



Sur les toupies et les p -sphères de contact

Mathias Zessin

► **To cite this version:**

Mathias Zessin. Sur les toupies et les p -sphères de contact. Mathématiques [math]. Université de Haute Alsace - Mulhouse, 2004. Français. tel-00008469

HAL Id: tel-00008469

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00008469>

Submitted on 12 Feb 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE HAUTE ALSACE
et
UNIVERSITÄT BASEL

Année 2004

N° d'ordre : 04MULH0782/26

THÈSE en Cotutelle

présentée pour l'obtention des titres de

Docteur en Mathématiques
et
Doktor der Philosophie

par

Mathias ZESSIN

sous la direction de

Prof. N. A'Campo et de **Prof. R. Lutz**

Sur les toupies et les p -sphères de contact

Soutenue le vendredi 10 décembre 2004 devant la Commission d'Examen :

MM. M. Goze (Président)
N. A'Campo
H. Geiges (Rapporteur)
Mme A. Iozzi
MM. J. Lafontaine (Rapporteur)
R. Lutz

Table des matières

1	Introduction	1
2	Généralités et rappels	3
2.1	Notions de géométrie de contact	3
2.2	p -sphères de contact	4
2.3	Quelques outils	6
3	Rondeur et raideur	8
3.1	Définition et exemples	8
3.2	Rond \Leftrightarrow raide en dimension 3	10
3.3	Rondeur et raideur en dimension supérieure	12
4	Théorie invariante des cercles et sphères de contact	14
4.1	Ensembles singuliers et fibrations nouées	14
4.2	Cercles de contact invariants en dimension 3	19
4.3	Sphères de contact invariantes en dimension 3	20
4.4	Construction d'exemples	21
5	Toupiques de contact en dimension 3	24
5.1	Toupiques de contact	24
5.2	Métriques pivotantes	37
5.3	Métriques compatibles avec une toupie de contact donnée	45
5.4	Problèmes d'unicité et de classification	46
6	Existence et non-existence en dimension supérieure à 3	50
6.1	Non-existence de p -sphères de contact en dimension $4n + 1$	50
6.2	Exemples de p -sphères de contact en dimension supérieure à 3	51
6.3	Sphères de contact et 3-structures de Sasaki	53
7	Cercles et sphères de contact sur des groupes de Lie	56
7.1	Groupes de Lie de dimension 3	56
7.2	Groupes de Lie de dimension 7	60
8	Conclusion et perspectives	73

Remerciements

Je profite de l'occasion que me donne la présentation de ce travail pour remercier tous ceux qui m'ont aidé à la préparation de ma thèse et qui ont été importants pour moi pendant ces quatre années.

J'aimerais remercier en premier lieu mon Maître et ami Robert Lutz. Je suis arrivé à Mulhouse en octobre 2000, sans connaître personne, après un simple échange de mail et un coup de téléphone. J'ai été accueilli avec une chaleur et une hospitalité qui m'ont étonnées et fortement touchées. Depuis, Robert m'a consacré un nombre incalculable d'heures, il m'a transmis une grande partie de sa pensée topologique et géométrique et, dès le début, il m'a prodigué son amitié.

J'ai eu la chance d'avoir un autre directeur de thèse, Norbert A'Campo, qui m'a accueilli et accepté comme élève sans me connaître. Il a toujours été chaleureux et disponible pour donner des pistes de réflexion et pour faire avancer le travail. Je lui suis aussi reconnaissant de m'avoir donné un poste de recherche à l'université de Bâle pour cette année.

Un grand merci à Michel Goze pour des explications patientes et des réponses à de nombreuses questions algébriques. Je me souviens d'un certain nombre d'apparitions dans le bureau le samedi matin, alors que Robert et moi étions en train de discuter de cercles de contact. Chacune de ces visites a enrichi mon travail d'une remarque judicieuse ou d'une idée originale. Je suis heureux qu'il ait accepté de faire partie de mon jury.

Merci aussi à tous les membres du labo qui se sont intéressés à mon travail. Je pense particulièrement à Théodore Hangan, Amine Hadjar, Martin Bordemann et Tewfik Sari. Leurs questions et remarques ont toujours été très stimulantes pour la suite de ma recherche.

Je suis très honoré que les professeurs Jacques Lafontaine et Hansjörg Geiges aient accepté d'être à la fois rapporteur et membre du jury. Je les remercie pour le travail considérable qu'ils ont fourni pour cela. Je remercie également Mme Alessandra Iozzi d'avoir accepté de participer au jury, malgré le temps que cela lui demande.

Je ne me serais probablement pas engagé dans cette voie sans mon père et

Sylvie, qui m'ont donné le goût des mathématiques dès mon plus jeune âge et qui m'ont toujours soutenu et encouragé. Je suis très heureux qu'ils puissent venir pour assister à ma soutenance.

Mes frères et sœurs Philipp, Elsa, Rosa et André, eux aussi, m'ont aidé à leur façon pendant la préparation de ce travail.

Mes amis m'ont toujours été d'une grande aide, qu'ils m'encouragent directement ou qu'ils soient juste là, en tant qu'amis. Je pense aux «mathématiciens» Jean-Paul, Nicolas, Stéphane, Masaharu et aux «non-mathématiciens» comme Bertram, Arne, Vinzenz, Nicolas ...

Ma plus grande reconnaissance va vers Anne-France, pour tout ce qu'elle me donne et ce qu'on partage, pour sa présence et son soutien.

Mulhouse, le 10 décembre 2004.

Zusammenfassung

In meiner Doktorarbeit werden Kontaktkreise und allgemeiner Kontakt- p -Sphären unter topologischen, geometrischen und algebraischen Gesichtspunkten untersucht. Eine Kontakt- p -Sphäre ist die Menge der normalisierten Linearkombinationen von $p + 1$ Kontaktformen, wenn all diese Linearkombinationen Kontaktformen sind.

Im ersten Teil betrachten wir invariante Kontakt- p -Sphären auf Prinzipalbündeln mit Faser S^1 . Wir entwickeln Methoden, um ihre topologische Struktur zu untersuchen und wir klassifizieren die Prinzipalbündel der Dimension 3 (mit Faser S^1), auf denen es invariante Kontaktkreise bzw. Kontaktsphären gibt. Wir konstruieren auch Beispiele auf allen solchen Prinzipalbündeln, wo das möglich ist. Die Methoden dieses Teils sind inspiriert von R. Lutz' Arbeiten aus den 70er Jahren.

Im geometrischen Kapitel betrachten wir nur 3-Mannigfaltigkeiten. Auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit betrachten wir die Menge der Kontaktstrukturen der Elemente eines Kontaktkreises. Diese Kontaktstrukturen definieren in jedem Punkt ein Ebenenbüschel, das durch den Kreis indiziert ist, der den Kontaktkreis parametrisiert. Das Verhalten dieses indizierten Ebenenbüschels bezüglich der Metrik weist in bestimmten Beispielen (insbesondere auf S^3) erstaunliche Regularitätseigenschaften auf. Wir definieren Kontaktbüschel und Kontaktkreise und studieren sie systematisch. Wir erhalten so eine Klassifizierung der 3-Mannigfaltigkeiten, auf denen es Kontaktkreise gibt. Ausserdem beschreiben wir die Metriken, für die es Kontaktkreise auf einer Mannigfaltigkeit geben kann. Wir erhalten auch verschiedene Ergebnisse über Eindeutigkeit und Klassifizierung von Kontaktkreisen auf gewissen riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Im algebraischen Teil betrachten wir Lie-Gruppen der Dimensionen 3 und 7, auf denen es linksinvariante Kontakt- p -Sphären gibt, für verschiedene Werte von p . Dazu suchen wir Kontakt- p -Sphären auf den entsprechenden Lie-Algebren. Wir beweisen unter anderem, dass die einzige Lie-Algebra der Dimension 3, auf der es eine Kontaktsphäre gibt, $\mathfrak{so}(3)$ ist, und dass es in Dimension 7 auf keiner Lie-Algebra eine Kontakt-5-Sphäre gibt (ausser auf nicht algebraischen auflösbaren Algebren, für die die Frage noch offen ist). Wir konstruieren auch eine Anzahl von Beispielen von Kontakt- p -Sphären auf

7-dimensionalen Lie-Algebren.

Was höherdimensionale Mannigfaltigkeiten angeht, so zeigen wir, dass es in Dimension $4n + 1$ keine Kontakt- p -Sphären für $p \geq 1$ gibt. Wir beweisen, dass es auf $(4n - 1)$ -dimensionalen Sphären immer wenigstens eine Kontaktsphäre gibt (genauer gesagt eine Kontakt- $(\rho(4n) - 1)$ -Sphäre, wobei ρ die Zahl von Adams ist) und wir geben entsprechende Beispiele.

Chapitre 1

Introduction

Dans ce travail, nous présentons une étude concernant les p -sphères de contact et en particulier les cercles et sphères de contact sous différents points de vue : une étude topologique des p -sphères de contact invariantes sur un fibré principal en cercles, une étude géométrique des p -sphères de contact adaptées à une métrique sur une variété riemannienne (*toupiés de contact*) et une étude algébrique des p -sphères de contact invariantes sur un groupe de Lie.

Le concept de cercle et de sphère de contact à été introduit par H. Geiges et J. Gonzalo. Ce dernier montre en 1987 que toute variété fermée et orientable de dimension 3 admet trois formes de contact partout linéairement indépendantes (cf. [10]). Puis H. Geiges et J. Gonzalo introduisent la notion de sphère de contact (cf. [7]). Pour eux, une sphère de contact est un triplet de formes de contact dont toutes les combinaisons linéaires normalisées sont encore des formes de contact et un cercle de contact est une paire de formes qui a cette propriété. Ils étudient la topologie des cercles et sphères de contact sur des variétés de dimension 3. Dans cette thèse, nous rajoutons des structures supplémentaires de nature topologique, géométrique ou algébrique et nous étudions des problèmes d'existence et de classification correspondants.

Le présent travail s'organise de la manière suivante. Dans la deuxième partie, nous donnons un aperçu des résultats obtenus précédemment dans le domaine des cercles et sphères de contact par H. Geiges et J. Gonzalo, notamment que toute variété fermée et orientable de dimension 3 admet un cercle de contact. Ils ont étudié particulièrement la classe spécifique de cercles et sphères de contact appelés *taut*, ce que nous traduirons par *raïde*, caractérisée par le fait que toutes les formes génératrices définissent la même forme volume. Ils ont obtenus des classifications concernant les variétés fermées et orientables de dimension 3 qui admettent respectivement des cercles de contact raïdes et des sphères de contact raïdes.

Dans une troisième partie, nous définissons le concept de p -sphère de contact sur des variétés de dimension quelconque et nous introduisons une nouvelle propriété de régularité les concernant que nous appellerons *rondeur*.

Nous démontrons que la rondeur est équivalente à la raideur en dimension 3, mais qu'en dimension supérieure les deux notions sont indépendantes.

La quatrième partie est consacrée à l'étude des p -sphères de contact invariantes, et en particulier des cercles et sphères de contact invariants, sur des fibrés principaux en cercles. Nous adaptons à notre sujet des méthodes qui ont été développées par R. Lutz et qui furent efficaces lors de la construction des premières formes de contact sur \mathbb{T}^5 (cf. [14]). Ces méthodes nous sont particulièrement utiles pour construire de nouvelles classes d'exemples. Nous résolvons la question suivante : quels sont les fibrés principaux en cercles au-dessus d'une surface fermée, connexe et orientable qui admettent des cercles, resp. des sphères de contact invariantes par l'action du cercle? Nous construisons également des exemples de cercles et sphères de contact invariants sur tous les fibrés principaux en cercles de dimension 3 sur lesquels il peut en exister.

Dans la cinquième partie on aborde l'étude des cercles de contact sous un aspect géométrique. On se place sur une variété riemannienne de dimension 3 et on examine les propriétés et les régularités qu'un cercle de contact peut avoir par rapport à la métrique. On introduit ainsi le concept de *toupie de contact* dont on fait une étude systématique. On caractérise notamment les variétés qui peuvent admettre des toupies de contact ainsi que les métriques pour lesquelles il peut y avoir des toupies de contact sur ces variétés. On donne également une classification des toupies de contact sur une variété riemannienne, lorsqu'elle est à courbure non constante ou à courbure constante positive. Les techniques que nous utilisons dans cette partie proviennent de la géométrie différentielle.

Le sujet de la sixième partie est la généralisation des thèmes traités précédemment aux dimensions supérieures à 3 et la construction d'exemples et de contre-exemples. Nous montrons notamment qu'il n'y a pas de p -sphères de contact (pour $p > 0$) sur les variétés de dimension $4n + 1$. Nous étudions des exemples de p -sphères de contact sur les sphères \mathbb{S}^{4n-1} . On peut généraliser le concept de toupie de contact en dimension supérieure. Toutefois, comme la généralisation aux dimensions supérieures à 3 des régularités géométriques qui définissent les toupies de contact est très complexe, nous ne développons pas ce problème dans le présent travail. Il fera le sujet d'une étude ultérieure.

La septième partie de cette thèse traite des p -sphères de contact invariantes sur les groupes de Lie. On détermine les groupes de Lie de dimension 3 qui admettent des sphères de contact invariantes et on étudie les groupes de Lie de dimension 7 sur lesquels existent des p -sphères de contact, suivant les différentes valeurs de p .

Dans la dernière partie nous examinerons les développements possibles des sujets traités dans cette thèse.

Chapitre 2

Généralités et rappels

2.1 Notions de géométrie de contact

La géométrie de contact est l'étude d'une certaine classe de formes différentielles sur des variétés de dimension impaire ainsi que celle des champs d'hyperplans définis par ces formes différentielles.

Une *forme différentielle* ω est une application qui à chaque point p d'une variété M associe une application linéaire de l'espace tangent $T_p M$ à la variété en ce point dans \mathbb{R} et ce de façon différentiable par rapport au point de la variété. Lorsque M est de dimension impaire $2n + 1$, une telle forme est dite *forme de contact*, si la forme $\omega \wedge (d\omega)^n$ ne s'annule nulle part sur M , c'est-à-dire s'il s'agit d'une forme volume sur M .

En chaque point p de la variété, les vecteurs de l'espace tangent à M en ce point sur lesquels l'application linéaire ω_p est nulle forment un hyperplan. Ce champ d'hyperplans $Ker(\omega)$ est appelé la *structure de contact* associée à la forme ω , si celle-ci est de contact. De façon générale, un champ d'hyperplans ξ est une structure de contact s'il est complètement non-intégrable, c'est-à-dire s'il n'existe pas de sous-variété de M de dimension plus grande que n dont l'espace tangent soit contenu en tout point $p \in M$ dans ξ_p .

En dimension 3 par exemple, une structure de contact n'admet pas de surface intégrale, mais il existe des courbes qui sont partout tangentes à la structure.

Exemple 1 : *Forme de Liouville*

Pour une variété M de dimension n , le fibré cotangent T^*M , qui est de dimension $2n$, admet la forme symplectique $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$, où (q_1, \dots, q_n) sont des coordonnées locales sur M et (p_1, \dots, p_n) des coordonnées linéaires dans les espaces tangents correspondants. Cette forme admet une primitive $\xi = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$. Pour une métrique riemannienne sur M donnée, on peut alors considérer le fibré cotangent unitaire $S^{2n-1}(T^*M)$. Sur cette variété, il existe une forme ω qui s'écrit localement comme la forme ξ . Elle est de contact et s'appelle *forme de Liouville*.

Exemple 2 : Dans \mathbb{R}^3 , la forme $\omega = x dy + dz$ est une forme de contact. En effet, $d\omega = dx \wedge dy$, donc

$$\omega \wedge d\omega = (x dy + dz) \wedge (dx \wedge dy) = dx \wedge dy \wedge dz,$$

ce qui donne la forme volume habituelle de \mathbb{R}^3 .

Cette forme s'appelle aussi forme de contact standard ou de Darboux, à cause du théorème de Darboux qui affirme que localement, toute forme de contact est isomorphe à $x dy + dz$.

Exemple 3 : Exemple sur \mathbb{T}^3

Sur T^3 , muni des pseudo-coordonnées $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, toute 1-forme du type

$$\omega_n = \cos(n\theta_1) d\theta_2 + \sin(n\theta_1) d\theta_3$$

est de contact pour $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, on a

$$\omega_n \wedge d\omega_n = -n d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3,$$

qui est une forme de volume sur \mathbb{T}^3 .

E. Giroux a démontré (cf. [9]) que deux de ces formes ω_m et ω_n sont isomorphes seulement si $m = n$, ce qui veut dire que sur \mathbb{T}^3 il existe une infinité de formes de contact non-isomorphes.

Exemple 4 : Exemple de forme de contact sur \mathbb{T}^5

En 1979, R. Lutz a mis en évidence la première forme de contact sur \mathbb{T}^5 . Il s'agit de la forme

$$\begin{aligned} \omega = & (\sin \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3) d\theta_4 + (\sin \theta_1 \sin \theta_3 + \sin \theta_2 \cos \theta_3) d\theta_5 \\ & + \sin \theta_2 \cos \theta_2 d\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1 d\theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 d\theta_3. \end{aligned}$$

Il a été montré en 2002 seulement que \mathbb{T}^7 et tous les tores de dimension impaire admettent des formes de contact, sans qu'il y ait encore des exemples explicites sur \mathbb{T}^7 (cf. F. Bourgeois [3]).

À une forme de contact ω , on associe un champ de vecteurs R , appelé champ de Reeb, qui est uniquement déterminé par les conditions

$$\begin{aligned} \omega(R) &= 1 \\ R \lrcorner d\omega &= 0. \end{aligned}$$

2.2 p -sphères de contact

Voyons maintenant quelques définitions et résultats préliminaires qui concernent les p -sphères de contact.

Toutes les variétés, applications, champs et formes qui apparaissent dans ce travail sont supposés de classe C^∞ . Toutes les variétés sont supposées orientables.

Définissons maintenant l'objet principal de ce travail, à savoir une p -sphère de contact.

Définition 1 — L'ensemble des combinaisons linéaires normalisées de $p + 1$ formes de contact $\omega_1, \dots, \omega_{p+1}$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \omega_i \mid \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i^2 = 1 \right\}$$

est dit p -sphère de contact, si tout élément de cette famille est une forme de contact. On notera $\mathcal{S}_c^p\{\omega_1, \dots, \omega_{p+1}\}$.

D'après H. Geiges et J. Gonzalo, on distingue une certaine classe de p -sphères de contact, qui est définie comme suit.

Définition 2 — Une p -sphère de contact $\mathcal{S}_c^p\{\omega_1, \dots, \omega_{p+1}\}$ sur une variété M de dimension $2p + 1$ est dite raide, si tous ses éléments définissent la même forme volume, c'est-à-dire si la forme $\omega \wedge (d\omega)^p$ est une constante, lorsque ω parcourt $\mathcal{S}_c^p\{\omega_1, \dots, \omega_{p+1}\}$.

On appellera cercle de contact une 1-sphère de contact et sphère de contact une 2-sphère de contact. On remarque que toute sphère de contact contient des cercles de contact et qu'en général, toute m -sphère de contact contient des n -sphères de contact pour $n \leq m$.

Exemple 5 — Cercle de contact sur \mathbb{T}^3

Sur le tore de dimension 3 avec les pseudo-coordonnées $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, les deux formes

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \cos(n\theta_1) d\theta_2 + \sin(n\theta_1) d\theta_3 \\ \omega_2 &= -\sin(n\theta_1) d\theta_2 + \cos(n\theta_1) d\theta_3 \end{aligned}$$

engendrent un cercle de contact.

En effet, on a pour $\omega = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2$, avec $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$,

$$\omega \wedge d\omega = -n d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3,$$

toutes les combinaisons linéaires sont donc des formes de contact. Les formes volume qu'elles définissent sont toutes les mêmes, le cercle de contact est donc raide.

Exemple 6 — Sphère de contact sur \mathbb{S}^3

On considère la 3-sphère \mathbb{S}^3 comme sphère unité de l'espace \mathbb{H} des quaternions. Sur cette sphère, on a trois formes de contact indépendantes induites par les 1-formes sur \mathbb{H} suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_q &= \langle qi, dq \rangle = q_1 dq_2 - q_2 dq_1 + q_4 dq_3 - q_3 dq_4 \\ \beta_q &= \langle qj, dq \rangle = q_1 dq_3 - q_3 dq_1 + q_2 dq_4 - q_4 dq_2 \\ \gamma_q &= \langle qk, dq \rangle = q_3 dq_2 - q_2 dq_3 + q_1 dq_4 - q_4 dq_1. \end{aligned}$$

Ces formes engendrent une sphère de contact. En effet, toute combinaison linéaire normalisée

$$\omega = \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \lambda_3 \gamma$$

des formes α , β et γ vérifie :

$$\omega \wedge d\omega \wedge (q_1 dq_1 + q_2 dq_2 + q_3 dq_3 + q_4 dq_4) = dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3 \wedge dq_4,$$

qui est une forme volume, indépendante de surcroît des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. α , β et γ induisent donc une sphère de contact raide sur \mathbb{S}^3 .

Une fois qu'on s'intéresse à ces objets, on peut se poser la question de leur existence sur une variété donnée. Dans le cadre des variétés compactes, H. Geiges et J. Gonzalo ont donné à cette question une réponse générale pour les cercles de contact en dimension 3 (cf. [8]) :

Théorème 1 — *Toute variété fermée et orientable de dimension 3 admet un cercle de contact.*

Pour des cercles de contact raides, qui ont des propriétés géométriques plus riches, la situation est plus complexe :

Théorème 2 — *Une variété fermée et orientable M de dimension 3 admet un cercle de contact raide si et seulement si M est le quotient d'un groupe de Lie G par l'action d'un sous-groupe discret par multiplication à gauche, où G est soit $SU(2)$, soit \tilde{SL}_2 , soit \tilde{E}_2 .*

On peut également essayer de classifier les cercles et sphères de contact qui existent sur une variété donnée et de trouver pour cela des invariants et des critères suivants lesquels deux cercles de contact sont différents.

Pour les cercles de contact raides, H. Geiges et J. Gonzalo ont donné quelques résultats intéressants dans ce sens dans [7].

2.3 Quelques outils

Dans le chapitre 4 nous allons travailler sur des fibrés principaux. Nous utiliserons la classification des variétés fermées de dimension 1, ainsi que quelques méthodes courantes concernant les fibrés principaux et les connexions.

Comme nous allons étudier des structures riemanniennes, nous utiliserons quelques outils et méthodes provenant de la géométrie différentielle. Nous allons entre autres étudier des notions géométriques comme la courbure, des angles, des distances etc. Un objet important sera le tenseur de courbure. Nous utiliserons dans ce contexte les identités de Bianchi et la détermination des champs de Killing. Nous utiliserons la description de ceux-ci d'après laquelle un champ de vecteurs X est de Killing si $g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0$, pour tous champs de vecteurs X et Y (équation de Killing).

Les notations que nous utilisons dans les chapitres géométriques coïncident avec celles utilisées par M. do Carmo (cf. [5]).

Nous aurons également besoin d'un certain nombre de notions algébriques concernant les groupes de Lie, en particulier les théorèmes de Lévi et de Weyl. Les définitions et notations sont en général celles de N. Jacobson (cf. [12]).

Nous utilisons la théorie des représentations des algèbres de Lie que nous rappelons dans le chapitre concerné.

Nous considérerons aussi des structures sasakiennes et plus particulièrement 3-sasakiennes qui sont définies comme suit (cf. [2]). Soit (M, g) une variété riemannienne munie d'une forme de contact ω . Soit R le champ de Reeb associé à ω . On introduit alors un champ tensoriel φ de type (1,1) défini par

$$g(X, \varphi(Y)) = \frac{1}{2} d\omega(X, Y). \quad (2.1)$$

ω est alors une forme de contact métrique si elle vérifie

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X, Y) - \omega(X)\omega(Y),$$

où de façon équivalente

$$\begin{cases} \varphi^2 &= -I + \omega \otimes R \\ \omega(Y) &= g(R, Y), \text{ pour tout } Y. \end{cases} \quad (2.2)$$

On dit alors que (φ, R, ω) définit une structure de Sasaki, si

$$[\varphi, \varphi] + d\omega \otimes R = 0, \quad (2.3)$$

où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Nijenhuis, défini par

$$[T, T](X, Y) = T^2[X, Y] + [TX, TY] - T[TX, Y] - T[X, TY].$$

Étant donné 3 structures de Sasaki ω_1, ω_2 et ω_3 sur M , on dit qu'elles définissent une 3-structure de Sasaki si pour des permutations paires (i, j, k) de $(1, 2, 3)$, les propriétés suivantes sont satisfaites.

$$\begin{cases} \varphi_k &= \varphi_i \varphi_j - \omega_j \otimes R_i &= -\varphi_j \varphi_i + \omega_i \otimes R_j \\ R_k &= \varphi_i(R_j) &= -\varphi_j(R_i) \\ \omega_k &= \omega_i \circ \varphi_j &= -\omega_j \circ \varphi_i, \end{cases} \quad (2.4)$$

où les R_i sont les champs de Reeb associés aux formes de contact ω_i .

Chapitre 3

Rondeur et raideur

Nous introduisons maintenant une nouvelle notion de régularité pour les p -sphères de contact. H. Geiges et J. Gonzalo disent d'une p -sphère de contact qu'elle est raide si tous ses éléments définissent la même forme volume. La propriété géométrique de rondeur, que nous introduisons, est équivalente en dimension trois, mais c'est une notion indépendante en dimension supérieure, comme nous le verrons plus loin.

3.1 Définition et exemples

Définition 3 — Soient $\{\omega_1, \dots, \omega_{p+1}\}$ les formes génératrices d'une p -sphère de contact et R_1, \dots, R_{p+1} les champs de Reeb correspondants. La p -sphère de contact $\mathcal{S}_c^p\{\omega_1, \dots, \omega_{p+1}\}$ est dite ronde si toute forme $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \omega_i$ avec $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i^2 = 1$ a $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i R_i$ comme champ de Reeb.

Le champ de Reeb de toute combinaison linéaire des formes de base est donc cette même combinaison linéaire des champs de Reeb des formes de base.

On a la caractérisation suivante des p -sphères de contact rondes :

Lemme 1 — Soient $\{\omega_1, \dots, \omega_{p+1}\}$ les formes génératrices d'une p -sphère de contact et R_1, \dots, R_{p+1} les champs de Reeb correspondants. $\mathcal{S}_c^p\{\omega_1, \dots, \omega_{p+1}\}$ est alors ronde si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} i) \quad & \omega_i(R_j) + \omega_j(R_i) = 0, \text{ pour } i, j \in \{1, \dots, p+1\}, i \neq j \\ ii) \quad & R_i \lrcorner d\omega_j + R_j \lrcorner d\omega_i = 0, \text{ pour } i, j \in \{1, \dots, p+1\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Preuve : Soit $\omega = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \omega_i$ un élément de $\mathcal{S}_c^p\{\omega_1, \dots, \omega_{p+1}\}$. $R = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i R_i$ est le champ de Reeb correspondant si et seulement si

$$\begin{aligned} a) \quad & (\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \omega_i)(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i R_i) = 1 \\ b) \quad & (\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i R_i) \lrcorner (\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i d\omega_i) = 0. \end{aligned}$$

La condition $a)$ implique que $\sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j (\omega_i(R_j) + \omega_j(R_i)) = 0$. Si $\mathcal{S}_c^p\{\omega_1, \dots, \omega_{p+1}\}$ est une p -sphère de contact ronde, cette égalité est vérifiée

pour tout $(p+1)$ -uplet normalisé de coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1})$. Si on considère le membre de gauche comme un polynôme homogène en λ_i sur \mathbb{S}^p , on en déduit que tous ses coefficients doivent être nuls, donc que la condition i) est vérifiée. La réciproque est bien sûr vraie.

