



Homologies d'algèbres Artin-Schelter régulières cubiques

Nicolas Marconnet

► To cite this version:

Nicolas Marconnet. Homologies d'algèbres Artin-Schelter régulières cubiques. Mathématiques [math]. Université Jean Monnet - Saint-Etienne, 2004. Français. NNT: . tel-00007763

HAL Id: tel-00007763

<https://theses.hal.science/tel-00007763>

Submitted on 15 Dec 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Homologies d'algèbres Artin-Schelter régulières cubiques

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Jean Monnet — Saint-Étienne
(spécialité Mathématiques)

par

Nicolas Marconnet

Soutenue le 9 décembre 2004 devant la commission d'examen :

Jacques ALEV	Université de Reims
Roland BERGER	Université de Saint-Étienne
Michel DUBOIS-VIOLETTE	C.N.R.S.
Bernhard KELLER	Université Paris VII
Thierry LAMBRE	Université de Clermont-Ferrand
Michel VAN DEN BERGH	Limburgs Universitair Centrum (Belgique)

Rapporteurs :

Bernhard KELLER	Université Paris VII
Michel VAN DEN BERGH	Limburgs Universitair Centrum (Belgique)

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Roland Berger pour ses conseils, ses explications, sa disponibilité tout au long de ces trois années. Cette thèse doit beaucoup aux innombrables heures passées à parler ensemble de mathématiques.

Je remercie vivement Bernhard Keller et Michel Van den Bergh d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je remercie également Jacques Alev, Michel Dubois-Violette et Thierry Lambre d'avoir bien voulu participer au jury de soutenance.

Je remercie les membres du département de mathématiques et plus particulièrement les membres du (bientôt ex-) LARAL pour leur accueil et pour les très bonnes conditions de travail dont j'ai bénéficié pendant trois ans. J'ai ainsi pu assister à de nombreuses conférences en France et à l'étranger.

Enfin, mes remerciements vont aussi à ma famille et à Anne Sophie pour leur soutien durant toutes ces années.

Table des matières

Introduction	v
1 Rappels	1
1.1 Définition des différentes homologies	1
1.2 Propriété de Koszul généralisée	3
2 Homologie de Hochschild	7
2.1 Une algèbre de Poisson associée à A	7
2.1.1 Changement de corps de base	7
2.1.2 Réécriture de A par générateurs et relations	10
2.1.3 Décomposition ordonnée des éléments de A	11
2.1.4 Filtration sur A	20
2.1.5 Suite spectrale associée à cette filtration	22
2.1.6 Une algèbre de Poisson associée à A	25
2.1.7 L'algèbre A vue comme déformation	26
2.1.8 Réécriture de la suite spectrale	27
2.1.9 Le crochet de Poisson provient d'un gradient	30
2.2 Homologie de Poisson	32
2.2.1 Théorème	32
2.2.2 Preuve	33
2.3 Deux cycles de Hochschild particuliers	43
2.3.1 Un morphisme de résolutions	43
2.3.2 Un quasi-isomorphisme	47
2.3.3 Deux cycles de Hochschild remarquables	48
2.4 Homologie de Hochschild de A	51
2.4.1 Théorème	51
2.4.2 Preuve	52
3 Cohomologie de de Rham, homologie cyclique...	59

4	Cohomologie de Hochschild	63
4.1	Un “petit complexe”...	63
4.2	Un isomorphisme entre deux “petits” complexes	67
4.3	Résumé de la situation et conclusion	69
5	Compléments	71
5.1	Cas non générique	71
5.2	Cohomologie de Hochschild graduée	72
5.3	Cohomologie des algèbres quadratiques	74
5.4	Morphismes du complexe de Koszul...	76
5.4.1	La bar-résolution	77
5.4.2	Cas des complexes de bimodules	78
5.4.3	Cas des complexes de modules	82
5.5	Autres contractés...	84
5.5.1	Homologies des autres contractés	84
5.5.2	L’algèbre AS-régulière cubique de type A	85
5.6	L’algèbre duale $A^!$ est-elle de Frobenius ?	87
5.6.1	Rappels	87
5.6.2	Algèbres AS-régulières cubiques de type A	89
5.6.3	Les autres types d’algèbres AS-régulières cubiques	91
5.6.4	L’algèbre $A^!$ est-elle symétrique ?	93

Introduction

Des analogues non-commutatifs d'algèbres de polynômes ont été introduits par Artin et Schelter dans leur article “Graded algebras of global dimension 3” [1] de 1987. Ce sont des k -algèbres $\mathbb{N}$ -graduées connexes A (i.e. $A = k \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \dots$) ayant certaines propriétés homologiques que l'on sait vérifiées par les algèbres de polynômes. Dans cette thèse, k désignera un corps commutatif (de caractéristique nulle à partir du Chapitre 2). Une k -algèbre $\mathbb{N}$ -graduée connexe est dite Artin-Schelter régulière si elle est de dimension globale finie d , de dimension de Gelfand-Kirillov finie (c'est-à-dire à croissance polynômiale) et Gorenstein. Cette dernière condition signifie que $Ext_A^q(k, A) = 0$ si $q \neq d$ et $Ext_A^d(k, A) \simeq k$. Pour simplifier, nous écrirons plus simplement AS-régulières au lieu de Artin-Schelter régulières. La condition de Gorenstein définie ci-dessus est parfois appelée AS-Gorenstein.

Dans ce qui suit, nous considérons uniquement des algèbres $\mathbb{N}$ -graduées connexes engendrées en degré 1. Les algèbres AS-régulières de dimension globale deux sont faciles à identifier [1]. À isomorphisme près, ce sont soit les plans quantiques $A = k\langle x, y \rangle / (xy - qyx)$, $q \neq 0$, soit les plans de Jordan $A = k\langle x, y \rangle / (yx - xy - x^2)$. Les algèbres AS-régulières de dimension globale 3 ont été classifiées par Artin et Schelter dans [1] et cette classification a été précisée par Artin, Tate et Van den Bergh dans [2]. Pour l'instant, il n'existe pas de classification des algèbres AS-régulières de dimension globale 4. Les algèbres AS-régulières sont le point de départ de la “géométrie algébrique non-commutative” (voir [31] pour une synthèse des travaux effectués sur ce sujet).

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux algèbres Artin-Schelter régulières de dimension globale 3. Ces algèbres sont soit de la forme $k\langle x, y, z \rangle / (f_1, f_2, f_3)$, où x, y, z sont trois générateurs de degré 1 et f_1, f_2, f_3 sont trois relations de degré 2, soit de la forme $k\langle x, y \rangle / (f_1, f_2)$ où x et y sont deux générateurs de degré 1 et f_1, f_2 sont deux relations de degré 3. Les algèbres de la première forme sont dites *quadratiques*, celles de la seconde forme sont dites *cubiques*. Les algèbres AS-régulières quadratiques sont classifiées en des types A, B, E, H, S_1 , S'_1 et S_2 . Chacun de ces types correspond à une famille d'algèbres A paramétrée par une variété algébrique irréductible, c'est-à-dire que les coefficients des relations f_1, f_2, f_3 des algèbres A sont paramétrés

par cette variété. Le type A correspond à la variété algébrique de plus grande dimension. En ce sens, le type A correspond au cas générique d'algèbres AS-régulières quadratiques. De la même façon, les algèbres AS-régulières cubiques sont classifiées en les types A, E, H, S_1 , S_2 et S'_2 , correspondant respectivement à une famille d'algèbres paramétrée par une variété algébrique irréductible. Le type A correspond à la variété algébrique irréductible de plus grande dimension. Le type A correspond donc là aussi au cas générique d'algèbres AS-régulières cubiques.

Artin, Tate et Van den Bergh ont donné des méthodes géométriques pour étudier ces algèbres dans leurs articles [2] et [3]. Ils ont montré en particulier que les algèbres AS-régulières de dimension globale 3 sont noethériennes et intègres.

Nous souhaitons calculer certaines homologies de ces algèbres lorsque le corps de base k est de caractéristique nulle. Si A est une k -algèbre, l'homologie de Hochschild de A à coefficients dans A , notée $HH_*(A)$, peut être vue comme un analogue dans le cas non-commutatif du module des formes différentielles d'une algèbre commutative unitaire. En effet, par le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg, $\Omega_{A|k}^* \simeq HH_*(A)$ si A est une algèbre commutative lisse (voir par exemple [20]). L'homologie cyclique $HC_*(A)$ de A peut être considérée comme un analogue non-commutatif de la cohomologie de de Rham. De plus l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique sont des invariants à isomorphisme d'algèbres près, mais aussi à équivalence de Morita près et même à équivalence de catégories dérivées près (voir [19]). Par ailleurs, la cohomologie de Hochschild de A , notée $HH^*(A)$, fournit également des invariants très importants puisque $HH^0(A)$ est le centre de A et que $HH^1(A)$ permet de déterminer les dérivations de A . Toutes ces homologies sont donc particulièrement intéressantes à étudier.

Dans son article “Non-commutative homology of some three-dimensional quantum spaces” de 1994 [33], Michel Van den Bergh a calculé l'homologie de Hochschild des algèbres AS-régulières de type A quadratiques à coefficients génériques, ainsi que l'homologie cyclique, l'homologie cyclique périodique et (en un sens non-commutatif) la cohomologie de de Rham de ces algèbres. Les algèbres AS-régulières de type A quadratiques sont les algèbres de la forme

$$A = k\langle x, y, z \rangle / (f_1, f_2, f_3)$$

avec

$$\begin{aligned} f_1 &= ayz + bzy + cx^2, \\ f_2 &= azx + bxz + cy^2, \end{aligned}$$

$$f_3 = axy + byx + cz^2,$$

où $(a : b : c) \in \mathbb{P}_k^2 \setminus S$ et

$$S = \{(a : b : c) \in \mathbb{P}_k^2; a^3 = b^3 = c^3\} \cup \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}.$$

Une telle algèbre A possède un élément central

$$C_3 = c(c^3 - b^3)y^3 + b(c^3 - a^3)yxz + a(b^3 - c^3)xyz + c(a^3 - c^3)x^3.$$

Nous fixons $(a, b, c) \in k^3$. On dit que l'algèbre A est à coefficients génériques si a, b et c sont $\mathbb{Q}$ -algébriquement indépendants. Rappelons par ailleurs que si E est un k -espace vectoriel $\mathbb{N}$ -gradué, on appelle série de Poincaré de E , et on note $P(E, t)$, la série formelle $\sum_{n=0}^{+\infty} \dim_k(E_n)t^n$. Van den Bergh obtient les résultats suivants :

Théorème (*Theorem 4.1. de [33]*)

Soit A une algèbre AS-régulière de type A quadratique à coefficients génériques. Alors les $HH_i(A)$ sont des $k[C_3]$ -modules libres respectivement de rang 8, 8, 1, 1 lorsque $i = 0, 1, 2, 3$. $HH_2(A)$ est engendré par Π et $HH_3(A)$ est engendré par Δ , où Π et Δ sont deux cycles que l'on connaît explicitement. Les k -espaces vectoriels gradués $HH_i(A)$ ont les séries de Poincaré suivantes :

$$P(HH_0(A), t) = \frac{(1+t)^3}{1-t^3},$$

$$P(HH_1(A), t) = \frac{(1+t)^3}{1-t^3} - 1,$$

$$P(HH_2(A), t) = P(HH_3(A), t) = \frac{t^3}{1-t^3}.$$

Corollaire (*Corollary 4.2. de [33]*)

(i) *La cohomologie de de Rham de A est donnée par*

$$H_{DR}^0(A) = k,$$

$$H_{DR}^i(A) = 0 \text{ si } i \neq 0.$$

(ii) *L'homologie cyclique de A est donnée par*

$$HC_0(A) = HH_0(A),$$

$$HC_2(A) = k \oplus HH_2(A),$$

$$HC_i(A) = 0 \text{ si } i \text{ est impair},$$

$$HC_i(A) = k \text{ si } i \text{ est pair et } i \geq 4.$$

(iii) *L'homologie cyclique périodique de A est donnée par*

$$\begin{cases} HC_*^{per}(A) \simeq k \text{ si } * \text{ est pair,} \\ HC_*^{per}(A) = 0 \text{ si } * \text{ est impair.} \end{cases}$$

Dans cette thèse, nous allons calculer les mêmes homologies dans le cas des algèbres AS-régulières de type A cubiques à coefficients génériques, en utilisant des techniques similaires à celles de Van den Bergh. Nous calculons aussi la cohomologie de Hochschild de ces algèbres, obtenant ainsi une dualité de Poincaré comme dans le cas quadratique [34].

Les algèbres AS-régulières de type A cubiques sont des algèbres graduées de la forme

$$A = k\langle x, y \rangle / (f_1, f_2)$$

avec

$$\begin{aligned} f_1 &= axy^2 + byxy + ay^2x + cx^3, \\ f_2 &= ayx^2 + bxyx + ax^2y + cy^3, \end{aligned}$$

où $(a : b : c) \in \mathbb{P}_k^2 \setminus S$, avec

$$S = \{(a : b : c) \in \mathbb{P}_k^2; a^2 = b^2 = c^2\} \cup \{(0 : 0 : 1), (0 : 1 : 0)\}.$$

Les générateurs x et y sont de degré 1. De plus, l'élément suivant est central :

$$C_4 = b(c^2 - a^2)yxyx + a(a^2 - b^2)yx^2y - a(c^2 - a^2)x^2y^2 - c(a^2 - b^2)x^4.$$

Remarque : On sait également d'après [1] que la série de Poincaré de l'algèbre A est $\frac{1}{(1-t)^2(1-t^2)}$, c'est-à-dire que c'est la série de Poincaré d'une algèbre de polynômes graduée $k[x, y, z]$ où x, y sont de degré 1 et z est de degré 2.

Voici les résultats principaux que nous obtenons dans cette thèse.

Théorème (*Théorème 2.4.1*)

Soit A une algèbre AS-régulière de dimension globale 3 de type A cubique, à coefficients génériques. Alors les $HH_i(A)$ sont des $k[C_4]$ -modules libres de rangs 9, 9, 1, 1 pour $i = 0, 1, 2, 3$ respectivement. $HH_2(A)$ est engendré par Π et $HH_3(A)$ est engendré par Δ , où ces deux cycles sont connus explicitement. Ce sont aussi des k -espaces vectoriels gradués qui possèdent les séries de Poincaré suivantes :

$$\begin{aligned} P(HH_0(A), t) &= \frac{t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1}{1 - t^4}, \\ P(HH_1(A), t) &= \frac{2t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t}{1 - t^4} = P(HH_0(A), t) - 1, \\ P(HH_2(A), t) &= \frac{t^4}{1 - t^4}, \end{aligned}$$

$$P(HH_3(A), t) = \frac{t^4}{1 - t^4}.$$

Corollaire (*Propositions 3.0.6, 3.0.7, 3.0.8*)

(i) La cohomologie de de Rham de A est donnée par

$$\begin{cases} H_{DR}^0(A) = k, \\ H_{DR}^i(A) = 0 \text{ si } i \neq 0. \end{cases}$$

(ii) L'homologie cyclique de A est donnée par les isomorphismes de k -espaces vectoriels gradués

$$\begin{cases} HC_0(A) = HH_0(A), \\ HC_2(A) \simeq k \oplus HH_2(A), \text{ } k \text{ concentré en degré } 0, \\ HC_i(A) = 0 \text{ si } i \text{ est impair,} \\ HC_i(A) \simeq k \text{ (concentré en degré } 0) \text{ si } i \text{ est pair et } i \geq 4. \end{cases}$$

(iii) L'homologie cyclique périodique de A est donnée par

$$\begin{cases} HC_*^{per}(A) \simeq k \text{ si } * \text{ est pair,} \\ HC_*^{per}(A) = 0 \text{ si } * \text{ est impair.} \end{cases}$$

Théorème (*Théorèmes 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4*)

On a des isomorphismes explicites de $k[C_4]$ -modules $HH^i(A) \simeq HH_{3-i}(A)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$. Autrement dit, A vérifie la dualité de Poincaré. On trouve en particulier que :

(i) le centre d'une algèbre AS-régulière de type A cubique à coefficients génériques est égal à $k[C_4]$,

(ii) $HH^1(A) = Der(A)/\{\text{dérivations intérieures}\}$ est le $k[C_4]$ -module libre de rang 1 engendré par la dérivation eulérienne D (égale à l'identité en degré 1),

(iii) $HH^2(A)$ et $HH^3(A)$ sont des $k[C_4]$ -modules libres de rang 9.

Nous passons maintenant en revue les différents chapitres de cette thèse.

Dans le premier chapitre, nous faisons des rappels sur les différentes homologies que nous allons calculer et sur la propriété de Koszul généralisée.

Dans le second chapitre, nous calculons l'homologie de Hochschild de A en suivant la méthode utilisée par Van den Bergh dans [33].

Nous commençons par montrer que A est la déformation d'une algèbre de polynômes. Pour cela, nous modifions le corps de base pour introduire un paramètre de déformation h . Puis, à la différence du cas quadratique, nous réécrivons les relations de A avec une variable supplémentaire $z = \frac{1}{h}[x, y]$, de degré 2. Nous montrons ensuite qu'il existe une décomposition ordonnée des

éléments de A , c'est-à-dire que tout élément de A s'écrit de façon unique comme la classe dans A d'une série en h à coefficients dans l'espace vectoriel engendré par les monômes ordonnés $x^i y^j z^k$. Ce résultat technique essentiel nous permet d'écrire une filtration de A par les puissances de h et de montrer que A est la déformation d'une algèbre de polynômes munie d'un crochet de Poisson. Nous notons $\mathcal{R}$ cette algèbre de Poisson.

Nous calculons ensuite l'homologie de Poisson de $\mathcal{R}$ et nous considérons la suite spectrale de Brylinski associée, dont le second terme est l'homologie de Poisson de $\mathcal{R}$ et qui converge vers $HH_*(A)$. Dans le cas quadratique, l'algèbre A vérifie la propriété de Koszul. C'est ce qu'utilise Van den Bergh pour montrer que la suite spectrale dégénère à l'ordre 2. Dans notre cas, les algèbres ne vérifient plus la propriété de Koszul classique, mais sont de Koszul au sens généralisé introduit par Roland Berger [6] en 2001. Nous introduisons un nouveau quasi-isomorphisme explicite entre le complexe de Hochschild de A et un certain complexe de Koszul généralisé associé à A qui calcule aussi l'homologie de Hochschild de A . Nous connaissons deux cycles de ce complexe de Koszul. Via le quasi-isomorphisme, nous obtenons alors deux cycles de Hochschild particuliers qui nous permettent de "remonter" deux cycles de Poisson remarquables. Nous en déduisons que la suite spectrale de Brylinski associée à la filtration de A dégénère à l'ordre 2, ce qui nous donne enfin l'homologie de Hochschild de A .

Dans le troisième chapitre, nous déduisons la cohomologie de de Rham, l'homologie cyclique et l'homologie cyclique périodique de A de l'homologie de Hochschild de A , en utilisant des résultats classiques.

Dans le quatrième chapitre, nous déduisons la cohomologie de Hochschild de A de l'homologie de Hochschild de A . Pour cela, nous utilisons là aussi la propriété de Koszul généralisée, qui nous permet d'écrire un quasi-isomorphisme explicite entre le complexe qui calcule la cohomologie de Hochschild et le complexe qui calcule l'homologie de Hochschild, obtenant ainsi une dualité de Poincaré. Notons que la dualité de Poincaré a été prouvée par la suite dans le cadre plus général des algèbres de Koszul généralisées, AS-Gorenstein et de dimension globale finie d quelconque par R. Berger et le présent auteur dans [10], en utilisant un théorème général de dualité dû à Van den Bergh [34]. Le calcul de la cohomologie de Hochschild nous permet de déterminer le centre de A , ce qui n'était pas connu.

