

Contribution à l'étude mathématique et à la simulation numérique des écoulements des fluides géophysiques

Bernard Di Martino

▶ **To cite this version:**

Bernard Di Martino. Contribution à l'étude mathématique et à la simulation numérique des écoulements des fluides géophysiques. Mathématiques [math]. Université Pascal Paoli, 2004. tel-00007931

HAL Id: tel-00007931
https://theses.hal.science/tel-00007931

Submitted on 6 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

UMR 6134 - Université de Corse

Spécialité : Mathématiques

présentée par

Bernard DI MARTINO

sujet

Contribution à l'étude mathématique et à la simulation numérique des écoulements des fluides géophysiques

---

Soutenue le mardi 14 décembre 2004 devant le jury composé de

MM.	Jacques Henri BALBI,	Examinateur
	Nicola BELLOMO,	Rapporteur
	Didier BRESCH,	Rapporteur
	Tomas CHACON REBOLLO,	Examinateur
	Benoît DESJARDINS,	Examinateur
	Khalid LATRACH,	Examinateur
	Pierre-Louis LIONS,	Rapporteur
	Pierre ORENGA,	Coordinateur
	Carlos PARES,	Examinateur

Remerciements

En premier lieu j'adresse mes remerciements les plus vifs à Pierre Orenga pour la confiance qu'il m'a accordé au cours de ces années. Par ces conseils et ces encouragements il m'a poussé à persévérer et à mener à bien les travaux présentés dans ce mémoire.

Je remercie les rapporteurs de cette habilitation, Nicola Bellomo, Didier Bresch et Pierre-Louis Lions qui ont bien voulu consacrer une partie de leur précieux temps à la lecture de ce mémoire et la rédaction d'un rapport.

Je suis reconnaissant envers Tomas Chacon, Benoît Desjardins, Carlos Pares et Khalid Latrach d'avoir accepté d'examiner ce mémoire et de se déplacer pour participer au jury de cette habilitation.

Je remercie aussi chaleureusement les membres de l'équipe de mathématiques de l'université de Corse, plus particulièrement Katia et Fabien, sans qui une grande partie des travaux présentés n'auraient sans doute pas pu voir le jour.

Enfin, les travaux présentés ici ont été réalisés au sein de l'Unité Mixte de Recherche CNRS - Université de Corse (6134), dont je remercie le directeur Jacques Henri Balbi et les membres de m'y avoir accueilli depuis dix ans.

Table des matières

Remerciements **3**

Liste des travaux présentés **7**

Introduction générale **9**

1 Transferts énergétiques et méthode de Galerkin non linéaire **13**
1.1 Introduction 13
1.2 Méthode de Galerkin non linéaire & shallow water 15
1.2.1 Résultats préliminaires 15
1.2.2 Description de la méthode de Galerkin non linéaire et résultats de convergence 17
1.2.3 Mise en œuvre numérique 20
1.3 Méthode de Galerkin non linéaire & équations primitives 22
1.3.1 La transformation sigma 24
1.3.2 Formulations variationnelles 27
1.3.3 Exemple de simulation 30

2 Les modèles à *toit rigide* **33**
2.1 Introduction 33
2.2 Le modèle de shallow water à surface rigide 34
2.3 Résultats d'existence et de régularité 36
2.3.1 Méthode numérique de résolution 37
2.3.2 Comparaison avec un modèle de lacs 38
2.3.3 Quelques résultats numériques 39
2.4 Le modèle aux équations primitives à surface rigide 40
2.4.1 Les équations primitives avec hypothèse du rigid lid (PErl) . . 41
2.4.2 Formulation variationnelle 42
2.4.3 Exemple de simulation 42
2.5 Un modèle de type shallow water bi-couche avec hypothèse du rigid lid 44

2.5.1 Résultats d'existence et de régularité 49
2.5.2 Description de la méthode de résolution 50
2.5.3 Exemple de simulation 51

3 Couplage lithosphère-océan et tsunami **55**
3.1 Un modèle de Tsunami 55
3.2 Résultats d'existence et de régularité 57
3.3 Construction des solutions approchées 58
3.4 Application numérique 58

Conclusion et perspectives **63**

Bibliographie **65**

Liste des travaux présentés

Articles de revues

[40] B. di Martino and P. Orenga. Résolution des équations de shallow water par la méthode de Galerkin non linéaire. *M2AN*, 32(4) :451–477, 1997.

[41] B. di Martino and P. Orenga. Resolution to a three dimensional physical oceanographic problem using the non linear Galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 30 :577–606, 1997.

[34] B. di Martino, F.J. Chatelon, and P. Orenga. The nonlinear Galerkin's method applied to the sallow water equations. *M3AS*, 9(6) :825–854, 1999.

[12] F. Bosseur, B. di Martino, and P. Orenga. Resolution by the Galerkin method with a special basis of a geophysical flow in open sea :a calvi's bay simulation. *Applied mathematical Modelling*, 24 :73–94, 2000.

[42] B. di Martino and P. Orenga. The generalized non linear Galerkin method applied to the hydrodynamics in open sea. *Computational Fluids Dynamics*, 14 :305–325, 2001.

[38] B. di Martino, C. Giacomoni, and P. Orenga. Analysis of some shallow water problems with rigid-lid hypothesis. *M3AS*, 11(6) :779–799, 2001.

[39] B. di Martino, C. Giacomoni, and P. Orenga. A numerical approach to marine circulation using free surface or rigid-lid modeling : Application in the bay of calvi. *Computational fluids dynamics*, 16 :37–48, 2002.

[35] B. di Martino, C. Giacomoni, F. Flori, and P. Orenga. Analyse d'un problème de tsunami. *Comptes rendus de l'académie des sciences*, 334 :1–6, 2002.

[36] B. di Martino, C. Giacomoni, F. Flori, and P. Orenga. Sur le construction des solutions approchées d'un problème de tsunami. *Anales Mathématiques Blaises Pascal*, 9 :269–281, 2002.

[37] B. di Martino, C. Giacomoni, F. Flori, and P. Orenga. Mathematical and numerical analysis of a tsunami problem. *M3AS*, 13(10) :1489–1514, 2003.

[43] B. di Martino, P. Orenga, and M. Peybernes. On a bi-layer shallow water model with rigid-lid hypothesis. *accepté pour publication dans M3AS*, 2004.

Travaux encadrés

[58] C. Giacomoni. *Analyse de quelques problèmes de fluides géophysiques*. Thèse de Doctorat, Université de Corse, nov 2001.

Divers

[81] B. Di Martino. *Analyse par la méthode de galerkin non linéaire de quelques problèmes de fluides géophysiques*. Thèse de Doctorat, Université de Corse, Corte, 1998.

Introduction générale

Ce document résume l'essentiel des travaux de recherche en mathématiques appliquées auxquels j'ai participé ces dernières années. Ces travaux ont pour trame l'analyse des écoulements des fluides géophysiques, et en particulier de ses applications à la circulation océanique.

Ce domaine de recherche a émergé à partir des années 40 avec les travaux de Von Neumann et de ses élèves. La montée en puissance des ressources informatiques a ensuite permis le développement d'outils de simulation de plus en plus complexes. Les modèles de circulation générale de l'océan peuvent avoir des niveaux de complexité très différents. A partir de la base commune des équations primitives, on peut prendre en compte, par exemple, des modèles traduisant les mouvements des glaces en mer, la circulation atmosphérique, la formation et le déplacement des nuages et le mouvement des sédiments marins.

La volonté de la communauté scientifique de disposer d'un outil de simulation opérationnel, permettant de fournir des prévisions océaniques avec la même régularité et fiabilité que la prévision météorologique, nécessite la collaboration de chercheurs d'horizons très différents. Les physiciens côtoient des chimistes, les biologistes, des informaticiens et des mathématiciens. Les questions de l'existence de solutions (qui permettent de s'assurer que le problème est bien posé), de la convergence des algorithmes, du comportement des solutions asymptotiques ou encore de la conception de nouvelles méthodes numériques relèvent des mathématiques appliquées. Les résultats de la recherche, notamment française, sur le sujet sont nombreux et je vais tenter d'indiquer les ressources bibliographiques ayant contribué à ma formation dans le domaine.

Dans les trois chapitres qui suivent, j'ai donné une place importante à la modélisation physique qui est toujours corrélée aux difficultés mathématiques et numériques. La circulation océanique obéit à des lois de conservation des diverses variables hydrodynamiques. Ceux sont les travaux de L. Euler, en formalisant les lois de conservation par des équations aux dérivées partielles, qui ont permis de commencer à comprendre

le comportement dynamique des fluides. La forme quasi définitive des équations que l'on utilise date de 1843 avec les travaux de A. de Saint-Venant, repris par la suite par G. Stokes (les équations portent le nom de Navier-Stokes en l'honneur également des travaux du français C. Navier).

On sait maintenant qu'il est utopique de chercher à résoudre directement les équations de Navier-Stokes à l'échelle d'un océan. Le comportement chaotique des équations et la grande diversité d'échelles mises en mouvement sont un frein à tout espoir de simulation directe à partir de ces équations. Un grand nombre de travaux ont été conduits en vue de simplifier les modèles, permettant d'isoler les phénomènes caractéristiques et rendre possible la simulation numérique. Les ouvrages traitant de ces modèles sont nombreux et je me suis pour ma part beaucoup inspiré sur ceux de J.C.J. Nihoul [90, 89, 95, 92], J. Pedlosky [109, 108] et A.E. Gill [60] qui font référence en la matière.

On peut classifier ces modèles en utilisant différents critères de modélisation physique. Par exemple les modèles les plus simples sont ceux décrivant l'équilibre géostrophique (équilibre entre la force de Coriolis et les forces de pression). Ensuite, on trouve des modèles intégrés suivant la direction verticale que l'on appelle par la suite modèles de shallow water. Ils sont bien adaptés au cas d'une couche d'eau de densité homogène, soit en mouvement sur une couche au repos (modèle à gravité réduite), soit occupant toute la hauteur d'eau. Une autre approche est représentée par les modèles multi-couches pour lesquels les variables sont moyénnées sur l'épaisseur de chaque couche. Enfin, il y a les modèles tridimensionnels plus ou moins complets mais toujours très coûteux au niveau de la simulation numérique.

Pour notre part, on a choisi de classifier les modèles selon qu'ils prennent en compte ou pas les mouvement de la surface du fluide. En effet, cette hypothèse modifie fortement la structure des modèles et à des répercutions importantes sur les méthodes formelles et numériques utilisées.

Dans le premier chapitre, on commence par présenter les travaux sur le traitement par une méthode spectrale des équations de shallow water à surface libre. Après avoir rappelé quelques résultats préliminaires, on présente une application de la méthode de Galerkin non linéaire (proposée par M. Marion et R. Temam [79]) ainsi que quelques résultats de convergence associés à cette méthode. Le traitement numérique s'appuie sur une construction de solutions approchées identique à celle de l'approche formelle. On adapte ensuite les mêmes techniques aux équations primitives à surface libre qui ne sont traitées qu'au niveau numérique, la question d'existence étant à

notre connaissance ouverte.

Dans le second chapitre, on étudie une variante des modèles précédents pour lesquels l'hypothèse du *toit rigide* est appliquée. On détaille les modifications essentielles que cette hypothèse implique aussi bien au niveau formel que numérique. Bien que cette hypothèse permette de travailler dans un domaine fixe, elle induit d'autres difficultés que l'on détaille dans ce chapitre. Cette hypothèse ne va pas toujours dans le sens d'une simplification du jeu d'équations et on donne, lorsque cela s'avère possible, des résultats d'existence et de régularité des solutions. Le traitement numérique suit une nouvelle fois l'approche formelle ce qui permet de vérifier que le schéma numérique est convergent.

Enfin, dans le dernier chapitre, on étudie un modèle de tsunami. Il s'agit d'un modèle couplant les vibrations de la croûte terrestre, modélisée par un opérateur de plaque, avec un modèle de shallow water à surface libre. Ce modèle permet de simuler le déplacement et les variations d'amplitude du raz de marée. On présente quelques résultats d'existence et de régularité des solutions pour ce problème et proposons une approche numérique couplant méthode de Galerkin, méthode des caractéristiques et méthode des éléments finis.

Ce travail s'inscrit dans la perspective de développer des outils applicables dans des configurations réalistes. Il y a toujours une lourde phase de développement des codes numériques. Ces codes suivent autant que possible les outils formels utilisés dans les résultats d'existence. De nombreuses simulations ont été réalisées à l'aide de ces codes dans des domaines comme la baie de Calvi, le Golfe de Pinarellu [82] ou encore le lac du barrage de Calaccucia [51].

Ces travaux ont été en grande partie financés par la Collectivité Territoriale de Corse. Elle a participé aux bourses des différents thèses et soutenu ce travail aux travers de contrats de recherche, en particulier le contrat Gilco (Gestion Intégrée du Littoral COrse) auquel nous sommes associés avec l'Ifremer et d'autres équipes de recherche. Il convient de citer également la commission européenne qui a participé à ce financement à travers les contrats Interreg I, II et III A ainsi que le CNRS qui nous accueille dans son Unité Mixte de Recherche 6134 (Systèmes Physiques pour l'Environnement).

Chapitre 1

Transferts énergétiques et méthode de Galerkin non linéaire

1.1 Introduction

La simulation numérique des écoulements géophysiques nécessite la résolution d'équations de type Navier-Stokes qui traduisent la conservation de la quantité de mouvement, de la masse du fluide et des grandeurs scalaires (salinité, température). Ces écoulements, de nature turbulente, sont caractérisés par des nombres de Reynolds très élevés. Ils sont composés d'un grand nombre de tourbillons dont la taille peut varier de quelques centimètre à plusieurs centaines de kilomètres.

Des échanges énergétiques ont lieu entre ces tourbillons à différentes échelles. L.F. Richardson a décrit le phénomène de transfert énergétique entre ces échelles de la façon suivante :*"Les grosses volutes contiennent de petites volutes, qui y puisent leur vitesse. Et ces petites volutes en contiennent de plus petites,*
et ainsi de suite jusqu'à la viscosité".

C'est à A. Kolmogorov que l'on doit l'hypothèse d'universalité dans laquelle la cascade énergétique serait *invariante d'échelle*. Ceci se traduit par le fait que les tourbillons ont tendance à se diviser de la même façon quelque soit leur échelle. On peut en déduire que la pente d'énergie cinétique suit une loi en $K^{-5/3}$ où K est la fréquence associée au tourbillon. C'est la cascade énergétique de Kolmogorov.

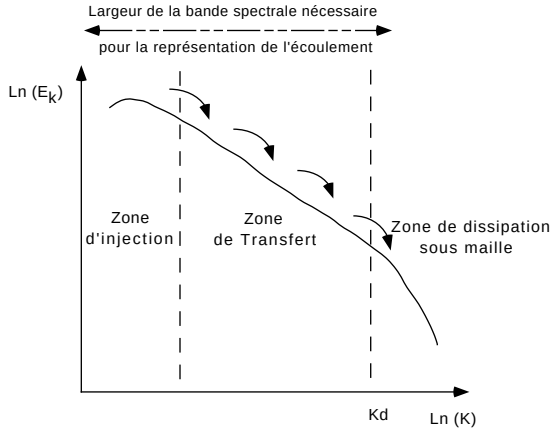


FIG. 1.1 – Cascade d'énergie de Kolmogorov

Il n'est pas raisonnable de penser simuler toutes les échelles mises en jeu dans un tel écoulement. Toute simulation numérique induit alors forcément une notion de *troncature* de la cascade énergétique. Or, le plus grande partie de l'énergie est dissipée dans le fluide au niveau des plus petites échelles de l'écoulement. Ne pas prendre en compte ces petites échelles induit donc une surabondance d'énergie aux grandes échelles, cette énergie modifiant considérablement le comportement de ces grandes échelles [70].

La solution retenue pour contourner cette difficulté est de modéliser les transferts énergétiques entre les grandes et les petites échelles non explicitement représentées : c'est l'approche LES (Larges Eddy Simulation). La modélisation des phénomènes turbulents peut alors se faire par des systèmes plus ou moins simples, allant d'une simple augmentation du coefficient de viscosité à une modélisation de type énergie cinétique turbulente - dissipation d'énergie cinétiques turbulente ($K - \epsilon$). De nombreuses variantes de ces modèles existent permettant par exemple de prendre en compte les phénomènes de stratification limitant la turbulence dans la direction verticale [91, 1].

Une autre classe de méthodes a vu le jour ces dernières années. Il s'agit de méthode multi-échelles basées sur une étude des transferts énergétiques entre grandes et petites échelles de l'écoulement. Ces méthodes s'apparentent à des méthodes multi-grilles au sens ou l'on résout les petites échelles avec des pas de temps différents de ceux utilisés pour les grandes échelles. Cependant, contrairement à l'approche multi-grilles classique pour laquelle les phénomènes à petites échelles sont résolus en utilisant de petits pas de temps, l'idée est de geler les mouvements de ces petites échelles censées avoir un comportement statistiquement homogène sur de petites

périodes de temps. Cette méthode a été proposée par M. Marion et R. Temam en 1988 [79]. Elle a été appliquée avec succès aux équations de Burger et de Navier Stokes incompressibles couplées avec des techniques de FFT [66, 32] ou d'éléments finis [107]. Dans ces deux systèmes d'équations, l'origine des échanges énergétiques se trouve dans le terme non linéaire de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Dans des cas plus complexes, par exemple dans le cas des équations de Navier-Stokes compressibles, les échanges d'énergie ont également pour origine des transformations non linéaires d'énergie cinétique en énergie potentielle liées à la compression ou à la dilatation du fluide. Pour les équations de shallow water, la force de Coriolis, composante importante des écoulements à grandes échelles, bien qu'ayant un bilan énergétique nul (elle est orthogonale au déplacement) génère une large répartition spectrale de l'énergie. Dans le cas des équations dites "primitives" de l'océan, les sources de transfert énergétique sont beaucoup plus nombreuses, les accumulations thermiques et salines pouvant être vues comme des accumulations d'énergie potentielle ne demandant qu'à revenir à un état d'équilibre.

1.2 Application de la méthode de Galerkin non linéaire et modèle de shallow water

1.2.1 Résultats préliminaires

On rappelle ici quelques résultats qui ont servi de fondement à une grande partie de ce travail. On s'intéresse au modèle de shallow water en formulation hauteur vitesse modélisant une couche de densité ρ_1 et d'épaisseur h en déplacement sur une couche au repos de hauteur infinie et de densité ρ_0. u représente la vitesse moyenne sur la verticale de la couche de fluide, g' est le coefficient de gravité réduite valant $g(\rho_1 - \rho_0)/\rho_1$ avec g l'accélération de la pesanteur et A le coefficient de viscosité turbulent.

