

Topologie locale des espaces de feuilletages des variétés fermées de dimension 3

Audrey Larcanché

► **To cite this version:**

Audrey Larcanché. Topologie locale des espaces de feuilletages des variétés fermées de dimension 3. Mathématiques [math]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2004. Français. tel-00008258

HAL Id: tel-00008258

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00008258>

Submitted on 26 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

Topologie locale des espaces de feuilletages des variétés fermées de dimension 3

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 2 décembre 2004
pour l'obtention du

Doctorat de l'université de Lille I
(spécialité : mathématiques pures)

par

Audrey LARCANCHÉ

Composition du Jury

| | | |
|-----------------------------|--|---|
| <i>Président :</i> | Aziz El Kacimi Alaoui | Université de Valenciennes |
| <i>Rapporteurs :</i> | Christian Bonatti Patrice Le Calvez | Université de Bourgogne Université de Paris 13 |
| <i>Examineurs :</i> | Martintxo Saralegi-Aranguren Isabelle Liousse | Université d'Artois Université de Lille I |
| <i>Directeur de thèse :</i> | Michel Belliard | Université de Lille I |
| <i>Co-encadrant :</i> | Marc Bourdon | Université de Lille I |

Laboratoire Paul Painlevé — U.M.R.-C.N.R.S. 8524

Numéro d'ordre : 3509

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

Topologie locale des espaces de feuilletages des variétés fermées de dimension 3

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 2 décembre 2004
pour l'obtention du

Doctorat de l'université de Lille I
(spécialité : mathématiques pures)

par

Audrey LARCANCHÉ

Composition du Jury

| | | |
|-----------------------------|--|---|
| <i>Président :</i> | Aziz El Kacimi Alaoui | Université de Valenciennes |
| <i>Rapporteurs :</i> | Christian Bonatti Patrice Le Calvez | Université de Bourgogne Université de Paris 13 |
| <i>Examineurs :</i> | Martintxo Saralegi-Aranguren Isabelle Liousse | Université d'Artois Université de Lille I |
| <i>Directeur de thèse :</i> | Michel Belliard | Université de Lille I |
| <i>Co-encadrant :</i> | Marc Bourdon | Université de Lille I |

Remerciements

Cette thèse n'existerait pas sans les contributions directes ou indirectes de personnes auxquelles je dois beaucoup.

Je tiens d'abord à remercier Marc Bourdon pour la gentillesse et la bienveillance avec lesquelles il a encadré cette thèse. Michel Belliard m'a initiée avec patience, gentillesse, disponibilité à la théorie des feuilletages. Ses nombreux conseils et explications, son soutien constant et son enthousiasme m'ont été précieux durant la réalisation de ce travail. Je tiens à lui exprimer ma gratitude pour tout ce qu'il m'a appris tant en recherche que sur le plan humain.

Je tiens à remercier également Christian Bonatti et Patrice Le Calvez qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs critiques et suggestions ont grandement contribué à corriger et améliorer la première version de cette thèse.

Merci à Aziz El Kacimi Alaoui, qui après m'avoir dirigée vers Michel en DEA, me fait aujourd'hui l'honneur de présider mon jury. Merci également à Martintxo Saralegi-Aranguren et Isabelle Liousse qui me font l'honneur de faire partie de mon jury.

J'ai bénéficié au sein du laboratoire Paul Painlevé d'une ambiance de travail chaleureuse et stimulante ; j'aimerais en remercier ses membres et plus particulièrement Youssef Hantout et Isabelle Liousse.

Enfin, je veux rendre hommage à mes parents pour leur soutien permanent. Je pense aussi à ma belle-famille. Bien sûr, je n'oublie pas Fabien, mon soutien inconditionnel, ma tendre moitié.



Table des matières

| | |
|--|------------|
| Remerciements | iii |
| Introduction | 1 |
| 1 Homotopies de feuilletages : exemples | 9 |
| 1.1 Le cas particulier des feuilletages de dimension 1 | 9 |
| 1.2 Cas de grande codimension | 10 |
| 1.3 Feuilletages minimaux sur \mathbb{T}_A^3 | 10 |
| 2 Dynamique des feuilletages | 12 |
| 2.1 Holonomie d'un feuilletage | 12 |
| 2.1.1 Holonomie d'une feuille | 13 |
| 2.1.2 Holonomie d'un feuilletage transverse à une fibration | 14 |
| 2.2 Feuilletage-suspension | 14 |
| 3 Quelques rappels sur les difféomorphismes du cercle | 16 |
| 3.1 Le nombre de rotation d'un difféomorphisme | 16 |
| 3.1.1 Définition du nombre de rotation | 16 |
| 3.1.2 Quelques propriétés | 16 |
| 3.1.3 Difféomorphismes de nombre de rotation rationnel | 17 |
| 3.2 Problème de conjugaison | 17 |
| 3.3 Théorèmes de conjugaison | 18 |
| 3.3.1 Théorème de conjugaison locale | 18 |
| 3.3.2 Théorème de conjugaison globale | 18 |
| 4 Résultats préliminaires | 20 |
| 4.1 Un problème de lissage | 20 |
| 4.2 Feuilletages de \mathbb{T} transverses aux parallèles de \mathbb{T}^2 | 21 |
| 5 Prolongement de certains feuilletages de \mathbb{T}^2 à \mathbb{T} | 24 |
| 5.1 Principe de construction de s | 24 |
| 5.2 Notations | 25 |
| 5.3 Quelques propriétés | 27 |
| 5.4 Tourbillonnement de Reeb équivariant | 30 |
| 5.5 Prolongement à $P \times \mathbb{S}^1$ | 31 |
| 5.6 Construction de s | 32 |
| 5.7 Homotopie de \mathcal{F} à $s(\partial(\mathcal{F}))$ pour $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$ | 33 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 6 | Homotopie de feuilletages et fibrés en cercles | 35 |
| 6.1 | Classe d'Euler d'un fibré en cercles | 35 |
| 6.2 | Preuve du théorème A | 36 |
| 7 | Cas des variétés fermées | 38 |
| 7.1 | Feuilletages tendus | 38 |
| 7.2 | Vers le théorème D | 39 |
| 7.3 | Première étape | 39 |
| 7.4 | Construction des "tubes" | 40 |
| 7.5 | Le champ radial | 41 |
| 7.6 | Preuve du théorème D | 42 |
| | Conclusion | 45 |
| | Bibliographie | 46 |



Introduction

Sauf mention contraire, les objets considérés sont supposés de classe C^∞ .

Soit M une variété de dimension n . Intuitivement, un feuilletage de dimension p (ou de codimension $k := n - p$) sur M est une décomposition de M en sous-espaces connexes disjoints de dimension p appelés *feuilles*, qui se présente localement comme la partition en feuilles d'un livre. Plus précisément :

Définition — Un feuilletage \mathcal{F} de dimension p ou de codimension $k := n - p$ sur M est défini par un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ où les difféomorphismes $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ sont tels que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, le changement de cartes

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

se met sous la forme :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \longmapsto (g_{ij}(x, y), \gamma_{ij}(y)) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k.$$

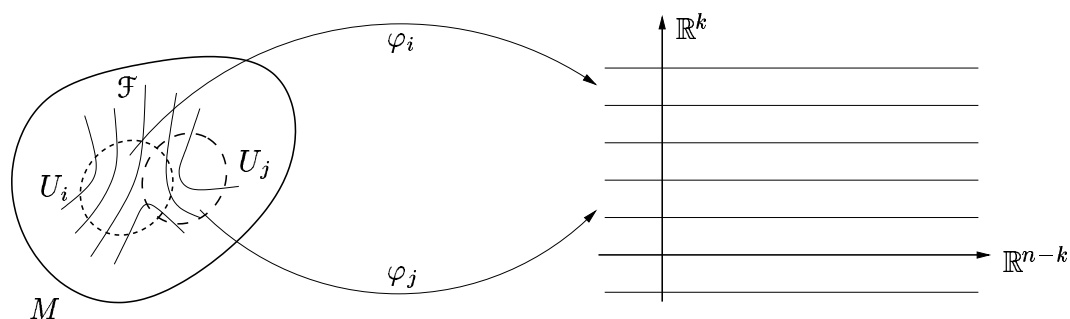


Figure 1 – Localement, les feuilles sont parallèles mais le feuilletage peut être compliqué du point de vue global.

Remarquons que localement, un feuilletage est défini comme les variétés de niveau de la submersion $f_i := \pi \circ \phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k$ où π est la projection naturelle de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^k ; en outre, ces variétés de niveau se recollent sur $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ par $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$. La donnée des triplets $(U_i, f_i, \gamma_{i,j})$ caractérise complètement \mathcal{F} .

D'autre part, les feuilles d'un feuilletage n'ont pas nécessairement la même nature topologique. Par exemple, la submersion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe au triplet (x, y, z) le réel $(1 - x^2 - y^2)e^z$ définit un feuilletage de \mathbb{R}^3 par les surfaces de niveau $f^{-1}(c)$ ($c \in \mathbb{R}$) qui sont des plans et des cylindres.

Cette définition met en évidence les relations entre les feuilletages, la géométrie différentielle et la topologie. Pourtant, les feuilletages sont issus de l'étude qualitative des équations différentielles.

Un peu d'histoire

À la fin du XIX^e siècle, Poincaré constate qu'il est impossible d'intégrer explicitement une équation différentielle générale. On est donc amené à étudier les propriétés des trajectoires sur l'équation elle-même : par des méthodes géométriques et topologiques, on essaie de déterminer l'allure générale des solutions et leurs positions relatives. Cette approche qualitative est alors développée dans de nombreux travaux (entre autres par Bendixson, Denjoy, Painlevé, Kneser, Seifert...) et aboutit à la notion de feuilletage introduite dans les années 1940-1950 par Reeb et Ehresmann ([ER44, Ree52]). Historiquement, un feuilletage est donc une généralisation géométrique d'un système différentiel où les variétés intégrales correspondant à une condition initiale sont les feuilles.

Ainsi, les flots sans singularité des équations différentielles ordinaires sur \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n induisent des feuilletages en courbes sur ces variétés tandis que les hypersurfaces d'énergie d'un système hamiltonien définissent des feuilletages de codimension 1 sur l'espace des phases. Les feuilletages apparaissent également de façon naturelle en systèmes dynamiques notamment dans la décomposition du fibré tangent associé à un flot d'Anosov (toutefois, ces feuilletages sont peu réguliers) ou encore lorsqu'on fait agir un groupe de Lie de façon localement libre sur une variété. Les feuilletages ainsi obtenus peuvent d'ailleurs être très compliqués : par exemple, l'action du groupe $\alpha\mathbb{R}$ par translation sur \mathbb{T}^2 induit un feuilletage à feuilles denses lorsque α est irrationnel. Un feuilletage est donc un système dynamique "non paramétré" (il existe d'ailleurs une théorie des feuilletages singuliers).

La plupart des exemples "pré-existants" sont de dimension ou de codimension 1. Une question naturelle est donc l'existence de feuilletages de dimension $p \in \{0, \dots, n\}$ sur une variété de dimension n .

Existence et construction de feuilletages

Pour $p = 0$ ou n , les points de la variété et la variété elle-même constitue l'ensemble de ces feuilletages "triviaux".

Une première obstruction

Pour $p \geq 1$, l'existence d'un feuilletage de dimension p implique celle d'un champ de p -plans continus, ce qui nous fournit une première obstruction. Par exemple, la sphère S^5 n'admet pas de champ de 2-plans continus donc *a fortiori* pas de feuilletage en surfaces.

Et même s'il existe un champ de p -plans, il n'est pas clair que celui-ci soit tangent à un feuilletage. Par exemple, dans \mathbb{R}^3 muni de ses coordonnées usuelles (x, y, z) , le champ de plans engendré par $X := (1, 0, 0)$ et $Y := (0, 1, x)$ ne s'écrit pas localement comme une surface de niveau d'une certaine fonction. Pour être tangent à un feuilletage, un champ de p -plans τ doit vérifier une condition d'intégrabilité dite de "Frobenius" : si X et Y sont de champs de vecteurs de τ alors leur crochet de Lie $[X, Y]$ doit encore être un champ de vecteurs de τ .

Les feuilletages en courbes

Pour $p = 1$, tout champ de vecteurs complet est intégrable. Pour avoir un feuilletage en courbes, il suffit donc d'avoir un champ de vecteurs sans singularité. Sur les variétés ouvertes (c'est-à-dire sans composante connexe compacte) un tel champ existe toujours ; par contre, les variétés compactes doivent avoir une caractéristique d'Euler-Poincaré nulle. Par suite, les seules surfaces compactes feuilletées sont le tore et le cylindre dans le cas orientable et le ruban de Möbius \mathcal{M} et la bouteille de Klein \mathcal{K} sinon. De plus, ces feuilletages sont complètement classifiés (cf par exemple [HH83] pp. 49–67).

Les feuilletages en surfaces sur les variétés de dimension 3

Pour $p \geq 2$, la situation est plus complexe puisque l'ensemble des p -plans non intégrables forme un ouvert dense dans l'ensemble des p -plans. Aussi, nous rappelons d'abord le premier exemple de feuilletage, pensé comme tel : il s'agit d'un feuilletage en surfaces de \mathbb{S}^3 construit par Reeb dans [Ree52].

Le feuilletage de Reeb — Considérons la submersion $f : (x, y, z) \in \mathbb{D}^2 \times \mathbb{R} \mapsto (1 - x^2 - y^2)e^z \in \mathbb{R}_+$. Elle induit un feuilletage du cylindre plein $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$ par les surfaces de niveau $f^{-1}(c)$ qui sont des plans pour $c > 0$ et le cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ pour $c = 0$. On constate que les plans tendent asymptotiquement vers le bord de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$ qui est lui-même une feuille. Comme ce feuilletage est invariant par l'action naturelle de \mathbb{Z} sur \mathbb{R} , on peut quotienter la variété $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$ par la relation d'équivalence $(x, y, z) \sim (x, y, z + 1)$. On obtient alors un feuilletage du tore solide $T := \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ dont les feuilles à l'intérieur de T sont des plans et tendent asymptotiquement vers le bord T^2 de la variété qui est lui-même une feuille. Un tore solide muni d'un tel feuilletage est appelé *composante de Reeb*.

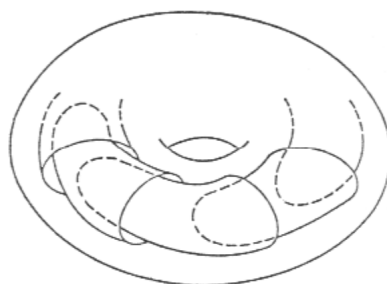


Figure 2 – Une composante de Reeb

Pour avoir un feuilletage de \mathbb{S}^3 , il suffit maintenant de recoller deux tores solides T le long de leur bord T^2 en identifiant les parallèles de l'un aux méridiens de l'autre.

Par ailleurs, Reeb a montré qu'on peut toujours adjoindre une telle composante à un feuilletage de codimension 1 : il suffit de remplacer le voisinage tubulaire d'une courbe transverse au feuilletage par un tore feuilleté comme précédemment et autour duquel les feuilles s'enroulent. Cette modification est appelée *tourbillonnement de Reeb*.

Cas général — En 1965, Lickorish ([Lic65]) ainsi que Novikov et Zieschang ([Nov65]) généralisent cette construction aux variétés fermées (*i.e.* compactes sans bord) orientables de dimension 3. En effet, Wallace ([Wal60]) a montré qu’une telle variété M peut être obtenue à partir de \mathbb{S}^3 par chirurgie (c’est-à-dire en privant \mathbb{S}^3 d’un nombre fini de tores solides disjoints et en les recollant différemment par des difféomorphismes convenables). Partant du feuilletage de Reeb de \mathbb{S}^3 , on peut isotoper les tores solides de façon à rendre leurs âmes transverses au feuilletage. On effectue ensuite le tourbillonnement de Reeb le long de ces courbes. Ainsi, lorsqu’on réalise la chirurgie, on obtient la variété M munie d’un feuilletage en surfaces.

Ce résultat a été étendu par Wood ([Woo69]) aux variétés fermées non-orientables. Quant aux variétés ouvertes, Phillips ([Phi68, Phi69]) montre par la théorie des submersions qu’elles admettent toujours des feuilletages de codimension 1.

Des feuilletages en dimension et codimension supérieures

Pour les variétés de dimension au moins 4, on ne dispose pas de construction explicite. Toutefois, Haefliger ([Hae70]) a déterminé des conditions nécessaires et suffisantes d’existence sur les variétés ouvertes ; le cas des variétés compactes a été traité par Thurston [Thu74, Thu76] par des méthodes homotopiques et géométriques très complexes. Pour plus de détails sur ces conditions nous renvoyons le lecteur au survol [Hae].

Néanmoins, on dispose d’assez peu d’exemples de feuilletages “en tant que tels” : les feuilletages des sphères de dimension impaire (Lawson ([Law71])) ainsi que quelques autres exemples de feuilletages “exotiques” conçus pour présenter telle ou telle propriété marquante. Aussi, pour étudier ces feuilletages, on est amené à supposer que ceux-ci ont des structures supplémentaires : transversalement de Lie, transversalement homogènes, riemanniens, mesurables, de codimension 1, totalement géodésiques, sans feuille compacte . . . Pour une étude détaillée de des feuilletages, nous renvoyons le lecteur à [God91].

Nous désignerons désormais par $\mathbb{F}_k(M)$ l’ensemble des feuilletages de codimension k sur M .

“Un espace de feuilletages”

Naïvement, un feuilletage est un système dynamique où l’on a oublié toute notion de paramétrage et où l’objet à étudier est l’ensemble des “solutions” et non les trajectoires individuelles. . .

Alors, pourquoi n’irait-on pas plus loin ? Si la variété M possède au moins un feuilletage de codimension k , pourquoi ne pas prendre l’ensemble $\mathbb{F}_k(M)$ de tous les feuilletages de ce type pour sujet d’étude ? Encore faut-il le munir d’assez de structure, notamment d’une topologie ayant suffisamment de propriétés, pour trouver des problèmes à se poser.

Topologie des champs de plans ou topologie de Whitney

Pour déterminer les propriétés des feuilletages, on veut munir l’ensemble $\mathbb{F}_k(M)$, lorsqu’il n’est pas vide, d’une topologie “naturelle”.

Notons $G_k(x)$ la grassmannienne des $n - k$ -plans de $T_x(M)$ pour tout $x \in M$ et $G^k(M)$ le fibré en grassmanniennes obtenu en associant à tout $n - k$ -plan tangent à M son point base. Le fibré ainsi construit a pour groupe de structure $GL(n, \mathbb{R})$. À tout feuilletage \mathcal{F} , on peut associer son champ de plans tangents $T\mathcal{F}$ qui est une section continue de $G^k(M)$. On définit alors une application injective (mais non surjective *a priori*) de $\mathbb{F}_k(M)$ dans l'ensemble $\Gamma(G^k(M))$ des sections continues de $G^k(M)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_k(M) & \longrightarrow & \Gamma(G^k(M)) \\ \mathcal{F} & \longmapsto & T\mathcal{F} \end{array}$$

On peut donc considérer $\mathbb{F}_k(M)$ comme un sous-espace de l'espace des fonctions $\Gamma(G^k(M))$. Si on munit ce dernier d'une topologie, on obtient une topologie sur $\mathbb{F}_k(M)$.

La C^r -topologie de Whitney est une topologie usuelle sur un espace de fonctions. Elle a été utilisée par Reeb pour montrer que si un feuilletage admet une feuille compacte F de groupe fondamental fini, alors toute feuille suffisamment proche de F est compacte à groupe fondamental fini. Si de plus, le feuilletage est de codimension 1, alors, toutes les feuilles sont compactes à groupe fondamental fini.

Cette topologie renseigne sur la nature topologique des feuilles mais ne garantit pas que des feuilletages voisins ont des feuilles ayant une "dynamique semblable". Aussi est-on amené dans certains cas à utiliser une autre topologie.

Topologie d'Epstein-Hirsch

Pour éliminer ces problèmes, Epstein et Hirsch ont introduit dans [Eps77] une topologie mieux adaptée mais moins naturelle. Celle-ci garantit la C^r -proximité des cartes feuilletées c'est-à-dire des feuilletages voisins ont une "dynamique semblable".

En classe C^{r+1} , cette C^r -topologie est intermédiaire aux topologies C^r et C^{r+1} de Whitney. Néanmoins, pour les feuilletages de classe C^∞ , les topologies de Whitney et d'Epstein-Hirsch coïncident.

Cette topologie est mieux adaptée pour étudier les déformations de feuilletages. Par exemple, Bonatti et Firmo ont montré dans [BF94] que les feuilles compactes sont stables non pas "séparément" mais par "paquets de feuilles compactes parallèles".

Dans la suite, nous munirons $\mathbb{F}_k(M)$ de la topologie d'Epstein-Hirsch.

Notre problème

Notre but serait alors d'appliquer à cet espace les méthodes de la topologie algébrique pour obtenir des résultats tels que le suivant (qui porte quant à lui sur la topologie d'un espace de difféomorphismes) :

Théorème (Smale[Sma59]) — *Le groupe $\text{Diff}^\infty(\mathbb{S}^2)$ se rétracte sur $O(3)$.*

Mais alors que $\text{Diff}^\infty(M)$ est un groupe topologique, $\mathbb{F}_k(M)$ n'en est pas un, et sa topologie (inhomogène *a priori*) risque d'être trop compliquée pour que l'on puisse parler raisonnablement d'objets tels que $\pi_i(\mathbb{F}_k(M))$ ou $H_i(\mathbb{F}_k(M), \mathbb{Z})$. En particulier, la théorie de l'homotopie reposant sur la notion de connexité par arcs, on voit que la question suivante est plus ou moins incontournable :

Problème — Est-ce que $\mathbb{F}_k(M)$ est connexe par arcs ?

