frac{\partial \varphi^{ij}}{\partial y_t} \right\} dy, \\ &= \int_{Y^*} \left\{ e_{nij}(x, y) + e_{nkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{w}^{ij}) - d_{nt}(x, y) \frac{\partial \varphi^{ij}}{\partial y_t} \right\} dy. \end{aligned} \quad (2.7.63)$$

Ainsi, en utilisant la formulation variationnelle associée au problème (2.6.38), avec le choix des fonctions tests suivant $(\mathbf{v}, \eta) = (\mathbf{q}^n, \psi^n)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{Y^*} \left\{ \left[c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh}) + e_{kij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} \right] s_{ij,y}(\mathbf{q}^n) \right. \\ &\quad \left. + \left[-e_{ikl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh}) + d_{ij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_j} \right] \frac{\partial \psi^n}{\partial y_i} \right\} dy \\ &= \int_{Y^*} \left\{ e_{kij}(x, y) \frac{\partial \psi^n}{\partial y_k} + c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) \right\} dy. \end{aligned} \quad (2.7.64)$$

De même, en prenant la formulation variationnelle associée au problème (2.6.39), avec le choix des fonctions tests $(\mathbf{v}, \eta) = (\mathbf{w}^{mh}, \varphi^{mh})$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{Y^*} \left\{ \left[c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + e_{kij}(x, y) \frac{\partial \psi^n}{\partial y_k} \right] s_{ij,y}(\mathbf{w}^{mh}) \right. \\ &\quad \left. + \left[-e_{ikl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + d_{ij}(x, y) \frac{\partial \psi^n}{\partial y_j} \right] \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_i} \right\} dy \\ &= \int_{Y^*} \left\{ e_{nij}(x, y) s_{ij,y}(\mathbf{w}^{mh}) - d_{in}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_i} \right\} dy, \end{aligned} \quad (2.7.65)$$

Puisque les deux premiers termes de chacune des deux équations (2.7.64) et (2.7.65) sont égaux, alors on a

$$\int_{Y^*} \left\{ c_{ijmh}(x, y) s_{ij,y}(\mathbf{q}^n) + e_{imh}(x, y) \frac{\partial \psi^n}{\partial y_i} \right\} dy = \int_{Y^*} \left\{ e_{nij}(x, y) s_{ij,y}(\mathbf{w}^{mh}) - d_{in}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_i} \right\} dy.$$

Ce qui revient à dire que

$$\begin{aligned} & \int_{Y^*} \left\{ e_{nmh}(x, y) + c_{ijmh}(x, y) s_{ij,y}(\mathbf{q}^n) + e_{imh}(x, y) \frac{\partial \psi^n}{\partial y_i} \right\} dy \\ &= \int_{Y^*} \left\{ e_{nmh}(x, y) + e_{nij}(x, y) s_{ij,y}(\mathbf{w}^{mh}) - d_{in}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_i} \right\} dy. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a l'identité recherchée :

$$e_{nij}^H = f_{nij}^H. \quad \blacksquare$$

2.7.4 Théorème d'existence et d'unicité du problème homogénéisé

En utilisant les propriétés des tenseurs homogénéisés \mathcal{C}^H , \mathcal{E}^H et \mathcal{D}^H , nous avons donc les éléments permettant d'énoncer le théorème de convergence du problème homogénéisé.

Théorème 2.7.1 (le problème homogénéisé)

Le couple (\mathbf{u}, φ) vérifie le problème homogénéisé suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial \sigma_{ij}^H(\mathbf{u}, \varphi)}{\partial x_j} = \theta f_i & \text{dans } \Omega, \\ -\frac{\partial D_i^H(\mathbf{u}, \varphi)}{\partial x_i} = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.7.66)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x) = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega, \\ \varphi(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.7.67)$$

où σ_{ij}^H et D_i^H sont donnés par la loi de comportement homogénéisé :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^H(\mathbf{u}, \varphi) = c_{ijmh}^H s_{mh,x}(\mathbf{u}) + e_{nij}^H \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \\ D_i^H(\mathbf{u}, \varphi) = -e_{imh}^H s_{mh,x}(\mathbf{u}) + d_{in}^H \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \end{cases} \quad (2.7.68)$$

et les coefficients homogénéisés c_{ijkl}^H , e_{nij}^H et d_{ij}^H sont définient par (2.6.44), (2.6.45) et (2.6.47) respectivement.

Remarque 2.7.1

Puisque dans le théorème principal de convergence, on a montré l'existence et l'unicité de la solution du problème homogénéisé à deux échelles (2.5.31)-(2.5.32)-(2.5.33), il est facile d'avoir l'existence et l'unicité de la solution du problème homogénéisé (2.7.66)-(2.7.67). \blacksquare

2.8 Comportement asymptotique des énergies

Pour l'aspect énergétique, on s'intéresse au comportement asymptotique des énergies. On note l'énergie des déformations et l'énergie électrique respectivement, par E_1^ε et E_2^ε , définies par :

$$E_1^\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} c_{ijkl}^\varepsilon(x) s_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) s_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) dx, \quad E_2^\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} d_{ij}^\varepsilon(x) \partial_i \varphi^\varepsilon(x) \partial_j \varphi^\varepsilon(x) dx.$$

On opère comme dans l'article de G.Allaire [1]. En utilisant la technique de la convergence à deux échelles, on obtient

Proposition 2.8.1

On a les limites asymptotiques des énergies mécanique et électrique suivantes :

i) Pour l'énergie des déformations,

$$\begin{aligned} E_1^0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_1^\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{\Omega} c_{Y^*}(\mathbf{u}_1 + \Pi^{rs} e_{rs}^x(\mathbf{u}), \mathbf{u}_1 + \Pi^{rs} e_{rs}^x(\mathbf{u})) dx; \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{Y^*} c_{ijkl}(x, y) \left[s_{ij,x}(\mathbf{u})(x) + s_{ij,y}(\mathbf{u}_1)(x, y) \right] \left[s_{kl,x}(\mathbf{u})(x) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1)(x, y) \right] dx dy. \end{aligned}$$

ii) Pour l'énergie électrique,

$$\begin{aligned} E_2^0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_2^\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d_{Y^*}(\varphi_1 + \Pi^k \partial_k^x \varphi, \varphi_1 + \Pi^k \partial_k^x \varphi) dx, \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{Y^*} d_{ij}(x, y) \left[\partial_{i,x} \varphi(x) + \partial_{i,y} \varphi_1(x, y) \right] \left[\partial_{j,x} \varphi(x) + \partial_{j,y} \varphi_1(x, y) \right] dx dy. \end{aligned}$$

L'indice x ou y indique la variable de la dérivation. ■

Remarque 2.8.1

Signalons que si on considère le deuxième problème variationnel (1.2.18)-(1.2.19), alors l'énergie totale associée au problème étudié, est donnée par

$$\begin{aligned} E^\varepsilon &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega_\varepsilon} c_{ijkl}^\varepsilon(x) s_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) s_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} d_{ij}^\varepsilon(x) \partial_i \varphi^\varepsilon(x) \partial_j \varphi^\varepsilon(x) dx \right\} \\ &+ 2 \int_{\Omega_\varepsilon} e_{ijk}^\varepsilon(x) s_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) \partial_k \varphi^\varepsilon(x) dx. \end{aligned}$$

On opère toujours comme dans la Proposition 2.8.1 et par l'application de la convergence à deux échelles, on obtient la convergence asymptotique suivante

$$\begin{aligned} E &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E^\varepsilon, \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{Y^*} c_{ijkl}(x, y) \left[s_{ij,x}(\mathbf{u})(x) + s_{ij,y}(\mathbf{u}_1)(x, y) \right] \left[s_{kl,x}(\mathbf{u})(x) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1)(x, y) \right] dx dy \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{Y^*} d_{ij}(x, y) \left[\partial_{i,x} \varphi(x) + \partial_{i,y} \varphi_1(x, y) \right] \left[\partial_{j,x} \varphi(x) + \partial_{j,y} \varphi_1(x, y) \right] dx dy \\ &+ 2 \int_{\Omega} \int_{Y^*} e_{ijk}(x, y) \left[s_{ij,x}(\mathbf{u})(x) + s_{ij,y}(\mathbf{u}_1)(x, y) \right] \left[\partial_{k,x} \varphi(x) + \partial_{k,y} \varphi_1(x, y) \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} c_{Y^*}(\mathbf{u}_1 + \Pi^{rs} e_{rs}^x(\mathbf{u}), \mathbf{u}_1 + \Pi^{rs} e_{rs}^x(\mathbf{u})) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} d_{Y^*}(\varphi_1 + \Pi^k \partial_k^x \varphi, \varphi_1 + \Pi^k \partial_k^x \varphi) dx \\ &+ 2 \int_{\Omega} g_{Y^*}(\mathbf{u}_1 + \Pi^{rs} e_{rs}^x(\mathbf{u}), \varphi_1 + \Pi^k \partial_k^x \varphi) dx. \end{aligned}$$

2.9 Un résultat de correcteur

On peut se demander si la convergence à deux échelles permet d'en dire plus que la convergence faible dans $L^2(\Omega)$ et plus précisément sous quelles conditions on peut en déduire un résultat de **correcteur**, qui nous permet de remplacer les deux suites $(\mathbf{u}^\varepsilon(x))_\varepsilon$ et $(\varphi^\varepsilon(x))_\varepsilon$ par leurs limites à deux échelles $\chi(y)\mathbf{u}(x)$ et $\chi(y)\varphi(x)$ respectivement, avec une convergence forte dans $L^2(\Omega)$.

Avant de commencer la démonstration du résultat de correcteur, nous rappelons la définition suivante

Définition 2.9.1

On appelle $\Psi(x, y)$ une *fonction test admissible*, si elle est Y -périodique en y et satisfait la relation

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y \Psi(x, y)^2 dx dy, \quad (2.9.69)$$

la formule (2.9.69) signifie que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \Psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} = \left\| \Psi(x, y) \right\|_{L^2(\Omega \times Y)}. \blacksquare$$

Rappelons ci-dessous le lemme

Lemme 2.9.1 (Allaire [1])

Soit $\Psi(x, y)$ une fonction de $L^2[\Omega; C_{\text{per}}(Y)]$, c'est-à-dire mesurable, de carré sommable en x , à valeurs dans l'espace des fonctions continues, Y -périodiques en y . On a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y \Psi(x, y)^2 dx dy. \quad \blacksquare$$

Remarque 2.9.1

Pour des fonctions Ψ régulières (continues par exemple), le lemme est classique. Par contre on peut affaiblir l'hypothèse de régularité sur Ψ . Par exemple la convergence (2.9.69) a toujours lieu si Ψ est de la forme :

$$\Psi(x, y) = \Psi_1(x)\Psi_2(y), \quad \text{avec } \Psi_1 \in L^\infty(\Omega) \text{ et } \Psi_2 \in L^2(Y). \blacksquare$$

En utilisant le lemme 2.9.1, et puisque dans notre problème on peut séparer les échelles dans les fonctions $s_{ij,y}(\mathbf{u}_1(x, y))$ et $\partial_{i,y}\varphi_1(x, y)$, comme suit

$$\begin{aligned} s_{ij,y}(\mathbf{u}_1(x, y)) &= s_{mh,x}(\mathbf{u}(x))s_{ij,y}(\mathbf{w}^{mh}(y)) + \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_n} s_{ij,y}(\varphi^n(y)), \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i}(x, y) &= s_{mh,x}(\mathbf{u}(x))\partial_{iy}\mathbf{q}^{mh}(y) + \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_n} \partial_{i,y}\psi^n(y). \end{aligned}$$

alors, on peut énoncer la proposition suivante

Proposition 2.9.1

Les deux fonctions $s_{ij,y}(\mathbf{u}_1(x, y))$ et $\partial_{iy}\varphi_1(x, y)$, sont deux fonctions admissibles au sens de la définition 2.9.1. ■

On peut énoncer la seconde proposition :

Proposition 2.9.2

Pour chaque $\varepsilon > 0$, le problème variationnel (2.3.7)-(2.3.8) admet une unique solution $(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \in \mathbf{V}_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) \times W_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ et le problème aux limites homogénéisé à deux échelles, admet une solution unique

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) &\in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{L}^2[\Omega; \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y^*)/\mathbb{R}], \\ (\varphi, \varphi_1) &\in H_0^1(\Omega) \times L^2[\Omega; H_{\text{per}}^1(Y^*)/\mathbb{R}], \end{aligned}$$

et puisque les fonctions $s_{ij,y}(\mathbf{u}_1(x, y))$ et $\partial_{iy}\varphi_1(x, y)$ sont des fonctions admissibles, on a alors

$$\begin{cases} \tilde{s}_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[s_{ij,x}(\mathbf{u}(x)) + s_{ij,y}(\mathbf{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon})) \right] \longrightarrow 0 & \text{fortement dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \tilde{\partial}_i \varphi^\varepsilon(x) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[\partial_{i,x}\varphi(x) + \partial_{i,y}\varphi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right] \longrightarrow 0 & \text{fortement dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Démonstration :

On prend la formulation variationnelle sous la forme suivante

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left\{ \left[c_{ijkl}^\varepsilon s_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) + e_{kij}^\varepsilon \partial_k \varphi^\varepsilon \right] s_{ij}(\mathbf{v}) + \left[-e_{ikl}^\varepsilon s_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) + d_{ij}^\varepsilon \partial_j \varphi^\varepsilon \right] \partial_i \psi \right\} dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f_i(x) v_i(x) dx. \quad (2.9.70)$$

En remplaçant dans la formulation variationnelle (2.9.70) par $\mathbf{v} = \mathbf{u}^\varepsilon$ et $\psi = \varphi^\varepsilon$, alors on obtient

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left\{ \left[c_{ijkl}^\varepsilon s_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) + e_{kij}^\varepsilon \partial_k \varphi^\varepsilon \right] s_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) + \left[-e_{ikl}^\varepsilon s_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) + d_{ij}^\varepsilon \partial_j \varphi^\varepsilon \right] \partial_i \varphi^\varepsilon \right\} dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f_i(x) u_i^\varepsilon(x) dx.$$

Après une simplification, on aboutit à

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left\{ c_{ijkl}^\varepsilon(x) s_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) s_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon)(x) + d_{ij}^\varepsilon(x) \partial_i \varphi^\varepsilon(x) \partial_j \varphi^\varepsilon(x) \right\} dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f_i(x) u_i^\varepsilon(x) dx. \quad (2.9.71)$$

D'après (2.9.71), on peut écrire

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} c_{ijkl}^\varepsilon \left\{ \tilde{s}_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[s_{ij,x}(\mathbf{u}) + s_{ij,y}(\mathbf{u}_1) \right] \right\} \left\{ \tilde{s}_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1) \right] \right\} dx \\ &+ \int_{\Omega} d_{ij}^\varepsilon(x) \left\{ \tilde{\partial}_i \varphi^\varepsilon(x) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[\partial_{i,x}\varphi + \partial_{i,y}\varphi_1 \right] \right\} \left\{ \tilde{\partial}_j \varphi^\varepsilon(x) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[\partial_{j,x}\varphi + \partial_{j,y}\varphi_1 \right] \right\} dx \\ &= \int_{\Omega} f_i(x) \tilde{u}_i^\varepsilon(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} c_{ijkl}^\varepsilon(x) \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[s_{ij,x}(\mathbf{u}(x)) + s_{ij,y}(\mathbf{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon})) \right] \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}(x)) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon})) \right] dx \\ &+ \int_{\Omega} d_{ij}^\varepsilon(x) \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[\partial_{i,x}\varphi(x) + \partial_{i,y}\varphi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right] \left[\partial_{j,x}\varphi(x) + \partial_{j,y}\varphi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right] dx \\ &- 2 \int_{\Omega} c_{ijkl}^\varepsilon(x) \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tilde{s}_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}(x)) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon})) \right] dx \\ &- 2 \int_{\Omega} d_{ij}^\varepsilon(x) \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tilde{\partial}_i \varphi^\varepsilon(x) \left[\partial_{j,x}\varphi(x) + \partial_{j,y}\varphi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right] dx. \end{aligned}$$

Puisque les deux tenseurs c^ε et d^ε sont définis positifs *uniformément* en ε , donc on a

$$\begin{aligned}
& \alpha_c \quad \|\tilde{s}_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)s_{ij,x}(\mathbf{u}(x)) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)s_{ij,y}(\mathbf{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\
+ & \alpha_d \quad \|\tilde{\partial}_i \varphi^\varepsilon(x) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_{i,x}\varphi(x) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_{i,y}\varphi_1(x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq \int_{\Omega} f_i(x) \tilde{u}_i^\varepsilon(x) dx \\
& + \int_{\Omega} c_{ijkl}^\varepsilon(x) \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[s_{ij,x}(\mathbf{u}(x)) + s_{ij,y}(\mathbf{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon})) \right] \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}(x)) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon})) \right] dx \\
& + \int_{\Omega} d_{ij}^\varepsilon(x) \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[\partial_{i,x}\varphi(x) + \partial_{i,y}\varphi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right] \left[\partial_{j,x}\varphi(x) + \partial_{j,y}\varphi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right] dx \\
& - 2 \int_{\Omega} c_{ijkl}^\varepsilon(x) \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tilde{s}_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}(x)) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon})) \right] dx \\
& - 2 \int_{\Omega} d_{ij}^\varepsilon(x) \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tilde{\partial}_i \varphi^\varepsilon(x) \left[\partial_{j,x}\varphi(x) + \partial_{j,y}\varphi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right] dx.
\end{aligned}$$

Puisque les fonctions $s_{ij,y}(\mathbf{u}_1(x, y))$ et $\partial_{iy}\varphi_1(x, y)$ sont des fonctions admissibles au sens de la définition posée précédemment et en passant à la limite à deux échelles sur le membre de droite de l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
& \alpha_c \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\tilde{s}_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\{s_{ij,x}(\mathbf{u}(x)) + s_{ij,y}(\mathbf{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))\}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\
+ & \alpha_d \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\tilde{\partial}_i \varphi^\varepsilon(x) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\{\partial_{i,x}\varphi(x) + \partial_{i,y}\varphi_1(x, \frac{x}{\varepsilon})\}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq \int_{\Omega} \int_{Y^*} f_i(x) u_i(x) dx dy \\
& - \int_{\Omega} \int_{Y^*} c_{ijkl}(x, y) \left[s_{ij,x}(\mathbf{u}(x)) + s_{ij,y}(\mathbf{u}_1(x, y)) \right] \left[s_{kl,x}(\mathbf{u}(x)) + s_{kl,y}(\mathbf{u}_1(x, y)) \right] dx dy \\
& - \int_{\Omega} \int_{Y^*} d_{ij}(x, y) \left[\partial_{i,x}\varphi(x) + \partial_{i,y}\varphi_1(x, y) \right] \left[\partial_{j,x}\varphi(x) + \partial_{j,y}\varphi_1(x, y) \right] dx dy.
\end{aligned}$$

Mais d'après le problème aux limites homogénéisé à deux échelles (2.5.31)-(2.5.32)-(2.5.33), on remarque que le second membre de l'inégalité développée au-dessus est égale à zéro. Donc on a directement

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\tilde{s}_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\{s_{ij,x}(\mathbf{u}(x)) + s_{ij,y}(\mathbf{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))\}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= 0, \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\tilde{\partial}_i \varphi^\varepsilon(x) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\{\partial_{i,x}\varphi(x) + \partial_{i,y}\varphi_1(x, \frac{x}{\varepsilon})\}\|_{L^2(\Omega)} &= 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

Ce qui amène à énoncer le résultat suivant :

Corollaire 2.9.1

On a les deux convergences fortes suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon(x) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[\mathbf{u}(x) + \mathbf{u}_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ \tilde{\varphi}^\varepsilon(x) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[\varphi(x) + \varphi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

2.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé le comportement macroscopique (effectif) d'un milieu piézoélectrique périodiquement perforé, et nous avons montré que la déformation mécanique et le potentiel électrique n'ont pas subi de fortes oscillations puisqu'ils convergent vers une solution indépendante de la variable microscopique, contrairement au tenseur des déformations $s(\mathbf{u}^\varepsilon)$ et le gradient du potentiel électrique $\nabla\varphi^\varepsilon$.

Ainsi nous avons prouvé que le problème limite est altéré par une constante θ qui dépend de la proportion de matériau dans le domaine perforé et qui est égale à 1 s'il n'y a pas de trous. Nous rappelons aussi que la technique de la convergence à deux échelles, nous a permis d'éviter l'utilisation d'opérateurs de prolongement et nous a fourni un résultat de convergence forte dans $H_0^1(\Omega)$.

Signalons aussi que l'application de cette méthode, à une modification près sur la cellule de référence, reste valable pour toute structure périodique, par exemple une structure laminée, mais également à des matériaux fibrés ou composites (voir les chapitres 6, 7 et 8). Le modèle étudié est statique, mais s'étend au dynamique, tous les résultats restent valables avec quelques modifications. Enfin nous pourrions reprendre la méthode de *l'éclatement périodique* introduite récemment par Cioranescu, Damlamian et Griso [24] pour étudier notre problème. Cette étude sera bien détaillée dans le quatrième chapitre dans le cas de coques piézoélectriques périodiques de type Koiter.

Chapitre 3

Analyse asymptotique et homogénéisation d'une plaque mince piézoélectrique perforée

Les problèmes des plaques minces (faible épaisseur) sont des thèmes importants et font l'objet de nombreuses études. Par exemple Ciarlet [20] [21] [22] [23] a montré plusieurs résultats dans les deux cas d'élasticité : linéaire et non-linéaire. Cioranescu et Saint Jean-Paulin [26] ont travaillé sur des structures de type grillage.

En 1981, Caillerie, dans sa thèse [16], a étudié le comportement d'une plaque élastique mince à structure périodique. Par la suite le même auteur dans son article [17], en ajoutant l'hypothèse que les coefficients d'élasticité ont des ordres de grandeur différents (trois cas distincts sont envisagés), a montré que le comportement asymptotique d'une plaque élastique quand l'épaisseur tend vers zéro, nous mène à trois cas distincts qui aboutissent à des équations membranaires pour la première, des équations de plaques minces pour la seconde et pour la troisième à des équations de plaques épaisses.

Kauffmann et Saint Jean-Paulin [46] se sont intéressés au comportement asymptotique d'une plaque mince rectangulaire périodiquement perforée, lorsque les trois paramètres : l'épaisseur, la taille des perforations et la distance entre les grillages, tendent vers zéro dans cet ordre, avec des conditions de Dirichlet sur le bord latéral extérieur et des conditions aux limites de Neumann sur le bord des trous tout en prenant en considération la même hypothèse de Caillerie [17], sur l'ordre de grandeur des tenseurs d'élasticité.

En adaptant les techniques de l'analyse asymptotique, utilisées par plusieurs auteurs pour déterminer le modèle de type Kirchhoff-Love pour des plaques élastiques, Rahmoune [75] et Sène [80] ont établi un modèle de même type associé à une plaque piézoélectrique d'épaisseur h .

Rahmoune a étudié dans sa thèse [75], l'influence des conditions aux limites électriques sur le comportement asymptotique d'une plaque piézoélectrique mince non nécessairement perforée, où il apparaît deux types de plaques : l'une est isolée et l'autre est de court-circuitée. Sène quant à lui, dans sa thèse [80], a étudié le comportement asymptotique d'une plaque piézoélectrique mécaniquement isotrope de faible épaisseur, dont les caractéristiques mécaniques et électriques sont considérées indépendantes de l'épaisseur. Cette étude a été développée dans les deux cas : statique et dynamique.

L'idée de ce chapitre, est de reprendre le problème de la plaque piézoélectrique mince périodiquement perforée, avec des conditions aux limites mécaniques de type Dirichlet et des conditions aux limites électriques de type Neumann (plaque non excitée, plaque isolée) sur le bord latéral extérieur et des conditions aux limites mécanique et électrique de type de Neumann sur le bord des trous, tout en supposant, dans cette étude, que les caractéristiques mécaniques et électriques des plaques sont indépendantes de l'épaisseur. Notre objectif est d'étudier le comportement de l'état électromécanique, quand les deux paramètres : l'épaisseur et la taille des perforations, tendent vers zéro, dans deux ordres différentes.

Pour le premier comportement limite lorsque l'épaisseur h tend vers zéro, nous constatons que les résultats obtenus par Rahmoune [75] et par Sène [80] sont encore valables pour la plaque perforée à ε fixé. Pour le deuxième comportement limite quand la taille des trous est appelée à tendre vers zéro, l'intérêt est d'obtenir le problème homogénéisé et un théorème d'existence et d'unicité de sa solution, ainsi que les expressions des tenseurs homogénéisés (effectifs), avec leurs propriétés.

Ce chapitre est composé de cinq sections : Dans la première section on précise la géométrie du domaine où le problème y sera traité. Dans la section suivante, on décrit les problèmes : modèle et variationnel, par lesquels on établit un théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème. Dans la troisième section, nous adapterons les démonstrations de Rahmoune [75] et de Sène [80], pour étudier le comportement asymptotique d'une plaque piézoélectrique mince perforée de façon périodique, lorsque l'élanement de la plaque tend vers l'infini. Ceci nous permet, dans la section suivante, de positionner correctement le problème bidimensionnel sur une plaque piézoélectrique périodiquement perforée. Dans la quatrième section, nous partons du résultat précédent, pour étudier la limite de l'état électromécanique lorsque la taille des trous tend vers zéro, ceci nous permet d'obtenir les problèmes homogénéisés membranaire et en flexion et de déterminer aussi les expressions de tous les tenseurs homogénéisés correspondants. Ce travail fait l'objet de la publication [57].

3.1 Géométrie du domaine

Dans cette section, nous précisons la géométrie de la plaque, dans laquelle on va travailler.

3.1.1 Géométrie de la surface moyenne

On considère une surface bornée connexe ω de bord $\partial\omega$ Lipschitz, et on creuse à l'intérieur des trous, on obtient une surface perforée périodiquement $\omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ (ε un paramètre strictement positif), de frontière $\gamma_\varepsilon = \partial\omega_\varepsilon$ Lipschitzienne, occupée par un matériau piézoélectrique. On se place comme dans le chapitre précédent, c'est-à-dire quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on fait dans ω de plus en plus de trous, répartis régulièrement mais de plus en plus petits (voir la figure 3.1).

3.1.2 Définition de la configuration d'une plaque perforée

En précisant la géométrie du domaine. On désigne par $\Omega_{h\varepsilon}$ un domaine cylindrique de \mathbb{R}^3 d'épaisseur $2h$ et de surface moyenne ω_ε , occupé par un matériau piézoélectrique. Plus précisément, on pose :

$$\Omega_{h\varepsilon} = \omega_\varepsilon \times]-h, +h[.$$

Les faces supérieure et inférieure sont notées par :

$$\Gamma_{h\varepsilon}^{\pm} = \omega_{\varepsilon} \times \{\pm h\}.$$

La surface latérale est définie par :

$$\Gamma_{h\varepsilon}^{lat} = \gamma_{\varepsilon} \times]-h, +h[.$$

On pose $\Gamma_{h\varepsilon} = \partial\Omega_{h\varepsilon}$. L'état électromécanique de la plaque piézoélectrique est déterminé par le couple $(\mathbf{u}^{h\varepsilon}, \Phi^{h\varepsilon})$ de champs de déplacement $\mathbf{u}^{h\varepsilon} = (u_1^{h\varepsilon}, u_2^{h\varepsilon}, u_3^{h\varepsilon})$ et de potentiel électrique scalaire $\phi^{h\varepsilon}$.

Des conditions de Dirichlet (l'encastrement) sur le déplacement seront imposées sur la partie $\Gamma_{h\varepsilon}^{mD} = \gamma_{\varepsilon}^{m0} \times]-h, +h[$ du bord latéral, où $\gamma_{\varepsilon}^{m0}$ est une partie de mesure non nulle de $\gamma_{\varepsilon} = \partial\omega_{\varepsilon}$, et des conditions de Neumann (homogène, libre) seront imposées sur la partie complémentaire $\Gamma_{h\varepsilon}^{mN}$ par rapport à la surface $\Gamma_{h\varepsilon}$

$$\Gamma_{h\varepsilon}^{mN} = \Gamma_{h\varepsilon}^+ \cup \Gamma_{h\varepsilon}^- \cup (\gamma_{\varepsilon}^{m1} \times]-h, +h[) = \Gamma_{h\varepsilon} - \Gamma_{h\varepsilon}^{mD}, \quad \text{où } \gamma_{\varepsilon}^{m0} \cup \gamma_{\varepsilon}^{m1} = \partial\omega_{\varepsilon}.$$

Le couple $(\Gamma_{h\varepsilon}^{mD}, \Gamma_{h\varepsilon}^{mN})$ réalise une partition de $\partial\Omega_{h\varepsilon}$ dont la normale unitaire extérieure est notée par $n^{h\varepsilon}$.

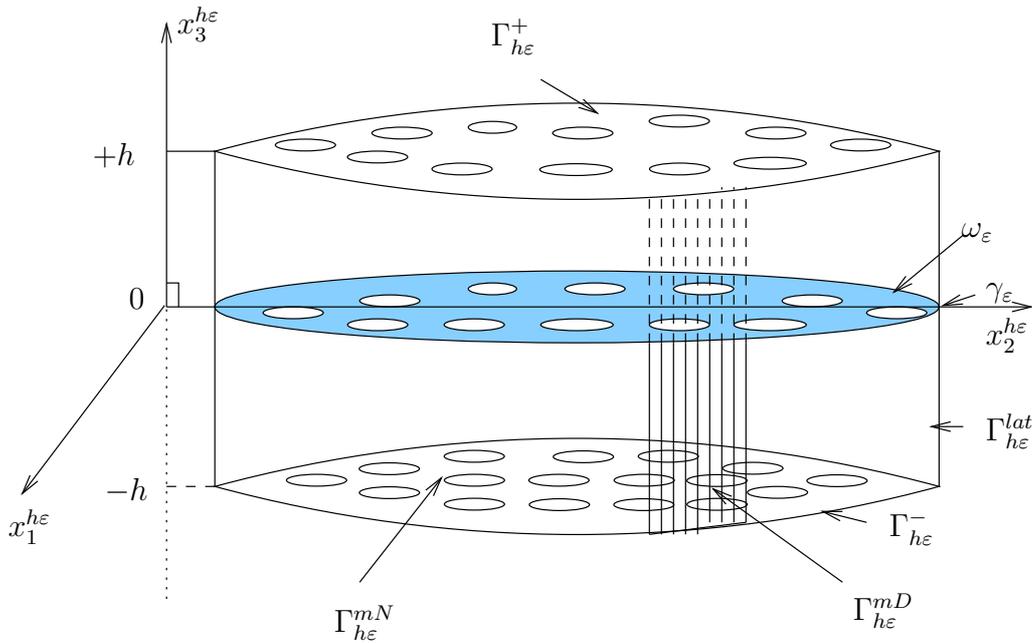


FIG. 3.1 – La plaque piézoélectrique mince perforée $\Omega_{h\varepsilon} = \omega_{\varepsilon} \times]-h, +h[$.

Pour la partie électrique, le potentiel électrique sera considéré inconnu en particulier sur la frontière Γ_h , ce type de condition aux limites électriques correspond à une plaque *piézoélectrique isolée*. Le *piézoélectrique de court-circuit* est un autre problème où l'on pose une charge électrique sur les faces supérieure et inférieure.

3.2 Description du problème

Dans la suite de ce chapitre, sauf mention du contraire, nous adoptons la convention de sommation des indices répétés. Les indices latins étant dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et les indices grecs (sauf ε) dans $\{1, 2\}$.

3.2.1 Problème modèle

Le problème consiste à trouver le couple $(\mathbf{u}^{h\varepsilon}, \phi^{h\varepsilon})$ solution des équations :

(i) **L'équation d'équilibre mécanique :**

La plaque est soumise à des forces de densité volumique \mathbf{f}^h et surfacique \mathbf{g}^h sur Γ_h^{mN} .

L'équilibre mécanique s'écrit

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma^{h\varepsilon}(\mathbf{u}^{h\varepsilon}, \phi^{h\varepsilon}) = \mathbf{f}^h & \text{dans } \Omega_{h\varepsilon}, \\ \sigma^{h\varepsilon}(\mathbf{u}^{h\varepsilon}, \phi^{h\varepsilon}) \cdot \mathbf{n}^{h\varepsilon} = \mathbf{g}^h & \text{sur } \Gamma_{h\varepsilon}^{mN}, \\ \mathbf{u}^{h\varepsilon} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{h\varepsilon}^{mD}. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

On suppose désormais que

$$\mathbf{f}^h \in (L^2(\Omega_{h\varepsilon}))^3, \quad \mathbf{g}^h \in (L^2(\Gamma_{h\varepsilon}^{mN}))^3. \quad (3.2.2)$$

(ii) **L'équation d'équilibre électrique (Maxwell-Gauss) :**

On considère un milieu diélectrique parfait, c'est-à-dire à densités de charges surfacique et volumique nulles. L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathbf{D}^{h\varepsilon}(\mathbf{u}^{h\varepsilon}, \phi^{h\varepsilon}) = 0 & \text{dans } \Omega_{h\varepsilon}, \\ \mathbf{D}^{h\varepsilon}(\mathbf{u}^{h\varepsilon}, \phi^{h\varepsilon}) \cdot \mathbf{n}^{h\varepsilon} = 0 & \text{sur } \Gamma_{h\varepsilon}. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

(iii) **Loi de comportement :**

Le tenseur des contraintes $\sigma^{h\varepsilon} = (\sigma_{ij}^{h\varepsilon}) : \Omega_{h\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}^9$ et le vecteur des déplacements électriques $\mathbf{D}^{h\varepsilon} = (D_i^{h\varepsilon}) : \Omega_{h\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}^3$, sont reliés par la loi de comportement :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^{h\varepsilon}(\mathbf{u}^{h\varepsilon}, \phi^{h\varepsilon}) = c_{ijkl}^\varepsilon s_{kl}^{h\varepsilon}(\mathbf{u}^{h\varepsilon}) + e_{kij}^\varepsilon \partial_k^{h\varepsilon} \phi^{h\varepsilon} & \text{dans } \Omega_{h\varepsilon}, \\ D_i^{h\varepsilon}(\mathbf{u}^{h\varepsilon}, \phi^{h\varepsilon}) = -e_{ikl}^\varepsilon s_{kl}^{h\varepsilon}(\mathbf{u}^{h\varepsilon}) + d_{ij}^\varepsilon \partial_j \phi^{h\varepsilon} & \text{dans } \Omega_{h\varepsilon}, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

avec $1 \leq i, j, k, l \leq 3$.

Le tenseur des déformations linéarisé est donné par $s_{kl}^{h\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_k^{h\varepsilon} u_l + \partial_l^{h\varepsilon} u_k)$. On garde les mêmes hypothèses réalistes de bornitude des c_{ijkl}^ε , e_{ikl}^ε et d_{ij}^ε et d'ellipticité uniforme de c_{ijkl}^ε et d_{ij}^ε .

Les exposants h et ε rappellent que les fonctions sont définies sur la plaque $\Omega_{h\varepsilon}$. Dans ce travail, les caractéristiques mécaniques et électriques des plaques seront supposées indépendantes de l'épaisseur, ce qui revient à dire que les coefficients du matériau c_{ijkl}^ε , e_{ikl}^ε et d_{ij}^ε sont indépendants de h .

Remarque 3.2.1

On a considéré dans cette étude, une plaque piézoélectrique de faible épaisseur électriquement isolée (c'est-à-dire électriquement non excitée), ce qui revient à dire que le potentiel électrique est complètement inconnu en particulier sur le bord. Mais on peut envisager une plaque où la charge électrique sur les faces supérieure et inférieure est déterminée, ce qui correspond aux dispositifs expérimentaux habituels et que l'on appelle plaque de court-circuitée. ■

3.2.2 Problème variationnel

Comme dans la section 1.2.2, nous allons établir la première forme du problème variationnel associé au problème (3.2.1)-(3.2.3)-(3.2.4). On définit ces deux espaces admissibles

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{h\varepsilon}(\Omega_{h\varepsilon}) &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_{h\varepsilon}), \mathbf{v}|_{\Gamma_{h\varepsilon}^{mD}} = 0 \right\}, \quad \mathbf{H}^1(\Omega_{h\varepsilon}) = (H^1(\Omega_{h\varepsilon}))^3, \\ W_{h\varepsilon}(\Omega_{h\varepsilon}) &= \left\{ \Psi + c, \forall \Psi \in H^1(\Omega_{h\varepsilon}), \forall c \in \mathbb{R} \right\} = H^1(\Omega_{h\varepsilon})/\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nous munissons $\mathbf{V}_{h\varepsilon}(\Omega_{h\varepsilon})$ de la norme $\| \mathbf{u} \|_{\mathbf{V}_{h\varepsilon}(\Omega_{h\varepsilon})} = \| \mathbf{u} \|_{(L^2(\Omega_{h\varepsilon}))^3}$. Cette norme est équivalente à la norme usuelle de $(H^1(\Omega_{h\varepsilon}))^3$, d'après l'inégalité de Poincaré. Et nous munissons $W_{h\varepsilon}(\Omega_{h\varepsilon})$ de la norme $\| \Psi \|_{W_{h\varepsilon}(\Omega_{h\varepsilon})} = \| \nabla \Psi \|_{(L^2(\Omega_{h\varepsilon}))^3}$. Alors le problème variationnel s'écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}^{h\varepsilon}, \phi^{h\varepsilon}) \in \mathbf{V}_{h\varepsilon}(\Omega_{h\varepsilon}) \times W_{h\varepsilon}(\Omega_{h\varepsilon}) \text{ tels que,} \\ a^h((\mathbf{u}^{h\varepsilon}, \phi^{h\varepsilon}), (\mathbf{v}^{h\varepsilon}, \psi^{h\varepsilon})) = l^{h\varepsilon}(\mathbf{v}^{h\varepsilon}, \psi^{h\varepsilon}) \quad \forall (\mathbf{v}^{h\varepsilon}, \psi^{h\varepsilon}) \in \mathbf{V}_{h\varepsilon}(\Omega_{h\varepsilon}) \times W_{h\varepsilon}(\Omega_{h\varepsilon}), \end{array} \right. \quad (3.2.5)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a^h((\mathbf{u}^{h\varepsilon}, \phi^{h\varepsilon}), (\mathbf{v}^{h\varepsilon}, \psi^{h\varepsilon})) = \int_{\Omega_{h\varepsilon}} \left[c_{ijkl}^{\varepsilon} s_{kl}^{h\varepsilon}(\mathbf{u}^{h\varepsilon}) + e_{kij}^{\varepsilon} \partial_k^{h\varepsilon} \phi^{h\varepsilon} \right] s_{ij}^{h\varepsilon}(\mathbf{v}^{h\varepsilon}) dx^{h\varepsilon} \\ \quad + \int_{\Omega_{h\varepsilon}} \left[-e_{ikl}^{\varepsilon} s_{kl}^{h\varepsilon}(\mathbf{u}^{h\varepsilon}) + d_{ij}^{\varepsilon} \partial_j^{h\varepsilon} \phi^{h\varepsilon} \right] \partial_i^{h\varepsilon} \psi^{h\varepsilon} dx^{h\varepsilon}, \\ l^{h\varepsilon}(\mathbf{v}^{h\varepsilon}, \psi^{h\varepsilon}) = \int_{\Omega_{h\varepsilon}} \mathbf{f}^h \cdot \mathbf{v}^{h\varepsilon} dx^{h\varepsilon} + \int_{\Gamma_{h\varepsilon}^{mN}} \mathbf{g}^h \cdot \mathbf{v}^{h\varepsilon} d\Gamma_{h\varepsilon}^{mN}. \end{array} \right. \quad (3.2.6)$$

Remarque 3.2.2

Signalons qu'il y a une autre formulation variationnelle dont la forme bilinéaire n'est pas coercive mais symétrique, contrairement à la formulation variationnelle (3.2.5)-(3.2.6) dont la forme bilinéaire est coercive mais pas symétrique (voir la section 1.2.2). ■

3.2.3 Théorème d'existence et d'unicité

L'objectif est d'établir un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (3.2.1)-(3.2.3)-(3.2.4).

Théorème 3.2.1

Sous les hypothèses habituelles de symétrie, de bornitude et d'ellipticité uniforme des tenseurs élastique, piézoélectrique et diélectrique et sous l'hypothèse (3.2.2), le problème (3.2.5)-(3.2.6) admet une solution unique à une constante additive près dans l'espace $\mathbf{V}_{h\varepsilon}(\Omega_{h\varepsilon}) \times W_{h\varepsilon}(\Omega_{h\varepsilon})$. ■

Preuve :

Grâce à la propriété d'ellipticité uniforme des tenseurs d'élasticité et de diélectricité, ainsi que les propriétés de symétrie et de bornitude des précédents tenseurs et sur le tenseur de couplage, nous avons la coercivité de la forme bilinéaire a^h et sa continuité. La continuité de la forme linéaire $l^{h\varepsilon}$ est évidente. Sous ces hypothèses on peut appliquer directement le lemme de Lax-Milgram afin d'affirmer l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.2.5)-(3.2.6). ■

Remarque 3.2.3

Pour avoir l'unicité du potentiel dans l'espace $H^1(\Omega_{h^\varepsilon})$, il suffit d'imposer un potentiel nul sur l'une des faces $\Gamma_{h^\varepsilon}^\pm$. ■

3.3 Analyse asymptotique d'une plaque piézoélectrique perforée

Dans cette section, en partant d'une plaque piézoélectrique périodiquement perforée de faible épaisseur (mince) et en reprenant les résultats établis par Rahmoune [75] et Sène [80], on obtient un modèle bidimensionnel.

Le modèle bidimensionnel a l'avantage d'être, du point de vue numérique, facilement manipulable et permet aussi de poser correctement le problème qui décrit le comportement d'une structure bidimensionnelle piézoélectrique périodiquement perforée.

3.3.1 Résultats de convergence

On se ramène classiquement à un ouvert fixe $\Omega^\varepsilon = \omega^\varepsilon \times]-1, +1[$ par la projection π^ε définie par

$$x^\varepsilon = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon) \in \bar{\Omega}^\varepsilon \longmapsto x^{h^\varepsilon} = \pi^h(x^\varepsilon) = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, hx_3^\varepsilon) \in \bar{\Omega}^{h^\varepsilon}$$

On note d'une part Γ_ε^{mD} , Γ_ε^{mN} les images par $(\pi^h)^{-1}$ de $\Gamma_{h^\varepsilon}^{mD}$, $\Gamma_{h^\varepsilon}^{mN}$ et d'autre part, $\Gamma_\varepsilon^\pm = \omega_\varepsilon \times \{\pm 1\}$, $\Gamma_\varepsilon^{lat} = \partial\omega \times]-1, +1[$. Enfin posons $\partial_{\alpha\beta}\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$. Avec un tel changement de variable, nous pouvons étudier par la suite la convergence de l'état électromécanique mis à l'échelle dans un espace fonctionnel indépendant de l'épaisseur.

L'objectif est d'établir la limite du problème variationnel tridimensionnel (3.2.5)-(3.2.6), lorsque le paramètre d'épaisseur tend vers zéro, ce qui nous donnera le problème variationnel bidimensionnel. On effectue un choix convenable des ordres de grandeur des données correspondant à chaque plaque (forces appliquées, densités de charge) et en reprenant la démonstration présentée par Rahmoune [75] et Sène [80], on peut énoncer le résultat ci-dessous qui décrit le comportement limite des inconnues mécanique et électrique et qui fournit les modèles bidimensionnels cherchés.

• Modèle de Rahmoune [75]

Théorème 3.3.1

A l'état électromécanique $(u_\alpha^{h^\varepsilon}, u_3^{h^\varepsilon}, \phi^{h^\varepsilon})$, solution du problème variationnel tridimensionnel (3.2.5)-(3.2.6) et défini sur Ω_{h^ε} , on associe un état mis à l'échelle $(u_\alpha^\varepsilon(h), u_3^\varepsilon(h), \phi^\varepsilon(h))$ défini par

$$\forall x^{h^\varepsilon} \in \Omega_{h^\varepsilon} \quad \begin{cases} u_\alpha^{h^\varepsilon}(x^{h^\varepsilon}) &= h^2 u_\alpha^\varepsilon(h)(x^\varepsilon), \\ u_3^{h^\varepsilon}(x^{h^\varepsilon}) &= h u_3^\varepsilon(h)(x^\varepsilon), \\ \phi^{h^\varepsilon}(x^{h^\varepsilon}) &= h^2 \phi^\varepsilon(h)(x^\varepsilon), \end{cases} \quad (3.3.7)$$

ainsi l'ordre de grandeur des actions extérieures (le chargement de la structure) est choisi comme suit

$$\begin{cases} f_\alpha^h(x^{h\varepsilon}) = h^2 f_\alpha(x^\varepsilon), & f_3^h(x^{h\varepsilon}) = h^3 f_3(x^\varepsilon), \\ g_\alpha^h(x^{h\varepsilon}) = h^3 g_\alpha(x^\varepsilon), & g_3^h(x^{h\varepsilon}) = h^4 g_3(x^\varepsilon), \end{cases} \quad (3.3.8)$$

où (f, g) est un élément (indépendant de h) de $(L^2(\Omega_\varepsilon))^3 \times (L^2(\Omega_\varepsilon))^3$, alors quand le paramètre d'épaisseur h tend vers zéro, on obtient

$$\begin{cases} u_\alpha^\varepsilon(h) \rightarrow u_\alpha^{0\varepsilon}(x) = u_\alpha^{0\varepsilon}(x_1, x_2) - x_3^\varepsilon \partial_\alpha u_3^{0\varepsilon}(x_1, x_2), \\ u_3^\varepsilon(h) \rightarrow u_3^{0\varepsilon}(x_1, x_2), \\ \phi^\varepsilon(h) \rightarrow \phi^{0\varepsilon}(x_1, x_2). \end{cases} \quad (3.3.9)$$

Sachant que la solution du problème variationnel tridimensionnel (3.2.5)-(3.2.6), tend vers la solution du problème variationnel bidimensionnel suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_\alpha^{0\varepsilon}, u_3^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) \in V_\varepsilon(\omega_\varepsilon) \times W_\varepsilon(\omega_\varepsilon) \times H^1(\omega_\varepsilon)/\mathbb{R}, \quad \text{tels que,} \\ \int_{\omega_\varepsilon} \left\{ N_{\alpha\beta}(u_\alpha^{0\varepsilon}, u_3^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) s_{\alpha\beta}(v_\alpha^\varepsilon) + Q_\alpha(u_\alpha^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) E_\alpha(\psi^\varepsilon) - M_{\alpha\beta}(u_3^{0\varepsilon}) \partial_{\alpha\beta} v_3^\varepsilon \right\} dx^\varepsilon \\ = \int_{\omega_\varepsilon} \left\{ p_\alpha v_\alpha^\varepsilon + p_3 v_3^\varepsilon + m_\alpha \partial_\alpha v_3^\varepsilon \right\} dx^\varepsilon, \\ \forall (v_\alpha^\varepsilon, v_3^\varepsilon, \psi^\varepsilon) \in V_\varepsilon(\omega_\varepsilon) \times W_\varepsilon(\omega_\varepsilon) \times H^1(\omega_\varepsilon)/\mathbb{R}, \end{array} \right. \quad (3.3.10)$$

où

$$V_\varepsilon(\omega_\varepsilon) = \left\{ v_\alpha \in H^1(\omega_\varepsilon), \quad v_\alpha = 0 \text{ sur } \gamma_\varepsilon^{m0} \right\},$$

$$W_\varepsilon(\omega_\varepsilon) = \left\{ v_3 \in H^2(\omega_\varepsilon), \quad v_3 = 0 \text{ et } \partial_\nu v_3 = 0 \text{ sur } \gamma_\varepsilon^{m0} \right\},$$

et

$$m_\alpha = \int_{-1}^{+1} (x_3 f_\alpha + (g_\alpha^+ - g_\alpha^-)) dx_3, \quad p_\alpha = \int_{-1}^{+1} f_\alpha dx_3 \quad \text{et} \quad p_3 = \int_{-1}^{+1} f_3 dx_3,$$

$$g^\pm = g|_{\Gamma_\varepsilon^\pm}, \quad E_\alpha(\Psi) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha},$$

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta}(u_\alpha^{0\varepsilon}, u_3^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) = \int_{-1}^{+1} \left\{ \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}^\varepsilon \left[s_{\delta\tau}(u_\alpha^{0\varepsilon}) - x_3 \partial_{\delta\tau} u_3^{0\varepsilon} \right] - \hat{e}_{\gamma\alpha\beta}^\varepsilon E_\gamma(\phi^{0\varepsilon}) \right\} dx_3, \\ Q_\alpha(u_\alpha^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) = \int_{-1}^{+1} \left\{ \hat{e}_{\gamma\alpha\beta}^\varepsilon s_{\alpha\beta}(u_\alpha^{0\varepsilon}) + \hat{d}_{\gamma\alpha}^\varepsilon E_\alpha(\phi^{0\varepsilon}) \right\} dx_3, \\ M_{\alpha\beta}(u_3^{0\varepsilon}) = \int_{-1}^{+1} \left\{ -(x_3)^2 \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}^\varepsilon \partial_{\delta\tau} u_3^{0\varepsilon} + x_3 \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}^\varepsilon s_{\delta\tau}(u_\alpha^{0\varepsilon}) - x_3 \hat{e}_{\gamma\alpha\beta}^\varepsilon E_\gamma(\phi^{0\varepsilon}) \right\} dx_3, \end{cases} \quad (3.3.11)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}^\varepsilon = c_{\alpha\beta\delta\tau}^\varepsilon - c_{3j\alpha\beta}^\varepsilon \tilde{b}_{3j3k}^\varepsilon \tilde{c}_{k3\alpha\beta}^\varepsilon + \frac{e_{3\alpha\beta}^\varepsilon \tilde{h}_{3\gamma\delta}^\varepsilon}{d_{33}^\varepsilon}, \\ \hat{e}_{\gamma\alpha\beta}^\varepsilon = e_{\gamma\alpha\beta}^\varepsilon - c_{3j\alpha\beta}^\varepsilon \tilde{b}_{3j3k}^\varepsilon \tilde{e}_{3k3}^\varepsilon + \frac{e_{3\alpha\beta}^\varepsilon \tilde{d}_{3\gamma}^\varepsilon}{d_{33}^\varepsilon}, \\ \hat{d}_{\gamma\alpha}^\varepsilon = d_{\gamma\alpha}^\varepsilon + e_{\gamma j3}^\varepsilon \tilde{b}_{3j3k}^\varepsilon \tilde{e}_{\gamma k3}^\varepsilon - \frac{d_{\alpha 3}^\varepsilon \tilde{d}_{\gamma 3}^\varepsilon}{d_{33}^\varepsilon}, \end{array} \right. \quad (3.3.12)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}_{k3\alpha\beta}^\varepsilon = c_{k3\alpha\beta}^\varepsilon + \frac{e_{3k3}^\varepsilon \tilde{e}_{3\alpha\beta}^\varepsilon}{d_{33}^\varepsilon}, \\ \tilde{e}_{\gamma k3}^\varepsilon = e_{\gamma k3}^\varepsilon + \frac{e_{3k3}^\varepsilon \tilde{d}_{\gamma 3}^\varepsilon}{d_{33}^\varepsilon}, \\ \tilde{h}_{3\alpha\beta}^\varepsilon = e_{3\alpha\beta}^\varepsilon - \frac{e_{3k3}^\varepsilon \tilde{b}_{k3j3}^\varepsilon e_{3\alpha\beta}^\varepsilon}{d_{33}^\varepsilon}, \\ \tilde{d}_{3\alpha}^\varepsilon = d_{3\alpha}^\varepsilon + e_{3k3}^\varepsilon \tilde{b}_{3k3j}^\varepsilon e_{\alpha j3}^\varepsilon, \end{array} \right. \quad (3.3.13)$$

où \tilde{b}^ε est l'inverse de la matrice $\left(c_{3j3k}^\varepsilon + \frac{e_{3j3}^\varepsilon e_{3k3}^\varepsilon}{d_{33}^\varepsilon} \right)_{3 \times 3}$. ■

• Modèle de Sène [80]