Le domaine d'étude Ω_x (occupé par le fluide) est supposé être un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ pour simplifier. L'écoulement obéit à l'équations de conservation de la quantité de mouvement :

$$u_t + \frac{1}{2}\mathrm{grad}\, u^2 + \mathrm{rot}\, u\alpha(u) + \omega\alpha(u) + g'\,\mathrm{grad}\, h - A\Delta u = f \quad \text{dans } Q \tag{1.1}$$

et à celle de continuité

$$h_t + \mathrm{div}\,(uh) = 0 \quad \text{dans } Q, \tag{1.2}$$

où $Q = \Omega_x \times]0,T[$. ω est égale à deux fois le coefficient de Coriolis, α est un opérateur de rotation ($\alpha(u_1,u_2) = (-u_2,u_1)$) et f représente le forcing du vent ($f = C_d W|W|$ avec W la vitesse du vent à 10 mètres au dessus de l'eau)[89]. On adjoint à ces équations des conditions initiales et des conditions de type imperméabilité et non dissipation au bord :

$$(P) \qquad u \cdot n = 0 \quad ; \quad \mathrm{rot}\, u = 0 \quad \text{sur } \gamma \times]0,T[. \tag{1.3}$$

Dans [3] Agoshkov *et al* présentent d'autres type de conditions aux limites acceptables pour ce modèle. On note $\mathcal{V} = \{\varphi \in L^2(\Omega), \mathrm{div}\,\varphi \in L^2(\Omega), \mathrm{rot}\,\varphi \in L^2(\Omega), \varphi \cdot n = 0\}$ et on le munit de la norme

$$\|\varphi\|_{\mathcal{V}} = \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega_x)} + \|\mathrm{div}\,\varphi\|^2_{L^2(\Omega_x)} + \|\mathrm{rot}\,\varphi\|^2_{L^2(\Omega_x)} \ . \tag{1.4}$$

La formulation faible est alors
trouver

$$u \in L^2(0,T;\mathcal{V}) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2) \quad , \quad h \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)) \quad \textit{and} \quad h \geq 0$$

tel que

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial t}, v\Big) - \frac{1}{2}\Big(u^2, \mathrm{div}\, v\Big) + \Big(\mathrm{rot}\, u\alpha(u), v\Big) + \Big(\alpha(u), v\Big) + A\Big(\Big(u, v\Big)\Big) - \Big(h, \mathrm{div}\, v\Big) = \Big(f, v\Big) \quad \forall v \in \mathcal{V} \cap H^4(\Omega)^2 \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{div}\,(uh) = 0 \quad \text{dans } L^1(0,T;W^{-1,1}(\Omega)) \tag{1.6}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \in \mathcal{V}, \quad h(0,x) = h_0(x) \in L^1(\Omega), h_0(x) \geq 0 \quad \textit{a.e. in } \Omega \ . \tag{1.7}$$

Dans [101], P. Orenga a établi, sous la condition de données petites, l'existence de solutions faibles de ce problème. Cette condition permet la construction d'un espace de stabilité nécessaire au traitement des termes non linéaires. La construction des solutions approchées se fait par la méthode de Galerkin alors que l'équation de continuité est résolue par la méthode des caractéristiques.

F.J. Chatelon et P. Orenga [20] ont obtenu des résultats de régularité permettant de prouver l'unicité de ces solutions. Ils s'appuient pour cela sur une décomposition de Hodge du champ de vitesse .

1.2.2 Description de la méthode de Galerkin non linéaire et résultats de convergence

La méthode de Galerkin consiste à construire un sous espace de dimension fini $\mathcal{V}_{m_1}$ de $\mathcal{V}$. L'énergie fournie à la restriction de la solution à $\mathcal{V}_{m_1}$ ne peut être dissipée que dans $\mathcal{V}_{m_1}$. L'idée principale de méthode de Galerkin non linéaire est de permettre le transfert cette énergie dans un sous espace du complémentaire de $\mathcal{V}_{m_1}$ dans $\mathcal{V}$, noté $\tilde{\mathcal{V}}_{m_1}$. On ne prendra en compte que les transferts descendant la cascade énergétique de Kolmogorov, c'est à dire allant des gros tourbillons vers les plus petits. Dans un premier temps, on s'est fortement inspirés des travaux de F. Jauberteau [66] et n'avons appliqué la méthode de Galerkin non linéaire que sur l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

On pose :

$$u_m = y_m + z_m \quad \text{avec} \quad y_m = \sum_{i=1}^{m_1} x_i(t)\varphi_i(x) \text{ et } z_m = \sum_{i=m_1+1}^{m} x_i(t)\varphi_i(x), \tag{1.8}$$

où les φ_1 sont des éléments d'une base de $\mathcal{V}$, et on se propose d'étudier la convergence des solutions du problème faible approché (V_m^a) suivant :

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial y_m}{\partial t}, \varphi_i\Big) - \frac{1}{2}\Big(y_m^2, \operatorname{div}\varphi_i\Big) - \Big(y_m z_m, \operatorname{div}\varphi_i\Big) \\ + \Big(\operatorname{rot} y_m \alpha(y_m), \varphi_i\Big) + \Big(\operatorname{rot} z_m \alpha(y_m), \varphi_i\Big) + \Big(\operatorname{rot} y_m \alpha(z_m), \varphi_i\Big) \\ + \Big(\alpha(y_m), \varphi_i\Big) + \Big(\alpha(z_m), \varphi_i\Big) \\ + A\Big(\Big(y_m, \varphi_i\Big)\Big) - \Big(h_m, \operatorname{div}\varphi_i\Big) = \Big(f, \varphi_i\Big) \quad \text{dans } Q,\ \forall \varphi_i, i = 1, \ldots, m_1\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial z_m}{\partial t}, \varphi_i\Big) - \frac{1}{2}\Big(y_m^2, \operatorname{div}\varphi_i\Big) + \Big(\operatorname{rot} y_m \alpha(y_m), \varphi_i\Big) + \Big(\alpha(y_m), \varphi_i\Big) \\ + A\Big(\Big(z_m, \varphi_i\Big)\Big) - \Big(h_m, \operatorname{div}\varphi_i\Big) = \Big(f, \varphi_i\Big) \quad \text{dans } Q,\ \forall \varphi_i, i = m_1+1, \ldots, m \in \tilde{\mathcal{V}}_{m_1}\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial h_m}{\partial t} + \operatorname{div}(y_m h_m) + \operatorname{div}(z_m h_m) = 0 \quad \text{dans } Q \tag{1.11}$$

$y_m(t=0) = y_{0m} = \mathcal{P}_{m_1}(u_0) \in \mathcal{V}_{m_1}$, $z_m(t=0) = z_{0m} = \tilde{\mathcal{P}}_{m_1}(u_0) \in \tilde{\mathcal{V}}_{m_1}$ et $h_{0m} \in C^1(\bar{\Omega}_x)$.

Où on a noté $\mathcal{P}_{m_1}$ l'opérateur projection L^2 sur l'espace $\mathcal{V}_{m_1}$ et $\tilde{\mathcal{P}}_{m_1}$ l'opérateur projection L^2 sur l'espace $\tilde{\mathcal{V}}_{m_1}$. Dans ces équations, on supprime les termes non-linéaires d'interaction entre les petites structures et on calcule ces petites structures supposées uniquement générées par les interactions entre grandes structures.

On a établi le théorème suivant donnant un résultat d'existence de solution du problème (V_m^a) ainsi que des résultats de convergence [41] :

Théorème 1.1. *En supposant les conditions initiales suffisamment petites et régulières, on a*

$$z_m \rightharpoonup 0 \text{ dans } L^2(0,T;\mathcal{V}) \text{ faible}, \tag{1.12}$$

$$z_m \to 0 \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega_x)^2) \text{ fort}, \tag{1.13}$$

$$y_m \to u^* \text{ dans } L^2(0,T;\mathcal{V}) \text{ faible et dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega_x)^2) \text{ faible étoile}, \tag{1.14}$$

$$\int_Q h_m\Theta \, dx \, dt \to \int_Q h\Theta \, dx \, dt \text{ pour tout } \Theta \in L^1(0,T;L^\infty(\Omega_x)), \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial y_m}{\partial t} \text{ borné dans } L^2(0,T;H^{-3}(\Omega_x)^2), \tag{1.16}$$

$$(\operatorname{rot} y_m\alpha(z_m),\varphi)_{L^2(\Omega_x)^2} \to 0 \text{ dans } L^1(0,T) \text{ fort}, \tag{1.17}$$

$$(\operatorname{rot} z_m\alpha(y_m),\varphi)_{L^2(\Omega_x)^2} \to 0 \text{ dans } L^1(0,T) \text{ fort}, \tag{1.18}$$

$$(y_m z_m, \operatorname{div}\varphi)_{L^2(\Omega_x)^2} \to 0 \text{ dans } L^1(0,T) \text{ fort}, \tag{1.19}$$

$$(y_m + z_m)h_m \rightharpoonup uh \text{ dans } L^1(Q) \text{ faible} \tag{1.20}$$

et la solution du problème (V_m^a) converge faible étoile dans $L^2(0,T;\mathcal{V}) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_x)^2) \times L^1(0,T;L^\infty(\Omega_x))$, lorsque $m_1 \to \infty$ vers la solution du problème (V).

Dans un second temps avons par ailleurs montré que l'on pouvait approcher les solutions du problème de shallow water par la méthode de Galerkin pour l'équation de conservation de la masse. Pour cela, on utilise la formulation faible de l'équation de masse sous la forme suivante :

$$\Big(\frac{\partial h_{m,n}}{\partial t}, p_i\Big) + \Big(\operatorname{div}(u_{m,n}h_{m,n}), p_i\Big) = 0 \quad \text{in } Q, \ \forall p_i, i = 1,\dots,n \tag{1.21}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.2. *Si les données sont suffisamment petites et régulières, alors les solutions $(u_{m,n}, h_{m,n})$ du problème $(V_{m,n})$ donné par (1.5,1.21) vérifient*

- *$(u_{m,n}, h_{m,n})$ solution de $(V_{m,n})$ converge faiblement vers (u_m, h_m) solution du problème(V_m) dans $L^2(0,T;L^q(\Omega))$, $q < 2$.*
- *Pour tout m, il existe $n(m)$ tel que $(u_{m,n(m)}, h_{m,n(m)})$ converge vers (u,h) solution de (V), dans $L^1(Q) \times L^1(Q)$.*

Ce résultat permet de vérifier que le schéma numérique utilisant la méthode de Galerkin pour l'équation de masse est encore convergeant.

On a ensuite proposé une méthode de Galerkin non linéaire *globale* pour les deux équations [41]. Pour cela, on note

$$u_{m,n} = y_{m,n} + z_{m,n} \quad \text{avec} \quad y_{m,n} = \sum_{i=1}^{m_1} x_i(t)\varphi(x) \text{ et } z_{m,n} = \sum_{i=m_1+1}^{m} x_i(t)\varphi(x) \quad (1.22)$$

et

$$h_{m,n} = \zeta_{m,n} + \eta_{m,n} \quad \text{avec} \quad \zeta_{m,n} = \sum_{k=1}^{n_1} y_k(t)p_k(x) \text{ et } \eta_{m,n} = \sum_{k=n_1+1}^{n} y_k(t)p_k(x) \quad (1.23)$$

solutions du problème $(V^a_{m,n})$ suivant :

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial y_{m,n}}{\partial t}, \varphi_i\Big) + b(y_{m,n}, y_{m,n}, \varphi_i) + b(y_{m,n}, z_{m,n}, \varphi_i) + b(z_{m,n}, y_{m,n}, \varphi_i) \\ + \Big(\alpha(y_{m,n}), \varphi_i\Big) + \Big(\alpha(z_{m,n}), \varphi_i\Big) + A\Big(\Big(y_{m,n}, \varphi_i\Big)\Big) \\ - \Big(\zeta_{m,n}, \operatorname{div}\varphi_i\Big) - \Big(\eta_{m,n}, \operatorname{div}\varphi_i\Big) = \Big(f, \varphi_i\Big), \ \forall\varphi_i, i = 1, \ldots, m_1 \quad (1.24)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial \zeta_{m,n}}{\partial t}, p_k\Big) - \Big(y_{m,n}\zeta_{m,n}, \operatorname{grad} p_k\Big) - \Big(y_{m,n}\eta_{m,n}, \operatorname{grad} p_k\Big) \\ - \Big(z_{m,n}\zeta_{m,n}, \operatorname{grad} p_k\Big) = 0, \ \forall p_k, k = 1, \ldots, n_1 \quad (1.25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial z_m}{\partial t}, \varphi_i\Big) + b(y_{m,n}, y_{m,n}, \varphi_i) + \Big(\alpha(y_{m,n}), \varphi_i\Big) + A\Big(\Big(z_{m,n}, \varphi_i\Big)\Big) \\ - \Big(\zeta_{m,n}, \operatorname{div}\varphi_i\Big) = \Big(f, \varphi_i\Big), \ \forall\varphi_i, i = m_1 + 1, \ldots, m \quad (1.26)\end{aligned}$$

$$\Big(\frac{\partial \eta_{m,n}}{\partial t}, p_k\Big) - \Big(y_{m,n}\zeta_{m,n}, \operatorname{grad} p_k\Big) = 0, \ \forall p_k, k = n_1 + 1, \ldots, n \quad (1.27)$$

où $b(\ ,\ ,\ )$ représente la contribution des termes non linéaires.

Théorème 1.3. *En supposant les données initiales suffisamment petites et régulières, on montre que*

$(u_{m,n}, h_{m,n})$ solution de $(V^a_{m,n})$ converge faiblement vers (u_m, h_m), solution du problème (V_m), dans $L^2(0,T;L^q(\Omega)),\ q < 2$.

Pour tout m, il existe $n(m)$, tel que $(u_{m,n(m)}, h_{m,n(m)})$ converge vers (u,h), solution de (V), dans $L^1(Q) \times L^1(Q)$.

Ce dernier résultat nous assure la convergence de la méthode de Galerkin non linéaire globale appliquée simultanément aux deux équations. Les variations à petites échelles de la hauteur d'eau et de la vitesse sont déduites de celles à grandes échelles par des calculs explicites à un coût très faible.

1.2.3 Mise en œuvre numérique

Une première approche numérique de résolution de ces équations par la méthode de Galerkin a été initiée par P. Bisgambiglia et P. Orenga [103], utilisant une base de $\mathcal{V}$ solution de :

$$(P1) - \Delta u = \lambda u \text{ dans } \Omega_x, \quad u \cdot n = \text{rot}\, u = 0 \text{ sur } \gamma.$$

Puis dans [99], P. Orenga montre comment construire une base de $\mathcal{V}$ à partir des gradient et rotationnels des problèmes scalaires de Neumann et Dirichlet.

$$(P2) \qquad -\Delta p = \lambda p \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ sur } \gamma,$$

$$(P3) \qquad -\Delta q = \mu q \text{ dans } \Omega, \quad q = 0 \text{ sur } \gamma.$$

La résolution de l'équation de continuité par la méthode des caractéristiques a été étudié par F.J. Chatelon [20] qui propose le schéma suivant :

$$h_m(X(t_i), t_i) = h_m(X(t_{i-1}), t_{i-1}) \exp(-\triangle t \text{ div } u_m(X(t_i), t_i)). \tag{1.28}$$

En ce qui concerne la méthode de Galerkin non linéaire, on s'est largement inspirés des travaux de F. Jauberteau [66]. En particulier, on a retenu un mode de calcul dynamique de la fréquence de coupure entre grands et petits tourbillons. Puisque l'énergie cinétique de u_m est donnée par :

$$Ec(u_m) = \frac{1}{2}\|u_m\|^2_{L^2(\Omega_x)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} X_i^2. \tag{1.29}$$

On définit une constante ϵ_u, liée à la précision des calculs, et la valeur de coupure m_1 est déterminée à partir de la relation :

$$m_1 = \min\left\{ M/\forall m_1 > M, \frac{Ec(z_{m,n})}{Ec(y_{m,n})} \leq \epsilon_u \right\}. \tag{1.30}$$

Avec de telles définitions, la valeur de m_1 peut évoluer au cours du temps pour s'adapter à la dynamique de l'écoulement (cf. fig 1.2).

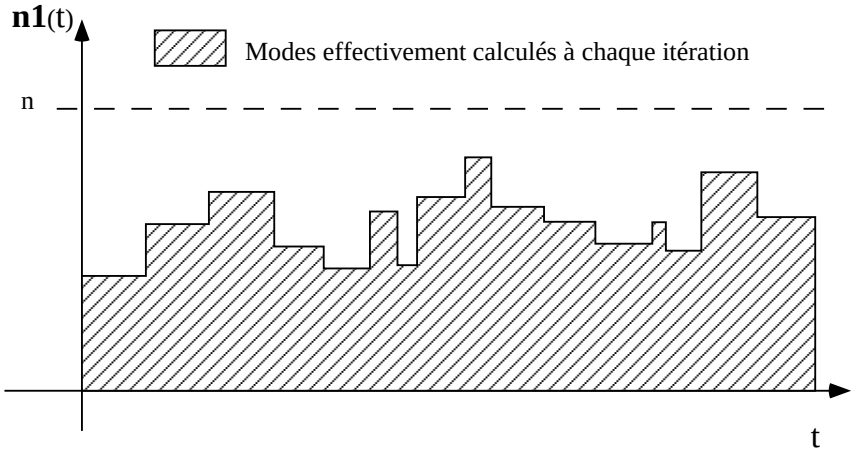


FIG. 1.2 – évolution de la fréquence de coupure m_1

On a également retenu une stratégie V-cycle ainsi qu'une méthode de quadrature pour l'intégration des termes de diffusion qui donne

$$X_i(t+\triangle t) = e^{-A\lambda_i \triangle t} X_i(t) + \left(\frac{1-e^{-A\lambda_i \triangle t}}{A\lambda_i}\right) \int_t^{t+\triangle t} G_i(\theta) \mathrm{d}\theta. \tag{1.31}$$

où la fonction G_i représente toutes les composantes autres que la diffusion. Son intégrale est réalisée à partir d'un schéma d'intégration implicite d'Euler utilisant une méthode prédiction correction.

On présente sur les figures (1.3) et (1.4) les spectres d'énergie cinétique et potentielle obtenus dans des cas d'écoulements dans un domaine simplifié.

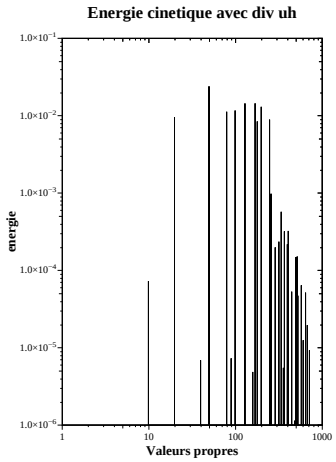


FIG. 1.3 – Répartition de l'énergie cinétique.

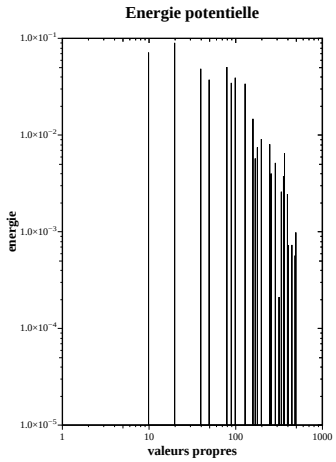


FIG. 1.4 – Répartition de l'énergie potentielle.

1.3 Application de la méthode de Galerkin non linéaire au modèle aux équations primitives

La seconde section de ce chapitre est consacrée à l'utilisation de la méthode de Galerkin non linéaire dans le cadre de la résolution des équations *primitives*. Ce sont les équations tridimensionnelles qui régissent le comportement des variables hydrodynamique de l'océan. On utilise ici un modèle *à surface libre*, c'est à dire prenant en compte les variations de la surface du fluide (inspiré des travaux de J. Nihoul [90]). Il n'était pas dans nos objectif d'établir des résultats d'existence de solution puisque la difficulté est du même type que celle du problème de Navier Stokes compressible en dimension trois. On a donc focalisé notre attention sur le développement de méthodes numériques.

La plupart des codes résolvant les équations primitives sont basés sur des schémas numériques de type différences finies ou volumes finis. C'est le cas des modèles POM (Princeton Ocean Model), MOM (Modular Ocean Model), OPA (Ocean Parallel), GHER (Geohydrodynamics and Environment Research). Quelques essais d'utilisation des éléments finis ont été menés, par exemple par T. Chacon Rebollo [18].

Alors que la mutation vers des modèles spectraux date déjà de plusieurs années dans le domaine de la météorologie [65], cette approche n'a été que très peu appliquée à l'océanographie. On peut trouver sur ce sujet les travaux de A.M. Davies [29, 30] qui utilise la méthode de Galerkin dans la direction verticale à l'aide d'une base de fonction B-slines. Mais la difficulté d'obtenir une base numérique bien adaptée a longtemps été un frein à l'utilisation d'une méthode spectrale dans les trois dimensions.

En collaboration avec Charles Fluixa, on a développé un code de simulation de ces écoulements basés sur la méthode de Galerkin et une base tridimensionnelle. Au delà de vérifier la faisabilité d'un tel code, l'objectif était de voir si cette approche pouvait donner des informations complémentaires permettant une meilleure compréhension des écoulements. En particulier, cette méthode donne un accès direct au spectre énergétique et permet une meilleure prise en compte des conditions aux limites souvent mal approximées.