On voit sur l'exemple ci-dessous que cet espace ne peut pas être connexe par arcs :

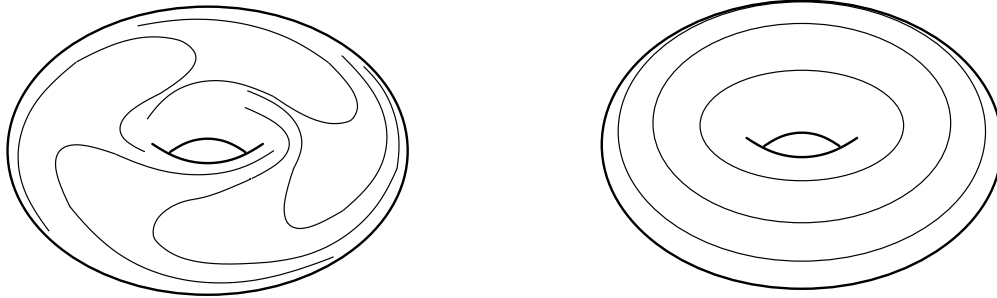


Figure 3 – Deux feuilletages de \mathbb{T}^2 non homotopes : le feuilletage de droite est orientable mais pas celui de gauche

On s'intéresse donc à la connexité locale par arcs. Pour les feuilletages en courbes, nous pouvons montrer que $\mathbb{F}_{n-1}(M)$ est localement connexe par arcs. Cependant, pour les feuilletages de dimension supérieure, il nous apparaît difficile de faire une construction aussi générale — d'autant plus que pour les variétés de dimension au moins 4, ces feuilletages n'existent pas toujours. Aussi, nous nous intéressons plus particulièrement aux feuilletages en surfaces sur les variétés fermées de dimension 3 dont nous connaissons de nombreux exemples explicites.

Par ailleurs, même avec ces restrictions, il ne semble pas raisonnable de considérer la connexité locale par arcs. En effet, la conjecture suivante est attribuée à Rosenberg ([Gz01] p.59) :

Conjecture — L'espace $H^1(\mathbb{Z}^2, \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1))$ des homomorphismes de \mathbb{Z}^2 à valeurs dans le groupe $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ des difféomorphismes du cercle préservant l'orientation est localement contractile.

Bien qu'elle ait intéressé de nombreux mathématiciens dont Herman et Yoccoz, cette question est toujours ouverte. Par suspension, elle contient l'énoncé suivant en termes de feuilletages :

Conjecture — Soit $\pi : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^2$ la fibration naturelle de \mathbb{T}^3 sur \mathbb{T}^2 . L'espace des feuilletages transverses à cette fibration est localement connexe par arcs.

En fait, il s'agit d'un cas particulier d'un problème qui n'est simple qu'en apparence :

Question — Soient M et N deux variétés compactes. L'ensemble des feuilletages transverses au fibré trivial $\pi : M \times N \rightarrow N$ est-il localement connexe par arcs ?

Pour étudier rapidement cette question, introduisons le groupe G des difféomorphismes de M qui sont isotopes à l'identité et munissons-le de la topologie C^∞ . Choisissons aussi un point-base n_0 sur N . Soit H le groupe des difféomorphismes de $M \times N$ qui sont fibrés sur l'identité de N , qui fixent chaque point de la fibre de n_0 et dont la restriction à chaque fibre de π est dans G . On peut montrer que H est localement contractile. Ensuite, H agit de façon naturelle sur l'espace \mathcal{F} des

feuilletages de dimension $\dim(N)$ de $M \times N$ qui sont transverses aux fibres ; on vérifie sans peine que \mathcal{F} est un H -fibré principal dont la base s'identifie de façon plus ou moins canonique à une certaine partie de l'espace $\text{Hom}(\pi_1(N), G)$ (voir [Ehr47] et aussi la preuve du théorème E ci-dessous). La topologie de $\text{Hom}(\pi_1(N), G)$ et celle de \mathcal{F} sont donc fortement liées. On peut certes déterminer la structure de $\text{Hom}(\pi_1(N), G)$ dans certains cas très particuliers : par exemple, lorsque $\pi_1(N)$ n'a que des morphismes triviaux dans G , ou plus généralement, lorsque tous ces morphismes se factorisent par un groupe fini ([FS98, Kan93, Wit94]), ou au contraire lorsque $\pi_1(N)$ est libre, auquel cas, $\text{Hom}(\pi_1(N), G)$ est isomorphe à G^r où r est le rang de $\pi_1(N)$. Mais en dehors de ces cas très particuliers, on ne connaît pratiquement rien de $\text{Hom}(\pi_1(N), G)$; et rappelons que pour N de dimension suffisante, $\pi_1(N)$ peut être n'importe quel groupe de présentation finie !

Revenons à ce qui nous intéresse ; la bonne notion est un peu plus faible : elle s'applique par exemple au "peigne"¹, qui n'est pas localement connexe par arcs ; nous avons de sérieuses raisons de penser que $\mathbb{F}_1(\mathbb{T}^3)$, par endroits, ressemble au peigne et suggérons au lecteur de penser à celui-ci pour guider son intuition.

Nous nous intéressons d'abord aux feuilletages transverses à un fibré orientable en cercles $(\mathbb{S}^1, M, \Sigma, \pi)$ au-dessus d'une surface orientable fermée Σ . Nous prouvons que :

Théorème A — *L'ensemble des feuilletages transverses aux fibres — s'il est non vide — est homotope à un point dans $\mathbb{F}_1(M)$.*

Le cas général des variétés fermées orientables est beaucoup plus complexe car on ne contrôle plus du tout la géométrie de la variété. En particulier, nous avons besoin d'un "outil" pour remplacer les fibres. Aussi, nous supposons que les feuilletages initiaux sont tendus c'est-à-dire que pour toute feuille, il existe une courbe fermée transverse au feuilletage qui la rencontre. De plus, quitte à passer à un revêtement à deux feuillets de M , nous supposons que les feuilletages sont transversalement orientables (c'est-à-dire qu'il existe un champ de vecteurs transverse aux feuilles). Nous pouvons alors montrer que le résultat précédent reste vrai localement pour toute variété fermée orientable M de dimension 3 :

Théorème B — *Soit \mathcal{F} un feuilletage tendu de $\mathbb{F}_1(M)$ (voir §7.1). Alors, il existe un voisinage $V(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} dans $\mathbb{F}_1(M)$ tel que pour tout feuilletage \mathcal{F}' dans $V(\mathcal{F})$, on peut trouver une application continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{F}_1(M)$ telle que $f(0) = \mathcal{F}$ et $f(1) = \mathcal{F}'$.*

En voici une conséquence intéressante sur la topologie de $\mathbb{F}_1(M)$:

Corollaire C — *Les composantes connexes de $\mathbb{F}_1(M)$ sont ouvertes au voisinage des feuilletages tendus.*

Ce résultat ne nous permet pas de dire si l'espace des feuilletages transverses à une fibration en cercles est localement connexe par arcs puisque les feuilletages considérés au cours de l'homotopie ne restent pas dans $V(\mathcal{F})$ par construction. En particulier, le théorème ne répond pas à la conjecture de Rosenberg. Toutefois, on a un peu plus que le théorème B (le gain est purement technique) :

¹Nous appelons "peigne" la réunion dans \mathbb{C} de \mathbb{R} et des droites $\Re(z) \in \mathbb{Q}$.

Théorème D — *Pour tout feuilletage tendu \mathcal{F} sur M , il existe un voisinage $V(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} dont l'inclusion dans $\mathbb{F}_1(M)$ est homotope à une application constante (cependant, cette homotopie n'est pas une rétraction a priori).*

Dans nos preuves, le principal outil sera une amélioration d'un résultat de Thurston selon lequel tout feuilletage en courbes de \mathbb{T}^2 qui est suspension d'un difféomorphisme du cercle préservant l'orientation, peut être étendu en un feuilletage en surfaces de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$. Dans nos constructions, nous avons besoin en plus de la continuité. Aussi nous démontrons :

Théorème E — *Tout feuilletage en courbes de \mathbb{T}^2 transverse aux parallèles peut être étendu continûment en un feuilletage en surfaces de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$. Autrement dit, il existe une application continue de l'espace des feuilletages de \mathbb{T}^2 transverses aux parallèles dans l'espace des feuilletages en surfaces de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$.*

On peut considérer ce “théorème de Thurston à paramètre” comme le résultat principal de la thèse.

Plan

Dans une première partie, nous étudions quelques exemples d'homotopie entre feuilletages. Puis, après quelques rappels sur la dynamique des feuilletages (ch. 2) et les difféomorphismes du cercle (ch. 3), nous établissons des lemmes techniques qui nous seront utiles (ch. 4). Nous prouvons ensuite le théorème E (ch. 5). Il nous est alors possible de montrer le théorème A (ch. 6). Enfin, nous établissons le théorème B dans une dernière partie.



1 Homotopies de feuilletages : exemples

Dans cette première partie, on considère sur quelques exemples le problème général consistant à homotoper deux feuilletages de même dimension sur une variété fermée M qui n'est provisoirement plus supposée de dimension 3.

1.1 Le cas particulier des feuilletages de dimension 1

Nous soulignons rapidement que si \mathcal{F} est de dimension 1, notre problème devient élémentaire : en effet, tout fibré en droites de classe C^∞ sur M est intégrable, et donc, deux feuilletages en courbes sont homotopes si et seulement si leurs champs tangents le sont. En particulier,

Proposition 1.1.1 — *L'espace des feuilletages orientables en courbes de M , s'il n'est pas vide, est localement contractile.*

Idée de la preuve — Soient \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux feuilletages orientables sur M . Munissons M d'une métrique riemannienne. On peut définir localement l'angle $\theta(x)$ entre ces feuilletages comme étant l'angle orienté entre les tangentes en x à ces feuilletages. On a alors une application $\theta : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ qui se relève en une application $\tilde{\theta} : M \rightarrow \mathbb{R}$ éventuellement multiforme. Si elle est uniforme, on définit une homotopie entre \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 par $h : M \times [0, 1] \rightarrow M$, $(x, t) \mapsto d_x^t := R_{t\tilde{\theta}(x)}d_0$ où d_0 est la tangente à \mathcal{F}_1 au point x et R_a est la rotation d'angle a . En fait, on a seulement une homotopie entre les plans tangents $T\mathcal{F}_1$ et $T\mathcal{F}_2$ mais, tout champ de vecteurs de classe C^1 (ou même lipschitzien) est intégrable et on obtient bien une homotopie entre les feuilletages. Lorsque $\tilde{\theta}$ est multiforme, on ne peut pas homotoper \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 : en fait, les classes d'homotopie de $\mathbb{F}_1(M)$ sont classifiées par l'obstruction à relever θ à \mathbb{R} c'est-à-dire par $H^1(M, \mathbb{Z})$. Cet espace étant discret, on en déduit que l'espace $\mathbb{F}_1(M)$ est localement contractile (on pourrait montrer qu'il a l'homotopie de $M \times \mathbb{Z}^2$). \square

Soit en particulier un feuilletage orientable en courbes \mathcal{F}_0 de \mathbb{T}^2 ; parce que cela nous servira dans la suite, nous allons expliciter une rétraction dans $\mathbb{F}_1(\mathbb{T}^2)$ d'un voisinage V de \mathcal{F}_0 sur le point $\{\mathcal{F}_0\}$. Comme nous le disions, la donnée d'un feuilletage en courbes de \mathbb{T}^2 et celle de son champ de tangentes sont équivalentes ; aussi, soit d_0 le champ de tangentes de \mathcal{F}_0 . Nous supposons que \mathbb{T}^2 est muni d'une structure conforme auxiliaire (c'est-à-dire que son fibré tangent est muni d'une structure de fibré en droites complexes, de groupe $\mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$). Notons également U le groupe multiplicatif $\{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$. Soit d_1 un champ de droites sur \mathbb{T}^2 : il existe une unique fonction Θ de classe C^∞ de \mathbb{T}^2 dans $U/\{\pm 1\}$ telle que la droite

$d_1(p)$ au-dessus de p soit pour tout $p \in \mathbb{T}^2$ l'image de la droite $d_0(p)$ par l'élément $\Theta(p) \in U/\{\pm 1\}$ (rappelons que $U/\{\pm 1\}$ agit simplement transitivement sur l'ensemble des droites vectorielles réelles de \mathbb{C}). Nous prenons pour V le voisinage de d_0 composé des champs de droites d_1 pour lesquels Θ admet une détermination de la forme $\Theta(p) = \exp(i\theta(p))$ avec θ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Étant donné d_1 dans V , nous définissons maintenant le champ de tangentes $h(t, d_1)(p) = \exp(i(1-t)\theta(p))d_0(p)$; celui-ci dépend continûment de d_1 pour la topologie C^∞ , et nous avons $h(t, d_1) \in V$, $h(0, d_1) \equiv d_1$ et $h(1, d_1) \equiv d_0$ comme souhaité.

Remarque 1.1.2 — Dans notre description de l'homotopie h ci-dessus, nous pouvons remplacer la structure conforme choisie en premier lieu par la structure conjuguée à celle-ci (ce qui renverse l'orientation de \mathbb{T}^2 canoniquement induite par cette structure conforme); il est à noter que si nous faisons ce changement, l'homotopie h obtenue reste la même.

Cependant, le problème de l'homotopie est loin d'être trivial en dimension supérieure comme nous allons le voir.

1.2 Cas de grande codimension

Le fait que des feuilletages aient des champs de plans tangents homotopes ne suffit pas pour assurer que les feuilletages sont homotopes : sur des sphères suffisamment grandes il existe des feuilletages non homotopes de codimension au moins 10 dont les champs de plans tangents sont homotopes ([Hur85]). Le problème reste ouvert pour les feuilletages de codimension 1.

1.3 Feuilletages minimaux sur \mathbb{T}_A^3

Soit A une matrice de $SL(2, \mathbb{Z})$ telle que $tr(A) > 2$. Ceci implique que A possède deux valeurs propres réelles $\lambda_1 > 1 > \lambda_2$ avec $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Soient $v_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $v_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ des vecteurs propres de A pour λ_1 et λ_2 respectivement. Soient les champs de vecteurs suivants sur \mathbb{R}^3 : $X_1 = \lambda_1^z(a, b, 0)$, $X_2 = \lambda_2^z(c, d, 0)$, $X_3 = (0, 0, 1)$ et soit Γ le groupe des transformations de \mathbb{R}^3 de la forme $((x, y), z) \mapsto (A^n(x + p, y + q), z + n)$ avec n, p, q des entiers relatifs. L'action de Γ préserve X_1, X_2, X_3 ; d'autre part, le quotient \mathbb{R}^3/Γ est une variété différentielle compacte classiquement notée \mathbb{T}_A^3 . Dans la mesure où les X_i sont invariants par Γ , ils induisent sur \mathbb{T}_A^3 des champs de vecteurs Y_1, Y_2, Y_3 partout transverses et satisfaisant aux conditions $[Y_1, Y_2] = 0$, $[Y_1, Y_3] = \kappa Y_1$ et $[Y_2, Y_3] = -\kappa Y_2$ avec $\kappa = \ln(\lambda_1)$.

Le champ de plans $\langle Y_1, Y_2 \rangle$ engendré par les champs commutants Y_1 et Y_2 est tangent aux fibres de la fibration en tores sur le cercle de \mathbb{T}_A^3 , donnée par l'application $\Gamma \cdot (x, y, z) \mapsto z \pmod 1$.

Les deux champs de plans $\langle Y_1, Y_3 \rangle$ et $\langle Y_2, Y_3 \rangle$ sont tangents à deux feuilletages transverses entre eux et transverses aux fibres de π , et notés respectivement \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 dans la suite (voir [GS80] pour plus de détails). Il est facile de montrer que $T\mathcal{F}_1$ et $T\mathcal{F}_2$ sont des champs homotopes, et même que \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 et le feuilletage \mathcal{F}_0 par fibres de π sont tous trois homotopes dans $\mathbb{F}_1(\mathbb{T}_A^3)$. Par exemple, homotopons \mathcal{F}_1 à \mathcal{F}_0 : il suffit de constater que le champ de plans $\langle Y_1, tY_2 + (1-t)Y_3 \rangle$ reste

constamment intégrable et relie $T\mathcal{F}_1$ et $T\mathcal{F}_0$. Ceci étant, d'après un théorème de Ghys et Sergiescu ([GS80]), les feuilletages \mathcal{F}_2 et \mathcal{F}_1 sont C^∞ -stables :

Théorème (Ghys-Sergiescu) — *Tout feuilletage transversalement orientable et sans feuille compacte sur \mathbb{T}_A^3 est C^∞ -conjugué à \mathcal{F}_1 ou à \mathcal{F}_2 ; en particulier, tout voisin de \mathcal{F}_1 ou \mathcal{F}_2 lui est C^∞ -conjugué.*

Or, les feuilletages \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 ne sont conjugués entre eux que si la matrice A est conjuguée à son inverse dans $GL(2, \mathbb{Z})$. Il existe donc des fibrés pour lesquels \mathcal{F}_2 et \mathcal{F}_1 ne sont pas conjugués (par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$ (cf. [BR97])). Nous pouvons alors obtenir sur les homotopies de \mathcal{F}_1 à \mathcal{F}_2 un renseignement intéressant au moins dans le cas où \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 ne sont pas conjugués :

Proposition 1.3.1 — *Si \mathcal{F}_t est une homotopie de \mathcal{F}_1 à \mathcal{F}_2 , alors pour au moins une valeur de t , \mathcal{F}_t a une feuille torique.*

Preuve — En effet, comme \mathcal{F}_1 est C^∞ -stable (ce qui est une propriété ouverte et invariante par conjugaison), l'ensemble des $\tau \in [0, 1]$ pour lesquels \mathcal{F}_τ est conjugué à \mathcal{F}_1 est un ouvert O_1 de $[0, 1]$ qui est non vide car il contient 0. De même, l'ensemble des τ pour lesquels \mathcal{F}_τ est conjugué à \mathcal{F}_2 est un autre ouvert non vide O_2 de $[0, 1]$. Puisque \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont ici supposés non-conjugués, O_1 et O_2 sont disjoints ; aussi, par connexité, leur réunion ne peut pas être $[0, 1]$ et il existe donc $\tau \in [0, 1]$ tel que \mathcal{F}_τ n'est plus conjugué à l'un des feuilletages modèles. Par le théorème de Ghys-Sergiescu, \mathcal{F}_τ a donc une feuille compacte F_0 . Si \mathcal{F}_τ a une composante de Reeb, nous sommes renseignés ; sinon comme le feuilletage est orientable sur une variété compacte, orientable de dimension 3, \mathcal{F}_τ ne possède pas de cycle évanouissant d'après le théorème de Novikov ([Nov65]). On en déduit que le groupe fondamental de toute feuille compacte s'injecte dans celui de \mathbb{T}_A^3 qui est résoluble. Par suite, le groupe fondamental de F_0 est résoluble. Or les seules surfaces compactes orientables de groupe fondamental résoluble sont la sphère et le tore ; F_0 est donc homéomorphe à une sphère ou à un tore. Enfin, d'après le théorème de stabilité de Reeb, on peut exclure le cas de la sphère dans lequel le feuilletage serait produit sur la variété $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. \square

Remarque 1.3.2 — Une remarque suggère qu'il pourrait ne pas être possible de remplacer la relation de conjugaison par celle plus forte d'isotopie dans le théorème de Ghys et Sergiescu. Dans un travail en préparation nous nous intéressons à cette question : nous pensons démontrer que \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 ont des voisinages contractiles dans l'ensemble des feuilletages.



2 Dynamique des feuilletages

Ce chapitre contient des résultats connus sur l'étude des feuilletages : nous rappelons ce qu'est l'holonomie d'un feuilletage et comment on peut l'utiliser pour comprendre le comportement de certaines feuilles. Puis, nous faisons le lien avec les difféomorphismes du cercle qui sont un ingrédient très important pour la suite.

2.1 Holonomie d'un feuilletage

L'holonomie d'un feuilletage est l'analogue de l'application de premier retour de Poincaré pour un champ de vecteurs. Rappelons d'abord la définition de celle-ci.

Application de Poincaré

Soit X un champ de vecteurs sur une variété M de dimension n . On note Φ le flot associé à X et on suppose que l'orbite d'un point x est périodique de période T . On peut trouver une sous-variété Σ de dimension $n - 1$ transverse au flot au point x . Il existe un voisinage U de x dans Σ et une fonction continue $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}^* +$ telle que $\tau(x) = T$ et pour tout $y \in U$, $\Phi(\tau(y), y) \in \Sigma$ mais $\Phi(t, y) \notin \Sigma$ pour tout $0 < t < \tau(y)$. Cette fonction correspond au temps que met la trajectoire passant par y pour recouper la section Σ . On définit alors l'application de premier retour de Poincaré sur la section transverse Σ par $h : y \in U \mapsto \Phi(\tau(y), y)$. De plus, cette application ne dépend pas de la section Σ choisie à conjugaison près par un difféomorphisme.

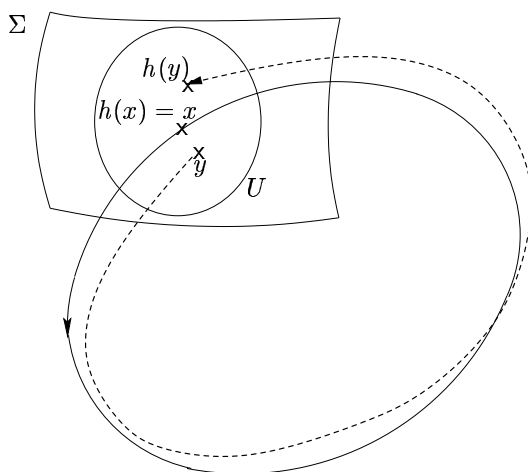


Figure 2.1 – Application de Poincaré pour un champ de vecteurs

2.1.1 Holonomie d'une feuille

Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 sur M et soit F une feuille de \mathcal{F} . Pour comprendre le comportement des feuilles voisines de F , nous allons étudier le retour de celles-ci sur une section transverse à F .