L'équivalence des conditions b) et ii) se démontre de la même façon. \square

Remarque : Ce lemme montre qu'une p -sphère de contact est ronde si et seulement si tout cercle de contact qu'elle contient l'est. C'est vrai aussi pour les p -sphères de contact raides. Pour montrer qu'une p -sphère de contact est ronde ou raide, il suffit donc de tester cette propriété sur les cercles de contact qu'elle contient.

Exemples :

1. Nous reprenons l'exemple de la sphère de contact sur \mathbb{S}^3 que nous avons vu précédemment (cf. Exemple 6). Cette sphère de contact est en fait ronde. En effet, les formes ω_1, ω_2 et ω_3 , qui engendrent la sphère de contact, sont induites sur \mathbb{S}^3 par les formes de \mathbb{H}^3 suivantes :

$$\begin{cases} (\tilde{\omega}_1)_q = \langle iq, dq \rangle \\ (\tilde{\omega}_2)_q = \langle jq, dq \rangle \\ (\tilde{\omega}_3)_q = \langle kq, dq \rangle . \end{cases}$$

Les champs de Reeb correspondants sont

$$\begin{cases} (R_1)_q = iq \\ (R_2)_q = jq \\ (R_3)_q = kq. \end{cases}$$

En utilisant le Lemme 1, on peut vérifier que cette sphère de contact est en effet ronde :

Dans cet exemple, les champs de Reeb de ω_1, ω_2 et ω_3 sont aussi leurs champs duaux, donc on a $\omega_i(R_j) = \delta_{ij}$. La condition i) est donc satisfaite. De plus, comme $d\tilde{\omega}_1 = -d\bar{q} \wedge idq$ et $d\tilde{\omega}_2 = -d\bar{q} \wedge jq$, nous avons

$$\begin{aligned} R_2 \lrcorner d\tilde{\omega}_1 &= \bar{q} j i dq + d\bar{q} i j q \\ R_1 \lrcorner d\tilde{\omega}_2 &= \bar{q} i j dq + d\bar{q} j i q \\ &= -(\bar{q} j i dq + d\bar{q} i j q). \end{aligned}$$

Donc $R_2 \lrcorner d\omega_1 + R_1 \lrcorner d\omega_2 = 0$ et les autres relations de la condition ii) sont obtenues de la même façon.

2. On a un exemple de cercle de contact rond sur \mathbb{T}^3 . En effet, les formes

$$\begin{cases} \omega_1 = \cos \theta_1 d\theta_2 + \sin \theta_1 d\theta_3 \\ \omega_2 = -\sin \theta_1 d\theta_2 + \cos \theta_1 d\theta_3 \end{cases}$$

engendrent un cercle de contact et leurs champs de Reeb sont respectivement

$$\begin{cases} R_1 &= \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \\ R_2 &= -\sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_3}. \end{cases}$$

À nouveau, on a $\omega_i(R_j) = \delta_{ij}$, pour $i, j = 1, 2$. La condition *i*) du Lemme 1 est donc vérifiée. De plus, on a

$$\begin{cases} d\omega_1 &= -\sin \theta_1 d\theta_1 \wedge d\theta_2 + \cos \theta_1 d\theta_1 \wedge d\theta_3 \\ d\omega_2 &= -\cos \theta_1 d\theta_1 \wedge d\theta_2 - \sin \theta_1 d\theta_1 \wedge d\theta_3, \end{cases}$$

donc $R_1 \lrcorner d\omega_2 = d\theta_1 = -R_2 \lrcorner d\omega_1$ et la condition *ii*) est aussi vérifiée.

3.2 Rond \Leftrightarrow raide en dimension 3

On va maintenant montrer qu'en dimension 3, un cercle de contact est rond si et seulement s'il est raide. Ceci nous donne la possibilité d'avoir différents points de vue sur la même propriété. Nous avons d'abord besoin d'un lemme :

Lemme 2 — *Les champs de Reeb de deux générateurs d'un cercle de contact sont partout linéairement indépendants.*

Preuve : Soit $\mathcal{S}_c^p\{\omega_1, \omega_2\}$ un cercle de contact et soient R_1 et R_2 les champs de Reeb des formes génératrices. S'il existe un point p où $(R_1)_p$ et $(R_2)_p$ sont parallèles, alors on a $d\omega_1(R_1)_p = 0$ et $d\omega_2(R_1)_p = 0$ et donc $d\omega(R_1)_p = 0$, pour toute combinaison linéaire ω de ω_1 et ω_2 . Les champs de Reeb de tous les éléments du cercle de contact sont donc parallèles à R_1 . Or, le champ de Reeb de la forme $-\omega_1$ est $-R_1$ et comme les champs de Reeb dépendent des coefficients de façon continue, il doit y avoir une forme dans le cercle de contact dont le champ de Reeb a une longueur nulle. Cela est bien sûr impossible. \square

Théorème 3 — *Sur une variété M de dimension 3, un cercle de contact (resp. une sphère de contact) est raide si et seulement s'il est rond.*

Preuve : Voyons d'abord que les cercles de contact raides sont ronds. Soit $\mathcal{S}_c^1\{\omega_1, \omega_2\}$ un cercle de contact raide, c'est-à-dire qui vérifie

$$\begin{cases} \omega_1 \wedge d\omega_1 &= \omega_2 \wedge d\omega_2 \\ \omega_1 \wedge d\omega_2 &= -\omega_2 \wedge d\omega_1 \end{cases} \quad (3.2)$$

et soit R_1 et R_2 les champs de Reeb des formes génératrices. En appliquant la première équation de (3.2) au couple de vecteurs (R_1, R_2) , on obtient

$$R_1 \lrcorner d\omega_2 + R_2 \lrcorner d\omega_1 = 0,$$

qui est la seconde condition de rondeur du Lemme 1. En appliquant la seconde équation de (3.2) au couple (R_1, R_2) et en utilisant la relation précédemment obtenue, nous avons

$$(R_1 \lrcorner d\omega_2)(\omega_1(R_2) + \omega_2(R_1)) = 0,$$

ce qui nous donne la première condition de rondeur du Lemme 1, à condition que $R_1 \lrcorner d\omega_2$ ne s'annule pas. Mais cela découle du Lemme 2. Les cercles de contact raides sont donc ronds.

Il est alors clair que les sphères de contact raides sont rondes aussi, puisque les conditions de rondeur du Lemme 1 portent sur des paires de formes génératrices. Donc si deux formes génératrices d'une sphère de contact vérifient les conditions (3.2), elles vérifient aussi les conditions (3.1), comme on vient de le voir.

Voyons maintenant que les sphères de contact raides sont rondes. Soit $\mathcal{S}_c^p\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ une sphère de contact ronde et $\omega = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \omega_i$ l'un de ses éléments. Par hypothèse, le champ de Reeb correspondant est $R = \sum_{i=1}^3 \lambda_i R_i$, où R_i est le champ de Reeb de la forme ω_i . Ainsi, des combinaisons linéaires non-triviales de R_1, R_2 et R_3 ne sont jamais nulles, ces trois vecteurs définissent donc un parallélisme de M . Pour montrer que $\mathcal{S}_c^2\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ est raide, il suffit de montrer que $(\omega \wedge d\omega)(R_1, R_2, R_3)$ ne dépend pas des coefficients $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. En évaluant la relation $R_2 \lrcorner d\omega_1 + R_1 \lrcorner d\omega_2 = 0$ sur le champ R_3 , on obtient

$$d\omega_1(R_2, R_3) = d\omega_2(R_3, R_1),$$

et par une évaluation analogue, on a

$$d\omega_1(R_2, R_3) = d\omega_3(R_1, R_2).$$

On a donc

$$\begin{aligned} (\omega \wedge d\omega)(R_1, R_2, R_3) &= ((\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \lambda_3 \omega_3) \\ &\quad \wedge (\lambda_1 d\omega_1 + \lambda_2 d\omega_2 + \lambda_3 d\omega_3))(R_1, R_2, R_3) \\ &= \lambda_1^2 d\omega_1(R_2, R_3) + \lambda_2^2 d\omega_2(R_3, R_1) + \lambda_3^2 d\omega_3(R_1, R_2) \\ &= d\omega_1(R_2, R_3), \end{aligned}$$

où la seconde étape est due aux relations précédentes et au Lemme 1. Cette expression ne dépend pas des coefficients $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Il reste à montrer que les cercles de contact ronds sont raides en dimension 3. Soient ω_1 et ω_2 les générateurs d'un tel cercle de contact et R_1 et R_2 les champs de Reeb correspondants. Le Lemme 2 nous assure que R_1 et R_2 sont partout linéairement indépendants, on peut donc trouver un troisième champ de vecteurs X pour faire de (R_1, R_2, X) un parallélisme de M . En évaluant la relation $R_1 \lrcorner d\omega_2 + R_2 \lrcorner d\omega_1 = 0$ sur X , on obtient

$$d\omega_1(R_2, X) = d\omega_2(X, R_1),$$

et un calcul analogue à celui dans le cas des sphères de contact rondes nous montre que le cercle de contact est raide. ■

3.3 Rondeur et raideur en dimension supérieure

En dimension plus grande que 3, les notions de rondeur et de raideur ne sont plus équivalentes. A partir de la dimension 7, il y a une différence essentielle entre elles, due aux puissances auxquelles apparaissent les différentielles des formes génératrices dans les caractérisations respectives. Pour illustrer cette différence, considérons la situation en dimension 7.

Un cercle de contact $\mathcal{S}_c^1\{\omega_1, \omega_2\}$ défini sur une variété M de dimension 7 est raide si les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \omega_1 \wedge (d\omega_1)^3 - \omega_2 \wedge (d\omega_2)^3 & = 0 \\ 3\omega_2 \wedge d\omega_2 \wedge (d\omega_1)^2 + 3\omega_1 \wedge d\omega_1 \wedge (d\omega_2)^2 - 2\omega_1 \wedge (d\omega_1)^3 & = 0 \\ \omega_1 \wedge (d\omega_2)^3 + 3\omega_2 \wedge d\omega_1 \wedge (d\omega_2)^2 & = 0 \\ \omega_2 \wedge (d\omega_1)^3 + 3\omega_1 \wedge d\omega_2 \wedge (d\omega_1)^2 & = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

D'un autre côté, si $\mathcal{S}_c^1\{\omega_1, \omega_2\}$ est raide et rond, on a les relations suivantes, qui sont nécessaires, mais non suffisantes :

$$\begin{cases} (d\omega_1)^3 - 3d\omega_1 \wedge (d\omega_2)^2 & = 0 \\ (d\omega_2)^3 - 3d\omega_2 \wedge (d\omega_1)^2 & = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

On les obtient de la manière suivante : soit $\omega_\theta = \cos \theta \omega_1 + \sin \theta \omega_2$ un élément de $\mathcal{S}_c^1\{\omega_1, \omega_2\}$ et soit $\Omega = \omega_1 \wedge (d\omega_1)^3$. Comme $\mathcal{S}_c^1\{\omega_1, \omega_2\}$ est raide, on a $\omega_\theta \wedge (d\omega_\theta)^3 = \Omega$, et donc $(d\omega_\theta)^3 = R_\theta \lrcorner \Omega$, où R_θ est le champ de Reeb de ω_θ . Cette relation mène à (3.4).

Les systèmes (3.3) et (3.4) ne sont pas de la même nature, puisque les équations de (3.3) sont de degré 7 et celles de (3.4) sont de degré 6. Donc en général, un cercle de contact qui vérifie (3.3) ne vérifiera pas (3.4). En dimension 3, les équations qui correspondent à (3.4) sont triviales, et c'est la raison pour laquelle on a équivalence des deux notions en cette dimension.

Les contre-exemples suivants montrent qu'en dimension 7 il n'y a aucune implication entre rond et raide :

Contre-exemple 1 :

1. Le cercle de contact de \mathbb{R}^7 engendré par les formes

$$\begin{cases} \omega_1 & = x_1 dx_2 + x_3 dx_4 + x_5 dx_6 + dx_7 \\ \omega_2 & = -(x_5 + x_6) dx_3 - x_5 dx_4 + (x_1 + x_3) dx_6 + x_1 dx_7 - dx_2 \end{cases}$$

est rond et non raide.

2. Le cercle de contact de \mathbb{R}^7 engendré par les formes

$$\begin{cases} \omega_1 = x_1 dx_2 + x_3 dx_4 + x_5 dx_6 + dx_7 \\ \omega_2 = x_5 dx_4 - x_3 dx_6 + (x_1 + x_3) dx_7 - dx_2 \end{cases}$$

est raide et non rond.

Chapitre 4

Théorie invariante des cercles et sphères de contact

4.1 Ensembles singuliers et fibrations nouées

Dans ce paragraphe nous allons développer des outils pour étudier des cercles et sphères de contact sur des fibrés principaux en cercles au-dessus de variétés fermées et connexes. On s'intéresse d'abord aux ensembles singuliers qu'on associe, dans ce contexte, aux formes de contact invariantes et on les considère ensuite comme les nœuds de fibrations nouées. Cette approche permet de bien comprendre certains aspects topologiques des cercles et sphères de contact invariants.

Soit B une variété compacte, connexe, orientable et sans bord de dimension $2n$ et M un fibré principal en cercles au-dessus de B avec forme de connexion α . Alors pour chaque 1-forme invariante ω sur M , il y a une 1-forme η et une fonction φ sur B telles que

$$\omega = \pi^*(\eta) + \pi^*(\varphi) \alpha,$$

où $\pi: M \rightarrow B$ est l'application qui définit le fibré.

On a le lemme technique suivant :

Lemme 3 — Soit $\mathcal{S}_c^p\{\omega_1, \dots, \omega_{p+1}\}$ une p -sphère de contact invariante sur M , où pour chaque i il y a des 1-formes et des fonctions η_i et φ_i sur B telles que

$$\omega_i = \pi^*(\eta_i) + \pi^*(\varphi_i) \alpha.$$

Alors quels que soient les coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1})$ avec $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i^2 = 1$, les expressions

$$\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \varphi_i \text{ et } \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i d\varphi_i \tag{4.1}$$

ne s'annulent simultanément en aucun point de B .

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la propriété de contact des éléments de $\mathcal{S}_c^p\{\omega_1, \dots, \omega_{p+1}\}$. Pour $\omega = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \omega_i$, on a

$$\omega \wedge (d\omega)^n = \left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \eta_i + \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \varphi_i \alpha \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i d\eta_i + \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i d\varphi_i \wedge \alpha + \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \varphi_i d\alpha \right)^n.$$

Ce terme est égal à

$$\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \eta_i \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i d\eta_i \right)^n,$$

là où les expressions (4.1) s'annulent simultanément. Or, une forme de degré $2n + 1$ est identiquement nulle sur B , qui est de dimension $2n$. Ceci contredit l'hypothèse que $\mathcal{S}_c^p\{\omega_1, \dots, \omega_{p+1}\}$ est une p -sphère de contact, ce qui termine la preuve. □

Nous allons maintenant associer à une forme de contact invariante sur M un ensemble singulier sur la variété de base B , d'après R. Lutz (voir [13]).

Définition 4 — Soit $\omega = \pi^*(\eta) + \pi^*(\varphi) \alpha$ une forme de contact invariante sur un fibré en cercles M au dessus d'une variété B . L'ensemble singulier associé à ω est l'ensemble $\Sigma_\omega = \varphi^{-1}(0)$ sur B .

Nous allons maintenant démontrer quelques propriétés fondamentales des ensembles singuliers de cercles et sphères de contact invariants sur un fibré principal en cercles M au dessus d'une variété fermée et connexe B .

Proposition 1 —

- i) Les ensembles singuliers sont des sous-variétés de B .
- ii) Si M admet un cercle de contact invariant, alors tout point de B est contenu dans l'ensemble singulier d'au moins un élément de ce cercle de contact.
- iii) Les ensembles singuliers de deux éléments d'un même cercle de contact ou d'une même sphère de contact sont isotopes.
- iv) L'ensemble singulier de tout élément d'un cercle de contact invariant est non vide.
- v) Les ensembles singuliers de deux éléments différents et non opposés d'un cercle de contact invariant ou d'une sphère de contact invariante se coupent transversalement.

Preuve : D'après R. Lutz ([13]) (ou d'après le Lemme 3 dans le cas particulier $p = 0$), $d\varphi$ ne s'annule pas sur $\varphi^{-1}(0)$, quand $\omega = \pi^*(\eta) + \pi^*(\varphi) \alpha$ est une forme de contact invariante sur M . L'ensemble singulier correspondant est donc une sous-variété de B .

Soient deux formes ω_1 et ω_2 , qui engendrent un cercle de contact invariant sur M et qui s'écrivent

$$\omega_i = \pi^*(\eta_i) + \pi^*(\varphi_i) \alpha.$$

Soit

$$\begin{aligned}
\omega^\theta &= \sin \theta \omega_1 + \cos \theta \omega_2 \\
&= \pi^*(\sin \theta \eta_1 + \cos \theta \eta_2) + \pi^*((\sin \theta \varphi_1 + \cos \theta \varphi_2)) \alpha \\
&= \pi^*(\eta^\theta) + \pi^*(\varphi^\theta) \alpha.
\end{aligned}$$

un élément quelconque de $\mathcal{S}_c^p\{\omega_1, \dots, \omega_{p+1}\}$. Soit x un point de B . Pour toute valeur de $\varphi_1(x)$ et de $\varphi_2(x)$ il y a un $\theta_x \in [0, 2\pi]$ tel que $\varphi^{\theta_x}(x) = 0$. Le point x est donc contenu dans l'ensemble singulier associé à ω^{θ_x} .

Cet argument montre également que tout cercle de contact contient des éléments dont l'ensemble singulier n'est pas vide. Par ailleurs, d'après Gray (cf. [11], voir aussi Martinet ([16])), les structures de contact associées aux éléments de familles à un paramètre de formes de contact sont isomorphes. Comme les cercles de contact sont des familles à un paramètre particulières, les structures correspondantes sont isomorphes. Les isomorphismes en question sont équivariants, comme l'explique Lutz dans [13], les ensembles singuliers des éléments d'un cercle de contact sont donc isotopes. Par conséquent, l'ensemble singulier de tout élément d'un cercle de contact est non vide.

Comme deux éléments distincts et non opposés d'une p -sphère de contact invariante engendrent un cercle de contact invariant, leurs ensembles singuliers sont aussi non vides et isotopes.

En tout point où les ensembles singuliers de deux éléments distincts et non opposés $\omega_1 = \pi^*(\eta_1) + \pi^*(\varphi_1) \alpha$ et $\omega_2 = \pi^*(\eta_2) + \pi^*(\varphi_2) \alpha$ d'un cercle de contact invariant se coupent, on a $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Les formes $d\varphi_1$ et $d\varphi_2$ sont donc linéairement indépendantes en ces points, d'après le Lemme 3, ce qui veut dire que Σ_{ω_1} et Σ_{ω_2} se coupent transversalement. □

On peut étudier les ensembles singuliers et donc les p -sphères de contact invariantes en examinant les fibrations nouées associées. Ce point de vue est dû à R. Lutz et généralise les constructions en livres ouverts de J. Milnor dans le cadre des formes de contact invariantes.

Définition 5 (cf. [14]) — Soit M une variété connexe, compacte et orientable, N une sous-variété de codimension k (eventuellement vide) de M et $\varphi: M \setminus N \rightarrow \mathbb{S}^{k-1}$ une fibration localement triviale. On dit que (M, φ, N) est une fibration nouée au-dessus de \mathbb{S}^{k-1} , s'il existe un voisinage W de N et un difféomorphisme $h: N \times D^k \rightarrow W$, où D^k est le disque unité de \mathbb{R}^k , tels que h est l'identité sur $N \times \{0\}$ et tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
N \times (D^k \setminus \{0\}) & \xrightarrow{h} & W \setminus N \\
\text{proj.} \downarrow & & \downarrow \varphi \\
D^k \setminus \{0\} & \xrightarrow{\|\cdot\|} & \mathbb{S}^{k-1}
\end{array}$$

On appelle N le nœud et $\varphi^{-1}(p)$ une fibre de la fibration nouée, pour tout point $p \in \mathbb{S}^{k-1}$.

Les ensembles singuliers associés à des p -sphères de contact invariantes sur un fibré principal en cercles M au-dessus d'une surface B nous donnent différents types d'exemples en dimension 3 :

- l'ensemble singulier $\Sigma_\omega = \varphi^{-1}(0)$ d'une forme de contact invariante $\omega = \pi^*(\eta) + \pi^*(\varphi)\alpha$ est une courbe sur la variété de base et définit une fibration nouée au-dessus de \mathbb{S}^0 , avec Σ_ω comme nœud et avec deux fibres qui sont déterminées par le signe de la fonction φ . Ces fibres sont bien définies (cf.[13]);
- dans le cas d'un cercle de contact engendré par deux formes de contact invariantes ω_1 et ω_2 , l'intersection Σ des ensembles singuliers respectifs Σ_{ω_1} et Σ_{ω_2} est finie. Σ est le nœud d'une fibration nouée de B au-dessus de \mathbb{S}^1 , dont les fibres sont des courbes qui relient des points de Σ ;
- une sphère de contact invariante engendrée par les formes ω_1, ω_2 et ω_3 n'admet pas d'ensemble singulier commun. C'est une conséquence du Lemme 3. On peut néanmoins considérer une fibration nouée de B au-dessus de \mathbb{S}^2 avec nœud vide et des fibres finies.

Le théorème de fibration suivant donne la description générale de ce type de décomposition :

Théorème 4 — *Théorème de fibration*

Soit M un fibré principal en cercles au-dessus d'une variété B . On suppose que $(\omega_1, \dots, \omega_{p+1})$ engendrent une p -sphère de contact sur M . Soit $\Sigma = \bigcap_{i=1}^{p+1} \varphi_i^{-1}(0)$ l'intersection des ensembles singuliers des formes de base, qu'on écrit $\omega_i = \pi^*(\eta_i) + \pi^*(\varphi_i)\alpha$. Alors pour $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{p+1} \varphi_i^2}$,

$$(B, (\frac{\varphi_1}{r}, \dots, \frac{\varphi_{p+1}}{r}), \Sigma)$$

définit une fibration nouée.

Preuve : D'après [14], il suffit de montrer que l'application

$$\Phi = (\frac{\varphi_1}{r}, \dots, \frac{\varphi_{p+1}}{r}): B \setminus \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^p$$

est de rang p partout et qu'en tout point de Σ , on a

$$d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_{p+1} \neq 0.$$

La première condition est une conséquence du Lemme 3. Si Φ n'est pas de rang p , alors il existe des coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1})$ avec $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i^2 = 1$, tels que

$$\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \varphi_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i d\varphi_i = 0,$$

en au moins un point de $B \setminus \Sigma$, ce qui est exclu par le Lemme 3. En effet, en un point $x \in B \setminus \Sigma$, au moins l'une des fonctions φ_i n'est pas nulle. Supposons que ce soit le cas pour φ_{p+1} . Le rang de Φ est alors donné par le rang du système $(d(\frac{\varphi_1}{r}), \dots, d(\frac{\varphi_p}{r}))$, car la projection de $T_x \mathbb{S}^p$ sur le p -plan des coordonnées (x_1, \dots, x_p) est alors une bijection, si on considère \mathbb{S}^p comme la sphère unité de \mathbb{R}^{p+1} .

Supposons maintenant qu'il existe un point $x \in B \setminus \Sigma$ et p réels μ_1, \dots, μ_p , tels que $\sum_{i=1}^p \mu_i d(\frac{\varphi_i}{r}) = 0$. En développant ceci et en utilisant l'identité $dr = \frac{1}{r}(\sum_{i=1}^{p+1} \varphi_i d\varphi_i)$, on obtient

$$0 = \frac{1}{r} \left(\sum_{i=1}^p \mu_i d\varphi_i \right) - \sum_{i=1}^p \frac{\mu_i \varphi_i}{r^2} dr = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i d\varphi_i,$$

où on pose

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{\mu_i}{r} - \left(\sum_{j=1}^p \frac{\mu_j \varphi_j}{r^2} \right) \frac{\varphi_i}{r}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, p \quad \text{et} \\ \lambda_{p+1} &= - \left(\sum_{j=1}^p \frac{\mu_j \varphi_j}{r^2} \right) \frac{1}{r} \varphi_{p+1}. \end{aligned}$$

Avec les mêmes coefficients, on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \varphi_i &= \sum_{i=1}^p \frac{\mu_i \varphi_i}{r} - \sum_{i=1}^p \varphi_i^2 \sum_{j=1}^p \frac{\mu_j \varphi_j}{r^3} - \sum_{i=1}^p \frac{\mu_i \varphi_i}{r^3} \varphi_{p+1}^2 \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{\mu_i \varphi_i}{r^3} (r^2 - \sum_{j=1}^{p+1} \varphi_j^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La deuxième condition est une autre conséquence du Lemme 3. Comme les fonctions φ_i s'annulent sur Σ , toute expression $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i d\varphi_i$ est non nulle, si $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i^2 = 1$, d'après le Lemme 3. Les formes $\{d\varphi_i, i = 1, \dots, p+1\}$ sont donc linéairement indépendantes sur Σ , donc $d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_{p+1} \neq 0$ sur Σ . Ceci termine la preuve. ■

Corollaire 1 — Soit $\mathcal{S}_c^1\{\omega_1, \omega_2\}$ un cercle de contact invariant sur un fibré principal en cercles M au-dessus d'une surface fermée et connexe B avec Σ comme ensemble singulier commun. Alors $B \setminus \Sigma$ fibre au-dessus de \mathbb{S}^1 .