Les équations primitives s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + v_3 \frac{\partial u}{\partial z} + \omega\alpha(u) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \mu\Delta u = -\nabla q, \tag{1.32}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u \cdot \nabla b + v_3 \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_b \frac{\partial b}{\partial z}\right) - \mu_b \Delta b = 0, \tag{1.33}$$

$$\operatorname{div} u + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0, \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = b, \tag{1.35}$$

$$\mathbf{V} = u + v_3 \vec{k} \quad ; \qquad q = \frac{p}{\rho_o} + gz \quad \text{et} \qquad b = -\frac{\rho - \rho_o}{\rho_o} g. \tag{1.36}$$

où b représente une variable scalaire comme la température ou la quantité de sels dissouts. L'équation 1.35 représente l'équilibre hydrostatique et remplace la composante verticale de l'équation de quantité de mouvement. La vitesse verticale est alors déduite à partir de l'équation de continuité 1.34. À ces équations on doit adjoindre des conditions initiales et des conditions aux limites. Pour les frontières délimités par la côte, on retient des conditions d'imperméabilité de la forme :

$$u \cdot n = 0, \ \operatorname{rot} u = 0, \ \text{et} \ \operatorname{grad} b \cdot n = 0. \tag{1.37}$$

En notant n_h la composante horizontale de la normale au domaine et n_v la composante verticale de cette normale, les conditions aux limites en surface se traduisent par :

$$\mu(\operatorname{rot} u \ \alpha(n_h) + \operatorname{div} u \ n_h) + \nu \frac{\partial u}{\partial z} \cdot n_v = C_0 W_s, \tag{1.38}$$

$$\mu_b \nabla b \cdot n_h + \nu_b \frac{\partial b}{\partial z} n_v = \alpha_b (B_s - b), \tag{1.39}$$

$$v_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \cdot \nabla \zeta. \tag{1.40}$$

Où C_0 est un coefficient positif, W_s est la vitesse du vent au dessus de la surface, α_b est un coefficient de relaxation pour les grandeurs scalaires, B_s est une valeur de référence des grandeurs scalaires en surface et ζ représente les variations de la surface par rapport à un état d'équilibre. Au fond, ces conditions s'écrivent :

$$\mu(\operatorname{rot} u \ \alpha(n_h) + \operatorname{div} u \ n_h) + \nu \frac{\partial u}{\partial z} \cdot n_v = C_d u, \tag{1.41}$$

$$\mu_b \nabla b \cdot n_h + \nu_b \frac{\partial b}{\partial z} n_v = 0, \tag{1.42}$$

$$u \cdot n_h + v_3 n_v = 0. \tag{1.43}$$

Où C_d est un coefficient positif caractérisant la condition de dissipation au fond [1].

[1] La condition de frottement au fond (1.41) est souvent modélisée par un terme en $C_d u|u|$, ou encore, pour faciliter le passage au problème en dimension deux, on utilise $C_d \bar{u}$ [71]

1.3.1 La transformation sigma

La prise en compte du mouvement de la surface conduit à chercher les solutions du problème sur un domaine mobile. De plus, la forme souvent complexe de la bathymétrie conduit à rechercher des fonctions de base en résolvant un problème en dimension trois. Une méthode pour contourner cette difficulté est d'utiliser la transformation *sigma* qui donne une forme cylindrique au domaine d'étude.

Cette transformation proposée par N.A. Phillips en 1957 [110] est aujourd'hui largement utilisée. Le coût à payer est une formulation plus compliquée des équations dont on donne ci-dessous la nouvelle formulation (voir par exemple G.L. Mellor *et al.* [84]). La transformation appliquée est

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \underset{\sigma}{\longrightarrow} \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = \frac{z+h}{h} \end{cases} \qquad \text{avec } h(x_1, x_2, t) = H(x_1, x_2) + \zeta(x_1, x_2, t)$$

où H est la bathymétrie du domaine. Les équations dans le domaine transformé par σ sont alors les suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B(u,u) + \omega\alpha(u) + \nabla\Big(\frac{Pa}{\rho_o} + g\zeta\Big) = \frac{1}{h^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(\nu\frac{\partial u}{\partial x_3}\Big) - F(b) + \mu D(u) \tag{1.44}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + C(u,b) = \frac{1}{h^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(\nu_b\frac{\partial b}{\partial x_3}\Big) + \mu_b D_b(b) \tag{1.45}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla(h\bar{u}) = 0 \tag{1.46}$$

$$\bar{u} = \int_0^1 u \quad \mathrm{d}x_3 \qquad ; \quad u = \bar{u} + u' \qquad ; \quad v_3 = \int_{x_3}^1 \frac{\nabla(h\ u')}{h}\mathrm{d}\xi \tag{1.47}$$

$$F(b) = -\nabla\Big[h\int_{x_3}^1 b(\xi)\mathrm{d}\xi\Big] + \big[(1-x_3)\nabla H - x_3\nabla\zeta\big]b \tag{1.48}$$

$$B(u,u) = (u\cdot\nabla)u + v_3\frac{\partial u}{\partial x_3} \tag{1.49}$$

$$C(u,b) = u\cdot\nabla b + v_3\frac{\partial b}{\partial x_3} \tag{1.50}$$

D et D_b représentent les opérateurs de diffusion et de dissipation horizontaux pour lesquels on utilise la formulation suivante qui est la plus adaptée à la base utilisée :

$$\Delta u = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u - \mathrm{Rot}\,\mathrm{rot}\,u, \tag{1.51}$$

et on inroduit les notations suivantes :

$$\sigma_g = \frac{1-x_3}{H}\nabla h - \frac{x_3}{H}\nabla\zeta \tag{1.52}$$

$$\sigma_r = \frac{1-x_3}{H}\mathrm{Rot}\, h - \frac{x_3}{H}\mathrm{Rot}\,\zeta \tag{1.53}$$

L'opérateur de diffusion devient alors :

$$D_b(b) = \nabla\left(\nabla b + \sigma_g\frac{\partial b}{\partial x_3}\right) + \sigma_g\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\nabla b + \sigma_g\frac{\partial b}{\partial x_3}\right), \tag{1.54}$$

et celui de dissipation :

$$\begin{aligned} D(u) = \nabla\left(\nabla\cdot u + \sigma_g\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) + \sigma_g\cdot\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\nabla\cdot u + \sigma_g\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) \\ - \mathrm{Rot}\left(\mathrm{rot}\, u - \sigma_r\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) - \sigma_r\cdot\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mathrm{rot}\, u - \sigma_r\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}\right). \end{aligned} \tag{1.55}$$

En posant :

$$\tilde{\alpha}_b = \alpha_b\sqrt{(\nabla\zeta)^2+1}, \tag{1.56}$$

$$\tilde{C}_d = C_d\sqrt{(\nabla H)^2+1} \tag{1.57}$$

$$\tilde{C}_0 = C_0\sqrt{(\nabla\zeta)^2+1}; \tag{1.58}$$

les conditions aux limites deviennent :

- Sur les frontières latérales :

$$\left(\mathrm{rot}\, u - \sigma_r\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) = \phi, \tag{1.59}$$

$$u\cdot n_h = 0, \tag{1.60}$$

$$\left(\nabla b + \sigma_g\frac{\partial b}{\partial x_3}\right)\cdot n_h = \phi_b. \tag{1.61}$$

  avec ϕ et ϕ_b nuls dans le cas de frontières naturelles.

- En surface :

$$\frac{\nu}{h}\frac{\partial u}{\partial x_3} - \mu\left(\nabla\cdot u + \sigma_g\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\nabla\zeta + \mu\left(\mathrm{rot}\, u - \sigma_r\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\mathrm{Rot}\,\zeta = C_0 u, \tag{1.62}$$

$$v_3 = 0, \tag{1.63}$$

$$\frac{\lambda}{h}\frac{\partial b}{\partial x_3} - \kappa\left(\nabla b + \sigma_g\frac{\partial b}{\partial x_3}\right)\cdot\nabla\zeta = \tilde{\alpha}(B_s - b). \tag{1.64}$$

– Au fond

$$\frac{\nu}{h}\frac{\partial u}{\partial x_3} - \mu\left(\nabla\cdot u + \sigma_g\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\nabla h + \mu\left(\operatorname{rot} u - \sigma_r\cdot\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\operatorname{Rot} H = C_d u, \tag{1.65}$$

$$v_3 = 0, \tag{1.66}$$

$$\frac{\lambda}{h}\frac{\partial b}{\partial x_3} - \kappa\left(\nabla b + \sigma_g\frac{\partial b}{\partial x_3}\right)\cdot\nabla H = 0. \tag{1.67}$$

Remarque 1.4. L'application de la transformation sigma sur le terme de gradient de pression est toujours délicate car elle fait apparaître deux termes très grands de signes opposés. L'erreur d'évaluation numérique de ces termes peut être supérieure à leur différence. Ce problème a été largement traité dans la littérature [85, 113, 114] et la méthode de Galerkin en permet un traitement efficace.

Le domaine de résolution est maintenant un cylindre de hauteur un ($\Omega = \Omega_x\times]0,1[$). Les différentes bases permettant l'application de la méthode de Galerkin peuvent alors être aisément obtenues par extension des résultats issus de problèmes bidimensionnels.

On associe à la vitesse du fluide l'espace fonctionnel suivant :

$$\mathcal{V}_3 = \left\{\varphi\in L^2(\Omega)^2/\operatorname{div}\varphi\in L^2(\Omega), \operatorname{rot}\varphi\in L^2(\Omega), \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\in L^2(\Omega)^2; \varphi\cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma\right\}.$$

$\mathcal{V}_3$ est muni du produit scalaire et de la norme :

$$\big((u,\varphi)\big) = \int_\Omega u\varphi + \int_\Omega \operatorname{div} u\operatorname{div}\varphi + \int_\Omega \operatorname{rot} u\operatorname{rot}\varphi + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \qquad \forall (u,\varphi)\in\mathcal{V}_3\times\mathcal{V}_3 \tag{1.68}$$

$$\|u\|_{\mathcal{V}_3} = \big((u,u)\big)^{1/2} \qquad \forall u\in\mathcal{V}_3 \tag{1.69}$$

$\mathcal{V}_3$, muni de cette norme est algébriquement et topologiquement inclus dans $H^1(\Omega)^2$ si le domaine est suffisamment régulier.

On peut obtenir une base de cet espace fonctionnel en étendant les résultats provenant de l'étude des équations de shallow water. En effet, si $\{p_i\}$ et $\{q_i\}$ sont les solutions des problèmes aux valeurs propres du problème $(P2)$ et $(P3)$ et si le domaine Ω_x est simplement connexe, alors une base de $\mathcal{V}_3$ est donnée par :

$$\left\{\operatorname{grad} p_i\cos(j\pi x_3); i\in\mathbb{N}^*, j\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{\operatorname{Rot} q_i\cos(j\pi x_3); i\in\mathbb{N}^*, j\in\mathbb{N}\right\} \tag{1.70}$$

Notons que dans le cas où le domaine Ω_x n'est pas simplement connexe, l'ensemble des fonctions à divergence et à rotationnel nul n'est pas réduit à zéro. Il faut

alors ajouter à l'ensemble ci-dessus une base orthogonale de l'espace propre associé à la valeur propre zéro [99].

De même, si $\{p_i\}$ sont les solutions des problèmes aux valeurs propres du problème $(P2)$, alors

$$\left\{ p_i \cos(j\pi x_3); i \in \mathbb{N}^*, j \in \mathbb{N} \right\} \tag{1.71}$$

forme une base orthogonale de $H^1(\Omega)$. Cette base est utilisée pour la projection des grandeurs scalaires (température et salinité).

1.3.2 Formulations variationnelles

Dans le cas général de la transformation sigma, on ne sait pas démontrer l'existence de solution du problème étudié. On va néanmoins chercher une approximation de la solution de celui-ci (en supposant qu'elle existe !).

Soit (u_0, b_0, h_0) donné, on cherche (u, b, h) solution de :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi_k\right) - \frac{1}{2}\left(u^2, \operatorname{div}\varphi_k\right) + \left(\operatorname{rot} u\alpha(u), \varphi_k\right) + \left(v_3\frac{\partial u}{\partial x_3}, \varphi_k\right) + \left(\omega\alpha(u), \varphi_k\right) \\ = -\left(F(b), \varphi_k\right) + \int_{\Omega_x}\left[\frac{\tau^s}{h}\varphi_k(x,y,1) - \frac{\tau^b}{h}\varphi_k(x,y,0)\right]\mathrm{d}\Omega_x \\ - \left(\frac{\tilde{\nu}}{h^2}\frac{\partial u}{\partial x_3}, \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_3}\right) + \left(\mu D(u), \varphi_k\right) \qquad \forall \varphi_k \in \mathcal{V}_3\end{aligned} \tag{1.72}$$

où φ_k sont les éléments de la base 1.70.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial b}{\partial t}, \phi_k\right) + \left(u\nabla b, \phi_k\right) + \left(v_3\frac{\partial b}{\partial x_3}, \phi_k\right) = \\ \int_{\Omega_x}\frac{F^b}{h}\phi_k(x,y,0)\mathrm{d}\Omega_x - \left(\frac{\tilde{\nu}_b}{h^2}\frac{\partial b}{\partial x_3}, \frac{\partial \phi_k}{\partial x_3}\right) + \left(\mu_b D_b(b), \phi_k\right) \quad \forall \phi_k \in H^1(\Omega)\end{aligned} \tag{1.73}$$

où les ϕ_k sont les fonctions définies 1.71.

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}, \psi_k\right) - \left(\bar{u}h, \nabla\psi_k\right) = 0 \qquad \forall \psi_k \in H^1(\Omega_x) \tag{1.74}$$

où ψ_k sont les fonctions solution du problème $(P2)$, avec

$$\begin{aligned}\big(F(b), \varphi\big) = \big(H\int_{x_3}^1 b(\xi)\mathrm{d}\xi, \operatorname{div}\varphi\big) - \big((1-x_3)H\nabla b, \varphi\big) - \\ \big((1-x_3)Hb, \operatorname{div}\varphi\big) + \big(x_3\zeta\nabla b, \varphi\big) + \big(x_3\zeta b, \operatorname{div}\varphi\big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\big(D(u),\varphi\big) &= -\big(\nabla\cdot u,\nabla\cdot\varphi\big) - \big(\operatorname{rot} u,\operatorname{rot}\varphi\big) - \left((\frac{1-x_3}{h}\nabla h)\frac{\partial u}{\partial x_3},\nabla\cdot\varphi\right)\\
&+\left(\left[\nabla\cdot u+(\frac{1-x_3}{h}\nabla h)\frac{\partial u}{\partial x_3}\right]\frac{\nabla h}{h},\varphi\right)-\left(\left[\nabla\cdot u+(\frac{1-x_3}{h}\nabla h)\frac{\partial u}{\partial x_3}\right]\left(\frac{1-x_3}{h}\nabla h\right),\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\\
&+\left((\frac{1-x_3}{h}\operatorname{Rot} h)\frac{\partial u}{\partial x_3},\operatorname{rot}\varphi\right)-\left(\left[\operatorname{rot} u-(\frac{1-x_3}{h}\operatorname{Rot} h)\frac{\partial u}{\partial x_3}\right]\frac{\operatorname{Rot} h}{h},\varphi\right)\\
&+\left(\left[\operatorname{rot} u-(\frac{1-x_3}{h}\operatorname{Rot} h)\frac{\partial u}{\partial x_3}\right]\left(\frac{1-x_3}{h}\operatorname{Rot} h\right),\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\\
&+\int_{\Omega_x}\left[\frac{1-x_3}{h}\nabla h\left(\nabla\cdot u+\left(\frac{1-x_3}{h}\nabla h\right)\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\varphi\right]_0^1\mathrm{d}\Omega_x\\
&+\int_{\Omega_x}\left[\frac{1-x_3}{h}\operatorname{Rot} h\left(\operatorname{rot} u-\left(\frac{1-x_3}{h}\operatorname{Rot} h\right)\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\varphi\right]_0^1\mathrm{d}\Omega_x
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\big(D_b(b),\phi\big) &= -\big(\nabla b,\nabla\phi\big) - \left((\frac{1-x_3}{h}\nabla h)\frac{\partial b}{\partial x_3},\nabla\phi\right)\\
&+\left(\left[\nabla b+(\frac{1-x_3}{h}\nabla h)\frac{\partial b}{\partial x_3}\right]\frac{\nabla h}{h},\phi\right)-(\frac{1-x_3}{h}\nabla h\left[\nabla b+\left(\frac{1-x_3}{h}\nabla h\right)\frac{\partial b}{\partial x_3}\right],\frac{\partial\phi}{\partial x_3})\\
&+\int_{\Omega_x}\left[\frac{1-x_3}{h}\nabla h\left(\nabla b+\left(\frac{1-x_3}{h}\nabla h\right)\frac{\partial b}{\partial x_3}\right)\phi\right]_0^1\mathrm{d}\Omega_x
\end{aligned}
$$

La méthode de Galerkin consiste à rechercher $(u_n(x,t),b_m(x,t)h_r(x,t))$ solution approchée du système d'équations précédent à partir des décompositions suivantes :

$$u_n(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{X}_i(t)\varphi_i(x) \tag{1.75}$$

$$b_m(x,t)=\sum_{i=1}^{m}\mathcal{Y}_i(t)\phi_i(x) \tag{1.76}$$

$$h_r(x_1,x_2,t)=\sum_{i=1}^{r}\mathcal{Z}_i(t)\psi_i(x_1,x_2) \tag{1.77}$$

La solution du système d'équation peut être approchée par la résolution du système

d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants suivant :

$$\dot{\bar{\mathcal{X}}}_i = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{X}_j XX(i,j) + \sum_{j=1}^{m} \mathcal{Y}_j XY(i,j) + \sum_{j=1}^{r} \mathcal{Z}_j XZ(i,j) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathcal{X}_j \mathcal{X}_k XXX(i,j,k) \tag{1.78}$$

$$\dot{\mathcal{X}}'_i = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{X}_j XX(i,j) + \sum_{j=1}^{m} \mathcal{Y}_j XY(i,j) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} \mathcal{Y}_j \mathcal{Z}_k XYZ(i,j,k) \tag{1.79}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathcal{X}_j \mathcal{X}_k XXX(i,j,k) \tag{1.80}$$

$$\dot{\mathcal{Y}}_i = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{Y}_j YY(i,j) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \mathcal{X}_j \mathcal{Y}_k YXY(i,j,k) \tag{1.81}$$

$$\dot{\mathcal{Z}}_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \bar{\mathcal{X}}_j \mathcal{Z}_k ZXZ(i,j,k) \tag{1.82}$$

$$\tag{1.83}$$

Les termes $XX, XY, XZ, XXX, YY, YXY, XYZ$ et ZXZ sont constants et représentent des intégrales de combinaisons de fonctions de base.

La résolution numérique de ce système est réalisée en utilisant un schéma numérique basé sur les méthodes multi-pas d'Adams-Moulton et Adams-Bashforth. Les propriétés de la base permettent de traiter facilement le découplage barotrope-barocline et d'utiliser efficacement une méthode de type time splitting.

On a ensuite adapté la méthode de Galerkin non linéaire à ce problème en s'inspirant des résultats obtenus sur le problème de shallow water. Bien que ne pouvant donner de justification sur la convergence de cette méthode, elle se montre très efficace dans la diminution des coûts de calcul.

Une des particularités de ces écoulements réside dans les flux extérieurs d'énergie qui se traduisent essentiellement au niveau des conditions aux limites, par l'intermédiaire du vent par exemple. Ces flux énergétiques excitent directement une large gamme de tourbillons même très éloignés dans le spectre. Cette énergie fournie aux hautes fréquences est presque instantanément dissipée à ces fréquences.

Dans la suite de ce document, on représente les petites composantes en les surmontant du symbole $\frown$.

Pour n et n_1 (resp. m et m_1) appartenant à $\mathbb{N}$, $n_1 < n$ (resp. $m_1 < m$), on définit les opérateurs projections suivants :

– P_{n_1} la projection $L^2(\Omega)^2$ sur l'espace engendré par les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_1}$.