Construction de l'holonomie

Choisissons un point $x \in F$ et plaçons nous sur une section locale Σ transverse à \mathcal{F} en x . Comme les feuilletages considérés sont de codimension 1, cette section est homéomorphe à l'intervalle ouvert $] - 1, 1[$.

Considérons un lacet γ dans F basé en x . On peut trouver un recouvrement fini $(U_i)_{i=0\dots p}$ de γ par des cartes feuilletées successives et une subdivision $0 = t_0 < t_1 \dots < t_p = 1$ tels que $U_0 = U_p$, $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ ($i = 0, \dots, p$) et si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors la réunion $U_i \cup U_j$ est contenue dans une carte locale feuilletée. Pour $i \in \{1, \dots, p-1\}$, fixons une section locale Σ_i transverse à \mathcal{F} au point $\gamma(t_i)$ et posons $\Sigma_0 = \Sigma_p = \Sigma$. Dans la carte feuilletée U_i , pour tout point z assez proche de $\gamma(t_i)$, la feuille de z coupe Σ_{i+1} en un unique point noté $f_i(z)$. L'application f_i est définie et continue au voisinage de $\gamma(t_i)$: c'est l'*holonomie relativement au chemin* $\gamma([t_i, t_{i+1}])$.

On peut maintenant définir sur un voisinage ouvert de x contenu dans Σ une application f_γ par $f_\gamma := f_{p-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f_0$. On vérifie que $f_\gamma(x) = x$ et que f_γ est un difféomorphisme qui ne dépend pas du choix des sections intermédiaires $(\Sigma_i)_{i=1, \dots, p-1}$ ni du recouvrement $(U_i)_{i=0, \dots, p}$: c'est l'*holonomie de F relativement au lacet γ* .

En outre, si γ' est un lacet basé en x et homotope à γ , alors $f_\gamma = f_{\gamma'}$ sur un voisinage de x . Par suite, l'application Hol qui à la classe d'homotopie $[\gamma] \in \pi_1(F, x)$ associe le germe de $f_{[\gamma]}$ est un morphisme de $\pi_1(F, x)$ dans le groupe $G(\Sigma, x)$ des germes de difféomorphismes de Σ qui fixent x ou de manière équivalente dans le groupe $G(] - 1, 1[, 0)$ des germes de difféomorphismes de $] - 1, 1[$ qui fixent 0. On l'appelle l'*holonomie de F au point x* .

Propriétés

Usuellement, on considère plutôt l'image $Hol(F)$ de $\pi_1(F, x)$ par le morphisme d'holonomie. On montre facilement que si on change de point base, on obtient un sous-groupe de $G(] - 1, 1[, 0)$ qui est conjugué au précédent par un automorphisme. On appelle ce groupe le *groupe d'holonomie de la feuille*.

Les propriétés de ce groupe permettent de déterminer le comportement des feuilles voisines de F . Par exemple, si $Hol(F)$ est trivial, celles-ci ont la même "dynamique" que F . Si une feuille F' s'enroule n fois autour de F , $Hol(F)$ a un élément d'ordre n . Un feuilletage \mathcal{F} est *sans holonomie* si cette représentation est triviale pour toute feuille F de \mathcal{F} et pour tout point $x \in M$.

Par ailleurs, si un feuilletage \mathcal{F} possède une feuille compacte F ayant un groupe d'holonomie fini, on peut trouver un voisinage de F qui est une réunion de feuilles compactes de \mathcal{F} ayant un groupe d'holonomie fini : c'est le *théorème de stabilité locale de Reeb*.

De plus, si ce feuilletage \mathcal{F} est de codimension 1, alors toutes les feuilles sont com-

factes de groupe fondamental fini : c'est le *théorème de stabilité globale de Reeb*. En particulier, si un feuilletage de codimension 1 sur une variété fermée de dimension 3 a une feuille sphérique, toutes les feuilles sont des sphères.

D'autre part, l'existence d'une feuille ayant de l'holonomie implique que le feuilletage ne peut pas être une fibration. Par contre, un feuilletage dont toutes les feuilles ont une holonomie triviale n'est pas nécessairement une fibration (c'est le cas par exemple de tout feuilletage irrationnel sur \mathbb{T}^2). Pourtant, pour un feuilletage \mathcal{F} , presque toute feuille (au sens de Baire) a une holonomie triviale ([Hec77, EMT77]).

Nous allons voir que lorsque la variété est fibrée et que le feuilletage est transverse à la fibration, on peut déterminer l'holonomie plus facilement.

2.1.2 Holonomie d'un feuilletage transverse à une fibration

Soit (F, M, B, π) un fibré de fibre compacte F et \mathcal{F} un feuilletage transverse aux fibres. L'holonomie d'un tel feuilletage se met sous une forme plus simple puisqu'il existe une section globale naturelle : la fibre F . En effet, comme celle-ci est compacte, les feuilles sont des revêtements de la base B et on peut voir un lacet dans une feuille comme le relevé d'un lacet de la base. Pour $\gamma \in \pi_1(B)$, l'application f_γ que l'on construit comme précédemment est maintenant un difféomorphisme de F qui ne dépend encore que de la classe d'homotopie de γ . On définit alors un morphisme de $\pi_1(B)$ dans le groupe des difféomorphismes de F en associant à $[\gamma]$ le difféomorphisme $f_{[\gamma]}$; c'est l'*holonomie globale* de \mathcal{F} .

Une question naturelle est la construction d'un feuilletage ayant une holonomie donnée. Nous allons traiter le cas où l'on connaît l'holonomie globale.

2.2 Feuilletage-suspension

Soit une représentation ρ du groupe fondamental $\pi_1(B)$ d'une variété B dans le groupe des difféomorphismes $\text{Diff}(F)$ d'une variété F de dimension k . Construisons un feuilletage ayant pour holonomie ρ .

Notons \tilde{B} le revêtement universel de B . Le groupe $\pi_1(B)$ agit sur le produit $\tilde{B} \times F$ par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \pi_1(B) \times \tilde{B} \times F &\longrightarrow \tilde{B} \times F \\ (\gamma, b, f) &\longmapsto (\gamma \cdot b, \rho(\gamma)f) \end{aligned}$$

Désignons par M_ρ la variété $\tilde{B} \times F / \pi_1(B)$ obtenue en identifiant les points (b, f) et $(\gamma \cdot b, \rho(\gamma)f)$ pour tout $\gamma \in \pi_1(B)$; elle fibre sur B de fibre F .

Munissons le produit $\tilde{B} \times F$ du feuilletage horizontal $\tilde{\mathcal{F}} := \tilde{B} \times \{*\}$ qui est invariant par l'action de $\pi_1(B)$. Il passe donc au quotient en un feuilletage \mathcal{F} de M_ρ transverse aux fibres du fibré (F, M_ρ, B, p) : c'est le *feuilletage suspension* de la représentation ρ .

On obtient ainsi un feuilletage de codimension k ayant l'holonomie voulue. Remarquons également que la variété M_ρ est unique à difféomorphisme près ; nous la noterons M .

D'autre part, que peut-on dire d'un feuilletage \mathcal{F}' sur M transverse aux fibres et d'holonomie ρ ? Lorsque la fibre est compacte, il existe un difféomorphisme de M fibré au-dessus de l'identité de B qui envoie les feuilles de \mathcal{F}' sur celle de \mathcal{F} . En fait, Ehresmann a montré que

Théorème 2.2.1 (Ehresmann [Ehr47]) — Soit (F, M, B, π) un fibré localement trivial dont la fibre F est une variété compacte de dimension k . Pour tout feuilletage \mathcal{F} de codimension k transverse aux fibres de π , il existe un difféomorphisme qui envoie les feuilles de \mathcal{F} sur les feuilles du feuilletage suspension d'une représentation ρ de $\pi_1(M)$ dans le groupe des difféomorphismes $\text{Diff}(F)$ de F .

On dit alors que \mathcal{F} est conjugué au feuilletage suspension de ρ .

L'hypothèse de compacité de la fibre est essentielle : elle assure que les feuilles sont des revêtements de la base. Lorsque F est non compacte, cette propriété est fautive : par exemple, dans \mathbb{R}^2 , les trajectoires du champ de vecteurs $X(1, y^2)$ définissent un feuilletage transverse à la projection sur le premier facteur mais non conjugué à un feuilletage suspension. Il existe même un feuilletage de \mathbb{R}^3 à feuilles denses transverses aux verticales ([Hec76]).

Revenons au cas où F est compacte : il y a une bijection entre les classes de conjugaison des feuilletages sur M transverses aux fibres de (F, M, B, p) et les classes de conjugaison des représentations de $\pi_1(B)$ dans le groupe $\text{Diff}(F)$. Ce procédé permet de construire des feuilletages dont la dynamique est intéressante. Plus l'action ρ est "compliquée", plus \mathcal{F} le sera ; de plus, il existe un dictionnaire entre les propriétés de ρ et celles de \mathcal{F} (par exemple, " ρ à orbites denses" équivaut à " \mathcal{F} à feuilles denses").

Dans la suite, nous nous intéresserons plus particulièrement aux feuilletages de \mathbb{T}^2 transverses aux parallèles ; le groupe de difféomorphismes du cercle apparaît alors naturellement dans cette étude.



3 Quelques rappels sur les difféomorphismes du cercle

Problème — Soit f un élément du groupe $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ des difféomorphismes du cercle préservant l'orientation. À quelle condition, les orbites de f sont-elles équivalentes (c'est-à-dire conjuguées) à celles d'une rotation ? Autrement dit, existe-t-il un homéomorphisme du cercle h tel que $f \circ h = h \circ R_\alpha$ où R_α est la rotation d'angle α ?

3.1 Le nombre de rotation d'un difféomorphisme

Un invariant de conjugaison a été découvert par Poincaré : le nombre de rotation $\rho(f)$ d'un difféomorphisme de \mathbb{S}^1 .

3.1.1 Définition du nombre de rotation

Soit $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un relevé de f dans le groupe des difféomorphismes de \mathbb{R} qui sont \mathbb{Z} -périodiques i.e. le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \end{array} \quad \text{où } \pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \text{ est la projection canonique } x \mapsto x \pmod{1}$$

Si \tilde{f}_1 est un autre relevé de f , \tilde{f}_1 diffère de \tilde{f} par une constante : $\tilde{f}_1 = \tilde{f} + k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Le rapport $\frac{\tilde{f}^n(x) - x}{n}$ a une limite $\alpha(\tilde{f})$ lorsque n tend vers l'infini. De plus, on vérifie que cette limite ne dépend pas du point x considéré ni du choix du relevé \tilde{f} de f dans le sens suivant : $\pi(\alpha(\tilde{f})) = \pi(\alpha(\tilde{f}_1))$. On note $\rho(f)$ le réel $\pi(\alpha(\tilde{f}))$: c'est le nombre de rotation de f .

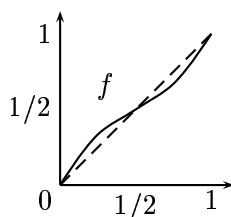
3.1.2 Quelques propriétés

Lorsque f est une rotation, le nombre de rotation vaut l'angle de la rotation. Si f et g sont deux difféomorphismes de \mathbb{S}^1 topologiquement conjugués, c'est-à-dire s'il existe un homéomorphisme h de \mathbb{S}^1 préservant l'orientation tel que $h \circ f = g \circ h$, alors, $\rho(f) = \rho(g)$ i.e. le nombre de rotation est un invariant de conjugaison. On montre aussi que l'application $f \rightarrow \rho(f)$ est continue et surjective. Le nombre de rotation renseigne sur la dynamique d'un difféomorphisme $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ admet un point périodique si et seulement si $\rho(f)$ est rationnel. De plus, si $\rho(f) = \frac{p}{q}$, avec

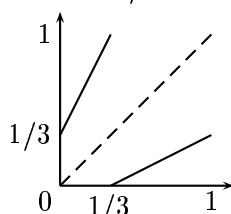
$p \wedge q = 1$, f a un point de période q et l'unique relevé \tilde{f} de f tel que $\tilde{f}^q = id + p$ vérifie $\alpha(\tilde{f}) = \frac{p}{q}$.

3.1.3 Difféomorphismes de nombre de rotation rationnel

Cependant, le nombre de rotation ne permet pas de préciser la "taille" de l'ensemble des points périodiques. Si $\rho(f)$ est rationnel, f peut avoir un point périodique, plusieurs points périodiques, tout un intervalle de points périodiques ou le cercle \mathbb{S}^1 dans le cas d'une rotation par exemple.



l'application $f : x \in \mathbb{S}^1 \mapsto x + \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi x)$ a deux points fixes 0 et $\frac{1}{2}$ donc $\rho(f) = 0$.



cette application a pour nombre de rotation $\frac{1}{2}$.

L'ensemble des difféomorphismes de \mathbb{S}^1 qui ont un nombre de rotation rationnel contient un ouvert dense.

3.2 Problème de conjugaison

Par construction, le nombre de rotation est un invariant de conjugaison. Réciproquement, étant donnés deux difféomorphismes de \mathbb{S}^1 f et g ayant même nombre de rotation, sont-ils conjugués ?

La relation de conjugaison est très contraignante : l'ensemble des points périodiques de f (resp. l'ensemble des points invariants par f) doit être homéomorphe à l'ensemble des points périodiques de g (resp. l'ensemble des points invariants par g). Par exemple, l'application

$$f : x \in \mathbb{S}^1 \mapsto x + \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi x)$$

a un nombre de rotation nul mais n'est pas conjuguée à l'identité $id_{\mathbb{S}^1}$ car f n'a que deux points fixes.

On introduit donc une relation plus faible : la semi-conjugaison. On dit que f est *semi-conjuguée* à g s'il existe une application $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ continue et surjective telle que $h \circ f = g \circ h$. Par construction, h envoie les points périodiques de f (resp un ensemble invariant par f) dans les points périodiques de g (resp un ensemble invariant par g).

Lorsque le nombre de rotation est rationnel, on n'a pas nécessairement la semi-conjugaison. Par exemple, le difféomorphisme f précédent n'est pas semi-conjugué à

$id_{\mathbb{S}^1}$ et on n'a pas non plus de semi-conjugaison de $id_{\mathbb{S}^1}$ à f . En effet, dans le second cas, on devrait avoir h constamment égal à 0 ou $\frac{1}{2}$. Dans le premier cas, on aurait $h(f(x)) = h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^1$ donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $h(f^n(x)) = h(x)$ i.e. h est constante sur chaque orbite de f . Puis, h est constante sur l'adhérence de chaque orbite de f par continuité de h . Comme $\frac{1}{2}$ est un point fixe attractif, il est dans l'adhérence de chaque orbite et h vaut la constante $h(\frac{1}{2})$ sur toutes les orbites ce qui contredit le fait que h est surjective.

Par contre, lorsque le nombre de rotation $\rho(f)$ est irrationnel, f est toujours semi-conjugué à la rotation $R_{\rho(f)}$ d'après les résultats de Denjoy ([Den32]). De plus, la semi-conjugaison est une conjugaison sauf si f préserve un ensemble de Cantor. Or, Denjoy a montré qu'un difféomorphisme de classe C^2 ayant un nombre de rotation irrationnel ne préserve pas de fermé strict de \mathbb{S}^1 ; le difféomorphisme f est donc topologiquement conjugué à la rotation d'angle $\rho(f)$. Ce résultat à été généralisé par Herman aux homéomorphismes de classe \mathcal{P} (i.e. dérivable sauf sur un ensemble au plus dénombrable et dont la dérivée est égale, sauf sur un ensemble au plus dénombrable, à une fonction \mathbb{Z} -périodique minorée par un réel strictement positif et à variation bornée sur $[0, 1]$).

3.3 Théorèmes de conjugaison

On s'intéresse aussi à la régularité de la conjugaison. D'après la remarque précédente, toutes les conjugaisons possibles ont la même régularité.

3.3.1 Théorème de conjugaison locale

Arnol'd a étudié cette régularité dans le cas analytique ([Arn65]). En utilisant une idée de Kolmogorov et l'action de groupe, il a montré l'existence d'une conjugaison lorsque f est proche d'une rotation et de nombre de rotation diophantien. On rappelle qu'un nombre α est diophantien s'il existe $c > 0$ et $d > 1$ tels que pour tous $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ non nuls, $|q\alpha - p| > cq^{-d}$. Ce résultat a été ensuite généralisé en classe C^∞ par Moser ([Mos66]).

Théorème (Arnol'd-Moser) — *Soit α un nombre diophantien. Alors, pour tout $f \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ assez proche de la rotation R_α d'angle α , il existe un nombre β proche de 0 tel que $f \circ R_\beta$ soit C^∞ -conjugué à R_α .*

Ce résultat est particulièrement intéressant car l'ensemble des nombres irrationnels diophantiens est de mesure de Lebesgue pleine : la conjugaison topologique à une rotation est vérifiée pour une large classe de difféomorphismes du cercle. D'autres démonstrations utilisant la méthode de Newton (c'est-à-dire en inversant une différentielle à un terme quadratique près) ont été données notamment par Rüssmann ([Rüs72]).

3.3.2 Théorème de conjugaison globale

La conjugaison globale est due à Herman dans [Her79] pour les nombres diophantiens d'exposant 1 (ce résultat a été étendu par Yoccoz aux nombres diophantiens d'exposant quelconque dans [Yoc84]; l'exposant est le nombre d dans la formule $|q\alpha - p| > cq^{-d}$) :

Théorème (M. R. Herman) — *Il existe un ensemble A de mesure totale formé de nombres diophantiens — et contenant notamment tous les nombres diophantiens d'exposant 1 — tel que tout difféomorphisme $f \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ de nombre de rotation $\alpha \in A$ soit C^∞ -conjugué à la rotation R_α .*

Ce théorème fournit un résultat particulièrement intéressant sur la “forme” des difféomorphismes ([Her79] p. 127) :

Corollaire 3.3.1 (Décomposition des difféomorphismes du cercle) — *Soit μ un nombre diophantien. Tout difféomorphisme $f \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ s'écrit de façon unique comme $f = R_{\lambda(f)} \circ g \circ R_\mu \circ g^{-1}$ avec $\lambda(f) \in \mathbb{S}^1$ et g un difféomorphisme de \mathbb{S}^1 tel que $g(0) = 0$. De plus, l'application $f \mapsto (\lambda, g)$ est continue pour la C^∞ -topologie.*

Pour des raisons techniques, il sera préférable pour nous de passer au revêtement universel de $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$, noté $D^\infty(\mathbb{S}^1)$. Celui-ci s'identifie au groupe des difféomorphismes f de classe C^∞ de la droite réelle tels que $f - Id_{\mathbb{R}}$ soit \mathbb{Z} -périodique. Ce groupe est contractile et pour $t \in [0, 1]$ et $f \in D^\infty(\mathbb{S}^1)$, nous noterons f^t le difféomorphisme de \mathbb{R} qui à x associe $tx + (1-t)f(x)$. Le chemin $t \mapsto f^t \in D^\infty(\mathbb{S}^1)$ dépend continûment de f et relie f à $Id_{\mathbb{R}}$. En relèvement à $D^\infty(\mathbb{S}^1)$, le corollaire précédent devient :

Corollaire 3.3.2 (Décomposition des éléments de $D^\infty(\mathbb{S}^1)$) — *Soit μ un nombre diophantien et soit \tilde{f} un élément de $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ relevant le difféomorphisme f de l'énoncé précédent. Alors \tilde{f} s'écrit de façon unique sous la forme $\tilde{f} = T_{\tilde{\lambda}(f)} \circ \tilde{g} \circ T_\mu \circ \tilde{g}^{-1}$ où T_k désigne la translation $T_k(x) = x + k$ de \mathbb{R} et \tilde{g} est un élément de $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ fixant 0. De plus, \tilde{g} relève g , la classe de $\tilde{\lambda}(f)$ modulo 1 est $\lambda(f)$ et l'application $\tilde{f} \mapsto (\tilde{\lambda}(f), \tilde{g})$ est continue pour la topologie C^∞ .*

Preuve — On choisit l'unique relevé \tilde{g} de g qui vérifie $\tilde{g}(0) = 0$; \tilde{f} et $T_{\lambda(f)} \circ \tilde{g} \circ T_\mu \circ \tilde{g}^{-1}$ sont deux relevés du difféomorphisme $f = R_{\lambda(f)} \circ g \circ R_\mu \circ g^{-1}$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\tilde{f} = T_{\lambda(f)} \circ \tilde{g} \circ T_\mu \circ \tilde{g}^{-1} + k$. Il suffit alors de poser $\lambda(\tilde{f}) = \lambda(f) + k$ pour avoir la relation voulue. Par construction, $\lambda(\tilde{f})$ et \tilde{g} sont uniques et dépendent continûment du relevé \tilde{f} . \square

Ce dernier résultat sera un “outil” très important dans la preuve du théorème E.



4 Résultats préliminaires

Dans la preuve des théorèmes E et B, nous rencontrerons des problèmes de recollement des feuilletages que nous construirons ; ceux-ci seront résolus grâce au lemme 4.1.3. Par ailleurs, nous utiliserons quelques résultats techniques sur les feuilletages du tore solide T transverses à la fibration naturelle de T sur \mathbb{D}^2 .

4.1 Un problème de lissage

Soit M une variété de dimension n .