Ce corollaire nous donne des renseignements sur la topologie des ensembles singuliers associés aux cercles de contact invariants en dimension 3, par exemple les propriétés suivantes :

Proposition 2 —

- a) *L'ensemble singulier Σ_ω d'un élément ω d'un cercle de contact invariant engendré par des formes ω_1 et ω_2 sur un fibré principal en cercles au-dessus de \mathbb{S}^2 est un cercle topologique et les ensembles singuliers de deux éléments distincts et non opposés se coupent en deux points.*
- b) *L'ensemble singulier Σ_ω d'un élément ω d'un cercle de contact invariant engendré par ω_1 et ω_2 sur un fibré principal en cercles au-dessus de \mathbb{T}^2 est la réunion d'un nombre pair de cercles topologiques et les ensembles singuliers de deux éléments distincts et non opposés ne se coupent pas.*

Preuve : Dans le cas $B = \mathbb{S}^2$, il suffit de montrer que Σ_{ω_1} est un cercle topologique. Comme c'est une sous-variété non vide de \mathbb{S}^2 , c'est une réunion de cercles topologiques. Pour voir pourquoi Σ_{ω_1} n'a qu'une seule composante connexe, on observe d'abord que l'ensemble singulier commun $\Sigma = \Sigma_{\omega_1} \cap \Sigma_{\omega_2}$ est la réunion de deux points, puisque $\mathbb{S}^2 \setminus \Sigma$ fibre au-dessus de \mathbb{S}^1 et que les fibres sont des courbes non fermées qui relient ces deux points. Comme l'application fibration est $\Phi = (\frac{\varphi_1}{r}, \frac{\varphi_2}{r})$, où $r = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}$, $\Sigma_{\omega_1} \setminus \Sigma$ est la réunion de deux fibres données par $\Phi^{-1}(0,1)$ et $\Phi^{-1}(0,-1)$ et dont les adhérences ont Σ en commun. Σ_{ω_1} est donc un cercle topologique.

Dans le cas $B = \mathbb{T}^2$, l'ensemble singulier commun Σ est vide, puisque $\mathbb{T}^2 \setminus \Sigma$ fibre au-dessus de \mathbb{S}^1 . Les ensembles singuliers de deux éléments linéairement indépendants d'un cercle de contact ne se coupent donc pas. Encore une fois, l'ensemble singulier d'un élément ω est une réunion non vide de cercles topologiques et le nombre de composantes est pair, parce que le signe de la fonction φ associée change entre deux ouverts voisins de $\mathbb{T}^2 \setminus \Sigma_\omega$ et parce que les composantes de Σ_ω ne bordent pas des disques, puisqu'il y a une isotopie qui porte une telle composante en elle-même en balayant tout le tore en chemin.

□

4.2 Cercles de contact invariants en dimension 3

Nous allons maintenant déterminer quels sont les fibrés principaux en cercles au-dessus de surfaces fermées, connexes et orientables qui portent des cercles de contact invariants. C'est la surface de base qui contient toute l'information importante pour cette question. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 5 — *Soit M un fibré principal en cercles au-dessus d'une surface fermée, connexe et orientable B . Il existe sur M un cercle de contact invariant si et seulement si B est difféomorphe à \mathbb{S}^2 ou à \mathbb{T}^2 .*

Preuve (partie nécessaire) : Nous allons montrer ici que seuls les fibrés principaux en cercles au-dessus de \mathbb{S}^2 ou de \mathbb{T}^2 peuvent admettre des cercles de contact invariants. On démontrera la réciproque de façon constructive dans le paragraphe 4.4.

Soient ω_1 et ω_2 les générateurs d'un cercle de contact invariant sur M . Les ensembles singuliers Σ_{ω_1} et Σ_{ω_2} sont des réunions de cercles topologiques sur B . D'après le Corollaire 1, le complément de leur intersection Σ fibre au-dessus de \mathbb{S}^1 .

Si Σ est vide, alors B est une variété fermée, connexe et orientable qui fibre au-dessus de \mathbb{S}^1 , donc le tore \mathbb{T}^2 .

Si Σ est non vide, il est fini, comme on l'a vu au paragraphe 4.1. D'après le théorème de fibration 4, toute composante de Σ a un voisinage qui est difféomorphe à un disque et chaque rayon de ce disque correspond à une fibre différente de la fibration nouée au-dessus de \mathbb{S}^1 associée. Comme chaque fibre relie deux composantes différentes de Σ , Σ en a au moins deux. Comme $B \setminus \Sigma$ est une fibration localement triviale au-dessus de \mathbb{S}^1 , toutes les fibres qui commencent à une composante donnée de Σ se terminent à une même autre composante, pour des raisons de continuité. Avec ces restrictions, la surface fibrée ne peut être qu'une sphère privée de deux points, c'est-à-dire que $B = \mathbb{S}^2$. ■

4.3 Sphères de contact invariantes en dimension 3

Pour des *sphères de contact* invariantes sur des fibrés principaux en cercles au-dessus de surfaces fermées, connexes et orientables, les possibilités sont encore plus restreintes, puisque toute sphère de contact contient des cercles de contact. En fait, il n'existe pas de sphère de contact invariante sur les fibrés principaux au-dessus de \mathbb{T}^2 , seulement sur ceux au-dessus de \mathbb{S}^2 . Nous avons un théorème analogue à celui du paragraphe 4.2 :

Théorème 6 — *Soit M un fibré principal en cercles au-dessus d'une surface fermée, connexe et orientable B . Il existe sur M une sphère de contact invariante si et seulement si B est difféomorphe à \mathbb{S}^2 .*

Ici encore, nous démontrons seulement que la condition est nécessaire, tandis que les constructions du paragraphe 4.4 montreront qu'elle est aussi suffisante.

Preuve du théorème 6 (partie nécessaire) : D'après le Théorème 5, il est clair que la surface de base ne peut être que \mathbb{S}^2 où \mathbb{T}^2 . Voyons pourquoi le tore est exclu.

Soit $\mathcal{S}_c^p\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ une sphère de contact invariante sur un fibré principal en cercles M au-dessus de \mathbb{T}^2 , avec $\omega_i = \pi^*(\eta_i) + \pi^*(\varphi_i)\alpha$, pour $i = 1, 2, 3$. Nous allons montrer qu'il existe deux formes dans cette sphère de contact dont les ensembles singuliers se coupent, ce qui contredit la Proposition 2.

Rappelons que l'ensemble singulier d'un élément d'une sphère de contact invariante est une réunion non vide de cercles topologiques sur B , comme on a vu au paragraphe 4.1.

Soit Γ une composante connexe de Σ_{ω_1} . D'après la Proposition 2, les ensembles singuliers de deux éléments distincts et non opposés ne se coupent pas, donc la fonction φ associée à un élément arbitraire de la sphère de contact ne s'annule pas sur Γ , sauf pour φ_1 et $-\varphi_1$. Soit ω un élément de $\mathcal{S}_c^2\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ distinct de ω_1 et $-\omega_1$ et soit

$$\varphi = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \varphi_i, \quad \text{où } \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 = 1 \text{ et } \lambda_1 \notin \{-1, 1\}, \quad (4.2)$$

la fonction associée sur l'espace de base. On peut supposer que φ est positive sur Γ . Il y a alors un chemin sur la sphère des triplets $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ qui relie les coefficients de φ dans l'expression (4.2) à ceux de $-\varphi$ et qui évite les points $(1, 0, 0)$ et $(-1, 0, 0)$, c'est-à-dire les coefficients de $\pm\varphi_1$. Ce chemin correspond à un chemin dans $\mathcal{S}_c^2\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ qui relie ω et $-\omega$ et qui évite ω_1 and $-\omega_1$. Nous transformons donc de façon continue φ , qui est positive sur Γ , en $-\varphi$, qui est négative sur Γ . Il y a alors une fonction intermédiaire $\tilde{\varphi}$ qui correspond à un élément $\tilde{\omega}$ de $\mathcal{S}_c^2\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ et qui s'annule sur Γ , ce qui montre que Γ et $\Sigma_{\tilde{\omega}}$ se coupent. ■

4.4 Construction d'exemples

Dans les paragraphes précédents nous avons donné des conditions nécessaires pour l'existence de cercles et de sphères de contact sur des fibrés principaux en cercles au-dessus d'une surface. Maintenant nous allons voir qu'elles sont aussi suffisantes. Sur toutes les variétés des Théorèmes 5 et 6, c'est-à-dire sur tous les fibrés principaux en cercles au-dessus de \mathbb{S}^2 où de \mathbb{T}^2 , on peut construire des exemples.

Soit M un fibré principal en cercles au-dessus de \mathbb{S}^2 , avec application de fibration π et forme de connexion α . Soient aussi φ_1, φ_2 et φ_3 trois fonctions sur \mathbb{S}^2 telles que $\sum \varphi_i^2 = 1$. On définit les 1-formes suivantes sur M :

$$\begin{cases} \omega_1 &= \pi^*(\varphi_2 d\varphi_3 - \varphi_3 d\varphi_2) + \pi^*(\varphi_1) k \alpha \\ \omega_2 &= \pi^*(\varphi_3 d\varphi_1 - \varphi_1 d\varphi_3) + \pi^*(\varphi_2) k \alpha \\ \omega_3 &= \pi^*(\varphi_1 d\varphi_2 - \varphi_2 d\varphi_1) + \pi^*(\varphi_3) k \alpha, \end{cases}$$

où k est un nombre réel.

Lemme 4 — *On considère la forme $\omega = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \lambda_3 \omega_3$, où $\sum \lambda_i^2 = 1$. On a alors la formule suivante :*

$$\begin{aligned} \omega \wedge d\omega &= k \pi^* \left(\left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i \varphi_i \right) (\lambda_1 d\varphi_2 \wedge d\varphi_3 + \lambda_2 d\varphi_3 \wedge d\varphi_1 + \lambda_3 d\varphi_1 \wedge d\varphi_2) \right) \wedge \alpha \\ &\quad + k \pi^*(\Phi^*(\Omega)) \wedge \alpha + k^2 \pi^* \left(\left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i \varphi_i \right)^2 \right) \alpha \wedge d\alpha \end{aligned}$$

où Ω est la forme volume euclidienne sur \mathbb{S}^2 et $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Preuve : C'est un calcul facile, mais un peu long, où on utilise les relations $\sum \lambda_i^2 = 1$, $\sum \varphi_i^2 = 1$ et $\Phi^*(\Omega) = \varphi_3 d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 + \varphi_1 d\varphi_2 \wedge d\varphi_3 + \varphi_2 d\varphi_3 \wedge d\varphi_1$ et le fait que $d\alpha$ est une forme horizontale. α est la seule forme qui intervient qui ne soit pas un pullback de \mathbb{S}^2 . □

Ce lemme nous donne la possibilité de construire des sphères de contact sur des fibrés principaux en cercles au-dessus de \mathbb{S}^2 . En effet, à un ajustement de la forme de connexion α près, les formes $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ définies ci-dessus engendrent une sphère de contact pour un choix approprié de k et des fonctions $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

On considère des fonctions $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ telles que $\sum_{i=1}^3 \varphi_i^2 = 1$ et qui définissent une fibration nouée de \mathbb{S}^2 au-dessus de \mathbb{S}^2 , c'est-à-dire que l'ensemble singulier commun correspondant $\bigcap_{i=1}^3 \varphi_i^{-1}(0)$ est vide et que $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est de rang 2 partout. Comme le groupe de structure de la fibration est abélien, la forme $d\alpha$ est horizontale, il y a donc une forme ν sur la surface de base B telle que $d\alpha = \pi^*(\nu)$. Comme $\Phi^*(\Omega)$ est une forme volume sur \mathbb{S}^2 , il existe une fonction f telle que $\nu = f \Phi^*(\Omega)$ et des fonctions C_1, C_2 et C_3 telles que $d\varphi_2 \wedge d\varphi_3 = C_1 \Phi^*(\Omega)$, $d\varphi_3 \wedge d\varphi_1 = C_2 \Phi^*(\Omega)$ et $d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 = C_3 \Phi^*(\Omega)$. Le membre de droite de la formule du Lemme 4 devient alors

$$k(\pi^*((1 + k f (\sum_{i=1}^3 \lambda_i \varphi_i)^2 + (\sum_{i=1}^3 \lambda_i \varphi_i)(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3))\Phi^*(\Omega)) \wedge \alpha)(4.3)$$

Pour faire de cette forme une forme volume, on remarque que la fonction $(\sum_{i=1}^3 \lambda_i \varphi_i)(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3)$ est bornée sur \mathbb{S}^2 et qu'il suffit donc de choisir k suffisamment grand et du bon signe, si f ne s'annule pas. On remarque alors qu'en ajoutant à f la fonction $h = \frac{\int_{\mathbb{S}^2} f \Phi^*(\Omega)}{\int_{\mathbb{S}^2} \Phi^*(\Omega)} - f$, on obtient une fonction constante. C'est possible, pour la raison suivante : la forme $\eta = h \Phi^*(\Omega)$ vérifie $\int_{\mathbb{S}^2} \eta = 0$, $\pi^*(\eta)$ est donc une forme exacte sur M et il existe une 1-forme ξ telle que $d\xi = \pi^*(\eta)$. La fibration de M au-dessus de \mathbb{S}^2 est caractérisée par la valeur de $\int_{\mathbb{S}^2} \nu$, où $\pi^*(\nu)$ est la différentielle de la forme de connexion, donc $\alpha + \xi$ est une autre forme de connexion de la même fibration. Si on remplace donc α par $\alpha + \xi$, f devient constante sans que la fibration change.

Supposons donc f constante. Si f n'est pas nulle, l'expression (4.3) est une forme volume si on choisit k assez grande et du même signe que f . Si $f \equiv 0$, alors M est difféomorphe de façon équivariante à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ et il y a des exemples de sphères de contact invariantes sur de telles variétés (cf. [8], p.274). Cela nous donne des exemples de sphères de contact invariantes sur tous les fibrés principaux en cercles au-dessus de \mathbb{S}^2 .

Construisons maintenant des exemples de cercles de contact invariants sur des fibrés principaux en cercles au-dessus de \mathbb{T}^2 . Pour ce faire, on considère les 1-formes suivantes sur M :

$$\begin{cases} \omega_1 &= \pi^*(\cos \theta_1 d\theta_2) + \pi^*(\sin \theta_1) k \alpha \\ \omega_2 &= \pi^*(-\sin \theta_1 d\theta_2) + \pi^*(\cos \theta_1) k \alpha, \end{cases}$$

où θ_1 et θ_2 sont des pseudo-coordonnées sur \mathbb{T}^2 , α une forme de connexion de la fibration de M au-dessus de \mathbb{T}^2 et k un nombre réel. Si on pose $\omega = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2$, on obtient la formule

$$\omega \wedge d\omega = -k d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge \alpha + k^2(\lambda_1 \sin \theta_1 + \lambda_2 \cos \theta_1)^2 \alpha \wedge d\alpha. \quad (4.4)$$

Comme précédemment, il y a une fonction f telle que $d\alpha = f d\theta_1 \wedge d\theta_2$ et on peut supposer f constante, quitte à ajouter à α une 1-forme dont la différentielle vient d'une 2-forme basique dont l'intégrale est nulle sur le tore. Ainsi, (4.4) devient

$$\omega \wedge d\omega = k(k f (\lambda_1 \sin \theta_1 + \lambda_2 \cos \theta_1)^2 - 2) d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge \alpha. \quad (4.5)$$

Il est alors clair qu'il suffit de choisir k non nul et tel que $k \cdot f$ n'est pas positive pour que $\omega \wedge d\omega$ soit une forme volume, quels que soient les coefficients (λ_1, λ_2) .

On peut observer qu'un cercle de contact obtenu de cette façon est raide seulement si f est nulle, donc si $M = \mathbb{T}^3$.

Les constructions ci-dessus mènent à la proposition suivante qui donne des exemples de cercles et sphères de contact sur toutes les variétés des Théorèmes 5 et 6. Elle termine ainsi la preuve de ces deux théorèmes.

Proposition 3 — *Soit M un fibré principal en cercles au-dessus de \mathbb{S}^2 avec forme de connexion α , ainsi que φ_1, φ_2 et φ_3 trois fonctions sur \mathbb{S}^2 telles que $\sum \varphi_i^2 = 1$ partout et qui définissent une fibration nouée de \mathbb{S}^2 au-dessus de \mathbb{S}^2 . Il existe alors un nombre réel k et une 1-forme ξ sur M tels que les 1-formes*

$$\begin{cases} \omega_1 &= \pi^*(\varphi_2 d\varphi_3 - \varphi_3 d\varphi_2) + \pi^*(\varphi_1) k(\alpha + \xi) \\ \omega_2 &= \pi^*(\varphi_3 d\varphi_1 - \varphi_1 d\varphi_3) + \pi^*(\varphi_2) k(\alpha + \xi) \\ \omega_3 &= \pi^*(\varphi_1 d\varphi_2 - \varphi_2 d\varphi_1) + \pi^*(\varphi_3) k(\alpha + \xi) \end{cases}$$

engendrent une sphère de contact invariante sur M .

De façon analogue, si M est un fibré principal en cercles au-dessus de \mathbb{T}^2 avec forme de connexion $\tilde{\alpha}$ et si θ_1, θ_2 sont des pseudo-coordonnées sur \mathbb{T}^2 , alors il existe un nombre réel \tilde{k} et une 1-forme $\tilde{\xi}$ sur M tels que les 1-formes

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_1 &= \pi^*(\cos \theta_1 d\theta_2) + \pi^*(\sin \theta_1) \tilde{k}(\tilde{\alpha} + \tilde{\xi}) \\ \tilde{\omega}_2 &= \pi^*(-\sin \theta_1 d\theta_2) + \pi^*(\cos \theta_1) \tilde{k}(\tilde{\alpha} + \tilde{\xi}) \end{cases}$$

engendrent un cercle de contact invariant sur M .

Chapitre 5

Toupies de contact en dimension 3

5.1 Toupies de contact

On se place maintenant sur une variété riemannienne M de dimension 3 qui admet un cercle de contact. Dans cette situation, on peut parler de géodésiques, d'angles, de courbure et de vitesse de rotation. On se propose alors d'examiner le comportement géométrique des cercles de contact. En fait, on va considérer une structure géométrique plus générale qu'on appellera *faisceau de contact*.

Quand on se donne un cercle de contact sur une variété riemannienne M , les noyaux des éléments de ce cercle définissent un champ de faisceaux de plans autour d'un axe commun, appelé *âme du faisceau*. Or, l'on constate, par exemple, que sur \mathbb{S}^3 muni de la métrique habituelle, tout cercle de contact contenu dans la sphère de contact de l'exemple 6 vérifie des propriétés de régularité étonnantes énoncées ci-dessous.

Proposition 4 — *Soit $\mathcal{S}_c^2\{\omega_1, \omega_2\}$ un cercle de contact sur \mathbb{S}^3 contenu dans la sphère de contact de l'exemple 6. Le faisceau de contact défini par ce cercle de contact, c'est-à-dire le faisceau des structures de contact des éléments de $\mathcal{S}_c^2\{\omega_1, \omega_2\}$ vérifie alors les propriétés suivantes pour la métrique euclidienne induite sur \mathbb{S}^3 :*

1. *les courbes intégrales du champ des âmes sont des géodésiques ;*
2. *le long des géodésiques intégrales du champ des âmes, la vitesse de rotation du faisceau est constante ;*
3. *le long de toute géodésique transverse aux âmes, l'angle entre cette géodésique et le champ des âmes reste constant ;*
4. *le long de toute géodésique transverse aux âmes, la vitesse de rotation du champ des âmes autour de la géodésique est constante ;*
5. *le long de toute géodésique transverse aux âmes, la vitesse de rotation du faisceau sur lui-même est constante.*

Toutes les géodésiques sont considérées comme paramétrées par la longueur de l'arc.

Preuve : On peut supposer, quitte à faire un changement de variables, que les formes ω_1 et ω_2 sont les formes induites par $\alpha = \langle qi, dq \rangle$ et $\beta = \langle qj, dq \rangle$ de l'exemple 6. Considérons, sur \mathbb{S}^3 , le parallélisme défini par les champs de Reeb R_1 et R_2 respectifs des formes α et β , ainsi que le champ de vecteurs X qui vérifie $\omega_1(X) = \omega_2(X) = 0$ et $d\omega_1(X, R_2) = 1$.

Nous avons

$$(R_1)_q = qi, \quad (R_2)_q = qj \quad \text{et} \quad X_q = qk.$$

Pour la métrique euclidienne habituelle de \mathbb{S}^3 , le parallélisme défini par ces champs de vecteurs est orthonormé.

Le champ des âmes est donné par les droites définies par le champ de vecteurs X . Or, les courbes intégrales de X sont des grands cercles de \mathbb{S}^3 et X est unitaire, donc ses courbes intégrales sont bien des géodésiques.

Pour mesurer la vitesse à laquelle le faisceau tourne autour de son axe par rapport au transport parallèle, on étudie la vitesse de rotation de R_1 dans le plan orthogonal au champ des âmes, et ce, le long de la géodésique intégrale de X , parcourue à vitesse unitaire. Une géodésique intégrale de X qui passe par un point initial q_0 est donnée par

$$\gamma(s) = \cos(s) q_0 + \sin(s) q_0 k.$$

Un repère parallèle le long de γ est donné par

$$\begin{cases} (B_1)_{\gamma(s)} = \cos(s) (R_2)_{\gamma(s)} + \sin(s) (R_1)_{\gamma(s)} = q_0 j \\ (B_2)_{\gamma(s)} = -\sin(s) (R_2)_{\gamma(s)} + \cos(s) (R_1)_{\gamma(s)} = q_0 i \\ X_{\gamma(s)} = \dot{\gamma}(s) k = \dot{\gamma}(s). \end{cases}$$

Nous observons que la mesure de l'angle entre R_1 et B_1 est s , ce qui veut dire que X_1 tourne autour de X à vitesse constante, lorsqu'on se déplace le long de γ à vitesse unitaire.

Nous remarquons aussi que le repère parallèle le long de γ contient, outre $\dot{\gamma}(s)$, des vecteurs constants. Ce phénomène est général le long d'une géodésique de \mathbb{S}^3 . En effet, toute géodésique de \mathbb{S}^3 est un grand cercle et définit donc un 2-plan dans l'espace euclidien ambiant. En chaque point de la géodésique, le 2-plan de l'espace ambiant qui est orthogonal au plan de la géodésique est contenu dans le 3-plan qui est tangent à la 3-sphère. Tout repère de cette famille de 2-plans qui est parallèle le long de la géodésique pour la métrique de l'espace ambiant le sera aussi pour la métrique induite sur la 3-sphère. Or, un tel repère est formé de vecteurs constants.

Considérons maintenant un champ géodésique Z transverse au champ X . Sur \mathbb{S}^3 , un champ $Z = \cos \varphi \cos \theta R_1 + \cos \varphi \sin \theta R_2 + \sin \varphi X$ est géodésique si et seulement si on a

$$Z(\theta) = Z(\varphi) = 0.$$

Soit δ une géodésique intégrale de Z . Nous constatons que le produit scalaire $\langle Z, X \rangle$ est alors constant le long de δ , ce qui veut dire que l'angle entre Z et X ne varie pas le long de cette courbe.

On peut écrire $Z_q = qv$, où $v = \cos \varphi \cos \theta i + \cos \varphi \sin \theta j + \sin \varphi k$. On considère alors les vecteurs

$$\begin{aligned} v_1^\perp &= -\sin \theta i + \cos \theta j \\ v_2^\perp &= -\sin \varphi \cos \theta i - \sin \varphi \sin \theta j + \cos \varphi k, \end{aligned}$$

qui forment avec v une base orthonormée de l'espace des quaternions unitaires.

Un repère parallèle le long de δ est alors donné par

$$\left\{ \begin{aligned} (B_1)_{\delta(s)} &= \delta(0) v_1^\perp = -\sin \theta q_0 i + \cos \theta q_0 j \\ (B_2)_{\delta(s)} &= \delta(0) v_2^\perp = -\sin \varphi \cos \theta q_0 i - \sin \varphi \sin \theta q_0 j + \cos \varphi q_0 k \\ Z_{\delta(s)} &= \delta(s) v = -\sin s q_0 + \cos s \cos \varphi \cos \theta q_0 i \\ &\quad + \cos s \cos \varphi \sin \theta q_0 j + \cos s \sin \varphi q_0 k \end{aligned} \right.$$

et le parallélisme (R_1, R_2, X) s'écrit comme

$$\left\{ \begin{aligned} (R_1)_{\delta(s)} &= \delta(s) i = -\sin s \cos \varphi \cos \theta q_0 + \cos s q_0 i \\ &\quad + \sin s \sin \varphi q_0 j - \sin s \cos \varphi \sin \theta q_0 k \\ (R_2)_{\delta(s)} &= \delta(s) j = -\sin s \cos \varphi \sin \theta q_0 - \sin s \sin \varphi q_0 i \\ &\quad + \cos s q_0 j + \sin s \cos \varphi \cos \theta q_0 k \\ (X)_{\delta(s)} &= \delta(s) k = -\sin s \sin \varphi q_0 + \sin s \cos \varphi \sin \theta q_0 i \\ &\quad - \sin s \cos \varphi \cos \theta q_0 j + \cos s q_0 k \end{aligned} \right.$$

dans la même base $(q_0, q_0 i, q_0 j, q_0 k)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \langle X, B_1 \rangle_{\delta(s)} &= -\sin s \cos \varphi \\ \langle R_1, Z \rangle_{\delta(s)} &= \cos \varphi \cos \theta. \end{aligned}$$

On peut voir sur le premier produit scalaire que la projection de X sur le plan engendré par B_1 et B_2 tourne à vitesse constante, ce qui veut dire que X tourne à vitesse constante autour de Z , donc que le champ des âmes du faisceau tourne à vitesse constante autour de δ , lorsqu'on se déplace le long de δ à vitesse constante.

Pour mesurer la vitesse à laquelle le faisceau tourne sur lui-même, on peut observer la vitesse de rotation de la projection de Z dans le plan engendré par R_1 et R_2 . On regarde donc la vitesse à laquelle Z parcourt les plans qui constituent le faisceau. Étant donné que le champ des âmes du faisceau tourne autour de δ à vitesse constante, le fait que la projection de Z soit constante dans le plan engendré par R_1 et R_2 , fait exprimé par le deuxième produit scalaire, montre que le faisceau tourne autour de lui-même à vitesse constante également. ■

Il est alors naturel de se demander quelles sont les variétés qui admettent des structures vérifiant de telles propriétés, que nous appellerons *toupies de contact*. Nous en donnerons une définition précise un peu plus loin (cf. Définition 8).

Sur une variété M de dimension 3, on se donne un champ de droites D et un champ de plans transverses P , ainsi qu'un cocycle de difféomorphismes entre les droites projectives des plans transverses, c'est-à-dire une famille d'applications

$$\varphi_{xy}: \mathbb{P}(P_x) \longrightarrow \mathbb{P}(P_y),$$

pour chaque couple $x, y \in M$ telle que

$$\varphi_{xy} \circ \varphi_{yz} = \varphi_{xz}.$$

Le champ D définit un champ de faisceaux de plans \mathcal{F} , où en tout point x de M le faisceau \mathcal{F}_x est constitué de tous les plans qui contiennent la droite D_x . Sur ce champ de faisceaux de plans, on définit une indexation de la façon suivante. On fixe un point de référence x_0 de M . Soit $x \in M$ et H un plan de \mathcal{F}_x . On associe alors à H l'élément $\varphi_{xx_0}(\pi_x(H))$ de $\mathbb{P}(P_{x_0})$, où

$$\pi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathbb{P}(P_x)$$

est l'application naturelle qui à un plan de \mathcal{F}_x associe sa droite d'intersection avec le plan P_x . On obtient ainsi un champ de faisceaux de plans qui est indexé par $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{P}(P_{x_0})$.