Les résultats des chapitres 2, 3 et 4 ont fait l'objet d'une Note publiée aux Comptes Rendus Mathématiques [22] ainsi que d'un article plus détaillé paru dans Journal of Algebra [23].

Enfin, dans le dernier chapitre, nous faisons plusieurs compléments autour des résultats précédents et de la propriété de Koszul généralisée.

Nous commençons par comparer nos résultats, qui sont vrais pour des coefficients génériques, avec des résultats obtenus par P. Nuss [25] pour le cas particulier de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de Heisenberg. Nous voyons que les résultats peuvent être différents dans le cas non-générique.

Nous calculons ensuite la cohomologie de Hochschild graduée de A .

Dans la section suivante, nous explicitons l'isomorphisme donné par Van den Bergh [34] entre homologie et cohomologie de Hochschild pour les algèbres AS-régulières quadratiques de type A à coefficients génériques, en utilisant la méthode du chapitre 4 et les résultats de Van den Bergh sur l'homologie de Hochschild de ces algèbres [33]. En particulier, nous retrouvons le centre de ces algèbres.

Puis, suivant une idée de Bernhard Keller, nous explicitons une injection de la résolution de Koszul de A par des A - A -bimodules dans la bar-résolution de A , valable pour toute algèbre de Koszul généralisée, étendant ainsi le résultat obtenu dans la section 2.3.1.

Nous donnons ensuite quelques résultats (partiels) sur les homologies de certains contractés de 3-complexes associés à des algèbres de Koszul cubiques.

Enfin, nous examinons à quelles conditions l'algèbre duale $A^!$ est Frobenius si A est une algèbre AS-régulière cubique, complétant ainsi des résultats de l'article [10].

Chapitre 1

Rappels

Dans toute cette thèse, k est un corps commutatif et $\otimes$ est le produit tensoriel sur k .

1.1 Définition des différentes homologies

Les définitions qui suivent sont bien connues et se trouvent par exemple dans [17], [20] ou [33].

Soit A une k -algèbre associative. On définit le complexe de chaînes $(C_*(A), b)$, donné par $C_n(A) = A^{\otimes(n+1)}$, et

$$b(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = (-1)^n a_n a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n.$$

L'homologie de Hochschild de A à coefficients dans A est l'homologie du complexe $(C_*(A), b)$. On la note $HH_*(A)$.

Définition 1.1.1 *Un complexe mixte est un triplet (M, b, B) où M est un k -espace vectoriel $\mathbb{N}$ -gradué, et b et B sont des différentielles de degrés respectifs -1 et $+1$, vérifiant les relations $b^2 = B^2 = bB + Bb = 0$.*

Considérons l'homologie $H_*(M) = H_*(M, b)$ du complexe sous-jacent (M, b) . Alors B induit une différentielle de degré 1 sur $H_*(M)$, que l'on notera encore B , et la cohomologie du complexe $(H_*(M), B)$ est appelée la cohomologie de de Rham de (M, b, B) et est notée $H_{DR}^*(M)$. Considérons d'autre part le bi-

complexe :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b & & \\
 0 & \longleftarrow & M_2 & \xleftarrow{B} & M_1 & \xleftarrow{B} & M_0 & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow & & \\
 0 & \longleftarrow & M_1 & \xleftarrow{B} & M_0 & \longleftarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow b & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longleftarrow & M_0 & \longleftarrow & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 0 & \longleftarrow & 0 & & & & & &
 \end{array}$$

On a alors un complexe :

$$\cdots \xrightarrow{b+B} M_0 \oplus M_2 \oplus M_4 \xrightarrow{b+B} M_1 \oplus M_3 \xrightarrow{b+B} M_0 \oplus M_2 \xrightarrow{b+B} M_1 \xrightarrow{b+B} M_0.$$

On l'appelle le complexe total associé à (M, b, B) . L'homologie de ce complexe est appelée l'homologie cyclique de (M, b, B) et est notée $HC_*(M)$.

Le complexe périodique associé à (M, b, B) est défini par

$$\cdots \xrightarrow{b+B} \Pi_{i \geq 0} M_{2i} \xrightarrow{b+B} \Pi_{i \geq 0} M_{2i+1} \xrightarrow{b+B} \Pi_{i \geq 0} M_{2i} \xrightarrow{b+B} \cdots$$

Son homologie est appelée l'homologie cyclique périodique de (M, b, B) et est notée $HC_*^{per}(M)$ où $*$ est "pair" ou "impair".

Si on quotiente le bicomplexe ci-dessus par sa première colonne, on obtient la longue suite exacte de Connes :

$$\cdots \longrightarrow H_n(M) \longrightarrow HC_n(M) \xrightarrow{S} HC_{n-2}(M) \longrightarrow \cdots.$$

Si A est une k -algèbre associative, on définit un complexe mixte $(C(A), b, B)$ où $C(A)$ et b sont définis comme précédemment, et on définit B par :

$$\begin{aligned}
 B(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) &= \sum_{i=0}^n (-1)^{ni} 1 \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \\
 &+ (-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^{ni} a_i \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1.
 \end{aligned}$$

On définit alors la cohomologie de de Rham, l'homologie cyclique et l'homologie périodique de A par $H_{DR}^*(A) = H_{DR}^*(C(A))$, $HC_*(A) = HC_*(C(A))$ et $HC_*^{per}(A) = HC_*^{per}(C(A))$.

Si A est une k -algèbre $\mathbb{N}$ -graduée, on munit les $A^{\otimes n}$ de la graduation issue de celle de A : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(A^{\otimes n})_p = \bigoplus_{p_1 + \dots + p_n = p} A_{p_1} \otimes \dots \otimes A_{p_n}.$$

On remarque alors que les différentielles b et B de $C(A)$ sont homogènes de degré 0, et alors les $HH_i(A)$, $H_{DR}^i(A)$ et $HC_i(A)$ sont des k -espaces vectoriels gradués.

Considérons encore une k -algèbre associative A . On définit un complexe de cochaînes $(C^*(A), b^*)$, où $C^n(A) = \text{Hom}_k(A^{\otimes n}, A)$ et

$$\begin{aligned} b(f)(a_0, \dots, a_n) &= a_0 f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(a_0, \dots, a_{i-1} a_i, \dots, a_n) \\ &+ (-1)^{n+1} f(a_0, \dots, a_{n-1}) a_n. \end{aligned}$$

Alors la cohomologie de Hochschild $HH^*(A)$ de A à coefficients dans A est la cohomologie du complexe $(C^*(A), b^*)$. Si A est graduée, les k -espaces vectoriels $HH^*(A)$ ne sont pas gradués *a priori*.

1.2 Propriété de Koszul généralisée

La notion d'algèbre quadratique de Koszul est bien connue. Elle a été introduite par Priddy en 1970 [28], et a été étudiée dans de nombreux articles, en particulier par Beilinson, Ginzburg et Soergel en 1996 dans [5]. En 2001, Roland Berger a introduit dans [6] et [7] une propriété de Koszul généralisée, qui étend la notion de Koszulité aux algèbres N -homogènes, c'est-à-dire aux algèbres graduées qui ont des relations toutes concentrées en degré N , avec N un entier supérieur ou égal à 2. Cette propriété a ensuite été étudiée par Berger, Dubois-Violette et Wambst dans [8], par Berger et le présent auteur dans [10]. Dans cette partie, nous allons faire les rappels indispensables à la suite de notre travail. Nous n'exposerons pas toutes les propriétés des algèbres de Koszul généralisées et renvoyons le lecteur aux articles cités ci-dessus pour plus de détails. Certaines notations sont modifiées par rapport aux articles cités ci-dessus.

Soit V un k -espace vectoriel de dimension finie, considéré comme gradué et concentré en degré 1. Soit N un entier supérieur ou égal à 2 et R un sous-espace vectoriel de $V^{\otimes N}$. Alors l'algèbre $\mathbb{N}$ -graduée connexe $A = T(V)/(R)$ est dite N -homogène. Soit donc A une telle algèbre. Nous notons $A\text{-grMod}$

la catégorie des A -modules à gauche gradués dont les morphismes sont les morphismes homogènes de degré 0. Pour $n \geq 0$, on introduit un sous-espace W_n de $V^{\otimes n}$, défini par

$$W_n = \bigcap_{i+j+N=n} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j}$$

si $n \geq N$, $W_n = V^{\otimes n}$ si $1 \leq n \leq N-1$ et $W_0 = k$. Alors le complexe de Koszul $K_l(A)$ de A est le complexe de $A\text{-grMod}$

$$\cdots \rightarrow K_i \xrightarrow{\delta_i} K_{i-1} \xrightarrow{\delta_{i-1}} \cdots \xrightarrow{\delta_2} K_1 \xrightarrow{\delta_1} K_0 \rightarrow 0,$$

avec $K_i = A \otimes W_{n(i)}$, l'entier $n(i)$ étant défini par

$$\begin{cases} n(2q) = qN, \\ n(2q+1) = qN+1, \end{cases}$$

pour tout q entier positif. La différentielle δ_i est donnée par l'inclusion de $W_{n(i)}$ dans K_{i-1} .

Définition 1.2.1 Soit A une algèbre N -homogène. On dit que cette algèbre est de Koszul généralisée si le complexe $K_l(A)$ est une résolution de ${}_A k$, c'est-à-dire si le complexe :

$$K_l(A) \xrightarrow{\epsilon_A} k \rightarrow 0$$

est exact, où ϵ est la projection canonique de A sur k .

Il existe une autre façon d'écrire le complexe $K_l(A)$. En effet, soit $A^\dagger = T(V^*)/(R^\perp)$ l'algèbre duale de A , où V^* est le dual linéaire de V et $R^\perp$ est l'orthogonal de R dans $V^{*\otimes N} \simeq (V^{\otimes N})^*$. On vérifie que pour tout $i \geq 0$, $W_{n(i)} \simeq A_{n(i)}^{\dagger*}$, et que le complexe $K_l(A)$ est isomorphe au complexe

$$\cdots \xrightarrow{\xi_l^{N-1}} A \otimes A_{N+1}^{\dagger*} \xrightarrow{\xi_l} A \otimes A_N^{\dagger*} \xrightarrow{\xi_l^{N-1}} A \otimes V \xrightarrow{\xi_l} A \rightarrow 0$$

où $\xi_l = \sum_i e_i \otimes e_i^*$ et $\{e_i\}_i$ est une base de V , $\{e_i^*\}_i$ est la base de V^* duale de $\{e_i\}_i$.

Par ailleurs, le complexe de Koszul $K_l(A)$ est le contracté d'un N -complexe $\overline{K}_l(A)$, c'est-à-dire d'un complexe où la condition $\delta^2 = 0$ est remplacée par la condition $\overline{\delta}^N = 0$. Ce N -complexe est donné par

$$\overline{K}_l(A) : \cdots \xrightarrow{\overline{\delta}_{n+1}^1} A \otimes W_n \xrightarrow{\overline{\delta}_n} A \otimes W_{n-1} \xrightarrow{\overline{\delta}_{n-1}^1} \cdots \xrightarrow{\overline{\delta}_2} A \otimes V \xrightarrow{\overline{\delta}_1} A \rightarrow 0,$$

où pour tout i , le morphisme $\overline{\delta}_i : A \otimes W_i \rightarrow A \otimes W_{i-1}$ prolonge l'injection canonique de W_i dans $A \otimes W_{i-1}$. A partir de ce N -complexe, on retrouve $K_l(A)$

en gardant la première flèche puis en regroupant les $N - 1$ flèches suivantes, et en réitérant ce processus.

Nous donnons enfin une caractérisation de la propriété de Koszul à l'aide de complexes de bimodules. On note $A\text{-grMod-}A$ la catégorie des A - A -bimodules gradués, dont les morphismes sont les morphismes de A - A -bimodules homogènes de degré 0. On note d_l le morphisme de $A\text{-grMod-}A$ de $A \otimes W_n \otimes A$ dans $A \otimes W_{n-1} \otimes A$, obtenu en injectant W_n dans $A \otimes W_{n-1}$. De même, on définit un morphisme d_r de $A \otimes W_n \otimes A$ dans $A \otimes W_{n-1} \otimes A$, obtenu en injectant W_n dans $W_{n-1} \otimes A$. Soit $K_{l-r}(A)$ le complexe de Koszul de bimodules défini par

$$\cdots \xrightarrow{d'^{N-1}} A \otimes W_{N+1} \otimes A \xrightarrow{d'} A \otimes W_N \otimes A \xrightarrow{d'^{N-1}} A \otimes V \otimes A \xrightarrow{d'} A \otimes A$$

où $d' = d_l - d_r$ et $d'^{N-1} = d_l^{N-1} + d_l^{N-2}d_r + \cdots + d_l d_r^{N-2} + d_r^{N-1}$.

Proposition 1.2.2 *Soit A une algèbre N -homogène. Alors A est de Koszul généralisée si et seulement si le complexe $K_{l-r}(A)$ est une résolution de A dans $A\text{-grMod-}A$, c'est-à-dire si et seulement si le complexe*

$$K_{l-r}(A) \xrightarrow{\mu} A \rightarrow 0$$

est exact, où μ est le produit de A .

Chapitre 2

Homologie de Hochschild

2.1 Une algèbre de Poisson associée à A

2.1.1 Changement de corps de base

Soit k un corps commutatif de caractéristique nulle. Soit A une algèbre AS-régulière de type A cubique. Cela signifie que $A = k\langle x, y \rangle / (f_1, f_2)$ où

$$f_1 = axy^2 + byxy + ay^2x + cx^3,$$

$$f_2 = ayx^2 + bxyx + ax^2y + cy^3,$$

et $(a : b : c) \in \mathbb{P}_k^2 \setminus S$, avec

$$S = \{(a : b : c) \in \mathbb{P}_k^2; a^2 = b^2 = c^2\} \cup \{(0 : 0 : 1), (0 : 1 : 0)\}.$$

On fixe maintenant $(a, b, c) \in k^3$. On suppose $a \neq b$. Quitte à multiplier tous les coefficients par le scalaire $\frac{3}{b-a}$, on peut supposer que $b-a=3$. On définit ensuite p et q de telle sorte que

$$a = -p - 1,$$

$$b = -p + 2,$$

$$c = -q.$$

Dans toute la suite, nous supposons que p et q sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Nous disons alors que l'algèbre A est à coefficients génériques. On peut réécrire les générateurs de l'espace des relations de A sous la forme

$$f_1 = (-xy^2 + 2yxy - y^2x) - p(xy^2 + yxy + y^2x) - qx^3,$$

$$f_2 = (-yx^2 + 2xyx - x^2y) - p(yx^2 + xyx + x^2y) - qy^3,$$

soit encore

$$\begin{aligned} f_1 &= [y, [x, y]] - p(xy^2 + yxy + y^2x) - qx^3, \\ f_2 &= [[x, y], x] - p(yx^2 + xyx + x^2y) - qy^3, \end{aligned}$$

où $[x, y] = xy - yx$ est le commutateur de x et y .

Remarque : Supposer p et q algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ équivaut à supposer a , b et c algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ dans l'écriture initiale de f_1 et f_2 . En effet, si a , b , et c sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors $a' = \frac{3a}{b-a}$ et $c' = \frac{3c}{b-a}$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et il en est de même pour $p = -a' - 1$ et $q = -c'$. Réciproquement, supposons que f_1 et f_2 sont définis avec $a = -p - 1$, $b = -p + 2$ et $c = -q$ où p et q sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On multiplie f_1 et f_2 par un élément r qui est $\mathbb{Q}$ -algébriquement indépendant de p et q (on agrandit k au besoin). Alors $a' = ra$, $b' = rb = ra + 3r$ et $c' = rc$ sont $\mathbb{Q}$ -algébriquement indépendants.

Proposition 2.1.1 *D'après l'expression des relations f_1 et f_2 , on peut se limiter à travailler sur le corps $\mathbb{Q}(p, q)$. Plus précisément, on a un isomorphisme de k -algèbres graduées*

$$A \simeq k \otimes_{\mathbb{Q}(p, q)} \mathbb{Q}(p, q)\langle x, y \rangle / (f_1, f_2)$$

et un isomorphisme de k -espaces vectoriels gradués

$$HH_*(A) \simeq k \otimes_{\mathbb{Q}(p, q)} HH_*(\mathbb{Q}(p, q)\langle x, y \rangle / (f_1, f_2)).$$

Preuve. Le premier isomorphisme provient du fait que les relations f_1 et f_2 de A sont à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}(p, q)$. On peut alors construire facilement un isomorphisme de k -algèbres :

$$\begin{aligned} k \otimes_{\mathbb{Q}(p, q)} \mathbb{Q}(p, q)\langle x, y \rangle / (f_1, f_2) &\longrightarrow A \\ \alpha \otimes a &\mapsto \alpha a \end{aligned}$$

de bijection réciproque :

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow k \otimes_{\mathbb{Q}(p, q)} \mathbb{Q}(p, q)\langle x, y \rangle / (f_1, f_2) \\ x &\mapsto 1 \otimes x \\ y &\mapsto 1 \otimes y \end{aligned}$$

Le second isomorphisme provient du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes n} & \xrightarrow{\sim} & k \otimes_{\mathbb{Q}(p, q)} (\mathbb{Q}(p, q)\langle x, y \rangle / (f_1, f_2))^{\otimes n} \\ \downarrow b & & \downarrow 1_k \otimes_{\mathbb{Q}(p, q)} b \\ A^{\otimes(n-1)} & \xrightarrow{\sim} & k \otimes_{\mathbb{Q}(p, q)} (\mathbb{Q}(p, q)\langle x, y \rangle / (f_1, f_2))^{\otimes(n-1)} \end{array}$$

où b est le bord de Hochschild et 1_k est l'identité de k . ■

Proposition 2.1.2 *Il existe une extension $k_0((h))$ du corps $\mathbb{Q}(p, q)$, telle que dans cette extension,*

$$\begin{aligned} p &= p_1 h^2, \\ q &= q_1 h^2, \end{aligned}$$

où les coefficients p_1 et q_1 appartiennent au corps k_0 et sont encore algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Ici, $k_0((h))$ désigne le corps des séries de Laurent formelles en une indéterminée h , à coefficients dans le corps k_0 .

Preuve. Posons $k_0 = \mathbb{Q}(X, Y)$ où X et Y sont deux indéterminées. Puisque p et q sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et que Xh^2, Yh^2 sont des éléments de $k_0((h))$ qui sont $\mathbb{Q}$ -algébriquement indépendants, le morphisme de $\mathbb{Q}$ -algèbres :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(p, q) &\longrightarrow k_0((h)) \\ p &\mapsto Xh^2 \\ q &\mapsto Yh^2 \end{aligned}$$

est bien défini et est une injection de $\mathbb{Q}(p, q)$ dans $k_0((h))$. En posant $p_1 = X$, $p_2 = Y$, on obtient le résultat souhaité. ■

Proposition 2.1.3 *On a des isomorphismes*

$$k_0((h))\langle x, y \rangle / (f_1, f_2) \simeq k_0((h)) \otimes_{\mathbb{Q}(p, q)} \mathbb{Q}(p, q)\langle x, y \rangle / (f_1, f_2),$$

$$HH_*(k_0((h))\langle x, y \rangle / (f_1, f_2)) \simeq k_0((h)) \otimes_{\mathbb{Q}(p, q)} HH_*(\mathbb{Q}(p, q)\langle x, y \rangle / (f_1, f_2)),$$

en identifiant $\mathbb{Q}(p, q)$ avec son image dans $k_0((h))$ dans ces isomorphismes.

