



HAL
open science

Etude expérimentale et théorique des processus non linéaires de saturation dans un générateur d'ondes thermoacoustique annulaire

Guillaume Penelet

► **To cite this version:**

Guillaume Penelet. Etude expérimentale et théorique des processus non linéaires de saturation dans un générateur d'ondes thermoacoustique annulaire. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2004. Français. NNT: . tel-00008096

HAL Id: tel-00008096

<https://theses.hal.science/tel-00008096>

Submitted on 17 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE

ECOLE DOCTORALE DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE

ACADÉMIE DE NANTES

LE MANS, FRANCE

SPÉCIALITÉ : ACOUSTIQUE

Présentée par

GUILLAUME PENELET

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

ETUDE EXPÉRIMENTALE ET THÉORIQUE DES PROCESSUS NON
LINÉAIRES DE SATURATION DANS UN GÉNÉRATEUR D'ONDES
THERMOACOUSTIQUE ANNULAIRE

soutenue le 10 Novembre 2004 devant le jury composé de

H. BAILLIET, Maître de Conférences, LEA, Université de Poitiers
P. BLANC-BENON, Directeur de Recherche, LMFA, Ecole Centrale de Lyon (Rapporteur)
D. BRUNEAU Maître de Conférences, TREFLE, Université de Bordeaux I
M. BRUNEAU Professeur émérite, LAUM, Université du Maine (Invité)
E. GAVIOT Professeur, LAUM, Université du Maine
V. GUSEV Professeur, LPEC/LAUM, Université du Maine
P. LOTTON Chargé de Recherche, LAUM, Université du Maine (Invité)
P. NIKA Maître de Conférences, FEMTO-ST CREST, Université de Franche Comté (Rapporteur)
E. PLESKA Ingénieur docteur, DGA/DSP/STTC (Invité)

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été effectuée au sein de l'équipe thermoacoustique du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (UMR-CNRS 6613), et a bénéficié d'une bourse de thèse MENRT.

Je tiens d'abord à remercier M. Vitalyi Gusev, Professeur et responsable scientifique de ce travail, qui m'a permis d'effectuer cette thèse dans les meilleures conditions. Malgré ses nombreuses autres responsabilités, il s'est montré toujours disponible, m'a suggéré le sujet et bon nombre d'idées, et a su m'orienter dans les moments cruciaux tout en me laissant une grande autonomie. Qu'il trouve ici l'expression de mon amitié et de ma grande reconnaissance.

M. Michel Bruneau, Professeur émérite, a suivi de près mes travaux de recherche. J'ai profité de la proximité de nos bureaux pour communiquer régulièrement avec lui sur des sujets relatifs à la thermoacoustique mais également sur les "ficelles" du métier d'enseignant-chercheur, bénéficiant par là de sa grande expérience en ce domaine. D'autre part, il s'est toujours montré disponible pour lire attentivement mes documents écrits, et en premier lieu ce mémoire de thèse. Je le remercie grandement de m'avoir fait profiter de ses remarques toujours pertinentes.

M. Pierrick Lotton, Chargé de Recherche du CNRS et responsable de l'équipe qui m'a accueilli, s'est également beaucoup intéressé à mes travaux. Je le remercie pour sa disponibilité et ses conseils avisés.

Grand merci à M. Philippe Blanc-Benon, Directeur de Recherche du CNRS à l'Ecole Centrale de Lyon, et M. Philippe Nika, Professeur à l'Université de Franche Comté, d'avoir accepté d'assumer le travail de rapporteur de ce document, ainsi qu'à Mme et MM. les membres du jury qui ont également accepté de juger ce travail.

Je remercie vivement Mme Claire Gobbé, Professeur au laboratoire TREFLE-ENSAM (Bordeaux), et M. Denis Bruneau, Maître de Conférences au même laboratoire, de m'avoir accueilli pour un séminaire, suivi d'échanges qui m'ont été très profitables. Le concours que m'a apporté depuis lors Denis Bruneau sur la description analytique des transferts thermiques dans le noyau thermoacoustique m'a été également d'une aide précieuse.

J'ai bénéficié de discussions fructueuses avec M. Joël Gilbert, Chargé de Recherche du CNRS et M. Etienne Gaviot, Professeur. Je les remercie vivement pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je remercie la Société Française d'Acoustique et l'International Commission on Acoustics de m'avoir attribué chacune une bourse qui m'a permis de participer au Congrès Français d'Acoustique CFA Lille 2002, et à l'International Conference on Acoustics ICA Kyoto 2004.

J'ai eu le plaisir durant ces trois années d'enseigner en tant que moniteur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans et à la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université du Maine. Je remercie M. Jean-Claude Pascal pour l'aide qu'il m'a apporté à titre de tuteur de monitorat.

Je n'oublie pas les enseignants-chercheurs du LAUM et mes camarades doctorants qui contribuent tous à la bonne ambiance de travail dont j'ai bénéficié au laboratoire, ambiance qui passe bien sûr par d'essentiels moments de détente. Une mention particulière à l'Ours, Grul', Mérouane et Loïc, spécialistes en Sciences du Football qui m'ont fait partager leurs analyses plus ou moins objectives en la matière (allez le MUC!).

Enfin, merci à Céline pour son amour et son soutien de tous les jours.

Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
1 Etude expérimentale du régime transitoire	11
1.1 Dispositif expérimental	12
1.1.1 Résonateur, stack, et échangeur froid	12
1.1.2 Mode de chauffage	13
1.1.3 Instrumentation	15
1.2 Processus de double-déclenchement	15
1.2.1 Mode opératoire	15
1.2.2 Déclenchement "classique" de l'instabilité thermoacoustique	16
1.2.3 Processus de double déclenchement	17
1.3 Influence du mode de chauffage	18
1.3.1 Chauffage externe	19
1.3.2 Chauffage interne	22
1.4 Influence de la convection naturelle	24
1.5 Quelques estimations...	26
1.5.1 Rôle des turbulences acoustiques	27
1.5.2 Rôle du processus de cascade harmonique	28
1.5.3 Rôle des pertes mineures aux extrémités du stack et des échangeurs de chaleur	31
1.6 Conclusions	34
2 Influence de la distribution de température sur l'amplification	35
2.1 Description analytique du processus d'amplification	36
2.1.1 Calcul des coefficients de la matrice de diffusion du noyau thermoacoustique . .	36
2.1.2 Calcul du coefficient d'amplification thermoacoustique	39
2.1.3 Calcul de la distribution du champ acoustique	39
2.2 Influence du régime d'interaction thermoacoustique	40
2.2.1 Démarche suivie	40

2.2.2	Influence du régime d'interaction thermoacoustique sur les conditions de déclenchement	41
2.2.3	Influence du régime d'interaction thermoacoustique sur la distribution du champ acoustique	42
2.3	Influence de la distribution de température	45
2.3.1	Influence de la distribution de température sur le coefficient d'amplification thermoacoustique	45
2.3.2	Influence de la distribution de température sur la distribution du champ acoustique	46
2.4	Discussion	49
3	Modèles analytiques et simulations numériques du régime transitoire	51
3.1	Descriptif du modèle de régime transitoire	52
3.1.1	Equation d'évolution de l'amplitude de pression acoustique	53
3.1.2	Equations du transport de la chaleur	54
3.1.3	Cas d'un chauffage interne	57
3.2	Description des processus non linéaires de saturation	58
3.2.1	Expression analytique de la conductivité thermique acoustiquement induite	58
3.2.2	Modèle simplifié de vitesse du vent acoustique	59
3.2.3	Les processus de cascade harmonique et de pertes mineures	61
3.3	Procédure de calcul du régime transitoire	62
3.3.1	Schéma de résolution	62
3.3.2	Comparaison entre simulations numériques et résultats expérimentaux	63
3.4	Résultats de simulations numériques	65
3.4.1	Résultats de simulations numériques sans prise en compte des effets de cascade harmonique et de pertes mineures	65
3.4.2	Résultats de simulations numériques avec prise en compte des effets de cascade harmonique et de pertes mineures	72
3.5	Discussion	74
3.6	Conclusion	76
4	Description sous forme d'un système d'équations différentielles ordinaires	77
4.1	Description du modèle	78
4.1.1	Réduction du nombre d'équations aux dérivées partielles	78
4.1.2	Transformation des équations aux dérivées partielles en équations différentielles ordinaires	79
4.1.3	Equation d'évolution de l'amplitude de pression acoustique	81
4.1.4	Bilan : description du régime transitoire sous forme d'un flôt dans \mathbb{R}^4	82
4.2	Analyse de stabilité à partir d'une formulation empirique du coefficient d'amplification	83
4.2.1	Expression empirique du coefficient d'amplification thermoacoustique.	84
4.2.2	Analyse du cas de figure où l'effet du vent acoustique est prédominant.	85

4.2.3	Analyse du cas de figure où l'effet de la conductivité thermique acoustiquement induite est prédominant.	90
4.3	Conclusion	92
	Conclusion, perspectives	93
A	Description analytique de l'amplification...	97
B	Description du modèle thermique et calculs des coefficients d'échange	103
B.1	Equations du transport de la chaleur	103
B.1.1	"Ailette" tube inox	104
B.1.2	"Ailette" stack	104
B.1.3	"Ailette" air	105
B.1.4	Conditions aux limites	105
B.2	Estimation des coefficients d'échange	105
B.2.1	Interface (tube inox)-(milieu extérieur). Convection naturelle externe	106
B.2.2	Interface (tube inox)-(air). Convection forcée interne	106
B.2.3	Interface (tube inox)-(stack). Conduction et convection forcée	106
C	Description analytique de la vitesse d'écoulement	109
C.1	Résonateur annulaire vide	109
C.2	Résonateur annulaire équipé d'un stack	110
D	Calcul analytique explicite de α...	113
D.1	Matrice de transfert du noyau thermoacoustique	114
D.2	Matrice de diffusion du noyau thermoacoustique	116
D.3	Coefficient d'amplification thermoacoustique	117
E	Régime transitoire : simulations numériques	119
E.1	Les équations	119
E.2	Méthode de résolution	121
E.3	Convergence des résultats de simulation	123

Introduction

i) Bref rappel historique

Les générateurs d'ondes (ou moteurs) thermoacoustiques sont des résonateurs acoustiques dans lesquels l'interaction des oscillations acoustiques et thermiques au voisinage de parois solides soumises à un fort gradient de température engendre une conversion d'énergie thermique en énergie acoustique. Ce processus d'amplification thermoacoustique suscita l'intérêt de la communauté scientifique dès la fin du 18^e siècle lorsque Byron Higgins réussit à créer des oscillations acoustiques dans un tube grâce à une flamme judicieusement placée sur la paroi d'un résonateur [25]. D'autres réalisations de ce type de machine virent le jour à la fin du 19^e siècle avec le tube de Sondhaus [58] ou le tube de Rijke [50]. La théorie de l'interaction thermoacoustique (entre champs acoustique et thermique) a été décrite de façon générale en 1868 par Kirschhoff, qui introduisit la conduction de la chaleur dans la théorie de la propagation du son. C'est sur la base de ces travaux qu'une première interprétation qualitative du tube de Sondhaus a été donnée par Lord Rayleigh en 1896 [51], qui souligne en particulier que les oscillations de température subies au cours d'un cycle acoustique par une particule de fluide (située au voisinage d'une paroi du résonateur soumise à un fort gradient de température) doivent nécessairement être en retard de phase relativement au déplacement particulaire acoustique pour que le processus d'amplification thermoacoustique se produise.

Dans les années 1960, une étape importante fut franchie lorsque Carter et coll. [15] mirent au point un tube de Sondhaus "optimisé" par l'ajout d'un empilement de plaques (stack) dans le résonateur, permettant ainsi d'accroître significativement l'efficacité de la machine. Ce dispositif, représenté schématiquement sur la Fig. 1, est qualifié à présent de moteur thermoacoustique à ondes stationnaires, puisque le résonateur est le siège d'ondes acoustiques stationnaires. Dans ce système, sous réserve de maintenir le gradient de température au dessus d'un certain seuil d'instabilité, des oscillations acoustiques auto-entretenues de forte amplitude (de l'ordre de 1 à 10% de la pression statique) prennent place dans le résonateur, à la fréquence du mode le plus instable (généralement il s'agit en première approximation du mode longitudinal demi-onde).

Sur la base des découvertes de Carter, des travaux ont été engagés depuis et plusieurs prototypes de moteurs thermoacoustiques ont été réalisés en laboratoire. Parallèlement, Rott (de 1970 à 1990) [52, 53, 56] établit les bases théoriques de la discipline et propose une modélisation analytique de l'instabilité engendrée par l'interaction thermoacoustique dans les tubes de Taconis et de Sondhaus.

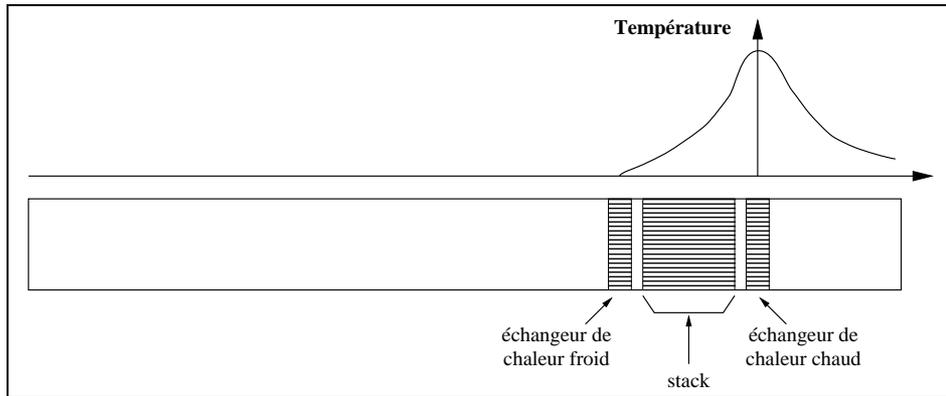


FIG. 1 – Représentation schématique d'un moteur thermoacoustique à ondes stationnaires

Les travaux expérimentaux de Yazaki et coll. [70, 71] en 1980 confirment qualitativement la validité de la théorie de Rott. Depuis le début des années 80, époque à laquelle l'équipe de Greg Swift (voir par exemple [59]) au Los Alamos National Laboratory s'investit dans le domaine, les recherches en thermoacoustique s'intensifient. Car si le processus "moteur thermoacoustique" (conversion d'énergie thermique en énergie acoustique) peut être considéré au premier abord comme une curiosité scientifique, son utilisation en tant que source de travail mécanique (acoustique) pour transférer un flux de chaleur d'une source froide vers une source chaude (par effet thermoacoustique [38]) n'en constitue pas moins un enjeu réel justifiant à lui seul l'apparition de cette nouvelle discipline qu'est la thermoacoustique. En effet, les applications potentielles de ce nouveau type de machines réfrigérantes alliant simplicité (donc faible coût de production), robustesse (pas de pièces mobiles autres que le fluide oscillant) et rendement raisonnable sont multiples (voir par exemple [21]). Reste à ce jour qu'un important effort doit encore être effectué en vue d'optimiser ces machines, effort qui doit notamment porter sur la compréhension des processus non linéaires mis en jeu lors de la saturation de l'onde acoustique dans les moteurs thermoacoustiques.

ii) principe de fonctionnement des systèmes thermoacoustiques

Le processus d'interaction entre fluide et paroi solide donnant lieu à la conversion d'énergie thermique en énergie acoustique met en jeu des processus complexes et nécessite une modélisation précise [10, 29, 56]. Cependant, une approche conceptuelle simplifiée à l'extrême permet d'appréhender les mécanismes mis en jeu dans le dispositif de la Fig. 1. Considérons une particule de fluide située au voisinage d'une paroi solide du stack, le long duquel est imposé un fort gradient de température ∇T (Fig. 2 (a)). La température de cette particule, au repos sous une pression statique donnée P_0 , est imposée par la présence de la paroi (dont l'inertie thermique est supposée très grande devant celle du fluide). Supposons à présent que l'état de cette particule fluctue sous l'effet d'un champ acoustique stationnaire sinusoïdal. Elle prend dès lors un mouvement oscillant sinusoïdal, auquel sont associées des oscillations infinitésimales de pression acoustique $p(t)$ ($p \ll P_0$), en phase avec

le déplacement particulaire acoustique $\xi(t)$ (ou en quadrature de phase avec la vitesse acoustique). Aux oscillations de pression acoustique sont associées des oscillations de température supposées, en première approximation, en phase avec les oscillations de pression acoustique (Fig. 3 (a), trait plein), hypothèse valide si le mouvement de la particule est (quasi) adiabatique. A titre d'exemple (ordres de grandeur), pour une particule d'air soumise en champ libre à une onde acoustique sinusoïdale à la fréquence de 1 kHz, et dont l'amplitude atteint le seuil de douleur de l'oreille humaine ($p_{max} \approx 20 Pa$), l'amplitude des oscillations acoustiques de température atteint $\tau_{max} \approx 10^{-2} K$, pour un déplacement particulaire ξ_{max} de l'ordre de $10^{-5} m$. Pour la clarté de l'exposé, et parce que le propos est ici limité à la compréhension physique des phénomènes fondamentaux mis en jeu, supposons tout d'abord que le mouvement présente non pas un profil temporel sinusoïdal mais un profil carré (cf. Fig. 3 (a), trait tireté). Le cycle suivi par la particule se déroule alors suivant quatre phases distinctes : compression adiabatique-expansion isobare-détente adiabatique-contraction isobare. Les phases de compression-détente sont supposées adiabatiques car suffisamment rapides, tandis qu'aux phases d'expansion et contraction sont associés des transferts de chaleur entre fluide et paroi. Le cycle suivi par la particule présente alors l'allure indiquée sur la Fig. 2 (b)-(e), lorsque le gradient de température ∇T appliqué à la paroi est tel que $\xi_{max} \nabla T > \tau_{max}$. Ainsi, la particule reçoit une quantité de chaleur Q durant sa phase de compression et restitue une quantité de chaleur Q' durant sa phase de détente. Ce même cycle à quatre phases peut être représenté de façon schématique suivant un diagramme de Clapeyron (Fig. 3(b)). Il apparaît alors clairement qu'au cours du mouvement de la particule, une quantité de chaleur $Q - Q'$ a été convertie en un travail mécanique (i.e. en énergie acoustique), représenté par la zone hachurée de la Fig. 3 (b).

Evidemment, le mécanisme d'échange de chaleur entre fluide et paroi est plus complexe que ne le laissent entendre les propos précédents. En réalité, pour comprendre en profondeur le processus réel d'amplification thermoacoustique, une attention particulière doit être portée sur les relations de phase entre oscillations de pression, de vitesse particulaire et de température acoustiques. Comme indiqué précédemment, les variations de température d'une particule de fluide sont liées aux compressions-détentes et à la température locale de la paroi. La distance entre particule de fluide et paroi est dès lors un paramètre important concernant la nature du processus d'échange de chaleur : "loin" de la paroi, le processus est adiabatique et la température acoustique oscille dans le temps en phase avec la pression acoustique ; "à proximité" de la paroi, le processus est isotherme et la température acoustique est imposée à chaque instant par la température locale de la paroi ; mais pour une particule de fluide située à une distance de l'ordre d'une épaisseur de couche limite thermique δ_κ de la paroi, le contact thermique entre particule et paroi est "suffisamment bon" pour qu'un échange de chaleur ait lieu, mais "suffisamment mauvais" pour que cet échange de chaleur se traduise non pas par un changement instantané de la température du fluide, mais par un retard, ou plus précisément par un déphasage, entre mouvement acoustique et transfert de chaleur ($\delta_\kappa = \sqrt{2\kappa/\omega}$, où κ et ω désignent respectivement la diffusivité thermique du fluide et la pulsation acoustique). C'est bel et bien ce déphasage entre oscillations de température et de pression acoustique qui est responsable de la conversion d'énergie, et le cycle suivi par la particule est alors analogue au schéma de la Fig. 3(c). En résumé, seules les particules

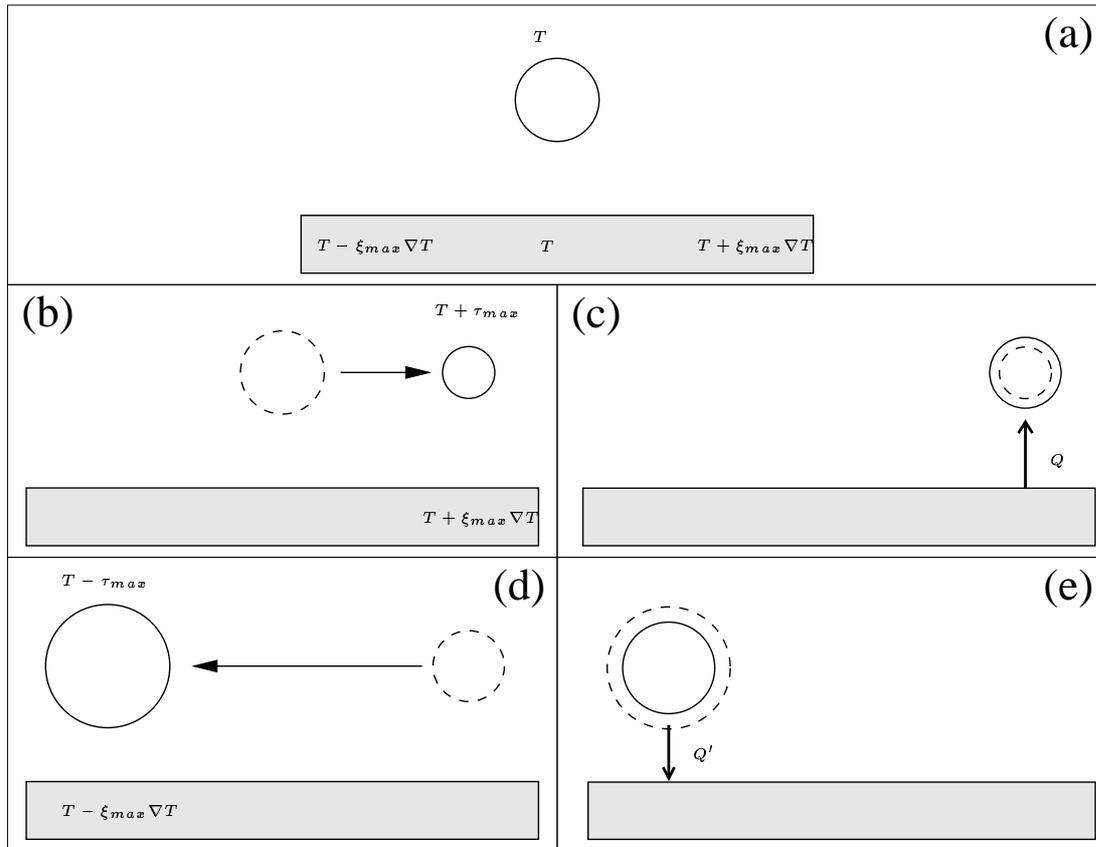


FIG. 2 – Cycle moteur suivi par une particule de fluide sous l'effet d'une onde acoustique stationnaire au voisinage d'une paroi soumise à un gradient de température ∇T . (a) particule initialement au repos. (b) compression adiabatique. (c) expansion isobare. (d) détente adiabatique. (e) contraction isobare.

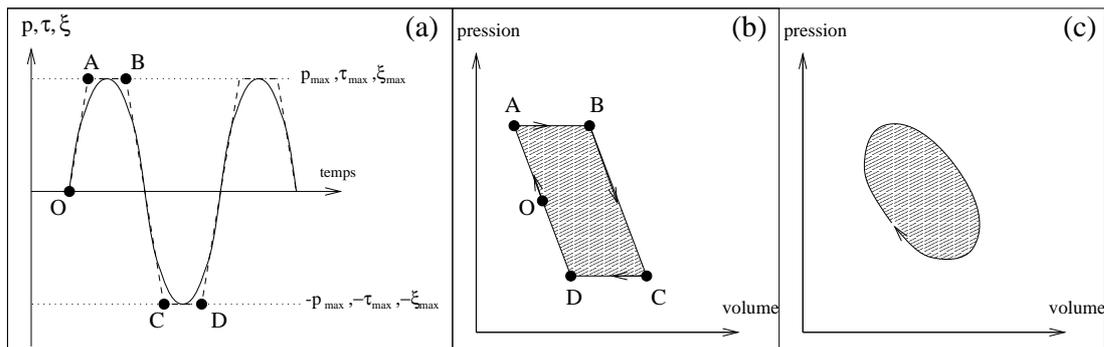


FIG. 3 – (a) évolutions temporelles sinusoïdale (trait plein) et "articulée" (trait tiretée) des variables de pression, température et déplacement acoustiques p, τ, ξ pour une onde acoustique stationnaire. Les points O,A,B,C,D correspondent respectivement aux états (a),(b),(c),(d) et (e) de la Fig. 2. (b) Diagramme de Clapeyron au cours d'un cycle acoustique "articulé". (c) Diagramme de Clapeyron "réel".

de fluide situées à une distance de l'ordre d'une épaisseur de couche limite thermique contribuent à la conversion d'énergie thermoacoustique. On comprend dès lors aisément pourquoi l'emploi d'un stack dont les pores (i.e. la distance inter-parois) sont correctement dimensionnés relativement à la distance δ_κ permet d'optimiser le processus de conversion thermoacoustique en maximisant la proportion de fluide "efficace".

Enfin, pour conclure cette présentation phénoménologique de l'effet thermoacoustique rappelons que l'interaction thermoacoustique peut être mise en oeuvre pour réaliser le fonctionnement en "pompe à chaleur". En effet, il apparaît directement au regard du cycle schématisé de la Fig. 2, que si le gradient de température appliqué le long de la paroi est tel que $\xi_{max}\nabla T < \tau_{max}$, le sens des transferts de chaleur s'en trouvera alors inversé, tout comme le sens des cycles des Fig. 3 (b) et (c). Au cours d'un cycle, du travail acoustique est alors consommé pour transférer de proche en proche un flux de chaleur thermoacoustique d'une extrémité du stack à l'autre (ici, de gauche à droite), de sorte qu'un gradient de température s'établit et se maintient le long du stack.

iii) Etat de la recherche sur les processus non linéaires de saturation de l'instabilité thermoacoustique

Les quantités mises en jeu dans la description du mouvement acoustique sont la pression P , la vitesse particulaire \vec{V} , la masse volumique ρ , la température T et l'entropie S , et chacune de ces variables peut être décomposée suivant sa composante statique (ordre 0) et sa composante acoustique (ordre 1) oscillant à la pulsation ω :

$$P(x, y, z, t) = P_0(x, y, z) + p(x, y, z)e^{i\omega t} + o(p), \quad (1)$$

$$\vec{V}(x, y, z, t) = \vec{V}_0(x, y, z) + \vec{v}(x, y, z)e^{i\omega t} + o(\vec{v}), \quad (2)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(x, y, z) + \rho(x, y, z)e^{i\omega t} + o(\rho), \quad (3)$$

$$T(x, y, z, t) = T_0(x, y, z) + \tau(x, y, z)e^{i\omega t} + o(\tau), \quad (4)$$

$$S(x, y, z, t) = S_0(x, y, z) + s(x, y, z)e^{i\omega t} + o(s), \quad (5)$$

où les quantités P_0 , \vec{V}_0 , ρ_0 , T_0 , S_0 sont supposées constantes dans le temps à l'échelle d'une période acoustique. C'est en introduisant ces variables dans les équations fondamentales du mouvement (i.e. équation de Navier-Stokes, équation de conservation de la masse, équation de Fourier, équation d'état du fluide...) et en ne retenant que les termes du premier ordre que Nikolas Rott [56] a décrit analytiquement dans les années 70 l'interaction thermoacoustique d'un fluide oscillant au voisinage d'une paroi solide. Il s'agit là de la théorie linéaire générale relative aux machines thermoacoustique, qui, comme son nom l'indique, consiste à linéariser les équations du mouvement à l'ordre des quantités acoustiques (quantités du premier ordre).

Si l'établissement de la théorie linéaire générale des machines thermoacoustique (générateurs d'onde et pompes à chaleur) remonte aux travaux de Rott, les premières contributions remarquables portant précisément sur les conditions de déclenchement de l'onde acoustique dans un moteur thermoacoustique

à ondes stationnaires sont celles de divers auteurs [23, 31, 49], mais en premier lieu celles d'Atchley [2, 3, 4]. Ce dernier propose un modèle analytique simple, permettant de définir un facteur de qualité du système qui tend vers l'infini dès lors que l'amplification thermoacoustique prenant lieu dans le stack compense les pertes visqueuses et thermiques dans l'ensemble du dispositif, condition de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique.

Depuis maintenant une dizaine d'années, un important effort de recherche est consacré à l'étude des processus physiques mis en jeu après le déclenchement de l'instabilité thermoacoustique, et qui sont responsables de la saturation en amplitude de l'onde acoustique. Puisque la génération d'une onde acoustique par effet thermoacoustique se produit sous réserve que l'amplification dans le stack compense les pertes linéaires dans le reste du dispositif (pertes viscothermiques prises en compte dans les équations du mouvement linéarisées), la saturation consécutive de l'onde acoustique se produit nécessairement en raison d'autres types de pertes qui ne sont pas prises en compte dans l'approximation de l'acoustique linéaire, mais qui sont présentes en tant que quantités du second ordre (et plus) dans les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus et dans l'équation d'état du fluide. Ainsi, l'étude complète des moteurs thermoacoustiques, depuis la génération de l'onde jusqu'à sa saturation, entre dans le cadre de l'acoustique non linéaire.

De nos jours, un certain nombre de mécanismes non linéaires ont pu être qualifiés comme "éligibles" pour expliquer la saturation de l'onde acoustique dans les moteurs thermoacoustiques. Outre le processus classique de cascade harmonique (transfert énergétique du fondamental vers les harmoniques supérieurs), étudié tant expérimentalement [1, 60] que de façon théorique [23, 32, 76], les rôles éventuels des turbulences acoustiques dans le guide d'onde, ou des pertes mineures (génération de tourbillons) aux extrémités du stack et des échangeurs de chaleur [37, 60] sont également envisagés pour expliquer le phénomène de saturation. Par ailleurs, l'excitation d'ondes acoustiques dans un champ de température inhomogène peut induire des processus tendant à réduire le gradient de température imposé. L'un de ces processus que l'on désignera ici par le terme de "conductivité thermique acoustiquement induite" [55, 72] se traduit par un transfert global de chaleur (d'origine thermoacoustique) de l'extrémité chaude du stack vers son extrémité froide, modifiant la distribution de température et influençant de ce fait l'amplification thermoacoustique. Cet effet de pompage de chaleur est illustré sur la Fig. 2, où il apparaît qu'une quantité de chaleur Q' a été transportée de droite à gauche durant un cycle (la quantité de chaleur $Q - Q'$ ayant été convertie en énergie acoustique). Des recherches sont également menées [9, 64] sur le rôle des écoulements redressés dont une première image fut donnée en 1998 [74] dans un moteur à ondes stationnaires. Ce processus physique, parfois dénommé "vent acoustique", se produit pour des niveaux acoustiques élevés et se traduit par la génération d'un écoulement moyen du fluide généré par des processus acoustiques non linéaires divers [54, 57] prenant place dans les couches limites acoustiques à proximité des parois du résonateur (ou du stack). A titre d'exemple, l'allure des lignes de courant du vent acoustique dans un résonateur demi-onde (sans stack) est présenté sur la Fig. 4.

iv) Objectif du travail de thèse, plan du mémoire

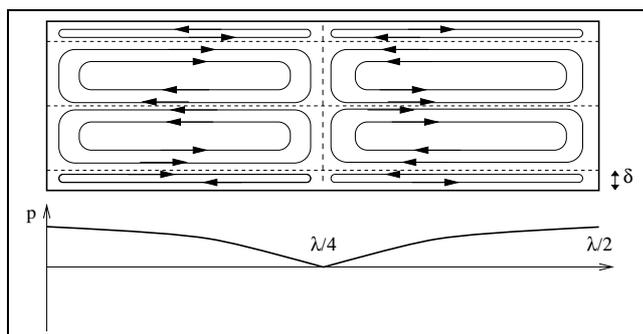


FIG. 4 – Lignes de courant relatives à l'écoulement redressé dans un résonateur acoustique demi-onde. Les quantités δ , p , et λ désignent respectivement l'épaisseur de couche limite thermovisqueuse, l'amplitude de pression acoustique, et la longueur d'onde acoustique.

Notons que tous les travaux précédemment cités portent sur des systèmes à ondes stationnaires. Un autre type de moteur a été proposé en 1979 par Ceperley [16, 17], dont l'idée consiste à placer le stack dans un résonateur annulaire (Fig. 5). L'intérêt d'une telle configuration est qu'elle permet le développement d'ondes progressives, et, suivant l'analyse qualitative faite par l'auteur, elle s'avère prometteuse en termes de rendement. Cependant les tentatives infructueuses de Ceperley pour faire fonctionner un prototype expérimental ont pour un temps laissé l'idée dans l'oubli. Ce n'est que récemment (1998) que Yazaki et coll. [73] ont publié les tout premiers résultats expérimentaux obtenus sur un prototype de générateur thermoacoustique annulaire, confirmant que le gradient de température nécessaire au déclenchement de l'onde acoustique est plus faible dans ce système que dans un système à ondes stationnaires "équivalent". Un an plus tard, Backhaus et coll. [8] construisent un prototype de machine de Stirling couplant un résonateur au système annulaire, et qui permet d'atteindre un rendement égal à 42% de celui de Carnot. Ils montrent à l'aide du code de simulation DeltaE [59] que la phase entre pression et vitesse acoustique dans un tel système est celle d'une onde progressive. Reste que ces auteurs ne proposent pas de modélisation des générateurs d'ondes thermoacoustique annulaires, tant en ce qui concerne le seuil et la fréquence de déclenchement que la saturation de l'onde par effet non linéaire. C'est face à ce constat que Stéphane Job a débuté en 1998 une thèse au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine portant sur l'étude théorique et expérimentale d'un moteur thermoacoustique annulaire [29], sous la responsabilité de Vitalyi Gusev. Sur la base des travaux théoriques menés par Rott [52, 53, 56] et Gusev et coll. [23], un modèle analytique adapté au système annulaire a été développé, à partir duquel le seuil et la fréquence de déclenchement ont été obtenus de façon analytique, puis calculés numériquement. Un prototype de moteur thermoacoustique annulaire a été réalisé, qui a permis de confirmer par l'expérience les résultats analytiques et numériques, notamment ceux obtenus pour le seuil de déclenchement.

Les travaux présentés dans ce mémoire qui font suite à ceux engagés par Stéphane Job et Vitalyi Gusev, portent plus précisément sur les processus non linéaires responsables de la saturation en amplitude de l'onde acoustique dans un moteur thermoacoustique annulaire. Ces processus non linéaires (cascade harmonique, pertes mineures, turbulence, conductivité acoustiquement induite...) étudiés

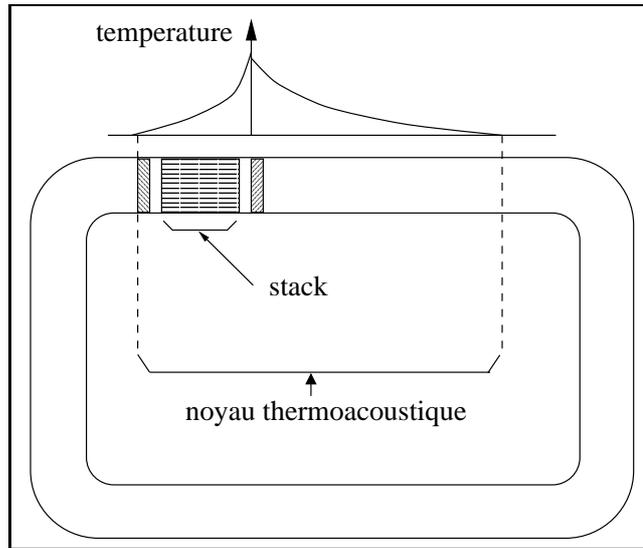


FIG. 5 – Représentation schématique d'un moteur thermoacoustique annulaire

préférentiellement pour des systèmes à ondes stationnaires jouent a priori un rôle important dans un dispositif à ondes progressives. Une différence notable doit être cependant soulignée; elle concerne l'excitation d'un écoulement redressé selon que le résonateur acoustique est de type "fermé" (Fig. 1) ou bien "bouclé" (Fig. 5). En effet, alors que la géométrie du résonateur acoustique de la Fig. 1 impose que le flux massique de l'écoulement redressé moyenné sur une section du tube soit nul (conformément à la Fig. 4), la géométrie annulaire du résonateur de la Fig. 5 n'impose en revanche pas cette condition. Une première étude sur les conditions dans lesquelles un vent acoustique de flux massique non nul peut être générée dans un cryogénérateur à ondes pulsées fut proposée en 1997 par Gedeon [22], et mise en évidence expérimentalement par Swift et coll. en 1999 [61]. La théorie relative à la génération d'un écoulement redressé dans un moteur thermoacoustique annulaire fut développée par Gusev et coll. [24], établissant que l'écoulement moyen de fluide dirigé (dans le stack) de la source froide vers la source chaude modifie la distribution de température dans le noyau thermoacoustique, influençant de ce fait le processus d'amplification et de saturation de l'onde (voir Fig.6). La présence effective de cet écoulement redressé a été mise en évidence expérimentalement par Job et coll. [30], et sa vitesse moyenne a été estimée en régime stationnaire par la modification de la distribution de température induite. Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec les résultats théoriques prévus par le modèle développé par Gusev et coll. [24].

Reste qu'à l'heure actuelle, il n'existe pas à notre connaissance de modèle permettant de déterminer la contribution de chacun des processus non linéaires à la saturation de l'onde dans un moteur thermoacoustique annulaire. C'est pour palier à cette absence de modèle que les travaux présentés dans ce mémoire ont été engagés. Etant donné la complexité et la diversité des processus mis en jeu, l'objectif affiché peut paraître ambitieux. Néanmoins, l'initiation de cette étude repose sur le constat que peu de travaux ont été effectués (ou tout du moins publiés) sur la dynamique du régime transitoire

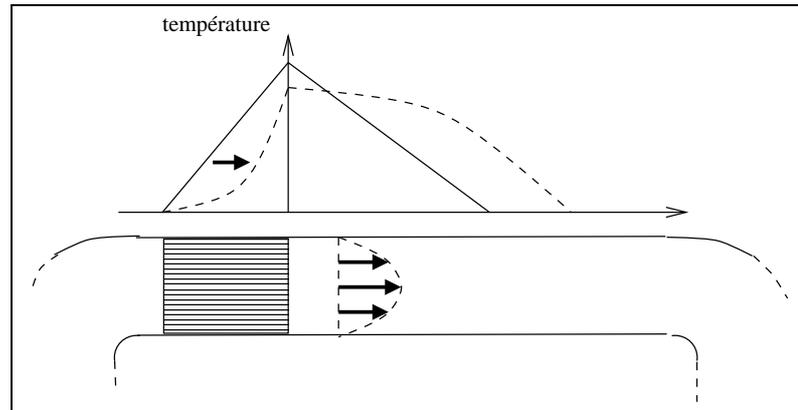


FIG. 6 – Représentation schématique de l'influence du vent acoustique sur le champ de température dans un moteur thermoacoustique annulaire.

depuis le déclenchement de l'onde acoustique jusqu'à sa saturation par effets non linéaires. On peut raisonnablement penser que les temps caractéristiques de développement en régime transitoire de chacun des processus mis en jeu diffèrent suivant la nature du processus même. En d'autres termes, alors qu'en régime stationnaire l'ensemble des processus non linéaires agissent en parallèle (simultanément), l'étude du régime transitoire doit pouvoir nous fournir des informations précieuses sur l'influence propre de chacun des mécanismes de saturation de l'onde (qui pourraient agir de façon séquentielle).

Le chapitre 1 a pour objet de donner accès à un ensemble de résultats expérimentaux obtenus ces dernières années au LAUM concernant le régime transitoire de déclenchement et de saturation de l'instabilité thermoacoustique. Les résultats obtenus mettent en évidence que le régime transitoire suit une dynamique très complexe, probablement contrôlée par plusieurs processus non linéaires. De plus, à partir de modèles simples, nous montrons que les processus classiques de cascade harmonique, de turbulences acoustiques et de pertes mineures ne peuvent pas suffire à expliquer la nature des régimes observés, et que par conséquent les processus non linéaires d'interaction entre champ acoustique et champ de température doivent être pris en compte.

Dans le chapitre 2, une étude analytique est proposée, par laquelle le processus d'amplification dans un moteur thermoacoustique annulaire peut être décrit pour une distribution de température quelconque dans le stack (partie "active" du noyau thermoacoustique) et/ou dans la partie du guide d'onde inhomogène en température (partie "passive" du noyau thermoacoustique). Cette étude, motivée par les observations expérimentales qui montrent des variations significatives du champ de température au cours du régime transitoire, a pour objectif de comprendre pourquoi et comment la forme du champ de température influence le processus d'amplification thermoacoustique. Les résultats obtenus montrent qu'en plus du gradient moyen de température aux extrémités du stack, la forme du champ de température, notamment dans la partie passive du noyau thermoacoustique, influence effectivement de façon significative le processus d'amplification thermoacoustique.

Dans le chapitre 3, un modèle analytique décrivant le régime transitoire depuis le déclenchement de

l'instabilité thermoacoustique jusqu'à saturation par effets non linéaires d'interaction entre champ de température et champ acoustique est proposé. Dans ce modèle l'équation d'évolution de l'amplitude de pression acoustique est couplée aux équations décrivant les transferts thermiques par des facteurs qui prennent en compte les processus de conductivité acoustiquement induite et de vent acoustique. Les régimes transitoires, obtenus de façon numérique, sont en bon accord avec les résultats expérimentaux non seulement sur le plan qualitatif mais aussi sur le plan quantitatif.

Dans le chapitre 4, tirant parti des enseignements des chapitres précédents, la description analytique du régime transitoire est simplifiée à l'extrême. Dans l'approche développée, la distribution du champ de température dans le noyau thermoacoustique, élément essentiel à la description du processus d'amplification, est décrite par seulement trois paramètres (à savoir l'écart de température entre les deux extrémités du stack, et deux longueurs caractéristiques représentatives de la forme du champ de température) dont les variations prennent en compte l'ensemble des transferts thermiques conducto-convectifs. De la sorte, le problème se réduit à un système non linéaire d'équations différentielles ordinaires, dont la résolution permet de retrouver qualitativement les résultats expérimentaux et numériques des chapitres précédents. L'approche développée ici permet de confirmer le rôle essentiel joué par le vent acoustique et la conductivité acoustiquement induite dans la nature des régimes transitoires observables, mais également d'avancer dans la description conceptuelle des processus physiques mis en jeu.

Au fil de ce mémoire, divers renvois en annexe sont proposés. Ces annexes comportent des détails de calculs qui ne sont pas essentiels à la lecture du mémoire, mais qui sont cependant utiles pour un examen approfondi du travail présenté.

Chapitre 1

Etude expérimentale du régime transitoire

Bien que toute expérience effectuée sur un moteur thermoacoustique implique nécessairement l'observation d'un régime transitoire, la description du régime d'amplification et de saturation de l'onde acoustique n'apparaît que très peu dans la littérature [13, 37, 60, 69, 77]. Le résultat classique observé dans des systèmes à ondes stationnaires montre une amplification exponentielle suivie d'une saturation lente [37, 69]. Cependant, des processus plus complexes ont été signalés. Dans ses expériences sur un prototype de moteur thermoacoustique à ondes stationnaires renfermant de l'Helium gazeux sous une pression statique de l'ordre de 10 bars, Swift [60] rapporte que lorsque le mode de chauffage est tel que le seuil de déclenchement est traversé lentement, le déclenchement de l'instabilité thermoacoustique est alors suivi d'une modulation périodique d'amplitude de l'onde acoustique (période de l'ordre de la dizaine de seconde). Il rapporte également que l'amplitude de ces oscillations basse-fréquence de la pression acoustique efficace croît elle-même exponentiellement, jusqu'à ce qu'au bout de quelques minutes les oscillations s'arrêtent. Le moteur thermoacoustique suit alors un régime de déclenchements et arrêts successifs, dont la période est de l'ordre de plus d'une heure. Swift précise également que lors de ce régime de déclenchements et arrêts successifs, la mesure de température au niveau de l'extrémité chaude du stack indique une forte diminution de température dès lors que les oscillations acoustiques atteignent un niveau suffisant (environ 1 bar). Ce régime de déclenchement et arrêts successifs a également été observé par Zhou et coll. [77] sur un dispositif analogue. On peut enfin citer les travaux de Chen et coll. [18], portant sur le caractère hystérétique du déclenchement et de l'arrêt de l'onde acoustique dans un moteur à ondes stationnaires. Les résultats expérimentaux présentés par ces derniers montrent que le gradient de température seuil nécessaire au déclenchement de l'instabilité (lorsque l'on augmente progressivement la puissance thermique fournie à l'échangeur de chaleur chaud) est généralement plus élevé que le gradient de température à partir duquel l'onde acoustique s'éteint lorsque l'on diminue progressivement la puissance thermique fournie à l'échangeur chaud.

Il semble donc qu'aucune étude systématique n'ait été menée, voire même ne soit programmée, sur ce sujet dans les groupes de recherche en thermoacoustique de par le monde. C'est la raison pour laquelle, au-delà de l'intérêt scientifique et plus tard technique, qu'une étude détaillée du régime transitoire dans un moteur thermoacoustique annulaire est menée au LAUM. L'objet du présent chapitre est de

montrer par l'expérience que le déclenchement de l'onde acoustique peut donner lieu à des dynamiques de régimes transitoires variées, tels qu'un processus de double-déclenchement de l'onde acoustique avant saturation finale ou qu'un régime de déclenchements et arrêts périodiques et que, au terme de l'analyse des données expérimentales, les processus non linéaires influençant la distribution de température dans le noyau thermoacoustique jouent probablement un rôle important dans la nature des régimes transitoires observés.

1.1 Dispositif expérimental

1.1.1 Résonateur, stack, et échangeur froid

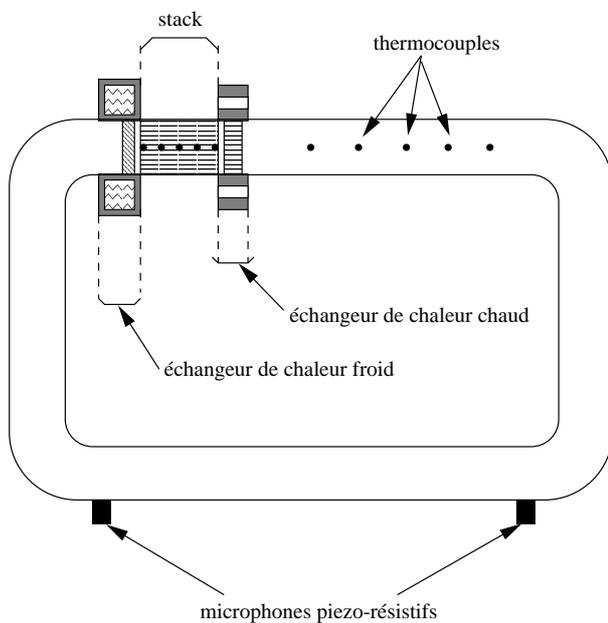


FIG. 1.1 – Schéma du prototype expérimental instrumenté

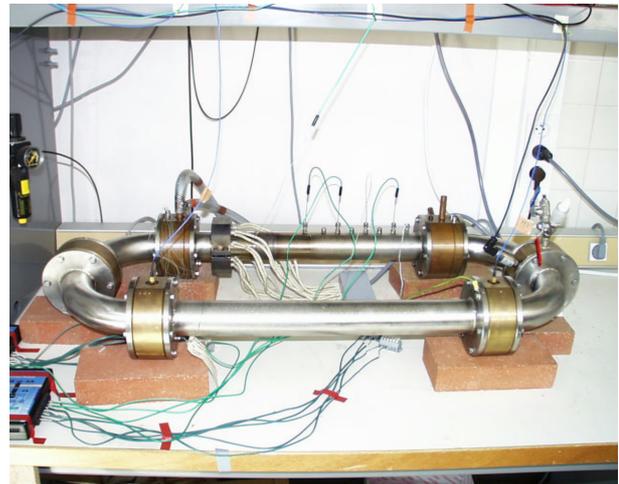


FIG. 1.2 – Photographie du prototype expérimental instrumenté

Un schéma et une photographie du dispositif expérimental sont présentés sur les Fig. 1.1 et 1.2. Un guide d'onde annulaire en acier inoxydable de diamètre interne $D = 53 \text{ mm}$ et de longueur totale $L = 2.24 \text{ m}$ renferme de l'air sous pression atmosphérique. Le stack (Fig 1.3.) est un matériau poreux en céramique de cordiérite, dont les pores à section carrée ont une arête de 0.9 mm . Pour que le processus de conversion d'énergie thermoacoustique soit optimal, les dimensions des pores du stack doivent être choisies en fonction des dimensions du résonateur (c'est à dire en fait en fonction de la fréquence de résonance qui doit être générée dans le guide d'onde), et de manière telle que le rayon géométrique d'un pore soit du même ordre de grandeur qu'une épaisseur de couche limite acoustique. Ici, la distance entre deux parois d'un pore du stack en regard l'une de l'autre correspond approximativement à 4 fois l'épaisseur de la couche limite thermique $\delta_\kappa = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}$ où κ et ω désignent respectivement la diffusivité

thermique de l'air à température ambiante sous pression atmosphérique et la pulsation acoustique du mode fondamental, généralement le plus instable ($\omega = \frac{2\pi a_c}{L}$, $a_c \approx 342 \text{ms}^{-1}$ désignant la célérité adiabatique du son à température ambiante).

Par ailleurs, deux stacks du même matériau mais de longueurs différentes sont utilisés (15 *cm* pour le premier, et 5 *cm* pour le second). Enfin, l'échangeur de chaleur froid est constitué d'une part d'une pièce creuse en cuivre, de diamètre interne ajusté à celui du guide d'onde et à l'intérieure de laquelle circule de l'eau à température ambiante, et d'autre part d'une grille de cuivre en contact direct avec l'extrémité du stack permettant le transfert de chaleur par conduction vers le milieu extérieur (Fig. 1.4).

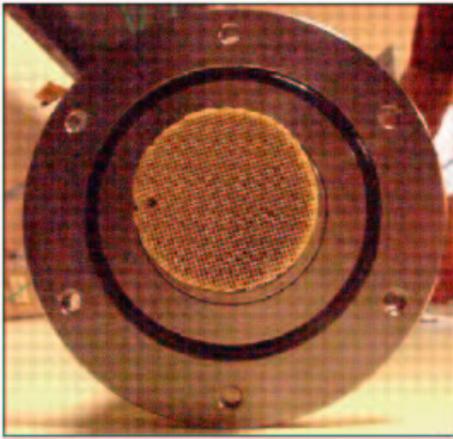


FIG. 1.3 – Stack partiellement inséré dans le guide d'onde.

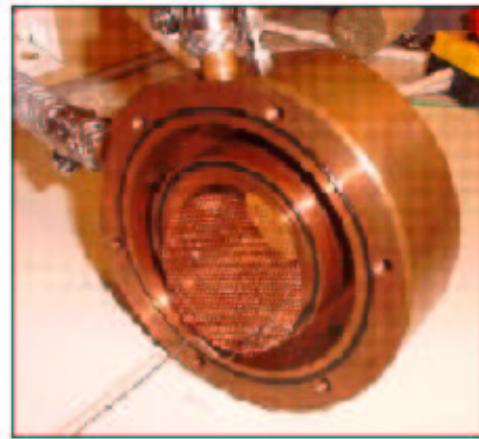


FIG. 1.4 – Echangeur de chaleur froid.

1.1.2 Mode de chauffage

Deux types d'échangeurs de chaleur chaud ont été utilisés, qui donnent lieu à des régimes transitoires bien distincts. Le premier est constitué d'une part d'une pièce en inox ajustée au diamètre externe du tube (Fig. 1.5) dans laquelle sont insérées huit résistances chauffantes alimentées par un bloc thyristor, et d'autre part d'un enroulement d'un ruban d'inox (25 mm de largeur) placé dans le guide d'onde à une distance de 2 mm de l'extrémité du stack, et dont le rôle est de faciliter le transfert de chaleur à l'intérieur du guide d'onde (Fig. 1.6). Avec cet échangeur de chaleur chaud, deux modes de chauffage sont envisageables : celui qui assure, par commande "manuelle", un simple incrément de puissance électrique, et celui qui assure un asservissement en température, grâce à un thermocouple de référence placé entre le tube et la pièce chauffante (Fig 1.5.) et relié à un régulateur qui donne la consigne de puissance au bloc thyristor.

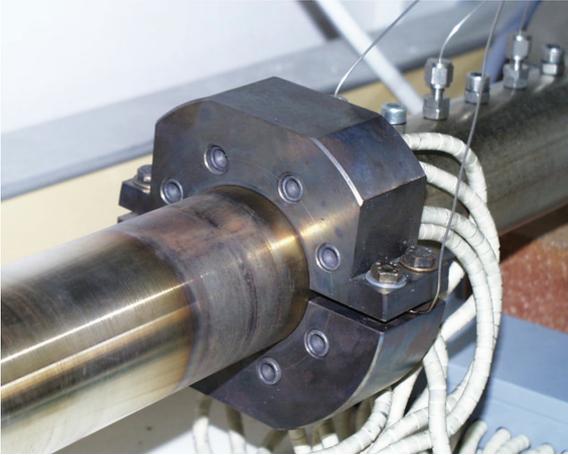


FIG. 1.5 – Echangeur de chaleur chaud. On peut notamment distinguer 6 des 8 cartouches chauffantes insérées dans le bloc d'inox, ainsi que la sonde de température insérée entre ce bloc et le guide d'onde, permettant un asservissement en température.

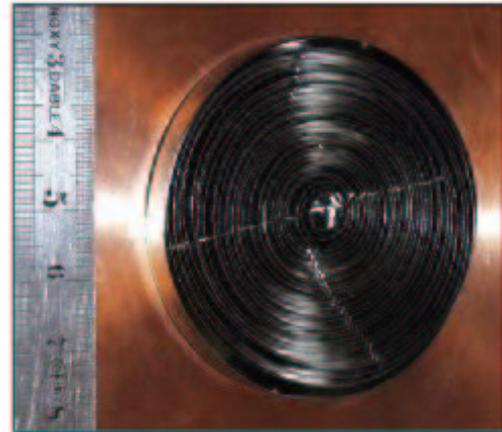


FIG. 1.6 – Enroulement d'un ruban d'inox, placé dans le tube au droit de l'échangeur de chaleur chaud, pour faciliter le transfert de chaleur à l'intérieur du guide d'onde.

Le second type d'échangeur de chaleur est placé directement dans le tube, à 5 mm de l'extrémité du stack (Fig. 1.7). C'est une galette du même matériau que le stack, servant d'ossature pour le passage d'un fil de Nichrome (matériau de forte résistance électrique couramment utilisé comme résistance chauffante, notamment dans les grille-pains) dans lequel est dissipée la puissance électrique provenant du bloc thyristor. La galette de céramique poreuse est entourée d'une couche de fibre de verre, afin de réduire le transfert de chaleur radial vers les parois du tubes pour privilégier le transfert de chaleur vers le stack.