En plus, si en supposant que le piézoélectrique est mécaniquement isotrope, c'est-à-dire que les coefficients d'élasticité s'écrivent sous la forme

$$c_{ijkl}^\varepsilon = \lambda^\varepsilon \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^\varepsilon (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

et en adaptant la même démarche proposée par Sène [80], on démontre que dans le cas d'une plaque isolée, la suite des potentiels électriques $\phi^\varepsilon(h)$ converge vers un potentiel $\phi^{0\varepsilon}$ qui est un polynôme du second degré en x_3^ε

$$\phi^{0\varepsilon}(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon) = \sum_{i=0}^2 \phi_i^\varepsilon(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) (x_3^\varepsilon)^i,$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_0^\varepsilon &= -\frac{\check{e}_{3\alpha\beta}^\varepsilon}{2\check{e}_{33}^\varepsilon} \partial_{\alpha\beta} u_3^{0\varepsilon}, \\ \phi_1^\varepsilon &= 0, \\ \phi_2^\varepsilon &= \frac{\check{e}_{3\alpha\beta}^\varepsilon}{2\check{e}_{33}^\varepsilon} \partial_{\alpha\beta} u_3^{0\varepsilon}, \\ \check{e}_{3\alpha\beta}^\varepsilon &= \frac{\lambda^\varepsilon}{\lambda^\varepsilon + \mu^\varepsilon} e_{333}^\varepsilon \delta_{\alpha\beta} - e_{3\alpha\beta}^\varepsilon, \\ \check{e}_{33}^\varepsilon &= \frac{1}{\mu^\varepsilon} e_{3\alpha 3}^\varepsilon e_{3\alpha 3}^\varepsilon + \frac{1}{\lambda^\varepsilon + \mu^\varepsilon} e_{333}^\varepsilon e_{333}^\varepsilon + d_{33}^\varepsilon, \end{aligned}$$

et $(u_1^{0\varepsilon}, u_2^{0\varepsilon}, u_3^{0\varepsilon})$ est la solution de ces deux problèmes découplés

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}(u_3^{0\varepsilon}) = \int_{-1}^1 (x_3 \partial_\alpha f_\alpha + f_3) dx_3 + g_3^+ + g_3^- + \partial_\alpha (g_\alpha^+ - g_\alpha^-) & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ u_3^{0\varepsilon} = 0, \quad \partial_\nu u_3^{0\varepsilon} = 0 & \text{sur } \gamma_\varepsilon^{m0}, \\ m_{\alpha\beta}(u_3^{0\varepsilon}) \nu_\alpha \nu_\beta = 0 & \text{sur } \gamma_\varepsilon^{m1}, \\ \partial_\alpha m_{\alpha\beta}(u_3^{0\varepsilon}) \nu_\beta + \partial_\tau \{m_{\alpha\beta}(u_3^{0\varepsilon}) \nu_\beta \tau_\alpha\} = \int_{-1}^1 x_3 f_\alpha \nu_\alpha dx_3 + (g_\alpha^+ - g_\alpha^-) \eta_\alpha & \text{sur } \gamma_\varepsilon^{m1}, \end{array} \right. \quad (3.3.14)$$

où

$$m_{\alpha\beta}(u_3^{0\varepsilon}) = \frac{4\mu^\varepsilon}{3} \left[\frac{\lambda^\varepsilon}{\lambda^\varepsilon + 2\mu^\varepsilon} \delta_{\alpha\beta} \Delta u_3^{0\varepsilon} + \partial_{\alpha\beta} u_3^{0\varepsilon} \right] + \frac{2\check{e}_{3\alpha\beta}\check{e}_{3\iota\varrho}}{3\check{e}_{33}} \partial_{\iota\varrho} u_3^{0\varepsilon},$$

et

$$g_\alpha^- = g_\alpha|_{\Gamma_\varepsilon^-}, \quad g_\alpha^+ = g_\alpha|_{\Gamma_\varepsilon^+},$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\partial_\alpha n_{\alpha\beta}(u_1^{0\varepsilon}, u_2^{0\varepsilon}) = \int_{-1}^1 f_\beta dx_3 + (g_\beta^+ + g_\beta^-) & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ n_{\alpha\beta}(u_1^{0\varepsilon}, u_2^{0\varepsilon}) \nu_\alpha = \int_{-1}^1 g_\beta dx_3 & \text{sur } \gamma_\varepsilon^{m1}, \\ u_1^{0\varepsilon} = u_2^{0\varepsilon} = 0 & \text{sur } \gamma_\varepsilon^{m0}, \end{array} \right. \quad (3.3.15)$$

où

$$n_{\alpha\beta}(u_1^{0\varepsilon}, u_2^{0\varepsilon}) = 2\mu^\varepsilon \left[\frac{\lambda^\varepsilon}{\lambda^\varepsilon + 2\mu^\varepsilon} \delta_{\alpha\beta} s_{\varrho\varrho}(u_1^{0\varepsilon}, u_2^{0\varepsilon}) + s_{\alpha\beta}(u_1^{0\varepsilon}, u_2^{0\varepsilon}) \right].$$

Remarque 3.3.1

- i) Nous nous inspirons des travaux de Rahmoune [75] et de Sène [80] pour la démonstration du théorème 3.3.1, en faisant seulement les modifications nécessaires pour tenir compte de la présence des trous. Signalons aussi que toutes les convergences qui sont obtenues dans le théorème précédent, sont des convergences fortes dans $H^1(\omega_\varepsilon)$ (pour plus de détails, on pourra consulter les travaux de Rahmoune [75], de Sène [80] et celui de Weller et Licht [91]).
- ii) Comme dans l'élasticité des solides simples, les $m_{\alpha\beta}$ correspondant aux limites des moments des forces de contrainte

$$m_{\alpha\beta} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-1}^1 x_3 \sigma_{\alpha\beta}(h) dx_3,$$

et les $M_{\alpha\beta}$ à la moyenne sur l'épaisseur de la plaque des forces de contrainte

$$M_{\alpha\beta} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sigma_{\alpha\beta}(h) dx_3.$$

Remarque 3.3.2

- i) Dans le second modèle, on remarque que l'effet de la piézoélectricité et de la différence de potentiel électrique se situent pour le problème membranaire (3.3.15) uniquement dans le second membre; il est assimilable à une force extérieure. Par contre, l'opérateur de flexion est modifié.
- ii) Par la suite, on va utiliser le premier modèle (3.3.10)-(3.3.11), au lieu du dernier modèle (3.3.14)-(3.3.15), sachant qu'il n'y a pas une grande différence entre ces deux modèles sauf dans le second membre. Or on va voir ultérieurement que cela ne va pas mettre en cause notre résultat d'homogénéisation quand ε tend vers zéro. ■

3.3.2 Problème local

En intégrant par parties l'équation variationnelle (3.3.10)-(3.3.11), on établit directement les équations locales mécaniques (membranaire et en flexion) et électrique suivantes :

(a) Équation d'équilibre mécanique membranaire

$$\begin{cases} -\partial_\beta N_{\alpha\beta}(u_l^{0\varepsilon}, u_3^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) = p_\alpha & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ u_l^{0\varepsilon} = 0 & \text{sur } \partial\omega, \\ N_{\alpha\beta}(u_l^{0\varepsilon}, u_3^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) \cdot n_\alpha^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon - \partial\omega. \end{cases} \quad (3.3.16)$$

(b) Équation d'équilibre mécanique en flexion

$$\begin{cases} -\partial_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}(u_3^{0\varepsilon}) = p_3^\varepsilon + \partial_\alpha m_\alpha^\varepsilon & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ u_3^{0\varepsilon} = 0 & \text{sur } \partial\omega, \\ \partial_\nu u_3^{0\varepsilon} = 0 & \text{sur } \partial\omega, \\ M_{\alpha\beta}(u_3^{0\varepsilon}) \cdot n_\alpha^\varepsilon n_\beta^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon - \partial\omega, \\ \left(\partial_\alpha M_{\alpha\beta}(u_3^{0\varepsilon}) \right) \cdot n_\beta^\varepsilon + \partial_\tau \left(M_{\alpha\beta}(u_3^{0\varepsilon}) n_\alpha^\varepsilon \tau_\beta \right) = -\partial_\alpha m_\alpha \cdot n_\alpha^\varepsilon & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon - \partial\omega. \end{cases} \quad (3.3.17)$$

(c) Équation d'équilibre électrique

$$\begin{cases} -\partial_\alpha Q_\alpha(u_l^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) = 0 & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ \phi^{0\varepsilon} = 0 & \text{sur } \partial\omega, \\ Q_l(u_l^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) \cdot n_\alpha^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon - \partial\omega, \end{cases} \quad (3.3.18)$$

où $N_{\alpha\beta}$, Q_α et $M_{\alpha\beta}$ sont définis par le système (3.3.11).

3.3.3 Conclusions et commentaires

- i) L'importance physique dans le choix des ordres de grandeur (3.3.7) est le rapport des ordres en h entre le déplacement plan et transverse, qui doit être de l'ordre de h . Ce qui permet de tenir compte du fait que la rigidité d'extension est d'ordre supérieur à la rigidité de flexion.

- ii) Le choix des ordres de grandeur pour les déplacements est classique dans le cadre de l'élasticité linéaire. Par contre le choix de l'ordre du potentiel électrique, est dicté par le fait qu'on souhaite obtenir simultanément la convergence du déplacement et le potentiel électrique vers des limites non nulles.
- iii) Le choix des ordres pour les charges extérieurs (3.3.8), a été choisi uniquement pour avoir $u_i(h)$ et $u_3(h)$ du même ordre. Ceci, par la suite, a permis d'obtenir $u_i(h)$ et $u_3(h)$ à l'ordre zéro, après le passage à la limite de h vers zéro.
- iv) D'après la conclusion (3.3.9), le déplacement mécanique vérifie bien les hypothèses de Kirchhoff-Love.
- v) Nous constatons l'impossibilité de séparer l'étude mécanique de l'étude électrique, et nous observons la symétrie du problème variationnel (3.3.10)-(3.3.11); contrairement à ce qu'on a pu distinguer, si en considérant au départ un problème du piézoélectrique de court-circuité (voir M.Rahmoune [75]).

Remarque 3.3.3

Cette étude basée sur l'analyse asymptotique des plaques minces linéairement piézoélectriques montre que, selon le type des conditions aux limites électriques considérées, il apparaît lorsque l'épaisseur tend vers zéro, deux modèles distincts (une plaque isolée ou court-circuitée), dont les lois de comportements électromécaniques sont en général différentes. ■

3.4 Homogénéisation d'une plaque piézoélectrique perforée

Une écriture forte du problème variationnel bidimensionnel (3.3.16)-(3.3.17)-(3.3.18), nous permet de découpler les équations vérifiées par les déplacements verticaux et celles vérifiées par les déplacements horizontaux, en deux problèmes : un problème membranaire et un problème en flexion. Cette écriture facilitera par la suite l'étude de l'homogénéisation d'une plaque piézoélectrique périodiquement perforée.

3.4.1 Problèmes modèles

Dans cette section, on considère une plaque piézoélectrique homogène isolée, ce qui revient à dire que ses coefficients sont indépendants de la coordonnée x_3^ε . Le problème ici consiste à déterminer le couple de déplacement extension-flexion $u^{0\varepsilon} = (u_l^{0\varepsilon}, u_3^{0\varepsilon})$ et le potentiel électrique $\phi^{0\varepsilon}$, solutions de deux problèmes : le problème membranaire et le problème en flexion, définis comme suit :

(i) Équation d'équilibre électro-mécanique membranaire

$$\begin{cases} -\partial_\beta N_{\alpha\beta}(u_l^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) = p_\alpha^\varepsilon & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ -\partial_\alpha Q_\alpha^\varepsilon(u_l^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) = 0 & \text{dans } \omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (3.4.19)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_l^{0\varepsilon} = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ \phi^{0\varepsilon} = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ N_{\alpha\beta}^\varepsilon(u_l^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) \cdot n_\alpha^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\omega_\varepsilon - \partial\omega, \\ Q_l^\varepsilon(u_l^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) \cdot n_\alpha^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\omega_\varepsilon - \partial\omega. \end{array} \right. \quad (3.4.20)$$

La loi de comportement est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{\alpha\beta}^\varepsilon(u_l^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) = 2 \left[\hat{c}_{\alpha\beta\delta\gamma}^\varepsilon s_{\delta\gamma}(u_l^{0\varepsilon}) - \hat{e}_{\gamma\alpha\beta}^\varepsilon E_\gamma(\phi^{0\varepsilon}) \right], \\ Q_\alpha^\varepsilon(u_l^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) = 2 \left[\hat{e}_{\alpha\gamma\theta}^\varepsilon s_{\gamma\theta}(u_l^{0\varepsilon}) + \hat{d}_{\alpha\delta}^\varepsilon E_\delta(\phi^{0\varepsilon}) \right], \end{array} \right. \quad (3.4.21)$$

avec

$$l = 1, 2. \quad E_\delta(\phi^\varepsilon) = \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial x_\delta}.$$

(ii) Équation d'équilibre mécanique en flexion

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}^\varepsilon(u_3^{0\varepsilon}) = p_3^\varepsilon + \partial_\alpha m_\alpha^\varepsilon \text{ dans } \omega_\varepsilon, \\ u_3^{0\varepsilon} = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ \partial_\nu u_3^{0\varepsilon} = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ M_{\alpha\beta}^\varepsilon(u_3^{0\varepsilon}) \cdot n_\alpha^\varepsilon n_\beta^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\omega_\varepsilon - \partial\omega, \\ \left(\partial_\alpha M_{\alpha\beta}^\varepsilon(u_3^{0\varepsilon}) \right) \cdot n_\beta^\varepsilon + \partial_\tau \left(M_{\alpha\beta}^\varepsilon(u_3^{0\varepsilon}) n_\alpha^\varepsilon \tau_\beta \right) = -\partial_\alpha m_\alpha^\varepsilon \cdot n_\alpha^\varepsilon \text{ sur } \partial\omega_\varepsilon - \partial\omega, \end{array} \right. \quad (3.4.22)$$

où la loi de comportement est donnée par

$$M_{\alpha\beta}^\varepsilon(u_3^{0\varepsilon}) = -\frac{2}{3} \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}^\varepsilon \frac{\partial^2 u_3^{0\varepsilon}}{\partial x_\delta \partial x_\tau}.$$

3.4.2 Problèmes variationnels

On formule dans cette section les deux problèmes variationnels associés aux problèmes membranaire (3.4.19)-(3.4.20)-(3.4.21) et en flexion (3.4.22), ce qui nous permet par la suite d'établir l'existence et l'unicité de la solution associée à chaque problème.

Le problème variationnel correspondant au problème membranaire (3.4.19)-(3.4.20)-(3.4.21), est défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_l^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) \in V_\varepsilon^1(\omega_\varepsilon) \times V_\varepsilon^2(\omega_\varepsilon), \text{ tels que :} \\ \int_{\omega_\varepsilon} \left\{ N_{\alpha\beta}^\varepsilon(u_l^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) s_{\alpha\beta}(v_l^\varepsilon) + Q_\alpha^\varepsilon(u_l^{0\varepsilon}, \phi^{0\varepsilon}) E_\alpha(\psi^\varepsilon) \right\} dx^\varepsilon = \int_{\omega_\varepsilon} p_l v_l^\varepsilon dx^\varepsilon, \\ \forall (v_l^\varepsilon, \psi^\varepsilon) \in V_\varepsilon^1(\omega_\varepsilon) \times V_\varepsilon^2(\omega_\varepsilon), \end{array} \right. \quad (3.4.23)$$

avec

$$\begin{aligned} V_\varepsilon^1(\omega_\varepsilon) &= \left\{ v_\iota^\varepsilon \in H^1(\omega_\varepsilon), v_\iota^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\}, \quad \iota = 1, 2, \\ V_\varepsilon^2(\omega_\varepsilon) &= \left\{ \phi^\varepsilon \in H^1(\omega_\varepsilon), \phi^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\}. \end{aligned}$$

Le problème variationnel associé au problème en flexion (3.4.22), est défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_3^{0\varepsilon} \in K_\varepsilon(\omega_\varepsilon), \text{ tels que :} \\ \int_{\omega_\varepsilon} M_{\alpha\beta}^\varepsilon(u_3^{0\varepsilon}) \partial_{\alpha\beta} v_3^\varepsilon dx^\varepsilon = \int_{\omega_\varepsilon} (p_3 v_3^\varepsilon + m_\alpha \partial_\alpha v_3^\varepsilon) dx^\varepsilon, \\ \forall v_3^\varepsilon \in K_\varepsilon(\omega_\varepsilon), \end{array} \right. \quad (3.4.24)$$

avec

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(\omega_\varepsilon) &= \left\{ v_3^\varepsilon \in H^2(\omega_\varepsilon), v_3^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\omega \text{ et } \partial_\nu v_3^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\}, \\ \partial_{\alpha\beta} v_3^\varepsilon &= \frac{\partial^2 v_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \end{aligned}$$

Remarque 3.4.1

- i) Par un procédé classique basé sur le lemme de Lax-Milgram, on peut démontrer l'existence et l'unicité de la solution des deux problèmes (membranaire et en flexion).
- ii) On remarque que la plaque piézoélectrique homogène ne possède pas de couplage flexion-extension, ce qui simplifie considérablement la nature du couplage électromécanique. Aussi il est clair que la charge électrique est induite seulement par l'extension et non pas par la flexion.
- iii) La remarque déjà faite dans le cas d'un corps piézoélectrique perforé est encore valable ici. Il y a une autre formulation variationnelle dont la forme bilinéaire n'est pas coercive mais symétrique, contrairement à la formulation (3.4.23) dont la forme bilinéaire est coercive et non symétrique.
- iv) Dans ce cas, on peut séparer l'étude mécanique de l'étude électrique. On traite initialement le problème mécanique, puis on calcule les paramètres électriques explicitement en fonction du déplacement. ■

3.4.3 Résultat de convergence pour le problème membranaire

Dans cette section, on énonce le résultat de la convergence pour le problème membranaire, qui nous décrit le problème homogénéisé et nous permet par la suite de déterminer les tenseurs homogénéisés.

En reprenant les mêmes démarches développées dans le chapitre précédent, dans le cas d'un corps piézoélectrique perforé, on obtient un résultat analogue au résultat principal obtenu, qui décrit le comportement de la solution du problème membranaire quand la taille des perforations tend vers zéro (Théorème 2.7.1).

Théorème 3.4.1 (Théorème principal pour le problème membranaire)

Les suites $(u_\iota^{0\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(\phi^{0\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ avec $(\iota = 1, 2)$ convergent au sens double échelle vers u_ι et ϕ respectivement, telle que (u_ι, ϕ) est l'unique solution de ce problème homogénéisé suivant

$$\begin{cases} -\mathbf{div} \mathbf{N}^H(u_\iota, \phi) = \theta p_\iota & \text{dans } \omega, \\ -\mathbf{div} \mathbf{Q}^H(u_\iota, \phi) = 0 & \text{dans } \omega, \\ u_\iota = 0 & \text{sur } \partial\omega, \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{cases} \quad (3.4.25)$$

où θ représente la fraction volumique sur l'élément de référence. La nouvelle loi de comportement homogénéisé est donnée par

$$\begin{cases} \mathbf{N}_{\alpha\beta}^H(u_\iota, \phi) = \bar{\hat{c}}_{\alpha\beta\zeta\eta} s_{\zeta\eta,x}(u_\iota) + \bar{\hat{e}}_{\zeta\alpha\beta} \frac{\partial\phi}{\partial x_\zeta}, \\ \mathbf{Q}_\alpha^H(u_\iota, \phi) = -\bar{\hat{e}}_{\alpha\zeta\eta} s_{\zeta\eta,x}(u_\iota) + \bar{\hat{d}}_{\alpha\zeta} \frac{\partial\phi}{\partial x_\zeta}. \end{cases} \quad (3.4.26)$$

Les coefficients des tenseurs homogénéisés $\bar{\hat{c}}_{\alpha\beta\zeta\eta}$, $\bar{\hat{e}}_{\zeta\alpha\beta}$ et $\bar{\hat{d}}_{\alpha\zeta}$ sont donnés par

$$\bar{\hat{c}}_{\alpha\beta\lambda\mu} = \left\langle \hat{c}_{\alpha\beta\zeta\eta} \left[\tau_{\lambda\mu}^{\zeta\eta} + s_{\zeta\eta,y}(w_\iota^{\lambda\mu}) \right] + \hat{e}_{\zeta\alpha\beta} \frac{\partial\varphi^{\lambda\mu}}{\partial y_\zeta} \right\rangle, \quad (3.4.27)$$

$$\begin{aligned} \bar{\hat{e}}_{\delta\alpha\beta} &= \left\langle \hat{c}_{\alpha\beta\zeta\eta} s_{\zeta\eta,y}(q_\iota^\delta) + \hat{e}_{\zeta\alpha\beta} \left[\delta_{\zeta\delta} + \frac{\partial\psi^\delta}{\partial y_\zeta} \right] \right\rangle, \\ &= \left\langle \hat{e}_{\delta\lambda\mu} \left[\tau_{\lambda\mu}^{\zeta\eta} + s_{\zeta\eta,y}(w_\iota^{\lambda\mu}) \right] - \hat{d}_{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi^{\lambda\mu}}{\partial y_\beta} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

$$\bar{\hat{d}}_{\alpha\delta} = \left\langle -\hat{e}_{\alpha\zeta\eta} s_{\zeta\eta,y}(q_\iota^\delta) + \hat{d}_{\alpha\beta} \left[\delta_{\beta\delta} + \frac{\partial\psi^\delta}{\partial y_\beta} \right] \right\rangle, \quad (3.4.29)$$

où pour une fonction h , on note par $\langle h \rangle = \int_{Y^*} h(y) dy$ la moyenne sur Y^* de h . Sachant que les fonctions locales $(w_\iota^{\lambda\mu}, \varphi^{\lambda\mu})$ et (q_ι^ν, ψ^ν) introduites dans les expressions précédentes, sont définies comme solutions de ces deux problèmes cellulaires (locaux)

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_\beta} \left\{ \hat{c}_{\alpha\beta\zeta\eta}(x, y) \left[\tau_{\lambda\mu}^{\zeta\eta} + s_{\zeta\eta,y}(w_\iota^{\lambda\mu}) \right] + \hat{e}_{\zeta\alpha\beta}(x, y) \frac{\partial\varphi^{\lambda\mu}}{\partial y_\zeta} \right\} = 0 & \text{dans } Y^*, \\ -\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left\{ -\hat{e}_{\alpha\zeta\eta}(x, y) \left[\tau_{\lambda\mu}^{\zeta\eta} + s_{\zeta\eta,y}(w_\iota^{\lambda\mu}) \right] + \hat{d}_{\alpha\beta}(x, y) \frac{\partial\varphi^{\lambda\mu}}{\partial y_\beta} \right\} = 0 & \text{dans } Y^*, \\ w_\iota^{\lambda\mu}, \varphi^{\lambda\mu} & Y^* - \text{périodiques,} \end{cases} \quad (3.4.30)$$

où

$$\tau_{\lambda\mu}^{\zeta\eta} = \frac{1}{2} \left[\delta_{\zeta\lambda} \delta_{\eta\mu} + \delta_{\zeta\mu} \delta_{\eta\lambda} \right] \quad 1 \leq \lambda, \zeta, \mu, \eta \leq 2,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_\beta} \left\{ \hat{c}_{\alpha\beta\zeta\eta}(x, y) s_{\zeta\eta, y}(q_l^\delta) + \hat{e}_{\zeta\alpha\beta}(x, y) \left[\delta_{\zeta\delta} + \frac{\partial \psi^\delta}{\partial y_\zeta} \right] \right\} = 0 \quad \text{dans } Y^*, \\ -\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left\{ -\hat{e}_{\alpha\zeta\eta}(x, y) s_{\zeta\eta, y}(q_l^\delta) + \hat{d}_{\alpha\beta}(x, y) \left[\delta_{\beta\delta} + \frac{\partial \psi^\delta}{\partial y_\beta} \right] \right\} = 0 \quad \text{dans } Y^*, \\ q_l^\delta, \psi^\delta \quad Y^* - \text{périodiques.} \end{array} \right. \quad (3.4.31) \quad \blacksquare$$

3.4.4 Résultat de correcteur pour le problème membranaire

On reprend la même démonstration du résultat de correcteur, présentée dans la section 2.9, dans le cas d'un corps piézoélectrique périodiquement perforé. De façon analogue, on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.4.2 (Correcteur)

On a les deux convergences fortes suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{u}}^{0\varepsilon}(x) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[\mathbf{u}(x) + \mathbf{u}_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } (H^1(\omega))^2, \\ \tilde{\Phi}^{0\varepsilon}(x) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[\Phi(x) + \Phi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } H^1(\omega). \end{array} \right.$$

3.4.5 Résultat de convergence pour le problème en flexion

Dans cette section, nous nous intéressons au comportement asymptotique de la déformation en flexion lorsque le paramètre des perforations tend vers zéro. Ce qui nous mène à énoncer le théorème suivant

Théorème 3.4.3 (Théorème principal pour le problème en flexion)

La suite $(u_3^{0\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ solution du problème (3.4.22), converge à deux échelles vers $u_3 \in H_0^2(\omega)$, telle que u_3 est l'unique solution du problème homogénéisé suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(b_{\alpha\beta\gamma\tau}^H \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\gamma \partial x_\tau}(x) \right) = \theta \left(p_3 + \partial_\alpha m_\alpha \right) \quad \text{dans } \omega, \\ u_3 = 0 \quad \text{sur } \partial\omega, \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_\nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega. \end{array} \right. \quad (3.4.32)$$

Le coefficient du tenseur en flexion homogénéisé $b_{\alpha\beta\gamma\tau}^H$ est donné par

$$b_{\alpha\beta\gamma\tau}^H = \left\langle \hat{c}_{\alpha\beta\zeta\nu}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y_\zeta \partial y_\nu} \left(\Pi_3^{\gamma\tau} + \chi_3^{\gamma\tau} \right) \right\rangle, \quad (3.4.33)$$

avec $\Pi_3^{\gamma\tau}(y) = \frac{1}{2} y_\gamma y_\tau$.

Sachant que les fonctions locales $\chi_3^{\gamma\tau}$ introduites dans l'expression du tenseur homogénéisé, sont définies comme solutions du problème cellulaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \left\{ \hat{c}_{\alpha\beta\nu\zeta}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y_\nu \partial y_\zeta} \left(\chi_3^{\gamma\tau} + \Pi_3^{\gamma\tau} \right) \right\} dy = 0 \text{ dans } Y^*, \\ \partial_{\beta, y} \left\{ \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \left[\Sigma_{\gamma\eta}^{\delta\tau} + \partial_{\delta\tau, y}^2 \chi_3^{\gamma\eta}(y) \right] \right\} n_\alpha = 0 \text{ dans } \partial Y^* - \partial Y, \\ \left\{ \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \left[\Sigma_{\gamma\eta}^{\delta\tau} + \partial_{\delta\tau, y}^2 \chi_3^{\gamma\eta}(y) \right] \right\} n_\beta = 0 \text{ dans } \partial Y^* - \partial Y, \\ \chi_3^{\gamma\tau} \text{ } Y^* - \text{périodiques,} \\ \Pi_3^{\gamma\tau}(y) = \frac{1}{2} y_\gamma y_\tau. \quad \blacksquare \end{array} \right. \quad (3.4.34)$$

Démonstration :

La démonstration se fait en six étapes

(i) Estimation a priori

En remplaçant les fonctions tests dans le problème variationnel (3.4.24), par

$$v_3^\varepsilon = u_3^\varepsilon,$$

On obtient

$$\int_{\omega_\varepsilon} M_{\alpha\beta}^\varepsilon(u_3^{0\varepsilon}) \frac{\partial^2 u_3^{0\varepsilon}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} dx = \int_{\omega_\varepsilon} \left(p_3 u_3^{0\varepsilon} + m_\alpha \partial_\alpha u_3^{0\varepsilon} \right) dx.$$

En utilisant la coercivité des $\bar{c}_{\alpha\beta\nu\zeta}$ et l'inégalité de Poincaré dans les domaines perforés, on obtient

$$C \| u_3^{0\varepsilon} \|_{H^2(\omega_\varepsilon)}^2 \leq \int_{\omega_\varepsilon} \hat{c}_{\alpha\beta\nu\zeta} \partial_{\alpha\beta, x} (u_3^{0\varepsilon}) \partial_{\nu\zeta, x} (u_3^{0\varepsilon}) dx, \quad \text{avec } C > 0. \quad (3.4.35)$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on aboutit à

$$C \| u_3^{0\varepsilon} \|_{H^2(\omega_\varepsilon)}^2 \leq \| p_3 \|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \| u_3^{0\varepsilon} \|_{L^2(\omega_\varepsilon)} + \| m_\alpha \|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \| \partial_\alpha u_3^{0\varepsilon} \|_{L^2(\omega_\varepsilon)}, \quad (3.4.36)$$

nous avons

$$\begin{cases} \| p_3 \|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \leq \| p_3 \|_{L^2(\omega)}, \\ \| m_\alpha \|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \leq \| m_\alpha \|_{L^2(\omega)}, \end{cases}$$

on obtient donc d'après (3.4.35), l'estimation a priori suivante

$$\| u_3^{0\varepsilon} \|_{H^2(\omega_\varepsilon)} \leq C, \quad (3.4.37)$$

avec C une constante indépendante de ε .

(ii) Passage à la limite

A partir de l'estimation a priori (3.4.37) et le résultat fondamental de la convergence à deux échelles (voir la Proposition 2.4.1), on peut aboutir au résultat suivant

Proposition 3.4.1

(a) Il existe une fonction $u_3(x) \in H_0^2(\omega)$, telle que la suite $(\tilde{u}_3^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge à deux échelles vers $\chi(y)u_3(x)$.

(b) Il existe une fonction $u_3^2(x, y) \in L^2[\omega; H_{\text{per}}^2(Y^*)/\mathbb{R}]$, telle que

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\delta \partial x_\tau}(x) \longrightarrow \chi(y) \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\delta \partial x_\tau}(x) + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau}(x, y) \right] \quad \text{au sens double échelle.}$$

Preuve :

A partir de l'estimation a priori (3.4.37), les deux suites $(u_3^\varepsilon(x))_\varepsilon$ et $(\frac{\partial^2 u_3^\varepsilon(x)}{\partial x_\delta \partial x_\tau})_\varepsilon$ sont uniformément bornées, et à partir du résultat fondamental de la convergence double échelle, on peut extraire des sous-suites notées en cours par $(u_3^\varepsilon(x))_\varepsilon$ et $(\frac{\partial^2 u_3^\varepsilon(x)}{\partial x_\delta \partial x_\tau})_\varepsilon$, qui convergent au sens de deux échelles vers $\varrho(x, \cdot) \in L^2[\omega; L_{\text{per}}^2(Y^*)/\mathbb{R}]$ et $\eta(x, \cdot) \in L^2[\omega; L_{\text{per}}^2(Y^*)/\mathbb{R}]$ respectivement, alors par définition, pour chacune des fonctions tests

$$\begin{cases} \Theta(x, y) \in C_0^\infty[\omega; C_{\text{per}}^\infty(Y)], \\ \Psi(x, y) \in C_0^\infty[\omega; C_{\text{per}}^\infty(Y)], \\ \Theta(x, y) = \Psi(x, y) = 0 \text{ si } y \in Y - Y^*, \end{cases} \quad (3.4.38)$$

on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega_\varepsilon} u_3^{0\varepsilon}(x) \Theta(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_\omega \int_{Y^*} \varrho(x, y) \Theta(x, y) dx dy, \quad (3.4.39)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 u_3^{0\varepsilon}(x)}{\partial x_\delta \partial x_\tau} \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_\omega \int_{Y^*} \eta(x, y) \Psi(x, y) dx dy. \quad (3.4.40)$$

Une intégration par parties, donne

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 u_3^{0\varepsilon}(x)}{\partial x_\delta \partial x_\tau} \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx &= \varepsilon^2 \int_{\omega_\varepsilon} u_3^{0\varepsilon}(x) \frac{\partial^2 \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon})}{\partial x_\delta \partial x_\tau} dx, \\ &= \int_{\omega_\varepsilon} u_3^{0\varepsilon}(x) \left\{ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_\delta \partial x_\tau} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_\delta \partial y_\tau} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_\delta \partial x_\tau} \right) \right\} (x, \frac{x}{\varepsilon}) dx \\ &+ \int_{\omega_\varepsilon} u_3^{0\varepsilon}(x) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_\delta \partial y_\tau} (x, \frac{x}{\varepsilon}) dx, \end{aligned} \quad (3.4.41)$$

il est clair que

$$\varrho(x, y) = \eta(x, y) = 0 \quad \text{si } y \in Y - Y^*.$$

Par passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ et à l'aide de (3.4.39), (3.4.40) et (3.4.41), on obtient

$$0 = \int_\omega \int_{Y^*} \varrho(x, y) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_\delta \partial y_\tau}(x, y) dx dy,$$

ceci implique que $\varrho(x, y)$ est indépendante de y sur Y^* . i.e. il existe $u_3(x) \in H_0^2(\omega)$, telle que :

$$\varrho(x, y) = \chi(y)u_3(x),$$

ceci achève la démonstration de la première assertion.

Pour la deuxième assertion, choisissons maintenant des fonctions tests, qui vérifient

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_\delta \partial y_\tau}(x, y) = 0, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_\delta \partial y_\tau}(x, y) = 0. \end{cases}$$

Une intégration par parties, donne

$$\int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 u_3^{0\varepsilon}(x)}{\partial x_\delta \partial x_\tau} \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_{\omega_\varepsilon} u_3^{0\varepsilon}(x) \frac{\partial^2 \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon})}{\partial x_\delta \partial x_\tau}.$$

En passant à $\varepsilon \rightarrow 0$ au sens double échelle, on obtient

$$\int_{\omega} \int_{Y^*} \eta(x, y) \Psi(x, y) dx dy = \int_{\omega} \int_{Y^*} u_3(x) \frac{\partial^2 \Psi(x, y)}{\partial x_\delta \partial x_\tau} dx dy.$$

Par l'intégration par parties une deuxième fois et pour chaque $\Psi(x, y) \in L^2[\omega; H_{\text{per}}^2(Y^*)/\mathbb{R}]$, avec $\frac{\partial^2 \Psi(x, y)}{\partial y_\delta \partial y_\tau}(x, y) = 0$ sur $\partial Y^* - \partial Y$, on obtient

$$\int_{\omega} \int_{Y^*} \left[\eta(x, y) - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_\delta \partial y_\tau}(x) \right] \Psi(x, y) dx dy = 0.$$

D'après Ekeland-Temam [32], il existe $u_3^2(x, y) \in L^2[\omega; H_{\text{per}}^2(Y^*)/\mathbb{R}]$, telle que

$$\eta(x, y) = \chi(y) \left[u_3(x) + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau}(x, y) \right],$$

ceci achève la démonstration de la deuxième assertion. ■

(iii) Identification des limites à deux échelles

En suivant toujours *la méthode alternative* développée par G.Nguetseng [64], qui consiste à multiplier le problème initial par des fonctions tests du type

$$v_3^\varepsilon(x) = v_3(x, \frac{x}{\varepsilon}) = v_3^0(x) + \varepsilon^2 v_3^2(x, \frac{x}{\varepsilon}),$$

avec

$$v_3^0 \in C_0^\infty(\Omega) \text{ et } v_3^2 \in C_0^\infty(\Omega; C_{\text{per}}^\infty(Y)).$$

Ce choix est motivé, par le fait que si on applique la méthode des échelles multiples basée sur un développement asymptotique, on démontre que

$$\begin{cases} u_3 = u_3(x), \\ u_3^1 = u_3^1(x), \\ u_3^2 = u_3^2(x, y). \end{cases} \quad (3.4.42)$$

Nous avons

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_\delta \partial x_\tau} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_\delta \partial z_\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_\delta \partial y_\tau} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_\delta \partial z_\tau} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_\delta \partial y_\tau},$$

où z est la variable macroscopique et y est la variable microscopique. Pour alléger l'écriture, nous noterons par la suite la variable macroscopique par x au lieu de z .

A partir d'un développement asymptotique

$$v^\varepsilon(x) = v^0(x, y) + \varepsilon v^1(x, y) + \varepsilon^2 v^2(x, y) + \varepsilon^3 v^3(x, y) + \dots \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_\delta \partial x_\tau} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y_\delta \partial y_\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial^2 v^0}{\partial x_\delta \partial y_\tau} + \frac{\partial^2 v^0}{\partial y_\delta \partial x_\tau} + \frac{\partial^2 v^1}{\partial y_\delta \partial y_\tau} \right\} \\ &+ \left\{ \frac{\partial^2 v^0}{\partial x_\delta \partial x_\tau} + \frac{\partial^2 v^1}{\partial x_\delta \partial y_\tau} + \frac{\partial^2 v^1}{\partial y_\delta \partial x_\tau} + \frac{\partial^2 v^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau} \right\} \\ &+ \varepsilon \left\{ \frac{\partial^2 v^1}{\partial x_\delta \partial x_\tau} + \frac{\partial^2 v^2}{\partial x_\delta \partial y_\tau} + \frac{\partial^2 v^2}{\partial y_\delta \partial x_\tau} + \frac{\partial^2 v^3}{\partial y_\delta \partial y_\tau} \right\} \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial^2 v^2}{\partial x_\delta \partial x_\tau} + \frac{\partial^2 v^3}{\partial x_\delta \partial y_\tau} + \frac{\partial^2 v^3}{\partial y_\delta \partial x_\tau} \right\} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 v^3}{\partial x_\delta \partial x_\tau} + \dots \end{aligned}$$

A l'aide du choix proposé dans (3.4.42), la dernière équation se simplifie sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_3^\varepsilon}{\partial x_\delta \partial x_\tau} &= \left\{ \frac{\partial^2 v_3^0}{\partial x_\delta \partial x_\tau} + \frac{\partial^2 v_3^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau} \right\} \\ &+ \varepsilon \left\{ \frac{\partial^2 v_3^2}{\partial x_\delta \partial y_\tau} + \frac{\partial^2 v_3^2}{\partial y_\delta \partial x_\tau} \right\} \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_3^2}{\partial x_\delta \partial x_\tau} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 v_3^3}{\partial x_\delta \partial x_\tau} + \dots \end{aligned}$$

Le problème variationnel suivant (voir le système (3.4.22))

$$\int_{\omega_\varepsilon} \frac{2}{3} \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}^\varepsilon \frac{\partial^2 u_3^\varepsilon}{\partial x_\delta \partial x_\tau} \frac{\partial^2 v_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} dx = \int_{\omega_\varepsilon} \left(p_3 v_3^\varepsilon + m_\alpha \partial_\alpha v_3^\varepsilon \right) dx,$$

s'écrit donc sous la forme

$$\begin{aligned} &\int_{\omega_\varepsilon} \frac{2}{3} \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}^\varepsilon \frac{\partial^2 u_3^\varepsilon}{\partial x_\delta \partial x_\tau} \left\{ \left[\frac{\partial^2 v_3^0}{\partial x_\delta \partial x_\tau} + \frac{\partial^2 v_3^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau} \right] + \varepsilon \left[\frac{\partial^2 v_3^2}{\partial x_\delta \partial y_\tau} + \frac{\partial^2 v_3^2}{\partial y_\delta \partial x_\tau} \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_3^2}{\partial x_\delta \partial x_\tau} \right\}, \\ &= \int_{\omega_\varepsilon} \left\{ p_3 \left(v_3^0 + \varepsilon v_3^1 + \varepsilon^2 v_3^2 \right) + m_\alpha \partial_\alpha \left(v_3^0 + \varepsilon v_3^1 + \varepsilon^2 v_3^2 \right) \right\} dx. \end{aligned} \quad (3.4.43)$$

En passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ au sens double échelle et en utilisant la Proposition 3.4.1, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\omega \int_{Y^*} \frac{2}{3} \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \left(\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_\delta \partial x_\tau} + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau} \right) \left(\frac{\partial^2 v_3^0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 v_3^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right) dx dy \\ &= \int_\omega \int_{Y^*} \left(p_3 v_3^0 + m_\alpha \partial_\alpha v_3^0 \right) dx dy, \\ &= \theta \int_\omega \left(p_3 v_3^0 + m_\alpha \partial_\alpha v_3^0 \right) dx. \end{aligned} \quad (3.4.44)$$

Par la densité des fonctions de $C_0^\infty(\omega)$ dans $H_0^2(\omega)$, l'équation (3.4.44) reste vérifiée pour tout $v^0 \in H_0^2(\omega)$, $\Psi^0 \in H_0^2(\omega)$ et pour tout $v^2 \in L^2[\omega; H_{\text{per}}^2(Y^*)/\mathbb{R}]$, $\Psi^2 \in L^2[\omega; H_{\text{per}}^2(Y^*)/\mathbb{R}]$. Par l'intégration par parties et en prenant successivement dans l'équation (3.4.44),

$$\begin{cases} v_3^0 = 0, & \text{et } v_3^2 \neq 0, \\ v_3^2 = 0, & \text{et } v_3^0 \neq 0, \end{cases}$$

on peut conclure que l'équation (3.4.44), est exactement la formulation variationnelle associée au problème suivant

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left\{ \int_{Y^*} \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\delta \partial x_\tau}(x) + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau}(x, y) \right] dy \right\} = \theta (p_3 + \partial_\alpha m_\alpha) & \text{dans } \omega, \\ -\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \left\{ \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\delta \partial x_\tau} u_3 + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau}(x, y) \right] \right\} = 0 & \text{dans } \omega \times Y^*. \end{cases}$$

Pour établir l'existence et l'unicité de ce problème, il suffit de vérifier les hypothèses du lemme de Lax-Milgram. Pour cela il est clair que sous quelques hypothèses de bornitude et d'ellipticité du tenseur d'élasticité, la forme bilinéaire définie par le membre gauche de l'équation (3.4.44), est continue et coercive dans l'espace de Hilbert $H_0^2(\omega) \times L^2[\omega; H_{\text{per}}^2(Y^*)/\mathbb{R}]$ munis de la norme suivante

$$\sum_{\delta, \tau} \left\{ \left\| \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\delta \partial x_\tau} \right\|_{L^2(\omega)} + \left\| \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau} \right\|_{L^2(\omega \times Y^*)} \right\}.$$

Pour démontrer la coercivité, on a

$$\begin{aligned} & \int_\omega \int_{Y^*} \hat{c}_{\alpha\beta\gamma\theta}(x, y) \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\gamma \partial x_\theta}(x) + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\gamma \partial y_\theta}(x, y) \right) \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x) + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}(x, y) \right) dx dy \\ & \geq \alpha_c \int_\omega \int_{Y^*} \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x) + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}(x, y) \right]^2 dx dy. \end{aligned}$$

Finalement, on peut confirmer que $u_3(x)$ et $u_3^2(x, y)$ sont solutions de ce problème homogénéisé à deux échelles

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left\{ \int_{Y^*} \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau} \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\delta \partial x_\tau}(x) + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau}(x, y) \right] dy \right\} = \theta (p_3 + \partial_\alpha m_\alpha) & \text{dans } \omega, \\ -\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \left\{ \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau} \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\delta \partial x_\tau}(x) + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau}(x, y) \right] \right\} = 0 & \text{dans } \omega \times Y^*, \end{cases} \quad (3.4.45)$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} u_3(x) = 0 & \text{sur } \partial\omega, \\ \left\{ \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\delta \partial x_\tau}(x) + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau}(x, y) \right] \right\} \cdot n_\beta = 0 & \text{sur } \partial Y^* - \partial Y, \end{cases} \quad (3.4.46)$$

on a aussi

$$y \longrightarrow u_3^2(x, y) \text{ est } Y^* - \text{périodique en } y. \quad (3.4.47)$$

(iv) Calcul des coefficients du tenseur homogénéisé (effectif)

Le but de ce paragraphe, est de découpler le problème (3.4.45)-(3.4.46)-(3.4.47) sous forme de deux problèmes : *un problème homogénéisé et un problème local*, qui nous permet par la suite d'exprimer ce théorème de convergence sous sa forme alternative.

Par linéarité du problème étudié, posons

$$u_3^2(x, y) = \frac{\partial^2 u_3(x)}{\partial x_\gamma \partial x_\eta} \chi_3^{\gamma\eta}(y). \quad (3.4.48)$$

En remplaçant l'expression de $u_3^2(x, y)$ dans cette équation

$$-\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \left\{ \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\delta \partial x_\tau}(x) + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau}(x, y) \right] \right\} = 0 \quad \text{dans } \omega \times Y^*,$$

on obtient

$$-\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \left\{ \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\delta \partial x_\tau}(x) + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\gamma \partial x_\eta}(x) \frac{\partial^2 \chi_3^{\gamma\eta}}{\partial y_\delta \partial y_\tau}(y) \right] \right\} = 0,$$

qu'on peut aussi simplifier

$$-\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \left\{ \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \left[\Sigma_{\gamma\eta}^{\delta\tau} + \frac{\partial^2 \chi_3^{\gamma\eta}}{\partial y_\delta \partial y_\tau}(y) \right] \right\} = 0,$$

avec

$$\Sigma_{\gamma\eta}^{\delta\tau} = \frac{1}{2}(\delta_{\delta\gamma}\delta_{\tau\eta} + \delta_{\delta\eta}\delta_{\tau\gamma}) \text{ est le tenseur unitaire d'ordre quatre.}$$

A partir d'un calcul analytique simple, on peut définir les coefficients du tenseur en flexion homogénéisé (effectif), comme suit

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta\gamma\eta}^H &= \left\langle \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \left[\Sigma_{\gamma\eta}^{\delta\tau} + \frac{\partial^2 \chi_3^{\gamma\eta}}{\partial y_\delta \partial y_\tau}(y) \right] \right\rangle, \\ &= \left\langle \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau} \left[\Pi_3^{\gamma\eta} + \chi_3^{\gamma\eta} \right] \right\rangle, \\ &= \int_{Y^*} \left\{ \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau} \left[\Pi_3^{\gamma\eta} + \chi_3^{\gamma\eta} \right] \right\} dy, \end{aligned} \quad (3.4.49)$$

avec $\Pi_3^{\gamma\eta}(y) = \frac{1}{2}y_\gamma y_\eta$ et $\partial_{\delta\tau, y}^2(\Pi_3^{\gamma\eta}) = \frac{1}{2}(\delta_{\delta\gamma}\delta_{\tau\eta} + \delta_{\delta\eta}\delta_{\tau\gamma})$.

Sachant que les fonctions locales $\chi_3^{\gamma\eta}(y)$, sont des solutions de ce problème local

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \left\{ \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \left[\Sigma_{\gamma\eta}^{\delta\tau} + \partial_{\delta\tau, y}^2 \chi_3^{\gamma\eta}(y) \right] \right\} = 0 \text{ dans } Y^*, \\ \partial_{\beta, y} \left\{ \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \left[\Sigma_{\gamma\eta}^{\delta\tau} + \partial_{\delta\tau, y}^2 \chi_3^{\gamma\eta}(y) \right] \right\} n_\alpha = 0 \text{ dans } \partial Y^* - \partial Y, \\ \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \left[\Sigma_{\gamma\eta}^{\delta\tau} + \partial_{\delta\tau, y}^2 \chi_3^{\gamma\eta}(y) \right] n_\beta = 0 \text{ dans } \partial Y^* - \partial Y, \\ \chi_3^{\gamma\eta} \quad \quad \quad Y^* - \text{périodiques.} \end{array} \right. \quad (3.4.50)$$

Intéressons-nous à montrer l'existence et l'unicité des fonctions locales $\chi^{\gamma\eta}$. L'espace $\tilde{H}_{\text{per}}^2(Y^*)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé à la norme

$$\|v\|_{\tilde{H}_{\text{per}}^2(Y^*)} = \sum_{\alpha, \beta} |\partial_{\alpha\beta, y}^2(v)|_{L^2(Y)}.$$

Le problème variationnel associé au problème (3.4.50), s'écrit sous la forme

$$\int_{Y^*} \bar{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \partial_{\alpha\beta, y}^2(\chi^{\gamma\eta}) \partial_{\delta\tau, y}^2(v) dy = \int_{Y^*} \bar{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \partial_{\alpha\beta, y}^2(\Pi_3^{\gamma\eta}) \partial_{\delta\tau, y}^2(v) dy, \quad \forall v \in K(Y), \quad (3.4.51)$$

or le tenseur $\bar{c}_{\alpha\beta\delta\tau}$ est coercive. Donc la forme bilinéaire définie par le premier membre de (3.4.51) l'est également sur $\tilde{H}_{\text{per}}^2(Y^*)$. La forme linéaire définie par le second membre de (3.4.51) est continue sur $\tilde{H}_{\text{per}}^2(Y^*)$. En utilisant le théorème de Lax-Milgram, on déduit l'existence et l'unicité de $\chi^{\gamma\eta}$ dans $\tilde{H}_{\text{per}}^2(Y^*)$.

(v) **Propriétés des coefficients homogénéisés (effectifs)**

La proposition suivante, est un résultat sur les propriétés du tenseur de flexion $\mathcal{B}^H = (b_{\alpha\beta\gamma\eta}^H)$

Proposition 3.4.2

Les coefficients $b_{\alpha\beta\gamma\eta}^H$ du tenseur de flexion homogénéisé \mathcal{B}^H défini par (3.4.49), vérifient :

$$(a) \quad b_{\alpha\beta\gamma\eta}^H = b_{\gamma\eta\alpha\beta}^H = b_{\beta\alpha\gamma\eta}^H = b_{\alpha\beta\eta\gamma}^H,$$

$$(b) \quad b_{\alpha\beta\gamma\eta}^H \text{ est elliptique.}$$

La deuxième assertion signifie, qu'il existe $\Lambda_b^H \neq \Lambda_b^H(\varepsilon) > 0$, tel que pour tout tenseur $\xi_{\alpha\beta}$ d'ordre 2 symétrique ($\xi_{\alpha\beta} = \xi_{\beta\alpha}$) non nul, on a :

$$b_{\alpha\beta\gamma\eta}^H \xi_{\alpha\beta} \xi_{\gamma\eta} \geq \Lambda_b^H \xi_{\alpha\beta} \xi_{\alpha\beta}. \quad \blacksquare$$

Preuve :

(a) *La symétrie*

Il est évident qu'une partie de la symétrie est vérifiée

$$b_{\alpha\beta\gamma\eta}^H = b_{\beta\alpha\gamma\eta}^H = b_{\alpha\beta\eta\gamma}^H.$$

Il nous reste à montrer que

$$b_{\alpha\beta\gamma\eta}^H = b_{\gamma\eta\alpha\beta}^H.$$

L'idée est de transformer l'expression de coefficients $b_{\alpha\beta\gamma\eta}^H$ de manière à obtenir une formule symétrique. En utilisant la définition 3.4.49 de \mathcal{B}^H , le tenseur de flexion homogénéisé est évalué de la manière suivante

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta\gamma\eta}^H &= \int_{Y^*} \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau} [\Pi_3^{\gamma\eta} - \chi_3^{\gamma\eta}] dy, \\ &= \int_{Y^*} \hat{c}_{\zeta\delta\tau}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau} [\Pi_3^{\gamma\eta} - \chi_3^{\gamma\eta}] \delta_{\alpha\zeta} \delta_{\beta\delta} dy, \\ &= \int_{Y^*} \hat{c}_{\zeta\delta\tau}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau} [\Pi_3^{\gamma\eta} - \chi_3^{\gamma\eta}] \frac{\partial^2 \Pi_3^{\alpha\beta}}{\partial y_\zeta \partial y_\delta} dy, \\ &= \int_{Y^*} \hat{c}_{\zeta\delta\tau}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau} [\Pi_3^{\gamma\eta} - \chi_3^{\gamma\eta}] \frac{\partial^2}{\partial y_\zeta \partial y_\delta} [\Pi_3^{\alpha\beta} - \chi_3^{\alpha\beta}] dy, \\ &\quad - \int_{Y^*} \hat{c}_{\zeta\delta\tau}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau} [\Pi_3^{\gamma\eta} - \chi_3^{\gamma\eta}] \frac{\partial^2 \chi_3^{\alpha\beta}}{\partial y_\zeta \partial y_\delta} dy. \end{aligned} \quad (3.4.52)$$

En multipliant le système (3.4.50) par $\chi_3^{\alpha\beta}$ et en intégrant par parties, on aboutit à

$$\int_{Y^*} \hat{c}_{\zeta\delta\tau}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau} [\Pi_3^{\gamma\eta} - \chi_3^{\gamma\eta}] \frac{\partial^2 \chi_3^{\alpha\beta}}{\partial y_\zeta \partial y_\delta} dy = 0,$$

soit

$$b_{\alpha\beta\gamma\eta}^H = \int_{Y^*} \hat{c}_{\delta\eta\zeta\nu}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y_\delta \partial y_\eta} \left(\Pi_3^{\alpha\beta} - \chi_3^{\alpha\beta}(y) \right) \frac{\partial^2}{\partial y_\zeta \partial y_\nu} \left(\Pi_3^{\gamma\eta} - \chi_3^{\gamma\eta}(y) \right) dy, \quad (3.4.53)$$

alors à partir de la formule (3.4.53), on a clairement $b_{\alpha\beta\gamma\theta}^H = b_{\gamma\theta\alpha\beta}^H$.