Preuve. Preuve analogue à celle de la proposition 2.1.1. ■

En particulier, on a

$$HH_*(\mathbb{Q}(p, q)\langle x, y \rangle / (f_1, f_2)) \simeq \mathbb{Q}(p, q) \otimes_{k_0((h))} HH_*(k_0((h))\langle x, y \rangle / (f_1, f_2)).$$

Il nous suffit donc de connaître l'homologie de Hochschild de $k_0((h))\langle x, y \rangle / (f_1, f_2)$ pour avoir celle de A , car alors

$$HH_*(A) \simeq k \otimes_{\mathbb{Q}(p, q)} [\mathbb{Q}(p, q) \otimes_{k_0((h))} HH_*(k_0((h))\langle x, y \rangle / (f_1, f_2))].$$

On considère dorénavant que $k = k_0((h))$. Dans le calcul qui suit, il nous suffit de savoir que les éléments p_1 et q_1 de k_0 sont $\mathbb{Q}$ -algébriquement indépendants.

2.1.2 Réécriture de A par générateurs et relations

Dans cette partie, nous allons introduire une variable supplémentaire z , ce qui nous permettra de faire apparaître des commutateurs dans les relations de A .

On suppose que $k = k_0((h))$ (voir la sous-section 2.1.1).

Les générateurs de l'espace des relations de A s'écrivent alors

$$f_1 = [y, [x, y]] - p_1 h^2 (xy^2 + yxy + y^2x) - q_1 h^2 x^3,$$

$$f_2 = [[x, y], x] - p_1 h^2 (yx^2 + xyx + x^2y) - q_1 h^2 y^3.$$

Soit $\tilde{A}$ la k -algèbre graduée $\tilde{A} = k\langle x, y, z \rangle / (g, f_1, f_2)$, où

$$\begin{aligned} g &= [x, y] - hz, \\ f_1 &= [y, [x, y]] - p_1 h^2 (xy^2 + yxy + y^2x) - q_1 h^2 x^3, \\ f_2 &= [[x, y], x] - p_1 h^2 (yx^2 + xyx + x^2y) - q_1 h^2 y^3, \end{aligned}$$

où x, y sont de degré 1 et z est de degré 2; f_1 et f_2 sont comme précédemment.

Proposition 2.1.4 *On a un isomorphisme de k -algèbres graduées entre A et $\tilde{A}$, qui est donné par*

$$\begin{aligned} A = k\langle x, y \rangle / (f_1, f_2) &\longrightarrow \tilde{A} = k\langle x, y, z \rangle / (g, f_1, f_2) \\ x &\mapsto x \\ y &\mapsto y \end{aligned}$$

Preuve. Notons ϕ le morphisme de k -algèbres graduées ci-dessus (qui est bien défini de façon évidente). On définit facilement le morphisme de k -algèbres graduées ψ :

$$\begin{aligned} \psi : \tilde{A} = k\langle x, y, z \rangle / (f_1, f_2, z - \frac{1}{h}[x, y]) &\longrightarrow A = k\langle x, y \rangle / (f_1, f_2) \\ x &\mapsto x \\ y &\mapsto y \\ z &\mapsto \frac{1}{h}[x, y] \end{aligned}$$

On s'aperçoit que $\psi \circ \phi(x) = x$ et $\psi \circ \phi(y) = y$, donc, puisque x et y sont deux générateurs de l'algèbre $A = k\langle x, y \rangle / (f_1, f_2)$, $\psi \circ \phi$ est égale à l'identité de A .

D'autre part, $\phi \circ \psi(x) = x$, $\phi \circ \psi(y) = y$ et $\phi \circ \psi(z) = \frac{1}{h}[x, y] = z$. Comme x, y, z sont des générateurs de l'algèbre $\tilde{A} = k\langle x, y, z \rangle / (f_1, f_2, z - \frac{1}{h}[x, y])$, l'application $\phi \circ \psi$ est égale à l'identité de $\tilde{A}$.

Donc ϕ est un isomorphisme d'algèbres graduées, et $\phi^{-1} = \psi$. ■

Dans ce qui suit, nous allons calculer l'homologie de Hochschild de $\tilde{A}$, qui sera égale à l'homologie de Hochschild de A d'après l'isomorphisme ci-dessus.

Pour simplifier les notations, nous noterons maintenant A l'algèbre $\tilde{A}$.

Lemme 2.1.5 *On a un isomorphisme canonique évident d'algèbres graduées :*

$$k\langle x, y, z \rangle / (f_1, f_2, z - \frac{1}{h}[x, y]) \simeq \left(k\langle x, y, z \rangle / (z - \frac{1}{h}[x, y]) \right) / (f_1, f_2).$$

Ce dernier isomorphisme nous permet de réécrire les générateurs de l'espace des relations de A de la manière suivante :

$$g = [x, y] - hz, \quad (1.1)$$

$$f_1 = [y, z] - p_1 h(xy^2 + yxy + y^2x) - q_1 hx^3, \quad (1.2)$$

$$f_2 = [z, x] - p_1 h(yx^2 + xyx + x^2y) - q_1 hy^3. \quad (1.3)$$

Dans la suite, g , f_1 et f_2 sont donnés par les égalités (1.1), (1.2) et (1.3) ci-dessus.

Pour résumer, l'algèbre A est la $k_0((h))$ -algèbre associative définie par les 3 générateurs x , y et z de degrés respectifs 1, 1 et 2 et les relations homogènes

$$[x, y] = hz,$$

$$[y, z] = p_1 h(xy^2 + yxy + y^2x) + q_1 hx^3,$$

$$[z, x] = p_1 h(yx^2 + xyx + x^2y) + q_1 hy^3.$$

De plus, p_1 et q_1 sont deux éléments $\mathbb{Q}$ -algébriquement indépendants du corps commutatif de caractéristique nulle k_0 .

2.1.3 Décomposition ordonnée des éléments de A

Le but de cette partie est de donner une écriture unique des éléments de A comme séries de Laurent formelles en h , afin de pouvoir introduire une filtration de A par les puissances de h .

Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de A

D'après (1.1), (1.2) et (1.3), les éléments g , f_1 et f_2 de $k_0((h))\langle x, y, z \rangle$ appartiennent en fait à $k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle$. On peut alors définir la $k_0[[h]]$ -algèbre graduée

$$\mathcal{A} = k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle / (g, f_1, f_2)$$

où on a encore x et y de degré 1 et z de degré 2.

Lemme 2.1.6 *Comme $k_0((h))$ -algèbre graduée, $k_0((h)) \otimes_{k_0[[h]]} \mathcal{A}$ est isomorphe à A .*

Preuve. On a une injection naturelle $k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle \hookrightarrow k_0((h))\langle x, y, z \rangle$ qui nous permet de définir de façon évidente le morphisme de $k_0[[h]]$ -algèbres graduées suivant :

$$\begin{aligned} k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle / (g, f_1, f_2) &\longrightarrow k_0((h))\langle x, y, z \rangle / (g, f_1, f_2) \\ a &\mapsto \tilde{a}. \end{aligned}$$

Alors l'application

$$\begin{aligned} k_0((h)) \otimes_{k_0[[h]]} \mathcal{A} &\longrightarrow A \\ \alpha \otimes a &\mapsto \alpha \tilde{a} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $k_0((h))$ -algèbres graduées. Sa bijection réciproque est le morphisme de $k_0((h))$ -algèbres graduées de A dans $k_0((h)) \otimes_{k_0[[h]]} \mathcal{A}$ défini sur les générateurs de A par :

$$\begin{aligned} x &\mapsto 1 \otimes x \\ y &\mapsto 1 \otimes y \\ z &\mapsto 1 \otimes z \end{aligned}$$

■

Nous donnons maintenant un résultat classique d'algèbre commutative (cf [11] chap. II paragraphe 3 n° 2) qui nous permettra de prouver la Proposition 2.1.8.

Lemme 2.1.7 *Soit A un anneau local intègre, m son idéal maximal, K le corps des fractions de A , et M un A -module de type fini. Alors M est libre si $[(A/m) \otimes_A M : (A/m)] = [K \otimes_A M : K]$.*

Preuve. Notons p la valeur commune des deux dimensions. Soit $(1 \otimes y_i)_{i=1, \dots, p}$ une base du (A/m) -espace vectoriel $(A/m) \otimes_A M$. Alors, d'après le lemme de Nakayama, $(y_i)_{i=1, \dots, p}$ est un système de générateurs du A -module M . Donc les éléments $(1 \otimes y_i)_{i=1, \dots, p}$ engendrent le K -espace vectoriel $K \otimes_A M$. Comme cet espace est de dimension p sur K , les éléments $(1 \otimes y_i)_{i=1, \dots, p}$ forment une base de cet espace vectoriel. Donc les $(y_i)_{i=1, \dots, p}$ sont linéairement indépendants dans le A -module M , et ils forment donc une base de ce module. Donc M est un A -module libre. ■

Proposition 2.1.8 *$\mathcal{A}$ est un $k_0[[h]]$ -module plat.*

Preuve. On pose

$$\mathcal{R} = k_0 \otimes_{k_0[[h]]} \mathcal{A} \simeq k_0 \langle x, y, z \rangle / ([x, y], [x, z], [y, z]) = k_0[x, y, z].$$

La série de Poincaré de $\mathcal{R}$ sur k_0 est égale à celle de A sur $k_0((h))$ d'après [1] (voir la remarque donnée dans l'introduction). En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$[k_0 \otimes_{k_0[[h]]} \mathcal{A}_n : k_0] = [k_0((h)) \otimes_{k_0[[h]]} \mathcal{A}_n : k_0((h))]. \quad (1.4)$$

L'anneau $k_0[[h]]$ est local intègre d'idéal maximal (h) , son corps des fractions est $k_0((h))$. Son corps résiduel est $k_0[[h]]/(h) \simeq k_0$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n$ est un $k_0[[h]]$ -module de type fini. Alors d'après (1.4) et le lemme 2.1.7, $\mathcal{A}_n$ est un $k_0[[h]]$ -module libre pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\mathcal{A} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{A}_n$ est aussi un $k_0[[h]]$ -module libre. En particulier, c'est un $k_0[[h]]$ -module plat. ■

Proposition 2.1.9 *Le morphisme de $k_0[[h]]$ -algèbres :*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\longrightarrow k_0((h)) \otimes_{k_0[[h]]} \mathcal{A} \simeq A \\ a &\longrightarrow 1 \otimes a \end{aligned} \quad (1.5)$$

est injectif. En particulier, h n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathcal{A}$.

Preuve. Nous avons vu dans la proposition précédente que $\mathcal{A}$ est un $k_0[[h]]$ -module plat. Donc si on tensorise l'injection canonique $i : k_0[[h]] \hookrightarrow k_0((h))$ par $\mathcal{A}$, on obtient l'injection

$$k_0[[h]] \otimes_{k_0[[h]]} \mathcal{A} \xrightarrow{i \otimes 1_{\mathcal{A}}} k_0((h)) \otimes_{k_0[[h]]} \mathcal{A}$$

qui est exactement l'application (1.5). Par cette injection, h s'envoie sur lui-même. Comme h est inversible dans A , h n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathcal{A}$. ■

On pourra donc considérer, en identifiant $\mathcal{A}$ avec son image dans A via l'injection (1.5), que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de la $k_0[[h]]$ -algèbre A .

Écriture des éléments de A comme séries formelles

Le diagramme commutatif de $k_0[[h]]$ -algèbres ci-dessous est formé d'injections canoniques :

$$\begin{array}{ccc} k_0((h)) \langle x, y, z \rangle & \xrightarrow{j_2} & k_0 \langle x, y, z \rangle((h)) \\ \uparrow j_1 & & \uparrow j_4 \\ k_0[[h]] \langle x, y, z \rangle & \xrightarrow{j_3} & k_0 \langle x, y, z \rangle[[h]]. \end{array} \quad (1.6)$$

Remarque : Nous notons $k_0\langle x, y, z \rangle_i$ la composante homogène de degré i de la k_0 -algèbre graduée $k_0\langle x, y, z \rangle$ (i est le degré total). On voit que $k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle$ est la sous-algèbre de $k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]$ formée des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} Q_n h^n$ qui vérifient : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \bigoplus_{i=0}^N k_0\langle x, y, z \rangle_i$. De façon analogue, $k_0((h))\langle x, y, z \rangle$ est la sous-algèbre de $k_0\langle x, y, z \rangle((h))$ formée des séries de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} Q_n h^n$ qui vérifient : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $Q_n \in \bigoplus_{i=0}^N k_0\langle x, y, z \rangle_i$. Nous noterons $k_0\langle x, y, z \rangle_{\leq N}$ le k_0 -espace vectoriel de dimension finie $\bigoplus_{i=0}^N k_0\langle x, y, z \rangle_i$, et nous noterons également $k_0\langle x, y, z \rangle_{> N}$ le k_0 -espace vectoriel $\bigoplus_{i=N+1}^{+\infty} k_0\langle x, y, z \rangle_i$.

Le diagramme (1.6) nous permet de définir de façon évidente le diagramme commutatif suivant de $k_0[[h]]$ -algèbres :

$$\begin{array}{ccc} A = k_0((h))\langle x, y, z \rangle / (f_1, f_2, g) & \xrightarrow{i_2} & k_0\langle x, y, z \rangle((h)) / (f_1, f_2, g) \\ \uparrow i_1 & & \uparrow i_4 \\ \mathcal{A} = k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle / (f_1, f_2, g) & \xrightarrow{i_3} & k_0\langle x, y, z \rangle[[h]] / (f_1, f_2, g). \end{array}$$

D'après la proposition 2.1.9, l'application i_1 est injective. Nous allons montrer que les applications i_2 , i_3 et i_4 sont également injectives. Pour cela, nous avons besoin du lemme technique suivant :

Lemme 2.1.10 (i) Soit f un élément de $k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle$, soient $a, b \in k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]$ et soit $N \in \mathbb{N}$. Alors il existe deux ensembles finis X' et X'' , des familles finies $\{\alpha_{i'}\}_{i' \in X'}$, $\{\beta_{i'}\}_{i' \in X'}$ d'éléments de $k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle$, et des familles finies $\{\alpha_{i''}\}_{i'' \in X''}$ et $\{\beta_{i''}\}_{i'' \in X''}$ d'éléments de $k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]$, telles que

$$afb = \sum_{i' \in X'} \alpha_{i'} f \beta_{i'} + \sum_{i'' \in X''} \alpha_{i''} f \beta_{i''},$$

où pour tout $i' \in X'$, les $\alpha_{i'} f \beta_{i'}$ sont des séries en h dont tous les coefficients appartiennent à $k_0\langle x, y, z \rangle_{\leq N}$, et pour tout $i'' \in X''$, les $\alpha_{i''} f \beta_{i''}$ sont des séries en h dont tous les coefficients appartiennent à $k_0\langle x, y, z \rangle_{> N}$.

(ii) On a un résultat analogue en remplaçant $k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]$ par $k_0\langle x, y, z \rangle((h))$, $k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle$ par $k_0((h))\langle x, y, z \rangle$, et en supposant toujours que $f \in k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle$.

Preuve. On prouve seulement (i), la preuve de (ii) étant analogue. On peut supposer f homogène pour le degré total en x, y, z , nous notons alors $\deg(f)$ le degré de f . On peut écrire $a = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n h^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{i \in \mathbb{N}} a_n^{(i)}) h^n$, où pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_n^{(i)}$ est la partie homogène de degré i de a_n . Pour tout n , la famille $\{a_n^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ est à support fini. De même, on peut écrire $b = \sum_{m \in \mathbb{N}} b_m h^m = \sum_{m \in \mathbb{N}} (\sum_{j \in \mathbb{N}} b_m^{(j)}) h^m$, où pour tout $j \in \mathbb{N}$, $b_m^{(j)}$ est la partie homogène de degré j de b_m . Si $N < \deg(f)$, afb est une série en h dont tous les coefficients

appartiennent à $k_0\langle x, y, z \rangle_{>N}$, et on a déjà la décomposition souhaitée. On suppose donc que $N \geq \deg(f)$, et on pose $N' = N - \deg(f)$. On a

$$\begin{aligned}
afb &= \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_n^{(i)} h^n \right) f \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_m^{(j)} h^m \right) \right] \right] \\
&= \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \left[\sum_{i \in \mathbb{N}} a_n^{(i)} f \left[\sum_{j \in \mathbb{N}} b_m^{(j)} h^{n+m} \right] \right] \\
&= \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \left[\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_n^{(i)} f b_m^{(j)} \right] h^{n+m} \\
&= \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \left[\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2; i+j \leq N'} a_n^{(i)} f b_m^{(j)} \right] h^{n+m} + \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \left[\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2; i+j > N'} a_n^{(i)} f b_m^{(j)} \right] h^{n+m} \\
&= [*] + [**].
\end{aligned}$$

Puisque $k_0\langle x, y, z \rangle_{\leq N'}$ est un espace vectoriel de dimension finie, il existe des familles finies $\{\alpha_{i'}\}_{i' \in X'}$ et $\{\beta_{i'}\}_{i' \in X'}$ d'éléments de $k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle$ telles que $[*] = \sum_{i' \in X'} \alpha_{i'} f \beta_{i'}$ et que tout $\alpha_{i'} f \beta_{i'}$ soit une série formelle dont les coefficients appartiennent à $k_0\langle x, y, z \rangle_{\leq N}$.

On s'intéresse à présent au terme $[**]$. Nous allons utiliser la partition suivante :

$$\begin{aligned}
\{(i, j) \in \mathbb{N}^2; i + j > N'\} &= \{(i, j) \in \mathbb{N}^2; 0 \leq i \leq N', j > N' - i\} \\
&\sqcup \{(i, j) \in \mathbb{N}^2; 0 \leq j \leq N', i > N'\} \\
&\sqcup \{(i, j) \in \mathbb{N}^2; i > N', j > N'\}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
[**] &= \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \left[a_n^{(0)} f \left(\sum_{j > N'} b_m^{(j)} \right) + a_n^{(1)} f \left(\sum_{j > N'-1} b_m^{(j)} \right) + \cdots + a_n^{(N')} f \left(\sum_{j > 0} b_m^{(j)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{i > N'} a_n^{(i)} \right) f b_m^{(0)} + \left(\sum_{i > N'} a_n^{(i)} \right) f b_m^{(1)} + \cdots + \left(\sum_{i > N'} a_n^{(i)} \right) f b_m^{(N')} \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{i > N'} a_n^{(i)} \right) f \left(\sum_{j > N'} b_m^{(j)} \right) \right] h^{n+m} \\
&= \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^{(0)} h^n \right] f \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j > N'} b_m^{(j)} \right) h^m \right] + \cdots + \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^{(N')} h^n \right] f \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j > 0} b_m^{(j)} \right) h^m \right] \\
&\quad + \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i > N'} a_n^{(i)} \right) h^n \right] f \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} b_m^{(0)} h^m \right] + \cdots + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i > N'} a_n^{(i)} \right) h^n \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} b_m^{(N')} h^m \right] \\
&\quad + \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i > N'} a_n^{(i)} \right) h^n \right] f \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j > N'} b_m^{(j)} \right) h^m \right].
\end{aligned}$$

D'où l'existence de familles finies $\{\alpha_{i''}\}_{i'' \in X''}$ et $\{\beta_{i''}\}_{i'' \in X''}$ d'éléments de $k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]$ telles que $[**] = \sum_{i'' \in X''} \alpha_{i''} f \beta_{i''}$ et que tout $\alpha_{i''} f \beta_{i''}$ soit une

série formelle dont les coefficients appartiennent à $k_0\langle x, y, z \rangle_{>N}$. ■

Proposition 2.1.11 *On a une injection naturelle d'algèbres :*

$$i_3 : k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle / (f_1, f_2, g) \hookrightarrow k_0\langle x, y, z \rangle[[h]] / (f_1, f_2, g).$$

Preuve. Notons j_3 l'injection canonique $k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle \hookrightarrow k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]$. Soit $a \in k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle$ tel que $j_3(a)$ appartienne à l'idéal bilatère engendré par f_1, f_2 et g dans $k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]$. D'une part, on peut écrire

$$j_3(a) = \sum_{n \geq 0} Q_n h^n \quad (1.7)$$

où $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $k_0\langle x, y, z \rangle$ qui vérifie la propriété : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in k_0\langle x, y, z \rangle_{\leq N}$.