– Q_{n_1} la projection $L^2(\Omega)^2$ sur l'espace engendré par les fonctions $\varphi_{n_1+1}, \ldots, \varphi_n$.

– P_{bm_1} la projection $L^2(\Omega)$ sur l'espace engendré par les fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_{m_1}$.

– Q_{bm_1} la projection $L^2(\Omega)$ sur l'espace engendré par les fonctions $\phi_{m_1+1}, \ldots, \phi_m$.

On note $u_{n_1} = P_{n_1}(u)$, $\widehat{u}_{n_1} = Q_{n_1}(u)$, $b_{m_1} = P_{bm_1}(b)$, $\widehat{b}_{m_1} = Q_{bm_1}(b)$ ainsi que $V_{n_1} = u_{n_1} + v_{3_{n1}}$ et $\widehat{V}_{n_1} = \widehat{u}_{n_1} + \widehat{v}_{3_{n1}}$ où $\widehat{v}_{3_{n1}} = v_{3_n} - v_{3_{n1}}$.

Les fréquences de coupure sont alors obtenues en prenant les plus petites valeurs de n_1 et m_1 vérifiant les relations suivantes :

$$\frac{Ec(\widehat{V}_{n_1})}{Ec(V_{n_1})} < \varepsilon_u \qquad\qquad \frac{Eb(\widehat{b}_{m_1})}{Eb(b_{m_1})} < \varepsilon_b \tag{1.84}$$

où ε_u et ε_b sont des valeurs représentant la précision des schémas d'intégration numérique associés à u et b. Ec représente l'énergie cinétique associée à l'écoulement et Eb est une expression équivalente pour les termes scalaires.

En utilisant les propriétés d'orthonormalité des bases décrites et la décomposition orthogonale de la vitesse verticale, on obtient :

$$Ec(V_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{L2} + \frac{1}{2}\|v_{3_n}\|^2_{L2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \text{ baroclines}<n} \mathcal{X}_i^2 \left| \int_z^1 \operatorname{div}\left(\varphi_i(x,y,s)\right) \mathrm{d}s \right|^2 \tag{1.85}$$

$$Eb(b_m) = \frac{1}{2}\|b_m\|^2_{L2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \mathcal{Y}_i^2 \tag{1.86}$$

On a retenu ici encore une grande partie des approches numériques proposées par F. Jauberteau [66]. La formule de quadrature s'applique également aux termes scalaires. De même, la méthode V-cycle doit être dédoublée pour traiter les termes scalaires. Enfin, une évaluation dynamique des fréquences de coupure associé à chaque variable est prise en compte.

1.3.3 Exemple de simulation

Dans un soucis de montrer la faisabilité d'un code opérationnel basé sur la méthode de Galerkin, on a effectué des simulations sur le domaine de la baie de Calvi (Haute Corse). On dispose d'une base de comparaison avec un modèle de type différences finies développé par A. Norro [97]. Le modèle est calibré et tourne avec des données typiques de la climatologie estivale. Les dimensions de la baie sont relativement petites, d'environ quatre kilomètres sur deux kilomètres et demi, et une limite arbitraire en mer ouverte est fixée pour clore notre domaine.

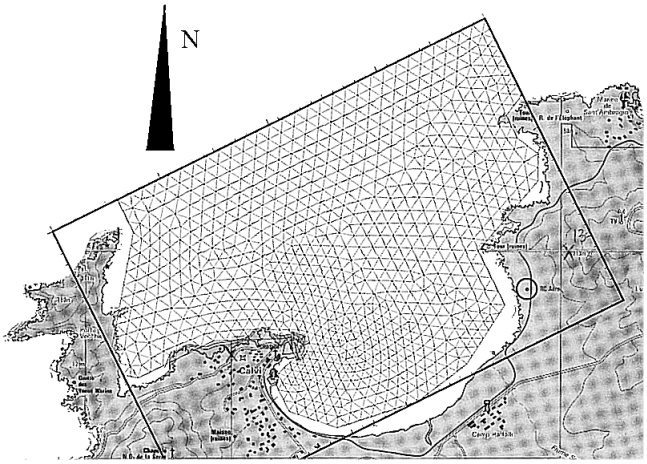


FIG. 1.5 – Maillage de la Baie de Calvi

L'utilisation d'une frontière en mer ouverte nécessite l'utilisation d'un relèvement pour pouvoir utiliser la méthode de Galerkin. On ne détaille pas ici la prise en compte de ce relèvement qui est assez lourde et classique [12].

Les figures suivantes illustrent quelques résultats de simulation qui sont semblables avec ceux obtenus par A. Norro.

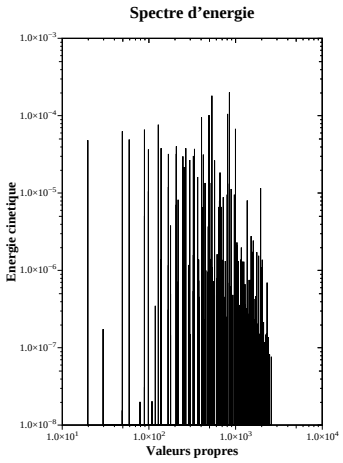


FIG. 1.6 – Spectre de **u**.

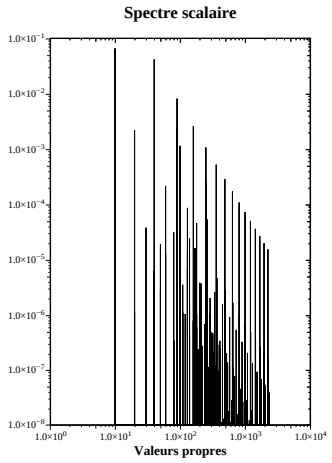


FIG. 1.7 – Spectre scalaire.

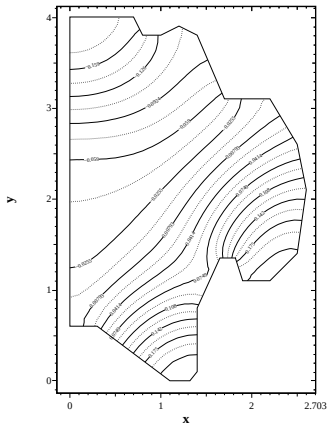


FIG. 1.8 – Champs de l'élévation avec c.l. nulle en entrée

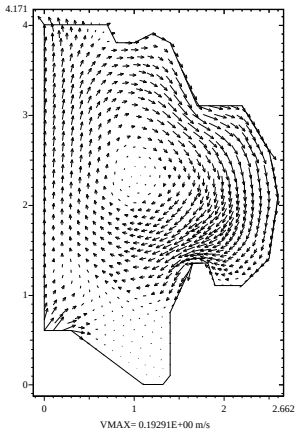


FIG. 1.9 – Champ de vitesse moyenne correspondant.

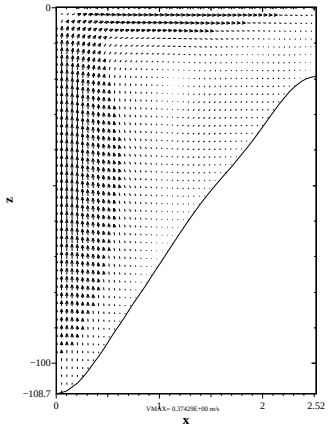


FIG. 1.10 – Coupe du champ de vitesse selon l'axe N-O – S-E au milieu de la baie

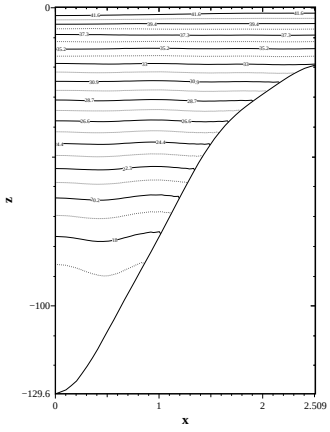


FIG. 1.11 – Coupe au même endroit pour la température.

On pourra trouver une comparaison entre le champ de vitesse moyenne dans le cas non stratifié et le champ de vitesse d'un modèle de shallow water dans [12]. La différence entre ces champs provient de la modélisation par un terme de Fick des termes non linéaires baroclines non explicitement résolus dans le modèle de shallow water.

Chapitre 2
Les modèles à *toit rigide*

2.1 Introduction

La première partie de ce document concernait les modèles d'écoulement à surface libre dans lesquels les variations de la hauteur du domaine étaient résolues explicitement par une équation aux dérivées partielles. On va maintenant regarder une autre classe de modèles dits à *toit rigide* (ou *surface rigide* ou encore *rigid lid*). Il s'agir en fait de modèles dans lesquels on ne prend pas en compte les variations de la hauteur d'eau. Cette hypothèse est réalisée à l'heure actuelle dans la plupart des modèles océanographiques (on peut par exemple citer le code OPA utilisé dans le projet Mercator [1]). Ils présentent l'énorme avantage de filtrer les ondes de surface, ondes très rapides puisque leur vitesse est de l'ordre de $\sqrt{gH}$ et peut atteindre plusieurs centaines de mètres à la seconde. La résolution explicite de ces ondes dans un code de simulation nécessite donc l'utilisation de pas de temps de discrétisation très petits (de l'ordre de la minute) alors que la stabilisation d'un océan nécessite de le simuler sur plusieurs siècles. Cependant, une partie de la physique de l'océan ne peut être représentée par de tels modèles. Par exemple, un océan ne peut être forcé par des variations de pression (alors que ces variations peuvent représenter des pressions jusqu'à un mètre de colonne d'eau lors de la succession de dépression et d'anticyclone). Au niveau numérique, il est nécessaire dans ces modèles d'imposer une condition de non divergence de la composante barotrope de l'écoulement qui peut être délicate à mettre en œuvre. L'astuce réside généralement à rechercher une fonction de courant barotrope bien appropriée.

Un avantage essentiel de l'hypothèse du *rigid-lid* dans nos travaux est que les équations s'apparentent à un système de type Navier Stokes incompressibles en dimension trois. Des résultats formels ont alors été obtenus par J.L. Lions, R. Temam et S. Wang [73]. Ces résultats sont moins forts que ceux relatifs aux équations de Navier Stokes incompressibles, principalement à cause de l'hypothèse hydrostatique.

D'autres travaux plus récents dus à Bresch, Masmoudi et Ziane ont permis d'obtenir des résultats d'existence, d'unicité et de régularité des solutions identiques à ceux du problème de Navier-Stokes.

Si le choix entre le développement d'un modèle à surface libre ou d'un modèle à *toit rigide* est primordiale dans le développement d'un nouveau code, il n'y a à notre connaissance que très peu de travaux proposant une comparaison entre les deux modèles. De plus, puisque l'implémentation numérique de nos codes est en générale calquée sur la démarche suivie pour la démonstration de l'existence, il nous semblait nécessaire de rechercher les possibilités numériques de traitement de ces modèles à *toit rigide*.

Ces travaux ont fait l'objet de la thèse de C. Giacomoni. On a dans un premier temps développé notre étude sur un modèle de type shallow water à surface rigide pour lequel on a pu établir des résultats d'existence et d'unicité. Ensuite, on a étendu les méthodes numériques au traitement des équations tridimensionnelles pour lesquelles les résultats d'existences ont été montrés dans la thèse de C. Fluixa [52] (il s'agit d'une variante des résultats présentés dans [73] avec des conditions aux limites d'imperméabilité à la place de celle de Dirichlet). Enfin, plus récemment, dans le cadre de la thèse de M. Peybernes, nous avons établi des résultats d'existence et de régularité dans le cas d'un modèle bi-couche dans lequel seule la surface supérieure est supposée fixe.

2.2 Le modèle de shallow water à surface rigide

Lorsque l'on effectue le découplage barotrope-barocline dans le modèle en dimension trois, on peut constater que les ondes de surface n'interagissent directement qu'avec la composante barotrope de la vitesse. C'est donc sur cette vitesse moyenne qu'il est intéressant d'étudier dans un premier temps l'influence de l'hypothèse du toit rigide. Un premier modèle a été développé par D. Levermore et E. Titi [16] dans lequel la vitesse horizontale est considérée comme invariante selon la verticale. Ils obtiennent ainsi un champs de vitesse en dimension trois associé à un multiplicateur de lagrange sous la forme d'un gradient de pression

L'idée que l'on a développée est un peu différente. On ne suppose pas le champ de vitesse invariant selon la verticale, mais on considère plutôt la moyenne selon la verticale de la vitesse (démarche usuelle dans le modèle de shallow water). Le multiplicateur de Lagrange est alors de la forme $H\nabla p$.

Pour obtenir ce résultat, on part des équations de shallow water déjà présentées

dans le premier chapitre (1.1 et 1.2), mais dans lesquelles on prend en compte les variations de la bathymétrie.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(u^2) + \operatorname{rot} u\alpha(u) + \omega_c\alpha(u) - A\Delta u + g\nabla\zeta = f \text{ in } Q, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(uh) = 0 \text{ in } Q, \tag{2.2}$$

$$u \cdot n = 0 \text{ on } \Sigma, \ \operatorname{rot} u = 0 \text{ on } \Sigma, \tag{2.3}$$

$$u(t=0) = u_0(x) \text{ in } \Omega, \tag{2.4}$$

$$h(t=0) = h_0(x) \text{ in } \Omega, \ h_0 \geq 0. \tag{2.5}$$

où H représente la bathymétrie, ζ les variations de la surface du fluide et $h = H + \zeta$. On suppose dans la suite que H et $\frac{1}{H}$ sont dans $W^{1,\infty}$. On obtient alors la formulation faible suivante :
Trouver $u \in L^2(0,T;\mathcal{V}) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)$ *et* $h \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$, $h \geq 0$ *tels que*

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi\Big) - \frac{1}{2}\Big(u^2, \operatorname{div}\varphi\Big) + \Big(\operatorname{rot} u\alpha(u), \varphi\Big) + \omega_c\Big(\alpha(u), \varphi\Big)\\ &+Aa(u,\varphi) - g\Big(\zeta, \operatorname{div}\varphi\Big) = \Big(f, \varphi\Big), \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{V} \cap H^4(\Omega)^2,\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \operatorname{div}(u(H+\zeta)) = 0 \text{ dans } L^1(0,T;W^{-1,1}(\Omega)),\\ &u(t=0) = u_0(x) \in \mathcal{V}, \ h(t=0) = h_0(x) \in L^1(\Omega),\\ &h_0(x)\log h_0(x) \in L^1(\Omega), \ h_0(x) \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega\end{aligned} \tag{2.7}$$

dans laquelle $\mathcal{V}$ est l'espace fonctionnel défini dans le premier chapitre.

L'approche consiste à supposer que les variations de la surface ζ ainsi que les dérivées de ces variations sont négligeables. Ainsi, l'équation de masse $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \operatorname{div}(u(H+\zeta)) = 0$ (équation pronostique) devient $\operatorname{div}(uH) = 0$ (équation diagnostique). Cette dernière équation est considérée comme une contrainte que l'on introduit dans l'espace fonctionnel. Elle joue un rôle similaire à la contrainte $\operatorname{div} u = 0$ dans les équations de Navier Stokes incompressibles.

On obtient la formulation faible suivante :
trouver $u \in L^2(0,T;\mathcal{V}_{rl}) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)$ *tels que*

$$\begin{aligned}(V) \quad &\Big(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi\Big) - \frac{1}{2}\Big(u^2, \operatorname{div}\varphi\Big) + \Big(\operatorname{rot} u\alpha(u), \varphi\Big) + \omega_c\Big(\alpha(u), \varphi\Big)\\ &+Aa(u,\varphi) = \Big(f, \varphi\Big), \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{V}_{rl}\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$u(t=0) = u_0(x) \in L^2(\Omega)^2. \tag{2.9}$$

où

$$\mathcal{V}_{rl} = \left\{\varphi \in L^2(\Omega)^2 / \operatorname{div}\varphi \in L^2(\Omega), \operatorname{rot}\varphi \in L^2(\Omega), \operatorname{div}(\varphi H) = 0, \varphi \cdot n = 0 \text{ on } \gamma\right\}.$$

Il est aisé de vérifier que le complémentaire orthogonal de $\overline{\mathcal{V}}_{rl}^{L^2}$ dans L^2 est l'espace $\mathcal{H}_{rl}^{\perp}$ définit par

$$\mathcal{H}_{rl}^{\perp} = \left\{\phi \in L^2(\Omega)^2 / \phi = H\nabla p,\ p \in H^1(\Omega)\right\}$$

Les solutions fortes associées à ce problème vérifient alors le problème suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(u^2) + \operatorname{rot} u\alpha(u) + \omega_c\alpha(u) - A\Delta u = f - H\nabla p_s \text{ dans } Q, \tag{2.10}$$

$$\operatorname{div}(uH) = 0 \text{ dans } Q, \tag{2.11}$$

$$u \cdot n = 0 \text{ sur } \Sigma,\ \operatorname{rot} u = 0 \text{ sur } \Sigma, \tag{2.12}$$

$$u(t=0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega. \tag{2.13}$$

2.3 Résultats d'existence et de régularité

Dans [4], on a établi le théorème d'existence suivant :

Théorème 2.1. *Si les données sont choisies suffisamment petites et régulières, alors le problème faible précédent admet une solution unique* $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2) \cap L^2(0,T;\mathcal{V}_{rl})$.

La démonstration de ce type de résultats est maintenant classique. La condition de données petites est nécessaire pour construire un espace de stabilité lors de l'estimation des termes non linéaires. Le passage à la limite dans les termes non linéaires est réalisée à l'aide du théorème d'Aubin et la preuve d'unicité est usuelle.

La régularité des solutions est obtenue à partir des trois lemmes suivants [4] :

Lemme 2.2. *Soit* $\{q_i\}$ *une base de* $H_0^1(\Omega)$ *(par exemple,* q_i *du problème* $(P3)$ *chapitre 1), alors* $\left\{\frac{\operatorname{Rot} q_i}{H}\right\}$ *est une base de* $\mathcal{V}_{rl}$ *et* $\mathcal{H}_{rl} = \{\varphi \in L^2(\Omega)^2, \operatorname{div}(\varphi H) = 0\}$.

Lemme 2.3. *Régularité en temps*

Soit u *une solution de* (V) *dans* $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2) \cap L^2(0,T;\mathcal{V}_{rl})$.

1. *Si* $u_0 \in H^2(\Omega)^2$ *et* $f \in H^1(0,T;L^2(\Omega)^2)$ *alors* $u \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)^2) \cap H^1(0,T;\mathcal{V}_{rl})$.

2. *Si* $u_0 \in H^{2n}(\Omega)^2$ *et* $f \in H^n(0,T;L^2(\Omega)^2)$ *alors* $u \in W^{n,\infty}(0,T;L^2(\Omega)^2) \cap H^n(0,T;\mathcal{V}_{rl})$.