(b) *L'ellipticité*

Pour l'ellipticité du tenseur $\mathcal{B}^H = (b_{\alpha\beta\gamma\theta}^H)$, en prenant ξ un tenseur d'ordre 2 symétrique ($\xi_{\alpha\beta} = \xi_{\beta\alpha}$), alors l'écriture (3.4.53) nous amène à poser

$$\tau_{\delta\eta} = \xi_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_\delta \partial y_\eta} \left(\Pi_3^{\alpha\beta} - \chi_3^{\alpha\beta} \right).$$

En tenant compte de l'ellipticité uniforme du tenseur $\hat{c}_{\lambda\mu\zeta}(x, y)$, nous pouvons donc écrire

$$b_{\alpha\beta\gamma\eta}^H \xi_{\alpha\beta} \xi_{\gamma\eta} \geq \int_{Y^*} \hat{c}_{\delta\eta\zeta\nu} \tau_{\delta\eta} \tau_{\zeta\nu} dy \geq \alpha_c \int_{Y^*} \tau_{\delta\eta} \tau_{\delta\eta} dy. \quad (3.4.54)$$

Démontrons par l'absurde, que la deuxième intégrale de (3.4.54) est strictement positive. Supposons donc que

$$\forall (\delta, \eta) \in \{1, 2\}^2, \quad \tau_{\delta\eta} = \xi_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_\delta \partial y_\eta} \left(\Pi_3^{\alpha\beta} - \chi_3^{\alpha\beta} \right) = 0, \quad (3.4.55)$$

soit

$$\left(\Pi_3^{\alpha\beta} - \chi_3^{\alpha\beta} \right) \xi_{\alpha\beta} = a_\iota y_\iota + b \quad a_\iota \text{ et } b \text{ étant des constantes } \iota = 1, 2. \quad (3.4.56)$$

En effet, si on a une fonction quelconque Φ , telle que

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}(y_1, y_2) = 0, \quad \forall (\alpha, \beta),$$

alors

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y_1}(y_1, y_2) = 0 \quad \text{d'où} \quad \Phi(y_1, y_2) = a(y_2)y_1 + b(y_2),$$

mais

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_2 \partial y_1}(y_1, y_2) = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial a(y_2)}{\partial y_2} = 0,$$

donc $a(y_2) = a_1$ qui ne dépend pas de y_ι ($\iota = 1, 2$), ainsi

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y_2}(y_1, y_2) = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 b(y_2)}{\partial y_2 \partial y_1} = 0,$$

donc $b(y_2) = a_2 y_2 + b$ avec a_2 et b indépendants de y_ι ($\iota = 1, 2$).

Donc on a montré que

$$\text{Si : } \forall (\alpha, \beta), \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}(y_1, y_2) = 0, \text{ alors } \Phi = a_\iota y_\iota + b,$$

ce qui prouve (3.4.56). Mais on a

$$\chi_3^{\alpha\beta} \xi_{\alpha\beta} = \Pi_3^{\alpha\beta} \xi_{\alpha\beta} + a_\iota y_\iota + b.$$

Un au moins des $\xi_{\alpha\beta}$ n'étant pas nul, l'égalité précédente contredit la périodicité des $\chi_3^{\alpha\beta}$, le second membre n'étant pas périodique, compte-tenu du fait que

$$\Pi_3^{\gamma\tau}(y) = \frac{1}{2}y_\gamma y_\tau.$$

Par conséquent la deuxième intégrale de (3.4.54) est bien strictement positive, ainsi on a

$$b_{\alpha\beta\gamma\eta}^H \xi_{\alpha\beta} \xi_{\gamma\eta} > 0 \quad \forall (\xi_{\alpha\beta}) \text{ symétrique, non nul.}$$

Considérons alors la fonction numérique Ψ définie sur \mathbb{R}^4 , par

$$\Psi(\xi_{\alpha\beta}) = b_{\alpha\beta\gamma\eta}^H \xi_{\alpha\beta} \xi_{\gamma\eta}.$$

Visiblement Ψ est continue sur \mathbb{R}^4 muni de la topologie associée à la norme

$$\|\tau\| = (\tau_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta})^{\frac{1}{2}}.$$

Sur la sphère unité, compacte, elle admet un minimum M , qu'elle doit atteindre.

Pour $(\xi_{\alpha\beta})$ tenseur symétrique non nul, nous avons

$$\Psi\left(\frac{\xi_{\alpha\beta}}{\|\xi\|}\right) \geq M, \quad \text{soit } b_{\alpha\beta\gamma\eta}^H \xi_{\alpha\beta} \xi_{\gamma\eta} \geq M \xi_{\alpha\beta} \xi_{\alpha\beta}.$$

Nous avons donc bien la relation de la coercivité recherchée

$$b_{\alpha\beta\gamma\eta}^H \xi_{\alpha\beta} \xi_{\gamma\eta} \geq M \xi_{\alpha\beta} \xi_{\alpha\beta}. \quad \blacksquare$$

(vi) Problème homogénéisé

A partir des sections précédentes, on peut écrire le problème homogénéisé à deux échelles (3.4.45)-(3.4.46)-(3.4.47), sous sa forme alternative, comme suit

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(b_{\alpha\beta\gamma\theta}^H \frac{\partial^2}{\partial x_\gamma \partial x_\theta} (u_3) \right) = \theta (p_3 + \partial_\alpha m_\alpha) & \text{dans } \omega, \\ u_3 = 0 & \text{sur } \partial\omega, \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_\nu} = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{cases} \quad (3.4.57)$$

ceci achève la démonstration du théorème principal de la convergence (Théorème 3.4.3).

Remarque 3.4.2

La solution du problème limite en flexion limite, vérifie un système différentiel d'ordre quatre. Celui-ci est défini à l'aide d'un tenseur en flexion homogénéisé qui vérifie les propriétés de symétrie et d'ellipticité. ■

3.4.6 Résultat de correcteur pour le problème en flexion

En suivant les mêmes démarches présentées dans la section 2.9, on peut énoncer le résultat suivant

Proposition 3.4.3 (Correcteur)

On a les deux convergences fortes suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tilde{u}_3^{0\varepsilon}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left\{ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x) + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\} \longrightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\omega), \\ \tilde{u}_3^{0\varepsilon}(x) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left\{ u_3(x) + u_3^2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\} \longrightarrow 0 \text{ fortement dans } H^2(\omega). \end{array} \right.$$

Preuve :

A partir du problème variationnel associé au problème (3.4.22), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_\varepsilon} \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{u}_3^{0\varepsilon}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right] \right\} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{u}_3^{0\varepsilon}}{\partial x_\delta \partial x_\tau} - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\delta \partial x_\tau} + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau} \right] \right\} dx \\ &= \int_{\omega_\varepsilon} \left(p_3 u_3^\varepsilon + m_\alpha \partial_\alpha u_3^\varepsilon \right) dx - \int_{\omega_\varepsilon} \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau} \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right] \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\delta \partial x_\tau} + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau} \right] dx \\ &- \int_{\omega_\varepsilon} \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau} \frac{\partial^2 \tilde{u}_3^{0\varepsilon}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\delta \partial x_\tau} + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\delta \partial y_\tau} \right] dx - \int_{\omega_\varepsilon} \hat{c}_{\alpha\beta\delta\tau} \frac{\partial^2 \tilde{u}_3^{0\varepsilon}}{\partial x_\delta \partial x_\tau} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right] dx. \end{aligned}$$

En passant à la limite de $\varepsilon \rightarrow 0$ et en utilisant le fait que le tenseur de flexion est elliptique, on aboutit à cette convergence forte (voir la section 2.9)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_3^{0\varepsilon}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left\{ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x) + \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\} \right\|_{L^2(\omega)} = 0,$$

alors par conséquent, on a la convergence forte suivante

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \tilde{u}_3^{0\varepsilon}(x) - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left\{ u_3(x) + u_3^2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\} \right\|_{H^2(\omega)} = 0. \quad \blacksquare$$

3.5 Conclusions et commentaires

Dans ce travail, nous avons réussi à déterminer le comportement asymptotique d'une plaque piézoélectrique périodiquement perforée. Ainsi on a déterminé tous les tenseurs homogénéisés (effectifs) pour les déplacements : membranaire et en flexion.

Dans ce chapitre, nous avons étudié le comportement d'une plaque mince lorsque $\varepsilon < h$. Lorsque $h < \varepsilon$, on reprend ce travail dans son intégralité, en prenant en premier lieu la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, et puis $h \rightarrow 0$, afin de récupérer à la fin les deux problèmes : membranaire et en flexion homogénéisés. La situation qu'il nous reste à étudier est dans le cas où ε et h , avec K une constante réelle, donc il faut prendre les deux limites simultanément, nous n'avons pas traité théoriquement cette situation, car elle ne nous intéresse pas numériquement, puisque elle ne se positionne pas dans les applications industrielles que nous étudierons dans la seconde partie.

L'existence de deux lois de comportement couplées pour l'équation de la piézoélectricité, nous indique l'importance du choix de type piézoélectrique (isolé ou court-circuité). Ce choix est important du fait que les coefficients homogénéisés varient en fonction du problème choisi.

Remarquons enfin que d'autres conditions aux limites, par exemple pour le cas d'un matériau piézoélectrique de court-circuité, peuvent être envisagées.

Même si théoriquement, on peut envisager une plaque purement piézoélectrique, nous sommes loin de la réalité puisque jusqu'à présent il est quasiment impossible d'envisager des structures purement piézoélectriques, à cause de leur fragilité et de leur sensibilité à haute température. Mais il est nécessaire de passer par la modélisation d'une plaque piézoélectrique afin de mieux comprendre l'utilité de ce type de matériau dans les applications industrielles. ■

Chapitre 4

Homogénéisation de coques piézoélectriques périodiques de type Koiter

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'homogénéisation de coques piézoélectriques périodiques de type Koiter. Ces coques sont des milieux continus tridimensionnels où l'ordre de l'épaisseur est petit par rapport aux deux autres dimensions. Notre but est de se servir de la technique d'homogénéisation pour comprendre les propriétés effectives de ce type de coques, en utilisant pour ceci la nouvelle approche dite *l'éclatement périodique* récemment introduite par Cioranescu, Damlamian et Griso [24]. Le passage à la limite quand l'épaisseur tend vers zéro, pour obtenir le modèle bidimensionnel a été fait par Haenel dans sa thèse [42], ce passage à la limite, à partir de la formulation tridimensionnelle d'une coque piézoélectrique a conduit simultanément à l'identification de deux modèles couplés en fonction de l'espace des déplacements inextensibles : un problème membranaire (faisant intervenir le tenseur de changement de la surface moyenne) et un problème en flexion (faisant intervenir le tenseur de changement de courbure). A partir des résultats obtenus par Haenel [42], on retrouve ainsi le modèle de coques minces de Koiter décrit par un système de coordonnées curvilignes.

Pour notre travail et en partant des résultats obtenus par Haenel [42], on va homogénéiser le problème de départ, avec des conditions de Dirichlet sur le bord latéral extérieur, comme dans le chapitre précédent pour les plaques piézoélectriques perforées. En utilisant la technique d'éclatement périodique, on décrit le problème limite (homogénéisé) associé, ainsi que le théorème d'existence et d'unicité de sa solution. On donne aussi les expressions des tenseurs homogénéisés et un résultat de correcteur.

Ce chapitre est essentiellement composé en sept sections organisées de la manière suivante. Dans la deuxième section, on précise la géométrie de la coque dans laquelle on va travailler, et dans la section suivante, on présente un bref rappel de la technique d'éclatement périodique. Dans la quatrième section, on présente le problème de coques piézoélectriques périodiques de type Koiter notamment dans le cas laminé qui nous intéresse. Dans la cinquième section, on étudie l'homogénéisation du problème de coques piézoélectriques de Koiter, afin de donner son problème homogénéisé et les tenseurs homogénéisés, ainsi que leurs propriétés. Dans la section suivante, on donne un résultat de correcteur pour le déplacement mécanique et le potentiel électrique. Dans la dernière section on montre que la solution du problème homogénéisé reste

définie comme un point selle d'une fonctionnelle de même type que la fonctionnelle de départ. Ce travail est fait en collaboration avec M. Ghergu et G. Griso, et fera l'objet des publications [37] et [38].

Notations : Dans tout ce qui suit, C désigne les différentes constantes positives indépendantes de ε .

4.2 Géométrie de la coque étudiée

4.2.1 Définition de la coque

Dans cette section, on va préciser la géométrie de la coque piézoélectrique étudiée, on s'intéresse aux coques qui peuvent se présenter sous la forme d'un produit entre leurs surfaces moyennes et leurs épaisseurs. Soit \mathcal{E}^3 l'espace euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit \mathcal{S} une surface de l'espace euclidien \mathcal{E}^3 . On suppose qu'il existe un domaine ω du plan \mathcal{E}^2 et une application $\bar{\Phi}_{\mathcal{S}}$ définie sur $\bar{\omega}$ tels que

$$\bar{\Phi}_{\mathcal{S}} : \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \bar{\omega} \rightarrow \bar{\Phi}_{\mathcal{S}}(\xi) \in \bar{\mathcal{S}}$$

On suppose que $\bar{\Phi}_{\mathcal{S}}$ est injective, de classe $C^3(\bar{\omega})$ et que les points de $\bar{\mathcal{S}}$ sont réguliers de telle sorte que les deux vecteurs $\vec{a}_1 = \partial\bar{\varphi}/\partial x_1$ et $\vec{a}_2 = \partial\bar{\varphi}/\partial x_2$ sont linéairement indépendants en tout point (ξ_1, ξ_2) de $\bar{\omega}$. Le couple (\vec{a}_1, \vec{a}_2) forme une base locale du plan tangent à la surface $\bar{\mathcal{S}}$ au point $\bar{\Phi}_{\mathcal{S}}(\xi_1, \xi_2)$. On définit le vecteur normal \vec{a}_3 , par

$$\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

Le déterminant de la première forme fondamentale (tenseur métrique) est noté par

$$\sqrt{a} = \det(\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta) \quad \text{est strictement positif dans } \bar{\omega}$$

4.2.2 Géométrie des microstructures

On suppose que la géométrie de la coque contienne une propriété de périodicité dans sa forme. Posons ε comme un paramètre associé à une microstructure contenue dans ω , destiné à converger vers zéro.

4.3 Rappels sur la méthode d'éclatement périodique

Nous décrivons dans cette section brièvement la méthode d'éclatement périodique. Cette dernière est récemment introduite par Cioranescu, Damlamian et Griso [24], elle s'applique pour les problèmes d'homogénéisation périodique comme notre problème.

Dans ce qui suit, on précise d'une part, le domaine dans lequel on va travailler et d'autre part, on introduit l'opérateur d'éclatement périodique \mathcal{T}^ε et l'opérateur de moyennisation \mathcal{U}^ε , ainsi on donne leurs principales propriétés.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine de frontière assez régulière $\partial\Omega$, notons par $Y = [0, 1]^2$ la cellule de référence.

Soit $z \in \mathbb{R}^2$, notons par $[z]_Y$ l'unique combinaison entière telle que $z - [z]_Y \in Y$ et soit

$$\{z\}_Y = z - [z]_Y \in Y.$$

Pour chaque $x \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$x = \varepsilon \left(\left[\frac{x}{\varepsilon} \right]_Y + \left\{ \frac{x}{\varepsilon} \right\}_Y \right)$$

On définit l'opérateur d'éclatement $\mathcal{T}^\varepsilon : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega \times Y)$, par

$$\mathcal{T}^\varepsilon(w)(x, y) = w \left(\varepsilon \left[\frac{x}{\varepsilon} \right]_Y + \varepsilon y \right), \quad \text{pour chaque } (x, y) \in \Omega \times Y.$$

Il est clair, que pour chaque $v, w \in L^2(\Omega)$ on a les propriétés suivantes

$$\mathcal{T}^\varepsilon(w)(x, \left\{ \frac{x}{\varepsilon} \right\}_Y) = w(x) \tag{4.3.1}$$

$$\mathcal{T}^\varepsilon(vw) = \mathcal{T}^\varepsilon(v)\mathcal{T}^\varepsilon(w) \tag{4.3.2}$$

$$\mathcal{T}^\varepsilon(v + w) = \mathcal{T}^\varepsilon(v) + \mathcal{T}^\varepsilon(w) \tag{4.3.3}$$

Dans la suite, chaque fonction définie dans $L^2(\Omega)$, est prolongée par zéro en dehors de Ω .

Proposition 4.3.1 (Propriétés de \mathcal{T}^ε) ([24])

(a) Pour chaque $w \in L^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} w \, dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}^\varepsilon(w) \, dx \, dy. \tag{4.3.4}$$

(b) Pour chaque $w \in L^2(\Omega)$, on a

$$\mathcal{T}^\varepsilon(w) \rightarrow w \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega \times Y). \tag{4.3.5}$$

(c) Si $(w^\varepsilon) \subset L^2(\Omega)$, alors on a

$$w^\varepsilon \rightarrow w \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega) \implies \mathcal{T}^\varepsilon(w^\varepsilon) \rightarrow w \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega \times Y),$$

$$\mathcal{T}^\varepsilon(w^\varepsilon) \rightharpoonup \hat{w} \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times Y) \implies w^\varepsilon \rightharpoonup w = \frac{1}{|Y|} \int_Y \hat{w} \, dy \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega).$$

Proposition 4.3.2 (Relation avec la convergence double échelle) ([24])

Soit $(w^\varepsilon) \subset L^2(\Omega)$ une suite bornée, alors

$$\mathcal{T}^\varepsilon(w^\varepsilon) \rightharpoonup w \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times Y) \iff w^\varepsilon \text{ converge au sens double échelle vers } w.$$

Théorème 4.3.1 ([24])

Soit $(w^\varepsilon) \subset H^1(\Omega)$ une suite bornée telle que

$$w^\varepsilon \rightharpoonup w \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega),$$

alors on a

$$\mathcal{T}^\varepsilon(w^\varepsilon) \rightharpoonup w \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times Y). \tag{4.3.6}$$

De plus, il existe $w^1 \in L^2(\Omega; H_{\text{per}}^1(Y))$, telle que

$$\mathcal{T}^\varepsilon(\nabla_x w^\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_x w + \nabla_y w^1 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times Y). \tag{4.3.7}$$

Proposition 4.3.3 (*\mathcal{T}^ε et gradients*) ([24])

Pour chaque fonction $w \in W^{1,2}(\Omega)$, on a

$$\nabla_y(\mathcal{T}^\varepsilon(w)) = \varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon(\nabla_x w).$$

Si $\{w^\varepsilon\} \subset W^{1,2}(\Omega)$ est une suite bornée dans $L^2(\Omega)$, avec $\varepsilon \|\nabla w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C$, telle que

$$\mathcal{T}^\varepsilon(w^\varepsilon) \rightharpoonup \hat{w} \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times Y),$$

alors, on a

$$\varepsilon \mathcal{T}^\varepsilon(\nabla_x w^\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_y \hat{w} \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times Y).$$

Théorème 4.3.2 (*Propriétés de \mathcal{T}^ε*)

Soit $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ une suite bornée dans $H^2(\Omega)$, alors il existe $u \in H^2(\Omega)$ et $u^2 \in L^2(\Omega; H^2_{\text{per}}(Y)/\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^\varepsilon(u^\varepsilon) &\rightharpoonup u && \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times Y), \\ \mathcal{T}^\varepsilon(\nabla_x u^\varepsilon) &\rightharpoonup \nabla_x u && \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times Y), \\ \mathcal{T}^\varepsilon(\nabla_x^2 u^\varepsilon) &\rightharpoonup \nabla_x^2 u + \nabla_y^2 u^2 && \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times Y). \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Preuve :

Puisque (u^ε) est bornée dans $H^2(\Omega)$, ceci implique qu'il existe $u \in H^2(\Omega)$, tel que (u^ε) converge faiblement vers u . En utilisant le théorème 4.3.1, alors il existe $u^1 \in L^2(\Omega; H^1_{\text{per}}(Y))$ telle que

$$\mathcal{T}^\varepsilon(u^\varepsilon) \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times Y), \quad (4.3.9)$$

et

$$\mathcal{T}^\varepsilon(\nabla_x u^\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_x u + \nabla_y u^1 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times Y). \quad (4.3.10)$$

De plus, le fait que (u^ε) est bornée dans $H^2(\Omega)$, ceci implique que $\mathcal{T}^\varepsilon(\nabla_x^2 u^\varepsilon)$ est bornée dans $L^2(\Omega \times Y)$, alors il existe $\varrho \in L^2(\Omega \times Y)$, telle que

$$\mathcal{T}^\varepsilon(\nabla_x^2 u^\varepsilon) \rightharpoonup \varrho \quad \text{faible dans } L^2(\Omega \times Y). \quad (4.3.11)$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{\text{per}}(Y))$, alors on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right] \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \quad (4.3.12)$$

En utilisant l'opérateur d'éclatement périodique et la propriété (4.3.4) sur l'équation ci-dessus, on obtient

$$\varepsilon \int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}^\varepsilon \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right) \psi(x, y) dx dy = - \int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}^\varepsilon \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \right) \left[\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right] (x, y) dx dy. \quad (4.3.13)$$

En passant à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'équation (4.3.13) et en utilisant (4.3.10) avec (4.3.11), on aura

$$0 = \int_{\Omega \times Y} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u^1}{\partial y_j} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} (x, y) dx dy \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{\text{per}}(Y)).$$

Ce qui implique que $\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u^1}{\partial y_j}$ est indépendant de y . Puisque u^1 est Y -périodique par rapport à la seconde variable, on a $u^1(x, y) = u^1(x)$ et par (4.3.10) on déduit

$$\mathcal{T}^\varepsilon(\nabla_x u^\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_x u \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times Y).$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; C_{\text{per}}^\infty(Y))$ avec $\nabla_y \psi(x, y) = 0$. À partir de (4.3.12), on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx.$$

En utilisant l'opérateur d'éclatement périodique, on a

$$\int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}^\varepsilon \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right) \psi(x, y) dx dy = - \int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}^\varepsilon \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x, y) dx dy. \quad (4.3.14)$$

En passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times Y} \varrho_{ij}(x, y) \psi(x, y) dx dy &= - \int_{\Omega \times Y} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x, y) dx dy \\ &= \int_{\Omega \times Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, y) \psi(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Cette relation implique

$$\int_{\Omega \times Y} \left[\varrho_{ij}(x, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, y) \right] \psi(x, y) dx dy = 0,$$

pour chaque $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; C_{\text{per}}^\infty(Y))$ avec $\nabla_y \psi(x, y) = 0$.

Il existe alors $\tilde{u} \in [L^2(\Omega; H_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R})]^N$, telle que

$$\varrho - \nabla_x^2 u = \nabla_y \tilde{u}. \quad (4.3.15)$$

Puisque le second membre de l'équation précédente est symétrique, on peut conclure qu'il existe $u^2 \in L^2(\Omega; H_{\text{per}}^2(Y)/\mathbb{R})$ telle que $\tilde{u} = \nabla_y u^2$, donc l'équation (4.3.15) s'écrit sous la forme

$$\varrho = \nabla_x^2 u + \nabla_y^2 u^2.$$

La démonstration du Théorème 4.3.2 est achevée. ■

Maintenant, on introduit l'opérateur de moyennisation \mathcal{U}^ε pour les fonctions définies sur le domaine éclaté $\Omega \times Y$, par

$$\mathcal{U}^\varepsilon : L^2(\Omega \times Y) \longrightarrow L^2(\Omega) \quad (4.3.16)$$

$$\Phi \longmapsto \mathcal{U}^\varepsilon(\Phi) \quad (4.3.17)$$

$$\mathcal{U}^\varepsilon(\Phi)(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \Phi \left(\varepsilon \left[\frac{x}{\varepsilon} \right]_Y + \varepsilon z, \left\{ \frac{x}{\varepsilon} \right\}_Y \right) dz.$$

Cet opérateur est essentiel pour les résultats sur la convergence des correcteurs.

Proposition 4.3.4 (voir [24])

- (i) $\mathcal{U}^\varepsilon(\phi) \rightarrow \phi$ fortement dans $L^2(\Omega)$, pour chaque $\phi \in L^2(\Omega)$,
- (ii) $\mathcal{U}^\varepsilon(\mathcal{T}^\varepsilon(\phi)) = \phi$, pour chaque $\phi \in L^2(\Omega)$,
- (iii) $\mathcal{T}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon(\Phi))(x, y) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \Phi \left(\varepsilon \left[\frac{x}{\varepsilon} \right]_Y + \varepsilon z, \left\{ \frac{x}{\varepsilon} \right\}_Y \right) dz$, pour chaque $\Phi \in L^2(\Omega \times Y)$,
- (iv) $\int_\Omega \mathcal{U}^\varepsilon(\Phi)(x) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} \Phi(x, y) dx dy$, pour chaque $\Phi \in L^2(\Omega \times Y)$,
- (v) $\mathcal{U}^\varepsilon(\Phi) \rightharpoonup \frac{1}{|Y|} \int_Y \Phi(x, y) dy$, faiblement dans $L^2(\Omega)$, pour chaque $\Phi \in L^2(\Omega \times Y)$.
- (vi) $\mathcal{T}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon(\Phi)) \rightarrow \Phi$ fortement dans $L^2(\Omega \times Y)$.

Théorème 4.3.3 ([24])

Soit $(\phi^\varepsilon)_\varepsilon \subset L^2(\Omega)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes

- (i) $\mathcal{T}^\varepsilon(\phi^\varepsilon) \rightharpoonup \phi$ faiblement dans $L^2(\Omega \times Y)$,
- (ii) $\phi^\varepsilon - \mathcal{U}^\varepsilon(\phi) \rightharpoonup 0$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

On obtient une équivalence similaire, entre les deux dernières assertions, pour la convergence forte au lieu faible.

4.4 Position du problème

Dans cette section, nous cherchons la limite des déplacements mécaniques et le potentiel électrique pour le problème de coque périodique, lorsque le paramètre de la périodicité ε tend vers zéro.

Dans tout ce qui suit, les indices et exposants latins prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, les indices et exposants grecs dans l'ensemble $\{1, 2\}$. On utilise aussi la convention de sommation sur les indices et exposants répétés haut et bas. Les caractères gras représentent les fonctions à valeurs vectorielles.

Considérons l'équation variationnelle bidimensionnelle d'une coque piézoélectrique périodique de type Koiter, occupant le domaine ω , encastrée sur sa frontière γ , soumise à des forces de volume f dans ω et soumise à un potentiel nul sur sa frontière.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \in \left(H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega) \right) \times H_0^1(\omega), \text{ tels que} \\ \int_\omega \left(c(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) + e(\mathbf{v}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \right) \sqrt{a} dx^\varepsilon = \int_\omega F^i v_i^\varepsilon \sqrt{a} dx^\varepsilon \\ \int_\omega \left(-e(\mathbf{v}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) + d(\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon) \right) \sqrt{a} dx^\varepsilon = 0 \\ \forall \mathbf{v}^\varepsilon \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega), \forall \psi^\varepsilon \in H_0^1(\omega) \end{array} \right. \quad (4.4.18)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} c(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) = c_M(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) + \frac{h^2}{3} c_F(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) \\ c_M(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) = c_M^{\alpha\beta\delta\tau, \varepsilon} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^\varepsilon) \gamma_{\delta\tau}(\mathbf{v}^\varepsilon) \\ c_F(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) = c_F^{\alpha\beta\delta\tau, \varepsilon} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^\varepsilon) \rho_{\delta\tau}(\mathbf{v}^\varepsilon) \\ e(\mathbf{v}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) = e^{\alpha\beta\tau, \varepsilon} \gamma_{\beta\tau}(\mathbf{v}^\varepsilon) \partial_\alpha \varphi^\varepsilon \\ d(\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon) = d^{\alpha\beta, \varepsilon} \partial_\alpha \varphi^\varepsilon \partial_\beta \psi^\varepsilon \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = s_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) - \Gamma_{\alpha\beta}^k v_k \\ s_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha), \end{array} \right.$$

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = - \left(\partial_{\alpha\beta}^2 v_3 - v_\rho \left(-\partial_\beta b_\alpha^\rho + b_\beta^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^\rho + b_\delta^\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \right) - c_{\alpha\beta} v_3 + b_\alpha^\nu \partial_\beta v_\nu + b_\beta^\nu \partial_\alpha v_\nu - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \partial_\delta v_3 \right).$$

$$F^i = F^i(x_1, x_2) = \int_{-1}^1 f^i(x_1, x_2, z) dz, \quad \text{avec } \mathbf{f} = (f^i) \in \mathbf{L}^2(\omega \times [-1, 1])$$

où $\Gamma_{\alpha\beta}^k$ est le symbole de Christoffel. Rappelons le fait que les trois tenseurs $(c_M^{\alpha\beta\lambda\mu, \varepsilon})$, $(c_F^{\alpha\beta\lambda\mu, \varepsilon})$ et $(d^{\alpha\lambda, \varepsilon})$ sont elliptiques et symétriques, et le fait que le tenseur $(e^{\alpha\beta\tau})$ est symétrique, le problème bidimensionnel (4.4.18) admet une solution unique via le théorème de Lax-Milgram.

Remarque 4.4.1 *Il convient de rappeler que le couple $(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ solution du problème (4.4.18), est défini comme un point stationnaire dans l'espace $(H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)) \times H_0^1(\omega)$ de la fonctionnelle suivante*

$$(\mathbf{v}, \psi) \rightarrow \frac{1}{2} \int_\omega [c(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2e(\mathbf{v}, \psi) - d(\psi, \psi)] \sqrt{a} \, dx - \int_\omega \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \sqrt{a} \, dx \quad (4.4.19)$$

4.5 Résultat de convergence

Enonçons le résultat de convergence pour le problème de coques piézoélectriques de type Koiter (4.4.18) lorsque le paramètre de la périodicité tend vers zéro.

Théorème 4.5.1 (Résultat de convergence)

Les deux suites $(\mathcal{T}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon))_\varepsilon$ et $(\mathcal{T}^\varepsilon(\varphi^\varepsilon))_\varepsilon$ convergent faiblement vers $\mathbf{u} \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$ et $\varphi \in H_0^1(\omega)$ respectivement, tels que (\mathbf{u}, φ) est l'unique solution du problème homogénéisé suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_\omega \left\{ \left(\bar{c}_M^{\alpha\beta\nu\theta} \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) - \frac{h^2}{3} \bar{N}^{\alpha\beta\nu\theta} \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{e}^{\alpha\beta\nu} \partial_\nu \varphi \right) \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \right. \\ \left. + \frac{h^2}{3} \left(\bar{c}_F^{\alpha\beta\nu\theta} \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{N}^{\alpha\beta\nu\theta} \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{Q}^{\alpha\beta\nu} \partial_\nu \varphi \right) \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \right\} \sqrt{a} \, dx = \int_\omega F^i v_i \sqrt{a} \, dx \\ \int_\omega \left(-\bar{e}^{\alpha\nu\theta} \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) - \frac{h^2}{3} \bar{Q}^{\alpha\nu\theta} \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{d}^{\alpha\nu} \partial_\nu \varphi \right) \partial_\alpha \psi \sqrt{a} \, dx = 0 \end{array} \right. \quad (4.5.20)$$

pour chaque $\mathbf{v} \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$ et $\psi \in H_0^1(\omega)$, avec les tenseurs homogénéisés $(\bar{c}_M^{\alpha\beta\nu\theta})$, $(\bar{N}^{\alpha\beta\nu\theta})$, $(\bar{e}^{\alpha\beta\nu})$, $(\bar{c}_F^{\alpha\beta\nu\theta})$, $(\bar{Q}^{\alpha\beta\nu})$ et $(\bar{d}^{\alpha\nu})$ sont définis par

$$\bar{c}_M^{\alpha\beta\nu\theta} = \frac{1}{|Y|} \int_Y [c_M^{\alpha\beta\delta\tau} s_{\delta\tau,y}(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}) + e^{\alpha\beta\tau} \partial_{\tau,y} \zeta^{\nu\theta}] dy \quad (4.5.21)$$

$$\bar{e}^{\alpha\beta\nu} = \frac{1}{|Y|} \int_Y [c_M^{\alpha\beta\delta\tau} s_{\delta\tau,y}(\mathbf{z}^\nu) + e^{\alpha\beta\tau} \partial_{\tau,y} (y_\nu + \eta^\nu)] dy \quad (4.5.22)$$

$$\bar{c}_F^{\alpha\beta\nu\theta} = \frac{1}{|Y|} \int_Y c_F^{\alpha\beta\delta\tau} r_{\delta\tau}(\Pi^{\nu\theta} + \mathbf{q}^{\nu\theta}) dy \quad (4.5.23)$$

$$\bar{N}^{\alpha\beta\nu\theta} = \frac{1}{|Y|} \int_Y c_F^{\alpha\beta\delta\tau} r_{\delta\tau}(\mathbf{w}^{\nu\theta}) dy \quad (4.5.24)$$

$$\bar{Q}^{\alpha\beta\nu} = \frac{1}{|Y|} \int_Y c_F^{\alpha\beta\delta\tau} r_{\delta\tau}(\mathbf{z}^\nu) dy \quad (4.5.25)$$

$$\bar{d}^{\alpha\nu} = \frac{1}{|Y|} \int_Y [-e^{\alpha\beta\tau} s_{\beta\tau,y}(\mathbf{z}^\nu) + d^{\alpha\beta} \partial_{\beta,y} (y_\nu + \eta^\nu)] dy \quad (4.5.26)$$

où $(\mathbf{w}^{\nu\theta}, \zeta^\nu)$, $(\mathbf{z}^{\nu\theta}, \eta^\nu)$ et $(\mathbf{q}^{\nu\theta}, \lambda^{\nu\theta})$ sont des fonctions locales Y -périodiques, qui sont solutions des problèmes locaux suivants

$$(\mathcal{P}_{\text{loc}}^1) : \begin{cases} \int_Y (\hat{c}_{M,y}(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}, \mathbf{v}) + \hat{e}_y(\mathbf{v}, \zeta^{\nu\theta}) + \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\mathbf{w}^{\nu\theta}, \mathbf{v})) dy = 0 \\ \int_Y (-\hat{e}_y(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}, \psi) + \hat{d}_y(\zeta^{\nu\theta}, \psi)) dy = 0 \end{cases} \quad (4.5.27)$$

$$(\mathcal{P}_{\text{loc}}^2) : \begin{cases} \int_Y (\hat{c}_{M,y}(\mathbf{z}^\nu, \mathbf{v}) + \hat{e}_y(\mathbf{v}, y_\nu + \eta^\nu) + \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\mathbf{z}^\nu, \mathbf{v})) dy = 0 \\ \int_Y (-\hat{e}_y(\mathbf{z}^\nu, \psi) + \hat{d}_y(y_\nu + \eta^\nu, \psi)) dy = 0 \end{cases} \quad (4.5.28)$$

$$(\mathcal{P}_{\text{loc}}^3) : \begin{cases} \int_Y (\hat{c}_{M,y}(\mathbf{q}^{\nu\theta}, \mathbf{v}) + \hat{e}_y(\mathbf{v}, \lambda^{\nu\theta}) + \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\Pi^{\nu\theta} + \mathbf{q}^{\nu\theta}, \mathbf{v})) dy = 0 \\ \int_Y (-\hat{e}_y(\mathbf{q}^{\nu\theta}, \psi) + \hat{d}_y(\lambda^{\nu\theta}, \psi)) dy = 0 \end{cases} \quad (4.5.29)$$

où

$$\begin{cases} \hat{c}_{M,y}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = c_M^{\alpha\beta\delta\tau} s_{\alpha\beta,y}(\mathbf{v}) s_{\delta\tau,y}(\mathbf{v}) dy \\ \hat{c}_{F,y}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = c_F^{\alpha\beta\delta\tau} r_{\alpha\beta,y}(\mathbf{v}) r_{\delta\tau,y}(\mathbf{v}) dy \\ \hat{e}_y(\mathbf{v}, \psi) = e^{\alpha\beta\delta} s_{\alpha\beta,y}(\mathbf{v}) \partial_{\delta,y} \psi dy \\ \hat{d}_y(\psi, \psi) = e^{\alpha\beta} \partial_{\alpha,y} \psi \partial_{\beta,y} \psi dy \end{cases} \quad (4.5.30)$$

avec

$$r_{\alpha\beta,y}(\mathbf{v}) = -\left(\partial_{\alpha\beta,y}^2 v_3 + b_\alpha^p \partial_{\beta,y} v_\nu + b_\beta^p \partial_{\alpha,y} v_\nu\right), \quad \Sigma^{\nu\theta} = \frac{1}{2}(y_\nu \vec{e}_\theta + y_\theta \vec{e}_\nu) \quad \text{où} \quad s_{\alpha\beta,y}(\Sigma^{\nu\theta}) = \frac{1}{2}(\delta_{\nu\alpha} \delta_{\theta\beta} + \delta_{\nu\beta} \delta_{\theta\alpha})$$

$$\text{et } \Pi^{\nu\theta} = \frac{1}{2} y_\nu y_\theta$$

Remarque 4.5.1 *Il est visible que le problème homogénéisé (4.5.20) n'a pas la forme d'un problème de type Koiter, néanmoins, on montre à la fin de ce chapitre que la solution de ce problème reste définie comme un point selle d'une fonctionnelle du même type que la fonctionnelle (4.4.19)*

Démonstration :

La démonstration se fait en six étapes

(i) Estimation a priori

Pour obtenir l'estimation a priori, on prend $\mathbf{v} = \mathbf{u}^\varepsilon$ et $\psi = \varphi^\varepsilon$ dans le problème (4.4.18), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \left(c_M^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) + \frac{h^2}{3} c_F^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) + e^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \right) \sqrt{a} \, dx^\varepsilon &= \int_{\omega} F^i u_i^\varepsilon \sqrt{a} \, dx^\varepsilon \\ \int_{\omega} \left(-e^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) + d^\varepsilon(\varphi^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \right) \sqrt{a} \, dx^\varepsilon &= 0 \end{aligned}$$

En additionnant les deux équations précédentes, on aboutit à

$$\int_{\omega} \left(c_M^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) + \frac{h^2}{3} c_F^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) + d^\varepsilon(\varphi^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \right) \sqrt{a} \, dx^\varepsilon = \int_{\omega} F^i u_i^\varepsilon \sqrt{a} \, dx^\varepsilon$$

D'après la coercivité des $c_M^{\alpha\beta\tau\theta,\varepsilon}$, $c_F^{\alpha\beta\tau\theta,\varepsilon}$ et $d^{\alpha\lambda,\varepsilon}$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} C \left\{ \sum_{\alpha,\beta} \left(\|\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^2(\omega)}^2 + \frac{h^2}{3} \|\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{L^2(\omega)}^2 \right) + \|\varphi^\varepsilon\|_{L^2(\omega)}^2 \right\} \\ \leq \int_{\omega} \left(c_M^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) + \frac{h^2}{3} c_F^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) + d^\varepsilon(\varphi^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \right) dx^\varepsilon \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Korn et de Poincaré, ainsi que le fait que $a \in L^\infty(\omega)$, on obtient

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{(H_0^1(\omega))^2 \times H_0^2(\omega)} + \|\varphi^\varepsilon\|_{H_0^1(\omega)} \leq C, \quad (4.5.31)$$

où C est une constante indépendante de ε .

(ii) Passage à la limite

D'après l'estimation a priori (4.5.31) et par le Théorème 4.3.1, il existe un couple $(\mathbf{u}, \varphi) \in [H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)] \times H_0^1(\omega)$ et deux vecteurs de correcteurs $\hat{\mathbf{u}} \in (L^2(\omega; H_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R}))^2 \times L^2(\omega; H_{\text{per}}^2(Y)/\mathbb{R})$ et $\hat{\varphi} \in L^2(\omega; H_{\text{per}}^1(Y))$, tels qu'on a

$$\mathcal{T}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{faiblement dans } \mathbf{L}^2(\omega \times Y; \mathbb{R}^3),$$

$$\mathcal{T}^\varepsilon(\nabla_x(\mathbf{u}^\varepsilon)) \rightharpoonup \nabla_x \mathbf{u} + \nabla_y \hat{\mathbf{u}} \quad \text{faiblement dans } \mathbf{L}^2(\omega \times Y; \mathbb{R}^2),$$

$$\mathcal{T}^\varepsilon(\nabla_x(\varphi^\varepsilon)) \rightharpoonup \nabla_x \varphi + \nabla_y \hat{\varphi} \quad \text{faiblement dans } \mathbf{L}^2(\omega \times Y; \mathbb{R}^2).$$

A partir de la linéarité de l'opérateur \mathcal{T}^ε , nous en déduisons

$$\mathcal{T}^\varepsilon(\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^\varepsilon)) \rightharpoonup \gamma_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u}) + s_{\alpha\beta,y}(\hat{\mathbf{u}}) \quad \text{faiblement dans } \mathbf{L}^2(\omega \times Y; \mathbb{R}^2),$$

$$\mathcal{T}^\varepsilon(\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^\varepsilon)) \rightharpoonup \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) + r_{\alpha\beta,y}(\hat{\mathbf{u}}) \quad \text{faiblement dans } \mathbf{L}^2(\omega \times Y; \mathbb{R}^2).$$

(iii) Identification des limites

En choisissant des fonctions de tests, de type

$$\begin{cases} v_\alpha^\varepsilon(x) &= v_\alpha^1(x) + \varepsilon v_\alpha^2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \alpha = 1, 2 \\ v_3^\varepsilon(x) &= v_3^1(x) + \varepsilon^2 v_3^2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \\ \psi^\varepsilon(x) &= \psi^1(x) + \varepsilon \psi^2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \end{cases} \quad (4.5.32)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{v}^1 \in \mathcal{D}(\omega_\varepsilon); \mathbf{v}^2 = (v_\alpha^2, v_3^2) \in \mathcal{D}(\omega; C_{\text{per}}^\infty(Y)), \\ \psi^1 \in \mathcal{D}(\omega_\varepsilon); \psi^2 \in \mathcal{D}(\omega; C_{\text{per}}^\infty(Y)). \end{cases}$$

Le choix (4.5.32), nous permet de déduire les convergences

$$\mathbf{v}^\varepsilon(x) \rightarrow \mathbf{v}^1(x) \quad \text{fortement dans } \mathbf{L}^2(\omega),$$

$$\nabla_x \mathbf{v}^\varepsilon(x) \rightharpoonup \nabla_x \mathbf{v}^1(x) + \nabla_y \mathbf{v}^2(x, y) \quad \text{faiblement dans } \mathbf{L}^2(\omega \times Y),$$

$$\mathcal{T}^\varepsilon(\partial_\alpha \psi^\varepsilon) \rightharpoonup \partial_{\alpha,x} \psi^1 + \partial_{\alpha,y} \psi^2 \quad \text{faiblement dans } \mathbf{L}^2(\omega \times Y).$$

$$\mathcal{T}^\varepsilon(\gamma_{\rho\sigma}(\mathbf{v}^\varepsilon)) \rightharpoonup \gamma_{\rho\sigma}(\mathbf{v}^1) + s_{\rho\sigma,y}(\mathbf{v}^2) \quad \text{faiblement dans } \mathbf{L}^2(\omega \times Y),$$

$$\mathcal{T}^\varepsilon(\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}^\varepsilon)) \rightharpoonup \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}^1) + r_{\alpha\beta,y}(\mathbf{v}^2) \quad \text{faiblement dans } \mathbf{L}^2(\omega \times Y)$$

avec $r_{\alpha\beta,y}(\mathbf{v}) = -\left(\partial_{\alpha\beta,y}^2 v_3 + b_\alpha^\rho \partial_{\beta,y} v_\nu + b_\beta^\rho \partial_{\alpha,y} v_\nu\right)$. Le problème (4.4.18), s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{1}{|Y|} \int_{\omega \times Y} \left\{ \left[\mathcal{T}^\varepsilon(c_M^{\alpha\beta\delta\tau,\varepsilon}) \mathcal{T}^\varepsilon(\gamma_{\delta\tau}(\mathbf{u}^\varepsilon)) + \mathcal{T}^\varepsilon(e^{\alpha\beta\tau,\varepsilon}) \mathcal{T}^\varepsilon(\partial_\tau \varphi^\varepsilon) \right] \mathcal{T}^\varepsilon(\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}^\varepsilon)) \right. \\ \left. + \frac{h^2}{3} \mathcal{T}^\varepsilon(c_F^{\alpha\beta\delta\tau,\varepsilon}) \mathcal{T}^\varepsilon(\rho_{\delta\tau}(\mathbf{u}^\varepsilon)) \mathcal{T}^\varepsilon(\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}^\varepsilon)) \right\} \sqrt{a} \, dx dy = \int_\omega F^i v_i^\varepsilon \sqrt{a} \, dx, \\ \frac{1}{|Y|} \int_{\omega \times Y} \left\{ \left[-\mathcal{T}^\varepsilon(e^{\alpha\beta\tau,\varepsilon}) \mathcal{T}^\varepsilon(\gamma_{\beta\tau}(\mathbf{u}^\varepsilon)) + \mathcal{T}^\varepsilon(d^{\alpha\beta,\varepsilon}) \mathcal{T}^\varepsilon(\partial_\beta \varphi^\varepsilon) \right] \mathcal{T}^\varepsilon(\partial_\alpha \psi^\varepsilon) \right\} \sqrt{a} \, dx dy = 0 \end{cases} \quad (4.5.33)$$

Après le remplacement des fonctions tests dans (4.5.32) et en utilisant la linéarité de l'opérateur d'éclatement \mathcal{T}^ε , avec le fait que $\int_\omega v = \frac{1}{|Y|} \int_{\omega \times Y} \mathcal{T}^\varepsilon(v)$ pour chaque $v \in L^2(\omega)$, on peut passer à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans la forme variationnelle (4.5.33), on obtient

$$\begin{cases} \frac{1}{|Y|} \int_{\omega \times Y} \left\{ \left[c_M^{\alpha\beta\delta\tau}(y) (\gamma_{\delta\tau,x}(\mathbf{u}) + s_{\delta\tau,y}(\hat{\mathbf{u}})) + e^{\alpha\beta\tau}(y) (\partial_{\tau,x} \varphi + \partial_{\tau,y} \hat{\varphi}) \right] \right. \\ \left. (\gamma_{\alpha\beta,x}(\mathbf{v}^1) + s_{\alpha\beta,y}(\mathbf{v}^2)) + \frac{h^2}{3} c_F^{\alpha\beta\delta\tau}(y) (\rho_{\delta\tau,x}(\mathbf{u}) + r_{\delta\tau,y}(\hat{\mathbf{u}})) (\rho_{\alpha\beta,x}(\mathbf{v}^1) + r_{\alpha\beta,y}(\mathbf{v}^2)) \right\} \sqrt{a} \, dx dy \\ = \int_\omega F^i v_i^1 \sqrt{a} \, dx, \\ \frac{1}{|Y|} \int_{\omega \times Y} \left[-e^{\alpha\beta\tau}(y) (\gamma_{\beta\tau,x}(\mathbf{u}) + s_{\beta\tau,y}(\hat{\mathbf{u}})) + d^{\alpha\beta}(y) (\partial_{\beta,x} \varphi + \partial_{\beta,y} \hat{\varphi}) \right] \\ (\partial_{\alpha,x} \psi^1 + \partial_{\alpha,y} \psi^2) \sqrt{a} \, dx dy = 0. \end{cases} \quad (4.5.34)$$

(iv) Les problèmes locaux

Par la linéarité du problème de coques piézoélectriques, on pose

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}(x, y) = \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}(x, y))\mathbf{w}^{\nu\theta}(y) + \partial_\nu\varphi(x)\mathbf{z}^\nu(y) + \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}(x, y))\mathbf{q}^{\nu\theta}(y), \\ \hat{\varphi}(x, y) = \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}(x, y))\zeta^{\nu\theta}(y) + \partial_\nu\varphi(x)\eta^\nu(y) + \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}(x, y))\lambda^{\nu\theta}(y), \end{cases} \quad (4.5.35)$$

où $\mathbf{w}^{\nu\theta}(y)$, $\zeta^\nu(y)$, $\mathbf{q}^{\nu\theta}(y)$, $\mathbf{z}^{\nu\theta}(y)$, $\eta^\nu(y)$ et $\lambda^{\nu\theta}(y)$ sont des fonctions Y -périodiques. En remplaçant les expressions du système (4.5.35) dans le problème (4.5.34), on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{|Y|} \int_{\omega \times Y} \left(\left[c_M^{\alpha\beta\delta\tau} s_{\delta\tau}(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}) + e^{\alpha\beta\tau} \partial_\tau \zeta^{\nu\theta} \right] \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \left[c_M^{\alpha\beta\delta\tau} s_{\delta\tau}(\mathbf{z}^\nu) + e^{\alpha\beta\tau} \partial_{\tau,y}(y_\nu + \eta^\nu) \right] \partial_\nu \varphi \right. \\ & + \left. \left[c_M^{\alpha\beta\delta\tau} s_{\delta\tau}(\mathbf{q}^{\nu\theta}) + e^{\alpha\beta\tau} \partial_\tau \lambda^{\nu\theta} \right] \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) \right) (\gamma_{\alpha\beta,x}(\mathbf{v}^1) + s_{\alpha\beta,y}(\mathbf{v}^2)) \sqrt{a} dx dy \\ & + \frac{h^2}{3} \left(c_F^{\alpha\beta\delta\tau} \rho_{\delta\tau}(\Pi^{\nu\theta} + \mathbf{q}^{\nu\theta}) \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + c_F^{\alpha\beta\delta\tau} \rho_{\delta\tau}(\mathbf{w}^{\nu\theta}) \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + c_F^{\alpha\beta\delta\tau} \rho_{\delta\tau}(\mathbf{z}^\nu) \partial_\nu \varphi \right) \\ & (\rho_{\alpha\beta,x}(\mathbf{v}^1) + r_{\alpha\beta,y}(\mathbf{v}^2)) \sqrt{a} dx dy = \int_\omega F^i v_i^1 \sqrt{a} dx, \\ & \frac{1}{|Y|} \int_{\omega \times Y} \left(\left[-e^{\alpha\beta\tau} s_{\beta\tau,y}(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}) + d^{\alpha\beta} \partial_{\beta,y} \zeta^{\nu\theta} \right] \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) \right. \\ & + \left. \left[-e^{\alpha\beta\tau} s_{\beta\tau,y}(\mathbf{z}^\nu) + d^{\alpha\beta} \partial_{\beta,y}(y_\nu + \eta^\nu) \right] \partial_\nu \varphi \right. \\ & \left. \left[-e^{\alpha\beta\tau} s_{\beta\tau,y}(\mathbf{q}^{\nu\theta}) + d^{\alpha\beta} \partial_{\beta,y} \lambda^{\nu\theta} \right] \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) \right) (\partial_{\alpha,x} \psi^1 + \partial_{\alpha,y} \psi^2) \sqrt{a} dx dy = 0, \\ & \forall \mathbf{v}^1 \in \mathcal{D}(\omega_\varepsilon), \forall \mathbf{v}^2 = (v_\alpha^2, v_\beta^2) \in \mathcal{D}(\omega; C_{\text{per}}^\infty(Y)), \forall \psi^1 \in \mathcal{D}(\omega_\varepsilon), \forall \psi^2 \in \mathcal{D}(\omega; C_{\text{per}}^\infty(Y)). \end{aligned} \right. \quad (4.5.36)$$

En prenant successivement $\mathbf{v}^1 = 0$ et $\psi^1 = 0$ dans le système précédent, et par la suite en remplaçant $s_{\alpha\beta}(\mathbf{v}^2)$ et $r_{\alpha\beta}(\mathbf{v}^2)$ par $\partial_\alpha v_\beta^2$ et $\partial_\alpha v_\beta^2$ respectivement, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{|Y|} \int_{\omega \times Y} \left(\left[c_M^{\alpha\beta\delta\tau} s_{\delta\tau}(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}) + e^{\alpha\beta\tau} \partial_\tau \zeta^{\nu\theta} \right] \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) \right. \\ & + \left. \left[c_M^{\alpha\beta\delta\tau} s_{\delta\tau}(\mathbf{z}^\nu) + e^{\alpha\beta\tau} \partial_{\tau,y}(y_\nu + \eta^\nu) \right] \partial_\nu \varphi + \left[c_M^{\alpha\beta\delta\tau} s_{\delta\tau}(\mathbf{q}^{\nu\theta}) + e^{\alpha\beta\tau} \partial_\tau \lambda^{\nu\theta} \right] \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) \right) \partial_\alpha v_\beta \sqrt{a} dx dy \\ & + \frac{h^2}{3} \left(c_F^{\alpha\beta\delta\tau} \rho_{\delta\tau}(\Pi^{\nu\theta} + \mathbf{q}^{\nu\theta}) \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + c_F^{\alpha\beta\delta\tau} \rho_{\delta\tau}(\mathbf{w}^{\nu\theta}) \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + c_F^{\alpha\beta\delta\tau} \rho_{\delta\tau}(\mathbf{z}^\nu) \partial_\nu \varphi \right) \\ & (2b_\nu^\rho \partial_\alpha v_\beta) \sqrt{a} dx dy = 0 \\ & \frac{1}{|Y|} \int_{\omega \times Y} \left(\left[-e^{\alpha\beta\tau} s_{\beta\tau,y}(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}) + d^{\alpha\beta} \partial_{\beta,y} \zeta^{\nu\theta} \right] \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) \right. \\ & + \left. \left[-e^{\alpha\beta\tau} s_{\beta\tau,y}(\mathbf{z}^\nu) + d^{\alpha\beta} \partial_{\beta,y}(y_\nu + \eta^\nu) \right] \partial_\nu \varphi \right. \\ & \left. \left[-e^{\alpha\beta\tau} s_{\beta\tau,y}(\mathbf{q}^{\nu\theta}) + d^{\alpha\beta} \partial_{\beta,y} \lambda^{\nu\theta} \right] \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) \right) \partial_{\alpha,y} \psi^2 \sqrt{a} dx dy = 0, \\ & \forall \mathbf{v}^2 \in \mathcal{D}(\psi; C_{\text{per}}^\infty(Y)), \forall \psi^2 \in \mathcal{D}(\psi; C_{\text{per}}^\infty(Y)), \end{aligned} \right. \quad (4.5.37)$$

on vérifie que les fonctions de base $(\mathbf{w}^{\nu\theta}, \zeta^\nu)$, $(\mathbf{z}^{\nu\theta}, \eta^\nu)$ et $(\mathbf{q}^{\nu\theta}, \lambda^{\nu\theta})$ sont définies comme des solutions des problèmes locaux (4.5.27), (4.5.28) et (4.5.29).