D'autre part, on peut écrire d'après le lemme 2.1.10 (i) :

$$j_3(a) = \sum_{i' \in X'} (\alpha_{i'}^1 f_1 \beta_{i'}^1 + \alpha_{i'}^2 f_2 \beta_{i'}^2 + \alpha_{i'}^3 g \beta_{i'}^3) + \sum_{i'' \in X''} (\alpha_{i''}^1 f_1 \beta_{i''}^1 + \alpha_{i''}^2 f_2 \beta_{i''}^2 + \alpha_{i''}^3 g \beta_{i''}^3),$$

où

- X' est un ensemble fini, et pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, $\{\alpha_{i'}^j\}_{i' \in X'}$ et $\{\beta_{i'}^j\}_{i' \in X'}$ sont des familles finies d'éléments de $k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle$, telles que pour tout $i' \in X'$, $\alpha_{i'}^1 f_1 \beta_{i'}^1$, $\alpha_{i'}^2 f_2 \beta_{i'}^2$ et $\alpha_{i'}^3 g \beta_{i'}^3 \in k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]$ sont des séries en h dont tous les coefficients appartiennent à $k_0\langle x, y, z \rangle_{\leq N}$;
- X'' est un ensemble fini, et pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, $\{\alpha_{i''}^j\}_{i'' \in X''}$ et $\{\beta_{i''}^j\}_{i'' \in X''}$ sont des familles finies d'éléments de $k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]$, telles que pour tout $i'' \in X''$, $\alpha_{i''}^1 f_1 \beta_{i''}^1$, $\alpha_{i''}^2 f_2 \beta_{i''}^2$ et $\alpha_{i''}^3 g \beta_{i''}^3 \in k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]$ sont des séries en h dont tous les coefficients appartiennent à $k_0\langle x, y, z \rangle_{>N}$.

Alors d'après l'écriture (1.7), la seconde somme est nulle, et finalement a appartient à l'idéal bilatère engendré par f_1, f_2 et g dans $k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle$. Ceci montre que l'application i_3 est injective. ■

Proposition 2.1.12 *On a une injection naturelle d'algèbres :*

$$i_2 : k_0((h))\langle x, y, z \rangle / (f_1, f_2, g) \hookrightarrow k_0\langle x, y, z \rangle((h)) / (f_1, f_2, g).$$

Preuve. Démonstration analogue à celle de la proposition 2.1.11. ■

Proposition 2.1.13 *On a une injection naturelle d'algèbres :*

$$i_4 : k_0\langle x, y, z \rangle[[h]] / (f_1, f_2, g) \hookrightarrow k_0\langle x, y, z \rangle((h)) / (f_1, f_2, g).$$

Preuve. On note j_4 l'injection canonique $k_0\langle x, y, z \rangle[[h]] \hookrightarrow k_0\langle x, y, z \rangle((h))$. Soit $a \in k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]$ tel que $j_4(a)$ appartienne à l'idéal bilatère engendré par f_1, f_2 et g dans $k_0\langle x, y, z \rangle((h))$. On a donc

$$j_4(a) = \sum_{k \in K} a_k^1 f_1 b_k^1 + a_k^2 f_2 b_k^2 + a_k^3 g b_k^3, \quad (1.8)$$

où K est un ensemble fini, $a_k^l, b_k^l \in k_0\langle x, y, z \rangle((h))$ pour tout $k \in K$ et $l \in \{1, 2, 3\}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. D'après le lemme 2.1.10 (ii), on peut écrire

$$j_4(a) = \sum_{i' \in X'} (\alpha_{i'}^1 f_1 \beta_{i'}^1 + \alpha_{i'}^2 f_2 \beta_{i'}^2 + \alpha_{i'}^3 g \beta_{i'}^3) + \sum_{i'' \in X''} (\alpha_{i''}^1 f_1 \beta_{i''}^1 + \alpha_{i''}^2 f_2 \beta_{i''}^2 + \alpha_{i''}^3 g \beta_{i''}^3),$$

où :

- X' est un ensemble fini, et pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, $\{\alpha_{i'}^j\}_{i' \in X'}$ et $\{\beta_{i'}^j\}_{i' \in X'}$ sont des familles finies d'éléments de $k_0((h))\langle x, y, z \rangle$ telles que pour tout $i' \in X'$, $\alpha_{i'}^1 f_1 \beta_{i'}^1, \alpha_{i'}^2 f_2 \beta_{i'}^2$ et $\alpha_{i'}^3 g \beta_{i'}^3 \in k_0\langle x, y, z \rangle((h))$ sont des séries de Laurent en h dont tous les coefficients appartiennent à $k_0\langle x, y, z \rangle_{\leq N}$;
- X'' est un ensemble fini, et pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, $\{\alpha_{i''}^j\}_{i'' \in X''}$ et $\{\beta_{i''}^j\}_{i'' \in X''}$ sont des familles finies d'éléments de $k_0\langle x, y, z \rangle((h))$ telles que pour tout $i'' \in X''$, $\alpha_{i''}^1 f_1 \beta_{i''}^1, \alpha_{i''}^2 f_2 \beta_{i''}^2$ et $\alpha_{i''}^3 g \beta_{i''}^3 \in k_0\langle x, y, z \rangle((h))$ sont des séries de Laurent en h dont tous les coefficients appartiennent à $k_0\langle x, y, z \rangle_{> N}$.

Nous notons alors $a_{\leq N}$ la somme $\sum_{i' \in X'} (\alpha_{i'}^1 f_1 \beta_{i'}^1 + \alpha_{i'}^2 f_2 \beta_{i'}^2 + \alpha_{i'}^3 g \beta_{i'}^3)$, et $a_{> N}$ la somme $\sum_{i'' \in X''} (\alpha_{i''}^1 f_1 \beta_{i''}^1 + \alpha_{i''}^2 f_2 \beta_{i''}^2 + \alpha_{i''}^3 g \beta_{i''}^3)$. Par construction de $a_{\leq N}$, cet élément appartient à l'idéal engendré par f_1, f_2 et g dans $k_0((h))\langle x, y, z \rangle$. D'autre part, $a \in k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]$ et on peut écrire

$$a = \sum_{n \in \mathbb{N}} Q'_n h^n + \sum_{n \in \mathbb{N}} Q''_n h^n,$$

où les $Q'_n \in k_0\langle x, y, z \rangle$ appartiennent à $k_0\langle x, y, z \rangle_{\leq N}$ et les Q''_n appartiennent à $k_0\langle x, y, z \rangle_{> N}$. Alors $a_{\leq N} = \sum_{n \in \mathbb{N}} Q'_n h^n \in k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle$ (voir la remarque au début de 2.1.3). D'après l'injectivité de i_1 (proposition 2.1.9), puisque $a_{\leq N}$ appartient à $k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle$ et à l'idéal bilatère engendré par f_1, f_2 et g dans $k_0((h))\langle x, y, z \rangle$, $a_{\leq N}$ appartient à l'idéal bilatère engendré par f_1, f_2 et g dans $k_0[[h]]\langle x, y, z \rangle$. En particulier, nous avons montré que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $a_{\leq N}$ est dans l'idéal bilatère engendré par f_1, f_2 et g dans $k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]$.

Reprenons maintenant l'écriture (1.8). Pour tout $l \in \{1, 2, 3\}$, pour tout $k \in K$, a_k^l s'écrit comme une série de Laurent formelle $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{k,n}^l h^n$, où $\{a_{k,n}^l\}_{n \in \mathbb{Z}}$

est une famille à support borné inférieurement d'éléments de $k_0\langle x, y, z \rangle$. De même, pour tout $l \in \{1, 2, 3\}$, pour tout $k \in K$, b_k^l s'écrit comme une série de Laurent formelle $\sum_{m \in \mathbb{Z}} b_{k,m}^l h^m$, où $\{b_{k,m}^l\}_{m \in \mathbb{Z}}$ est une famille à support borné inférieurement d'éléments de $k_0\langle x, y, z \rangle$.

Soit N assez grand pour que pour tout $l \in \{1, 2, 3\}$ pour tout $k \in K$, pour tout n et $m \in \mathbb{Z}$ vérifiant $n + m < 0$, on ait $\deg(a_{k,n}^1 f_1 b_{k,m}^1) \leq N$, $\deg(a_{k,n}^2 f_2 b_{k,m}^2) \leq N$ et $\deg(a_{k,n}^3 g b_{k,m}^3) \leq N$. Alors, par construction de N , $a_{>N}$ appartient à l'idéal bilatère engendré par f_1 , f_2 et g dans $k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]$. D'après ce que nous avons montré précédemment, $a_{\leq N}$ appartient à ce même idéal. Donc $a = a_{\leq N} + a_{>N}$ appartient à l'idéal bilatère engendré par f_1 , f_2 et g dans $k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]$. ■

La proposition 2.1.11 permet d'écrire tout élément a de $\mathcal{A}$ comme la classe $a = \overline{\sum_{i \geq 0} Q_i h^i}$ d'une certaine série formelle où les Q_i appartiennent à $k_0\langle x, y, z \rangle$. On remarquera que, si $(Q_i)_{i \geq 0}$ est une famille d'éléments de $k_0\langle x, y, z \rangle$, la série $\sum_{i \geq 0} \overline{Q_i h^i}$ est convergente dans $k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]/(f_1, f_2, g)$ muni de la topologie h -adique, et sa somme coïncide avec la classe de la série formelle $\sum_{i \geq 0} Q_i h^i$. La proposition 2.1.12 permet d'écrire tout élément a de A comme la classe d'une certaine série de Laurent formelle $a = \overline{\sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i h^i}$ où $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ est une famille à support borné inférieurement d'éléments de $k_0\langle x, y, z \rangle$. Enfin, d'après la proposition 2.1.13, on peut voir $k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]/(f_1, f_2, g)$ comme une sous-algèbre de $k_0\langle x, y, z \rangle((h))/(f_1, f_2, g)$.

Nous noterons maintenant $\hat{\mathcal{A}}$ l'algèbre $k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]/(f_2, f_2, g)$, et $\hat{A}$ l'algèbre $k_0\langle x, y, z \rangle((h))/(f_2, f_2, g)$. Pour résumer, toutes les applications sont injectives dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_2} & \hat{A} \\ i_1 \uparrow & & \uparrow i_4 \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{i_3} & \hat{\mathcal{A}} \end{array}$$

Décomposition ordonnée des éléments de A

On notera $\mathcal{P}$ le k_0 -sous-espace vectoriel de $k_0\langle x, y, z \rangle$ engendré par les monômes ordonnés en x , y et z . On pose plus précisément

$$\mathcal{P} = \text{Vect}_{k_0} \{x^i y^j z^k; (i, j, k) \in \mathbb{N}^3\}.$$

Lemme 2.1.14 *Pour tout $a \in \hat{\mathcal{A}}$, il existe un et un seul $P_0 \in \mathcal{P}$ tel que $a - \overline{P_0} \in h\hat{\mathcal{A}}$.*

Preuve. Soit $a = \sum_{i \geq 0} \overline{Q_i} h^i$ dans $\hat{\mathcal{A}}$, où les Q_i appartiennent à $k_0\langle x, y, z \rangle$. Les relations de $\hat{\mathcal{A}}$ sont de la forme

$$\begin{aligned} yx &= xy + h(\cdots), \\ zx &= xz + h(\cdots), \\ zy &= yz + h(\cdots). \end{aligned}$$

Donc il existe $P_0 \in \mathcal{P}$ tel que $\overline{Q_0} - \overline{P_0} \in h\hat{\mathcal{A}}$. Par suite, $a - \overline{P_0} \in h\hat{\mathcal{A}}$.

Considérons les morphismes de k_0 -algèbres $\alpha : k_0\langle x, y, z \rangle \rightarrow \hat{\mathcal{A}}$, $Q \mapsto \overline{Q}$, et $p : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}/h\hat{\mathcal{A}}$ canonique. On vient juste de montrer que la restriction de $p \circ \alpha$ à $\mathcal{P}$ est surjective, et il nous reste à prouver que cette restriction est injective.

Par un théorème classique d'isomorphisme, on identifie la k_0 -algèbre $\hat{\mathcal{A}}/h\hat{\mathcal{A}}$ à $k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]/(f_1, f_2, g, h)$, si bien que $p \circ \alpha$ est le morphisme canonique de k_0 -algèbres :

$$k_0\langle x, y, z \rangle \longrightarrow k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]/(f_1, f_2, g, h).$$

Vérifions que son noyau est contenu dans l'idéal bilatère I engendré par les trois commutateurs $[x, y]$, $[y, z]$, $[z, x]$ (l'autre inclusion est évidente). Soit u un élément de $k_0\langle x, y, z \rangle[[h]]$ qui soit dans l'idéal bilatère engendré par f_1, f_2, g, h . On voit que le terme constant en h de u est une somme de termes de la forme $v[x, y]w + v'[y, z]w' + v''[z, x]w''$ avec v, v', v'', w, w', w'' dans $k_0\langle x, y, z \rangle$. Si u coïncide avec son terme constant, on a bien le résultat voulu.

Donc $k_0\langle x, y, z \rangle/I \simeq k_0[x, y, z]$. Puisque $\{x^i y^j z^k\}_{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3}$ forme une base de $k_0[x, y, z]$, $\mathcal{P}$ est un supplémentaire de I dans $k_0\langle x, y, z \rangle$, et $p \circ \alpha$ restreinte à $\mathcal{P}$ est bien une injection. ■

Proposition 2.1.15 *Pour tout $a \in \hat{\mathcal{A}}$, il existe des éléments $P_0, P_1, \dots$ de $\mathcal{P}$ uniques tels que $a = \sum_{i \geq 0} \overline{P_i} h^i$.*

Preuve. L'existence de tels éléments se déduit du lemme 2.1.14 par une récurrence immédiate.

Soient maintenant deux familles $(P_0, P_1, \dots)$ et $(P'_0, P'_1, \dots)$ d'éléments de $\mathcal{P}$ qui vérifient $a = \sum_{i \geq 0} \overline{P_i} h^i = \sum_{i \geq 0} \overline{P'_i} h^i$. Supposons que ces deux familles soient différentes. Soit $n \in \mathbb{N}$ le plus petit entier naturel tel que $P_n \neq P'_n$. On a alors

$$\overline{P_n} h^n + \overline{P_{n+1}} h^{n+1} + \cdots = \overline{P'_n} h^n + \overline{P'_{n+1}} h^{n+1} + \cdots.$$

Comme h n'est pas un diviseur de zéro dans $\hat{\mathcal{A}}$ (car on a une injection d'algèbres $\hat{\mathcal{A}} \hookrightarrow \hat{A}$, et h est inversible dans $\hat{A}$), on a l'égalité suivante dans $\hat{\mathcal{A}}$:

$$\overline{P_n} + \overline{P_{n+1}} h + h^2(\cdots) = \overline{P'_n} + \overline{P'_{n+1}} h + h^2(\cdots).$$

On a alors $P_n = P'_n$ d'après le lemme 2.1.14, ce qui est absurde. On a donc prouvé l'unicité. ■

Proposition 2.1.16 *Décomposition ordonnée des éléments de $\hat{A}$.*

Pour tout $a \in \hat{A}$, il existe une unique famille $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{P}$, à support borné inférieurement, telle que $a = \overline{\sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i h^i}$.

Preuve. Supposons que $a = \overline{\sum_{i \geq p} Q_i h^i}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et où les Q_i sont des éléments de $k_0\langle x, y, z \rangle$. On a alors $a = h^p \overline{\sum_{i \geq 0} Q_{i+p} h^i} = h^p a'$ où a' est un élément de $\hat{A}$. On déduit alors l'existence et l'unicité de l'écriture souhaitée de la proposition précédente. ■

Corollaire 2.1.17 *Décomposition ordonnée des éléments de A .*

Pour tout $a \in A$, il existe une unique famille $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{P}$, à support borné inférieurement, telle que $a = \overline{\sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i h^i}$.

Remarque Si a est un élément de la composante homogène A_n de A (pour la graduation d'algèbre de A), les P_i apparaissant dans la décomposition ordonnée de a appartiennent tous à $\mathcal{P}_n$. En effet, si $a \in A_n$, il existe une famille à support fini $\{Q_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de $k_0\langle x, y, z \rangle_n$ telle que $a = \overline{\sum_{i \in \mathbb{Z}} Q_i h^i}$. On montre alors par une récurrence immédiate que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $P_i \in \mathcal{P}_n$.

2.1.4 Filtration sur A

Nous allons maintenant introduire une filtration d'algèbres sur $\hat{A}$, en utilisant la décomposition ordonnée des éléments de $\hat{A}$ définie précédemment. On en déduira une filtration d'algèbres sur A .

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on note $F_p(\hat{A})$ le k_0 -sous-espace vectoriel de $\hat{A}$ défini par $F_p(\hat{A}) = \{a \in \hat{A}; a = \overline{\sum_{i \geq p} P_i h^i}; P_i \in \mathcal{P}\}$. On a :

- $F_p(\hat{A}) \supset F_{p+1}(\hat{A})$,
- $1 \in F_0(\hat{A})$,
- pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, le produit de $\hat{A}$ induit une application

$$F_p(\hat{A}) \times F_q(\hat{A}) \longrightarrow F_{p+q}(\hat{A}).$$

En effet, soit $a \in F_p(\hat{A})$ et $b \in F_q(\hat{A})$. Il existe une famille $(P_p, P_{p+1}, \dots)$ d'éléments de $\mathcal{P}$ tels que $a = \overline{\sum_{i \geq p} P_i h^i}$, et une famille $(Q_q, Q_{q+1}, \dots)$ d'éléments de $\mathcal{P}$ tels que $b = \overline{\sum_{i \geq q} Q_i h^i}$. Alors $ab = \overline{P_p Q_q h^{p+q} + h^{p+q+1}(\dots)}$, et donc $ab = h^{p+q} c$ où $c \in \hat{A}$. On sait alors qu'il existe une famille $(R_0, R_1, \dots)$ d'éléments de $\mathcal{P}$ tels que $c = \overline{\sum_{i \geq 0} R_i h^i}$ et donc $ab = \overline{\sum_{i \geq p+q} R_{i-(p+q)} h^i}$. On a alors bien $ab \in F_{p+q}(\hat{A})$.

Donc F est une filtration de l'algèbre $\hat{A}$. D'après la proposition 2.1.16 (partie "existence"), on a $\cup_{p \in \mathbb{Z}} F_p(\hat{A}) = \hat{A}$, et donc la filtration F est exhaustive.

D'après cette même proposition (partie “unicité”), on a $\cap_{p \in \mathbb{Z}} F_p(\hat{A}) = 0$, ce qui signifie que la filtration F est séparée. Donc F est une filtration exhaustive et séparée de l'algèbre $\hat{A}$. D'après le corollaire 2.1.17, la restriction de F à A est encore une filtration exhaustive et séparée de l'algèbre A . On remarque que la filtration F restreinte à l'algèbre $\mathcal{A}$ correspond à la filtration h -adique sur $\mathcal{A}$. Ce n'est bien sûr pas le cas sur A puisque h est inversible dans A .