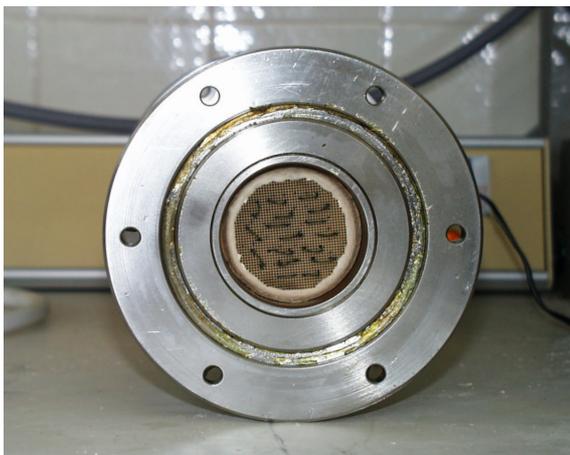


FIG. 1.7 – L'échangeur de chaleur chaud constitué d'un fil de Nichrome enroulé dans une ossature en céramique

1.1.3 Instrumentation

L'instrumentation du dispositif expérimental est présentée succinctement sur la Fig. 1.1. Deux microphones piezo-résistifs (sensibilité de l'ordre de $40\mu V/Pa$), affleurant à la paroi interne du tube, permettent de mesurer la fréquence et l'amplitude des oscillations de pression acoustique. Huit thermocouples très fins ($70\mu m$ de diamètre) disposés régulièrement le long du stack (Fig. 1.8.) sur son axe médian donnent accès à la mesure de la distribution de température dans le stack. Chaque jonction thermoélectrique est insérée dans une bandelette de cuivre puis collée sur le stack à l'aide d'une pâte en céramique (les bandelettes permettent d'assurer une condition isotherme entre le support céramique et la jonction). Afin d'étudier une éventuelle inhomogénéité de la distribution de température radiale, deux thermocouples supplémentaires sont placés respectivement à 10 et 20 mm de l'axe médian. Cette instrumentation a été mis en oeuvre sur les deux stacks utilisés (5 cm et 15 cm). L'ensemble des capteurs est connecté à une carte d'acquisition pour l'enregistrement et le traitement des données.

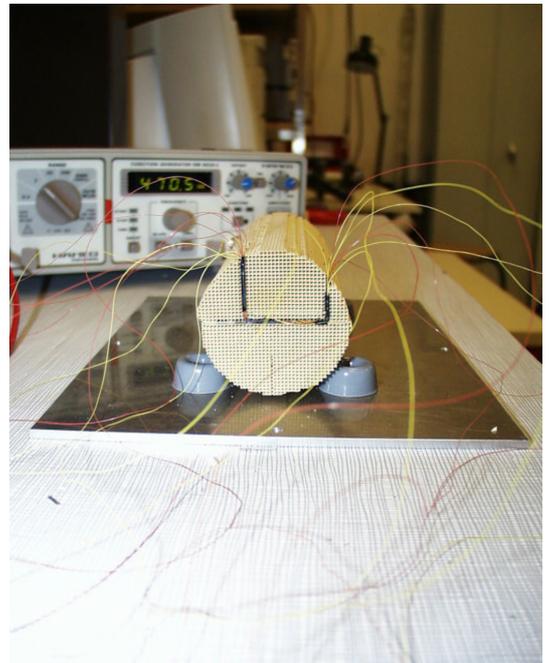
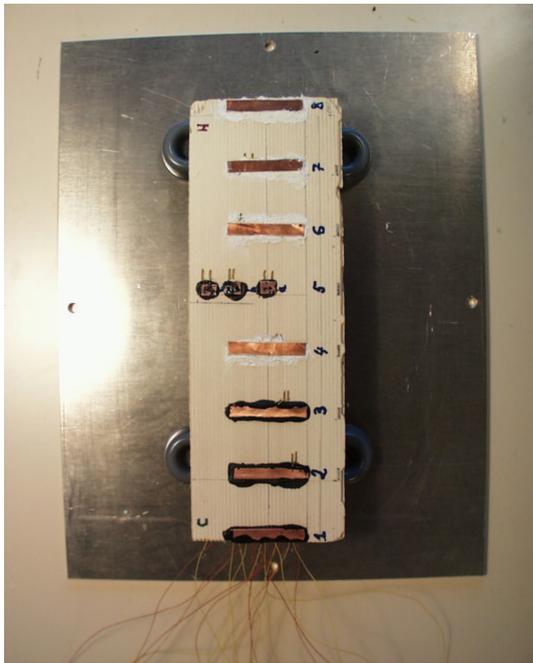


FIG. 1.8 – Dispositif de mesure de température dans le stack. Des thermocouples très fins ($70\mu m$ de diamètre) sont disposés régulièrement le long du stack sur son axe médian (figure de gauche). Le stack est ensuite réassemblé (figure de droite) et inséré dans le guide d'onde.

1.2 Processus de double-déclenchement

1.2.1 Mode opératoire

Dans les expériences présentées ci-dessous, le guide d'onde renferme de l'air sous pression atmosphérique et la longueur du stack instrumenté est de 15 cm. Le mode de chauffage retenu est un chauffage

externe (premier type d'échangeur de chaleur chaud) régulé par asservissement de la température du thermocouple de référence situé entre la paroi externe du guide d'onde et la pièce chauffante en inox, la température à l'extrémité froide étant maintenue constante grâce à l'échangeur de chaleur froid. Pour chacune des mesures effectuées, le gradient de température $T_H^{ref} - T_C$ est initialement fixé juste au-dessous de sa valeur critique correspondant au déclenchement de l'instabilité thermoacoustique. Un incrément de 1 K sur le paramètre de contrôle T_H^{ref} est alors suffisant pour qu'une onde acoustique soit générée dans le guide d'onde. Notons qu'avant chaque mesure, il convient d'attendre que l'équilibre thermique soit établi dans l'ensemble du dispositif.

1.2.2 Déclenchement "classique" de l'instabilité thermoacoustique

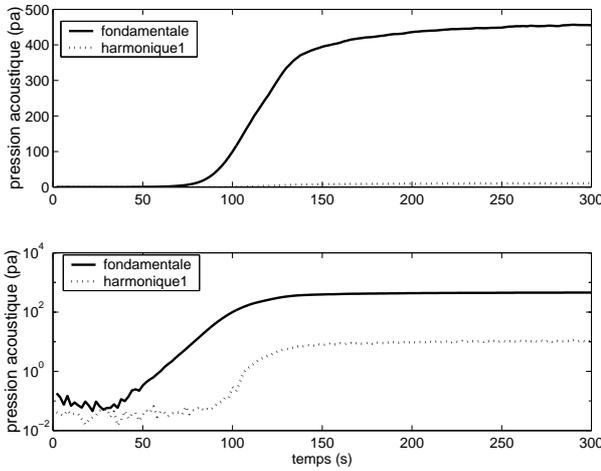


FIG. 1.9 – Amplitude efficace de la pression acoustique du mode fondamental (trait plein) et du premier harmonique (pointillés) au cours du déclenchement et de la stabilisation de l'onde acoustique, représentée sur des échelles linéaires et logarithmiques. Ce régime transitoire est obtenu pour un incrément ΔT de 7 K au dessus du gradient de température seuil.

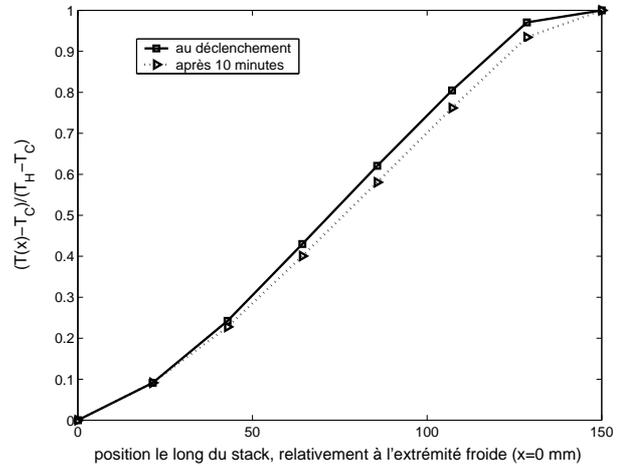


FIG. 1.10 – Distribution de température normalisée $(T(x) - T_C)/(T_H - T_C)$ le long du stack à deux instants au cours du régime transitoire (\square : au déclenchement, \blacktriangle : dix minutes après le déclenchement). L'axe des x représente la distance relative à l'extrémité froide du stack, exprimée en mm.

La figure 1.9 présente ce qu'il convient d'appeler un déclenchement "classique" de l'instabilité thermoacoustique [37, 69]. L'amplitude efficace de la pression acoustique y est représentée en fonction du temps sur des échelles linéaire (courbes du haut) et logarithmiques (courbes du bas). Les courbes en trait plein correspondent à l'amplitude de la pression acoustique efficace du mode fondamental, dont la fréquence mesurée $f_1 \approx 153\text{Hz}$ reste proche de la fréquence $f = \frac{ac}{L} = 152.7\text{Hz}$ du mode fondamental du résonateur annulaire sans stack à température ambiante. Au cours de ce régime transitoire, l'amplification exponentielle de l'amplitude de l'onde acoustique est suivie par un régime de stabilisation de l'onde. L'amplitude du premier harmonique de fréquence $f_2 \approx 306\text{Hz}$, représentée

en traits pointillés sur la Fig. 1.9., est en régime stationnaire de l'ordre de 2% de celle du fondamental.

La distribution de température dans le stack associée au régime transitoire de la Fig. 1.9 est présentée en Fig. 1.10. Cette distribution de température est normalisée et tracée à deux instants distincts du régime transitoire, i.e. au déclenchement (trait plein) et dix minutes plus tard (pointillés). On peut voir distinctement une évolution de la distribution de température dans le stack au cours du temps, évolution dont l'origine est attribuable aux processus non linéaires d'interaction entre champs acoustique et thermique, i.e. convection forcée due à l'excitation d'un vent acoustique et/ou conductivité thermique acoustiquement induite.

1.2.3 Processus de double déclenchement

Si les résultats présentés en Figs. 1.9 et 1.10 sont pour le moins classiques, une dynamique de régime transitoire plus surprenante a également été observée. Il s'agit d'un processus de "double déclenchement" au cours duquel l'amplitude de l'onde acoustique suit deux phases d'amplification exponentielle bien distinctes au cours du régime transitoire, comme le montrent les courbes de la Fig. 1.11. On remarque en effet que pour de faibles incréments de température ΔT au dessus du seuil de déclenchement (courbes en trait plein et en pointillés), l'onde acoustique subit une première phase d'amplification exponentielle, suivie d'une phase de quasi-stabilisation dont la durée est inversement proportionnelle à l'incrément ΔT , puis d'une nouvelle phase d'amplification exponentielle avant la saturation finale de l'onde par effets non linéaires.

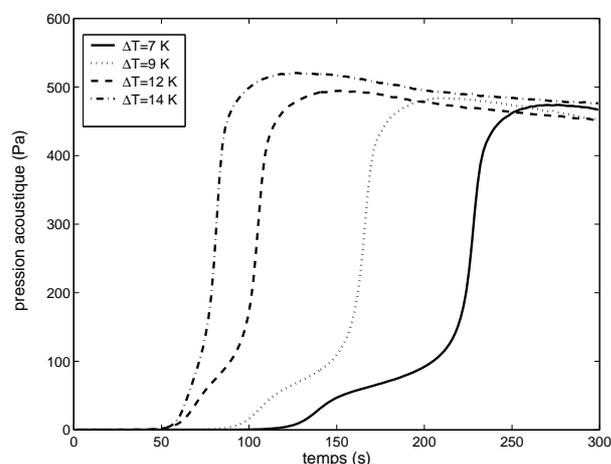


FIG. 1.11 – Evolution de l'amplitude efficace de la pression acoustique en fonction du temps, pour divers incréments de température au dessus du gradient seuil.

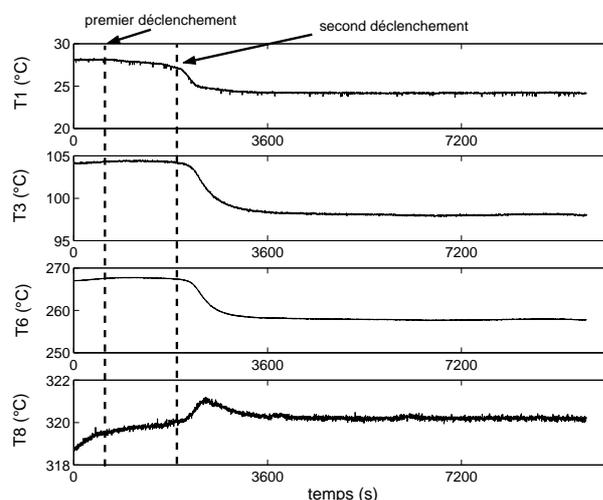


FIG. 1.12 – Evolution de la distribution de température le long du stack lors d'un régime transitoire à double déclenchement ($\Delta T = 1K$). Les températures $T1$, $T3$, $T6$, et $T8$ sur les axes verticaux représentent respectivement les températures mesurées en $x = 0$, $2H_S/7$, $6H_S/7$, et $x = H_S$.

Les résultats expérimentaux de la figure 1.11 ont été obtenus avant l'instrumentation du stack en thermocouples. Le dispositif expérimental a ensuite été démonté en vue d'être instrumenté. Les résultats obtenus après remontage se sont alors avérés différents des résultats initiaux. En particulier, la gamme d'incrément de température pour laquelle un régime de double-déclenchement est observable s'est réduite de $\Delta T \leq 12K$ à $\Delta T \leq 2K$. Lors du remontage du dispositif expérimental après instrumentation, la distance entre le stack et l'échangeur de chaleur chaud (mal connue avant instrumentation) est susceptible d'avoir varié, et ce paramètre peut probablement être responsable des différences constatées (bien qu'on ne puisse pas l'affirmer formellement). Reste que le même type de régime à double déclenchement a cependant été obtenu, et l'évolution associée de la distribution de température dans le stack a alors pu être mesurée. La Fig. 1.12 présente les signaux issus de quatre des huit thermocouples disposés régulièrement le long du stack, lors d'un régime transitoire à double déclenchement obtenu pour un incrément de température ΔT de 1 K. La durée du régime transitoire est alors d'environ 50 min. Les températures $T1$, $T3$, $T6$, et $T8$ sur les axes verticaux représentent respectivement les températures mesurées en $x = 0$, $2H_S/7$, $6H_S/7$, et $x = H_S$ (où $x = 0$ correspond à l'extrémité froide du stack et où H_S désigne la longueur du stack). Il apparaît clairement sur la Fig. 1.12 que les températures issues des thermocouples $T1$ à $T6$ subissent une importante décroissance après le second déclenchement, probablement due à la convection forcée consécutive à l'excitation d'un écoulement redressé de flux massique non nul et dirigé de la source froide vers la source chaude. L'évolution de la température à l'extrémité chaude du stack (thermocouple $T8$) paraît en revanche plus difficile à interpréter. En effet, on remarque que cette température augmente tout au long du transitoire, jusqu'à saturation de l'onde, l'augmentation de température atteignant jusqu'à 2 K, alors même que l'incrément de température ΔT imposé sur le thermocouple de référence T_H^{ref} n'est que de 1 K. Il y a donc des mécanismes de transfert de chaleur complexes entre l'extrémité du stack et l'échangeur de chaleur chaud. Reste que la mesure de température dans le stack ne peut pas fournir a priori d'explication sur la première saturation de l'onde ni même sur le second déclenchement, puisque ce dernier apparaît avant qu'une variation significative des températures dans le stack ne soit constatée. Ajoutons enfin que lors de toutes les expériences précédemment mentionnées, l'homogénéité du champ de température radial a pu être vérifiée puisque les mesures montrent une différence de l'ordre de 1 K entre la température mesurée sur l'axe médian du stack et celle issue du thermocouple placé à 20 mm de l'axe du stack.

1.3 Influence du mode de chauffage

Comme précisé auparavant, les expériences peuvent être réalisées avec deux types d'échangeur de chaleur. Le premier échangeur de chaleur (Fig. 1.5) impose un chauffage externe du guide d'onde en inox. Avec ce type de chauffage, une bonne homogénéité radiale du champ de température est assurée du fait de l'importante inertie thermique du résonateur en inox (une différence de seulement quelques kelvins apparaît entre la température sur l'axe et la température sur les parois interne du tube). Cependant, cette quasi uniformité du champ de température radial se fait au détriment du

rendement de la machine, car il est alors nécessaire de chauffer un important volume d'inox avant que l'instabilité thermoacoustique ne se déclenche. Le second type d'échangeur de chaleur permet un chauffage interne, la résistance chauffante étant directement insérée dans le guide d'onde. Si ce type de chauffage assure un meilleur rendement, l'uniformité du champ de température radial n'est cependant plus assurée puisque des différences de plus de 100 K sont alors mesurées à l'extrémité chaude du stack entre la température sur l'axe du résonateur et celle à 20 mm de l'axe. Au delà de ces considérations sur le rendement de la machine et sur l'uniformité du champ de température radial, il est intéressant d'examiner l'influence du mode de chauffage (externe ou interne) sur l'allure des régimes transitoires (et permanents) observés. Des éléments de réponse à ce sujet sont présentés dans la suite.

Pour l'ensemble des mesures présentées dans ce paragraphe, on utilise un stack de 5 cm instrumenté en thermocouples très fins régulièrement disposés suivant l'axe médian du stack, conformément à la Fig. 1.13. Une instrumentation en thermocouples dans la partie du guide d'onde inhomogène en température a également été mise en oeuvre. Cette mesure est réalisée par 5 thermocouples régulièrement collés sur une barre d'inox, placée sur l'axe du résonateur (Fig. 1.1).

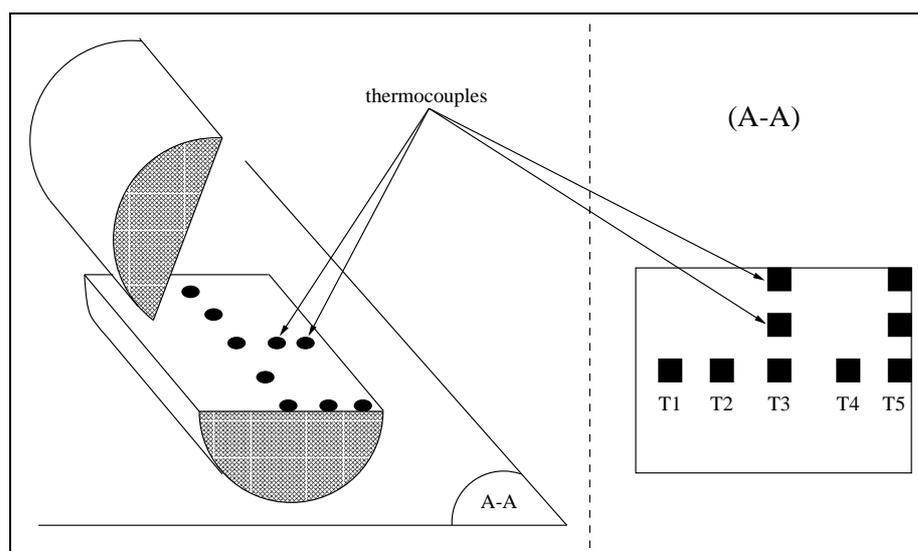


FIG. 1.13 – Représentation schématique de l'instrumentation du stack de 5 cm en thermocouples.

1.3.1 Chauffage externe

Dans les expériences qui suivent, le ruban d'inox initialement placé près de l'extrémité chaude (Fig. 1.6) du stack a été enlevé, afin de simplifier le dispositif expérimental. En effet, le mode de transfert de la chaleur vers le stack par cette pièce est mal maîtrisé, notamment en présence d'une onde acoustique de fort niveau ; cette pièce est donc source de difficultés en termes de comparaison des résultats expérimentaux à des résultats issus d'un modèle. Par ailleurs, la suppression de cet élément n'a que peu d'influence sur le seuil de déclenchement de l'onde acoustique, l'essentiel de la chaleur injectée étant transféré par conduction le long des parois du tube en inox. La figure 1.14 représente

différents régimes transitoires de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique, lorsque l'on procède à un chauffage par échelon de puissance. Avant chaque mesure, la puissance thermique dissipée dans les résistances électriques est initialement fixée à une valeur Q_0 de telle sorte que le système soit juste au dessous du seuil de déclenchement ($Q_0 \approx 100W$). Lorsque l'équilibre thermique est établi (environ 1h30), divers échelons de puissance ΔQ sont appliqués et l'instabilité thermoacoustique se produit. La Fig. 1.15 présente quant à elle les régimes transitoires observés pour un chauffage externe par asservissement en température du thermocouple de référence. On procède de la même façon que dans le paragraphe 1.2 : la température du thermocouple de contrôle T_H^{ref} (situé entre la pièce d'Inox de la Fig. 1.5 et le diamètre externe du guide d'onde) est initialement fixée à $294^{\circ}C$ de telle sorte qu'un incrément de 1 K suffise à déclencher l'instabilité thermoacoustique. Là encore, il est nécessaire d'attendre que l'équilibre thermique soit établi (environ 30 min) avant d'imposer l'incrément de température.

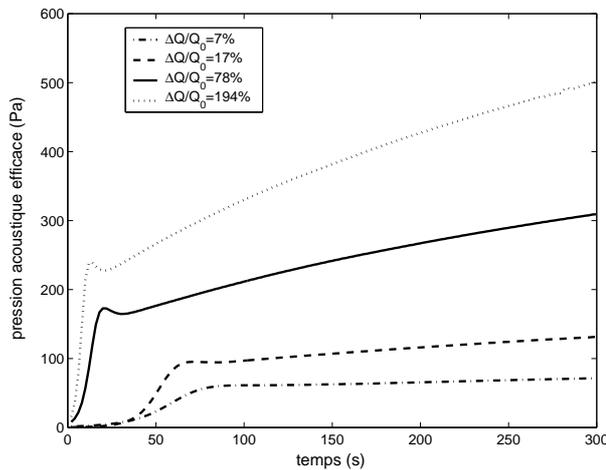


FIG. 1.14 – Régime transitoire de déclenchement par chauffage externe avec incrément de puissance.

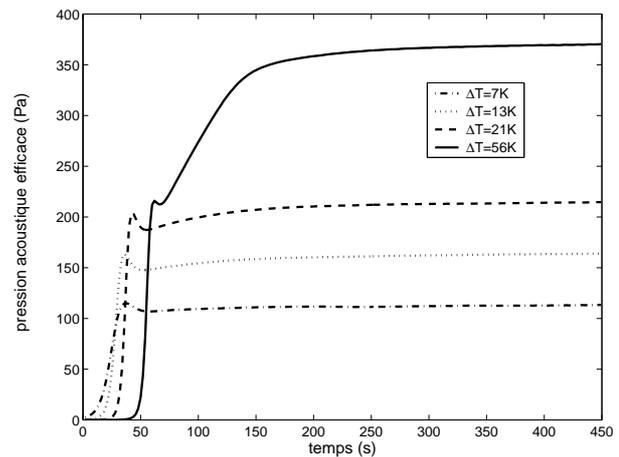


FIG. 1.15 – Régime transitoire de déclenchement par chauffage externe avec asservissement en température du thermocouple de référence.

L'analyse comparative des résultats des Fig. 1. 14 et 1. 15 permet de conclure que la principale différence de comportement imputable au mode de chauffage (incrément de puissance ou asservissement en température) concerne la durée du régime transitoire : le régime stationnaire est atteint plus rapidement par incrément de température que par incrément de puissance. En revanche, quel que soit le mode de chauffage, les régimes transitoires observés sont similaires : une phase d'amplification exponentielle est suivie d'une première saturation puis d'une nouvelle phase d'amplification se produisant sous réserve que la puissance injectée soit suffisamment élevée.

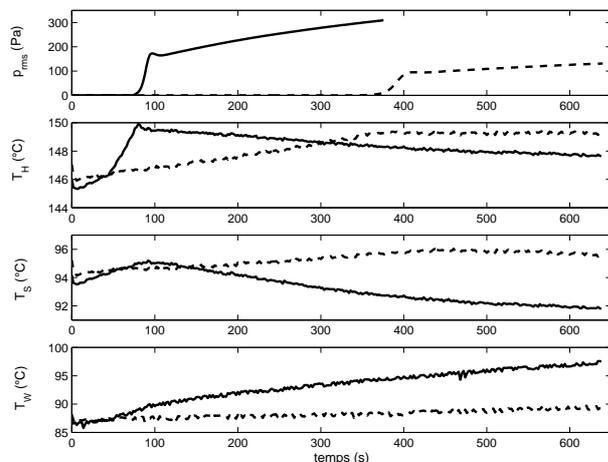


FIG. 1.16 – Evolution des températures à l'extrémité chaude du stack T_H , au centre du stack T_S , et dans le guide d'onde à 12.5 cm de l'extrémité chaude du stack T_W au cours de deux régimes transitoires. Les courbes en trait plein (respectivement en trait tireté) correspondent à la courbe en trait plein (resp. tireté) de la Fig. 1.14, obtenue en chauffage externe pour un incrément de puissance $\Delta Q = 0.78 Q_0$ (resp. $\Delta Q = 0.17 Q_0$). L'instant $t = 0$ correspond à l'application de ΔQ .

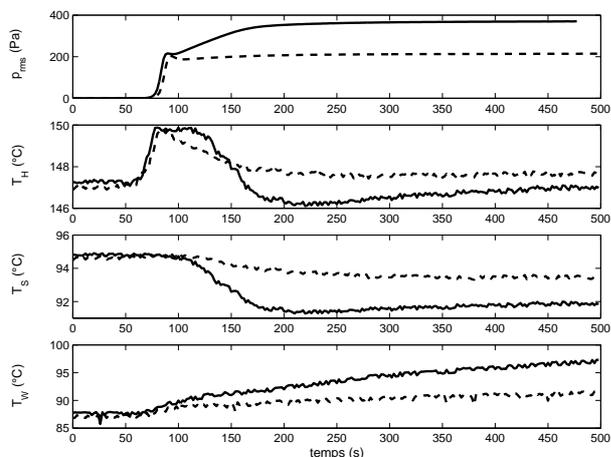


FIG. 1.17 – Evolution des températures à l'extrémité chaude du stack T_H , au centre du stack T_S , et dans le guide d'onde à 12.5 cm de l'extrémité chaude du stack T_W au cours de deux régimes transitoires. Les courbes en trait plein (respectivement en trait tireté) correspondent à la courbe en trait plein (resp. tireté) de la Fig. 1.15, obtenue en chauffage externe avec asservissement en température du thermocouple de référence et pour un incrément de température $\Delta T = 21 K$ (resp. $\Delta T = 56 K$). L'instant $t = 0$ correspond à l'application de ΔT .

La Fig. 1.16 présente l'évolution temporelle de trois signaux particuliers de température, i.e. la température T_H à l'extrémité chaude du stack ($T_H = T_5$ sur la Fig. 1.13), la température T_S au centre du stack ($T_S = T_3$ sur la Fig. 1.13), et la température T_W mesurée dans le guide d'onde à 12.5 cm à droite de l'extrémité chaude du stack. Ces évolutions temporelles de température sont représentées au cours de deux régimes transitoires distincts, obtenus en chauffage externe par incrément de puissance et correspondant aux courbes en trait plein et en trait tireté de la Fig. 1.14. Parallèlement, les évolutions temporelles de T_H , T_S et T_W sont représentées en Fig. 1.17 au cours de deux régimes transitoires obtenus en chauffage externe par asservissement en température du thermocouple de référence et correspondant aux courbes en trait plein et en trait tireté de la Fig. 1.15.

L'analyse détaillée de chacune des figures 1.16 et 1.17 ainsi que leur analyse comparative amène à formuler plusieurs remarques. Tout d'abord, au regard des évolutions de la température T_H , il apparaît que dans tous les cas de figures présentés ici, la première saturation de l'onde acoustique (se produisant par exemple à $t \approx 100$ s sur la courbe en trait plein de la Fig. 1.16) est toujours accompagnée d'un arrêt de l'augmentation de T_H (augmentation initialement due au chauffage). Puis, après cette première saturation de l'onde acoustique, les températures T_H et T_S tendent à diminuer pendant que

la température T_W augmente (probablement en conséquence de l'excitation du vent acoustique). Il est intéressant de noter ici que les évolutions de l'amplitude de l'onde acoustique après la première saturation sont fortement corrélées aux évolutions des températures T_H , T_S et T_W : on remarque en effet que lorsque la première saturation de l'onde acoustique est suivie d'une amplification lente (courbes en trait plein), cette amplification est accompagnée d'une diminution simultanée de T_H et T_S et d'une augmentation de T_W . Si en revanche la première saturation est suivie d'une stabilisation de l'amplitude de pression acoustique (courbes en trait tireté), les températures T_H , T_S et T_W se stabilisent elles aussi rapidement ; cette corrélation forte entre évolution de l'amplitude de pression acoustique et évolution de la distribution de température apparaît de façon très parlante sur la courbe en trait plein de la Fig. 1.17. Enfin, il apparaît que les temps caractéristiques de chauffage sont plus rapides par asservissement de température que par incrément de puissance, et que cette différence de temps caractéristiques se traduit logiquement dans la dynamique de déclenchement de l'onde acoustique (déclenchement plus rapide dans le cas d'un chauffage par asservissement de température).

1.3.2 Chauffage interne

Dans ce paragraphe, les données expérimentales reportées sont celles obtenues lorsque la puissance électrique fournie par le bloc thyristor est dissipée directement dans le guide d'onde. La pièce chauffante (Fig. 1.7) est placée à 5 mm de l'extrémité du stack. La puissance électrique Q_0 dissipée dans le fil de Nichrome est initialement fixée de telle sorte que le système soit juste sous le seuil de déclenchement ($Q_0 = 54W$). La Fig. 1.18 présente les régimes transitoires obtenus pour divers échelons de puissance.

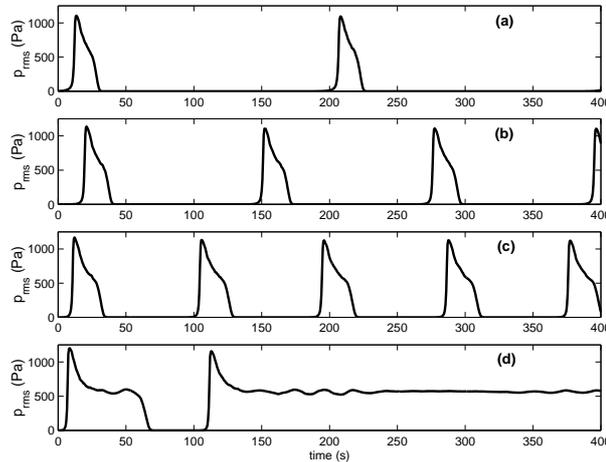


FIG. 1.18 – Evolution en fonction du temps de l'amplitude efficace des oscillations de pression du mode fondamental ($f = 154.3Hz$) pour différents incréments de puissance ΔQ au delà de la puissance seuil de déclenchement ($Q_0 = 54W$) de l'instabilité thermoacoustique. Les quatre régimes transitoires présentés (a),(b),(c) et (d) correspondent respectivement à $\Delta Q/Q_0 = 5\%$, 10% , 20% et 30% .

Les régimes transitoires observés dans ces conditions sont nettement différents de ceux observés

lorsque l'on procède par chauffage externe. Pour de faibles incréments de puissance au delà du seuil de déclenchement (Fig. 1.18 (a)-(c)), l'évolution de l'amplitude de pression acoustique suit un régime de déclenchements et arrêts successifs, dont la période est liée à l'échelon de puissance fourni. Lorsque l'incrément de puissance est suffisant (Fig 1.18 (d), $\Delta Q/Q_0 = 30\%$), l'amplitude de l'onde acoustique se stabilise à une valeur finie. En outre, cette stabilisation est précédée d'un "overshoot" (dépassement en régime transitoire du niveau de pression acoustique relativement à celui obtenu en régime stationnaire), et la durée de transition depuis le déclenchement jusqu'à la stabilisation finale du niveau d'amplitude acoustique est nettement plus courte que lorsque l'on procède par chauffage externe.

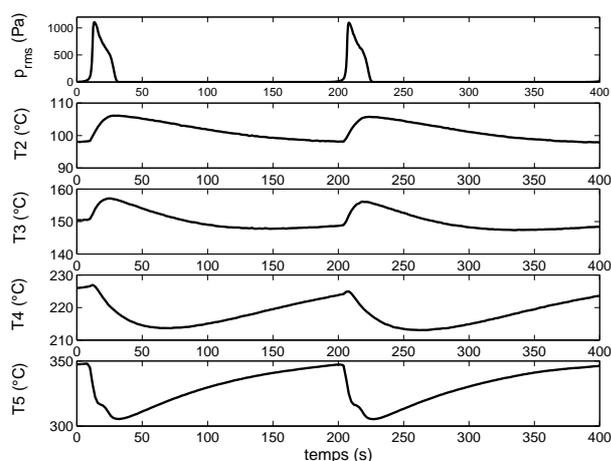


FIG. 1.19 – Evolution de la distribution de température dans le stack lors du régime transitoire associé à la Fig. 1.18(a), et reproduit ici sur la courbe du haut. Les températures $T2, T3, T4$, et $T5$ sont les températures mesurées le long de l'axe médian du stack conformément au schéma de l'instrumentation de la Fig. 1.13.

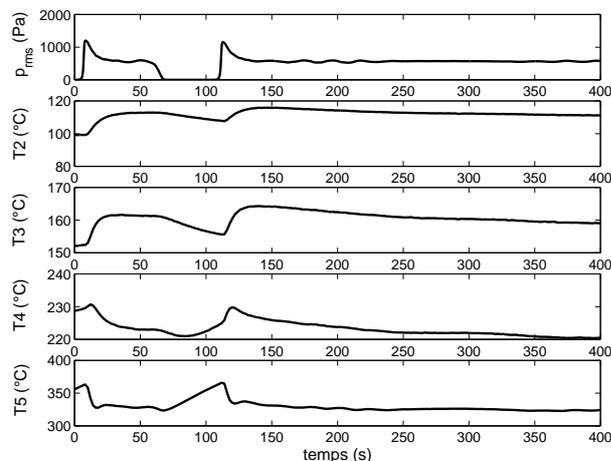


FIG. 1.20 – Evolution de la distribution de température dans le stack lors du régime transitoire associé à la Fig. 1.18(d), et reproduit ici sur la courbe du haut. Les températures $T2, T3, T4$, et $T5$ sont les températures mesurées le long de l'axe médian du stack conformément au schéma de l'instrumentation de la Fig. 1.13.

Les Fig. 1.19 et 1.20 présentent les évolutions respectives de la distribution de température dans le stack relatives aux régimes transitoires 1.18 (a) et 1.18 (d). Les températures $T2$ à $T5$ sont mesurées le long du stack conformément aux schémas de la Fig. 1.13. On remarque clairement sur la Fig. 1.19 qu'au régime transitoire de déclenchements et arrêts périodiques sont associées des évolutions périodiques des signaux de température. Lorsque la pression acoustique atteint un niveau suffisant, la température diminue significativement à l'extrémité chaude du stack ($T4$ et $T5$) et augmente dans une moindre mesure sur sa partie froide ($T2$ et $T3$). Après l'arrêt de l'onde acoustique, les températures évoluent en sens contraire pour atteindre leurs niveaux initiaux (avant déclenchement). L'évolution de la distribution température dans le stack lors du déclenchement de l'onde acoustique indique donc la présence d'un flux de chaleur acoustiquement induit, dirigé de la source chaude vers la source froide (il s'agit précisément du processus non linéaire de "conductivité acoustiquement induite" mentionné en

introduction). Par ailleurs, l'évolution des températures dans le stack sur la Fig. 1.20 fait apparaître que, lorsque l'amplitude de l'onde acoustique se stabilise à un niveau fini (i.e. pour une puissance injectée suffisante), une stabilisation des températures le long du stack se produit simultanément. Ainsi, les analyses qui précèdent laissent à penser que les processus observés trouvent leur origine dans l'interaction non linéaire entre champ acoustique et champ de température.

1.4 Influence de la convection naturelle

Pour toutes les mesures décrites aux paragraphes 1.2 et 1.3 l'axe du guide d'onde est en tout point placé perpendiculairement au champ de pesanteur. En outre, l'analyse des résultats obtenus amène à conclure que la forme de la distribution de température dans l'ensemble du noyau thermoacoustique semble jouer un rôle important dans le déclenchement et la saturation de l'instabilité thermoacoustique. Il existe un moyen simple de vérifier cette conclusion : il suffit de changer la distribution de température initiale et pour cela de changer l'orientation du dispositif expérimental vis à vis du champ de pesanteur. En d'autres termes, l'utilisation de la convection naturelle doit permettre de valider les conclusions précédentes quant à l'importance de la forme du champ de température dans l'ensemble du noyau thermoacoustique. Pour ce faire, on dispose de trois orientations possibles, conformément aux schémas de la Fig. 1.21.

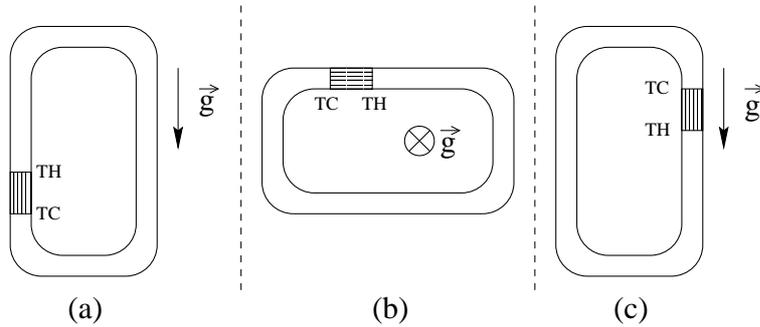


FIG. 1.21 – Orientation du dispositif expérimental relativement au champ de pesanteur

Le dispositif expérimental est celui décrit au paragraphe 1.3 (stack de 5 cm, chauffage interne). La Fig. 1.22 présente les distributions de température dans le stack au déclenchement pour chacune des trois configurations, ainsi que les puissances thermiques correspondantes Q_0 nécessaires pour atteindre le seuil de déclenchement. Les observations montrent clairement que la distribution de température au déclenchement diffère selon l'orientation du résonateur. Cependant, il est important de distinguer le gradient seuil $((T_H - T_C)/H_S)$ de la puissance thermique seuil Q_0 . En effet, si le gradient seuil le plus faible correspond à la configuration (a), le transfert de chaleur convectif vers le guide d'onde est privilégié dans cette configuration, au détriment du transfert vers le stack, en conséquence de quoi la puissance électrique nécessaire pour atteindre ce gradient critique est plus importante que dans la configuration (c).

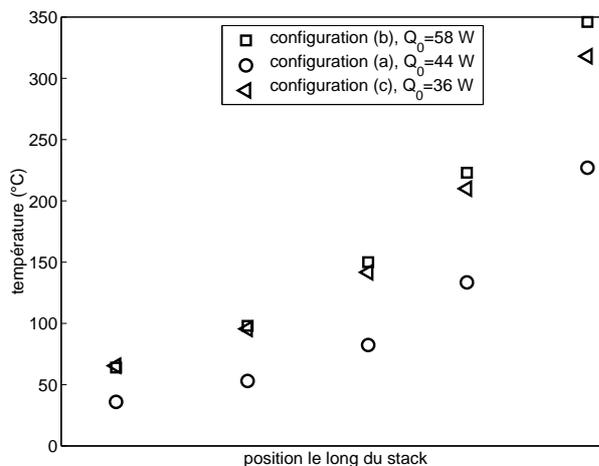


FIG. 1.22 – Distribution de température au déclenchement pour chacune des trois orientations vis à vis du champ de pesanteur (Fig. 1.21).

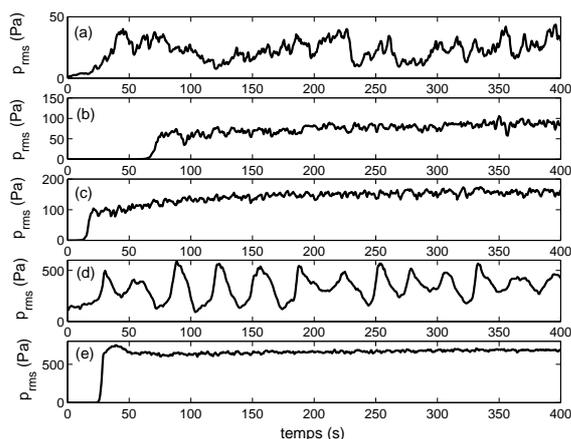


FIG. 1.23 – Evolution de l'amplitude efficace de pression acoustique ($f = 154.3\text{Hz}$) pour différents incréments de puissance ΔQ au delà du seuil de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique $Q_0 = 44\text{W}$, dans la configuration (a). Les cinq régimes transitoires obtenus (a),(b),(c),(d) et (e) correspondent respectivement à $\Delta Q/Q_0 = 7\%$, 20% , 38% , 80% et 180% .

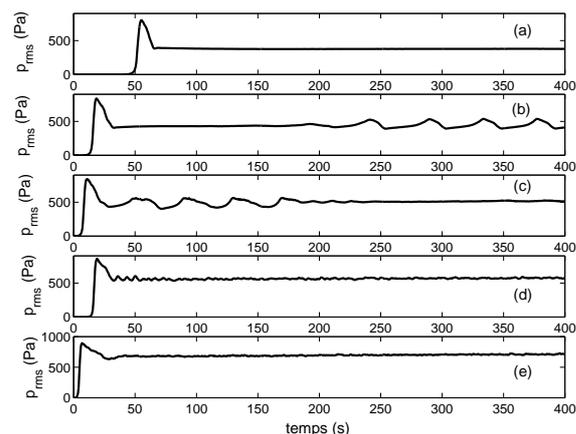


FIG. 1.24 – Evolution de l'amplitude efficace de pression acoustique ($f = 153.1\text{Hz}$) pour différents incréments de puissance ΔQ au delà du seuil de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique $Q_0 = 36\text{W}$, dans la configuration (c). Les cinq régimes transitoires obtenus (a),(b),(c),(d) et (e) correspondent respectivement à $\Delta Q/Q_0 = 10\%$, 30% , 40% , 75% et 130% .

Les Fig. 1.23 et 1.24 présentent les allures respectives des régimes transitoires observés dans les configurations (a) et (c) et pour divers incréments de puissance ΔQ au delà du seuil de déclenchement, résultats à comparer à ceux de la Fig. 1.18 obtenus dans la configuration (b). Au regard des régimes

transitoires obtenus, l'orientation du dispositif expérimental vis à vis du champ de pesanteur apparaît comme un paramètre prépondérant, tant sur le rendement du moteur thermoacoustique, que sur l'allure des régimes transitoires obtenus. La configuration (c) est celle qui permet d'obtenir les meilleurs résultats en termes de rendement. Par exemple, pour une puissance thermique injectée $Q_0 + \Delta Q$ de 77 W, les niveaux acoustiques obtenus en régime stationnaire sont respectivement de 300 Pa dans la configuration (a), 600 Pa dans la configuration (b), et 700 Pa dans la configuration (c). Hormis ces considérations sur le rendement du moteur thermoacoustique qui ne font pas directement l'objet de cette étude, les courbes des Fig. 1.23 et 1.24 traduisent que la convection naturelle influence substantiellement la dynamique des régimes transitoires obtenus, notamment dans la configuration (a) où l'évolution de l'amplitude de pression acoustique suit un comportement erratique. De plus, on observe encore la présence d'un "overshoot", ainsi qu'une possibilité d'oscillations basse-fréquence de l'amplitude de l'onde acoustique.

1.5 Quelques estimations sur le rôle éventuel des pertes mineures, des turbulences acoustiques et du processus de cascade harmonique

L'ensemble des résultats expérimentaux présentés précédemment met en évidence des régimes complexes, de sorte que la saturation de l'onde acoustique est probablement contrôlée par plusieurs types d'effets non linéaires. A ce stade de l'étude, il est possible d'estimer le rôle joué par quelques uns de ces processus non linéaires.

Trois types particuliers de processus non linéaires pouvant jouer un rôle dans la saturation de l'onde acoustique sont présentés dans ce paragraphe : il s'agit de la turbulence acoustique, des pertes mineures et du processus de cascade harmonique. Ils ont déjà fait l'objet d'études appliquées aux machines thermoacoustiques, mais nous montrons dans la suite que, s'il n'est pas exclu que ces trois mécanismes non linéaires jouent un rôle dans la saturation de l'onde acoustique, d'autres effets non linéaires devront être pris en compte pour reproduire les régimes transitoires observés expérimentalement.

Afin de décrire chacun des processus de la façon la plus simple possible, quelques hypothèses sont retenues dans l'ensemble de ce paragraphe. Tout d'abord, nous considérerons que l'ensemble du dispositif est le siège d'une onde acoustique purement propagative, de sorte que l'évolution temporelle de pression acoustique puisse s'écrire comme suit :

$$p(x, t) \approx p_1(t) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{L}\right), \quad (1.1)$$

où a_c est la célérité adiabatique du son et $\omega \approx 2\pi a_c/L$ est la pulsation acoustique du mode fondamental (L est la longueur du résonateur). L'amplitude des oscillations de pression acoustique p_1 est supposée lentement variable avec t , relativement à la période acoustique. Ensuite, le fluide est considéré comme faiblement dissipatif, de sorte que la distribution radiale de vitesse acoustique sur une section du guide d'onde ou d'un pore du stack est quasi uniforme, et que pression et vitesse acoustiques sont reliées en

première approximation par l'équation d'Euler :

$$\rho \partial_t \vec{v} = -\text{grad} p, \quad (1.2)$$

où ρ désigne la masse volumique du fluide. Combinant les équations (1.1) et (1.2), il vient :

$$v(x, t) \approx v_1(t) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{L}\right), \quad (1.3)$$

avec

$$v_1(t) \approx \frac{p_1(t)}{\rho a_c}. \quad (1.4)$$

1.5.1 Rôle des turbulences acoustiques

Parmi les mécanismes non linéaires donnant lieu à une dissipation d'énergie, il est possible que la turbulence acoustique doive être prise en compte. Peu de données sur les mécanismes de transition vers la turbulence dans le cas d'un fluide en écoulement oscillant dans un tube sont disponibles dans la littérature. Les travaux d'Ohmi et coll. [39, 40] souvent évoqués ont montré que cette transition est plus complexe que dans le cas d'un écoulement stationnaire.

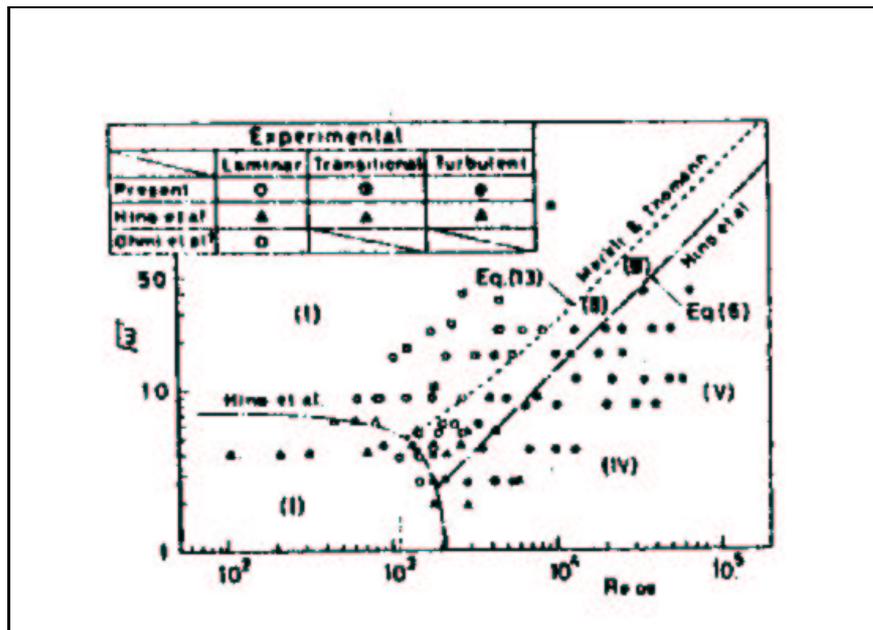


FIG. 1.25 – Régime oscillatoire observable dans un tube circulaire de rayon R , en fonction de la quantité $\sqrt{\omega'} = R\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = R\frac{\sqrt{2}}{\delta_\nu}$ et du nombre de Reynolds. D'après [40].

La Fig. 1.25 ([40]) illustre les différents types de régimes observables en fonction de la quantité $\sqrt{\omega'} = R\frac{\sqrt{2}}{\delta_\nu}$ (où R et δ_ν désignent respectivement le rayon du tube et l'épaisseur de couche limite visqueuse), et du nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{2Rv_1}{\nu}, \quad (1.5)$$

où ν désigne la viscosité cinématique du fluide. A partir de ces résultats expérimentaux, différentes régions peuvent être définies, auxquelles sont associés différents régimes oscillatoires : la région (I) correspond à un régime laminaire tandis que les régions (II)-(III) et (IV)-(V) correspondent respectivement à un régime faiblement turbulent (ou transitionnel) et à un régime turbulent.

Faisant usage des résultats illustrés sur la Fig. 1.25, il est donc possible de déterminer la présence ou non de turbulences acoustiques dans le dispositif thermoacoustique étudié ici. La quantité $\sqrt{\omega'}$ vaut approximativement :

$$\sqrt{\omega'} \approx \frac{\sqrt{2} \times 2.65 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{2 \times 1.6 \cdot 10^{-5} / (2\pi \times 150)}} \approx 300 \quad (1.6)$$

dans le guide d'onde expérimental et

$$\sqrt{\omega'} \approx \frac{\sqrt{2} \times 0.45 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2 \times 1.6 \cdot 10^{-5} / (2\pi \times 150)}} \approx 5 \quad (1.7)$$

dans un pore du stack. Par ailleurs, aux plus hauts niveaux d'amplitudes de pression acoustique observés expérimentalement ($p_1^{max} \approx 2000 Pa$), et compte tenu de la relation (1.4), on obtient $Re \approx 1.6 \cdot 10^4$ dans le guide d'onde expérimental et $Re \approx 2.7 \cdot 10^2$ dans un pore du stack. Ainsi compte tenu de ces estimations et des résultats de la Fig. 1.25, il apparaît que l'écoulement oscillant (i.e. l'onde acoustique) dans le tube ou dans un pore du stack reste dans la zone laminaire. On peut donc considérer que la turbulence acoustique ne joue probablement pas un rôle majeur dans la saturation observée expérimentalement.

1.5.2 Rôle du processus de cascade harmonique

Le dispositif expérimental dont il est question ici et, plus généralement, l'ensemble des machines thermoacoustiques, sont le siège d'oscillations acoustiques d'amplitudes élevées. Or, la non linéarité des propriétés du fluide (ici l'air) engendre, pour des niveaux acoustiques élevés, des transferts d'énergie dans le spectre fréquentiel, qui se traduisent par la génération d'oscillations acoustiques à des fréquences multiples de la fréquence fondamentale. Ce processus, couramment appelé cascade harmonique, est une source de saturation en amplitude de l'onde acoustique (fondamental et harmoniques). En effet, à mesure que le mode fondamental est amplifié par effet thermoacoustique au cours du régime transitoire, une proportion de l'énergie est transférée vers les harmoniques supérieurs. Ces harmoniques ne sont pas amplifiés par effet thermoacoustique, car le gradient de température nécessaire à l'amplification thermoacoustique du second harmonique est plus élevé que celui nécessaire à l'amplification du fondamental [29]. En revanche, la présence d'harmoniques supérieurs est responsable d'une augmentation des pertes viscothermiques aux parois, proportionnelles à la racine carré de la fréquence acoustique, et dans une bien moindre mesure d'une augmentation des dissipations au sein du fluide (hors couches limites), proportionnelles au carré de la fréquence acoustique (une estimation rapide à partir des équations (3.118) et (3.119) de la référence [14] montre que la dissipation au sein du fluide ne dépasse 10 % de la dissipation totale que si la fréquence de l'onde acoustique est

supérieure à 3.7 kHz , i.e. pour des fréquences supérieures à celle du 24^{ième} harmonique). Il en résulte que, sous l'hypothèse d'une saturation par cascade harmonique, l'amplitude des oscillations acoustiques du mode fondamental se stabilise nécessairement à un niveau fini tel que l'ensemble des pertes dues à la génération d'harmoniques supérieurs compense l'amplification thermoacoustique du mode fondamental.

Dans les expériences présentées précédemment, l'analyse du contenu spectral des oscillations de pression acoustique a révélé la présence de composantes harmoniques. Ce phénomène a d'ailleurs déjà été observé par Job et Gusev [29] en régime stationnaire sur le même dispositif expérimental, qui rapportent de plus que l'amplitude des harmoniques supérieurs de l'onde acoustique varie suivant une loi canonique (l'amplitude de l'harmonique n varie comme la puissance $n^{\text{ième}}$ de l'amplitude du fondamental). Cette propriété caractéristique de l'acoustique faiblement non linéaire, permet de modéliser le processus de cascade harmonique [29, Chp. 7] en décomposant l'oscillation temporelle de pression acoustique suivant sa composante fondamentale $p_1(t)$ et son premier harmonique $p_2(t)$

$$p(t) \approx p_1(t)\sin(\omega\tau) + p_2(t)\sin(2\omega\tau), \quad (1.8)$$

où le temps retardé $\tau = t - \frac{x}{a_c}$ rend compte du temps de propagation des ondes et où le temps "lent" t est supposé très supérieur à la période des oscillations acoustiques, de sorte qu'en reportant l'expression (1.8) dans l'équation de propagation acoustique non linéaire sans pertes [57]

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\beta_{nl}}{2} \frac{\partial M^2}{\partial t}, \quad M = p/(\rho a_c^2) \quad (1.9)$$

où β_{nl} est le paramètre non linéaire du fluide ($\beta_{nl} = 1.2$ pour l'air) et M le nombre de Mach acoustique, il vient en identifiant les termes oscillants aux pulsations ω et 2ω respectivement :

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} = -\omega \frac{\beta_{nl}}{2} M_1 M_2, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial t} = \omega \frac{\beta_{nl}}{2} M_1^2. \quad (1.11)$$

La prise en compte de l'amplification thermoacoustique du mode fondamental, et de l'atténuation du second harmonique due aux pertes pariétales se fait par l'ajout de deux termes phénoménologiques dans les équations (1.10) et (1.11) comme suit [29] :

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} = -\omega \frac{\beta_{nl}}{2} M_1 M_2 + \frac{M_1}{\tau_{ampl}} \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial t} = \omega \frac{\beta_{nl}}{2} M_1^2 - \frac{M_2}{\tau_{att}}. \quad (1.13)$$

C'est par la résolution de ce système d'équations couplées que l'influence du processus de cascade harmonique sur la saturation de l'onde peut être estimée, sous réserve de connaître le temps caractéristique d'amplification τ_{ampl} du fondamental et le temps caractéristique d'atténuation τ_{att} du premier harmonique. C'est à partir des données expérimentales que l'on accède à ces deux temps caractéristiques. Le premier est obtenu en mesurant la croissance initiale de l'amplitude de l'onde acoustique : cette croissance est exponentielle, soit une droite dans un diagramme log/lin, dont la pente donne accès

à τ_{ampl} . Le second temps caractéristique est obtenu à partir de la mesure en régime stationnaire des amplitudes respectives du fondamental et du premier harmonique, ce qui combiné à l'équation (1.13) (avec $\partial_t M_2(t \rightarrow \infty) = 0$) permet d'obtenir :

$$\tau_{att} = \frac{2}{\omega \beta_{nl}} \frac{M_2(t \rightarrow \infty)}{M_1^2(t \rightarrow \infty)}. \quad (1.14)$$

Les figures 1.26 et 1.27 présentent chacune une comparaison entre un régime transitoire expérimental (l'un obtenu par chauffage externe, et l'autre par chauffage interne) et un régime transitoire théorique obtenu en résolvant le système d'équations (1.12)-(1.13) (résolution numérique par différence finie avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4), dans lequel les temps caractéristiques τ_{ampl} et τ_{att} sont ceux mentionnés précédemment et obtenus à partir des données expérimentales. Les résultats obtenus amènent à deux remarques, valant chacune quel que soit le mode de chauffage retenu. Premièrement, l'allure qualitative des courbes expérimentales diffère des courbes théoriques qui prévoient une simple amplification exponentielle suivie d'une stabilisation à un niveau d'amplitude fini. Deuxièmement, les niveaux de saturation en amplitude de l'onde acoustique prévus par le modèle de cascade harmonique sont supérieurs à ceux observés expérimentalement. Ainsi, s'il n'est pas exclu que la saturation par cascade harmonique soit un élément à prendre en compte dans l'étude des processus non linéaires de saturation de l'onde acoustique, ce mécanisme ne peut cependant pas expliquer à lui seul la nature des régimes transitoires observés.