On peut aussi considérer un tel champ de faisceaux de plans indexé comme un faisceau de champs de plans. En effet, si l'on regarde le faisceau de plans en un point donné, chacun de ses plans définit un champ de plans sur la variété, puisqu'on lui fait correspondre un plan en chaque autre point de la variété, via le cocycle de difféomorphismes. Comme tous ces champs de plans ont un champ de droites en commun, on peut considérer le champ de faisceaux comme un faisceau de champs de plans.

Définition 6 — *Un champ de faisceaux de plans défini comme ci-dessus est appelé champ de faisceaux indexé.*

On l'appelle faisceau de contact (resp. faisceau intégrable), si tous les champs de plans qui constituent ce faisceau de champs de plans sont des structures de contact (resp. des champs de plans intégrables).

Le champ de droites donné est appelé champ des âmes du faisceau.

Un cercle de contact rond définit de façon naturelle un faisceau de contact. Si on choisit deux formes génératrices ω_1 et ω_2 , respectivement de champ de Reeb R_1 et R_2 , alors le champ des droites communes aux noyaux des deux formes et le champ des plans engendrés par R_1 et R_2 déterminent une structure de faisceau de contact. Les champs de plans du faisceau sont donnés par $(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2)^{-1}(0)$, pour les différentes valeurs de $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{S}^1$. La famille de difféomorphismes est alors définie de la manière suivante. Soient x et y deux points de M et ω un élément du cercle de contact. L'application φ_{xy} est donnée par

$$\varphi_{xy}: \pi_x(\omega_x^{-1}(0)) \longmapsto \pi_y(\omega_y^{-1}(0)).$$

Une condition de compatibilité raisonnable entre une métrique et un tel faisceau est la suivante :

Définition 7 — *Une métrique sur la variété M est dite compatible avec un faisceau indexé si, en tout point de M , l'âme et le plan transverse donnés sont orthogonaux et si les difféomorphismes entre les droites projectives des plans transverses sont des isométries pour la métrique induite.*

Un parallélisme (X_1, X_2, X_3) est dit adapté à un faisceau indexé, si X_3 est parallèle à l'âme du faisceau et si toute combinaison linéaire de X_1 et de X_2 appartient, en chaque point de M , à un plan du même champ de plans du faisceau (de champs de plans).

En particulier, pour une métrique compatible, l'angle entre les plans de deux champs de plans d'un tel faisceau est constant sur la variété.

Si un parallélisme (X_1, X_2, X_3) est adapté à un faisceau, alors ce dernier est complètement déterminé par le parallélisme. En effet, comme deux plans du faisceau forment le même angle en chaque point de la variété, une combinaison linéaire de X_1 et X_2 appartient toujours au même plan du faisceau. Chaque plan du faisceau est donc engendré par X_3 et une combinaison linéaire de X_1 et X_2 dont les coefficients ne dépendent pas du point de la variété.

Lemme 5 — *Si un parallélisme (X_1, X_2, X_3) est adapté à un faisceau donné, alors un autre parallélisme (Y_1, Y_2, Y_3) est adapté à ce même faisceau si et seulement si la matrice A de (Y_1, Y_2, Y_3) dans la base (X_1, X_2, X_3) est de la forme*

$$\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & 0 \\ \lambda c & \lambda d & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

où a, b, c et d sont des réels vérifiant $ad - bc \neq 0$ et où λ et μ sont des fonctions sans zéros sur M .

Preuve : Soit Φ l'application qui a A comme matrice. Pour que (Y_1, Y_2, Y_3) soit adapté au même faisceau que (X_1, X_2, X_3) , il faut que Y_3 définisse le champ des âmes du faisceau et que Y_1 et Y_2 engendrent le plan transverse au champ des âmes qui est associé au faisceau. Φ doit donc laisser ces deux champs invariants. Comme (X_1, X_2, X_3) est adapté au faisceau, toute combinaison linéaire de X_1 et de X_2 appartient, en chaque point de la variété, au même champ de plans du faisceau. Pour que Y_1 et Y_2 , ainsi que leurs combinaisons linéaires, vérifient la même propriété, il faut donc que Y_1 et Y_2 soient colinéaires à des combinaisons linéaires fixes de X_1 et de X_2 , A doit donc être de la forme indiquée dans l'énoncé. □

Définition 8 — *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension 3. Un faisceau intégrable, resp. de contact, est appelé une toupie intégrable, resp.*

toupie de contact, s'il existe un parallélisme (X_1, X_2, X_3) , qui est orthonormé et adapté au faisceau tel que :

- i) X_3 est un champ géodésique ;
- ii) le long de toute courbe intégrale ρ de X_3 , la vitesse de rotation de X_1 est constante ;
- iii) le long de toute géodésique γ transverse au champ des âmes, l'angle entre γ et X_3 est constant ;
- iv) le long de toute géodésique γ transverse au champ des âmes, la vitesse de rotation de X_3 autour de γ est constante ;
- v) le long de toute géodésique γ transverse au champ des âmes, la vitesse de rotation de X_1 autour de X_3 est constante.

On considère que toutes les géodésiques sont paramétrées par la longueur de l'arc.

On dit alors que le parallélisme (X_1, X_2, X_3) définit la toupie.

Remarque : Une toupie est complètement déterminée par un parallélisme qui vérifie ces cinq points.

Cette définition donne une description géométrique des toupies. Pour pouvoir travailler avec ces objets, nous en donnons maintenant une caractérisation en termes de crochets de Lie des parallélismes qui définissent une toupie.

Théorème 7 — *Un parallélisme (X_1, X_2, X_3) sur une variété M définit une toupie si et seulement si les crochets correspondants sont de la forme suivante :*

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = c X_3 \\ [X_2, X_3] = k X_1 \\ [X_3, X_1] = k X_2, \end{cases} \quad (5.1)$$

où c et k sont des nombres réels.

Si $k = 0$, alors la toupie est intégrable. Dans ce cas, si $c = 0$, alors M est difféomorphe à un quotient de \mathbb{R}^3 et si $c \neq 0$, alors M est difféomorphe à un quotient du groupe de Heisenberg.

Si $k \neq 0$, la toupie est de contact. Dans ce cas, si $c = 0$, alors M est difféomorphe à un quotient du revêtement universel de E_2 , le groupe des isométries positives de \mathbb{R}^2 ; si $c \cdot k > 0$, alors M est difféomorphe à un quotient de \mathbb{S}^3 ; si $c \cdot k < 0$, alors M est difféomorphe à un quotient du revêtement universel de $Sl(2, \mathbb{R})$. Ici, quotient veut dire quotient pour l'action à gauche d'un sous-groupe discret.

Preuve : Soit (X_1, X_2, X_3) un parallélisme qui définit une toupie. On écrit les crochets de ces champs comme suit :

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = C_{12}^1 X_1 + C_{12}^2 X_2 + C_{12}^3 X_3 \\ [X_2, X_3] = C_{23}^1 X_1 + C_{23}^2 X_2 + C_{23}^3 X_3 \\ [X_3, X_1] = C_{31}^1 X_1 + C_{31}^2 X_2 + C_{31}^3 X_3. \end{cases}$$

Nous allons exprimer les conditions géométriques de la Définition 8 en termes de C_{ij}^k .

i) X_3 est géodésique si et seulement si $\nabla_{X_3}X_3 = 0$, donc si et seulement si

$$C_{31}^3 = C_{23}^3 = 0, \quad (5.2)$$

puisque $\nabla_{X_3}X_3 = C_{31}^3X_1 + C_{23}^3X_2$.

ii) Soit ρ une géodésique intégrale du champ des âmes du faisceau, soit (B_1, B_2, X_3) un repère orthonormé et parallèle le long de ρ et soit θ l'angle entre B_1 et X_1 . Si ρ est paramétrée par la longueur de l'arc s , nous avons $X_1 = \cos\theta(s)B_1 + \sin\theta(s)B_2$, donc

$$\begin{aligned} g(\nabla_{X_3}X_1, B_1) &= \frac{\partial}{\partial s}g(X_1, B_1) = -\dot{\theta} \sin\theta \\ g(\nabla_{X_3}X_1, B_2) &= \frac{\partial}{\partial s}g(X_1, B_2) = \dot{\theta} \cos\theta \\ g(\nabla_{X_3}X_1, X_3) &= \frac{\partial}{\partial s}g(X_1, X_3) = 0, \end{aligned}$$

car $\nabla_{X_3}B_1 = \nabla_{X_3}B_2 = \nabla_{X_3}X_3 = 0$ puisque (B_1, B_2, X_3) est parallèle le long de ρ et donc $g(\nabla_{X_3}B_1, X_1) = g(\nabla_{X_3}B_2, X_1) = g(\nabla_{X_3}X_3, X_1) = 0$. Ainsi, $\nabla_{X_3}X_1 = \dot{\theta}(\cos\theta B_2 - \sin\theta B_1)$.

En un point $\rho(s_0)$ donné, posons $B_1(s_0) = X_1(s_0)$, c'est-à-dire $\theta(s_0) = 0$. On peut faire ce choix, puisque la seule condition que le champ B_1 doit vérifier est d'être orthogonal à X_3 et parallèle le long de $\dot{\rho}$. Ainsi, on a

$$\nabla_{X_3}X_1(s_0) = \dot{\theta}(s_0)B_2(s_0) = \dot{\theta}(s_0)X_2(s_0).$$

D'autre part, nous savons que

$$\nabla_{X_3}X_1 = \frac{1}{2}(C_{31}^2 + C_{23}^1 + C_{21}^3)X_2 + C_{31}^3X_3.$$

On a donc

$$\frac{1}{2}(C_{31}^2 + C_{23}^1 + C_{21}^3)(s_0) = \dot{\theta}(s_0).$$

Or, les C_{ij}^k ne dépendent pas du choix que l'on fait sur le champ B_1 , ces fonctions sont intrinsèques aux champs X_1, X_2 et X_3 . En tous les autres points de ρ , on peut donc faire le même raisonnement et on obtient ainsi la relation

$$\frac{1}{2}(C_{31}^2 + C_{23}^1 + C_{21}^3)(s) = \dot{\theta}(s). \quad (5.3)$$

La condition que $\dot{\theta}$ soit constant s'écrit donc

$$\frac{1}{2}(C_{31}^2 + C_{23}^1 + C_{21}^3)(s) = \dot{\theta} = \text{const.} \quad (5.4)$$

iii), iv), v) Soit maintenant γ une géodésique transverse au champ des âmes du faisceau et paramétrée par la longueur de l'arc s et soit $(B_1, B_2, \hat{\gamma})$ un repère parallèle le long de γ , soit φ l'angle entre $\hat{\gamma}$ et X_3 , soit \hat{X}_3 la

projection de X_3 sur le plan engendré par B_1 et B_2 et soit ψ l'angle entre \tilde{X}_3 et B_1 . Soit aussi $\hat{\gamma}$ la projection de $\dot{\gamma}$ sur le plan engendré par X_1 et X_2 et soit δ l'angle entre $\hat{\gamma}$ et X_1 . On a

$$\varphi \in [0, \pi[, \quad \psi \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad \delta \in [0, 2\pi[.$$

Nous avons alors

$$\begin{cases} B_1 &= (-\cos \varphi \cos \delta \cos \psi + \sin \delta \sin \psi)X_1 + (-\cos \varphi \sin \delta \cos \psi \\ &\quad - \cos \delta \sin \psi)X_2 + \sin \varphi \cos \psi X_3 \\ B_2 &= (\cos \varphi \cos \delta \sin \psi + \sin \delta \cos \psi)X_1 + (\cos \varphi \sin \delta \sin \psi \\ &\quad - \cos \delta \cos \psi)X_2 - \sin \varphi \sin \psi X_3 \\ \dot{\gamma} &= \sin \varphi \cos \delta X_1 + \sin \varphi \sin \delta X_2 + \cos \varphi X_3. \end{cases}$$

Pour voir cela, nous introduisons le vecteur Y qui est unitaire et orthogonal à la fois à X_3 et à $\dot{\gamma}$ de façon à ce que le repère $(X_3, \dot{\gamma}, Y)$ soit orienté positivement. Dans ce cas, nous avons

$$B_1 = \cos \psi \frac{\tilde{X}_3}{\sin \varphi} - \sin \psi Y \quad \text{et} \quad B_2 = -\sin \psi \frac{\tilde{X}_3}{\sin \varphi} - \cos \psi Y,$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{X}_3 &= \sin \varphi (\cos \varphi (-\cos \delta X_1 - \sin \delta X_2) + \sin \varphi X_3) \\ \text{et } Y &= -\sin \delta X_1 + \cos \delta X_2. \end{aligned}$$

Remarquons que \tilde{X}_3 n'est pas nul, puisque la transversalité de γ par rapport au champ des âmes nous garantit que φ est non nul.

Nous avons alors

$$X_3 = \sin \varphi \cos \psi B_1 - \sin \varphi \sin \psi B_2 + \cos \varphi \dot{\gamma}$$

et donc

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\dot{\gamma}} X_3, B_1) &= \frac{\partial}{\partial s} g(X_3, B_1) = \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \psi - \dot{\psi} \sin \varphi \sin \psi \\ g(\nabla_{\dot{\gamma}} X_3, B_2) &= \frac{\partial}{\partial s} g(X_3, B_2) = -\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \psi - \dot{\psi} \sin \varphi \cos \psi \\ g(\nabla_{\dot{\gamma}} X_3, \dot{\gamma}) &= \frac{\partial}{\partial s} g(X_3, \dot{\gamma}) = -\dot{\varphi} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} X_3 &= (\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \psi - \dot{\psi} \sin \varphi \sin \psi) B_1 \\ &\quad + (-\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \psi - \dot{\psi} \sin \varphi \cos \psi) B_2 - \dot{\varphi} \sin \varphi \dot{\gamma}. \end{aligned}$$

L'hypothèse que X_3 forme un angle constant avec $\dot{\gamma}$ se traduit par la condition $\dot{\varphi} = 0$. Si on choisit alors, en un point donné $\gamma(s_0)$, $B_1(s_0) = Y(s_0)$ et donc $\psi(s_0) = \frac{3\pi}{2}$, on obtient, au point $\gamma(s_0)$,

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} X_3 &= \dot{\psi} \sin \varphi B_1 \\ &= -\dot{\psi} \sin \varphi \sin \delta X_1 + \dot{\psi} \sin \varphi \cos \delta X_2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous savons que

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}} X_3 &= \nabla_{\sin \varphi \cos \delta X_1 + \sin \varphi \sin \delta X_2 + \cos \varphi X_3} X_3 \\ &= \left(\frac{1}{2} \sin \varphi \sin \delta (C_{23}^1 + C_{12}^3 + C_{13}^2) + \sin \varphi \cos \delta C_{13}^1\right) X_1 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \sin \varphi \cos \delta (C_{13}^2 + C_{21}^3 + C_{23}^1) + \sin \varphi \sin \delta C_{23}^2\right) X_2.\end{aligned}$$

En comparant ce résultat avec celui du calcul précédent, nous avons alors les équations suivantes au point $\gamma(s_0)$:

$$\frac{1}{2} \sin \varphi \sin \delta (C_{23}^1 + C_{12}^3 + C_{13}^2) + \sin \varphi \cos \delta C_{13}^1 = -\dot{\psi} \sin \varphi \sin \delta \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{2} \sin \varphi \cos \delta (C_{13}^2 + C_{21}^3 + C_{23}^1) + \sin \varphi \sin \delta C_{23}^2 = \dot{\psi} \sin \varphi \cos \delta \quad (5.6)$$

Comme précédemment, le choix de B_1 que nous avons fait au point $\gamma(s_0)$ n'influe pas sur les valeurs de δ ni sur celles des C_{ij}^k . Les équations obtenues sont donc valables tout le long de γ .

Faisons des calculs analogues au précédent pour les vecteurs $\nabla_{\dot{\gamma}} X_1$ et $\nabla_{\dot{\gamma}} X_2$.

Nous avons

$$\begin{aligned}X_1 &= (-\cos \varphi \cos \delta \cos \psi + \sin \delta \sin \psi) B_1 \\ &\quad + (\cos \varphi \cos \delta \sin \psi + \sin \delta \cos \psi) B_2 + \sin \varphi \cos \delta \dot{\gamma} \\ X_2 &= (-\cos \varphi \sin \delta \cos \psi - \cos \delta \sin \psi) B_1 \\ &\quad + (\cos \varphi \sin \delta \sin \psi - \cos \delta \cos \psi) B_2 + \sin \varphi \sin \delta \dot{\gamma},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}} X_1 &= (\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \delta \cos \psi + \dot{\delta}(\cos \varphi \sin \delta \cos \psi + \cos \delta \sin \psi) \\ &\quad + \dot{\psi}(\cos \varphi \cos \delta \sin \psi + \sin \delta \cos \psi)) B_1 \\ &\quad + (-\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \delta \sin \psi + \dot{\delta}(-\cos \varphi \sin \delta \sin \psi + \cos \delta \cos \psi) \\ &\quad + \dot{\psi}(\cos \varphi \cos \delta \cos \psi - \sin \delta \sin \psi)) B_2 \\ &\quad + (\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \delta - \dot{\delta} \sin \varphi \sin \delta) \dot{\gamma} \\ \nabla_{\dot{\gamma}} X_2 &= (\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \delta \cos \psi + \dot{\delta}(-\cos \varphi \cos \delta \cos \psi + \sin \delta \sin \psi) \\ &\quad + \dot{\psi}(\cos \varphi \sin \delta \sin \psi - \cos \delta \cos \psi)) B_1 \\ &\quad + (-\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \delta \sin \psi + \dot{\delta}(\cos \varphi \cos \delta \sin \psi + \sin \delta \cos \psi) \\ &\quad + \dot{\psi}(\cos \varphi \sin \delta \cos \psi + \cos \delta \sin \psi)) B_2 \\ &\quad + (\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \delta + \dot{\delta} \sin \varphi \cos \delta) \dot{\gamma}.\end{aligned}$$

En tenant compte des hypothèses $\dot{\varphi} = 0$, $\dot{\delta} = \text{const.}$ et $\dot{\psi} = \text{const.}$, nous avons donc, au point $\gamma(s_0)$,

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}} X_1 &= (-\dot{\delta} - \dot{\psi} \cos \varphi) X_2 + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \delta X_3 \\ \nabla_{\dot{\gamma}} X_2 &= (\dot{\delta} + \dot{\psi} \cos \varphi) X_1 - \dot{\psi} \sin \varphi \cos \delta X_3.\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous savons que

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}} X_1 &= (\sin \varphi \sin \delta C_{21}^2 + \frac{1}{2} \cos \varphi (C_{31}^2 + C_{21}^3 + C_{23}^1)) X_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin \varphi \sin \delta (C_{21}^3 + C_{32}^1 + C_{31}^2) X_3 \\ \nabla_{\dot{\gamma}} X_2 &= (\sin \varphi \cos \delta C_{12}^1 + \frac{1}{2} \cos \varphi (C_{32}^1 + C_{12}^3 + C_{13}^2)) X_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \delta (C_{12}^3 + C_{31}^2 + C_{32}^1) X_3.\end{aligned}$$

D'où les relations

$$\sin \varphi \sin \delta C_{21}^2 + \frac{1}{2} \cos \varphi (C_{31}^2 + C_{21}^3 + C_{23}^1) = -\dot{\delta} - \dot{\psi} \cos \varphi \quad (5.7)$$

$$\frac{1}{2} \sin \varphi \sin \delta (C_{21}^3 + C_{32}^1 + C_{31}^2) = \dot{\psi} \sin \varphi \sin \delta \quad (5.8)$$

$$\sin \varphi \cos \delta C_{12}^1 + \frac{1}{2} \cos \varphi (C_{32}^1 + C_{12}^3 + C_{13}^2) = \dot{\delta} + \dot{\psi} \cos \varphi \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{2} \sin \varphi \cos \delta (C_{12}^3 + C_{31}^2 + C_{32}^1) = -\dot{\psi} \sin \varphi \cos \delta, \quad (5.10)$$

qui sont, pour les mêmes raisons que précédemment, valables tout le long de γ .

On peut simplifier par $\sin \varphi$ et $\sin \delta$ dans l'équation (5.8), le premier parce qu'il ne s'annule pas et le second parce qu'il ne s'annule qu'en des points isolés de γ . Or, les fonctions C_{ij}^k étant continues, on peut les prolonger continuellement en ces points isolés de γ . La même remarque est valable pour l'équation (5.10).

En ajoutant à cela la relation de Jacobi

$$[[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2] = 0,$$

ce qui donne, en tenant compte de (5.2),

$$C_{23}^2 C_{12}^1 - C_{12}^2 C_{23}^1 + X_1(C_{23}^1) + X_2(C_{13}^1) + X_3(C_{12}^1) = 0 \quad (5.11)$$

$$C_{13}^1 C_{12}^2 + C_{12}^1 C_{31}^2 + X_1(C_{23}^2) + X_2(C_{31}^2) + X_3(C_{12}^2) = 0 \quad (5.12)$$

$$C_{23}^2 C_{12}^3 - C_{31}^1 C_{12}^3 + X_3(C_{12}^3) = 0, \quad (5.13)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}C_{23}^1 &= C_{31}^2 && \text{grâce à (5.8) et (5.10),} \\ C_{23}^1 = \text{const.}, C_{31}^2 = \text{const.}, C_{12}^3 &= \text{const.} && \text{grâce à (5.4) et (5.8),} \\ C_{13}^1 &= 0 && \text{grâce à (5.5) et (5.8),} \\ C_{23}^2 &= 0 && \text{grâce à (5.6) et (5.8),} \\ C_{21}^2 &= 0 && \text{grâce à (5.7),} \\ C_{12}^1 &= 0 && \text{grâce à (5.9).}\end{aligned}$$

Les deux derniers points sont dus au fait que δ varie le long de γ . Comme $\dot{\delta} = \text{const.}$, δ varie de façon linéaire. Au cas où $\dot{\delta} = 0$, il faut utiliser, en plus, les équations (5.11) et (5.12).

Ces relations laissent deux degrés de liberté pour les coefficients C_{ij}^k et montrent que les champs X_1, X_2 et X_3 vérifient bien (5.1).

Démontrons maintenant la réciproque.

Soit (X_1, X_2, X_3) un parallélisme vérifiant les relations (5.1). Nous allons voir qu'il définit alors une toupie.

- i) Comme $C_{31}^3 = C_{23}^3 = 0$, on a $\nabla_{X_3} X_3 = 0$, le champ X_3 est donc géodésique.
- ii) Comme C_{31}^3, C_{31}^2 et C_{31}^1 sont des constantes, $\dot{\theta}$ est constante aussi, d'après (5.4), donc, le long d'une géodésique intégrale γ de X_3 , X_1 tourne autour de X_3 à vitesse constante.
- iii) Soit Z un champ géodésique sur M . Si on note $Z = f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3$, la condition de géodécité $\nabla_Z Z = 0$ implique que $Z(f_3) = 0$ (il suffit de remplacer Z par son expression et de développer le calcul). L'angle entre Z et X_3 est donc constant le long d'une géodésique intégrale de Z .
- iv), v) Comme nous avons déjà démontré que l'angle entre X_3 et une géodésique transverse est constant le long de celle-ci, nous pouvons utiliser les équations (5.7) et (5.8) pour établir que $\dot{\psi}$ et $\dot{\delta}$ sont des constantes.

Soit ω_1, ω_2 et ω_3 les formes duales des champs de vecteurs X_1, X_2 et X_3 . Par conséquent, ils forment une base de l'espace des 1-formes différentielles sur M et vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} d\omega_3 &= -c\omega_1 \wedge \omega_2 \\ d\omega_2 &= -k\omega_3 \wedge \omega_1 \\ d\omega_1 &= -k\omega_2 \wedge \omega_3. \end{cases} \quad (5.14)$$

Pour chaque combinaison linéaire $\omega^t = \cos t \omega_1 + \sin t \omega_2$ des formes ω_1 et ω_2 , le noyau correspondant constitue l'un des champs de plans du faisceau. En effet, on a $\omega^t(-\sin t X_1 + \cos t X_2) = 0$ et le noyau de ω^t est donc engendré par X_3 et $-\sin t X_1 + \cos t X_2$, qui forme un angle constant avec X_1 et définit donc un champ de plans du faisceau.

Si $k = 0$, ω_1 et ω_2 sont intégrables, ainsi que toutes leurs combinaisons linéaires, le faisceau est donc intégrable.

Si $k \neq 0$, ω_1 et ω_2 sont des formes de contact, ainsi que leurs combinaisons linéaires. Ces deux formes engendrent donc un cercle de contact $\mathcal{S}_c^2\{\omega_1, \omega_2\}$. Ce dernier est rond, puisque la forme ω^t admet $\cos t X_1 + \sin t X_2$ comme champ de Reeb, et il définit le faisceau que nous étudions, puisque toute combinaison linéaire $\cos t X_1 + \sin t X_2$ de X_1 et de X_2 annule toujours le même élément $\omega^{t+\frac{\pi}{2}}$ du cercle de contact. Ce faisceau est donc un faisceau de contact.

Si le parallélisme (X_1, X_2, X_3) vérifie les relations (5.1), cela définit, sur la variété M , une action localement libre du groupe de Lie simplement connexe

dont l'algèbre de Lie est définie par ces relations. D'après la classification des algèbres de Lie en dimension 3, il s'agit, suivant le cas, de l'algèbre de Lie de E_2 , de $so(3, \mathbb{R})$ ou de $sl(2, \mathbb{R})$. M est donc difféomorphe à un quotient d'un de ces groupes. ■

Ce résultat complète, dans le cadre des toupies de contact, le théorème de H. Geiges et de J. Gonzalo qui classifie les variétés de dimension 3 fermées et orientables qui admettent un cercle de contact raide (cf. [7], voir aussi section 2.2). D'après ce théorème, il existe un cercle de contact raide sur une variété fermée et orientable M si et seulement si M est un quotient par l'action d'un sous-groupe discret de l'un des revêtements universels de E_2 , de $SO(3, \mathbb{R})$ ou de $Sl(2, \mathbb{R})$.

Le Théorème 7 propose alors une preuve alternative du fait que sur toutes ces variétés il existe un cercle de contact raide, puisqu'il implique l'existence d'une toupie de contact sur ces variétés et puisqu'on peut toujours trouver un cercle de contact raide qui définit une toupie de contact donnée (cf. Corollaire 2).

Il en découle également que sur toutes les variétés sur lesquelles il existe un cercle de contact raide, il existe aussi une toupie de contact, car tous les quotients par un sous-groupe discret des trois groupes de Lie en question admettent un parallélisme dont les crochets vérifient les relations (5.1).

Par contre, tous les cercles de contact raides ne définissent pas forcément une toupie de contact et nous ne pouvons donc pas déduire de notre théorème qu'il n'y a des cercles de contact raides que sur ces variétés-là.

Pour une variété donnée, nous nous posons alors la question de savoir quelles sont les métriques pour lesquelles on peut trouver un cercle de contact qui définisse une toupie de contact. Nous cherchons aussi à savoir dans quelle mesure la donnée d'une métrique détermine les toupies de contact qu'on peut y associer et quelle latitude on a pour choisir une métrique pour laquelle un cercle de contact donné définit une toupie de contact. Nous répondrons à ces questions dans les paragraphes suivants.