Remarque : On a $F_0(A) = \mathcal{A}$.

Proposition 2.1.18 *L'algèbre $\hat{A}$ est le complété de $\mathcal{A}$ pour la topologie induite par la filtration F , $\hat{A}$ est le complété de A pour cette même topologie. L'algèbre A n'est donc pas complète pour F . Cependant, chaque composante homogène A_n de A (pour la graduation d'algèbre de A) est complète. On pourrait dire que l'algèbre A munie de la filtration F est complète dans la catégorie des k -algèbres graduées.*

Preuve. L'algèbre $\hat{A}$ est complète pour la topologie h -adique, c'est-à-dire pour la topologie induite par la filtration F . La sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\hat{A}$ n'est pas complète, par exemple $\sum_{i \in \mathbb{N}} \overline{x^i} h^i$ est la limite dans $\hat{A}$ d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, mais n'appartient pas à $\mathcal{A}$. Tout élément de $\hat{A}$ est dans le complété de $\mathcal{A}$: soit $a \in \hat{A}$ et soit $\sum_{i \in \mathbb{N}} \overline{P_i} h^i$ son écriture unique. Alors a est la limite dans $\hat{A}$ de la suite $(\sum_{i=0}^p \overline{P_i} h^i)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$. Donc $\hat{A}$ est bien le complété de $\mathcal{A}$.

On montre de façon analogue que $\hat{A}$ est le complété de A pour la topologie induite par la filtration F .

Enfin, soit $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer que A_n est complet, il suffit de montrer que c'est un fermé de $\hat{A}$. Soit $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A_n qui converge vers $a \in \hat{A}$. Alors pour tout $q_0 \in \mathbb{N}$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ et une famille $\{P_i\}_{i \leq q_0}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ tels que pour tout $p > p_0$, a_p ait pour décomposition ordonnée : $a_p = \overline{\sum_{i \leq q_0} (P_i h^i) + h^{q_0+1}(\dots)}$. Alors, d'après la remarque 2.1.3, tous les P_i appartiennent à $\mathcal{P}_n$. On en déduit que $a = \overline{\sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i h^i}$ appartient à A_n . Donc A_n est complète pour F . ■

Nous allons maintenant calculer le gradué associé à A pour la filtration F . Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} gr_p(A) &= F_p(A)/F_{p+1}(A) \\ &= \{h^p \overline{P}; P \in \mathcal{P}\} \\ &\simeq h^p \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Le produit $gr_p(A) \times gr_q(A) \longrightarrow gr_{p+q}(A)$ s'écrit sur les bases de $gr_p(A)$ et

$gr_q(A)$ de la manière suivante :

$$(h^p(x^{i_1}y^{j_1}z^{k_1}), h^q(x^{i_2}y^{j_2}z^{k_2})) \mapsto h^{p+q}(x^{i_1+i_2}y^{j_1+j_2}z^{k_1+k_2})$$

puisque l'on a $xy = yx$, $yz = zy$ et $zx = xz$ modulo $h\mathcal{A}$. On en déduit un isomorphisme de k_0 -algèbres graduées $gr_F(A) \simeq k_0[x, y, z][h, h^{-1}]$, puisque l'on a des isomorphismes de k_0 -espaces vectoriels $gr_p(A) \simeq h^p\mathcal{P} \simeq h^p k_0[x, y, z]$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et que le produit de $k_0[x, y, z][h, h^{-1}]$ coïncide avec celui de $gr_F(A)$.

On a donc $gr_F(A) \simeq k_0[x, y, z][h, h^{-1}]$.

2.1.5 Suite spectrale associée à cette filtration

Nous avons donc maintenant une $k_0((h))$ -algèbre graduée A , munie d'une filtration F par les puissances de h . Le gradué associé à A pour cette filtration est la k_0 -algèbre commutative $k_0[x, y, z][h, h^{-1}]$. Nous noterons dans la suite $\mathcal{R} = k_0[x, y, z]$.

Regardons maintenant la filtration F sur le complexe de Hochschild $(C(A), b)$ (voir le chapitre de rappels). La filtration F sur A s'étend en une filtration sur $C(A)$, que l'on notera encore F , de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$F_p(A^{\otimes n}) = \bigoplus_{p_1 + \dots + p_n = p} F_{p_1}(A) \otimes \dots \otimes F_{p_n}(A).$$

La filtration obtenue est exhaustive et séparée. Le bord b respecte cette filtration, si bien que l'on peut définir un complexe gradué $(gr_F C(A), b)$. On a un isomorphisme naturel $gr_F(A^{\otimes n}) \simeq gr_F(A)^{\otimes n}$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit un isomorphisme en homologie : $H_*(gr_F(C(A)), b) \simeq HH_*(gr_F(A))$. Considérons la suite spectrale associée à la filtration F . Son premier terme est $E^1 = H_*(gr_F(C(A)), b) \simeq HH_*(gr_F(A))$. Nous allons montrer que cette suite spectrale converge faiblement vers $HH_*(A)$ (au sens de [35]).

Rappelons d'abord comment est définie la suite spectrale associée à une filtration. Nous adaptons les définitions de [35] dans le cas d'une filtration décroissante sur un complexe de chaînes.

Soit (C, d) un complexe de chaînes et F une filtration décroissante sur C , compatible avec la différentielle d (c'est-à-dire que $d(F_p C) \subset F_p C$) :

$$\dots \supset F_{p-1}C \supset F_p C \supset F_{p+1}C \supset \dots$$

Soient $p, q \in \mathbb{Z}$. On définit

$$E_{p,q}^0 = F_p(C_{-p-q}) / F_{p+1}(C_{-p-q}).$$

Nous noterons $\eta_{p,q}$ la surjection canonique

$$\eta_{p,q} : F_p C_{-p-q} \longrightarrow F_p C_{-p-q} / F_{p+1} C_{-p-q} = E_{p,q}^0.$$

Soit $r \in \mathbb{N}$. On définit

$$A_{p,q}^r = \{c \in F_p C_{-p-q}; d(c) \in F_{p+r} C_{-p-q-1}\},$$

$$Z_{p,q}^r = \eta_{p,q}(A_{p,q}^r).$$

On remarque que $d(A_{p-r+1,q+r-2}^{r-1}) \subset F_p C_{-p-q}$. On pose alors

$$B_{p,q}^r = \eta_{p,q}(d(A_{p-r+1,q+r-2}^{r-1})).$$

On pose $E_{p,q}^r = Z_{p,q}^r / B_{p,q}^r$. En particulier, nous avons $E_{p,q}^1 = H_{-p-q}(F_p C / F_{p+1} C)$. Nous définissons encore

$$Z_{p,q}^\infty = \bigcap_{r=1}^\infty Z_{p,q}^r, B_{p,q}^\infty = \bigcup_{r=1}^\infty B_{p,q}^r, E_{p,q}^\infty = Z_{p,q}^\infty / B_{p,q}^\infty.$$

On a les inclusions

$$0 = B_{p,q}^0 \subset B_{p,q}^1 \subset \cdots \subset B_{p,q}^r \subset \cdots \subset B_{p,q}^\infty \subset Z_{p,q}^\infty \subset \cdots \subset Z_{p,q}^r \subset \cdots \subset Z_{p,q}^1 \subset Z_{p,q}^0 = E_{p,q}^0.$$

La différentielle d induit des isomorphismes

$$Z_{p,q}^r / Z_{p,q}^{r+1} \xrightarrow{\sim} B_{p+r,q-r+1}^{r+1} / B_{p+r,q-r+1}^r. \quad (1.9)$$

La différentielle d permet aussi de définir une application $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p+r,q-r+1}^r$, qui se décompose de la façon suivante :

$$E_{p,q}^r = Z_{p,q}^r / B_{p,q}^r \rightarrow Z_{p,q}^r / Z_{p,q}^{r+1} \xrightarrow{\sim} B_{p+r,q-r+1}^{r+1} / B_{p+r,q-r+1}^r \rightarrow Z_{p+r,q-r+1}^r / B_{p+r,q-r+1}^r = E_{p+r,q-r+1}^r.$$

On montre alors que $\ker(d_{p,q}^r) / \text{im}(d_{p-r,q+r-1}^r) \simeq E_{p,q}^{r+1}$. Pour tout $r \geq 1$, l'endomorphisme d^r de E^r est une différentielle pour laquelle $H(E^r) \simeq E^{r+1}$. On appelle suite spectrale la suite des E^r munis des différentielles d^r .

Définition 2.1.19 *La suite spectrale est dite faiblement convergente vers $H_*(C)$ si $E_{p,q}^\infty \simeq F_p H_{-p-q}(C) / F_{p+1} H_{-p-q}(C)$.*

Définition 2.1.20 *On dit qu'une suite spectrale est régulière si pour tous p et q , on a $Z_{p,q}^\infty = Z_{p,q}^r$ pour r assez grand.*

On a le résultat suivant sur les suites spectrales associées à des filtrations (voir [35] page 139) :

Théorème 2.1.21 *Soit (C, d) un complexe muni d'une filtration décroissante complète et exhaustive. On suppose que la suite spectrale associée à cette filtration est régulière. Alors cette suite spectrale converge faiblement vers $H_*(C)$.*

Revenons maintenant au cas qui nous intéresse. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $C(A)_n$ le sous-complexe de $C(A)$ formé des composantes homogènes de degré n (pour la graduation initiale de A). Puisque la différentielle b préserve la graduation de $C(A)$, on a $C(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C(A)_n$. Le complexe $C(A)_n$ est un complexe de k -espaces vectoriels de dimensions finies, sur lequel la filtration F est complète (d'après la proposition 2.1.18) et exhaustive.

Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$. Puisque

$$gr_p(C_q(A)_n) = gr_p((A^{\otimes(q+1)})_n) \simeq (k_0[x, y, z]^{\otimes(q+1)})_n h^p,$$

on a un isomorphisme de $k_0[h, h^{-1}]$ -modules : $gr_F(C(A)_n) \simeq C(k_0[x, y, z])_n[h, h^{-1}]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la suite spectrale associée au complexe $C(A)_n$. Soient p, q deux nombres entiers relatifs.

$$E_{p,q}^0 = F_p(C_{-p-q}(A)_n) / F_{p+1}(C_{-p-q}(A)_n) \simeq h^p C_{-p-q}(k_0[x, y, z])_n$$

et donc $E_{p,q}^0 = Z_{p,q}^0$ est un k_0 -espace vectoriel de dimension finie. Considérons alors la suite infinie d'inclusions :

$$\cdots \subset Z_{p,q}^r \subset \cdots \subset Z_{p,q}^3 \subset Z_{p,q}^2 \subset Z_{p,q}^1 \subset E_{p,q}^0.$$

Puisque $E_{p,q}^0$ est un k_0 -espace vectoriel de dimension finie et que les $Z_{p,q}^i$ sont des k_0 -sous-espaces-vectoriels de $E_{p,q}^0$, il existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tel que $Z_{p,q}^r = Z_{p,q}^{r_0}$ pour tout $r \geq r_0$. Donc d'après le Théorème 2.1.21, la suite spectrale associée à la filtration F sur le complexe $C(A)_n$ converge faiblement vers $H_*(C(A)_n)$, c'est-à-dire que

$$E_{p,q}^\infty(C(A)_n) \simeq F_p H_{-p-q}(C(A)_n) / F_{p+1} H_{-p-q}(C(A)_n).$$

Comme $C(A)$ est la somme directe des $C(A)_n$, on a

$$\begin{aligned} E_{p,q}^\infty(C(A)) &\simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} F_p H_{-p-q}(C(A)_n) / F_{p+1} H_{-p-q}(C(A)_n) \\ &\simeq F_p H_{-p-q}(C(A)) / F_{p+1} H_{-p-q}(C(A)) \\ &\simeq F_p H H_{-p-q}(A) / F_{p+1} H H_{-p-q}(A) \end{aligned}$$

et donc la suite spectrale associée à la filtration F sur $C(A)$ converge faiblement vers $HH_*(A)$.

C'est cette suite spectrale qui va nous permettre de calculer $HH_*(A)$. On a $E_{p,q}^1 = H_{-p-q}(F_p(C(A))/F_{p+1}(C(A)))$ et $E_{p,q}^\infty \simeq F_p HH_{-p-q}(A)/F_{p+1} HH_{-p-q}(A)$. Nous allons réécrire différemment son premier terme afin de pouvoir calculer son second terme E^2 . Puis nous montrerons que cette suite spectrale dégénère à l'ordre 2, c'est-à-dire que pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, $E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^2$, ce qui nous permettra d'obtenir $E_{p,q}^\infty$, puis $HH_*(A)$ puisque la suite spectrale converge faiblement.

2.1.6 Une algèbre de Poisson associée à A

Définition 2.1.22 *Crochet de Poisson, algèbre de Poisson.*

Soit R une algèbre commutative. Une application bilinéaire antisymétrique $\{\cdot, \cdot\} : R \times R \longrightarrow R$ est un crochet de Poisson si c'est une bidérivation et si elle vérifie l'identité de Jacobi : $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$ pour tous $f, g, h \in R$. Une algèbre commutative munie d'un crochet de Poisson est dite algèbre de Poisson.

Nous allons voir le crochet $[\cdot, \cdot]$ de $\mathcal{A}$ (défini par $[a, b] = ab - ba$) comme une déformation d'un crochet de Poisson sur $\mathcal{R} \simeq k_0[x, y, z]$, modulo la projection $p : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{R} = k_0 \otimes_{k_0[[h]]} \mathcal{A}$, $a \mapsto 1 \otimes a$, dont le noyau est $F_1 \mathcal{A} = h\mathcal{A}$. Le crochet $[\cdot, \cdot]$ est entièrement déterminé par les valeurs $[x, y]$, $[y, z]$ et $[z, x]$. Ces termes peuvent tous s'écrire comme des séries formelles en h sans termes constants à coefficients dans $\mathcal{A}$. On peut alors considérer l'application $\frac{1}{h}[\cdot, \cdot] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, qui est clairement une bidérivation et qui vérifie l'identité de Jacobi.

On définit d'autre part une bidérivation antisymétrique (forcément unique) $\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ sur les générateurs de l'algèbre $\mathcal{R}$ par

$$\begin{aligned} \{x, y\} &= z, \\ \{y, z\} &= 3p_1 xy^2 + q_1 x^3, \\ \{z, x\} &= 3p_1 x^2 y + q_1 y^3. \end{aligned}$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.1.23 *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \xrightarrow{\frac{1}{h}[\cdot, \cdot]} & \mathcal{A} \\ \downarrow p \times p & & \downarrow p \\ \mathcal{R} \times \mathcal{R} & \xrightarrow{\{\cdot, \cdot\}} & \mathcal{R} \end{array}$$

On en déduit que l'algèbre $\mathcal{R}$, munie du crochet $\{\cdot, \cdot\}$ est une algèbre de Poisson.

Preuve. Les relations de l'algèbre $\mathcal{A}$ sont

$$\frac{1}{h}[x, y] = z,$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}[y, z] &= p_1(xy^2 + yxy + y^2x) + q_1x^3, \\ \frac{1}{h}[z, x] &= p_1(yx^2 + xyx + x^2y) + q_1y^3.\end{aligned}$$

Ainsi, $p(\frac{1}{h}[x, y]) = z$, $p(\frac{1}{h}[y, z]) = 3p_1xy^2 + q_1x^3$ et $p(\frac{1}{h}[z, x]) = 3p_1yx^2 + q_1y^3$. Donc le diagramme commute. Le crochet $\{\cdot, \cdot\}$ vérifie alors l'égalité de Jacobi, puisque c'est la projection du crochet $\frac{1}{h}[\cdot, \cdot]$ de $\mathcal{A}$. La bidérivation $\{\cdot, \cdot\}$ est donc un crochet de Poisson sur $\mathcal{R}$, et l'algèbre $\mathcal{R}$ est une algèbre de Poisson. ■

Notons que le crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ est homogène de degré 0, c'est-à-dire que $\{\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j\} \subset \mathcal{A}_{i+j}$.

2.1.7 L'algèbre A vue comme déformation

Considérons tout d'abord l'algèbre $\hat{A}$. L'écriture dans la décomposition ordonnée (voir la sous-section 2.1.3) des éléments de $\hat{A}$ nous permet de définir l'isomorphisme suivant de $k_0((h))$ -espaces vectoriels gradués :

$$\begin{aligned}\Theta : \hat{A} &\longrightarrow \mathcal{R}((h)) \\ \overline{\sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i h^i} &\mapsto \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i h^i\end{aligned}$$

où dans le terme de gauche, $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ est une famille à support borné inférieurement d'éléments de $\mathcal{P}$; et dans le terme de droite, P_i désigne l'image naturelle de P_i dans $\mathcal{R} = k_0[x, y, z]$. On munit $\mathcal{R}((h))$ de la filtration naturelle F par les puissances de h , ainsi que de la topologie induite par cette filtration. On a alors $\Theta(F_p(\hat{A})) = F_p(\mathcal{R}((h)))$, et donc Θ est aussi un homéomorphisme pour les topologies associées.

Nous transportons maintenant le produit $\cdot$ de $\hat{A}$ sur $\mathcal{R}((h))$. Notons $*$ l'unique application telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}\hat{A} \times \hat{A} & \longrightarrow & \hat{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R}((h)) \times \mathcal{R}((h)) & \xrightarrow{*} & \mathcal{R}((h)).\end{array}$$

Alors l'algèbre $\hat{A}$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{R}((h))$ munie du produit $*$. Si a et b appartiennent à $\mathcal{R}$, écrivons :

$$a * b = \mu_0(a, b) + h\mu_1(a, b) + h^2\mu_2(a, b) + \dots$$

où pour tout $i \geq 0$, $\mu_i(a, b) \in \mathcal{R}$. Cela définit des applications k_0 -bilinéaires $\mu_i : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$. D'autre part, les relations de $\hat{A}$ montrent que si $a \in \mathcal{P} \simeq \mathcal{R}$,

$b \in \mathcal{P} \simeq \mathcal{R}$, alors $\overline{a}.\overline{b} = \overline{ab} + h(\dots)$, où ab est le produit dans $\mathcal{R} \simeq \mathcal{P}$, si bien que μ_0 est le produit usuel de $\mathcal{R}$. Ainsi l'algèbre associative $\hat{A}$ est une déformation (au sens de Gerstenhaber) de l'algèbre de polynômes $\mathcal{R} = k_0[x, y, z]$. Le crochet $\frac{1}{h}[\cdot, \cdot]$ de $\hat{A}$ se transporte en $\frac{1}{h}[\cdot, \cdot]_*$ sur $\mathcal{R}((h))$. Par suite, le crochet de Poisson associé à la déformation $*$, c'est-à-dire $(a, b) \mapsto \mu_1(a, b) - \mu_1(b, a)$, coïncide avec le crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ défini par la proposition 2.1.23.

Remarque : En remplaçant Θ^{-1} par un isomorphisme judicieux (la “symétrisation”), il est possible d'avoir $\mu_1 = \frac{1}{2}\{\cdot, \cdot\}$.

Nous remarquons que les sous-algèbres de $\hat{A}$ apparaissant dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_2} & \hat{A} \\ i_1 \uparrow & & \uparrow i_4 \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{i_3} & \hat{\mathcal{A}} \end{array}$$

s'identifient (via la décomposition ordonnée) aux sous-algèbres de $(\mathcal{R}((h)), *)$ apparaissant dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} k_0((h))[x, y, z] & \hookrightarrow & k_0[x, y, z]((h)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ k_0[[h]][x, y, z] & \hookrightarrow & k_0[x, y, z][[h]]. \end{array}$$

Ainsi, l'algèbre A s'identifie à l'algèbre $(k_0((h))[x, y, z], *)$, c'est-à-dire que A est une sous-algèbre d'une déformation de $\mathcal{R}$.