En utilisant le lemme de Lax-Milgram, on peut formulé le résultat suivant

Proposition 4.5.1

Chaque problème des problèmes locaux (4.5.27), (4.5.28) et (4.5.29) a une solution unique.

(v) **Les tenseurs homogénéisés et leurs propriétés**

Suite d'un calcul élémentaire, le problème (4.5.36) peut être formulé comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\omega} \left\{ \left(\bar{c}_M^{\alpha\beta\nu\theta} \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{M}^{\alpha\beta\nu\theta} \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{e}^{\alpha\beta\nu} \partial_\nu \varphi \right) \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \right. \\ \left. + \frac{h^2}{3} \left(\bar{c}_F^{\alpha\beta\nu\theta} \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{N}^{\alpha\beta\nu\theta} \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{Q}^{\alpha\beta\nu} \partial_\nu \varphi \right) \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \right\} \sqrt{a} \, dx = \int_{\omega} F^i v_i^1 \sqrt{a} \, dx \\ \int_{\omega} \left(-\bar{f}^{\alpha\nu\theta} \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) - \bar{S}^{\alpha\nu\theta} \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{d}^{\alpha\nu} \partial_\nu \varphi \right) \partial_\alpha \psi \sqrt{a} \, dx = 0 \end{array} \right. \quad (4.5.38)$$

pour chaque $(\mathbf{v}, \psi) \in \left(H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega) \right) \times H_0^1(\omega)$, les nouveaux tenseurs définis comme suit

$$\bar{c}_M^{\alpha\beta\nu\theta} = \frac{1}{|Y|} \int_Y [c_M^{\alpha\beta\delta\tau} s_{\delta\tau,y}(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}) + e^{\alpha\beta\tau} \partial_{\tau,y} \zeta^{\nu\theta}] dy \quad (4.5.39)$$

$$\bar{M}^{\alpha\beta\nu\theta} = \frac{1}{|Y|} \int_Y [c_M^{\alpha\beta\delta\tau} s_{\delta\tau,y}(\mathbf{q}^{\nu\theta}) + e^{\alpha\beta\tau} \partial_{\tau,y} \lambda^{\nu\theta}] dy \quad (4.5.40)$$

$$\bar{e}^{\alpha\beta\nu} = \int_Y \frac{1}{|Y|} [c_M^{\alpha\beta\delta\tau} s_{\delta\tau,y}(\mathbf{z}^\nu) + e^{\alpha\beta\tau} \partial_{\tau,y} (y_\nu + \eta^\nu)] dy \quad (4.5.41)$$

$$\bar{c}_F^{\alpha\beta\nu\theta} = \frac{1}{|Y|} \int_Y c_F^{\alpha\beta\delta\tau} r_{\delta\tau}(\Pi^{\nu\theta} + \mathbf{q}^{\nu\theta}) dy \quad (4.5.42)$$

$$\bar{N}^{\alpha\beta\nu\theta} = \frac{1}{|Y|} \int_Y c_F^{\alpha\beta\delta\tau} r_{\delta\tau}(\mathbf{w}^{\nu\theta}) dy \quad (4.5.43)$$

$$\bar{Q}^{\alpha\beta\nu} = \frac{1}{|Y|} \int_Y c_F^{\alpha\beta\delta\tau} r_{\delta\tau}(\mathbf{z}^\nu) dy \quad (4.5.44)$$

$$\bar{f}^{\alpha\nu\theta} = \frac{1}{|Y|} \int_Y [e^{\alpha\beta\tau} s_{\beta\tau,y}(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}) - d^{\alpha\beta} \partial_{\beta,y} \zeta^{\nu\theta}] dy \quad (4.5.45)$$

$$\bar{S}^{\alpha\nu\theta} = \frac{1}{|Y|} \int_Y [-e^{\alpha\beta\tau} s_{\beta\tau,y}(\mathbf{q}^{\nu\theta}) + d^{\alpha\beta} \partial_{\beta,y} \lambda^{\nu\theta}] dy \quad (4.5.46)$$

$$\bar{d}^{\alpha\nu} = \frac{1}{|Y|} \int_Y [-e^{\alpha\beta\tau} s_{\beta\tau,y}(\mathbf{z}^\nu) + d^{\alpha\beta} \partial_{\beta,y} (y_\nu + \eta^\nu)] dy \quad (4.5.47)$$

Maintenant, on va prouver quelques propriétés de ces derniers tenseurs. Commençons par montrer l'identité $\bar{e}^{\kappa\nu\theta} = \bar{f}^{\kappa\nu\theta}$. Nous prenons $(\mathbf{v}, \psi) = (\mathbf{z}^\kappa, \eta^\kappa)$ dans le problème local (4.5.27), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_Y \left(\hat{c}_{M,y}(\mathbf{w}^{\nu\theta}, \mathbf{z}^\nu) + \hat{e}_y(\mathbf{z}^\nu, \zeta^{\nu\theta}) + \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\mathbf{w}^{\nu\theta}, \mathbf{z}^\nu) \right) dy = - \int_Y c_M^{\alpha\beta\delta\tau} s_{\delta\tau,y}(\mathbf{z}^\nu) dy \\ \int_Y \left(-\hat{e}_y(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}, \eta^\nu) + \hat{d}_y(\zeta^{\nu\theta}, \eta^\nu) \right) dy = \int_Y e^{\alpha\beta\tau} \partial_{\tau,y} \eta^\nu dy \end{array} \right. \quad (4.5.48)$$

donc, le coefficient $\bar{e}^{\alpha\beta\nu}$ est évalué, comme suit

$$\begin{aligned}\bar{e}^{\alpha\beta\nu} &= \int_Y \left(e^{\alpha\beta\nu} + c_M^{\alpha\beta\delta\tau} s_{\delta\tau,y}(\mathbf{z}^\nu) + e^{\alpha\beta\tau} \partial_\tau \eta^\nu \right) dy \\ &= \int_Y \left(e^{\alpha\beta\nu} - \hat{c}_{M,y}(\mathbf{w}^{\nu\theta}, \mathbf{z}^\nu) - \hat{e}_y(\mathbf{z}^\nu, \zeta^{\nu\theta}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\mathbf{w}^{\nu\theta}, \mathbf{z}^\nu) - \hat{e}_y(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}, \eta^\nu) + \hat{d}_y(\zeta^{\nu\theta}, \eta^\nu) \right) dy\end{aligned}\quad (4.5.49)$$

Nous prenons $(\mathbf{v}, \psi) = (\mathbf{w}^{\nu\theta}, \zeta^{\nu\theta})$ dans le problème local (4.5.28), on obtient

$$\begin{cases} \int_Y \left(\hat{c}_{M,y}(\mathbf{z}^\nu, \mathbf{w}^{\nu\theta}) + \hat{e}_y(\mathbf{w}^{\nu\theta}, \eta^\nu) + \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\mathbf{z}^\nu, \mathbf{w}^{\nu\theta}) \right) dy &= - \int_Y e^{\alpha\beta\tau} s_{\beta\tau,y}(\mathbf{w}^{\nu\theta}) dy \\ \int_Y \left(- \hat{e}_y(\mathbf{z}^\nu, \zeta^{\nu\theta}) + \hat{d}_y(\eta^\nu, \zeta^{\nu\theta}) \right) dy &= - \int_Y d^{\alpha\beta} \partial_\beta \zeta^{\nu\theta} \end{cases}\quad (4.5.50)$$

De même, le coefficient $\bar{f}^{\alpha\beta\nu}$ est évalué comme suit

$$\begin{aligned}\bar{f}^{\alpha\beta\nu} &= \int_Y \left(e^{\alpha\beta\nu} + e^{\alpha\beta\tau} s_{\beta\tau,y}(\mathbf{w}^{\nu\theta}) - d^{\alpha\beta} \partial_{\beta,y} \zeta^{\nu\theta} \right) dy \\ &= \int_Y \left(e^{\alpha\beta\nu} - \hat{c}_{M,y}(\mathbf{z}^\nu, \mathbf{w}^{\nu\theta}) - \hat{e}_y(\mathbf{w}^{\nu\theta}, \eta^\nu) \right. \\ &\quad \left. - \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\mathbf{z}^\nu, \mathbf{w}^{\nu\theta}) - \hat{e}_y(\mathbf{z}^\nu, \zeta^{\nu\theta}) + \hat{d}_y(\eta^\nu, \zeta^{\nu\theta}) \right) dy\end{aligned}\quad (4.5.51)$$

Il est alors immédiat d'après les deux expressions (4.5.49) et (4.5.51), qu'on a l'identité

$$\bar{e}^{\kappa\nu\theta} = \bar{f}^{\kappa\nu\theta}$$

Comme une conclusion à partir de l'identité précédente, on constate qu'on a la symétrie du tenseur $(\bar{e}^{\kappa\nu\theta})$, puisqu'on a

$$\begin{aligned}\bar{e}^{\kappa\nu\theta} &= \int_Y [e^{\kappa\beta\tau} s_{\beta\tau,y}(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}) - d^{\kappa\beta} \partial_{\beta,y} \zeta^{\nu\theta}] dy, \\ &= \int_Y [e^{\kappa\beta\tau} s_{\beta\tau,y}(\Sigma^{\theta\nu} + \mathbf{w}^{\theta\nu}) - d^{\kappa\beta} \partial_{\beta,y} \zeta^{\theta\nu}] dy \\ &= \bar{e}^{\kappa\theta\nu}\end{aligned}$$

Nous allons montrer maintenant l'identité $\bar{M}^{\alpha\beta\nu\tau} = -\frac{h^2}{3} \bar{N}^{\alpha\beta\nu\tau}$.

Nous prenons $\mathbf{v} = \Pi^{\tau\kappa}$ dans la première équation du problème local (4.5.29), avec $(\tau, \kappa) \neq (\nu, \theta)$, on obtient

$$\begin{cases} \int_Y \left[\hat{c}_{M,y}(\mathbf{q}^{\nu\theta}, \Pi^{\tau\kappa}) + \hat{e}_y(\Pi^{\tau\kappa}, \lambda^{\nu\theta}) + \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\Pi^{\nu\theta} + \mathbf{q}^{\nu\theta}, \Pi^{\tau\kappa}) \right] dy &= 0, \\ \int_Y \left[\hat{c}_M^{\alpha\beta\tau\kappa} s_{\tau\kappa,y}(\mathbf{q}^{\nu\theta}) + e^{\alpha\beta\kappa} \partial_\kappa \lambda^{\nu\theta} \right] dy &= -\frac{h^2}{3} \int_Y c_F^{\alpha\beta\tau\kappa} r_{\tau\kappa}(\mathbf{q}^{\nu\kappa}) dy, \end{cases}$$

à partir de la seconde équation du système précédent, on a clairement l'identité recherchée.

A présent, on va montrer l'identité $\bar{S}^{\alpha\beta\nu} = \frac{h^2}{3} \bar{Q}^{\alpha\beta\nu}$, on prend $(\mathbf{v}, \psi) = (\mathbf{q}^{\nu\theta}, \lambda^{\nu\theta})$ dans le

problème local (4.5.28), on obtient

$$\begin{cases} \int_Y \left[\hat{c}_{M,y}(\mathbf{z}^\nu, \mathbf{q}^{\nu\theta}) + \hat{e}_y(\mathbf{q}^{\nu\theta}, \eta^\nu) + \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\mathbf{z}^\nu, \mathbf{q}^{\nu\theta}) \right] dy &= \int_Y e^{\nu\tau\theta} s_{\tau\theta}(\mathbf{q}^{\nu\theta}) dy \\ \int_Y \left[-\hat{e}_y(\mathbf{z}^\nu, \lambda^{\nu\theta}) + \hat{d}_y(\eta^\nu, \lambda^{\nu\theta}) \right] dy &= \int_Y d^{\nu\beta} \partial_\beta \lambda^{\nu\theta} dy \end{cases}$$

le coefficient $\bar{S}^{\alpha\beta\nu}$ sera évalué comme suit

$$\begin{aligned} \bar{S}^{\alpha\beta\nu} &= \int_Y \left(-e^{\alpha\beta\tau} s_{\beta\tau,y}(\mathbf{q}^{\nu\theta}) + d^{\alpha\beta} \partial_{\beta,y} \lambda^{\nu\theta} \right) dy, \\ &= \int_Y \left(-\hat{c}_{M,y}(\mathbf{z}^\nu, \mathbf{q}^{\nu\theta}) - \hat{e}_y(\mathbf{q}^{\nu\theta}, \eta^\nu) - \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\mathbf{z}^\nu, \mathbf{q}^{\nu\theta}) - \hat{e}_y(\mathbf{z}^\nu, \lambda^{\nu\theta}) + \hat{d}_y(\eta^\nu, \lambda^{\nu\theta}) \right) dy. \end{aligned}$$

En prenant $(\mathbf{v}, \psi) = (\mathbf{z}^\nu, \eta^\nu)$ dans le problème local (4.5.29), on obtient

$$\begin{cases} \int_Y \left[\hat{c}_{M,y}(\mathbf{q}^{\nu\theta}, \mathbf{z}^\nu) + \hat{e}_y(\mathbf{z}^\nu, \lambda^{\nu\theta}) + \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\mathbf{q}^{\nu\theta}, \mathbf{z}^\nu) \right] dy &= -\frac{h^2}{3} \int_Y c_F^{\alpha\beta\nu\theta} r_{\nu\theta}(\mathbf{z}^\nu) dy, \\ \int_Y \left[-\hat{e}_y(\mathbf{q}^{\nu\theta}, \eta^\nu) + \hat{d}_y(\lambda^{\nu\theta}, \eta^\nu) \right] dy &= 0, \end{cases}$$

par conséquent, le coefficient $\bar{Q}^{\alpha\beta\nu}$ sera évalué de la manière suivante

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{3} \bar{Q}^{\alpha\beta\nu} &= \frac{h^2}{3} \int_Y c_F^{\alpha\beta\delta\tau} r_{\delta\tau}(\mathbf{z}^\nu) dy \\ &= \int_Y \left[-\hat{c}_{M,y}(\mathbf{q}^{\nu\theta}, \mathbf{z}^\nu) - \hat{e}_y(\mathbf{z}^\nu, \lambda^{\nu\theta}) - \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\mathbf{q}^{\nu\theta}, \mathbf{z}^\nu) - \hat{e}_y(\mathbf{q}^{\nu\theta}, \eta^\nu) + \hat{d}_y(\lambda^{\nu\theta}, \eta^\nu) \right] dy \end{aligned}$$

alors, on a l'identité recherchée.

A présent, montrons la symétrie du tenseur d'élasticité membranaire $\bar{c}_M^{\alpha\beta\nu\theta}$. D'après l'équation (4.5.39), il est clair qu'on a

$$\bar{c}_M^{\alpha\beta\nu\theta} = \bar{c}_M^{\alpha\beta\theta\nu} = \bar{c}_M^{\beta\alpha\nu\theta}$$

il reste seulement à montrer l'identité

$$\bar{c}_M^{\alpha\beta\nu\theta} = \bar{c}_M^{\nu\theta\alpha\beta}$$

D'après l'équation (4.5.39), on a

$$\bar{c}_M^{\alpha\beta\nu\theta} = \int_Y [\hat{c}_{M,y}(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}, \Sigma^{\nu\theta}) + \hat{e}_y(\Sigma^{\nu\theta}, \zeta^{\nu\theta})] dy \quad (4.5.52)$$

Le deuxième terme du membre de droite de (4.5.52) est évalué de la manière suivante

$$\int_Y \hat{e}_y(\Sigma^{\nu\theta}, \zeta^{\nu\theta}) dy = - \int_Y \hat{e}_y(\mathbf{w}^{\nu\theta}, \zeta^{\nu\theta}) + \int_Y \hat{e}_y(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}, \zeta^{\nu\theta}) dy \quad (4.5.53)$$

De plus, en remplaçant (\mathbf{v}, ψ) par $(\mathbf{w}^{\nu\theta}, \zeta^{\nu\theta})$ dans le problème local (4.5.27), on obtient

$$\begin{cases} \int_Y \hat{c}_{M,y}(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}, \mathbf{w}^{\nu\theta}) dy &= - \int_Y \left(\hat{e}_y(\mathbf{w}^{\nu\theta}, \zeta^{\nu\theta}) + \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\mathbf{w}^{\nu\theta}, \mathbf{w}^{\nu\theta}) \right) dy \\ \int_Y \hat{e}_y(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}, \zeta^{\nu\theta}) dy &= \int_Y \hat{d}_y(\zeta^{\nu\theta}, \zeta^{\nu\theta}) dy \end{cases} \quad (4.5.54)$$

En remplaçant (4.5.53) et (4.5.54) dans l'équation (4.5.52), on aboutit à

$$\bar{c}_M^{\alpha\beta\nu\theta} = \int_Y \left(\hat{c}_{M,y}(\Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}, \Sigma^{\nu\theta} + \mathbf{w}^{\nu\theta}) + \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\mathbf{w}^{\nu\theta}, \mathbf{w}^{\nu\theta}) + \hat{d}_y(\zeta^{\nu\theta}, \zeta^{\nu\theta}) \right) dy$$

De par la forme de ces coefficients, le tenseur d'élasticité membranaire homogénéisé est symétrique.

Nous allons à présent étudier les propriétés du tenseur diélectrique homogénéisé ($\bar{d}^{\alpha\beta}$). D'après l'équation (4.5.47), on a

$$\bar{d}^{\alpha\nu} = \int_Y [-\hat{e}_y(\mathbf{z}^\nu, y_\alpha) + \hat{d}_y(y_\nu + \eta^\nu, y_\alpha)] dy \quad (4.5.55)$$

Dans le membre de droite de l'expression précédente, le premier terme est évalué de la manière suivante

$$-\int_Y \hat{e}_y(\mathbf{z}^\nu, y_\alpha) dy = -\int_Y \hat{e}_y(\mathbf{z}^\nu, y_\alpha + \eta^\alpha) dy + \int_Y \hat{e}_y(\mathbf{z}^\nu, \eta^\alpha) dy \quad (4.5.56)$$

En remplaçant (\mathbf{v}, ψ) par $(\mathbf{z}^\alpha, \eta^\alpha)$ dans le problème local (4.5.28), on aboutit à

$$\begin{cases} -\int_Y \hat{e}_y(\mathbf{z}^\nu, y_\alpha + \eta^\alpha) &= \int_Y \left(\hat{c}_{M,y}(\mathbf{z}^\nu, \mathbf{z}^\alpha) + \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\mathbf{z}^\nu, \mathbf{z}^\alpha) \right) dy \\ \int_Y \hat{e}_y(\mathbf{z}^\nu, \eta^\alpha) dy &= \int_Y \hat{d}_y(y_\nu + \eta^\nu, \eta^\alpha) dy \end{cases} \quad (4.5.57)$$

Finalement, en remplaçant (4.5.56) et (4.5.57) dans l'équation (4.5.55), on obtient

$$\bar{d}^{\alpha\nu} = \int_Y \left(\hat{c}_{M,y}(\mathbf{z}^\nu, \mathbf{z}^\alpha) + \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\mathbf{z}^\nu, \mathbf{z}^\alpha) + \hat{d}_y(y_\nu + \eta^\nu, y_\alpha + \eta^\alpha) \right) dy$$

De la forme précédente, on voit clairement la symétrie du tenseur diélectrique homogénéisé ($\bar{d}^{\alpha\nu}$).

Nous allons à présent montrer l'ellipticité du tenseur d'élasticité homogénéisé $\bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{M}} = (\bar{\mathcal{C}}_M^{\alpha\beta\tau\theta})$. Soit $(X_{\alpha\beta})$ un tenseur d'ordre deux symétrique. (i.e. $X_{\alpha\beta} = X_{\beta\alpha}$). Pour se faire, en reprenant la technique déjà utilisée dans le cas tridimensionnel. En utilisant l'équation (4.5.39), on obtient

$$\bar{c}_M^{\alpha\beta\tau\theta} X_{\alpha\beta} X_{\tau\theta} = \int_Y c_M^{\alpha\beta\lambda\mu} (s_{\lambda\mu,y}(\mathbf{W}) + X_{\lambda\mu}) X_{\alpha\beta} \sqrt{a} dy + \int_Y e^{\lambda\alpha\beta} (\partial_{\lambda,y} \Lambda) X_{\alpha\beta} \sqrt{a} dy, \quad (4.5.58)$$

où $\mathbf{W} = \mathbf{w}^{\tau\theta} X_{\tau\theta}$ et $\Lambda = \zeta^{\tau\theta} X_{\tau\theta}$, qui est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \int_Y \left(\hat{c}_{M,y}(X_{\tau\theta} \Sigma^{\tau\theta} + \mathbf{W}, \mathbf{v}) + \hat{e}_y(\mathbf{v}, \Lambda) + \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\mathbf{W}, \mathbf{v}) \right) dy &= 0, \\ \int_Y \left(-\hat{e}_y(X_{\tau\theta} \Sigma^{\tau\theta} + \mathbf{W}, \psi) + \hat{d}_y(\Lambda, \psi) \right) dy &= 0, \end{cases} \quad (4.5.59)$$

pour chaque $(\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R} \times H_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R}$. Ainsi (\mathbf{W}, Λ) est un point selle de la fonctionnelle

$$I : \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R} \times H_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

définie par

$$\begin{aligned} I(\mathbf{v}, \psi) &= \frac{1}{2} \int_Y c_M^{\alpha\beta\lambda\mu} (s_{\lambda\mu, y}(\mathbf{v}) + X_{\lambda\mu})(s_{\alpha\beta, y}(\mathbf{v}) + X_{\alpha\beta}) \sqrt{a} \, dy \\ &\quad + \frac{h^2}{6} \int_Y c_F^{\alpha\beta\lambda\mu} r_{\lambda\mu, y}(\mathbf{v}) r_{\alpha\beta, y}(\mathbf{v}) \sqrt{a} \, dy \\ &\quad + \int_Y e^{\lambda\alpha\beta} (s_{\alpha\beta, y}(\mathbf{v}) + X_{\alpha\beta}) \partial_{\lambda, y} \psi \sqrt{a} \, dy - \frac{1}{2} \int_Y d^{\alpha\lambda} \partial_{\alpha, y} \psi \partial_{\lambda, y} \psi \sqrt{a} \, dy. \end{aligned}$$

D'après la définition du point selle, on a l'inégalité suivante

$$I(\mathbf{W}, \psi) \leq I(\mathbf{W}, \Lambda) \leq I(\mathbf{v}, \Lambda), \quad \text{pour chaque } (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R} \times H_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R}.$$

En particulier, pour $\psi = 0$, on a

$$\begin{aligned} I(\mathbf{W}, \Lambda) \geq I(\mathbf{W}, 0) &= \frac{1}{2} \int_Y c_M^{\alpha\beta\lambda\mu} (s_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) + X_{\alpha\beta})(s_{\lambda\mu, y}(\mathbf{v}) + X_{\lambda\mu}) \sqrt{a} \, dy \\ &\quad + \frac{h^2}{6} \int_Y c_F^{\alpha\beta\lambda\mu} r_{\lambda\mu, y}(\mathbf{v}) r_{\alpha\beta, y}(\mathbf{v}) \sqrt{a} \, dy \\ &> 0 \end{aligned}$$

De plus, en remplaçant $(\mathbf{v}, \psi) = (\mathbf{W}, \Lambda)$ dans l'équation (4.5.59), on aboutit à

$$\bar{c}_M^{\alpha\beta\tau\theta} X_{\alpha\beta} X_{\tau\theta} = 2I(\mathbf{W}, \Lambda) > 0.$$

Considérons la fonction numérique Φ définie sur \mathbb{R}^4 , par

$$\Phi(\xi_{\alpha\beta}) = \bar{c}_M^{\alpha\beta\gamma\eta} \xi_{\alpha\beta} \xi_{\gamma\eta}.$$

Visiblement la fonction Φ est continue sur \mathbb{R}^4 muni de la topologie associée à la norme

$$\|\xi\| = (\xi_{\alpha\beta} \xi_{\alpha\beta})^{\frac{1}{2}}.$$

Soit

$$B = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^4; \xi \text{ symétrique}, \|\xi\| = 1 \right\}.$$

Sur la sphère unité, compacte B , Φ atteint un minimum, alors il existe une constante positive $c > 0$ tel que $\Phi \geq c$ dans B . Par conséquent pour chaque tenseur d'ordre deux symétrique non nul, nous avons :

$$\Phi\left(\frac{\xi_{\alpha\beta}}{\|\xi_{\alpha\beta}\|}\right) \geq c.$$

Soit

$$\bar{c}_M^{\alpha\beta\tau\theta} \xi_{\alpha\beta} \xi_{\tau\theta} \geq c \xi_{\alpha\beta} \xi_{\tau\theta}.$$

Nous avons donc bien la coercivité du tenseur d'élasticité membranaire homogénéisé $\bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{M}} = (c_M^{\alpha\beta\tau\theta})$.

Intéressons nous maintenant à la coercivité de $\bar{\mathcal{D}} = (\bar{d}^{\alpha\sigma})$. Soit (X_σ) un vecteur de \mathbb{R} , d'après l'équation (4.5.47), on obtient

$$\bar{d}^{\alpha\sigma} X_\alpha X_\sigma = - \int_Y e^{\alpha\lambda\mu} s_{\lambda\mu, y}(\mathbf{Z}) X_\alpha \sqrt{a} \, dy + \int_Y d^{\alpha\lambda} (X_\lambda + \partial_\lambda \Theta) X_\alpha \sqrt{a} \, dy, \quad (4.5.60)$$

avec $\mathbf{Z} = \mathbf{z}^\sigma X_\sigma$ et $\Theta = \eta^\sigma X_\sigma$. Sachant que (\mathbf{Z}, Θ) est une solution du problème variationnel suivant

$$\begin{cases} \int_Y \left(\hat{c}_{M,y}(\mathbf{Z}, \mathbf{v}) + \hat{e}_y(\mathbf{v}, X_\sigma y_\sigma + \Theta) + \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\mathbf{Z}, \mathbf{v}) \right) dy = 0, \\ \int_Y \left(-\hat{e}_y(\mathbf{z}^\sigma, \psi) + \hat{d}_y(y_\sigma + \eta^\sigma, \psi) \right) dy = 0, \end{cases}$$

pour chaque $(\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R} \times H_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R}$. De plus, (\mathbf{Z}, Θ) est un point selle du fonctionnel suivant

$$J : \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R} \times H_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

définie par

$$\begin{aligned} J(\mathbf{v}, \psi) &= \frac{1}{2} \int_Y c_M^{\alpha\beta\lambda\mu} s_{\alpha\beta,y}(\mathbf{v}) s_{\lambda\mu,y}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dy + \frac{h^2}{6} \int_Y c_F^{\alpha\beta\lambda\mu} \rho_{\alpha\beta,y}(\mathbf{v}) \rho_{\lambda\mu,y}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dy \\ &+ \int_Y e^{\lambda\alpha\beta} s_{\alpha\beta,y}(\mathbf{v}) (X_\lambda + \partial_{\lambda,y} \psi) \sqrt{a} dy - \frac{1}{2} \int_Y d^{\alpha\lambda} (X_\alpha + \partial_{\alpha,y} \psi) (X_\lambda + \partial_{\lambda,y} \psi) \sqrt{a} dy. \end{aligned}$$

Ceci par définition du point selle, implique l'inégalité suivante

$$J(\mathbf{Z}, \psi) \leq I(\mathbf{Z}, \Theta) \leq I(\mathbf{v}, \Theta),$$

pour chaque $(\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R} \times H_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R}$.

En prenant $\psi = 0$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$J(\mathbf{Z}, \Theta) \geq J(\mathbf{Z}, 0) = \frac{1}{2} \int_Y d^{\alpha\sigma} (X_\alpha + \partial_{\alpha,y} \Theta) (X_\sigma + \partial_{\sigma,y} \Theta) \sqrt{a} dy > 0.$$

D'un autre côté, en prenant $(\mathbf{v}, \psi) = (\mathbf{Z}, \Theta)$ dans l'équation (4.5.60), on obtient

$$\bar{d}^{\alpha\sigma} X_\alpha X_\sigma = 2I(\mathbf{Z}, \Theta) > 0.$$

De même que la preuve de la coercivité du tenseur d'élasticité homogénéisé $\bar{\mathcal{C}}_M = (\bar{\mathcal{C}}_M^{\alpha\beta\tau\theta})$, on conclut qu'il existe une constante $d > 0$ telle que $\bar{d}^{\alpha\sigma} X_\alpha X_\sigma \geq d X_\alpha X_\sigma$.

Maintenant, nous allons montrer quelques propriétés concernant le tenseur de flexion $(\bar{c}_F^{\alpha\beta\gamma\theta})$ homogénéisé.

(i) *Symétrie* :

Il est clair de voir qu'une partie de la symétrie est vérifiée

$$\bar{c}_F^{\alpha\beta\gamma\eta} = \bar{c}_F^{\beta\alpha\gamma\eta} = \bar{c}_F^{\alpha\beta\eta\gamma}$$

Il suffit de démontrer l'égalité suivante

$$\bar{c}_F^{\alpha\beta\gamma\eta} = \bar{c}_F^{\gamma\eta\alpha\beta}$$

Initialement, en prenant la définition (4.5.42) de $(\bar{c}_F^{\alpha\beta\gamma\eta})$, le tenseur de flexion homogénéisé est évalué de la manière suivante

$$\bar{c}_F^{\alpha\beta\gamma\eta} = \int_Y c_F^{\alpha\beta\delta\tau} \rho_{\delta\tau,y} (\Pi^{\gamma\eta} + \mathbf{q}^{\gamma\eta}) dy \quad (4.5.61)$$

$$= \int_Y c_F^{\zeta\delta\tau} \rho_{\delta\tau,y} [\Pi^{\gamma\eta} + \mathbf{q}^{\gamma\eta}] \delta_{\alpha\zeta} \delta_{\beta\zeta} dy$$

$$= \int_Y c_F^{\zeta\delta\tau} \rho_{\delta\tau,y} [\Pi^{\gamma\eta} + \mathbf{q}^{\gamma\eta}] \rho_{\zeta\varsigma,y} (\Pi^{\alpha\beta}) dy$$

$$= \int_Y c_F^{\zeta\delta\tau} \sqrt{a} \rho_{\delta\tau,y} [\Pi^{\gamma\eta} + \mathbf{q}^{\gamma\eta}] \rho_{\zeta\varsigma,y} [\Pi^{\alpha\beta} + \mathbf{q}^{\alpha\beta}] dy$$

$$- \int_Y c_F^{\zeta\delta\tau} \sqrt{a} \rho_{\delta\tau,y} [\Pi^{\gamma\eta} + \mathbf{q}^{\gamma\eta}] \rho_{\zeta\varsigma,y} (\mathbf{q}^{\alpha\beta}) dy. \quad (4.5.62)$$

Nous choisissons $(\mathbf{v}, \psi) = (\mathbf{q}^{\alpha\beta}, \lambda^{\alpha\beta})$ dans le problème local (4.5.29), on aboutit à

$$\int_Y \left(\hat{c}_{M,y}(\mathbf{q}^{\alpha\beta}, \mathbf{q}^{\alpha\beta}) + \hat{d}_y(\lambda^{\alpha\beta}, \lambda^{\alpha\beta}) + \frac{h^2}{3} \hat{c}_{F,y}(\Pi^{\alpha\beta} + \mathbf{q}^{\alpha\beta}, \mathbf{q}^{\alpha\beta}) \right) dy = 0$$

En utilisant la dernière équation, dans l'expression (4.5.62) des coefficients du tenseur $(\bar{c}_F^{\alpha\beta\gamma\eta})$, on obtient

$$\bar{c}_F^{\alpha\beta\gamma\eta} = \int_Y \left(\hat{c}_{M,y}(\Pi^{\alpha\beta} + \mathbf{q}^{\alpha\beta}, \Pi^{\alpha\beta} + \mathbf{q}^{\alpha\beta}) + \frac{3}{h^2} \left(\hat{c}_{M,y}(\mathbf{q}^{\alpha\beta}, \mathbf{q}^{\alpha\beta}) + \hat{d}_y(\lambda^{\alpha\beta}, \lambda^{\alpha\beta}) \right) \right) dy \quad (4.5.63)$$

Il est alors immédiat de par la forme (4.5.63), que les coefficients du tenseur de flexion homogénéisé $(\bar{c}_F^{\alpha\beta\gamma\eta})$ sont symétriques.

(ii) *Ellipticité* :

Soit $(\xi_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$ un tenseur symétrique (*i.e.* : $\xi_{\alpha\beta} = \xi_{\beta\alpha}$), non identiquement nul. Posons

$$\tau_{\delta\eta} = \xi_{\alpha\beta} r_{\delta\eta,y}(\Pi^{\alpha\beta} + \mathbf{q}^{\alpha\beta}).$$

Nous obtenons ainsi un tenseur symétrique d'ordre 2. En utilisant maintenant la coercivité du tenseur $C_F^{\lambda\mu\nu\zeta}(x, y)$ et en utilisant le fait que $a \neq 0$, on aboutit à

$$\bar{c}_F^{\alpha\beta\gamma\eta} \xi_{\alpha\beta} \xi_{\gamma\eta} \geq \int_Y C_F^{\delta\eta\zeta\nu} \sqrt{a} \tau_{\delta\eta} \tau_{\zeta\nu} dy \geq c \int_Y \tau_{\delta\eta} \tau_{\delta\eta} dy. \quad (4.5.64)$$

Montrons que la seconde intégrale dans (4.5.64) est strictement positive si au moins un des $\tau_{\beta\eta}$ n'est pas nul. Si ce n'était pas le cas, nous aurions

$$\forall (\delta, \eta) \in \{1, 2\}^2, \quad \tau_{\delta\eta} = \xi_{\alpha\beta} r_{\delta\eta,y}(\Pi^{\alpha\beta} - \mathbf{q}^{\alpha\beta}) = 0. \quad (4.5.65)$$

C'est-à-dire

$$r_{\delta\eta,y}(\xi_{\alpha\beta}(\Pi^{\alpha\beta} - \mathbf{q}^{\alpha\beta})) = 0.$$

Si nous reprenons les mêmes démarches présentées dans la section 3.4, ceci implique

$$\xi_{\alpha\beta}(\Pi^{\alpha\beta} - \mathbf{q}^{\alpha\beta}) = a_\iota y_\iota + b, \quad a_\iota \text{ et } b \text{ sont des constantes, } \iota = 1, 2.$$

Ce qui nous donne

$$\mathbf{q}^{\alpha\beta} \xi_{\alpha\beta} = \Pi^{\alpha\beta} \xi_{\alpha\beta} + a_\iota y_\iota + b.$$

Puisque $\xi \neq 0$, alors il existe au moins un couple d'indices (α, β) tel que $\xi_{\alpha\beta} \neq 0$. Dans ce cas, le membre de gauche de l'égalité précédente est Y -périodique, mais celui de droite ne l'est pas. Ceci est contradictoire. Alors la seconde intégrale de (4.5.64) est bien strictement positive. Ainsi

$$\bar{c}_F^{\alpha\beta\gamma\eta} \xi_{\alpha\beta} \xi_{\gamma\eta} > 0 \quad \forall (\xi_{\alpha\beta}) \neq 0 \text{ symétrique, non nul.}$$

A présent, considérons la fonction numérique $\Psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\Psi(\xi_{\alpha\beta}) = \bar{c}_F^{\alpha\beta\gamma\eta} \xi_{\alpha\beta} \xi_{\gamma\eta}.$$

Il est clair que la fonction Ψ est continue sur \mathbb{R}^4 muni d'une topologie associée à la norme

$$\|\tau\| = (\tau_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta})^{\frac{1}{2}}.$$

Car Φ admet un minimum, sur la sphère unité compacte dans \mathbb{R}^4 , qu'elle atteint. Aussi $\Psi > 0$ pour chaque tenseur symétrique non nul $(\xi_{\alpha\beta}) \neq 0$, on conclut qu'il existe une constante positive $M > 0$, telle que

$$\Psi\left(\frac{\xi_{\alpha\beta}}{\|\xi\|}\right) \geq M, \quad \text{pour chaque tenseur symétrique non nul } (\xi_{\alpha\beta}) \neq 0.$$

Soit

$$\bar{c}_F^{\alpha\beta\gamma\eta} \xi_{\alpha\beta} \xi_{\gamma\eta} \geq M \xi_{\alpha\beta} \xi_{\alpha\beta}.$$

Nous avons donc bien la coercivité du tenseur de flexion homogénéisé.

(vi) Le problème homogénéisé

A partir des identités qu'on a montré et qui relie les neuf nouveaux tenseurs obtenus entre eux, il est clair qu'il nous reste à la fin que six tenseurs, et par conséquent, le problème (4.5.38) s'écrit de la manière suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\omega} \left\{ \left(\bar{c}_M^{\alpha\beta\nu\theta} \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) - \frac{h^2}{3} \bar{N}^{\alpha\beta\nu\theta} \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{e}^{\alpha\beta\nu} \partial_{\nu}\varphi \right) \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \right. \\ \quad \left. + \frac{h^2}{3} \left(\bar{c}_F^{\alpha\beta\nu\theta} \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{N}^{\alpha\beta\nu\theta} \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{Q}^{\alpha\beta\nu} \partial_{\nu}\varphi \right) \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \right\} \sqrt{a} \, dx = \int_{\omega} F^i v_i \sqrt{a} \, dx \\ \int_{\omega} \left(-\bar{e}^{\alpha\nu\theta} \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) - \frac{h^2}{3} \bar{Q}^{\alpha\nu\theta} \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{d}^{\alpha\nu} \partial_{\nu}\varphi \right) \partial_{\alpha}\psi \sqrt{a} \, dx = 0 \end{array} \right. \quad (4.5.66)$$

avec les tenseurs homogénéisés $\bar{c}_M^{\alpha\beta\nu\theta}$, $\bar{e}^{\alpha\beta\nu}$, $\bar{c}_F^{\alpha\beta\nu\theta}$, $\bar{N}^{\alpha\beta\nu\theta}$, $\bar{Q}^{\alpha\nu\theta}$ et $\bar{d}^{\alpha\nu}$ sont donnés par les formules (4.5.21), (4.5.22), (4.5.23), (4.5.24), (4.5.25) et (4.5.26) respectivement.

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème ci-dessus, il suffit d'appliquer le lemme de Lax-Milgram. Pour cela, il suffit de vérifier l'ellipticité de la forme bilinéaire associée au problème (4.5.66). Cette ellipticité est une conséquence immédiate des propriétés d'ellipticité de chacun des tenseurs homogénéisés $(\bar{c}_M^{\alpha\beta\tau\theta})$, $(\bar{c}_F^{\alpha\beta\tau\theta})$ et $(\bar{d}^{\alpha\beta})$. Ceci achève complètement la démonstration du Théorème 4.5.1. ■

4.6 Résultat de correcteur

On a déjà établi les convergences

$$\mathcal{T}^{\varepsilon}(\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^{\varepsilon})) \rightharpoonup \gamma_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u}) + s_{\alpha\beta,y}(\hat{\mathbf{u}}) \quad \text{faiblement dans } \mathbf{L}^2(\omega \times Y), \quad (4.6.67)$$

$$\mathcal{T}^{\varepsilon}(\nabla\varphi^{\varepsilon}) \rightharpoonup \nabla_x\varphi + \nabla_y\hat{\varphi} \quad \text{faiblement dans } L^2(\omega \times Y), \quad (4.6.68)$$

$$\mathcal{T}^{\varepsilon}(\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^{\varepsilon})) \rightharpoonup \rho_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u}) + r_{\alpha\beta,y}(\hat{\mathbf{u}}) \quad \text{faiblement dans } \mathbf{L}^2(\omega \times Y). \quad (4.6.69)$$

De plus, on opère comme dans l'article de Cioranescu, Damlamian et Griso [24], les convergences faibles dans (4.6.67) et (4.6.68) deviennent fortes

$$\mathcal{T}^{\varepsilon}(\gamma_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u}^{\varepsilon})) - \gamma_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u}) - s_{\alpha\beta,y}(\hat{\mathbf{u}}) \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } \mathbf{L}^2(\omega \times Y), \quad (4.6.70)$$

$$\mathcal{T}^{\varepsilon}(\nabla_x\varphi^{\varepsilon}) - \nabla_x\varphi - \nabla_y\hat{\varphi} \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^2(\omega \times Y), \quad (4.6.71)$$

$$\mathcal{T}^{\varepsilon}(\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^{\varepsilon})) - \rho_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u}) - r_{\alpha\beta,y}(\hat{\mathbf{u}}) \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } \mathbf{L}^2(\omega \times Y). \quad (4.6.72)$$

Alors maintenant, on peut établir un résultat de correcteur pour le déplacement mécanique et le potentiel électrique

Théorème 4.6.1 (correcteur)

On a les convergences fortes suivantes

$$\gamma_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \gamma_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u}) - \mathcal{U}^\varepsilon(s_{\alpha\beta,y}(\hat{\mathbf{u}})) \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } \mathbf{L}^2(\omega), \quad (4.6.73)$$

$$\nabla_x \varphi^\varepsilon - \nabla_x \varphi - \mathcal{U}^\varepsilon(\nabla_y \hat{\varphi}) \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^2(\omega), \quad (4.6.74)$$

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \rho_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u}) - \mathcal{U}^\varepsilon(r_{\alpha\beta,y}(\hat{\mathbf{u}})) \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } \mathbf{L}^2(\omega). \quad (4.6.75)$$

Preuve :

En utilisant les convergences (4.6.70), (4.6.71) et (4.6.72), ainsi que le Théorème 4.3.3 on a

$$\gamma_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \mathcal{U}^\varepsilon(\gamma_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u})) - \mathcal{U}^\varepsilon(s_{\alpha\beta,y}(\hat{\mathbf{u}})) \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } \mathbf{L}^2(\omega), \quad (4.6.76)$$

$$\nabla_x \varphi^\varepsilon - \mathcal{U}^\varepsilon(\nabla_x \varphi) - \mathcal{U}^\varepsilon(s_{\alpha\beta,y}(\hat{\mathbf{u}})) \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^2(\omega). \quad (4.6.77)$$

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \mathcal{U}^\varepsilon(\rho_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u})) - \mathcal{U}^\varepsilon(r_{\alpha\beta,y}(\hat{\mathbf{u}})) \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } \mathbf{L}^2(\omega), \quad (4.6.78)$$

or $\gamma_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u}) \in \mathbf{L}^2(\omega)$, $\nabla_x \varphi \in L^2(\omega)$ et $\rho_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u}) \in \mathbf{L}^2(\omega)$ aussi, donc d'après la Proposition 4.3.4 (i) et (v), on a

$$\mathcal{U}^\varepsilon(\gamma_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u})) \rightarrow \gamma_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u}) \quad \text{fortement dans } \mathbf{L}^2(\omega), \quad (4.6.79)$$

$$\mathcal{U}^\varepsilon(\nabla_x \varphi) \rightarrow \nabla_x \varphi \quad \text{fortement dans } L^2(\omega), \quad (4.6.80)$$

$$\mathcal{U}^\varepsilon(\rho_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u})) \rightarrow \rho_{\alpha\beta,x}(\mathbf{u}) \quad \text{fortement dans } \mathbf{L}^2(\omega). \quad (4.6.81)$$

Par (4.6.76)-(4.6.81) on déduit les convergences (4.6.73), (4.6.74) et (4.6.75). C'est le résultat désiré. ■

4.7 Conclusions et commentaires

Dans ce chapitre, nous avons réussi à déterminer le problème homogénéisé pour le problème de coque piézoélectrique périodique de type Koiter décrit dans un système de coordonnées curvilignes.

Nous avons d'une part, justifié les convergences des déplacements mécaniques, ainsi que celui du potentiel électrique. D'autre part, on a déterminé les tenseurs d'élasticité membranaire, d'élasticité en flexion, de piézoélectricité (de couplage) et de diélectricité homogénéisés et leurs propriétés. Nous avons aussi, établi un résultat de correcteur pour les déplacements mécaniques et le potentiel électrique.

Si on remplace (\mathbf{v}, ψ) par (\mathbf{u}, φ) dans le problème homogénéisé (4.5.20), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\omega} \left\{ \left(\bar{c}_M^{\alpha\beta\nu\theta} \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) - \frac{h^2}{3} \bar{N}^{\alpha\beta\nu\theta} \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{e}^{\alpha\beta\nu} \partial_{\nu}\varphi \right) \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \right. \\ \quad \left. + \frac{h^2}{3} \left(\bar{c}_F^{\alpha\beta\nu\theta} \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{N}^{\alpha\beta\nu\theta} \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{Q}^{\alpha\beta\nu} \partial_{\nu}\varphi \right) \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \right\} \sqrt{a} \, dx = \int_{\omega} F^i v_i \sqrt{a} \, dx \\ \int_{\omega} \left(-\bar{e}^{\alpha\nu\theta} \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) - \frac{h^2}{3} \bar{Q}^{\alpha\nu\theta} \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \bar{d}^{\alpha\nu} \partial_{\nu}\varphi \right) \partial_{\alpha}\varphi \sqrt{a} \, dx = 0. \end{array} \right.$$

En additionnant les deux équation du système précédent, on aboutit à

$$\int_{\omega} \left(\bar{c}_M^{\alpha\beta\nu\theta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + \frac{h^2}{3} \bar{c}_F^{\alpha\beta\nu\theta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \rho_{\nu\theta}(\mathbf{u}) + 2\bar{e}^{\alpha\beta\theta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \partial_{\theta}\varphi - \bar{d}^{\alpha\beta} \partial_{\alpha}\varphi \partial_{\beta}\varphi \right) \sqrt{a} \, dx = \int_{\omega} F^i v_i \sqrt{a} \, dx.$$

En utilisant les mêmes arguments d'analyse convexe présentés dans le premier chapitre, on montre que le couple (\mathbf{u}, φ) solution du problème homogénéisé (4.5.20) est défini comme un point selle de la fonctionnelle suivante

$$(\mathbf{v}, \psi) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\omega} [\bar{c}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2\bar{e}(\mathbf{v}, \psi) - \bar{d}(\psi, \psi)] \sqrt{a} \, dx - \int_{\omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \sqrt{a} \, dx,$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{c}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \bar{c}_M(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{h^2}{3} \bar{c}_F(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ \bar{c}_M(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \bar{c}_M^{\alpha\beta\nu\theta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \gamma_{\nu\theta}(\mathbf{v}) \\ \bar{c}_F(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \bar{c}_F^{\alpha\beta\nu\theta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \rho_{\nu\theta}(\mathbf{v}) \\ \bar{e}(\mathbf{v}, \psi) = \bar{e}^{\alpha\beta\theta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \partial_{\theta}\psi \\ \bar{d}(\psi, \psi) = \bar{d}^{\alpha\beta} \partial_{\alpha}\psi \partial_{\beta}\psi \end{array} \right.$$

Deuxième partie

Simulation numérique des structures piézoélectriques

Chapitre 5

Homogénéisation numérique des matériaux piézoélectriques perforés

5.1 Introduction

Les matériaux piézoélectriques sont souvent utilisés sous forme de capteurs ou d'émetteurs de signaux acoustiques dans des domaines tels que l'imagerie biomédicale, l'aérospatial, l'ingénierie civil et l'ingénierie maritime. Actuellement, il y a de nouvelles applications dans le domaine d'hydrophonie, qui consiste à utiliser ces matériaux sous forme de capteurs à basses fréquences (i.e: la longueur d'onde du signal de pression est beaucoup plus grande que l'espacement entre les perforations) pour des applications acoustiques. Rappelons que l'utilisation des matériaux piézoélectriques est néanmoins loin d'être limitée à cet aspect d'application. Nous les trouverons dans de nombreux secteurs d'activités industrielles, liés à plusieurs domaines tels que les télécommunications et l'électronique.

Les matériaux piézoélectriques sont des matériaux intelligents (adaptatifs), ce qui amène de nombreux chercheurs à s'intéresser à l'étude des propriétés macroscopiques des matériaux piézocomposites. En hydrophonie ou en imagerie biomédicale, l'utilisation des matériaux piézoélectriques se présentent sous forme de fibres dans des matériaux non nécessairement piézoélectriques. La performance de ces composites a été examinée dans les travaux de Gibiansky et Torquato [39], de Poizat et Sester [71] [72] et le travail de Sigmund *et al.* [83]. Ces auteurs se sont servis de la technique des échelles multiples combinée avec l'optimisation de forme, pour examiner les propriétés effectives des structures étudiées. Actuellement, des avancées significatives dans les domaines des micro-systèmes électro-mécaniques (Micro Electro Mechanical Systems MEMS) ont permis d'améliorer le développement de nouveaux capteurs et actionneurs, qui sont employés dans d'autres domaines notamment la télécommunication.