Pour le moment, nous allons démontrer trois corollaires du Théorème 7.

Corollaire 2 — *Toute toupie de contact est donnée par une structure de Cartan, c'est-à-dire par un cercle de contact raide $\mathcal{S}_c^1\{\omega_1, \omega_2\}$ tel que $\omega_1 \wedge d\omega_2 = 0$.*

Preuve : Dans l'avant-dernier paragraphe de la preuve du Théorème 7 nous montrons qu'une toupie de contact est toujours définie par un cercle de contact rond. Le cercle de contact qu'on y étudie est une structure de Cartan, puisque ses générateurs ω_1 et ω_2 vérifient les relations

$$\omega_1 \wedge d\omega_1 = \omega_2 \wedge d\omega_2 \quad \text{et} \quad \omega_1 \wedge d\omega_2 = \omega_2 \wedge d\omega_1 = 0.$$

□

Corollaire 3 *Un champ de vecteurs unitaire qui définit le champ des âmes d'une toupie est un champ de Killing.*

Preuve : Un champ de vecteurs Z est un champ de Killing si et seulement s'il vérifie les relations suivantes.

$$\langle \nabla_X Z, Y \rangle + \langle \nabla_Y Z, X \rangle = 0, \quad \text{pour tout } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Si Z est unitaire et définit le champ des âmes d'un toupie, alors il existe un parallélisme (X_1, X_2, Z) de M qui vérifie les relations (5.1). Quels que soient alors les champs de vecteurs

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 Z \quad \text{et} \quad Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 Z,$$

la relation ci-dessus est satisfaite et Z est donc un champ de Killing. □

Corollaire 4 — *Soit \mathcal{T} une toupie de contact sur une variété M définie par un parallélisme (X_1, X_2, X_3) . Alors un autre parallélisme (Y_1, Y_2, Y_3) de M définit également \mathcal{T} si et seulement si la matrice A de (Y_1, Y_2, Y_3) dans la base (X_1, X_2, X_3) est de la forme*

$$\begin{pmatrix} \lambda \cos \theta & \lambda \sin \theta & 0 \\ -\lambda \sin \theta & \lambda \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

où θ est un réel et où λ et μ sont des réels non nuls.

Preuve : Supposons que les deux parallélismes en question définissent la toupie \mathcal{T} . Comme (X_1, X_2, X_3) et (Y_1, Y_2, Y_3) sont adaptés au faisceau de \mathcal{T} , nous savons, d'après le Lemme 5, que (Y_1, Y_2, Y_3) peut s'écrire

$$\begin{cases} Y_1 = \lambda a X_1 + \lambda b X_2 \\ Y_2 = \lambda c X_1 + \lambda d X_2 \\ Y_3 = \mu X_3, \end{cases}$$

où a, b, c et d sont des réels tels que $ad - bc \neq 0$ et où λ et μ sont des fonctions sans zéros sur M .

Comme le parallélisme (X_1, X_2, X_3) vérifie les relations (5.1), nous avons alors

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_2] &= c \lambda (ad - bc) X_3 = \frac{c \lambda (ad - bc)}{\mu} Y_3 \\ [Y_2, Y_3] &= k \lambda \mu (d X_1 - c X_2) = k \mu \left(\frac{c^2 + d^2}{ad - bc} Y_1 - \frac{ac + bd}{ad - bc} Y_2 \right) \\ [Y_3, Y_1] &= k \lambda \mu (a X_2 - b X_1) = k \mu \left(\frac{a^2 + b^2}{ad - bc} Y_1 + \frac{ac + bd}{ad - bc} Y_2 \right). \end{aligned}$$

Le parallélisme (Y_1, Y_2, Y_3) vérifie donc les relations (5.1) si et seulement si on a

$$\frac{c\lambda(ad-bc)}{\mu} = \text{const.}, \quad c^2 + d^2 = a^2 + b^2, \quad ac + bd = 0, \quad k\mu \frac{c^2 + d^2}{ad - bc} = \text{const.}$$

Quitte à multiplier λ par un facteur constant, on peut alors supposer que $c^2 + d^2 = a^2 + b^2 = 1$. Les relations précédentes montrent que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice d'une rotation. Son angle est constant, puisque a, b, c et d sont des constantes. On peut également conclure que λ et μ sont des constantes. La matrice A est donc de la forme indiquée dans l'énoncé.

Inversement, si la matrice A est de cette forme, les vecteurs Y_1, Y_2 et Y_3 vérifient les relations (5.1) et définissent donc une toupie, d'après le Théorème 7. De plus, le parallélisme (Y_1, Y_2, Y_3) est adapté au même faisceau que (X_1, X_2, X_3) , d'après le Lemme 5. Il définit donc la même toupie \mathcal{T} . □

5.2 Métriques pivotantes

Comme dans les relations (5.1) les vecteurs X_1 et X_2 jouent un rôle symétrique, l'orientation mise à part, une métrique qui rend orthonormé un parallélisme vérifiant ces relations doit être, dans un certain sens, homogène autour du champ X_3 , c'est-à-dire qu'elle doit être invariante par rotation autour de l'axe défini par X_3 . Une métrique qui vérifie une telle condition en plus d'une contrainte technique supplémentaire sera appelée *métrique pivotante*.

Définition 9 — Une métrique g sur une variété M de dimension 3 est appelée métrique pivotante s'il existe sur M un champ de vecteurs Z , appelé champ-pivot, qui est géodésique et de Killing, tel que la courbure sectionnelle de tout plan ne dépende que de l'angle qu'il forme avec Z et si les courbures sectionnelles maximale et minimale α et β sont des constantes.

Voici quelques exemples de métriques pivotantes :

- i) Une métrique de courbure constante nulle est bien sûr une métrique pivotante. Un exemple est la métrique plate sur \mathbb{T}^3 .
- ii) Étant donné un parallélisme (Y_1, Y_2, Y_3) de \mathbb{S}^3 qui définit la métrique euclidienne, toute métrique qui rend orthonormé un parallélisme du type (aY_1, aY_2, bY_3) , où a et b sont des réels non nuls est pivotante. Ces exemples comprennent le cas de la courbure constante positive et ils correspondent au cas où β est plus grand que -3α .
- iii) Un autre cas intéressant est celui où les plans orthogonaux à Z ont une courbure sectionnelle α positive et où les plans qui contiennent Z ont une courbure sectionnelle inférieure à -3α . Il y a des exemples de ce type sur $Sl(2, \mathbb{R})$.

Les métriques pivotantes ont la même propriété d'invariance par rotation autour de leur axe que les faisceaux indexés. Nous allons examiner les rapports qu'il y a entre ces faisceaux et les métriques pivotantes.

Définition 10 — *On dit qu'une métrique pivotante est adaptée à un faisceau indexé si c'est une métrique compatible avec ce faisceau et si l'axe du faisceau et le champ de vecteurs géodésique de la métrique sont colinéaires.*

Lemme 6 *Soit g une métrique pivotante sur une variété M et soit Z son champ-pivot. Si (X_1, X_2, Z) est un parallélisme orthonormé, alors les crochets de ces champs de vecteurs s'écrivent de la façon suivante :*

$$\begin{cases} [X_1, X_2] &= C_{12}^1 X_1 + C_{12}^2 X_2 + C_{12}^3 Z \\ [X_2, Z] &= C_{23}^1 X_1 \\ [Z, X_1] &= C_{23}^1 X_2, \end{cases} \quad (5.15)$$

où C_{12}^3 est une constante.

Preuve : Notons les crochets des champs de vecteurs X_1, X_2 et Z comme

$$\begin{cases} [X_1, X_2] &= C_{12}^1 X_1 + C_{12}^2 X_2 + C_{12}^3 Z \\ [X_2, Z] &= C_{23}^1 X_1 + C_{23}^2 X_2 + C_{23}^3 Z \\ [Z, X_1] &= C_{31}^1 X_1 + C_{31}^2 X_2 + C_{31}^3 Z, \end{cases} \quad (5.16)$$

L'hypothèse que Z est géodésique se traduit par

$$\nabla_Z Z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_{23}^3 = C_{31}^3 = 0.$$

La propriété d'être un champ de Killing s'exprime par

$$g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) = 0, \text{ pour tout } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Cela implique en particulier que

$$\begin{aligned} g(\nabla_{X_1} Z, X_1) &= 0 \Rightarrow C_{31}^1 &= 0 \\ g(\nabla_{X_2} Z, X_2) &= 0 \Rightarrow C_{23}^2 &= 0 \\ g(\nabla_{X_1} Z, X_2) + g(\nabla_{X_2} Z, X_1) &= 0 \Rightarrow C_{13}^2 + C_{23}^1 &= 0. \end{aligned}$$

Ces conditions sont en même temps suffisantes pour que Z soit un champ de Killing.

Il reste à montrer que C_{12}^3 est une constante. Étant donné un plan arbitraire engendré par les vecteurs

$$\begin{cases} X &= \cos \theta X_1 + \sin \theta X_2 \\ Y &= -\sin \varphi \sin \theta X_1 + \sin \varphi \cos \theta X_2 + \cos \varphi Z, \end{cases} \quad (5.17)$$

sa courbure sectionnelle s'écrit

$$\begin{aligned}
& g(R(X,Y)X,Y) \\
= & \sin^2 \varphi g(R(X_1,X_2)X_1,X_2) \\
& + \cos^2 \varphi \left(\cos^2 \theta g(R(X_1,Z)X_1,Z) + \sin^2 \theta g(R(X_2,Z)X_2,Z) \right) \\
& + 2 \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi g(R(X_1,X_2)X_1,Z) \\
& + 2 \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi g(R(X_1,X_2)X_2,Z) \\
& + 2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi g(R(X_1,Z)X_2,Z) \\
= & \sin^2 \varphi \left(-\frac{3}{4}(C_{12}^3)^2 - (C_{12}^1)^2 - (C_{12}^2)^2 + C_{12}^3 C_{23}^1 - X_2(C_{12}^1) + X_1(C_{12}^2) \right) \\
& + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi (C_{12}^3)^2 \\
& + \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi X_1(C_{12}^3) \\
& + 2 \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(C_{12}^1 C_{23}^1 + X_3(C_{12}^2) - \frac{1}{2} X_2(C_{12}^3 - 2 C_{23}^1) \right) \\
& + 2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi Z(C_{12}^3)
\end{aligned}$$

Comme g est une métrique pivotante, cette expression ne doit pas dépendre de θ , ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}
X_1(C_{12}^3) &= 0 \\
C_{12}^1 C_{23}^1 + X_3(C_{12}^2) - \frac{1}{2} X_2(C_{12}^3 - 2 C_{23}^1) &= 0 \\
Z(C_{12}^3) &= 0.
\end{aligned}$$

Les courbures sectionnelles extrêmes d'une métrique pivotante sont constantes sur la variété. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{4}(C_{12}^3)^2 - (C_{12}^1)^2 - (C_{12}^2)^2 + C_{12}^3 C_{23}^1 - X_2(C_{12}^1) + X_1(C_{12}^2) &= \text{const.} \\
(C_{12}^3)^2 &= \text{const.}
\end{aligned}$$

Cela montre que C_{12}^3 est bien une constante. □

Les homothéties de l'axe et du plan transverse d'un faisceau indexé sont des opérations qui conservent un tel faisceau. Démontrons un lemme technique sur l'effet de ces opérations sur une métrique pivotante adaptée au faisceau en question.

Lemme 7 — *Soit M une variété de dimension 3 munie d'une métrique pivotante g , définie par un parallélisme (X_1, X_2, X_3) , où X_3 est un champ-pivot de g . Soient α et β les courbures sectionnelles extrêmes et soit \tilde{g} la métrique sur M qui rend orthonormé le parallélisme $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3) = (a X_1, a X_2, b X_3)$, où a et b sont des réels non nuls.*

\tilde{g} est alors une métrique pivotante de champ-pivot \tilde{X}_3 . L'orthogonalité est la même que pour g et les courbures extrêmes sont

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= \frac{a^4}{b^2} \alpha \\ \tilde{\beta} &= a^2(\beta + 3\alpha) - 3 \frac{a^4}{b^2} \alpha.\end{aligned}$$

Preuve : D'après le Lemme 6, les crochets des vecteurs du parallélisme (X_1, X_2, X_3) vérifient les relations (5.15), où on remplace Z par X_3 . En conséquence, les crochets des vecteurs du parallélisme $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3)$ vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = a C_{12}^1 \tilde{X}_1 + a C_{12}^2 \tilde{X}_2 + \frac{a^2}{b} C_{12}^3 \tilde{X}_3 \\ [\tilde{X}_2, \tilde{X}_3] = b C_{23}^1 \tilde{X}_1 \\ [\tilde{X}_3, \tilde{X}_1] = b C_{23}^1 \tilde{X}_2, \end{array} \right.$$

où C_{12}^3 est une constante.

Parmi les éléments de courbure de la métrique \tilde{g} nous avons alors les suivants :

$$\begin{aligned}R(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \tilde{X}_1 &= \left(-a^2((C_{12}^1)^2 + (C_{12}^2)^2) + a^2 C_{12}^3 C_{23}^1 - \frac{3}{4} \left(\frac{a^2}{b} C_{12}^3\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - a \tilde{X}_2(C_{12}^1) + a \tilde{X}_1(C_{12}^2) \right) \tilde{X}_2 \\ R(\tilde{X}_1, \tilde{X}_3) \tilde{X}_1 &= \left(-ab C_{23}^1 C_{12}^2 - a \tilde{X}_3(C_{12}^1) - b \tilde{X}_1(C_{23}^1) \right) \tilde{X}_2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{b} C_{12}^3\right)^2 \tilde{X}_3 \\ R(\tilde{X}_2, \tilde{X}_3) \tilde{X}_2 &= \left(ab C_{23}^1 C_{12}^1 + a \tilde{X}_3(C_{12}^2) + b \tilde{X}_2(C_{23}^1) \right) \tilde{X}_1 \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{b} C_{12}^3\right)^2 \tilde{X}_3 \\ R(\tilde{X}_1, \tilde{X}_3) \tilde{X}_2 &= \left(-ab C_{23}^1 C_{12}^2 + a \tilde{X}_3(C_{12}^1) + b \tilde{X}_1(C_{23}^1) \right) \tilde{X}_1\end{aligned}$$

Étant donné un plan arbitraire engendré par les vecteurs

$$\begin{cases} X = \cos \theta \tilde{X}_1 + \sin \theta \tilde{X}_2 \\ Y = -\sin \varphi \sin \theta \tilde{X}_1 + \sin \varphi \cos \theta \tilde{X}_2 + \cos \varphi \tilde{X}_3, \end{cases} \quad (5.18)$$

sa courbure sectionnelle s'écrit alors

$$\begin{aligned}
g(R(X,Y)X,Y) &= \sin^2 \varphi g(R(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \\
&\quad + \cos^2 \varphi \left(\cos^2 \theta g(R(\tilde{X}_1, \tilde{X}_3)\tilde{X}_1, \tilde{X}_3) \right. \\
&\quad \left. + \sin^2 \theta g(R(\tilde{X}_2, \tilde{X}_3)\tilde{X}_2, \tilde{X}_3) \right) \\
&\quad + 2 \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi g(R(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)\tilde{X}_1, \tilde{X}_3) \\
&\quad + 2 \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi g(R(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)\tilde{X}_2, \tilde{X}_3) \\
&\quad + 2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi g(R(\tilde{X}_1, \tilde{X}_3)\tilde{X}_2, \tilde{X}_3) \\
&= \sin^2 \varphi \left(-a^2((C_{12}^1)^2 + (C_{12}^2)^2) + a^2 C_{12}^3 C_{23}^1 - \frac{3}{4} \left(\frac{a^2}{b} C_{12}^3\right)^2 \right. \\
&\quad \left. - a\tilde{X}_2(C_{12}^1) + a\tilde{X}_1(C_{12}^2) \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \left(\frac{a^2}{b} C_{12}^3\right)^2 \\
&\quad + 2 \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(-ab C_{23}^1 C_{12}^1 - a\tilde{X}_3(C_{12}^2) - b\tilde{X}_2(C_{23}^1) \right).
\end{aligned}$$

Pour que \tilde{g} puisse être une métrique pivotante, il faut que cette expression ne dépende pas de θ , donc que le coefficient de $\sin \theta$ soit nul, quelque soit la valeur de φ . Or, nous avons

$$\begin{aligned}
-ab C_{23}^1 C_{12}^1 - a\tilde{X}_3(C_{12}^2) - b\tilde{X}_2(C_{23}^1) &= ab(-C_{23}^1 C_{12}^1 - X_3(C_{12}^2) - X_2(C_{23}^1)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

puisque g est une métrique pivotante. De même, il faut que les courbures sectionnelles extrêmes soient constantes, donc que les coefficients de $\sin^2 \varphi$ et de $\cos^2 \varphi$ soient constants. Or, C_{12}^3 est une constante et nous avons

$$\begin{aligned}
&-a^2((C_{12}^1)^2 + (C_{12}^2)^2) + a^2 C_{12}^3 C_{23}^1 - a\tilde{X}_2(C_{12}^1) + a\tilde{X}_1(C_{12}^2) \\
&= a^2(-(C_{12}^1)^2 - (C_{12}^2)^2 + C_{12}^3 C_{23}^1 - X_2(C_{12}^1) + X_1(C_{12}^2)) \\
&= \text{const.},
\end{aligned}$$

puisque g est une métrique pivotante.

Si α et β sont les coefficients respectifs de $\cos^2 \varphi$ et de $\sin^2 \varphi$, pour $a = b = 1$, donc les courbures sectionnelles extrêmes de g , alors les courbures sectionnelles extrêmes $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ de \tilde{g} s'écrivent bien

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} &= \frac{a^4}{b^2} \alpha \\
\tilde{\beta} &= a^2(\beta + 3\alpha) - 3 \frac{a^4}{b^2} \alpha.
\end{aligned}$$

Ce sont des constantes. \tilde{g} est donc bien une métrique pivotante. □

Lemme 8 — Soit g une métrique pivotante sur une variété M . Soit Z un champ-pivot de g et soient α et β les courbures sectionnelles d'un plan quelconque contenant Z et du plan orthogonal à Z , respectivement. α et β sont alors les courbures sectionnelles extrêmes et la courbure sectionnelle d'un plan arbitraire qui forme un angle φ avec Z est

$$\alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi.$$

Preuve : C'est une autre conséquence du calcul de la courbure sectionnelle d'un champ de plans arbitraire pour une métrique pivotante. Ce calcul se trouve dans la preuve du Lemme 7 pour $a = b = 1$. □

Par la suite, quand nous parlerons des courbures sectionnelles extrêmes α et β d'une métrique pivotante, α désignera celle d'un plan contenant Z et β celle du plan orthogonal à Z .

On a alors le théorème suivant :

Théorème 8 — Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension 3. Si M n'est pas un espace à courbure constante nulle, il existe sur (M, g) une toupie si et seulement si g est une métrique pivotante. Si (M, g) n'est pas un espace à courbure constante, la toupie est unique au sens de rotation près.

Pour démontrer ce théorème, nous avons d'abord besoin d'un lemme :

Lemme 9 — Si g est une métrique pivotante sur une variété M , et si (M, g) n'est pas un espace à courbure constante, alors le champ géodésique autour duquel g pivote est unique à multiplication par -1 près.

Preuve : Soient Z_1 et Z_2 deux champs-pivot et soient α_1 et α_2 les courbures sectionnelles des plans orthogonaux respectifs. D'après le Lemme 8, ces courbures sont égales. Or, toujours d'après le Lemme 8, si deux plans qui forment des angles différents avec un champ-pivot ont la même courbure sectionnelle, alors la variété est un espace à courbure constante, ce qui est exclu par l'hypothèse. Les plans orthogonaux à Z_1 et à Z_2 coïncident donc, ce qui veut dire que Z_1 et Z_2 sont égaux ou opposés. □

Preuve du théorème 8 : Voyons d'abord pourquoi g est une métrique pivotante s'il existe une toupie \mathcal{T} sur (M, g) . Supposons que \mathcal{T} soit donnée par un parallélisme orthonormé (X_1, X_2, X_3) , vérifiant les conditions (5.1) sur les crochets. Le champ de vecteurs X_3 est donc géodésique et de Killing. D'après les calculs faits dans la preuve du Lemme 6, la courbure sectionnelle du plan engendré par les vecteurs

$$\begin{cases} X &= \cos \theta X_1 + \sin \theta X_2 \\ Y &= -\sin \varphi \sin \theta X_1 + \sin \varphi \cos \theta X_2 + \cos \varphi X_3, \end{cases}$$

pour des angles θ et φ arbitraires, vaut $\cos^2 \varphi \frac{c^2}{4} + \sin^2 \varphi (ck - \frac{3}{4} c^2)$, qui ne dépend que de φ , c'est-à-dire de l'angle que fait ce plan avec X_3 . Les courbures

extrêmes sont donc

$$\alpha = \frac{c^2}{4} \quad \text{et} \quad \beta = ck - \frac{3}{4}c^2, \quad (5.19)$$

c'est-à-dire des constantes. g est donc bien une métrique pivotante.

Démontrons maintenant l'unicité au sens de rotation près : on suppose que (M, g) n'est pas un espace à courbure constante, que g est une métrique pivotante autour d'un champ unitaire Z qui est géodésique et de Killing et qu'il existe sur (M, g) deux toupies \mathcal{T} et $\tilde{\mathcal{T}}$, définies par les parallélismes orthonormés (X_1, X_2, X_3) et $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3)$, respectivement. On suppose que ces deux parallélismes vérifient les relations (5.1), d'une part (X_1, X_2, X_3) avec les constantes de structure c et k , d'autre part $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3)$ avec les constantes de structure \tilde{c} et \tilde{k} . Comme nous venons de le voir, X_3 et \tilde{X}_3 sont également des champs autour desquels g pivote, on a donc $X_3 = \pm \tilde{X}_3$, d'après le Lemme 9. Les axes des deux toupies coïncident donc, ainsi que les plans engendrés par X_1 et X_2 et par \tilde{X}_1 et \tilde{X}_2 , respectivement, qui sont orthogonaux à ces axes.

Les courbures sectionnelles extrêmes α et β de g déterminent, d'après (5.19), les constantes de structure à multiplication simultanée par -1 près. Or, d'après l'équation (5.4), la vitesse avec laquelle une toupie tourne autour de son axe le long d'une courbe intégrale du champ des âmes est donnée par $k - \frac{c}{2}$. De même, d'après les équations (5.7) et (5.8), la vitesse avec laquelle une toupie tourne autour d'elle-même le long d'une géodésique qui forme un angle de φ avec le champ des âmes est de $\frac{1}{2} \cos \varphi (c - k)$.

Si les constantes de structure respectives des deux parallélismes sont de même signe, donc égales, X_1 tourne autour de X_3 à la même vitesse que \tilde{X}_1 tourne autour de \tilde{X}_3 . Dans ce cas et si X_3 et \tilde{X}_3 coïncident, l'application qui transforme (X_1, X_2, X_3) en $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3)$ est une rotation autour de X_3 qui ne dépend pas du point de la variété. D'après le Corollaire 4, une telle application conserve la toupie. \mathcal{T} et $\tilde{\mathcal{T}}$ coïncident donc. Si X_3 et \tilde{X}_3 sont opposés, cela veut dire que les deux toupies tournent à la même vitesse, mais dans des directions opposées.

Si les constantes de structure respectives sont de signes opposés, X_1 tourne autour de X_3 à la même vitesse à laquelle \tilde{X}_1 tourne autour de \tilde{X}_3 , mais dans le sens inverse. Il en résulte que les deux toupies coïncident si X_3 et \tilde{X}_3 sont opposés et qu'elles tournent dans des sens opposés si X_3 et \tilde{X}_3 coïncident.

Sur M , g détermine donc de façon unique une toupie, au sens de rotation près.

Il reste à démontrer l'existence d'une toupie sur toute variété munie d'une métrique pivotante à courbure non nulle. Nous construisons d'abord des toupies localement et nous raccordons ensuite les morceaux grâce à l'unicité démontrée plus haut.

Soit g donc une métrique pivotante sur M et Z un champ-pivot associé. On considère un parallélisme orthonormé (X_1, X_2, Z) . D'après le Lemme 6, les crochets de ces champs de vecteurs vérifient les relations (5.15), où C_{12}^3 est une

constante.

Considérons alors la condition de Jacobi

$$[X_1, [X_2, Z]] + [X_2, [Z, X_1]] + [Z, [X_1, X_2]] = 0,$$

qui entraîne que

$$\begin{cases} X_1(C_{23}^1) - C_{12}^2 C_{23}^1 + Z(C_{12}^1) = 0 \\ X_2(C_{23}^1) + C_{12}^1 C_{23}^1 + Z(C_{12}^2) = 0 \\ Z(C_{12}^3) = 0. \end{cases} \quad (5.20)$$

De plus, les courbures sectionnelles extrêmes d'une métrique pivotante sont constantes sur la variété. Nous avons donc en particulier

$$-\frac{3}{4}(C_{12}^3)^2 - (C_{12}^1)^2 - (C_{12}^2)^2 + C_{12}^3 C_{23}^1 - X_2(C_{12}^1) + X_1(C_{12}^2) = \text{const.} \quad (5.21)$$

Pour savoir s'il existe un parallélisme orthonormé de M comportant Z comme troisième vecteur qui définit localement une toupie de contact, nous modifions le parallélisme (X_1, X_2, Z) par une rotation du plan orthogonal à Z . Écrivons

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= \cos \psi X_1 + \sin \psi X_2 \\ \tilde{X}_2 &= -\sin \psi X_1 + \cos \psi X_2. \end{aligned}$$

Les crochets du parallélisme $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, Z)$ s'écrivent donc

$$\begin{cases} [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = (C_{12}^1 - X_1(\psi)) X_1 + (C_{12}^2 - X_2(\psi)) X_2 + C_{12}^3 Z \\ [\tilde{X}_2, Z] = (Z(\psi) + C_{23}^1) \tilde{X}_1 \\ [Z, \tilde{X}_1] = (Z(\psi) + C_{23}^1) \tilde{X}_2. \end{cases}$$

Pour construire une toupie, il suffit alors de trouver une fonction ψ sur M telle que le parallélisme $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, Z)$ vérifie les relations (5.1). Il s'agit donc d'intégrer le système suivant :

$$\begin{aligned} X_1(\psi) &= C_{12}^1 \\ X_2(\psi) &= C_{12}^2 \\ Z(\psi) &= -C_{23}^1 + \text{const.} \end{aligned}$$

Pour qu'il existe une solution locale, il faut et il suffit que les équations suivantes soient satisfaites :

$$\begin{aligned} X_1(X_2(\psi)) - X_2(X_1(\psi)) &= C_{12}^1 X_1(\psi) + C_{12}^2 X_2(\psi) + C_{12}^3 Z(\psi) \\ X_2(Z(\psi)) - Z(X_2(\psi)) &= C_{23}^1 X_1(\psi) \\ Z(X_1(\psi)) - X_1(Z(\psi)) &= C_{23}^1 X_2(\psi). \end{aligned}$$

Or, ces relations sont équivalentes aux deux premières équations de (5.20) et à l'équation (5.21). Il existe donc une solution locale, ce qui veut dire qu'il existe

localement une toupie sur M . Comme on peut inverser le sens de rotation de cette toupie en multipliant par -1 le champ de vecteurs \tilde{X}_1 , on peut supposer qu'elle tourne dans le sens positif le long de ses géodésiques intégrales.