2.1.8 Réécriture de la suite spectrale

Nous allons réécrire la suite spectrale associée à la filtration F de l'algèbre A à l'aide de l'algèbre de Poisson introduite précédemment.

Le gradué associé à A , $gr_F(A) = \mathcal{R}[h, h^{-1}] \simeq \mathcal{R} \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}]$ est une algèbre de polynômes à coefficients dans l'anneau $k_0[h, h^{-1}]$. Par le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg (cf [20] p.100 par exemple), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ un isomorphisme de $k_0[h, h^{-1}]$ -modules :

$$\begin{aligned} HH_n(gr_F(A)) &\xrightarrow{\sim} \Omega_{gr_F(A)|_{k_0[h, h^{-1}]}}^n \\ r_0 \otimes r_1 \otimes \dots \otimes r_n &\mapsto \frac{1}{n!} r_0 dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ici, $\Omega_{gr_F(A)|_{k_0[h, h^{-1}]}}^n$ désigne le $k_0[h, h^{-1}]$ -module des formes différentielles de degré n de $gr_F(A)$ sur $k_0[h, h^{-1}]$. La somme directe des $\Omega_{gr_F(A)|_{k_0[h, h^{-1}]}}^n$ est notée

$$\Omega^{\bullet}_{gr_F(A)|_{k_0[h,h^{-1}]}}.$$

Rappelons brièvement des résultats dus à Brylinski [13], toujours dans le cas de notre algèbre A . Brylinski définit sur $gr_F(A)$ un crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}'$, de la façon suivante :
si $f \in gr_i(A)$, soit $P \in F_i(A)$ tel que f soit l'image de P dans le gradué associé, si $g \in gr_j(A)$, soit $Q \in F_j(A)$ tel que g soit l'image de Q dans le gradué associé. Alors $\{f, g\}'$ est l'image de $PQ - QP$ dans $gr_{i+j+1}(A)$. Brylinski donne alors une autre écriture de la suite spectrale, en montrant que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E^1_{-n} = & HH_n(gr_F(A)) & \xrightarrow{\sim} \Omega^n_{gr_F(A)} \\ & \downarrow d^1 & \downarrow \partial' \\ E^1_{-n+1} = & HH_{n-1}(gr_F(A)) & \xrightarrow{\sim} \Omega^{n-1}_{gr_F(A)}, \end{array}$$

où

$$\begin{aligned} \partial'(r_0 dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \{r_0, r_i\}' dr_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dr_i} \wedge \dots \wedge dr_n \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} r_0 d(\{r_i, r_j\}') \wedge dr_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dr_i} \wedge \dots \wedge \widehat{dr_j} \wedge \dots \wedge dr_n, \end{aligned}$$

d^1 est la différentielle qui permet de passer au second terme E^2 de la suite spectrale et l'isomorphisme entre $HH_n(gr_F(A))$ et $\Omega^n_{gr_F(A)}$ est l'isomorphisme de Hochschild-Kostant-Rosenberg (1.10). Le symbole $\widehat{}$ dans l'expression $\widehat{dr_i}$ signifie que ce facteur n'apparaît pas dans le produit extérieur.

Ce crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}'$ introduit par Brylinski peut être relié au crochet de Poisson que nous avons donné précédemment. Soient f et g deux éléments de $gr_0(A) = \mathcal{R}$. Soient $P \in F_0A$, $Q \in F_0A$ tels que f (resp. g) soit l'image de P (resp. Q) dans le gradué associé. Il existe une unique famille $(R_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que $[P, Q] = hR_1 + h^2R_2 + \dots$. On note encore p la surjection canonique de $F_0(A) = \mathcal{A}$ sur $\mathcal{R}$. On a

$$\begin{aligned} \{f, g\}' &= hp(R_1), \\ \{f, g\} &= p\left(\frac{1}{h}[P, Q]\right) \\ &= p(R_1 + hR_2 + \dots) \\ &= p(R_1). \end{aligned}$$

On en déduit que pour tous $f, g \in k_0[x, y, z]$, $\{f, g\}' = h\{f, g\}$.

De plus, on a un isomorphisme canonique de $k_0[h, h^{-1}]$ -modules (voir Bourbaki [12]) : $\Omega_{\mathcal{R}[h, h^{-1}]}^\bullet|_{k_0[h, h^{-1}]} \simeq \Omega_{\mathcal{R}|_{k_0}}^\bullet \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}]$.

On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{gr_F(A)}^n & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{\mathcal{R}}^n \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}] \\ \downarrow \partial' & & \downarrow \partial \otimes \cdot h \\ \Omega_{gr_F(A)}^{n-1} & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{\mathcal{R}}^{n-1} \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}], \end{array}$$

où $\cdot h$ est la multiplication par h et $\partial : \Omega_{\mathcal{R}}^n \rightarrow \Omega_{\mathcal{R}}^{n-1}$ est défini par

$$\begin{aligned} \partial(r_0 dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \{r_0, r_i\} dr_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dr_i} \wedge \dots \wedge dr_n \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} r_0 d\{r_i, r_j\} \wedge dr_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dr_i} \wedge \dots \wedge \widehat{dr_j} \wedge \dots \wedge dr_n. \end{aligned}$$

Notre suite spectrale $E^1 = HH_*(gr_F(A)) \longrightarrow HH_*(A)$ se réécrit alors

$$E^1 = \Omega_{\mathcal{R}}^\bullet \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}] \longrightarrow HH_*(A).$$

Le calcul de $HH_*(A)$ va maintenant se faire à partir de cette nouvelle suite spectrale. Explicitons le premier terme E^1 de cette suite spectrale, sachant que $E_{p,q}^1 = H_{-p-q}(F_p C(A)/F_{p+1} C(A)) \simeq \Omega_{\mathcal{R}}^{-p-q} \otimes_{k_0} h^p$:

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & \Omega_{\mathcal{R}}^1 \otimes h^{-2} & \xrightarrow{\partial \otimes \cdot h} & \mathcal{R} \otimes h^{-1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow 0 \quad \dots \quad q=1 \\ \dots & \Omega_{\mathcal{R}}^2 \otimes h^{-2} & \xrightarrow{\partial \otimes \cdot h} & \Omega_{\mathcal{R}}^1 \otimes h^{-1} & \xrightarrow{\partial \otimes \cdot h} & \mathcal{R} \otimes 1 & \longrightarrow 0 \quad \dots \quad q=0 \\ \dots & \Omega_{\mathcal{R}}^3 \otimes h^{-2} & \xrightarrow{\partial \otimes \cdot h} & \Omega_{\mathcal{R}}^2 \otimes h^{-1} & \xrightarrow{\partial \otimes \cdot h} & \Omega_{\mathcal{R}} \otimes 1 & \xrightarrow{\partial \otimes \cdot h} \mathcal{R} \otimes h \quad \dots \quad q=-1 \\ \dots & 0 & \longrightarrow & \Omega_{\mathcal{R}}^3 \otimes h^{-1} & \xrightarrow{\partial \otimes \cdot h} & \Omega_{\mathcal{R}}^2 \otimes 1 & \xrightarrow{\partial \otimes \cdot h} \Omega_{\mathcal{R}}^1 \otimes h \quad \dots \quad q=-2 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p=-2 & & & p=-1 & & p=0 & p=1 \end{array}$$

Le second terme E^2 de la suite spectrale est formé de l'homologie de chaque ligne par rapport à la différentielle $\partial \otimes \cdot h$. En fait, comme la multiplication par h est un isomorphisme de $k_0[h, h^{-1}]$, il suffit de calculer l'homologie du complexe

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{R}}^3 \xrightarrow{\partial_3} \Omega_{\mathcal{R}}^2 \xrightarrow{\partial_2} \Omega_{\mathcal{R}}^1 \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{R} \longrightarrow 0.$$

Si B est le bord de Connes $C(A) \rightarrow C(A)$ relatif à A , B respecte la filtration F , et $gr_F(B)$ s'identifie au bord de Connes $C(gr_F(A)) \rightarrow C(gr_F(A))$ relatif à $gr_F(A)$. Ce dernier définit une application $HH_*(gr_F(A)) \rightarrow HH_{*+1}(gr_F(A))$. D'après l'article de Brylinski [13], on sait que cette dernière application est égale (aux identifications près) à la différentielle d usuelle des formes différentielles : $d : \Omega_{gr_F(A)}^\bullet \rightarrow \Omega_{gr_F(A)}^{\bullet+1}$. Autrement dit, B dans le gradué associé et en homologie s'identifie à la différentielle d sur $\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet$.

2.1.9 Le crochet de Poisson provient d'un gradient

Rappelons comment est défini notre crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ sur $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \{x, y\} &= z, \\ \{y, z\} &= 3p_1xy^2 + q_1x^3, \\ \{z, x\} &= 3p_1x^2y + q_1y^3. \end{aligned}$$

Si $P \in k_0[x, y, z]$, nous noterons $\partial P/\partial x$ (resp. $\partial P/\partial y$, $\partial P/\partial z$) la dérivée partielle de P par rapport à x (resp. y , resp. z), définie de façon classique. On constate que

$$\begin{aligned} \{y, z\} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \{z, x\} &= \frac{\partial \phi}{\partial y}, \\ \{x, y\} &= \frac{\partial \phi}{\partial z}, \end{aligned}$$

où $\phi \in \mathcal{R}$ est le polynôme homogène de degré 4 suivant :

$$\phi = \frac{1}{2}z^2 + \frac{q_1}{4}x^4 + \frac{q_1}{4}y^4 + \frac{3}{2}p_1x^2y^2.$$

C'est-à-dire que le crochet de Poisson sur $k_0[x, y, z]$ s'écrit comme un gradient. Nous allons montrer que ϕ est l'image dans $gr_0(A)$ d'un élément central Φ de l'algèbre A , et alors ϕ sera un Casimir du crochet $\{\cdot, \cdot\}$. Ceci nous permettra ensuite de trouver l'homologie de Poisson avec les mêmes techniques de calcul que Van den Bergh dans l'article [33].

Considérons l'élément central C_4 de l'algèbre cubique A , que nous avons donné dans l'introduction :

$$C_4 = b(c^2 - a^2)xyx + a(a^2 - b^2)yx^2y - a(c^2 - a^2)x^2y^2 - c(a^2 - b^2)x^4.$$

On utilise maintenant la filtration par les puissances de h sur l'algèbre A . En écrivant $a = -1 - p_1h^2$, $b = 2 - p_1h^2$ et $c = -q_1h^2$, on trouve que

$$\begin{aligned} C_4 &= (-2yxyx + 3yx^2y - x^2y^2) \\ &+ h^2(-3p_1yxyx - 3p_1yx^2y - 3p_1x^2y^2 - 3q_1x^4) + h^3(\dots) \\ &= [*] + [**] + h^3(\dots). \end{aligned}$$

Ecrivons $[*]$ et $[**]$ dans leur décomposition ordonnée (voir 2.1.3). Intéressons-nous d'abord à la partie $[**]$. On trouve :

$$[**] = h^2(-9p_1x^2y^2 - 3q_1x^4) + h^3(\dots).$$

On écrit maintenant le début de la décomposition ordonnée de $[*]$:

$$\begin{aligned} [*] &= -2(xy - hz)(xy - hz) + 3(xy - hz)xy - x^2y^2 \\ &= -2xyxy + 2hxyz + 2hzyx - 2h^2z^2 + 3xyxy - 3hzyx - x^2y^2 \\ &= xyxy - x^2y^2 + h(2xyz - zxy) - 2h^2z^2. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} xyxy &= x(xy - hz)y \\ &= x^2y^2 - hxyz \\ &= x^2y^2 - hx[yz - p_1h(xy^2 + yxy + y^2x) - q_1hx^3] \\ &= x^2y^2 - hxyz + 3p_1h^2x^2y^2 + q_1h^2x^4 + h^3(\dots). \end{aligned}$$

Et on a aussi

$$\begin{aligned} zxy &= [xz + p_1h(yx^2 + xyx + x^2y) + q_1hy^3]y \\ &= xzy + 3p_1hx^2y^2 + q_1hy^4 + h^2(\dots) \\ &= x[yz - p_1h(xy^2 + yxy + y^2x) - q_1hx^3] + 3p_1hx^2y^2 + q_1hy^4 + h^2(\dots) \\ &= xyz - q_1hx^4 + q_1hy^4 + h^2(\dots). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} [*] &= (x^2y^2 - hxyz + 3p_1h^2x^2y^2 + q_1h^2x^4) - x^2y^2 + 2hxyz \\ &\quad - h(xyz - q_1hx^4 + q_1hy^4) - 2h^2z^2 + h^3(\dots) \\ &= 3p_1h^2x^2y^2 + 2q_1h^2x^4 - q_1h^2y^4 - 2h^2z^2 + h^3(\dots). \end{aligned}$$

On en déduit enfin le début de la décomposition ordonnée de C_4 , en sommant $[*]$ et $[**]$:

$$C_4 = h^2(-2z^2 - 6p_1x^2y^2 - q_1x^4 - q_1y^4) + h^3(\dots).$$

On a alors

$$\frac{C_4}{h^2} = -4\left(\frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{2}p_1x^2y^2 + \frac{q_1}{4}x^4 + \frac{q_1}{4}y^4\right) + h(\dots).$$

Donc ϕ est l'image dans $gr_0(A)$ de l'élément central de A suivant :

$$\Phi = -\frac{1}{4h^2}C_4.$$

2.2 Homologie de Poisson

Nous allons maintenant calculer l'homologie de Poisson de $(\mathcal{R}, \{\cdot, \cdot\})$ afin d'obtenir le terme E^2 de la suite spectrale de Brylinski. Rappelons que cette homologie de Poisson est l'homologie du complexe

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{R}}^3 \xrightarrow{\partial_3} \Omega_{\mathcal{R}}^2 \xrightarrow{\partial_2} \Omega_{\mathcal{R}}^1 \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{R} \longrightarrow 0,$$

muni de la différentielle ∂ :

$$\begin{aligned} \partial(f_0 df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \{f_0, f_i\} df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df_i} \wedge \dots \wedge df_n \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} f_0 d\{f_i, f_j\} \wedge df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df_i} \wedge \dots \wedge \widehat{df_j} \wedge \dots \wedge df_n. \end{aligned}$$

Les $\Omega_{\mathcal{R}}^n$ sont des k_0 -espaces vectoriels gradués par

$$\deg(f_0 df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_n) = \deg(f_0) + \deg(f_1) + \dots + \deg(f_n).$$

Comme le crochet $\{\cdot, \cdot\}$ est de degré 0, ∂ est homogène de degré 0 et les $H_n(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$ sont des k_0 -espaces vectoriels gradués.

2.2.1 Théorème

Notons $\delta = dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega_{\mathcal{R}}^3$ et $\pi = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + 2zdx \wedge dy \in \Omega_{\mathcal{R}}^2$. Ces deux éléments sont de degré 4 pour la graduation induite sur $\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet$ par celle de $\mathcal{R}$. Remarquons que $d(\pi) = 4\delta$.

Théorème 2.2.1 *Les $H_i(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$, sont des $k_0[\phi]$ -modules libres de rangs respectifs 9, 9, 1, 1. $H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$ est engendré par π et $H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$ est engendré par δ . De plus, les $(H_i(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial))_i$ sont des k_0 -espaces vectoriels gradués dont les séries de Poincaré sont*

$$P(H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial), t) = \frac{t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1}{1 - t^4},$$

$$P(H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial), t) = \frac{2t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t}{1 - t^4} = P(H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial), t) - 1,$$

$$P(H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial), t) = \frac{t^4}{1 - t^4},$$

$$P(H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial), t) = \frac{t^4}{1 - t^4}.$$

Enfin, d définit une surjection homogène de degré 0 de k_0 -espaces vectoriels gradués : $H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial) \longrightarrow H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ et un isomorphisme homogène de degré 0 de k_0 -espaces vectoriels gradués : $H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial) \longrightarrow H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$.

2.2.2 Preuve

La preuve de ce théorème est calquée sur celle de [33]. Nous pouvons utiliser les mêmes techniques (inspirées de celles de P. Nuss [25]) car le crochet de Poisson provient du gradient de l'élément central Φ (voir 2.1.9).

La différence principale avec la preuve de Van den Bergh est que le polynôme ϕ ne vérifie plus la relation d'Euler classique des polynômes homogènes, mais vérifie la relation d'Euler suivante :

$$2\frac{\partial\phi}{\partial z}z + \frac{\partial\phi}{\partial x}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}y = 4\phi,$$

ce qui fait que l'élément de $H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ que nous allons obtenir sera

$$\pi = 2zdx \wedge dy + xdy \wedge dz + ydz \wedge dx.$$

Comme ϕ est un Casimir du crochet de Poisson, ∂ est $k_0[\phi]$ -linéaire et les $H_*(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ sont des $k_0[\phi]$ -modules. Notons g_1, g_2, g_3 les coordonnées du vecteur $\nabla\phi$. On a alors

$$\begin{aligned} g_1 &= \{y, z\} = 3p_1xy^2 + q_1x^3, \\ g_2 &= \{z, x\} = 3p_1x^2y + q_1y^3, \\ g_3 &= \{x, y\} = z. \end{aligned}$$

Nous allons utiliser des techniques de calcul vectoriel.

Notations :

Si $(X_1, X_2, X_3) \in \mathcal{R}^3$, nous noterons $\overline{X}$ le vecteur $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$. Nous noterons $\times$ le produit extérieur sur $\mathcal{R}^3$ ("produit vectoriel"), défini par

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2Y_3 - X_3Y_2 \\ X_3Y_1 - X_1Y_3 \\ X_1Y_2 - X_2Y_1 \end{pmatrix}$$

et $\cdot$ le produit intérieur sur $\mathcal{R}^3$ (“produit scalaire”), défini par

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3.$$

Si $P \in \mathcal{R}$, nous noterons $\nabla P = \begin{pmatrix} \partial P / \partial x \\ \partial P / \partial y \\ \partial P / \partial z \end{pmatrix}$ le gradient de P .

Enfin, si $\overline{X} \in \mathcal{R}^3$, nous noterons $\nabla \times \overline{X} = \begin{pmatrix} \partial X_3 / \partial y - \partial X_2 / \partial z \\ \partial X_1 / \partial z - \partial X_3 / \partial x \\ \partial X_2 / \partial x - \partial X_1 / \partial y \end{pmatrix}$ le rotationnel de $\overline{X}$ et $\nabla \cdot \overline{X} = \partial X_1 / \partial x + \partial X_2 / \partial y + \partial X_3 / \partial z$ la divergence de $\overline{X}$.

On munit le $\mathcal{R}$ -module libre $\Omega_{\mathcal{R}}^1$ de la base $\mathcal{B}_1 = \{dx, dy, dz\}$, le $\mathcal{R}$ -module libre $\Omega_{\mathcal{R}}^2$ de la base $\mathcal{B}_2 = \{dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$ et le $\mathcal{R}$ -module libre $\Omega_{\mathcal{R}}^3$ de la base $\mathcal{B}_3 = \{dx \wedge dy \wedge dz\}$. Si $P \in \mathcal{R}$, les coordonnées de dP dans $\mathcal{B}_1$ sont alors données par le vecteur ∇P . Si ω est un élément de $\Omega_{\mathcal{R}}^1$ dont les coordonnées dans $\mathcal{B}_1$ sont données par $\overline{X}$ alors $d\omega$ a pour coordonnées $\nabla \times \overline{X}$ dans $\mathcal{B}_2$. Si ω est un élément de $\Omega_{\mathcal{R}}^2$ dont les coordonnées dans $\mathcal{B}_2$ sont données par $\overline{X}$ alors $d\omega$ a pour coordonnées $\nabla \cdot \overline{X}$ dans $\mathcal{B}_3$. Enfin, si P et Q sont deux éléments de $\mathcal{R}$, alors $dP \wedge dQ$ a pour coordonnées $\nabla P \times \nabla Q$ dans $\mathcal{B}_2$.