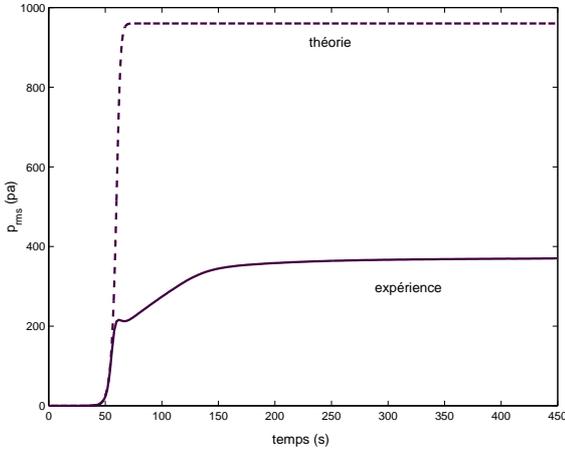


FIG. 1.26 – Comparaison entre régime transitoire de déclenchement obtenu expérimentalement par chauffage externe (trait plein), et modèle de saturation par cascade harmonique (trait tireté). La courbe expérimentale est celle déjà présentée en Fig. 1.15 pour $\Delta T = 56 K$, et la courbe théorique est obtenue en estimant $\tau_{ampl} \approx 3.1 s$ et $\tau_{att} \approx 2.2 \cdot 10^{-2} s$ à partir de la courbe expérimentale

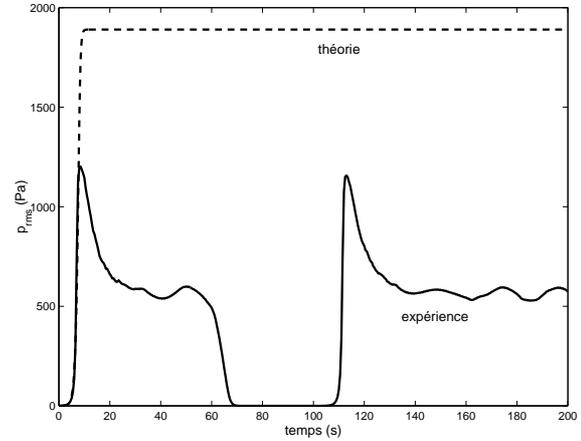


FIG. 1.27 – Comparaison entre régime transitoire de déclenchement obtenu expérimentalement par chauffage interne (trait plein), et modèle de saturation par cascade harmonique (trait tireté). La courbe expérimentale est celle déjà présentée en Fig. 1.18 (d) pour $\Delta Q/Q_0 = 30 \%$, et la courbe théorique est obtenue en estimant $\tau_{ampl} \approx 0.8 s$ et $\tau_{att} \approx 2.2 \cdot 10^{-2} s$ à partir de la courbe expérimentale

1.5.3 Rôle des pertes mineures aux extrémités du stack et des échangeurs de chaleur

On désigne ici par le terme de pertes mineures les dissipations d'énergie dues au changement de section brusque aux extrémités du stack (ou des échangeurs de chaleur), et qui se traduisent par une génération de tourbillons au voisinage des changements de sections. Ce phénomène est illustré sur la Fig. 1.28, où il apparaît que la caractérisation des pertes mineures diffère selon que le flux de masse est entrant ("in") ou sortant ("out").

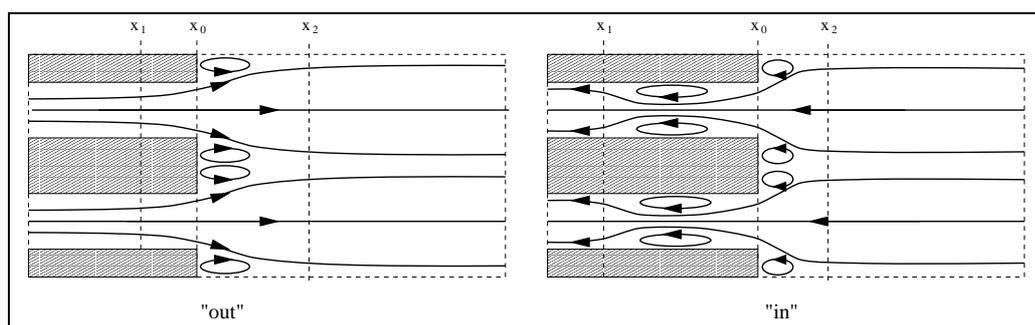


FIG. 1.28 – Représentation qualitative de la génération de tourbillons aux extrémités du stack ou des échangeurs de chaleur.

L'effet des pertes mineures dues à un changement brusque de section (couramment appelées pertes de charge singulières en mécanique des fluides) est traditionnellement représenté dans le cas des écoulements permanents par une différence entre les pressions hydrodynamiques en aval et en amont du changement de section, proportionnelle au carré de la vitesse moyenne sur une section V_x de l'écoulement. Ainsi, dans le cas d'un flux sortant, cette différence de pression s'écrit :

$$\Delta p_{out}(x_0) = p_{out}(x_0 + 0) - p_{out}(x_0 - 0) \approx -\frac{1}{2}K_{out}\rho V_x^2(x_0, t), \quad (1.15)$$

où K_{out} est le coefficient de perte de charges relatif à un élargissement brusque de section.

Considérons à présent que le résonateur annulaire est le siège d'une onde acoustique purement propagative $p(t) = p_1(t)\sin(\omega\tau)$ où le temps retardé $\tau = t - x/a_c$ rend compte du temps de propagation de l'onde et où les variations de l'amplitude de pression acoustique du mode fondamental p_1 sont supposées très lentes devant la période acoustique. Faisant usage de l'équation d'Euler $\rho\partial_t v = -\partial_x p$, il vient $v(t) = v_1(t)\sin(\omega\tau)$, de sorte que les pertes de charge singulières peuvent être estimées dans le cas d'un écoulement oscillant en dissociant l'écoulement sortant de l'écoulement entrant :

$$\Delta p_{out}(x_0, t) \approx -\frac{1}{2}K_{out}\rho v_1^2(t)\sin^2(\omega\tau_0), \quad \omega\tau_0 \in [0, \pi], \quad (1.16)$$

$$\Delta p_{in}(x_0, t) \approx +\frac{1}{2}K_{in}\rho v_1^2(t)\sin^2(\omega\tau_0), \quad \omega\tau_0 \in [\pi, 2\pi], \quad (1.17)$$

avec $\omega\tau_0 = \omega t - 2\pi x_0/L$. A partir des équations (1.16) et (1.17), il est dès lors possible d'obtenir l'expression de la diminution de puissance acoustique due aux pertes mineures à une extrémité du

stack

$$\Delta \dot{E}_{minor}(t) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^\pi \Delta p_{out}(t) v_1(t) \sin(\omega\tau_0) S_w d(\omega\tau_0) + \frac{\omega}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \Delta p_{in}(t) v_1(t) \sin(\omega\tau_0) S_s d(\omega\tau_0) \quad (1.18)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{4}{3\pi} \rho (K_{out} S_w + K_{in} S_s) v_1^3(t) \quad (1.19)$$

en fonction de l'amplitude de vitesse acoustique v_1 au lieu de la singularité (S_w et S_s désignent respectivement la section du tube et la section du stack composée de fluide). Par ailleurs, exprimant la densité locale instantanée de l'énergie acoustique [14, Eq. (1.82)] :

$$e_{tot} = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho a_c^2}, \quad (1.20)$$

et faisant usage de la relation (1.4), l'expression de l'énergie acoustique totale dans l'ensemble du résonateur de longueur L s'écrit :

$$E_{tot}(t) = \frac{S_w}{2} \rho L v_1^2(t) = \frac{S_w}{2} L \frac{p_1^2(t)}{\rho a_c^2}. \quad (1.21)$$

Ainsi, la diminution dans le temps de l'énergie acoustique totale due à la dissipation par pertes mineures aux 2 extrémités du stack

$$\partial_t E_{tot} = S_w L \frac{p_1}{\rho a_c^2} \partial_t p_1 = 2 \times \Delta \dot{E}_{minor}(t) \quad (1.22)$$

peut s'exprimer sous forme d'une variation du nombre de Mach acoustique $M = p/(\rho a_c^2)$ et d'un temps caractéristique d'atténuation τ_{minor} en combinant les équations (1.4), (1.19), et (1.22) :

$$\partial_t M = -\frac{M^2}{\tau_{minor}}, \quad (1.23)$$

avec

$$\tau_{minor} = \frac{3\pi}{4} \frac{S_w L}{(S_w K_{out} + S_s K_{in}) a_c}. \quad (1.24)$$

Finalement, la saturation de l'onde acoustique due à l'effet combiné du processus de cascade harmonique (Eqs (1.12) et (1.13)) et des pertes mineures aux extrémités du stack peut être estimée en résolvant le système d'équations :

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} = -\omega \frac{\beta_{nl}}{2} M_1 M_2 + \frac{M_1}{\tau_{ampl}} - \frac{M_1^2}{\tau_{minor}} \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial t} = \omega \frac{\beta_{nl}}{2} M_1^2 - \frac{M_2}{\tau_{att}}, \quad (1.26)$$

sous l'hypothèse que seul le mode fondamental contribue aux pertes mineures (i.e. $M_1 \gg M_2$). Il reste alors à estimer le temps caractéristique d'atténuation τ_{minor} , à partir des expressions empiriques de K_{in} et K_{out} [28] :

$$Re \geq 3.5 \cdot 10^3, K_{out} \approx (1 - S_s/S_w)^2, \quad (1.27)$$

$$Re \geq 10^4, K_{in} \approx 0.5 (1 - S_s/S_w)^{\frac{3}{4}}. \quad (1.28)$$

Ces expressions empiriques des coefficients de pertes de charge singulières sont valides sous l'hypothèse d'une distribution de vitesse uniforme sur une section du conduit, et donc pour des nombres de Reynolds élevés. Or, dans un pore du stack de diamètre géométrique $D_s \approx 0.9 \text{ mm}$, et pour des niveaux de pression acoustique compris entre 100 et 2000 Pa (i.e. gamme de valeur observée expérimentalement), le nombre de Reynolds $Re = v_1 D_s / \nu \approx p_1 D_s / \rho a_c \nu$ est situé dans une gamme $14 \leq Re \leq 300$, de sorte que l'écoulement dans les pores du stack ne peut pas être considéré comme uniforme. Dans ce cas, les coefficients K_{in} et K_{out} dépendent de la porosité S_s/S_w du stack et du nombre de Reynolds. Bien que l'on ne dispose pas de données précises pour $S_s/S_w = 0.8$ et $Re \sim 10^2$ (valeurs expérimentales), les données recueillies dans la réf. [28], Chaps. 3 et 4, permettent de prédire que les coefficients K_{in} et K_{out} augmentent respectivement d'un facteur 5 et 4 lorsque le nombre de Reynolds diminue de $Re \geq 10^4$ à $Re \sim 10^2$ (avec $S_s/S_w = 0.6$). Ainsi, à partir des estimations

$$K_{out} \approx 5 \times (1 - S_s/S_w)^2, \quad (1.29)$$

$$K_{in} \approx 4 \times 0.5 (1 - S_s/S_w)^{\frac{3}{4}}, \quad (1.30)$$

des coefficients de pertes de charge, le temps caractéristique d'atténuation est estimé à :

$$\tau_{minor} \approx 2.4 \cdot 10^{-2} \text{ s}. \quad (1.31)$$

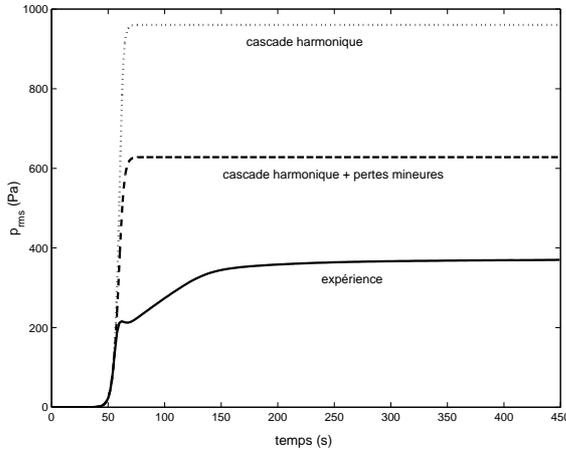


FIG. 1.29 – Comparaison entre régime transitoire expérimental (chauffage externe, trait plein), et modèles de saturation par cascade harmonique (trait pointillé) ou par cascade harmonique et pertes mineures (trait tireté), avec $\tau_{ampl} \approx 3.1 \text{ s}$, $\tau_{minor} \approx 2.4 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ et $\tau_{att} \approx 2.2 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

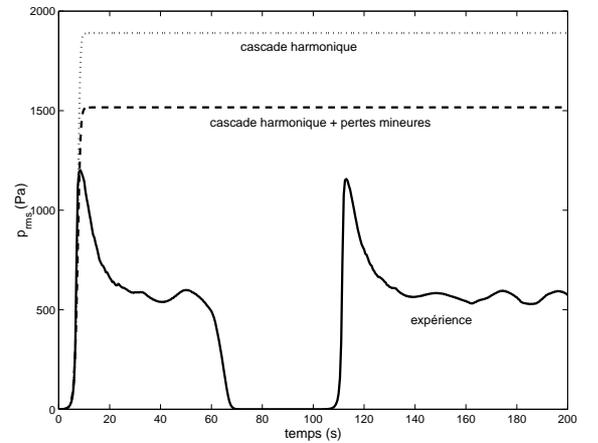


FIG. 1.30 – Comparaison entre régime transitoire expérimental (chauffage interne, trait plein), et modèles de saturation par cascade harmonique (trait pointillé) ou par cascade harmonique et pertes mineures (trait tireté), avec $\tau_{ampl} \approx 0.8 \text{ s}$, $\tau_{minor} \approx 2.4 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ et $\tau_{att} \approx 2.2 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

Les Fig. 1.29 et 1.30 présentent les mêmes données que celles des Fig. 1.26 et 1.27, auxquelles sont ajoutées en trait tireté les courbes issues du modèle théorique de saturation par cascade harmonique et

perles mineures, obtenu en résolvant le système d'équation (1.25)-(1.26). Il apparaît que l'atténuation supplémentaire due aux pertes mineures agit de façon significative sur les niveaux atteints en régime stationnaire, et que ce mécanisme de saturation doit donc être pris en compte. Reste que les remarques déjà formulées au paragraphe §1.5.2 restent vraies : par la seule prise en compte des pertes mineures et du processus de cascade harmonique les niveaux acoustiques atteints en régime stationnaire sont supérieurs à ceux obtenus expérimentalement, et la dynamique complexe des régimes transitoires expérimentaux n'est pas reproduite.

1.6 Conclusions

Au terme de cette étude expérimentale, il apparaît que la diversité des régimes transitoires obtenus témoigne de la complexité des processus non linéaires mis en jeu. Les estimations montrent que les pertes dues à l'excitation d'harmoniques supérieurs (dont l'énergie est plus dissipée que celle du fondamental), aux turbulences acoustiques dans le guide d'onde ou à la génération de vortex aux extrémités du stack ne peuvent être à l'origine des processus d'overshoot, de déclenchement et arrêts successifs ou de double déclenchement. Par ailleurs, dans l'ensemble des expériences réalisées, des évolutions en régime transitoire du champ de température ont été observées. Ces observations témoignent de la présence d'un "vent acoustique" de flux massique non nul, dirigé dans le sens des x positifs [22], ainsi que d'un flux de chaleur d'origine thermoacoustique dans le stack tendant à réduire le gradient de température imposé [72]. Ainsi, les observations conjointes de régimes transitoires complexes et des évolutions associées de la distribution de température dans l'ensemble du dispositif, indiquent que les processus non linéaires liés à l'interaction entre champ acoustique et champ de température doivent être pris en compte, et qu'une modélisation de cette interaction en régime transitoire peut permettre de retrouver, qualitativement au moins, les comportements dynamiques observés expérimentalement.

Chapitre 2

Etude analytique de l'influence de la distribution de température sur l'amplification thermoacoustique.

L'étude expérimentale présentée au chapitre 1 montre que le développement en régime transitoire de l'instabilité thermoacoustique donne lieu à des régimes complexes, auxquels sont associées des évolutions transitoires significatives du champ de température dans l'ensemble du noyau thermoacoustique. De plus, les estimations effectuées sur l'influence des processus non linéaires de cascade harmonique, de pertes mineures et de turbulences acoustique montrent qu'il est nécessaire de prendre en compte la présence du vent acoustique et de la conductivité acoustiquement induite pour le développement futur d'un modèle analytique décrivant le régime transitoire depuis le déclenchement jusqu'à la stabilisation de l'amplitude de l'onde acoustique.

Cependant, avant de mettre en oeuvre un tel modèle, il convient d'éclaircir le niveau d'influence de la forme de la distribution de température sur l'amplification thermoacoustique. En effet, il est apparu lors des investigations expérimentales que l'évolution de l'amplitude de l'onde acoustique n'est pas simplement corrélée à l'évolution du gradient moyen de température aux extrémités du stack. En particulier, s'il est clair que les effets conjoints du vent acoustique et de la conductivité acoustiquement induite tendent à réduire la différence de température ($T_H - T_C$) aux extrémités du stack, les observations expérimentales montrent d'une part qu'il est possible, après déclenchement, que l'amplitude de l'onde acoustique continue d'augmenter alors même que la température T_H diminue ou se maintient (voir par exemple les Figs 1.16 et 1.17), et d'autre part que la forme initiale de la distribution de température dans le stack et le guide d'onde influence les conditions de déclenchement de l'onde acoustique (Figs 1.22-1.24). Il est donc nécessaire de comprendre pourquoi et comment l'amplification dépend de la distribution de température, d'autant plus qu'à notre connaissance, de telles investigations n'ont pas été mises en oeuvre (les modèles existants considèrent généralement que la distribution de température est linéaire).

Dans le paragraphe 2.1 ci dessous, le modèle analytique développé par Stéphane Job et Vitaliy Gusev [29] est rappelé brièvement. Ce modèle, basé sur une approche mathématique développée pour les dispositifs à ondes stationnaires [23], repose sur le formalisme de la matrice de diffusion pour décrire le champ acoustique dans un moteur thermoacoustique annulaire, dans le cas d'une distribution de température donnée. A partir de ce modèle analytique, les conditions de déclenchement, la fréquence correspondante des oscillations acoustiques, et la distribution du champ acoustique dans l'ensemble du dispositif peuvent être calculées numériquement. Seules les grandes lignes du modèle sont présentées : les détails de la démarche sont reportés en annexe A. Le paragraphe 2.2 est consacré à l'étude de l'influence du régime d'interaction thermoacoustique sur les conditions de déclenchement : cette étude montre que la quantité $\delta_{\kappa,\nu}/R_s$, rapport des épaisseurs de couches limites thermique et visqueuse sur le rayon géométrique des pores du stack, a une influence significative sur la distribution du champ acoustique et sur le gradient de température seuil nécessaire au déclenchement. Le paragraphe 3.3 a pour objet de montrer que, pour une différence de température ($T_H - T_C$) fixée, la forme du champ de température $T(x)$ influence significativement l'amplification des ondes acoustiques. En effet, la modification de la distribution de température implique une modification de la distribution du champ acoustique (pression acoustique, vitesse acoustique et phase entre pression et vitesse) et par suite modifie le travail acoustique produit dans le stack. Enfin, sur la base de ces résultats, une explication qualitative de quelques résultats expérimentaux est avancée.

2.1 Description analytique du processus d'amplification dans le moteur thermoacoustique annulaire

Le dispositif à l'étude est représenté schématiquement sur la Fig. 2.1. Le guide d'onde annulaire cylindrique de rayon interne R_w et de longueur L est divisé en trois parties distinctes : le stack ($-H_S \leq x \leq 0$), la partie du guide d'onde inhomogène en température ($0 \leq x \leq H_W$), et le reste du guide d'onde à température ambiante ($H_W \leq x \leq L - H_S$). On appellera par la suite "noyau thermoacoustique" la région $-H_S \leq x \leq H_W$. Le stack est un matériau poreux de porosité longitudinale Φ et dont les canaux ont un rayon géométrique R_s .

2.1.1 Calcul des coefficients de la matrice de diffusion du noyau thermoacoustique

Dans le modèle présenté ci-après, le couplage entre le noyau thermoacoustique et le reste du guide d'onde est décrit au moyen de la matrice de diffusion du noyau thermoacoustique, sans restriction sur la longueur du stack H_S ou sur la forme de la distribution de température $T_m(x)$ dans le noyau thermoacoustique. Seules les grandes lignes du modèle sont présentées dans ce paragraphe. Le lecteur trouvera une description plus détaillée en Annexe A, ou dans le mémoire de thèse de S. Job [29].

Les variables acoustiques sont exprimées dans le domaine fréquentiel, où ω désigne la pulsation acoustique. Dans la région du guide d'onde à température ambiante $H_W \leq x \leq L - H_S$, la pression acoustique $\tilde{p}(x, \omega) \equiv \tilde{p}(x)$ peut être décomposée suivant ses deux composantes contrapropagatives

$\tilde{p}(x) = \tilde{p}^+(x) + \tilde{p}^-(x)$, où \tilde{p}^+ et \tilde{p}^- représentent les amplitudes complexes des ondes de pression se propageant respectivement dans les directions $+x$ et $-x$ ($p(x, t) = \text{Re}(\tilde{p}(x)e^{-i\omega t})$) :

$$\forall x \in [H_W, L - H_S], \tilde{p}^\pm(x) = \tilde{p}^\pm(H_W)e^{\pm ik_W(x-H_W)}. \quad (2.1)$$

Ici, le nombre d'onde complexe k_W prend en compte les pertes visqueuses et thermiques au voisinage des parois du résonateur (Eq. (A.21)). Afin de décrire la causalité des ondes incidentes, réfléchies et transmises aux interfaces du noyau thermoacoustique, une "échelle discrète de temps" est introduite à l'aide de l'indice m correspondant au $m^{\text{ième}}$ passage de l'onde de pression $\tilde{p}_m^\pm(x)$ à travers le noyau thermoacoustique.

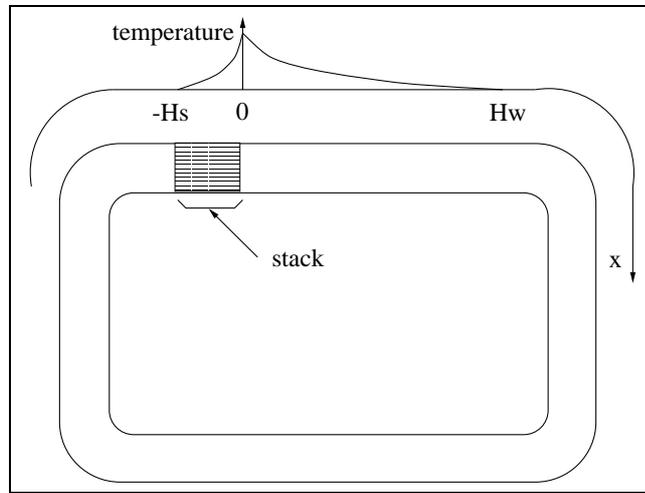


FIG. 2.1 – Représentation schématique du moteur thermoacoustique annulaire

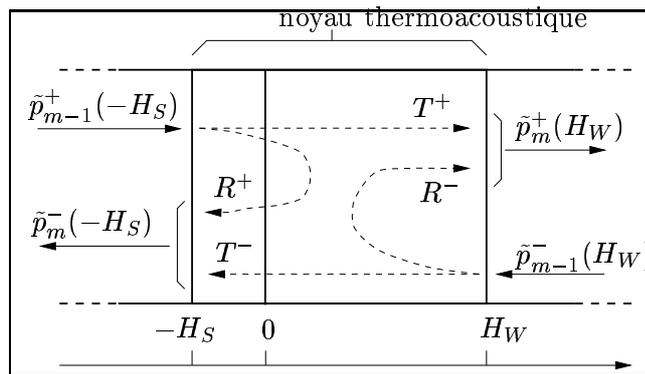


FIG. 2.2 – Ondes réfléchies et transmises aux interfaces du noyau thermoacoustique

Ainsi, comme l'illustre la Fig. 2.2, la pression acoustique à "l'instant" m peut être exprimée en fonction de sa valeur à "l'instant" $(m - 1)$ et des propriétés de réflexion et transmission du noyau

thermoacoustique décrites au moyen de sa matrice de diffusion comme suit :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_m^+(H_W) \\ \tilde{p}_m^-(H_S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T}^+ & \tilde{R}^- \\ \tilde{R}^+ & \tilde{T}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_{m-1}^+(-H_S) \\ \tilde{p}_{m-1}^-(H_W) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

où les coefficients \tilde{T}^\pm et \tilde{R}^\pm désignent les coefficients de transmission et de réflexion du noyau thermoacoustique. Le calcul de ces coefficients nécessite de résoudre l'équation (désormais classique) de la thermoacoustique linéaire [59, Eq. (54)] :

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - f_\nu) \frac{d\tilde{p}}{dx} \right] + \beta \left[1 - f_\nu + \frac{f_\nu - f_\kappa}{(1 - \sigma)} \right] \frac{dT_m}{dx} \frac{d\tilde{p}}{dx} + \left(\frac{\omega}{a_c} \right)^2 [1 + (\gamma - 1)f_\kappa] \tilde{p} = 0, \quad (2.3)$$

où β , γ et σ désignent respectivement le coefficient de dilatation thermique isobare, le coefficient polytropique du fluide et le nombre de Prandtl du fluide, et a_c la célérité adiabatique du son. Les fonctions f_ν et f_κ (qui dépendent notamment de la fréquence et de la température moyenne T_m) caractérisent l'efficacité du couplage visqueux et thermique entre champ acoustique et paroi du canal (pore du stack ou guide d'onde). Une expression analytique de ces fonctions peut être donnée dans le cas d'un canal cylindrique de rayon D :

$$f_{\nu,\kappa} = \frac{2}{iY_{\nu,\kappa}} \frac{J_1(iY_{\nu,\kappa})}{J_0(iY_{\nu,\kappa})}, \quad (2.4)$$

où

$$Y_{\nu,\kappa} = (1 + i) \frac{D}{\delta_{\nu,\kappa}}, \quad (2.5)$$

$\delta_\kappa = \sqrt{2\kappa(T_m(x))/\omega}$ et $\delta_\nu = \sqrt{2\nu(T_m(x))/\omega}$ désignant respectivement les épaisseurs de couches limites acoustique thermique et visqueuse (ν et κ représentent la viscosité cinématique et la diffusivité thermique du fluide). Les fonctions f_ν et f_κ peuvent également être déterminées dans le cas d'un pore carré [29, Annexe B] mais on préférera ici un stack dont les pores sont cylindriques en raison du gain substantiel en temps de calcul dans l'évaluation des fonctions $f_{\kappa,\nu}$.

Les travaux de Gusev et coll. [23] portant sur l'étude analytique d'un moteur thermoacoustique à ondes stationnaires ont permis de montrer que la transformation de l'équation (2.3) sous forme d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce permet d'obtenir une solution exacte de cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constant sous forme d'une série infinie d'opérateur intégraux. C'est sur la base de ce résultat qu'une expression analytique exacte des coefficients de la matrice de transfert du noyau thermoacoustique peut être obtenue ici (Eqs. (A.18) et (A.19)). Les coefficients de la matrice de diffusion \tilde{T}^\pm et \tilde{R}^\pm sont alors simplement déduits des coefficients de la matrice de transfert (à l'aide des Eqs (A.16) et (A.20)). Chacun des coefficients \tilde{T}^\pm et \tilde{R}^\pm étant exprimés de façon exacte sous forme d'une série infinie d'opérateurs intégraux, une solution numérique approchée de ces coefficients est finalement obtenue en tronquant leur expression séquentielle à un ordre suffisant.

2.1.2 Calcul du coefficient d'amplification thermoacoustique

Afin d'exprimer l'amplification ou l'atténuation de l'onde acoustique lors de son passage dans le noyau thermoacoustique, un coefficient α reliant les amplitudes de pression acoustique aux itérations m et $m - 1$ est introduit :

$$\forall x \in [0, L], \tilde{p}_m^\pm(x) = \tilde{p}_{m-1}^\pm(x) e^\alpha. \quad (2.6)$$

Dans l'équation (2.6), le coefficient α , que l'on qualifie dans la suite de coefficient d'amplification thermoacoustique, rend compte de l'évolution de l'amplitude des ondes acoustiques contrapropagatives décrivant un tour complet dans le guide d'onde et le noyau thermoacoustique. Le signe de α détermine si l'onde est amplifiée ($\alpha > 0$) ou atténuée ($\alpha < 0$), alors que la condition $\alpha = 0$ correspond au seuil de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique. En combinant les équations (2.1), (2.2) et (2.6), il vient :

$$\begin{pmatrix} \left(\tilde{T}^+ - e^{\alpha - ik_W L_W} \right) & \tilde{R}^- e^{-ik_W L_W} \\ \tilde{R}^+ e^{ik_W L_W} & \left(\tilde{T}^- - e^{\alpha - ik_W L_W} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_m^+(H_W) \\ \tilde{p}_m^-(H_W) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

où $L_W = L - H_S - H_W$ désigne la longueur du guide d'onde à température ambiante. Le système linéaire d'équations (2.7) admet une solution non triviale $(\tilde{p}_m^+(H_W), \tilde{p}_m^-(H_W))$ si le déterminant de la matrice est nul, condition pour laquelle l'équation

$$\left(e^{\alpha - ik_W L_W} - \tilde{T}^+ \right) \left(e^{\alpha - ik_W L_W} - \tilde{T}^- \right) - \tilde{R}^+ \tilde{R}^- = 0 \quad (2.8)$$

est vérifiée. Ainsi, après calcul des coefficients \tilde{T}^\pm et \tilde{R}^\pm de la matrice de diffusion du noyau thermoacoustique pour une distribution de température donnée, la résolution des parties réelle et imaginaire de l'équation (2.8) permet de déterminer le coefficient d'amplification α et la pulsation acoustique ω de déclenchement.

2.1.3 Calcul de la distribution du champ acoustique

Les paramètres α et ω étant connus, il est possible de calculer la distribution du champ acoustique dans l'ensemble du guide d'onde. Pour ce faire, la pression acoustique dans le guide d'onde à température ambiante est écrite comme suit :

$$\forall x \in [H_W, L - H_S], \tilde{p}(x) = \tilde{p}^+(H_W) \left[e^{ik_W(x-H_W)} + \tilde{R}(H_W) e^{-ik_W(x-H_W)} \right], \quad (2.9)$$

où la quantité complexe $\tilde{R}(H_W) = \tilde{p}^-(H_W)/\tilde{p}^+(H_W)$, dépendant de la distribution de température $T_m(x)$, est obtenue à l'aide de l'équation (2.7) :

$$\tilde{R}(H_W) = \frac{e^{\alpha - ik_W L_W} - \tilde{T}^+}{\tilde{R}^- e^{-ik_W L_W}}. \quad (2.10)$$

Faisant usage de l'équation de Navier-Stockes, la distribution transverse de la vitesse acoustique $\tilde{v}(x, r)$, puis sa valeur moyenne sur une section du guide d'onde $\langle \tilde{v}(x) \rangle_r$ sont alors exprimées en fonction de

$\tilde{p}(x)$, sur l'intervalle $H_W \leq x \leq L - H_S$ (Eq. (A.16)). La distribution du champ acoustique dans le noyau thermoacoustique est ensuite calculée à l'aide du procédé déjà mentionné de transformation de l'équation différentielle linéaire de la thermoacoustique en un système équivalent d'équations intégrales. Plus précisément, la pression acoustique et la vitesse acoustique moyenne sont exprimées en tout point du noyau thermoacoustique sous forme d'une série d'opérateurs intégraux (Eq. (A.18)) et en fonction des conditions aux limites $\tilde{p}(L - H_S)$ et $\langle \tilde{v}(L - H_S) \rangle_r$ obtenues précédemment.

Il faut cependant noter que dans l'équation (2.9), l'amplitude de l'onde acoustique $\tilde{p}^+(H_W)$ se propageant suivant les x positifs est une quantité inconnue. Par suite, les amplitudes totales de pression et vitesse acoustiques dans l'ensemble du résonateur sont indéterminées. En réalité, le seul moyen de connaître ces quantités consiste à résoudre le problème transitoire depuis le déclenchement de l'instabilité thermoacoustique jusqu'à saturation par effets non linéaires, problème transitoire dans lequel les équations régissant les transferts thermiques doivent être couplées aux équations de la thermoacoustique via les processus non linéaires de conductivité acoustiquement induite et de vent acoustique. Ce n'est pas là l'objet des travaux présentés dans ce chapitre. Cependant, en fixant la quantité $\tilde{p}^+(H_W)$ à une valeur arbitraire dans l'équation (2.9), il est possible d'obtenir la structure du champ acoustique dans l'ensemble du dispositif pour une distribution de température donnée. L'examen de la structure du champ acoustique pourra dès lors fournir des indications quant à l'influence de la distribution de température sur l'amplification thermoacoustique, et par suite, fournir des indications quant à l'influence des processus non linéaires d'interaction entre champ acoustique et champ de température. Ainsi, pour l'ensemble des résultats présentés au paragraphe 2.3, la quantité $\tilde{p}^+(H_W)$ est-elle fixée de telle sorte que l'intensité acoustique $I(H_W)$ vaut 1 W (avec $I = (1/2)Re(\tilde{p}\langle \tilde{v}^* \rangle_r)$ (* désignant le complexe conjugué)), et seules les distributions des variables acoustiques dans l'ensemble du résonateur sont analysées.

2.2 Influence du régime d'interaction thermoacoustique dans le stack sur la distribution du champ acoustique

2.2.1 Démarche suivie

Parmi les nombreux paramètres contrôlant l'interaction thermoacoustique entre un fluide oscillant et une paroi soumise à un gradient de température, la quantité $\delta_{\kappa,\nu}/R_s$, rapport des épaisseurs de couches limites visqueuse ou thermique sur le rayon géométrique d'un pore du stack, est une grandeur importante. En effet, la nature de l'interaction entre fluide et paroi diffère selon que le couplage fluide structure est de type quasi adiabatique (QA, $\delta_{\kappa,\nu}/R_s \ll 1$) ou quasi isotherme (QI, $(\delta_{\kappa,\nu}/R_s)^2 \gg 1$). Ainsi ce paragraphe a-t-il pour objet d'analyser l'influence du rapport $\delta_{\kappa,\nu}/R_s$ sur la distribution du champ acoustique, la distribution de température dans le noyau thermoacoustique étant supposée linéaire. Pour ce faire, l'ensemble des paramètres géométriques (longueur du stack, du résonateur...) du modèle présenté au paragraphe 2.1 sont fixés aux valeurs correspondantes du dispositif

expérimental, conformément au tableau 2.1. Ensuite les caractéristiques thermophysiques du fluide de travail à la température ambiante T_C sont fixées à leur valeur pour de l'air sous pression atmosphérique ($\rho_a(T_C) = 1.2 \text{ Kg.m}^{-3}$, $C_a = 1003 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$), hormis la conductivité thermique $\lambda_a(T_C)$ du fluide qui est supposée variable. Il s'agit là d'un choix parmi d'autres possibles pour faire varier la quantité $\delta_\kappa = \sqrt{\frac{2\lambda_a}{\rho_a C_a \omega}}$ et donc le régime d'interaction fluide-structure, depuis le régime QA jusqu'au régime QI. Ajoutons d'une part que la viscosité du fluide est elle aussi amenée à varier corrélativement à la conductivité thermique en maintenant le nombre de Prandtl constant ($\sigma = \frac{\nu}{\kappa} = 0.7$), et d'autre part que la variation de ces propriétés visqueuses et thermiques avec la température est prise en compte dans le modèle ($\nu \propto \kappa \propto T_m^{\beta+1}$, avec $\beta = 0.73$ [56]). Enfin, précisons qu'il n'y a pas lieu de connaître ici les caractéristiques thermophysiques des parois du stack, dont l'inertie thermique est supposée très grande devant celle du fluide de travail (dans la négative, l'équation de la thermoacoustique (Eq. (2.3)) doit être réécrite pour prendre en compte les propriétés du stack).

L (longueur du guide d'onde)	2.24 m
H_S (longueur du stack)	0.05 m ou 0.15 m
H_W (partie du guide d'onde inhomogène en température)	0.4 m
R_w (rayon interne du guide d'onde)	26.5 mm
R_s (rayon géométrique d'un pore du stack)	0.45 mm
Φ (porosité longitudinale du stack)	0.81

TAB. 2.1 – Dimensions caractéristiques du dispositif expérimental utilisées dans le modèle.

2.2.2 Influence du régime d'interaction thermoacoustique sur les conditions de déclenchement

La Fig. 2.3 donne la distribution du champ acoustique (amplitude de pression, de vitesse et intensité acoustiques) au déclenchement ($\alpha = 0$) dans l'ensemble du résonateur pour $\delta_\kappa/R_s = 0.46$, valeur correspondant au dispositif expérimental, rempli d'air sous pression atmosphérique. Les discontinuités observables aux extrémités du stack sur la vitesse acoustique sont simplement dues à la conservation du débit massique. On peut notamment observer (Fig. 2.3 (d)) que l'intensité acoustique produite dans le stack compense exactement les pertes pariétales dans le reste du résonateur, ce qui correspond bien à la condition de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique.

La Fig. 2.4 présente l'évolution du rapport $T_H/T_C = T_m(x=0)/T_m(x=-H_S)$ entre températures chaude et froide et de la fréquence $f = \omega/2\pi$ au déclenchement en fonction du rapport $\delta_{\kappa,\nu}/R_s$. La courbe de stabilité ainsi obtenue s'avère en bon accord les résultats expérimentaux de Yazaki [73]. En particulier, un minimum pour le rapport de température T_H/T_C critique est observé lorsque $\delta_\kappa/R_s \approx 0.5$ (c'est à dire entre les régimes QA et QI). Une augmentation drastique de T_H/T_C est également observable lorsque $\delta_\kappa/R_s > 1$. La fréquence de déclenchement f ne varie pas quant à elle de façon significative : sa valeur reste de l'ordre de $f \approx a_c/L$.

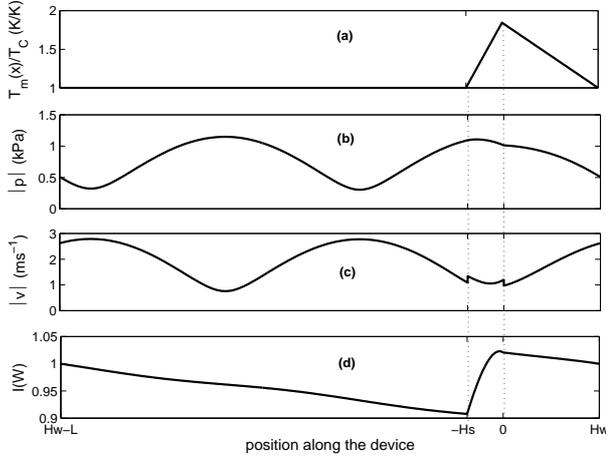


FIG. 2.3 – Distribution spatiale de la pression acoustique $|\tilde{p}|$ (b), de la vitesse acoustique $|\tilde{v}|$ (c) et de l'intensité acoustique $I = 1/2\text{Re}(\tilde{p}\tilde{v}^*)$ dans l'ensemble du résonateur pour le cas d'une distribution de température linéaire (a) et au seuil de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique ($\alpha = 0$).

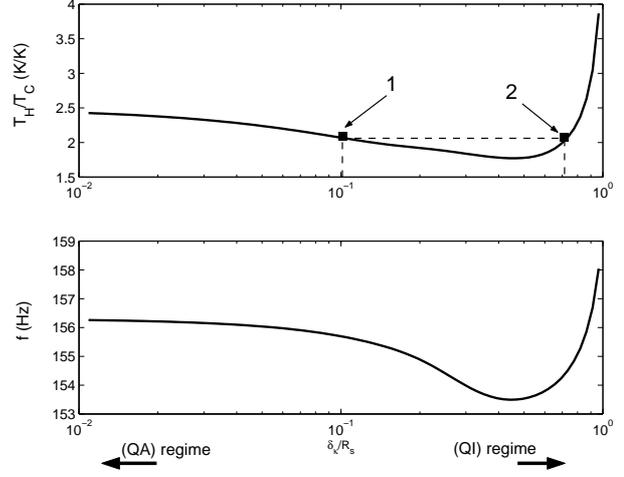


FIG. 2.4 – Evolution du rapport T_H/T_C et de la fréquence f au déclenchement, en fonction de δ_κ/R_s

2.2.3 Influence du régime d'interaction thermoacoustique sur la distribution du champ acoustique

Sur la Fig. 2.4 deux points particuliers (notés 1 et 2) sont repérés sur la courbe de stabilité. Pour ces deux points, le déclenchement se produit pour un même rapport T_H/T_C , mais pour différentes valeurs de $\delta_{\kappa,\nu}/R_s$. Or, il apparaît clairement sur la Fig. 2.5. que si les conditions de déclenchement sont les mêmes pour ces deux points, il n'en est pas de même concernant la distribution des champs acoustiques associés à ces deux configurations. En effet, on remarque que lorsque $\delta_{\kappa,\nu}/R_s$ varie, les minima/maxima de pression acoustique $|\tilde{p}|$ et de vitesse acoustique $|\tilde{v}|$ se trouvent alors translatés et la phase relative Φ_{pv} entre ces deux quantités varie de façon significative (notamment dans le stack). De plus, l'analyse de la distribution de l'intensité acoustique I montre que les pertes viscothermiques pariétales dans le résonateur sont plus importantes dans le cas $\delta_\kappa/R_s = 0.7$ (point 2, vers le régime QI) que dans le cas $\delta_\kappa/R_s = 0.1$ (point 1, vers le régime QA).

Afin de d'examiner plus profondément les résultats illustrés sur la Fig. 2.4, on propose ici d'analyser ces résultats en termes de conversion d'énergie. D'après Tominaga [66, Eqs. (105)-(108)], la puissance totale par unité de volume produite par interaction thermoacoustique pour un gaz parfait dans un pore de géométrie donnée peut être décomposée en la somme de quatre termes comme suit :

$$w = w_\kappa + w_\nu + w_{SW} + w_{TW}, \quad (2.11)$$

où

$$w_\kappa \equiv \frac{1}{2} \frac{\gamma - 1}{\rho_m a_c^2} \text{Im}(F_S f_\kappa) \omega |\tilde{p}|^2 \quad (2.12)$$

et

$$w_\nu \equiv \frac{1}{2} \omega \rho_m \frac{\text{Im}(f_\nu)}{|1 - f_\nu|^2} |\langle \tilde{v} \rangle_r|^2 \quad (2.13)$$

sont des quantités négatives décrivant respectivement les pertes visqueuses et thermiques à proximité des parois du pore, et où les quantités

$$w_{SW} \equiv -\frac{1}{2} \frac{dx T_m}{T_m} \text{Im}(F_S h) |\tilde{p}| |\langle \tilde{v} \rangle_r| \sin(\Phi_{pv}) \quad (2.14)$$

et

$$w_{TW} \equiv \frac{1}{2} \frac{dx T_m}{T_m} \text{Re}(F_S h) |\tilde{p}| |\langle \tilde{v} \rangle_r| \cos(\Phi_{pv}), \quad (2.15)$$

proportionnelles à $\sin \phi_{pv}$ et $\cos \phi_{pv}$, représentent respectivement les densités de puissances acoustiques produites par les composantes stationnaire ("SW") et progressive ("TW") de l'onde acoustique (pour une onde progressive pure, $\Phi_{pv} = 0 \Rightarrow w_{SW} = 0$), les facteurs F_S et h s'exprimant en fonctions de f_ν et f_κ comme suit :

$$F_S = \frac{1}{1 + e f_\kappa}, \quad (2.16)$$

$$h = \frac{f_\kappa - f_\nu}{(1 - \sigma)(1 - f_\nu)}, \quad (2.17)$$

où $e = C_f/C_s$ est le rapport de capacité calorifique du fluide sur celle du solide. Ainsi, chacun des quatre termes de puissance convertie dans un pore de rayon R_s et de longueur H_S est obtenu par intégration :

$$W_{\kappa,\nu,TW,SW} = \pi R_s^2 \int_{-H_S}^0 w_{\kappa,\nu,TW,SW}(x) dx. \quad (2.18)$$

La puissance totale convertie dans le stack $W_{tot} = n_C \cdot (W_\kappa + W_\nu + W_{TW} + W_{SW})$ (où n_C représente le nombre de canaux constituant le stack) est en fait liée au coefficient d'amplification thermoacoustique : lorsque W_{tot} est égale aux pertes pariétales dans le reste du résonateur, la condition $\alpha = 0$ est alors nécessairement vérifiée.

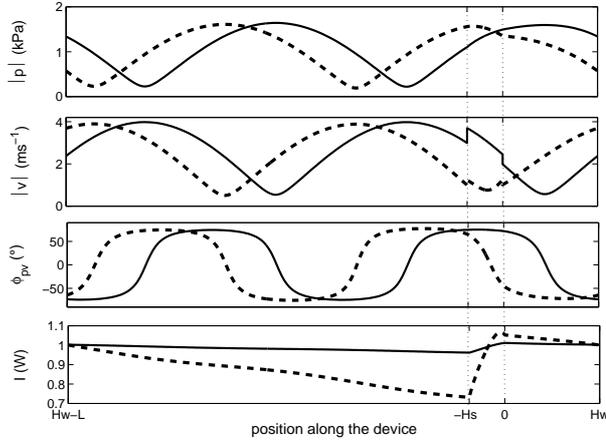


FIG. 2.5 – Distribution spatiale de la pression acoustique, de la vitesse acoustique, de la phase ϕ_{pv} et de l'intensité acoustique dans l'ensemble du résonateur pour le cas d'une distribution de température linéaire et au seuil de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique. Trait plein : $\delta_{\kappa}/R_s = 0.1$, tirets : $\delta_{\kappa}/R_s = 0.7$

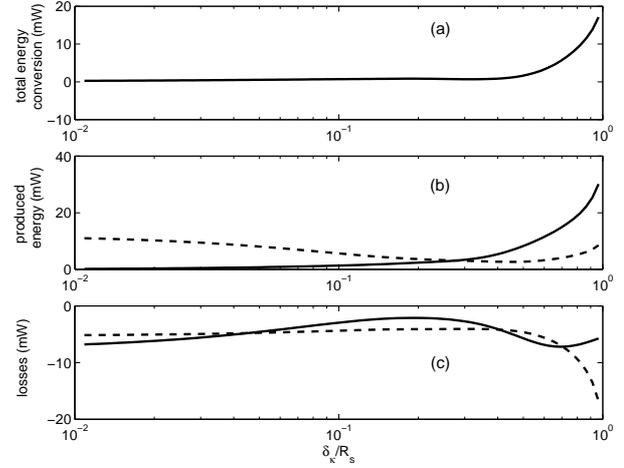


FIG. 2.6 – Conversion d'énergie dans un pore du stack en fonction de δ_{κ}/R_s au déclenchement ($\alpha = 0$). (a) Conversion totale d'énergie. (b) Composante stationnaire W_{SW} (tirets) et progressive W_{TW} (trait plein) de la puissance acoustique produite. (c) Composante visqueuse W_{ν} (tirets) et thermique W_{κ} (trait plein) des pertes.

Sur la Fig. 2.6, les différentes composantes de la puissance totale produite par interaction thermoacoustique dans un pore sont représentées au déclenchement en fonction de δ_{κ}/R_s depuis le régime QA jusqu'au régime QI. Ces résultats amènent à formuler deux remarques. D'une part, la puissance totale $W = W_{\kappa} + W_{\nu} + W_{TW} + W_{SW}$ augmente lorsque le régime tend vers une interaction QI : ceci s'explique aisément par le fait qu'à l'augmentation de $\delta_{\kappa, \nu}$ est associée une augmentation des pertes pariétales dans le résonateur à température ambiante, ce qui implique dès lors que la puissance acoustique produite dans le stack augmente corrélativement pour compenser les pertes et satisfaire la condition de déclenchement. D'autre part, les variations de chacun des termes $W_{\kappa, \nu, TW, SW}$ avec $\delta_{\kappa, \nu}$ sont significatives : en régime QA, la majeure partie de la puissance produite est W_{SW} . En régime QI, la composante propagative W_{TW} de la puissance acoustique produite prévaut, alors que la majeure partie des pertes est due aux effets visqueux.

Enfin, les résultats illustrés sur les Fig. (2.5) et (2.6) témoignent d'une propriété remarquable particulière au résonateur annulaire : à la différence des moteurs thermoacoustiques à ondes stationnaires, les lieux des minima/maxima de pression et vitesse acoustiques ainsi que la phase Φ_{pv} sont ici des quantités variables avec $\delta_{\kappa, \nu}/R_s$. Cette possibilité de variation de la structure du champ acoustique avec $\delta_{\kappa, \nu}/R_s$ confère au dispositif annulaire un "degré de liberté" supplémentaire et la faculté de "s'auto-régler" de telle sorte que la conversion d'énergie thermoacoustique se fasse de façon plus efficace. Ce

résultat issu de simulations numériques confirme les résultats expérimentaux de Ueda et coll. [67] qui ont observé des variations de la structure du champ acoustique (mesurée par Anémométrie Laser Doppler dans un dispositif analogue) en fonction des dimensions des pores du stack, et aboutissent aux mêmes conclusions.

2.3 Influence de la distribution de température sur l'amplification thermoacoustique

2.3.1 Influence de la distribution de température sur le coefficient d'amplification thermoacoustique

Dans ce paragraphe, l'influence du profil de température sur l'amplification thermoacoustique est examinée. Pour ce faire, le rapport $\delta_{\kappa,\nu}/R_s$ est tout d'abord fixé à sa valeur correspondant au dispositif expérimental ($\delta_{\kappa}/R_s = 0.46$ à température ambiante avec $\sigma = \nu/\kappa = 0.7$). Puis, la température T_H à l'extrémité chaude du stack est réglée de telle sorte que la condition de déclenchement ($\alpha = 0$) soit vérifiée pour une distribution de température linéaire. Enfin, afin de pouvoir décrire différents types de distribution de température dans le stack ($-H_S \leq x \leq 0$) et dans le reste du noyau thermoacoustique ($0 \leq x \leq H_W$), les températures $T_m(x = -H_S/2)$ et $T_m(x = H_W/2)$ sont définies comme paramètres de contrôle variables (cf. Fig. 2.7) et la distribution de température est alors calculée au moyen d'une interpolation par spline cubique.

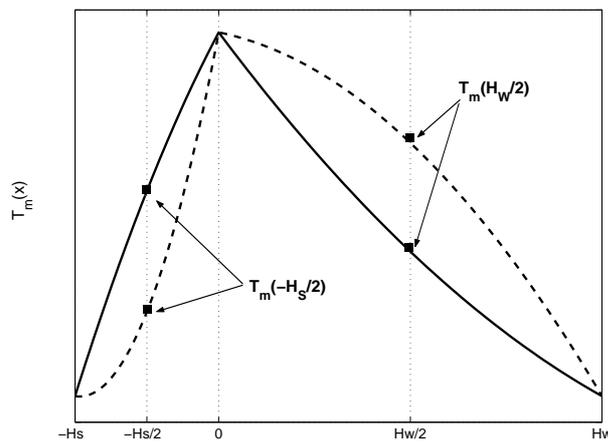


FIG. 2.7 – Les températures T_H et T_C étant fixées, le choix des deux paramètres de contrôle $T_m(H_W/2)$ et $T_m(-H_S/2)$ permet de décrire différents types de distribution de température dans le noyau thermoacoustique, au moyen d'une interpolation par spline cubique

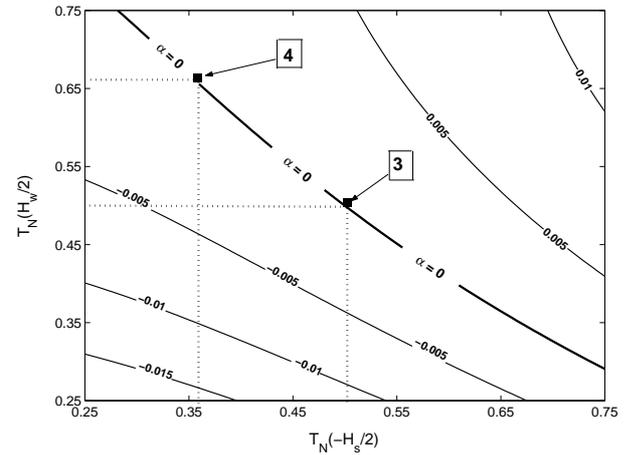


FIG. 2.8 – Isocontours du coefficient d'amplification α en fonction de $T_N(H_W/2)$ et $T_N(-H_S/2)$, avec $H_S = 0.15m$ et $H_W = 0.4m$

Sur la Fig. 2.8, l'évolution du coefficient d'amplification thermoacoustique α est tracée en fonction des températures normalisées $T_N(-H_S/2)$ et $T_N(H_W/2)$ ($T_N(x) = (T_m(x) - T_C)/(T_H - T_C)$). Les variations obtenues pour α , dont l'origine est uniquement due à la modification du profil de température (pour un T_H/T_C fixé) sont de l'ordre de $\pm 10^{-2}$. De telles variations sont significatives : un calcul rapide montre en effet qu'une amplification $\alpha = 10^{-2}$ correspond à une augmentation pour $|\tilde{p}|$ de 450% en 1 seconde à 150Hz. De plus, la forme des isocontours de la Fig. 2.8 indique clairement que l'amplification thermoacoustique ne dépend pas seulement de la distribution de température dans le stack, mais aussi substantiellement du paramètre $T_N(H_W/2)$ contrôlant la distribution de température dans la partie "passive" $0 \leq x \leq H_W$ du noyau thermoacoustique. A ce sujet, il est intéressant de noter que l'augmentation du paramètre $T_N(H_W/2)$, qui pourrait se traduire d'un point de vue physiquement réaliste comme résultant du transport de chaleur par convection forcée due au vent acoustique (cf. courbe tiretée en Fig. 2.7), joue un rôle positif sur l'amplification thermoacoustique ($T_N(H_W/2) \nearrow \Rightarrow \alpha \nearrow$).