Si on a $C_{23}^1 = 0$, alors la toupie locale que nous avons construite est intégrable ; si on a $C_{23}^1 \neq 0$, elle est de contact.

Lorsque (M, g) est un espace à courbure non constante, nous avons vu que les toupies positives sont uniques. Leur existence locale entraîne donc leur existence globale.

Lorsque (M, g) est un espace à courbure constante positive, nous allons nous ramener au cas précédent pour démontrer l'existence globale des toupies. Soit Z un champ-pivot pour la métrique g et (X_1, X_2, Z) un parallélisme orthonormé de M . Nous considérons alors la métrique \tilde{g} qui rend orthonormé le parallélisme (aX_1, aX_2, Z) . \tilde{g} est encore une métrique pivotante de champ-pivot Z , mais elle n'est plus à courbure constante, si $|a| \neq 1$, d'après le Lemme 7. Pour cette métrique, il existe donc une toupie de contact sur M , définie par le parallélisme (aX_1, aX_2, Z) . Or, d'après le Corollaire 4, cette même toupie est définie par le parallélisme (X_1, X_2, Z) , ce qui veut dire que le même faisceau indexé est une toupie pour la métrique g .

Notons que lorsque g est une métrique à courbure constante positive, le coefficient C_{23}^1 est non nul. Le coefficient correspondant \tilde{C}_{23}^1 du le parallélisme (aX_1, aX_2, Z) vérifie $\tilde{C}_{23}^1 = C_{23}^1$. La toupie que nous construisons de cette façon sur (M, g) est donc de contact. ■

Corollaire 5 — *Les seules variétés qui admettent des métriques pivotantes sont les quotients de \mathbb{S}^3 et de $Sl(2, \mathbb{R})$, le revêtement universel de $Sl(2, \mathbb{R})$, par l'action à gauche d'un sous-groupe discret, ainsi que les quotients de \mathbb{R}^3 .*

Preuve : C'est une conséquence directe des Théorèmes 7 et 8. En effet, si une variété M admet une métrique pivotante qui n'est pas à courbure nulle, elle admet aussi une toupie de contact, d'après le Théorème 8. Dans ce cas, M est un quotient de \mathbb{S}^3 ou de $Sl(2, \mathbb{R})$ par l'action à gauche d'un sous-groupe discret, d'après le Théorème 7. Si M admet une métrique à courbure constante nulle, alors M admet \mathbb{R}^3 comme revêtement universel. □

5.3 Métriques compatibles avec une toupie de contact donnée

Examinons maintenant quelle liberté nous avons dans le choix d'une métrique pour une toupie de contact donnée. *Sur une variété (M, g) qui admet une toupie de contact, y a-t-il d'autres métriques pour lesquelles le même faisceau de contact définit une toupie de contact?*

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 9 — *Soit \mathcal{T} une toupie de contact sur une variété riemannienne (M, g) de dimension 3. Alors \mathcal{T} est une toupie de contact pour une autre métrique g' si et seulement si g' est obtenue à partir de g par une homothétie constante le long de l'âme de \mathcal{T} et par une homothétie constante du plan orthogonal à l'âme.*

Preuve : Il est relativement facile de voir que \mathcal{T} reste une toupie pour une métrique qu'on obtient à partir de g par des homothéties constantes de l'âme et du plan orthogonal à l'âme, puisque la constance des vitesses de rotation et des angles qui caractérise une toupie de contact n'est pas affectée par un tel changement. D'après le Lemme 7, une métrique obtenue de cette façon est encore une métrique pivotante.

Soit (X_1, X_2, X_3) un parallélisme orthonormé pour g et soit g' la métrique obtenue par des homothéties constantes de l'âme et du plan orthogonal de rapports respectivement a et b . Le parallélisme $(Y_1, Y_2, Y_3) = (aX_1, aX_2, bX_3)$ est alors orthonormé pour la métrique g' et il définit la même toupie de contact que (X_1, X_2, X_3) , d'après le Corollaire 4. Les crochets s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{cases} [Y_1, Y_2] &= \frac{a^2c}{b} Y_3 \\ [Y_2, Y_3] &= bk Y_1 \\ [Y_3, Y_1] &= bk Y_2. \end{cases} \quad (5.22)$$

Pour voir que, inversement, ces métriques sont les seules à conserver les propriétés des toupies de contact, on considère une transformation qui transporte g sur une autre métrique g' . Pour que le faisceau de contact associé à la toupie \mathcal{T} soit un faisceau de contact pour la métrique g' , il faut que l'orthogonalité de l'âme et du plan transverse à l'âme soit conservée. Si on choisit un multiple de X_3 comme premier vecteur d'un parallélisme orthonormé pour la métrique g' , les deux vecteurs restants seront des combinaisons linéaires de X_1 et de X_2 et on sait, d'après le Corollaire 4, que les combinaisons linéaires qui conservent la structure de toupie de contact sont des similitudes, c'est-à-dire des combinaisons de rotations et d'homothéties, similitudes qui ne dépendent pas du point de la variété. ■

5.4 Problèmes d'unicité et de classification

Une autre question naturelle est celle de la classification des toupies de contact qui existent sur une variété riemannienne donnée. On se place donc sur une variété M munie d'une métrique g . La première question qu'on peut se poser est celle de l'unicité :

Deux parallélismes orthonormés (X_1, X_2, X_3) et (Y_1, Y_2, Y_3) vérifiant (5.1) peuvent-ils déterminer des toupies différentes, c'est-à-dire qui ne sont pas l'image l'une de l'autre par une isométrie ?

Il faut alors distinguer plusieurs cas.

- Si M n'est pas un espace à courbure constante, le Théorème 8 assure que s'il existe une toupie sur M , alors elle est unique, au sens de rotation près. Si (X_1, X_2, X_3) et (Y_1, Y_2, Y_3) vérifient (5.1) pour les mêmes constantes c et k , alors les toupies qu'ils définissent sont toutes les deux positives ou toutes les deux négatives. Elles coïncident donc.
- Si M est un espace à courbure constante positive, alors tout champ de vecteurs qui est géodésique et de Killing définit une toupie de contact, d'après le Théorème 8 et la construction dans sa preuve. A priori, il peut donc y avoir des toupies non isométriques sur (M, g) , s'il existe des champs de Killing géodésiques qui ne s'échangent pas par une isométrie. Sur \mathbb{S}^3 munie de la métrique habituelle, toutefois, il n'existe qu'une toupie de contact à isométrie et au sens de rotation près, comme le montrent les considérations suivantes.

Soit \mathbb{S}^3 la sphère unité de l'espace des quaternions \mathbb{H} . L'algèbre des champs de Killing de \mathbb{S}^3 est de dimension 6 et elle est engendrée par les champs de vecteurs qui à un point q associent l'élément

$$qi, \quad qj, \quad qk, \quad iq, \quad jq, \quad \text{et} \quad kq$$

de l'espace tangent à \mathbb{S}^3 , respectivement. Soit $v = a_1 qi + a_2 qj + a_3 qk + b_1 iq + b_2 jq + b_3 kq$ un champ de Killing. v est alors géodésique si et seulement si soit $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ou $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Pour montrer cela, écrivons le champ v comme $v_q = Mq$, où M est une matrice antisymétrique qui dépend des a_i et des b_i . La courbe intégrale γ de v qui passe par un point q_0 donné est alors définie par $\dot{\gamma}_q = Mq$. Par un changement de coordonnées adéquat, on peut ramener la matrice M à la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Une courbe définie par une telle matrice décrit un grand cercle de \mathbb{S}^3 si et seulement si on a $\alpha = \beta$. Or, un calcul simple montre que cela équivaut à la condition sur les a_i et les b_i indiquée plus haut.

Un champ-pivot Z de la métrique euclidienne sur \mathbb{S}^3 est donc soit de la forme $a_1 qi + a_2 qj + a_3 qk$, soit de la forme $b_1 iq + b_2 jq + b_3 kq$, où les a_i et les b_i sont des nombres réels. Deux champs unitaires d'une même de ces deux familles sont bien sûr isométriques. Pour déterminer si deux champs qui sont de familles différentes sont isométriques, il suffit donc de considérer la question pour les champs $X_q = qi$ et $Y_q = iq$. On constate

alors que ces deux champs s'échangent effectivement par une isométrie. Soit $N \in O(4)$. N définit alors une isométrie de \mathbb{S}^3 par $f(q) = Nq$ et toutes les isométries de \mathbb{S}^3 sont de ce type. On a $X_q = Aq$ et $Y_q = Bq$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour que f échange X et Y , il suffit que $Tf_q(X_q) = Y_{f(q)}$, pour tout point q de \mathbb{S}^3 . Cela revient à dire que $NA = BN$, ce qui est vérifié pour la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc le résultat de classification suivant :

Proposition 5 *Tous les champs-pivot de \mathbb{S}^3 pour la métrique habituelle sont isométriques.*

- Sur un espace M à courbure constante nulle qui admet des toupies de contact, il peut également y avoir des toupies qui ne s'échangent pas par des isométries. En particulier, une isométrie transforme une courbe fermée en une courbe fermée. Or, sur \mathbb{T}^3 , il existe des toupies dont les âmes ont des courbes intégrales fermées et d'autres où ces courbes ne sont pas fermées, comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 7 *(Toupie de contact sur \mathbb{T}^3 pour laquelle les courbes intégrales du champ des âmes sont fermées.)*

Sur \mathbb{T}^3 muni des pseudo-coordonnées $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, on considère les formes de contact de l'exemple 5, à savoir

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \cos \theta_1 d\theta_2 + \sin \theta_1 d\theta_3 \\ \omega_2 &= -\sin \theta_1 d\theta_2 + \cos \theta_1 d\theta_3. \end{aligned}$$

Ces formes de contact définissent un faisceau de contact, puisqu'ils engendrent un cercle de contact rond. Un parallélisme adapté à ce faisceau est formé par les champs de Reeb des formes ω_1 et ω_2 ainsi que par un vecteur qui définit le champ des âmes. Ce parallélisme s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} R_1 &= \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \\ R_2 &= -\sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \\ X &= \frac{\partial}{\partial \theta_1}. \end{aligned}$$

Les crochets de ces vecteurs vérifient :

$$\begin{aligned} [R_1, R_2] &= 0 \\ [R_2, X] &= R_1 \\ [X, R_1] &= R_2. \end{aligned}$$

Ce parallélisme définit donc une toupie de contact sur \mathbb{T}^3 . Les courbes intégrales du champ des âmes sont les courbes intégrales du champ X , c'est-à-dire les courbes définies par $\theta_2 = \theta_3 = \text{const.}$, qui sont fermées.

Exemple 8 (Toupie de contact sur \mathbb{T}^3 pour laquelle les courbes intégrales du champ des âmes ne sont pas fermées.)

En modifiant un peu l'exemple précédent, nous obtenons un parallélisme de \mathbb{T}^3 qui définit la même métrique, mais une autre toupie de contact, dont le champ des âmes a des courbes intégrales non fermées. Considérons donc le parallélisme suivant :

$$\begin{aligned} R_1 &= \cos(\theta_1 + \epsilon\theta_2) \left(\frac{\partial}{\partial\theta_2} - \epsilon \frac{\partial}{\partial\theta_1} \right) + \sin(\theta_1 + \epsilon\theta_2) \frac{\partial}{\partial\theta_3} \\ R_2 &= -\sin(\theta_1 + \epsilon\theta_2) \left(\frac{\partial}{\partial\theta_2} - \epsilon \frac{\partial}{\partial\theta_1} \right) + \cos(\theta_1 + \epsilon\theta_2) \frac{\partial}{\partial\theta_3} \\ X &= \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \epsilon \frac{\partial}{\partial\theta_2}. \end{aligned}$$

Si ϵ n'est pas un nombre rationnel, les courbes intégrales de X ne sont pas fermées, mais denses dans un tore \mathbb{T}^2 contenu dans \mathbb{T}^3 . Les crochets de ces champs de vecteurs sont les suivants :

$$\begin{aligned} [R_1, R_2] &= 0 \\ [R_2, X] &= (1 + \epsilon^2) R_1 \\ [X, R_1] &= (1 + \epsilon^2) R_2, \end{aligned}$$

ce parallélisme définit donc bien une toupie de contact. Elle est donnée par le cercle de contact engendré par les formes

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \cos(\theta_1 + \epsilon\theta_2) d(\theta_2 - \epsilon\theta_1) + \sin(\theta_1 + \epsilon\theta_2) d\theta_3 \\ \omega_2 &= -\sin(\theta_1 + \epsilon\theta_2) d(\theta_2 - \epsilon\theta_1) + \cos(\theta_1 + \epsilon\theta_2) d\theta_3. \end{aligned}$$

Chapitre 6

Existence et non-existence en dimension supérieure à 3

Une question qui se pose naturellement est celle de la généralisation de l'étude des cercles et sphères de contact sur des variétés de dimension supérieure. Si sur les variétés de dimension 3 il n'y a pas la place pour 4 formes de contact indépendantes ou plus, on peut considérer sur une variété de dimension n jusqu'à n formes indépendantes dont les combinaisons linéaires peuvent être des formes de contact ou pas, c'est-à-dire qu'on peut y étudier des p -sphères de contact pour $p \leq n - 1$. On peut alors y faire des observations surprenantes.

6.1 Non-existence de p -sphères de contact en dimension $4n + 1$

On se rend rapidement compte qu'il n'est pas facile de construire des cercles de contact sur une variété de dimension 5, même s'il existe, bien sûr, de telles variétés qui admettent des formes de contact. En fait, on démontre le théorème suivant :

Théorème 10 — *Sur une variété de dimension 5 et plus généralement de dimension $4n + 1$, il n'existe pas de cercle de contact et donc pas de p -sphère de contact non plus, pour $p \geq 1$.*

Preuve : Soient ω_1 et ω_2 deux formes de contact sur une variété M de dimension 5. Elles engendrent un cercle de contact si $\omega = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2$ est une forme de contact pour tout couple de coefficients (λ_1, λ_2) qui vérifie $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$, c'est-à-dire si

$$\omega \wedge (d\omega)^2 = \sum_{i,j,k=1}^2 \lambda_i \lambda_j \lambda_k (\omega_i \wedge d\omega_j \wedge d\omega_k)$$

est partout non nulle.

Si on fixe un point $x \in M$ et cinq vecteurs tangents linéairement indépendants

$$(v_1, \dots, v_5) \in \mathcal{T}_x(M),$$

on peut considérer l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda_1, \lambda_2) &\longmapsto \sum_{i,j,k=1}^2 \lambda_i \lambda_j \lambda_k (\omega_i \wedge d\omega_j \wedge d\omega_k)_x(v_1, \dots, v_5), \end{aligned}$$

comme une fonction polynômiale homogène de degré 3. Elle a des zéros sur le cercle unité de \mathbb{R}^2 (si elle est positive sur un point donné du cercle, alors elle est négative sur le point antipodal), donc ω_1 et ω_2 ne peuvent pas engendrer un cercle de contact, puisque pour les coefficients (λ_1, λ_2) , $\omega \wedge (d\omega)^2$ n'est pas une forme volume.

Dans le cas général, les paires de formes de contact sur des variétés de dimension $4n + 1$ définissent des fonctions polynômiales de degré $2n + 1$, donc impair, et elles s'annulent nécessairement sur le cercle unité de \mathbb{R}^2 . Il ne peut donc y avoir de cercle de contact en ces dimensions-là.

De l'autre côté, en dimension $4n - 1$, ces fonctions polynômiales sont de degré $2n$, donc pair, et on n'a pas d'obstacle à l'existence de cercles de contact dans ces cas-là. ■

6.2 Exemples de p -sphères de contact en dimension supérieure à 3

Nous avons vu que sur des variétés de dimension $4n + 1$, il n'existe pas de cercle de contact. En les autres dimensions impaires, on peut cependant trouver beaucoup d'exemples intéressants de p -sphères de contact. Une première famille de variétés où on peut espérer en trouver sont les sphères de dimension $4n - 1$.

Sur les sphères, il y a une borne supérieure naturelle de la taille d'une p -sphère de contact qui est donnée par la formule d'Adams. D'après cette formule, il n'existe pas plus de $\rho(n)$ champs de vecteurs unitaires et continus sur \mathbb{S}^{n-1} qui soient partout linéairement indépendants, où

$$\rho(n) = 2^c + 8d - 1, \text{ avec } n = \text{impair} \cdot 2^{c+4d}, c \leq 3.$$

Ceci implique qu'il n'y a pas plus de $\rho(n)$ formes de contact partout linéairement indépendantes non plus. Donc sur \mathbb{S}^{4n-1} , il ne peut y avoir des p -sphères de contact que pour $p \leq (\rho(4n) - 1)$.

D'un autre côté, il y a des travaux de B. Eckmann, s'appuyant sur des idées de A. Hurwitz et de J. Radon, qui mènent au théorème suivant :

Théorème 11 — *Sur \mathbb{S}^{4n-1} , il existe une $(\rho(4n) - 1)$ -sphère de contact, pour $n \geq 1$.*

Preuve : D'après B. Eckmann (cf. [6]), il existe, pour chaque entier n , $\rho(4n)$ matrices antisymétriques $A_1, \dots, A_{\rho(4n)}$ dans $\mathcal{O}(4n, \mathbb{R})$ telles que les vecteurs $(A_1 x)_x, \dots, (A_{\rho(4n)} x)_x$ soient linéairement indépendants en chaque point de la sphère unité de \mathbb{R}^{4n} . Eckmann réalise donc le nombre maximal de tels champs de vecteurs autorisé par la formule d'Adams. Ces matrices peuvent servir à construire des $(\rho(4n) - 1)$ -sphères de contact sur \mathbb{S}^{4n-1} , comme nous allons le voir maintenant.

Les matrices $A_1, \dots, A_{\rho(4n)}$ vérifient les relations

$$\begin{cases} A_i A_j + A_j A_i = 0, i \neq j \\ A_i^2 = -Id, i = 1, \dots, \rho(4n), \end{cases} \quad (6.1)$$

elles engendrent donc une algèbre de Clifford.

On définit maintenant $\rho(4n)$ 1-formes sur \mathbb{R}^{4n} par

$$(\tilde{\omega}_i)_x = \langle A_i x, dx \rangle = \sum_{r,s=1}^{4n} a_{rs}^i x_s dx_r,$$

où $A_i = (a_{rs}^i)_{r,s=1\dots 4n}$.

Les formes ω_i que ces formes induisent sur \mathbb{S}^{4n-1} sont des formes de contact : comme toute matrice A_i est orthogonale et antisymétrique, il existe une base orthonormée de \mathbb{R}^{4n} dans laquelle A_i s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Dans cette base, nous avons

$$\langle A_i x, dx \rangle = \sum_{i=1}^{2n} (x_{2i-1} dx_{2i} - x_{2i} dx_{2i-1}),$$

et cette forme induit une forme de contact sur \mathbb{S}^{4n-1} .

De plus, et contre toute attente, ces $\rho(4n)$ formes de contact engendrent une $(\rho(4n) - 1)$ -sphère de contact sur \mathbb{S}^{4n-1} . Toute matrice

$$\sum_{i=1}^{\rho(4n)} \lambda_i A_i \text{ avec } \sum_{i=1}^{\rho(4n)} \lambda_i^2 = 1$$

est en effet antisymétrique et elle est aussi orthogonale, puisque

$$\begin{aligned} {}^t \left(\sum_{i=1}^{\rho(4n)} \lambda_i A_i \right) \left(\sum_{i=1}^{\rho(4n)} \lambda_i A_i \right) &= - \sum_{i=1}^{\rho(4n)} \lambda_i^2 A_i^2 - \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j (A_i A_j + A_j A_i) \\ &= Id. \end{aligned}$$

Donc la forme $\langle \sum_{i=1}^{\rho(4n)} \lambda_i A_i x, dx \rangle$ correspondante induit une forme de contact, comme nous l'avons vu. ■

Ce théorème nous donne des exemples de p -sphères de contact sur les sphères de dimension $4n - 1$ avec $p \geq 2$ pour tout $n \geq 1$. D'après la formule d'Adams, nous avons $\rho(4n) = 2^c + 8d - 1$, où $4n = \text{impair} \cdot 2^{c+4d}$, $c \leq 3$. Dans notre situation, on a $c \geq 2$ où $d \geq 1$ et dans les deux cas, on a donc $\rho(4n) \geq 3$, ce qui veut dire que sur \mathbb{S}^{4n-1} il existe des p -sphères de contact engendrées par au moins 3 formes de base.

Notons que ces exemples sont à la fois ronds et raides.

En effet, si on considère un cercle de contact $\mathcal{S}_c^1\{\omega_1, \omega_2\}$ contenu dans l'un de ces exemples sur une sphère de dimension $4n - 1$, le champ de Reeb d'une forme ω_i induite par $(\tilde{\omega}_i)_x = \langle A_i x, dx \rangle$ sur \mathbb{S}^{4n-1} est $(R_i)_x = (A_i x)_x$. On a alors

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_1(R_2) & = \langle A_1 x, A_2 x \rangle = \langle -A_2 A_1 x, x \rangle = 0 \\ \tilde{\omega}_2(R_1) & = \langle A_2 x, A_1 x \rangle = \langle -A_1 A_2 x, x \rangle = 0 \\ (R_2 \lrcorner d\tilde{\omega}_1)_x & = {}^t x A_1 A_2 dx = -{}^t x A_2 A_1 dx = -(R_1 \lrcorner d\tilde{\omega}_2)_x. \end{cases}$$

$\mathcal{S}_c^1\{\omega_1, \omega_2\}$ est donc rond.

Soit maintenant

$$\omega = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 \quad \text{avec} \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$$

un élément du cercle de contact. ω est induit par $(\tilde{\omega})_x = \langle (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)x, dx \rangle$. Il existe alors un changement de coordonnées orthogonal, c'est-à-dire conservant le volume, qui transforme la matrice $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ en la matrice (6.2). ω définit donc la même forme volume que ω_1 . Ainsi, $\mathcal{S}_c^1\{\omega_1, \omega_2\}$ est raide.

6.3 Sphères de contact et 3-structures de Sasaki

Nous allons examiner les 3-structures de Sasaki définies au paragraphe 2.3 pour déterminer leurs liens avec les p -sphères de contact. Comme une 3-structure de Sasaki est définie par 3 formes de contact qui sont étroitement liées, on peut se poser la question de savoir si les combinaisons linéaires non triviales de ces formes sont encore des formes de contact, c'est-à-dire si ces 3 formes engendrent une sphère de contact. Si c'est le cas, on peut étudier les régularités éventuelles d'une telle sphère de contact. La proposition suivante répond à ces questions.

Proposition 6 — *Si une variété M de dimension $4n - 1$ admet une 3-structure de Sasaki définie par trois formes ω_1, ω_2 et ω_3 , alors ces trois formes engendrent une sphère de contact qui est à la fois ronde et raide.*

Preuve : Si R_1, R_2 et R_3 sont les champs de Reeb associés à ω_1, ω_2 et ω_3 , on peut définir des champs tensoriels φ_i par $g(X, \varphi_i(Y)) = \frac{1}{2} d\omega_i(X, Y)$. Les $(\varphi_i, R_i, \omega_i)$ définissent des structures de Sasaki et ω_1, ω_2 et ω_3 définissent une 3-structure de Sasaki, d'où les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(X, \varphi_i(Y)) = \frac{1}{2} d\omega_i(X, Y) \\ g(\varphi_i(X), \varphi_i(Y)) = g(X, Y) - \omega_i(X) \omega_i(Y) \\ \varphi_i^2 = -I + \omega_i \otimes R_i \\ \omega_i(Y) = g(R_i, Y), \text{ pour tout } Y \\ [\varphi_i, \varphi_i] + d\omega_i \otimes R_i = 0, \end{array} \right.$$

pour tout $i = 1, 2, 3$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_k = \varphi_i \varphi_j - \omega_j \otimes R_i = -\varphi_j \varphi_i + \omega_i \otimes R_j \\ R_k = \varphi_i(R_j) = -\varphi_j(R_i) \\ \omega_k = \omega_i \circ \varphi_j = -\omega_j \circ \varphi_i, \end{array} \right.$$

pour (i, j, k) direct.

Comme on a $\omega_i(\varphi_i(X)) = g(R_i, \varphi_i(X)) = d\omega_i(R_i, X) = 0$, nous savons que l'image de φ_i est contenue dans $\text{Ker}(\omega_i)$ pour tout i . De plus, comme pour $X, Y \in \text{Ker}(\omega_i)$, on a $\varphi_i^2(X) = -X$, et $g(\varphi_i(X), \varphi_i(Y)) = g(X, Y)$, φ définit une isométrie de $\text{Ker}(\omega_i)$ telle que $g(X, \varphi_i(X)) = 0$. On a également $\omega_j(\varphi_i(X)) = -\omega_k(X)$, pour (i, j, k) pair, donc φ conserve l'intersection Σ des noyaux de ω_1, ω_2 et ω_3 .

Les champs de Reeb R_1, R_2 et R_3 sont partout linéairement indépendants. En effet, ils le sont deux à deux d'après le Lemme 2, et R_1 et R_2 sont contenus dans $\text{Ker}(\omega_3)$, contrairement à R_3 . Aucun de ces trois vecteurs n'est contenu dans Σ , et la dimension de Σ est de $4n - 4$. On peut donc trouver une base de $T_p M$ en un point $p \in M$ donné qui s'écrit $(R_1, R_2, R_3, X_4, \dots, X_{4n-1})$, où les X_i sont contenus dans Σ . On peut les choisir de façon à ce que pour $k = 4m$, l'on ait $X_{k+1} = \varphi_1(X_k)$, $X_{k+2} = \varphi_2(X_k)$ et $X_{k+3} = \varphi_3(X_k)$.

Si on pose alors $\omega = \sum_{i=1}^{4n-1} \lambda_i \omega_i$, avec $\sum_{i=1}^{4n-1} \lambda_i^2 = 1$, nous avons

$$\omega \wedge (d\omega)^{2n-1} = 2^{2n-2} (2n - 2)!.$$

C'est dû aux relations

$$\begin{aligned} \omega_i(Y_j) &= \delta_{ij}, \quad \text{pour } R_i = Y_i \text{ et } X_j = Y_j \\ d\omega_i(R_j, R_k) &= 1, \quad \text{si } (i, j, k) \text{ direct} \\ d\omega_i(R_j, X_k) &= 0 \\ d\omega_i(X_j, X_k) &= 0, \quad \text{sauf si } X_k = \varphi_i X_j \\ d\omega_i(X_j, \varphi_i X_j) &= -2. \end{aligned}$$

Les formes ω_1, ω_2 et ω_3 engendrent donc bien une sphère de contact raide.