Rappels — Nous rappelons rapidement le fait suivant :

Proposition 4.1.1 — *Si τ est une courbe fermée simple transverse à un feuilletage orientable de $\mathbb{F}_1(M)$, il existe des voisinages tubulaires arbitrairement petits de τ qui s'identifient à $\tau \times \mathbb{D}^{n-1}$ par un difféomorphisme envoyant les feuilles sur les disques $\{*\} \times \mathbb{D}^{n-1}$.*

Remarque 4.1.2 — C'est une particularité des feuilletages orientables de codimension 1 : lorsque M est une variété de dimension n munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension q et N une sous-variété fermée de dimension q transverse à \mathcal{F} , il existe bien un voisinage tubulaire U de N dans M et une fibration p de U sur N de fibre \mathbb{R}^{n-q} tels que \mathcal{F} coïncide avec la fibration sur U ; cependant, cette fibration n'est plus en général triviale et U n'est donc plus homéomorphe au produit de \mathbb{R}^{n-q} par N (cette propriété n'a lieu que si le fibré normal à N dans M est trivial).

Recollement de feuilletages — Soient M une variété fermée orientable de dimension n et Σ une hypersurface fermée transversalement orientable intérieure à M . Munissons M d'un champ de vecteurs auxiliaire X de classe C^∞ partout transverse à Σ (un tel champ existe bien puisque le fibré normal à Σ dans M est trivial). Notons $\Phi(t, x)$ l'image de x par le flot de X au temps t . Si P est une partie quelconque de M et si r est un réel strictement positif, nous convenons de noter P^r la partie $\Phi([-r, r] \times P)$ de M . Fixons enfin un réel $\varepsilon > 0$; le lemme suivant nous sera utile :

Lemme 4.1.3 — *Soit \mathcal{T} l'ensemble des feuilletages transversalement orientables, transverses à Σ et de codimension 1 sur M . Soit \mathcal{T}_X le sous-ensemble de \mathcal{T} dont les feuilletages sont invariants par le flot local de X sur Σ^ε . Alors, il existe une application continue $h : [0, 1] \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ telle que pour tout $\mathcal{F} \in \mathcal{T}$, $h(0, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$ et $h(1, \mathcal{F}) \in \mathcal{T}_X$.*

Preuve — Définissons d'abord une homotopie auxiliaire de M . Pour cela, nous introduisons une fonction ρ de $[-2\varepsilon, 2\varepsilon]$ dans lui-même, impaire, croissante, de classe C^∞ telle que $\rho(s) = 0$ pour $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\rho'(s) > 0$ pour $|s| \in]\varepsilon, 2\varepsilon]$ et $\rho(s) = s$

au voisinage de -2ε et 2ε . Ensuite, pour $t \in [0, 1]$ et $x \in M$, posons $\varphi_t(x) = x$ si $x \in M - \Sigma^{2\varepsilon}$ et $\varphi_t(\Phi(s, y)) = \Phi((1-t)s + t\rho(s), y)$ si $x = \Phi(s, y) \in \Sigma^{2\varepsilon}$ avec $y \in \Sigma$ et $s \in [-2\varepsilon, 2\varepsilon]$. L'application $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ est notre homotopie auxiliaire.

Pour $t \in [0, 1[$, l'application $\varphi_t : M \rightarrow M$ est un difféomorphisme de classe C^∞ . Or, \mathcal{F} est transversalement orientable donc il existe une forme de Pfaff $\alpha_{\mathcal{F}}$ qui le définit. Pour tout $t \in [0, 1[$, la forme différentielle $\alpha_{\mathcal{F}}^t := \varphi_t^*(\alpha_{\mathcal{F}})$ est sans singularité et intégrable ; elle définit donc un feuilletage \mathcal{F}_t de codimension 1 qui ne dépend que de \mathcal{F} et en dépend continûment. Pour $t = 1$, φ_1 n'est plus un difféomorphisme, mais nous pouvons quand même définir la forme $\alpha_{\mathcal{F}}^1 := \varphi_1^*(\alpha_{\mathcal{F}})$ et constater que cette forme est non-singulière : en effet, elle l'est en dehors de Σ^ε car φ_1 est un difféomorphisme sur $M - \Sigma^\varepsilon$; et en restriction à Σ^ε , on constate que $\alpha_{\mathcal{F}}^1$ coïncide avec le tiré en arrière de la restriction (non singulière) de $\alpha_{\mathcal{F}}$ à Σ par la projection $\Phi(s, y) \mapsto y$ de Σ^ε sur Σ . Puisque $\alpha_{\mathcal{F}}^1$ est non singulière, cette forme (qui est intégrable car image inverse d'une forme $\alpha_{\mathcal{F}}$ qui l'est) définit un feuilletage \mathcal{F}_1 qui est dans \mathcal{T}_X par construction. L'application $h(t, \mathcal{F}) = \mathcal{F}_t$ a donc les propriétés annoncées. \square

Remarque 4.1.4 — Ce résultat est encore vrai lorsque la variété est à bord et Σ au bord de M : il suffit de prendre le champ X rentrant dans M et de considérer son demi-flot positif Φ .

Dans la suite de ce travail, nous aurons à appliquer le lemme 4.1.3 plusieurs fois de suite relativement à des hypersurfaces $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ de M qui ne seront pas disjointes. Nous faisons dans ce but la remarque suivante :

Remarque 4.1.5 — Soit $\lambda > 0$ et soit P une partie de M . Soit $\mathcal{T}_{P,\lambda}$ la partie de \mathcal{T} formée par les feuilletages auxquels X est tangent en tout point de P^λ (nous supposons cette partie non vide). Alors, si $\lambda \geq 3\varepsilon$, le champ X est encore tangent à tous les feuilletages de $h(1, \mathcal{T}_{P,\lambda})$ en tout point de P^ε ; autrement dit, on a l'inclusion $h(1, \mathcal{T}_{P,3\varepsilon}) \subset \mathcal{T}_{P,\varepsilon}$.

Preuve — Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{T}_{P,\lambda}$ avec $\lambda \geq 3\varepsilon$. Pour tout $p \in P$, l'intervalle de X -orbite $I = [\Phi(-\lambda, p), \Phi(\lambda, p)]$ est tangent à \mathcal{F} par hypothèse. Par construction, l'intervalle de X -orbite $J = \varphi_1(I)$ sera tangent à $h(1, \mathcal{F})$. Mais, notre définition de φ_1 fait que J a la forme $[\Phi(\alpha - \lambda, p), \Phi(\beta + \lambda, p)]$, où α et β sont des réels qui dépendent de p et appartiennent à $[-2\varepsilon, 2\varepsilon]$. Aussi, puisque $\lambda \geq 3\varepsilon$, on a $[\Phi(-\varepsilon, p), \Phi(\varepsilon, p)] \subset J$; autrement dit, l'intervalle $\{p\}^\varepsilon$ est tangent à $h(1, \mathcal{F})$. \square

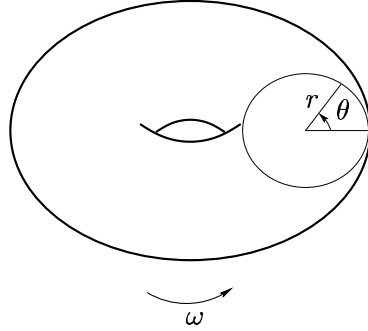
Nous remarquons encore que l'homotopie que nous venons de construire ne dépend pas réellement de X , mais uniquement de la donnée au signe près de ce champ, ce qui nous servira par la suite.

Revenons maintenant aux feuilletages en surfaces des variétés de dimension 3 et plus particulièrement du tore solide \mathbb{T} .

4.2 Feuilletages de \mathbb{T} transverses aux parallèles de \mathbb{T}^2

Pour fixer les idées, nous identifions le cercle \mathbb{S}^1 à \mathbb{R}/\mathbb{Z} via le paramétrage naturel de celui-ci donné par $\omega \mapsto \exp(2i\pi\omega)$. Sur le disque $\mathbb{D}^2 := \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq 1\}$, nous introduisons les coordonnées polaires définies par $z = r \exp(2i\pi\theta)$; sur le tore-surface \mathbb{T}^2 (identifié à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$), nous notons (θ, ω) les coordonnées canoniques ; enfin

sur le tore solide $T := \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$, dont le bord est identifié à \mathbb{T}^2 , nous utilisons les deux paramétrages produits (r, θ, ω) et (z, ω) de manière systématique. Ces notations sont fixées pour toute la suite. Nous introduisons encore la première projection $\pi(r, \theta, \omega) = (r, \theta)$ de T sur \mathbb{D}^2 .



Les fibres de π sont traditionnellement appelées *parallèles* de T . Il est utile de remarquer, vu ce qui suit, que si \mathcal{F} est un feuilletage de T transverse aux parallèles, alors \mathcal{F} est un feuilletage en disques d'après un théorème d'Ehresmann (cf. [Ehr47]).

Revenons à ce qui nous occupe. Ici, $B = \mathbb{D}^2$ étant contractile, toute suspension de base B est triviale. En particulier, *un feuilletage de T transverse aux parallèles ne peut pas avoir n'importe quelle trace au bord de T* . Ceci est à comparer au résultat suivant ([Thu74]) :

Théorème (Thurston) — *Soit \mathcal{F} un feuilletage en courbes de \mathbb{T}^2 , transverse aux parallèles de \mathbb{T}^2 . Alors, \mathcal{F} peut se prolonger en un feuilletage de T .*

Idée de la preuve — Un tel feuilletage de \mathbb{T}^2 peut être vu comme la suspension d'un difféomorphisme φ de \mathbb{S}^1 préservant l'orientation (les composantes de Reeb sont donc exclues). Thurston remarque d'abord que l'existence d'un prolongement \mathcal{F}_φ pour \mathcal{F} ne dépend que de la classe de conjugaison de φ , puis il montre que l'ensemble des φ pour lesquels le feuilletage se prolonge contient les rotations. En effet, un feuilletage suspension d'une rotation est défini par une forme fermée $\beta := d\omega - \rho d\theta$ où ρ est l'angle de la rotation. Or, Reeb a montré ([Ree52]) qu'à partir de cette donnée, on peut construire un feuilletage de T ayant une composante de Reeb. D'autre part, on vérifie facilement que l'ensemble des φ pour lesquels le feuilletage se prolonge est invariant par conjugaison et stable par passage à l'inverse. Enfin, cet ensemble est également stable par composition ; ce dernier point étant obtenu grâce à une construction astucieuse consistant à recoller les feuilletages \mathcal{F}_φ et \mathcal{F}_ψ en un feuilletage $\mathcal{F}_{\varphi \circ \psi}$. Les difféomorphismes préservant l'orientation pour lesquels le résultat est vrai forment alors un sous-groupe normal non trivial de $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$. Or, $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ est un groupe parfait (i.e. égal à ses groupes dérivés) donc il n'admet pas de sous-groupe normal non trivial (cf [HS71]). Le résultat suit pour tout élément de $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ donc pour tout feuilletage de \mathbb{T}^2 transverse aux parallèles. \square

Considérons ensuite l'espace \mathcal{F} des feuilletages de codimension 1 de T qui sont transverses aux parallèles ; notons \mathcal{F}_0 celui dont les feuilles sont les fibres de la deuxième projection $(r, \theta, \omega) \mapsto \omega$ de T sur \mathbb{S}^1 . Nous utiliserons le résultat suivant :

Lemme 4.2.1 — *L'espace \mathcal{F} est homéomorphe au groupe topologique des difféomorphismes du tore solide dans lui-même qui sont fibrés au-dessus de l'identité de \mathbb{D}^2 et égaux à l'identité sur $\{0\} \times \mathbb{S}^1$, ce groupe étant muni de la topologie C^∞ .*

Preuve — Notons $(Y, id_{\mathbb{T}})$ le groupe topologique des difféomorphismes en question, pointé en son élément neutre. À tout élément f de ce groupe on peut associer le feuilletage $f(\mathcal{F}_0) \in \mathcal{F}$, image par f de \mathcal{F}_0 . Cette application de $(Y, id_{\mathbb{T}})$ dans l'espace pointé $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ est clairement continue et injective. Réciproquement, soit $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$ et soit $(z, \omega) \in \mathbb{T}$ avec $z = re^{i\theta}$. Considérons un chemin $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2$ joignant 0 à z et relevons c dans la feuille de \mathcal{F} qui passe par $(0, \omega)$ de manière à obtenir un chemin $\tilde{c}_{z, \omega}$. Comme \mathbb{D}^2 est contractile, le point $\tilde{c}_{z, \omega}(1)$ ne dépend pas du choix de c mais seulement de z , ω et \mathcal{F} dont il dépend continûment. Nous pouvons alors poser $f_{\mathcal{F}}(z, \omega) = (z, \tilde{c}_{z, \omega}(1))$ pour obtenir une application $\mathcal{F} \mapsto f_{\mathcal{F}}$ continue, réciproque de celle $f \mapsto f(\mathcal{F}_0)$ définie plus haut ; ce qui prouve la bijectivité et la bicontinuité de celle-ci. \square

Corollaire 4.2.2 — Notons $\mathcal{F}_{\varepsilon}$ l'ensemble des feuilletages de \mathbb{T} qui appartiennent à \mathcal{F} et coïncident avec \mathcal{F}_0 sur un tore intérieur $\mathbb{T}_{\varepsilon} := \{(r, \theta, \omega) \in \mathbb{T} : 0 \leq r \leq \varepsilon\}$ de \mathbb{T} où $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. Il existe alors une application continue h de $[0, 1] \times \mathcal{F}$ dans \mathcal{F} telle que :

- (i) pour $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$, $h(0, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$ et $h(1, \mathcal{F}) \in \mathcal{F}_{\varepsilon}$;
- (ii) le feuilletage $h(t, \mathcal{F})$ reste le même hors de $\mathbb{T}_{2\varepsilon}$ pendant que t varie.

Preuve — Comme on le constate facilement, l'homéomorphisme décrit au lemme 4.2.1 associé à $\mathcal{F}_{\varepsilon}$ le sous-groupe Y_{ε} de Y des difféomorphismes f de \mathbb{T} de la forme $f : (z, \omega) \mapsto (z, \varphi(z, \omega))$, où $\omega \mapsto \varphi(z, \omega)$ est un difféomorphisme du cercle dépendant de z et coïncidant avec l'identité pour $|z| \leq \varepsilon$. Nous allons donc construire plutôt, ce qui revient au même, une application continue h de $[0, 1] \times Y$ dans Y ayant les propriétés suivantes :

- (1) pour $f \in Y$, $h(0, f) = f$ et $h(1, f) \in Y_{\varepsilon}$;
- (2) la fonction $h(t, f)$ reste la même sur la partie de \mathbb{T} définie par $|z| \geq 2\varepsilon$.

Considérons une application α de classe C^{∞} de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $\alpha(u) = 0$ pour $u \leq \varepsilon$ et $\alpha(u) = u$ pour $u \geq 2\varepsilon$. Nous posons simplement $h(t, f)(r, \theta, \omega) = (r, \theta, \varphi((1-t)r + t\alpha(r), \theta, \omega))$ et par construction, cette application possède les propriétés requises. \square

La remarque suivante est analogue à la remarque 4.1.5 :

Remarque 4.2.3 — Soit K un compact contenu dans \mathbb{T} . Pour tout point $x := (z, \omega) \in K$, notons D_x^{λ} le disque horizontal $\{(z', \omega) : |z - z'| \leq \lambda\}$ de centre x et de rayon λ . Posons $V_K^{\lambda} := \bigcup_{x \in K} D_x^{\lambda}$. Supposons qu'un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$ coïncide avec \mathcal{F}_0 sur V_K^{λ} . Si $\lambda \geq 3\varepsilon$, alors $h(1, \mathcal{F})$ coïncide encore avec \mathcal{F}_0 sur V_K^{ε} .

Preuve — Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$ coïncidant avec \mathcal{F}_0 sur V_K^{λ} avec $\lambda \geq 3\varepsilon$. D'après la preuve précédente, on peut associer à \mathcal{F} un difféomorphisme f de \mathbb{T} qui est égal à l'identité sur V_K^{λ} . Vérifions que $h(1, f)$ coïncide encore avec l'identité sur V_K^{ε} . Soit $(z', \omega) \in D_x^{\varepsilon} \subset D_x^{\lambda}$. Posons $z = re^{i\theta}$, $z' = r'e^{i\theta'}$ et $z'_t = ((1-t)r' + t\alpha(r'))e^{i\theta'}$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a toujours : $|z'_t - z| \leq 2t\varepsilon + \varepsilon \leq 3\varepsilon \leq \lambda$, ce qui signifie que (z'_t, ω) appartient à D_x^{λ} pour tout t . De ce fait, $h(t, f)$ coïncide avec l'identité sur D_x^{ε} pour tout t , donc $h(t, \mathcal{F})$ reste le feuilletage en disques horizontaux sur $V_K^{\varepsilon} := \bigcup_{x \in K} D_x^{\varepsilon}$. \square

Munis de ces résultats, nous allons maintenant établir le théorème E.



5 Prolongement au tore solide des feuilletages du tore-surface

Notons \mathcal{S} l'espace des feuilletages en surfaces de T qui sont transverses à son bord \mathbb{T}^2 et transverses aux parallèles de celui-ci, sans être forcément transverses aux parallèles à l'intérieur de T . Définissons également l'espace \mathcal{C} des feuilletages en courbes de \mathbb{T}^2 qui sont transverses aux parallèles. On a une application naturelle $\partial : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ qui à un feuilletage de T associe le feuilletage induit sur son bord \mathbb{T}^2 . Dans [Thu74], Thurston a montré l'existence d'une application $s : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ telle que $\partial \circ s = id_{\mathcal{C}}$. Dans cette section, on se propose de montrer que s peut être continue. On a vu au paragraphe 4.2 qu'un feuilletage \mathcal{F}_1 de T proche du feuilletage en disques \mathcal{F}_0 est lui-même en disques (car ses feuilles sont des revêtements de \mathbb{D}^2). Cependant, tout feuilletage du tore \mathbb{T}^2 proche du feuilletage en cercles $\partial\mathcal{F}_0$ n'est pas nécessairement en cercles (il peut même être à feuilles denses). Ainsi, il n'existe pas de section continue s de ∂ au-dessus d'un voisinage de $\partial\mathcal{F}_0$ telle que $s(\partial\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}_0$. Néanmoins, on a le résultat suivant (il s'agit d'un énoncé précis du théorème E) :

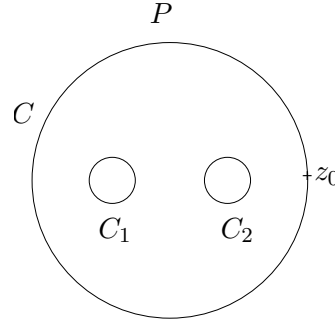
Théorème F — *Il existe une section continue $s : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ de ∂ .*

Le but de cette section est de prouver ce résultat.

5.1 Principe de construction de s

Soit \mathcal{F} un feuilletage de \mathbb{T}^2 transverse aux parallèles. Lorsque ce feuilletage est défini par une forme fermée, il s'étend en un feuilletage de T possédant une composante de Reeb. Dans un premier temps, nous nous inspirons de ce résultat de Reeb ([Ree52]) pour construire une section s' continue au-dessus de l'espace \mathcal{C}_0 des feuilletages de \mathbb{T}^2 dont l'application de premier retour sur le parallèle $\theta = 0$ est une rotation. Ensuite, remarquons que si on prive T de l'intérieur de deux tores solides disjoints fibrés sur des cercles de \mathbb{D}^2 , on obtient une variété diffeomorphe à $P \times \mathbb{S}^1$ où P (pour "pantalon") est la variété obtenue en privant le disque \mathbb{D}^2 de deux petits disques ouverts disjoints. Désignons par C , C_1 et C_2 les composantes du bord de P .

Partant d'un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ de \mathbb{T}^2 , on construira d'abord un prolongement à $P \times \mathbb{S}^1$. Par construction, ce prolongement tracera sur les tores $C_1 \times \mathbb{S}^1$ et $C_2 \times \mathbb{S}^1$ (convenablement identifiés à \mathbb{T}^2) des feuilletages qui seront dans \mathcal{C}_0 et qu'on pourra donc étendre à l'aide de la section s' précédemment construite à l'intérieur de ces tores.



5.2 Notations

Continuons de noter (r, θ, ω) ou (z, ω) les coordonnées usuelles sur le tore solide T .

Notation 5.2.1 — Définissons deux tores solides T_1 et T_2 par

$$T_1 := \{(z, \omega) : |z + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{10}\} \quad \text{et} \quad T_2 := \{(z, \omega) : |z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{10}\}.$$

La variété obtenue en privant T de l'intérieur de $T_1 \cup T_2$ est notée W . Elle est diffeomorphe au produit $P \times \mathbb{S}^1$ où P est le disque unité privé des petits disques ouverts $\{z \in \mathbb{D}^2 : |z + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{10}\}$ et $\{z \in \mathbb{D}^2 : |z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{10}\}$.

Nous aurons besoin d'un point-base sur \mathbb{D}^2 : pour fixer les idées, nous prenons $z_0 = 1$. Nous utiliserons également des voisinages de sécurité pour traiter de certains problèmes de recollement ; aussi nous fixons $\varepsilon \in]0, \frac{1}{10}[$.

Notation 5.2.2 — Nous notons T^ε le voisinage tubulaire suivant du bord de T :

$$T^\varepsilon := \{(r, \theta, \omega) : r \geq 1 - \varepsilon\}.$$

De même, nous notons W^ε le ε -voisinage du bord de W dans W .

Sur W^ε , nous introduisons un champ de vecteurs transverse au bord et tangent aux disques horizontaux :

Notation 5.2.3 — En notant $z = x + iy \in \mathbb{D}^2$, le champ R est défini par

$$R_{(r, \theta, \omega)} := \begin{cases} r \frac{\partial}{\partial r} & \text{pour tout } (r, \theta, \omega) \in T^\varepsilon \\ (x - \frac{1}{2}) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} & \text{au } \varepsilon\text{-voisinage de } C_1 \times \mathbb{S}^1 \\ (x + \frac{1}{2}) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} & \text{au } \varepsilon\text{-voisinage de } C_2 \times \mathbb{S}^1 \end{cases}$$

Nous appellons R le *champ radial* sur W^ε .