Nous rappelons le résultat classique suivant (voir Weibel [35] p. 355) :

Lemme 2.2.2 (*lemme de Poincaré*)

La cohomologie de de Rham de $k_0[x, y, z]$ est donnée par

$$H_{DR}^0(k_0[x, y, z]) = k_0,$$

$$H_{DR}^i(k_0[x, y, z]) = 0 \text{ si } i \neq 0.$$

Nous utiliserons dans la suite la version suivante de ce lemme :

Lemme 2.2.3 (*lemme de Poincaré, deuxième version*)

i) Soit $P \in \mathcal{R}$. Si $\nabla P = 0$ alors $P \in k_0$.

ii) Soit $\overline{X} \in \mathcal{R}^3$. Si $\nabla \times \overline{X} = 0$, alors il existe $P \in \mathcal{R}$ tel que $\overline{X} = \nabla P$.

iii) Soit $\overline{X} \in \mathcal{R}^3$. Si $\nabla \cdot \overline{X} = 0$, alors il existe $Y \in \mathcal{R}^3$ tel que $\overline{X} = \nabla \times Y$.

Nous allons maintenant détailler la preuve en 7 étapes.

Première étape. Le calcul explicite de ∂_1 , ∂_2 et ∂_3 nous donne

$$\partial_1(X_1 dx + X_2 dy + X_3 dz) = (\nabla \times \overline{X}) \cdot \nabla \phi,$$

$$\partial_2(X_1 dy \wedge dz + X_2 dz \wedge dx + X_3 dx \wedge dy) = (\nabla \cdot \overline{X}) d\phi - d(\overline{X} \cdot \nabla \phi),$$

$$\partial_3(Udx \wedge dy \wedge dz) = -dU \wedge d\phi.$$

Deuxième étape. Calculons maintenant $\{ker(\partial_i)\}_{i=1,2,3}$.

Calcul de $ker(\partial_1)$:

Supposons que $(\nabla \times \overline{X}) \cdot \nabla \phi = 0$. Posons $\overline{X}^{(0)} = \overline{X}$. Nous allons montrer qu'il existe $\overline{X}^{(1)} \in \mathcal{R}^3$ tel que $\nabla \times \overline{X}^{(0)} = \overline{X}^{(1)} \times \overline{g}$.

Lemme 2.2.4 *La suite (g_1, g_2, g_3) est une suite régulière de l'algèbre de polynômes $\mathcal{R} = k_0[x, y, z]$.*

Preuve. Tout d'abord, g_1 n'est pas un diviseur de zéro de $k_0[x, y, z]$ puisque $g_1 \neq 0$.

Montrons ensuite que g_2 n'est pas diviseur de zéro dans $k_0[x, y, z]/(g_1)$. Soient donc h_1 et h_2 deux éléments de $k_0[x, y, z]$ tels que $g_2 h_2 = g_1 h_1$. Montrons qu'alors $h_2 \in (g_1)$. On a

$$\begin{aligned} g_1 &= 3p_1 x y^2 + q_1 x^3 \\ &= q_1 x \left(x^2 + \frac{3p_1}{q_1} y^2 \right). \end{aligned}$$

Quitte à agrandir le corps k_0 , on peut supposer qu'on a une racine carrée de $-\frac{3p_1}{q_1}$ dans k_0 . Notons α cette racine. Alors

$$g_1 = q_1 x(x - \alpha y)(x + \alpha y).$$

De même

$$\begin{aligned} g_2 &= 3p_1 x^2 y + q_1 y^3 \\ &= 3p_1 y \left(x^2 + \frac{q_1}{3p_1} y^2 \right) \\ &= 3p_1 y(x - \alpha^{-1} y)(x + \alpha^{-1} y). \end{aligned}$$

On a donc

$$q_1 x(x - \alpha y)(x + \alpha y) h_1 = 3p_1 y(x - \alpha^{-1} y)(x + \alpha^{-1} y) h_2.$$

Comme p_1 et q_1 sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, on a $9p_1^2 \neq q_1^2$, donc $\alpha \neq \alpha^{-1}$ et $\alpha \neq -\alpha^{-1}$. D'après la factorialité de $k_0[x, y]$ et le lemme de Gauss, x , $x - \alpha y$ et $x + \alpha y$ divisent h_2 . Puisque x , $x - \alpha y$ et $x + \alpha y$ sont premiers entre eux, leur produit g_1 divise h_2 , et donc $h_2 \in (g_1)$.

Montrons pour finir que g_3 n'est pas diviseur de zéro dans $k_0[x, y, z]/(g_1, g_2)$. Soient $h_1, h_2, h_3 \in k_0[x, y, z]$ tels que $g_3 h_3 = g_1 h_1 + g_2 h_2$. Soient $h'_1, h'_2 \in k_0[x, y]$

et $h_1'', h_2'' \in k_0[x, y, z]$ tels que $h_1 = h_1' + zh_1''$ et $h_2 = h_2' + zh_2''$. Comme $g_3 = z$, on a alors

$$zh_3 = z[g_1h_1'' + g_2h_2''] + g_1h_1' + g_2h_2'.$$

Puisque $g_1, g_2 \in k_0[x, y]$, on a $g_1h_1' + g_2h_2' \in k_0[x, y]$ et donc $g_1h_1' + g_2h_2' = 0$. On en déduit que $h_3 = g_1h_1'' + g_2h_2''$ et donc $h_3 \in (g_1, g_2)$. Donc g_3 n'est pas diviseur de zéro dans $k_0[x, y, z]/(g_1, g_2)$, et la suite (g_1, g_2, g_3) est bien régulière dans l'algèbre $k_0[x, y, z]$. ■

On peut construire la suite exacte de Koszul pour l'algèbre commutative $\mathcal{R}$, associée à la suite régulière (g_1, g_2, g_3) (voir [35] p.114) :

$$0 \longrightarrow \Lambda^3(\mathcal{R}^3) \xrightarrow{d_3} \Lambda^2(\mathcal{R}^3) \xrightarrow{d_2} \mathcal{R}^3 \xrightarrow{d_1=(g_1, g_2, g_3)} \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}/(g_1, g_2, g_3) \longrightarrow 0.$$

On a $(\nabla \times \bar{X}) \cdot \nabla \phi = 0$ donc $\nabla \times \bar{X} \in \ker(d_1) = \text{im}(d_2)$. Or, si $Y \in \Lambda^2(\mathcal{R}^3)$ et $Y = y_3e_1 \wedge e_2 + y_2e_3 \wedge e_1 + y_1e_2 \wedge e_3$ où (e_1, e_2, e_3) est une base du $\mathcal{R}$ -module libre $\mathcal{R}^3$, on a $d_2(Y) = (y_1, y_2, y_3) \times (g_1, g_2, g_3)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) . Donc il existe bien un $\bar{X}^{(1)} \in \mathcal{R}^3$ vérifiant $\nabla \times \bar{X}^{(0)} = \bar{X}^{(1)} \times \bar{g}$.

Alors $\nabla \cdot (\bar{X}^{(1)} \times \bar{g}) = 0$. Comme $\nabla \times \bar{g} = 0$, on a $(\nabla \times \bar{X}^{(1)}) \cdot \bar{g} = 0$. En réitérant cette procédure, on obtient une suite de vecteurs $\bar{X}^{(i)}$ vérifiant $\nabla \times \bar{X}^{(i)} = \bar{X}^{(i+1)} \times \bar{g}$. Puisque à chaque pas, le degré de $\bar{X}^{(i)}$ s'abaisse, il existe un m tel que $\nabla \times \bar{X}^{(m)} = 0$. Le lemme de Poincaré (2.2.3, (ii)) nous dit alors qu'il existe $\psi_m \in \mathcal{R}$ tel que $\bar{X}^{(m)} = \nabla \psi_m$. Comme $\nabla \psi_m \times \bar{g} = \nabla \times (\psi_m \bar{g})$, on a $\nabla \times (\bar{X}^{(m-1)} - \psi_m \bar{g}) = 0$. En appliquant de nouveau le lemme de Poincaré, il existe $\psi_{m-1} \in \mathcal{R}$ tel que $\bar{X}^{(m-1)} = \nabla \psi_{m-1} + \psi_m \bar{g}$. En continuant ainsi, on obtient une suite d'éléments (ψ_i) de $\mathcal{R}$ vérifiant $\bar{X}^{(i)} = \nabla \psi_i + \psi_{i+1} \bar{g}$. D'où l'existence de ψ et $\theta \in \mathcal{R}$ tels que $\bar{X} = \nabla \psi + \theta \bar{g}$, ce qui signifie que $X_1 dx + X_2 dy + X_3 dz = d\psi + \theta d\phi$, et donc

$$\ker(\partial_1) = \{d\psi + \theta d\phi ; \psi \in \mathcal{R}, \theta \in \mathcal{R}\}.$$

Calcul de $\ker(\partial_2)$:

Lemme 2.2.5 Si $U \in \mathcal{R}$ vérifie $dU \wedge d\phi = 0$ alors $U = f(\phi)$ où $f \in k_0[\phi]$.

Preuve. Soit $U^{(0)} = U$. Comme $dU \wedge d\phi = 0$, on a $\nabla U^{(0)} \times \bar{g} = 0$, et $\nabla U^{(0)}$ et $\bar{g}$ sont colinéaires. Alors, comme g_1, g_2, g_3 n'ont pas de facteurs communs, il existe $U^{(1)} \in \mathcal{R}$ tel que $\nabla U^{(0)} = U^{(1)}(g_1, g_2, g_3)$, soit $dU^{(0)} = U^{(1)}d\phi$. Donc $dU^{(1)} \wedge d\phi = d^2U^{(0)} = 0$. En réitérant le processus, on obtient une suite finie de polynômes $U^{(i)}$, de degré de plus en plus petit. Cette suite s'achève en un $U^{(m)}$ tel que $dU^{(m)} = 0$ et donc $U^{(m)} = \lambda_m$, $\lambda_m \in k_0$ (d'après le lemme de Poincaré

(i)). Alors $U^{(m-1)} = \lambda_m \phi + \lambda_{m-1}$, $U^{(m-2)} = 1/2\lambda_m \phi^2 + \lambda_{m-1}\phi + \lambda_{m-2}, \dots$ Et donc $U^{(0)} = f(\phi)$, où $f \in k_0[\phi]$. ■

Supposons maintenant que $(\nabla \cdot \overline{X})d\phi - d(\overline{X} \cdot \nabla \phi) = 0$. Alors $d(\nabla \cdot \overline{X}) \wedge d\phi = 0$, et donc d'après le lemme :

$$\nabla \cdot \overline{X} = u'(\phi), \quad (2.11)$$

$$\overline{X} \cdot \nabla \phi = u(\phi), \quad (2.12)$$

où $u(\phi) \in \phi k_0[\phi]$ et $u'(\phi)$ est la dérivée de u par rapport à ϕ . Nous allons résoudre le système d'équations (2.11)-(2.12).

Le polynôme ϕ vérifie la relation d'Euler généralisée :

$$2\frac{\partial \phi}{\partial z}z + \frac{\partial \phi}{\partial x}x + \frac{\partial \phi}{\partial y}y = 4\phi. \quad (2.13)$$

Plus généralement, on a le résultat suivant (de preuve immédiate) :

Proposition 2.2.6 *Soit Q un polynôme homogène de $k_0[x, y, z]$ (où x et y sont de degré 1 et z est de degré 2). On a la relation d'Euler généralisée :*

$$2\frac{\partial Q}{\partial z}z + \frac{\partial Q}{\partial x}x + \frac{\partial Q}{\partial y}y = \deg(Q)Q. \quad (2.14)$$

Posons $\overline{X}^p = \frac{u(\phi)}{4\phi} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}$. Alors $\overline{X}^p$ est une solution particulière du sys-

tème (2.11)-(2.12). Si on pose $\overline{X}^h = \overline{X} - \overline{X}^p$, $\overline{X}^h$ est solution du système homogène

$$\begin{cases} \nabla \cdot \overline{X} = 0 \\ \overline{X} \cdot \nabla \phi = 0. \end{cases}$$

On sait alors qu'il existe $\overline{Y}$ tel que $\overline{X}^h = \nabla \times \overline{Y}$ (lemme de Poincaré (iii)), et donc $(\nabla \times \overline{Y}) \cdot \nabla \phi = 0$. Nous avons résolu ce type d'équation dans le calcul de $\ker(\partial_1)$ et nous avons trouvé que $\overline{Y} = \theta \nabla \phi + \nabla \psi$, où $\psi, \phi \in \mathcal{R}$.

Donc $\overline{X}^h = \nabla \theta \times \nabla \phi$. Posons $f(\phi) = \frac{u(\phi)}{4\phi}$. On a $\overline{X} = \nabla \theta \times \nabla \phi + f(\phi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}$,

d'où

$$\ker(\partial_2) = \{f(\phi)\pi + d\theta \wedge d\phi ; f \in k_0[\phi], \theta \in \mathcal{R}\}.$$

Calcul de $\ker(\partial_3)$:

Si $dU \wedge d\phi = 0$, on a vu précédemment que $U = f(\phi)$ où $f \in k_0[\phi]$. D'où

$$\ker(\partial_3) = \{f(\phi)\delta ; f \in k_0[\phi]\}.$$

Troisième étape. Afin de calculer les séries de Poincaré de $\ker(\partial_1)$ et $\ker(\partial_2)$, nous introduisons le complexe suivant :

$$0 \longrightarrow k_0[\phi] \xrightarrow{\alpha} \mathcal{R} \oplus (\mathcal{R}(-4)) \xrightarrow{\beta} \ker(\partial_1) \longrightarrow 0 \quad (2.15)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha(u(\phi)) &= (u(\phi), -u'(\phi)), \\ \beta(\psi, \theta) &= d\psi + \theta d\phi. \end{aligned}$$

Si B est une algèbre graduée, nous notons $B(k)$, où $k \in \mathbb{Z}$, l'algèbre B munie de la graduation décalée : $B(k)_n = B_{n+k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le complexe (2.15) est exact, car si $d\psi + \theta d\phi = 0$, on a $d\theta \wedge d\phi = 0$, et donc $\theta = f(\phi)$ où $f \in k_0[\phi]$. Le décalage dans la graduation de $\mathcal{R}$ provient du fait que ϕ est de degré 4. Ainsi (2.15) est un complexe dans la catégorie $k_0\text{-grMod}$ des k_0 -espaces vectoriels gradués (avec des flèches homogènes de degré 0).

Nous introduisons aussi le complexe de $k_0\text{-grMod}$ suivant :

$$0 \longrightarrow k_0[\phi](-4) \xrightarrow{\gamma} k_0[\phi](-4) \oplus \mathcal{R}(-4) \xrightarrow{\epsilon} \ker(\partial_2) \longrightarrow 0 \quad (2.16)$$

où

$$\begin{aligned} \epsilon(f(\phi), \theta) &= f(\phi)\pi + d\theta \wedge d\phi, \\ \gamma(g(\phi)) &= (0, g(\phi)). \end{aligned}$$

Rappelons que $\pi = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + 2zdx \wedge dy$. On a

$$\begin{aligned} d(f(\phi)\pi) &= d(f(\phi)) \wedge \pi + f(\phi)d\pi \\ &= f'(\phi)d\phi \wedge \pi + 4f(\phi)\delta. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} d\phi \wedge \pi &= (g_1dx + g_2dy + g_3dz) \wedge (xdy \wedge dz + ydx \wedge dz + 2zdx \wedge dy) \\ &= (g_1x + g_2y + 2g_3z)\delta \\ &= 4\phi\delta, \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la relation d'Euler généralisée (2.13). D'où

$$d(f(\phi)\pi) = 4(f(\phi) + f'(\phi)\phi)\delta,$$

ce qui est non nul si $f \neq 0$. Donc si $\epsilon(f(\phi), \theta) = 0$, on a $f = 0$. D'où $d\theta \wedge d\phi = 0$, ce qui implique $\theta = g(\phi)$, où $g \in k_0[\phi]$. Donc le complexe (2.16) est exact.

Quatrième étape. Nous allons maintenant calculer les séries de Poincaré des différents groupes d'homologie. On a les suites exactes évidentes suivantes :

$$0 \longrightarrow \ker(\partial_{i+1}) \longrightarrow \Omega_{\mathcal{R}}^{i+1} \longrightarrow \ker(\partial_i) \longrightarrow H_i(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial) \longrightarrow 0 \quad (2.17)$$

pour $i = 0, 1, 2$.

On a les séries de Poincaré suivantes : $P(k_0[\phi], t) = \frac{1}{1-t^4}$, $P(\mathcal{R}, t) = \frac{1}{(1-t)^2(1-t^2)}$,

$$P(\mathcal{R}(-4), t) = \frac{t^4}{(1-t)^2(1-t^2)}.$$

On a d'après (2.15) : $P(\ker(\partial_1), t) = P(\mathcal{R}, t) - P(k_0[\phi], t) + P(\mathcal{R}(-4), t)$, d'où

$$P(\ker(\partial_1), t) = \frac{1+t^4}{(1-t)^2(1-t^2)} - \frac{1}{1-t^4}.$$

De même, d'après (2.16) :

$$P(\ker(\partial_2), t) = \frac{t^4}{(1-t)^2(1-t^2)}.$$

Il est facile de voir sur le calcul de $\ker(\partial_3)$ que

$$P(\ker(\partial_3), t) = \frac{t^4}{1-t^4}.$$

D'autre part, $\Omega_{\mathcal{R}}^2$ est un $\mathcal{R}$ -module libre engendré par $dx \wedge dy$, $dy \wedge dz$ et $dz \wedge dx$.

Il est donc facile de voir que $P(\Omega_{\mathcal{R}}^2, t) = \frac{t^2 + 2t^3}{(1-t)^2(1-t^2)}$.

D'après la suite (2.17) pour $i = 1$, on a alors

$$\begin{aligned} P(H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial), t) &= P(\ker(\partial_1), t) - P(\Omega_{\mathcal{R}}^2, t) + P(\ker(\partial_2), t) \\ &= \frac{1+t^4}{(1-t)^2(1-t^2)} - \frac{1}{1-t^4} - \frac{t^2 + 2t^3}{(1-t)^2(1-t^2)} + \frac{t^4}{(1-t)^2(1-t^2)} \\ &= \frac{2t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t}{1-t^4}. \end{aligned}$$

D'après la suite (2.17) pour $i = 2$, sachant que $P(\Omega_{\mathcal{R}}^3, t) = \frac{t^4}{(1-t)^2(1-t^2)}$, on a

$$P(H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial), t) = \frac{t^4}{1-t^4}. \quad (2.18)$$

Comme $H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial) = \ker(\partial_3)$, on a

$$P(H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial), t) = \frac{t^4}{1-t^4}. \quad (2.19)$$

Enfin, d'après la suite (2.17) pour $i = 0$, sachant que $P(\Omega_{\mathcal{R}}^1, t) = \frac{2t + t^2}{(1-t)^2(1-t^2)}$, on a

$$P(H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial), t) = \frac{t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1}{1 - t^4}. \quad (2.20)$$

Cinquième étape. Nous avons vu, dans la deuxième étape, que $\ker(\partial_1) = \{d\psi + \theta d\phi; \psi, \theta \in \mathcal{R}\}$. Or pour tout $\theta \in \mathcal{R}$, il existe $\omega \in \Omega_{\mathcal{R}}^2$ et $f \in \mathcal{R}$ tels que $\theta d\phi = \partial_2(\omega) + df$. Donc $H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ est formé des classes d'éléments $d\psi$, où $\psi \in \mathcal{R}$. Nous avons aussi montré que $\ker(\partial_2) = \{f(\phi)\pi + d\theta \wedge d\phi; f \in k_0[\phi], \theta \in \mathcal{R}\}$. Or $d\theta \wedge d\phi = \partial_3(-\theta dx \wedge dy \wedge dz)$, donc $H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ est engendré par la classe de π en tant que $k_0[\phi]$ -module. Enfin, nous avons vu que $\ker(\partial_3)$ est engendré par δ en tant que $k_0[\phi]$ -module, et ainsi $H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ est engendré par la classe de δ en tant que $k_0[\phi]$ -module.