De plus, pour (i, j, k) direct :

$$\omega_i(R_j) = \omega_j(\varphi_k(R_j)) = g(R_j, \varphi_k(R_j)) = \frac{1}{2} d\omega_k(R_j, R_j) = 0$$

et pour tout champ de vecteurs X

$$R_i \lrcorner d\omega_j(X) = 2\omega_k(X) = -R_j \lrcorner d\omega_i(X).$$

ω_1, ω_2 et ω_3 définissent donc bien une sphère de contact ronde, d'après le Lemme 1. ■

Cette proposition donne de nouvelles classes d'exemples de sphères de contact rondes et raides en dimension supérieure à 3. D'après Boyer, Galicki et Mann (cf. [4]), les variétés homogènes qui admettent des 3-structures de Sasaki sont les suivantes :

$$\begin{array}{c} \frac{Sp(n+1)}{Sp(n)} \cong \mathbb{S}^{4n+3}, \quad \frac{Sp(n+1)}{Sp(n) \times \mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{R}P^{4n+3}, \\ \frac{SU(m)}{S(U(m-2) \times U(1))}, \quad \frac{SO(k)}{SO(k-4) \times Sp(1)}, \\ \frac{G_2}{Sp(1)}, \quad \frac{F_4}{Sp(3)}, \quad \frac{E_6}{SU(6)}, \quad \frac{E_7}{Spin(12)}, \quad \frac{E_8}{E_7}, \end{array}$$

pour $m \geq 3$ et $k \geq 7$. Les auteurs cités démontrent aussi qu'il existe une infinité de variétés compactes, simplement connexes et fortement inhomogènes de dimension 7 qui admettent des 3-structures de Sasaki et qui sont homotopiquement distinctes.

Chapitre 7

Cercles et sphères de contact sur des groupes de Lie

Dans ce chapitre nous étudions des p -sphères de contact invariantes à gauche sur des groupes de Lie de dimension 3 et de dimension 7. La question qui nous préoccupe ici est de savoir quels sont les groupes de Lie de dimension 3 qui admettent des sphères de contact invariantes à gauche et quels sont les groupes de Lie de dimension 7 qui admettent des p -sphères de contact invariantes à gauche pour différentes valeurs de p . On peut par exemple se poser la question de savoir s'il existe des groupes de Lie de dimension 7 qui admettent des 6-sphères de contact, donc des familles de formes de contact engendrées par 7 formes de contact. Nous avons vu que sur les sphères de dimension 7 il existe de telles 6-sphères de contact, mais \mathbb{S}^7 n'est pas un groupe de Lie.

Dans ce chapitre nous ne travaillons pas uniquement avec des variétés fermées, comme précédemment, mais nous considérons aussi des groupes de Lie qui ne sont pas compacts.

Pour déterminer si un groupe de Lie admet une p -sphère de contact invariante à gauche, il convient d'étudier l'algèbre de Lie qui lui est associée. Si cette algèbre de Lie admet une p -sphère de contact, alors le groupe de Lie en question admet une p -sphère de contact invariante et seulement dans ce cas. Nous allons donc étudier les algèbres de Lie de dimensions 3 et 7 en utilisant les classifications connues de ces algèbres.

7.1 Groupes de Lie de dimension 3

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension 3. Nous allons étudier sous quelles conditions il existe sur \mathfrak{g} une sphère de contact invariante à gauche. Cela déterminera aussi les groupes de Lie sur lesquels il existe des sphères de contact invariantes à gauche.

Soit alors $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ une base de formes de \mathfrak{g} . S'il existe sur \mathfrak{g} une sphère de contact, nous pouvons supposer qu'elle est engendrée par ω_1, ω_2 et ω_3 , car les formes génératrices sont linéairement indépendantes et forment ainsi une

base de \mathfrak{g} .

Quelles sont des conditions nécessaires pour que \mathfrak{g} admette une telle base ?
 \mathfrak{g} est déterminée par les constantes de structure suivantes :

$$\begin{cases} d\omega_1 &= a_{11}\omega_2 \wedge \omega_3 + a_{12}\omega_3 \wedge \omega_1 + a_{13}\omega_1 \wedge \omega_2 \\ d\omega_2 &= a_{21}\omega_2 \wedge \omega_3 + a_{22}\omega_3 \wedge \omega_1 + a_{23}\omega_1 \wedge \omega_2 \\ d\omega_3 &= a_{31}\omega_2 \wedge \omega_3 + a_{32}\omega_3 \wedge \omega_1 + a_{33}\omega_1 \wedge \omega_2, \end{cases} \quad (7.1)$$

où les a_{ij} doivent satisfaire les conditions suivantes :

- i) les conditions de Jacobi ;
- ii) les conditions de sphère de contact.

Pour exprimer la condition de sphère de contact, nous allons l'examiner sur une combinaison linéaire arbitraire des formes de base. Soit alors $\omega = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3$, avec $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. ω est de contact si et seulement si $\omega \wedge d\omega$ est une forme volume. Or,

$$\begin{aligned} \omega \wedge d\omega &= (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3) \wedge (\lambda_1 d\omega_1 + \lambda_2 d\omega_2 + \lambda_3 d\omega_3) \\ &= (a_{11}\lambda_1^2 + a_{22}\lambda_2^2 + a_{33}\lambda_3^2 + (a_{12} + a_{21})\lambda_1\lambda_2 \\ &\quad + (a_{23} + a_{32})\lambda_2\lambda_3 + (a_{31} + a_{13})\lambda_3\lambda_1)\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \end{aligned}$$

On peut considérer le coefficient de cette dernière expression comme une forme quadratique en les variables λ_1, λ_2 et λ_3 . ω est alors de contact si et seulement si la matrice de cette forme quadratique est définie, c'est-à-dire si $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ est définie. Il faut donc que les déterminants diagonaux de rang 2 soient positifs et que les déterminants diagonaux de rang 1 et 3 soient soit tous positifs, soit tous négatifs. La condition de contact se traduit donc par les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} a_{11} &> 0 \\ a_{22} &> 0 \\ a_{33} &> 0 \\ a_{11}a_{33} - a_{13}^2 &> 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &> 0 \\ a_{22}a_{33} - a_{23}^2 &> 0, \\ a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 &> 0 \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} a_{11} &< 0 \\ a_{22} &< 0 \\ a_{33} &< 0 \\ a_{11}a_{33} - a_{13}^2 &> 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &> 0 \\ a_{22}a_{33} - a_{23}^2 &> 0. \\ a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 &< 0 \end{aligned}$$

Les conditions de Jacobi s'expriment par les équations

$$d(d\omega_1) = d(d\omega_2) = d(d\omega_3) = 0.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} d(d\omega_1) &= a_{11}(d\omega_2 \wedge \omega_3 - \omega_3 \wedge d\omega_2) + a_{12}(d\omega_3 \wedge \omega_1 - \omega_1 \wedge d\omega_3) \\ &\quad + a_{13}(d\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_2 \wedge d\omega_1) \\ &= (a_{11}(a_{23} - a_{32}) + a_{12}(a_{31} - a_{13}) + a_{13}(a_{12} - a_{21})) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} d(d\omega_2) &= (a_{21}(a_{23} - a_{32}) + a_{22}(a_{31} - a_{13}) + a_{23}(a_{12} - a_{21})) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \\ d(d\omega_3) &= (a_{31}(a_{23} - a_{32}) + a_{32}(a_{31} - a_{13}) + a_{33}(a_{12} - a_{21})) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3, \end{aligned}$$

d'où les équations

$$\begin{aligned} a_{11}(a_{23} - a_{32}) + a_{12}(a_{31} - a_{13}) + a_{13}(a_{12} - a_{21}) &= 0 \\ a_{21}(a_{23} - a_{32}) + a_{22}(a_{31} - a_{13}) + a_{23}(a_{12} - a_{21}) &= 0 \\ a_{31}(a_{23} - a_{32}) + a_{32}(a_{31} - a_{13}) + a_{33}(a_{12} - a_{21}) &= 0. \end{aligned}$$

On peut décomposer la matrice $A = (a_{ij})_{ij}$ en sa partie symétrique

$$A_s = (a_{ij}^s)_{ij} = \left(\frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \right)_{ij}$$

et sa partie antisymétrique

$$A_a = (a_{ij}^a)_{ij} = \left(\frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} \right)_{ij}.$$

On a alors $A = A_s + A_a$. La condition de Jacobi s'écrit donc

$$\begin{aligned} a_{11} a_{23}^a + a_{12} a_{31}^a + a_{13} a_{12}^a &= 0 \\ a_{21} a_{23}^a + a_{22} a_{31}^a + a_{23} a_{12}^a &= 0 \\ a_{31} a_{23}^a + a_{32} a_{31}^a + a_{33} a_{12}^a &= 0, \end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire sous forme matricielle comme

$$A \cdot {}^t(a_{23}^a, a_{31}^a, a_{12}^a) = 0. \quad (7.2)$$

Nous avons vu que la matrice A doit être définie pour que les formes ω_1 , ω_2 et ω_3 engendrent une sphère de contact. En particulier, A est de rang 3 et l'équation (7.2) implique donc que $(a_{23}^a, a_{31}^a, a_{12}^a)$ est nul. Ainsi, lorsqu'il existe une sphère de contact sur \mathfrak{g} , la condition de Jacobi est équivalente à la symétrie de la matrice A .

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant.

Théorème 12 — *La seule algèbre de Lie de dimension 3 qui admette une sphère de contact est $\mathfrak{so}(3)$.*

Preuve : Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension 3 et soit $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ une base de formes qui engendre une sphère de contact. On suppose que leurs crochets vérifient la relation (7.1). D'après ce qui précède, la matrice $A = (a_{ij})_{i,j}$ est alors symétrique et soit définie positive soit définie négative.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base duale de $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Les crochets de ces champs de vecteurs s'écrivent alors

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -a_{13} e_1 - a_{23} e_2 - a_{33} e_3 \\ [e_2, e_3] &= -a_{11} e_1 - a_{21} e_2 - a_{31} e_3 \\ [e_3, e_1] &= -a_{12} e_1 - a_{22} e_2 - a_{32} e_3. \end{aligned}$$

On considère alors la forme de Killing K sur \mathbb{S}^3 , qui est définie par

$$K(x, y) = \text{tr}(ad(x) \circ ad(y)).$$

Nous allons vérifier que K est définie négative. Comme $\mathfrak{so}(3)$ est la seule algèbre de Lie de dimension 3 sur laquelle la forme de Killing est définie négative, cela terminera la démonstration. Pour montrer que K est définie négative, il suffit de montrer que les déterminants diagonaux de degré un et trois de sa matrice sont négatifs et que ceux de degré deux sont positifs. La forme de Killing peut s'exprimer de la façon suivante :

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^3 [x, [y, e_k]]_k.$$

En notant $K(e_i, e_j) = K_{ij}$, on a donc

$$\begin{aligned} K_{11} &= 2a_{23}^2 - 2a_{22}a_{33} \\ K_{22} &= 2a_{13}^2 - 2a_{11}a_{33} \\ K_{33} &= 2a_{12}^2 - 2a_{11}a_{22} \\ K_{ij} &= 2(a_{ij}a_{kk} - a_{ik}a_{jk}), \quad \text{pour } i \neq j \text{ et } (i, j, k) \text{ direct,} \end{aligned}$$

la matrice de K est donc symétrique. Il en résulte que les déterminants diagonaux d'ordre supérieur s'écrivent

$$\begin{aligned} K_{11}K_{22} - K_{12}^2 &= 4a_{33}(a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2) \\ K_{22}K_{33} - K_{23}^2 &= 4a_{11}(a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2) \\ K_{11}K_{33} - K_{13}^2 &= 4a_{22}(a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2) \\ K_{11}(K_{22}K_{33} - K_{23}^2) - K_{12}(K_{12}K_{33} - K_{13}K_{23}) + K_{13}(K_{12}K_{23} - K_{13}K_{22}) \\ &= -8(a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2)^2. \end{aligned}$$

Tous les déterminants diagonaux sont donc du signe annoncé, ce qui veut dire que la forme de Killing est bien définie négative. ■

7.2 Groupes de Lie de dimension 7

Nous étudions maintenant la situation sur les groupes de Lie de dimension 7. Dans ce chapitre nous allons donner un certain nombre d'exemples de p -sphères de contact pour différentes valeurs de p et nous allons mettre en évidence des limitations dans la taille des p -sphères de contact invariantes qu'il peut y avoir sur certains groupes de Lie. En particulier, nous allons donner des exemples de 3-sphères de contact invariantes sur certains groupes de Lie de dimension 7, et montrer qu'il n'existe pas de 4-sphère de contact invariante sur ces variétés-là, sauf pour les groupes de Lie algébriques, où la question n'est pas résolue.

Pour déterminer si une algèbre de Lie admet une p -sphère de contact, nous allons étudier sa complexifiée. Étant donné une algèbre \mathfrak{g} , nous considérons donc l'algèbre complexe $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. Si on montre que cette algèbre n'admet pas de p -sphère de contact faible, il en sera de même pour toutes ses formes réelles, en particulier pour \mathfrak{g} . En travaillant sur des algèbres de Lie complexes, nous pouvons utiliser des classifications existantes qui permettent de démontrer certains résultats de non-existence.

Sur une algèbre de Lie complexe, on peut distinguer deux types de p -sphères de contact :

Définition 11 — *Sur une algèbre de Lie complexe, on appelle p -sphère de contact forte l'ensemble des combinaisons linéaires complexes de ses formes génératrices, si toutes ces combinaisons linéaires sont des formes de contact.*

On appelle p -sphère de contact faible l'ensemble des combinaisons linéaires réelles de ses formes génératrices, si toutes ces combinaisons linéaires sont des formes de contact

Dans ce travail, nous nous intéressons principalement aux p -sphères de contact faibles.

Le lemme suivant nous permet de nous concentrer sur les algèbres de Lie non nilpotentes :

Lemme 10 — *Sur les algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7, il n'y a pas de cercle de contact.*

Preuve : Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie nilpotente de dimension 7 et X son centre et supposons qu'il existe sur \mathfrak{g} un cercle de contact engendré par deux formes de contact ω_1 et ω_2 . Comme la différentielle d'une forme de contact est nulle sur X , la dimension de X doit être au plus 1, pour qu'il puisse y avoir une forme de contact sur \mathfrak{g} . D'autre part, comme \mathfrak{g} est nilpotente, le centre ne peut être de dimension 0, donc X est de dimension 1. Soit a un générateur de X . Toute forme de contact ω sur \mathfrak{g} vérifie alors $\omega(a) \neq 0$, puisque $d\omega$ est nulle sur le centre. En particulier, $\omega_1(a) \neq 0$ et $\omega_2(a) \neq 0$; il y a donc des

coefficients non nuls λ_1 et λ_2 tels que $(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2)(a) = 0$. Or, cela veut dire que $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$ n'est pas une forme de contact, ce qui contredit l'hypothèse. \square

Rappelons que d'après un théorème de Lévi, pour toute algèbre de Lie \mathfrak{g} de dimension finie, de caractéristique zéro et de radical \mathfrak{r} , il existe une sous-algèbre semi-simple \mathfrak{l} de \mathfrak{g} telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{r}$ (cf. [12]). Toute sous-algèbre qui vérifie cette condition s'appelle un facteur de Lévi de \mathfrak{g} .

Pour les algèbres de Lie complexes de dimension 7, les configurations possibles sont les suivantes :

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$;
2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{r}$;
3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}$,

où \mathfrak{r} est le radical de \mathfrak{g} .

Voyons alors quelle est la taille maximale d'une p -sphère de contact sur ces trois types d'algèbres de Lie :

1. Sur une algèbre \mathfrak{g} de type $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$, il n'y a pas de forme de contact. En effet, on peut choisir une base de formes $(\omega_1, \dots, \omega_7)$ de \mathfrak{g} qui vérifie

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_2 \wedge \omega_3 \\ d\omega_2 &= \omega_3 \wedge \omega_1 \\ d\omega_3 &= \omega_1 \wedge \omega_2 \\ d\omega_4 &= \omega_5 \wedge \omega_6 \\ d\omega_5 &= \omega_6 \wedge \omega_4 \\ d\omega_6 &= \omega_4 \wedge \omega_5 \\ d\omega_7 &= 0. \end{aligned}$$

Une combinaison linéaire de ces formes qui s'écrit $\omega = \sum_{i=1}^7 \lambda_i \omega_i$ vérifie alors

$$\omega \wedge d\omega \wedge d\omega \wedge d\omega = 0;$$

ω n'est donc en aucun cas une forme de contact.

2. Dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{r}$, il peut y avoir des 3-sphères de contact sur \mathfrak{g} , mais il n'y a pas de 4-sphère de contact.

Pour montrer cela, on va s'appuyer sur la théorie des représentations. Rappelons qu'une représentation d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} sur un espace vectoriel V de dimension finie est une application linéaire

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V),$$

telle que

$$\rho([X, Y]) = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X),$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$. Une représentation d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} sur un espace vectoriel $V \neq \{0\}$ est dite irréductible si V ne contient pas de sous-espace invariant propre, ou de façon équivalente, si le \mathfrak{g} -module V est simple, c'est-à-dire ne contient pas de sous-module autre que $\{0\}$ et V .

Une représentation de \mathfrak{g} sur V est dite complètement réductible si V est somme directe de sous-espaces invariants et irréductibles. Dans ce cas, le \mathfrak{g} -module V est semi-simple, c'est-à-dire somme directe de sous-modules simples. D'après H. Weyl, si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple et V un \mathfrak{g} -module de dimension finie, alors V est semi-simple.

Nous allons étudier les représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sur le radical \mathfrak{r} , considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{C} . Comme $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ est une algèbre de Lie simple, toute représentation est complètement réductible. Dans ce cas, on peut décrire toutes les représentations irréductibles.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une unique représentation de dimension n de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ que l'on peut décrire comme suit.

L'algèbre de Lie complexe simple $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ admet une base $\{X_+, H, X_-\}$ qui vérifie

$$[H, X_+] = 2X_+, \quad [H, X_-] = -2X_-, \quad [X_+, X_-] = -H.$$

Chaque composante irréductible V de \mathfrak{r} admet une base X_0, \dots, X_{n-1} telle que

$$\begin{aligned} \rho(H)(X_i) &= (n-1-2i)X_i, \\ \rho(X_-)(X_i) &= -(i+1)X_{i+1}, \\ \rho(X_+)(X_i) &= (n-i)X_{i-1}. \end{aligned}$$

On peut choisir comme représentation l'application adjointe. Ainsi, les crochets $[\mathfrak{sl}(2), \mathfrak{sl}(2)]$ étant connus, et les crochets $[\mathfrak{sl}(2), \mathfrak{r}]$ étant donnés par

$$[H, X_i] = (n-1-2i)X_i, \quad [X_-, X_i] = -(i+1)X_{i+1}, \quad [X_+, X_i] = (n-i)X_{i-1},$$

où $n = \dim(\mathfrak{r})$, il reste à définir la structure du radical \mathfrak{r} pour connaître tous les crochets qui définissent la structure de l'algèbre \mathfrak{g} .

Pour les algèbres de Lie complexes de dimension 7 de type $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{r}$, c'est-à-dire pour des représentations de dimension 4 de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, les situations possibles sont les suivantes :

- (a) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus V_4$, où le radical est abélien ;
- (b) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus V_2^1 \oplus V_2^2$, où le radical est abélien ;
- (c) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus V_3 \oplus V_1$, où le radical est abélien ;
- (d) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus V_3 \oplus V_1$, avec les crochets

$$[X_0, X_1] = 2X_0, \quad [X_0, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_2] = 2X_0,$$

où $\{H, X_+, X_-, X_0, X_1, X_2, Y_0\}$ est une base de \mathfrak{g} ;

- (e) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus V_3 \oplus V_1$, avec les crochets

$$[X_0, Y_0] = X_0, \quad [X_1, Y_0] = X_1, \quad [X_2, Y_0] = X_2,$$

où $\{H, X_+, X_-, X_0, X_1, X_2, Y_0\}$ est une base de \mathfrak{g} ;

(f) $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C}) \oplus V_2 \oplus V_1^1 \oplus V_1^2$, où le radical est abélien ;

(g) $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C}) \oplus V_2 \oplus V_1^1 \oplus V_1^2$, avec les crochets

$$\begin{aligned} [X_0, Y_0] &= X_0, & [X_1, Y_0] &= X_1, & [X_0, Z_0] &= aX_0, \\ [X_1, Z_0] &= aX_1, & [Y_0, Z_0] &= Z_0, \end{aligned}$$

où $\{X_0, X_1, Y_0, Z_0\}$ est une base adaptée du radical et où a est une constante complexe quelconque ;

(h) $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C}) \oplus V_2 \oplus V_1^1 \oplus V_1^2$, avec les crochets

$$[X_0, Z_0] = aX_0, \quad [X_1, Z_0] = aX_1, \quad [Y_0, Z_0] = Z_0;$$

(i) $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C}) \oplus V_2 \oplus V_1^1 \oplus V_1^2$, avec les crochets

$$[X_0, X_1] = Y_0, \quad [X_0, Z_0] = X_0, \quad [X_1, Z_0] = X_1, \quad [Y_0, Z_0] = 2Y_0;$$

(j) $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C}) \oplus V_2 \oplus V_1^1 \oplus V_1^2$, avec les crochets

$$[X_0, Z_0] = X_0, \quad [X_1, Z_0] = X_1, \quad [Y_0, Z_0] = 2Y_0;$$

(k) $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C}) \oplus V_2 \oplus V_1^1 \oplus V_1^2$, avec le crochet

$$[X_0, X_1] = Y_0;$$

(l) $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C}) \oplus V_1^1 \oplus V_1^2 \oplus V_1^3 \oplus V_1^4$, où le radical est une algèbre de Lie résoluble de dimension 4 quelconque.

A partir de ces données, nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant :

Proposition 7 — *Parmi les algèbres de Lie complexes de dimension 7 qui admettent $sl(2, \mathbb{C})$ comme facteur de Lévi, celles de type (f) et (k) n'admettent pas de forme de contact. Les algèbres de type (c) et (d) n'admettent pas de cercle de contact faible, celles de type (e), (g), (h), (i) et (j) n'admettent pas de sphère de contact faible, celles de type (l) n'admettent pas de 3-sphère de contact faible et celles de type (a) et (b) n'admettent pas de 4-sphère de contact faible.*

Par contre, il existe une forme réelle d'une algèbre de type (a) qui admet une 3-sphère de contact et des formes réelles d'algèbres de type (g) et (h) qui admettent des cercles de contact.

Preuve : Démontrons qu'une algèbre de Lie \mathfrak{g} de type (a) n'admet pas de 4-sphère de contact faible. D'après la théorie générale des représentations, il existe une base de formes de \mathfrak{g} dont les différentielles s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= -\omega_2 \wedge \omega_3 \\ d\omega_2 &= 2\omega_1 \wedge \omega_2 \\ d\omega_3 &= 2\omega_3 \wedge \omega_1 \\ d\omega_4 &= 3\omega_4 \wedge \omega_1 + 3\omega_5 \wedge \omega_3 \\ d\omega_5 &= \omega_5 \wedge \omega_1 + \omega_2 \wedge \omega_4 + 2\omega_6 \wedge \omega_3 \\ d\omega_6 &= \omega_1 \wedge \omega_6 + \omega_7 \wedge \omega_3 + 2\omega_2 \wedge \omega_5 \\ d\omega_7 &= 3\omega_1 \wedge \omega_7 + 3\omega_2 \wedge \omega_6 \end{aligned}$$

Considérons alors une combinaison linéaire de ces formes

$$\omega = \sum_{i=1}^7 \lambda_i \omega_i,$$

où les λ_i sont des coefficients réels. ω est de contact si et seulement si

$$\begin{aligned} & \omega \wedge (d\omega)^3 \neq 0 \\ \Leftrightarrow & 27 \lambda_4^2 \lambda_7^2 + 4 \lambda_6^3 \lambda_4 - \lambda_5^2 \lambda_6^2 + 4 \lambda_7 \lambda_5^3 - 18 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 \neq 0, \end{aligned}$$

puisque $\omega \wedge (d\omega)^3 = (27 \lambda_4^2 \lambda_7^2 + 4 \lambda_6^3 \lambda_4 - \lambda_5^2 \lambda_6^2 + 4 \lambda_7 \lambda_5^3 - 18 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \wedge \omega_5 \wedge \omega_6 \wedge \omega_7$. On constate que les coefficients λ_1, λ_2 et λ_3 n'apparaissent pas dans cette expression. Les formes ω_1, ω_2 et ω_3 ne jouent donc aucun rôle pour la composition des formes de contact, c'est-à-dire que les formes génératrices d'une p -sphère de contact sur \mathfrak{g} n'ont pas de composante en ω_1, ω_2 ou ω_3 .

Pour qu'il puisse exister une 4-sphère de contact faible sur \mathfrak{g} , il faut et il suffit qu'il existe un 5-plan vectoriel réel dans l'espace des formes qui ne rencontre l'hypersurface complexe H de \mathbb{C}^7 définie par

$$27 \lambda_4^2 \lambda_7^2 + 4 \lambda_6^3 \lambda_4 - \lambda_5^2 \lambda_6^2 + 4 \lambda_7 \lambda_5^3 - 18 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 = 0$$

qu'en l'origine. Cela signifierait en effet que la seule forme de ce 5-plan qui ne soit pas une forme de contact est la forme nulle. Il suffit donc d'examiner les projections de l'hypersurface H et du 5-plan sur le 4-plan complexe E correspondant aux coefficients λ_4 à λ_7 , i.e. défini par $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, puisque l'hypersurface ne dépend pas des coefficients λ_1 à λ_3 . La projection du 5-plan reste un 5-plan, puisqu'il ne contient pas de vecteur orthogonal à E . En effet, l'espace vectoriel qui correspond aux coefficients λ_1 à λ_3 est contenu dans l'hypersurface H .

Or, le 5-plan complexe P défini par $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$ est, lui-aussi, contenu dans H et sa projection sur l'espace E est de dimension complexe 2 et intersecte donc n'importe quel 5-plan réel contenu dans E . Ainsi, il n'y a pas de 4-sphère de contact faible, ni forte, sur \mathfrak{g} .

De même, une algèbre de Lie \mathfrak{g} de type (b) n'admet pas de 4-sphère de contact faible. En effet, il existe une base de formes de \mathfrak{g} dont les différentielles s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= -\omega_2 \wedge \omega_3 \\ d\omega_2 &= 2\omega_1 \wedge \omega_2 \\ d\omega_3 &= 2\omega_3 \wedge \omega_1 \\ d\omega_4 &= \omega_4 \wedge \omega_1 + \omega_5 \wedge \omega_3 \\ d\omega_5 &= \omega_1 \wedge \omega_5 + \omega_2 \wedge \omega_4 \\ d\omega_6 &= \omega_6 \wedge \omega_1 + \omega_7 \wedge \omega_3 \\ d\omega_7 &= \omega_1 \wedge \omega_7 + \omega_2 \wedge \omega_6 \end{aligned}$$

Une combinaison linéaire

$$\omega = \sum_{i=1}^7 \mu_i \omega_i,$$

est alors une forme de contact si et seulement si l'expression

$$\mu_5 \mu_6 - \mu_4 \mu_7$$

ne s'annule pas pour cette combinaison linéaire.