Les enjeux de la modélisation numérique dans ce domaine sont la détermination des tenseurs effectifs, ainsi que la compréhension du comportement des matériaux et leur prédimensionnement en vue de satisfaire à des besoins spécifiques. Une étude complète sur la détermination des expressions des tenseurs homogénéisés a été abordée précédemment, pour les formes : structure tridimensionnelle (corps), plaque et coque de Koiter. Nous pouvons donc entamer désormais l'étude numérique des propriétés effectives des matériaux piézoélectriques périodiquement perforés. Dans ce qui suit nous présentons, d'une part, l'influence de la distribution et la géométrie des perforations sur les propriétés macroscopiques des matériaux et d'autre part, l'influence de la rotation d'une perforation de géométrie non symétrique.

Afin d'atteindre ces objectifs, on propose deux modèles d'approximation numérique : Le premier modèle consiste à mettre en œuvre une méthode d'éléments finis inspirée du travail de Feng et Wu [35] et de celui de Sun *et al.* [84], dans leurs modélisations des propriétés macroscopiques des composites piézo-céramiques. Cette méthode nous simplifie la résolution des problèmes cellulaires (locaux) nécessaire à la compréhension du comportement des tenseurs homogénéisés. Le second modèle se base sur une technique analytique, inspirée des travaux de Castillero *et al.* [15] [19] [41] [77], si l'on prend une connexion suivant la classification de Newnham (1978), c'est-à-dire un composite perforé longitudinalement (vertical ou x_3 -direction), où on détermine de façon explicite tous les tenseurs homogénéisés.

D'un point de vue bibliographique, dans le cadre de la modélisation du comportement des matériaux piézocomposites et de prédimensionnement mécanique, piézoélectrique et électrique des matériaux piézocomposites, nous trouvons d'autres approches soit numériques, soit analytiques. Nous citons par exemple pour la première approche, une loi des mélanges, les modèles types Voigt, Reuss, Berthelot et pour la seconde, les méthodes d'Eshelby et de Mori-Tanaka (voir les travaux de Levin *et al.* [48], de Dunn et Taya [31], de Feng et Wu [35] et celui de Sun *et al.* [84]).

Le coût de fabrication des composites à base de piézoélectriques demeure élevé, c'est pourquoi la modélisation est une solution rentable pour minimiser les dépenses. Pour cela, dans les applications d'imagerie biomédicale et d'hydrophonique, il faudra optimiser la géométrie de la structure étudiée afin de maximiser le facteur du couplage hydrostatique et celui du couplage électromécanique. Cette étude d'optimalité consiste à examiner deux directions, l'une est de trouver la structure piézoélectrique perforée la mieux adaptée pour les applications industrielles en hydrophonique et l'autre est de minimiser la fraction volumique du matériau piézoélectrique qui permettra de maximiser le facteur du couplage hydrostatique, suite au coût très élevé et aux propriétés physiques des matériaux piézoélectriques (fragilité par exemple).

Ce chapitre est composé principalement de six parties : La première est consacrée au traitement des problèmes cellulaires à l'aide du développement d'une méthode d'éléments finis, dans le but d'étudier les propriétés des tenseurs homogénéisés. Dans la seconde partie, tout en se basant sur des arguments d'analyse complexe, nous introduisons une méthode de calcul formel, qui permettra par la suite de déterminer explicitement les expressions des tenseurs effectifs dans un cas bien particulier. La validation et l'estimation des performances réalisées à travers les résultats numériques obtenus à l'aide du code numérique feront l'objet de la troisième partie. Dans la quatrième partie, nous traiterons l'influence de la distribution des perforations sur les propriétés effectives. La cinquième partie, sera consacrée à l'étude de l'influence de la géométrie des perforations. Enfin, nous présenterons un aperçu sur l'influence de la rotation des perforations à géométrie non symétrique sur les propriétés effectives. Le travail de ce chapitre, avec les démonstrations détaillées et les résultats numériques sur les matériaux perforés, fibrés et laminés, seront présentés dans des travaux ultérieurs.

5.2 Modélisation numérique par la méthode des éléments finis

Dans les chapitres précédents, nous avons déterminé les expressions des tenseurs effectifs. Les résultats obtenus servent donc à développer une méthode des éléments finis tridimensionnels isoparamétriques en introduisant des modes incompatibles, pour examiner les propriétés

effectives des matériaux piézoélectriques perforés de façon périodique, en trois dimensions d'espace. Il existe dans la littérature plusieurs techniques de modélisation numérique, entre autres une technique basée sur l'extension de la méthode de l'inclusion équivalente d'Eshelby sur la piézoélectricité (voir Levin *et al.* [48]), la méthode de Mori-Tanaka (voir Dunn et Taya [31]) et le modèle type Voigt. Nous avons opté pour la méthode des déplacements incompatibles introduite dans les travaux de Feng et Wu [35] et de Sun *et al.* [84], qui sera programmée sous Matlab avec l'utilisation des codes de maillage de Femlab.

On commence par réécrire les problèmes cellulaires sous une forme matricielle plus commode, ce qui nous simplifie par la suite l'étude des propriétés des tenseurs homogénéisés. Puis on détaille l'implémentation de la méthode des éléments finis. Pour la résolution du problème matriciel final, on utilise la méthode du gradient conjugué. Les résultats numériques obtenus seront présentés à la fin de cette partie.

5.2.1 Mise sous forme matricielle du problème variationnel

Reprenant ici les approximations (2.6.34) et (2.6.35) qui relient les premiers termes du développement asymptotique des déplacements mécaniques et le potentiel électrique, avec les fonctions locales, sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} u_i^1(x, y) \\ \Phi^1(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_i^{mh}(y) & q_i^n(y) \\ \varphi^{mh}(y) & \psi^n(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{mh,x}(u_i(x)) \\ E_{n,x}(\Phi(x)) \end{pmatrix},$$

avec

$$E_{\delta,x}(h) = \frac{\partial h}{\partial x_\delta}.$$

D'après l'équation (2.6.42), on a

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^H(x, y) &= c_{ijkl}(x, y) \left\{ \left[\tau_{mh}^{kl} + s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh}) \right] s_{mh,x}(\mathbf{u}) + s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) E_{n,x}(\Phi) \right\} \\ &+ e_{kij}(x, y) \left\{ E_{k,y}(\varphi^{mh}) s_{mh,x}(\mathbf{u}) + \left[\delta_{kn} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y_k} \right] E_{n,x}(\Phi) \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

De même, de l'équation (2.6.43), on a

$$\begin{aligned} D_i^H(x, y) &= -e_{ikl}(x, y) \left\{ \left[\tau_{mh}^{kl} + s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh}) \right] s_{mh,x}(\mathbf{u}) - s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) E_{n,x}(\Phi) \right\} \\ &+ d_{ij}(x, y) \left\{ E_{j,y}(\varphi^{mh}) s_{mh,x}(\mathbf{u}) + \left[\delta_{jn} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y_j} \right] E_{n,x}(\Phi) \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Pour les coefficients des tenseurs d'élasticité et de piézoélectricité, on introduit la notation tensorielle qui, à toute paire d'indices ou d'exposants pouvant être interchangés, associe un entier selon le schéma suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} (11) \rightarrow 1; \quad (22) \rightarrow 2, \\ (33) \rightarrow 3; \quad (23) \rightarrow 4, \\ (31) \rightarrow 5; \quad (12) \rightarrow 6. \end{array} \right.$$

Ce qui nous permet d'écrire à partir des deux équations (5.2.1) et (5.2.2), le tenseur des contraintes mécaniques et le vecteur des déplacements électriques homogénéisés sous la forme

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \sigma^H \\ \mathbf{D}^H \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}[\mathbf{T} + \mathbf{s}_y(\mathbf{w})] + \mathbf{e}\mathbf{E}_y(\mathbf{q}) & \mathbf{e}[\mathbf{H} + \mathbf{E}_y(\psi)] + \mathbf{C}\mathbf{s}_y(\phi) \\ -\mathbf{e}^T[\mathbf{T} + \mathbf{s}_y(\mathbf{w})] + \mathbf{d}\mathbf{E}_y(\mathbf{q}) & \mathbf{d}[\mathbf{H} + \mathbf{E}_y(\psi)] - \mathbf{e}^T\mathbf{s}_y(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{E}_x \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{e} \\ -\mathbf{e}^T & \mathbf{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} + \mathbf{s}_y(\mathbf{w}) & \mathbf{H} + \mathbf{E}_y(\psi) \\ \mathbf{E}_y(\mathbf{q}) & \mathbf{s}_y(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{E}_x \end{pmatrix}, \\
&= \mathbf{D} \begin{pmatrix} \mathbf{T} + \mathbf{s}_y(\mathbf{w}) & \mathbf{H} + \mathbf{E}_y(\psi) \\ \mathbf{E}_y(\mathbf{q}) & \mathbf{s}_y(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{E}_x \end{pmatrix}, \tag{5.2.3}
\end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{e} \\ -\mathbf{e}^T & \mathbf{d} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{9 \times 9}(\mathbb{R}),$$

$$\mathbf{C} = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{6 \times 6}(\mathbb{R}), \quad \mathbf{e} = (e_{ij}) \in \mathcal{M}_{6 \times 3}(\mathbb{R}), \quad \mathbf{d} = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}),$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_y(\mathbf{w}) &= s_{kl,y}(w_i^{mh}), \quad \mathbf{s}_y(\phi) = s_{kl,y}(\phi^n), \quad \mathbf{s}_x = s_{mh,x}(u_i), \\
\mathbf{E}_y(\mathbf{q}) &= E_{k,y}(q_i^{mh}), \quad \mathbf{E}_y(\psi) = E_{l,y}(\psi^n), \quad \mathbf{E}_x = E_{n,x}(\phi),
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mathbf{H} = (\delta_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq 3, \\ \mathbf{T} = (\tau_{mh}^{kl}) = \frac{1}{2}(\delta_{km}\delta_{lh} + \delta_{kh}\delta_{lm}), \quad 1 \leq l, m, k, h \leq 3. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs des coefficients homogénéisés, il est nécessaire de calculer tout d'abord les fonctions locales via la résolution des deux problèmes cellulaires sur la cellule Y^*

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh}) + e_{kij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} \right\} = \frac{\partial}{\partial y_j} (c_{ijmh}(x, y)), \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ -e_{ikl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh}) + d_{ij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_j} \right\} = \frac{\partial}{\partial y_j} (-e_{imh}(x, y)), \end{cases} \tag{5.2.4}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + e_{kij}(x, y) \frac{\partial \psi^n}{\partial y_k} \right\} = \frac{\partial}{\partial y_j} (e_{nij}(x, y)), \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ -e_{ikl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + d_{ij}(x, y) \frac{\partial \psi^n}{\partial y_j} \right\} = \frac{\partial}{\partial y_j} (d_{in}(x, y)), \end{cases} \tag{5.2.5}$$

on peut les réécrire comme suit

$$\begin{pmatrix} c_{ijkl} & e_{kij} \\ -e_{ikl} & d_{ij} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ \begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i^{mh}(y) & q_i^n(y) \\ \varphi^{mh}(y) & \psi^n(y) \end{pmatrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial y_j} \begin{pmatrix} c_{ijmh} & e_{nij} \\ -e_{imh} & d_{ij} \end{pmatrix} = 0. \tag{5.2.6}$$

La formulation variationnelle associée à l'équation (5.2.6), s'écrit

$$\begin{aligned}
&\int_{Y^*} \begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \delta \begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{ijkl} & e_{kij} \\ -e_{ikl} & d_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix} dY^* \\
&+ \int_{Y^*} \begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \delta \begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{ijkl} & e_{kij} \\ -e_{ikl} & d_{ij} \end{pmatrix} dY^* = 0. \tag{5.2.7}
\end{aligned}$$

Il est facile de montrer que cette équation est la variation d'ordre 1 de la fonctionnelle du potentiel suivant

$$\begin{aligned} \Pi_P\left(\begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix}\right) &= \int_{Y^*} \begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{ijkl} & e_{kij} \\ -e_{ikl} & d_{ij} \end{pmatrix} dY^* \\ &+ \int_{Y^*} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{ijkl} & e_{kij} \\ -e_{ikl} & d_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix} dY^*. \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Remarque 5.2.1 *Il convient de remarquer que si on définit le tenseur des contraintes extensifs et le vecteur électrique extensif comme suit*

$$\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}^{kl} \\ \hat{E}^{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}^{kl} \\ \hat{E}^{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{ijkl} & e_{kij} \\ -e_{ikl} & d_{ij} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{kl} \\ \hat{D}^{kl} \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{kl} \\ \hat{D}^{kl} \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{kl} \\ \hat{D}^{kl} \end{pmatrix},$$

sont des fonctions Y^* -périodiques, définies sur la cellule de référence Y^* , à partir de ces dernières notations, on obtient la fonctionnelle de Hellinger-Reissner de deux composantes

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}\left(\begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{kl} \\ \hat{D}^{kl} \end{pmatrix}\right) &= \int_{Y^*} \left\{ -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{kl} \\ \hat{D}^{kl} \end{pmatrix}^T \mathbf{S} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{kl} \\ \hat{D}^{kl} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{kl} \\ \hat{D}^{kl} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix} \right. \\ &\left. + \begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix} \mathbf{C} \right\} dY^*. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Bien que les éléments mixtes basés sur le principe de Hellinger-Reissner, peuvent donner une bonne approximation des déplacements mécaniques et des contraintes (voir Feng et Wu [35], Sun et al. [84]). Dans notre modélisation numérique, on a opté pour la méthode des éléments finis qui fait appel aux déplacements basés sur la fonctionnelle du potentiel (5.2.8). ■

5.2.2 Implémentation de la méthode des éléments finis

Dans la section précédente, nous avons pu écrire les deux problèmes cellulaires (locaux) (5.2.4) et (5.2.5) sous une forme matricielle (5.2.6) plus commode. On va introduire désormais les éléments de déplacements, ce qui permet par la suite la mise en œuvre de cette méthode.

Puisque la géométrie de la cellule de base est parallélépipédique, ceci permet de la recouvrir exactement par des parallélépipèdes de nombre nbt ($nbt \in \mathbb{N}$). Soit \mathcal{T}_h une famille régulière de parallélépipèdes. Autrement dit : en subdivisant l'unité de base Y en parallélépipèdes $(Y_e)_{e \in \{1, \dots, nbt\}}$, qui vérifient les propriétés suivantes

$$(i) \quad Y = \bigcup_{e=1}^{nbt} Y_e, \quad Y_e \cap Y_{e'} = \emptyset, \quad \partial Y_e \cap \partial Y_{e'} = S_{ee'} \quad (e \text{ et } e' \text{ sont deux éléments arbitraires}).$$

$$(ii) \quad \exists \delta > 0, \quad \forall Y_e \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_{Y_e}}{\rho_{Y_e}} < \delta,$$

avec $h_{Y_e} = \text{diam}(Y_e)$ et $\rho_{Y_e} = \sup \{ \text{diam}(S), S \text{ est le sphère inscrit dans } Y_e \}$.

(iii) La quantité $h = \max_{Y_e \in \mathcal{T}_h} h_{Y_e}$ vérifie $h \rightarrow 0$.

(iv) Soit \hat{Y} un élément de référence, il existe une fonction affine inversible F_{Y_e} telle que

$$F_{Y_e} : \hat{y} \in \hat{Y} \longrightarrow F_{Y_e}(\hat{x}) = J\hat{x} + b,$$

où J est la matrice Jacobienne inversible et b un vecteur constant. On peut retrouver les sommets s_i d'un parallélépipède réel quelconque par l'intermédiaire de la transformation F_{Y_e} des sommets \hat{s}_i du parallélépipède de référence

$$F_{Y_e}(\hat{s}_i) = s_i, \quad i = 1 \dots nbt,$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\int_{Y_e} \phi(y) dy = \int_{\hat{Y}} |\det(J)| \hat{\phi}(\hat{y}) d\hat{y}.$$

Les noeuds \hat{s}_i et s_i sont respectivement les sommets des parallélépipèdes (nbt -simplexes) de \hat{Y} et Y_e .

A chaque triangulation \mathcal{T}_h on associe l'espace d'éléments finis X_h et on définit ensuite une suite d'espaces $V_h(Y)$, par

$$X_h = \left\{ \eta_h \in C^1(Y); \forall Y_e \in \mathcal{T}_h, \eta_h/Y_e \in P_h \right\}, \quad (5.2.10)$$

$$V_h(Y) = \left\{ \eta_h \in X_h, \eta_h = 0 \text{ sur } \partial Y - \partial Y^* \right\}, \quad (5.2.11)$$

$V_h(Y)$ est un espace de dimension finie. On introduit des modes incompatibles par l'incorporation des degrés de liberté internes, ce qui signifie que chaque élément $\begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix}$ sera partagé en deux parties : une partie compatible $\begin{pmatrix} w_{i,\lambda}^{mh} & q_{i,\lambda}^n \\ \varphi_\lambda^{mh} & \psi_\lambda^n \end{pmatrix}$ et une partie incompatible $\begin{pmatrix} w_{i,\mu}^{mh} & q_{i,\mu}^n \\ \varphi_\mu^{mh} & \psi_\mu^n \end{pmatrix}$, telle que

$$\begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{i,\lambda}^{mh} & q_{i,\lambda}^n \\ \varphi_\lambda^{mh} & \psi_\lambda^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{i,\mu}^{mh} & q_{i,\mu}^n \\ \varphi_\mu^{mh} & \psi_\mu^n \end{pmatrix},$$

alors il est clair, qu'on peut écrire la fonctionnelle du potentiel (5.2.8) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \Pi_P & \left(\begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{i,\lambda}^{mh} & q_{i,\lambda}^n \\ \varphi_\lambda^{mh} & \psi_\lambda^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{i,\mu}^{mh} & q_{i,\mu}^n \\ \varphi_\mu^{mh} & \psi_\mu^n \end{pmatrix} \right) \\ & = \sum_{e=1}^{nbt} \left\{ \int_{Y_e^*} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{ijkl} & e_{kij} \\ -e_{ikl} & d_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix} dY^* \right. \\ & \left. + \int_{Y_e^*} \begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{i,\lambda}^{mh} & q_{i,\lambda}^n \\ \varphi_\lambda^{mh} & \psi_\lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{ijkl} & e_{kij} \\ -e_{ikl} & d_{ij} \end{pmatrix} dY^* \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

La condition de stabilité de la fonctionnelle ci-dessus est nécessaire pour l'équilibre des deux problèmes cellulaires (5.2.4) et (5.2.5). L'équilibre de la traction entre le piézoélectrique et le vide, serait satisfait que si la condition de test "patch" (PTC) est a priori vérifiée

$$\int_{Y_e^*} \begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{i,\mu}^{mh} & q_{i,\mu}^n \\ \varphi_\mu^{mh} & \psi_\mu^n \end{pmatrix} = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\oint_{\partial Y_e^*} \begin{pmatrix} w_{i,\mu}^{mh} & q_{i,\mu}^n \\ \varphi_\mu^{mh} & \psi_\mu^n \end{pmatrix} n_j \, dS = 0.$$

Les fonctions non conformes (incompatibles) proposées dans la condition PTC, nous simplifient la formulation variationnelle. En effet, si on prend un élément isoparamétrique de 8 nœuds en trois dimensions d'espace, la valeur du vecteur compatible est reliée par les valeurs nodales g^{mh} (ayant rapport avec l'ensemble des degrés de liberté du déplacement mécanique) et Λ^n (ayant rapport avec l'ensemble des degrés de liberté du potentiel électrique) par les fonctions bilinéaires d'interpolation

$$\begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix} = \mathbf{N} \begin{pmatrix} \Xi_i^{mh} & \Theta_i^n \\ \Lambda^{mh} & \Upsilon^n \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8],$$

$$N_\iota = \frac{1}{8}(1 + \xi_\iota \xi)(1 + \eta_\iota \eta)(1 + \zeta_\iota \zeta), \quad \iota = 1 \dots 8,$$

où (ξ, η, ζ) représentent les coordonnées isoparamétriques et $(\xi_\iota, \eta_\iota, \zeta_\iota)$ représentent les coordonnées isoparamétriques du point ι dont les coordonnées globales $(y_\iota^1, y_\iota^2, y_\iota^3)$, $\iota = 1 \dots 8$.

Le terme incompatible $\begin{pmatrix} w_{i,\lambda}^{mh} & q_{i,\lambda}^n \\ \varphi_\lambda^{mh} & \psi_\lambda^n \end{pmatrix}$ est relié avec les paramètres de l'élément d'intérieur $\begin{pmatrix} \Xi_{i,\lambda}^{mh} & \Theta_{i,\lambda}^n \\ \Lambda_\lambda^{mh} & \Upsilon_\lambda^n \end{pmatrix}$ par l'intermédiaire de la fonction de forme \mathbf{N}_λ^*

$$\begin{pmatrix} w_{i,\lambda}^{mh} & q_{i,\lambda}^n \\ \varphi_\lambda^{mh} & \psi_\lambda^n \end{pmatrix} = \mathbf{N}_\lambda^* \begin{pmatrix} \Xi_{i,\lambda}^{mh} & \Theta_{i,\lambda}^n \\ \Lambda_\lambda^{mh} & \Upsilon_\lambda^n \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, les termes incompatibles seront employés dans chaque élément (ces termes sont bien détaillés dans le travail de Sun *et al.* [84]).

$$\begin{aligned} w_\lambda^{mh} &= \left([\xi^2 \ \eta^2 \ \zeta^2] - [\xi \ \eta \ \zeta] \mathbf{P}^* \mathbf{P}_\lambda \right) \begin{pmatrix} \Xi_{i,\lambda}^{mh} & \Theta_{i,\lambda}^n \\ \Lambda_\lambda^{mh} & \Upsilon_\lambda^n \end{pmatrix}, \\ &= \left(\mathbf{N}_\lambda - \mathbf{N}^* \mathbf{P}^* \mathbf{P}_\lambda \right) \begin{pmatrix} \Xi_{i,\lambda}^{mh} & \Theta_{i,\lambda}^n \\ \Lambda_\lambda^{mh} & \Upsilon_\lambda^n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

De l'équation précédente

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^* &= \oint_{\partial Y_e^*} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \mathbf{N}^* \, dS = \int_{Y_e^*} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_3} \end{pmatrix} \mathbf{N}^* \, dY^* = \int_{Y_e^*} \mathbf{J}^{-1} \, dY^*, \\ \mathbf{P}_\lambda &= \oint_{\partial Y_e^*} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \mathbf{N}_\lambda \, dS = \int_{Y_e^*} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_3} \end{pmatrix} \mathbf{N}_\lambda \, dY^* = 2 \int_{Y_e^*} \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix} \, dY^*. \end{aligned}$$

Comme la transformation géométrique choisie est affine, la matrice Jacobienne \mathbf{J} qui relie les éléments est constante par rapport aux variables locales, elle est donnée par

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a_1 + a_4\eta + a_5\zeta + a_7\eta\zeta & b_1 + b_4\eta + b_5\zeta + b_7\eta\zeta & c_1 + c_4\eta + c_5\zeta + c_7\eta\zeta \\ a_2 + a_4\xi + a_6\zeta + a_7\xi\zeta & b_2 + b_4\xi + b_6\zeta + b_7\xi\zeta & c_2 + c_4\xi + c_6\zeta + c_7\xi\zeta \\ a_3 + a_5\xi + a_6\eta + a_7\xi\eta & b_3 + b_5\xi + b_6\eta + b_7\xi\eta & c_3 + c_5\xi + c_6\eta + c_7\xi\eta \end{pmatrix}.$$

Les coefficients a_i , b_i et c_i ($i = 1..7$) sont reliés avec les coordonnées de l'élément nodal y_j^i , par

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_7 & b_7 & c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^1 & y_1^2 & y_1^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_8^1 & y_8^2 & y_8^3 \end{pmatrix}.$$

On aboutit alors à

$$\begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i^{mh} & q_i^n \\ \varphi^{mh} & \psi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \mathbf{N} \begin{pmatrix} \Xi_{i,\lambda}^{mh} & \Theta_{i,\lambda}^n \\ \Lambda_\lambda^{mh} & \Upsilon_\lambda^n \end{pmatrix}, \quad (5.2.14)$$

$$= \mathbf{B} \begin{pmatrix} \Xi_{i,\lambda}^{mh} & \Theta_{i,\lambda}^n \\ \Lambda_\lambda^{mh} & \Upsilon_\lambda^n \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} s_{kl,y} & 0 \\ 0 & E_{k,y} \end{pmatrix} \mathbf{N}.$$

L'équation des éléments finis s'écrit sous la forme

$$\mathbf{K} \begin{pmatrix} \Xi_{i,\lambda}^{mh} & \Theta_{i,\lambda}^n \\ \Lambda_\lambda^{mh} & \Upsilon_\lambda^n \end{pmatrix} = \mathbf{P}, \quad (5.2.15)$$

avec

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} |det(\mathbf{J})| d\xi d\eta d\zeta, \quad (5.2.16)$$

$$\mathbf{P} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} |det(\mathbf{J})| d\xi d\eta d\zeta, \quad (5.2.17)$$

et $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c & e \\ -e^T & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{9 \times 9}(\mathbb{R})$. Le terme $\begin{pmatrix} \Xi_{i,\lambda}^{mh} & \Theta_{i,\lambda}^n \\ \Lambda_\lambda^{mh} & \Upsilon_\lambda^n \end{pmatrix}$ est résolu à partir de l'équation (5.2.15), au delà les tenseurs d'élasticité, piézoélectrique et diélectrique homogénéisés seront déterminés par les expressions suivantes

$$c_{ijmh}^H = \int_{Y^*} \left\{ c_{ijkl}(x, y) [\tau_{mh}^{kl} + s_{kl,y}(\mathbf{w}^{mh})] + e_{kij}(x, y) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_k} \right\} dy, \quad (5.2.18)$$

$$e_{nij}^H = \int_{Y^*} \left\{ c_{ijkl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + e_{kij}(x, y) \left[\delta_{kn} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y_k} \right] \right\} dy, \quad (5.2.19)$$

$$d_{in}^H = \int_{Y^*} \left\{ -e_{ikl}(x, y) s_{kl,y}(\mathbf{q}^n) + d_{ij}(x, y) \left[\delta_{jn} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y_j} \right] \right\} dy. \quad (5.2.20)$$

En général, il est impossible de calculer exactement les intégrales intervenants dans les expressions (5.2.18), (5.2.19) et (5.2.20). C'est pourquoi, on utilise des schémas d'intégration numérique. Un module d'homogénéisation utilise la méthode des éléments finis combinée avec l'intégration numérique qui a été développé sous Matlab. Ce module peut être utilisé pour n'importe quel type de structure comme les structures laminées ou fibrées.

Remarque 5.2.2

D'un point de vue pratique, nous montrons en s'appuyant sur des considérations de symétrie et de parité (Léné [47]) que les conditions de périodicité peuvent être remplacées par des conditions aux limites appropriées, la cellule élémentaire peut elle-même être réduite dans l'étape de maillage.

5.2.3 Présentation des résultats numériques

Dans cette section, nous étudions l'influence de la forme des trous et la fraction volumique θ qui représente la portion du matériau dans la cellule de référence, sur les coefficients des tenseurs élastique, piézoélectrique et diélectrique homogénéisés.

Pour la modélisation numérique, on considère un matériau piézoélectrique isotrope transverse de classification hexagonale ¹ (6mm) comme le PZT. Dans ce type de piézoélectrique, les matrices des modules élastiques, piézoélectriques (de couplage) et diélectriques se simplifient de façon à ce qu'il ne reste plus, à la fin, que dix coefficients indépendants. Considérons donc le matériau piézoélectrique PZT-5A (voir le tableau 5.1) périodiquement perforé par des trous sous formes cylindriques. Un tel composite est isotrope transverse.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} c & e \\ -e^T & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 & d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 & 0 & 0 & d_{11} & 0 \\ -e_{31} & -e_{31} & -e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{9 \times 9}(\mathbb{R}).$$

Nous considérons un maillage grossier par l'intermédiaire du logiciel Femlab. Une fois que les coefficients de la matrice \mathbf{M} sont calculés et en tenant compte de l'intégration numérique de Gauss, on peut calculer la matrice de rigidité \mathbf{K} puis la matrice de force \mathbf{P} par les deux expressions (5.2.16) et (5.2.17) respectivement. Rappelons que l'intégration numérique de Gauss, nous donne l'approximation quadratique

$$\int_{Y^*} \varphi(y) dy \simeq \sum_{k=1}^N \omega_{k,Y^*} \varphi(b_{k,Y^*}).$$

Rappelons aussi que cette approximation quadratique est exacte, pour tout polynôme φ de degré $m \leq 2N - 1$ où $\{\omega_{k,Y^*}\}$ et $\{b_{k,Y^*}\}$ sont respectivement les poids et les abscisses des points de Gauss. Après l'assemblage des matrices \mathbf{K} et \mathbf{P} , on résout le système linéaire des équations algébriques (5.2.15), ce qui permet de déterminer les fonctions locales, puis en se servant de

¹Pour ces classifications on peut voir l'ouvrage de Dieulesaint et Royer [30].

l'intégration numérique, on détermine les valeurs des tenseurs d'élasticité, de piézoélectricité et de diélectricité homogénéisés par les expressions (5.2.18), (5.2.19) et (5.2.20) respectivement.

Remarque 5.2.3 *Il convient de signaler que les formules d'intégration numérique ont un sens que si on pose les hypothèses suivantes sur le schéma d'intégration numérique*

i) *Les nœuds d'intégration b_{k,Y^*} vérifient*

$$b_{k,Y^*} \in \bar{Y}_e^*, \quad \forall Y_e^* \in \mathcal{T}_h, \quad \forall k = 1, \dots, N.$$

ii) *Le schéma est exact pour les polynômes de degré 8, i.e :*

$$\int_{Y_e^*} P(x) dx - \sum_{k=1}^N \omega_{k,Y^*} P(b_{k,Y^*}) = 0, \quad \forall P \in \mathcal{P}_8, \quad \forall Y_e^* \in \mathcal{T}_h. \quad \blacksquare$$

Pour les tests numériques, on considère un matériau piézoélectrique PZT-5A ou PZT-7A, ces deux types de matériaux piézoélectriques sont de classification (6mm), leurs coefficients sont donnés dans le tableau 5.1, établi par Feng et Wu dans [35]. La permittivité du vide $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$.

Matériau	Élastiques (GPa)					Piézoélectriques (C/m ²)			Diélectriques (C ² /Nm ²)	
	C ₁₁	C ₁₂	C ₁₃	C ₃₃	C ₄₄	e ₃₁	e ₃₃	e ₁₅	d ₁₁ /ε ₀	d ₃₃ /ε ₀
PZT-5A	121	75.4	75.2	111	21.1	-5.4	15.8	12.3	916	830
PZT-7A	148	76.2	74.2	131	25.4	-2.1	9.5	9.2	460	235

TAB. 5.1 – Les valeurs des coefficients des matériaux piézoélectriques : PZT-5A et PZT-7A.

Dans la modélisation numérique qui suit, on considère la cellule de référence comme un parallélépipède unitaire $Y = [0, 1]^3$, dont la perforation est sous forme cylindrique, parallèle à l'axe x_3 (voir la figure 5.7). En utilisant les propriétés du matériau PZT-5A données dans le tableau 5.1, on calcule les coefficients de la matrice de rigidité \mathbf{K} et la matrice de force \mathbf{P} par les équations (5.2.16) et (5.2.17) respectivement. Comme nous nous intéressons dans ce travail au comportement macroscopique du composite, nous nous sommes contentés d'implémenter la méthode des éléments finis sans se soucier de la rapidité du calcul.

La modélisation qui nous intéresse consiste à déterminer les tenseurs effectifs en fonction des paramètres des différents matériaux qui constituent le composite. Dans notre situation, nous nous sommes intéressés à l'étude du comportement du composite en fonction de la taille des trous. Les résultats sont illustrés dans les trois figures ci-dessous, qui présentent une description totale sur l'évolution des tenseurs effectifs des matériaux perforés en fonction de la fraction volumique. On constate que l'influence de la fraction volumique est déterminante et que la dépendance des tenseurs homogénéisés à la fraction volumique est forte.

Ne disposant pas de valeurs expérimentales, donc pour valider les valeurs obtenues par le module numérique de la méthode des éléments finis, nous développons dans la section suivante une approche analytique qui permet d'avoir des formules explicites pour calculer les tenseurs effectifs, pour une géométrie simple correspondant au cas d'une structure perforée longitudinalement.

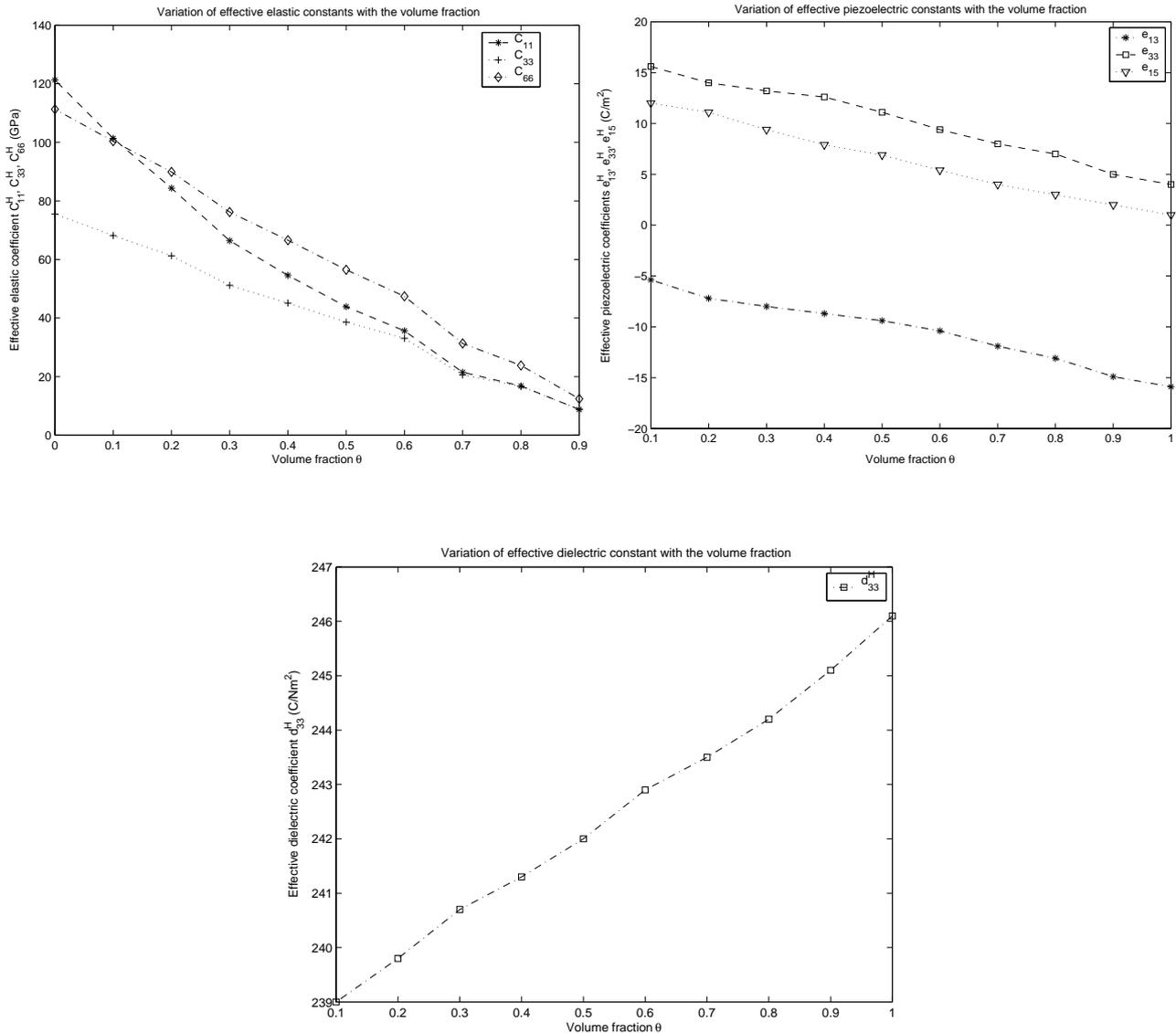


FIG. 5.1 – Variation de quelques coefficients des tenseurs élastique, piézoélectrique et diélectrique homogénéisés en fonction de la fraction volumique θ .

5.3 Implémentation d'une méthode analytique

Dans ce qui suit, on développe une technique de calcul analytique qui nous permettra de déterminer les expressions des tenseurs effectifs des matériaux piézoélectriques périodiquement perforés, dans le cas où les perforations sont sous formes cylindriques et ordonnées suivant la classification de Newnham (1978). Cette technique est inspirée des travaux de Castillero *et al.* [15] [19] [41] [77] et repose sur des arguments d'analyse complexe, entre autre sur les fonctionnels des potentiels complexes de Muskhelishvili et les fonctions Zeta de Weierstrass.

En effet cette méthode formelle est introduite pour valider le code des éléments finis, ce qui permet par la suite de déduire la validation des résultats numériques obtenus dans le cas des perforations de géométries différentes aux formes cylindriques. Afin de mieux comprendre les résultats obtenus précédemment, on propose une étude comparative entre les résultats obtenus

dans la section précédente et les résultats qui seront obtenus à partir des expressions analytiques des tenseurs homogénéisés, qu'on va récupérer dans un cas particulier. Cette étude nous permettra aussi d'évaluer l'erreur commise par le modèle des éléments finis incompatibles. Ce calcul analytique est programmé sous Maple.

5.3.1 Présentation de la méthode

On considère une structure piézoélectrique périodiquement perforée par des perforations cylindriques transversales (*i.e.* parallèles à l'axe x_3) et on prend le piézoélectrique symétrique de type hexagonale ($6mm$). La détermination analytique des tenseurs homogénéisés est récupérée à l'aide des séries de fonctions elliptiques de Weierstrass doublement périodiques, ces fonctions ont été utilisées par Castillero *et al.* [15], pour déterminer les expressions exactes des tenseurs effectifs pour les matériaux piézocomposites fibrés unidirectionnels.

A présent, considérons une cellule de référence constituée d'un parallélépipède unitaire piézoélectrique perforée par un trou sous forme cylindrique, parallèle à l'axe x_3 . Dans l'éventualité où le milieu considéré serait homogène, les deux problèmes cellulaires (5.2.4) et (5.2.5) s'écrivent comme suit

(i) Equations I_{mh}

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[c_{ijkl}(y) \frac{\partial w_k^{mh}(y)}{\partial y_l} + e_{kij}(y) \frac{\partial \varphi^{mh}(y)}{\partial y_k} \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \left[-e_{ikl}(y) \frac{\partial w_k^{mh}(y)}{\partial y_l} + d_{ij}(y) \frac{\partial \varphi^{mh}(y)}{\partial y_j} \right] = 0. \end{cases} \quad (5.3.21)$$

(ii) Equations I_n

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[c_{ijkl}(y) \frac{\partial q_k^n(y)}{\partial y_l} + e_{kij}(y) \frac{\partial \psi^n(y)}{\partial y_k} \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \left[-e_{ikl}(y) \frac{\partial q_k^n(y)}{\partial y_l} + d_{ij}(y) \frac{\partial \psi^n(y)}{\partial y_j} \right] = 0. \end{cases} \quad (5.3.22)$$

Afin d'alléger l'écriture, on propose de réécrire les deux problèmes précédents sous la forme suivante

$$\begin{cases} \left[c_{ijkl}(y) w_{k,l}^{mh}(y) + e_{kij}(y) \varphi_k^{mh}(y) \right]_j = 0, \\ \left[-e_{ikl}(y) w_{k,l}^{mh}(y) + d_{ij}(y) \varphi_j^{mh}(y) \right]_i = 0. \end{cases} \quad (5.3.23)$$

$$\begin{cases} \left[c_{ijkl}(y) q_{k,l}^n(y) + e_{kij}(y) \psi_k^n(y) \right]_j = 0, \\ \left[-e_{ikl}(y) q_{k,l}^n(y) + d_{ij}(y) \psi_j^n(y) \right]_i = 0. \end{cases} \quad (5.3.24)$$

L'indice en bas des crochets ou après une virgule dans les indices des tenseurs, représente la variable de la dérivation. Les solutions des problèmes cellulaires I_{mh} et I_n sont périodiques en y_1 et y_2 , avec les conditions aux limites sur la frontière du trou $\Upsilon = \partial Y^* - \partial Y$

Pour les équations I_{mh}

$$w_k^{mh}|_{\Upsilon} = \varphi^{mh}|_{\Upsilon} = 0, \quad (5.3.25)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij(mh)} + c_{ijmh})n_j|_{\Upsilon} &= 0, \\ (D_{j(mh)} - e_{jmh})n_j|_{\Upsilon} &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

Pour les équations I_n

$$q_k^n|_{\Upsilon} = \psi^n|_{\Upsilon} = 0, \quad (5.3.27)$$

$$\begin{cases} (\sigma_{ij(n)} + e_{ijn})n_j|_{\Upsilon} = 0, \\ (D_{j(n)} + d_{jn})n_j|_{\Upsilon} = 0, \end{cases} \quad (5.3.28)$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_{ij(mh)} = c_{ijkl}w_{k,l}^{mh} + e_{kij}\varphi_{,k}^{mh}, \\ \sigma_{ij(n)} = c_{ijkl}q_{k,l}^n + e_{kij}\psi_{,k}^n, \\ D_{j(mh)} = -e_{ikl}w_{k,l}^{mh} + d_{ik}\varphi_{,k}^{mh}, \\ D_{j(n)} = -e_{ikl}q_{k,l}^n + d_{ik}\psi_{,k}^n, \end{cases} \quad (5.3.29)$$

où n_j étant la j -ème composante du vecteur normal sur la frontière du trou Υ . En général, le nombre des équations I_{mh} et I_n à résoudre dépend du type de classification de symétrie du matériau piézoélectrique utilisé. Si on considère un piézoélectrique isotrope transverse d'axe principal celui des perforations cylindriques, puisque les matériaux sont de symétrie hexagonale ($6mm$), alors pour déterminer tous les tenseurs homogénéisés, il suffit de résoudre les cinq problèmes "planaires" similaires I_β ($\beta = 1, 2, 3$), I_{12} et I_3 , ainsi que les deux problèmes "antiplanaires" similaires suivants I_{13} et I_1 . Rappelons que le matériau de symétrie hexagonale ($6mm$) est caractérisé par des constantes indépendantes : cinq constantes élastiques ($C_{1111} = C_{2222}$, C_{1122} , $C_{1133} = C_{2233}$, C_{3333} , $C_{2323} = C_{1313}$ et $C_{1212} = \frac{C_{1111} - C_{1122}}{2}$), trois constantes piézoélectriques ($e_{311} = e_{322}$, e_{333} et $e_{113} = e_{223}$) et deux constantes diélectriques ($d_{11} = d_{22}$ et d_{33}).

Dans ce qui suit, nous allons résoudre les problèmes locaux (5.3.23) et (5.3.24), afin de déterminer les expressions des tenseurs homogénéisés.

1. Problèmes antiplanaires

Considérons le problème I_{13} . On suppose que les fonctions $w_3^{13} \equiv w_3$ et $\varphi^{13} \equiv \varphi$ sont indépendantes de y_3 et $w_1^{13} = w_2^{13} = 0$. Le problème correspondant à I_{13} peut donc s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} c_{1313}w_{3,KK} = 0, \\ w_3|_{\Upsilon} = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e_{113}\varphi_{KK} = 0, \\ \varphi|_{\Upsilon} = 0, \end{cases} \quad (5.3.30)$$

avec

$$\left(\sigma_{3J(13)}n_J + c_{1313}n_1 \right) \Big|_{\Upsilon} = 0, \quad (5.3.31)$$

$$\left(D_{J(13)}n_J + e_{113}n_1 \right) \Big|_{\Upsilon} = 0, \quad (5.3.32)$$

où

$$\begin{cases} \sigma_{3J(13)} = c_{1313}w_{3,J}^{13} + e_{113}\varphi_J^{13}, \\ D_{J(13)} = e_{113}w_{3,J}^{13} - d_{11}\varphi_J^{13}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma_{33(13)} = 0, \\ \sigma_{IJ(13)} = 0, \\ D_{3(13)} = 0, \end{cases} \quad (5.3.33)$$

avec $I, J, K = 1, 2$. Les solutions de (5.3.30)-(5.3.31)-(5.3.32) sont représentées à l'aide des développements analytiques de fonctions harmoniques

$$w_3 = \operatorname{Re}\left\{A\frac{z}{R} + \frac{1}{c_{1313}}f(z)\right\}, \quad (5.3.34)$$

$$\varphi_3 = \operatorname{Re}\left\{B\frac{z}{R} + \frac{1}{e_{113}}g(z)\right\}, \quad (5.3.35)$$

avec

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty *} a_k R^k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}, \quad (5.3.36)$$

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty *} b_k R^k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}, \quad (5.3.37)$$

où $\zeta(z)$ est la fonction Zeta de Weierstrass, et satisfait les conditions de quasipériodicité

$$\zeta(z+1) - \zeta(z) = \pi, \quad \zeta(z+i) - \zeta(z) = -i\pi.$$

Les constantes A, B, a_k et b_k ($k = 1, 3, 5, \dots$) sont des réels qui seront déterminés à partir des conditions aux limites. \sum^* représente la sommation relative aux indices impairs.

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum'_{m,n} \left\{ \frac{1}{z - \beta_{mn}} + \frac{1}{\beta_{mn}} + \frac{z}{\beta_{mn}^2} \right\},$$

sachant que la sommation $\sum'_{m,n}$ porte sur tous les indices m, n à l'exception que quand $m = n = 0$, $\beta_{mn} = m + in$, $i^2 = -1$

En tenant compte de la propriété de la périodicité pour les fonctions w_3 et φ_3 , on trouve les deux formules qui relient les constantes A et B avec a_1 et b_1 , soit :

$$A = -\frac{\pi R^2 a_1}{c_{1313}}, \quad B = -\frac{\pi R^2 b_1}{e_{113}}.$$

Les conditions (5.3.25) et (5.3.27) de l'interaction entre le piézoélectrique et le vide sur la surface Υ , nous permettent d'écrire les formules suivantes

$$A\frac{t+\bar{t}}{2R} + \frac{1}{c_{1313}}\operatorname{Re}\{f(z)\} = 0, \quad (5.3.38)$$

$$B\frac{t+\bar{t}}{2R} + \frac{1}{e_{113}}\operatorname{Re}\{g(z)\} = 0, \quad (5.3.39)$$

$$\operatorname{Im}\{f(z) + g(z)\} + \left(\frac{c_{1313}}{R}A - \frac{e_{113}}{R}B + c_{1313}\right)\frac{t-\bar{t}}{2i} = 0, \quad (5.3.40)$$

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{e_{113}}{c_{1313}}f(t) - \frac{d_{11}}{e_{113}}g(t)\right\} + \left(\frac{e_{113}}{R}A - \frac{d_{11}}{R}B + e_{113}\right)\frac{t-\bar{t}}{2i} = 0, \quad (5.3.41)$$

avec $t = Re^{i\theta}$, Re et Im représentent la partie réelle et la partie imaginaire respectivement. Le développement en série de Taylor des fonctions w_3 et φ au point $z = 0$, donne

$$w_3 = \operatorname{Re}\left\{z\frac{A}{R} + \frac{1}{c_{1313}}\left[\sum_{k=1}^{\infty *} a_k \left(\frac{R}{z}\right)^k + \sum_{p=1}^{\infty *} \sum_{k=1}^{\infty *} a_k \eta_{kp} \left(\frac{z}{R}\right)^p\right]\right\}, \quad (5.3.42)$$

$$\varphi = \operatorname{Re}\left\{z\frac{B}{R} + \frac{1}{e_{113}}\left[\sum_{k=1}^{\infty *} b_k \left(\frac{R}{z}\right)^k + \sum_{p=1}^{\infty *} \sum_{k=1}^{\infty *} b_k \eta_{kp} \left(\frac{z}{R}\right)^p\right]\right\}, \quad (5.3.43)$$

avec

$$\eta_{kp} \equiv \frac{(-1)^k (p+k-1)!}{p!(k-1)!} R^{p+k} S_{p+k}, \quad (5.3.44)$$

$$S_{p+k} \equiv \sum_{m,n} \frac{1}{(\beta_{mn})^{p+k}}. \quad (5.3.45)$$

En remplaçant les équations (5.3.34), (5.3.35), (5.3.42) et (5.3.43) dans les conditions aux limites (5.3.38), (5.3.40), (5.3.40) et (5.3.41), on aboutit à un système d'équations algébriques suivant pour les constantes a_k et b_k ($k = 1, 3, 5, \dots$)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k + b_k - \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_{nk} - \pi R^2 a_1 \delta_{1k} \right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \eta_{nk} - \pi R^2 b_1 \delta_{1k} \right) = c_{1313} R \delta_{1k}, \\ \frac{e_{113}}{c_{1313}} a_k - \frac{d_{11}}{e_{113}} b_k - \frac{e_{113}}{c_{1313}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_{nk} - \pi R^2 a_1 \delta_{1k} \right) + \frac{d_{11}}{e_{113}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \eta_{nk} - \pi R^2 b_1 \delta_{1k} \right) = e_{113} R \delta_{1k}. \end{array} \right. \quad (5.3.46)$$

Puisqu'on a choisi un piézoélectrique de symétrie hexagonale ($6mm$), les expressions de \bar{c}_{1313} et \bar{e}_{113} sont données par

$$\bar{c}_{1313} = \langle c_{1313} + c_{1313} w_{3,1} + e_{113} \varphi_{,1} \rangle, \quad (5.3.47)$$

$$\bar{e}_{113} = \langle e_{113} + e_{113} w_{3,1} - d_{11} \varphi_{,1} \rangle. \quad (5.3.48)$$

Maintenant, en remplaçant les expressions (5.3.42) et (5.3.43) des fonctions w_3 et q_3 , dans les expressions (5.3.47) et (5.3.48) des tenseurs effectifs \bar{c}_{1313} et \bar{e}_{113} , on obtient

$$\bar{c}_{1313} = \langle c_{1313} \rangle - \pi R (a_0 + \bar{A}) - \pi R (b_0 + \bar{B}), \quad (5.3.49)$$

$$\bar{e}_{113} = \langle e_{113} \rangle - \frac{e_{113}}{c_{1313}} \pi R (a_0 + \bar{A}) - \frac{d_{11}}{e_{113}} \pi R (b_0 + \bar{B}), \quad (5.3.50)$$

avec $a_0 \equiv -a_1 R^2 \pi$, $b_0 \equiv -b_1 R^2 \pi$, $\bar{A} \equiv a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_{n1}$ et $\bar{B} \equiv b_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \eta_{n1}$.

Enfin, en utilisant l'équation (5.3.46) pour $k = 1$, on obtient

$$\bar{c}_{1313} = c_{1313} - 2\pi (a_1 + b_1), \quad (5.3.51)$$

$$\bar{e}_{113} = e_{113} - 2\pi R \left(\frac{e_{113}}{c_{1313}} a_1 - \frac{d_{11}}{e_{113}} b_1 \right). \quad (5.3.52)$$

2. Problèmes planaires

Dans les problèmes $I_{\beta\beta}$ et I_{12} , on considère que $w_3^{\beta\beta} = \varphi^{\beta\beta} = w_3^{12} = \varphi^{12} = 0$, par conséquent, on a

$$(c_{1122} + c_{1212}) w_{k,ki}^{mh} + c_{1212} w_{i,kk}^{mh} = 0, \quad (5.3.53)$$

avec $k, i = 1, 2$ et $mh = 11, 22, 33, 12$. Les solutions satisfaisant aux conditions aux limites suivantes

$$w_k^{mh}|_{\Gamma} = 0, \quad (5.3.54)$$

$$(\sigma_{ij(mh)} + c_{ijmh}) n_j |_{\Gamma} = 0, \quad (5.3.55)$$

avec

$$\sigma_{ij(mh)} = c_{1122}(y_1, y_2)\delta_{ij}w_k^{mh} + c_{1212}(y_1, y_2)(w_{i,j}^{mh} + w_{j,i}^{mh}), \quad i, j = 1, 2; \beta = 1, 2, 3$$

$$\sigma_{i3(mn)} = 0; \quad \sigma_{33(mn)} = \nu(y_1, y_2)\left(\sigma_{11(mn)} + \sigma_{22(mn)}\right),$$

$$\nu(y_1, y_2) = \frac{c_{1133}}{c_{1111} + c_{1122}}, \quad D_{i(mn)} = 0, \quad D_{3(mn)} = \frac{e_{311}(y_1, y_2)}{c_{1133}(y_1, y_2)}\sigma_{33(mn)},$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Pour récupérer la formulation du problème I_3 , il suffit de remplacer les fonctions w_k^{mh} par φ_k^3 dans les équations (5.3.53)-(5.3.54)-(5.3.55) et le tenseur c_{ijkl} par e_{3ij} dans l'équation (5.3.55).