Comme nous considérons beaucoup d'espaces de feuilletages différents, il n'est pas inutile d'en récapituler la liste.

Notation 5.2.4 — Nous notons :

- \mathcal{C} l'espace des feuilletages en courbes de \mathbb{T}^2 qui sont transverses aux parallèles ;
- \mathcal{C}_0 l'espace des feuilletages de \mathbb{T}^2 dont l'application de premier retour sur le parallèle $\theta = 0$ est une rotation ;

- \mathcal{S} l'espace des feuilletages en surfaces de \mathbb{T} qui sont transverses à son bord \mathbb{T}^2 et transverses aux parallèles de celui-ci, sans être forcément transverses aux parallèles à l'intérieur de \mathbb{T} ;
- \mathcal{F} l'espace des feuilletages en surfaces de \mathbb{T} qui sont transverses aux parallèles (et donc en disques) ;
- \mathcal{F}_R l'espace des feuilletages en surfaces de \mathbb{T} qui sont transverses aux parallèles de \mathbb{T} et invariants par le champ radial sur T^ε ;
- \mathcal{W} l'espace des feuilletages de W transverses aux parallèles et invariants par R sur W^ε .

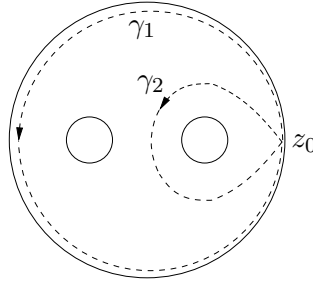
On a les inclusions suivantes $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$ et $\mathcal{F}_R \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{S}$. De plus, d'après le lemme 4.1.3, les espaces \mathcal{F} et \mathcal{F}_R sont homotopes.

Introduisons maintenant les groupes topologiques suivants qui seront tous munis de la topologie C^∞ :

- $H(\mathbb{T}^2)$ le groupe des difféomorphismes de \mathbb{T}^2 qui sont isotopes à l'identité, fibrés au-dessus de $id_{\mathbb{S}^1}$ et fixent $\pi^{-1}(z_0)$ point par point ;
- $H(\mathbb{T})$ le groupe des difféomorphismes de \mathbb{T} qui sont isotopes à l'identité, fibrés au-dessus de $id_{\mathbb{D}^2}$, laissant R invariant sur T^ε et fixent $\pi^{-1}(z_0)$ point par point ;
- $H(W)$ le groupe des difféomorphismes de W qui sont isotopes à l'identité, fibrés au-dessus de id_P , laissant R invariant sur W^ε et fixent $\pi^{-1}(z_0)$ point par point ;
- $H_0(\mathbb{T})$ (resp. $H_0(W)$) le sous-groupe de $H(\mathbb{T})$ (resp. $H(W)$) des difféomorphismes qui fixent T^ε point par point.

N.B. Nous voulons bien dire que les éléments des deux derniers groupes fixent T^ε point par point ; pour $H_0(W)$ on n'impose pas l'invariance des points de W^ε non-contenus dans T^ε .

Ensuite, nous choisissons deux lacets basés en z_0 dans P :



Notation 5.2.5 — Les lacets γ_1 et γ_2 sont définis par :

- $\gamma_1(t) := e^{2i\pi t}$ pour $t \in [0, 1]$;
- $\gamma_2(t) := \begin{cases} e^{2i\pi t} & \text{pour } t \in [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1], \\ i(2 - 4t) & \text{pour } t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]. \end{cases}$

De cette manière, les groupes fondamentaux $\Gamma_1 := \pi_1(\mathbb{S}^1, z_0)$ et $\Gamma_2 := \pi_1(P, z_0)$ sont engendrés respectivement par $[\gamma_1]$ et $\{[\gamma_1], [\gamma_2]\}$ où $[\gamma_i]$ désigne la classe d'homotopie du lacet γ_i . De plus, Γ_1 s'identifie à un sous-groupe de Γ_2 .

Enfin, pour $i = 1, 2$, nous notons Λ_i l'espace des morphismes de groupes de Γ_i dans le revêtement universel $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ de $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$.

5.3 Quelques propriétés

Lemme 5.3.1 — Les sept espaces suivants sont contractiles : $\Lambda_1, \Lambda_2, H(\mathbb{T}^2), H(\mathbb{T}), H_0(\mathbb{T}), H(W)$ et $H_0(W)$.

Preuve — Les cas de Λ_1 et Λ_2 sont similaires ; les cas de $H(\mathbb{T}^2), H(\mathbb{T}), H_0(\mathbb{T}), H(W)$ et $H_0(W)$ sont similaires : nous n'allons donc traiter que les cas de Λ_2 et $H(W)$ en laissant les autres au lecteur.

Cas de Λ_2 : Le groupe Γ_2 est libre à deux générateurs donc Λ_2 est isomorphe à $D^\infty(\mathbb{S}^1) \times D^\infty(\mathbb{S}^1)$. Comme $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ est contractile, Λ_2 l'est aussi.

Cas de $H(W)$: Le groupe $H(W)$ est homéomorphe à l'ensemble des applications φ de classe C^∞ de P dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ telles que $\varphi(z_0) = id$ et φ soit invariante par le champ radial (un homéomorphisme s'obtient en voyant le difféomorphisme fibré $(z, \omega) \mapsto (z, \varphi(z, \omega))$ comme une application $z \mapsto (\omega \mapsto \varphi(z, \omega))$ de P dans $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ puis en relevant celle-ci à $D^\infty(\mathbb{S}^1)$, ce qui est possible car φ est isotope à l'identité). Ceci nous permet d'exhiber une rétraction explicite de $H(W)$ sur un point.

Fait — La formule suivante $(t, \varphi) \mapsto ((z, \omega) \mapsto (z, (1-t)\varphi(z, \omega) + t\omega))$ définit une rétraction de $H(W)$ sur l'élément neutre de ce groupe.

Preuve — Par définition, l'application φ_t de W dans W qui à (z, ω) associe $(z, (1-t)\varphi(z, \omega) + t\omega)$ est une application de classe C^∞ de W dans lui-même qui dépend continûment de t et de (z, ω) et qui est fibrée sur l'identité de P . On vérifie facilement que pour tout t , on a $\varphi_t(z_0, \omega) = (z_0, \omega)$. Enfin, l'invariance par R vient de ce que φ et l'identité de W sont deux fonctions invariantes par ce champ ; donc leurs barycentres le sont également.

Il nous reste à vérifier que l'application différentiable φ_t est bien un difféomorphisme de W . Une fois ce fait établi, l'existence du chemin $t \mapsto \varphi_t$ connectant φ_t à id_W impliquera que ce difféomorphisme est isotope à l'identité et il aura donc toutes les propriétés requises pour être dans W quel que soit t .

Montrons d'abord que φ_t est une bijection de W sur W . Nous savons que φ_t fixe chaque fibre de W ; il nous suffit donc de voir que la restriction de φ_t à chaque fibre en constitue un difféomorphisme. Pour cela, fixons un point z de P et considérons la fibre F_z de z dans W . L'application différentiable de F_z sur F_z induite par φ_t est d'indice 1 car elle est barycentre de deux applications d'indice 1. Donc pour être un difféomorphisme, il lui suffit d'avoir une dérivée strictement positive en tout point. Or, puisque φ est dans $H(W)$ et t dans $[0, 1]$, on a bien :

$$\frac{\partial}{\partial \omega}((1-t)\varphi(z, \omega) + t\omega) = (1-t)\frac{\partial}{\partial \omega}\varphi(z, \omega) + t > 0$$

d'où le résultat escompté : φ_t est une bijection.

Montrons maintenant que φ_t est un difféomorphisme de W . Comme c'est à la fois une bijection et une application différentiable, il suffit de montrer que sa différentielle est inversible en tout point. Explicitons cette différentielle en utilisant les coordonnées (r, θ, ω) . Nous obtenons :

$$d\varphi_t(r, \theta, \omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (1-t)\frac{\partial}{\partial r}\varphi(r, \theta, \omega) & (1-t)\frac{\partial}{\partial \theta}\varphi(r, \theta, \omega) & (1-t)\frac{\partial}{\partial \omega}\varphi(r, \theta, \omega) + t \end{pmatrix}$$

et le déterminant jacobien est $\det(d\varphi_t) = (1-t)\frac{\partial}{\partial \omega}\varphi(r, \theta, \omega) + t > 0$

Par le théorème d'Ehresmann ([Ehr47]), on peut associer à tout feuilletage \mathcal{F} de \mathcal{C} sa *représentation d'holonomie* $Hol_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$, qui est un morphisme de $\Gamma_1 = \pi_1(\mathbb{S}^1, z_0)$ dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ — autrement dit, un élément de Λ_1 . En outre, l'application $Hol_{\mathcal{C}}$ de \mathcal{C} dans Λ_1 ainsi obtenue est continue. De même, on peut introduire une application continue $Hol_{\mathcal{W}}$ de \mathcal{W} dans $\Lambda_2 = Hom(\pi_1(P, z_0), D^\infty(\mathbb{S}^1))$; formellement, on pourrait aussi associer à \mathcal{F} une représentation d'holonomie, mais celle-ci associerait aux éléments de \mathcal{F} une représentation à valeurs dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ du groupe *trivial* $\pi_1(\mathbb{D}^2, z_0)$ donc n'offrirait pas d'intérêt. Enfin, rappelons que par définition, \mathcal{C}_0 est la partie de \mathcal{C} sur laquelle $Hol_{\mathcal{C}}$ est à valeurs dans le groupe des translations de \mathbb{R} .

Lemme 5.3.2 — *Les applications suivantes sont des fibrations principales :*

- $Hol_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \Lambda_1$, de groupe $H(\mathbb{T}^2)$;
- $Hol_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \longrightarrow \Lambda_2$, de groupe $H(W)$;
- $Hol_{\mathcal{C}_0} : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, de groupe $H(\mathbb{T}^2)$.

De plus, \mathcal{F}_R est homéomorphe à $H(\mathbb{T})$ — ce qui est une autre façon de dire que \mathcal{F}_R est un $H(\mathbb{T})$ -fibré principal sur un point.

Preuve — Comme les quatre cas se traitent de la même façon, avec une vérification supplémentaire dans le second cas, nous ne traiterons que celui-ci. Il faut montrer que l'application $Hol_{\mathcal{W}}$ est surjective et que ses fibres sont les orbites de l'action naturelle de $H(W)$ sur \mathcal{W} ; il faut également vérifier que cette action est libre. Enfin, il faut s'assurer qu'il existe des sections locales; mais nous ferons mieux puisque nous allons construire une section globale.

Surjectivité de $Hol_{\mathcal{W}}$: À toute représentation ρ de $\pi_1(P, z_0)$ dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$, nous pouvons associer par suspension un feuilletage \mathcal{F} de $P \times \mathbb{R}$ invariant par la translation verticale $\tau : (z, t) \mapsto (z, t + 1)$ et dont la représentation d'holonomie est ρ . En rendant ce feuilletage invariant par le relevé du champ radial au voisinage de $C \times \mathbb{R}$ (remarque 4.1.5) puis en passant au quotient par τ , nous obtenons un élément de \mathcal{W} dont l'image est ρ .

Liberté et orbites de l'action : Soient \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux feuilletages de \mathcal{W} ; cherchons à quelle condition ils sont dans la même $H(W)$ -orbite. Si nous choisissons un point z de P et un chemin c de z_0 à z dans P , il existera au plus un élément φ de $H(W)$ tel que $\varphi(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$. En effet, pour tout $\omega \in \mathbb{S}^1$, relevons c en des chemins c_1 et c_2 de même origine (z_0, ω) d'extrémités (z, ω_1) et (z, ω_2) , le chemin c_i étant tracé le long d'une feuille de \mathcal{F}_i . Alors, nous aurons $\varphi(z, \omega_1) = (z, \omega_2)$ ce qui définit parfaitement φ . Mais pour que cette définition soit consistante, il faut encore qu'elle n'attribue pas à un même point (z, ω_1) deux images différentes : autrement dit, elle ne doit pas dépendre du choix de c , alors qu'*a priori* elle n'en dépend pas à *homotopie près*. On constate donc qu'une condition nécessaire et suffisante est que $Hol(\mathcal{F}_1) = Hol(\mathcal{F}_2)$. Nous avons donc montré que $H(W)$ agit librement sur \mathcal{W} et a pour orbites les fibres de la fibration de \mathcal{W} sur Λ_2 ce qui est bien la conclusion voulue.

Existence d'une section globale : Rappelons que Λ_2 est l'espace des morphismes de $\Gamma_2 = \pi_1(P, z_0)$ dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ et notons \tilde{P} le revêtement universel de P . Soient π_1 la projection naturelle de $\tilde{P} \times \mathbb{S}^1 \times \Lambda_2$ sur l'espace $\tilde{P} \times \Lambda_2$ et π_2 celle de $\tilde{P} \times \Lambda_2$ sur l'espace $P \times \Lambda_2$. Désignons par X le quotient de $\tilde{P} \times \mathbb{S}^1 \times \Lambda_2$ par l'action suivante de $\Gamma_2 : (\gamma, (\tilde{z}, \omega, \tau)) \mapsto (\gamma\tilde{z}, \tau(\gamma)\omega, \tau)$. Il existe alors une projection naturelle π_3 de $\tilde{P} \times \mathbb{S}^1 \times \Lambda_2$ sur X et une projection naturelle π_4 de X sur $P \times \Lambda_2$. De plus, le

diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P} \times \mathbb{S}^1 \times \Lambda_2 & \xrightarrow{\pi_1} & \tilde{P} \times \Lambda_2 \\ \pi_3 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ X & \xrightarrow{\pi_4} & P \times \Lambda_2 \end{array}$$

L'application $\pi_2 \circ \pi_1$ est clairement une fibration localement triviale (c'est même une fibration principale de groupe $\mathbb{S}^1 \times \Gamma_2$). Comme on a $\pi_2 \circ \pi_1 = \pi_4 \circ \pi_3$, on en déduit que $\pi_4 \circ \pi_3$ est également une fibration localement triviale ; elle admet donc des sections locales. Soit \mathfrak{s} une telle section ; alors l'application $\pi_3 \circ \mathfrak{s}$ est une section locale de π_4 . Il découle de cette construction que π_4 est un fibré principal en cercles sur $P \times \Lambda_2$.

D'autre part, comme la base de ce fibré a le type d'homotopie d'un bouquet de cercles, sa classe d'Euler est nulle et le fibré est trivial. Il existe donc une section globale S de $P \times \Lambda_2$ dans X que l'on peut supposer de classe C^∞ puisque la base $P \times \Lambda_2$ est paracompacte. Nous pouvons donc choisir une identification I de classe C^∞ de X à $P \times \mathbb{S}^1 \times \Lambda_2$ de classe C^∞ .

Nous allons maintenant construire notre section. Soit π_5 la projection naturelle de $P \times \mathbb{S}^1 \times \Lambda_2$ sur $P \times \mathbb{S}^1$. Pour tout morphisme τ de $\Gamma_2 = \text{Hom}(\pi_1(P, z_0), D^\infty(\mathbb{S}^1))$, définissons une application φ_τ de $\tilde{P} \times \mathbb{S}^1$ dans $W = P \times \mathbb{S}^1$ par $\varphi_\tau(\tilde{z}, \omega) = \pi_5 \circ I \circ \pi_3(\tilde{z}, \omega, \tau)$. Soit \mathcal{F}_I le feuilletage horizontal de $\tilde{P} \times \mathbb{S}^1$. Son image par l'application φ_τ est un feuilletage \mathcal{F}_τ de W qui dépend continûment de τ , est transverse aux parallèles de T et a pour holonomie τ par construction. De plus, si on applique le lemme 4.1.3 à l'espace $\{\mathcal{F}_\tau : \tau \in \Lambda_2\}$, on peut rendre ces feuilletages invariants par le champ radial R . Nous notons \mathcal{F}_τ^R les feuilletages de W ainsi construits. L'application qui à τ associe le feuilletage \mathcal{F}_τ^R est la section souhaitée. \square

Lemme 5.3.3 — *Les suites suivantes sont exactes :*

$$\{id\} \longrightarrow H_0(W) \xrightarrow{res_W} H(W) \xrightarrow{res_W} H(\mathbb{T}^2) \longrightarrow \{id\} \quad (S_W)$$

$$\{id\} \longrightarrow H_0(T) \xrightarrow{res_T} H(T) \xrightarrow{res_T} H(\mathbb{T}^2) \longrightarrow \{id\} \quad (S_T)$$

où res_T et res_W sont les morphismes naturels de restriction des difféomorphismes de T ou de W à la composante de bord \mathbb{T}^2 .

Preuve — Le seul point à vérifier est la surjectivité de res_T et de res_W . Soit h un élément de $H(\mathbb{T}^2)$. Nous allons prolonger h en un élément H de $H(T)$ qui fixera chaque point (z, ω) tel que $|z| \leq \frac{4}{5}$; de ce fait, la restriction de H à W sera dans $H(W)$ et nous aurons donc du même coup les deux surjectivités voulues.

Soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction décroissante de classe C^∞ telle que l'on ait $\alpha(r) = 1$ si $r \leq \frac{4}{5}$ et $\alpha(r) = 0$ si $r \geq \frac{9}{10}$. Mettons le difféomorphisme h sous la forme $h(\theta, \omega) = (\theta, \varphi_\theta(\omega))$ avec $\varphi_\theta \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ ce qui est possible car h est fibré au-dessus de $id_{\mathbb{S}^1}$. Comme de plus h est isotope à $id_{\mathbb{R}}$, on peut relever φ_θ à $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ en un difféomorphisme que l'on notera encore φ_θ et tel que $\varphi_0 = id_{\mathbb{R}}$. Ensuite, posons

$$H(r, \theta, \omega) := (r, \theta, \varphi_\theta^{\alpha(r)}(\omega))$$

où la notation " $\varphi_\theta^{\alpha(r)}$ " est celle " f^t " de la section 3. Comme $\varphi_\theta^{\alpha(r)} = \varphi_\theta^1 = id_{\mathbb{R}}$ dès que $r \leq \frac{4}{5}$, cette formule a un sens même pour $r = 0$, et elle définit bien un élément

de $H(\mathbb{T})$ qui fixe les points pour lesquels $r \leq \frac{4}{5}$. Notons que l'application $h \mapsto H$ est une section continue de l'application $res_{\mathbb{T}}$ (resp. res_W). \square

Notation 5.3.4 — Nous notons ext_W et $ext_{\mathbb{T}}$ les sections continues des fibrations (S_W) et $(S_{\mathbb{T}})$ construites dans la preuve précédente. Soit également S la section du fibré à base contractile \mathcal{W} construit dans la preuve du lemme 5.3.2.

Ainsi, par exemple, ext_W est une application continue de $H(\mathbb{T}^2)$ dans $H(W)$ telle que $res_W \circ ext_W$ soit l'identité de $H(\mathbb{T}^2)$.

N.B. Nous ne prétendons pas que ext_W et $ext_{\mathbb{T}}$ soient des morphismes de groupes !

5.4 Tourbillonnement de Reeb équivariant

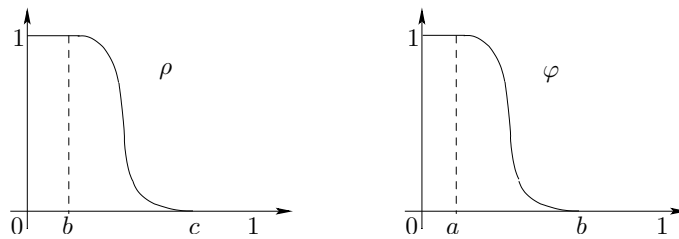
Nous allons maintenant construire une section continue s' de ∂ au-dessus d'un certain espace de feuilletages \mathcal{C}_0 . Pour éviter toute confusion, nous soulignons que cette section *n'est pas encore* la section s cherchée, mais un outil permettant de la construire. Nous utiliserons le tourbillonnement de Reeb ([Ree52]). On doit à ce dernier le résultat suivant :

Lemme 5.4.1 — Soit \mathcal{F} un feuilletage de \mathbb{T}^2 défini par une forme différentielle fermée α . Alors \mathcal{F} se prolonge en un feuilletage \mathcal{F}_α du tore solide.

Nous nous en inspirons pour prouver la

Proposition 5.4.2 — Il existe une section continue $s' : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{S}$ de ∂ ainsi qu'une application continue $h' : [0, 1] \times \mathcal{F}_R \rightarrow \mathbb{F}_1(\mathbb{T})$ telle que $h'(0, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$, $h'(1, \mathcal{F}) = s' \circ \partial \mathcal{F}$ et pour tout t , $\partial h'(t, \mathcal{F}) = \partial \mathcal{F}$.

Preuve — Appliquons le lemme 5.3.2 et faisons correspondre à tout $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_0$ le réel $\lambda_{\mathcal{F}}$ et le difféomorphisme $h_{\mathcal{F}}$ tels que $h_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{F})$ soit le feuilletage de \mathbb{T}^2 défini par la forme fermée $d\omega - \lambda_{\mathcal{F}}d\theta$. Ensuite, nous introduisons des fonctions ρ et φ de classe C^∞ de l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ telles que ci-après



Définissons la forme différentielle suivante sur \mathbb{T} :

$$\beta_{\lambda_{\mathcal{F}}} := (1 - \varphi(r)) \cdot (1 - \rho(r)) \cdot (d\omega - \lambda_{\mathcal{F}}d\theta) + (1 - \varphi(r)) \cdot \rho(r) \cdot dr + \varphi(r) \cdot d\omega.$$

Vérifions que $\beta_{\lambda_{\mathcal{F}}}$ satisfait la condition de Frobenius $d\beta_{\lambda_{\mathcal{F}}} \wedge \beta_{\lambda_{\mathcal{F}}} = 0$. On a :

$$d\beta_{\lambda_{\mathcal{F}}} = -(\varphi'(r) \cdot (1 - \rho(r)) + \rho'(r) \cdot (1 - \varphi(r))) \cdot dr \wedge (d\omega - \lambda_{\mathcal{F}}d\theta) + \varphi'(r) \cdot dr \wedge d\omega.$$

– Pour $0 \leq r \leq a$ et $c \leq r \leq 1$, les fonctions φ et ρ sont constantes donc leurs dérivées sont nulles sur ces intervalles. On en déduit $d\beta_{\lambda_{\mathcal{F}}} = 0$ et donc $d\beta_{\lambda_{\mathcal{F}}} \wedge \beta_{\lambda_{\mathcal{F}}} = 0$.