2.3.2 Influence de la distribution de température sur la distribution du champ acoustique

Si les résultats de la Fig. 2.8 mettent en évidence l'effet important de la forme du champ de température sur l'amplification thermoacoustique, il ne fournissent cependant pas d'éléments permettant d'apporter une explication physique à ces observations. Pour ce faire, les influences respectives des distributions de température dans le stack et dans le guide d'onde vont être considérées distinctement. Sur la Fig. 2.9, la distribution du champ acoustique (représentée par les quantités $|\tilde{p}(x)|$, $|\tilde{v}(x)|$, et $\Phi_{pv}(x)$) est tracée pour différentes distributions de température dans la partie passive du noyau thermoacoustique. Il apparaît qu'à mesure que $T_N(H_W/2)$ augmente, les valeurs de $|\tilde{p}|$, $|\tilde{v}|$, et Φ_{pv} évoluent significativement. Par suite, comme le montre la Fig. 2.10, les termes de conversion d'énergie (équations (2.12)-(2.15)) varient. En toute rigueur, les variations de $W_{\kappa,\nu,TW,SW}$ pourraient également être attribuées aux variations des fonctions f_κ et f_ν (et par suite F_S et h). Cependant, puisque le champ de température dans le stack est supposé ici constant, les fonctions $f_{\kappa,\nu}$ ne dépendent que de la fréquence d'oscillation $f = \omega/2\pi$, dont les variations avec $T_N(H_W/2)$ sont infimes. En conséquence, on peut écrire :

$$\begin{aligned} W_\kappa &\propto \int |\tilde{p}|^2 dx, \\ W_\nu &\propto \int |\tilde{v}|^2 dx, \\ W_{SW} &\propto \int |\tilde{p}||\tilde{v}|\sin\Phi_{pv} dx, \\ W_{TW} &\propto \int |\tilde{p}||\tilde{v}|\cos\Phi_{pv} dx. \end{aligned} \tag{2.19}$$

De plus, d'après les résultats illustrés en Fig. 2.10, il apparaît que les variations de $|\tilde{p}|$ et $|\tilde{v}|$ dans le stack provoquent des variations significatives de W_κ et W_ν , tandis que l'énergie acoustique produite $W_{TW} + W_{SW}$ reste quasiment constante. En conséquence, l'augmentation globale de l'énergie totale convertie W (et donc de α) à mesure que $T_N(H_W/2)$ augmente est principalement due à une décroissance globale des pertes pariétales $|W_\kappa + W_\nu|$.

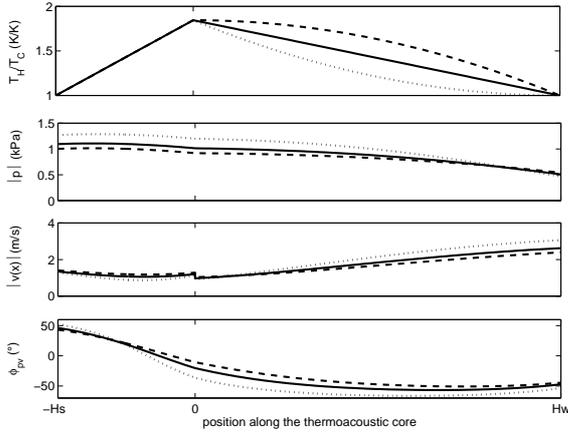


FIG. 2.9 – Distributions du champ acoustique dans le noyau thermoacoustique relatives à différentes distributions de température dans la région $0 \leq x \leq H_W$. Trait plein : $(T_N(H_W/2) = 1/2)$, $\alpha = 0$; trait pointillé : $T_N(H_W/2) = 1/4$, $\alpha = -1.1 \cdot 10^{-2}$; trait tireté : $T_N(H_W/2) = 3/4$, $\alpha = 4.7 \cdot 10^{-3}$.

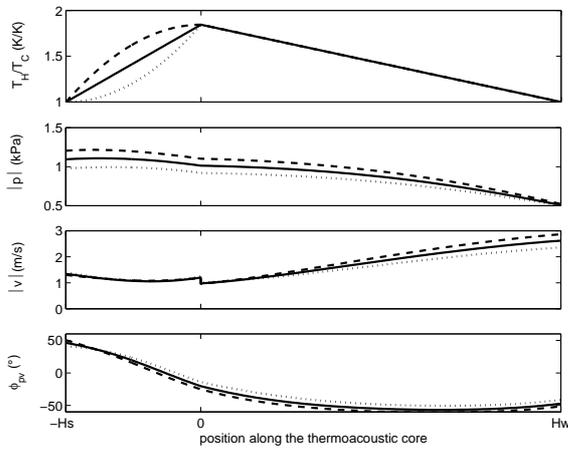


FIG. 2.11 – Distributions du champ acoustique dans le noyau thermoacoustique associées à différentes distributions de température dans le stack. Trait plein : $(T_N(H_W/2) = 1/2)$, $\alpha = 0$; trait pointillé : $T_N(-H_S/2) = 1/4$, $\alpha = -6 \cdot 10^{-3}$; trait tireté : $T_N(-H_S/2) = 3/4$, $\alpha = 7 \cdot 10^{-3}$.

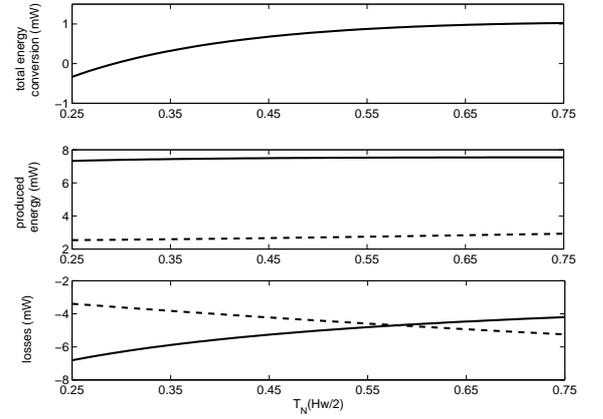


FIG. 2.10 – Conversion d'énergie dans un pore du stack en fonction de $T_N(H_W/2)$. (a) Énergie totale convertie. (b) Composantes stationnaire W_{SW} (trait tireté) et progressive W_{TW} (trait plein) de l'énergie acoustique produite. (c) Composantes visqueuse W_ν (trait tireté) et thermique W_κ (trait plein) des pertes pariétales.

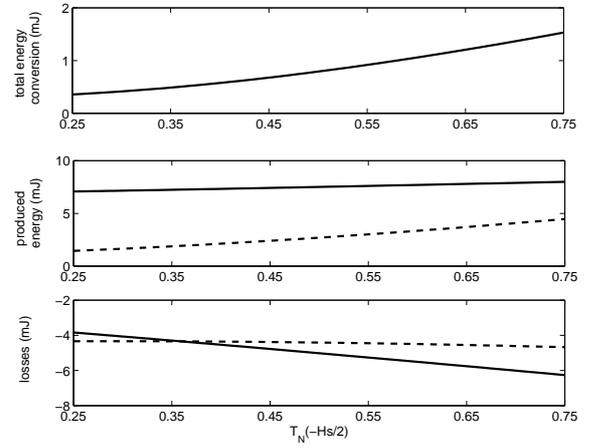


FIG. 2.12 – Conversion d'énergie dans un pore du stack en fonction de $T_N(-H_S/2)$. (a) Conversion totale d'énergie. (b) Composantes stationnaire W_{SW} (trait tireté) et progressive W_{TW} (trait plein) de l'énergie acoustique produite. (c) Composantes visqueuse W_ν (trait tireté) et thermique W_κ (trait plein) des pertes pariétales.

Les figures 2.11 et 2.12 présentent l'influence d'une modification de la distribution de température dans le stack sur le champ acoustique et le processus thermoacoustique. Les variations de $T_N(-H_S/2)$ entraînent là aussi une modification de la distribution du champ acoustique (Fig. 2.11). De plus, l'analyse de l'évolution des termes de conversion d'énergie avec $T_N(-H_S/2)$ (Fig. 2.12) permet de conclure que les variations de W sont essentiellement dues aux variations de $|\bar{p}|$ et Φ_{pv} (et par suite, de W_κ , W_{TW} , et W_{SW}) dans le stack. Cependant, la relation entre conversion d'énergie thermoacoustique et variables acoustiques est ici plus complexe que dans les équations (2.19) : la distribution de température dans le stack n'étant plus supposée constante, l'influence sur le processus thermoacoustique des variations de f_κ et f_ν (résultant du fait que les propriétés viscothermiques κ et ν du fluide dépendent de la température moyenne T_m) doit donc a priori être quantifiée.

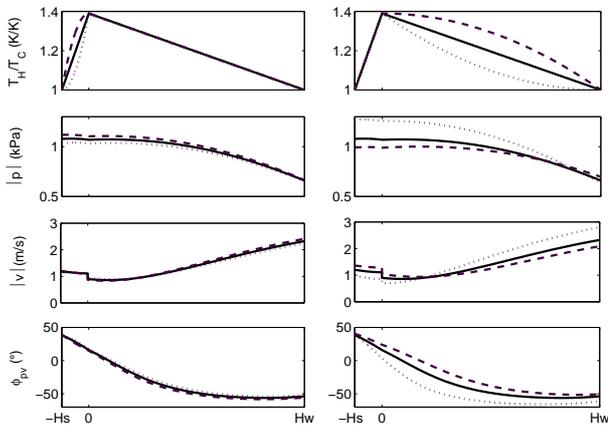


FIG. 2.13 – Distributions du champ acoustique dans le noyau thermoacoustique associées à diverses distributions de température, avec $H_S = 0.05\text{ m}$ et $H_W = 0.4\text{ m}$.

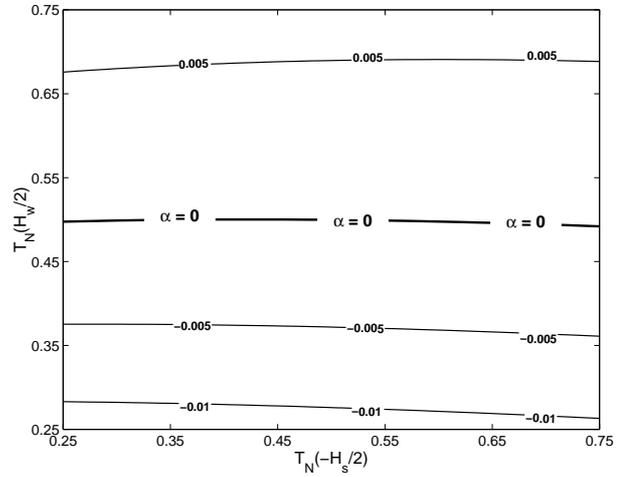


FIG. 2.14 – Isocontours du coefficient d'amplification α en fonction de $T_N(H_W/2)$ et $T_N(-H_S/2)$, avec $H_S = 0.05\text{ m}$ et $H_W = 0.4\text{ m}$.

Les résultats des Figs. 2.3 à 2.12 ont été obtenus avec un stack de longueur $H_S = 15\text{ cm}$. Sur les Figs 2.13 et 2.14, l'effet de la distribution de température est réexaminé lorsque la longueur du stack est réduite à 5 cm . Ici, comme l'illustre la Fig. 2.13, l'effet d'un changement du profil de température dans le stack n'entraîne pas d'évolution significative du champ acoustique. De même, comme l'illustre la Fig. 2.14, le coefficient d'amplification thermoacoustique est manifestement plus sensible à la distribution de température dans la région $0 \leq x \leq H_W$ qu'à celle dans le stack. Ainsi, l'effet du champ de température sur le processus d'amplification thermoacoustique est principalement dû au changement consécutif de la structure du champ acoustique (quelle que soit la longueur du stack). En particulier, l'inhomogénéité de température dans la partie passive du noyau thermoacoustique ($0 \leq x \leq H_W$) agit comme un "mélangeur" d'ondes contrapropagatives, affectant les amplitudes et phases des ondes dans la région active du noyau thermoacoustique (i.e. le stack).

Enfin, il est intéressant de noter que les résultats numériques obtenus corroborent bien les résultats expérimentaux du paragraphe 1.4 concernant l'effet de la convection naturelle sur le déclenchement de l'instabilité thermoacoustique. En effet, les résultats illustrés en Fig. 1.23 montrent que le rapport T_H/T_C au déclenchement est plus faible lorsque le résonateur est orienté suivant la configuration de la Fig. 1.22 (a) que suivant les deux autres configurations. Or, du fait de la déformation du profil de température par convection naturelle, l'orientation de la Fig. 1.22 (a) se traduit qualitativement par une valeur plus élevée du paramètre $T_N(H_W/2)$ en regard de sa valeur dans les deux autres configurations. De ce fait, conformément aux résultats de la Fig. 2.14, l'augmentation de $T_N(H_W/2)$ doit se traduire en une augmentation du coefficient α , ce qui équivaut à dire que le seuil de déclenchement T_H/T_C (qui satisfait $\alpha = 0$) doit être plus faible dans la configuration (a) que dans les configurations (b) et (c).

2.4 Discussion

Dans ce chapitre, un modèle analytique décrivant le processus d'amplification dans un moteur thermoacoustique annulaire, sans restriction sur la longueur du stack ou la forme du champ de température, a été présenté. Sur la base de ce modèle, des simulations numériques ont permis d'étudier l'influence du régime d'interaction (QA ou QI) et de la distribution de température sur les conditions de déclenchement et l'allure de la distribution du champ acoustique dans l'ensemble du dispositif. Ces investigations ont permis d'établir que le changement de la distribution de température dans l'ensemble du noyau thermoacoustique (et particulièrement dans la partie passive) entraîne une modification significative de la répartition spatiale des variables acoustiques $|\bar{p}|$, $|\bar{v}|$, and Φ_{pv} dans le stack, et par suite une variation du travail acoustique produit.

Cet effet important du champ de température sur l'amplification thermoacoustique est probablement un élément majeur à prendre en compte pour expliquer la dynamique complexe des régimes transitoires observés au chapitre 1. On sait en effet que le transport de chaleur de la source chaude vers la source froide dû à l'interaction thermoacoustique [72] d'une part, et que la convection forcée due à l'excitation d'un écoulement redressé directionnel de flux massique non nul [22, 24, 30] d'autre part, peuvent modifier l'allure de la distribution de température au cours du régime transitoire (en sus de leur effet sur le rapport T_H/T_C). Sous l'hypothèse (à valider) que ce sont ces deux processus non linéaires qui contrôlent tout ou partie du mécanisme de saturation de l'onde acoustique, il est alors aisément concevable que la dynamique des régimes transitoires observables puisse être autrement plus complexe qu'une simple croissance exponentielle suivie d'une saturation, tel que pourrait le prévoir par exemple un modèle analytique de saturation par cascade harmonique dans le cadre de l'acoustique faiblement non linéaire (§1.5), notamment parce que les temps caractéristiques relatifs au développement des effets du vent acoustique et de la conductivité acoustiquement induite sur le champ de température sont très probablement non négligeables devant le temps caractéristique d'amplification de l'onde (i.e. $\tau_{ampl} = (\alpha \times f)^{-1} \approx 1s$, pour $\alpha \approx 10^{-2}$ et $f \approx 150Hz$). De ce fait, le régime d'amplification et de saturation de l'onde doit alors opérer de manière séquentielle (chacun des

processus non linéaires agissant à différents instants du régime transitoire et/ou pour différents niveaux d'amplitude acoustique), de manière semblable par exemple au processus de double-déclenchement signalé au chapitre 1. Reste que la compréhension fine des régimes transitoires exposés au chapitre 1 nécessite de développer une théorie qui permette de décrire les interactions entre champ acoustique et champ de température en régime transitoire. Ceci fait l'objet des chapitres suivants.

Chapitre 3

Modèles analytiques et simulations numériques du régime transitoire

Le développement en régime transitoire de l'instabilité thermoacoustique donne lieu à des dynamiques très complexes, auxquelles sont associées des évolutions transitoires significatives du champ de température dans l'ensemble du noyau thermoacoustique (voir chapitre 1). De surcroît, la dynamique des régimes transitoires observés dépend fortement du mode de chauffage (externe ou interne) et de l'orientation du dispositif relativement au champ de pesanteur. C'est ainsi que l'objectif du chapitre 2 est de montrer que la forme du champ de température dans l'ensemble du noyau thermoacoustique est un paramètre qui influence fortement l'amplification thermoacoustique. Il est donc très probable que les excitations en régime transitoire d'un écoulement redressé et d'un flux d'enthalpie thermoacoustique (conductivité acoustiquement induite) jouent un rôle prépondérant dans la saturation de l'onde acoustique.

A la lumière des résultats de ces chapitres 1 et 2, il devient donc possible de modéliser le régime transitoire dans un moteur thermoacoustique annulaire depuis le déclenchement de l'onde acoustique jusqu'à sa saturation par effets non linéaires d'interaction entre champ acoustique et champ de température. A défaut d'envisager une résolution numérique directe des équations du mouvement [26], la description du régime transitoire est réalisée dans ce chapitre de façon analytique (puis finalement numérique). Ce travail suppose en particulier de simplifier de façon drastique la description des transferts thermiques et de l'écoulement redressé. L'objectif d'une telle approche est de reproduire qualitativement, voire quantitativement, les régimes transitoires observés dans les expériences, et de dégager les paramètres prépondérants qui contrôlent la saturation de l'onde acoustique. Ainsi, par une compréhension fine des principaux mécanismes mis en jeu, ce travail doit permettre à long terme de dégager des solutions permettant d'optimiser le fonctionnement des moteurs thermoacoustiques annulaires, voire des machines thermoacoustiques au sens large.

3.1 Descriptif du modèle de régime transitoire

La Fig. 1 présente un schéma du noyau thermoacoustique, constitué de trois milieux distincts : le fluide de travail (air sous pression atmosphérique), les parois du stack (céramique de cordiérite), et les parois du tube (inox). A chacun de ces trois milieux sont associées des caractéristiques thermophysiques bien distinctes, dont les valeurs sont reportées dans le tableau 3.1.

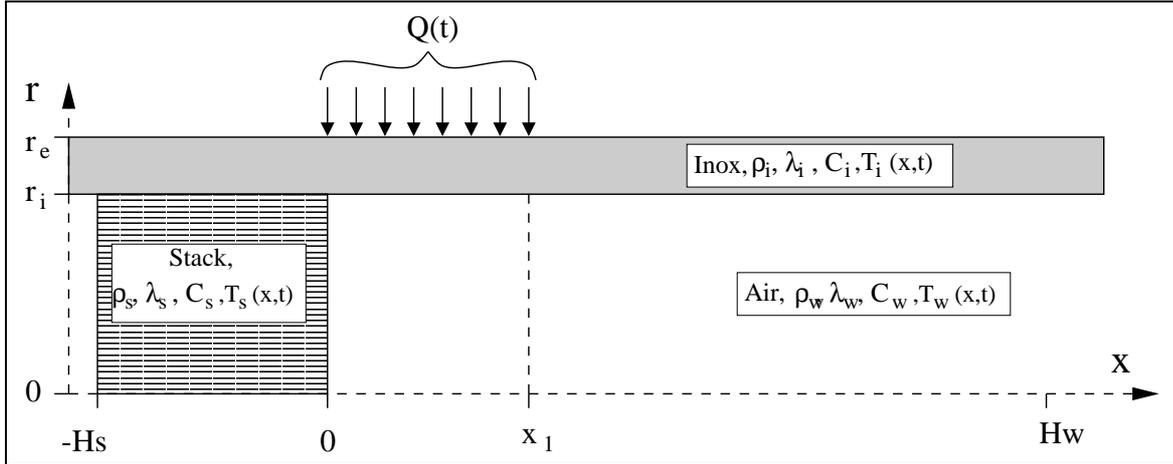


FIG. 3.1 – Représentation schématique du noyau thermoacoustique dans le cas d'un chauffage externe, constitué de trois milieux distincts : les parois du guide d'onde (inox), le fluide dans la partie passive du noyau thermoacoustique, et le stack (milieu supposé homogène).

propriétés thermophysiques (à $T_C = 294 K$)			
	masse volumique	capacité calorifique	conductivité thermique
parois du guide d'onde (inox)	$\rho_i = 7900 \text{ kg/m}^3$	$C_i = 460 \text{ J/kg/K}$	$\lambda_i = 14 \text{ W/m/K}$
stack (cordierite)	$\rho_c = 2500 \text{ kg/m}^3$	$C_c = 900 \text{ J/kg/K}$	$\lambda_c = 2.5 \text{ W/m/K}$
fluide (air)	$\rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$	$C_a = 1003 \text{ J/kg/K}$	$\lambda_a = 0.026 \text{ W/m/K}$
propriétés géométriques			
L : longueur du guide d'onde	2.24 m		
r_e : rayon externe du guide d'onde	30.15 mm		
r_i : rayon interne du guide d'onde	26.5 mm		
H_s : longueur du stack	0.05 m		
H_w : longueur de la partie passive du noyau thermoacoustique	1 m		
D_a : diamètre géométrique d'un pore du stack	0.9 mm		
D_c : épaisseur des parois en céramique du stack	0.1 mm		
Φ : porosité du stack ($\Phi = \left(\frac{D_a}{D_a + D_c}\right)^2$)	0.81		

TAB. 3.1 – Dimensions caractéristiques et propriétés thermophysiques des matériaux utilisés dans le dispositif expérimental.

Afin de décrire le régime transitoire depuis le déclenchement de l'onde acoustique jusqu'à sa saturation par effets non linéaires d'interaction entre champ acoustique et champ de température, l'équation d'évolution de l'amplitude de pression acoustique doit être couplée à l'équation du transport de la chaleur, dans laquelle l'effet du vent acoustique et de la conductivité acoustiquement induite doivent être pris en compte. Dans le paragraphe 3.1.1, l'équation d'évolution de l'amplitude efficace de pression acoustique est exprimée en fonction du coefficient d'amplification thermoacoustique. Ce coefficient α dépend à tout instant de la distribution de température dans le noyau thermoacoustique, distribution de température qui est implicitement supposée ne dépendre que de la coordonnée longitudinale x . Le transport de chaleur doit donc être décrit de façon unidimensionnelle (§ 3.1.2), dans le cadre de l'approximation "ailette" [63]. Ceci suppose en particulier que le stack (constitué à la fois d'air et de céramique) soit considéré comme un milieu homogène de caractéristiques thermophysiques

$$\begin{aligned}\rho_s C_s &= \rho_a C_a \Phi + \rho_c C_c (1 - \Phi), \\ \lambda_s &= \lambda_a \Phi + \lambda_c (1 - \Phi),\end{aligned}$$

où les indices s, c, a se réfèrent respectivement aux milieux stack, céramique, et air, et où Φ désigne la porosité longitudinale du stack. Le problème thermique se réduit alors à un jeu d'équations aux dérivées partielles monodimensionnelles décrivant le couplage entre les champs de température $T_s(x, t)$ dans le stack, $T_w(x, t)$ dans la partie passive du noyau thermoacoustique ($\rho_w C_w = \rho_a C_a$, $\lambda_w = \lambda_a$), et $T_i(x, t)$ dans les parois du guide d'onde en inox.

NB : Dans les simulations numériques effectuées, les variations avec la température de la masse volumique de l'air ρ_a (équation d'état d'un gaz parfait) et de la conductivité thermique de l'air λ_a sont prises en compte avec pour λ_a la loi empirique [56] :

$$\lambda_a(T) = \lambda_a(T_c) \left(\frac{T}{T_c} \right)^{0.73}.$$

3.1.1 Equation d'évolution de l'amplitude de pression acoustique

Dans le chapitre 2, le caractère amplificateur ou atténuateur du noyau thermoacoustique est décrit par l'introduction du coefficient d'amplification thermoacoustique α dans l'équation (2.6) :

$$\forall x \in [0, L], \tilde{p}_m^\pm(x) = \tilde{p}_{m-1}^\pm(x) e^\alpha. \quad (3.1)$$

L'indice m représente le nombre de passages effectués par les composantes contrapropagatives \tilde{p}_m^\pm de la pression acoustique $\tilde{p}_m = \tilde{p}_m^+ + \tilde{p}_m^-$ à travers le noyau thermoacoustique, et le nombre réel α dépend de la distribution de température dans l'ensemble du noyau thermoacoustique. Dans l'équation (3.1), exprimée dans le domaine fréquentiel, l'indice m (nombre de tours) peut être vu comme une échelle de temps : l'onde \tilde{p}^+ (respectivement \tilde{p}^-) se propageant vers les x positifs (resp. négatifs) parcourt un tour complet (i.e. la distance $L \approx \lambda$) à la célérité adiabatique du son a_c en un temps $\delta t \approx \lambda/a_c = 1/f$, λ et f désignant respectivement la longueur d'onde et la fréquence de déclenchement. Ainsi, si $p_1(x, t)$ désigne l'amplitude efficace des oscillations de pression acoustique du mode fondamental en un point x donné du guide d'onde et à un instant donné t , son évolution au bout d'un instant dt s'exprime en

fonction du coefficient d'amplification thermoacoustique comme suit :

$$p_1(x, t + dt) = p_1(x, t)e^{\alpha \times f \times dt}, \tag{3.2}$$

de sorte que l'équation d'évolution de l'amplitude efficace de pression acoustique se ramène à une équation différentielle du premier ordre à coefficient non constant :

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \frac{p_1(t)}{\tau_{ampl}}, \tag{3.3}$$

où le temps caractéristique d'amplification

$$\tau_{ampl} = (\alpha (T_{s,w}(x, t)) \times f)^{-1} \tag{3.4}$$

dépend à chaque instant de la distribution de température dans le noyau thermoacoustique.

3.1.2 Equations du transport de la chaleur

L'équation du transport de la chaleur est écrite ici sous forme unidimensionnelle dans chaque milieu. Cette approche est communément appelée l'approximation "ailette", qui consiste à supposer que les isothermes au sein de chaque ailette (i.e. la paroi du guide d'onde, le stack ou l'air dans le guide d'onde) sont indépendantes en première approximation de la coordonnée radiale; le couplage entre chaque milieu est alors décrit en utilisant des coefficients phénoménologiques d'échange (représentés par les quantités $\gamma_{is,si,iw,wi,i\infty}$ dans les équations à suivre).

a- Les équations du transport de la chaleur (bilans thermiques)

i) Parois du guide d'onde

$$\forall x \in [-H_S, 0], \forall t \in [0, \infty[,$$

$$\frac{\partial T_i(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\rho_i C_i} \frac{\partial^2 T_i(x, t)}{\partial x^2} - \gamma_{is} [T_i(x, t) - T_s(x, t)] - \gamma_{i\infty} [T_i(x, t) - T_\infty], \tag{3.5}$$

$$\forall x \in [0, x_1], \forall t \in [0, \infty[,$$

$$\frac{\partial T_i(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\rho_i C_i} \frac{\partial^2 T_i(x, t)}{\partial x^2} - \gamma_{iw} [T_i(x, t) - T_w(x, t)] + \underbrace{\frac{Q(t)}{x_1 \rho_i C_i \pi (r_e^2 - r_i^2)}}_{\text{chauffage}}, \tag{3.6}$$

$$\forall x \in [x_1, H_W], \forall t \in [0, \infty[,$$

$$\frac{\partial T_i(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\rho_i C_i} \frac{\partial^2 T_i(x, t)}{\partial x^2} - \gamma_{iw} [T_i(x, t) - T_w(x, t)] - \gamma_{i\infty} [T_i(x, t) - T_\infty]. \tag{3.7}$$

ii) A l'intérieur du guide d'onde

$$\forall x \in [-H_S, 0], \forall t \in [0, \infty[,$$

$$\frac{\partial T_s(x, t)}{\partial t} + v_s(t) \frac{\partial T_s(x, t)}{\partial x} = \frac{\lambda_s(t)}{\rho_s C_s} \frac{\partial^2 T_s(x, t)}{\partial x^2} - \gamma_{si} [T_s(x, t) - T_i(x, t)], \quad (3.8)$$

$$\forall x \in [0, H_W], \forall t \in [0, \infty[,$$

$$\frac{\partial T_w(x, t)}{\partial t} + v_w(t) \frac{\partial T_w(x, t)}{\partial x} = \frac{\lambda_w}{\rho_w C_w} \frac{\partial^2 T_w(x, t)}{\partial x^2} - \gamma_{wi} [T_w(x, t) - T_i(x, t)]. \quad (3.9)$$

Dans l'équation (3.8) (respectivement (3.9)), la déformation du profil de température due à l'excitation d'un vent acoustique unidirectionnel est prise en compte par le terme $v_s \partial_x T$ (resp. $v_w \partial_x T$). La vitesse de l'écoulement dans le stack v_s est une vitesse effective prenant en compte les caractéristiques thermophysiques de l'air et des parois du stack, ainsi que la porosité du stack Φ (voir Tab. 3.1) :

$$v_s(t) = \frac{\Phi \rho_a C_a v_w(t)}{\rho_s C_s \Phi} \quad (3.10)$$

L'effet de pompage thermoacoustique de chaleur de la source chaude vers la source froide peut être pris en compte dans le terme de diffusivité thermique du stack $\kappa_s = \lambda_s / \rho_s C_s$ sous forme d'une conductivité thermique acoustiquement induite : $\lambda_s = \lambda_s(p_1(t))$.

b- Expression analytique des coefficients de couplage

Dans les équations (3.5)-(3.9), les termes $\gamma_{i,s,si,iw,wi}$ représentent des coefficients de couplage entre les trois milieux (i.e. inox, stack, air), qui prennent en compte l'échange par convection forcée dû à l'excitation d'un écoulement redressé de vitesse $v_w(t)$ dans le guide d'onde (et $v_w(t)/\Phi$ dans le stack), et dirigé de gauche à droite sur la Fig. 3.1. Le coefficient $\gamma_{i\infty}$ représente le coefficient d'échange (par convection naturelle) avec le milieu extérieur de température T_∞ . Tous les détails de calcul permettant d'aboutir aux expressions des coefficients de couplage sont présentés en annexe B ; leurs expressions analytiques finales sont reportées ci-dessous :

★ Convection naturelle externe des parois du guide d'onde cylindrique

$$\gamma_{i\infty}(x, t) = \frac{2\pi r_e}{\rho_i C_i \pi (r_e^2 - r_i^2)} 0.53 \frac{\lambda_a}{2r_e} \left(\frac{\beta g (2r_e)^3}{\nu_a \lambda_a} \right)^{\frac{1}{4}} (T_i(x, t) - T_\infty)^{\frac{1}{4}}, \quad (3.11)$$

où $g = 9.81$ est l'accélération de la pesanteur, β est le coefficient d'expansion thermique, et ν_a est la viscosité cinématique de l'air.

★ Convection forcée interne dans le guide d'onde

$$\gamma_{iw} = \frac{2\pi r_i}{\rho_i C_i \pi (r_e^2 - r_i^2)} h_{int}(t), \quad (3.12)$$

$$\gamma_{wi} = \frac{2\pi r_i}{\rho_w C_w \pi r_i^2} h_{int}(t), \quad (3.13)$$

$$\text{avec } h_{int}(t) = \frac{\lambda_a}{2r_i} \left(3.66^3 + 1.66^3 \sigma \frac{\rho_a v_w(t) 4r_i^2}{\mu_a H_W} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.14)$$

★ Echange conducto-convectif entre stack et paroi du guide d'onde

$$\gamma_{is}(t) = \frac{2\pi r_i}{\rho_i C_i \pi (r_e^2 - r_i^2)} h^{(cc)}, \quad (3.15)$$

$$\gamma_{si}(t) = \frac{2\pi r_i}{\rho_s C_s \pi r_i^2} h^{(cc)}, \quad (3.16)$$

où le coefficient d'échange

$$h^{(cc)} = \frac{1}{2\pi r_i} \left(\frac{\ln(\frac{r_i}{r_i/2})}{2\pi \lambda_s^\perp} + \frac{\ln(\frac{r_i + (r_e - r_i)/2}{r_i})}{2\pi \lambda_i} \right)^{-1} \quad (3.17)$$

prend en compte le flux de chaleur conductif entre l'ailette inox et l'ailette stack et où l'effet de la convection forcée dans les pores du stack est prise en compte dans l'expression

$$\lambda_s^\perp = \left(\frac{D_c}{\lambda_c (D_a + D_c)} + \frac{1}{4\lambda_a \left(3.66^3 + 1.66^3 \sigma \frac{v_s(t) D_a^2}{\nu_a H_S} \right)^{\frac{1}{3}} + \lambda_c D_c} \right)^{-1} \quad (3.18)$$

de la conductivité thermique radiale équivalente λ_s^\perp du stack (D_c et D_a représentent respectivement l'épaisseur des parois en céramique et l'épaisseur des couches d'air dans un pore).

c- Conditions aux limites

Pour que le problème thermique soit complètement décrit, il convient d'ajouter aux équations (3.5)-(3.9) les conditions aux limites :

★ Température imposée en $x = -H_S$

$$\forall t \in [0, \infty[, T_{i,s}(-H_S, t) = T_\infty, \quad (3.19)$$

★ Température imposée en $x = H_W$

$$\forall t \in [0, \infty[, T_{i,w}(H_W, t) = T_\infty, \quad (3.20)$$

★ Continuité du flux thermique dans les parois du guide d'onde

$$\forall t \in [0, \infty[, \partial_x T_i(x = 0^-, t) = \partial_x T_i(x = 0^+, t), \quad (3.21)$$

$$\forall t \in [0, \infty[, \partial_x T_i(x = x_1^-, t) = \partial_x T_i(x = x_1^+, t), \quad (3.22)$$

★ Continuité du flux thermique à l'interface stack-air

$$\forall t \in [0, \infty[, \lambda_s(t) \partial_x T_s(x = 0^-, t) = \lambda_w \partial_x T_w(x = 0^+, t). \quad (3.23)$$

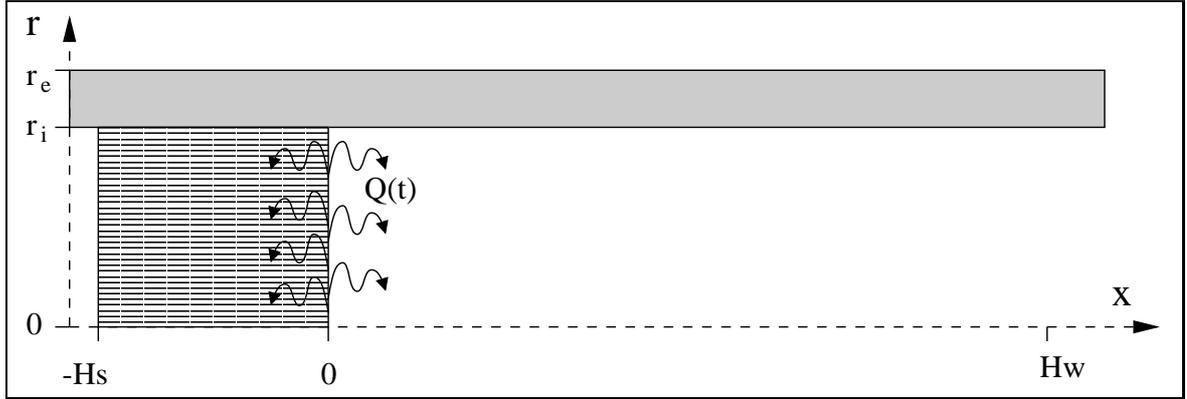


FIG. 3.2 – Représentation schématique du noyau thermoacoustique dans le cas d'un chauffage interne

3.1.3 Cas d'un chauffage interne

Dans le paragraphe 3.1.2, les équations du transport de la chaleur sont écrites pour un mode de chauffage externe, conformément à la Fig. 3.1, où la puissance thermique $Q(t)$ est injectée dans le système par les parois du tube en Inox (pour $0 \leq x \leq x_1$). Les résultats de simulations numériques doivent dans ce cas être comparés aux résultats expérimentaux du paragraphe 1.3.1. Le cas d'un chauffage interne (résultats expérimentaux du paragraphe 1.3.2) peut également être modélisé en modifiant les équations du paragraphe 3.1.2, conformément au schéma de la Fig. 3.2. Dans ce cas, la puissance thermique injectée dans le système est prise en compte dans la condition de continuité de flux thermique à l'interface stack-air dans le guide d'onde. Ainsi, dans le cas d'un chauffage interne, les équations (3.5)-(3.7) doivent être remplacées par les deux équations suivantes :

$$\forall x \in [-H_s, 0], \forall t \in [0, \infty[,$$

$$\frac{\partial T_i(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\rho_i C_i} \frac{\partial^2 T_i(x, t)}{\partial x^2} - \gamma_{is} [T_i(x, t) - T_s(x, t)] - \gamma_{i\infty} [T_i(x, t) - T_\infty], \quad (3.24)$$

$$\forall x \in [0, H_w], \forall t \in [0, \infty[,$$

$$\frac{\partial T_i(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\rho_i C_i} \frac{\partial^2 T_i(x, t)}{\partial x^2} - \gamma_{iw} [T_i(x, t) - T_w(x, t)] - \gamma_{i\infty} [T_i(x, t) - T_\infty], \quad (3.25)$$

et l'équation (3.23) doit être remplacée par :

$$\forall t \in [0, \infty[, \lambda_s(t) \partial_x T_s(x = 0^-, t) = \lambda_w \partial_x T_w(x = 0^+, t) + \frac{Q(t)}{\pi r_i^2}. \quad (3.26)$$

3.2 Description des processus non linéaires de saturation

3.2.1 Expression analytique de la conductivité thermique acoustiquement induite

Dans les équations (3.8) et (3.23), la conductivité thermique du stack λ_s est supposée variable du temps, de sorte que le flux de chaleur thermoacoustique de la source chaude vers la source froide est pris en compte dans le modèle. Ainsi, les variations de λ_s sont exprimées comme suit :

$$\lambda_s(t) = \lambda_{s_0} + \lambda_{s_{ac}}(t), \quad (3.27)$$

où λ_{s_0} représente la conductivité thermique du stack initiale ($\lambda_s = \lambda_a \Phi + \lambda_c (1 - \Phi)$), et où la conductivité thermique acoustiquement induite $\lambda_{s_{ac}}$, estimée à partir de l'expression analytique du flux d'enthalpie thermoacoustique [23, Eq. (56)], s'écrit :

$$\bar{\lambda}_{s_{ac}} = \frac{C_a}{2\omega^3 \rho_a} \frac{1 - \sigma^{\frac{3}{2}}}{(1 - \sigma^2) \sqrt{\sigma}} |\partial_x \bar{p}|^2 \text{Im} f_\nu. \quad (3.28)$$

L'expression de cette conductivité acoustiquement induite peut être simplifiée par l'analyse des cas asymptotiques quasi adiabatique et quasi isotherme.

i) Interaction quasi adiabatique ($\delta_\kappa/R_s \ll 1$).

D'après [24, Eqs. (19),(23)], et sous l'hypothèse d'une onde purement propagative se propageant vers les x positifs dans le résonateur, les expressions de la fonction visqueuse f_ν et du gradient de pression dans le stack s'écrivent

$$f_\nu^{(QA)} \approx \frac{(1+i)\delta_\nu}{R_s}, \quad (3.29)$$

$$\partial_x \bar{p}^{(QA)} \approx i \frac{\omega}{a_c} \bar{p}, \quad (3.30)$$

de sorte que l'expression de la conductivité acoustiquement induite se ramène à

$$\frac{\delta_\kappa}{R_s} \ll 1 \Rightarrow \bar{\lambda}_{s_{ac}}^{(QA)} = \frac{C_a}{2\omega \rho_a a_c^2} \frac{1 - \sigma^{\frac{3}{2}}}{(1 - \sigma^2) \sqrt{\sigma}} \frac{\delta_\nu}{2R_s} \bar{p}^2. \quad (3.31)$$

ii) Interaction quasi isotherme ($(\delta_\kappa/R_s)^2 \gg 1$).

D'après [24, Eqs. (41),(43)], et sous l'hypothèse d'une onde purement propagative se propageant vers les x positifs dans le résonateur, les expressions de la fonction visqueuse f_ν et du gradient de pression dans le stack s'écrivent

$$f_\nu^{(QI)} \approx 1 + \frac{i}{6} \left(\frac{R_s}{\delta_\kappa} \right)^2 + o \left(\frac{R_s}{\delta_\kappa} \right)^2, \quad (3.32)$$

$$\partial_x \tilde{p}^{(QI)} \approx -6 \frac{\omega}{a_c} \left(\frac{\delta_\nu}{R_s} \right)^2 \tilde{p}, \quad (3.33)$$

de sorte que l'expression de la conductivité acoustiquement induite se ramène à

$$\left(\frac{\delta_\kappa}{R_s} \right)^2 \gg 1 \Rightarrow \tilde{\lambda}_{s_{ac}}^{(QI)} = \frac{C_a}{2\omega\rho_a a_c^2 (1-\sigma^2) \sqrt{\sigma}} 6 \left(\frac{\delta_\nu}{R_s} \right)^2 \tilde{p}^2 \quad (3.34)$$

iii) Régime intermédiaire.

Dans le dispositif expérimental, le régime d'interaction fluide paroi n'est ni (QI), ni (QA), puisque $\delta_\kappa/R_s \approx 0.4$. Le calcul de $\lambda_{s_{ac}}(t)$ suppose donc de calculer à chaque instant la distribution du champ acoustique, afin de reporter la valeur du gradient de pression acoustique dans le stack dans l'équation (3.28). Cependant ici, par souci de simplicité et pour limiter les temps de calculs, la conductivité acoustiquement induite est supposée proportionnelle au carré de la pression acoustique moyenne dans le stack (comme dans les cas asymptotiques) :

$$\lambda_s(t) = \lambda_{s_0} + \Gamma_\lambda p_1^2(t). \quad (3.35)$$

On ne dispose pas a priori d'une estimation théorique de la valeur du coefficient de proportionnalité Γ_λ pour $\delta_\kappa/R_s \approx 0.4$, mais on peut néanmoins connaître une plage de valeurs possible pour ce paramètre grâce à l'analyse des cas asymptotiques. En effet, d'après les équation (3.31) et (3.34), on obtient $\Gamma_\lambda^{(QI)} \approx 8.10^{-5} W m^{-1} K^{-1} Pa^{-2}$ pour $\delta_\kappa/R_s = 3$ et $\Gamma_\lambda^{(QA)} \approx 2.10^{-7} W m^{-1} K^{-1} Pa^{-2}$ pour $\delta_\kappa/R_s = 0.1$, de sorte que dans l'équation (3.35), on s'attend à avoir :

$$10^{-7} < \Gamma_\lambda < 10^{-4}. \quad (3.36)$$

Ce paramètre Γ_λ peut ensuite être ajusté dans les simulations à une valeur telle qu'un bon accord quantitatif et qualitatif entre expérience et simulation soit observé.

3.2.2 Modèle simplifié de vitesse du vent acoustique

Dans les équations (3.8) et (3.9), l'effet de l'écoulement redressé est pris en compte sous forme d'un terme de convection forcée résultant d'un écoulement unidirectionnel, dirigé dans le sens des x positifs. Le profil de cet écoulement est supposé laminaire dans l'estimation des coefficients d'échanges. En réalité, la description de l'écoulement redressé dans les systèmes thermoacoustiques est un problème beaucoup plus complexe qui fait à l'heure actuelle l'objet de nombreux travaux expérimentaux [30, 64, 67] et théoriques [5, 6, 7, 9, 24, 27, 36]. Il faut différencier le cas des systèmes fermés (cas des moteurs thermoacoustique à ondes stationnaires) du cas des systèmes annulaires. Dans les deux cas l'écoulement redressé tire essentiellement son origine des contraintes de Reynolds se développant dans les couches limites acoustiques. Dans le cas d'un système fermé le flux massique associé à l'écoulement redressé est nécessairement nul, de sorte qu'au sein d'une section du résonateur (ou du stack) il existe des courants inverses (comme dans le cas illustré sur la Fig. 4 p. 7 de l'introduction). Dans le cas d'un résonateur annulaire, le sens et l'amplitude de l'écoulement diffèrent également suivant

la position radiale de la particule de fluide considérée, mais l'existence d'une boucle rend possible que le flux massique moyen sur une section du résonateur (ou du stack) soit non nul [22]. De ce fait, la génération d'un écoulement redressé dans les dispositifs annulaires doit faire l'objet d'une étude détaillée. Une description analytique complète de la génération de l'écoulement redressé dans un moteur thermoacoustique annulaire a été développée par Gusev et coll. [24]. En complément de ces travaux, Mironov et coll. [36] montrent qu'une contribution de l'ordre de 30 % à l'écoulement peut être due à l'assymétrie dans la génération de vortex et de turbulences aux extrémités chaude et froide du stack [36] (l'assymétrie étant due à la différence de température aux extrémités du stack). Parallèlement, la mesure de la vitesse moyenne de l'écoulement a été réalisée par Job et coll. [30] en régime stationnaire par la modification de la distribution de température induite dans le noyau thermoacoustique; les résultats confirment d'une part que l'amplitude de la vitesse d'écoulement est proportionnelle à l'intensité acoustique, et d'autre part que le rapport de proportionnalité est en bon accord avec la théorie (compte tenu des incertitudes de mesure). Par ailleurs, l'étude de la dynamique temporelle du développement du vent acoustique dans un résonateur annulaire a fait l'objet de la thèse d'Amari [5]. Ses travaux analytiques et numériques portant sur la génération de vent acoustique dans un acoustitron (résonateur annulaire dans lequel une onde acoustique progressive pure est générée par la vibration des parois) ont permis d'aboutir à une estimation du temps caractéristique d'établissement de l'écoulement [7] en fonction du régime d'interaction fluide-structure caractérisé par la quantité δ_v/D , où D représente le diamètre du résonateur.

C'est à partir des travaux d'Amari, Gusev et Job précédemment cités qu'une description analytique simple de la loi d'évolution des vitesses d'écoulement $v_{s,w}$ est proposée ici. Pour ne pas alourdir la lecture de ce paragraphe, la démarche adoptée est reportée en annexe C, où il est montré que la vitesse globale d'écoulement dans le guide d'onde v_w est décrite qualitativement par une équation différentielle du premier ordre comme suit :

$$\frac{d v_w}{d t} + \frac{v_w}{\tau_v} = \frac{\Gamma_v}{\tau_v} p_1^2(t). \quad (3.37)$$

où le paramètre Γ_v représente le coefficient de proportionnalité en régime stationnaire entre vitesse moyenne de l'écoulement et carré de la pression acoustique efficace, et où le paramètre τ_v représente un temps caractéristique d'établissement de l'écoulement (c'est le temps de réponse à un échelon d'intensité acoustique). Le paramètre Γ_v peut être estimé à partir des mesures de S. Job [30], tandis que τ_v est estimé à partir du travail analytique de M. Amari [7]. Les valeurs obtenues pour ces deux paramètres sont :

$$\tau_v \approx 0.9 \text{ s}, \quad \Gamma_v \approx 4.10^{-8} \text{ m s}^{-1} \text{ Pa}^{-2}. \quad (3.38)$$

L'expression de la vitesse d'écoulement dans le stack est ensuite simplement déduite de l'équation (3.10).

3.2.3 Les processus de cascade harmonique et de pertes mineures

Bien que les observations expérimentales de régimes transitoires complexes reportées au chapitre 1, ainsi que l'analyse proposée au paragraphe 1.5 permettent d'affirmer que les processus de cascade harmonique et de pertes mineures ne peuvent pas être responsables de tous les effets observés, il n'est pas exclu que ces processus jouent un rôle déterminant dans la saturation de l'onde. Dans la mesure où ces effets non linéaires sont relativement faciles à modéliser (moyennant quelques simplifications déjà décrites au paragraphe 1.5), il peut donc être intéressant de les inclure dans les calculs en sus des processus non linéaires d'interaction entre champ acoustique et champ de température. Dans ce cas, il convient de remplacer l'équation (3.3) par le système d'équations

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\omega \frac{\beta_{nl}}{2} \frac{p_1 p_2}{\rho_a a_c^2} + \frac{p_1}{\tau_{ampl}} - \frac{1}{\rho_a a_c^2} \frac{p_1^2}{\tau_{minor}} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = \omega \frac{\beta_{nl}}{2} \frac{p_1^2}{\rho_a a_c^2} - \frac{p_2}{\tau_{att}}, \quad (3.40)$$

déduit des équations (1.24)-(1.25), où p_1 et p_2 désignent respectivement les amplitudes efficaces des oscillations de pression acoustique du mode fondamental et du premier harmonique. Dans ce système d'équations, le temps caractéristique d'amplification τ_{ampl} est issu du calcul du coefficient d'amplification thermoacoustique $\alpha(T_{s,w}(x,t))$, et les temps caractéristiques τ_{att} et τ_{minor} sont ceux estimés au chapitre 1 :

$$\tau_{att} \approx 2.2 \cdot 10^{-2} \text{ s}, \quad (3.41)$$

$$\tau_{minor} \approx 2.4 \cdot 10^{-2} \text{ s}. \quad (3.42)$$

NB : Le système d'équations (1.24)-(1.25) (et donc (3.39)-(3.40)) admet l'hypothèse que le résonateur annulaire est le siège d'une onde purement propagative. Or, ceci n'est pas le cas en réalité, comme l'illustre par exemple la Fig. 2.5 p. 44, où la phase entre pression et vitesse acoustique n'est pas constamment nulle en tout lieu du résonateur. Néanmoins, dans toute la partie du résonateur à température ambiante (i.e. dans la majeure partie du résonateur), il est possible de décomposer l'oscillation de pression acoustique suivant ses deux composantes contrapropagatives $p_{1,2}(x,t) = p_{1,2}^+(t) \sin(\omega t - 2\pi x/L) + p_{1,2}^-(t) \sin(\omega t + 2\pi x/L)$. De plus, du fait que dans la modélisation du processus de cascade harmonique, le rôle des termes non linéaires d'ordre supérieurs à 2 a été négligé (dans le cadre de l'approximation de l'acoustique faiblement non linéaire), la propagation non linéaire de chacune des ondes contrapropagatives peut être considérée comme indépendante (pas de couplage) dans toute la région à température homogène [19], de sorte que la démarche adoptée au paragraphe 1.5.2 reste valide ici (le processus de cascade harmonique prenant lieu essentiellement dans la région du guide d'onde à température froide).

3.3 Procédure de calcul du régime transitoire

3.3.1 Schéma de résolution

Dans les paragraphes 3.1 et 3.2, toutes les équations régissant les transferts thermiques, le processus d'amplification thermoacoustique, et les effets non linéaires de saturation sont écrites. Il est dès lors possible de calculer le régime transitoire de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique, que le mode de chauffage soit externe (§ 3.1.2) ou interne (§ 3.1.3), en prenant en compte, via les processus non linéaires de conductivité thermique acoustiquement induite (§ 3.2.1) ou de vent acoustique (§ 3.2.2), le couplage entre l'évolution du champ de température et celle de l'amplitude de pression acoustique (§ 3.1.1 ou § 3.2.3 si les effets de cascade harmonique et de pertes mineures sont pris en compte). Naturellement, il n'est pas envisageable de résoudre de façon analytique un tel système d'équations non linéaires, et la résolution du régime transitoire se fait ici par des méthodes numériques de différences finies. Concernant la partie thermique, la méthode numérique choisie pour résoudre le jeu d'équations aux dérivées partielles est tirée d'un manuel dédié aux méthodes numériques appliquées aux transferts thermiques [42] : il s'agit de la méthode de Crank-Nicholson, dont le principal avantage, outre sa simplicité de mise en oeuvre, est qu'elle est inconditionnellement stable pour des problèmes classiques de diffusion thermique linéaire. Dans le cas présent, l'existence de non linéarités dues aux effets du vent acoustique et de la conductivité acoustiquement induite oblige à choisir un pas temporel suffisamment court (de l'ordre du dixième de seconde) pour ne pas risquer de générer des instabilités numériques (divergence) et ne pas nuire à la précision du calcul. Concernant la partie acoustique, l'équation (3.3) ou le système d'équations (3.39)-(3.40) sont résolus par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. La procédure de calcul du régime transitoire est donc la suivante (voir Fig. 3.3).

- * Tout d'abord, la pression acoustique est supposée nulle dans l'ensemble du dispositif, puis la puissance thermique fournie à l'échangeur de chaleur chaud est initialement fixée à une valeur Q_0 telle, qu'en calculant la distribution de température correspondante, et après stabilisation des températures dans l'ensemble du noyau thermoacoustique, le coefficient d'amplification thermoacoustique α soit de l'ordre de -10^{-5} (i.e. juste sous le seuil de déclenchement).

- * A l'instant $t = t_0$, l'amplitude de pression acoustique initiale est fixée à une valeur telle (généralement $10^{-2} Pa$) que les transferts thermiques associés à l'écoulement redressé et à la conductivité acoustiquement induite sont négligeables. Au même instant $t = t_0$, un incrément de puissance ΔQ est appliqué.

- * A ce point, le champ de température $T_{s,w}(x, t + dt)$ à l'instant $t + dt$ est calculé, puis par suite le temps caractéristique d'amplification $\tau_{ampl}(t + dt)$, l'amplitude de pression acoustique $p_1(t + dt)$ et enfin les termes de couplage $v_{s,w}(t + dt)$ et $\lambda_s(t + dt)$ sont déduits.

- * Cette opération est alors répétée jusqu'à saturation finale de l'amplitude de l'onde acoustique.

Chacune des simulations numériques présentées par la suite est obtenue avec un pas d'échantillonnage temporel de $7.5 \cdot 10^{-2} s$. Le calcul, effectué sous Matlab sur un ordinateur Pentium 4, CPU 2.4 GHz, 512 Mo de RAM, prend alors environ 6 h pour un régime transitoire d'une durée de 300 s. Le lecteur trouvera en annexe E quelques précisions sur la résolution numérique du régime transitoire,

ainsi que sur le choix du pas d'échantillonnage permettant d'assurer la convergence des résultats de simulations.