Remarque 5.3.1

La résolution analytique des problèmes planaires associés aux structures renforcées de fibres isotropes, a été traitée par plusieurs auteurs [15], [41], [40], [44] et [58]. La plupart de ces auteurs, utilisent les potentiels complexes de Kolosov-Muskhelishvili (pour plus de détails, on pourra consulter Meguid et Kalamkarov [58]). ■

Dans notre étude, on utilise les mêmes techniques développées dans [15] et [58], on détermine par conséquent tous les tenseurs homogénéisés qui nous restent.

Les fonctions $w_k^{mh} = w_k$ pour les problèmes $I_{\beta\beta}$, I_3 et I_{12} seront cherchées sous la forme

$$2c_{1212}\left(w_1 + iw_2\right) = \chi\Theta(z) - z\bar{\Theta}'(z) - \bar{\Psi}(z), \quad (5.3.56)$$

avec $\chi = 3 - 4\nu$, les fonctions $\Theta(z)$ et $\Psi(z)$ sont des fonctions différentiables pour la variable complexe $z = y_1 + iy_2$, leurs expressions s'écrivent comme suit

$$\Theta(z) = \frac{a_0}{R}z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k \xi^{(k-1)}(z), \quad (5.3.57)$$

$$\Psi(z) = \frac{b_0}{R}z + \sum_{k=1}^{\infty} b_k R^k \xi^{(k-1)}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k \frac{Q^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}, \quad (5.3.58)$$

sachant que

$$Q(z) = \sum_{m,n}' \left\{ \frac{\bar{\beta}_{mn}}{(z - \beta_{mn})^2} - 2z \frac{\bar{\beta}_{mn}}{\beta_{mn}^3} - \frac{\bar{\beta}_{mn}}{\beta_{mn}^2} \right\},$$

où a_0 , b_0 , a_k et b_k ($k = 1, 3, 5, \dots$) sont des constantes. Ces constantes sont des nombres réels pour les problèmes $I_{\beta\beta}$, I_3 et purement imaginaires pour le problème I_{12} . A partir de l'équation (5.3.56) on peut exprimer a_0 et b_0 en fonction de a_1 et b_1 respectivement, en prenant en considération les propriétés de périodicité pour les fonctions w_1 et w_2 . Pour déterminer les constantes a_k et b_k il faut utiliser les conditions aux limites et les relations de σ_{ij} ($i, j = 1, 2$) en fonction de Θ et Ψ qui sont données par

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4Re\{\Theta'(z)\},$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2\left[\bar{z}\Theta''(z) + \Psi'(z)\right].$$

5.3.2 Calcul analytique des tenseurs homogénéisés

En suivant la même démarche, pour résoudre les autres problèmes cellulaires entre autre I_1 et I_{13} . Par conséquent on détermine explicitement les tenseurs homogénéisés de la manière suivante

A partir du problème $I_{\beta\beta}$:

$$\bar{c}_{11\beta\beta} + \bar{c}_{22\beta\beta} = \langle c_{11\beta\beta} + c_{22\beta\beta} \rangle, \quad (5.3.59)$$

$$\bar{c}_{22\beta\beta} - \bar{c}_{11\beta\beta} = \langle c_{22\beta\beta} - c_{11\beta\beta} \rangle + 2\gamma\left\{(\chi + 1)\frac{a_1}{R} + \gamma(\beta)\right\}, \quad (5.3.60)$$

$$\bar{c}_{33\beta\beta} = \langle c_{33\beta\beta} \rangle + \frac{c_{1133} - c_{2233} - 1}{c_{1212}R}\gamma c_1, \quad (5.3.61)$$

$$\bar{e}_{3\beta\beta} = \langle e_{3\beta\beta} \rangle + \frac{e_{311}}{c_{1212}R}\gamma c_1. \quad (5.3.62)$$

A partir du problème I_3 :

$$\bar{d}_{33} = \langle d_{33} \rangle + \frac{e_{311}}{c_{1212}R}\gamma c_1. \quad (5.3.63)$$

A partir du problème I_{12} :

$$\gamma = \pi R^2, \quad \gamma_1(\beta) = \frac{c_{22\beta\beta} - c_{11\beta\beta}}{2}, \quad \gamma_1(\beta) = \frac{c_{22\beta\beta} + c_{11\beta\beta}}{2}.$$

Cette technique formelle est bien adaptée dans le cas où les perforations cylindriques sont unidirectionnelles c'est-à-dire suivant l'un des trois axes du matériau. Dans ce cas là, on a bien déterminé de façon explicite tous les tenseurs homogénéisés. On constate que les propriétés effectives d'un matériau piézoélectrique de symétrie $(6mm)$ perforé sont déterminées par six coefficients d'élasticités, trois coefficients de couplages et de trois coefficients de diélectricités différents, ce milieu se comporte donc, de la même façon qu'un matériau de symétrie $(4mm)^2$

5.4 Validation de la méthode des éléments finis

En utilisant la technique formelle développée précédemment, un code de calcul analytique a été développé et implémenté sous Maple, afin de trouver explicitement les coefficients des tenseurs homogénéisés, qui seront écrits en fonction des sommations des séries. On donne une modélisation numérique, présentée dans les figures suivantes, à l'aide des caractéristiques du matériau piézoélectrique PZT-5A caractérisées par les coefficients donnés dans le tableau 5.1.

L'idée consiste à comparer les résultats obtenus après le calcul analytique avec ceux issus du code d'éléments finis, afin de :

- Valider le code d'éléments finis, ainsi que les résultats numériques qui seront obtenus pour d'autres géométries.
- Valider le modèle utilisé pour la discrétisation.

Remarque 5.4.1 *Il convient de rappeler que cette technique analytique même si elle nous donne de bonnes simulations sur les propriétés effectives, elle ne reste valable que pour des géométries particulières. Signalons aussi qu'on peut se servir du même code formel pour d'autres structures comme des structures purement élastiques perforées, laminées ou fibrées unidirectionnelles. ■*

²Rappelons que le matériau de symétrie hexagonale $(4mm)$ est caractérisé par cinq constantes élastiques, trois constantes piézoélectriques et deux constantes diélectriques (Pour ces classifications, on pourra consulter l'ouvrage de Dieulesaint et Royer [30]).

Afin de valider la méthode des éléments finis choisie ainsi que de prouver les performances de cette méthode, nous présentons ci-dessous une comparaison entre les résultats obtenus et ceux issus de la méthode de calcul formel proposée précédemment. Pour tout calcul numérique, on utilise les caractéristiques du matériau piézoélectrique PZT-5A caractérisées par les coefficients donnés dans le tableau 5.1.

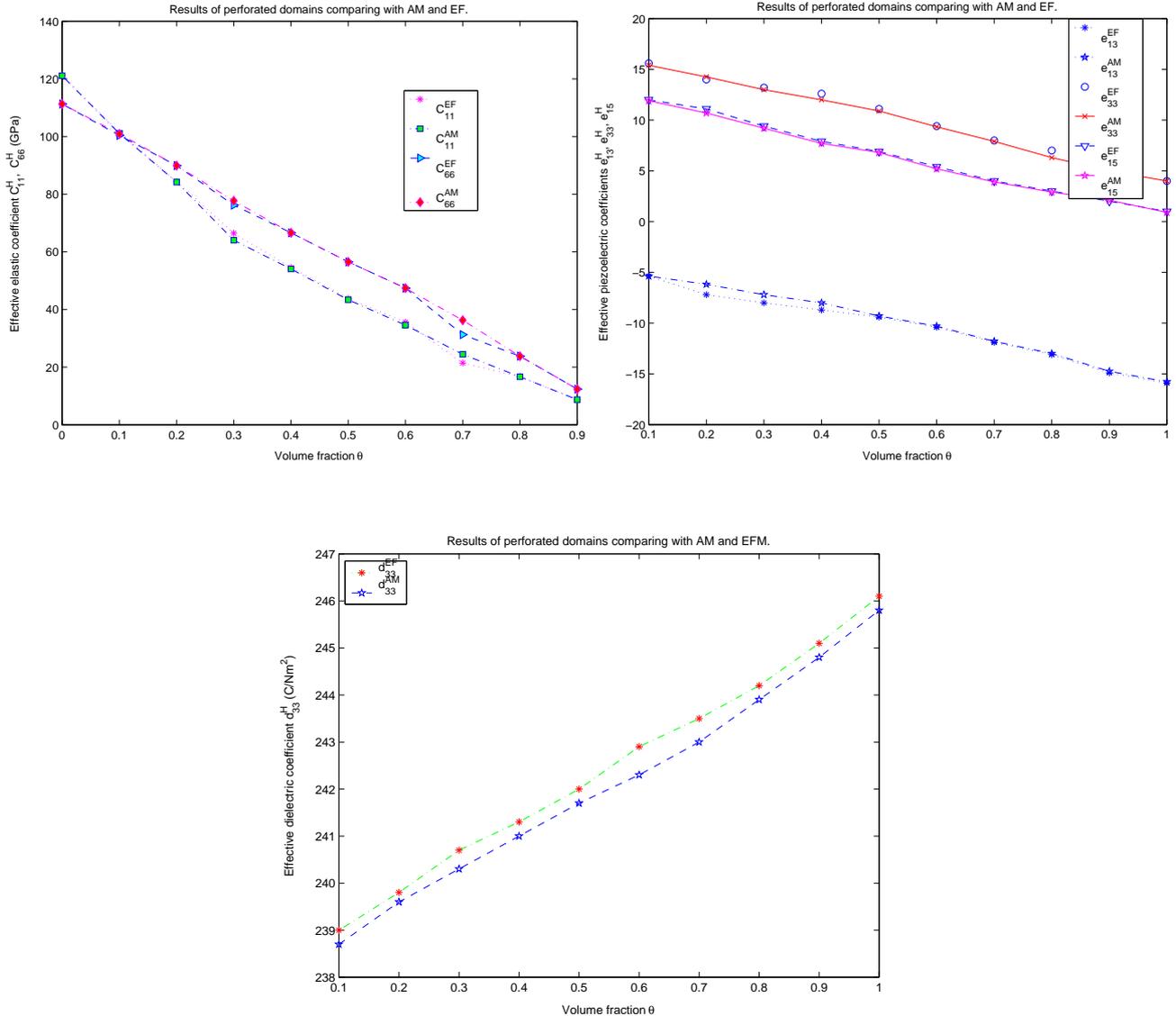


FIG. 5.2 – Comparaison de quelques coefficients homogénéisés calculés par deux méthodes : La méthode des éléments finis et la méthode analytique.

A partir des graphes de la figure 5.2, nous notons un bon accord entre les courbes des deux techniques : numérique et formelle. Par conséquent, on constate, effectivement, que les résultats numériques obtenus à partir du code numérique d'éléments finis sont proches de ceux obtenus à l'aide des expressions exactes des tenseurs effectifs. Cela nous permet de valider le code d'éléments finis développé dans la section 5.2. Dans ce travail, nous avons développé deux approches : l'une est basée sur les éléments finis combinée avec l'intégration numérique et l'autre, est une approche analytique. Les deux approches servent à la compréhension et au prédimensionnement des structures piézoélectriques perforées dans les applications industrielles.

5.5 Influence de la distribution des perforations sur les propriétés effectives

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude de l'influence de la distribution des perforations sur les propriétés effectives des matériaux piézoélectriques périodiquement perforés. Ces propriétés effectives sont exprimées à l'aide des tenseurs d'élasticité, piézoélectrique et diélectrique homogénéisés. On considère que les perforations sont de forme cylindrique. A cette fin on a proposé les deux modèles de distributions les plus fréquemment utilisés dans la littérature d'ingénierie (voir Guinovart-Díaz *et al.* [41], Poizat et Sester [71] [72]) pour l'étude du comportement macroscopique des matériaux fibrés, à savoir le modèle carré et le modèle hexagonale (voir les figures 5.3 et 5.4).

1. Distribution géométrique carrée (Modèle A) :

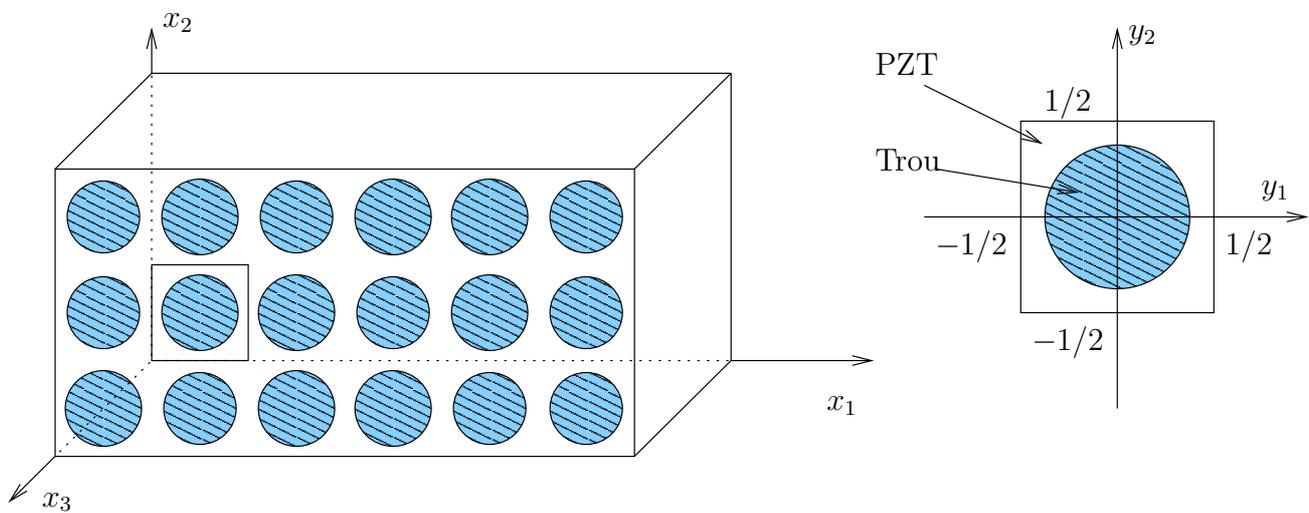


FIG. 5.3 – Distribution géométrique des perforations de type carré et la cellule de référence.

2. Distribution géométrique hexagonale (Modèle B) :

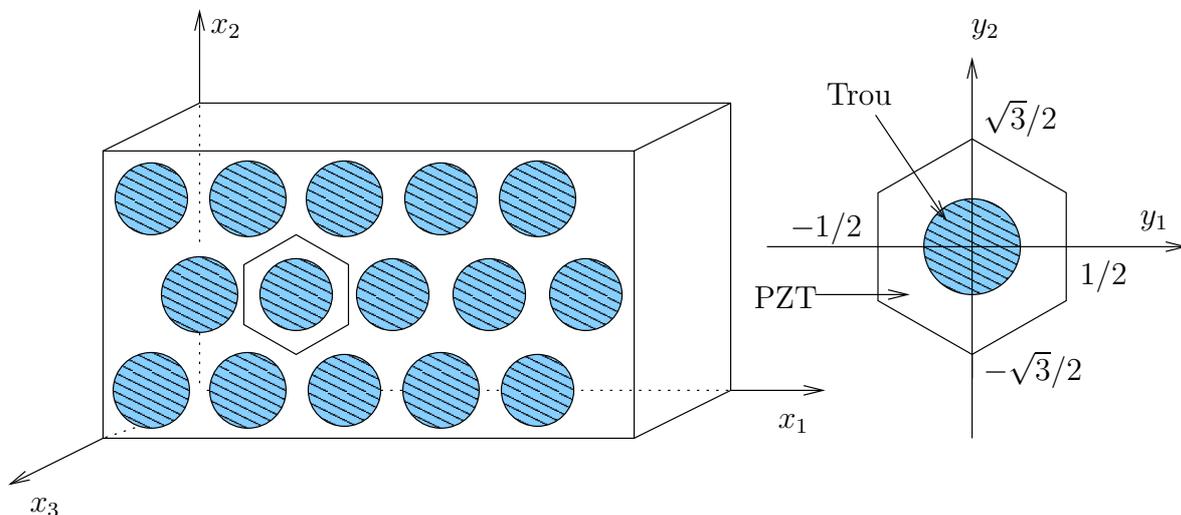


FIG. 5.4 – Distribution géométrique des perforations de type hexagonal et la cellule de référence.

Pour chaque modèle, on va faire varier la taille des trous, pour mieux comprendre son influence sur les propriétés macroscopiques. Les figures ci-dessous, représentent une comparaison entre l'évolution de quelques tenseurs effectifs, en fonction de la fraction volumique, pour les deux modèles.

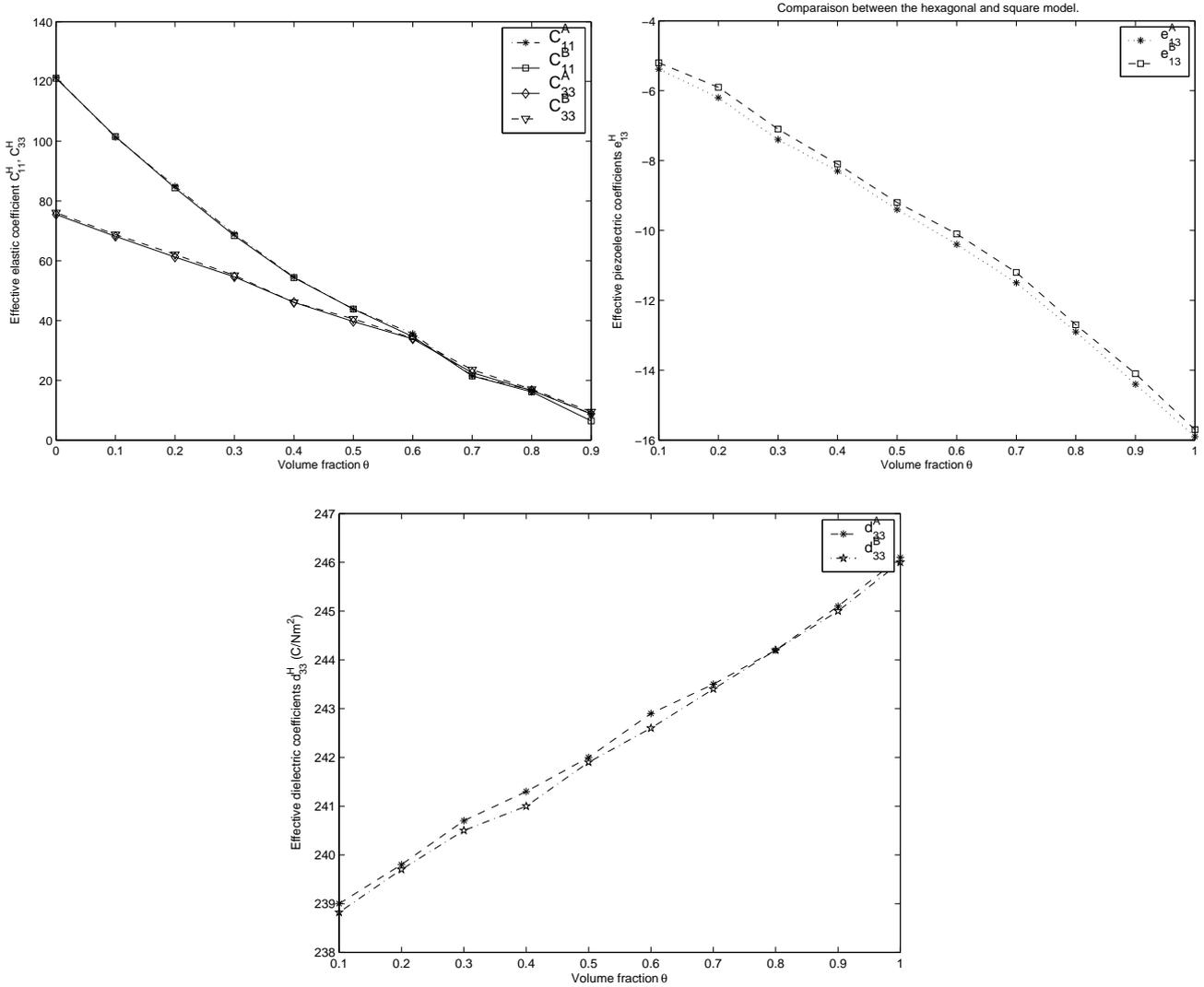


FIG. 5.5 – Comparaison de quelques coefficients homogénéisés entre les deux modèles carré et hexagonal.

Nous constatons à partir des graphes ci-dessus qu'il n'y a pas une grande différence entre l'utilisation de la distribution carrée et l'utilisation la distribution hexagonale, puisque l'écart sur les tenseurs homogénéisés calculés sur les deux modèles est de l'ordre de 10^{-3} . Cet écart découle du fait que notre simulation est faite sur le problème limite obtenu à la suite de l'augmentation du nombre des trous.

Les matériaux piézoélectriques sont utilisés comme des détecteurs, des transmetteurs de signaux acoustiques ou sous forme d'ultrasons dans l'imagerie biomédicale et de capteurs à basses fréquences dans des applications hydrophoniques. Dans ces applications nous nous intéressons à augmenter le facteur du couplage des charges électromécaniques \bar{k}_t pour une impédance acoustique \bar{Z} moyennement petite et pour avoir une bonne correspondance acoustique du tissu. Le facteur du couplage électromécanique et l'impédance acoustique sont exprimés comme suit (ρ_0

: la densité volumique du vide. Pour plus de détails, on pourra consulter Guinovart-Díaz *et al.* [40])

$$\bar{k}_t = \sqrt{1 - \frac{\bar{C}_{33}}{\bar{C}_{33}^D}} \quad \text{avec} \quad \bar{C}_{33}^D = \bar{C}_{33} + \bar{e}_{33}^2 \bar{d}_{33}^{-1}$$

$$\bar{Z} = \sqrt{\bar{C}_{33}^D \bar{\rho}} \quad \text{avec} \quad \bar{\rho} = \theta \rho + (1 - \theta) \rho_0$$

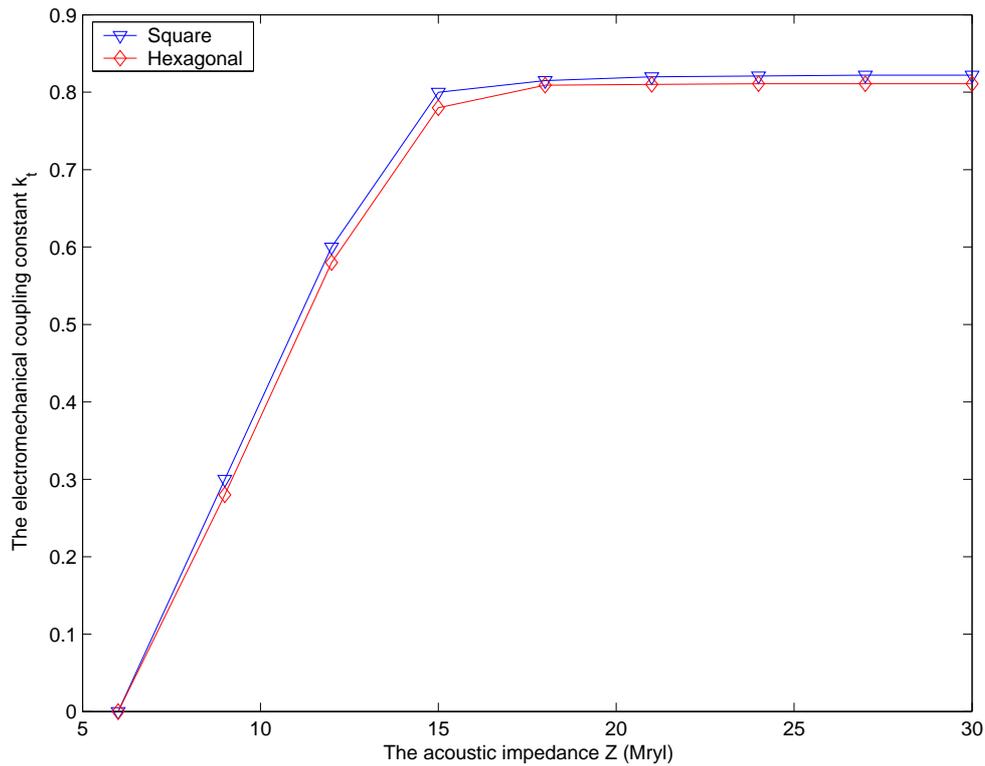


FIG. 5.6 – La variation du facteur de couplage électromécanique \bar{k}_t en fonction de l'impédance acoustique \bar{Z} en Mryl. Comparaison entre les deux modèles : carré et hexagonal.

Dans le graphe ci-dessus on constate que les résultats obtenus³ avec le modèle carré sont plus avantageux que ceux avec le modèle hexagonal du point de vue du rapport entre le facteur de couplage électromécanique et l'impédance acoustique.

5.6 Influence de la géométrie des perforations sur les propriétés effectives

Dans cette section on veut comprendre l'influence de la géométrie des perforations sur les propriétés effectives des matériaux piézoélectriques périodiquement perforés, pour cela on propose trois géométries différentes des trous : carrée, circulaire et hexagonale (voir les figures 5.7, 5.9 et 5.9).

³Pour les tests numériques la densité volumique du PZT est $\rho = 7600 \text{ kg/m}^3$

1. Perforation circulaire :

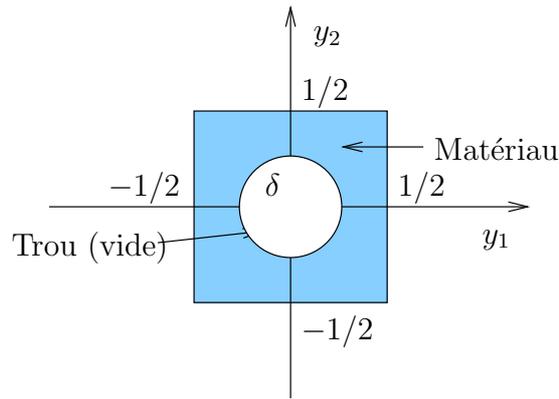


FIG. 5.7 – Cellule de base Y dont la perforation est de type circulaire.

2. Perforation carrée :

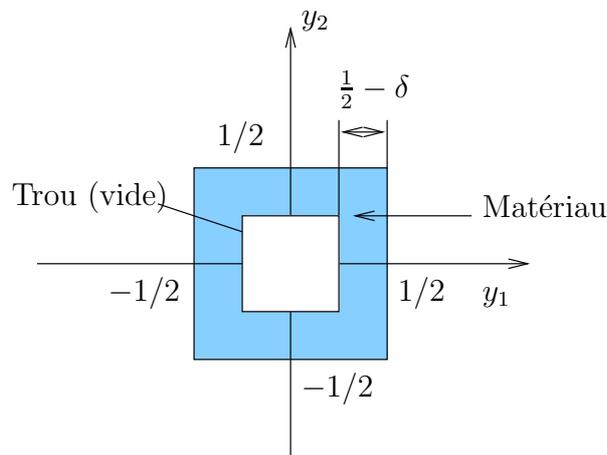


FIG. 5.8 – Cellule de base Y dont la perforation est de type carrée.

3. Perforation hexagonale :

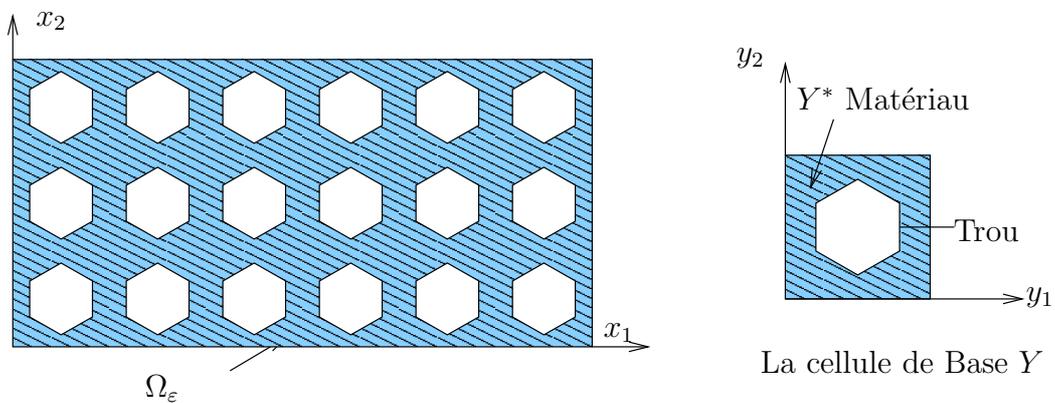


FIG. 5.9 – Structure du domaine perforé Ω_ε et sa cellule de base Y dont la perforation de type hexagonale.

Dans ce qui suit, on étudie les propriétés des tenseurs homogénéisés en fonction de la taille des trous pour chaque géométrie des trous. Les perforations seront distribuées suivant le modèle carré. Les graphes 5.10 illustrent l'influence des trois géométries sur les tenseurs homogénéisés.

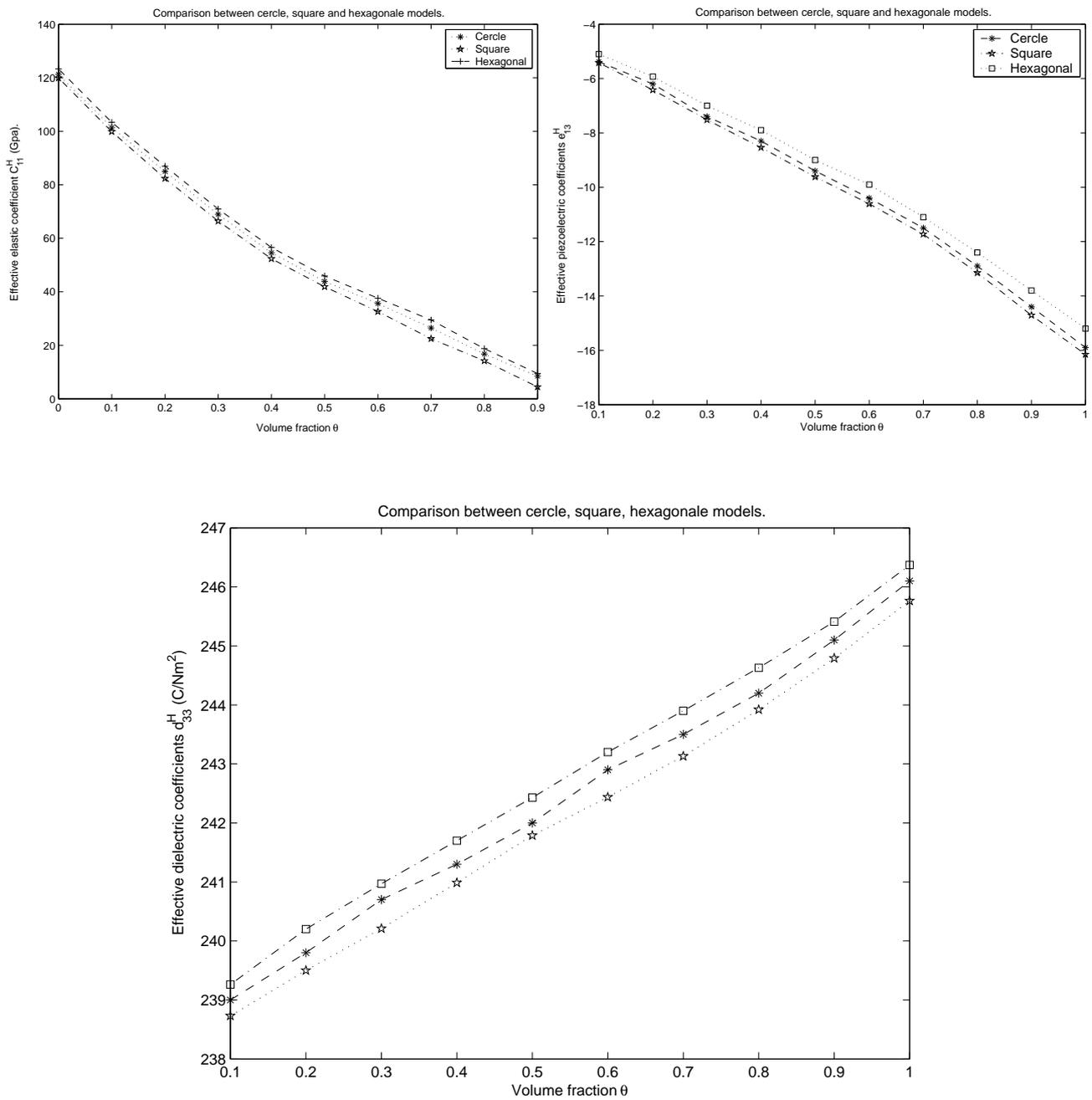


FIG. 5.10 – Variation des coefficients homogénéisés en fonction de la fraction volumique θ dans un domaine perforé par des trous de trois géométries différentes : carrée, cercle, hexagonale.

5.7 Influence de la rotation des perforations sur les propriétés effectives

Dans cette section, on va étudier la variation des propriétés effectives, par rapport à la rotation des trous suivant l'axe x_1 , ces derniers seront de forme hexagonale. Le choix de la

forme des trous est motivé par le fait, qu'en comparant l'hexagonale avec le cercle, ce dernier est symétrique sur lui-même et en le comparant avec le carré, il possède une rotation d'angle π , ce qui signifie qu'on a une grande liberté dans les choix des positions. Tandis que le choix de la rotation suivant l'axe x_1 , est pris seulement pour éviter l'axe de l'isotropie x_3 du matériau piézoélectrique.

1. Rotation d'angle $\alpha = 0^\circ$:

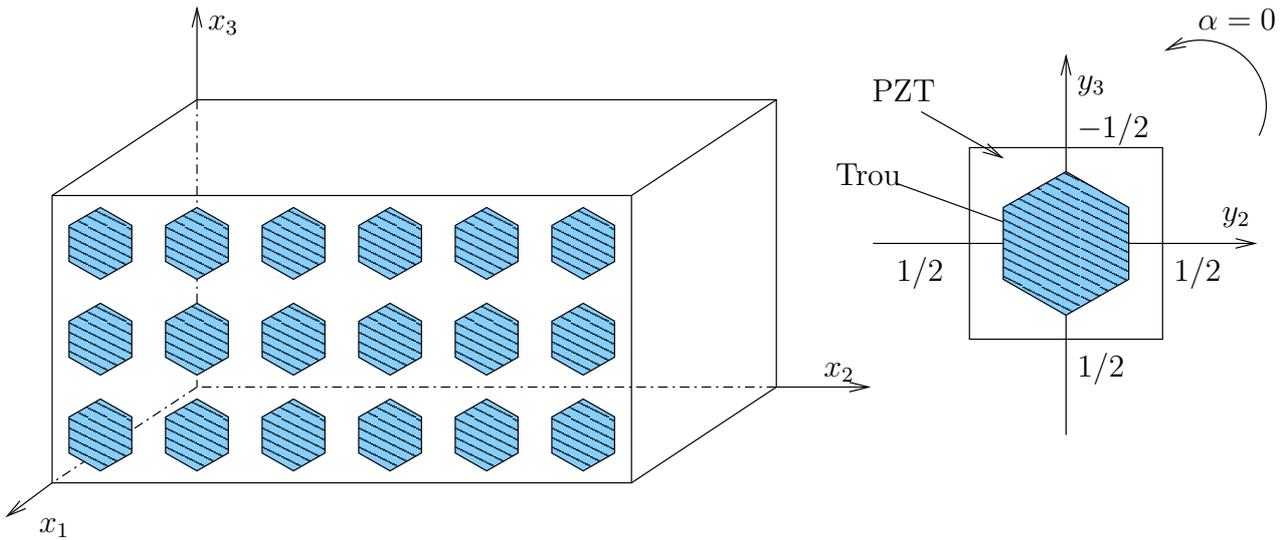


FIG. 5.11 – Structure perforée Ω_ε et sa cellule de base Y avec une rotation d'angle $\alpha = 0^\circ$.

2. Rotation d'angle $\alpha = 45^\circ$:

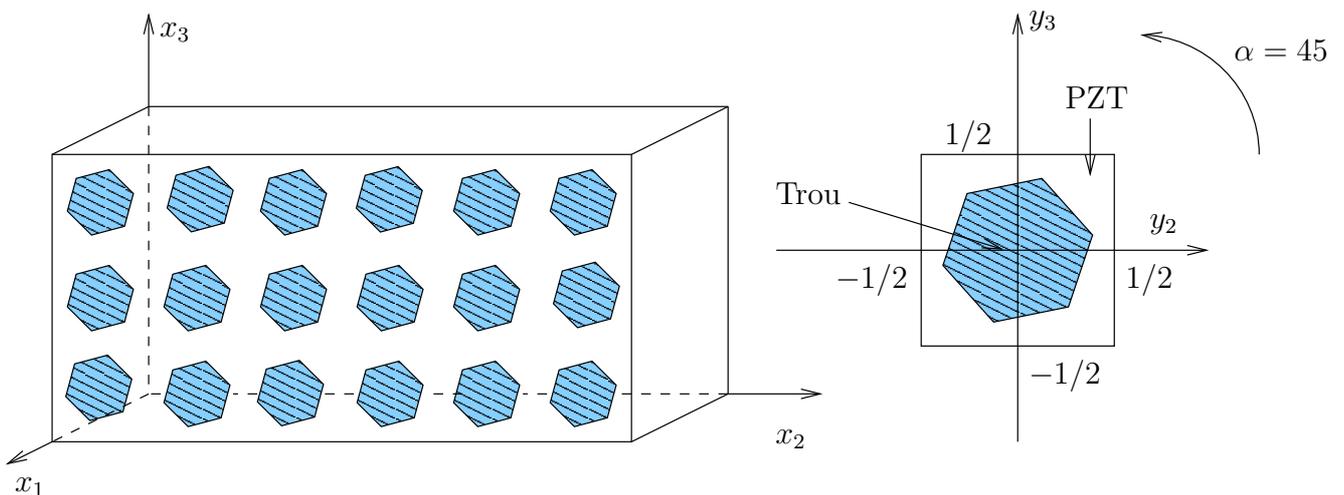


FIG. 5.12 – Structure perforée Ω_ε et sa cellule de base Y avec une rotation d'angle $\alpha = 45^\circ$.

3. Rotation d'angle $\alpha = 90^\circ$:

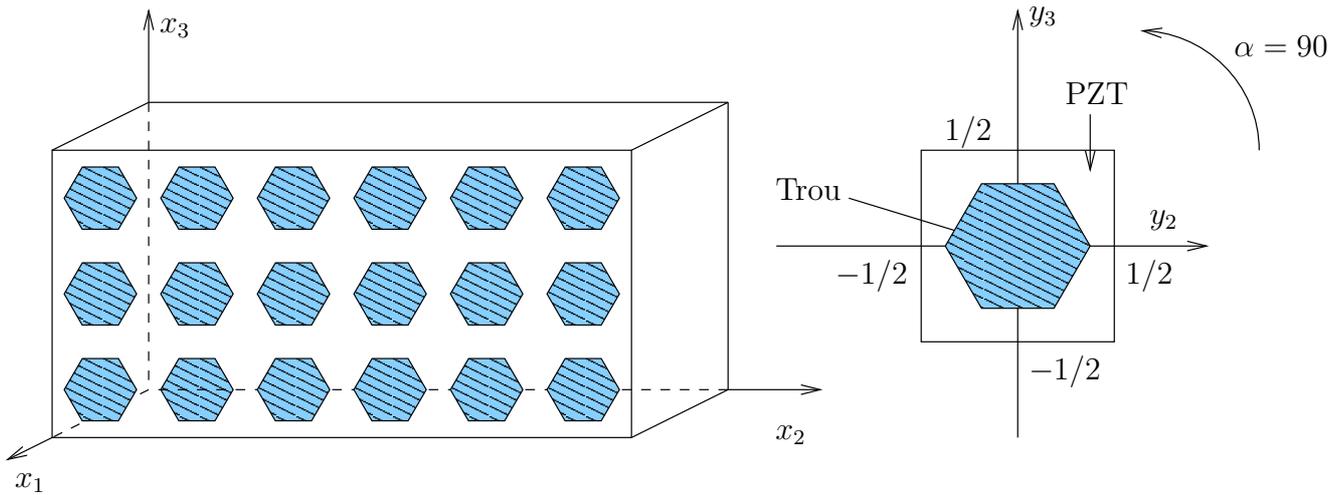


FIG. 5.13 – Structure perforée Ω_ε et sa cellule de base Y avec une rotation d'angle $\alpha = 90^\circ$.

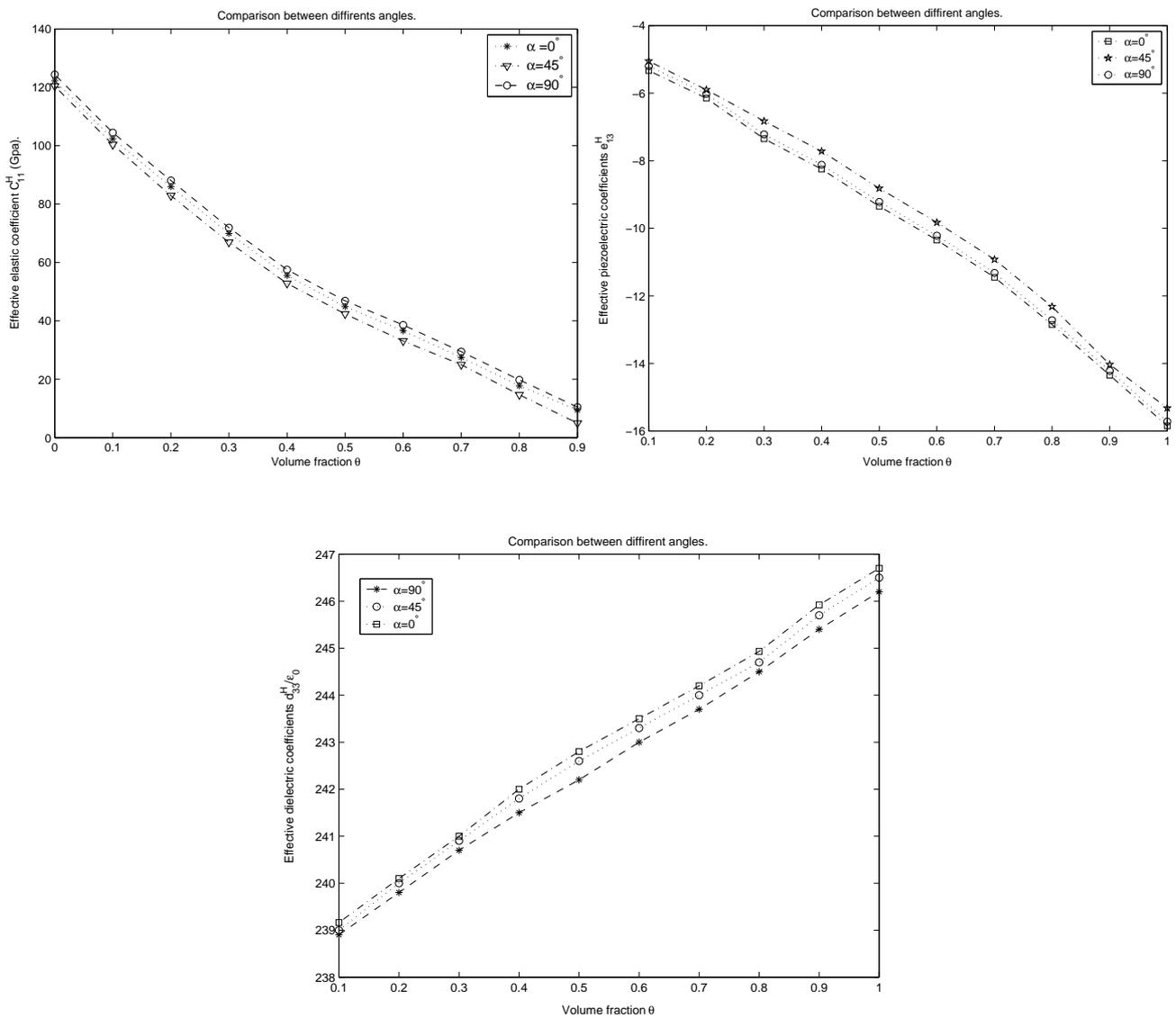


FIG. 5.14 – Variation de quelques coefficients homogénéisés en fonction de la fraction volumique θ avec trois rotations différentes.

Angle	Élastiques ($\times 10^{10} Nm^{-2}$)			Piézoélectriques (Cm^{-2})		Diélectriques ($\times 10^{10} C^2 Nm^{-2}$)
	C_{11}	C_{33}	C_{66}	e_{31}	e_{33}	d_{33}/ϵ_0
$\alpha = 0^\circ$	43.320	38.60	56.50	-9.11	7.4	242.8
$\alpha = 45^\circ$	44.107	39.20	57.30	-8.6	7.6	242.65
$\alpha = 90^\circ$	43.807	39.18	53.70	-8.8	7.76	242.13

TAB. 5.2 – Les propriétés effectives d'un matériau PZT perforé par des trous en trois rotations différentes pour une fraction volumique $\theta = \frac{1}{2}$.

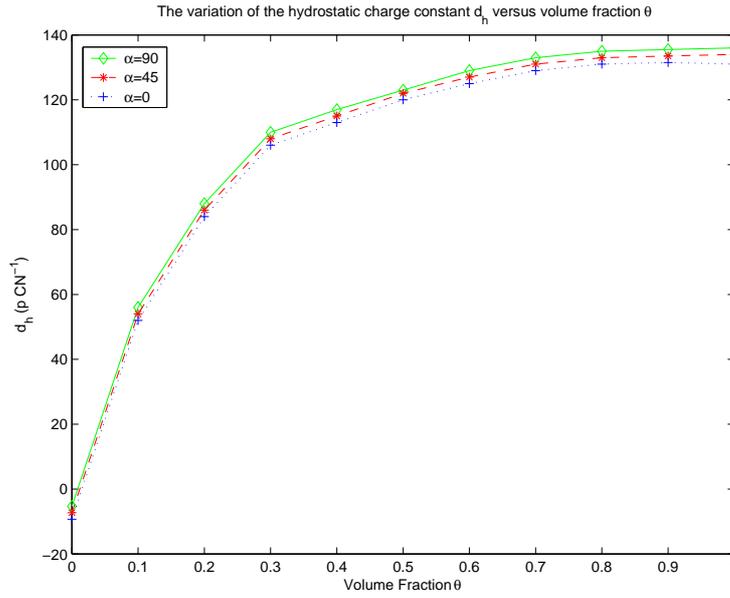


FIG. 5.15 – Comparaison du coefficient de charges hydrostatiques d_h entre les trois rotations.

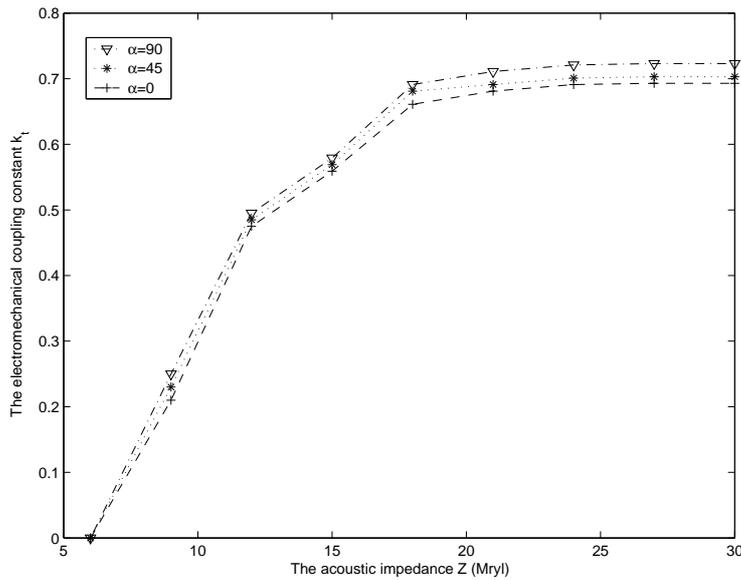


FIG. 5.16 – Comparaison du facteur de couplage électromécanique \bar{k}_t entre les trois rotations.

5.8 Synthèse et discussion

En conclusion de ce travail, nous avons développé deux techniques pour analyser les propriétés effectives des matériaux piézoélectriques : L'une, une technique analytique adaptée à des structures particulières. L'autre, une méthode d'éléments finis qui fonctionne dans tous les cas. Nous avons réalisé une étude paramétrique des propriétés macroscopiques des structures piézoélectriques perforées en fonction de :

- i) La fraction volumique.
- ii) La distribution des perforation.
- iii) La géométrie des perforations.
- iv) La rotation d'une perforation à géométrie non symétrique.

L'étude réalisée montre que quelque soit la distribution ou la forme des trous choisie, la fraction volumique reste un paramètre influent sur le comportement macroscopique de ces structures. Lorsque la fraction volumique croît, les coefficients des tenseurs d'élasticité et de piézoélectricité homogénéisés décroissent. Or, la constante diélectrique effective croît lentement. Ce qui induit un effet de piézoélectricité moyennement élevé. A la limite, on tend vers un matériau homogène, où le champ électrique est aussi élevé dans le vide des perforations que dans le piézoélectrique.

Pour une application en hydrophonique ou en imagerie biomédicale, les résultats numériques présentés dans ce chapitre, montrent qu'on peut avoir une structure moyennement optimale qui permet l'amélioration du rendement des effets piézoélectriques et acoustiques dans les structures piézoélectriques perforées.

L'analyse présentée ici montre que le type de la distribution joue un rôle tout aussi important que la seule hypothèse de distribution périodique ou aléatoire. Dans les applications industrielles, la difficulté pratique majeure réside dans le fait que la distribution réelle peut rarement être mesurée ou contrôlée, de sorte que les résultats numériques, doivent être considérés prudemment d'un point de vue quantitatif.

Chapitre 6

Homogénéisation numérique des matériaux piézocomposites laminés¹

6.1 Introduction

Un matériau piézocomposite laminé est constitué d'un empilement périodique de couches minces de matériaux piézoélectriques et de matériaux non nécessairement piézoélectriques. Pendant ces dernières années, de nouveaux matériaux piézoélectriques composites ont été développés, en améliorant leurs caractéristiques électro/hydro acoustiques, notamment pour leurs utilisations sous forme de capteurs ou actionneurs. De nombreuses études montrent que les propriétés macroscopiques de ces matériaux sont susceptibles de s'améliorer, en fonction du prorata de leurs constituants homogènes. En effet, d'important travaux montrent que ce type de matériaux dispose de très bonnes propriétés macroscopiques, à titre d'exemple, on peut citer les travaux de Kalamkarov *et al.* [43] [44], de Feng et Wu [35] et récemment ceux de Castillero *et al.* [15] [19] [41] [77].

Pour étudier les propriétés électroélastiques des matériaux piézocomposites laminés, plusieurs techniques ont été utilisées, les plus importantes sont les techniques numériques et les techniques formelles. Les premières font appel à la méthode des éléments finis ou à celle des éléments de frontière. Tandis que les méthodes formelles, sont basées sur les calculs explicites dans des cas bien particuliers. Citons les travaux de Castillero *et al.* [19] et de Kalamkarov et Georgiades [44] qui développent deux techniques de calcul formel pour les expressions des coefficients des tenseurs effectifs. En s'inspirant de ces études, et en se servant des résultats d'homogénéisation obtenus précédemment, nous pouvons étudier le comportement des matériaux piézocomposites laminés. Un calcul analytique des tenseurs élastique, piézoélectrique et diélectrique homogénéisés, ainsi que leurs propriétés en fonction de la fraction volumique est illustré dans ce chapitre. On présente également un nouveau modèle d'un matériau piézocomposite bilaminé constitué de deux plis : un piézoélectrique et un matériau simple non nécessairement piézoélectrique et périodiquement perforé. Les résultats numériques obtenus montrent que ce nouveau modèle donne de bonnes caractéristiques hydrostatiques, ce qui signifie qu'il est bien adapté à des applications industrielles en microélectronique de senseurs intelligents destinés à l'hydrophonique ou à l'imagerie biomédicale de haute qualité dans les rayons X.