- Pour $a \leq r \leq b$, on a $\rho(r) = 1$ donc $\beta_{\lambda_{\mathcal{F}}} = (1 - \varphi(r)) \cdot dr + \varphi(r) \cdot d\omega$ et $d\beta_{\lambda_{\mathcal{F}}} = \varphi'(r) \cdot dr \wedge d\omega$. Par un calcul élémentaire, on obtient $d\beta_{\lambda_{\mathcal{F}}} \wedge \beta_{\lambda_{\mathcal{F}}} = 0$.
- Pour $b \leq r \leq c$, on a $\varphi(r) = 0$ donc $\beta_{\lambda_{\mathcal{F}}} = (1 - \rho(r)) \cdot (d\omega - \lambda_{\mathcal{F}}d\theta) + \rho(r) \cdot dr$ et $d\beta_{\lambda_{\mathcal{F}}} = -\rho'(r)dr \wedge (d\omega - \lambda_{\mathcal{F}}d\theta)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} d\beta_{\lambda_{\mathcal{F}}} \wedge \beta_{\lambda_{\mathcal{F}}} &= -\rho'(r)(1 - \rho(r))dr \wedge \underbrace{(d\omega - \lambda_{\mathcal{F}}d\theta) \wedge (d\omega - \lambda_{\mathcal{F}}d\theta)}_{=0} - \rho(r)\rho'(r) \underbrace{dr \wedge dr}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la forme différentielle $\beta_{\lambda_{\mathcal{F}}}$ est sans singularité et intégrable; elle définit un feuilletage $\mathcal{G}_{\lambda_{\mathcal{F}}}$ de T qui possède une composante de Reeb et admet $h_{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$ pour trace au bord. Par ailleurs, selon la définition 5.3.4, le difféomorphisme $ext_T(h_{\mathcal{F}})$ de T admet $h_{\mathcal{F}}$ pour restriction à \mathbb{T}^2 . Nous posons maintenant $s'(\mathcal{F}) := ext_T(h_{\mathcal{F}})(\mathcal{G}_{\lambda_{\mathcal{F}}})$ et obtenons bien une application s' de l'espace \mathcal{C}_0 de feuilletages en courbes de \mathbb{T}^2 dans l'espace \mathcal{S} des feuilletages en surfaces de T telle que $\partial \circ s' = id_{\mathcal{C}_0}$.

Il nous reste à construire h' . Soit \mathcal{F} un feuilletage en disques de T , transverse aux parallèles et invariant par le champ radial R . Comme $\mathcal{F} \in \mathcal{F}_R$, on peut lui associer un unique difféomorphisme $H_{\mathcal{F}}$ dans $H(T)$ tel que $H_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}$ (l'existence de $H_{\mathcal{F}}$ découle du lemme 5.3.2). Puisque $H_{\mathcal{F}}$ et $ext_T(res_T(H_{\mathcal{F}}))$ ont par définition le même projeté sur $H(\mathbb{T}^2)$, on peut ensuite définir un unique $H_{\mathcal{F}}^0 \in H_0(T)$ tel que $H_{\mathcal{F}} = H_{\mathcal{F}}^0 \circ ext_T(res_T(H_{\mathcal{F}}))$ en vertu du lemme 5.3.3. De plus, selon le lemme 5.3.1, le groupe $H_0(T)$ est contractile; introduisons une rétraction $R(t, \cdot)$ de $H_0(T)$ sur $\{id_T\}$. Enfin, pour tout $t \in [0, 1]$, définissons la forme différentielle η_t par $\eta_t := t \cdot \beta_0 + (1 - t) \cdot d\omega$. On a $d\eta_t = t \cdot d\beta_0$ donc $d\eta_t \wedge \eta_t = t^2 \cdot d\beta_0 \wedge \beta_0 + t(1 - t) \cdot d\beta_0 \wedge d\omega$. Or, la forme β_0 est intégrable donc

$$\begin{aligned} d\eta_t \wedge \eta_t &= t(1 - t) \cdot d\beta_0 \wedge d\omega \\ &= t(1 - t) \cdot (\varphi'(r) \cdot (\rho(r) - 1) + \rho'(r) \cdot (\varphi(r) - 1) + \varphi'(r)) \cdot dr \wedge d\omega \wedge d\omega \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par suite, la forme non-singulière η_t est intégrable. Elle définit donc un feuilletage que l'on peut noter \mathcal{F}_t car \mathcal{F}_0 correspond effectivement au feuilletage de T en disques horizontaux; on a aussi $\mathcal{F}_1 = \mathcal{G}_0$. Nous définissons maintenant $h'(t, \mathcal{F})$ comme suit :

- pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $h'(t, \mathcal{F}) := R(2t, H_{\mathcal{F}}^0) \circ ext_T(res_T(H_{\mathcal{F}}))(\mathcal{F}_0)$,
- pour $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, $h'(t, \mathcal{F}) := ext_T(res_T(H_{\mathcal{F}}))(\mathcal{F}_{2t-1})$. □

Clairement, les deux définitions coïncident pour $t = \frac{1}{2}$; tout aussi clairement, h' est une application continue. On constate encore que $h'(0, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$ et $h'(1, \mathcal{F}) = s'(\partial\mathcal{F})$. Enfin, on a constamment

$$\begin{aligned} \partial h'(t, \mathcal{F}) &= \partial(R(\inf(2t, 1), H_{\mathcal{F}}^0) \circ ext_T(res_T(H_{\mathcal{F}}))(\mathcal{F}_{\sup(2t-1, 0)})) \\ &= res_T(H_{\mathcal{F}})\partial(\mathcal{F}_{\sup(2t-1, 0)}) = res_T(H_{\mathcal{F}})\partial\mathcal{F}_0 = \partial\mathcal{F}. \end{aligned}$$

Remarquons en passant que par construction, le feuilletage $s'(\mathcal{F})$ est invariant par le champ radial sur le voisinage T^ε du bord de T , ce qui nous servira par la suite.

5.5 Prolongement à $P \times \mathbb{S}^1$

Fixons un nombre diophantien μ et prolongeons maintenant tout feuilletage en courbes \mathcal{F} de \mathbb{T}^2 transverse aux parallèles du tore-surface à la variété $W = P \times \mathbb{S}^1$.

Comme l'espace \mathcal{C} de ces feuilletages en courbes est un fibré principal de base $\Lambda_1 = \text{Hom}(\pi_1(\mathbb{S}^1, z_0), D^\infty(\mathbb{S}^1))$ (lemme 5.3.2), on peut associer à \mathcal{F} un élément de Λ_1 c'est-à-dire un morphisme $\Gamma_1 = \pi_1(\mathbb{S}^1, z_0) \rightarrow D^\infty(\mathbb{S}^1)$. Notons $f_{\mathcal{F}}$ l'image de $[\gamma_1]$ par ce morphisme. D'après le théorème d'Herman (corollaire 3.3.2), il existe $\lambda(\mathcal{F}) \in \mathbb{R}$ et $g_{\mathcal{F}} \in D^\infty(\mathbb{S}^1)$ qui dépendent continûment de $f_{\mathcal{F}}$ et tels que $g_{\mathcal{F}}(0) = 0$, $f_{\mathcal{F}} = T_{\lambda(\mathcal{F})} \circ g_{\mathcal{F}} \circ T_\mu \circ g_{\mathcal{F}}^{-1}$.

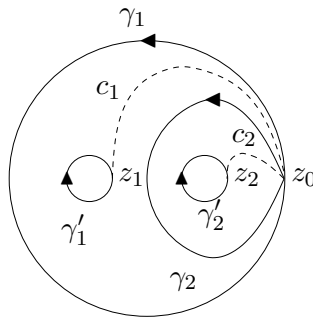
Définissons une représentation $\rho_{\mathcal{F}}$ de $\Gamma_2 = \pi_1(P, z_0)$ dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ par $\rho_{\mathcal{F}}([\gamma_1]) = f_{\mathcal{F}}$ et $\rho_{\mathcal{F}}([\gamma_2]) = T_{\lambda(\mathcal{F})}$; par construction $\rho_{\mathcal{F}}$ dépend continûment de \mathcal{F} .

Par ailleurs, d'après la définition 5.3.4, il existe une section continue S de $\Lambda_2 = \text{Hom}(\pi_1(P, z_0), D^\infty(\mathbb{S}^1))$ dans l'espace \mathcal{W} de feuilletages en surfaces de W . Par conséquent, le feuilletage $S(\rho_{\mathcal{F}})$ dépend continûment de \mathcal{F} et trace sur $C \times \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{T}^2$ un feuilletage ayant la même holonomie que \mathcal{F} mais qui ne coïncide pas nécessairement avec \mathcal{F} . Néanmoins, selon le lemme 5.3.2, il existe un unique difféomorphisme $h_{\mathcal{F}} \in H(\mathbb{T}^2)$ tel que $\mathcal{F} = h_{\mathcal{F}}(S(\rho_{\mathcal{F}}))$. Soit \mathcal{F}_W le feuilletage de W défini par $\text{ext}_W(h_{\mathcal{F}})(S(\rho_{\mathcal{F}}))$; par construction, il dépend continûment de \mathcal{F} et a pour trace \mathcal{F} sur \mathbb{T}^2 . L'application $S_W : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_W$ est donc un prolongement continu du feuilletage en courbes \mathcal{F} en un feuilletage en surfaces de W .

De plus, d'après la remarque 4.1.5, on peut supposer sans perte de généralité que le feuilletage \mathcal{F}_W est invariant par le champ radial R sur le voisinage W^ε du bord de W .

5.6 Construction de s

Nous allons maintenant prolonger \mathcal{F}_W à l'intérieur des tores solides T_1 et T_2 (complémentaires de $W = P \times \mathbb{S}^1$ dans \mathbb{T}) grâce à la proposition 5.4.2. Les points $z_1 = \frac{-2}{5}$ et $z_2 = \frac{3}{5}$ sont au bord respectivement de C_1 et C_2 . Choisissons librement dans P un chemin c_1 de z_0 à z_1 et un chemin c_2 de z_0 à z_2 . Ceci de sorte que, en notant γ'_1 et γ'_2 les générateurs naturels de $\pi_1(C_i, z_i)$, les chemins γ_2^{-1} et $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ soient respectivement homotopes à $c_2^{-1}\gamma'_2c_2$ et $c_1^{-1}\gamma'_1c_1$.



Nous rappelons que l'image de $[\gamma_1]$ par la représentation d'holonomie de \mathcal{F} a été décomposée dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ sous la forme $T_{\lambda(\mathcal{F})} \circ g_{\mathcal{F}} \circ T_\mu \circ g_{\mathcal{F}}^{-1}$.

Introduisons maintenant des applications de l'espace \mathcal{C} de feuilletages en courbes de \mathbb{T}^2 dans le groupe $D^\infty(\mathbb{S}^1)$. Pour $k = 1$ ou 2 , pour $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ et pour $\omega_0 \in \mathbb{S}^1$, le chemin c_k se relève de façon unique en un chemin $c_{\mathcal{F}, \omega_0}^k$ au-dessus de c_k , tracé le long de \mathcal{F}_W et issu de (z_0, ω_0) . L'extrémité de ce chemin est un point au-dessus de z_k , que nous noterons $(z_k, \varphi_k(\omega_0))$. L'application qui, à $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$, associe l'élément φ_k de $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ est clairement continue. Par ailleurs, les lemmes 5.3.1 et 5.3.2 impliquent que \mathcal{C} est contractile et on peut donc relever $\mathcal{F} \mapsto \varphi_k$ en une application $\mathcal{F} \mapsto h_k$

de \mathcal{C} dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$.

Soit \mathcal{F}^1 le feuilletage que trace \mathcal{F}_W sur le bord du tore solide T_1 et soit $\Phi_1^{\mathcal{F}}$ le difféomorphisme suivant de T sur T_1 : $\Phi_1^{\mathcal{F}}(z, \omega) = (\frac{1}{10}z - \frac{1}{2}, h_1 \circ g_{\mathcal{F}}(\omega))$.

Proposition 5.6.1 — *Le feuilletage $\mathcal{G}_1 := (\Phi_1^{\mathcal{F}})^{-1}(\mathcal{F}^1)$ est dans \mathcal{C}_0 .*

Preuve — Par définition, le feuilletage \mathcal{G}_1 est dans \mathcal{C} donc son image par $Hol_{\mathcal{C}}$ est un morphisme de $\Gamma_1 = \pi_1(\mathbb{S}^1, z_0)$ dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$. Notons φ l'image du générateur γ_1^{-1} par ce morphisme. Or, par construction de \mathcal{G}_1 , on a $\varphi = g_{\mathcal{F}}^{-1} \circ h_1^{-1} \circ \psi \circ h_1 \circ g_{\mathcal{F}}$ où ψ est l'application d'holonomie de \mathcal{F}_W associée au lacet γ_1' . Ceci étant, dans $\pi_1(P, z_0)$, on a $[\gamma_1'] = [c_1 \gamma_1^{-1} \gamma_2 c_1^{-1}]$ par choix de c_1 . À son tour, ψ se décompose donc comme suit : $\psi = h_1 \circ Hol_{\mathcal{W}}(\mathcal{F}_W, \gamma_1^{-1}) \circ Hol_{\mathcal{W}}(\mathcal{F}_W, \gamma_2) \circ h_1^{-1}$. Or, par construction du feuilletage en surfaces \mathcal{F}_W nous avons : $Hol_{\mathcal{W}}(\mathcal{F}_W, \gamma_2) = T_{\lambda(\mathcal{F})}$ et $Hol_{\mathcal{W}}(\mathcal{F}, \gamma_1^{-1}) = g_{\mathcal{F}} \circ T_{-\mu} \circ g_{\mathcal{F}}^{-1} \circ T_{-\lambda(\mathcal{F})}$. Finalement, $\varphi = T_{-\mu}$ qui est bien une translation. \square

Soit \mathcal{F}^2 le feuilletage que trace \mathcal{F}_W sur le bord du tore solide T_2 et soit $\Phi_2^{\mathcal{F}}$ le difféomorphisme suivant de T sur T_2 : $\Phi_2^{\mathcal{F}}(z, \omega) = (\frac{1}{10}z + \frac{1}{2}, h_2(\omega))$. On vérifie de même que l'on a la

Proposition 5.6.2 — *Le feuilletage $\mathcal{G}_2 = (\Phi_2^{\mathcal{F}})^{-1}(\mathcal{F}^2)$ est dans l'espace \mathcal{C}_0 des feuilletages en courbes de \mathbb{T}^2 dont l'holonomie sur le parallèle $\{\theta = 0\}$ est une rotation.*

Nous prolongeons donc \mathcal{F}_W à T tout entier, en comblant T_k par $\Phi_k^{\mathcal{F}}(s'(\mathcal{G}_k))$ où s' est la section de la proposition 5.4.2. Notons $s(\mathcal{F})$ le feuilletage ainsi obtenu. Par construction, l'application $\mathcal{F} \mapsto s(\mathcal{F})$ est continue. De plus, pour tout \mathcal{F} , le feuilletage $s(\mathcal{F})$ obtenu à la fin de cette construction est de classe C^∞ sauf peut-être au voisinage du bord $C_1 \times \mathbb{S}^1 \sqcup C_2 \times \mathbb{S}^1$ de $T_1 \sqcup T_2$. En effet, le feuilletage $s(\mathcal{F})$ est obtenu en recollant des feuilletages transverses à ces deux tores-surfaces $C_i \times \mathbb{S}^1$ et définis de chaque côté ; on pourrait donc craindre une absence de différentiabilité transverse à nos deux tores. Mais, heureusement, au voisinage de $C_i \times \mathbb{S}^1$ ($i = 1, 2$) $s(\mathcal{F})$ est invariant par le champ radial (de classe C^∞ et transverse à $C_i \times \mathbb{S}^1$) donc $s(\mathcal{F})$ est aussi régulier que sa trace sur $C_i \times \mathbb{S}^1$, qui est bien de classe C^∞ . Par conséquent, le théorème F a bien lieu.

Nous allons voir que la section s ainsi construite possède une propriété intéressante.

5.7 Homotopie de \mathcal{F} à $s(\partial(\mathcal{F}))$ pour $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$

Rappelons qu'on désigne par \mathcal{F} l'ensemble des feuilletages de T qui sont en disques transverses aux parallèles et par \mathcal{F}_0 le feuilletage en disques horizontaux c'est-à-dire dont les feuilles sont les fibres de la deuxième projection $(r, \theta, \omega) \mapsto \omega$ de T sur \mathbb{S}^1 .

Proposition 5.7.1 — *Il existe une application continue $h : [0, 1] \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{F}_1(T)$ avec les propriétés suivantes : $h(0, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$, $h(1, \mathcal{F}) = s \circ \partial \mathcal{F}$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $h(t, \mathcal{F})|_{T^\varepsilon} = \mathcal{F}|_{T^\varepsilon}$ si \mathcal{F} est invariant par le champ radial R sur le voisinage T^ε . Autrement dit, l'homotopie h préserve l'espace \mathcal{F}_R .*

Preuve — Soit \mathcal{F} un élément de \mathcal{F} . Comme ce feuilletage est en disques topologiques, sa représentation d’holonomie dans le groupe $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ est l’identité. De plus, en la décomposant selon le théorème d’Herman, nous avons $g_{\mathcal{F}} = id$ et $\lambda(\mathcal{F}) = -\mu$. Enfin, nous définissons encore des difféomorphismes $\Phi_i^{\mathcal{F}}$ de \mathbb{T} sur les tores solides \mathbb{T}_i par $\Phi_i^{\mathcal{F}}(z, \omega) = (\frac{1}{10}z + \frac{(-1)^i}{2}, h_i(\omega))$.

- Pour $t \in [0, \frac{1}{4}]$, appliquons le lemme 4.1.3 aux tores-surfaces $C_i \times \mathbb{S}^1$, bords des tores solides \mathbb{T}_i ($i = 1, 2$), de façon à rendre \mathcal{F} invariant par le champ radial sur un ε -voisinage de ces tores. De même, grâce à la remarque 4.1.5, nous effectuons la même opération sur T^ε .
- Pour $t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, appliquons la proposition 5.4.2 et homotopons le feuilletage $\mathcal{F}|_{\mathbb{T}_i}$ à $\Phi_i^{\mathcal{F}}(s' \circ \partial(\Phi_i^{\mathcal{F}})^{-1}(\mathcal{F}|_{\mathbb{T}_i}))$. Comme \mathcal{F} a été rendu invariant par le champ radial sur un ε -voisinage de \mathbb{T}_i , il n’y a pas de problème de recollement. Notons \mathcal{F}' le feuilletage ainsi obtenu et remarquons que $\partial\mathcal{F}' = \partial\mathcal{F}$.
- Pour $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, la trace de \mathcal{F}' sur le bord \mathbb{T}^2 de \mathbb{T} est dans la même $H(\mathbb{T}^2)$ -orbite que $\partial\mathcal{F}_0$ donc il existe un difféomorphisme $h_{\mathcal{F}} \in H(\mathbb{T}^2)$ tel que $\partial\mathcal{F}' = h_{\mathcal{F}}(\partial\mathcal{F}_0)$. D’après la preuve du lemme 5.3.2, on peut étendre le difféomorphisme $h_{\mathcal{F}}$ de \mathbb{T}^2 en un difféomorphisme $ext_W(h_{\mathcal{F}})$ de $W = P \times \mathbb{S}^1$. Remarquons qu’alors les feuilletages en surfaces $\mathcal{F}'|_W$ et $ext_W(h_{\mathcal{F}})(\mathcal{F}_0|_W)$ ont le même projeté sur $H(\mathbb{T}^2)$ donc il existe un unique difféomorphisme $H_{\mathcal{F}}^0 \in H_0(W)$ tel que $\mathcal{F}'|_W = H_{\mathcal{F}}^0 \circ ext_W(h_{\mathcal{F}})(\mathcal{F}_0|_W)$. Or, d’après la lemme 5.3.1, le groupe $H_0(W)$ est contractile donc il existe un chemin de $H_{\mathcal{F}}^0$ à l’identité dans $H_0(W)$. Nous pouvons alors homotoper $\mathcal{F}'|_W$ au feuilletage $ext_W(h_{\mathcal{F}})(\mathcal{F}_0|_W)$; désignons par $\mathcal{F}'_{W,t}$ la famille de feuilletages sur W ainsi obtenue. De plus, remarquons que la représentation d’holonomie de \mathcal{F}' ne varie pas; par ailleurs, nous pouvons encore définir le difféomorphisme $\Phi_i^{\mathcal{F}'}$ qui dépend continûment de $\mathcal{F}'|_{W,t}$. On peut vérifier comme à la proposition 5.6.1 que l’image par $(\Phi_i^{\mathcal{F}'})^{-1}$ du feuilletage $\mathcal{F}'_{W,t}|_{\partial\mathbb{T}_i}$ reste dans \mathcal{C}_0 ce qui nous permet de prolonger continûment $\mathcal{F}'_{W,t}$ à l’intérieur de \mathbb{T}_i par $\Phi_i^{\mathcal{F}'}(s' \circ \partial(\Phi_i^{\mathcal{F}'})^{-1}(\mathcal{F}'_{W,t}|_{\partial\mathbb{T}_i}))$.
- Pour $t \in [\frac{3}{4}, 1]$, il nous reste à homotoper \mathcal{F}_0 à son image par $s \circ \partial$; vu la construction précédente, nous obtiendrons alors l’homotopie pour tout feuilletage en surfaces $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$. Notons ρ_0 la représentation triviale de $\Gamma_2 = \pi_1(P, z_0)$ dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ et ρ_1 la représentation correspondant à $\rho_1([\gamma_1]) = id_{\mathbb{R}}$ et $\rho_1([\gamma_2]) = T_{-\mu}$. Introduisons également la représentation ρ_{4t-3} correspondant à $\rho([\gamma_1]) = id_{\mathbb{R}}$ et $\rho([\gamma_2]) = -(4t-3)\mu$. Rappelons qu’à la fin de l’étape précédente, la restriction du feuilletage en surfaces \mathcal{F}' à W s’écrit $ext_W(h_{\mathcal{F}})(\mathcal{F}_0|_W)$ c’est-à-dire $ext_W(h_{\mathcal{F}})(S(\rho_0))$ où S est la section continue introduite dans la définition 5.3.4. Nous terminons l’homotopie sur W par $ext_W(h_{\mathcal{F}})(S(\rho_{4t-3}))$. De la même façon que précédemment, on vérifie qu’on peut prolonger ce feuilletage continûment à l’intérieur des tores \mathbb{T}_i par une formule analogue.