Lemme 2.4. *Régularité en espace*

1. *Si* $u_0 \in H^4(\Omega)^2$ *et* $f \in L^\infty(0,T;L^r(\Omega)^2)$ *avec* $r < \infty$ *alors* $u \in L^\infty(0,T;W^{2,r}(\Omega)^2)$.
2. *Si* $u_0 \in H^{2(n+2)}(\Omega)^2$, $0 \leq n \leq \infty$ *et* $f \in W^{p,\infty}(0,T;W^{2(n-p),r}(\Omega)^2)$ *avec* $0 \leq p \leq n$ *et* $r < \infty$ *alors*

$$u \in W^{p,\infty}(0,T;W^{2(n-p+1),r}(\Omega)^2). \tag{2.14}$$

2.3.1 Méthode numérique de résolution

La méthode de résolution proposée s'est inspirée de la méthode de Galerkin. A partir du lemme 2.2 Cette base n'étant pas orthonormée (sauf dans le cas où H est une constante), on utilise la procédure d'orthogonalisation de Schmidt avec la formule

$$\operatorname{Rot}\tilde{q}_k = \operatorname{Rot} q_k - \sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\operatorname{Rot} q_k}{H}, \frac{\operatorname{Rot}\tilde{q}_i}{H}\right)\frac{\operatorname{Rot}\tilde{q}_i}{\|\frac{\operatorname{Rot}\tilde{q}_i}{H}\|^2},\ k = 2,\ldots,m. \tag{2.15}$$

On obtient alors les vecteurs orthonormés $\left\{\frac{\operatorname{Rot}\tilde{q}_k}{H}\right\}.\frac{1}{\|\frac{\operatorname{Rot}\tilde{q}_k}{H}\|}$ de $\mathcal{V}_{rl}$. On note $\varphi_k = \dfrac{\operatorname{Rot}\tilde{q}_k}{H}$ le problème approché (V_m) suivant

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial u_m}{\partial t},\varphi_i\Big) - \frac{1}{2}\Big(u_m^2, \operatorname{div}\varphi_i\Big) + \Big(\operatorname{rot} u_m \alpha(u_m),\varphi_i\Big) + \omega\Big(\alpha(u_m),\varphi_i\Big)\\ + A\,a\Big(u_m,\varphi_i\Big) = \Big(f,\varphi_i\Big) \quad \forall\varphi_i \in \mathcal{V}_{(rl)m}, i = 1,\ldots,m,\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$u_m(t=0) = u_{0m} \in L^2(\Omega)^2 \tag{2.17}$$

où u_m est cherché sous la forme

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(t)\varphi_k(x).$$

Il reste donc a résoudre un système différentiel non linéaire d'ordre un à coefficients constants :

$$\frac{da_i}{dt} = (f,\varphi_i) + \sum_{k=1}^{m} a_k(t)XX(i,k) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} a_k(t)a_l(t)XXX(i,k,l), \quad i = 1\ldots,m,$$

où les coefficients constants $XX(i,k)$ et $XXX(i,k,l)$ correspondent respectivement aux projections de termes linéaires et non linéaires sur la base de $\mathcal{V}_{rl}$.

La dernière difficulté lors de l'utilisation de cette base est qu'elle ne vérifie pas la condition aux limites $\mathrm{rot}\, u = 0$ dans le cas général. Une astuce pour contourner cette difficulté consiste à projeter le champ de bathymétrie sur une vase de $H^1(\Omega)$ vérifiant $\nabla\phi \cdot n = 0$. Ceci a de plus le mérite de lisser la bathymétrie et de supprimer ainsi les défauts éventuels de celle-ci d'échelle inférieure à l'échelle de résolution.

2.3.2 Comparaison avec un modèle de lacs

On compare les résultats numériques par rapport aux solutions du modèle de shallow water à surface libre, puis à celle du modèle des lacs proposé par Levermore et al.[16]. En formulation en vorticité de ce modèle s'écrit :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\omega u) - A\Delta\omega + \omega_c \mathrm{div}\, u = \mathrm{rot}\, f \text{ dans } Q, \tag{2.18}$$

$$\omega = \mathrm{rot}\, u = \mathrm{rot}\left(\frac{1}{H}\mathrm{Rot}\,\psi\right) \text{ dans } Q, \tag{2.19}$$

$$\omega = 0 \text{ on } \Sigma,\ \psi = 0 \text{ sur } \Sigma, \tag{2.20}$$

$$\omega(t=0) = \omega_0(x) \text{ dans } \Omega. \tag{2.21}$$

En l'absence de résultats numériques sur ce modèle dans la littérature, on a choisi développer un code de type éléments finis en utilisant une formulation de type *Lagrangian up-winding* [106, 112]. On utilise pour cela l'approximation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla\omega \simeq \frac{\omega^{n+1}(x) - \omega^n(\chi(x,n))}{\delta t} \tag{2.22}$$

où $\chi(x,n)$ représente la position de la particule à l'instant n qui se trouve en x à l'instant $n+1$.

On a donc a résoudre d'une part

$$(1)\begin{cases} \mathrm{rot}\left(\frac{1}{H}\mathrm{Rot}\,\psi^n(x)\right) = \omega^n(x) & \text{dans } Q, \\ \psi = 0 & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

et d'autre part,

$$(2)\begin{cases} \left(\frac{1}{\delta t} + \mathrm{div}\, u^n(x)\right)\omega^{n+1}(x) - A\Delta\omega^{n+1}(x) = \\ \qquad\qquad (\mathrm{rot}\, f)^{n+1}(x) + \dfrac{\omega^n(\chi(x,n))}{\delta t} - \omega_c \mathrm{div}\, u^n(x) & \text{dans } Q, \\ \omega = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \omega(t=0) = \omega_0(x) & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

On a développé un code numérique à partir de la base d'éléments finis Modulef développée par l'Inria. On utilise des éléments de type Hermite avec 3 degrés de liberté par nœuds (2P3D).

L'algorithme de résolution est le suivant

1. On suppose $\omega^{(0)}$ donné et on résout le problème (1), On obtient alors $\psi^{(0)}$ à la première itération et la vitesse est donnée par $u^{(0)} = \dfrac{\mathrm{Rot}\,\psi^{(0)}}{H}$, puis $\mathrm{div}\,u^{(0)} = \mathrm{Rot}\,\psi^{(0)} \cdot \nabla\Big(\dfrac{1}{H}\Big)$.
2. On résout ensuite (2) avec $u^{(0)}$ et $\mathrm{div}\,u^{(0)}$, d'où on obtient $\omega^{(1)}$. On répète ensuite le méthode au pas suivant.

Il est aisé de montrer que ce schéma numérique est convergent.

2.3.3 Quelques résultats numériques

On donne ci-dessous une illustration dans un contexte simplifié (domaine carré de 1000 km de coté et bathymétrie analytique donnée par $H(x, y) = 500 + 10000\, xy(1-x)(1-y)$). Les résultats entre les trois modèles sont assez proches. Les temps de calcul sont beaucoup plus faibles dans le cas du modèle à toit rigide que dans celui a surface libre. On ne peut les comparer aisément avec ceux du modèle des lacs du fait des approches relativement éloignées.

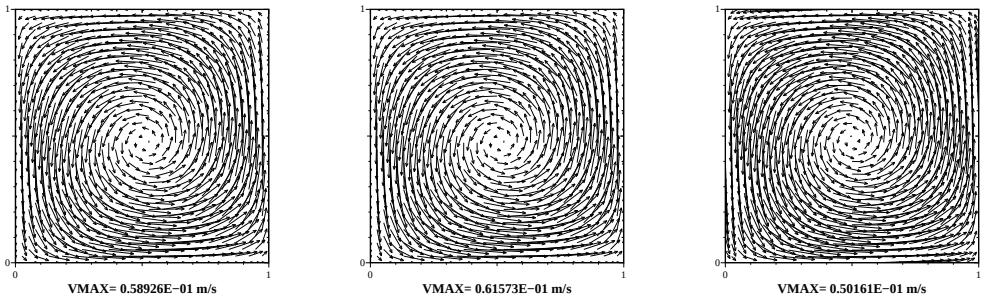


FIG. 2.1 – Comparaison des champs de vitesse entre les modèles à surface libre, rigid lid et du modèle des lacs.

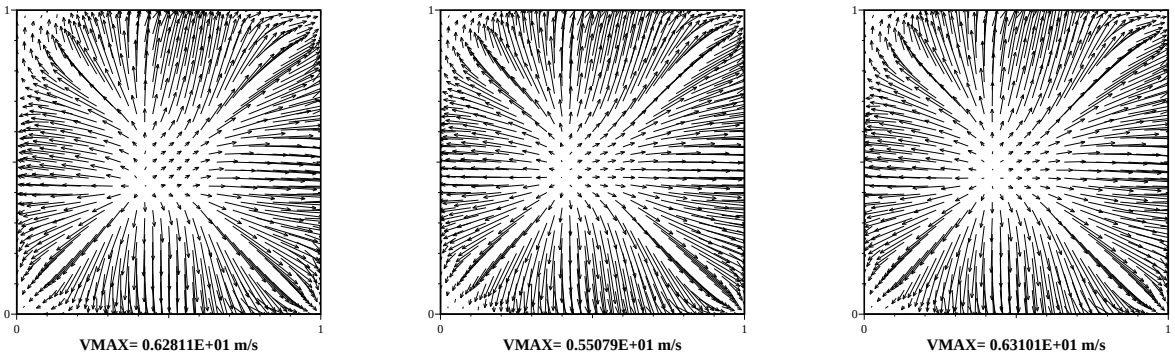


FIG. 2.2 – Comparaison entre les champs $H\nabla p_s$ du modèle de shallow water à toit rigide, du champs ∇p_s du modèle des lacs et du gradient de l'élévation $g\nabla\zeta$ pour le modèle a surface libre .

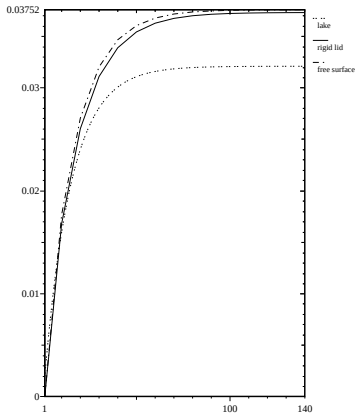


FIG. 2.3 – Comparaison de l'évolution de la norme L^2 de la vitesse pour chacun des trois modèles

2.4 Le modèle aux équations primitives à surface rigide

Les résultats obtenus dans la section précédente nous ont conduit a étendre la méthode dans le cas des équations primitives. Il s'agit de modèles couramment utilisés (OPA [1] par exemple utilise cette contrainte), mais le fait de construire une base fonctionnelle vérifiant la contrainte simplifie grandement la résolution numérique.

2.4.1 Les équations primitives avec hypothèse du rigid lid (PErl)

Ces équations sont obtenues en intégrant les équations (1.32) à (1.35) entre $(x, y, -H)$ et $(x, y, 0)$. En utilisant la formule de Leibniz et les conditions aux limites indiquées, on obtient l'équation diagnostique suivante :

$$\mathrm{div}\left(\int_{-H}^{0} u(t,x,y,z)\mathrm{d}z\right) = 0 \tag{2.23}$$

Après utilisation de la transformation sigma (section 1.3.1), les équations PErl sont les suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B(u,u) + \omega\alpha(u) = \frac{1}{H^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(\nu\frac{\partial u}{\partial x_3}\Big) - F(b) + \mu D(u) \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + C(u,b) = \frac{1}{H^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(\nu_b\frac{\partial b}{\partial x_3}\Big) + \mu_b D_b(b) \tag{2.25}$$

$$\mathrm{div}\,(H\bar{u}) = 0 \tag{2.26}$$

$$\bar{u} = \int_0^1 u \quad \mathrm{d}x_3 \qquad ; \quad u = \bar{u} + u' \qquad ; \quad v_3 = \int_{x_3}^1 \frac{\mathrm{div}\,(Hu')}{H}\mathrm{d}\xi \tag{2.27}$$

$$F(b) = -\nabla\Big[H\int_{x_3}^1 b(\xi)\mathrm{d}\xi\Big] + \big[(1-x_3)\nabla H\big]b + \nabla\Big(\frac{Pa}{\rho_o} + Ps\Big) \tag{2.28}$$

où Ps est un terme de pression à la surface qui jour le rôle de multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte (2.26). Les opérateurs D, D_b, $B(\cdot,\cdot)$, et $C(\cdot,\cdot)$ représentent respectivement les termes de diffusion et ceux d'advection.

En suivant [Lions *et al.* (1992)[73]], on introduit la contrainte $\mathrm{div}\,(H\bar{u}) = 0$ dans l'espace des fonctions admissible de la vitesse. On définit l'espace $\mathcal{V}_{rl}$ par

$$\mathcal{V}_{rl} = \Bigg\{\varphi \in L^2(\Omega)^2, /\mathrm{div}\,\varphi \in L^2(\Omega), \mathrm{rot}\,\varphi \in L^2(\Omega), \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \in L^2(\Omega)^2; \\ \mathrm{div}\left(H\int_0^1 \varphi\ \mathrm{d}x_3\right) = 0; \varphi\cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_l\Bigg\}.$$

Il est possible de calculer la pression en surface en considérant l'espace $\mathcal{H}_{rl}$

$$\mathcal{H}_{rl} = \left\{\varphi \in L^2(\Omega)^2, \mathrm{div}\left(H\int_0^1 \varphi\ \mathrm{d}x_3\right) = 0\right\},$$

et son complémentaire orthogonal dans $L^2(\Omega)^2$

$$\mathcal{H}_{rl}^{\perp} = \left\{\varphi \in L^2(\Omega)^2, \varphi = \mathrm{grad}\,\ell, \ell \in H^1(\Omega_x)\right\}.$$

2.4.2 Formulation variationnelle

Soit $(u_0, b_0) \in L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)$, trouver (u, b) tel que $(u, b) \in L^2(0, T; \mathcal{V}_{rl}) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $\forall T > 0$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi\right)_{L^2} - \frac{1}{2}\left(u^2, \operatorname{div}\varphi\right)_{L^2} + (\operatorname{rot} u\alpha(u), \varphi)_{L^2} + \left(v_3\frac{\partial u}{\partial x_3}, \varphi\right)_{L^2} + (\omega\alpha(u), \varphi)_{L^2} = \\ - \left(\int_{-x_3}^{0} b(\xi)\mathrm{d}\xi, \operatorname{div}\varphi\right)_{L^2} + \int_{\Omega_x}\left[\tau^s\varphi(x, y, 1) - \tau^b\varphi(x, y, 0)\right]\mathrm{d}\Omega_x \\ - \left(\nu\frac{\partial u}{\partial x_3}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)_{L^2} - \mu\big(D1u, D2\varphi\big)_{L^2} \qquad \forall\varphi \in \mathcal{V}_{rl} \cap H^2(\Omega); \quad (2.29)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial b}{\partial t}, \phi\right)_{L^2} + (u\nabla b, \phi)_{L^2} + \left(v_3\frac{\partial b}{\partial x_3}, \phi\right)_{L^2} = \\ &\int_{\Omega_x} F^b\phi(x, y, 0)\mathrm{d}\Omega_x - \left(\nu_b\frac{\partial b}{\partial x_3}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)_{L^2} - \mu_b\left(D1^b(b), D2^b(\phi)_{L^2}\right) \quad \forall\phi \in H^2(\Omega).\end{aligned} \tag{2.30}$$

où $D1, D2, D1^b, D2^b$ représentent les termes de diffusion et de dissipation transformés par sigma. La formulation de ces termes est proche de celle présentée dans le premier chapitre (1.54 et 1.54).

La facilité de séparation entre modes barotropes et modes baroclines permet d'utiliser la base de la section 2.2 uniquement sur la partie barotrope.

2.4.3 Exemple de simulation

On utilise une nouvelle fois les caractéristiques de la baie de Calvi pour tester nos outils de simulation (cf. section (1.3.3). La comparaison est effectuée par rapport au modèle à surface libre.

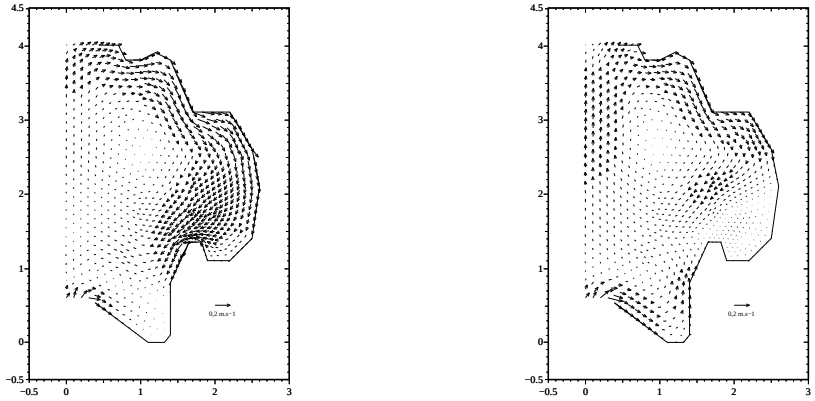


FIG. 2.4 – Champs de vitesse moyenne pour les modèles à surface libre et à toit rigide.

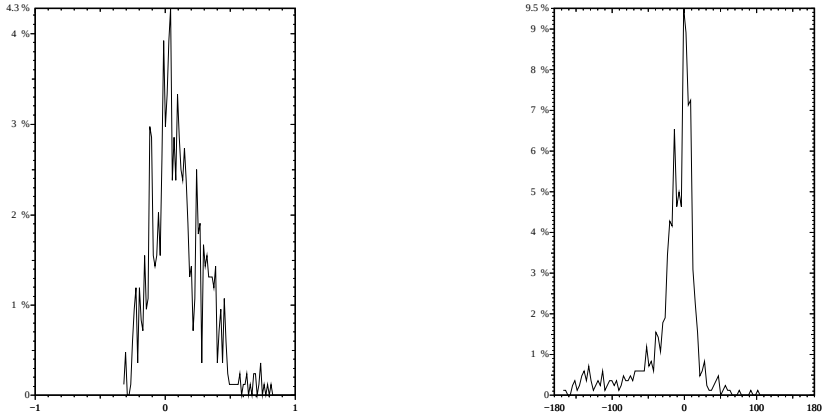


FIG. 2.5 – Comparaison des normes des vitesses moyennes et de leurs directions entre les modèles à surface libre et à toit rigide sur chaque noeuds du maillage.

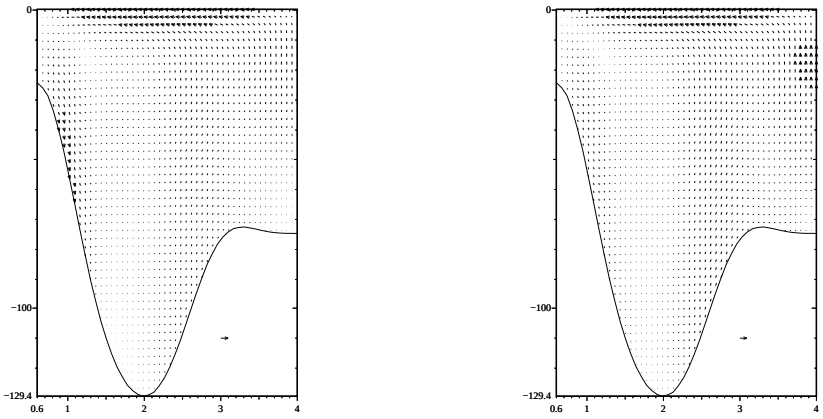


FIG. 2.6 – Coupe verticale pour les modèles à surface libre et à toit rigide

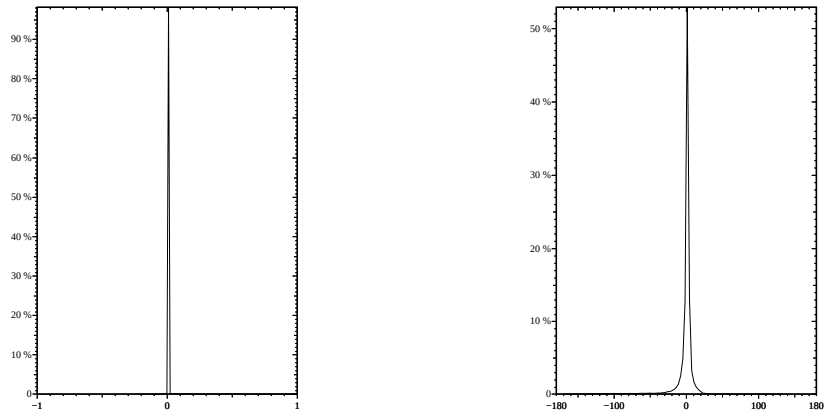


FIG. 2.7 – Comparaison des normes des vitesses tridimensionnelles et de leurs directions entre les modèles à surface libre et à toit rigide sur chaque noeuds du maillage.