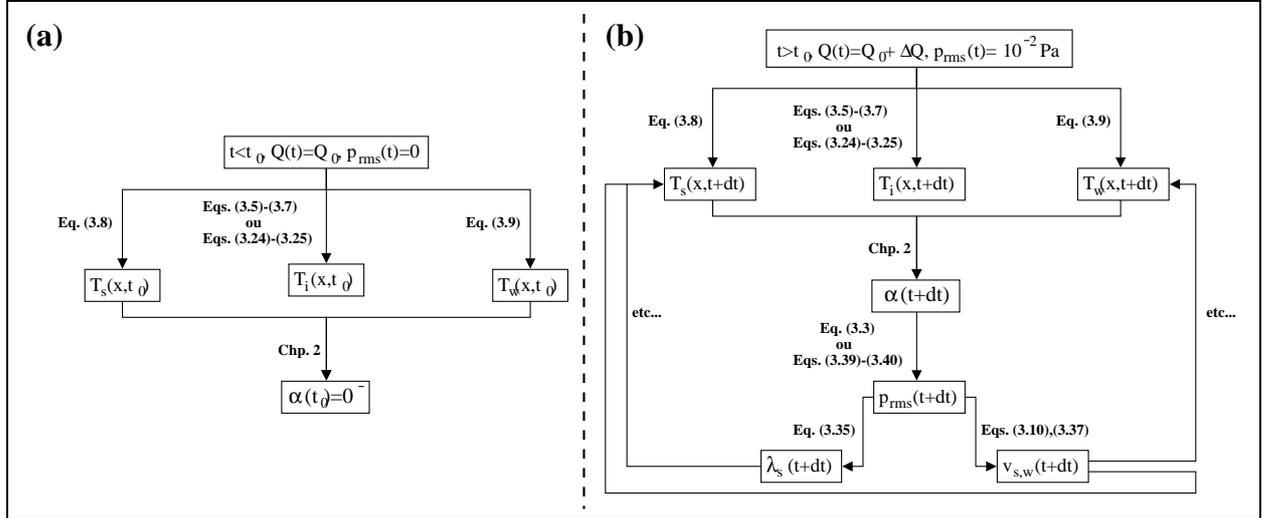


FIG. 3.3 – Représentation schématique de la procédure de calcul d'un régime transitoire. (a) La puissance thermique fournie est initialement fixée à une valeur Q_0 telle, qu'en calculant la distribution de température correspondante, le système soit juste sous le seuil de déclenchement. (b) A l'instant $t = t_0$, un incrément de puissance ΔQ est appliqué; le système d'équations décrivant le régime transitoire est alors résolu pas à pas jusqu'à saturation finale de l'amplitude de pression acoustique.

3.3.2 Comparaison entre simulations numériques et résultats expérimentaux

Toutes les mesures de pression acoustique présentées au chapitre 1 sont issues d'un microphone piezo-résistif affleurant à la paroi interne du guide d'onde et placé à 1 m, en abscisse curviligne, de l'extrémité chaude du stack (c'est le microphone de droite sur le schéma de la Fig. 1.1 p. 12, dont l'abscisse curviligne correspond au point $x = H_w$, coordonnée choisie dans le modèle pour imposer la condition aux limites (3.20)). Or, en toute rigueur, l'amplitude efficace de pression acoustique p_1 issue des calculs numériques doit être la pression acoustique à l'emplacement du stack, car d'une part, dans l'équation (3.35), la conductivité thermique du stack est supposée dépendre du carré de la pression acoustique dans le stack, et d'autre part, dans l'équation (3.39) l'atténuation due aux pertes mineures ($\propto p_1^2/\tau_{minor}$) dépend de la pression acoustique aux extrémités du stack.

Ainsi, l'amplitude efficace de pression acoustique p_1 issue des calculs numériques ne peut pas être comparée directement à l'amplitude de pression acoustique mesurée : en toute rigueur, connaissant l'amplitude efficace de pression acoustique à l'emplacement du stack, il faut calculer la distribution du champ acoustique (qui dépend de la distribution du champ de température), de laquelle l'amplitude efficace de pression acoustique au point de mesure est déduite, puis comparée aux résultats expérimentaux.

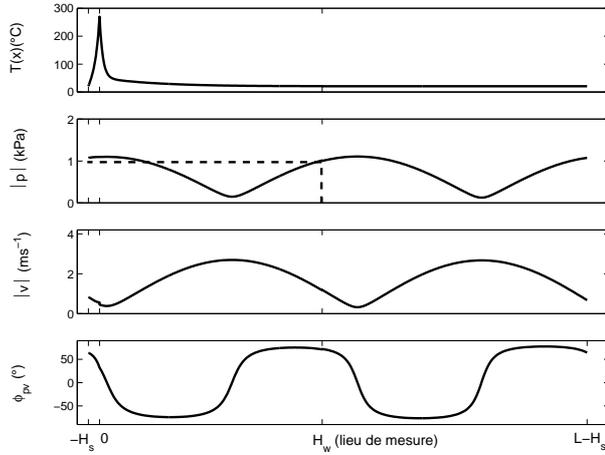


FIG. 3.4 – Distribution de température (en haut) et distribution du champ acoustique dans l'ensemble du dispositif, juste sous le seuil de déclenchement ($\alpha \approx -2 \cdot 10^{-5}$, $Q_0 \approx 15 \text{ W}$), et pour un mode de chauffage interne.

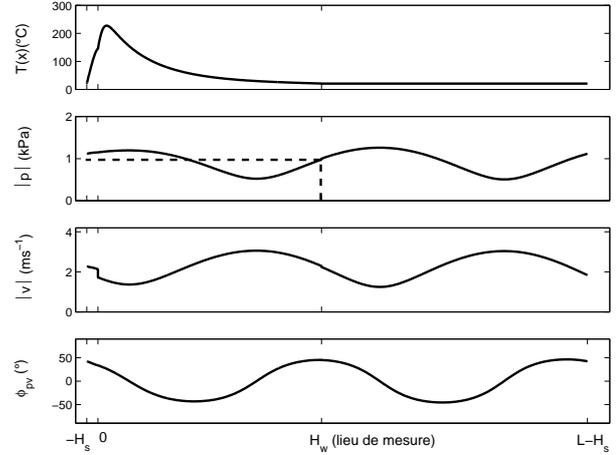


FIG. 3.5 – Distribution de température (en haut) et distribution du champ acoustique dans l'ensemble du dispositif, juste sous le seuil de déclenchement ($\alpha \approx -2 \cdot 10^{-5}$, $Q_0 \approx 70 \text{ W}$), et pour un mode de chauffage externe.

Les Figs. 3.4 et 3.5 représentent les distributions normalisées du champ acoustique (pression acoustique, vitesse acoustique et phase entre pression et vitesse) dans l'ensemble du résonateur, et pour deux distributions particulières du champ de température. Les distributions du champ acoustique sont calculées suivant la procédure déjà décrite au paragraphe 2.1.3. Dans le premier cas (Fig. 3.4), le champ de température est calculé pour un mode de chauffage interne de sorte que le système soit juste sous le seuil de déclenchement ($\alpha \approx -2 \cdot 10^{-5}$, $Q_0 \approx 15 \text{ W}$). Dans le second cas (Fig. 3.5), le champ de température est calculé pour un mode de chauffage externe ($\alpha \approx -2 \cdot 10^{-5}$, $Q_0 \approx 70 \text{ W}$).

De par l'analyse du champ acoustique, il apparaît que les amplitudes de pression acoustique à l'emplacement du stack et au point de mesure sont assez proches l'une de l'autre dans les deux cas de figures (interne ou externe), de sorte que finalement, il est possible en première approximation de considérer que la pression acoustique dans le stack est la même que celle au lieu de mesure, ce qui permet de comparer directement les résultats de simulations aux résultats expérimentaux. Une description plus précise consisterait, lors des simulations du régime transitoire, à calculer à chaque itération temporelle la distribution du champ acoustique puis d'en déduire l'amplitude de pression acoustique au lieu de mesure. Cependant, ceci augmenterait considérablement les temps de calculs (déjà élevés), et cette démarche ne se justifie donc que si le champ de température (et donc le champ acoustique) évolue significativement au cours du régime transitoire, par exemple en raison de l'excitation du vent acoustique.

3.4 Résultats de simulations numériques

Comme indiqué précédemment, les valeurs numériques des paramètres géométriques et des caractéristiques thermophysiques utilisées dans le modèle sont celles listées dans le tableau 3.1. De plus, dans toute la suite de ce chapitre, les paramètres relatifs aux effets non linéaires sont fixés (sauf indications contraires) à leurs valeurs issues d'estimations, et qui sont reportées dans le tableau 3.2.

Γ_v	$4 \cdot 10^{-8} \text{ m.s}^{-1} . \text{Pa}^{-2}$
τ_v	0.9 s
Γ_λ	$2 \cdot 10^{-6} \text{ W.m}^{-1} . \text{K}^{-1} . \text{Pa}^{-2}$
τ_{att}	$2.2 \cdot 10^{-2} \text{ s}$
τ_{minor}	$2.4 \cdot 10^{-2} \text{ s}$

TAB. 3.2 – Valeurs retenues pour les paramètres régissant les effets non linéaires de vent acoustique, de conductivité acoustiquement induite, de cascade harmonique et de pertes mineures.

Toutes les simulations présentées par la suite ont pour objet d'être comparées aux résultats expérimentaux des Figs. 1.14 et 1.18, les premiers étant obtenus par chauffage externe et les seconds par chauffage interne, ce choix étant motivé par plusieurs raisons. Tout d'abord, selon que le chauffage est de type interne ou externe, la nature des régimes transitoires observés est très différente. En conséquence, la comparaison des résultats expérimentaux aux résultats de simulations dans ces deux configurations doit permettre de valider le modèle dans l'éventualité où les deux types de régimes transitoires associés aux deux modes de chauffage puissent être correctement reproduits dans les simulations. Ensuite, les résultats expérimentaux des Figs. 1.14 et 1.18 ont été retenus pour une comparaison au modèle parce que le montage expérimental dans ces deux configurations est réduit à sa plus grande simplicité, de sorte que certains processus physiques difficiles à modéliser puissent être négligés. En effet, d'une part, l'orientation du dispositif expérimental dans ces deux configurations est telle que l'effet de la convection naturelle est minimal, et d'autre part, pour le mode de chauffage externe, la pièce mécanique constituée d'un enroulement de ruban d'inox (Fig. 1.6) initialement placée dans le guide d'onde à proximité de l'extrémité chaude du stack a été supprimée, de sorte que les transferts thermiques entre cette pièce et le stack, probablement difficiles à modéliser (notamment en présence d'une onde acoustique de fort niveau), n'a pas lieu d'être pris en compte.

3.4.1 Résultats de simulations numériques sans prise en compte des effets de cascade harmonique et de pertes mineures

Les Figs. 3.6 et 3.7 présentent des résultats de simulations obtenus lorsque seuls les effets du vent acoustique et de la conductivité acoustiquement induite sont pris en compte dans la saturation de l'onde acoustique. Ces résultats sont obtenus en résolvant l'équation (3.3) couplée aux équations décrivant les transferts thermiques.

Les courbes de la Fig. 3.6 sont à comparer aux courbes expérimentales de la Fig. 1.14, courbes qui sont reportées ici sur la Fig. 3.7. L'analyse comparative des résultats de simulations et des résultats expérimentaux fait apparaître que, globalement, le modèle reproduit bien les effets observés expérimentalement, tant sur le plan qualitatif que quantitatif. En effet, sur le plan quantitatif, les durées relatives à l'amplification et la stabilisation de l'onde acoustique, ainsi que les niveaux atteints en régime stationnaire sont très proches des valeurs observées expérimentalement, quelque soit l'incrément de puissance ΔQ appliqué au système. De plus, l'allure qualitative des courbes issues des simulations montre une amplification exponentielle, suivie d'une saturation, puis d'une phase d'amplification lente avant saturation finale. En réalité, la seule différence de taille entre modèle et expérience concerne l'observation, pour des $\Delta Q/Q_0$ élevés de larges oscillations de l'amplitude de pression acoustique avant la phase d'amplification lente et de stabilisation.

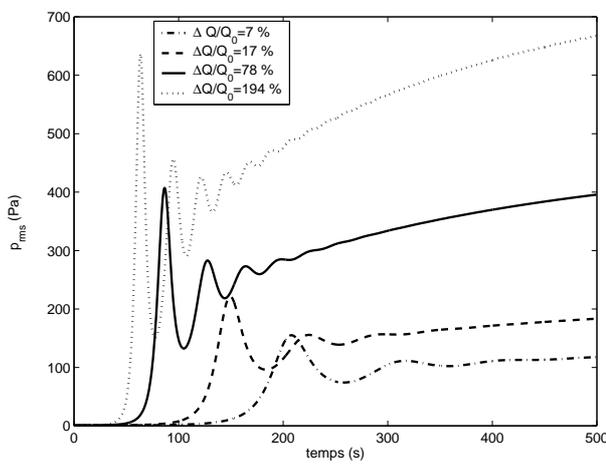


FIG. 3.6 – Simulations numériques de l'évolution en fonction du temps de l'amplitude efficace des oscillations de pression acoustique du mode fondamental pour différents incréments de puissance ΔQ au delà de la puissance seuil de déclenchement ($Q_0 \approx 70W$) de l'instabilité thermoacoustique. Les quatre régimes transitoires présentés sont obtenus par chauffage externe pour $\Delta Q/Q_0 = 7\%$, 17% , 78% et 194% .

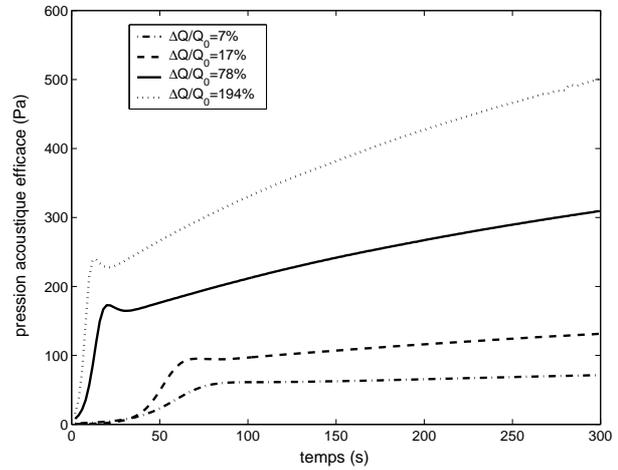


FIG. 3.7 – Résultats expérimentaux. Evolution en fonction du temps de l'amplitude efficace des oscillations de pression acoustique du mode fondamental pour différents incréments de puissance ΔQ au delà de la puissance seuil de déclenchement ($Q_0 \approx 100W$) de l'instabilité thermoacoustique. Les quatre régimes transitoires présentés sont obtenus par chauffage externe pour $\Delta Q/Q_0 = 7\%$, 17% , 78% et 194% .

Les courbes de la Fig. 3.8 sont à comparer aux courbes expérimentales de la Fig. 1.18, qui sont reportées ici sur la Fig. 3.9. Dans ce cas de figure où le stack est chauffé directement par l'intérieur du guide d'onde, des différences entre modèle et expérience apparaissent. En effet, le modèle permet bien de reproduire les processus de déclenchements et arrêts périodiques de l'onde acoustique observés expérimentalement, mais il apparaît que pour $\Delta Q/Q_0 = 30\%$, le système continue de suivre ce type de régime, alors que les résultats expérimentaux montrent une stabilisation finale de l'onde acoustique.

De plus, les niveaux maxima de pression acoustique atteints dans le modèle sont dix fois supérieurs à ceux observés expérimentalement. Cette différence peut être largement amoindrie par la prise en compte dans le modèle des processus de saturation par cascade harmonique et par pertes mineures, comme vont le montrer les résultats du paragraphe 3.4.2.

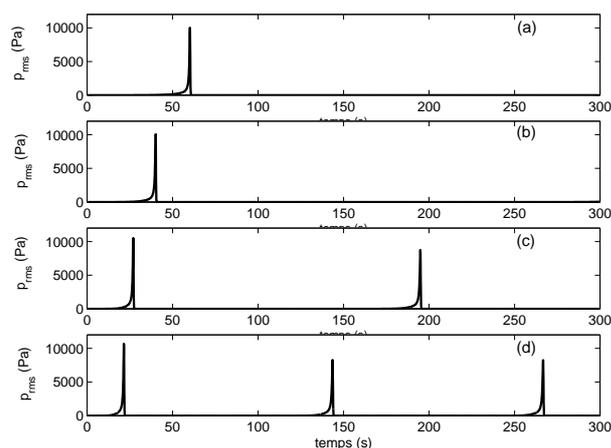


FIG. 3.8 – Simulations numériques de l'évolution en fonction du temps de l'amplitude efficace des oscillations de pression acoustique du mode fondamental pour différents incréments de puissance ΔQ au delà de la puissance seuil de déclenchement ($Q_0 \approx 15W$) de l'instabilité thermoacoustique. Les quatre régimes transitoires (a),(b),(c) et (d) présentés sont obtenus par chauffage interne pour $\Delta Q/Q_0 = 5\%$, 10% , 20% et 30% .

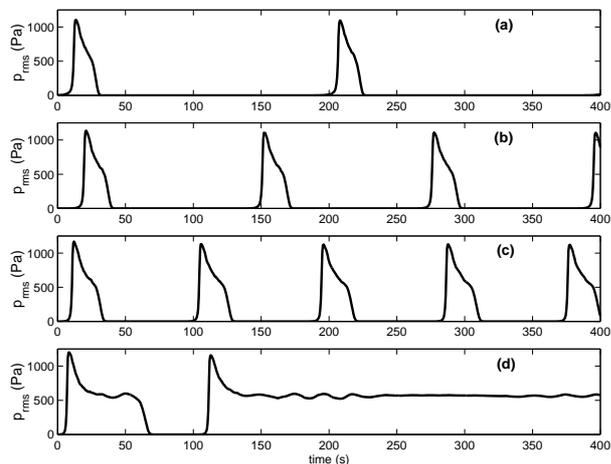


FIG. 3.9 – Résultats expérimentaux. Evolution en fonction du temps de l'amplitude efficace des oscillations de pression du mode fondamental ($f = 154.3Hz$) pour différents incréments de puissance ΔQ au delà de la puissance seuil de déclenchement ($Q_0 = 54W$) de l'instabilité thermoacoustique. Les quatre régimes transitoires présentés (a),(b),(c) et (d) correspondent respectivement à $\Delta Q/Q_0 = 5\%$, 10% , 20% et 30% .

La Fig. 3.10 présente l'évolution en fonction du temps des températures T_H (extrémité chaude du stack), $T_S = T(-H_s/2)$ (milieu du stack) et $T_W = T(H_w/8)$ (à 12.5 cm de l'extrémité chaude du stack) pour deux des quatre régimes transitoires présentés sur la Fig. 3.6. La principale remarque à formuler concernant l'analyse de ces données est la forte corrélation entre l'évolution du champ de température et celle du champ acoustique. Notamment, pour $\Delta Q/Q_0 = 78\%$, il apparaît qu'aux oscillations de l'amplitude de l'onde acoustique sont associées des oscillations de même période de la température T_H . Ces oscillations de la température T_H sont attribuables a priori aux effets conjoints de la conductivité acoustiquement induite et du vent acoustique : ces derniers tendent à diminuer le gradient de température moyen $(T_H - T_C)/H_s$ dès lors que la pression acoustique atteint un niveau suffisant, ce qui cause par suite une diminution de l'amplitude de pression acoustique suivie d'une diminution consécutive des effets non linéaires sur le champ de température, de sorte que la température T_H , et par suite l'amplitude de pression acoustique, augmentent à nouveau. Ce régime d'oscillations

est finalement amorti, et l'amplitude de pression acoustique se stabilise à un niveau fini, avec un temps de stabilisation lié au temps caractéristique de diffusion thermique associée au chauffage, ce temps, relativement long, étant contrôlé essentiellement par les parois du tube en inox (dont l'inertie thermique est bien plus grande que celles du stack ou du fluide).

En complément des résultats illustrés sur la Fig. 3.10, les courbes de la Fig. 3.11 permettent de déterminer lequel des deux processus non linéaires contrôle de façon prépondérante le régime transitoire : les évolutions en fonction du temps de l'amplitude de pression acoustique et des températures T_H , T_S et T_W sont représentées pour un chauffage externe avec $\Delta Q/Q_0 = 78\%$ lorsque que les effets conjoints de la conductivité acoustiquement induite et du vent acoustique sont pris en compte (trait plein) et lorsque seul l'effet de la conductivité induite est pris en compte (trait tireté, $\Gamma_v = 0$). Au regard des courbes obtenues, il s'avère que finalement, la prise en compte ou non du vent acoustique n'influence pas significativement l'allure du régime transitoire observé, et son seul effet est quantitatif (les amplitudes de pression acoustique obtenues avec $\Gamma_v = 0$ sont de 20% supérieures aux amplitudes obtenues avec $\Gamma_v = 4 \cdot 10^{-8}$).

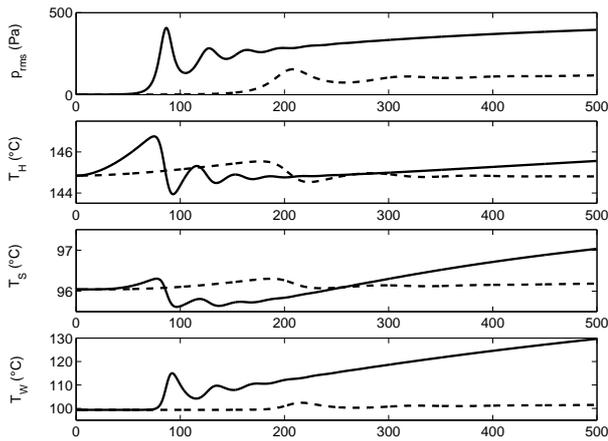


FIG. 3.10 – Evolution de la pression acoustique p_{rms} , des températures T_H , $T_S = T(-H_s/2)$ et $T_W = T(H_w/8)$ au cours de deux des quatre régimes transitoires présentés sur la Fig. 3.6. Trait plein : $\Delta Q/Q_0 = 78\%$, Trait tireté : $\Delta Q/Q_0 = 7\%$.

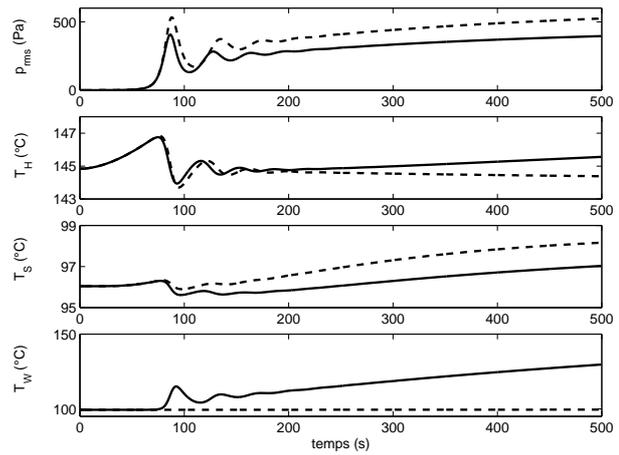


FIG. 3.11 – Evolution de la pression acoustique p_{rms} , des températures T_H , T_S et T_W au cours du régime transitoire obtenu par chauffage externe avec $\Delta Q/Q_0 = 78\%$. Trait plein : $\Gamma_v = 4 \cdot 10^{-8}$, $\Gamma_\lambda = 2 \cdot 10^{-6}$. Trait tireté : $\Gamma_v = 0$, $\Gamma_\lambda = 2 \cdot 10^{-6}$.

La Fig. 3.12 présente l'évolution en fonction du temps des températures T_H , T_S et T_W lors de deux des quatre régimes transitoires de la Fig. 3.8, obtenus par chauffage interne avec $\Delta Q/Q_0 = 5\%$ (trait tireté) et $\Delta Q/Q_0 = 20\%$ (trait plein). Il apparaît qu'au cours du régime transitoire, les températures T_H , T_S et T_W varient de façon importante et brutale : en l'espace de quelques secondes la température T_H diminue de plus de 150 K pendant que la température T_W augmente d'environ 200 K. Ces variations sont beaucoup plus importantes que celles observées expérimentalement (voir Figs. 1.19 et 1.20), de

sorte que l'interprétation de ces courbes doit être prise avec précaution. Néanmoins, une explication peut être avancée ici sur l'origine du processus de déclenchements et arrêts périodiques par l'observation de l'évolution transitoire du champ de température. On remarque en effet sur la Fig. 3.12 qu'à mesure que l'amplitude de pression acoustique croît, les effets conjoints du vent acoustique et de la conductivité acoustiquement induite se caractérisent d'une part par une diminution du gradient de température moyen $(T_H - T_C)/H_S$, et d'autre part par un changement significatif de la distribution de température dans la partie passive du noyau thermoacoustique (augmentation de T_W). Alors que le premier effet tend à réduire l'amplification thermoacoustique, le second tend au contraire à augmenter l'amplification thermoacoustique (comme cela a été démontré au chapitre 2, voir par exemple la Fig. 2.14). Ainsi, au cours du régime transitoire, l'effet amplifiant dû au changement du profil de température dans la partie passive du noyau thermoacoustique concurrence l'effet atténuant dû à la réduction du gradient de température, de sorte que dans un premier temps, l'onde acoustique continue d'être amplifiée jusqu'à atteindre un niveau élevé ($\approx 10 \text{ kPa}$) à partir duquel la réduction acoustiquement induite du gradient moyen de température l'emporte jusqu'à provoquer l'amortissement total de l'onde acoustique. Dès lors, après suppression des effets non linéaires d'interaction entre champ de température et champ acoustique, le champ de température évolue à nouveau vers son état initial, et au bout d'un certain temps lié à la quantité de chaleur fournie, un nouveau déclenchement se produit.

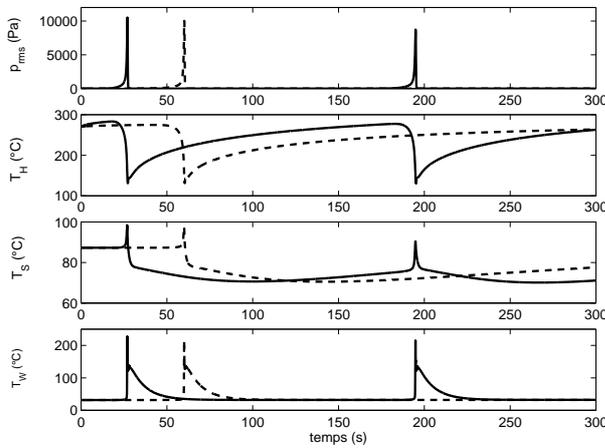


FIG. 3.12 – Evolution des températures T_H , $T_S = T(-H_s/2)$ et $T_W = T(H_w/8)$ au cours des régimes transitoires de la Fig. 3.8 (a) et (c), obtenus par chauffage interne pour $\Delta Q/Q_0 = 5\%$ (trait tireté) et $\Delta Q/Q_0 = 20\%$ (trait plein).

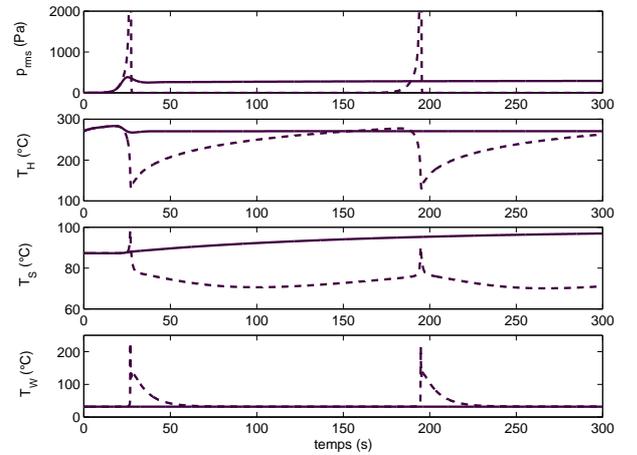


FIG. 3.13 – Evolution de la pression acoustique p_{rms} , des températures T_H , T_S et T_W au cours du régime transitoire obtenu par chauffage interne avec $\Delta Q/Q_0 = 20\%$. Trait plein : $\Gamma_v = 0$, $\Gamma_\lambda = 2 \cdot 10^{-6}$. Trait tireté : $\Gamma_v = 4 \cdot 10^{-8}$, $\Gamma_\lambda = 2 \cdot 10^{-6}$.

En complément des résultats illustrés sur la Fig. 3.12, les courbes de la Fig. 3.13 permettent de confirmer le rôle essentiel joué par le vent acoustique sur le processus de déclenchement et arrêts périodiques : les évolutions en fonction du temps de l'amplitude de pression acoustique et des

températures T_H , T_S et T_W sont représentées pour un chauffage interne avec $\Delta Q/Q_0 = 20\%$ lorsque que les effets conjoints de la conductivité acoustiquement induite et du vent acoustique sont pris en compte (trait tireté) et lorsque seul l'effet de la conductivité induite est pris en compte (trait plein, $\Gamma_v = 0$). Il apparaît clairement que lorsque l'effet du vent acoustique n'est pas pris en compte, le seul effet de la conductivité acoustiquement induite se traduit par une stabilisation de l'onde acoustique à un niveau fini, précédée d'un léger overshoot. Cette différence de taille entre les courbes en trait plein et celles en trait tireté s'interprète par le fait que sans l'effet du vent acoustique, la distribution de température dans la partie passive du noyau thermoacoustique ne varie pas et par suite, ne cause pas une nouvelle phase d'amplification, de sorte que l'amplification thermoacoustique initiale de l'onde acoustique est simplement compensée par la diminution de T_H due à la conductivité acoustiquement induite.

Enfin, pour clore l'analyse de ces résultats de simulations, une remarque doit être formulée concernant l'effet du vent acoustique selon que le mode de chauffage est de type externe ou interne. En effet, d'après les résultats des Figs 3.9 et 3.11, il apparaît que pour un mode de chauffage externe, le vent acoustique n'a que peu d'effet et il tend à réduire l'amplification thermoacoustique alors que pour un mode de chauffage interne, le vent acoustique a un effet important, et il tend à augmenter l'amplification thermoacoustique (dans un premier temps). En mode de chauffage externe, la puissance thermique est injectée par les parois du tube en inox et le flux thermique radial est dirigé depuis les parois du tube vers l'intérieur du tube. Or l'inertie thermique du tube en inox ($\sim \rho_i C_i$) est très grande devant celles du stack ($\sim \rho_s C_s$) et du fluide ($\sim \rho_a C_a$), de sorte que la distribution du champ de température initiale (avant déclenchement) est essentiellement contrôlée par l'inox. En mode de chauffage interne, la puissance thermique est injectée par l'intérieur du tube et le flux thermique radial est dirigé vers les parois du tube. Dans ce cas, la distribution de température à l'intérieur du tube dépend essentiellement des caractéristiques thermophysiques du stack et de l'air. Ainsi, selon que le mode de chauffage est externe ou interne, les distributions initiales de température sont très différentes (Figs. 3.4 et 3.5). Ceci n'est pas sans conséquences sur l'effet du vent acoustique, comme nous allons le voir à présent. Considérons pour ce faire que les distributions initiales de température dans le noyau thermoacoustique se ramènent à des distributions interpolées, caractérisées par la température T_H , les deux températures de contrôle $T(-H_s/2)$ et $T(H_w/2)$, et les distances H_S et H_W . Dans ce cas, comme l'illustrent les Figs. 3.14 et 3.15, la différence entre chauffage externe et chauffage interne peut se traduire de façon schématique et principalement par une différence sur la distance H_W ($T_w(H_w, t) = T_C$), cette distance étant plus élevée dans la cas d'un chauffage externe.

L'analyse de l'effet du vent acoustique peut alors être effectuée de la même manière que ce qui a été fait au chapitre 2 (§ 2.3.2), en faisant varier les deux paramètres de contrôle $T(-H_s/2)$ et $T(H_w/2)$ et en analysant, à T_H constant, l'effet d'une modification du champ de température sur le coefficient d'amplification thermoacoustique. Ceci est réalisé sur la Fig. 3.16 pour $H_w = 0.4 m$ et sur la Fig. 3.17 pour $H_w = 0.8 m$. Il apparaît alors que l'effet du vent acoustique sur le champ de température, qui peut se traduire comme une augmentation du paramètre $T(H_w/2)$ (et une diminution de $T(-H_s/2)$), n'a pas

les mêmes conséquences suivant la valeur de H_w considérée : pour $H_w = 0.4 m$ (\sim chauffage interne), l'augmentation de $T(H_w/2)$ implique une augmentation de l'amplification thermoacoustique, tandis que pour $H_w = 0.8 m$ (\sim chauffage externe), l'augmentation de $T(H_w/2)$ implique une diminution de l'amplification thermoacoustique.

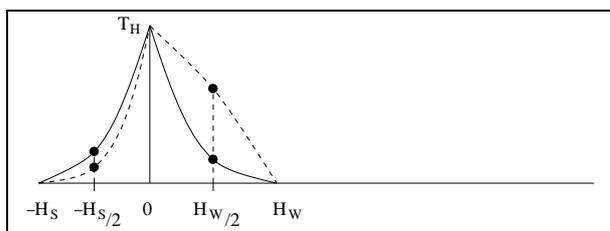


FIG. 3.14 – Allure qualitative de la distribution de température initiale (trait plein) et avec l'effet du vent acoustique (trait tireté) pour un mode de chauffage interne ($H_w \sim H_s$)

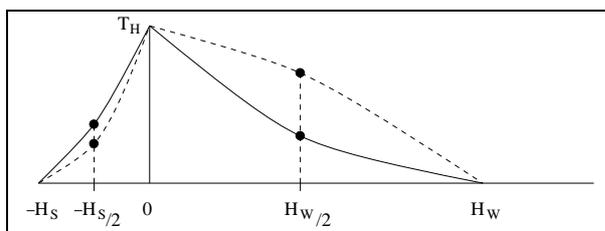


FIG. 3.15 – Allure qualitative de la distribution de température initiale (trait plein) et avec l'effet du vent acoustique (trait tireté) pour un mode de chauffage externe ($H_w \gg H_s$)

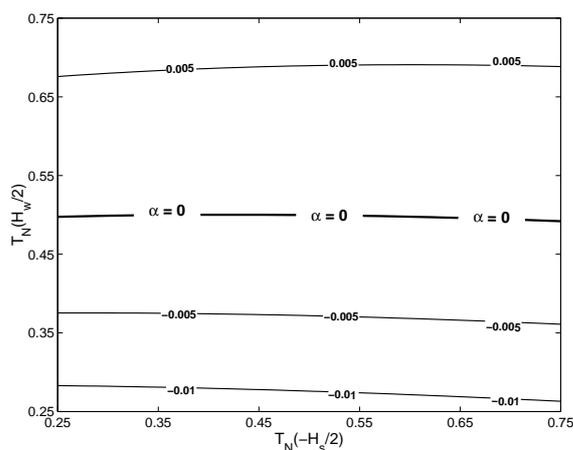


FIG. 3.16 – Isocontours du coefficient d'amplification α en fonction de $T_N(H_w/2)$ et $T_N(-H_s/2)$, avec $H_s = 0.05m$ et $H_w = 0.4m$ (\sim chauffage interne)

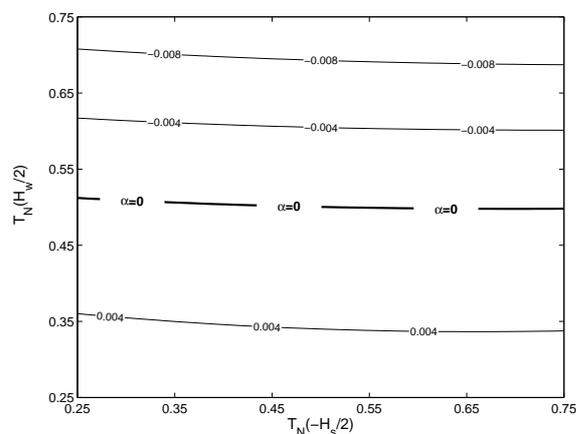


FIG. 3.17 – Isocontours du coefficient d'amplification α en fonction de $T_N(H_w/2)$ et $T_N(-H_s/2)$, avec $H_s = 0.05m$ et $H_w = 0.8m$ (\sim chauffage externe)

Ainsi, le profil de la distribution de température, contrôlé avant déclenchement par le mode de chauffage, par les caractéristiques thermophysiques des matériaux constituant le noyau thermoacoustique, et éventuellement par l'orientation du dispositif relativement au champ de pesanteur, a un effet non seulement sur les conditions de déclenchement (gradient de température seuil) mais également sur la nature des régimes transitoires observés après déclenchement.

3.4.2 Résultats de simulations numériques avec prise en compte des effets de cascade harmonique et de pertes mineures

Dans ce paragraphe, les effets de saturation par cascade harmonique et par pertes mineures sont désormais pris en compte en résolvant le système d'équations (3.39)-(3.40) couplé aux équations décrivant les transferts thermiques. La Fig. 3.18 présente le régime transitoire obtenu (courbe en trait plein) pour un mode de chauffage externe avec $\Delta Q/Q_0 = 194\%$, et ce dernier est comparé au cas de figure où cascade harmonique et pertes mineures ne sont pas pris en compte (courbe en trait tireté). Il apparaît que si l'effet des processus de cascade harmonique et de pertes mineures ne change pas de façon fondamentale le processus d'amplification et de saturation de l'onde acoustique, leur prise en compte permet d'obtenir un meilleur accord avec les résultats expérimentaux (Fig. 3.7). En particulier, les larges oscillations de l'amplitude de pression acoustique observées sur la courbe en trait tireté se trouvent fortement amorties du fait de l'atténuation supplémentaire apportée par les effets de cascade harmonique et de pertes mineures. Reste que l'interprétation des rôles respectifs du vent acoustique et de la conductivité acoustiquement induite proposée au paragraphe précédent reste valide. La Fig. 3.19 présente divers régimes transitoires, obtenus par chauffage externe pour plusieurs valeurs de $\Delta Q/Q_0$. Toutes ces courbes peuvent être directement comparées à celles de la Fig. 3.7 : l'accord entre théorie et expérience est remarquablement bon, tant sur le plan qualitatif que quantitatif.

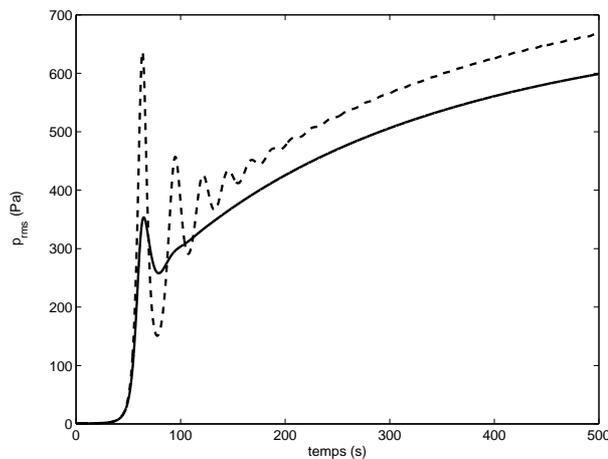


FIG. 3.18 – Simulations numériques du régime transitoire pour $\Delta Q/Q_0 = 194\%$ en chauffage externe, selon que les effets de cascade harmonique et de pertes mineures sont pris en compte (trait plein) ou non (trait tireté).

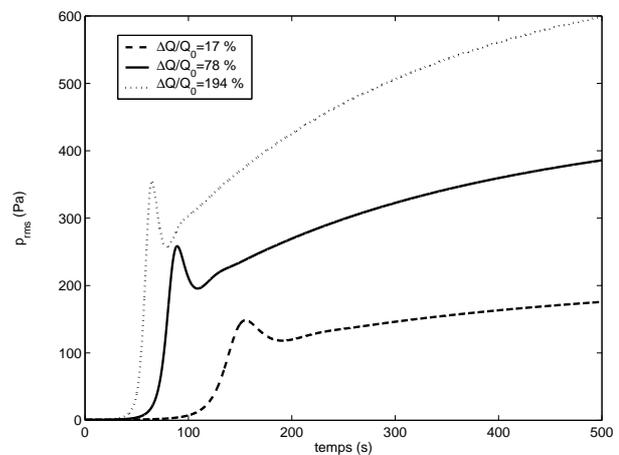


FIG. 3.19 – Simulations numériques du régime transitoire pour différentes valeurs de $\Delta Q/Q_0$, lorsque les effets de cascade harmonique et de pertes mineures sont pris en compte. Les trois régimes transitoires présentés sont obtenus par chauffage externe pour $\Delta Q/Q_0 = 17\%$, 78% et 194% .

La Fig. 3.20 présente le régime transitoire obtenu (courbe en trait plein) pour un mode de chauffage interne avec $\Delta Q/Q_0 = 20\%$, et ce dernier est comparé au cas de figure où cascade harmonique et

perles mineures ne sont pas pris en compte (courbe en trait tireté). Cette fois-ci, et à la différence du cas d'un chauffage externe, l'atténuation supplémentaire apportée par les processus de cascade harmonique et de pertes mineures a une influence significative sur la nature du régime transitoire observé : en limitant l'amplification de l'onde acoustique, ces effets non linéaires ont pour conséquence de limiter les variations acoustiquement induite du champ de température. Il en résulte que les effets d'amplification due à l'excitation du vent acoustique et d'atténuation due à la réduction du gradient de température opèrent de manière moins brutale, et se compensent finalement ce qui aboutit à la stabilisation finale de l'amplitude de l'onde acoustique. Ainsi, les dissipations dues aux pertes mineures et à la génération d'harmoniques supérieurs ont un effet stabilisant.

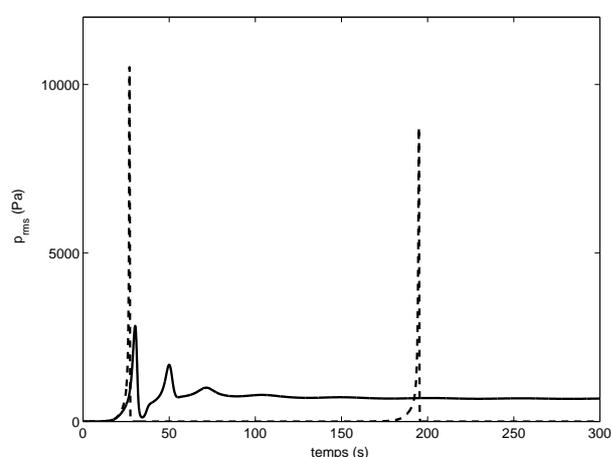


FIG. 3.20 – Simulations numériques du régime transitoire pour $\Delta Q/Q_0 = 20\%$ en chauffage interne, selon que les effets de cascade harmonique et de pertes mineures sont pris en compte (trait plein) ou non (trait tireté).

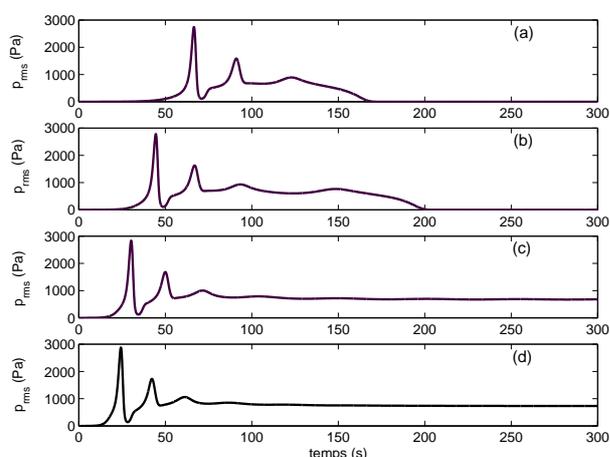


FIG. 3.21 – Simulations numériques du régime transitoire pour différentes valeurs de $\Delta Q/Q_0$, lorsque les effets de cascade harmonique et de pertes mineures sont pris en compte. Les quatre régimes transitoires (a),(b),(c) et (d) présentés sont obtenus par chauffage interne pour $\Delta Q/Q_0 = 5\%$, 10% , 20% et 30% .

La Fig. 3.21 présente divers régimes transitoires, obtenus par chauffage interne pour plusieurs valeurs de $\Delta Q/Q_0$. Toutes ces courbes peuvent être directement comparées à celles de la Fig. 3.9 : là encore, l'accord entre théorie et expérience est satisfaisant, tout du moins sur le plan qualitatif, puisque le modèle prévoit que pour de faibles valeurs de $\Delta Q/Q_0$, le système suit une régime de déclenchement et arrêts successifs, et que pour $\Delta Q/Q_0 \geq 20\%$ l'amplitude de l'onde acoustique se stabilise à terme à un niveau fini, cette stabilisation étant précédée d'un "overshoot", dont l'origine est attribuable à l'effet amplifiant du vent acoustique. Néanmoins, un certain nombre de différences subsistent entre théorie et expérience : notamment, la valeur de $\Delta Q/Q_0$ nécessaire à la stabilisation de l'onde est plus faible dans le modèle et les périodes de déclenchement-arrêts sont plus longues dans le modèle. Ces différences pourraient en partie être dûes au fait que le point de chauffage du modèle ne correspond

pas à celui de l'expérience (sur les courbes expérimentales de la Fig. 3.9, la pièce chauffante se situe à 5 mm de l'extrémité du stack). De plus, nombre d'hypothèses simplificatrices ont été formulées dans la mise en oeuvre du modèle, et pourraient elles aussi être responsables des différences constatées. Dans le paragraphe qui suit, des éléments de discussion sont fournis à ce propos.

3.5 Discussion

Dans les paragraphes 3.4.1 et 3.4.2, des résultats de simulations numériques ont été présentés avec pour objectif d'être comparés aux résultats expérimentaux, obtenus par chauffage interne ou externe. Les résultats obtenus lorsque les seuls effets du vent acoustique et de la conductivité thermique acoustiquement induite sont pris en compte (§ 3.4.1) s'avèrent être en bon accord avec les résultats expérimentaux, tant sur le plan qualitatif que quantitatif. Ceci est particulièrement remarquable, car la nature des régimes transitoires diffère de façon significative suivant le mode de chauffage. Dès lors, une interprétation des rôles respectifs du vent acoustique et de la conductivité acoustiquement induite dans la saturation de l'onde acoustique peut être donnée. Ensuite, par la prise en compte des effets non linéaires de pertes mineures et de cascade harmonique (§ 3.4.2), il a été mis en évidence que ces effets, sans changer profondément la nature des régimes transitoires observés, permettaient d'obtenir des résultats plus proches des résultats expérimentaux. Néanmoins, si les résultats obtenus par chauffage externe sont pour le moins satisfaisants, le modèle ne reproduit pas parfaitement les résultats expérimentaux pour le cas de figure d'un chauffage interne. Etant donné le nombre d'hypothèses formulées dans la description du modèle, un grand nombre de raisons peuvent expliquer les différences persistantes entre modèle et expérience. Par la suite, quelques éléments de réflexion sont donnés à ce propos.

★ A propos de recalage du modèle.

La première remarque à formuler ici est que les résultats de simulations dépendent de manière critique des valeurs attribuées à un certain nombre de paramètres, parmi lesquels, bien sûr, les paramètres "non linéaires" Γ_v , Γ_λ , τ_v , τ_{att} , et τ_{minor} , mais également des paramètres liés aux transferts thermiques. Pour les premiers, des ordres de grandeurs ont été obtenus par des estimations simples. Concernant les paramètres utilisés dans les équations décrivant les transferts thermiques, un certain nombre d'entre eux sont bien connus (ρ_a , C_a , ρ_i , C_i ...) mais ce n'est pas toujours le cas. En particulier, les valeurs prises pour les caractéristiques thermophysiques (ρ_c , C_c , λ_c) des parois du stack sont des valeurs centrales de gammes de valeurs issues de données de fabricants. De plus, les coefficients d'échange h^{cc} , et h_{conv} sont calculés pour le cas d'un écoulement laminaire à l'intérieur du guide d'onde : il prennent donc en compte l'effet du vent acoustique (sous réserve que ce dernier soit à profil parabolique), mais ne prennent pas en compte la présence d'une onde acoustique de niveau élevé. Or, en changeant de façon empirique ces paramètres, il s'avère que l'impact sur les régimes transitoires obtenus est significatif. A titre d'exemple, la Fig. 3.22 présente divers régimes transitoires obtenus par chauffage interne après "recalage", les paramètres ρ_c , C_c et λ_c ayant été diminués par rapport à leurs

valeurs du Tab. 3.2. Si la pertinence de ce recalage peut être remise en cause, il n'en demeure pas moins que la forte dépendance des résultats issus du modèle sur les valeurs mal connues de certains paramètres doit être soulignée.

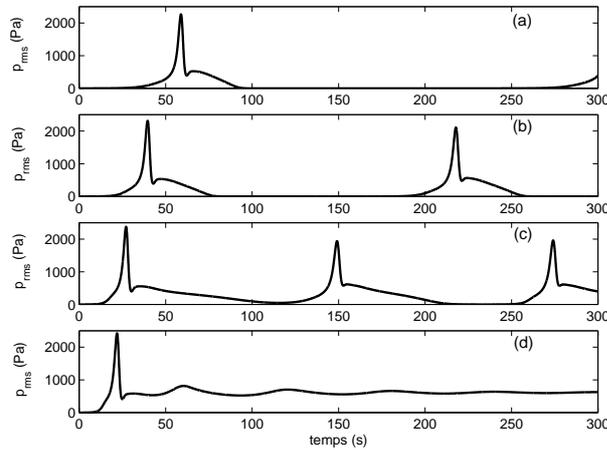


FIG. 3.22 – Simulations numériques "recalées" du régime transitoire pour un mode de chauffage interne. Les quatre régimes transitoires (a),(b),(c) et (d) présentés sont obtenus par chauffage interne pour $\Delta Q/Q_0 = 5\%$, 10% , 20% et 30% . Les valeurs des paramètres non linéaires sont celles du Tab. 3.2. Le recalage est effectué en diminuant les paramètres ρ_c , C_c et λ_c : $\rho_c = 1500 \text{ kg.m}^{-3}$, $C_c = 600, \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\lambda_c = 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

★ **Sur la non-uniformité de la distribution radiale du vent acoustique.**

Comme cela a déjà été souligné précédemment, on suppose dans le modèle que le champ de vitesse est à profil parabolique. En réalité, la distribution radiale de la vitesse du vent acoustique est assez complexe [5] : cette distribution évolue au cours du régime transitoire d'établissement du vent acoustique, et de plus, le sens de l'écoulement à proximité des parois du tube (pore du stack ou guide d'onde) est généralement opposé au sens de l'écoulement au centre du tube [68]. De ce fait, les transferts thermiques convectifs sont très complexes, et il n'est donc pas exclu que la simplification du profil de la vitesse d'écoulement influence de façon significative le champ de température obtenu, et donc l'amplification thermoacoustique.

★ **Sur la non-uniformité radiale du champ de température.**

Dans l'approche unidimensionnelle utilisée dans le modèle, la distribution de température radiale est supposée uniforme, ou à défaut, les températures considérées $T_{s,w}$ sont des température moyennes sur une section du guide d'onde. Cette hypothèse ne paraît pas trop restrictive dans le cas d'un chauffage externe où, du fait de la forte inertie thermique de l'inox, les champs de température ne sont que faiblement inhomogènes dans la direction radiale (ceci a été vérifié expérimentalement). En revanche, dans le cas d'un chauffage interne, des différences de plus de 100 K entre température sur

l'axe du résonateur et température à 2 cm de l'axe du résonateur ont été constatées. Cette forte inhomogénéité radiale du champ de température n'est pas sans conséquence sur la validité du modèle : d'une part, concernant la partie thermique, les limites de l'approximation "ailette" sont atteintes, de sorte que l'on peut douter de l'exactitude des évolutions de température obtenues ; d'autre part, concernant la partie acoustique où la distribution de température et la pression acoustique sont supposées indépendantes de la coordonnée longitudinale, le doute peut être légitimement émis sur les conséquences "thermoacoustiques" d'une forte inhomogénéité radiale du champ de température.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une description analytique du régime transitoire de déclenchement et de saturation de l'instabilité thermoacoustique est proposée. Des simulations numériques sont effectuées et comparées aux résultats expérimentaux. Les résultats théoriques obtenus, très proches des résultats expérimentaux, confirment que la saturation de l'onde acoustique est essentiellement contrôlée par les processus non linéaires d'interaction entre champ de température et champ acoustique : l'amplification thermoacoustique dépend certes du gradient de température moyen $(T_H - T_C)/H_s$, mais également de façon critique de la forme de la distribution de température, de sorte que des régimes transitoires complexes sont observables, notamment par l'effet de la convection forcée due à l'excitation du vent acoustique. Par ailleurs, la prise en compte des effets non linéaires de cascade harmonique et de pertes mineures s'avère utile pour obtenir un meilleur accord entre simulations numériques et résultats expérimentaux.

Ainsi, au terme de cette étude numérique et de l'analyse des résultats obtenus, l'objectif initial visant à comprendre les rôles respectifs de chacun des processus non linéaires de saturation de l'instabilité thermoacoustique est atteint. Cependant, il convient de préciser que le système d'équations régissant le problème transitoire est compliqué, et que les temps de calculs sont très longs, pour ne pas dire prohibitifs. Par suite, puisque cette étude a permis d'avancer vers la compréhension fine des principaux phénomènes mis en jeu, il est désormais intéressant de simplifier à l'extrême la description du régime transitoire pour ne retenir que les phénomènes physiques prépondérants. Ceci fait l'objet du quatrième et dernier chapitre.

Chapitre 4

Description du régime transitoire sous forme d'un système d'équations différentielles ordinaires.

Dans le modèle analytique présenté au chapitre 3, le processus de déclenchement et de saturation de l'instabilité thermoacoustique est décrit par le couplage des équations régissant les transferts thermiques et de l'équation décrivant l'amplification thermoacoustique. Un bon accord apparaît entre les résultats de simulations numériques et les résultats expérimentaux, ce qui permet d'avancer dans la compréhension fine des processus de saturation mis en jeu. Ces résultats confirment en effet les rôles essentiels joués par les processus non linéaires d'interaction entre champ de température et champ acoustique, et mettent également en évidence l'importance des effets non linéaires de pertes mineures et de cascade harmonique, notamment dans le cas de figure d'un chauffage interne. Reste que les équations sont compliquées et régies par un grand nombre de paramètres.

Les exemples de systèmes donnant lieu au déclenchement d'instabilités abondent dans tous les domaines, à commencer par la mécanique usuelle (pendule auto-entretenu), ou l'hydrodynamique (convection de Rayleigh-Bénard), mais aussi dans des domaines fort éloignés de la physique comme l'écologie (systèmes proie-prédateur) ou l'économie (cycles expansion-récession). La plupart de ces problèmes mettent en jeu des processus complexes régis par un grand nombre de paramètres. Cependant, dans un certain nombre de cas de figures, il est possible de décrire qualitativement la dynamique de ces systèmes à l'aide d'un nombre réduit de variables sous forme d'un flût d'équations différentielles ordinaires. L'un des exemples le plus connu est le célèbre modèle de Lorenz, traitant du problème de la convection de Rayleigh-Bénard [33]. Ce type d'instabilité apparaît lorsqu'un fluide situé entre deux plaques horizontales est soumis à un chauffage par le bas : ce chauffage crée une différence de masse volumique entre les couches de fluide du bas (plus légères) et celles du haut, qui se traduit, pour un gradient de température suffisant, par l'apparition de rouleaux de convection. Le régime stationnaire est alors atteint lorsque le mécanisme d'amplification dû au chauffage est compensé par les mécanismes d'amortissement combinant les effets de viscosité, de diffusion et de

convection de la chaleur. Mathématicien et météorologue, Lorenz réussit, en tronquant astucieusement un développement des équations hydrodynamiques sur une base de fonctions trigonométriques, à décrire qualitativement cette instabilité sous forme d'un système non linéaire de trois équations différentielles ordinaires. L'analyse qu'il propose ensuite met en évidence différents mécanismes de transition vers le chaos.