Nous obtenons ainsi une homotopie de \mathcal{F} à $s \circ \partial\mathcal{F}$ pour $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$. \square

Ce “comportement agréable” de la section s vis-à-vis des feuilletages transverses aux fibres de \mathbb{T} et invariants par le champ radial nous sera utile par la suite.



6 Homotopie de feuilletages et fibrés en cercles

Dans cette partie, nous énonçons une condition nécessaire et suffisante pour que l'espace total d'un fibré en cercles possède des feuilletages transverses aux fibres puis nous prouvons un résultat sur la topologie sur cet espace de feuilletages.

6.1 Classe d'Euler d'un fibré en cercles

Définition générale

Soit $\xi := (\mathbb{S}^1, M, B, \pi)$ un fibré localement trivial en cercles orientable au-dessus d'une base B orientable. On définit la *classe d'Euler* $eu(\xi)$ du fibré comme l'élément du groupe $H^2(B, \mathbb{Z})$ qui est l'image de la classe fondamentale de \mathbb{S}^1 par le morphisme de transgression $H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(B, \mathbb{Z})$.

Comme les groupes $H^p(\mathbb{S}^1, \mathbb{Z})$ sont triviaux pour $p \geq 2$, la classe d'Euler est un invariant complet pour les fibrés en cercles de base B . Cet invariant représente l'obstruction à trivialisier le fibré au-dessus du 2-squelette de B lorsque B est un CW -complexe.

Lorsque B est une surface fermée orientable, on a $H^2(B, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Comme $H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, on peut identifier la classe d'Euler du fibré à l'entier obtenu en accouplant cette classe à la classe fondamentale de B .

Classe d'Euler et feuilletages transverses aux fibres

Supposons maintenant qu'il existe un feuilletage transverse aux fibres d'un fibré en cercles au-dessus d'une surface fermée Σ_g de genre g . En voyant le champ de plans tangents $T\mathcal{F}$ comme une connexion plate, on obtient une représentation d'holonomie $\rho : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ du groupe fondamental de la surface dans le groupe des difféomorphismes de \mathbb{S}^1 préservant l'orientation. La classe d'Euler du fibré correspond alors à celle de la représentation ρ c'est-à-dire à l'obstruction à ce qu'il existe un morphisme de groupe $\tilde{\rho} : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow D^\infty(\mathbb{S}^1)$ qui relève ρ . Plus précisément, soit

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g / a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle$$

une présentation de $\pi_1(\Sigma_g)$. On choisit des relevés $\widetilde{\rho}(a_1), \widetilde{\rho}(b_1), \dots, \widetilde{\rho}(a_g), \widetilde{\rho}(b_g)$ des difféomorphismes du cercle $\rho(a_1), \rho(b_1), \dots, \rho(a_g), \rho(b_g)$ dans les difféomorphismes de \mathbb{R} commutant avec les translations entières. La composée

$$\widetilde{\rho}(a_1) \widetilde{\rho}(b_1) \widetilde{\rho}(a_1)^{-1} \widetilde{\rho}(b_1)^{-1} \dots \widetilde{\rho}(a_g) \widetilde{\rho}(b_g) \widetilde{\rho}(a_g)^{-1} \widetilde{\rho}(b_g)^{-1}$$

relève l'identité donc est une translation entière de \mathbb{R} . On montre que l'amplitude de cette translation ne dépend pas du choix des difféomorphismes $\rho(a_i), \rho(b_i)$: c'est la classe d'Euler du fibré notée $eu(\rho)$.

Quelques propriétés et résultats

La classe d'Euler permet de déterminer si un fibré possède des feuilletages transverses aux fibres.

Théorème (Wood [Woo71]) — *Un fibré ξ en cercles orientable au-dessus d'une surface compacte Σ admet un feuilletage transverse aux fibres si et seulement si $|eu(\xi)| \leq \min(0, -\chi(\Sigma))$ où $\chi(\Sigma)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface Σ .*

D'autre part, elle renseigne également sur la topologie des feuilles. Dans sa thèse, Thurston a montré le résultat suivant :

Théorème (Thurston, Levitt [Lev78]) — *Soit $\xi := (\mathbb{S}^1, M, \Sigma, \pi)$ un fibré orienté au dessus d'une surface orientée $\Sigma \neq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Soit aussi \mathcal{F} un feuilletage de classe C^2 transversalement orienté. Alors, soit \mathcal{F} est isotope à un feuilletage transverse aux fibres de ξ , soit \mathcal{F} a une feuille compacte. En particulier, si $|eu(\xi)| > |\chi(\Sigma)|$, où $\chi(\Sigma)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface Σ , alors \mathcal{F} a une feuille compacte.*

Nous allons commencer par montrer le théorème A ; les idées majeures de la preuve du théorème D seront déjà présentes, mais sous une forme simplifiée.

6.2 Preuve du théorème A

Pour l'instant, M est un fibré en cercles $\pi : M \rightarrow \Sigma_g$ dont la base est une surface fermée de genre $g \geq 1$. Par hypothèse, l'espace \mathcal{F} des feuilletages de M qui sont transverses aux fibres de π est non vide. Choisissons un plongement φ du tore solide T dans M envoyant les parallèles $\{(r, \theta)\} \times \mathbb{S}^1$ de T sur des fibres de π . Par application du corollaire 4.2.2, pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, on peut homotoper \mathcal{F} à une partie \mathcal{F}_0 de lui-même dont tous les feuilletages coïncident avec $\varphi(\mathcal{F}_0)$ sur $\varphi(T_{\varepsilon_0})$. Il nous reste à homotoper \mathcal{F}_0 à un point dans $\mathbb{F}_1(M)$. Appelons *champ radial* (cf. 4.1) un champ de classe C^∞ sur M dont la restriction à $\varphi(T)$ est l'image par φ du champ $r \frac{\partial}{\partial r}$ sur T . D'autre part, définissons un plongement ψ de T dans M par la formule $\psi(r, \theta, \omega) = \varphi(\varepsilon_1 r, \theta, \omega)$. Pour $\varepsilon_1 > 0$ assez petit et pour $\varepsilon > 0$ assez petit, dépendant de ε_0 et de ε_1 , nous voyons que chaque feuilletage de \mathcal{F}_0 est invariant par le champ radial sur Σ^ε , où Σ est la surface $\psi(\mathbb{T}^2) \subset M$.

La surface Σ sépare M ; notons $N := \psi(T)$ et $M' := M - N$ les deux sous-variétés compactes de M dont Σ constitue le bord. Alors M' est encore fibrée en cercles par π sur une surface S_g qui est le complémentaire dans Σ_g d'un disque ouvert. Or, on sait que le groupe fondamental d'une surface telle que S_g est libre à $2g$ générateurs ; aussi, pour tout groupe topologique contractile G , on a $Hom(\pi_1(S_g, *), G) \simeq G^{2g}$ qui est lui aussi contractile. Soit maintenant \mathcal{G} l'espace des feuilletages de M' qui sont transverses à Σ , transverse aux fibres de π et invariants par le champ radial sur $\Sigma^\varepsilon \cap M'$.

Lemme 6.2.1 — L'espace \mathcal{G} est un fibré principal de base $\text{Hom}(\pi_1(S_g, *), D^\infty(\mathbb{S}^1))$ et de fibre le groupe G des difféomorphismes de M' qui sont fibrés sur l'identité de S_g , invariants par le champ radial au voisinage de Σ et égaux à l'identité en restriction à une certaine fibre F_0 arbitrairement choisie.

Preuve — Constatons que la fibration qu'induit π sur M' est triviale (ce fait classique vient de ce que les fibrés orientables en cercles sont caractérisés par leur classe d'Euler qui appartient à $H^2(B, \mathbb{Z})$ où B est la base du fibré ; or, $H^2(S_g, \mathbb{Z}) = 0$ car S_g se rétracte sur un bouquet de cercles). Une fois cette constatation faite, la preuve du lemme 6.2.1 est celle du lemme 5.3.2 *mutatis mutandis*. \square

Puisque G et $\text{Hom}(\pi_1(S_g, *), D^\infty(\mathbb{S}^1))$ sont contractiles, \mathcal{G} est lui aussi contractile (le fait que G soit contractile se prouve comme au lemme 5.3.1). Considérons maintenant une rétraction h de \mathcal{G} sur un point. Pour $t \in [0, 1]$ et pour \mathcal{F} dans \mathcal{F}_0 , nous définirons un feuilletage \mathcal{F}_t en décrivant ses restrictions à N et à M' ; celles-ci seront transverses à Σ , égales en restriction à cette surface, invariantes par le champ radial sur Σ^ε et se recollent donc en un feuilletage global sur M . La définition de \mathcal{F}_t est la suivante :

- si $t \in [0, \frac{1}{2}]$, alors $H(t, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$ sur M' et $H(t, \mathcal{F}) = h_0(2t, \mathcal{F})$ sur N où h_0 désigne l'homotopie de \mathcal{F} à $s \circ \partial(\mathcal{F})$ définie à la section 5.7.
- si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, alors $H(t, \mathcal{F}) = h(2t - 1, \mathcal{F})$ sur M' ; ce feuilletage trace sur le bord de Σ un feuilletage en courbes $\partial H(t, \mathcal{F})$ que nous prolongeons dans N par $s(\partial H(t, \mathcal{F}))$.

On constate sans peine que cette application H constitue l'homotopie voulue de \mathcal{F}_0 à un point dans $\mathbb{F}_1(M)$; ce qui achève la preuve du théorème A.

Remarquons que la structure fibrée joue un rôle important dans cette preuve. Dans le cas général où l'on ne contrôle plus du tout la géométrie de la variété, nous aurons besoin d'une hypothèse supplémentaire.



7 Cas des variétés fermées

L'ingrédient pour remplacer les fibres de la partie précédente est la notion de feuilletage tendu. Toutefois, même avec cette hypothèse, la construction de l'homotopie est beaucoup plus compliquée et fait appel à une triangulation particulière due à Thurston. Nous établissons alors le théorème B.

7.1 Feuilletages tendus

On sait d'après les travaux de Zieschang-Novikov ([Nov65]) et Lickorisch ([Lic65]), que toute variété fermée orientable de dimension 3 possède un feuilletage en surfaces transversalement orientable ayant au moins une composante de Reeb. Une question naturelle est donc l'existence de feuilletages transversalement orientables sans composante de Reeb. Gabai s'est intéressé à ce problème et a introduit la notion de feuilletage tendu ([Gab83]) :

Définition 7.1.1 — *Un feuilletage \mathcal{F} est tendu si pour toute feuille F de \mathcal{F} il existe une courbe fermée γ_F transverse à \mathcal{F} qui rencontre F .*

Les feuilletages transverses à un fibré en cercles ainsi que les feuilletages à feuilles denses ou sans feuille compacte constituent des exemples de feuilletages tendus très étudiés. L'espace des feuilletages tendus sur une variété M est d'ailleurs un ouvert de l'ensemble $\mathbb{F}_1(M)$ des feuilletages en surfaces de M . D'autre part, on a également la caractérisation suivante :

Fait 7.1.2 — *Un feuilletage \mathcal{F} est tendu si et seulement si il existe une transversale fermée γ qui rencontre chaque feuille.*

On voit qu'un feuilletage tendu est sans composante de Reeb. Par contre, un feuilletage sans composante de Reeb n'est pas nécessairement tendu. Par exemple, si on munit $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1$ du feuilletage produit d'une composante de Reeb de \mathbb{T}^2 par \mathbb{S}^1 , on obtient un feuilletage de \mathbb{T}^3 ayant une feuille torique et il n'existe pas de transversale fermée qui rencontre cette feuille dans \mathbb{T}^3 . Cependant, ce feuilletage est nécessairement sans composante de Reeb puisqu'aucune de ses feuilles n'est homéomorphe à \mathbb{R}^2 . Il existe même des variétés ([BNR97]) qui admettent des feuilletages sans composante de Reeb mais pas de feuilletages tendus (toutefois, lorsque la variété est atoroidale, un feuilletage est tendu si et seulement si il est sans composante de Reeb). Dans la suite, nous utiliserons la propriété suivante des feuilletages tendus :

Fait 7.1.3 ([Gab83]) — *Tout arc transverse à un feuilletage tendu se prolonge en une courbe fermée simple transverse au feuilletage.*

7.2 Vers le théorème D

Pour prouver le théorème A, nous avons délimité une partie M' de M sur laquelle il est facile d'homotoper les feuilletages considérés, et nous sommes ensuite parvenus à prolonger les homotopies au complémentaire N de M' dans M du fait que N est une (réunion de) copie(s) de T . Comme les feuilletages à homotoper étaient transverses aux fibres de π , la construction était particulièrement simple et n'utilisait qu'un seul "tube" $N \simeq T$. Dans le cas général, il nous faudra être plus méticuleux ; par ailleurs, nous ne pouvons plus régler aussi facilement le problème de lissage au bord des "tubes" et il nous faudra construire un succédané du "champ radial".

Soit désormais M une variété fermée orientable de dimension 3 et \mathcal{F} un feuilletage tendu de codimension 1 sur M . Selon Thurston ([Thu74], voir aussi [Ben97]), il existe une "bonne" triangulation K de M . Les propriétés qui nous intéressent sont les suivantes :

- \mathcal{F} est transverse aux arêtes de K ,
- tout simplexe σ de K est homéomorphe à la boule euclidienne fermée de dimension 3 feuilletée par les surfaces de niveau $z = \text{constante}$.

Nous prouvons maintenant le théorème D en quatre étapes :

- mise en coïncidence préliminaire de \mathcal{F} et de ses voisins au voisinage du 1-squelette de K , ceci pour contourner les problèmes de lissage au bord des simplexes ;
- définition des copies de T dans M dont la réunion jouera le rôle de N ;
- définition de l'objet qui jouera le rôle du champ radial X ;
- construction de l'homotopie à partir de ces données.

7.3 Première étape

Soit K^1 le 1-squelette de K et soit $\varepsilon > 0$ un réel "suffisamment petit" (notion qui sera précisée au lemme 7.3.1). Enfin, soit V le ε -voisinage de K^1 dans M relativement à une métrique riemannienne auxiliaire lisse sur M fixée pour la suite.

Lemme 7.3.1 — *Soit \mathcal{V} l'espace des feuilletages de M qui coïncident avec \mathcal{F} sur V . Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, alors, il existe un voisinage \mathcal{U} de \mathcal{F} dans $\mathbb{F}_1(M)$ et une application continue H_1 de $[0, 1] \times \mathcal{U}$ dans $\mathbb{F}_1(M)$ tels que l'on ait $H_1(0, \mathcal{G}) = \mathcal{G}$ et $H_1(1, \mathcal{G}) \in \mathcal{V}$ pour tout $\mathcal{G} \in \mathcal{U}$. De plus, on peut choisir H_1 pour avoir $H_1(t, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$ pour tout $t \in [0, 1]$.*

Preuve — Soient I_1, \dots, I_n les arêtes de K^1 ordonnées de façon quelconque. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, nous prolongeons I_i en une courbe de Jordan J_i de classe C^∞ partout transverse à \mathcal{F} (ce qui est possible car \mathcal{F} est tendu). Soit W_i un voisinage tubulaire de J_i . Selon la section 4.2, on peut prendre pour W_i l'image de T par un plongement φ_i pour lequel $\varphi_i^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_0$. Nous noterons \mathcal{U}_i le voisinage de \mathcal{F} dans $\mathbb{F}_1(M)$ dont les éléments \mathcal{G} vérifient $\varphi_i^{-1}(\mathcal{G}) \in \mathcal{F}$.

Appliquons maintenant le corollaire 4.2.2 une première fois, en prenant une valeur quelconque de ε et en la notant ε_1 plutôt que ε . Soit h^1 l'homotopie que définit ce lemme sur \mathcal{F} ; pour $t \in [0, \frac{1}{n}]$ et pour $\mathcal{G} \in \mathcal{U}_1$, nous posons :

- $h_1(t, \mathcal{G}) = \mathcal{G}$ en restriction à $M - W_1$;

– $h_1(t, \mathcal{G}) = \varphi_1(h^1(nt, \varphi_1^{-1}(\mathcal{G})))$ en restriction à W_1 .

Nous posons en dernier lieu $\mathcal{U}^1 := \mathcal{U}_1$ pour initialiser une définition par induction sur l'entier $k \in \{1, \dots, n\}$.

Supposons désormais définies les données suivantes (ce qui est le cas si $k = 1$) :

– un réel $\varepsilon_k \in]0, \frac{1}{2}[$;

– un voisinage \mathcal{U}^k de \mathcal{F} dans $\mathbb{F}_1(M)$;

– une homotopie partielle h_k de $[0, \frac{k}{n}] \times \mathcal{U}^k$ dans $\mathbb{F}_1(M)$;

ceci de sorte que :

– $h_k(0, \mathcal{G}) = \mathcal{G}$ pour tout $\mathcal{G} \in \mathcal{U}^k$;

– $h_k(\frac{k}{n}, \mathcal{G})$ coïncide avec \mathcal{F} sur le voisinage $\bigcup_{i=1}^k \varphi_i(\mathbb{T}_{\varepsilon_i})$ de $\bigcup_{i=1}^k J_i$ qui ne dépend pas de \mathcal{G} mais seulement de ε_k d'après le corollaire 4.2.2;

– $h_k(t, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$ pour tout $t \in [0, \frac{k}{n}]$.

Nous définissons alors \mathcal{U}^{k+1} comme le voisinage suivant de \mathcal{F} dans $\mathbb{F}_1(M)$: $\mathcal{U}^{k+1} := \mathcal{U}^k \cap h_k^{-1}(\{\frac{k}{n}\} \times \mathcal{U}^{k+1})$; puis nous choisissons un réel $\varepsilon_{k+1} > 0$ pour lequel \mathcal{F}_0 et tous les feuilletages $\varphi_{k+1}^{-1}(h_k(\frac{k}{n}, \mathcal{G}))$ avec $\mathcal{G} \in \mathcal{U}^{k+1}$ coïncident au moins sur $V_{K_{k+1}}^{3\varepsilon_{k+1}}$

où K_{k+1} désigne la partie, compacte ou vide $\varphi_{k+1}^{-1}(\bigcup_{i=1}^k J_i \cap W_{k+1})$ de \mathbb{T} . Nous appliquons le corollaire 4.2.2 en prenant pour ε le réel ε_{k+1} précédent. Ceci nous fournit une homotopie h^{k+1} définie sur \mathcal{F} , et nous posons pour tout $\mathcal{G} \in \mathcal{U}^{k+1}$ et tout $t \in [0, \frac{k+1}{n}]$:

– si $t \leq \frac{k}{n}$, $h_{k+1}(t, \mathcal{G}) = h_k(t, \mathcal{G})$;

– si $t \geq \frac{k}{n}$, $h_{k+1}(t, \mathcal{G}) = h_k(t, \mathcal{G})$ en restriction à $M - W_{k+1}$
 $h_{k+1}(t, \mathcal{G}) = \varphi_{k+1}(h^{k+1}(nt - k, \varphi_{k+1}^{-1}(h_k(\frac{k}{n}, \mathcal{G}))))$ sur W_{k+1} .

Grâce à notre choix de ε_{k+1} , $h_{k+1}(t, \mathcal{G})$ coïncidera avec \mathcal{F} sur le voisinage $\bigcup_{i=1}^{k+1} \varphi_i(\mathbb{T}_{\varepsilon_i})$ de $\bigcup_{i=1}^{k+1} J_i$ (la dernière partie de l'homotopie, pour $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, introduit cette coïn-

cidence au voisinage de J_{k+1} tout en la préservant au voisinage de $\bigcup_{i=1}^k J_i$ en vertu de la remarque 4.2.3). En posant finalement $\mathcal{U} = \mathcal{U}^n$ et $h = h_n$, on obtient le résultat voulu pour ε assez petit. \square

Dans la suite, nous supposerons que les feuilletages coïncident avec \mathcal{F} sur V .

7.4 Construction des “tubes”

Nous introduisons maintenant ce qui généralise la partie N de M dans la preuve du théorème A. Nous considérons un petit voisinage V' du 2-squelette K^2 de K dont nous préciserons le choix plus tard (proposition 7.5.2).