¹Une partie du contenu de ce chapitre a été l'objet de la publication [57]

Ce chapitre est composé principalement de six sections: Dans la deuxième section, les problèmes cellulaires correspondant au structure laminée, seront posés sous la forme d'équations différentielles ordinaires résolues explicitement. Ceci afin de déterminer les expressions des tenseurs effectifs. Dans la troisième section, on s'intéresse à l'étude d'un matériau piézocomposite bilaminé constitué de deux couches minces : l'une est de type piézoélectrique, l'autre est un matériau simple dont la propriété de la piézoélectricité est inactive. Dans la section suivante, nous utilisons l'étude précédente, pour développer un nouveau modèle de matériau piézocomposite bilaminé et périodiquement perforé. On montre d'une part son utilité pour les applications en hydrophonie, et d'autre part, on confirme le choix d'un prototype proposé par Preumont [73] [74]. Dans la dernière section, on met en évidence numériquement l'effet de la permutation entre l'épaisseur et la taille des perforations dans le passage à la limite, sur le comportement macroscopique final, dans le cas des matériaux piézocomposites laminés .

6.2 Problèmes locaux et tenseurs effectifs

Les matériaux piézocomposites sont utilisés pour leur légèreté et leur capacité d'activation. Mais leur coût de fabrication demeure élevé c'est pourquoi la conception des structures mettant en œuvre ces matériaux doit prendre en compte les contraintes mécaniques et électriques. Il devient aujourd'hui nécessaire de pouvoir prédire les propriétés mécaniques et électriques des composites avant même leur élaboration, grâce à la simulation numérique.

Pour ce faire, le travail de modélisation des propriétés effectives des milieux piézocomposites laminés décrit ci-après comporte deux objectifs : la compréhension du comportement des matériaux et le prédimensionnement de matériaux en vue de satisfaire à des besoins spécifiques. Seront abordées dans ce travail les modélisations des tenseurs effectifs : mécaniques, diélectriques et piézoélectriques des structures piézocomposites laminées.

Dans cette section, on considère un milieu piézocomposite bilaminé Ω_ε (voir la figure 6.1) composé de deux matériaux piézoélectriques (A) et (B), qui sont superposés suivant la classification de Newnham (1978), c'est-à-dire en parallèle avec l'axe x_3 , dont la cellule de référence ayant la forme indiquée sur la figure 6.1 et elle est notée par Y .

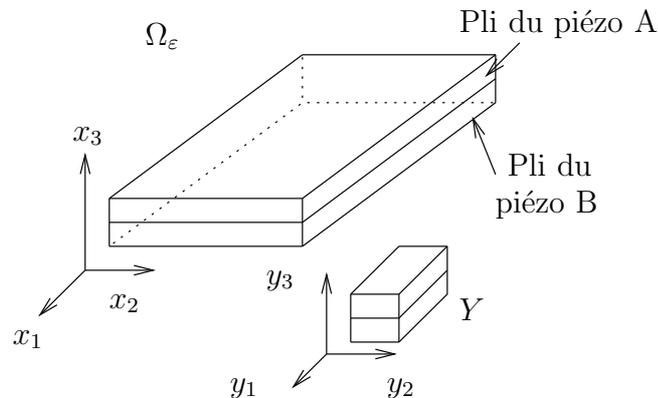


FIG. 6.1 – La structure du piézocomposite bilaminée Ω_ε de type 3 – 1 et sa cellule de base Y .

Compte tenu de l'invariance des éléments des tenseurs de rigidité, de piézoélectricité (de couplage) et de diélectricité par rapport aux coordonnées y_1 et y_2 , il est clair que les deux

problèmes cellulaires (2.6.36) et (2.6.37) deviennent deux problèmes monodimensionnels scalaires sous forme d'équations différentielles ordinaires pour la variable $y_3 \in]0, 1[$ avec des conditions de périodicité aux bords, elles s'écrivent comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_3} \left\{ C_{i3k3}(y_3) \frac{\partial \mathbf{w}_l^{mh}}{\partial y_3} + e_{3i3}(y_3) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_3} \right\} = \frac{\partial C_{i3mh}(y_3)}{\partial y_3}, \\ -\frac{\partial}{\partial y_3} \left\{ -e_{3k3}(y_3) \frac{\partial \mathbf{w}_l^{mh}}{\partial y_3} + d_{33}(y_3) \frac{\partial \varphi^{mh}}{\partial y_3} \right\} = -\frac{\partial e_{3mh}(y_3)}{\partial y_3}, \\ \mathbf{w}^{mh}(0) = \mathbf{w}^{mh}(1), \quad \varphi^{mh}(0) = \varphi^{mh}(1), \end{array} \right. \quad (6.2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_3} \left\{ C_{ijk3}(y_3) \frac{\partial \mathbf{q}^n}{\partial y_3} + e_{3ij}(y_3) \frac{\partial \psi^n}{\partial y_3} \right\} = \frac{\partial e_{ni3}(y_3)}{\partial y_3}, \\ -\frac{\partial}{\partial y_3} \left\{ -e_{ik3}(y_3) \frac{\partial \mathbf{q}^n}{\partial y_3} + d_{i3}(y_3) \frac{\partial \psi^n}{\partial y_3} \right\} = \frac{\partial d_{3n}(y_3)}{\partial y_3}, \\ \mathbf{q}^n(0) = \mathbf{q}^n(1), \quad \psi^n(0) = \psi^n(1). \end{array} \right. \quad (6.2.2)$$

Ces équations doivent être comprises au sens des distributions; ceci implique, par exemple la continuité aux interfaces trou-matrice de $C_{ijk3} \frac{\partial \mathbf{q}^n}{\partial y_3} + e_{3ij} \frac{\partial \psi^n}{\partial y_3} + \frac{\partial e_{ni3}}{\partial y_3}$. La résolution de ces deux problèmes (6.2.1)-(6.2.2) permet de calculer explicitement toutes les expressions des coefficients effectifs, qui seront présentées dans la section suivante.

6.3 Application hydrostatique

Dans cette section, nous nous intéressons à une structure bilaminée, inspirée par ses applications aérospatiales et dans l'imagerie biomédicale, constituée de deux plis : (A) représente un matériau piézoélectrique de classification hexagonale ($6mm$) et (B) est un matériau isotrope, non nécessairement piézoélectrique (pour plus de détails, on pourra consulter Nelli-Silva *et al.* [62] et Ruan *et al.* [79]).

En s'appuyant sur la technique développée précédemment, on résout les problèmes locaux, qui s'écrivent sous forme d'équations différentielles ordinaires, avec des conditions aux limites périodiques. Ensuite, on détermine analytiquement les expressions des tenseurs effectifs qui sont données comme suit

(i) Les coefficients du tenseur de diélectricité homogénéisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{d}_{11} = \chi d_{11}^P + (1 - \chi) d_{11}^S \\ \bar{d}_{22} = \left(\frac{\chi}{d_{22}^P} + \frac{1 - \chi}{d_{22}^S} \right)^{-1} \\ \bar{d}_{33} = \chi \left(d_{33}^P + \frac{(e_{32})^2}{C_{22}^P} \right) + (1 - \chi) d_{33}^S - \chi^2 (e_{32})^2 (C_{22}^P)^{-2} \left(\frac{\chi}{C_{22}^P} + \frac{1 - \chi}{C_{22}^S} \right)^{-1} \end{array} \right. \quad (6.3.3)$$

(ii) Les coefficients du tenseur de couplage homogénéisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{e}_{15} = \chi e_{15} \\ \bar{e}_{24} = \chi e_{24} \left(\frac{\chi}{d_{22}^P} + \frac{1-\chi}{d_{22}^S} \right)^{-1} (d_{22}^P)^{-1} \\ \bar{e}_{32} = \chi e_{32} \left(\frac{\chi}{C_{22}^P} + \frac{1-\chi}{C_{22}^S} \right)^{-1} (C_{22}^P)^{-1} \\ \bar{e}_{31} = \chi \left(e_{31} - \frac{e_{32} C_{12}^P}{C_{22}^P} \right) + \left(\frac{\chi C_{21}^P}{C_{22}^P} + \frac{(1-\chi) C_{21}^S}{C_{22}^S} \right) \chi e_{32} \left(\frac{\chi}{C_{22}^P} + \frac{1-\chi}{C_{22}^S} \right)^{-1} (C_{22}^P)^{-1} \\ \bar{e}_{33} = \chi \left(e_{33} - \frac{e_{32} C_{23}^P}{C_{22}^P} \right) + \left(\frac{\chi C_{23}^P}{C_{22}^P} + \frac{(1-\chi) C_{23}^S}{C_{22}^S} \right) \chi e_{32} \left(\frac{\chi}{C_{22}^P} + \frac{1-\chi}{C_{22}^S} \right)^{-1} (C_{22}^P)^{-1} \end{array} \right. \quad (6.3.4)$$

(iii) Les coefficients du tenseur d'élasticité homogénéisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{11} = \chi \left(C_{11}^P - \frac{(C_{12}^P)^2}{C_{11}^P} \right) + (1-\chi) \left(C_{11}^S - \frac{C_{12}^S}{C_{11}^S} \right) \\ \quad + \left(\frac{\chi C_{12}^S}{C_{11}^P} + \frac{(1-\chi) C_{12}^S}{C_{11}^S} \right)^2 \left(\frac{\chi}{C_{11}^P} + \frac{1-\chi}{C_{11}^S} \right)^{-1} \\ \bar{C}_{12} = \left(\frac{\chi C_{12}^P}{C_{11}^P} + \frac{(1-\chi) C_{12}^S}{C_{11}^S} \right) \left(\frac{\chi}{C_{11}^P} + \frac{1-\chi}{C_{11}^S} \right)^{-1} \\ \bar{C}_{13} = \chi C_{13}^P \left(1 - \frac{C_{12}^P}{C_{11}^P} \right) + (1-\chi) C_{12}^S \left(1 - \frac{C_{12}^S}{C_{11}^S} \right) \\ \quad + \left(\frac{\chi C_{12}^P}{C_{11}^P} + \frac{(1-\chi) C_{12}^S}{C_{11}^S} \right) \left(\frac{\chi C_{13}^P}{C_{11}^P} + \frac{(1-\chi) C_{12}^S}{C_{11}^S} \right) \left(\frac{\chi}{C_{11}^P} + \frac{1-\chi}{C_{11}^S} \right)^{-1} \\ \bar{C}_{22} = \left(\frac{\chi}{C_{11}^P} + \frac{1-\chi}{C_{22}^S} \right)^{-1} \\ \bar{C}_{23} = \left(\frac{\chi C_{13}^P}{C_{11}^P} + \frac{(1-\chi) C_{12}^S}{C_{11}^S} \right) \left(\frac{\chi}{C_{11}^P} + \frac{1-\chi}{C_{11}^S} \right)^{-1} \\ \bar{C}_{33} = \chi \left(C_{33}^P - \frac{(C_{13}^P)^2}{C_{11}^P} \right) + (1-\chi) \left(C_{11}^S - \frac{(C_{12}^S)^2}{C_{11}^S} \right) \\ \quad + \left(\frac{\chi C_{13}^P}{C_{11}^P} + \frac{(1-\chi) C_{12}^S}{C_{11}^S} \right)^2 \left(\frac{\chi}{C_{11}^P} + \frac{1-\chi}{C_{11}^S} \right)^{-1} \\ \bar{C}_{44} = \left(\frac{\chi}{C_{44}^P} + \frac{1-\chi}{C_{44}^S} \right)^{-1} + \frac{\chi (e_{15})^2}{d_{22}^P} - \chi (e_{15})^2 (d_{22}^P)^{-1} \left(\frac{\chi}{d_{22}^P} + \frac{1-\chi}{d_{22}^S} \right)^{-1} \\ \bar{C}_{55} = \chi C_{44}^P + (1-\chi) C_{44}^S \\ \bar{C}_{66} = \left(\frac{\chi}{C_{66}^P} + \frac{1-\chi}{C_{44}^S} \right)^{-1} \end{array} \right. \quad (6.3.5)$$

Avec $\langle \psi \rangle = \int_Y \psi \, dy = \int_Y \psi \, dy_3 = \theta \psi_{pli1} + (1 - \theta) \psi_{pli2}$, θ représente l'épaisseur du pli 1. Ces expressions, nous permettrons de présenter les variations des tenseurs effectifs en fonction de la fraction volumique du piézoélectrique (voir les figures suivantes). On constate que les propriétés effectives d'un matériau piézo-composite composé de deux plis : un piézoélectrique de symétrie (6mm) et un matériau non nécessairement de type piézoélectrique, sont déterminées par neuf coefficients d'élasticités, six coefficients de couplages et trois coefficients de diélectricités différents, ce qui signifie que ce milieu se comporte de la même façon qu'un matériau de symétrie (6mm) et ceci quelque soit le type du matériau qui forme la deuxième couche. Cette technique formelle est valable quelque soit le type de matériaux utilisés.

Pour les tests numériques on utilise les propriétés des céramiques PZT-5A et de l'Araldite (solide) qui sont données par le tableau 6.1, avec la permittivité du vide $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$.

Matériau	Élastiques (GPa)					Piézoélectriques (C/m ²)			Diélectriques	
	C ₁₁	C ₁₂	C ₁₃	C ₃₃	C ₄₄	e ₃₁	e ₃₃	e ₁₅	d ₁₁ /ε ₀	d ₃₃ /ε ₀
PZT-5A	121	75.4	75.2	111	21.1	-5.4	15.8	12.3	916	830
Araldite	5.46	2.94	2.94	5.46	1.26	0	0	0	7.0	7.0

TAB. 6.1 – Les propriétés des matériaux PZT-5A et Araldite.

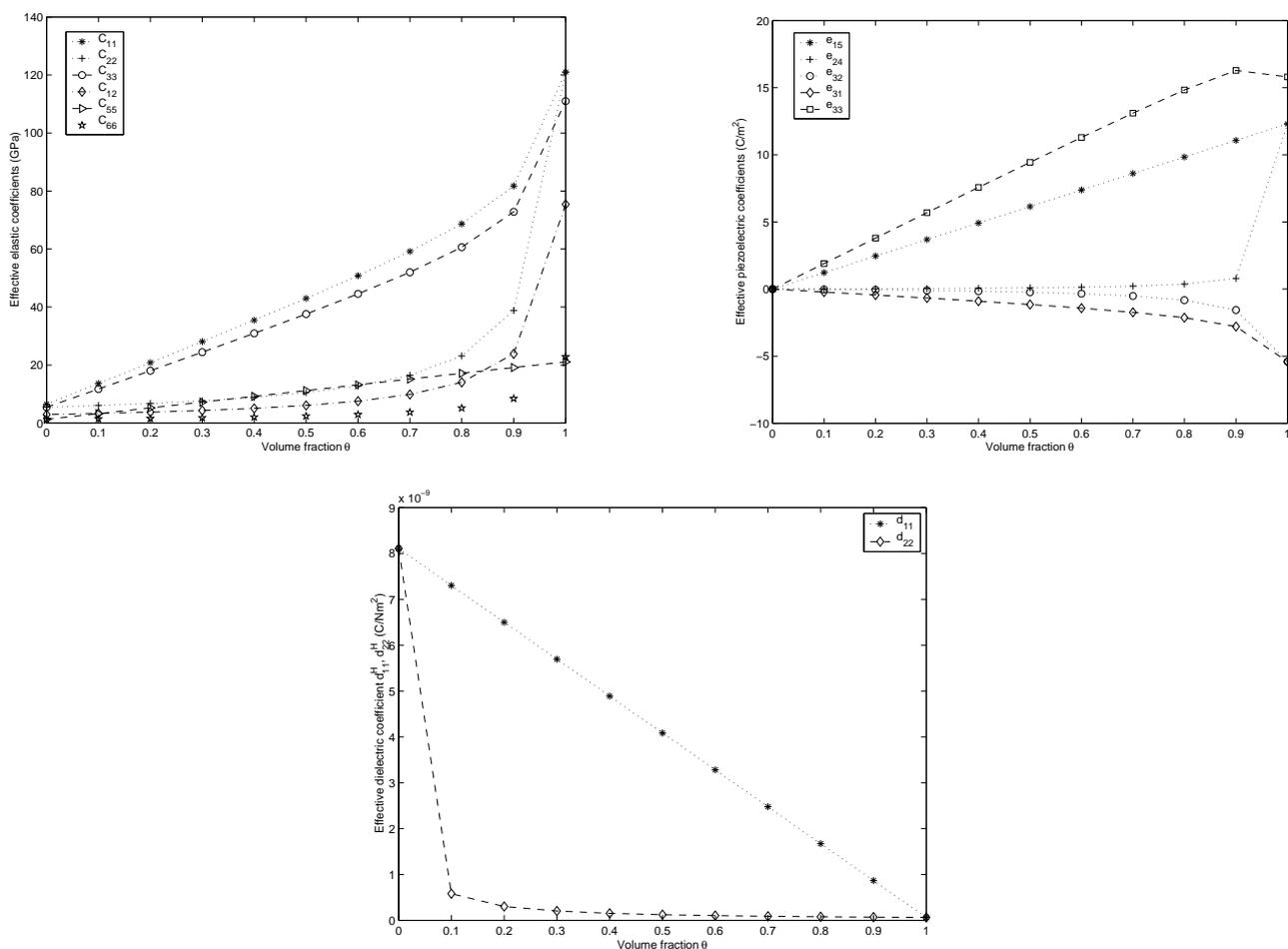


FIG. 6.2 – Variation des coefficients des tenseurs d'élasticité, de piézoélectricité et de diélectricité homogénéisés en fonction de la fraction volumique.

La modélisation qui nous intéresse consiste à déterminer les coefficients effectifs en fonction des coefficients des différents matériaux qui constituent le composite. Nous nous sommes intéressés à l'épaisseur de la couche piézoélectrique. Notre objectif est de montrer combien ce paramètre d'épaisseur est déterminant. Les trois figures précédentes nous donnent une description totale des propriétés macroscopiques des matériaux piézo-composites laminés en fonction de l'épaisseur de la couche piézoélectrique. On constate que la dépendance des tenseurs élastiques et piézoélectriques homogénéisés est linéaire en fraction volumique inférieure à $\theta = 0.8$ de l'épaisseur de la périodicité, et elle est non linéaire au delà de cette valeur.

Il s'agit dans cet exemple de comprendre l'efficacité de l'utilisation des piézo-composites laminés sous forme de détecteurs passifs sous réserve de conditions hydrostatiques dans l'hydrophonique. Notons par \bar{d}_{mi} : la moyenne du tenseur piézoélectrique, \bar{S}_{ij} : le coefficient de couplage élastique et par $\bar{\epsilon}_{mn}^T$: la permittivité. Ces paramètres, peuvent être déterminés, en suivant les formules de Berlincourt (1964) suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{S}_{ij} &= (-1)^{i+j} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \\ \bar{d}_{mi} &= e_{mj}^h \bar{S}_{ji}, \\ \bar{\epsilon}_{mn}^T &= \bar{d}_{mp} e_{np}^h + \bar{\epsilon}_{mn},\end{aligned}$$

où Δ est le déterminant de la matrice de rigidité homogénéisé $\bar{C} = (\bar{c}_{ij})$ et Δ_{ij} est le déterminant de la même matrice en éliminant la i -ème ligne et la j -ème colonne. A partir de ces derniers paramètres, on détermine les coefficients hydrostatiques suivants :

$$\begin{aligned}\bar{d}_h &= \bar{d}_{33} + 2\bar{d}_{31} \quad : \text{coefficient des charges hydrostatiques,} \\ g_h &= \frac{\bar{d}_h}{\epsilon_0 \bar{\epsilon}_{33}^T} \quad : \text{coefficient hydrostatique.}\end{aligned}$$

Les graphes ci-dessous indiquent une croissance du coefficient des charges hydrostatiques d_h et nous donnent également la variation des coefficients piézoélectriques longitudinal et transversal \bar{d}_{33} , \bar{d}_{31} respectivement, ce qui permet par la suite une croissance dans les valeurs de \bar{d}_h . Les figures 6.3(a) et (b), illustrent une croissance dans le produit $\bar{d}_h \bar{g}_h$ pour une fraction volumique du matériau piézoélectrique moyennement petite $\theta = 0.15$, ce qui représente un intérêt majeur pour les applications hydrostatiques puisque ceci montre que cette structure a de bonnes propriétés acoustiques (pour plus de détails, voir Castillero *et al.* [19], Gibiansky et Torquato [39] et Sigmund *et al.* [83]).

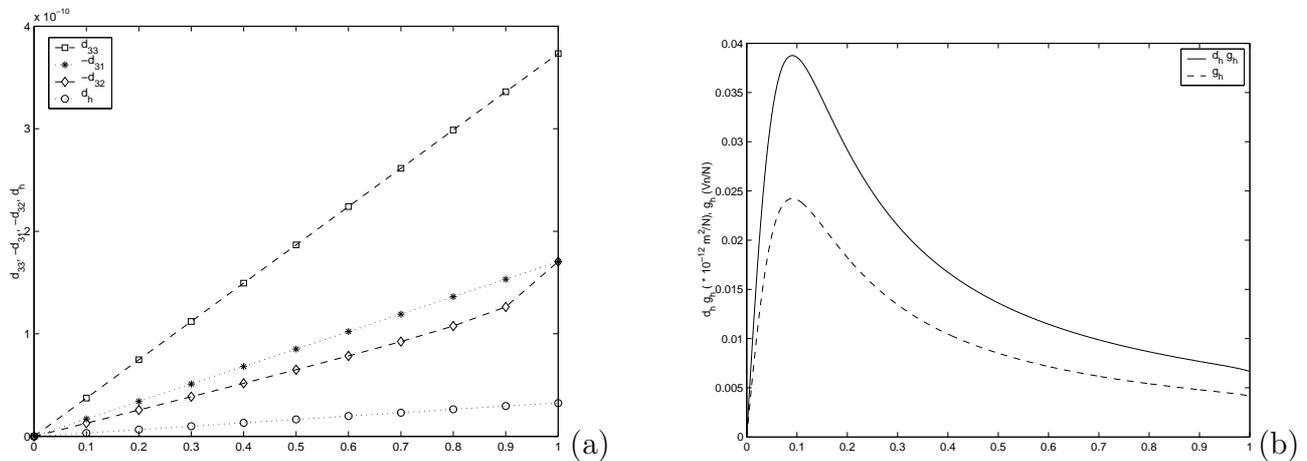


FIG. 6.3 – Variation des coefficients hydrostatiques en fonction de la fraction volumique θ .

6.4 Remarques et commentaires

- i) Le travail présenté dans les sections précédentes, a permis d'assembler des outils analytiques et numériques, existants ou développés dans le cadre de cette étude. Cet ensemble permet de calculer explicitement les tenseurs effectifs mécaniques, électriques et piézoélectriques des piézocomposites laminés. L'ensemble de ces outils est disponible sous la forme d'un progiciel, développé dans le cadre de notre travail.
- ii) Une application analogue à celle-ci a été développée par Castillero *et al.* [19] en utilisant la technique des développements asymptotiques. Avec le même procédé, Kalamkarov et Georgiades [44] ont déterminé les expressions explicites des coefficients effectifs pour le cas des matériaux intelligents.
- iii) L'approche analytique, développée ici, pour les matériaux piézocomposites est utilisable par d'autres auteurs dans des situations différentes, tels que le travail de Kalamkarov et Georgiades [44] pour les matériaux magnetostrictifs ou le travail de Rodriguez *el al.* [77] pour les matériaux fibrés unidirectionnels, ainsi on peut envisager son application pour d'autres matériaux dits intelligents.
- iv) On pourrait également envisager le calcul explicite des tenseurs effectifs pour des matériaux laminés constitués d'un nombre quelconque de différents plis de matériaux, rangés en suivant la classification de Newnham (voir [19]).
- v) Cette approche pourrait servir à l'étude des ondes acoustiques de surface qui s'appuie sur les propriétés électroacoustiques des matériaux piézoélectriques tels que : le quartz, le nioboate de lithium ($LiNbO_3$), le tantalate de lithium ($LiTaO_3$) et le monoxyde de zinc (ZnO) (voir Nayfeh [61]).

6.5 Description d'un modèle piézocomposite bilaminé perforé

Nous proposons dans cette section d'étudier les propriétés effectives d'un nouveau modèle de matériau piézocomposite bilaminé, constitué de deux couches minces, la première est de type piézoélectrique tandis que la deuxième est un matériau isotrope dont la propriété du couplage seulement est inactive, les deux couches sont périodiquement perforées (voir la figure 6.11), on prend des trous sous forme cylindrique suivant la classification de Newnham et disposés suivant la distribution carrée.

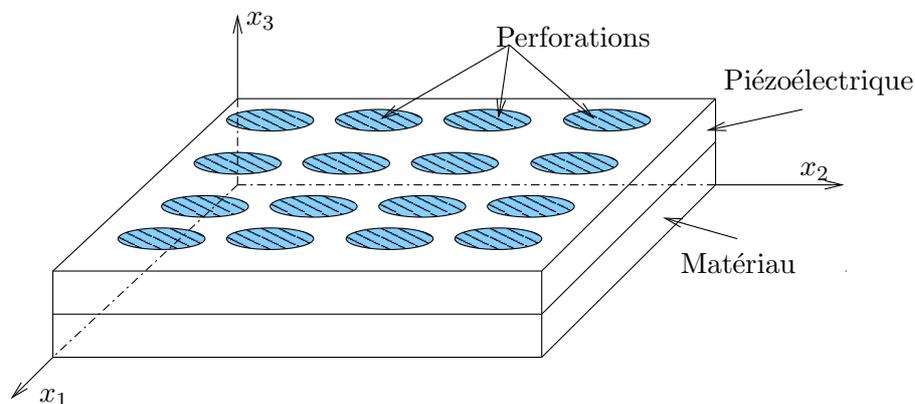


FIG. 6.4 – Structure piézocomposite bilaminée Epoxy/PZT-5A de type 1 – 3 perforée Ω_ε .

Pour étudier les propriétés effectives de cette structure, on reprend en premier lieu le passage de l'épaisseur par zéro, ce qui permet d'utiliser les expressions explicites des tenseurs effectifs du troisième chapitre, c'est-à-dire au lieu de deux couches minces, on n'aura qu'une seule couche d'un matériau homogène dont les coefficients des tenseurs d'élasticité, de piézoélectricité et de diélectricité sont donnés par les expressions (3.3.12) et (3.3.12). En second lieu, on réutilise le code numérique des éléments finis développé dans la section 5.2, sous une version bidimensionnelle, pour étudier les problèmes cellulaires qui sont nécessaire à l'étude des propriétés effectives de cette structure.

6.5.1 Application en hydrophonie (imagerie biomédicale)

Une fois les tenseurs effectifs déterminés, nous étudions la variation du coefficient hydrostatique \bar{d}_h en fonction de la fraction volumique θ , présentée dans la figure 6.5.1(a). Nous pouvons observer une amélioration du coefficient hydrostatique \bar{d}_h par une croissance de ces valeurs en fonction de la diminution de la taille des trous. Cette croissance, se traduit par un effet piézoélectrique très important, ce qui représente un intérêt pour les applications industrielles en l'occurrence en hydrophonie (imagerie biomédicale).

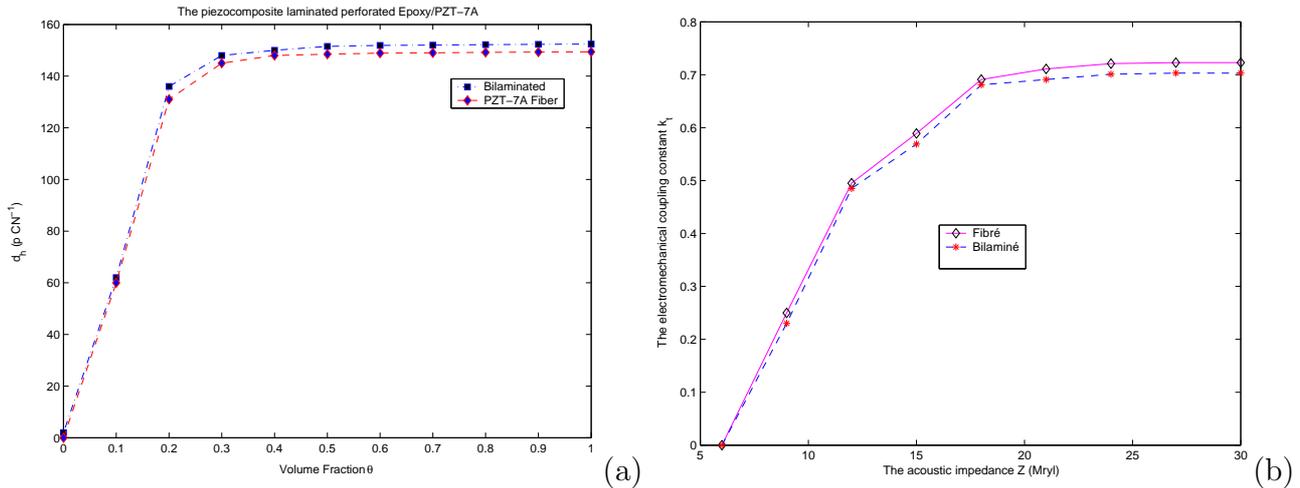


FIG. 6.5 – (a): Variation du coefficient hydrostatique \bar{d}_h en fonction de la fraction volumique θ . (b) La variation du facteur de couplage électromécanique \bar{k}_t en fonction de l'impédance acoustique \bar{Z} (Mrayls).

Nous constatons que le modèle bilaminé perforé permet d'avoir de meilleures propriétés acoustiques que dans une couche piézoélectrique uniquement, ce qui se traduit par des valeurs supérieures du facteur de couplage électromécanique \bar{k}_t ($\bar{k}_t \simeq 0.60-0.70$) (voir la figure 6.5.1(b)) comparées aux valeurs obtenues dans le second modèle et ceci en restant toujours au voisinage des mêmes valeurs de l'impédance acoustique \bar{Z} . Par conséquent, cela permet par la suite de mieux se servir de ce modèle dans l'ingénierie pour des utilisations hydrophoniques (pour plus de détails on pourra consulter Guinovart-Diaz *et al.* [40]). Dans la section suivante, nous essayons de montrer l'efficacité de ce modèle avec des perforations hexagonales, pour des applications en filtrage spatial.

Remarque 6.5.1 Il convient de signaler, qu'à partir des figures 6.5.1 (a) et (b), on constate, que ce nouveau modèle nous donne des propriétés hydrophoniques proches des résultats obtenus par Poizat et Sester [71] [72] et Guinovart-Diaz *et al.* [40] dans le cas fibré, néanmoins ce modèle a l'avantage d'être facile à réaliser du point de vue technologique. ■

Remarque 6.5.2

- i) Puisque les perforations sont sous forme cylindrique, il est envisageable de déterminer les expressions des coefficients des tenseurs homogénéisés de façon explicite.
- ii) L'analyse des éléments finis combinée avec le calcul analytique, présentée dans cette section, montre que ce nouveau modèle est clairement adapté aux applications hydrophoniques et en imagerie biomédicale.
- iii) L'intérêt de ce modèle est d'apporter une facilité de fabrication du point de vue technologique, comparée à des composites piézoélectriques fibrés comme 0-3, 2-2 et 1-3 (voir les travaux de Poizat et Sester [71] [72]). ■

6.5.2 Application en filtrage spatial

Dans cette section, nous nous intéressons à une application d'un contrôle de vibration des structures, en particulier sur une technologie de réalisation de capteurs distribués avec des propriétés de filtrage spatial.

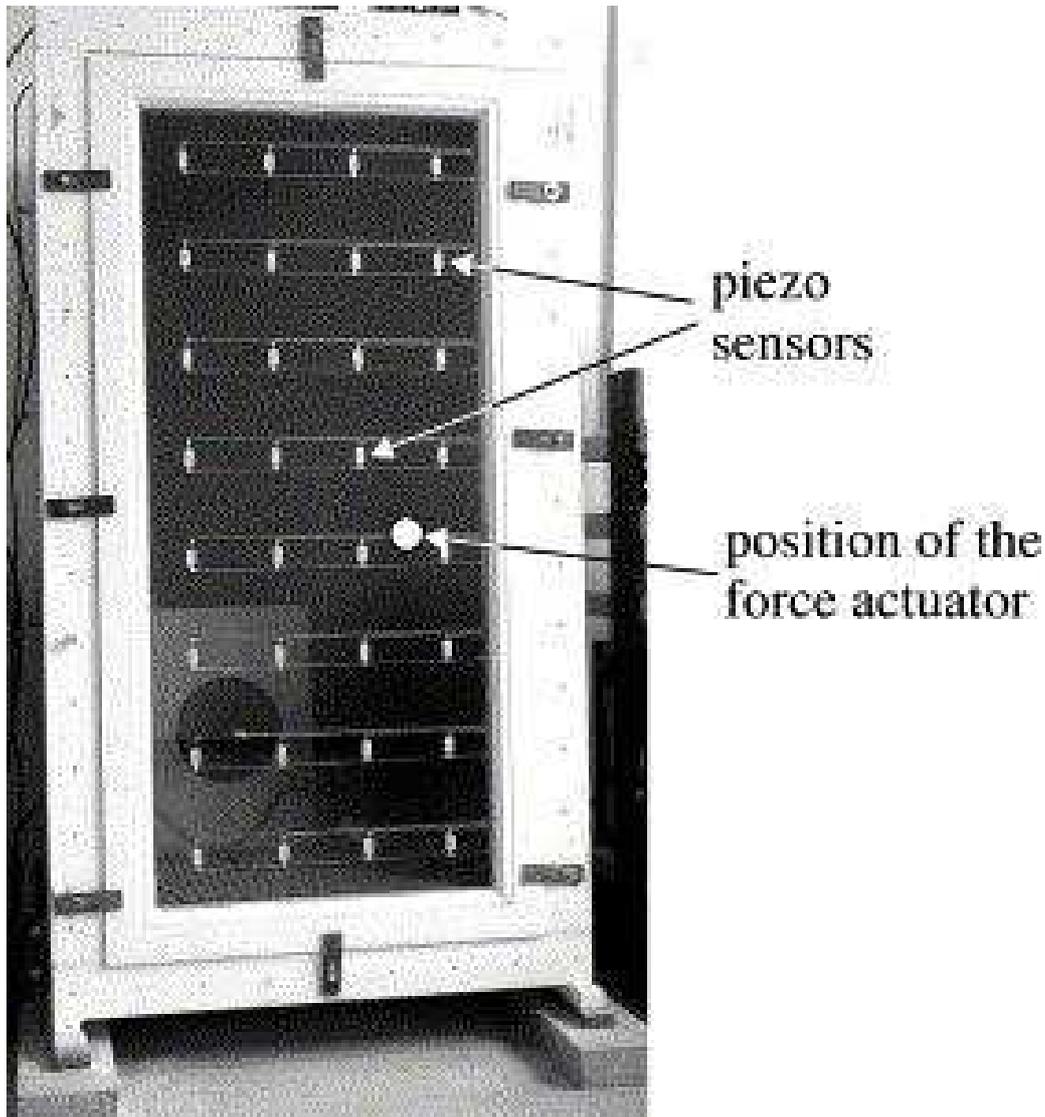


FIG. 6.6 – L'image du prototype proposé par A.Preumont [73].

En gardant le même modèle proposé dans la section 6.5, mais cette fois avec des perforations sous forme hexagonale. Ce modèle d'une série discrète de capteurs est très flexible, puisque les capteurs sont reconfigurables, aussi à cause de la porosité variable de ce modèle, les coefficients piézoélectriques effectifs peuvent être changés, parfois en temps réel, pour réaliser le rendement désiré.

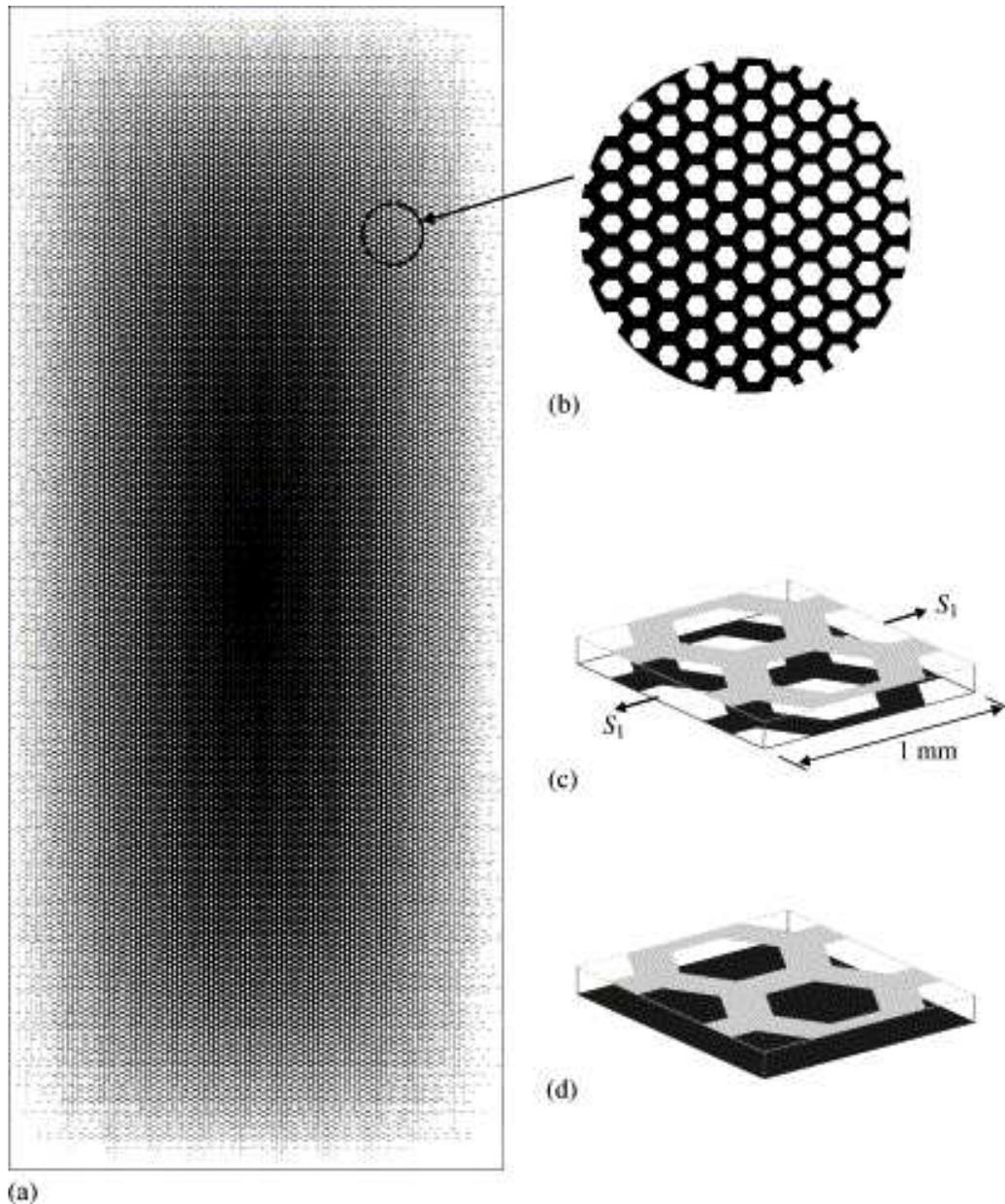


FIG. 6.7 – Le modèle de A.Preumont [73]: (a) la géométrie du domaine perforé, (b) le détail de la forme et la distribution des perforations, (c) modèle 1: deux plaques perforées, (d) : modèle 2 : seulement une plaque perforée.

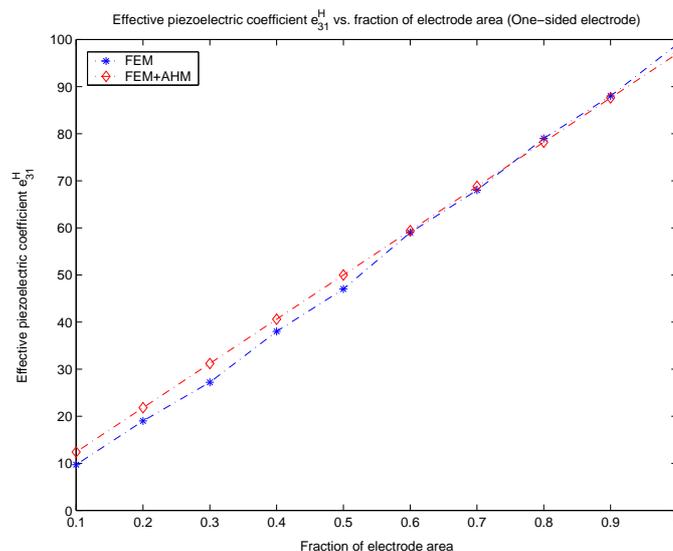
Le but est de mieux contrôler les deux tenseurs piézoélectriques transverse et longitudinal effectifs, puisqu'à la suite de ce contrôle, on peut contrôler la charge électrique produite par la structure, via la formule suivante

$$Q = \int_{\Omega} (e_{31}S_1 + e_{32}S_2) d\Omega,$$

où S_1 et S_2 sont les composantes de contraintes le long des axes d'orthotropies dans le demi-plan du modèle. Un modèle tridimensionnel équivalent à celui-ci, a été étudié par A.Preumont *et al.* [73] [74] en utilisant la méthode des éléments finis. Notre objectif est de faire une comparaison entre les résultats obtenus par A.Preumont *et al.* [73] [74] et ceux de notre simulation numérique, en utilisant le module de l'homogénéisation numérique avec les expressions des tenseurs effectifs pour les matériaux bilaminés. Pour les tests numériques, on considère que les deux couches sont des piézoélectriques de type PVDF², dont les caractéristiques sont données par le tableau 6.2 établi par Piefort [70].

ρ	1800	(kg/m^3)
Y_1	2.0	(GPa)
Y_2	2.0	(GPa)
G_{12}	0	(GPa)
ν	0.29	
ε	$1.062 \cdot 10^{-10}$	(F/m)
d_{31}	$2.2 \cdot 10^{-11}$	(Cb/N)
d_{32}	0	(Cb/N)

TAB. 6.2 – Les propriétés de PVDF.

FIG. 6.8 – Comparaison entre les résultats de l'homogénéisation et ceux de A.Preumont du coefficient piézoélectrique transverse e_{31}^H .

Le résultat de l'étude comparative³ entre les valeurs numériques du tenseur piézoélectrique transverse e_{31} effectif obtenues par notre code et celui de Preumont *et al.* [73] [74] est illustré dans la figure 6.8. On peut donc constater qu'ils sont du même ordre de grandeur.

²Signalons que deux couches piézoélectriques de classification hexagonale ($6mm$) ont un comportement macroscopique d'un matériau de classification orthorhombique ($2mm$) (voir Castillero *et al.* [19], ainsi Dieulesaint et Royer [30]).

³FEM : Finite Element Method. AM : Analytical Method.

Ensuite, en gardant le même modèle et en faisant des perforations sur la première couche seulement, il est clair que ce modèle est du point de vue technologique plus simple que le modèle précédent. Dans la figure 6.9, on présente une comparaison entre les résultats obtenus par le module d'homogénéisation et ceux de A.Preumont *et al.* [73] [74]. On constate que même dans ce modèle, nos résultats sont du même ordre de grandeur avec ceux de A.Preumont. Une autre différence de niveau qu'il reste à expliquer pour le dernier cas. Une véritable comparaison nécessiterait des investigations supplémentaires.

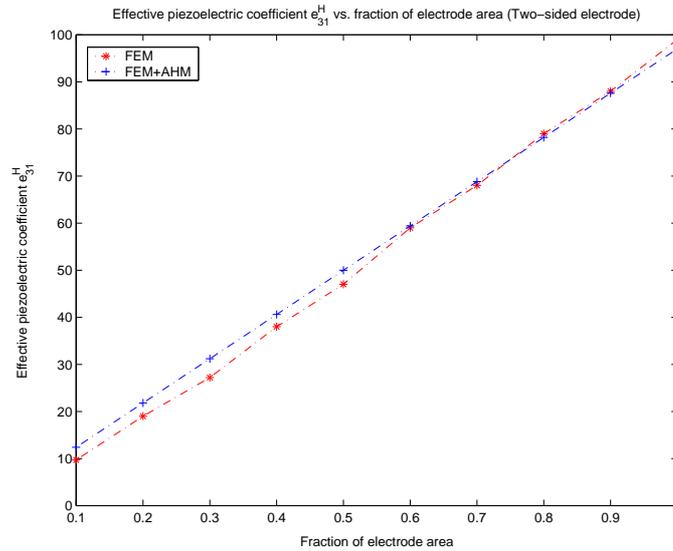


FIG. 6.9 – Comparaison entre les résultats de l'homogénéisation et ceux de A.Preumont.

L'étude présentée dans cette partie, nous a permis en comparant les résultats obtenus par notre code et ceux de A.Preumont *et al.* [73] [74], a montré l'efficacité du filtrage d'une plaque ou d'une coque avec des films de PVDF pour réduire le crénelage spatial des filtres discrets. Ce dernier se produit pour tous les modes avec un nombre d'ondes plus important que le nombre de sondes (pour plus de détails, on pourra consulter les travaux de A.Preumont *et al.* [73] [74]).

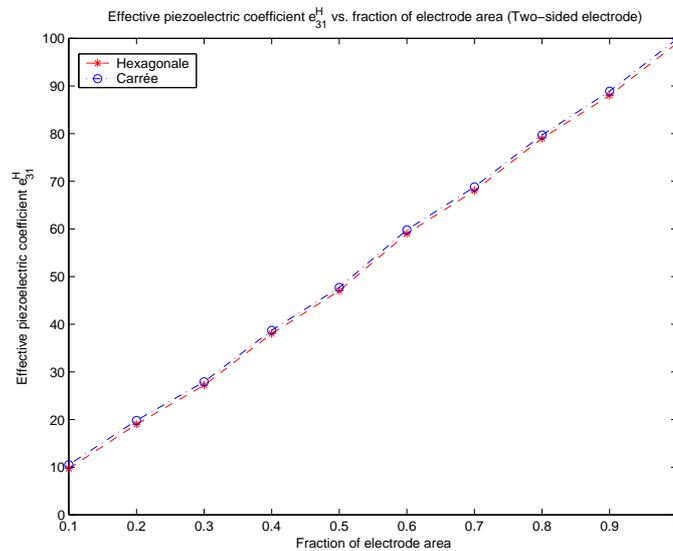


FIG. 6.10 – Comparaison entre les deux distributions dans le modèle de A.Preumont.

La figure 6.10 montre clairement que dans le modèle prototype proposé par A.Preumont, on peut prendre aussi une distribution carrée, et dans cette situation on trouve les mêmes résultats qu'une distribution hexagonale.

6.6 Effet d'ordre des convergences

Dans cette section, on présente un exemple d'un matériau piézocomposite bilaminé d'une connexion de type 2 – 2, constitué de N ($N \in \mathbb{N}$) couches minces où chacune est constituée de deux plis : un piézoélectrique et un solide simple, disposés orthogonalement par rapport à l'axe de l'épaisseur (voir la figure 6.11). Le but de cet exemple est de mettre en évidence du point de vue numérique et analytique, la différence entre l'ordre des deux passages aux limites : le passage asymptotique ($h \rightarrow 0$) et celui de l'homogénéisation ($\varepsilon \rightarrow 0$).

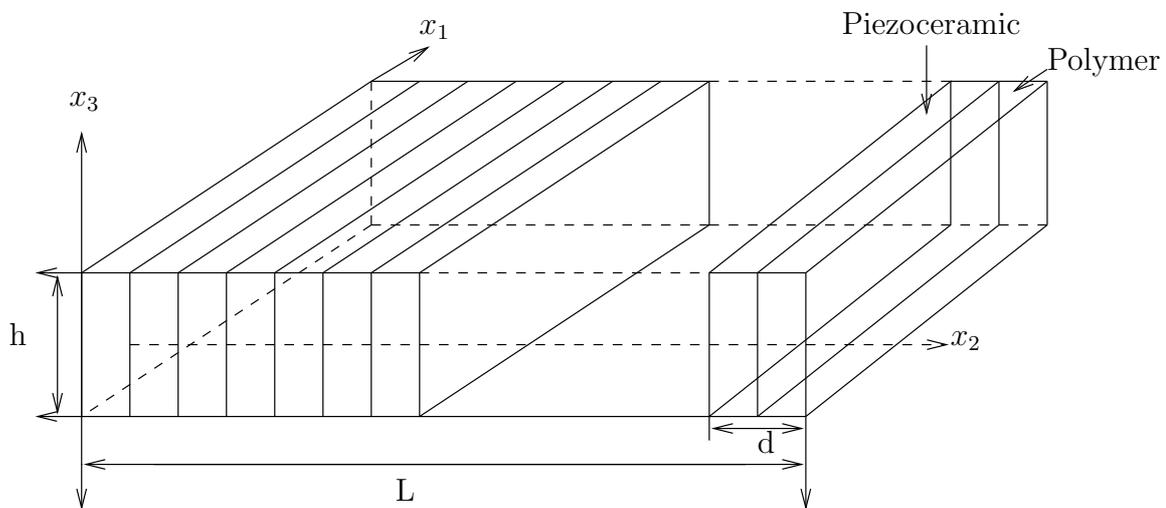


FIG. 6.11 – Structure piézocomposite bilaminée 2 – 2 Piezoceramic/Epoxy.

On procède de manière à faire tendre le paramètre de la périodicité ε et l'épaisseur de la structure h vers zéro, dans cet ordre. Tandis qu'en deuxième lieu on inverse l'ordre entre ces deux derniers passages, pour vérifier numériquement, pour cette structure, que ces deux situations finissent par deux comportements macroscopiques différents.