Au delà de l'intérêt particulier dans l'étude du problème de la convection de Rayleigh-Bénard, l'utilisation de modèles simples tels que celui de Lorenz présente l'intérêt de décrire en toute généralité le comportement de systèmes très différents. Dans ce chapitre, l'objectif n'est pas, loin s'en faut, d'étudier d'éventuels mécanismes de transition vers le chaos dans un moteur thermoacoustique annulaire, mais simplement, de chercher à voir si l'instabilité thermoacoustique peut être décrite qualitativement par un système non linéaire d'équations différentielles ordinaires, puis le cas échéant, de mettre en oeuvre les méthodes d'analyse usuelles de ce type de systèmes [11, 33] afin d'en tirer des enseignements supplémentaires sur les paramètres de contrôle régissant la dynamique de déclenchement et de saturation de l'instabilité thermoacoustique. Pour ce faire, les descriptions des transferts thermiques (équations aux dérivées partielles) ainsi que celles qui portent sur le taux d'amplification thermoacoustique doivent être simplifiées.

4.1 Description du modèle

4.1.1 Réduction du nombre d'équations aux dérivées partielles

Au chapitre 3, le régime transitoire est décrit en couplant les équations du transport de la chaleur dans les parois du tube (Eqs. (3.5)-(3.7)), dans le stack (Eq. (3.8)), et dans le guide d'onde (Eq. (3.9)) aux équations décrivant l'évolution temporelle de l'amplitude de pression acoustique (Eqs. (3.39)-(3.40)). Dans ce chapitre, les parois du tube sont considérées comme un milieu extérieur isotherme à la température T_∞ . Le problème thermique se ramène alors à un jeu de deux équations aux dérivées partielles qui décrivent le transport de chaleur dans le stack et le guide d'onde :

$$\forall x \in [-H_S, 0], \forall t \in [0, \infty[,$$

$$\frac{\partial T_s(x, t)}{\partial t} + v_s(t) \frac{\partial T_s(x, t)}{\partial x} = \frac{\lambda_s + \Gamma \lambda p(t)^2}{\rho_s C_s} \frac{\partial^2 T_s(x, t)}{\partial x^2} - \frac{T_s(x, t) - T_\infty}{\tau_s}, \tag{4.1}$$

$$\forall x \in [0, H_W], \forall t \in [0, \infty[,$$

$$\frac{\partial T_w(x, t)}{\partial t} + v_w(t) \frac{\partial T_w(x, t)}{\partial x} = \frac{\lambda_w}{\rho_w C_w} \frac{\partial^2 T_w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{T_w(x, t) - T_\infty}{\tau_w}, \tag{4.2}$$

avec

$$\begin{aligned} \rho_s C_s &= \rho_a C_a \Phi + \rho_c C_c (1 - \Phi), \\ \lambda_s &= \lambda_a \Phi + \lambda_c (1 - \Phi), \\ \rho_w C_w &= \rho_a C_a, \\ \lambda_w &= \lambda_a, \end{aligned}$$

et où les vitesses de vent acoustique $v_{s,w}$ sont définies dans les équations (3.10) et (3.37).

A ces deux équations du transport de la chaleur sont ajoutées les conditions aux limites en $x = -H_s$ et $x = H_w$

$$T_s(-H_s, t) = T_\infty, \quad (4.3)$$

$$T_w(H_w, t) = T_\infty, \quad (4.4)$$

ainsi que la condition d'égalité des températures et de continuité des flux thermiques en $x = 0$

$$T_s(0, t) = T_w(0, t), \quad (4.5)$$

$$\lambda_s(t) \partial_x T_s(0^-, t) = \lambda_w \partial_x T_w(0^+, t) + \Psi(t), \quad (4.6)$$

où la fonction $\Psi(t)$ de l'équation (4.6) représente le flux thermique dû au chauffage.

Remarque : En écrivant de la sorte le problème thermique, c'est le cas d'un chauffage interne qui est implicitement considéré. En effet, dans le cas d'un chauffage externe, la distribution de température dans le noyau thermoacoustique est essentiellement contrôlée par les parois du tube de forte inertie thermique, et les flux thermiques radiaux sont dirigés depuis les parois vers l'intérieur du tube. Une modélisation du cas de figure d'un chauffage externe pourrait éventuellement être envisagée en considérant que les caractéristiques thermophysiques $\rho_{s,w}$, $C_{s,w}$ et $\lambda_{s,w}$ prennent en compte l'effet des parois du tube comme suit :

$$\begin{aligned} \rho_s C_s &= \frac{\pi r_i^2 (\rho_a C_a \Phi + \rho_c C_c (1-\Phi)) + \pi (r_e^2 - r_i^2) \rho_i C_i}{\pi r_e^2}, \\ \lambda_s &= \frac{\pi r_i^2 (\lambda_a \Phi + \lambda_c (1-\Phi)) + \pi (r_e^2 - r_i^2) \lambda_i}{\pi r_e^2}, \\ \rho_w C_w &= \frac{\pi r_i^2 \rho_a C_a + \pi (r_e^2 - r_i^2) \rho_i C_i}{\pi r_e^2}, \\ \lambda_w &= \frac{\pi r_i^2 \lambda_a + \pi (r_e^2 - r_i^2) \lambda_i}{\pi r_e^2}. \end{aligned}$$

Néanmoins, une telle formulation ne peut se faire qu'en supposant que le couplage entre les parois du tube et l'intérieur du tube est suffisamment fort pour que le champ de température puisse être considéré comme uniforme dans la direction radiale. Cette hypothèse est trop restrictive pour être raisonnablement admise.

4.1.2 Transformation des équations aux dérivées partielles en équations différentielles ordinaires

En posant $T'_{s,w} = T_{s,w} - T_\infty$, les équations (4.1)-(4.2) prennent la forme

$$\partial_t T'_s + v_s \partial_x T'_s = \frac{\lambda_s + \Gamma \lambda p(t)^2}{\rho_s C_s} \partial_{xx}^2 T'_s - \frac{T'_s}{\tau_s}, \quad (4.7)$$

$$\partial_t T'_w + v_w \partial_x T'_w = \frac{\lambda_w}{\rho_w C_w} \partial_{xx}^2 T'_w - \frac{T'_w}{\tau_w}. \quad (4.8)$$

Le problème thermique est donc décrit par deux équations aux dérivées partielles à coefficients non constants (λ_s et $v_{s,w}$ sont des fonctions du temps), et présente une infinité de degrés de liberté. Dans la suite de ce paragraphe, une formulation "intuitive" est présentée, par laquelle le problème thermique est ramené à un système à 3 degrés de liberté. Cette formulation suppose de considérer que les champs réels de température T'_s et T'_w présentent chacun et à chaque instant une forme voisine de la forme exponentielle suivante :

$$T'_s(x, t) \sim \Delta T(t)e^{x/l_s(t)}, \tag{4.9}$$

$$T'_w(x, t) \sim \Delta T(t)e^{-x/l_w(t)}, \tag{4.10}$$

où les variables $l_s(t)$ et $l_w(t)$ représentent des distances "caractéristiques" de la distribution de température et où $\Delta T(t) = T'_{s,w}(0, t) - T_\infty$. De la sorte, le champ de température est caractérisé à tout instant par le gradient moyen de température $\Delta T(t)/H_s$ et par les deux distances caractéristiques $l_s(t)$ et $l_w(t)$ comme l'illustre la Fig. 4.1. Reportant les expressions (4.9) et (4.10) du champ de température dans les équations (4.7) et (4.8), il vient :

$$\partial_t \Delta T - \frac{x}{l_s^2} \Delta T \partial_t l_s + \frac{v_s}{l_s} \Delta T = \frac{\lambda_s(t)}{\rho_s C_s} \frac{\Delta T}{l_s^2} - \frac{\Delta T}{\tau_s}, \tag{4.11}$$

$$\partial_t \Delta T + \frac{x}{l_w^2} \Delta T \partial_t l_w - \frac{v_w}{l_w} \Delta T = \frac{\lambda_w}{\rho_w C_w} \frac{\Delta T}{l_w^2} - \frac{\Delta T}{\tau_w}. \tag{4.12}$$

Ainsi, les paramètres représentatifs du profil de température (l_s , l_w et ΔT) sont indépendants de x , mais la forme retenue pour ce profil ne rend pas le problème indépendant de x . Une nouvelle approximation est donc formulée pour rendre le système d'équations (4-11) et (4-12) indépendant de x en "estimant" dans l'équation (4.11) (respectivement (4.12)) la variable d'espace x par sa "valeur caractéristique" $-l_s$ (resp. l_w), ce qui revient à considérer que les variations de température en $x = -l_s$ et $x = l_w$ sont représentatives de la variation du champ de température global. Il vient donc :

$$\frac{l_s}{\Delta T} \partial_t \Delta T + \partial_t l_s = \frac{\kappa_s}{l_s} - \frac{l_s}{\tau_s} - v_s, \tag{4.13}$$

$$\frac{l_w}{\Delta T} \partial_t \Delta T + \partial_t l_w = \frac{\kappa_w}{l_w} - \frac{l_w}{\tau_w} + v_w, \tag{4.14}$$

où κ_s et κ_w représentent les diffusivités thermiques des milieux "s" et "w". Cependant, puisque dans ces deux équations la variable spatiale x a été éliminée, la prise en compte des conditions aux limites (4.3) et (4.4) ne peut se faire que par un choix adéquat des coefficients phénoménologiques τ_s et τ_w . Ceci est réalisé en considérant les conditions initiales, avant déclenchement de l'instabilité thermoacoustique : en reportant $l_{s,w}(t = 0) = l_{s_0,w_0}$ dans les équations (4.13)-(4.14) avec $\partial_t = 0$ et $v_{s,w} = 0$, il vient

$$\tau_s = \frac{l_{s_0}^2}{\kappa_{s_0}}, \tag{4.15}$$

$$\tau_w = \frac{l_{w_0}^2}{\kappa_w}. \tag{4.16}$$

De plus, en reportant (4.9) et (4.10) dans l'équation (4.6), une relation supplémentaire entre les trois variables ΔT , l_s et l_w est obtenue :

$$\left(\frac{\lambda_s(t)}{l_s(t)} + \frac{\lambda_w}{l_w(t)} \right) \Delta T(t) = \Psi(t) \quad (4.17)$$

Ainsi, en formulant l'hypothèse d'un champ de température particulier (Eqs. (4.9) et (4.10)), la variable d'espace est éliminée et le problème thermique se ramène au système de trois équations (4.13), (4.14) et (4.17) à trois variables ΔT , l_s et l_w , les deux dernières variables étant caractéristiques de la forme du champ de température dans le stack et dans la partie passive du noyau thermoacoustique.

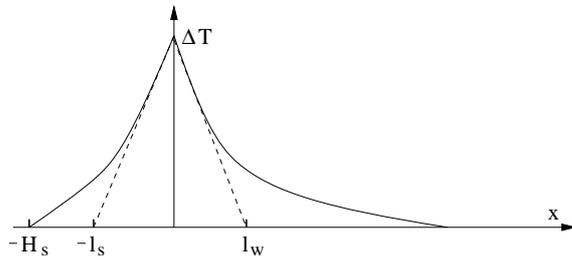


FIG. 4.1 – Approximation exponentielle (trait plein) et linéaire (trait tireté) du champ de température.

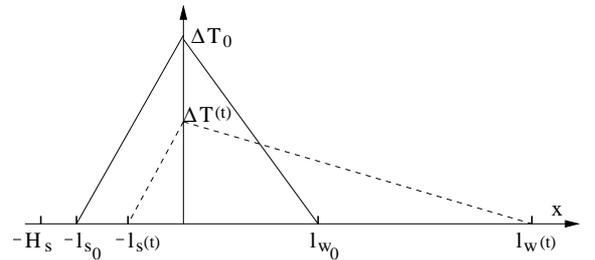


FIG. 4.2 – Distribution initiale (trait plein) du champ de température puis sous l'effet du vent acoustique (trait tireté) au cours du régime transitoire.

Cette formulation du problème thermique est bien évidemment schématique. Elle présente néanmoins un double avantage. Tout d'abord, le système initial, gouverné par des équations aux dérivées partielles et donc par un nombre infini de degrés de liberté, a été ramené à un système d'équations à trois degrés de liberté, tout en conservant "qualitativement" par les variables l_s et l_w des informations sur la forme du champ de température dans le noyau thermoacoustique et sur ses variations avec le temps, informations dont on sait désormais qu'elles jouent un rôle primordial dans la nature des régimes transitoires observés. Ensuite, en simplifiant ainsi à l'extrême la description du champ de température, une voie est ouverte quant à la description analytique explicite du coefficient d'amplification thermoacoustique. En effet, dans la continuité des approximations déjà formulées, approximer le champ de température réel non plus par un champ de température "exponentiel", mais par un champ de température linéaire (Fig. 4.2), permet d'exprimer de façon explicite le coefficient d'amplification thermoacoustique en fonction des variables l_s , l_w et ΔT (annexe D).

4.1.3 Equation d'évolution de l'amplitude de pression acoustique

Nous avons vu au chapitre 1 que l'évolution en amplitude de la pression acoustique du mode fondamental est décrite par le système d'équation suivant (Eqs. (1.24)-(1.25)) :

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} = -\omega \frac{\beta_{nl}}{2} M_1 M_2 + \frac{M_1}{\tau_{ampl}} - \frac{M_1^2}{\tau_{minor}} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial t} = \omega \frac{\beta_{nl}}{2} M_1^2 - \frac{M_2}{\tau_{att}}, \quad (4.19)$$

où M_1 et M_2 représentent respectivement les nombres de mach acoustique du mode fondamental et du premier harmonique. Ce système de deux équations différentielles ordinaires peut être ramené à une unique équation différentielle si l'on suppose que les variations de M_2 se font de manière "quasi statique", c'est à dire en supposant que la solution pour M_2 en régime permanent

$$M_2 = \frac{\omega \beta_{nl}}{2} \tau_{att} M_1^2 \tag{4.20}$$

est valide à tout instant. De la sorte, en reportant l'expression (4.20) de M_2 dans l'équation (4.18), il vient :

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} = \frac{M_1}{\tau_{ampl}} - \frac{M_1^2}{\tau_{minor}} - \left(\frac{\omega \beta_{nl}}{2} \right)^2 \tau_{att} M_1^3. \tag{4.21}$$

On peut aisément vérifier par calcul numérique que l'hypothèse de quasi staticité pour l'évolution temporelle de M_2 est d'autant plus justifiée que le rapport τ_{ampl}/τ_{att} est élevé, et que les évolutions temporelles des niveaux de pression acoustique obtenues par la résolution de l'équation (4.21) ou par la résolution de (4.18)-(4.19) restent très proches l'une de l'autre, quelle que soit la valeur attribuée au temps caractéristique τ_{ampl} . Ainsi, on retiendra pour la suite de ce chapitre que l'amplitude de pression acoustique $p(t)$ du mode fondamental est décrite par l'équation différentielle

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a p - b p^2 - c p^3, \tag{4.22}$$

où le paramètre a , fonction de la distribution de température dans le noyau thermoacoustique ($a = \alpha(T_{s,w}(x,t)) \times f$), rend compte de l'amplification thermoacoustique, et où les paramètres

$$b = \frac{1}{\rho_a a_c^2 \tau_{minor}}, \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{(\rho_a a_c^2)^2} \left(\frac{\omega \beta_{nl}}{2} \right)^2 \tau_{att}, \tag{4.23}$$

représentent respectivement les paramètres liés aux atténuations par pertes mineures et par cascade harmonique.

4.1.4 Bilan : description du régime transitoire sous forme d'un flôt dans \mathbb{R}^4

Tirant parti des résultats des paragraphes 4.1.2 et 4.1.3. et ajoutant l'équation d'évolution de la vitesse du vent acoustique (Eq. (3.37)), le système dynamique décrivant le régime transitoire de déclenchement et de saturation de l'instabilité thermoacoustique est finalement exprimé comme suit :

$$\frac{l_s}{\Delta T} \partial_t \Delta T + \partial_t l_s = \frac{\kappa_s(t)}{l_s} - \frac{l_s}{\tau_s} - v_s, \tag{4.24}$$

$$\frac{l_w}{\Delta T} \partial_t \Delta T + \partial_t l_w = \frac{\kappa_w}{l_w} - \frac{l_w}{\tau_s} + v_w, \tag{4.25}$$

$$\partial_t v_w + \frac{v_w}{\tau_v} = \frac{\Gamma_v}{\tau_v} p^2, \quad \text{et} \quad v_s = \frac{\rho_a C_a}{\rho_s C_s} v_w \tag{4.26}$$

$$\partial_t p = a p - b p^2 - c p^3, \tag{4.27}$$

$$\left(\frac{\lambda_s(t)}{l_s(t)} + \frac{\lambda_w}{l_w(t)} \right) \Delta T(t) = \Psi(t). \tag{4.28}$$

Il s'agit donc d'un système de 5 équations à cinq inconnues l_s , l_w , ΔT , v_w , et p . De plus, remarquant que la variable ΔT est esclave des variables l_s et l_w (Eq. 4.28), le problème transitoire peut finalement être écrit sous forme d'un système dynamique non linéaire d'ordre 4 :

$$\partial_t \vec{X} = \mathcal{F}(\vec{X}), \text{ avec } \vec{X} = \begin{pmatrix} l_s \\ l_w \\ v_w \\ p \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

L'expression détaillée de la fonction \mathcal{F} se déduit facilement du système d'équations (4.24)-(4.28) en reportant dans les équations (4.24) et (4.25) l'expression (4.28) de la variable "esclave" ΔT en fonction de l_s et l_w . Mis sous la forme (4.29), le problème du régime transitoire se prête désormais à une analyse du type de celles couramment employées dans la théorie des systèmes dynamiques non linéaires [33] : en particulier une analyse de stabilité des solutions stationnaires doit permettre d'aboutir à la définition de paramètres de contrôle adimensionnels régissant la convergence vers un point fixe, un cycle limite ou un attracteur étrange. Cependant, il reste à ce stade une difficulté à contourner concernant l'expression du coefficient d'amplification thermoacoustique (paramètre a dans l'équation (4.27)). En effet, avant qu'une analyse de stabilité du système (4.29) puisse être envisagée, il faut disposer d'une expression analytique explicite du coefficient d'amplification thermoacoustique en fonction des variables ΔT , l_s et l_w ; ceci est possible (annexe D) sous l'hypothèse d'une distribution de température linéaire (Fig. 4.2). Cependant, malgré les nombreuses hypothèses formulées, l'expression de ce coefficient d'amplification est trop compliquée pour qu'une analyse de stabilité puisse être raisonnablement envisagée. C'est pourquoi au paragraphe 4.2, une formulation simple et empirique de l'expression du paramètre a est proposée, à partir de laquelle le système dynamique (4.29) est étudié.

4.2 Analyse de stabilité à partir d'une formulation empirique du coefficient d'amplification

Dans ce paragraphe, une formulation empirique du coefficient d'amplification thermoacoustique est proposée (§ 4.2.1.) à partir de résultats de simulations numériques. Ce coefficient d'amplification thermoacoustique est supposé ne dépendre que de la température ΔT et du gradient de température local à droite $\Delta T/l_w$ à l'extrémité chaude du stack. Ensuite, le système dynamique (4.29) est étudié dans deux cas particuliers : dans le premier cas de figure (§ 4.2.2), les processus de saturation supposés prépondérants sont le vent acoustique ainsi que les processus de cascade harmonique et de pertes mineures ; dans le second cas de figure (§ 4.2.3) le régime transitoire est supposé contrôlé par le processus de conductivité acoustiquement induite. Nous verrons que les résultats obtenus permettent de reproduire qualitativement les résultats expérimentaux des paragraphes 1.3.1 et 1.3.2 et par là même de confirmer que dans le cas de figure d'un chauffage externe, le régime transitoire est essentiellement contrôlé par la conductivité acoustiquement induite, et que dans le cas d'un chauffage interne c'est l'effet du vent acoustique qui prévaut.

4.2.1 Expression empirique du coefficient d'amplification thermoacoustique.

Pour un stack suffisamment court ($H_s = 5\text{cm}$), le coefficient d'amplification thermoacoustique ne dépend en première approximation que du gradient de température $(T_H - T_C)/H_s$ et de la distribution de température $T_w(x, t)$ dans la partie passive du noyau thermoacoustique (chapitre 2, Fig. 2.14). Retenant ce résultat important, il apparaît que le coefficient a doit pouvoir être exprimé de façon approchée en fonction des variables ΔT et l_w . Quand bien même la distribution de température dans le noyau thermoacoustique serait-elle supposée linéaire (Fig. 4.2), la fonction de ΔT et l_w exprimant le coefficient a reste compliquée (cf. annexe D). Afin de conserver une description la plus simple possible, tout en conservant dans le modèle l'expression des processus physiques prépondérants, nous supposons dans la suite que le coefficient a s'exprime de façon approchée par la fonction :

$$a \approx A(\Delta T - \Delta T_0) - B\left(\frac{\Delta T}{l_w} - \frac{\Delta T_0}{l_{w_0}}\right), \tag{4.30}$$

où le premier terme du membre de droite exprime la proportionnalité entre le coefficient d'amplification thermoacoustique et le gradient de température moyen $\Delta T/H_s$, et où le second terme du membre de droite traduit l'effet de la modification de la distribution de température $T_w(x, t)$ dans la partie passive du noyau thermoacoustique. Une réduction du gradient de température local $\Delta T/l_w$, due par exemple à l'excitation du vent acoustique se traduit en effet par une augmentation de l'amplification thermoacoustique (si $B > 0$).

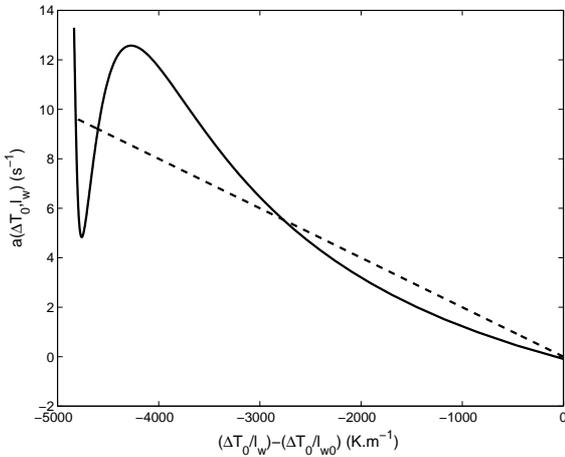


FIG. 4.3 – Trait plein : évolution du paramètre $a = \alpha(\Delta T_0, l_w) \times f$ en fonction de $(\Delta T_0/l_w - \Delta T_0/l_{w_0})$, le coefficient α étant calculé à partir du modèle de l'Annexe D. Trait tireté : tracé de la droite $a(l_w) = B \times [(\Delta T_0/l_w) - (\Delta T_0/l_{w_0})]$, avec $B = -2.10^{-3}$.

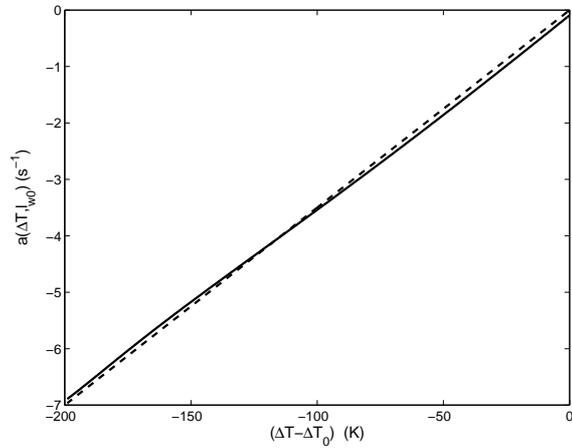


FIG. 4.4 – Trait plein : évolution du paramètre $a = \alpha(\Delta T, l_{w_0}) \times f$ en fonction de $(\Delta T - \Delta T_0)$, le coefficient α étant calculé à partir du modèle de l'Annexe D. Trait tireté : tracé de la droite $a(\Delta T) = (A + B/l_{w_0}) \times (\Delta T - \Delta T_0)$, avec $A = 7.5.10^{-2}$ et $B = -2.10^{-3}$

Reste alors à déterminer les constantes A et B . Pour déterminer la constante B , il suffit d'abord de supposer que la distribution de température dans le stack est linéaire, que $H_s = 5\text{cm}$, puis de

fixer la distance caractéristique initiale l_{w_0} à 5 cm. Utilisant alors le modèle analytique développé en Annexe D (Eqs. (D.29)-(D-31), (D.24)-(D.27), (D.14) et (D.18)), la différence de température initiale ΔT_0 est calculée de manière à ce que le coefficient d'amplification thermoacoustique α s'annule (la valeur $\Delta T_0 \approx 254K$ est obtenue). Puis, en maintenant $\Delta T = \Delta T_0$, l'évolution du paramètre $a = \alpha \times f$ ($f \approx 2\pi/L$) lorsque l_w augmente est alors tracée en fonction de $(\Delta T_0/l_w - \Delta T_0/l_{w_0})$. Assimilant la courbe obtenue à une droite (Fig. 4.3), la mesure de sa pente donne accès au coefficient B. Pour déterminer la constante A, la distance l_w est maintenue constante ($l_w = l_{w_0}$), puis le coefficient d'amplification thermoacoustique est calculé pour différentes valeurs de ΔT , puis tracé en fonction de $\Delta T - \Delta T_0$. Assimilant la courbe obtenue à une droite (Fig. 4.4), la mesure de sa pente donne accès au coefficient $A + B/l_{w_0}$ et par suite au coefficient A. Par cette procédure, les valeurs obtenues

$$A = 7.5 \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (4.31)$$

$$B = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (4.32)$$

sont retenues dans la suite.

4.2.2 Analyse du cas de figure où l'effet du vent acoustique est prédominant.

a- Mise sous forme d'un flot de \mathbb{R}^3

L'ensemble des équations (4.24)-(4.28), compte tenu de l'expression (4.30), est mis dans ce paragraphe sous forme d'un flot de \mathbb{R}^3 . Pour cela, plusieurs hypothèses sont retenues, qui traduisent pour certaines des situations où l'effet du vent acoustique prédomine.

Ainsi, le facteur Γ_λ (voir par exemple Eq. (4.1)) est supposé nul, traduisant que l'effet de la conductivité acoustiquement induite sur les transferts thermiques est négligé devant l'effet du vent acoustique. Ensuite, le temps d'établissement du vent acoustique τ_v est supposé suffisamment faible pour que l'évolution de l'écoulement puisse être considérée comme simultanée de celle de la pression acoustique, de sorte que l'équation (4.26) devient :

$$v_w = \Gamma_v p^2 \text{ et } v_s = \frac{\rho_a C_a}{\rho_s C_s} v_w. \quad (4.33)$$

De plus, remarquant que $\lambda_s \gg \lambda_w$ (voir valeur numériques du Tab. 3.1), et que $l_s \sim l_w$, l'équation (4.28) devient :

$$\frac{\lambda_s}{l_s} \Delta T \approx \Psi. \quad (4.34)$$

Enfin, le flux thermique $\Psi(t)$ introduit à l'extrémité chaude du stack est exprimé de la façon suivante :

$$t \geq 0, \quad \Psi(t) = \Psi_0 + \Delta\Psi(1 + e^{-t/\tau_{th}}), \quad (4.35)$$

où $\Psi_0 = \lambda_s \Delta T_0 / l_{s_0}$ représente le flux thermique initial, et où le temps caractéristique $\tau_{th} \sim 10 \text{ s}$ modélise le temps de transfert thermique depuis l'échangeur de chaleur chaud jusqu'au stack.

Compte tenu de toutes ces hypothèses, et reportant l'expression (4.30) du paramètre a dans l'équation (4.27), le système d'équation (4.24)-(4.28) prend finalement la forme d'un flot dans \mathbb{R}^3 comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dl_s}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{\kappa_s}{l_s} - \frac{l_s}{\tau_s} - \frac{\rho_a C_a}{\rho_s C_s} \Gamma_v p^2 - l_s \frac{\Delta\Psi}{\tau_{th}} \frac{e^{-t/\tau_{th}}}{\Psi} \right], \\ \frac{dl_w}{dt} = \frac{1}{l_w} \left(\kappa_w - \frac{l_w^2}{2l_s^2} \kappa_s \right) - l_w \left(\frac{1}{\tau_w} - \frac{1}{2\tau_s} \right) + \left(1 + \frac{l_w}{2l_s} \frac{\rho_a C_a}{\rho_s C_s} \right) \Gamma_v p^2 - \frac{l_w}{2} \frac{\Delta\Psi}{\tau_{th}} \frac{e^{-t/\tau_{th}}}{\Psi}, \\ \frac{dp}{dt} = \left[A \left(\frac{\Psi l_s}{\lambda_s} - \frac{\psi_0 l_{s0}}{\lambda_s} \right) - B \left(\frac{\Psi l_s}{\lambda_s l_w} - \frac{\Psi_0 l_{s0}}{\lambda_s l_{w0}} \right) \right] p - bp^2 - cp^3. \end{cases} \quad (4.36)$$

Une résolution analytique d'un tel système n'est pas envisageable. Cependant, le régime transitoire peut être facilement calculé par des méthodes numériques. Ceci est réalisé par la méthode de Runge-Kutta. La Fig. 4.5 présente l'allure de l'évolution transitoire (et stationnaire) de l'amplitude efficace de pression acoustique lorsque le flux thermique $\Delta\Psi$ est progressivement augmenté depuis $\Delta\Psi/\Psi_0 = 2\%$ jusqu'à $\Delta\Psi/\Psi_0 = 10\%$. La valeur retenue pour le paramètre Γ_v est celle déjà utilisée au chapitre 3 ($\Gamma_v = 4.10^{-8}$).

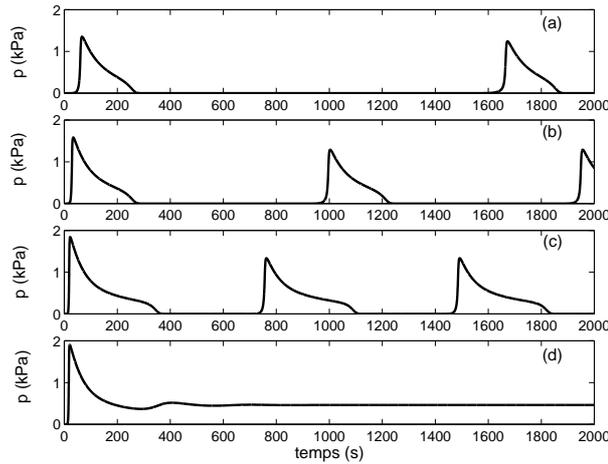


FIG. 4.5 – Evolution temporelle de l'amplitude de pression acoustique. (a) $\Delta\Psi/\Psi_0 = 2\%$, (b) $\Delta\Psi/\Psi_0 = 5\%$, (c) $\Delta\Psi/\Psi_0 = 9\%$, (d) $\Delta\Psi/\Psi_0 = 10\%$.

Les résultats obtenus sont très satisfaisants en ce sens qu'il permettent de retrouver qualitativement les observations expérimentales : il existe un paramètre $\Delta\Psi/\Psi_0 \approx 9\% - 10\%$ seuil en deça duquel le système tend vers un cycle limite (régime de déclenchements et arrêts successifs), et au delà duquel le système tend vers un point fixe. Dès lors, deux questions méritent d'être posées concernant le comportement dynamique du système (4.36) : d'une part, est-il possible de déterminer analytiquement la valeur critique $\Delta\Psi_c$ pour laquelle le système bifurque depuis un cycle limite vers un point fixe ; d'autre part, peut-on déterminer analytiquement l'expression de la période du cycle limite pour $\Delta\Psi < \Delta\Psi_c$, et l'expression des solutions stationnaires $p^\infty, l_s^\infty, l_w^\infty$ pour $\Delta\Psi > \Delta\Psi_c$? La première question peut être éludée par la mise en oeuvre d'une analyse de stabilité des solutions stationnaires.

b- Analyse de stabilité des solutions stationnaires

i) La méthode

Le principe de l'analyse proposée ici est le suivant [33]. Soit le système d'équations d'ordre M

$$d_t X = \mathcal{F}(X), \quad (4.37)$$

où \mathcal{F} est une fonction non linéaire du vecteur X , et soit X^∞ une solution stationnaire connue du système (4.37). On cherche alors à déterminer l'équation d'évolution des perturbations infinitésimales autour de X^∞ en introduisant un paramètre ϵ destiné à mesurer explicitement leur amplitude : insérant $X = X^\infty + \epsilon X'$ dans le système de départ (4.37) et développant formellement en puissance de ϵ , il vient :

$$\epsilon d_t X' = \epsilon \mathcal{L}.X' + \epsilon^2 \mathcal{N}(X', X') + \dots, \quad (4.38)$$

où l'opérateur \mathcal{L} est un opérateur linéaire, et où les termes notés \mathcal{N} , quadratiques en X' , sont d'ordre ϵ^2 et de ce fait négligeables de même que les termes suivants. Ainsi, ne retenant que les termes d'ordre ϵ , puis posant $X' \sim X'_0 e^{\lambda t}$, le problème (4.38) se ramène à

$$\lambda X' = \mathcal{L}.X'. \quad (4.39)$$

L'évolution dans le temps d'une perturbation quelconque X'_0 peut alors s'exprimer dans la base propre de \mathcal{L} sous forme d'une combinaison linéaire de composantes élémentaires $\tilde{X}_m(t) = \tilde{X}_m(0)e^{\lambda_m t}$, où $\lambda_m = \sigma_m + i\omega_m$ sont les valeurs propres de \mathcal{L} .

Dès lors, écrivant $\tilde{X}_m(t) = \tilde{X}_m(0) e^{\lambda_m t} = \tilde{X}_m(0) e^{\sigma_m t} (\cos(\omega_m t) + i \sin(\omega_m t))$, il apparaît que la partie réelle σ_m correspond au taux de croissance de la perturbation. Ainsi, si $\sigma_m < 0$, la perturbation décroît dans le temps, et par suite la solution X^∞ du système (4.37) est stable. En revanche, s'il existe au moins une valeur propre à partie réelle positive, la solution stationnaire X^∞ est instable. Par ailleurs, la partie imaginaire ω_m décrit le comportement temporel des amplitudes des modes propre : si $\omega_m \neq 0$, le mode propre correspondant est oscillant, les oscillations étant amorties ou non suivant le signe de σ_m .

ii) Recherche des solutions stationnaires

Considérons à présent le système dynamique non linéaire (4.36), dont on cherche la (les) solution(s) stationnaire(s) l_s^∞ , l_w^∞ , et p^∞ obtenues pour $d_t \sim 0$ et $t \rightarrow \infty$. Il apparaît que les quantités l_s^∞ et l_w^∞ s'expriment en fonction de p^∞ sous la forme :

$$l_s^\infty = -\frac{\rho_a C_a \Gamma_v (p^\infty)^2 \tau_s}{\rho_s C_s} + \sqrt{\left(\frac{\rho_a C_a \Gamma_v (p^\infty)^2 \tau_s}{\rho_s C_s}\right)^2 + \kappa_s \tau_s}, \quad (4.40)$$

$$l_w^\infty = \frac{\Gamma_v (p^\infty)^2 \tau_w}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma_v (p^\infty)^2 \tau_w}{2}\right)^2 + \kappa_w \tau_w}, \quad (4.41)$$

tandis que p^∞ satisfait l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 f(p^\infty) = 0 &= \frac{A}{\lambda_s} \left[(\Psi_0 + \Delta\Psi) \left(-\frac{\rho_a C_a}{\rho_s C_s} \frac{\Gamma_v (p^\infty)^2 \tau_s}{2} + \sqrt{\left(\frac{\rho_a C_a}{\rho_s C_s} \frac{\Gamma_v (p^\infty)^2 \tau_s}{2} \right)^2 + \kappa_s \tau_s} \right) - \Psi_0 l_{s0} \right] p^\infty \\
 &+ \frac{B}{\lambda_s} \left[(\Psi_0 + \Delta\Psi) \frac{-\frac{\rho_a C_a}{\rho_s C_s} \frac{\Gamma_v (p^\infty)^2 \tau_s}{2} + \sqrt{\left(\frac{\rho_a C_a}{\rho_s C_s} \frac{\Gamma_v (p^\infty)^2 \tau_s}{2} \right)^2 + \kappa_s \tau_s}}{\frac{\Gamma_v (p^\infty)^2 \tau_w}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma_v (p^\infty)^2 \tau_w}{2} \right)^2 + \kappa_w \tau_w}} - \frac{\Psi_0 l_{s0}}{l_{w0}} \right] p^\infty \\
 &- b (p^\infty)^2 - c (p^\infty)^3.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Malheureusement, hormis la solution triviale $p^\infty = 0$, il n'est pas possible de trouver analytiquement de solution à l'équation (4.42); cette (ces) solution(s) est donc cherchée de façon numérique. Les résultats obtenus montrent que l'équation (4.42) admet une unique solution p^∞ strictement positive dès lors que $\Delta\Psi > 0$. La Fig. 4.6 présente l'évolution de p^∞ en fonction du rapport $\Delta\Psi/\Psi_0$. Il apparaît que l'amplitude de pression acoustique en régime stationnaire croît avec le paramètre $\Delta\Psi/\Psi_0$. D'autre part, on peut vérifier facilement que dans le cas de figure où, selon les simulations numériques directe du système (4.36), l'amplitude de pression acoustique tend effectivement vers un point fixe (i.e. pour $\Delta\Psi > \Delta\Psi_c$), la solution p^∞ coïncide parfaitement (au centième de Pa près) avec les résultats issus de la simulation numérique.

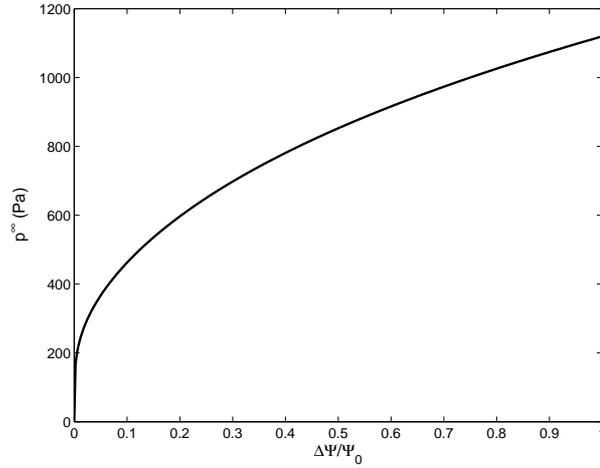


FIG. 4.6 – Evolution de la solution stationnaire non triviale p^∞ en fonction du rapport $\Delta\Psi/\Psi_0$.

iii) Analyse de stabilité

Posant $X = X^\infty + X'$ dans le système (4.36) et ne retenant que les termes d'ordre ϵ (i.e. les termes linéaires en X'), il vient :

$$\begin{cases} \frac{dl'_s}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_s}{(l_s^\infty)^2} + \frac{1}{\tau_s} \right) l'_s - \frac{\rho_a C_a}{\rho_s C_s} \Gamma_v p^\infty p', \\ \frac{dl'_w}{dt} = - \left(\frac{\kappa_w}{(l_w^\infty)^2} + \frac{1}{\tau_w} \right) l'_w + \frac{1}{2} \frac{l_w^\infty}{l_s^\infty} \left(\frac{\kappa_s}{(l_s^\infty)^2} + \frac{1}{\tau_s} \right) l'_s + \left(\frac{l_w^\infty}{l_s^\infty} \frac{\rho_a C_a}{\rho_s C_s} + 2 \right) \Gamma_v p^\infty p', \\ \frac{dp'}{dt} = \frac{(\Psi_0 + \Delta\Psi) p^\infty}{\lambda_s} \left(A + \frac{B}{l_w^\infty} \right) l'_s - \frac{B(\Psi_0 + \Delta\Psi) p^\infty l_s^\infty}{\lambda_s (l_w^\infty)^2} l'_w + \left[\frac{(\Psi_0 + \Delta\Psi) l_s^\infty}{\lambda_s} \left(A + \frac{B}{l_w^\infty} \right) - \frac{\Psi_0 l_s^\infty}{\lambda_s} \left(A + \frac{B}{l_w^\infty} \right) \right] p'. \end{cases} \quad (4.43)$$

Dès lors posant $X' = X'_0 e^{\lambda t}$, la résolution de (4.43) donne accès aux valeurs propres λ_m . Les Figs. 4.7 et 4.8 présentent respectivement l'évolution des parties réelles et imaginaires de ces valeurs propres en fonction du paramètre de contrôle $\Delta\Psi/\Psi_0$. Au regard des résultats illustrés sur ces deux figures, trois zones distinctes peuvent être dissociées.

★ Pour $\Delta\Psi/\Psi_0 \leq 0.036$, le système (4.43) admet trois valeurs propres distinctes et réelles. deux de ces trois valeurs propres ($\lambda_{1,2}$) sont positives, de sorte que la solution X^∞ peut être considérée comme instable dans cette gamme de valeur du paramètre $\Delta\Psi/\Psi_0$.

★ Pour $0.036 \leq \Delta\Psi/\Psi_0 \leq 0.074$, le système (4.43) admet une valeur propre réelle négative (λ_3) et deux valeurs propres complexes conjuguées dont la partie réelle est positive, de sorte que, là encore la solution X^∞ est instable.

★ Pour $\Delta\Psi/\Psi_0 \geq 0.074$, la partie réelle de $\lambda_{1,2}$ devient négative, et la solution X^∞ devient donc stable.

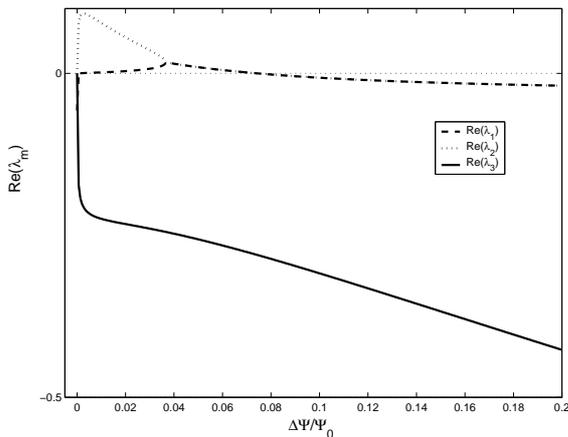


FIG. 4.7 – Parties réelles des valeurs propres λ_m issues de l'analyse de stabilité associée à la solution stationnaire non triviale $X = (p^\infty, l_s^\infty, l_w^\infty)$.

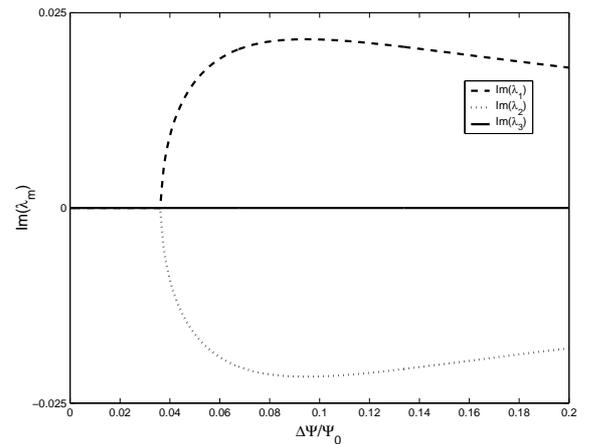


FIG. 4.8 – Parties imaginaires des valeurs propres λ_m issues de l'analyse de stabilité associée à la solution stationnaire non triviale $X = (p^\infty, l_s^\infty, l_w^\infty)$.

Ces résultats sont satisfaisants, puisqu'ils confirment les résultats de simulations numériques selon lesquels il faut que le paramètre $\Delta\Psi$ dépasse une certaine valeur critique pour que le système tende vers un point fixe. Cependant, une remarque doit être formulée concernant la bifurcation depuis le régime de déclenchement et arrêts successifs vers un régime où l'amplitude de pression acoustique est constante. Sur la Fig. 4.9 sont représentés deux régimes transitoires issus de la résolution numérique directe du système (4.36), obtenus respectivement pour $\Delta\Psi/\Psi_0 = 9\%$ (Fig. 4.9 (a)) et pour $\Delta\Psi/\Psi_0 = 9.1\%$ (Fig. 4.9 (b)). Dans le premier cas, le système tend vers un cycle limite de période T_{cycle} , tandis que dans le second cas le système tend vers un point fixe : on en déduit donc que $0.09\Psi_0 \leq \Delta\Psi_c \leq 0.091\Psi_0$. De plus, on peut remarquer que pour $\Delta\Psi \geq \Delta\Psi_c$ la pression acoustique tend bien vers la valeur p^∞ obtenue à l'issue de l'analyse de stabilité, et d'autre part que la période ($\approx 300\text{ s}$) des oscillations amorties qui précèdent la stabilisation coïncident avec la valeur $2\pi/\lambda_{1,2} \approx 290\text{ s}$ fournie par l'analyse de stabilité. Cependant, la valeur critique $\Delta\Psi_c/\Psi_0 \approx 9\%$ à laquelle se produit la bifurcation ne correspond pas à la valeur $\Delta\Psi/\Psi_0 \approx 7.4\%$ à partir de laquelle la solution stationnaire non triviale devient stable. Cette remarque permet de conclure que la transition depuis le régime de déclenchements-arrêts vers un régime stable n'est pas une simple bifurcation de Hopf directe (ou super-critique), mais que cette bifurcation est inverse (ou sous-critique). Le "diagramme de bifurcation" correspondant est illustré sur la Fig. 4.10 où la période du cycle limite est représenté en fonction de $\Delta\Psi/\Psi_0$ ($T_{cycle} = 0$ lorsque le système tend vers un point fixe).

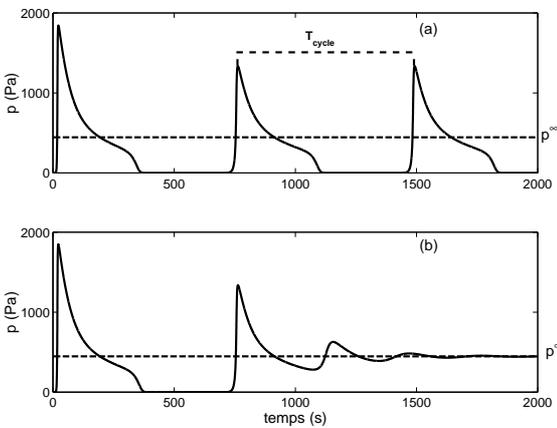


FIG. 4.9 – Evolution en fonction du temps de l'amplitude de pression acoustique respectivement pour $\Delta\Psi/\Psi_0 = 9\%$ (a) et pour $\Delta\Psi/\Psi_0 = 9.1\%$ (b)

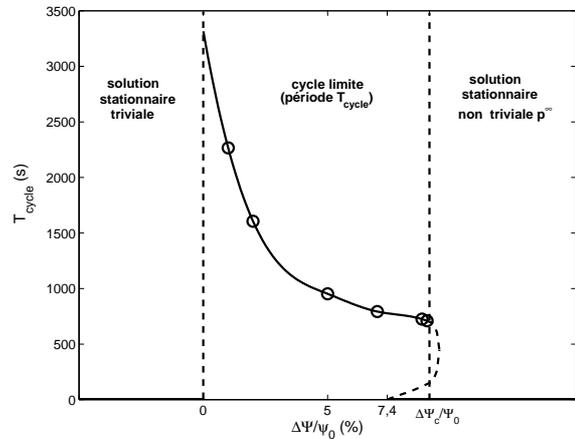


FIG. 4.10 – Représentation de la période du cycle limite T_{cycle} en fonction du paramètre de contrôle $\Delta\Psi/\Psi_0$

4.2.3 Analyse du cas de figure où l'effet de la conductivité thermique acoustiquement induite est prédominant.

Partant du système non linéaire d'équations (4.24)-(4.28), le cas de figure où l'effet du vent acoustique est négligeable devant celui de la conductivité acoustiquement induite est à présent examiné.

Dans ce paragraphe les effets non linéaires de cascade harmonique et de pertes mineures sont supposés négligeables ($b = c = 0$). Enfin, puisque $\Gamma_v = 0$, les variations de la distribution de température dans la partie passive du noyau thermoacoustique peuvent être raisonnablement considérées comme négligeables, de sorte que $l_w(t) \approx l_{w0}$. Par suite, compte tenu des remarques précédentes et des équations (4.30) et (4.34), le système (4.24)-(4.28) prend la forme suivante :

$$\frac{l_s}{\Delta T} \partial_t \Delta T + \partial_t l_s = \frac{\lambda_s + \Gamma_\lambda p^2}{\rho_s C_s} \frac{1}{l_s} - \frac{l_s}{\tau_s}, \quad (4.44)$$

$$\partial_t p = [\Delta T - \Delta T_0] p, \quad (4.45)$$

$$\frac{\lambda_s + \Gamma_\lambda p^2}{l_s} \Delta T(t) = \Psi(t), \quad (4.46)$$

où l'évolution temporelle du flux thermique $\Psi(t)$ est fournie par l'équation (4.35). Éliminant la variable esclave ΔT , ce système d'équations se réduit finalement à un flût de \mathbb{R}^2 comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dl_s}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_s + \Gamma_\lambda p^2}{\rho_s C_s} \frac{1}{l_s} - \frac{l_s}{\tau_s} - \frac{l_s}{\Psi} \frac{\Delta \Psi e^{-t/\tau_{th}}}{\tau_{th}} + 2A \Gamma_\lambda p^2 \frac{l_s}{\lambda_s + \Gamma_\lambda p^2} \left(\frac{\Psi l_s}{\lambda_s + \Gamma_\lambda p^2} - \frac{\Psi_0 l_{s0}}{\lambda_s} \right) \right], \\ \frac{dp}{dt} = A \left(\frac{\Psi l_s}{\lambda_s + \Gamma_\lambda p^2} - \frac{\psi_0 l_{s0}}{\lambda_s} \right) p. \end{cases} \quad (4.47)$$

La Fig. 4.11 représente divers régimes transitoires obtenus par la résolution numérique du système (4.47). La valeur retenue pour le paramètre Γ_λ est celle déjà utilisée au chapitre 3 ($\Gamma_\lambda = 2.10^{-6}$), et le paramètre τ_{th} est fixé à 5 s. Dans ce cas de figure, il apparaît donc que, quelle que soit la valeur attribuée à $\Delta \Psi$, l'amplitude de pression acoustique croît vers une valeur finie p^∞ . Il n'y a pas lieu ici de présenter l'analyse de stabilité du système (4.47), qui n'a d'autre intérêt que de confirmer que le système tend vers un point fixe inconditionnellement stable. Ceci confirme les résultats du chapitre 3, à savoir que pour le cas de figure d'un chauffage externe, les régimes transitoires sont essentiellement contrôlés par l'effet de la conductivité acoustiquement induite, et que l'amplitude de pression acoustique tend à se stabiliser à un niveau fini. La résolution du système (4.47) permet donc de reproduire qualitativement les résultats expérimentaux obtenus par chauffage externe. Ajoutons enfin qu'un meilleur accord peut être obtenu en prenant en compte le rôle des parois du tube en Inox dans le transfert thermique, en assimilant grossièrement le temps caractéristique τ_{th} au temps caractéristique de diffusion thermique

$$\tau_i = \frac{H_s^2}{2\lambda_i/(\rho_i C_i)} \approx 300 \text{ s} \quad (4.48)$$

à travers une portion de tube de longueur H_s dans la direction longitudinale. La Fig. 4.12 présente les régimes transitoires obtenus pour $\tau_{th} = 300 \text{ s}$. Dans ce cas de figure, le régime transitoire peut être clairement décomposé en une première phase d'amplification exponentielle suivie d'une saturation sous l'effet de la conductivité acoustiquement induite, et d'une seconde phase d'amplification lente avant saturation finale, dont la durée dépend du temps de diffusion thermique à travers les parois du tube en Inox.

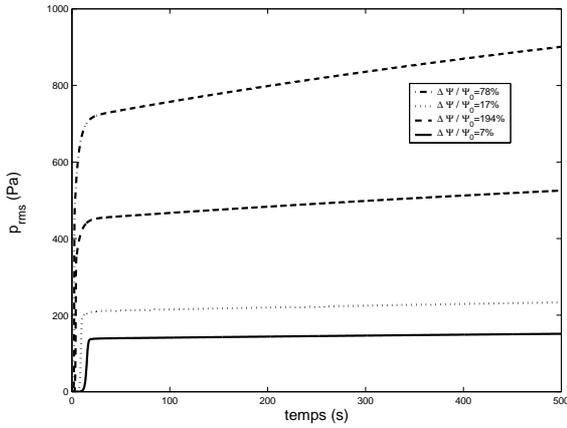


FIG. 4.11 – Evolution temporelle de l’amplitude de pression acoustique, pour $\Gamma_\lambda = 2.10^{-6}$, $\tau_{th} = 5 s$ et pour diverses valeurs du paramètre $\Delta\Psi/\Psi_0$.

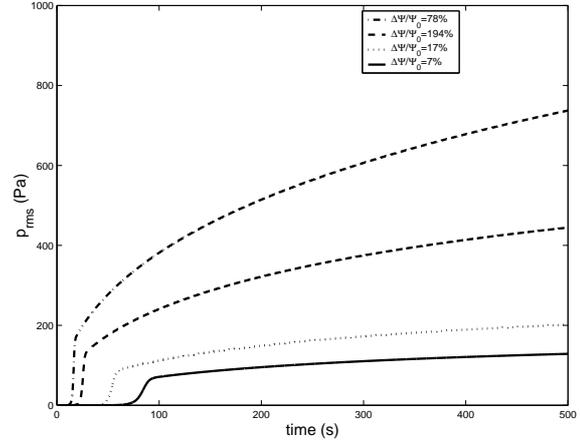


FIG. 4.12 – Evolution temporelle de l’amplitude de pression acoustique, pour $\Gamma_\lambda = 2.10^{-6}$, $\tau_{th} = 300 s$ et pour diverses valeurs du paramètre $\Delta\Psi/\Psi_0$.

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations fondamentales permettant de décrire le déclenchement de l’instabilité thermoacoustique dans un moteur thermoacoustique annulaire sont simplifiées à l’extrême. Dans la démarche adoptée, le problème thermique, régit par un jeu d’équations aux dérivées partielles, ainsi que la description de l’amplification thermoacoustique, sont considérablement simplifiés grâce à l’introduction des deux longueurs caractéristiques l_s et l_w pour décrire qualitativement le champ de température. Le problème se ramène alors à un système non linéaire d’équations différentielles.