2.5 Un modèle de type shallow water bi-couche avec hypothèse du rigid lid

Cette dernière partie sur les modèles à surface rigide est consacrée à la problématique des modèles bi-couches étudiée dans le cadre de la thèse de M. peybernes. Ceux sont des modèles qui sont utilisés lorsque les couches d'eau ont des caractéristiques suffisamment différentes pour ne pas pouvoir se mélanger. On trouve une telle

configuration par exemple au niveau du détroit de Gibraltar. Les eaux de l'océan, froides et peu salées, plus légères que les eaux méditerranéennes, forment un courant entrant en surface. Ces eaux se transforment dans le bassin méditerranéen, la forte évaporation augmentant la concentration de sels et ces eaux s'enfoncent (formation d'eau profonde) et ressortent ensuite par le fond du détroit de Gibraltar [87]. Si ce phénomène est maintenant bien connu, il semble difficile à simuler numériquement. En effet, un simple code de shallow water bi-dimensionnel ne peut traduire correctement ce phénomène et un code tri-dimensionnel doit posséder un niveau de raffinement important sur la verticale pour retranscrire le fort cisaillement apparaissant à l'interface des deux couches. Une voie intéressante semble être l'utilisation d'un modèle bi-couche que l'on représente schématiquement de la façon suivante :

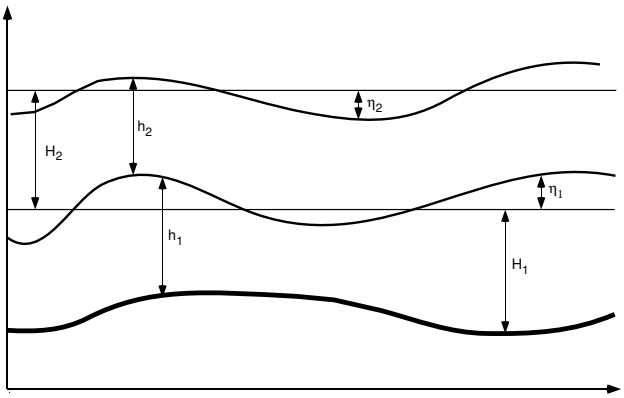


FIG. 2.8 – Section verticale du domaine

Le modèle à partir duquel on a mené ces travaux a été d'une part étudié par F.J. Chatelon *et al* [21] qui ont montré l'existence de solutions, puis par M.L. Muñoz

Ruiz *et al* [31, 75] en ce qui concerne la régularité et l'unicité des solutions.

$$\mathcal{P}_1 \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - A_1\Delta u_1 + \dfrac{1}{2}\nabla u_1^2 + \mathrm{rot}\, u_1\alpha(u_1) + \\ \omega_c\alpha(u_1) + g\nabla h_1 + g\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\nabla h_2 = g\nabla H_1 & \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial t} + \mathrm{div}\,(u_1 h_1) = 0 & \text{dans } Q, \\ u_1.n = 0,\ \mathrm{rot}\, u_1 = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u_1(t=0) = u_{1,0} & \text{dans } \Omega, \\ h_1(t=0) = h_{1,0} & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - A_2\Delta u_2 + \dfrac{1}{2}\nabla u_2^2 + \mathrm{rot}\, u_2\alpha(u_2) + \\ \omega_c\alpha(u_2) + g\nabla h_1 + g\nabla h_2 = f + g\nabla H_1 & \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial t} + \mathrm{div}\,(u_2 h_2) = 0 & \text{dans } Q, \\ u_2.n = 0,\ \mathrm{rot}\, u_2 = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u_2(t=0) = u_{2,0} & \text{dans } \Omega, \\ h_2(t=0) = h_{2,0} & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

La formulation variationnelle est la suivante

Trouver(u_1, h_1) et $(u_2, h_2) \in \left[L^2(0,T;\mathcal{V}) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\right] \times \left[L^\infty(0,T;L^1(\Omega)) \cap L^2(Q)\right]$

tel que $h_1 > 0, h_2 > 0$, et

$$(V) \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial t}, \phi\right) + A_1 a(u_1,\phi) - \dfrac{1}{2}(u_1^2, \mathrm{div}\,\phi) + (\mathrm{rot}\, u_1\alpha(u_1), \phi) - g(h_1, \mathrm{div}\,\phi) - \\ \qquad g\dfrac{\rho_2}{\rho_1}(h_2, \mathrm{div}\,\phi) + \omega_c\left(\alpha(u_1), \phi\right) = -g(H_1, \mathrm{div}\,\phi),\ \forall \phi \in \mathcal{V}_1 \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial t} + \mathrm{div}\,(u_1 h_1) = 0,\ \text{in } L^1(0,T;W^{-1,p}(\Omega)),\ p < 2 \\ \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial t}, \phi\right) + A_2 a(u_2,\phi) - \dfrac{1}{2}(u_2^2, \mathrm{div}\,\phi) + (\mathrm{rot}\, u_2\alpha(u_2), \phi) - \\ \qquad g(h_1 + h_2, \mathrm{div}\,\phi) + \omega_c\left(\alpha(u_2), \phi\right) = (f,\phi) - g(H_1, \mathrm{div}\,\phi),\ \forall \phi \in \mathcal{V}_1 \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial t} + \mathrm{div}\,(u_2 h_2) = 0,\ \text{in } L^1(0,T;W^{-1,p}(\Omega)),\ p < 2 \\ u_1(t=0) = u_{1,0} \in \mathcal{V}_1,\ u_2(t=0) = u_{2,0} \in \mathcal{V}_1 \\ h_1(t=0) = h_{1,0} \in L^2(\Omega),\ h_2(t=0) = h_{2,0} \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Dans [75], M.L. Muñoz Ruiz montre que si les données sont suffisamment régulières, le problème précédent admet une solution unique. Ici encore, les conditions de petitesse sur les données sont nécessaires à la construction d'un espace de stabilité permettant de traiter les termes non linéaires.

Dans ce type de modèle, on peut observer deux types d'ondes barotropes. Les ondes de surface et les ondes d'interface. Les ondes de surface ont une vitesse caractéristique donnée par $\sqrt{gH}$ alors que les ondes d'interface ont une vitesse caractéristique de l'ordre de $\sqrt{g'H_1}$ où g' est le coefficient de gravité réduite ($g' = (\rho_1 - \rho_2)/\rho_1$). Ces dernières ont donc une vitesse beaucoup plus faible (généralement d'un facteur dix) alors que leur amplitude est beaucoup plus forte (généralement d'un facteur cent). On a proposé de tester l'hypothèse du toit rigide sur ce modèle afin de limiter la contrainte sur le pas de temps imposé par la condition CFL. On supposera par la suite que la variable η_2 et ses variations sont négligeables, et on notera η les variations de l'interface. Les équations de continuité deviennent

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div}(u_1 h_1) = 0 \text{ et } -\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div}(u_2 h_2) = 0,$$

avec

$$h_1 = H_1 + \eta \text{ et } h_2 = H_2 - \eta.$$

En combinant ces deux équations, il vient :

$$\operatorname{div}(u_1 h_1 + u_2 h_2) = 0, \tag{2.31}$$

$$2\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div}(u_1 h_1 - u_2 h_2) = 0. \tag{2.32}$$

L'équation (2.31) est une contrainte que l'on introduit dans l'espace des fonctions admissibles ce qui donne

$$\mathcal{V} = \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{V}_1^2;\ \operatorname{div}(\varphi_1 h_1 + \varphi_2 h_2) = 0\}.$$

Cependant il est apparu dans ce problème une difficulté majeure que nous n'avons pas pu traiter. Il n'y a aucune difficulté pour montrer que les h_i sont bornées dans $L^\infty(Q)$ (il suffit d'appliquer deux fois le raisonnement fait pour la positivité de h dans le cas de shallow water pour obtenir $-H_1 < \eta < H_2$). Par contre, nous n'avons pas réussi à obtenir une borne pour $\dfrac{1}{h_i}$ et n'avons donc pas pu construire de solutions approchées convergentes. De plus, les fonctions tests dépendent implicitement de la solution (à cause de la présence de h_i dans la définition de l'espace $\mathcal{V}$) et nous n'avons pas suffisamment de régularité sur η pour prouver l'existence de solutions.

Ce problème étant pour le moment encore ouvert, on a contourné les difficultés précédentes en remplaçant dans un premier temps les équations de conservation de la masse par

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + \operatorname{div}(u_i H_i),\ i = 1, 2.$$

Ceci revient a supposer que η_i reste petit devant la hauteur des couches d'eau.

L'espace des fonction admissibles devient alors

$$\mathcal{V} = \left\{ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{V}_1^2; \operatorname{div}(\varphi_1 H_1 + \varphi_2 H_2) = 0 \right\}.$$

On introduit également l'espace $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{V}}^{L^2(\Omega)}$ et on suppose $H_1 > \beta > 0$ et $H_1, \dfrac{1}{H_1} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, on obtient le problème faible suivant (V)

trouver

$$u = (u_1, u_2) \in L^2(0,T;\mathcal{V}) \cap \left(L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\right)^2,$$

$$\eta \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

tel que

$$(V) \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial t}, \phi_1\right) + A_1 a(u_1, \phi_1) - g'(\eta, \operatorname{div}\phi_1) + \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial t}, \phi_2\right) + A_2 a(u_2, \phi_2) \\ -\frac{1}{2}(u_1^2, \operatorname{div}\phi_1) + (\operatorname{rot} u_1 \alpha(u_1), \phi_1) - \frac{1}{2}(u_2^2, \operatorname{div}\phi_2) + (\operatorname{rot} u_2 \alpha(u_2), \phi_2) \\ +\omega_c(\alpha(u_1), \phi_1) + \omega_c(\alpha(u_2), \phi_2) = (f, \phi_2), \ \forall \phi = (\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{V}, \\ \\ 2\dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div}(u_1 H_1 - u_2 H_2) = 0, \\ u(t=0) = u_0 \in \mathcal{H}, \\ \eta(t=0) = \eta_0 \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

On peut donner une interprétation de (V) en terme de problème fort à partir du lemme suivant caractérisant la fermeture de l'espace $\mathcal{V}$ dans L^2 (noté $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{V}}^{L^2(\Omega)}$) et son orthogonal dans L^2 (noté $\mathcal{H}^\perp$).

Lemme 2.5.

$$\mathcal{H}^\perp = \left\{ \phi \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \ \phi_1 = H_1 \nabla p, \ \phi_2 = H_2 \nabla p, \ p \in H^1(\Omega) \right\}, \tag{2.33}$$

$$\mathcal{H} = \{ \varphi \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega); \ \operatorname{div}(\varphi_1 H_1 + \varphi_2 H_2) = 0, \ (H_1\varphi_1 + H_2\varphi_2) \cdot n = 0 \text{ sur } \gamma \} \tag{2.34}$$

Le problème fort correspondant à (V) est alors le suivant

$$\mathcal{P}\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\nabla u_1 - A_1\Delta u_1 + \omega_c\alpha(u_1) + g'\nabla\eta = H_1\nabla p, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + u_2\nabla u_2 - A_2\Delta u_2 + \omega_c\alpha(u_2) = f + H_2\nabla p, \\ 2\dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div}(u_1h_1 - u_2h_2) = 0, \\ \operatorname{div}(u_1h_1 + u_2h_2) = 0, \\ u_1.n = 0,\ \operatorname{rot} u_1 = 0,\ \text{sur } \gamma, \\ u_2.n = 0,\ \operatorname{rot} u_2 = 0,\ \text{sur } \gamma, \\ u(t=0) = u_0, \\ \eta(t=0) = \eta_0. \end{cases}$$

2.5.1 Résultats d'existence et de régularité

Dans [43], on montre un résultat d'existence et de régularité de la solution (u,η) du problème (V) sous condition de données contrôlées.

Théorème 2.6. *Si les données sont suffisamment petites et régulières, alors le problème faible (V) a une unique solution (u,η) telle que*

$$u \in L^2(0,T_0;\mathcal{V}) \cap \left(L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))\right)^2,$$
$$\eta \in L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega)).$$

La régularité est donnée par le lemme suivant :

Lemme 2.7. *Soit (u,η) une solution de (V) dans $L^2(0,T_0;\mathcal{V})\cap\left(L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))\right)^2\times L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))$, alors*

1. *Si $f \in H^1(0,T_0;L^2(\Omega))$, $u_0 \in \mathcal{V}\cap H^2(\Omega)$ et $\eta_0 \in H^1(\Omega)$, alors la solution (u,η) vérifie*
$$u \in H^1(0,T_0;\mathcal{V}) \cap \left(W^{1,\infty}(0,T_0;L^2(\Omega))\right)^2$$
$$\eta \in W^{1,\infty}(0,T_0;L^2(\Omega)).$$
2. *Si $f \in \bigcap_{k=0}^{m-1} H^{m-k}(0,T_0;H^{2k}(\Omega))$, $u_0 \in \mathcal{V}\cap H^{2m}(\Omega)$ et $\eta_0 \in H^{2m-1}(\Omega), m \geqslant 1$ alors la solution (u,η) vérifie*
$$u \in H^m(0,T_0;\mathcal{V}) \cap \left(W^{m,\infty}(0,T_0;L^2(\Omega))\right)^2$$
$$\eta \in W^{m,\infty}(0,T_0;L^2(\Omega)).$$

2.5.2 Description de la méthode de résolution

En s'inspirant des travaux sur le problème de shallow water, on construit une base de l'espace fonctionnel à l'aide du lemme suivant [43] :

Lemme 2.8. *L'ensemble composé des* $\left(\frac{\mathrm{Rot}\, q}{H_1}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\mathrm{Rot}\, q}{H_2}\right)$, *et des* $\left(\frac{\nabla p}{H_1}, \frac{-\nabla p}{H_2}\right)$, *où* p *est une solution de* $(P2)$ *et* q *est une solution de* $(P3)$ *(cf. chapitre 1) est une base totale de* $\mathcal{V}$.

Par la suite, on notera $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une base de $\mathcal{V}$. On note $\mathcal{V}_m$ l'ensemble des combinaisons linéaires des m première fonction $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ et on cherche $u_m \in \mathcal{V}_m$ où $u_m = (u_{1,m}, u_{2,m})$ est de la forme

$$u_{1,m}(x,t) = \sum_{k=1}^{m} x_k(t)\varphi_k^1(x) \text{ et } u_{2,m}(x,t) = \sum_{k=1}^{m} y_k(t)\varphi_k^2(x).$$

Plus précisément,

$$u_{1,m}(x,t) = \sum_{i=1}^{mp} a_i(t)\frac{\nabla p_i}{H_1}(x) + \sum_{j=1}^{mq_1} b_j(t)\frac{\mathrm{Rot}\, q_j}{H_1}(x),$$

$$u_{2,m}(x,t) = -\sum_{i=1}^{mp} a_i(t)\frac{\nabla p_i}{H_2}(x) + \sum_{j=1}^{mq_2} c_j(t)\frac{\mathrm{Rot}\, q_j}{H_2}(x).$$

On construit ensuite la solution (u_m, η_m), du problème (V_m) suivant

$$(V_m)\begin{cases} \left(\frac{\partial u_{1,m}}{\partial t}, \phi_1\right) + A_1 a(u_{1,m}, \phi_1) - (\eta_m, \mathrm{div}\, \phi_1) + \left(\frac{\partial u_{2,m}}{\partial t}, \phi_2\right) + A_2 a(u_{2,m}, \phi_2) \\ -\frac{1}{2}(u_{1,m}^2, \mathrm{div}\, \phi_1) + (\mathrm{rot}\, u_{1,m}\alpha(u_{1,m}), \phi_1) - \frac{1}{2}(u_{2,m}^2, \mathrm{div}\, \phi_2) + (\mathrm{rot}\, u_{2,m}\alpha(u_{2,m}), \phi_2) \\ +w_c(\alpha(u_{1,m}), \phi_1) + w_c(\alpha(u_{2,m}), \phi_2) = (f, \phi_2), \text{ dans } Q, \ \forall \phi = (\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{V}_m, \\ 2\frac{\partial \eta_m}{\partial t} + \mathrm{div}\,(u_{1,m}H_1 - u_{2,m}H_2) = 0 \text{ dans } Q, \\ u_m(t=0) = u_{m,0}, \\ \eta_m(t=0) = \eta_{m,0}. \end{cases}$$

Pour cela on résout le système d'équations différentielles du premier ordre et à coefficients constants :

$$K \cdot \dot{ab} = F1, \tag{2.35}$$

$$\dot{c} = F2, \tag{2.36}$$

où K est une matrice carrée d'ordre $mq_1 + mp$ donnée par

$$K = \left[\begin{array}{c|c} \left(\frac{\mathrm{Rot}\, q_j}{H_1}, \frac{\mathrm{Rot}\, q_k}{H_1}\right) & \left(\frac{\nabla p_i}{H_1}, \frac{\mathrm{Rot}\, q_k}{H_1}\right) \\ \hline \left(\frac{\mathrm{Rot}\, q_j}{H_1}, \frac{\nabla p_k}{H_1}\right) & \left(\frac{\nabla p_i}{H_1}, \frac{\nabla p_k}{H_1}\right) + \frac{\lambda_k}{H_2^2} \end{array}\right]$$

et $ab \in \mathbb{R}^{mq_1+mp}$, $c \in \mathbb{R}^{mq_2}$ est le vecteur suivant

$$ab = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{mq_1} \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{mp} \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{mq_2} \end{bmatrix}.$$

Les termes apparaissant dans le membre de droite des équations (2.35) et (2.36) représentent la projection des différents termes du système d'équation. Ce problème est résolu par une méthode d'Euler implicite.

Il est également possible de reconstituer les termes $H_1\nabla p$ et $H_2\nabla p$ en projetant le système d'équation sur la base de $\mathcal{H}^{\perp}$ formée par les fonction $(H_1\nabla p_k,\ H_2\nabla p_k)$.

2.5.3 Exemple de simulation

On a été amené à développer un code de simulation du modèle de shallow water bi-couche à surface libre afin d'avoir une base de comparaison avec le modèle à surface rigide que l'on propose. On a ensuite réalisé deux séries de tests, une à fond constant et l'autre avec une bathymétrie variable. Dans ce dernier cas, on peut observer de sensibles différences entre les solutions trouvées qu'il est possible de justifier par le calcul.

En effet, on peut montrer facilement que la solution du problème stationnaire de shallow water à surface libre, dans le cas d'un vent sous la forme d'un gradient d'une fonction θ peut être donnée par $\left(u = 0,\ \eta_2 = \dfrac{\theta}{g} + cste,\ \eta_1 = \dfrac{-\rho_2}{g'\rho_1}\theta + cste\right)$. Par contre, dans le cas de l'hypothèse du toit rigide, sous les mêmes conditions, une vitesse nulle imposerait que le champ p (intervenant dans le multiplicateur de Lagrange) soit tel que $H_1\nabla p$ soit un gradient. Ceci n'est possible que pour certaines formes particulières de la bathymétrie (par exemple si elle est constante ou de la forme p^k). Dans les cas tests que l'on a réalisés, le problème converge asymptotiquement vers la solution stationnaire. Dans le cas d'une bathymétrie constante, les deux

solutions coïncident bien alors que dans le cas d'une batymétrie variable, la vitesse dans la couche inférieure ne converge pas (pour le cas du rigide lid) vers zéro.

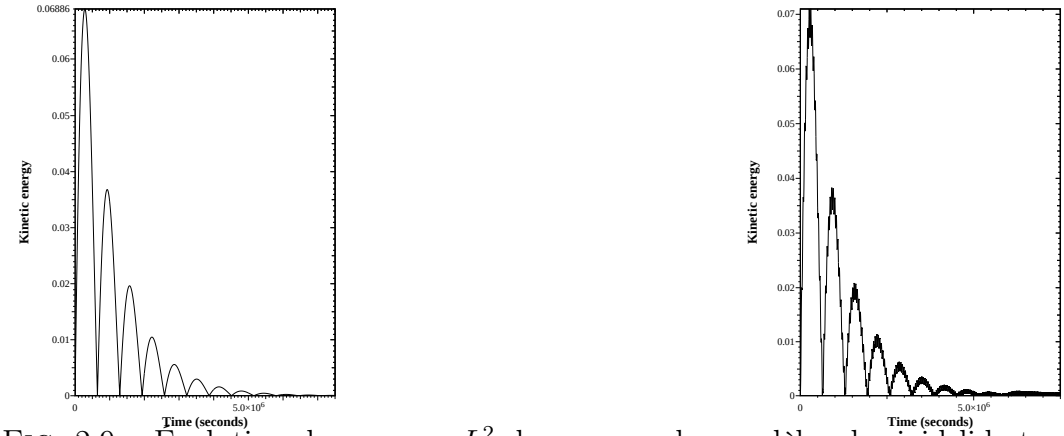


FIG. 2.9 – Évolution des normes L^2 de u_2, pour les modèles de rigid lid et surface libre dans le cas d'un fond constant.