Intéressons-nous au premier passage ($\varepsilon \rightarrow 0$) de la première situation, en utilisant les problèmes locaux (6.2.1) et (6.2.2) pour une périodicité parallèle à l'axe x_2 , on calcule les coefficients des tenseurs d'élasticité, de couplage et de diélectricité effectifs, comme suit

(iii) *Les coefficients du tenseur de diélectricité homogénéisé :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{d}_{11} = \chi d_{11}^P + (1 - \chi) d_{11}^S \\ \bar{d}_{22} = \left(\frac{\chi}{d_{22}^P} + \frac{1 - \chi}{d_{22}^S} \right)^{-1} \\ \bar{d}_{33} = \chi d_{33}^P + (1 - \chi) d_{33}^S + \frac{\chi (e_{32})^2}{C_{22}^P} - \chi^2 (e_{32})^2 (C_{22}^P)^{-2} \left(\frac{\chi}{C_{22}^P} + \frac{1 - \chi}{C_{22}^S} \right)^{-1} \end{array} \right. \quad (6.6.6)$$

(i) Les coefficients du tenseur de couplage (de piézoélectricité) homogénéisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{e}_{15} = \chi e_{15} \\ \bar{e}_{31} = \chi e_{31} + \chi e_{32} \left(\frac{\chi C_{21}^P}{C_{22}^P} + \frac{(1-\chi) C_{21}^S}{C_{22}^S} \right) (C_{22}^P)^{-1} \left(\frac{\chi}{C_{22}^P} + \frac{1-\chi}{C_{22}^S} \right)^{-1} - \frac{\chi e_{32} C_{21}^S}{C_{22}^P} \\ \bar{e}_{32} = \chi e_{32} (C_{22}^P)^{-1} \left(\frac{\chi}{C_{22}^P} + \frac{1-\chi}{C_{22}^S} \right)^{-1} \\ \bar{e}_{33} = \chi \left(e_{33} - \frac{e_{32} C_{23}^P}{C_{22}^P} \right) + \chi e_{32} \left(\frac{\chi C_{23}^P}{C_{22}^P} + \frac{(1-\chi) C_{23}^S}{C_{22}^S} \right) (C_{22}^P)^{-1} \left(\frac{\chi}{C_{22}^P} + \frac{1-\chi}{C_{22}^S} \right)^{-1} \\ \bar{e}_{24} = \chi e_{24} (d_{22}^P)^{-1} \left(\frac{\chi}{d_{22}^P} + \frac{1-\chi}{d_{22}^S} \right)^{-1} \end{array} \right. \quad (6.6.7)$$

(ii) Les coefficients du tenseur de rigidité homogénéisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{11} = \chi \left(C_{11}^P - \frac{(C_{12}^P)^2}{C_{22}^P} \right) + (1-\chi) \left(C_{11}^S - \frac{(C_{12}^S)^2}{C_{22}^S} \right) \\ \quad + \left(\frac{\chi C_{12}^P}{C_{22}^P} + \frac{(1-\chi) C_{12}^S}{C_{22}^S} \right)^2 \left(\frac{\chi}{C_{22}^P} + \frac{1-\chi}{C_{22}^S} \right)^{-1} \\ \bar{C}_{12} = \left(\frac{\chi C_{23}^P}{C_{22}^P} + \frac{(1-\chi) C_{23}^S}{C_{22}^S} \right)^2 \left(\frac{\chi}{C_{22}^P} + \frac{1-\chi}{C_{22}^S} \right)^{-1} \\ \bar{C}_{13} = \chi \left(C_{13}^P - \frac{C_{12}^P C_{23}^P}{C_{22}^P} \right) + (1-\chi) \left(C_{13}^S - \frac{C_{12}^S C_{23}^S}{C_{22}^S} \right) \\ \quad + \left(\frac{\chi C_{12}^P}{C_{22}^P} + \frac{(1-\chi) C_{12}^S}{C_{22}^S} \right) \left(\frac{\chi C_{23}^P}{C_{22}^P} + \frac{(1-\chi) C_{23}^S}{C_{22}^S} \right) \left(\frac{\chi}{C_{22}^P} + \frac{1-\chi}{C_{22}^S} \right)^{-1} \\ \bar{C}_{22} = \left(\frac{\chi}{C_{22}^P} + \frac{1-\chi}{C_{22}^S} \right)^{-1} \\ \bar{C}_{23} = \left(\frac{\chi C_{23}^P}{C_{22}^P} + \frac{(1-\chi) C_{23}^S}{C_{22}^S} \right) \left(\frac{\chi}{C_{22}^P} + \frac{1-\chi}{C_{22}^S} \right)^{-1} \\ \bar{C}_{33} = \chi \left(C_{33}^P - \frac{(C_{23}^P)^2}{C_{22}^P} \right) + (1-\chi) \left(C_{33}^S - \frac{(C_{23}^S)^2}{C_{22}^S} \right) \\ \quad + \left(\frac{\chi C_{23}^P}{C_{22}^P} + \frac{(1-\chi) C_{23}^S}{C_{22}^S} \right)^2 \left(\frac{\chi}{C_{22}^P} + \frac{1-\chi}{C_{22}^S} \right)^{-1} \\ \bar{C}_{55} = \chi C_{55}^P + (1-\chi) C_{55}^S \\ \bar{C}_{66} = \left(\frac{\chi}{C_{66}^P} + \frac{1-\chi}{C_{44}^S} \right)^{-1} \end{array} \right. \quad (6.6.8)$$

L'exposant S ou P sur les coefficients, signifie que les coefficients sont liés aux matériaux solide ou piézoélectrique respectivement. A partir de ces dernières expressions, on peut donner une description totale sur le comportement macroscopique des structures piézo-composites bilaminés de type 2 – 2, en fonction de l'épaisseur de la couche piézoélectrique (voir les graphes suivantes).

On constate que ce modèle a quasiment le même comportement macroscopique d'un matériau piézo-composite laminé de type 3 – 1 étudié dans la section 6.3.

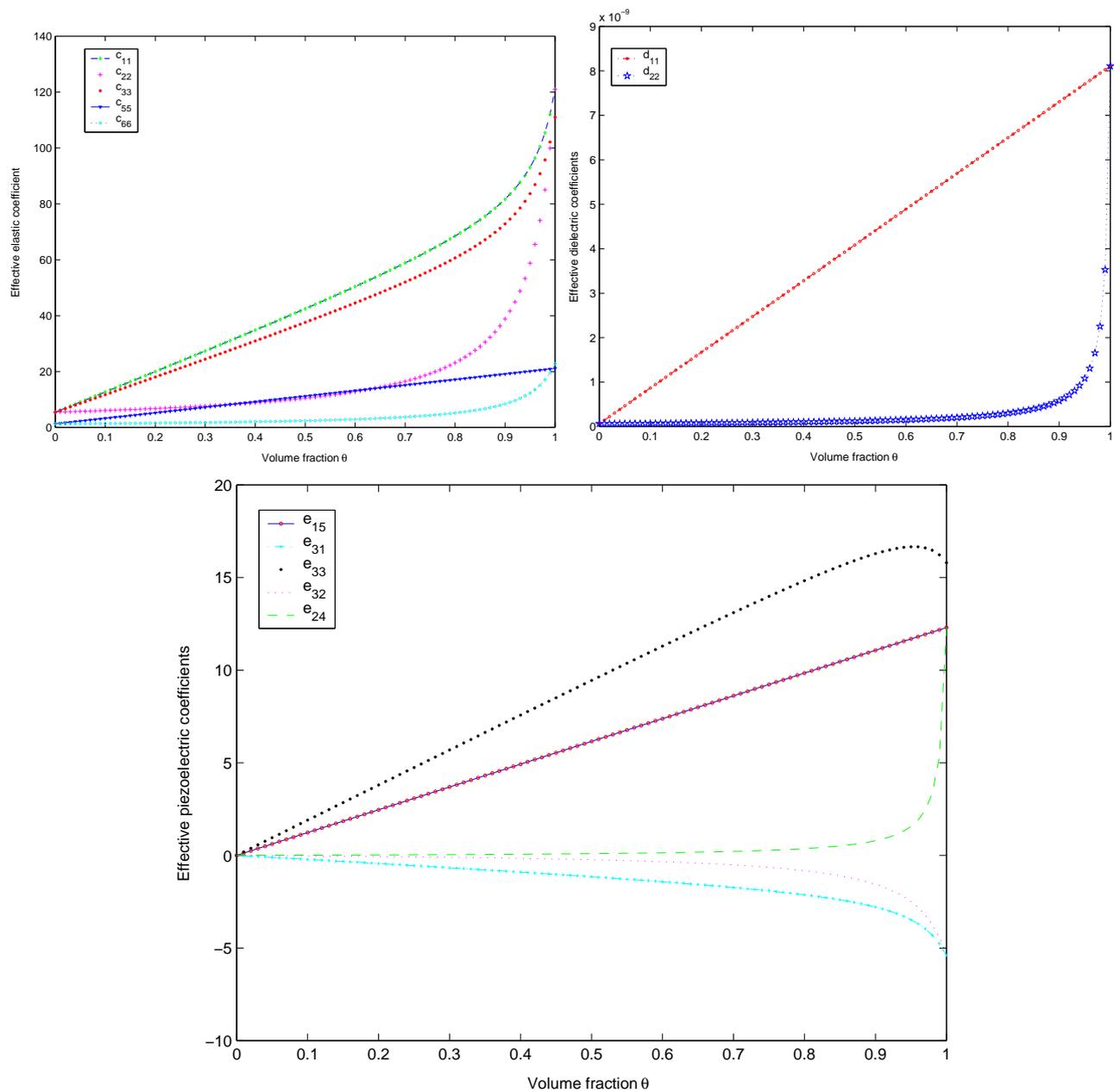


FIG. 6.12 – La variation des tenseurs homogénéisés en fonction de la fraction volumique χ pour un matériau bilaminé 2 – 2. (a) : Les tenseurs élastiques, (b) : Les tenseurs piézoélectriques, (c) : Les tenseurs diélectriques.

Pour le deuxième passage de la première situation ($h \rightarrow 0$), en se servant des formules (3.3.12) et (3.3.12) présentées dans le troisième chapitre, on aboutit à

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C}_{11}^P = C_{11}^P - \frac{(C_{13}^P)^2}{C_{22}^P} + \frac{\left(e_{31} - \frac{C_{13}^P e_{33}}{C_{33}^P}\right)^2}{d_{33}^P - \frac{(e_{33})^2}{d_{33}^P}} \\ \hat{C}_{12}^P = C_{12}^P - \frac{C_{23}^P C_{13}^P}{C_{33}^P} + \frac{\left(e_{31} - \frac{C_{13}^P e_{33}}{C_{33}^P}\right) \left(e_{32} - \frac{C_{32}^P e_{33}}{C_{33}^P}\right)}{d_{33}^P - \frac{(e_{33})^2}{d_{33}^P}} \\ \hat{C}_{22}^P = C_{22}^P - \frac{(C_{32}^P)^2}{C_{33}^P} + \frac{\left(e_{32} - \frac{C_{32}^P e_{33}}{C_{33}^P}\right)^2}{d_{33}^P - \frac{(e_{33})^2}{d_{33}^P}} \end{array} \right. \quad (6.6.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C}_{11}^S = C_{11}^S - \frac{(C_{13}^S)^2}{C_{33}^S} \\ \hat{C}_{12}^S = C_{12}^S - \frac{C_{23}^S C_{13}^S}{C_{33}^S} \\ \hat{C}_{22}^S = C_{22}^S - \frac{(C_{32}^S)^2}{C_{33}^S} \end{array} \right. \quad (6.6.10)$$

A présent, en remplaçant les expressions (6.6.7), (6.6.8) et (6.6.6) dans les expressions précédentes de \hat{C}_{11} , \hat{C}_{12} et \hat{C}_{22} , on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C}_{11} = \bar{C}_{11} - \frac{(\bar{C}_{13})^2}{\bar{C}_{33}} + \frac{\left(\bar{e}_{31} - \frac{\bar{C}_{13} \bar{e}_{33}}{\bar{C}_{33}}\right)^2}{\bar{d}_{33} - \frac{(\bar{e}_{33})^2}{\bar{d}_{33}}} \\ \hat{C}_{12} = \bar{C}_{12} - \frac{\bar{C}_{23} \bar{C}_{13}}{\bar{C}_{33}} + \frac{\left(\bar{e}_{31} - \frac{\bar{C}_{13} \bar{e}_{33}}{\bar{C}_{33}}\right) \left(\bar{e}_{32} - \frac{\bar{C}_{32} \bar{e}_{33}}{\bar{C}_{33}}\right)}{\bar{d}_{33} - \frac{(\bar{e}_{33})^2}{\bar{d}_{33}}} \\ \hat{C}_{22} = \bar{C}_{22} - \frac{(\bar{C}_{32})^2}{\bar{C}_{33}} + \frac{\left(\bar{e}_{32} - \frac{\bar{C}_{32} \bar{e}_{33}}{\bar{C}_{33}}\right)^2}{\bar{d}_{33} - \frac{(\bar{e}_{33})^2}{\bar{d}_{33}}} \end{array} \right. \quad (6.6.11)$$

Un calcul explicite et un développement en fonction de la fraction volumique de ces trois derniers coefficients ont été fait sous Maple.

De même, intéressons-nous à présent, à la deuxième situation, où en passant à la limite de l'épaisseur $h \rightarrow 0$ en premier et en deuxième, à $\varepsilon \rightarrow 0$. En remplaçant maintenant ces deux

dernières expressions dans les formules des coefficients d'élasticité \hat{C}_{11} , \hat{C}_{12} et \hat{C}_{22} , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{11} = \chi \left(\hat{C}_{11}^P - \frac{(\hat{C}_{12}^P)^2}{\hat{C}_{22}^P} \right) + (1 - \chi) \left(\hat{C}_{11}^S - \frac{(\hat{C}_{12}^S)^2}{\hat{C}_{22}^S} \right) \\ \quad + \left(\frac{\chi \hat{C}_{12}^P}{\hat{C}_{22}^P} + \frac{(1 - \chi) \hat{C}_{12}^S}{\hat{C}_{22}^S} \right)^2 \left(\frac{\chi}{\hat{C}_{22}^P} + \frac{1 - \chi}{\hat{C}_{22}^S} \right)^{-1} \\ \bar{C}_{12} = \left(\frac{\chi \hat{C}_{12}^P}{\hat{C}_{22}^P} + \frac{(1 - \chi) \hat{C}_{12}^S}{\hat{C}_{22}^S} \right) \left(\frac{\chi}{\hat{C}_{22}^P} + \frac{1 - \chi}{\hat{C}_{22}^S} \right)^{-1} \\ \bar{C}_{22} = \left(\frac{\chi}{\hat{C}_{22}^P} + \frac{1 - \chi}{\hat{C}_{22}^S} \right)^{-1} \end{array} \right. \quad (6.6.12)$$

Un calcul explicite et un développement en fonction de la fraction volumique de ces trois derniers coefficients ont été aussi fait sous Maple. A partir des ces derniers calculs analytiques, on met en évidence le fait que les deux chemins ne nous donnent pas les mêmes résultats. C'est-à-dire que

$$\boxed{\hat{C}_{11} \simeq \bar{C}_{11}, \hat{C}_{12} \simeq \bar{C}_{12}, \hat{C}_{22} \neq \bar{C}_{22}}$$

Les figures suivantes, donne une comparaison de quelques coefficients d'élasticités obtenus par les deux chemins des deux passages aux limites étudiés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\cdot} : \varepsilon \rightarrow 0 \text{ puis } h \rightarrow 0 \\ \bar{\cdot} : h \rightarrow 0 \text{ puis } \varepsilon \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

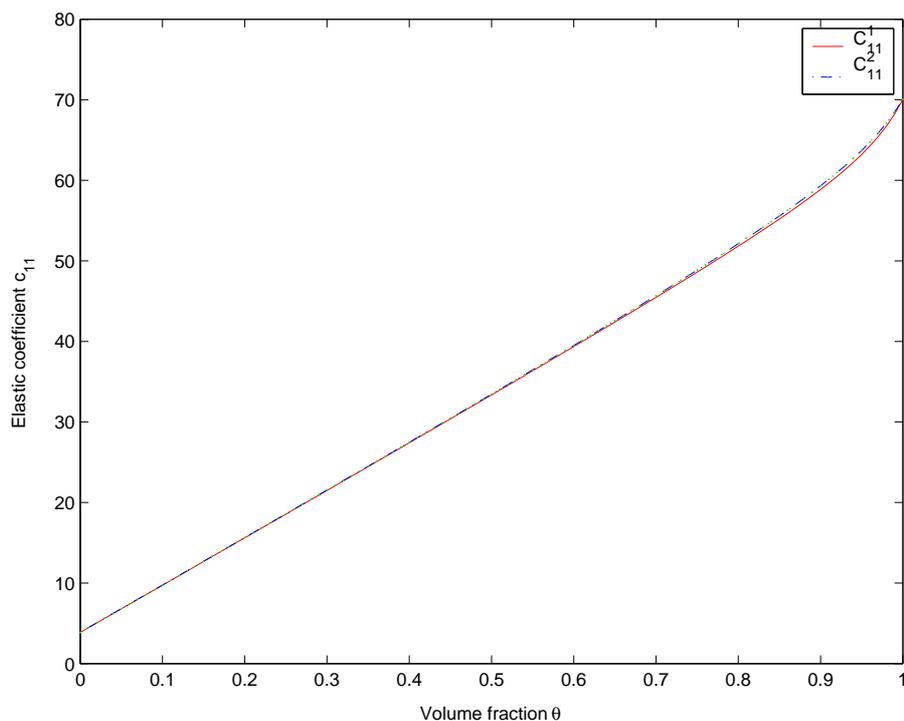


FIG. 6.13 – La comparaison entre les deux coefficients $\bar{C}_{11} = C_{11}^1$ et $\hat{C}_{11} = C_{11}^2$.

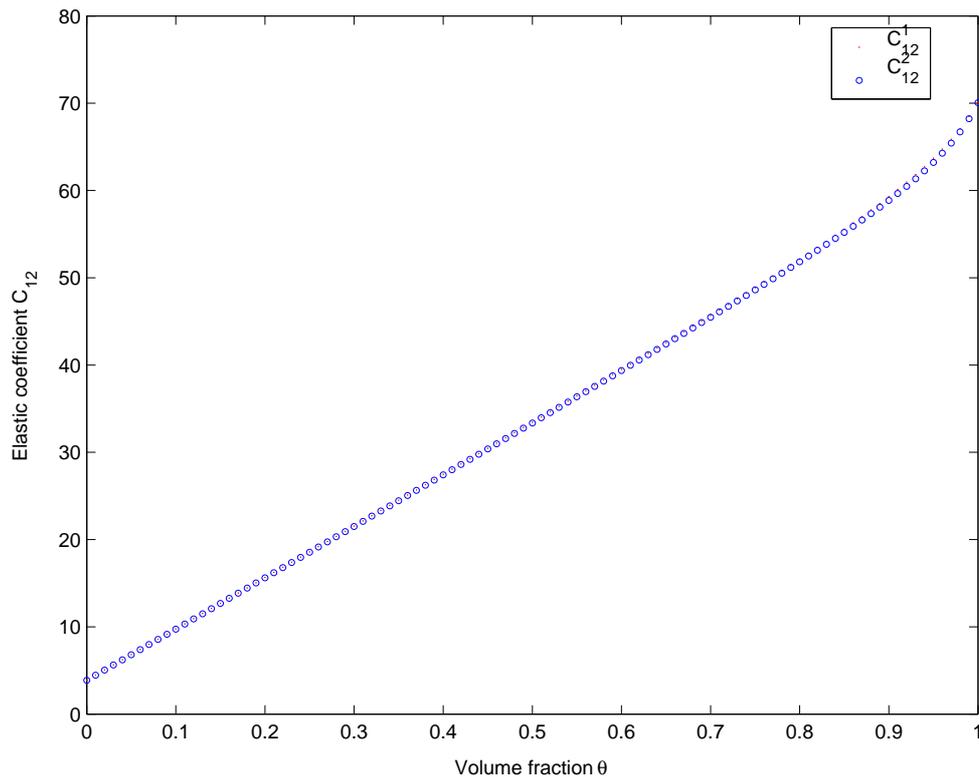


FIG. 6.14 – La comparaison entre les deux coefficients $\bar{C}_{12} = C_{12}^1$ et $\hat{C}_{12} = C_{12}^2$.

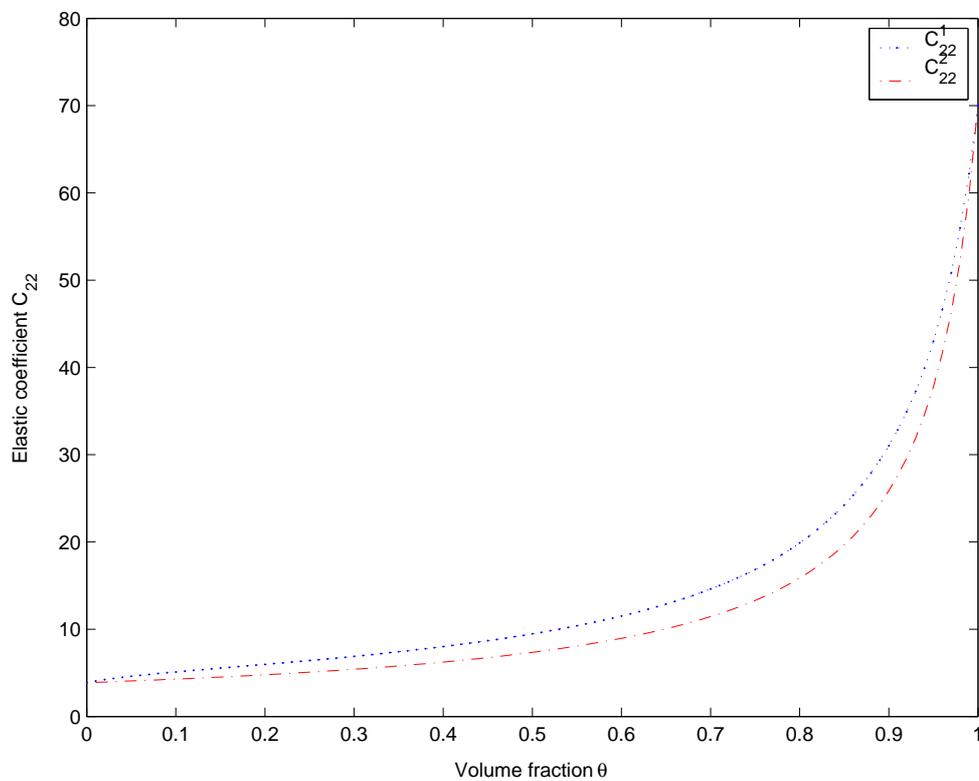


FIG. 6.15 – La comparaison entre les deux coefficients $\bar{C}_{22} = C_{22}^1$ et $\hat{C}_{22} = C_{22}^2$.

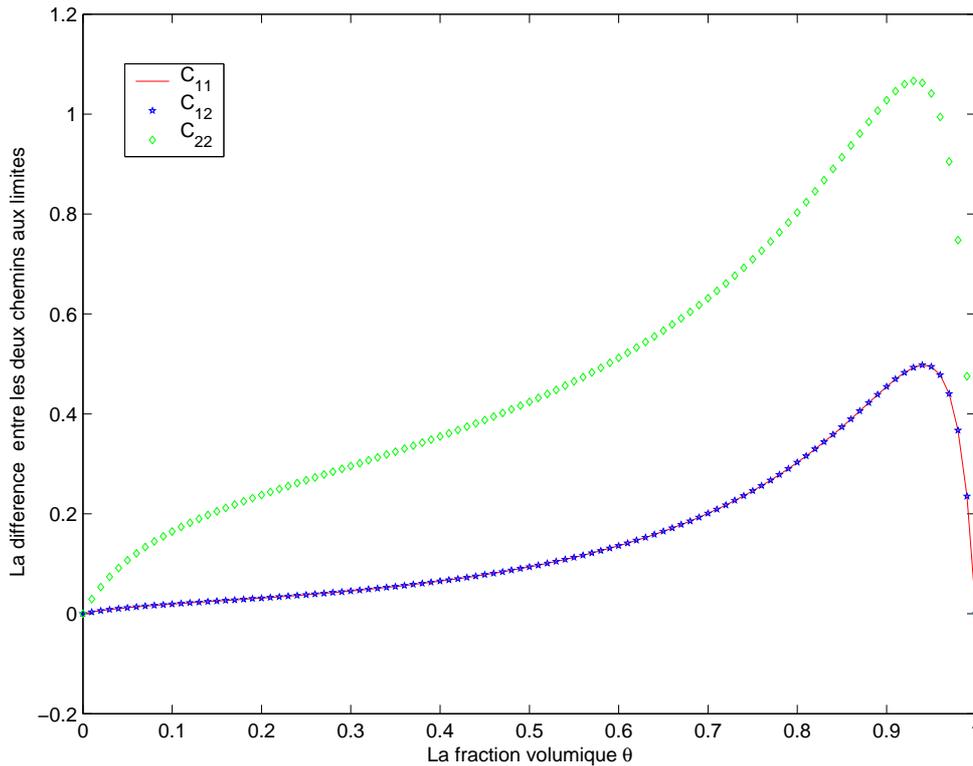


FIG. 6.16 – La comparaison entre les deux chemins des deux passages aux limites, $C_{ij} = \bar{\hat{C}}_{ij} - \hat{\bar{C}}_{ij}$.

Les deux premières figures montrent que les deux coefficients $\hat{\bar{C}}_{11}$ et $\bar{\hat{C}}_{11}$ (resp. $\hat{\bar{C}}_{12}$ et $\bar{\hat{C}}_{12}$) du tenseur d'élasticité effectif ont le même comportement quasi-linéaire en fonction de la variation de l'épaisseur de la couche piézoélectrique. Or, à partir de la troisième figure, les deux coefficients $\bar{\hat{C}}_{22}$ et $\hat{\bar{C}}_{22}$ du tenseur d'élasticité effectif ont la même variation non-linéaire, mais dans des proportions différentes.

Par conséquent, la fraction volumique dans ce modèle reste toujours un paramètre important, on constate aussi, que les deux chemins des deux passages aux limites nous donnent des résultats finaux différents.

Conclusions et perspectives

Dans la première partie du présent travail, nous avons étudié le comportement asymptotique de l'état électromécanique des structures piézoélectriques périodiquement perforées quand le paramètre des perforations tend vers zéro et ceci pour des structures bidimensionnelles ou tridimensionnelles. Cette étude a été faite par des méthodes d'homogénéisation périodique, notamment la méthode de la convergence à deux échelles et la méthode de l'éclatement périodique.

Dans la première étude, nous avons décrit le problème homogénéisé et le théorème de l'existence et de l'unicité de la solution, pour un corps piézoélectrique périodiquement perforé, en utilisant la convergence à double échelle. Nous avons déterminé les coefficients des tenseurs élastiques, piézoélectriques et diélectriques homogénéisés, ainsi que leurs propriétés. Nous avons aussi décrit le comportement asymptotique de l'énergie mécanique, électrique et totale. Ensuite, un résultat de correcteur pour le déplacement mécanique et le potentiel électrique a été obtenu, ce qui a permis d'avoir des convergences fortes.

Dans la seconde étude, nous avons déterminé le comportement asymptotique d'une plaque piézoélectrique mince homogène, isolée électriquement et périodiquement perforée, quand les paramètres d'épaisseur et la taille des perforations dans cet ordre tendent vers zéro. Après le premier passage à la limite et en adaptant les démonstrations faites par Rahmoune [75] et Sène [80], on obtient deux problèmes : membranaire et en flexion. En deuxième passage, on obtient pour chacun d'eux le problème homogénéisé correspondant, de même pour les résultats de l'existence et de l'unicité, ainsi que ceux des correcteurs correspondants et des tenseurs effectifs, et leurs propriétés. Cette étude pourrait s'adapter facilement, soit à des plaques non homogène mécaniquement, soit à des plaques non isolée électriquement, entre autre, des plaques dites de courts-circuité. L'ordre des tenseurs n'est pas pris en considération dans cette étude. Ce qui ouvre des perspectives de recherche en ajoutant l'hypothèse de Caillerie [17] pour les matériaux purement élastiques, c'est-à-dire en tenant compte que les coefficients des tenseurs ont des ordres de grandeur différents.

Finalement, en utilisant la technique de l'éclatement périodique récemment introduite par Cioranescu, Damlamian et Griso [24], nous avons traité le cas d'une coque piézoélectrique périodique de type Koiter, notamment le cas laminé. Pour se faire, on a homogénéisé le problème de Koiter établi par Haenel [42], dans un système de coordonnées curvilignes. Ainsi, nous avons également étudié les mêmes points évoqués précédemment pour l'étude de la coque en question.

Les résultats théoriques obtenus dans cette partie, nous ont permis de mieux comprendre les propriétés macroscopiques des matériaux piézoélectriques, notamment dans le cas des structures contenant une propriété de périodicité dans leurs géométries et une propriété de microscopie dans leurs structures.

Le présent travail dans son originalité constitue une réponse mathématique aux questions liées à l'étude de l'homogénéisation des structures piézoélectriques, notamment, la convergence. Les travaux ayant abordé ce problème dans le cas de structures laminées (voir Castillero *et al.* [19]) ou fibrées (voir les travaux de Feng et Wu [35], Ruan *et al.* [79] et les travaux de Telega *et al.* [14] [36] [87] [88] [89]) sont considérés, donc, comme des cas particuliers de notre étude.

Dans la partie numérique du présent travail, nous avons effectué une modélisation numérique pour des structures piézoélectriques bien précises telles que les structures perforées, les structures laminées et les structures laminées et perforées. Un code numérique basé sur la méthode des éléments finis a été développé. Ceci nous a permis d'appréhender les propriétés macroscopiques des structures en question. Dans le cas des matériaux piézoélectriques perforés dont les perforations sont sous forme cylindriques parallèles à l'axe d'épaisseur et dont les couplages électromécaniques sont plus simples tels que les matériaux piézoélectriques transversalement isotropes, une méthode analytique a été développée, ce qui nous a permis de déterminer analytiquement les expressions des tenseurs homogénéisés (effectifs).

Les tests numériques effectués dans les différentes configurations, ont montré que la fraction volumique représente un paramètre crucial des propriétés macroscopiques des matériaux piézocomposites, ceci quelle que soit la distribution des perforations choisie (carrée ou hexagonale). Egalement, pour une application en hydrophonie ou en imagerie biomédicale, une distribution carrée se montre meilleure qu'une distribution hexagonale. En effet, on fait croire le facteur du couplage électromécanique ($\bar{k}_t \simeq 0.6 - 0.7$) pour une valeur réduite de l'impédance acoustique ($\bar{Z} \simeq 17.5 \text{ Mrayl}$).

Après un aperçu sur les propriétés macroscopiques des matériaux piézocomposites laminés, nous avons proposé un nouveau modèle d'un matériau piézocomposite bilaminé périodiquement perforé. Les performances réalisées par ce modèle montrent son efficacité dans la fabrication des senseurs intelligents destinés à l'hydrophonie ou à l'imagerie biomédicale de haute qualité dans les rayons X. Nous avons confirmé le choix de prototype proposé par Preumont *et al.* [73] [74], pour des utilisations en filtrage spatial. Finalement, en prenant une structure piézocomposite bilaminée de type 2 – 2, nous avons mis en évidence l'effet de l'ordre de convergence entre l'épaisseur et le paramètre de la périodicité.

À partir des résultats théoriques obtenus et des méthodes numériques développées (la méthode des éléments finis et la technique analytique), de nombreuses autres situations peuvent être envisagées :

- L'étude des propriétés effectives et de l'optimalité dans le cas de la piézothermoélasticité, qui consiste à considérer un couplage des champs électrique et thermique avec le vecteur de déplacement mécanique (pour plus de détails, on pourra consulter Levin *et al.* [48]).
- L'étude du problème d'une coque élastique munie de composants piézoélectriques ou d'une coque stratifiée ayant des couches piézoélectriques (Rahmoune [75], Castillero *et al.* [19]).

D'un autre côté, cette recherche peut s'étendre à l'étude de l'homogénéisation des matériaux dits intelligents entre autre les matériaux magnétostrictifs (Kalmkarov et Georgiades [44]). Ainsi cela servira à mieux comprendre le comportement macroscopique d'une structure composée d'une couche de petites pastilles piézocéramiques intégrées dans un composite (on pourra consulter les travaux de Rahmoune [75], de Canon et Lenczner [18] et de Telega *et al.* [14] [36] [87] [88] [89]).

Les deux approches : théorique et numérique, de ce travail de recherche s'appliquent notamment, en théorie du contrôle, dont :

- Le contrôle des tenseurs homogénéisés dans les structures piézocomposites fibrées (voir Gibiansky et Torquato [39]), laminées ou perforées.
- L'optimisation de l'emplacement et de la forme d'actionneurs piézoélectriques sur une structure élastique (voir Rahmoune [75]).

Comme des perspectives qui pourront être sous forme d'un prolongement de cette étude, citons

- L'étude des propriétés macroscopiques et l'optimisation de forme des matériaux dits intelligents, entre autre des matériaux magnétostrictifs (voir Kalamkarov et Georgiades [44]). En effet, ces matériaux ont une loi de comportement presque analogue à la loi de comportement des matériaux piézoélectriques.
- L'étude des plaques comportant des films piézoélectriques et des couches élastiques (voir Rahmoune [75]). L'optimisation des actionneurs pour le contrôle de torsion des pâles.
- L'homogénéisation des composites thermostrostructuraux, ainsi que pour le comportement des céramiques ferroélectriques et ferroélastiques.
- L'étude des problèmes liés aux contrôles actifs ou passifs des vibrations et la détermination des modes propres de vibration des plaques piézoélectriques multicouches, à la fois pour les fréquences de résonance et d'antirésonance.
- L'étude des ondes guidées ou les ondes de surfaces dans les matériaux piézocomposites laminés (voir Nayfeh [61] et Otero *et al.* [67]).

Bibliographie

- [1] ALLAIRE G. (1991). *Homogénéisation et convergence à deux échelles. Application à un problème de convection diffusion*, C. R. Acad. Sci. Paris, 312. Série I, pp. 581-586.
- [2] ALLAIRE G. (1992). *Homogenization and two scale-convergence*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 23(26), pp. 1482-1518.
- [3] ALLAIRE G., BRIANE M. (1996). *Multiscale convergence and reiterated homogenization*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 126, pp. 297-342.
- [4] ALLAIRE G., MURAT F. (1993). *Homogenization of the Neumann problem with noisolated holes* . Asym. Analysis (7), pp. 81-95.
- [5] AGBOSSOU A., RICHARD C., VIGIER Y. (2003). *Segmented piezoelectric fiber composite for vibration control : fabricating and modeling of electromechanical properties*. Comp. Sci. Tech. 63, pp. 871-881.
- [6] ARBOGAST T., DOUGLAS J., HORNUNG U. (1990). *Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory*. SIAM J. Math. Anal. Vol. 21, pp. 823-836.
- [7] AVELLANEDA M., SWART P.J. (1998). *Calculating to performance of 1-3 piezoelectric composites for hydrophone applications: an effective medium approach*. J. Acoust. Soc. Ame. 103, pp. 1449-1467.
- [8] BANKS H.T., SMITH R.C., WANG Y. (1996). *Smart Material Structures : Modeling, Estimation and Control*, Masson, Wiley.
- [9] BEGIS D., DUVAUT G., HASSIM A. (1981). *Homogénéisation par éléments finis des modules de comportements élastiques de matériaux composites*. Rap. Recherche INRIA. 101.
- [10] BENSOUSSAN A., LIONS J.L., PAPANICOLAOU G. (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam.
- [11] BERGER H., GABBET U., KÖPPE H., RODRIGUEZ-RAMOS R., BRAVO-CASTILLERO J., GUINOVAR-TIAZ R., OTERO J.A., MAUGIN G.A. (2003). *Finite element and asymptotic homogenization methods applied to smart composite materials*. Comp. Mech. Vol. 33, pp 61-67.
- [12] BERNADOU M. (1994). *Méthodes d'Eléments Finis pour les Problèmes de Coques Minces*, Masson, Paris.
- [13] BERNADOU M., HAENEL CH. (1999). *Numerical analysis of piezoelectric shells, in Plates and shells*. M. Fortin ed., CRM Proc. Lectures Notes, 21, pp. 55-63, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [14] BIELSKI W., TELEGA J.J., WOJNAR R. (1999). *Nonstationary flow of a viscous fluid through a porous elastic medium : Asymptotic analysis and two-scale convergence*. Mech. Res. Comm. Vol. 26(5), pp. 619-628.

- [15] BRAVO-CASTILLERO J., GUINOVART-DÍAZ R., SABINA F.J., RODRÍGUEZ-RAMOS R. (2001). *Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents-II. Piezoelectric and square symmetry*. Mechanics of Materials, 33, pp. 237-248.
- [16] CAILLERIE D. (1982). *Etude de quelques problèmes de perturbation en théorie de l'élasticité et de la conduction thermique*. PhD thesis, University of Paris VI.
- [17] CAILLERIE D. (1987). *Models of thin plates and membranes derived from linear elasticity, Application of multiple scaling in mechanics*. Ciarlet P.G and Sanchez-Palencia E (Eds). RMA 4, Masson, Paris.
- [18] CANON E., LENCZNER M. (1997). *Models of elastic plates with piezoelectric inclusions Part I: Models without homogenization*. Math. Comput. Modeling, Vol. 26(5), pp. 79-106.
- [19] CASTILLERO J.B., OTERO J.A., RAMOS R.R., BOURGEAT A. (1998). *Asymptotic homogenization of laminated piezocomposite materials*, Int. J. Solids Structures. Vol. 35, pp. 527-541.
- [20] CIARLET P.G. (1980). *A justification of the von Karman equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. 73, pp. 349-389.
- [21] CIARLET P.G. (1998). *Mathematical Elasticity, Vol. I: Three-Dimensional Elasticity*. Series "Studies in Mathematics and its Applications", North-Holland, Amsterdam.
- [22] CIARLET P.G. (1990). *Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures*, RMA 14, Masson, Paris. Springer-Verlag, Berlin.
- [23] CIARLET P.G. (1997). *Mathematical Elasticity, Vol II: Theory of Plates*. Series "Studies in Mathematics and its Applications", North-Holland, Amsterdam.
- [24] CIORANESCU D., DAMLAMIAN A., GRISO G. (2002). *Periodic unfolding and homogenization*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.I 335. pp. 99-104.
- [25] CIORANESCU D., SAINT JEAN-PAULIN J. (1979). *Homogenization in open sets with holes*. J. Math. Anal. Appl., pp. 590-607.
- [26] CIORANESCU D., SAINT JEAN-PAULIN J. (1989). *Asymptotic analysis for elastic grid-works*. Preprint 98008. Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI.
- [27] CIORANESCU D., DONATO P. (1999). *An Introduction to Homogenization*. Oxford Lecture Series in Math. Appl., Vol. 17, Oxford University Press.
- [28] COLLARD CH. (2001). *Modélisation de coques élastiques minces géométriquement non linéaires et application à la piézoélectricité*, PhD thesis, University of Paris VI.
- [29] DAUTRAY R., LIONS J.L. (1984). *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*. Masson, Paris.
- [30] DIEULESAINT E., ROYER D. (1974). *Ondes Élastiques dans les Solides. Application au Traitement du Signal*. Masson.
- [31] DUNN M.L., TAYA M. (1992). *Micromechanics predictions of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites*, Computers and Structures, 30(2), pp. 161-175.
- [32] EKELAND I., TEMAM R. (1974). *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels*. Dunod-Gauthier Villars, Paris.
- [33] EL-HAJJI M. (1998). *Homogénéisation de problèmes linéaires de diffusion et d'élasticité dans des ouverts perforés*. PhD thesis, University of Rouen.
- [34] ENE A., SAINT JEAN PAULIN J. (1996). *On a model of fractured porous media*, Publications Dép. Math. Université de Metz.

- [35] FENG M.L., WU C.C. (2001). *A study of three-dimensional four-step braided piezo-ceramic composites by the homogenization method*, Comp. Scien. Tech, 61, pp. 1889-1898.
- [36] GALKA A., TELEGA J.J., WOJNAR R. (1992). *Homogenization and thermopiezoelectricity*. Mech. Res. Comm. 19(4), pp. 315-324.
- [37] GHERGU M., GRISO G., MECHKOUR H., MIARA B. (2005). *Homogénéisation de coques minces piézoélectriques perforées*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser II : Mécanique. 333. *In press*.
- [38] GHERGU M., GRISO G., MECHKOUR H., MIARA B. (2005). *Homogenization of thin piezoelectric structures*. *To appear*.
- [39] GIBIANSKY L.V., TORQUATO S. (1997). *On the use of homogenization theory to design optimal piezocomposites for hydrophone applications*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 45, pp. 689-708.
- [40] GUINOVART-DÍAZ R., BRAVO-CASTILLERO J., RODRÍGUEZ-RAMOS R., MARTÍNEZ-ROSADO M. (2001). *Overall properties of piezocomposites materials 1-3*. Materials Letters 48, pp. 93-98.
- [41] GUINOVART-DÍAZ R., BRAVO-CASTILLERO J., RODRÍGUEZ-RAMOS R., MARTÍNEZ-ROSADO R., SERRANIA F., NAVARRETE M. (2002). *Modeling of elastic transversely isotropic composite using the asymptotic homogenization method. Some comparisons with other models*. Materials Letters, Vol. 56(6), pp. 889-894.
- [42] HAENEL CH. (2000). *Analyse et simulation numérique de coques piézoélectriques*. PhD thesis, University of Paris VI.
- [43] KALAMKAROV A.L., KOLPAKOV A.G. (2001). *A new asymptotic model for a composite piezoelectric plate*, Int. J. Solids Structures. Vol. 38, pp. 6027-6044.
- [44] KALAMKAROV A.L., GEORGIADIS A.V. (2002). *Modeling of smart composites on account of actuation, thermal conductivity and hygroscopic absorption*, Comp Part: B, Vol. 33, pp. 141-152.
- [45] KAUFFMANN R. (1994). *Contribution à l'étude de quelques problèmes sur des ouverts ondulés et des plaques perforées*. PhD thesis, University of Metz.
- [46] KAUFFMANN R., SAINT JEAN-PAULIN J. (1997). *Elasticity of a perforated plate with very different elasticity coefficients*. GAKUTO International Series Math. Sci. Appl, Vol. 9, pp. 225-239.
- [47] LÉNÉ F. (1984). *Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement*. PhD thesis, University of Paris VI.
- [48] LEVIN V.M., RAKOVSKAYA M.I., KREHER W.S. (1999). *The effective thermo-electroelastic properties of microinhomogeneous materials*. Int. J. Solids Structures, Vol. 36, pp. 2683-2705.
- [49] LEWIŃSKI T., TELEGA J.J. (2000). *Plates, Laminates and Shells Asymptotic Analysis and Homogenization*. World Scientific. Singapore.
- [50] LIONS J.L. (1969). *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires*. Dunod.
- [51] LU P., CHEN H., TAN M.J., LIEW K.M. (1999). *Influence of cavity boundary conditions on the effective electroelastic moduli of piezoelectric ceramic with cavities*. Mech. Res. Comm, Vol. 26(2), pp. 229-238.
- [52] MAUGIN G.A., ATTOU D. (1990). *An asymptotic theory of thin piezoelectric plates*. Q. J. Mech. Appl. Math. Vol. 43(3), pp. 347-362.

- [53] MECHKOUR H. (2002). *The exact expressions for the roots of Rayleigh wave equation*, Proceedings of The Second International Colloquium of Mathematics and Numerical Physics (MENP-2). Geometry Balkan Press. V. Balan and C. Udriste (Eds.), pp. 96-104.
- [54] MECHKOUR H., MIARA B. (2002). *Modelling and control of piezoelectric perforated structures*, Proceedings of The Third World Conference On Structural Control. John Wiley, Chichester. F. Casciati : Editor. Vol 3, pp. 329-336.
- [55] MECHKOUR H. (2003). *Approche microscopique des matériaux piézocomposites laminés : Calcul des coefficients effectifs*. Proceedings of The Four European Conference On Numerical Methods In Electromagnetism (NUMELEC'03), pp. 47-49.
- [56] MECHKOUR H. (2005). *Homogenization of perforated piezoelectric domains*. In preparation.
- [57] MECHKOUR H. (2005). *Asymptotic behavior and homogenization of a thin linearly perforated piezoelectric plates*. In preparation.
- [58] MEGUID S.A., KALAMKAROV A.L. (1994). *Asymptotic homogenization of elastic composite materials with a regular structure*. Int. J. Solids Structures, Vol. 31, pp. 303-306.
- [59] MIARA B. (2001). *Contrôlabilité d'un corps piézoélectrique*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I. 333, pp. 267-270.
- [60] NABIL A. (1998). *Homogénéisation de l'équation de la chaleur et des ondes et application à la contrôlabilité approchée*. PhD thesis, University of Paris VI.
- [61] NAYFEH A.H. (1995). *Wave propagation in layered anisotropic media with application to composites*. Elsevier, Amsterdam.
- [62] NELLI-SILVA E.C., ONO FONSECA J.S., KIKUCHI N. (1998). *Optimal design of peiodic piezocomposites*. Comp. Meth. Appl. Engrg. 159, pp. 49-77.
- [63] NEVES M.M., RODRIGUES H., GUEDES J.M. (2000). *Optimal design of periodic linear elastic microstructures*. Comp. Struc. 76. pp. 421-429.
- [64] NGUETSENG G. (1989). *A general convergence result for a fonctionnal related to the theory of homogenization*, SIAM. J. Math. Anal. Vol. 20(3), pp. 608-623.
- [65] OHAYON R. (1992). *Structures intelligentes*, Journées Science et Défence, pp. 102-127, Dunod, Paris.
- [66] OLEINIK O.A., SHAMAEV G.A., YOSIFIAN G.A. (1992). *Mathematical problems in elasticity and homogenization*, North Holland, Amsterdam.
- [67] OTERO J.A., RODRÍGUEZ-RAMOS R., MONSIVAIS G., PÉREZ-ALVAREZ R. (2004). *Dynamical behavior of a layered piezocomposite using the asymptotic homogenization method*. Mech. Materials, to appear.
- [68] PASTOR J. (1997). *Homogenization of linear piezoelectric media*. Mech. Res. Comm. Vol. 24(2), pp. 145-150.
- [69] PENG X., CAO J. (2002). *A dual homogenization and finite element approach for material characterization of textile composites*. Composites: Part B 33, pp. 45-56.
- [70] PIEFORT V. (2001). *Finite element modeling of piezoelectric active structures*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles.
- [71] POIZAT C., SESTER M. (1999). *Effective properties of composites with embedded piezoelectric fibres*. Comp. Materials Science (16), pp. 89-97
- [72] POIZAT C., SESTER M. (2001). *Homogénéisation périodique de composites piézoélectriques 0-3 : influence de la distribution*. Revue Comp. Matériaux Avancées, Vol. 11(1), pp. 65-77.

- [73] PREUMONT A., FRANÇOIS A., DE MAN P. (2002). *Spatial filtering with piezoelectric films via porous electrode design*. Proceedings of The 13th International Conference on Adaptive Structures and Technologies, October 7-9, Berlin, Germany.
- [74] PREUMONT A., FRANÇOIS A., DE MAN P., PIEFORT V. (2003). *Spatial filters in structural control*. J. Soun. Vibr. Vol. 265, pp. 61-79.
- [75] RAHMOUNE M. (1998). *Plaques intelligentes piézoélectriques, modélisation et application au contrôle santé*. PhD thesis, University of Paris VI.
- [76] RAOULT A., SÈNE A. (2002). *Modelling of piezoelectric plates including magnetic effects*. Rapport de Recherche RR 1046-M-, LMC, Université de Grenoble I.
- [77] RODRÍGUEZ-RAMOS R., SABINA F.J., GUINOVARTE-DÍAZ R., BRAVO-CASTILLERO J. (2001). *Colosed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents-I. Elastic and square symmetry*, Mechanics of Materials 33, pp. 223-235.
- [78] ROHAN E. (2003). *Sensitivity strategies in modelling heterogeneous media undergoing finite deformation*. Math. Comp. Simu. 61, pp. 261-270.
- [79] RUAN X., SAFARI A., CHOU T.W. (1999). *Effective elastic, piezoelectric and dielectric properties of braided fabric composites*, Comp Part A 30, pp. 1435-1444.
- [80] SÈNE A. (1999). *Modélisation asymptotique de plaques : Contrôlabilité exacte frontière, piézoélectricité*. PhD thesis, University of Grenoble I.
- [81] SHANCHEZ-PALENCIA E. (1980). *Non Homogeneous Media and Vibration Theory*. Lectures Notes in Physics 127. Springer-Verlag, Berlin.
- [82] SHANCHEZ-HUBERT J., SHANCHEZ-PALENCIA E. (1992). *Introduction aux Méthodes Asymptotiques et à l'Homogénéisation*. Masson, Paris.
- [83] SIGMUND O., TORQUATO S., AKSAY I.A. (1998). *On the design of 1-3 piezocomposites using topology optimisation*. J. Mater. Res. Vol. 13, No 4, pp. 1038-1048.
- [84] SUN H., DI S., ZHANG N., WU C. (2001). *Micromechanics of composite materials using multivariable finite elements method and homogenization theory*. Int. J. Solids Structures, Vol. 38, pp. 3007-3020.
- [85] TARTAR L. (1977). *Cours Peccot au Collège de France* (unpublished).
- [86] TARTAR L. (1978), *Topics in nonlinear analysis*, Publications Mathématiques d'Orsay 78.13, Université de Paris-Sud.
- [87] TELEGA J.J. (1991). *Piezoelectricity and homogenization. Application to biomechanic*, In: G.A. Maugin (Ed.), Continuum Models and Discrete Systems, Vol. 2. Longman, Harlow, Essex, pp. 220-229.
- [88] TELEGA J.J., WOJNAR R. (2000). *Flow of electrolyte through porous piezoelectric medium: macroscopic equations*. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série II b, pp. 225-230.
- [89] TELEGA J.J., BYTNER S. (2002). *Piezoelectricity with polarisation gradient: homogenization*. Mech. Res. Comm. 29, pp. 53-59.
- [90] TIERSTEN H.F. (1969). *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*. Plenum Press, New York.
- [91] WELLER T., LICHT C. (2002). *Analyse asymptotique de plaques minces linéairement piézoélectriques*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.I 335, pp. 309-314.
- [92] WOJNAR R. (1997). *Homogenization of piezoelectric solid and thermodynamics*. Reports Math. Phys. Vol. 40, pp. 585-598.
- [93] ZOUBAIRI H. (2001). *Homogénéisation et contrôl optimal pour des problèmes de Stokes et pour un problème de torsion élastique*. PhD thesis, University of Metz.

PUBLICATIONS DE LA THÈSE

1. GHERGU M., GRISO G., MECHKOUR H., MIARA B. (2005). *Homogénéisation de coques minces piézoélectriques perforées*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser II : Mécanique. 333. In press.
2. GHERGU M., GRISO G., MECHKOUR H., MIARA B. (2005). *Homogenization of thin piezoelectric structures*. To appear.
3. MECHKOUR H. (2002). *The exact expressions for the roots of Rayleigh wave equation*, Proceedings of The Second International Colloquium of Mathematics and Numerical Physics (MENP-2). Geometry Balkan Press. V. Balan and C. Udriste (Eds.), pp. 96-104.
4. MECHKOUR H., MIARA B. (2002). *Modelling and control of piezoelectric perforated structures*, Proceedings of The Third World Conference On Structural Control. John Wiley, Chichester. F. Casciati : Editor. Vol 3, pp. 329-336.
5. MECHKOUR H. (2003). *Approche microscopique des matériaux piézocomposites laminés : Calcul des coefficients effectifs*. Proceedings of The Four European Conference On Numerical Methods In Electromagnetism (NUMELEC'03), pp. 47-49.
6. MECHKOUR H. (2005). *Homogenization of piezoelectric perforated structures*. To appear.
7. MECHKOUR H. (2005). *Asymptotic behavior and homogenization of a thin linearly perforated piezoelectric plates*. In preparation.

RÉSUMÉ

Homogénéisation et simulation numérique de structures piézoélectriques perforées et laminées

Cette thèse est consacrée à l'étude asymptotique et l'homogénéisation de l'équation de la piézoélectricité, dans le cas de coefficients rapidement oscillants et des structures périodiquement perforées. L'étude consiste à développer deux approches; théorique et numérique. Dans l'approche théorique, on établit le problème homogénéisé et les tenseurs effectifs, ainsi que leurs propriétés pour une structure tridimensionnelle perforée, quand la période tend vers zéro. En se basant sur la même méthodologie, on traite le cas d'une plaque mince et d'une coque de Koiter périodiques, lorsque l'épaisseur et la période tendent vers zéro.

Le deuxième volet comporte la simulation numérique du comportement macroscopique de quelques structures piézoélectriques particulières, en l'occurrence : le piézocomposite perforé et le piézocomposite laminé. Cette simulation trouve un intérêt pour de nouvelles applications dans ce type de structures, notamment l'hydrophonie, l'imagerie biomédicale et le contrôle des vibrations (filtrage spatial).

Mot clés. piézoélectrique, piézocomposite, élasticité, analyse asymptotique, homogénéisation, domaines perforés, convergence à deux échelles, méthode de l'éclatement périodique, coques de Koiter.

ABSTRACT

Homogenization and numerical simulation for perforated and laminated piezoelectric structures

This thesis is dedicated to the study of the piezoelectricity equation, with rapidly oscillating material coefficients and for the periodic perforated structures. In this thesis we have prospected two approaches; the theoretical and the numerical one. In the theoretical approach, we establish the homogenized problem and the effective tensors. We also show the properties of these tensors for a three-dimensional perforated structure as the period tends towards zero. Using the same method, we deal with the case of a perforated thin plate and a periodic Koiter-type shell, when the thickness and the period tend towards zero.

The concern of the second constituent of this thesis is the digital simulation of the macroscopic behavior of some particular piezoelectric structures, in the particular: the perforated piezocomposite and the piezocomposite laminated. The results of these simulations open the door to new perspectives, in particular, biomedical imagery, hydrophonic and the vibrations control (spatial filters) applications.

Key words. piezoelectric, piezocomposite, elasticity, asymptotic analysis, homogenization, perforated domains, two-scale convergence, periodic unfolding method, Koiter shells.