Proposition 7.4.1 — *Il existe un entier N et des plongements $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$ de \mathbb{T} dans M avec les propriétés suivantes :*

– M est la réunion de V' et des $\phi_i(\mathbb{T})$;

- le bord de chaque $\phi_i(\mathbb{T})$ est dans V' ;
- les $\phi_i(\mathbb{T})$ sont disjoints ;
- pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on a $\phi_i^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_0$;
- les $\phi_i(\mathbb{T})$ ne coupent K^2 qu'en des points de V .

Preuve — Prenons pour N le nombre de 3-simplexes de K et ordonnons ceux-ci de façon quelconque : $\sigma_1^3, \dots, \sigma_N^3$. Pour tout i , il existe un homéomorphisme ψ_i de la boule unité B^3 de \mathbb{R}^3 sur σ_i^3 tel que $\psi_i^{-1}(\mathcal{F})$ soit le feuilletage de B^3 par les disques horizontaux. Nous lissos ψ_i vers l'intérieur de σ_i^3 et obtenons un plongement lisse ψ'_i de B^3 dans σ_i^3 ayant les propriétés suivantes :

- M est la réunion de V' et des $\psi'_i(B^3)$;
- le bord de chaque $\psi'_i(B^3)$ est dans V' ;
- ce bord ne rencontre pas K^2 ;
- $(\psi'_i)^{-1}(\mathcal{F})$ est le feuilletage de B^3 par disques horizontaux.

Nous supprimons ensuite deux “calottes” au voisinage des pôles de B^3 pour faire de son image un cylindre feuilleté en disques et ceci nous fournit une immersion ϕ_i de $[-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{D}^2$ dans M telle que ϕ_i a son image incluse dans l'intérieur de σ_i^3 et son bord dans V' .

Ensuite, considérons l'arc $\phi_i([-\varepsilon, \varepsilon] \times \{0\})$. On peut le prolonger en une courbe de Jordan J_i transverse à \mathcal{F} car ce feuilletage est tendu. De plus, la partie de J_i qui prolonge $\phi_i([-\varepsilon, \varepsilon] \times \{0\})$ peut être prise dans V' car V' est un voisinage de K^2 ([Thu73]). Précisément, après avoir d'abord reliés $\phi_i(-\varepsilon, 0)$ et $\phi_i(\varepsilon, 0)$ à ce que Thurston appelle les points “haut” t_i (top) et “bas” b_i (bottom) de σ_i^3 , on peut relier b_i à t_i par un chemin tracé le long de K^2 .

Perturbons d'abord chaque J_i de façon à ce qu'il ne rencontre les 2-simplexes de K^2 qu'en des points de V et qu'il ne rencontre aucun $\phi_j(B^3)$. En effet, chaque arc de J_i qui rencontre un 2-simplexe σ^2 relie entre eux deux points A et B du bord de σ^2 ; on peut d'abord “pousser” l'arc AB de J_i à l'intérieur de l'un des deux 3-simplexes bordés par σ^2 en gardant fixes ces extrémités, après quoi toute nouvelle perturbation gardera cet arc éloigné de la partie de σ^2 qui n'est pas dans V . En outre, comme la dimension de M est suffisamment grande, on peut supposer les J_i disjoints après les avoir encore perturbés un peu.

Nous choisissons maintenant un voisinage tubulaire W_i^0 de chaque J_i , ce voisinage étant contenu dans $V' \cup \phi_i([-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{D}^2)$ et tous ces voisinages étant suffisamment petits pour que les réunions $W_i^0 \cup \phi_i([-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{D}^2)$ soient disjointes. Nous lissos le tore topologique $W_i^0 \cup \phi_i([-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{D}^2)$ pour obtenir un voisinage tubulaire de J_i ; par construction, ce voisinage peut être paramétré par une application ϕ_i qui a toutes les propriétés requises. \square

7.5 Le champ radial

Appelons *géodésique feuilletée* toute courbe paramétrée par sa longueur d'arc $x(t)$ qui est tangente à \mathcal{F} et qui est dans sa feuille une géodésique (pour la métrique induite sur celle-ci par la métrique auxiliaire dont nous avons muni M). Soit $i \in \{1, \dots, N\}$. Pour tout point x_0 de $\Sigma_i := \phi_i(\mathbb{T}^2)$, il existe une unique géodésique feuilletée $x(t)$ telle que :

- $\phi_i^{-1}(x(t))$ est normale en $\phi_i^{-1}(x_0)$ à la feuille passant par $\phi_i^{-1}(x_0)$ du feuilletage en courbes qui est la trace de $\phi_i^{-1}(\mathcal{F})$ sur \mathbb{T}^2 ;
- $x(0) = x_0$ et $x(t)$ rentre dans $\phi_i(\mathbb{T})$ pour $t > 0$.

De plus, si $\varepsilon_i > 0$ est assez petit, l'application $\theta_i(t, x_0) = x(t)$ de $] -2\varepsilon_i, 2\varepsilon_i[\times \Sigma_i$ dans M sera un plongement. Nous désignons par X_i un champ de classe C^∞ sur M , partout tangent à \mathcal{F} et qui coïncide avec $d\theta_i(\frac{\partial}{\partial t})$ sur $\theta_i([-\varepsilon_i, \varepsilon_i] \times \Sigma_i)$; X_i est appelé *champ radial* de la surface Σ_i .

Rappelons que les feuilletages \mathcal{G} que nous considérons sont dans \mathcal{V} c'est-à-dire coïncident avec \mathcal{F} sur le voisinage V du 1-squelette. Grâce au lemme 4.1.3, il vient :

Proposition 7.5.1 — *Il existe un voisinage \mathcal{E} de \mathcal{F} dans \mathcal{V} et une application continue H_2 de $[0, 1] \times \mathcal{E}$ dans \mathcal{V} telle que $H_2(t, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$, $H_2(0, \mathcal{G}) = \mathcal{G}$ et $H_2(1, \mathcal{G})$ soit invariant par X_i sur un certain voisinage V'' de la réunion des $\Sigma_i = \phi_i(\mathbb{T}^2)$ (ce voisinage ne dépendant pas de \mathcal{G}).*

Preuve — Fixons un $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$. Pour $i \in \{1, \dots, N\}$, notons \mathcal{T}_i l'espace des feuilletages de M qui sont transverses au tore Σ_i et appliquons le lemme 4.1.3 à l'hypersurface Σ_i : il existe une application continue $h_i : [0, 1] \times \mathcal{T}_i \rightarrow \mathcal{T}_i$ telle que pour tout feuilletage \mathcal{G} dans \mathcal{T}_i , $h_i(0, \mathcal{G}) = \mathcal{G}$ et $h_i(1, \mathcal{G}) \in \mathcal{T}_i$ est invariant par le flot local de X_i sur le voisinage Σ_i^ε de Σ_i défini dans le lemme 4.1.3. Si on choisit ε assez petit, les voisinages Σ_i^ε de Σ_i seront disjoints car les surfaces $\Sigma_i = \phi_i(\mathbb{T})$ le sont. Posons $\mathcal{E} = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{T}_i \cap \mathcal{V}$. Cet ensemble est non vide car il contient \mathcal{F} par construction des ϕ_i ; c'est un voisinage de \mathcal{F} dans \mathcal{V} . Définissons maintenant une application H_2 de $[0, 1] \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$ par $H_2(t, \mathcal{G}) = h_i(Nt - i + 1, \mathcal{G})$ pour $t \in [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]$ et $\mathcal{G} \in \mathcal{E}$. Comme les Σ_i^ε sont disjoints, le résultat obtenu pour $t \in [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]$ n'est pas modifié lors des étapes ultérieures. L'application H_2 ainsi définie présente bien les propriétés voulues. \square

Bien sûr, on peut prendre V'' aussi petit que l'on veut ; en particulier, on supposera que V'' ne rencontre K^2 qu'en des points de V .

De la même manière, partant d'un 2-simplexe σ_i^2 de K^2 , nous pouvons définir sur un voisinage V'_i de σ_i^2 un champ de vecteurs Y_i partout tangent à \mathcal{F} et partout transverse à σ_i^2 . Si nous rendons un feuilletage \mathcal{G} de \mathcal{V} invariant par Y_i sur V'_i à l'aide du lemme 4.1.3, la trace de \mathcal{G} au voisinage du bord de σ_i^2 n'est pas modifiée, car ledit bord étant dans V , ladite trace est déjà égale à \mathcal{F} à son voisinage. Si nous effectuons cette modification pour tout \mathcal{G} dans \mathcal{V} et successivement pour tout σ_i^2 dans K^2 , et si le voisinage V'_i de σ_i^2 a été pris assez petit, nous obtenons :

Proposition 7.5.2 — *Il existe un voisinage \mathcal{E}' de \mathcal{F} dans \mathcal{V} et une application continue H_3 de $[0, 1] \times \mathcal{E}'$ dans \mathcal{V} telle que $H_3(t, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$, $H_3(0, \mathcal{G}) = \mathcal{G}$ et $H_3(1, \mathcal{G})$ soit invariant par chaque Y_i sur V' . En particulier, la trace du feuilletage $H_3(1, \mathcal{G})$ sur le voisinage V' du 2-squelette est entièrement déterminée par sa trace sur K^2 .*

7.6 Preuve du théorème D

Nous définissons le voisinage \mathcal{X} de \mathcal{F} des feuilletages \mathcal{G} tels que $\mathcal{G} \in \mathcal{U}$ (lemme 7.3.1), $H_1(1, \mathcal{G}) \in \mathcal{E}'$ (défini à la proposition 7.5.2), $H_3(1, H_1(1, \mathcal{G})) \in \mathcal{E}$ (défini à la

proposition 7.5.1) et $\phi_i^{-1}(H_2(1, H_3(1, H_1(1, \mathcal{G})))) \in \mathcal{F}$ pour tout i .

Soit \mathcal{G} quelconque dans l'espace $\mathcal{X}' := H_2(1, H_3(1, H_1(1, \mathcal{X})))$, auquel le voisinage \mathcal{X} de \mathcal{F} est homotope par construction. Nous définissons maintenant une famille à un paramètre $(\mathcal{G}_t)_{t \in [0,1]}$ de feuilletages telle que $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$ et que \mathcal{G}_1 ne dépende pas de \mathcal{G} ; d'autre part, il sera clair que \mathcal{G}_t dépend à la fois continûment de t et de \mathcal{G} : l'application $(t, \mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{G}_t$ de $[0, 1] \times \mathcal{X}'$ dans $\mathbb{F}_1(M)$ constituera donc une homotopie de \mathcal{X}' à un point et nous aurons le théorème D. Ceci se fait en deux étapes.

Étape 1 — Dans le tube $\phi_i(T)$, on homotope \mathcal{G} au feuilletage $\phi_i(s(\partial(\phi_i^{-1}(\mathcal{G}))))$ en utilisant la proposition 5.7.1.

Étape 2 — Cette étape se fait en trois temps :

- En premier lieu, nommons \mathcal{G}^2 le feuilletage en courbes que trace \mathcal{G} sur l'intérieur $K^2 - K^1$ de K^2 . À la section 1.1, on a mentionné l'existence d'une homotopie $t \rightarrow \mathcal{G}_t^2$ de \mathcal{G}^2 sur \mathcal{F}^2 . Il nous faut maintenant prolonger cette homotopie de $K^2 - K^1$ à M toute entière.

- Étendons d'abord l'homotopie sur le voisinage V' du 2-squelette. Soit \mathcal{G}'_t le feuilletage de V' obtenu en saturant \mathcal{G}_t^2 par le champ radial Y_i au voisinage de chaque 2-cellule σ_i^2 de K^2 et qui coïncide avec \mathcal{F} sur $V \cap V'$. Par construction, \mathcal{G}'_t définit bien un feuilletage de V' tout entier car $V' = V \bigcup_{i=1}^N V'_i$. En outre, nous constatons qu'au voisinage de K^2 , ce feuilletage coïncide bien avec \mathcal{G} lorsque $t = 0$ et avec \mathcal{F} lorsque $t = 1$.

Nous appelons ensuite \mathcal{G}''_t le feuilletage de V' obtenu en rendant \mathcal{G}'_t invariant par le champ radial de chaque surface Σ_i sur V'' (cf. lemme 4.1.3). Puisque \mathcal{G} est dans \mathcal{X}' , nous voyons que sur le complémentaire de la réunion des tubes $\phi_i(T)$, le feuilletage \mathcal{G}''_0 coïncide avec \mathcal{G} ; d'autre part, sur ce même complémentaire, \mathcal{G}''_1 coïncide avec \mathcal{F} car il s'obtient en saturant la trace de \mathcal{F} sur K^2 par un champ transverse à K^2 et tangent à \mathcal{F} .

- Il existe clairement un unique feuilletage global \mathcal{G}_t de M ayant les propriétés suivantes :

- sur le complémentaire des tubes $\phi_i(T)$ (qui est contenu dans V'), ce feuilletage coïncide avec \mathcal{G}''_t ;

- dans chaque tube $\phi_i(T)$, ce feuilletage a une restriction égale à l'image par $\phi_i \circ s \circ \phi_i^{-1}$ de sa trace sur Σ_i .

Soulignons que pour $t = 0$ ce feuilletage est égal à \mathcal{G} et que pour $t = 1$ il ne dépend plus de \mathcal{G} . Ceci conclut donc la construction et la preuve du théorème D.



Conclusion

Dans cette thèse, nous avons obtenu des résultats sur la topologie locale des feuilletages en surfaces des variétés fermées de dimension 3 : tout feuilletage suffisamment proche d'un feuilletage tendu lui est homotope. En outre, lorsqu'on impose en plus à la variété, d'être un fibré en cercles, l'ensemble des feuilletages transverses aux fibres est homotope à un point dans l'ensemble des feuilletages en surfaces. Néanmoins, le problème reste ouvert lorsque le feuilletage n'est pas tendu.

D'autre part, les cas de dimension et codimension supérieures restent à étudier mais ils semblent d'une difficulté extrême. En effet, nos preuves s'appuient sur l'existence d'un prolongement continu des feuilletages de \mathbb{T}^2 transverses aux parallèles au tore solide et utilisent des arguments liés à la dimension de la variété mais aussi des propriétés propres aux feuilletages de codimension un qui sont bien connus.

Enfin, la question de l'existence de feuilletages non homotopes mais ayant des champs de plans tangents homotopes demeure ouverte au moins en codimension un.



Bibliographie

- [Arn65] V. I. Arnol'd, *Small denominators I. Mappings of the circle onto itself*, Trans. AMS **46** (1965), 213–284.
- [Ben97] M.-T. Benameur, *Triangulations and the stability theorem for foliations*, Pacific J. of Math. **179** (1997), no. 2, 221–239.
- [BF94] C. Bonatti et S. Firmo, *Feuilles compactes d'un feuilletage générique en codimension 1*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **27** (1994), 407–462.
- [BNR97] M. Brittenham, R. Naimi, et R. Roberts, *Graph manifolds and taut foliations*, J. Diff. Geom. **47** (1997), 446–470.
- [BR97] M. Baake et J. A. G. Roberts, *Reversing symmetry groups of $gl(2, F)$ and $pgl(2, F)$ matrices with connections to cat maps and trace maps*, J. Phys. A : Math. Gen. **30** (1997), 1549–1573.
- [Den32] A. Denjoy, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, J. Math. Pures Appl. **11** (1932), 333–375.
- [Ehr47] C. Ehresmann, *Sur les espaces fibrés différentiables*, C.R.A.S. Paris **224** (1947), 1611–1612.
- [EMT77] D. B. A. Epstein, K. C. Millet, et D. Tischler, *Leaves without holonomy*, J. London. Math. Soc. **16** (1977), 548–552.
- [Eps77] D. B. A. Epstein, *A topology for the space of foliations*, Lect. Notes in Math. **597** (1977), 133–150.
- [ER44] C. Ehresmann et G. Reeb, *Sur les champs d'éléments de contact complètement intégrables dans une variété continûment différentiable*, C.R.A.S. Paris **218** (1944), 955–957.
- [FS98] B. Farb et P. Shalen, *Real-analytic actions of lattices*, Invent. Math. **135** (1998), 273–296.
- [Gab83] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 445–503.
- [God91] C. Godbillon, *Feuilletages (études géométriques)*, Birkhäuser, 1991.
- [GS80] É. Ghys et V. Sergiescu, *Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages*, Topology **19** (1980), 179–197.
- [Gz01] *Gazette des mathématiciens : Hommage à Michel Herman*, vol. 88, S.M.F., avril 2001.
- [Hae] A. Haefliger, *Naissance des feuilletages, d'Ehresmann-Reeb à Novikov*, <http://www.foliations.org>.
- [Hae70] ———, *Feuilletages sur les variétés ouvertes*, Topology **9** (1970), 183–194.

- [Hec76] G. Hector, *Quelques exemples de feuilletages espèces rares*, Ann. Inst. Fourier **26** (1976), 238–264.
- [Hec77] ———, *Feuilletages en cylindres*, Lect. Notes in Math. **597** (1977), 252–270.
- [Her79] M. R. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. I.H.E.S. **49** (1979), 5–233.
- [HH83] G. Hector et U. Hirsch, *Introduction to the geometry of foliations, Part A*, Vieweg, 1983.
- [HS71] M. R. Herman et F. Sergeraert, *Sur un théorème d’Arnol’d et Komolgorov*, C.R.A.S. Paris **273** (1971), 409–411.
- [Hur85] S. Hurder, *Classifying space of smooth foliations*, Ill. J. Math. **29** (1985), 108–133.
- [Kan93] M. Kanai, *A new approach to the rigidity of discrete groups actions*, Geom. Func. Anal. **6** (1993), 943–1056.
- [Law71] H. B. Lawson, *Codimension one foliations of spheres*, Ann. of Math. **94** (1971), 494–503.
- [Lev78] G. Levitt, *Feuilletages des variétés de dimension 3 qui sont des fibrés en cercles*, Comm. Math. Helv. **53** (1978), 572–594.
- [Lic65] W. Lickorish, *A foliation for 3-manifolds*, Ann. Math. **82** (1965), no. 2, 414–420.
- [Mos66] J. K. Moser, *A rapidly converging iteration method (part II)*, Ann. Scient. Norm. Sup. di Pisa **20** (1966), 499–535.
- [Nov65] S. P. Novikov, *Topology of foliations*, Trans. Moscow Math. Soc. (1965), 268–304.
- [Phi68] A. Phillips, *Foliations on open manifolds I*, Comm. Math. Helv. **43** (1968), 204–211.
- [Phi69] ———, *Foliations on open manifolds II*, Comm. Math. Helv. **44** (1969), 367–370.
- [Ree52] G. Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, vol. 1183, Hermann, Paris, 1952.
- [Rüs72] H. Rüssmann, *Kleine Nenner : Bemerkungen zur Newtonschen Methode*, Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. (1972), 1–10.
- [Sma59] S. Smale, *Diffeomorphisms of the 2-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 621–626.
- [Thu73] W. P. Thurston, *A local construction for foliations of three-manifolds*, Proc. AMS Summer Institute, Differential Geometry, 1973, Stanford, pp. 315–319.
- [Thu74] ———, *The theory of foliations in codimension greater than one*, Comment. Math. Helv. **49** (1974), 214–231.
- [Thu76] ———, *Existence of codimension-one foliations*, Ann. of Math. **104** (1976), 249–268.
- [Wal60] A. H. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds*, Canad. J. Math. **12** (1960), 503–528.

- [Wit94] D. Witte, *Arithmetic groups of higher \mathbb{Q} -rank*, Proc. Am. Math. Soc. **122** (1994), 333–340.
- [Woo69] J. W. Wood, *Foliations on 3-manifolds*, Ann. of Math. **89** (1969), 336–358.
- [Woo71] ———, *Bundles with totally disconnected structure group*, Comment. Math. Helv **42** (1971), 257–273.
- [Yoc84] J.-C. Yoccoz, *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup.(4^{ème} série) **17** (1984), 333–359.



Topologie locale des espaces de feuilletages des variétés fermées de dimension 3

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux feuilletages orientables en surfaces des variétés fermées de dimension 3. Nous prouvons que deux tels feuilletages sur une variété fermée orientable sont homotopes s'ils sont tendus et suffisamment proches. Pour cela, nous établissons d'abord une version "à paramètre" d'un théorème de Thurston selon lequel il est possible de prolonger certains feuilletages du tore-surface \mathbb{T}^2 au tore solide. Dans ce travail, nous construisons un tel prolongement et nous utilisons le théorème d'Herman sur la conjugaison des difféomorphismes du cercle à des rotations pour établir la continuité de ce prolongement par rapport aux feuilletages. Ensuite nous montrons que l'espace des feuilletages en surfaces transverses à une fibration au-dessus d'une surface fermée orientable est homotope à un point. Enfin, nous prouvons le résultat annoncé en utilisant une idée de Thurston et la construction précédente. Nous en déduisons quelques conséquences sur la topologie locale de l'espace des feuilletages en surfaces sur les variétés fermées de dimension 3.

Mots-clefs : feuilletages tendus, homotopie, composante de Reeb, feuilletages en surfaces, théorème de conjugaison globale d'Herman.

On the local topology of spaces of foliations on closed three-manifolds

Abstract

We are interested in orientable foliations by surfaces on compact orientable three-manifolds without boundary. We prove that two such foliations on a closed orientable three-manifold are homotopic if they are taut and sufficiently close. First of all, we prove a version "with parameter" of a theorem of Thurston according to which foliations of \mathbb{T}^2 can be extended to foliations of the solid torus. In this work we construct such an extension and we use Herman's theorem on conjugacy of circle diffeomorphisms to rotations to ensure that this extension is continuous with respect to the foliations. Then we prove that the space of foliations transverse to a fiber bundle over a closed orientable surface is homotopic to a point. Finally, we establish the announced result by means of an idea of Thurston and the previous results. We deduce consequences on the local topology of foliations by surfaces on closed three-manifolds.

Keywords: taut foliation, homotopy, Reeb component, foliation by surfaces, Herman theorem of global conjugacy.