FIG. 2.10 – Comparaison de $H_2\nabla p$ du modèle à toit rigide avec $-g\nabla\eta_2$ du modèle à surface libre.

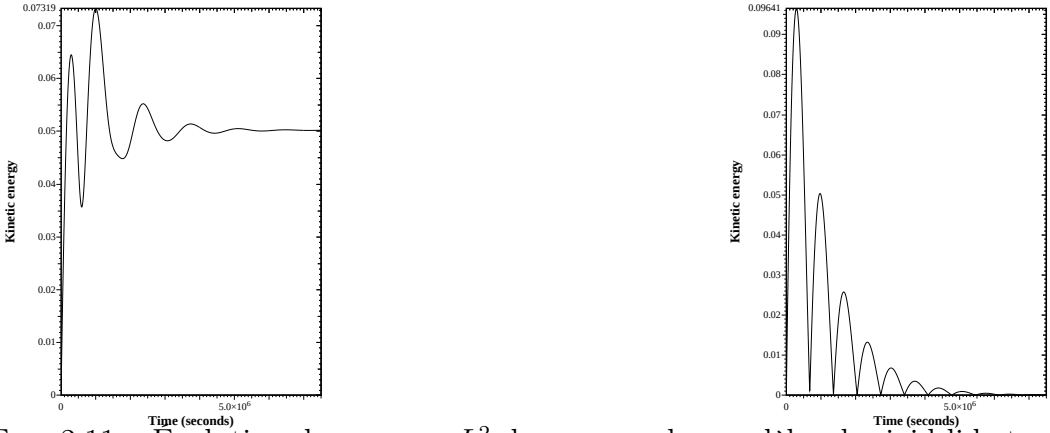


FIG. 2.11 – Évolution des normes L^2 de u_2, pour les modèles de rigid lid et surface libre dans le cas d'un fond constant.

Une des perspectives de ce travail est de développer une méthode numérique permettant de traiter les équations de continuité non simplifiées. Il est cependant à

craindre que les coûts de calcul des fonctions de base dans ce cas soit prohibitif et ne limite fortement l'intérêt de cette approche.

Chapitre 3

Couplage lithosphère-océan et tsunami

Cette dernière partie est consacrée à l'étude d'un problème de couplage entre la croûte terrestre et l'océan, et en particulier à l'apparition du phénomène de Tsunami. Ces tusami, ou raz de marée, peuvent avoir pour origine un séisme sous marin dans lequel l'énergie dégagée par le déplacement de la lithosphère est transmis sous la forme d'onde de pression au fluide. Cette onde de faible amplitude et de grande longueur d'onde se déplace à la vitesse $\sqrt{gh}$. A l'approche de la côte, la diminution de la profondeur engendre un ralentissement de la vitesse et un accroissement de la hauteur de l'onde qui finit par déferler sur la côte.

Le point important dans ce phénomène est le déplacement de l'onde de surface et il est intéressant d'utiliser uniquement un système barotrope (shallow water en formulation hauteur vitesse). On a souhaité modéliser complètement le couplage, c'est à dire prendre en compte l'influence de la vibration de la croûte terrestre sur l'eau, mais aussi la rétroaction de l'eau sur cette croûte terrestre. On ne peut pas représenter avec ce modèle le déferlement lors de l'arrivée de la vague sur la côte, mais on arrive à estimer la hauteur de celle-ci à l'approche de cette côte.

3.1 Un modèle de Tsunami

Le modèle que l'on a proposé est un modèle de type shallow water pour le fluide couplé à un modèle de plaque pour la structure. Pour obtenir ce modèle, on a intégré sur la hauteur d'eau les équations du modèle aux équations primitives (en supposant l'absence de stratification) et en prenant en compte la surface libre en partie supérieure et les mouvements de la plaque en partie inférieure.

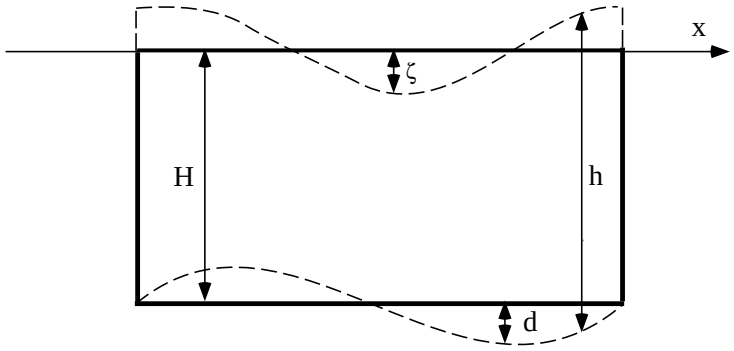


FIG. 3.1 – Coupe verticale du domaine 3D.

La croûte terrestre et la surface du fluide occupe un ouvert borné Ω de R^2, supposé simplement connexe pour simplifier, de frontière γ supposée suffisamment régulière. On notre Q le cylindre $\Omega\times]0,T[$ et $\Sigma = \gamma\times]0,T[$. On note de plus n la normale extérieure à Ω sur γ et $x = (x_1, x_2)$ un point de Ω. Soit $u(x,t)$ la vitesse du fluide, $h(x,t)$ la hauteur de la colonne d'eau et $d(x,t)$ le déplacement vertical de la plaque. On pose $h(x,t) = H + \zeta(x,t) - d(x,t)$ où H représente la bathymétrie du domaine et $\zeta(x,t)$ l'élévation de la surface.

L'intégration des équations primitives sur la hauteur d'eau donne

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(u^2) + \mathrm{rot}\, u\alpha(u) + \omega_c\alpha(u) - A\Delta u + g\nabla\zeta + C_d|u|u = f \text{ in } Q, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{div}\,(uh) = 0 \text{ in } Q, \tag{3.2}$$

$$u\cdot n = 0,\ \mathrm{rot}\, u = 0 \text{ on } \Sigma, \tag{3.3}$$

$$u(t=0) = u_0(x) \text{ in } \Omega, \tag{3.4}$$

$$h(t=0) = h_0(x) \text{ in } \Omega,\ h_0 \geq 0 \tag{3.5}$$

où ω_c, A, et g sont respectivement les coefficients de la force de Coriolis, de diffusion, d'accélération de la pesanteur. $C_d|u|u$ représente le cisaillement au fond et f l'action du vent à la surface [26]. α est un opérateur rotation définit par : $\alpha(u_1,u_2) = (-u_2,u_1)$.

Les équations de la plaque sont données par le système suivant :

$$m\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} + D\Delta^2 d - mI\Delta\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} = f_0 - gh \text{ in } Q, \tag{3.6}$$

$$d = f_1,\ \frac{\partial d}{\partial n} = f_2 \text{ on } \Sigma, \tag{3.7}$$

$$d(t=0)=d_0(x),\ \frac{\partial d}{\partial t}(t=0)=d_1(x) \text{ in } \Omega \tag{3.8}$$

où m est la densité surfacique de masse, D la rigidité de la plaque, I l'inertie de rotation, et $(f_1,\ f_2)$ les forces appliquées à la plaque sur la faille (par la suite, on suppose $f_1=f_2=0$ pour simplifier l'exposé). L'action de l'eau sur la plaque est prise en compte par le terme de pression $-gh$. On suppose que le modèle est à l'équilibre au temps $t=0$ pour lequel f_0 est donné par $f_0=g(\zeta_0+H-d_0)$ (et $d_0=d_1=0$).

la formulation variationnelle de ce problème est donnée par

trouver

- $u\in L^2(0,T;\mathcal{V})\cap C^0(0,T;L^2(\Omega)^2)$
- $h\in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))\cap L^2(Q),\ h\ln h\in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)),\ h\geq 0$
- $d\in W^{1,\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$,

tels que

$$(V)\begin{cases}
\Big(\frac{\partial u}{\partial t},\varphi\Big)-\frac{1}{2}\Big(u^2,\operatorname{div}\varphi\Big)+\Big(\operatorname{rot}u\alpha(u),\varphi\Big)+\omega_c\Big(\alpha(u),\varphi\Big)\\
+Aa(u,\varphi)-g\Big(h,\operatorname{div}\varphi\Big)+\Big(C_d|u|u,\varphi\Big)\\
=\Big(f,\varphi\Big)+g\Big(d,\operatorname{div}\varphi\Big),\ \forall\,\varphi\in\mathcal{V},\\
\frac{\partial h}{\partial t}+\operatorname{div}(uh)=0 \text{ dans } L^{4/3}(0,T;W^{-1,4/3}(\Omega)),\\
\Big(\frac{\partial^2 d}{\partial t^2},\Psi\Big)+\Big(\nabla\frac{\partial^2 d}{\partial t^2},\nabla\Psi\Big)+\Big(\Delta d,\Delta\Psi\Big)+g\Big(h,\Psi\Big)\\
=\Big(f_0,\Psi\Big),\forall\,\Psi\in H_0^2(\Omega),\\
u(t=0)=u_0(x)\in\mathcal{V},\\
h(t=0)=h_0(x)\in L^1(\Omega),\ h_0(x)\log h_0(x)\in L^1(\Omega),\\
h_0(x)\geq 0\quad \text{a.e. in } \Omega,\\
d(t=0)=d_0(x)\in H_0^2(\Omega),\ \frac{\partial d}{\partial t}(t=0)=d_1(x)\in H_0^1(\Omega).
\end{cases}$$

où $\mathcal{V}=\big\{u=\nabla p,\ p\in H^2(\Omega),\ \frac{\partial p}{\partial n}=0\big\}$

3.2 Résultats d'existence et de régularité

Dans [37], on donne un résultat d'existence pour un temps fini et des données initiales petites. On suppose pour simplifier que la force de Coriolis et les termes de force f_0 et f sont nuls.

Théorème 3.1. *Soit* $u_0 \in H^1(\Omega)$, $h_0 \geq 0$, $h_0 \log h_0 \in L^1(\Omega)$, $d_1 \in H_0^1(\Omega)$ *et* $d_0 \in H_0^2(\Omega)$, *vérifiant des conditions suffisantes de petitesse, alors*

$$u \in L^\infty(0,T,\mathcal{V}) \cap C^0(0,T,L^2(\Omega)) \tag{3.9}$$

$$h \in L^\infty(0,T,L^1(\Omega)) \cap L^2(Q) \tag{3.10}$$

$$h \log h \in L^\infty(0,T,L^1(\Omega) \tag{3.11}$$

$$d \in W^{1,\infty}(0,T,H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(0,T,H_0^2(\Omega) \tag{3.12}$$

Les conditions d'existence du problème de shallow water a été établie par P. Orenga [101] et le modèle de plaque ne pose pas de problème particulier. La difficulté réside dans le couplage entre les équations. On l'a résolue en adaptant une technique due à Kazhikhov [67]. La limitation de l'existence en temps petit est du au couplage entre les deux problèmes.

La difficulté de l'unicité repose en grande partie sur l'obtention d'une régularité suffisante sur u et h. Ces résultats ont été obtenus par Chatelon *et al* [23]. Dans [37], on donne une méthode plus courte permettant d'obtenir le même résultat.

3.3 Construction des solutions approchées

Pour construire nos solutions approchées, on considère l'espace $\mathcal{V}_n$ engendré par les n premiers éléments d'une base de $\mathcal{V}$ et on note $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ une base de $\mathcal{V}_n$ telle que $\varphi_n \in H^4(\Omega)^2$. Avec cette régularité $L^2(0,T;\mathcal{V}_n)$ et $L^2(0,T;\mathcal{V}_n \cap W^{1,\infty}(\Omega)^2)$ sont algébriquement et topologiquement identiques. Le problème approché (V_n) est identique a (V) en remplaçant (u,h,d) par (u_n,h_n,d_n), ainsi que $\mathcal{V}$ par $\mathcal{V}_n$ et en prenant $h_{0n} \in C_c^1(\Omega)$ afin d'obtenir $h_n \in C^1(\bar{\Omega})$.

On fixe une première valeur $u_n^* \in L^2(0,T,\mathcal{V}_n)$ et on résout l'équation de continuité par la méthode des caractéristiques qui donne $h_n \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. On résout ensuite le problème de plaque qui permet d'obtenir $d_n \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega)$. Enfin, l'équation de quantité de mouvement donne $u_n \in L^2(0,T,\mathcal{V}_n \cap W^{1,\infty}(\Omega)^2)$.

On applique ensuite le théorème de point fixe de Schauder [59] qui permet d'établir l'existence d'un point fixe pour u_n.

3.4 Application numérique

On applique le schéma précédent pour la résolution numérique en utilisant un point fixe de Picard pour approcher la solution en dimension finie. L'équation de quantité

de mouvement est résolue par un code de type éléments finis, l'équation de continuité est résolue par la méthode des caractéristiques et l'équation de plaque est résolue par la méthode de Galerkin.

Le domaine d'étude idéalisé est représenté par la figure (3.2). Il s'agit d'un carré de 1000 kilomètres de coté qui permet d'avoir analytiquement une base propre de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. On a représenté le plateau continental correspondant à une rapide remontée de la bathymétrie qui passe de 1000 mètres à 100 mètres. Cette bathymétrie suit la fonction

$$\begin{cases} 10^3 & \text{si} \quad x \leq 3.10^5 \text{ m} \\ 10^3 - (x - 3.10^5) \times 9/10^3 & \text{si} \quad 3.10^5 \leq x \leq 4.10^5 \text{ m} \\ 10^2 & \text{si} \quad x \geq 4.10^5 \text{ m} \end{cases} \tag{3.13}$$

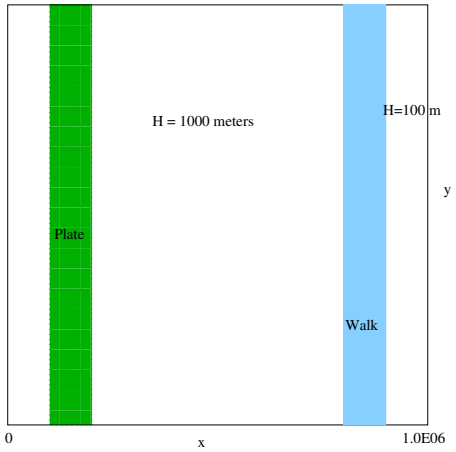


FIG. 3.2 – Idealized domain

- L'équation de continuité est réécrite sous sa forme Lagrangienne

$$\frac{Dh}{Dt} = -h \text{ div } u.$$

Puis elle est discrétisée à l'aide d'un schéma implicite

$$\frac{D \log h}{Dt} \simeq \frac{\log h^{n+1}(x) - \log h^n \circ \chi^n(x)}{\Delta t}$$

où $\chi^n(x)$ représente la position au temps n d'une particule de fluide qui se trouve en x au temps $n+1$. On obtient finalement

$$h^{n+1}(x) = h^n \circ \chi^n(x) \exp(-\Delta t \text{ div } u^{n+1}(x)).$$

• L'équation de plaque est résolue par la méthode de Galerkin. Si on note ψ_i et $\Lambda_i = \lambda_i^2$ les vecteurs propres et les valeurs propres du problème

$$(B_p) \begin{cases} \Delta^2 \psi_i = \lambda_i^2 \psi_i & \text{in } \Omega_{\text{plate}}, \\ \psi_i = \Delta \psi_i = 0 & \text{on} \gamma_{\text{plate}}. \end{cases}$$

Alors $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ forment une base orthogonale de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et on peut chercher d_m sous la forme $d_m = \sum_{i=1}^{m} c_i(t)\psi_i(x)$.

Dans notre cas particulier, les fonctions ψ_i solutions de (B_p) sont de la forme

$$\psi_{r,s}(x,y) = 2 \sin\left(\frac{r\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{s\pi y}{L}\right)$$

$$\text{et } \Lambda_{r,s} = \left(\frac{r}{l}^2 + \frac{s}{L}^2\right)^2 \pi^4 \text{ dans } \Omega_{\text{plate}} = [l, 2l] \times [0, L].$$

On résout ensuite le système

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{c_k}\} + [K]\{c_k\} = \{F_k\}, \quad k = 1, ..., m \\ c_k(t=0),\ \dot{c}_k(t=0) \text{ donné} \end{cases}$$

à l'aide d'un schéma de Newmark implicite [33].

• L'équation de quantité de mouvement est résolue à partir d'un schéma de type Lagrangian up-winding

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \simeq \frac{u^{n+1}(x) - u^n \circ \chi^n(x)}{\Delta t}$$

qui donne la forme discrétisée suivante

$$\frac{1}{\Delta t} u^{n+1}(x) - \mu \Delta u^{n+1}(x) = \frac{u^n \circ \chi^n(x)}{\Delta t} - g \nabla \zeta^n(x) + \omega_c \alpha(u^n(x)).$$

La discrétisation spatiale s'effectue par éléments finis en utilisant comme support le code Modulef (Inria) et des éléments finis de type Hermite en formulation élasticité.

On représente sur la figure 3.3 les variation de l'amplitude de l'onde après respectivement 1200, 1400, et 1600 secondes.

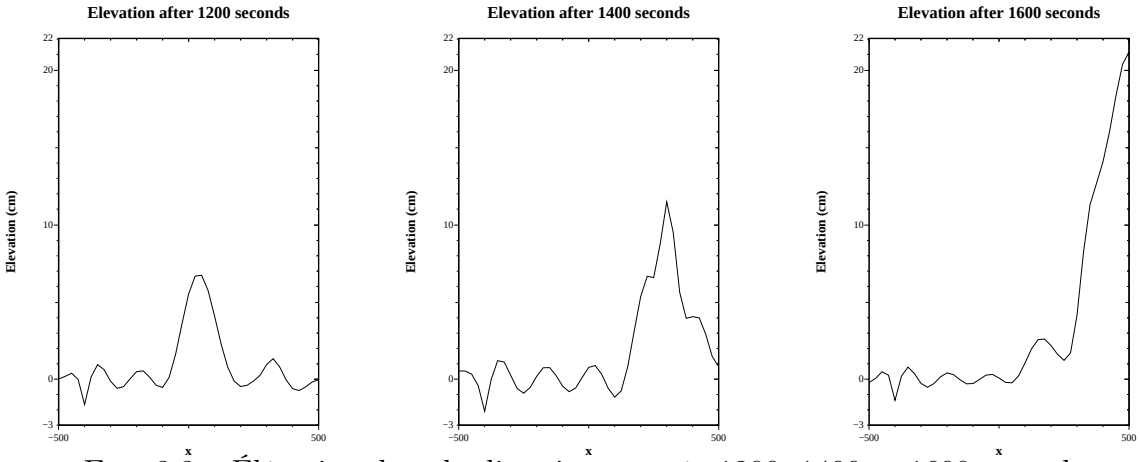


FIG. 3.3 – Élévation dans la direction x après 1200, 1400 et 1600 secondes

Conclusion

Les travaux que je viens de présenter s'inscrivent dans une thématique de recherche sur les écoulements géophysiques initiée à l'université de Corse depuis plus de 15 ans. En parallèle aux développements formels consistant principalement à des résultats d'existence, de régularité et d'unicité des solutions, ils ont conduit à la mise au point de nombreux codes de simulation numérique. Nous avons, chaque fois que cela s'avérait possible, cherché à montrer le coté applicable de ces développements. L'objectif n'étant pas de concurrencer dans ce domaine les outils déjà performants développés dans le cadre de grands projets nationaux ou internationaux, mais de montrer de nouvelles voies permettant, j'espère, une meilleure compréhension de ces systèmes très complexes. Un grand nombre de questions, tant sur le plan de la modélisation que celui de l'analyse, restent posées ; ce qui ouvre un large champ d'invertigations

Mes travaux s'orientent actuellement vers le développement de modèles de transport de pollution marine. Cette problématique prend une ampleur importante dans une société soucieuse de la protection de son environnement. Il ne s'agit pas seulement de la pollution par des hydrocarbures, mais également par des métaux lourds ou tout autre rejet de notre civilisation. La modélisation de ces problèmes est délicate et pour le moment incomplète. Les codes opérationnels, comme Mothy développé par Météo France, n'utilise en général que le transport lagrangien d'un traceur auquel il ajoute un pourcentage de la vitesse du vent (généralement 3%).