Malgré la grande simplification apportée au problème, il est remarquable de constater que qualitativement, la dynamique des régimes transitoires obtenus reproduit bien les résultats expérimentaux. En particulier, ces résultats permettent de confirmer les conclusions du chapitre 3 quant au rôle essentiel joué par le vent acoustique sur la nature des régimes transitoires (et stationnaires) observables. Il convient cependant de rappeler que la portée des résultats présentés ici se limite strictement à l’aspect qualitatif, notamment parce que la formulation utilisée pour décrire l’amplification thermoacoustique est empirique, et basée sur un modèle analytique supposant que la distribution de température est linéaire (annexe D). Il reste bien clair qu’une modélisation quantitative du processus de déclenchement nécessite de prendre en compte précisément la distribution de température dans l’ensemble du noyau thermoacoustique.

Conclusion, perspectives

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans la lignée de ceux déjà effectués au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine depuis 1995 (en partenariat avec le Laboratoire de Mécanique des Fluides et Acoustique de Lyon), qui visent à apporter une contribution originale à l'ensemble des travaux de recherche en thermoacoustique dans le monde, par des études spécifiques de processus physiques fondamentaux mis en jeu dans ces dispositifs. Dans ce domaine où l'analyse expérimentale préalable des phénomènes reste essentielle, bon nombre d'aspects fondamentaux sont encore mal compris de nos jours, du fait en particulier que les nombreuses réalisations expérimentales, notamment celles développées dans un but d'application directe, sont à géométrie de plus en plus complexe.

Le système étudié ici, le moteur thermoacoustique annulaire, n'est pas réalisé pour un usage industriel (son efficacité est des plus modeste) : c'est une machine thermoacoustique à ondes progressives dans sa version la plus épurée, composée d'un stack et d'un résonateur annulaire à section constante. Pour autant, la compréhension des processus physiques qui y prennent place mérite-t-elle un examen approfondi (car elle permet d'éclairer les phénomènes mis en jeu dans les systèmes plus complexes), examen qui nécessite de mettre en oeuvre l'ensemble des travaux présentés dans ce mémoire.

En premier lieu, l'étude expérimentale du régime transitoire de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique (chapitre 1) a permis de dégager plusieurs types de comportements dynamiques, suivant le mode de chauffage (externe ou interne) ou suivant l'orientation du dispositif relativement au champ de pesanteur. Les résultats expérimentaux ont mis en évidence des évolutions significatives du champ de température au cours du régime transitoire, et ont montré que les processus non linéaires d'interaction entre champ de température et champ acoustique (vent acoustique et conductivité acoustiquement induite) jouent un rôle majeur dans la nature des régimes transitoires observés.

Dès lors, une étude détaillée de l'influence de la forme du champ de température sur l'amplification thermoacoustique (chapitre 2) a été menée. Cette étude, basée sur le modèle analytique développé par S. Job et V. Gusev [29] (annexe A), a mis évidence que la distribution du champ acoustique (pression, vitesse et phase), et par suite l'amplification thermoacoustique du son, dépendent de façon critique de la forme du champ de température, notamment celle qui apparaît dans la partie passive du noyau thermoacoustique. Ce résultat, important et non trivial, a permis d'expliquer l'effet (observé) de l'orientation du dispositif expérimental relativement au champ de pesanteur (i.e. l'effet de la convection naturelle) sur les conditions de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique. De plus,

une interprétation, essentiellement qualitative, du processus transitoire à double-déclenchement a pu être avancée en considérant que ce type de régime est probablement dû à l'excitation du vent acoustique, qui peut dans des circonstances données avoir un effet amplificateur de par son influence sur la forme du champ de température.

La suite du mémoire (chapitres 3 et 4) est consacrée à la modélisation du régime transitoire depuis le déclenchement de l'onde acoustique jusqu'à sa saturation par effets non linéaires. Au chapitre 3, les effets de cascade harmonique, de pertes mineures aux extrémités du stack, de vent acoustique et de conductivité acoustiquement induite sont pris en compte à partir de modèles simplifiés, puis le déclenchement et la saturation de l'onde acoustique est calculé (numériquement) suivant différentes configurations de chauffage par la description analytique des interactions en régime transitoire entre champ acoustique et champ de température. Les résultats obtenus par la seule prise en compte des effets du pompage de chaleur thermoacoustique (conductivité acoustiquement induite) et du vent acoustique, phénomènes pressentis comme étant prépondérants, reproduisent qualitativement les observations expérimentales (et notamment le processus de déclenchement et arrêt successifs de l'instabilité thermoacoustique). Par contre, en ajoutant dans le modèle la prise en compte des effets de pertes mineures et de cascade harmonique, un bon accord quantitatif est finalement obtenu entre résultats expérimentaux et simulations.

Au vu des résultats obtenus, il semble donc que la dynamique de développement de l'instabilité thermoacoustique est régie par un grand nombre de paramètres, mais que les paramètres essentiels sont ceux qui décrivent l'interaction entre champ de température et champ acoustique. C'est pourquoi au chapitre 4, une simplification drastique (mais éclairée par les résultats précédents) des équations mises en jeu est proposée, qui permet d'aboutir à la description, strictement qualitative, de la dynamique de déclenchement et de saturation de l'instabilité thermoacoustique sous forme d'un système d'équations différentielles ordinaires, et de faire usage des méthodes d'analyse connues de ce type de systèmes. Bien que simplifiée à l'extrême, cette approche permet de saisir conceptuellement comment les effets non linéaires de couplage entre champ de température et champ acoustique peuvent être à l'origine des observations expérimentales.

Au delà des travaux effectués durant cette préparation de thèse, plusieurs études paraissent devoir être menées. En premier lieu, une machine thermoacoustique annulaire tritherme faisant usage des deux modes de fonctionnement thermoacoustique (moteur et réfrigérateur) pourrait être facilement réalisée à partir du dispositif expérimental existant. Pour ce faire, il suffit d'inclure dans le résonateur acoustique un stack secondaire (ou un régénérateur) qui sera le coeur du processus de réfrigération thermoacoustique. Ce type de machine a déjà été réalisé par l'équipe de Yazaki [75]; mais il est clair que les résultats des travaux présentés dans ce mémoire pourraient apporter un complément intéressant à la compréhension du fonctionnement et à l'optimisation de ce type de machine (une étude expérimentale préliminaire sera effectuée fin 2004-début 2005 dans le cadre d'un projet d'étudiants de Licence Professionnelle).

Ensuite, l'utilisation de méthodes de mesure optique non invasives comme l'Anémométrie Laser Doppler ou la Vélocimétrie par Imagerie de Particules constitue un moyen intéressant pour analyser finement les effets hydrodynamiques complexes prenant place aux extrémités du stack et des échangeurs de chaleurs (effets qui font notamment l'objet d'études expérimentales approfondies au LMFA [12, 20], confirmées par des études numériques [35]), mais également pour visualiser la structure et mesurer précisément la vitesse de l'écoulement redressé [65, 68]. C'est en effet par ce type de mesures et par la mise en oeuvre de méthodes numériques qu'une description quantitative du comportement des machines thermoacoustiques peut être réalisée.

D'un point de vue plus général, un nombre croissant d'équipes de recherches s'intéressent depuis quelques années à la réduction de l'encombrement des systèmes thermoacoustiques, l'objectif visé à terme étant la miniaturisation de ces systèmes afin, entre autres, d'accélérer les transferts de chaleur pour assurer le refroidissement des circuits électroniques. Ces travaux portent pour une part sur l'étude fondamentale des processus physiques mis en jeu (processus thermoacoustique, phénomènes non linéaires, etc...) au coeur de micro-canaux, afin de prendre en compte de manière réaliste les comportements spécifiques relevant de la micro-fluidique. Ces travaux portent également sur le développement de techniques de fabrication MEMS adaptées conduisant à la réalisation de micro-stacks instrumentés permettant la mesure in-situ des différentes grandeurs d'intérêt (pression acoustique, température oscillante, vitesse particulaire, flux de chaleur, etc...) et le contrôle des différents effets limitants (contrôle actif des écoulements non linéaires ou de la génération d'harmoniques par exemple).

Si ces différents aspects théoriques et expérimentaux relèvent principalement aujourd'hui de la simple perspective du fait de la nouveauté du champ d'application, ils n'en constituent pas moins à nos yeux un enjeu et un défi intéressant pour les travaux futurs en thermoacoustique.

Annexe A

Description analytique de l'amplification thermoacoustique dans un moteur thermoacoustique annulaire

Les détails du modèle brièvement décrit au chapitre 2 sont donnés dans cette annexe, extraite d'un manuscrit soumis pour publication au journal Acustica Acta-Acustica. Les notations sont celles du chapitre 2.

Here, the determination of the amplification coefficient α and the corresponding oscillation frequency for an arbitrary temperature distribution profile is explained in detail. The computation of the acoustic field throughout the whole device is also presented. As it is explained in section 2, the frequency dependent reflexion/transmission characteristics of the thermoacoustic core can be described with the use of its scattering matrix (equation (2)). Its coefficients are the transmission coefficients \tilde{T}^\pm and the reflexion coefficients \tilde{R}^\pm . These coefficients depend on the temperature distribution and on frequency. Their determination requires solving the well-known differential equation of thermoacoustics [59] (second-order differential equation with variable coefficients) :

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - f_\nu) \frac{d\tilde{p}}{dx} \right] + \beta \left[1 - f_\nu + \frac{f_\nu - f_\kappa}{(1 - \sigma)(1 + \epsilon)} \right] \frac{dT_m}{dx} \frac{d\tilde{p}}{dx} + \left(\frac{\omega}{a_c} \right)^2 \left[1 + \frac{(\gamma - 1)f_\kappa}{1 + \epsilon} \right] \tilde{p} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Here, $T_m(x)$ is the mean temperature (i.e. the temperature averaged over a period of acoustic oscillations), ω is the angular frequency, a_c is the speed of sound, β is the isobaric thermal expansion coefficient, γ is the specific heat ratio of fluid, and σ is the Prandtl number. The frequency (and temperature) dependant functions f_ν and f_κ characterize the efficiency of the viscous and thermal coupling of the acoustic field with the walls of the channel (stack channel, or waveguide). For the case of a circular cylinder channel of inner radius D , these functions are

$$f_{\nu,\kappa} = \frac{2}{iY_{\nu,\kappa}} \frac{J_1(iY_{\nu,\kappa})}{J_0(iY_{\nu,\kappa})}, \quad (\text{A.2})$$

where

$$Y_{\nu,\kappa} = (1 + i) \frac{D}{\delta_{\nu,\kappa}}. \quad (\text{A.3})$$

$\delta_\kappa = \sqrt{2\kappa(T_m(x))/\omega}$ is the acoustic thermal boundary layer thickness in fluid and $\delta_\nu = \sqrt{2\nu(T_m(x))/\omega}$ is the acoustic viscous boundary layer thickness in fluid (ν and κ denoting the temperature dependant kinematic viscosity and thermal diffusivity of the fluid). The coefficient ϵ , proportional to the ratio ϵ_f/ϵ_S of thermal effusivities of fluid and solid, characterizes heat transport in the direction normal to the direction of acoustic wave propagation. Assuming $\epsilon \ll 1$ (in fact, considering $\epsilon = 0$) and $\beta = 1/T_m$ (i.e. the case of an ideal gas), equation (A2) reduces to

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{p}}{dx^2} + \left[1 + \frac{1}{1-f_\nu} \left(\frac{f_\nu - f_\kappa}{1-\sigma} - T_N(x) \frac{df_\nu}{dT_N} \right) \right] \frac{1}{T_N} \frac{dT_N}{dx} \frac{d\tilde{p}}{dx} \\ + \left(\frac{\omega}{a_c} \right)^2 \frac{1}{T_N} \left[1 + \frac{1}{1-f_\nu} (f_\nu + (\gamma-1)f_\kappa) \right] \tilde{p} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

where $T_N(x) = T_m(x)/T_C$, with T_C denoting the cold temperature (i.e. the temperature at the cold end of the stack). The following quantities

$$\frac{d\phi_1}{dx} = \left[1 + \frac{1}{1-f_\nu} \left(\frac{f_\nu - f_\kappa}{1-\sigma} - T_N(x) \frac{df_\nu}{dT_N} \right) \right] \frac{1}{T_N} \frac{dT_N}{dx} \quad (\text{A.5})$$

$$\phi_0 = \frac{1}{T_N} \left[1 + \frac{1}{1-f_\nu} (f_\nu + (\gamma-1)f_\kappa) \right] \quad (\text{A.6})$$

are introduced, and a new spatial coordinate ξ is defined :

$$\frac{d\xi}{dx} = \xi_x = e^{(\phi_1(x_0) - \phi_1(x))}, \quad (\text{A.7})$$

where x_0 is an arbitrary origin in the reference frame. Finally, defining the function

$$F(\xi) = \phi_0(x(\xi)) \xi_x^{-2}, \quad (\text{A.8})$$

equation (A.4) reduces to

$$\frac{d^2 \tilde{p}}{d\xi^2} + k_c^2 F(\xi) \tilde{p} = 0, \quad (\text{A.9})$$

with $k_c = \omega/a_c$. The main advantage of this formulation is that the solution can be found using an iterative method. For this purpose, equation (A.9) is modified into the equivalent form

$$\tilde{p}(\xi) = \tilde{p}(\xi_0) + \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\tilde{p}}{d\xi'}(\xi') d\xi', \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{d\tilde{p}}{d\xi}(\xi) = \frac{d\tilde{p}}{d\xi}(\xi_0) - k_c^2 \int_{\xi_0}^{\xi} F(\xi') \tilde{p}(\xi') d\xi'. \quad (\text{A.11})$$

This set of equations is well-suited for a numerical resolution by the use of successive approximations. Indeed, the N^{th} order solutions for \tilde{p} and $d_\xi \tilde{p}$ on the left hand-side of equations (A.10) and (A.11) can be found by substituting their values at the $(N - 1)^{\text{th}}$ order in the integral operators on the right hand-side of equations (A.10) and (A.11). Introducing the integral operators Ω_1 and Ω_2

$$f \mapsto \Omega_1(f) = ik_c \int_{\xi_0}^{\xi} F(\xi') f(\xi') d\xi', \quad (\text{A.12})$$

$$f \mapsto \Omega_2(f) = ik_c \int_{\xi_0}^{\xi} f(\xi') d\xi', \quad (\text{A.13})$$

the exact solution for \tilde{p} and $d_\xi \tilde{p}$ is finally obtained in the form of an infinite sequence of integral operators

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}(\xi) \\ \frac{d\tilde{p}}{d\xi}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_2 \Omega_1)^n & \frac{\Omega_2}{ik_c} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_1 \Omega_2)^n \\ ik_c \Omega_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_2 \Omega_1)^n & \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_1 \Omega_2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}(\xi_0) \\ \frac{d\tilde{p}}{d\xi}(\xi_0) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

where for instance $(\Omega_2 \Omega_1)^n \tilde{p}(\xi_0)$ means

$$(\Omega_2 \Omega_1)^n \tilde{p}(\xi_0) = \underbrace{\Omega_2(\Omega_1(\dots \Omega_2(\Omega_1(\tilde{p}(\xi_0))))}_{n \text{ times}}. \quad (\text{A.15})$$

Then, using the Navier-Stokes equation, the acoustic velocity $\tilde{v}(x, r)$ is expressed as a function of acoustic pressure, and integrating over a cross section, the mean axial velocity $\langle \tilde{v}(x) \rangle_r$ (where $\langle \rangle_r$ denotes the average over a cross section) is expressed as

$$\langle \tilde{v}(x) \rangle_r = \frac{1}{ik_c Z(x)} \frac{d\tilde{p}(x)}{dx}, \quad (\text{A.16})$$

with

$$Z(x) = \frac{\rho_m(x) a_c}{1 - f_\nu}, \quad (\text{A.17})$$

$\rho_m(x)$ being the mean density along the thermoacoustic core. Combining equations (A.16) and (A.14) finally gives the acoustic field in the thermoacoustic core as a function of its value at position x_0 :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}(x) \\ \langle \tilde{v}(x) \rangle_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_2 \Omega_1)^n & \frac{Z(x) \Omega_2}{ik_c} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_1 \Omega_2)^n \\ \frac{\xi_x(x) \Omega_1}{Z(x)} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_2 \Omega_1)^n & \frac{Z(x_0) \xi_x(x)}{Z(x)} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_1 \Omega_2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}(x_0) \\ \langle \tilde{v}(x_0) \rangle_r \end{pmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Invoking equation (A.18) yields the transfer matrix of the thermoacoustic core :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}(H_W) \\ \langle \tilde{v}(H_W) \rangle_r \end{pmatrix} = T \times \begin{pmatrix} \tilde{p}(-H_S) \\ \langle \tilde{v}(-H_S) \rangle_r \end{pmatrix} = T_S \times T_W \times \begin{pmatrix} \tilde{p}(-H_S) \\ \langle \tilde{v}(-H_S) \rangle_r \end{pmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

where T_S is obtained using equation (A.18) with $(x_0, x) = (-H_S, 0)$ for a channel radius $D \equiv D_S$ and T_W is obtained using equation (A.18) with $(x_0, x) = (0, H_W)$ for a channel radius $D \equiv D_W$.

The linear propagation of an harmonic wave in the cold part of the resonator ($H_W \leq x \leq L - H_S$) can be described by equation (A.4), taking into account that $T_N \equiv 1$ (and taking $D \equiv D_W$ in equation (A.3)). The resulting expressions for the counterpropagative components of acoustic pressure waves are :

$$\tilde{p}^\pm(x) = \tilde{p}^\pm(H_W)e^{\pm ik_w(x-H_W)}, \quad (\text{A.20})$$

where the complex wavenumber

$$k_w = k_c \sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1)f_\kappa}{1 - f_\nu}} \quad (\text{A.21})$$

accounts for the thermal and viscous losses in the vicinity of the resonator walls. Using equations (A.20) and (A.16) the mean acoustic velocity $\langle \tilde{v}(x) \rangle_r$ can be expressed as a function of the counterpropagative components \tilde{p}^+ and \tilde{p}^- of acoustic pressure $\tilde{p} = \tilde{p}^+ + \tilde{p}^-$ and finally, simple calculations allow us to transform the transfer matrix (equation (A.19)) into the scattering matrix (equation (2)), and then the coefficient \tilde{R}^\pm and \tilde{T}^\pm are obtained.

Now, the method for determining the threshold conditions is laid out. To do this, the acoustic pressure between two successive round trips of the acoustic field in the device is described as follows :

$$\tilde{p}_m^\pm(x) = \tilde{p}_{m-1}^\pm(x)e^\alpha. \quad (\text{A.22})$$

Combining equations (2), (A.20) and (A.22) gives :

$$\begin{pmatrix} \left(\tilde{T}^+ - e^{\alpha - ik_w L_W} \right) & \tilde{R}^- e^{-ik_w L_W} \\ \tilde{R}^+ e^{ik_w L_W} & \left(\tilde{T}^- - e^{\alpha - ik_w L_W} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_m^+(H_W) \\ \tilde{p}_m^-(H_W) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.23})$$

with $L_W = L - H_S - H_W$. The solution $(\tilde{p}_m^+(H_W), \tilde{p}_m^-(H_W))$ of equation (A.23) does not vanish if the matrix determinant is zero :

$$\left(e^{\alpha - ik_w L_W} - \tilde{T}^+ \right) \left(e^{\alpha - ik_w L_W} - \tilde{T}^- \right) - \tilde{R}^+ \tilde{R}^- = 0 \quad (\text{A.24})$$

If the temperature distribution in the thermoacoustic core is fixed, a truncated approximate solution for \tilde{T}^\pm and \tilde{R}^\pm can be computed, and introduced in equation (A.24) to obtain the amplification coefficient α and the corresponding angular frequency ω . Here, we are interested in the most unstable acoustic mode, which is in most cases the first travelling wave mode of the annular waveguide ($f \approx a_c/L$). The quantity $\Delta\phi = \alpha - i(k_w L_W - 2\pi)$ is introduced, where 2π is in fact the approximate value for $k_w L_W$ in the empty device ($L_W = L$). Substituting $\Delta\phi$ in equation (A.24) results in a quadratic equation in $e^{\Delta\phi}$, which admits the solution

$$e^{\Delta\phi} = \Gamma^\pm = \left(\frac{\tilde{T}^+ + \tilde{T}^-}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-}{2} \right)^2 + \tilde{R}^+ \tilde{R}^-}. \quad (\text{A.25})$$

Finally, separating equation (A.25) into real and imaginary parts, the following set of equations is solved :

$$\begin{cases} \alpha^\pm = \ln |1 + \Gamma^\pm(\omega^\pm)| - \text{Im}(k_W(\omega^\pm)L_W) \\ 2\pi = \text{Arg}(1 + \Gamma^\pm(\omega^\pm)) + \text{Re}(k_W(\omega^\pm)L_W) \end{cases}, \quad (\text{A.26})$$

If we were interested in the n^{th} travelling wave mode of the device we would only replace 2π by $2n\pi$ in equation (A.26). As pointed out in equations (A.25) and (A.26) there are two possible solutions for α and ω , but it is easy to accept that the physically observable solution is the one which increases in the quickest way. Consequently, the chosen solution $(\alpha, \omega) \in \{(\alpha^-, \omega^-), (\alpha^+, \omega^+)\}$ is that for which

$$\alpha = \text{Sup}(\alpha^+, \alpha^-). \quad (\text{A.27})$$

Finally, the acoustic field in the whole device can be computed for some arbitrary temperature distribution, once the corresponding amplification coefficient α and oscillation frequency ω are known. Using equation (A.20), the acoustic pressure in the cold part of the waveguide is firstly computed as follows :

$$\forall x \in [H_W, L - H_S], \tilde{p}(x) = \tilde{p}^+(H_W) \left[e^{ik_W(x-H_W)} + \tilde{R}(H_W)e^{-ik_W(x-H_W)} \right], \quad (\text{A.28})$$

where the complex quantity $\tilde{R}(H_W) = \tilde{p}^-(H_W)/\tilde{p}^+(H_W)$ is obtained using equation (A.23) :

$$\tilde{R}(H_W) = \frac{e^{\alpha - ik_W L_W} - \tilde{T}^+}{\tilde{R}^- e^{-ik_W L_W}}. \quad (\text{A.29})$$

Combining equations (A.28) and (A.16), the mean acoustic velocity $\langle \tilde{v}(x) \rangle_r$ is also computed. Then, to obtain the acoustic field in the thermoacoustic core, equation (A.18) is used. This equation is valid both in the stack region and in the inhomogeneously heated part of the resonator, but each region has to be treated separately, because $Z(x)$, $\xi_x(x)$, Ω_1 and Ω_2 depend notably on the $f_{\nu, \kappa}$ functions which characterize the transverse distribution of oscillating velocity and oscillating entropy in the channel, and which are consequently not the same depending on whether the channel radius D is D_S or D_W . So, setting the boundary values $\tilde{p}(L - H_S)$ and $\langle \tilde{v}(L - H_S) \rangle_r$ in the right-hand side of equation (A.18) (i.e. setting x_0 to $L - H_S$), the acoustic field is first computed in the $[-H_S, 0]$ interval. Then, setting the boundary values $\tilde{p}(L)$ and $\langle \tilde{v}(L) \rangle_r$ in the right-hand side of equation (A.18) (with account of $D \equiv D_W$), the acoustic field is finally computed in the $[L, L + H_W] \equiv [0, H_W]$ interval.

Annexe B

Description du modèle thermique et calculs des coefficients d'échange

B.1 Equations du transport de la chaleur

On considère que le dispositif à l'étude est constitué de trois ailettes, i.e. le tube en inox (indice "i"), le stack (indice "s"), et la partie passive du noyau thermoacoustique (indice "w"). Le bilan des flux thermiques est écrit ici pour chacune de ces trois ailettes, lorsque l'on procède à un chauffage externe (Fig. B.1).

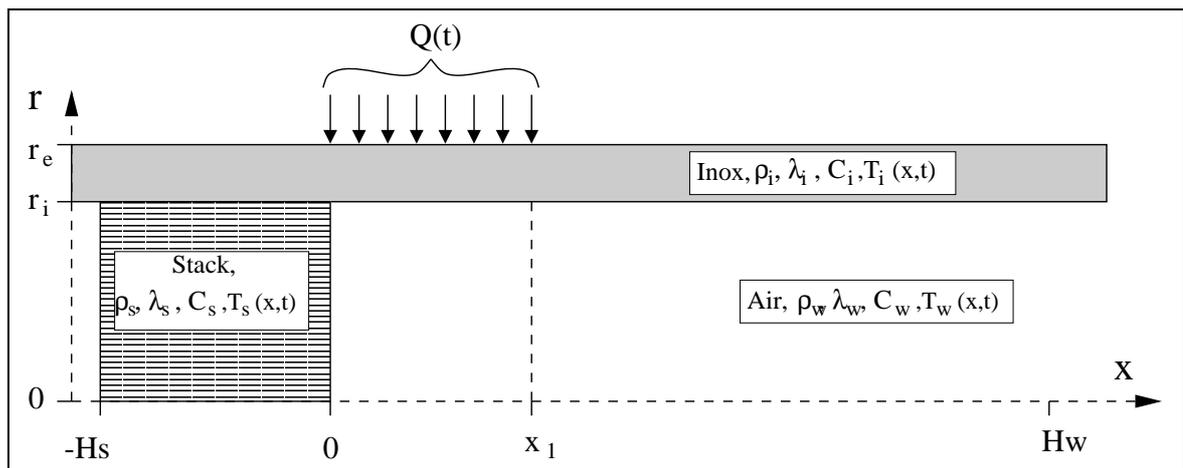


FIG. B.1 – Représentation schématique du noyau thermoacoustique dans le cas d'un chauffage externe, constitué de trois milieux distincts : les parois du guide d'onde (inox), le fluide dans la partie passive du noyau thermoacoustique, et le stack (milieu supposé homogène).

B.1.1 "Ailette" tube inox

Le bilan thermique entre x et $x + dx$ prend la forme :

$$\rho_i C_i \frac{\partial T_i(x, t)}{\partial t} dx = \left[\left(-\lambda_i \frac{\partial T_i(x, t)}{\partial x} \right) - \left(-\lambda_i \frac{\partial T_i(x + dx, t)}{\partial x} \right) \right] + f_{\text{lat}}^{(i)}, \quad (\text{B.1})$$

où $f_{\text{lat}}^{(i)}$ désigne le flux thermique latéral provenant du chauffage, de l'échange avec le milieu extérieur ou avec les autres ailettes. Ce flux thermique s'exprime par l'usage de coefficients d'échanges entre les différentes ailettes respectivement comme suit :

$$\forall x \in]-H_s, 0[, f_{\text{lat}}^{(i)} = \frac{2\pi r_e dx}{\pi(r_e^2 - r_i^2)} h_{\text{ext}} (T_\infty - T_i(x, t)) + \frac{2\pi r_i dx}{\pi(r_e^2 - r_i^2)} h^{cc} (T_s(x, t) - T_i(x, t)), \quad (\text{B.2})$$

$$\forall x \in]0, x_1[, f_{\text{lat}}^{(i)} = \frac{2\pi r_e dx}{\pi(r_e^2 - r_i^2)} \frac{Q(t)}{2\pi r_e x_1} + \frac{2\pi r_i dx}{\pi(r_e^2 - r_i^2)} h_{\text{int}} (T_w(x, t) - T_i(x, t)), \quad (\text{B.3})$$

$$\forall x \in]x_1, H_w[, f_{\text{lat}}^{(i)} = \frac{2\pi r_e dx}{\pi(r_e^2 - r_i^2)} h_{\text{ext}} (T_\infty - T_i(x, t)) + \frac{2\pi r_i dx}{\pi(r_e^2 - r_i^2)} h_{\text{int}} (T_w(x, t) - T_i(x, t)). \quad (\text{B.4})$$

Dans l'équation (B.4), $Q(t)$ désigne la puissance thermique injectée dans les parois du tube en inox. Le coefficient d'échange h_{ext} caractérise le transport de chaleur depuis les parois du guide d'onde cylindrique vers le milieu extérieur par convection naturelle, h_{int} prend en compte l'échange en convection forcée interne dans la partie passive du noyau thermoacoustique, et h^{cc} représente l'échange conducto-convectif entre le stack et les parois du guide d'onde. Les expressions analytiques de ces coefficients phénoménologiques d'échange sont donnés au paragraphe B.2.

B.1.2 "Ailette" stack

Le bilan thermique entre x et $x + dx$ s'écrit :

$$\rho_s C_s \frac{\partial T_s(x, t)}{\partial t} dx + \Phi \rho_a C_a v_s(t) \frac{\partial T_s(x, t)}{\partial x} dx = \left[\left(-\lambda_s(t) \frac{\partial T_s(x, t)}{\partial x} \right) - \left(-\lambda_s(t) \frac{\partial T_s(x + dx, t)}{\partial x} \right) \right] + f_{\text{lat}}^{(s)}, \quad (\text{B.5})$$

où Φ désigne la porosité longitudinale du stack et v_s désigne la vitesse de l'écoulement redressé dans le stack. Le flux thermique latéral $f_{\text{lat}}^{(s)}$ prend en compte l'échange conducto-convectif entre le stack et la paroi du guide d'onde :

$$\forall x \in]-H_s, 0[, f_{\text{lat}}^{(s)} = \frac{2\pi r_i dx}{\pi r_i^2} h^{cc} (T_i(x, t) - T_s(x, t)), \quad (\text{B.6})$$

B.1.3 "Ailette" air

Le bilan thermique entre x et $x + dx$ s'écrit :

$$\rho_w C_w \frac{\partial T_w(x, t)}{\partial t} dx + \rho_a C_a v_w(t) \frac{\partial T_w(x, t)}{\partial x} dx = \left[\left(-\lambda_w \frac{\partial T_w(x, t)}{\partial x} \right) - \left(-\lambda_w \frac{\partial T_w(x + dx, t)}{\partial x} \right) \right] + f_{\text{lat}}^{(w)}, \quad (\text{B.7})$$

où v_w désigne la vitesse de l'écoulement redressé dans le guide d'onde (par conservation du débit volumique, on a $v_s = v_w/\Phi$). Le flux thermique latéral $f_{\text{lat}}^{(w)}$ prend en compte la convection forcée interne :

$$\forall x \in]0; H_w[, f_{\text{lat}}^{(w)} = \frac{2\pi r_i dx}{\pi r_i^2} h_{\text{int}} (T_i(x, t) - T_w(x, t)), \quad (\text{B.8})$$

B.1.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont au nombre de cinq :

★ température imposée en $x = -H_S$

$$\forall t \in [0, \infty[, T_{i,s}(-H_S, t) = T_\infty, \quad (\text{B.9})$$

★ température imposée en $x = H_W$

$$\forall t \in [0, \infty[, T_{i,w}(H_W, t) = T_\infty, \quad (\text{B.10})$$

★ continuité du flux thermique dans les parois du guide d'onde

$$\forall t \in [0, \infty[, \partial_x T_i(x = 0^-, t) = \partial_x T_i(x = 0^+, t), \quad (\text{B.11})$$

$$\forall t \in [0, \infty[, \partial_x T_i(x = x_1^-, t) = \partial_x T_i(x = x_1^+, t), \quad (\text{B.12})$$

★ continuité du flux thermique à l'interface stack-air

$$\forall t \in [0, \infty[, \lambda_s(t) \partial_x T_s(x = 0^-, t) = \lambda_w \partial_x T_w(x = 0^+, t). \quad (\text{B.13})$$

B.2 Estimation des coefficients d'échange

L'estimation des coefficients d'échange en convection naturelle ou forcée, externe ou interne, laminaire ou turbulente est un problème complexe. Cependant, dans un certain nombre de cas académiques (géométries simples), sous l'hypothèse que les régimes mécaniques et thermiques sont établis, et pour une distribution radiale de vitesse donnée, il est possible de calculer (analytiquement ou numériquement) la distribution radiale de température, à l'aide de laquelle le nombre de Nusselt Nu (représentant le gradient de température adimensionné à la paroi) peut être obtenu. Le coefficient de couplage s'exprime alors en fonction du nombre de Nusselt comme suit :

$$h = \frac{\lambda Nu_D}{D}, \quad (\text{B.14})$$

où λ est la conductivité thermique du fluide et D une distance caractéristique de l'ailette.

B.2.1 Interface (tube inox)-(milieu extérieur). Convection naturelle externe

Une certaine proportion de l'énergie thermique emmagasinée dans les parois du guide d'onde est évacuée vers le milieu extérieur par convection naturelle et rayonnement thermique. On suppose ici que la convection naturelle prévaut sur le rayonnement.

D'après [34], pour un cylindre horizontal isotherme de diamètre externe D le nombre de Nusselt associée à la convection naturelle externe est donné par la relation :

$$30\mu m < D < 10cm, 0.5 < \sigma < 10^3, Nu_D = 0.53 Ra_D^{\frac{1}{4}}, \quad (B.15)$$

où σ est le nombre de Prandtl et Ra_D est le nombre de Rayleigh défini par :

$$Ra_D = \frac{g\beta D^3 (T_{paroi} - T_\infty)}{\nu\lambda}, \quad (B.16)$$

β , ν et λ représentant respectivement le coefficient d'expansion thermique, la viscosité cinématique et la conductivité thermique du fluide, et où g est l'accélération de la pesanteur. Finalement, le coefficient d'échange h_{ext} s'écrit :

$$h_{ext}(x, t) = 0.53 \frac{\lambda_a}{2r_e} \left(\frac{\beta g (2r_e)^3}{\nu_a \lambda_a} \right)^{\frac{1}{4}} (T_i(x, t) - T_\infty)^{\frac{1}{4}}. \quad (B.17)$$

B.2.2 Interface (tube inox)-(air). Convection forcée interne

Pour estimer le coefficient d'échange entre les parois du guide d'onde et l'air dans le noyau thermoacoustique, on suppose que l'écoulement redressé est laminaire et que les parois sont isothermes. Si la seconde hypothèse ne paraît pas trop restrictive étant donné la grande inertie thermique des parois en inox relativement à celle de l'air, la première hypothèse est en revanche forte car le profil de vitesse est en réalité plus complexe qu'un profil parabolique [5]. Il convient donc de rester critique quant à l'estimation du coefficient d'échange h_{int} .

D'après [63], pour un tube horizontal isotherme de diamètre interne D et de longueur L , le nombre de Nusselt associé à la convection forcée interne en régime laminaire est donné par la relation :

$$Re < 900, 10^{-1} < \sigma Re \frac{D}{L} < 10^4, Nu_D = \left(3.66^3 + 1.66^3 \sigma Re \frac{D}{L} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (B.18)$$

où $Re = \frac{vD}{\nu}$ est le nombre de Reynolds et v la vitesse moyenne sur une section de l'écoulement. Finalement, le coefficient d'échange h_{int} s'écrit :

$$h_{int}(t) = \frac{\lambda_a}{2r_i} \left(3.66^3 + 1.66^3 \sigma \frac{v_w(t) 4r_i^2}{\nu_a H_W} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (B.19)$$

B.2.3 Interface (tube inox)-(stack). Conduction et convection forcée

Le calcul du coefficient d'échange $h^{(cc)}$ entre stack et tube inox est plus complexe que dans les deux cas précédents. Ce coefficient doit prendre en compte la conduction thermique radiale entre le tube en

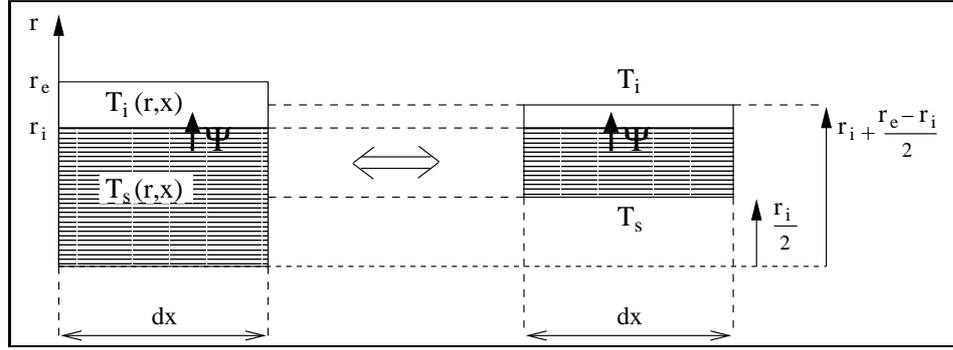


FIG. B.2 –

inox et les parois du guide d'onde en céramique d'une part, et la convection forcée dans les pores du stack d'autre part.

Il est a priori difficile de calculer le flux thermique conductif radial entre stack et inox, puisque par hypothèse, il n'y a pas de gradients thermiques radiaux dans le cadre de l'approximation ailette. Cependant, ce flux thermique conductif peut être estimé en calculant la résistance thermique équivalente dans la direction radiale du système (stack+tube). Pour ce faire, on suppose que le flux de conduction thermique réel est proche du flux de chaleur conductif à travers un manchon cylindrique constitué de la "moitié de l'épaisseur" du stack et de la "moitié de l'épaisseur" du tube, et dont les surfaces latérales sont isothermes aux températures T_s et T_i , comme l'illustre la Fig. B.2. Il est dès lors possible d'écrire la résistance thermique du manchon cylindrique de longueur H_s comme l'association série de la résistance thermique associée au stack et de celle associée au tube [63] :

$$R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{r_i}{r_i/2}\right)}{2\pi\lambda_s^\perp H_s} + \frac{\ln\left(\frac{r_i + (r_e - r_i)/2}{r_i}\right)}{2\pi\lambda_i H_s}, \quad (\text{B.20})$$

où λ_s^\perp représente la conductivité thermique du stack dans la direction radiale. Le flux thermique Ψ depuis l'ailette stack vers l'ailette inox s'exprime alors en fonction de la résistance thermique R_{th} comme suit :

$$\Psi = \frac{T_i - T_s}{R_{th}}, \quad (\text{B.21})$$

L'expression de R_{th} ne prend a priori pas en compte l'effet de la convection forcée dans les pores du stack sur le flux thermique Ψ . Cependant, cet effet peut être pris en compte dans l'expression de λ_s^\perp en utilisant là encore l'analogie thermique-électrique. La Fig. B.3 présente un grossissement de la structure du stack : ce stack est une matrice de pores carrés constitués de céramiques (épaisseur de paroi D_c) et d'air (épaisseur de couche d'air D_a). La résistance thermique dans la direction radiale d'un pore (de longueur H_s) du stack peut s'écrire comme l'association série $R_s^\perp = R_1 + R_2 + R_3$ de trois résistances élémentaires, où

$$R_1 = R_3 = \frac{D_c/2}{\lambda_c (D_a + D_c) H_s} \quad (\text{B.22})$$

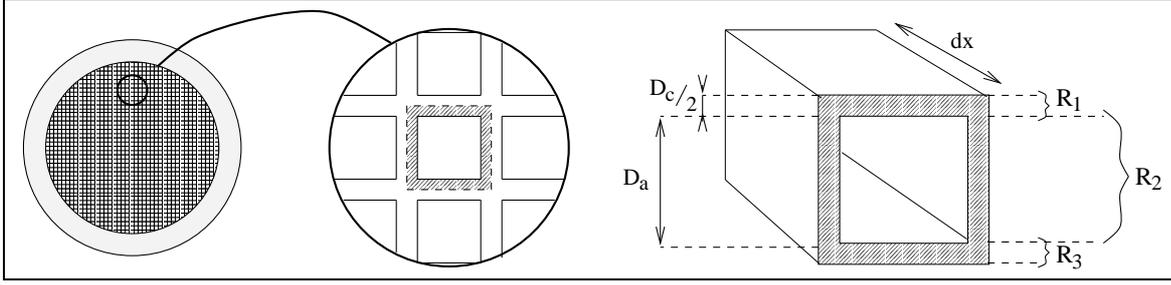


FIG. B.3 – Représentation de la structure géométrique du stack

sont des résistances thermiques de conduction dans les parois en céramiques, et où la résistance thermique

$$R_2 = R_c // R_a = \frac{R_c R_a}{R_c + R_a} \quad (\text{B.23})$$

s'exprime comme l'association parallèle de la résistance

$$R_c = \left(\frac{D_a}{\lambda_c (D_c/2) H_s} \right) // \left(\frac{D_a}{\lambda_c (D_c/2) H_s} \right) = \frac{D_a}{\lambda_c D_c H_s} \quad (\text{B.24})$$

caractérisant la conduction dans les parois en céramique et de la résistance

$$R_a = \frac{1}{h_{conv} 4 D_a H_s}, \quad (\text{B.25})$$

caractérisant l'échange convectif sur les parois latérales (surface mouillée = $4 D_a H_s$), le coefficient d'échange h_{conv} étant obtenu à l'aide de l'équation (B.19) :

$$h_{conv}(t) = \frac{\lambda_a}{D_a} \left(3.66^3 + 1.66^3 \sigma \frac{v_s(t) D_a^2}{\nu_a H_s} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{B.26})$$

Finalement, en reportant l'expression

$$\lambda_s^\perp = \frac{1}{R_s^\perp H_s} \quad (\text{B.27})$$

de la conductivité thermique radiale équivalente dans l'expression (B.21) de la résistance thermique du manchon cylindrique équivalent, on obtient l'expression du flux surfacique conducto-convectif ψ entre l'ailette stack et l'ailette inox :

$$\psi = \frac{\Psi}{2\pi r_i H_s} = h^{(cc)} (T_i - T_s), \quad (\text{B.28})$$

où le coefficient global d'échange

$$h^{(cc)} = \frac{1}{2\pi r_i H_s} \frac{1}{R_{th}} \quad (\text{B.29})$$

prend en compte le flux conductif par voie solidienne et le flux convectif dû au vent acoustique dans les pores du stack.

Annexe C

Description analytique qualitative de la vitesse moyenne de l'écoulement redressé

C.1 Résonateur annulaire vide

Considérons un acoustitron, constitué d'un résonateur acoustique annulaire sans stack, sans gradient de température, de section rectangulaire dans le plan $(y-z)$, avec une distance inter-paroi D suivant y , et infinie suivant z (Fig. C.1)

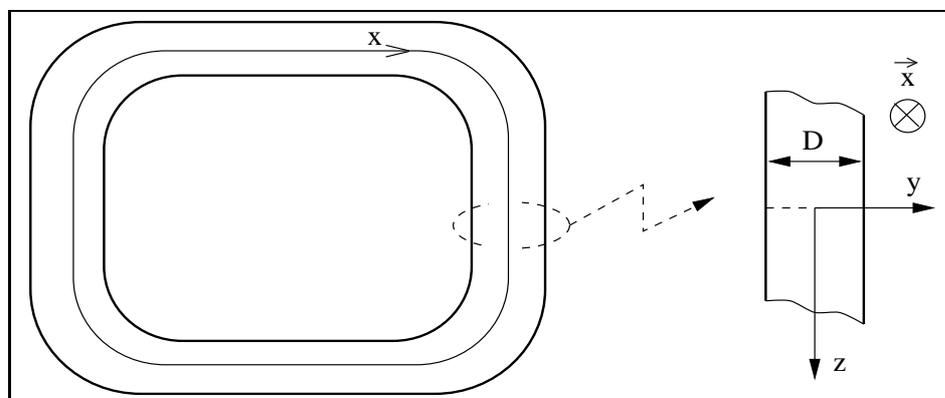


FIG. C.1 – Schéma d'un acoustitron

D'après [7, Eq. (26)], dans un tel système, la vitesse $v_x(y)$ suivant la direction \vec{x} de l'écoulement redressé induit par la propagation suivant les x positifs d'une onde progressive pure est donnée par la relation :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \rho \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + F_x - \frac{dP_h}{dx}, \quad (\text{C.1})$$

où P_h représente la pression hydrodynamique associée à l'écoulement (donc $d_x P_h = 0$ dans le résonateur annulaire), où ρ et ν représentent respectivement la masse volumique et la viscosité cinématique du fluide, et où F_x représente la force volumique acoustiquement induite responsable de la génération de

l'écoulement redressé, et proportionnelle au carré de la pression acoustique efficace ([7, Eq. (28)]). A l'aide de l'expression de la force volumique $F_x(p_{rms}(t))$, l'évolution temporelle de la vitesse moyenne sur une section du résonateur $\langle v_x \rangle$ de l'écoulement redressé est donc obtenue en résolvant l'équation (C.1) pour une fonction temporelle $p_{rms}(t)$ donnée. En particulier, si un échelon de pression acoustique est appliqué dans le résonateur, le régime transitoire alors obtenu (numériquement) [7, Fig. 15] est analogue à la réponse d'un circuit électrique (RC) à un échelon de tension, de sorte que l'équation d'évolution de la vitesse $\langle v_x \rangle$ moyenne sur une section du guide d'onde se ramène qualitativement à une équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial t} + \frac{\langle v_x \rangle}{\tau} = \frac{\langle v_x \rangle^{max}}{\tau}, \quad (C.2)$$

où la quantité τ représente le temps caractéristique d'établissement de l'écoulement redressé et où la quantité $\langle v \rangle^{max}$ est proportionnelle à l'intensité acoustique (ou au carré de la pression acoustique efficace). Le temps caractéristique τ dépend du régime d'interaction fluide-structure sous la forme suivante [7] :

$$\tau \approx \frac{D^2}{\pi^2 \nu} \quad (C.3)$$

L'équation (C.3) permet donc d'estimer les temps caractéristiques d'établissement de l'écoulement redressé $\tau_{w,s}$ selon que le diamètre géométrique de l'acoustitron est celui du guide d'onde expérimental ($D_w = 53mm$) ou celui d'un pore du stack ($D_s = 0.45mm$) :

$$\tau_s \approx 2.10^{-2} s, \quad \tau_w \approx 20 s. \quad (C.4)$$

C.2 Résonateur annulaire équipé d'un stack

Considérons à présent le cas du même résonateur annulaire dans lequel est inséré un stack de longueur H (Fig. C.2). Dans ce cas, le terme $d_x P_h$ de l'équation (C.1) ne peut plus être considéré comme nul car le problème n'est plus homogène suivant x , et l'équation (C.3) doit donc être réécrite pour chacune des deux régions comme suit :

$$0 \leq x \leq H, \quad \frac{\partial \langle v_s \rangle}{\partial t} + \frac{\langle v_s \rangle}{\tau_s} = \frac{\langle v_s \rangle^{max}}{\tau_s} - \frac{1}{\rho} \frac{dP_h(x)}{dx}, \quad (C.5)$$

$$H \leq x \leq L, \quad \frac{\partial \langle v_w \rangle}{\partial t} + \frac{\langle v_w \rangle}{\tau_w} = \frac{\langle v_w \rangle^{max}}{\tau_w} - \frac{1}{\rho} \frac{dP_h(x)}{dx}, \quad (C.6)$$

En intégrant ces deux équations suivant x , il vient :

$$H \frac{\partial \langle v_s \rangle}{\partial t} + H \frac{\langle v_s \rangle}{\tau_s} = H \frac{\langle v_s \rangle^{max}}{\tau_s} - \frac{1}{\rho} (P_h(H) - P_h(0)), \quad (C.7)$$

$$(L - H) \frac{\partial \langle v_w \rangle}{\partial t} + (L - H) \frac{\langle v_w \rangle}{\tau_w} = (L - H) \frac{\langle v_w \rangle^{max}}{\tau_w} - \frac{1}{\rho} (P_h(L) - P_h(H)), \quad (C.8)$$

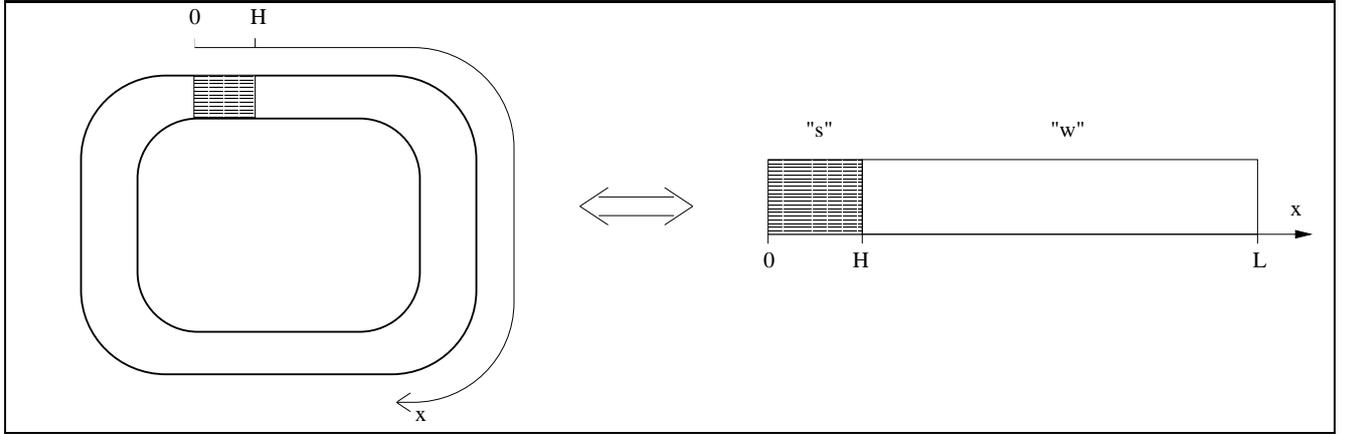


FIG. C.2 – Résonateur annulaire équipé d'un stack en vues normale (gauche) et déroulée (droite)

et puisque $P_h(L) = P_h(0)$, les gradients de pression hydraulique peuvent être éliminés en sommant (C.7) et (C.8) :

$$\frac{\partial}{\partial t} [(L - H) \langle v_w \rangle + H \langle v_s \rangle] + \frac{H}{\tau_s} \langle v_s \rangle + \frac{L - H}{\tau_w} \langle v_w \rangle = \frac{H}{\tau_s} \langle v_s \rangle^{max} + \frac{L - H}{\tau_w} \langle v_w \rangle^{max}. \quad (C.9)$$

De plus, en combinant à l'équation (C.9) la loi de conservation du débit massique

$$\rho \langle v_w \rangle = \rho \Phi \langle v_s \rangle, \quad (C.10)$$

où Φ désigne la porosité longitudinale du stack, il vient :

$$\frac{\partial L \langle v_w \rangle}{\partial t} + \left[\frac{L - H}{\tau_w} + \frac{H}{\tau_s} \right] \langle v_w \rangle = \frac{H}{\tau_s} \langle v_s \rangle^{max} + \frac{L - H}{\tau_w} \langle v_w \rangle^{max}. \quad (C.11)$$

Ainsi, en posant

$$\tau = \frac{1}{L} \left[\frac{L - H}{\tau_w} + \frac{H}{\tau_s} \right], \quad (C.12)$$

et puisque $\langle v_{s,w} \rangle^{max} \propto p_{rms}^2$, l'équation d'évolution de $\langle v_w \rangle$ peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial \langle v_w \rangle}{\partial t} + \frac{\langle v_w \rangle}{\tau} = \frac{\Gamma}{\tau} p_{rms}^2. \quad (C.13)$$

La vitesse moyenne sur une section du guide d'onde de l'écoulement redressé généré dans un résonateur annulaire équipé d'un stack est donc proportionnelle en régime stationnaire au carré de la pression acoustique efficace, et le temps caractéristique d'établissement de l'écoulement τ dépend des dimensions longitudinales (H et L) et transverse (D_s et D_w) du stack et du résonateur. Ce temps caractéristique est d'autant plus faible que le stack occupe un volume important (car $\tau_s \ll \tau_w$). En reportant dans l'équation (C.12) les dimensions du prototype expérimental, on obtient :

$$\tau \approx 0.9s \quad \text{pour } H = 5 \text{ cm}, \quad (C.14)$$

$$\tau \approx 0.3s \quad \text{pour } H = 15 \text{ cm}. \quad (C.15)$$

Par ailleurs, la théorie développée par Gusev et coll. [24] ainsi que les mesures effectuées par Job et coll. [30] nous permettent d'obtenir un ordre de grandeur pour le paramètre Γ dans l'équation (C.13). D'après [24, Eqs. (38),(39)], en reportant les dimensions du dispositif expérimental dans l'estimation théorique de la vitesse d'écoulement, sous l'hypothèse (pas exacte) que l'interaction fluide structure dans le stack est quasi-adiabatique (en réalité, $\delta_\kappa/D_s \approx 0.4$), que l'onde acoustique est purement propagative (suivant $x \geq 0$), et que la longueur du stack est négligeable devant la longueur d'onde, il vient :

$$\langle v_w \rangle \propto \underbrace{\frac{1}{12\pi\rho a_c^3\sqrt{\sigma}} \frac{L}{H_s} \frac{D_s}{\delta_\kappa}}_{\Gamma} p_{rms}^2 \approx 3.10^{-8} p_{rms}^2, \text{ soit } \Gamma \approx 3.10^{-8} m.s^{-1}.Pa^{-2} \quad (C.16)$$

pour $H_s = 15 \text{ cm}$. Parallèlement, les mesures de cette même vitesse d'écoulement effectuées de manière indirecte, à différents niveaux de pression acoustique en régime stationnaire, en comparant la distribution de température avant puis après déclenchement aboutissent au résultat [30, Fig. 5] :

$$\frac{\rho \langle v_w \rangle}{\pi (D_w/2)^2} \approx \frac{0.04 - 0.02}{1000} p_{rms}^2, \quad (C.17)$$

ce qui donne finalement

$$\Gamma \approx 3.7 \cdot 10^{-8} m.s^{-1}.Pa^{-2}. \quad (C.18)$$

Annexe D

Calcul analytique explicite du coefficient d'amplification thermoacoustique pour une distribution linéaire de température.

L'annexe A présente une méthode permettant d'obtenir le coefficient d'amplification thermoacoustique. Ce coefficient d'amplification thermoacoustique (ainsi que la fréquence d'oscillation acoustique) s'exprime en fonction des coefficients de la matrice de diffusion du noyau thermoacoustique (Eq. (A.24)), elle-même obtenue en résolvant l'équation classique de la thermoacoustique linéaire (Eq. (A.1)) dans le stack, et dans la partie passive du noyau thermoacoustique. Cependant, les coefficients de la matrice de diffusion sont obtenus chacun sous forme d'une série infinie d'opérateur intégraux, de sorte que le coefficient d'amplification thermoacoustique ne peut être obtenu que de façon numérique.

Ici, suivant la même démarche que celle exposée en annexe A, et supposant entr'autres hypothèses, que le champ de température est linéaire (Fig. D.1), le coefficient d'amplification thermoacoustique est obtenu de façon explicite en fonction des variables ΔT et l_w .

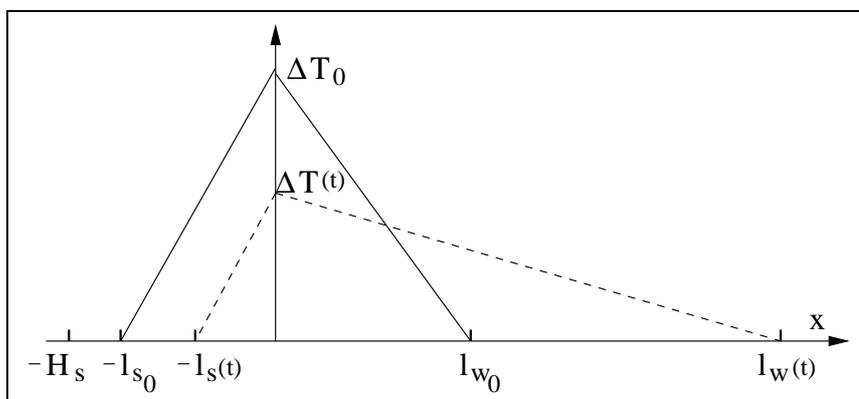


FIG. D.1 – Distribution initiale (trait plein) du champ de température puis sous l'effet du vent acoustique (trait tireté) au cours du régime transitoire.