Or, de la même façon que précédemment, tout 5-plan réel dans l'espace vectoriel complexe défini par $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ intersecte le 2-plan complexe défini par $\mu_4 = \mu_5 = 0$ dans cet espace et ce 2-plan est contenu dans l'hypersurface $(\mu_5 \mu_6 - \mu_4 \mu_7)^{-1}(0)$. Donc sur ce type d'algèbre il n'existe pas de 4-sphère de contact faible non plus.

Voyons maintenant quelles sont les limitations sur les autres algèbres.

Si le radical se décompose en un produit $V_3 \oplus V_1$, on considère une base de \mathfrak{g} de la forme $\{X_+, H, X_-, X_0, X_1, X_2, Y_0\}$, où X_0, X_1 et X_2 engendrent V_3 et où Y_0 engendre V_1 . On considère les formes duales $\omega_1, \dots, \omega_7$ des vecteurs de cette base dans l'ordre donné.

Si le radical se décompose en un produit $V_2 \oplus V_1 \oplus V_1$, on considère une base de \mathfrak{g} de la forme $\{X_+, H, X_-, X_0, X_1, Y_0, Z_0, \}$, où X_0 et X_1 engendrent V_2 et où Y_0 et Z_0 engendrent les deux composantes de dimension 1. Ici aussi, on considère les formes duales $\omega_1, \dots, \omega_7$ des vecteurs de cette base dans l'ordre donné.

Dans le cas (c), les différentielles des formes ω_1 à ω_7 sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= 2\omega_1 \wedge \omega_2 \\ d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_3 \\ d\omega_3 &= 2\omega_2 \wedge \omega_3 \\ d\omega_4 &= 2\omega_4 \wedge \omega_2 + 2\omega_5 \wedge \omega_1 \\ d\omega_5 &= \omega_6 \wedge \omega_1 + \omega_3 \wedge \omega_4 \\ d\omega_6 &= 2\omega_2 \wedge \omega_6 + 2\omega_3 \wedge \omega_5 \\ d\omega_7 &= 0. \end{aligned}$$

Comme ω_7 n'apparaît dans la différentielle d'aucune de ces formes, une forme de contact a nécessairement une composante non nulle en ω_7 . Étant donné deux formes de contact, il existe donc une combinaison linéaire de celles-ci dont la composante en ω_7 est nulle. Ainsi, il n'existe pas de cercle de contact sur les algèbres de type (c).

Dans le cas (d), les formes ω_1 à ω_7 ont les différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= 2\omega_1 \wedge \omega_2 \\
d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_3 \\
d\omega_3 &= 2\omega_2 \wedge \omega_3 \\
d\omega_4 &= 2\omega_4 \wedge \omega_2 + 2\omega_5 \wedge \omega_1 + 2\omega_5 \wedge \omega_4 + 2\omega_6 \wedge \omega_5 \\
d\omega_5 &= \omega_6 \wedge \omega_1 + \omega_3 \wedge \omega_4 + \omega_6 \wedge \omega_4 \\
d\omega_6 &= 2\omega_2 \wedge \omega_6 + 2\omega_3 \wedge \omega_5 \\
d\omega_7 &= 0.
\end{aligned}$$

Ce cas est donc analogue au cas précédent.

Dans le cas (e), les différentielles des formes ω_1 à ω_7 sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= 2\omega_1 \wedge \omega_2 \\
d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_3 \\
d\omega_3 &= 2\omega_2 \wedge \omega_3 \\
d\omega_4 &= 2\omega_4 \wedge \omega_2 + 2\omega_5 \wedge \omega_1 + \omega_7 \wedge \omega_4 \\
d\omega_5 &= \omega_6 \wedge \omega_1 + \omega_3 \wedge \omega_4 + \omega_7 \wedge \omega_5 \\
d\omega_6 &= 2\omega_2 \wedge \omega_6 + 2\omega_3 \wedge \omega_5 + \omega_7 \wedge \omega_6 \\
d\omega_7 &= 0.
\end{aligned}$$

Ici, la forme ω_4 n'apparaît que dans les différentielles de ω_4 et de ω_5 . Une 1-forme sur cette algèbre doit donc avoir une composante non nulle en ω_4 ou en ω_5 pour pouvoir être une forme de contact. Or, pour 3 formes données, il existe toujours une combinaison linéaire normalisée qui n'a pas de composante en ces deux formes. Il n'y a donc pas de sphère de contact sur une algèbre de type (e).

Dans le cas (f), les différentielles des formes ω_1 à ω_7 s'écrivent comme suit.

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= 2\omega_1 \wedge \omega_2 \\
d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_3 \\
d\omega_3 &= 2\omega_2 \wedge \omega_3 \\
d\omega_4 &= 0 \\
d\omega_5 &= 0 \\
d\omega_6 &= 0 \\
d\omega_7 &= 0.
\end{aligned}$$

Aucune combinaison linéaire de ces formes n'est une forme de contact, il n'y a donc pas de forme de contact sur ce type d'algèbre de Lie.

Dans le cas (g), les différentielles des formes ω_1 à ω_7 s'écrivent de la façon suivante.

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= 2\omega_1 \wedge \omega_2 \\
d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_3 \\
d\omega_3 &= 2\omega_2 \wedge \omega_3 \\
d\omega_4 &= \omega_4 \wedge \omega_2 + \omega_5 \wedge \omega_1 + \omega_6 \wedge \omega_4 + a\omega_7 \wedge \omega_4 \\
d\omega_5 &= \omega_2 \wedge \omega_5 + \omega_3 \wedge \omega_4 + \omega_6 \wedge \omega_5 + a\omega_7 \wedge \omega_5 \\
d\omega_6 &= 0 \\
d\omega_7 &= \omega_7 \wedge \omega_6.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Une combinaison linéaire $\omega = \sum_{i=1}^7 \lambda_i \omega_i$ est alors une forme de contact si et seulement si l'expression

$$(5\lambda_7 - 2a\lambda_6)(\lambda_1 \lambda_5^2 + \lambda_3 \lambda_4^2 + \lambda_2 \lambda_4 \lambda_5)$$

n'est pas nulle. Dans l'espace des coefficients, l'hypersurface H définie par les zéros de cette expression contient donc un hyperplan complexe, donné par $5\lambda_7 - 2a\lambda_6 = 0$. Il ne peut donc y avoir de 3-plan réel dans cet espace qui ne coupe H qu'en l'origine. Sur cette algèbre, il n'y a donc pas de 2-sphère de contact. Il existe en revanche un cercle de contact sur une forme réelle de \mathfrak{g} , comme le montre l'exemple 10 plus loin.

Dans le cas (h), les formes ω_1 à ω_7 ont les différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= 2\omega_1 \wedge \omega_2 \\
d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_3 \\
d\omega_3 &= 2\omega_2 \wedge \omega_3 \\
d\omega_4 &= \omega_4 \wedge \omega_2 + \omega_5 \wedge \omega_1 + a\omega_7 \wedge \omega_4 \\
d\omega_5 &= \omega_2 \wedge \omega_5 + \omega_3 \wedge \omega_4 + a\omega_7 \wedge \omega_5 \\
d\omega_6 &= 0 \\
d\omega_7 &= \omega_7 \wedge \omega_6.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Ici, une combinaison linéaire $\omega = \sum_{i=1}^7 \lambda_i \omega_i$ est une forme de contact si et seulement si l'expression

$$(2a\lambda_6 - 3\lambda_7)(\lambda_1 \lambda_5^2 + \lambda_3 \lambda_4^2 + \lambda_2 \lambda_4 \lambda_5)$$

n'est pas nulle. La discussion est donc analogue à celle du cas précédent. Un exemple de cercle de contact sur une forme réelle de \mathfrak{g} est donné plus loin (Exemple 11).

Dans le cas (i) , les différentielles des formes ω_1 à ω_7 s'écrivent comme suit.

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= 2\omega_1 \wedge \omega_2 \\
d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_3 \\
d\omega_3 &= 2\omega_2 \wedge \omega_3 \\
d\omega_4 &= \omega_4 \wedge \omega_2 + \omega_5 \wedge \omega_1 + \omega_7 \wedge \omega_4 \\
d\omega_5 &= \omega_2 \wedge \omega_5 + \omega_3 \wedge \omega_4 + \omega_7 \wedge \omega_5 \\
d\omega_6 &= \omega_5 \wedge \omega_4 + \omega_7 \wedge \omega_6 \\
d\omega_7 &= 0.
\end{aligned}$$

Une combinaison linéaire $\omega = \sum_{i=1}^7 \lambda_i \omega_i$ est donc une forme de contact si et seulement si l'expression

$$\lambda_6 (\lambda_6 \lambda_2^2 - 4 \lambda_1 \lambda_3 \lambda_6 + \lambda_1 \lambda_5^2 + \lambda_3 \lambda_4^2 + \lambda_2 \lambda_4 \lambda_5)$$

n'est pas nulle. Ici encore, pour les mêmes raisons que précédemment, il n'existe pas de sphère de contact sur \mathfrak{g} .

Le cas (j) est encore analogue aux cas précédents. Ici, l'hyperplan interdit H est défini par l'expression

$$\lambda_6 (\lambda_1 \lambda_5^2 + \lambda_3 \lambda_4^2 + \lambda_2 \lambda_4 \lambda_5).$$

Dans le cas (k) , les différentielles des formes ω_1 à ω_7 sont de la forme suivante.

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= 2\omega_1 \wedge \omega_2 \\
d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_3 \\
d\omega_3 &= 2\omega_2 \wedge \omega_3 \\
d\omega_4 &= 0 \\
d\omega_5 &= 0 \\
d\omega_6 &= \omega_4 \wedge \omega_3 \\
d\omega_7 &= 0.
\end{aligned}$$

Aucune combinaison de ces formes n'est une forme de contact, il n'y a donc pas de forme de contact sur ce type d'algèbre de Lie.

Dans le cas (l) , il n'y a pas de 3-sphère de contact sur \mathfrak{g} . En effet, si on considère une base $(X_+, H, X_-, X_0, Y_0, Z_0, T_0)$ de \mathfrak{g} et une base duale $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, on constate que les différentielles des ω_i ne contiennent que des compositions des formes ω_i et que dans les différentielles des α_i n'apparaissent que des compositions des α_i . Pour qu'une forme puisse être une forme de contact, il faut donc qu'elle ait des composantes non nulles

en ω_1, ω_2 ou ω_3 . Or, étant donné 4 formes de contact, il existe toujours une combinaison normalisée qui annule ces composantes. Il n'existe donc pas de 3-sphère de contact sur \mathfrak{g} dans ce cas.

Les exemples qui suivent achèvent la preuve de la Proposition 7 en montrant l'existence des p -sphères de contact annoncées dans l'énoncé. ■

Exemple 9 *Il existe une algèbre réelle de dimension 7 admettant une 3-sphère de contact : les formes $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ et ω_7 de différentielles satisfaisant*

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_6 - \omega_3 \wedge \omega_5 - \omega_7 \wedge \omega_4 \\ d\omega_2 = -\omega_6 \wedge \omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_7 - \omega_4 \wedge \omega_5 \\ d\omega_3 = -\omega_5 \wedge \omega_1 - \omega_7 \wedge \omega_2 - \omega_6 \wedge \omega_4 \\ d\omega_4 = -\omega_1 \wedge \omega_7 - \omega_5 \wedge \omega_2 - \omega_3 \wedge \omega_6 \\ d\omega_5 = -2\omega_7 \wedge \omega_6 \\ d\omega_6 = -2\omega_5 \wedge \omega_7 \\ d\omega_7 = -2\omega_6 \wedge \omega_5 \end{array} \right.$$

définissent une algèbre dont la complexifiée est de type (a) et les formes $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 engendrent une 3-sphère de contact. En effet, pour

$$\omega = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \omega_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 = 1,$$

on a

$$\omega \wedge (d\omega)^3 = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \wedge \omega_5 \wedge \omega_6 \wedge \omega_7,$$

qui est une forme volume.

Exemple 10 *L'algèbre de Lie réelle de dimension 7 dont une base de formes $(\omega_1, \dots, \omega_7)$ vérifie les relations (7.3) admet un cercle de contact engendré par les formes*

$$\alpha_1 = \omega_1 + \omega_5 + \omega_7 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \omega_3 + \omega_4 + \omega_7.$$

En effet, une forme $\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2$ vérifie

$$\alpha \wedge (d\alpha)^3 = -30(\lambda_1^4 + \lambda_1^3 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^3 + \lambda_2^4) \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_7,$$

qui est une forme volume, si $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$.

Exemple 11 *L'algèbre de Lie réelle de dimension 7 dont une base de formes $(\omega_1, \dots, \omega_7)$ vérifie les relations (7.4) admet un cercle de contact engendré par les formes*

$$\beta_1 = \omega_1 + \omega_5 + \omega_7 \quad \text{et} \quad \beta_2 = \omega_3 + \omega_4 + \omega_7.$$

En effet, une forme $\beta = \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2$ vérifie

$$\beta \wedge (d\beta)^3 = 18(\lambda_1^4 + \lambda_1^3 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^3 + \lambda_2^4) \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_7,$$

qui est une forme volume, si $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$.

Exemple 12 *Sur toute algèbre \mathfrak{g} de type (b) il existe une 3-sphère de contact. En adoptant le point de vue qu'on a développé dans la preuve de la Proposition 7, il existe sur \mathfrak{g} une 3-sphère de contact faible si et seulement si on peut trouver un 4-plan réel dans \mathbb{C}^4 qui n'intersecte l'hypersurface complexe H définie par $z_1 z_2 - z_3 z_4 = 0$ qu'en l'origine. Si on remplace chaque z_i par $a_i + i b_i$, on obtient deux équations réelles qui définissent H , à savoir*

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 - a_3 a_4 + b_3 b_4 = 0 \quad (7.5)$$

$$a_1 b_2 + b_1 a_2 - a_3 b_4 - b_3 a_4 = 0. \quad (7.6)$$

Pour qu'un point de \mathbb{C}^4 ne soit pas sur cette hypersurface complexe, il suffit donc que a_1 et a_2 soient de même signe, ainsi que b_1 et $-b_2$, a_3 et $-a_4$ et b_3 et b_4 . Cela contredit l'équation (7.5), sauf en le point 0. Or, les équations

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = -b_2, \quad a_3 = -a_4, \quad b_3 = b_4$$

définissent précisément un 4-plan réel dans \mathbb{C}^4 . Ce 4-plan définit donc une 3-sphère de contact faible sur \mathfrak{g} .

Il paraît toutefois qu'aucune forme réelle d'une telle algèbre n'admet de 3-sphère de contact. Mais quand on s'intéresse aux p -sphères de contact sur les algèbres de Lie complexes, ce résultat est intéressant.

3. Parmi les algèbres résolubles, nous allons d'abord traiter le cas des algèbres algébriques. Soit \mathfrak{g} donc une algèbre de Lie algébrique de dimension 7 et \mathfrak{n} son nilradical. D'après le Lemme 10, la dimension de \mathfrak{n} ne peut être égale à 7. On décompose alors \mathfrak{g} en $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{t}$. Comme \mathfrak{g} est résoluble, l'algèbre dérivée \mathfrak{g}' est nilpotente, donc contenue dans \mathfrak{n} (cf. par exemple [12], p. 51). Tout élément $Y \in \mathfrak{t}$ définit une dérivation sur \mathfrak{n} , c'est-à-dire que $ad Y$ vérifie

$$[ad Y(X_1), X_2] + [X_1, ad Y(X_2)] = ad Y([X_1, X_2]),$$

pour $X_1, X_2 \in \mathfrak{n}$. Une dérivation se décompose en la somme d'une partie nilpotente et d'une partie semi-simple, qui est diagonalisable. Dans notre cas, \mathfrak{t} ne peut définir une dérivation nilpotente, c'est-à-dire sans partie semi-simple, car cela définirait une sous-algèbre nilpotente de \mathfrak{g} qui contiendrait strictement \mathfrak{n} , ce qui est exclu.

Dans le cas des algèbres algébriques, on a $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] = 0$ et les dérivations sont semi-simples. En choisissant alors une base (X_1, \dots, X_7) dans laquelle une dérivation donnée par un $Y \in \mathfrak{t}$ est diagonale, on a

$$\begin{aligned} ad Y([X_1, X_2]) &= [ad Y(X_1), X_2] + [X_1, ad Y(X_2)] \\ &= [\lambda_1 X_1, X_2] + [X_1, \lambda_1 X_2] \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) [X_1, X_2], \end{aligned} \quad (7.7)$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la dérivation.

Démontrons le résultat suivant :

Proposition 8 — *Une algèbre de Lie résoluble et algébrique de dimension 7 n'admet pas de 4-sphère de contact.*

Preuve : Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie résoluble et algébrique de dimension 7. Supposons qu'il existe sur \mathfrak{g} une 4-sphère de contact. Il existe donc 5 formes de contact $\omega_1, \dots, \omega_5$ qui engendrent cette 4-sphère. Complétons ces formes en une base de formes $(\omega_1, \dots, \omega_7)$ de \mathfrak{g} . On peut alors montrer que l'algèbre dérivée \mathfrak{g}' est de dimension au moins 5. Comme \mathfrak{g}' est contenue dans le nilradical \mathfrak{n} , il en résulte que $\dim \mathfrak{n} \geq 5$. Soit alors $(X_1, \dots, X_{\dim \mathfrak{n}}, Y_1, \dots, Y_{7-\dim \mathfrak{n}})$ une base de \mathfrak{g} adaptée à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{t}$ pour laquelle les dérivations définies par les éléments de \mathfrak{t} sont diagonales. Il est possible de trouver une telle base, puisque les éléments de \mathfrak{t} commutent et on peut donc diagonaliser simultanément les dérivations qu'ils définissent. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_{\dim \mathfrak{n}}, \beta_1, \dots, \beta_{7-\dim \mathfrak{n}})$ la base duale correspondante.

- Examinons d'abord le cas où $\dim \mathfrak{n} = 5$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ les valeurs propres pour la dérivation $\text{ad}(Y_1)$ associées aux vecteurs propres X_1, \dots, X_5 . On peut supposer que ces valeurs vérifient

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_5.$$

Nous pouvons supposer que ces valeurs propres sont toutes positives ou nulles.

Si tous les λ_i sont positifs, les crochets de la forme $[X_1, X_i]$ sont tous nuls, d'après la formule (7.7). La seule forme de base dont la différentielle contient α_1 est donc α_1 . Une 1-forme doit donc avoir une composante en α_1 non nulle pour pouvoir être une forme de contact. Un cercle de contact ne peut donc exister sur \mathfrak{g} , ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle il existe sur \mathfrak{g} une 4-sphère de contact.

Si l'un des λ_i est nul, i.e. si $\lambda_5 = 0$, alors les seuls crochets qui contiennent X_1 sont

$$[Y_1, X_1] = \lambda_1 X_1, \quad [Y_2, X_1] = \mu_1 X_1 \quad \text{et} \quad [X_1, X_5] = \lambda_1 V,$$

où V est un vecteur propre ayant λ_1 comme valeur propre. V est donc une combinaison linéaire de tous les vecteurs X_i qui ont λ_1 comme valeur propre. Par conséquent, les formes de base dont les différentielles contiennent ω_1 sont α_1 et, au pire des cas, α_2, α_3 et α_4 . Par hypothèse, les formes $\omega_1, \dots, \omega_5$, qui sont des combinaisons linéaires des α_i et des β_i , engendrent une 4-sphère de contact. Or, il existe une combinaison linéaire de ces formes qui annule à la fois les coefficients de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 . Cette forme ne peut donc être une forme de contact, ce qui contredit l'hypothèse.

Si au moins deux des λ_i sont nuls, donc si $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$, alors les seuls crochets dans lesquels apparaît le vecteur Y_1 sont

$$[Y_1, X_1] = \lambda_1 X_1, \quad [Y_1, X_2] = \lambda_2 X_2 \quad \text{et} \quad [Y_1, X_3] = \lambda_3 X_3.$$

Toute forme doit donc avoir des composantes non nulles en α_1, α_2 ou α_3 pour pouvoir être une forme de contact. Or, 4 formes de contact données

ont toujours une combinaison linéaire qui n'a pas de composante en ces formes. Cela contredit l'hypothèse sur l'existence d'une 4-sphère de contact.

- Considérons maintenant le cas où $\dim \mathfrak{n} = 6$. On suppose encore qu'un vecteur X_i a comme valeur propre λ_i pour la dérivation définie par Y_1 et que celles-ci sont rangés dans le même ordre que précédemment.

Si tous les λ_i sont positifs, on est à nouveau dans la situation où il ne peut y avoir de cercle de contact, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si on a $\lambda_6 = 0$ et $\lambda_5 \neq 0$, alors tous les crochets non nuls font intervenir soit X_6 soit Y_1 . Cela implique que les différentielles de toutes les formes de base sont des sommes de produits de formes ayant pour facteur soit α_6 soit β_1 . Toute combinaison linéaire ω des formes de base vérifie alors $\omega \wedge d\omega = 0$. Il n'y a pas de forme de contact sur ce type d'algèbre.

Si deux au moins des valeurs propres sont nulles, i.e. si $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$, alors la situation est semblable à celle du cas $\dim \mathfrak{n} = 5$ où une valeur propre est nulle. Les seules formes de base dont les différentielles peuvent contenir la forme α_1 sont alors $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 et 5 formes de contact données ont au moins une combinaison linéaire pour laquelle toutes les composantes en ces formes sont nulles. Il n'existe donc pas de 4-sphère de contact sur ce type d'algèbre, ce qui contredit l'hypothèse.

- Le cas $\dim \mathfrak{n} = 7$ n'est pas à traiter, d'après le Lemme 10.

■

Cette proposition est un autre résultat partiel vers une preuve de la conjecture suivante :

Conjecture 1 *Aucune algèbre de Lie de dimension 7 n'admet de 4-sphère de contact.*

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

Ce travail avait pour but d'étudier les p -sphères de contact sous différents points de vue pour donner une vision globale de leurs propriétés. Nous avons ainsi obtenu des résultats de structure et d'existence, ainsi que des exemples de cercles et sphères de contact invariants sur des fibrés principaux en cercles. Dans une optique plus géométrique, nous avons étudié les propriétés métriques de certains cercles de contact, ce qui a donné naissance à des structures plus générales, comme les faisceaux, ou plus riches, comme les toupies de contact. Nous décrivons les variétés sur lesquelles il existe de telles structures ainsi que les métriques qui leurs sont associées. Le point de vue algébrique enfin nous permet de comprendre certains phénomènes en dimension supérieure à 3 et nous fournit un certain nombre d'exemples de p -sphères de contact.

Nous avons constaté un foisonnement d'exemples de p -sphères de contact, sur les variétés de dimension 3 d'une part et en dimension supérieure d'autre part. H. Geiges et J. Gonzalo avaient déjà démontré que toute variété fermée et orientable de dimension 3 admet un cercle de contact. Nos exemples de cercles et sphères de contact invariants vont dans le même sens. En dimension supérieure à 3, nous avons mis en évidence un certain nombre d'exemples sur les sphères de dimension $4n - 1$ et sur les groupes de Lie de dimension 7.

D'un autre côté, la structure de toupie de contact présente des propriétés géométriques fortes, mais du fait même de cette richesse, le nombre d'exemples qu'on peut en trouver est relativement restreint.

Ceci suggère une possibilité de développer les études qui ont été menées dans ce travail. Il peut être intéressant d'examiner des « presque-toupies de contact » qu'on obtiendrait en affaiblissant les conditions géométriques qui définissent les toupies de contact. On obtiendrait ainsi des objets plus souples et avec plus d'exemples, quoique moins riches en propriétés géométriques.

Un autre axe de développement de nos thématiques est l'étude systématique des objets considérés sur des variétés de dimension supérieure à 3. Le concept de toupie de contact en dimension supérieure est à élaborer et il faut trouver des exemples et des critères de classification. Les exemples paradig-

matiques qui doivent guider la généralisation des propriétés géométriques des toupies sont les exemples de p -sphères de contact qu'on a trouvés sur les sphères de dimension $4n - 1$. On peut également s'intéresser à des exemples sur les groupes de Lie de dimension 7 sur lesquels nous avons déjà travaillé dans le cadre des p -sphères de contact. On peut aussi compléter l'étude des p -sphères de contact en dimension supérieure qu'on a seulement ébauché pour le moment.

L'étude des p -sphères invariantes sur des fibrés principaux de dimension supérieure peut être particulièrement fructueuse, puisque nous avons déjà un théorème de structure les concernant (Théorème 4).

Un autre point qui mérite qu'on s'y intéresse est l'étude des p -sphères de contact complexes sur les algèbres de Lie complexes. On peut également étudier les toupies de contact complexes qui peuvent y être associées.

Une dernière direction de recherche est l'application des idées développées dans ce travail à l'étude des singularités. En particulier, on peut s'intéresser aux entrelacs de singularités qui admettent naturellement des cercles de contact.

A posteriori, les structures étudiées dans ce travail montrent que l'introduction des p -sphères de contact était une idée d'une fécondité insoupçonnée.

Bibliographie

- [1] J. ADAMS, Vector fields on spheres, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68 (1962), 39-41.
- [2] D. BLAIR, Contact Manifolds in Riemannian Geometry, *Lecture Notes in Mathematics* 509, Springer (1976).
- [3] F. BOURGEOIS, Odd dimensional tori are contact manifolds, *International Mathematics Research Notices*, Nr.30 (2002).
- [4] C. BOYER, K. GALICKI, B. MANN, The geometry and topology of 3-Sasakian manifolds, *J. reine u. angew. Math.* 455 (1994), 183-220.
- [5] M. DO CARMO, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser (1992).
- [6] B. ECKMANN, Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen, *Comm. Math. Helv.*, 15 (1943), 358-366.
- [7] H. GEIGES and J. GONZALO, Contact geometry and complex surfaces, *Invent. Math.*, 121 (1995), 147-209.
- [8] H. GEIGES and J. GONZALO, Contact Circles on 3-manifolds, *J. Diff. Geometry*, 46 (1997), 236-286.
- [9] E. GIROUX, Une infinité de structures de contact tendues sur une infinité de variétés, *Inventiones Mathematicae*, 135, Nr.3 (1999), 789-802.
- [10] J. GONZALO, Branched covers and contact structures, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 101 (1987), 347-352.
- [11] J. W. GRAY, Some global properties of contact structures, *Ann. of Math.*, 69 (1959), 421-450.
- [12] N. JACOBSON, *Lie Algebras*, Dover (1962).
- [13] R. LUTZ, Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension trois, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 27, 3 (1977), 1-15.
- [14] R. LUTZ, Sur la géométrie des structures de contact invariantes, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 29, 1 (1979), 283-306.
- [15] R. LUTZ, Quelques remarques sur la géométrie métrique des structures de contact, *Travaux en cours*
- [16] J. MARTINET, Sur les singularités des formes différentielles, *Ann. Inst. Fourier*, 20,1 (1970), 95-178.
- [17] M. ZESSIN, On contact p -spheres, *Ann. Inst. Fourier* (à paraître).