Nous avons proposé, dans le cade de la thèse de M. Peybernes, de modéliser la dynamique propre d'une nappe d'hydrocarbure. Cette nappe est alors considérée comme une couche de fluide vérifiant les équations de shallow water sur un domaine à frontière libre qui lui permet de s'étendre au grès des vents et courants. La résolution numérique repose un schéma de type Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE). Ce type de travail nécessite une forte implication entre la physique permettant de construire les modèles et les mathématiques permettant de vérifier leurs cohérences et de proposer des méthodes numériques convergentes.

D'autre part, l'université, en accord avec la politique de recherche de l'UMR,

nous encourage fortement à développer un projet de recherche sur les incendies de forêts. Dans cette optique, nous avons démarré une collaboration avec l'équipe *feux de forêts* dans laquelle notre travail consiste à développer et analyser des modèles de vents locaux à partir de données météorologiques. Cette question revêt une grande importance pour la prévision de la propagation de ces feux et je pense que notre expérience acquise pour l'océan nous permettra de mener à bien ce travail.

Bibliographie

[1] *OPA - Version 8 - Ocean General Circulation Model - Reference Manual*, April 1997.

[2] V.I. Agoshkov, A.Ovtchinnikov, A. Quarteroni, and F. Saleri. Recent developments in the numerical simulation of shallow water equation ii : Temporal discretization. *Math. Models Methods Appl. Sci*, 4, 1994.

[3] V.I. Agoshkov, A. Quarteroni, and F. Saleri. Recent developments in the numerical simulation of shallow water equation i : Boundary conditions. *Applied Numerical mathematics*, 15 :175–200, 1994.

[4] C. Giacomoni B. Di Martino and P. Orenga. Analysis of some shallow water problems with rigid-lid hypothesis. M^3AS, 6(11) :979–999, 2001.

[5] J.M. Beckers. *Modélisation mathématique et numérique de la Méditerranée occidentale*. Mémoire d'ingénieur civil, ULG, 1988.

[6] J.M. Beckers. Application of the GHER 3D general circulation model to the western mediterranean. *Journal of marine systems, Elsevier Science Publishers*, 1 :315–332, 1991.

[7] A. Beckmann and D. Haidvogel. Numerical simulation of flow around a tall isolated seamount. part 1 : problem formulation and model accuracy. *J. Phys. Oceanogr.*, 23 :1736–1753, 1993.

[8] C. Bernardi and O. Pironneau. On the shallow water equations at low reynolds number. *Commun. in Partial Differential Equations*, 16(1) :59–104, 1991.

[9] P. Bisgambiglia. *Traitement numérique et informatique de la modélisation spectrale*. Thèse de Doctorat, Université de Corse, Corte, 1990.

[10] F. Bosseur. *Analyse de quelques problèmes d'océanographie physique dans le cas de domaines multiplement connexes*. Mémoire DESS, Université de Corse, 1992.

[11] F. Bosseur. *Détermination de conditions aux limites en mer ouverte avec une méthode de contrôle optimal*. Thèse de Doctorat, Université de Corse, Corte, 1997.

[12] F. Bosseur, B. di Martino, and P. Orenga. Resolution by the Galerkin method with a special basis of a geophysical flow in open sea :a calvi's bay simulation. *Applied mathematical Modelling*, 24 :73–94, 2000.

[13] F. Bosseur and P. Orenga. Détermination de conditions aux limites en mer ouverte avec une méthode de contrôle optimal. *inconnu*, ?? :????–????, 1997.

[14] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle*. Collection appliquée pour la maîtrise. Masson, 1983.

[15] F. Brossier. *Analyse numérique des problèmes de type Stokes ou Navier-Stokes intervenant en modélisation des phénomènes océanographiques*. Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1, Rennes, 1988.

[16] M. Oliver C. D. Levermore and E. S. Titi. Global well-posedness for models of shallow water in a basin with a varying bottom. *Indiana Univ. Math. J.*, 45(2) :479–510, 1996.

[17] M. Oliver C. D. Levermore and E. S. Titi. Global well-posedness for the lake equations models of shallow water in a basin with a varying bottom. *Physica D*, 98 :492–506, 1996.

[18] T. Chacon and D. Rogriguez. Prismatic finite elemnt solution of the primitive equation of the ocean. *Cours CEA-Edf-Inria : Problémes Non Linéaires Appliqués. Écoulements Pue Profonds À Surface Libre.*, pages 70–136, 2002.

[19] J.G. Charney. Geostrophic turbulence. *J. atmos. Sci*, 28 :1087–1095, 1971.

[20] F.J. Chatelon. *Analyse d'un problème de shallow water*. Thèse de Doctorat, Université de Corse, Corte, dec 1996.

[21] F.J. Chatelon and P. Orenga. Condition d'existence de solutions d'un problème de « shallow water » basé sur un modèle bicouche. *CRAS*, 324 :515–518, 1988.

[22] F.J. Chatelon and P. Orenga. On a non-homogeneous shallow-water problem. M^2AN, 31(1) :27–55, 1997.

[23] F.J. Chatelon and P. Orenga. Some smoothness and uniqueness results for a shallow water problem. *Adv. diff. equ.*, 3, 1998.

[24] P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenko, and R. Temam. Nouveaux résultats sur les variétés inertielles pour les équations différentielles dissipatives. *CRAS*, 302 :375–378, 1986.

[25] P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenko, and R. Temam. *Integral manifolds and Inertial manifolds for dissipative partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences Series, Vol 70. Springer Verlag - New York, 1988.

[26] B. Cushman-Roisin. *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*. Prentice Hall, 1994.

[27] R. Dautrey and J.L. Lions. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*. Collection C.E.A. Masson, 1984.

[28] A. Davies. On using turbulence energy models to develop spectral viscosity models. *Continental shelf research*, 11 :1313–1353, 1991.

[29] A.M. Davies. Application of the galerkin method to the formulation of a three-dimensional nonlinear hydrodynamic numerical sea model. *Appl. Math. Modelling*, 4 :245–256, 1980.

[30] A.M. Davies. Formulation of a linear three-dimensional hydrodynamic sea model using a galerkin eigenfunction method. *International Journal for numerical methods in fluids*, 3 :33–60, 1983.

[31] Maria de la Luz Muñoz Ruiz. *Análisis de un modelo bicapa de aguas poco profundas*. Thèse de Doctorat, Universidad de Málaga, mai 2002.

[32] A. Debussche, T.Dubois, and R.Temam. The nonlinear Galerkin method : A multi-scale method applied to the simulation of homogeneous turbulent flow - preprint. *Theorical and Computational Fluid Dynamic*, 1995.

[33] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine, 1984.

[34] B. di Martino, F.J. Chatelon, and P. Orenga. The nonlinear Galerkin's method applied to the sallow water equations. *M3AS*, 9(6) :825–854, 1999.

[35] B. di Martino, C. Giacomoni, F. Flori, and P. Orenga. Analyse d'un problème de tsunami. *Comptes rendus de l'académie des sciences*, 334 :1–6, 2002.

[36] B. di Martino, C. Giacomoni, F. Flori, and P. Orenga. Sur le construction des solutions approchées d'un problème de tsunami. *Anales Mathématiques Blaises Pascal*, 9 :269–281, 2002.

[37] B. di Martino, C. Giacomoni, F. Flori, and P. Orenga. Mathematical and numerical analysis of a tsunami problem. *M3AS*, 13(10) :1489–1514, 2003.

[38] B. di Martino, C. Giacomoni, and P. Orenga. Analysis of some shallow water problems with rigid-lid hypothesis. *M3AS*, 11(6) :779–799, 2001.

[39] B. di Martino, C. Giacomoni, and P. Orenga. A numerical approach to marine circulation using free surface or rigid-lid modeling : Application in the bay of calvi. *Computational fluids dynamics*, 16 :37–48, 2002.

[40] B. di Martino and P. Orenga. Résolution des équations de shallow water par la méthode de Galerkin non linéaire. *M2AN*, 32(4) :451–477, 1997.

[41] B. di Martino and P. Orenga. Resolution to a three dimensional physical oceanographic problem using the non linear Galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 30 :577–606, 1997.

[42] B. di Martino and P. Orenga. The generalized non linear Galerkin method applied to the hydrodynamics in open sea. *Computational Fluids Dynamics*, 14 :305–325, 2001.

[43] B. di Martino, P. Orenga, and M. Peybernes. On a bi-layer shallow water model with rigid-lid hypothesis. *Soumis*, 2004.

[44] R.J. DiPerna and P.L. Lions. On the cauchy problem for boltzman equations : global existence and weak stability. *CRAS*, 306 :343–346, 1988.

[45] R.J. DiPerna and P.L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and sobolev spaces. *invent. math.*, 98 :511–547, 1989.

[46] R.J. DiPerna and P.L. Lions. *Global weak solutions of kinetic equations*. Deminario Matematico, Torino, 1990.

[47] S. Djenidi. *Modèles mathématiques et dynamique des mers continentales d'Europe septentrionale*. Thèse d'habilitation, Université de Liège, Liège, 1986.

[48] T. Dubois. *Simulation numérique d'écoulements homogènes et non homogènes par des méthodes multi-résolution*. Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, jan 1993.

[49] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko, and R. Temam. Ensembles inertiels pour les équations d'évolution dissipatives. *CRAS*, 310 :559–562, 1990.

[50] V. Giraut et P.A. Raviart. *Finite Elements Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, 1979.

[51] F. Flori, C. Giacomoni, and P. Orenga. Convergence of a characteristic-galerkin scheme for a shallow water problem. *Mathematical And Computer Modelling*, 2004.

[52] C. Fluixa. *Analyse d'un problème d'océanographie physique en dimension trois par la méthode de Galerkin*. Thèse de Doctorat, Université de Corse, Corte, 1997.

[53] C. Foias, O. Manley, and R. Temam. Modelling of the interaction of small and large eddies in two dimensional turbulent flows. M^2AN, 22(1) :93–114, oct 1988.

[54] C. Foias, O.Manley, and R. Temam. Sur l'interaction des petits et grands tourbillons dans les écoulements turbulents. *CRAS*, 305 :497–500, 1987.

[55] C. Foias, G.R. Sell, and R. Temam. variétés inertielles des équations différentielles dissipatives. *CRAS*, 301 :139–141, 1985.

[56] G. Furnes. A three-dimensional numerical sea model with eddy viscosity varying piecewise linearly in the vertical. *Continental shelf Research*, 2 :231–241, 1983.

[57] J.M. Gary. Estimation of truncation error in transformed coordinate, primitive equation athmospheric models. *J. Atmos. Sci*, 30 :223–233, 1973.

[58] C. Giacomoni. *Analyse de quelques problèmes de fluides géophysiques*. Thèse de Doctorat, Université de Corse, nov 2001.

[59] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer Verlag, Berlin, 1983.

[60] A. E. Gill. *Atmosphere - Ocean Dynamics*, volume 30 of *International geophysics series*. Academic press, 1982.

[61] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite Elements Methods of the Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, 1979.

[62] P. Grisvard. *Boundary value problems in non-smooth domains*. Université de Nice. IMSP, 1981.

[63] R.L. Haney. On the pressur gradient force over steep topography in sigma coordinate ocean model. *J. Phys. Oceanogr.*, 21 :610–619, 1991.

[64] A. Hertzog and P. Orenga. Existence et unicité d'un problème de mécanique des fluides intervenant en océanographie physique. *CRAS*, 313 :887–892, 1991.

[65] B. J. Hoskins. Spectral methods in meteorology. *Numerical methods for fluid dynamics*, pages 45–61, 1982.

[66] F. Jauberteau. *Résolution numérique des équations de Navier-Stokes instationnaires par méthodes spectrales - Méthode de Galerkin non linéaire*. Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, dec 1990.

[67] A.V. Kazhikhov. Some new statements for initial boundary value problems for Navier-Stokes equations of viscous gas. *Progress in theoretical and com-*

putational fluid mechanics, in Progress in theoretical and computational fluid mechanics, 308 :33–72, 1994.

[68] A.N. Kolmogorov. On degeneration of isotropic turbulence in incompressible viscous liquid. *Dolk. Akad. Nauk. SSSR.*, 31 :538–541, 1941.

[69] P.K. Kundu. *Fluid Mechanics*. Academic press, inc, 1990.

[70] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Fluid Mechanics and its Applications. Kluwer Academic publishers, second edition, 1990.

[71] R. Lewandowski. *Analyse math matique et oc anographie*. Masson, 1997.

[72] J.L. Lions. *Quelques méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*. Dunod, 1969.

[73] J.L. Lions, R. Temam, and S. Wang. On the equation of the large scale ocean. *Non linearity*, 5 :1007–1053, 1992.

[74] J.L. Lions, R. Temam, and S. Wang. Problèmes à frontière libre pour les modèles couplés de l'ocean et de l'atmosphere. *CRAS*, 318 :1165–1171, 1994.

[75] C. Parés M. L. Muñoz-Ruiz, M. J. Castro-Díaz. On an one-dimensional bi-layer shallow-water problem. *Nonlinear Anal.*, 53(5) :567–600, 2003.

[76] G. Madec. *La formation d'eau profonde et son impact sur la circulation régionale en méditerranée occidentale : Une approche numérique*. Thèse de Doctorat, Université de Paris 6, Paris, 1990.

[77] E. Magenes and J.L. Lions. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Dunod, 1972.

[78] P. Marchesiello. *Simulation de la circulation océanique dans l'atlantique sud, avec un modéle numérique à coordonnée sigma*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble 1, Grenoble, 1995.

[79] M. Marion and R. Temam. Nonlinear Galerkin methods. *SIAM J.Numer. Anal.*, 26(5) :1139–1157, oct 1989.

[80] P. Marsaleix. *Modélisation tridimensionnelle de la circulation océanique dans le golfe du lion*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1993.

[81] B. Di Martino. *Analyse par la méthode de galerkin non linéaire de quelques problèmes de fluides géophysiques*. Thèse de Doctorat, Université de Corse, Corte, 1998.

[82] B. Di Martino. Analyse de la contantologie dans le galfe de pinarellu. *Rapport d'étude de courantologie*, page 27 pages, 2001.

[83] G.L. Mellor and A.F. Blumberg. Modeling vertical and horizontal diffusivities with the sigma coordinate system. *Monthly Weather Review*, 8 :1379–1383, 1985.

[84] G.L. Mellor, S. Hakkinen, T. Ezer, and R. Patchen. A generalization of a sigma coordiante model and an intercomparison of model vertical grids. *Ocean Forecasting : Conceptual Basis and Applications*, pages 55–72, 2002.

[85] G.L. Mellor, L.-Y. Oey, and T. Ezer. Sigma coordinate pressure gradient errors and the seamount problem. *J. Atmos. Ocean. Tech.*, 15 :1122–1131, 1998.

[86] G. Millot. inconnu. *Oceanol. ACTA.*, 10 :143–146, 1987.

[87] J.F. Minster. *La machine océan*. Fluid Mechanics and its Applications. Flammarion, 1998.

[88] T. Nguyen. *Simulation de la circulation océanique avez un modéle tridimentionnel aux équations primitives :effets de la topographie sous-marine à moyenne échelle*. Thèse de Doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble, Grenoble, 1988.

[89] J.C.J. Nihoul. *Modelling of Marine Systems*. Elsevier oceanography series. Elsevier Scientific Publishing Compagny., 1975.

[90] J.C.J. Nihoul. *Modèles mathématiques et Dynamique de l'environnement*. Elsevier Publ., 1977.

[91] J.C.J. Nihoul. *Lecture on Turbulence*. ELE - Liège, 1979.

[92] J.C.J. Nihoul. *Hydrodynamic models of shallow continental seas - Application to the North Sea*. Etienne Riga, 1982.

[93] J.C.J. Nihoul. A three-dimensional marine circulation model in a remote sensing perspectives. *Annales Géophysicae*, 2 :433–442, 1984.

[94] J.C.J. Nihoul. *Perspectives in marine modelling*. Ispra - Italy - GHER - University of Liege. Joint Research Center, 1985.

[95] J.C.J. Nihoul. *Introduction à la mécanique des fluides géophysiques*. Association Université de Corse - Université de Liège, 1987.

[96] J.C.J. Nihoul, E. Deleersnijder, and S. Djenidi. Modelling the general circulation of shelf seas bye 3d k-ε models. *Earth science Reviews*, 26 :163–189, 1989.

[97] A. Norro. *Étude pluridiciplinaire d'un milieu côtieé. Approches expérimentale de la modèlisation de la baie de Calvi (Corse)*. Thèse de Doctorat, Université de Liège, Liege, 1995.

[98] P. Orenga. *Analyse de quelques problèmes d'océanographie physique.* Thèse d'habilitation, Université de Corse, Corte, 1992.

[99] P. Orenga. Construction d'une base spéciale pour la résolution de quelques problèmes d'océanographie physique en dimension deux. *CRAS*, 314 :587–590, 1992.

[100] P. Orenga. Existence des solutions d'un problème d'océanographie physique avec frottements au fond et aux côtes. *CRAS*, 0(0) :0–0, 1992.

[101] P. Orenga. Un théorème d'existence de solutions d'un problème de shallow water. *Arch. Rational Mach. Anal.*, 130 :183–204, 1995.

[102] P. Orenga. Construction d'une base spéciale pour la résolution de quelques problèmes non linéaires d'océanographie physique en dimension deux. *Nonlinear Partial Diferential equations and their applications.*, pages 234–258, 1998.

[103] P. Orenga and P. Bisgambiglia. Résolution numérique d'un problème d'océanographie physique par la méthode de galerkin. *CRAS*, 313 :627–630, 1991.

[104] P. Orenga and F.J. Chatelon. *Some results on a non homogeneous shallow water problem.* conférencier invité au congrès annuel du SIAM, Charlotte NC, USA, 1995.

[105] P. Orenga, F.J. Chatelon, and C. Fluixa. Analysis of some oceanography physics problems by the Galerkin's method. In *The mathematics of models for climatology and environment, NATO Advanced Study*, 1995.

[106] C. Pares. Existence, uniqueness and regularity of solution of the equations to a turbulence model for incompressible fluids. *Applicable Analysis*, 43 :245–296, 1992.

[107] F. Pascal. *Méthode de Galerkin non linéaire en discrétisation par éléments finis et pseudo-spectrale. Application à la mécanique des fluides.* Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, jan 1992.

[108] J. Pedlosky. *Geophysical fluid dynamics.* Springer, 1996.

[109] J. Pedlosky. *Ocean Circulation Theory.* Springer, 1996.

[110] N.A. Phillips. A coordinate system having some special advantages for numerical forcasting. *Journal of meteorologie*, 14 :184–185, 1957.

[111] O. Pironneau. On transport-diffusion algorithm and its applications to the navier-stokes equations. *Numer. Math*, 38 :309–332, 1982.

[112] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*. Springer, 1997.

[113] R. Robertson and L. Padman an M.D. Levine. A correction to the baroclinic pressure gradient term in the princeton ocean model. *J. Atm. Ocean Tech.*, 18 :1068–1075, 2001.

[114] A.F. Shchepetkin and J.C. McWilliams. A method for computing horizontal pressure gradient force in an ocean model with non-aligned vertical coordinatel. *J. Geophys. Res.*, 108, 2003.

[115] R. Temam. *Theory and numerical analysis of the Navier-Stokes equations*. North Holland, 1977.

[116] W.M. Washington and C.L. Parkinson. *An introduction to Three-Dimansionnal Climate Modeling*. University Science Books, 1986.