D.1 Matrice de transfert du noyau thermoacoustique

Afin d'obtenir une expression la plus simple possible pour le coefficient d'amplification thermoacoustique α , un certain nombre d'hypothèses sont retenues dans ce paragraphe, et seront énoncées au fur et à mesure de leur utilité. Comme l'illustre la Fig. D.1, la distribution de température est supposée linéaire, et ne dépend que des variables ΔT , l_s et l_w . La première simplification consiste ici à supposer que le coefficient d'amplification thermoacoustique est indépendant de la variable l_s . En effet, les résultats du chapitre 2 montrent que pour un stack suffisamment court, l'amplification thermoacoustique est indépendante de la distribution de température dans le stack (Fig. 2.14). Par suite, il est à la fois commode et indifférent pour le calcul du coefficient d'amplification thermoacoustique de considérer que $l_s = H_s$, de manière à ce que la distribution de température dans le noyau thermoacoustique soit séparable en deux zones linéaires distinctes, i.e. le stack (indice "s") et la partie passive du noyau thermoacoustique (indice "w"). La matrice de transfert \mathcal{T} du noyau thermoacoustique s'exprime alors comme le produit de la matrice de transfert \mathcal{T}_s associée au milieu stack et de la matrice \mathcal{T}_w associée à la partie passive du noyau thermoacoustique, comme suit :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}(l_w) \\ \langle \tilde{v}(l_w) \rangle_r \end{pmatrix} = \mathcal{T} \times \begin{pmatrix} \tilde{p}(-H_s) \\ \langle \tilde{v}(-H_s) \rangle_r \end{pmatrix} = \mathcal{T}_w \times \mathcal{T}_s \times \begin{pmatrix} \tilde{p}(-H_s) \\ \langle \tilde{v}(-H_s) \rangle_r \end{pmatrix}, \quad (\text{D.1})$$

où, conformément aux notations de l'annexe A, les quantités \tilde{p} et $\langle \tilde{v} \rangle_r$ représentent les amplitudes complexes de la pression acoustique et de la vitesse acoustique moyennée sur une section du guide d'onde. Reste à présent à déterminer chacune des deux matrices de transfert.

a) Matrice de transfert associée au stack

La matrice de transfert associée au stack est obtenue à partir de la résolution de l'équation de la thermoacoustique linéaire (Eq. (A.1)) :

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - f_\nu^{(s)}) \frac{d\tilde{p}}{dx} \right] + \frac{1}{T_m} \left[1 - f_\nu^{(s)} + \frac{f_\nu^{(s)} - f_\kappa^{(s)}}{(1 - \sigma)} \right] \frac{dT_m}{dx} \frac{d\tilde{p}}{dx} + \left(\frac{\omega}{a_c} \right)^2 \left[1 + (\gamma - 1) f_\kappa^{(s)} \right] \tilde{p} = 0, \quad (\text{D.2})$$

où les fonctions $f_{\nu,\kappa}^{(s)} = f_{\nu,\kappa}^{(s)}(\delta_{\nu,\kappa}/D_s)$ sont les fonctions thermovisqueuses définies aux équations (A.2)-(A.3) dans un pore du stack à section cylindrique. En toute rigueur, ces fonctions dépendent de la variable x , du fait qu'elles dépendent de la température T_m . Cependant, on considère dans la suite que la viscosité cinématique ν , la diffusivité thermique κ et la masse volumique ρ , et par suite les fonctions $f_{\nu,\kappa}^{(s)}$ sont indépendantes de x et fixées à leurs valeurs pour $T_m = (T_H + T_C)/2$. Par suite, introduisant les quantités

$$h^{(s)} = 1 + \frac{1}{1 - f_\nu^{(s)}} \frac{f_\nu^{(s)} - f_\kappa^{(s)}}{1 - \sigma}, \quad (\text{D.3})$$

$$k_s^2 = \left(\frac{\omega}{a_c} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{1 - f_\nu^{(s)}} \left(f_\nu^{(s)} + (\gamma - 1) f_\kappa^{(s)} \right) \right), \quad (\text{D.4})$$

et reportant dans l'équation (D.2) l' expression

$$T_m(x) = T_C + \frac{T_H - T_C}{H_s} (x + H_s), \quad (\text{D.5})$$

de la distribution de température, il vient :

$$d_{xx}^2 \tilde{p} + \frac{T_H - T_C}{(T_H - T_C)x + H_s T_H} h^{(s)} dx \tilde{p} + k_s^2 \tilde{p} = 0. \quad (\text{D.6})$$

Posant $X = (T_H - T_C)x + H_s T_H$ et effectuant le changement de variable $\tilde{p} = X^\zeta \tilde{y}$, avec $\zeta = (1 - h^{(s)})/2$, l'équation (D.6) prend la forme d'un équation de Bessel d'ordre ζ :

$$d_{XX}^2 \tilde{y} + \frac{d_X \tilde{y}}{X} + (\chi_s^2 - \frac{\zeta^2}{X^2}) = 0, \quad (\text{D.7})$$

avec $\chi_s = \frac{k_s}{T_H - T_C}$, et admet pour solution

$$\tilde{y}(X) = c_1 J_\zeta(\chi_s X) + c_2 Y_\zeta(\chi_s X), \quad (\text{D.8})$$

où J_ζ et Y_ζ représente respectivement les fonctions de Bessel et de Neuman de première espèce d'ordre ζ , et où c_1 et c_2 sont des constantes. Puis, faisant usage de l'équation (A.16) reliant le gradient de pression acoustique $\tilde{p}(x)$ à la vitesse acoustique moyenne $\langle \tilde{v}(x) \rangle_r$:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = ik_c Z_s \langle \tilde{v} \rangle_r, \quad (\text{D.9})$$

avec $k_c = \omega/a_c$ et

$$Z_s = \frac{\rho a_c}{\Phi(1 - f_\nu^{(s)})}, \quad (\text{D.10})$$

les constantes c_1 et c_2 sont déterminées en fonction de $\tilde{p}(-H_s)$ et $\langle \tilde{v}(-H_s) \rangle_r$, puis, introduisant la fonction $N_{\zeta_1, \zeta_2}(x_1, x_2) = J_{\zeta_1}(x_1)Y_{\zeta_2}(x_2) - J_{\zeta_2}(x_2)Y_{\zeta_1}(x_1)$, l'expression de la matrice de transfert \mathcal{T}_s est obtenue sous la forme suivante :

$$\mathcal{T}_s = \frac{\left(\frac{T_H}{T_C}\right)^\zeta}{N_{\zeta-1, \zeta}(\chi_s H_s T_C, \chi_s H_s T_C)} \begin{pmatrix} N_{\zeta-1, \zeta}(\chi_s H_s T_C, \chi_s H_s T_H) & -\frac{ik_c Z_s}{k_s} N_{\zeta, \zeta}(\chi_s H_s T_C, \chi_s H_s T_H) \\ \frac{ik_c Z_s}{k_s} N_{\zeta-1, \zeta-1}(\chi_s H_s T_C, \chi_s H_s T_H) & -N_{\zeta, \zeta-1}(\chi_s H_s T_C, \chi_s H_s T_H) \end{pmatrix}. \quad (\text{D.11})$$

Cette expression de la matrice de transfert du stack peut être grandement simplifiée en remarquant que la longueur du stack est négligeable devant la longueur d'onde ($k_s H_s \ll 1$), et en faisant usage des développements

$$z \ll 1, J_\zeta(z) \sim \left(\frac{z}{2}\right)^\zeta \frac{1}{\Gamma(\zeta + 1)}, \quad (\text{D.12})$$

$$z \ll 1, Y_\zeta(z) \sim \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\zeta \frac{\cos(\pi\zeta)}{\Gamma(\zeta+1)} - \left(\frac{z}{2}\right)^{-\zeta} \frac{1}{\Gamma(1-\zeta)}}{\sin(\pi\zeta)}, \quad (\text{D.13})$$

des fonction de Bessel et de Neuman, où $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$ désigne la fonction factorielle, de sorte qu'après calculs, il vient :

$$\mathcal{T}_s = \begin{pmatrix} 1 & ik_c Z_s \left(\left(\frac{T_H}{T_C} \right)^{2\zeta} - 1 \right) \frac{1}{2\zeta} \frac{T_C}{T_H - T_C} H_s \\ \frac{1}{ik_c Z_s} \left(\frac{T_H}{T_C} \right) \left(1 - \left(\frac{T_H}{T_C} \right)^{2\zeta-2} \right) \frac{1}{2(1-\zeta)} \frac{T_C}{T_H - T_C} H_s & \left(\frac{T_H}{T_C} \right)^{2\zeta-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.14})$$

b) Matrice de transfert associée à la partie passive du noyau thermoacoustique

La matrice de transfert associée à la partie du guide d'onde inhomogène en température est obtenue de façon analogue à la matrice de transfert associée au stack, à partir de la résolution de l'équation :

$$d_{xx}^2 \tilde{p} + \frac{T_C - T_H}{(T_C - T_H)x + l_w T_H} h^{(w)} d_x \tilde{p} + k_w^2 \tilde{p} = 0, \quad (\text{D.15})$$

avec

$$h^{(w)} = 1 + \frac{1}{1 - f_\nu^{(w)}} \frac{f_\nu^{(w)} - f_\kappa^{(w)}}{1 - \sigma}, \quad (\text{D.16})$$

$$k_w^2 = k_c^2 \left(1 + \frac{1}{1 - f_\nu^{(w)}} \left(f_\nu^{(w)} + (\gamma - 1) f_\kappa^{(w)} \right) \right), \quad (\text{D.17})$$

et où les fonctions $f_{\nu,\kappa}^{(w)} = f_{\nu,\kappa}^{(w)}(\delta_{\nu,\kappa}/D_w)$ sont les fonctions thermovisqueuses définies dans une section du guide d'onde, dont les valeurs sont prises à la température moyenne $T_m = (T_H + T_C)/2$. Ici, compte tenu que $(\delta_{\nu,\kappa}/D_w) \ll 1$, on peut considérer que $h^{(w)} \sim 1$, ce qui revient à considérer que la région $x \in [0, l_w]$ du noyau thermoacoustique ne participe pas, du moins de façon directe, à l'amplification thermoacoustique. Dès lors, reprenant la même démarche qu'au paragraphe précédent, il vient :

$$\mathcal{T}_w = \frac{1}{N_{-1,0}(\chi_w l_w T_H, \chi_w l_w T_C)} \begin{pmatrix} N_{-1,0}(\chi_w l_w T_H, \chi_w l_w T_C) & \frac{ik_c Z_w}{k_w} N_{0,0}(\chi_w l_w T_H, \chi_w l_w T_C) \\ -\frac{k_w}{ik_c Z_w} N_{-1,-1}(\chi_w l_w T_H, \chi_w l_w T_C) & -N_{0,-1}(\chi_w l_w T_H, \chi_w l_w T_C) \end{pmatrix}, \quad (\text{D.18})$$

avec

$$Z_w = \frac{\rho a_c}{(1 - f_\nu^{(w)})}. \quad (\text{D.19})$$

A l'instar de la matrice \mathcal{T}_s , l'expression (D.18) de la matrice \mathcal{T}_w ne peut pas être simplifiée, étant donné que la longueur l_w n'est pas nécessairement négligeable devant la longueur d'onde.

D.2 Matrice de diffusion du noyau thermoacoustique

Une fois obtenue l'expression analytique de la matrice de transfert du noyau thermoacoustique, et faisant usage des relations

$$\forall x \in [l_w, L - H_s], \tilde{p}(x) = \tilde{p}^+(l_w) e^{ik_w(T_C)(x-l_w)} + \tilde{p}^-(l_w) e^{-ik_w(T_C)(x-l_w)}, \quad (\text{D.20})$$

$$\forall x \in [l_w, L - H_s], \langle \tilde{v}(x) \rangle_r = \frac{1}{ik_c Z_w(T_c)} \frac{d\tilde{p}(x)}{dx} \quad (\text{D.21})$$

décrivant la propagation de l'onde acoustique dans le guide d'onde à température froide T_C , l'équation (D.1) est réécrite comme suit :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}^+(l_w) + \tilde{p}^-(l_w) \\ \frac{1}{Z_C} (\tilde{p}^+(l_w) - \tilde{p}^-(l_w)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{pp} & \mathcal{T}_{pv} \\ \mathcal{T}_{vp} & \mathcal{T}_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}^+(-H_s) + \tilde{p}^-(-H_s) \\ \frac{1}{Z_C} (\tilde{p}^+(-H_s) - \tilde{p}^-(-H_s)) \end{pmatrix}, \quad (\text{D.22})$$

où $Z_C = \frac{k_c Z_w(T_C)}{k_w(T_c)}$ est l'impédance caractéristique du guide d'onde à température froide. Enfin, l'équation (D.22) est transformée sous la forme

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}^+(l_w) \\ \tilde{p}^-(-H_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T}^+ & \tilde{R}^- \\ \tilde{R}^+ & \tilde{T}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}^+(-H_s) \\ \tilde{p}^-(l_w) \end{pmatrix}, \quad (\text{D.23})$$

où par définition, les coefficients

$$\tilde{T}^+ = \frac{2(\mathcal{T}_{pp}\mathcal{T}_{vv} - \mathcal{T}_{pv}\mathcal{T}_{vp})}{(\mathcal{T}_{pp} + \mathcal{T}_{vv}) - (\mathcal{T}_{pv}/Z_C + Z_C\mathcal{T}_{vp})} \quad (\text{D.24})$$

$$\tilde{T}^- = \frac{2}{(\mathcal{T}_{pp} + \mathcal{T}_{vv}) - (\mathcal{T}_{pv}/Z_C + Z_C\mathcal{T}_{vp})} \quad (\text{D.25})$$

$$\tilde{R}^+ = \frac{(Z_C\mathcal{T}_{vp} - \mathcal{T}_{pv}/Z_C) - (\mathcal{T}_{pp} - \mathcal{T}_{vv})}{(\mathcal{T}_{pp} + \mathcal{T}_{vv}) - (\mathcal{T}_{pv}/Z_C + Z_C\mathcal{T}_{vp})} \quad (\text{D.26})$$

$$\tilde{R}^- = \frac{(Z_C\mathcal{T}_{vp} - \mathcal{T}_{pv}/Z_C) + (\mathcal{T}_{pp} - \mathcal{T}_{vv})}{(\mathcal{T}_{pp} + \mathcal{T}_{vv}) - (\mathcal{T}_{pv}/Z_C + Z_C\mathcal{T}_{vp})} \quad (\text{D.27})$$

sont les coefficients de la matrice de diffusion du noyau thermoacoustique.

D.3 Coefficient d'amplification thermoacoustique

L'expression analytique explicite de la matrice de transfert du noyau thermoacoustique donnée au paragraphe précédent (Eqs. (D.14) et (D.18)) permet d'obtenir les coefficients T^\pm et R^\pm de la matrice de diffusion (Eqs. (D.24)-(D.28)). Dès lors, conformément à la méthode décrite dans l'annexe A, le coefficient d'amplification thermoacoustique α est obtenu en résolvant l'équation

$$\left(e^{\alpha - ik_w(T_C)[L - H_s - l_w]} - \tilde{T}^+ \right) \left(e^{\alpha - ik_w(T_C)[L - H_s - l_w]} - \tilde{T}^- \right) - \tilde{R}^+ \tilde{R}^- = 0 \quad (\text{D.28})$$

dans laquelle la pulsation de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique ω est supposée connue et égale à la pulsation de résonance du guide d'onde à température froide ($\omega = 2\pi/L$). Par suite, introduisant la quantité

$$\Gamma^\pm = \left(\frac{\tilde{T}^+ + \tilde{T}^-}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-}{2} \right)^2 + \tilde{R}^+ \tilde{R}^-}, \quad (\text{D.29})$$

le coefficient d'amplification thermoacoustique α est donné par

$$\alpha = \text{Sup}(\alpha^+, \alpha^-), \quad (\text{D.30})$$

avec

$$\alpha^\pm = \ln |1 + \Gamma^\pm(\omega = 2\pi/L)| - \text{Im}(k_w(T_C, \omega = 2\pi/L)) (L - H_s - l_w). \quad (\text{D.31})$$

La Fig. D.2 présente l'évolution du coefficient d'amplification thermoacoustique α en fonction de $\Delta T = T_H - T_C$ et de la distance l_w . Les résultats obtenus s'avère en bon accord avec les conclusions du chapitre 2, puisque d'une part α augmente à mesure que ΔT augmente, et que d'autre part, l'augmentation de l_w se traduit par l'augmentation de α jusqu'à $l_w \approx 0.35 \text{ m}$ puis d'une faible diminution lorsque l_w continue de croître. Reste que l'expression analytique du coefficient d'amplification thermoacoustique est compliquée, notamment en raison de l'expression (D.18) de la matrice de transfert de la partie passive du noyau thermoacoustique.

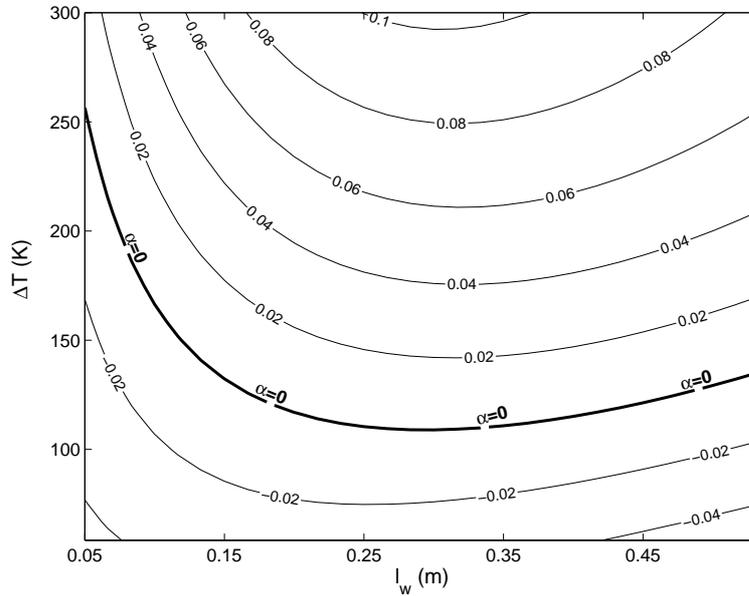


FIG. D.2 – Isocontours du coefficient d'amplification α en fonction de ΔT ($T_C = 294 \text{ K}$) et l_w .

Annexe E

Régime transitoire : simulations numériques

Cette annexe a pour objet de rappeler et préciser la méthode de résolution par différences finies des équations fondamentales permettant de décrire le régime transitoire de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique dans un générateur d'ondes thermoacoustique annulaire. Quelques précisions sont également apportées sur le choix du pas d'échantillonnage qui permet d'assurer la convergence des résultats de simulations.

E.1 Les équations

L'ensemble des équations fondamentales à résoudre pour décrire les interactions en régime transitoire entre champ acoustique et champ de température est rappelé ici, dans le cas d'un mode de chauffage externe, puis dans celui d'un mode de chauffage interne.

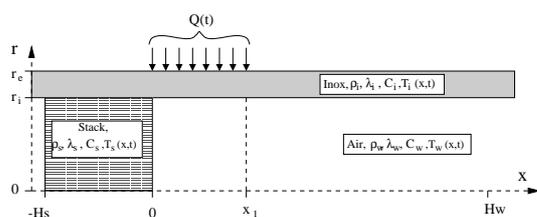


FIG. E.1 – Représentation schématique du noyau thermoacoustique dans le cas d'un chauffage externe.

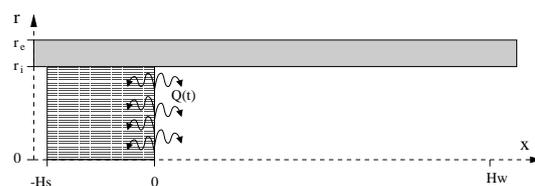


FIG. E.2 – Représentation schématique du noyau thermoacoustique dans le cas d'un chauffage interne.

Chauffage externe

Dans le cas d'un chauffage externe, le régime transitoire est exprimé de façon analytique par un jeu de cinq équations aux dérivées partielles (décrivant les transferts thermiques dans l'ensemble du noyau thermoacoustique) couplées à deux équations différentielles ordinaires décrivant respectivement le développement en régime transitoire de l'écoulement redressé et l'évolution en fonction du temps de l'amplitude de pression acoustique :

$$x \in [-H_S, 0], \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\rho_i C_i} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} - \gamma_{is} [T_i - T_s] - \gamma_{i\infty} [T_i - T_\infty], \quad (\text{E.1})$$

$$x \in [0, x_1], \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\rho_i C_i} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} - \gamma_{iw} [T_i - T_w] + \frac{Q(t)}{x_1 \rho_i C_i \pi (r_e^2 - r_i^2)}, \quad (\text{E.2})$$

$$x \in [x_1, H_W], \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\rho_i C_i} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} - \gamma_{iw} [T_i - T_w] - \gamma_{i\infty} [T_i - T_\infty], \quad (\text{E.3})$$

$$x \in [-H_S, 0], \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\lambda_s + \Gamma_\lambda p^2}{\rho_s C_s} \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} - v_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - \gamma_{si} [T_s - T_i], \quad (\text{E.4})$$

$$x \in [0, H_W], \frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{\lambda_w}{\rho_w C_w} \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} - v_w \frac{\partial T_w}{\partial x} - \gamma_{wi} [T_w - T_i], \quad (\text{E.5})$$

$$\frac{d v_{s,w}}{dt} = -\frac{v_{s,w}}{\tau_v} + \frac{\Gamma_v^{(s,w)}}{\tau_v} p^2, \quad (\text{E.6})$$

$$\frac{d p(t)}{dt} = \frac{p}{\tau_{ampl}(T_{s,w})}. \quad (\text{E.7})$$

Pour que ce problème soit complètement posé, il convient d'ajouter à ce système différentiel non linéaire les conditions aux limites suivantes :

$$T_{i,s}(-H_S, t) = T_\infty, \quad (\text{E.8})$$

$$T_{i,w}(H_W, t) = T_\infty, \quad (\text{E.9})$$

$$\partial_x T_i(0^-, t) = \partial_x T_i(0^+, t), \quad (\text{E.10})$$

$$\partial_x T_i(x_1^-, t) = \partial_x T_i(x_1^+, t), \quad (\text{E.11})$$

$$(\lambda_s + \Gamma_\lambda p^2) \partial_x T_s(0^-, t) = \lambda_w \partial_x T_w(0^+, t). \quad (\text{E.12})$$

Pour tenir compte des effets non linéaires de cascade harmonique et de pertes de charge aux extrémités du stack il est nécessaire de substituer à l'équation (E.7) le système

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\omega \frac{\beta_{nl}}{2} \frac{p_1 p_2}{\rho_a a_c^2} + \frac{p_1}{\tau_{ampl}} - \frac{1}{\rho_a a_c^2} \frac{p_1^2}{\tau_{minor}}, \quad (\text{E.13})$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = \omega \frac{\beta_{nl}}{2} \frac{p_1^2}{\rho_a a_c^2} - \frac{p_2}{\tau_{att}}, \quad (\text{E.14})$$

où p_1 et p_2 désignent respectivement les amplitudes efficaces de pression acoustique du mode fondamental et du premier harmonique.

Chauffage interne

Dans le cas de figure d'un chauffage interne, le régime transitoire est décrit analytiquement par un jeu de quatre équations aux dérivées partielles couplées à deux équations différentielles ordinaires :

$$x \in [-H_S, 0], \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\rho_i C_i} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} - \gamma_{is} [T_i - T_s] - \gamma_{i\infty} [T_i - T_\infty], \quad (\text{E.15})$$

$$x \in [0, H_W], \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\rho_i C_i} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} - \gamma_{iw} [T_i - T_w] - \gamma_{i\infty} [T_i - T_\infty], \quad (\text{E.16})$$

$$x \in [-H_S, 0], \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\lambda_s + \Gamma_\lambda p^2}{\rho_s C_s} \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} - v_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - \gamma_{si} [T_s - T_i], \quad (\text{E.17})$$

$$x \in [0, H_W], \frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{\lambda_w}{\rho_w C_w} \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} - v_w \frac{\partial T_w}{\partial x} - \gamma_{wi} [T_w - T_i], \quad (\text{E.18})$$

$$\frac{dv_{s,w}}{dt} = -\frac{v_{s,w}}{\tau_v} + \frac{\Gamma_v^{(s,w)}}{\tau_v} p^2, \quad (\text{E.19})$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{p}{\tau_{\text{ampl}}(T_{s,w})}, \quad (\text{E.20})$$

le chauffage du stack étant désormais pris en compte dans la condition aux limites de continuité des flux thermiques à l'interface entre le stack et la partie passive du noyau thermoacoustique, à savoir :

$$T_{i,s}(-H_S, t) = T_\infty, \quad (\text{E.21})$$

$$T_{i,w}(H_W, t) = T_\infty, \quad (\text{E.22})$$

$$\partial_x T_i(0^-, t) = \partial_x T_i(0^+, t), \quad (\text{E.23})$$

$$\partial_x T_i(x_1^-, t) = \partial_x T_i(x_1^+, t), \quad (\text{E.24})$$

$$(\lambda_s + \Gamma_\lambda p^2) \partial_x T_s(0^-, t) = \lambda_w \partial_x T_w(0^+, t) + \frac{Q(t)}{\pi r_i^2}. \quad (\text{E.25})$$

E.2 Méthode de résolution

Que le mode de chauffage soit de type externe ou interne, le problème se ramène à la résolution d'un système différentiel non linéaire, comportant un jeu d'équations aux dérivées partielles couplées à un jeu d'équations différentielles ordinaires. Ce problème a été résolu par une méthode de différences finies. Les équations différentielles ordinaires sont résolues par la méthode classique de Runge-Kutta, utilisée ici à l'ordre 4. La description de cette méthode, très utilisée dans la pratique, n'est pas reportée ici ; notons simplement qu'elle présente plusieurs avantages : facilité de programmation, stabilité de la solution, modification simple du pas.

Concernant la partie thermique du problème, décrite par des équations aux dérivées partielles, c'est la méthode de Cranck-Nicholson [42] qui a été employée. Il s'agit là d'une méthode robuste développée en 1947 par Cranck et Nicholson avec pour objectif de trouver un schéma à la fois précis et sans restrictions sur le choix du pas temporel, pour résoudre des équations aux dérivées partielles

paraboliques monodimensionnelles. Le principe de la méthode consiste à combiner en un seul schéma de discrétisation les avantages du schéma implicite et du schéma explicite. A titre d'exemple, nous allons illustrer ce propos sur le cas d'un problème de diffusion thermique linéaire dans une région finie, décrit par l'équation suivante :

$$0 < x < L, \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad (\text{E.26})$$

à laquelle sont associées, par exemple, les conditions aux limites

$$\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = h (T(0, t) - T_\infty), \quad (\text{E.27})$$

$$\lambda \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h (T(L, t) - T_\infty). \quad (\text{E.28})$$

Le champ de température est alors discrétisé sous la forme $T(x, t) \equiv T(i\Delta x, n\Delta t) \equiv T_i^n$ où Δx et Δt représentent respectivement les pas d'échantillonnage spatial et temporel ($0 \leq n \leq N, 0 \leq i \leq I$). La discrétisation de l'équation (E.26) s'écrit

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} + 0 [\Delta t, (\Delta x)^2] \quad (\text{E.29})$$

dans le cas d'un schéma explicite, ou bien

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho C} \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + 0 [\Delta t, (\Delta x)^2] \quad (\text{E.30})$$

dans le cas d'un schéma implicite. La première méthode présente l'inconvénient d'être instable si le critère de stabilité

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{\lambda/(\rho C)}$$

n'est pas respecté, tandis que la seconde méthode est inconditionnellement stable. Dans les deux cas, la précision est d'ordre 1 sur le pas temporel et d'ordre 2 sur le pas spatial. La méthode de Cranck-Nicholson consiste à combiner ces deux méthodes en prenant la moyenne arithmétique des membres de droites des équations (E.29) et (E.30) :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\rho C} \left[\frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right]. \quad (\text{E.31})$$

On peut alors montrer [42] que cette méthode permet d'améliorer la précision qui devient d'ordre 2 en temps et en espace ($0 [(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$), tout en restant inconditionnellement stable, ce qui constitue dès lors un avantage vis à vis de la méthode implicite. Ajoutons enfin que pour conserver une précision d'ordre 2, les conditions aux limites doivent être discrétisées également à l'ordre 2, ce qui s'écrit par exemple

$$\lambda \left(\frac{-3T_0^n + 4T_1^n - T_2^n}{2\Delta x} \right) = h(T_1^n - T_\infty)$$

pour la condition aux limites (E.27).

E.3 Convergence des résultats de simulation

La méthode de résolution numérique exposée au paragraphe précédent présente l'avantage d'être facile à mettre en oeuvre. De plus, la méthode de Cranck-Nicholson est inconditionnellement stable pour des problèmes de diffusion thermique linéaire. Cependant, le système différentiel à résoudre ici (Eqs. (E.1)-(E.7) ou Eqs. (E.15)-(E.20)) est non linéaire, et risque par conséquent de générer des problèmes d'instabilités numériques. C'est donc avec une certaine prudence sur le choix du pas temporel que les simulations numériques présentées au chapitre 3 ont été mises en oeuvre. D'une part, le compromis entre temps de calcul et précision des résultats a été atteint en réduisant graduellement le pas temporel jusqu'à ce que les courbes obtenues finissent par être quasi superposables à mesure que le pas temporel est réduit. D'autre part, la cohérence des résultats de simulations a été vérifiée en analysant l'allure de la distribution du champ de température obtenue, et en vérifiant que celle-ci reste physiquement réaliste et ne présente pas de singularités. Cette analyse a permis de montrer que la principale source d'erreur et d'instabilité numérique dans les équations constitutives du problème est liée au terme de convection forcée $v_w \partial_x T_w$, et que, en fixant les valeurs $\Gamma_v^{(w)} = 4.10^{-8} ms^{-1} Pa^{-2}$ et $\tau_v = 1 s$ des paramètres liés à l'excitation du vent acoustique, le choix d'un pas temporel de 0.075 s permet d'assurer une bonne convergence des résultats tout en conservant un temps de calcul raisonnable.

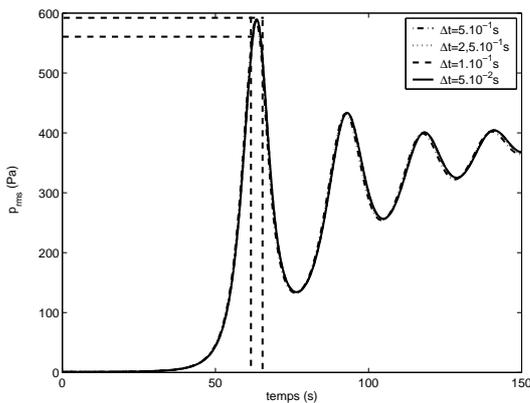


FIG. E.3 – Résultats de simulation numériques en chauffage externe pour $\Delta Q/Q_0 = 194\%$ obtenus pour différentes valeurs du pas temporel Δt .

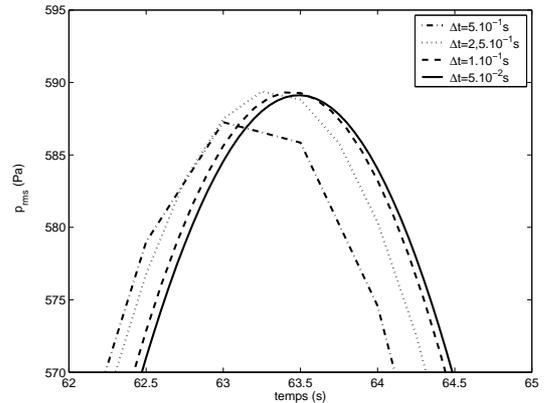


FIG. E.4 – Grossissement des résultats de la Fig. (E.3) autour du premier pic d'amplitude de pression acoustique.

Pour appuyer ce propos, les Figs. (E.3) et (E.4) illustrent les régimes transitoires obtenus en mode de chauffage externe ($\Delta Q/Q_0 = 194\%$, sans prise en compte des effets de pertes mineures et de cascade harmonique) lorsque le pas temporel est graduellement réduit de la valeur $\Delta t = 5.10^{-1} s$ jusqu'à $\Delta t = 5.10^{-2} s$. La visualisation de ces courbes sur un temps de 150 s (Fig. (E.3)) fait apparaître que la réduction du pas temporel ne change pas significativement les résultats de simulations obtenus : toutes les courbes sont pratiquement superposées. De plus, si l'on effectue un grossissement des résultats obtenus autour du premier pic d'amplitude de pression acoustique (Fig. (E.4)), il apparaît

plus clairement que le choix du pas temporel Δt influence les résultats de simulations, mais également que ces résultats convergent à mesure que le pas temporel est réduit.

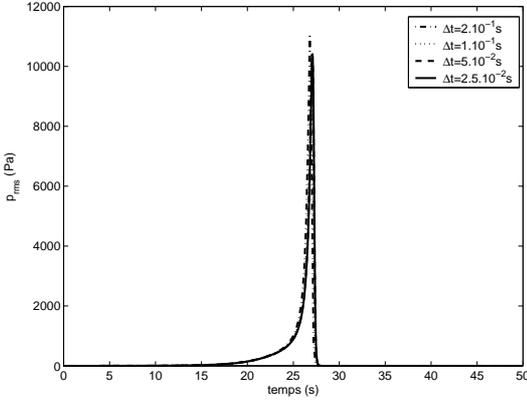


FIG. E.5 – Résultats de simulation numériques en chauffage interne pour $\Delta Q/Q_0 = 20\%$ obtenus pour différentes valeurs du pas temporel Δt .

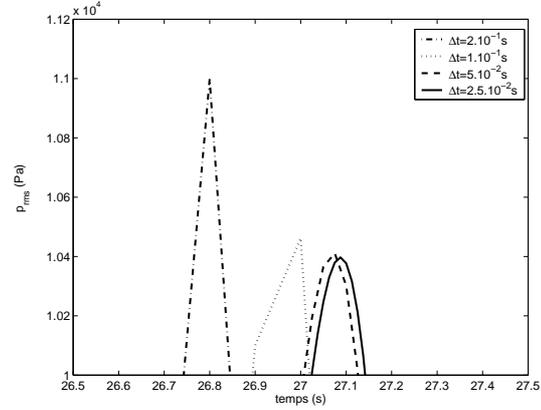


FIG. E.6 – Grossissement des résultats de la Fig. (E.5) autour du pic d'amplitude de pression acoustique.

les Figs. (E.5) et (E.6) illustrent les régimes transitoires obtenus en mode de chauffage interne ($\Delta Q/Q_0 = 20\%$, sans prise en compte des effets de pertes mineures et de cascade harmonique) lorsque le pas temporel est graduellement réduit de la valeur $\Delta t = 2.10^{-1} s$ jusqu'à $\Delta t = 2.5.10^{-2} s$. Dans ce cas de figure, le problème de la convergence des résultats de simulations numériques est un peu plus critique que dans le cas d'un chauffage externe. Néanmoins, on observe sur la Fig. (E.5) que, dès lors que le pas Δt est choisi suffisamment faible pour assurer la stabilité des résultats de simulations, la réduction de ce pas ne change pas significativement l'allure des courbes obtenues. Il apparaît également sur la Fig. (E.6), comme dans le cas d'un chauffage externe, que les résultats de simulations convergent à mesure que le pas temporel Δt est réduit.

En conclusion, le choix d'un pas temporel Δt de $7.5.10^{-2} s$ apparaît comme un choix convenable quelque soit le type de chauffage, et permet d'une part de garantir la stabilité des résultats de simulations, et d'autre part d'assurer une bonne précision des résultats tout en conservant un temps de calcul raisonnable.

Bibliographie

- [1] Atchley A.A., Bass H.E., Hoffer T.J., "Development of nonlinear waves in a thermoacoustic prime-mover", In *Frontiers in nonlinear acoustics : proceedings of the 12th ISNA*. Hamilton M.F., Blackstock D.T., editors. New York : Elsevier Science. p. 603, 1990.
- [2] Atchley A. A., Bass H.E., Hoffer T.J., Lin H., "Study of a thermoacoustic prime-mover below onset of self oscillations", *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(2) :734-743, 1992.
- [3] Atchley A. A., "Standing wave analysis of a thermoacoustic prime-mover below onset of self-oscillations", *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(5) :2907-2914, 1992.
- [4] Atchley A. A., "Analysis of the initial buildup of oscillations in a thermoacoustic prime-mover", *J. Acoust. Soc. Am.*, 95(3) :1661-1664, 1994.
- [5] Amari M., "Etude des écoulements redressés en régime transitoire dans des résonateurs annulaires à ondes progressives et stationnaires", mémoire de thèse de doctorat de l'Université du Maine. Thèse soutenue le 30 Mars 2004.
- [6] Amari M., Gusev V., Joly N., "Transient unidirectional acoustic streaming in annular resonators", *Ultrasonics* 42 :53-56, 2004.
- [7] Amari M., Gusev V., Joly N., "Temporal dynamics of the sound wind in acoustitron", *Acustica-Acta Acustica*, 89(6) :1008-1025, 2003.
- [8] Backhaus S., Swift G.W., "A thermoacoustic Stirling heat engine", *Nature*, 399 :335-338, 1999.
- [9] Bailliet H., Gusev V., Raspert R., Hiller R.A., "Acoustic streaming in closed thermoacoustic devices", *J. Acoust. Soc. Am.*, 110 :2678, 2001.
- [10] Bailliet H., "Machines thermoacoustiques : études analytiques et expérimentales de couplages et d'effets non linéaires acoustiques", mémoire de thèse de doctorat de l'Université du Maine. Thèse soutenue le 23 octobre 1998.
- [11] Bergé P., Pommeau Y., Vidal. Ch., "L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence". Hermann, Paris, 1984.
- [12] Blanc-Benon P., Besnoin E., Knio O., "Experimental and computational visualization of the flow field in a thermoacoustic stack", *Comptes Rendus de Mécanique*, 331 :17-24 (2003).
- [13] Bretagne E., "Générateurs d'ondes et instabilité thermoacoustiques. Application à la conversion d'énergie". Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie. Thèse soutenue le 12 Décembre 2001.

- [14] Bruneau M., "Manuel d'acoustique fondamentale", Ed. Hermes, 1998
- [15] Carter R.L., White M., Steele A.M., document interne de l'Atomics International Division of North American Aviation Inc., 1962.
- [16] Ceperley P.H., "A pistonless Stirling engine - the traveling wave heat engine", J. Acoust. Soc. Am., 66 :1508-1513, 1979.
- [17] Ceperley P.H., "Gain and efficiency of a traveling wave heat engine", J. Acoust. Soc. Am., 72(6) :1688-1694, 1982.
- [18] Chen G.B., Jin T., "Experimental investigation on the onset and damping behaviour of the oscillation in a thermoacoustic prime-mover", Cryogenics, 39 :843, 1999.
- [19] Chester W., "Resonant oscillations in closed tubes", J. Fluid. mech. 18 :44-64, 1964.
- [20] Duffourd S., "Réfrigérateur thermoacoustique : études analytiques et expérimentales en vue d'une miniaturisation", mémoire de thèse de doctorat, n° 2001-06, Ecole Centrale de Lyon, 2001.
- [21] Garrett S. L., "Resource Letter : TA1 : thermoacoustic engines and refrigerators", Am. J. Phys., 72 :11, 2004.
- [22] Gedeon D. "DC gas flows in Stirling and pulse tube cryocoolers", Cryocoolers, 9 :385, 1997.
- [23] Gusev V., Lotton P., Bailliet H., Bruneau M., "Asymptotic theory of nonlinear waves in a thermoacoustic prime-mover" *Acustica-Acta Acustica*, 86 :25-38, 2000.
- [24] Gusev V., Job S., Baillet H., Lotton P., Bruneau M. "Acoustic streaming in annular thermoacoustic prime-movers", J. Acoust. Soc. Am., 108 :934-945, 2000.
- [25] Higgins B., "Nicholson's", J1 :130, 1802.
- [26] Hamilton M. F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A., "Nonlinear two-dimensional model for thermoacoustic engines". J. Acoust. Soc. Am., 111 :2076-2086, 2002.
- [27] Hamilton M. F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A., "Thermal effects on acoustic streaming in standing waves". J. Acoust. Soc. Am., 114 :3092-3101, 2003.
- [28] Idelchik I. E., "Handbook of hydraulic resistance", 2^{ième} édition, Hémisphère, 1986.
- [29] Job S., "Etude théorique et expérimentale d'un générateur d'onde thermoacoustique annulaire à ondes progressives", Mémoire de thèse de doctorat de l'Université du Maine. Thèse soutenue le 19 octobre 2001.
- [30] Job S., Gusev V., Lotton P., Bruneau M., "Acoustic streaming measurements in annular thermoacoustic engines", J. Acoust. Soc. Am., 113 :1892-1899, 2003.
- [31] Karpov S., Prosperetti A., "Linear thermoacoustic instability in the time domain", J. Acoust. Soc. Am., 103(6) :3309-3317, 1998.
- [32] Khokhlova V., Sapozhnikov O., Kascheeva S., Lotton P., Gusev V., Job S., "Effects of nonlinear saturation in propagation of acoustic waves in media with frequency-dependent amplification", *Sov. Phys. Izvestia Russ. Acad. Sci.* 64 :2334, 2001.

- [33] P. Manneville, "Systèmes dynamiques et chaos", cours du DEA de Physique des Liquides de l'Université Pierre et Marie Curie, 1999. <http://www.ladhyx.polytechnique.fr/people/pops/>
- [34] Mac Adams W. H., Transmission de la chaleur, Ed. Dunod, 1961.
- [35] Marx D., Blanc-Benon P., "Numerical simulation of stack-heat exchangers coupling in a thermoacoustic refrigerator", Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA Journal) 42(7) :1338-1347, 2004.
- [36] Mironov M., Gusev V., Auregan Y., Lotton P., Bruneau M., Piatakov P., "Acoustic streaming related to minor loss phenomenon in differentially heated elements of thermoacoustic devices", J. Acoust. Soc. Am., 112 :441, 2002.
- [37] Müller V.A., Lang E., "Experimente mit thermisch getriebenen gasflüssigkeits-schwingungen", Z. Appl. Math. Phys, 36 :358, 1985.
- [38] Merkli P., Thomann H., "Thermoacoustic effects in a resonance tube", J. Fluid. Mech., 70, 1975.
- [39] Ohmi M., Iguchi M., "Critical Reynolds number in an oscillating pipe flow", Bull. J.S.M.E., 25 :165, 1982.
- [40] Ohmi M., Iguchi M., Kakehashi K., Masuda T., "Transition to turbulence and velocity distribution in an oscillating pipe flow", Bull. J.S.M.E., 25 :365-371, 1982.
- [41] Olson J.R., Swift G.W., "Acoustic streaming in pulse tube refrigerators : tapered pulse tubes", Cryogenics, 37 :769-776, 1997.
- [42] Ozisik M. N., "Finite difference methods in heat transfer", CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [43] Penelet G., Gaviot E., Gusev V., Lotton P., Bruneau M., "Experimental investigation of transient nonlinear phenomena in an annular thermoacoustic prime-mover : observation of a double-threshold effect", Cryogenics, 42 :527-532, 2002.
- [44] Penelet G., Job S., Gusev V., Lotton P., Bruneau M., "Dependence of sound amplification on temperature distribution in annular thermoacoustic engines", soumis à Acustica Acta-Acustica, 2004.
- [45] Penelet G., Job S., Gusev V., Lotton P., Bruneau M., "Etude expérimentale de phénomènes transitoire non linéaires dans un générateur d'ondes thermoacoustique annulaire", dans 6^e CFA, Lille, Avril 2002.
- [46] Penelet G., Gaviot E., Gusev V., Lotton P., Bruneau M., "Experimental investigation of transient nonlinear phenomena in an annular thermoacoustic prime-mover", dans Forum Acusticum, Séville, Septembre 2002.
- [47] Penelet G., Gusev V., Lotton P., Bruneau M., "Investigation of transient nonlinear phenomena in annular thermoacoustic prime-movers", Dans World Congress on Ultrasounds, Paris, Septembre 2003.
- [48] Penelet G., Gusev V., Lotton P., Bruneau M., "Transient nonlinear processes in annular thermoacoustic engines", Dans International Congress on Acoustics, Kyoto, Avril 2004.

- [49] Raspet R., Brewster J., Bass H.E. "A new approximation method for thermoacoustic calculations", J. Acoust. Soc. Am., 103(5) :2395-2402, 1998.
- [50] Rijke P. L. "Notiz über eine neue Art, die in einer beiden Enden offenen Röhre enthaltene Luft in Schwingungen zu verestzen", Ann. Phys. (Leipzig) 107 :339, 1859.
- [51] Rayleigh S., "The theory of sound", Dover, New York, 2nd edition, § 322i, p. 231, 1945.
- [52] Rott N., "Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes", Zeitschrift Angewandte Mathematik and Physics, 20 :230-243, 1969.
- [53] Rott N., "Damped and thermally driven acoustic oscillations. Part II : stability limit for Helium.", Z. Angew. Math. Phys., 24 :54-72, 1973.
- [54] Rott N., "The influence of heat conduction on acoustic streaming", Z. Angew. Math. Phys., 25 :417-421, 1974.
- [55] Rott N., "Thermally driven acoustic oscillations. Part III : Second Order Heat flux", Z. Angew. Math. Phys., 26 :43-49, 1975.
- [56] Rott N., "Thermoacoustics", Adv. Appl. Mech., 20 :135-175, 1980.
- [57] Rudenko O.V., Soluyan S.I., "Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics", Consultant Bureau, New York, 1977.
- [58] Sondhaus C., "Über die schallswingungen der luft in erhitzten glasrohren und gedeckten pfeifen von ungleicher weite", Ann. Phys., 79(1), 1850.
- [59] Swift G. W., "Thermoacoustic engines", J. Acoust. Soc. Am., 84(4) :1145-1179, 1988.
- [60] Swift G. W., "Analysis and performance of a large thermoacoustic engine", J. Acoust. Soc. Am., 92(3) :1551-1563, 1992.
- [61] Swift G.W., Gardner D.L., Backhaus S., "Acoustic recovery of lost power in pulse tube refrigerators", J. Acoust. Soc. Am., 105 :711-724, 1999.
- [62] Taconis K., "Vapor-liquid equilibrium of solutions of 3 He in 4 He", Physica, 15 :738, 1949.
- [63] Taine J., Petit J.P., "Transferts thermiques, mécanique des fluides anisothermes", Ed. Dunod, 2^e édition, 1998.
- [64] Thompson M.W., Atchley A.A., "Measurement of Rayleigh streaming in high amplitude standing waves", in Nonlinear Acoustics at the Beginning of the 21st Century, proceedings of the 16th ISNA, édité par O.V. Rudenko et O.A Sapozhnikov, 1 :183-190, 2002.
- [65] Thompson M.W., Atchley A.A., "Measurement of acoustic streaming using laser Doppler anemometry", proceedings de l'International Conference on Acoustics ICA Kyoto 2004, pp. 2207-2208.
- [66] Tominaga A., "Thermodynamic aspects of thermoacoustic theory", Cryogenics, 35 :427-440, 1995.
- [67] Ueda Y., Biwa T., Tashiro Y., Mizutani U., Yazaki T., "Self-tuning mechanism in a looped tube thermoacoustic engine", acte de congrès du 5^{me} World Congress on Ultrasonics, WCU Paris 2003, 1048-1051, 2003.

- [68] Ueda Y., Biwa T., Mizutani U., "Experimental studies of a thermoacoustic Stirling prime-mover and its application to a cooler", *J. Acoust. Soc. Am.*, 115 :1134-1141, 2004.
- [69] Wheatley J., Hoffer T., Swift G.W., Migliori A. "Understanding some simple phenomena in thermoacoustics with applications to acoustical heat engines", *Am. J. phys.*, 53(2) :147-162, 1985.
- [70] Yazaki T., Tominaga A., Narahara Y., "Experiments on thermally driven acoustic oscillations of gaseous Helium", *Journal of low temperature physics*, 41(1) :45-60, 1980.
- [71] Yazaki T., Tominaga A., Narahara Y., "Thermally driven acoustic oscillations : second harmonic", *Physics Letters*, 79(A)(5,6) :407-409, 1980.
- [72] Yazaki T., Tominaga A., Narahara Y., "Large heat transport due to spontaneous gas oscillation induced in a tube with steep temperature gradients", *Journal of Heat Transfer*, 105 :889-894, 1983.
- [73] Yazaki T., Iwata A., Maekawa T., Tominaga A., "Traveling wave thermoacoustic engine in a looped tube", *Phys. Rev. Let.*, 81 :3128-3132, 1998.
- [74] Yazaki T., Tominaga A., "Measurement of sound generation in thermoacoustic oscillations". *Proc. Roy. Soc. Lond., ser. A* 454 :2113-2122, 1998.
- [75] Yazaki T., Biwa T., Tominaga A., "A pistonless Stirling cooler", *Applied Physics Letters*, 80(1) :157-159, 2002.
- [76] Yuan H., Karpov S., Prosperetti A.A., "Simplified model for linear and nonlinear processes in thermoacoustic prime-movers. Part 2 : nonlinear oscillations", *J. Acoust. Soc. Am.*, 102 :3497, 1997.
- [77] Zhou S.L., Matsubara Y., "Experimental research of thermoacoustic prime-mover", *Cryogenics*, 38 :813, 1998.

ETUDE EXPÉRIMENTALE ET THÉORIQUE DES PROCESSUS NON LINÉAIRES DE SATURATION DANS UN GÉNÉRATEUR D'ONDES THERMOACOUSTIQUE ANNULAIRE

Les moteurs thermoacoustiques sont des résonateurs acoustiques dans lesquels l'interaction des oscillations acoustiques et thermiques au voisinage d'un empilement localisé de parois solides (stack) soumises à un fort gradient de température engendre une conversion d'énergie thermique en énergie acoustique, qui se traduit par le déclenchement d'oscillations acoustiques auto-entretenues de fort niveau. Depuis une dizaine d'années, un important effort de recherche a été consacré à l'étude des processus non linéaires responsables de la saturation en amplitude de l'onde acoustique ; les observations expérimentales restaient non seulement mal maîtrisées et limitées, mais encore inexplicables en raison de l'absence de modèles pertinents en regard de la complexité des phénomènes. C'est ainsi que l'objet des travaux présentés dans ce mémoire est de répertorier expérimentalement, de classer, d'interpréter de façon analytique et de modéliser les différents régimes transitoires dans un moteur thermoacoustique annulaire.

Les résultats expérimentaux, obtenus sous diverses conditions de chauffage, montrent des régimes transitoires complexes : régime périodique de déclenchement-arrêt de l'onde acoustique, oscillations basse-fréquence de l'amplitude de l'onde, double déclenchement de l'instabilité thermoacoustique... Ces observations, auxquelles sont associées des évolutions significatives du champ de température, indiquent qu'en plus des processus classiques de cascade harmonique ou de pertes mineures aux extrémités du stack (génération de tourbillons), les effets non linéaires d'interaction entre champ acoustique et champ de température jouent un rôle important sur la dynamique des régimes transitoires observés. En particulier, le développement d'un champ acoustique de niveau élevé est source d'un flux d'enthalpie thermoacoustique (équivalent à une augmentation acoustiquement induite de la conductivité thermique des parois du stack), et d'un vent acoustique modifiant la forme du champ de température.

Une étude analytique de l'influence de la forme du champ de température sur l'amplification thermoacoustique est proposée, qui montre que la distribution du champ acoustique (pression, vitesse et phase), et par suite l'amplification thermoacoustique du son, dépendent de façon critique de la forme du champ de température. Puis une description analytique des effets non linéaires précédemment cités et de l'interaction en régime transitoire entre champ acoustique et champ de température est présentée : elle mène à des résultats de simulations très proches des résultats expérimentaux, ce qui confirme le rôle majeur joué par la conductivité acoustiquement induite et le vent acoustique. Enfin, une description qualitative du régime transitoire sous forme d'un système d'équations différentielles ordinaires est proposée, qui permet finalement d'extraire les processus physiques prépondérants.

Parce qu'ils apportent une compréhension nouvelle des processus fondamentaux qui régissent la saturation de l'onde, ces travaux apportent à nos yeux une contribution aux avancées pratiques qui visent à améliorer l'efficacité des machines thermoacoustiques.

Mots clefs : Thermoacoustique, Instabilité, Acoustique non linéaire, Vent acoustique.

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL STUDIES OF NONLINEAR SATURATION PROCESSES IN AN ANNULAR THERMOACOUSTIC PRIME MOVER.

For the transformation of thermal energy into mechanical energy, thermoacoustic prime movers employ the interaction between an inhomogeneously heated stack of solid plates and gas oscillations, which results in the onset of self-excited acoustic oscillations. For the past ten years, an important research effort has been devoted to the study of nonlinear processes which are responsible for the saturation of the acoustic wave amplitude ; experimental observations were not only poorly mastered and badly documented, but were also unexplained because of the lack of adequate models to describe such complex processes. Thus, the work presented in this report has been initiated to list, classify, interpret the experimental observations analytically, and to propose a model able to describe various transient regimes in an annular thermoacoustic prime mover.

The experimental results obtained for various heating processes show complicated transient regimes : periodic switch on-off of the acoustic wave, low frequency modulation of the acoustic wave amplitude, double-threshold effect during the onset of the thermoacoustic instability and so on. Significant variations of the temperature field have also been observed during these transient regimes indicating that, in addition to the classical cascade process of higher harmonic generation and minor losses (vortex generation at the edges of the stack), the nonlinear processes involving interaction between acoustic and temperature fields play an important role in the dynamics of the transient regime. In particular, the development of a high amplitude acoustic field induces both thermoacoustic enthalpy flow (equivalent to acoustically enhanced thermal conductivity of the stack walls) and acoustic streaming which modifies the shape of the temperature field.

The influence of sound amplification on temperature distribution is studied analytically, and shows that the distribution of the acoustic field (pressure, velocity and phase shift), and consequently the thermoacoustic amplification, strongly depends on the shape of the temperature field. Then, the analytical description of the above mentioned nonlinear effects and of the transient interaction between acoustic and temperature fields is proposed : the simulation results are very close to experimental results, thus confirming the major role of acoustically enhanced conductivity and acoustic streaming. Finally, a more qualitative description of the transient regime is proposed as a set of ordinary differential equations, and allows to extract the predominant physical processes.

Because it supplies a new understanding of fundamental processes which control the acoustic wave saturation, this work contributes, in our opinion, to the progress in designing thermoacoustic engines so that they become much more efficient.

Keywords : Thermoacoustics, Instability, Nonlinear Acoustics, Acoustic streaming.