Or les séries de Poincaré de $H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ et de $H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ coïncident avec celle de $k_0[\phi]$ (décalée de la graduation de π et de δ respectivement), donc $H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ et $H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ sont des $k_0[\phi]$ -modules libres de rang 1. De plus, d est surjective de $H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ dans $H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$, puisque ce dernier est formé d'éléments $d\psi$. Enfin, comme $d(f(\phi)\pi) = 4(f(\phi) + f'(\phi)\phi)\delta$ et que $f \mapsto f + \phi f'$ est une surjection de $k_0[\phi]$ sur lui-même, d est une surjection de $H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ sur $H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$. Puisque d est un morphisme surjectif de k_0 -espaces vectoriels gradués qui est homogène de degré 0, et que les séries de Poincaré de $H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ et de $H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ coïncident, d est un isomorphisme.

Sixième étape. Il nous reste à montrer que $H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ et $H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ sont des $k_0[\phi]$ -modules libres. Pour cela, il suffit de montrer que la multiplication par ϕ est injective dans les deux cas.

Supposons en effet que la multiplication par ϕ dans $H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ (et dans $H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$) soit injective. Alors ces $k_0[\phi]$ -modules sont sans torsion. Comme $k_0[\phi]$ est principal et intègre, ces modules sont donc plats (cf [16] p.163). D'autre part, les modules en question sont $\mathbb{N}$ -gradués sur l'algèbre graduée $k_0[\phi]$, et on conclut qu'ils sont libres-gradués par le résultat suivant :

Proposition 2.2.7 *Soit A une k -algèbre $\mathbb{N}$ -graduée. Soit M un A -module $\mathbb{Z}$ -gradué borné inférieurement (c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $M_i = 0$ pour $i < n$). Si M est plat, alors M est libre-gradué (la réciproque est évidente).*

Preuve. Soit V un sous k -espace vectoriel gradué de M tel que $M = V \oplus mM$, où $m = A_1 + A_2 + \dots$. Alors $k \otimes_A (M/AV) = 0$, et donc par le lemme de Nakayama gradué (voir [9] par exemple), $M/AV = 0$, soit $M = AV$. On définit la surjection $\psi : A \otimes_k V \rightarrow M$ de degré 0 par $\psi(x \otimes v) = xv$ si $x \in A$ et $v \in V$. Comme M est plat, $\text{Tor}_A^1(k, M) = 0$.

Ainsi $\ker(k \otimes_A \ker(\psi) \rightarrow k \otimes_A (A \otimes_k V)) = 0$, et on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow k \otimes_A \ker(\psi) \longrightarrow k \otimes_A (A \otimes_k V) \xrightarrow{1 \otimes \psi} k \otimes_A M \longrightarrow 0.$$

En identifiant les deux termes de droite de ce complexe avec V , $1 \otimes \psi$ s'identifie à l'application identité. Donc $k \otimes_A \ker(\psi) = 0$. Comme $\ker(\psi)$ est borné inférieurement, par le lemme de Nakayama gradué, $\ker(\psi) = 0$. Par suite, M est isomorphe à $A \otimes_k V$ et M est libre-gradué. ■

Montrons maintenant que la multiplication par ϕ dans $H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$ et $H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$ est injective.

La multiplication par ϕ dans $H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$ est injective :

Lemme 2.2.8 *Soit $p = \bar{v} \cdot \bar{g}$. L'élément p est dans $\text{im}(\partial_1)$ si et seulement si $\nabla \cdot \bar{v} \in \text{im}(\partial_1)$.*

Preuve. On a $\text{im}(\partial_1) = \{\bar{u} \cdot \bar{g}; \bar{u} \in R^3, \nabla \cdot \bar{u} = 0\}$. Soit $\bar{w}$ tel que $\nabla \cdot \bar{w} = 0$ et $\bar{v} \cdot \bar{g} = \bar{w} \cdot \bar{g}$. Alors $(\bar{v} - \bar{w}) \cdot \bar{g} = 0$, donc il existe $\bar{r}$ tel que $\bar{v} - \bar{w} = \bar{r} \times \bar{g}$. De plus, $\nabla \cdot (\bar{r} \times \bar{g}) = (\nabla \times \bar{r}) \cdot \nabla \phi = \partial_1(\bar{r})$, et donc $\nabla \cdot \bar{v} \in \text{im}(\partial_1)$. La réciproque se prouve sans difficulté. ■

Soit ψ un polynôme homogène tel que $\phi\psi \in \text{im}(\partial_1)$. On a $\phi = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix} \cdot \bar{g}$

par l'identité d'Euler (2.13). Alors $\phi\psi = \frac{1}{4}\psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix} \cdot \bar{g}$, et d'après le lemme

2.2.8, $\nabla \cdot (\psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}) \in \text{im}(\partial_1)$. Or $\nabla \cdot (\psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}) = (4 + \deg(\psi))\psi$ d'après

l'identité (2.14), donc $\psi \in \text{im}(\partial_1)$. Ainsi, $\phi\psi = 0$ implique $\psi = 0$ dans $H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$. On en déduit facilement le cas où ψ n'est plus homogène.

La multiplication par ϕ dans $H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$ est injective :

Soit $\theta \in \mathcal{R}$ un polynôme homogène. Supposons qu'on ait $\phi d\theta \in \text{im}(\partial_2)$, et montrons qu'alors $d\theta \in \text{im}(\partial_2)$. Il existe $\bar{X} \in \mathcal{R}^3$ tel que $d(\phi\theta) - \theta d\phi = \phi d\theta = (\nabla \cdot \bar{X})d\phi - d(\bar{X} \cdot \nabla \phi)$, d'où $d(\nabla \cdot \bar{X} + \theta) \wedge d\phi = 0$. Donc il existe $u(\phi) \in \phi k_0[\phi]$ tel que

$$\nabla \cdot \bar{X} = -\theta + u'(\phi) \tag{2.21}$$

$$\bar{X} \cdot \nabla \phi = -\theta\phi + u(\phi). \tag{2.22}$$

La seconde équation vient de

$$\begin{aligned} d(\overline{X} \cdot \nabla \phi) &= (\nabla \cdot \overline{X})d\phi + \theta d\phi - d(\phi\theta) \\ &= u'(\phi)d\phi - d(\phi\theta). \end{aligned}$$

Quitte à modifier $\overline{X}$ comme on l'a fait dans le calcul de $\ker(\partial_2)$, on peut supposer que $u = 0$. D'après l'équation (2.22), on a $\nabla \phi \cdot (\overline{X} + \frac{1}{4}\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}) = 0$.

Donc il existe $\overline{r} \in \mathcal{R}^3$ tel que $\overline{X} = -\frac{1}{4}\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix} + \overline{r} \times \nabla \phi$. En remplaçant dans (2.21) :

$$\nabla \cdot \left(-\frac{1}{4}\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix} + \overline{r} \times \nabla \phi \right) + \theta = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{4}deg(\theta)\theta = (\nabla \times \overline{r}) \cdot \nabla \phi,$$

d'après la relation (2.14) appliquée au polynôme homogène θ .

On a donc $\theta = \frac{4}{deg\theta}(\nabla \times \overline{r}) \cdot \nabla \phi$. Si on pose $\overline{Y} = \frac{4}{deg\theta}(\nabla \times \overline{r})$, comme $\nabla \cdot \overline{Y} = 0$, on a

$$d\theta = d(\overline{Y} \cdot \nabla \phi) = -(\nabla \cdot \overline{Y})d\phi + d(\overline{Y} \cdot \nabla \phi),$$

si bien que $d\theta \in im(\partial_2)$. Ainsi $d\theta = 0$ dans $H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ lorsque θ est un polynôme homogène. Cela s'étend facilement au cas où θ n'est plus homogène.

Septième étape. D'après (2.20), la série de Poincaré de $H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ est

$$P(H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial), t) = \frac{t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1}{1 - t^4}.$$

De plus, la série de Poincaré de $k_0[\phi]$ est $\frac{1}{1 - t^4}$. Donc ce $k_0[\phi]$ -module libre-gradué est de rang 9. On ne sait pas donner de générateurs explicites, mais on sait qu'il y a un générateur de degré 0, 2 générateurs de degré 1, 3 générateurs de degré 2, 2 générateurs de degré 3 et un générateur de degré 4.

De même, d'après (2.18) la série de Poincaré de $H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ est

$$P(H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial), t) = \frac{2t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t}{1 - t^4}.$$

Donc le $k_0[\phi]$ -module libre-gradué $H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ est de rang 9, il a 2 générateurs de degré 1, 3 générateurs de degré 2, 2 générateurs de degré 3 et 2 générateurs de degré 4. ■

2.3 Deux cycles de Hochschild particuliers

2.3.1 Un morphisme de résolutions

Dans cette partie, on revient à l'algèbre $A = k\langle x, y \rangle / (f_1, f_2)$ du départ. Cette algèbre est de Koszul généralisé au sens défini par R. Berger [6]. Nous notons $V = A_1$ l'espace vectoriel engendré par x et y , R le sous-espace-vectoriel de $V^{\otimes 3}$ engendré par f_1 et f_2 , et $W_4 = (R \otimes V) \cap (V \otimes R) \subset V^{\otimes 4}$ qui est engendré par $w = xf_1 + yf_2 = f_1x + f_2y$. Nous écrirons $\sum_i v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}$ un élément quelconque de R , et $\sum_i v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)}$ un élément quelconque de W_4 .

D'après la proposition 1.2.2, on peut écrire une résolution libre de A comme A - A -bimodule de la façon suivante :

$$0 \longrightarrow A \otimes W_4 \otimes A \xrightarrow{d'_3} A \otimes R \otimes A \xrightarrow{d'_2} A \otimes V \otimes A \xrightarrow{d'_1} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0 \quad (3.23)$$

où μ est le produit de A et

$$\begin{aligned} d'_1(a \otimes v \otimes b) &= av \otimes b - a \otimes vb, \\ d'_2\left(\sum_i a \otimes (v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}) \otimes b\right) &= \sum_i av_1^{(i)}v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes b + av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}b + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)}b, \\ d'_3\left(\sum_i a \otimes (v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)}) \otimes b\right) &= \sum_i av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b - a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)}b. \end{aligned}$$

Nous noterons $(K_{l-r}(A), d')$ cette résolution.

Par ailleurs, on connaît déjà une résolution de A comme A - A -bimodule : il s'agit de la bar-résolution

$$\dots \longrightarrow A^{\otimes 6} \xrightarrow{b'_4} A^{\otimes 5} \xrightarrow{b'_3} A^{\otimes 4} \xrightarrow{b'_2} A^{\otimes 3} \xrightarrow{b'_1} A^{\otimes 2} \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$$

où μ est toujours le produit de A , et

$$b'(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n.$$

Nous noterons $(C'(A), b')$ cette résolution.

Dans le cas de notre algèbre A , nous allons construire un morphisme entre ces deux résolutions. Dans [33], Van den Bergh montre qu'on a un morphisme de la résolution de Koszul (K_{l-r}, d') ("version bimodule") d'une algèbre *quadratique* dans la bar-résolution $(C'(A), b')$ de cette algèbre, qui est en fait

l'inclusion de $K_{l-r}(A)_n$ dans $C'_n(A)$. Ici, la situation d'une algèbre *cubique* est tout à fait nouvelle.

Dans notre cas, on a le diagramme suivant qui commute :

$$\begin{array}{ccccc} A^{\otimes 3} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 2} & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow inj & & \uparrow Id & & \\ A \otimes V \otimes A & \xrightarrow{d'} & A^{\otimes 2} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

où les deux flèches verticales sont respectivement l'identité de $A^{\otimes 2}$ dans $A^{\otimes 2}$ et l'inclusion naturelle de $A \otimes V \otimes A$ dans $A^{\otimes 3}$. Par contre, on n'a pas d'injection canonique de $A \otimes R \otimes A$ dans $A^{\otimes 4}$ puisque $A \otimes R \otimes A \subset A^{\otimes 5}$.

Il faut donc trouver deux morphismes de A - A -bimodules φ' et ψ' tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccccc} A^{\otimes 5} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 4} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 3} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 2} & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow \psi' & & \uparrow \varphi' & & \uparrow inj & & \uparrow Id & & \\ A \otimes W_4 \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes R \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes V \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes A & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On définit $\varphi' : A \otimes R \otimes A \longrightarrow A^{\otimes 4}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varphi'(\sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes b) &= \frac{1}{2} \sum_i [av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes b + a \otimes v_1^{(i)}v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes b \\ &\quad + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes b + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}b]. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} &b'(\varphi'(\sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes b)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i [av_1^{(i)}v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes b - av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes b + av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}b] \\ &\quad + [av_1^{(i)}v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes b - a \otimes v_1^{(i)}v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes b + a \otimes v_1^{(i)}v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}b] \\ &\quad + [av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes b - a \otimes v_1^{(i)}v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes b + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)}b] \\ &\quad + [av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}b - a \otimes v_1^{(i)}v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}b + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)}b] \\ &= \sum_i [av_1^{(i)}v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes b + av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}b + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)}b - a \otimes v_1^{(i)}v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes b]. \end{aligned}$$

Or $\sum_i v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \in R$, et donc $\sum_i v_1^{(i)}v_2^{(i)}v_3^{(i)} = 0$ dans A . D'où enfin

$$b'(\varphi'(\sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes b))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i av_1^{(i)}v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes b + av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}b + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)}b \\
&= d'(\sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes b).
\end{aligned}$$

Donc φ' est bien un morphisme de A - A -bimodules tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
A^{\otimes 4} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 3} \\
\uparrow \varphi' & & \uparrow inj \\
A \otimes R \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes V \otimes A.
\end{array}$$

Avant de définir ψ' , nous allons calculer $\varphi' \circ d'$:

$$\begin{aligned}
&\varphi'(d'(\sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_i [av_1^{(i)}v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b + av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b + av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}v_4^{(i)} \otimes b \\
&\quad - a \otimes v_1^{(i)}v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)}b - a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)}b - a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}v_4^{(i)}b].
\end{aligned}$$

Soit $\psi' : A \otimes W_4 \otimes A \longrightarrow A^{\otimes 5}$ défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\psi'(\sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b) \\
&= \frac{1}{2} \sum_i [a \otimes v_1^{(i)}v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b \\
&\quad + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}v_4^{(i)} \otimes b].
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
&b'(\psi'(\sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_i [av_1^{(i)}v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b - a \otimes v_1^{(i)}v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b + a \otimes v_1^{(i)}v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}v_4^{(i)} \otimes b \\
&\quad - a \otimes v_1^{(i)}v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)}b + av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b - a \otimes v_1^{(i)}v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b \\
&\quad + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)}v_4^{(i)} \otimes b - a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)}b + av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}v_4^{(i)} \otimes b \\
&\quad - a \otimes v_1^{(i)}v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}v_4^{(i)} \otimes b + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)}v_4^{(i)} \otimes b - a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}v_4^{(i)}b] \\
&= \frac{1}{2} \sum_i [av_1^{(i)}v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b + av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b + av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}v_4^{(i)} \otimes b \\
&\quad - a \otimes v_1^{(i)}v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)}b - a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)}b - a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}v_4^{(i)}b \\
&\quad + 2(-a \otimes v_1^{(i)}v_2^{(i)}v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}v_3^{(i)}v_4^{(i)} \otimes b)].
\end{aligned}$$

Or $\sum_i v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \in (R \otimes V) \cap (V \otimes R)$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_i v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} v_3^{(i)} v_4^{(i)} &= 0 \text{ dans } V \otimes A, \\ \sum_i v_1^{(i)} v_2^{(i)} v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} &= 0 \text{ dans } A \otimes V. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & b'(\psi'(\sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes b)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i [a v_1^{(i)} v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b + a v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \otimes b + a v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} v_4^{(i)} \otimes b \\ &\quad - a \otimes v_1^{(i)} v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} b - a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} b - a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} v_4^{(i)} b] \\ &= \varphi'(d'(\sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes b)). \end{aligned}$$

Donc ψ' est bien un morphisme de A - A -bimodule tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes 5} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 4} \\ \uparrow \psi' & & \uparrow \varphi' \\ A \otimes W_4 \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes R \otimes A. \end{array}$$

On a alors bien le morphisme de résolutions souhaité :

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & A^{\otimes 5} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 4} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 3} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 2} & \longrightarrow & 0 \\ & \uparrow \psi' & & \uparrow \varphi' & & \uparrow inj & & \uparrow Id & & \\ \cdots & A \otimes W_4 \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes R \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes V \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes A & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Noter que ϕ' et ψ' sont homogènes de degré 0 (lorsque R est considéré comme concentré en degré 3 et W_4 est considéré comme concentré en degré 4). Ce morphisme de résolutions est injectif car il part d'une résolution minimale (voir par exemple [9]).

Remarques :

- Le morphisme de résolutions que nous venons de construire est valable pour toute algèbre 3-homogène de Koszul, de dimension globale 3. Il s'applique donc à l'algèbre de Yang-Mills étudiée récemment par Connes et Dubois-Violette [14].
- Dans le chapitre 5, nous donnons un morphisme de résolutions valable pour toute algèbre de Koszul généralisée.

2.3.2 Un quasi-isomorphisme

Notons q' le morphisme de résolutions que nous venons d'obtenir. Si on tensorise le complexe $K_{l-r}(A)$ par $A \otimes_{A^e} -$, on obtient un complexe $(K(A), d) = (A \otimes_{A^e} K_{l-r}(A), d)$, dont l'homologie est l'homologie de Hochschild $HH_*(A)$. D'autre part, si on tensorise le complexe $C'(A)$ par $A \otimes_{A^e} -$, on obtient le complexe de Hochschild $(C(A), b)$ tel qu'il est défini dans la section 2. Le résultat suivant est élémentaire ([35], lemma 2.4.1).

Proposition 2.3.1 $q = 1_A \otimes_{A^e} q'$ est un quasi-isomorphisme de $K(A)$ dans $C(A)$.

Preuve. D'après le théorème de comparaison entre deux résolutions, il existe un autre morphisme de résolutions $f' : C'(A) \rightarrow K_{l-r}(A)$. On sait alors que $Id_{K_{l-r}(A)}$ et $f' \circ q'$ sont homotopes : il existe $s' : K_{l-r}(A) \rightarrow K_{l-r}(A)$ de degré +1 telle que $f' \circ q' - Id_{K_{l-r}(A)} = d' \circ s' + s' \circ d'$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & 0 & \longrightarrow & A \otimes W_4 \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes R \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes V \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes A \\
 & \uparrow & & \uparrow f' & & \uparrow f' & & \uparrow f' & & \uparrow f' \\
 \cdots & A^{\otimes 6} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 5} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 4} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 3} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 2} \\
 & \uparrow & & \uparrow q' & & \uparrow q' & & \uparrow q' & & \uparrow q' \\
 \cdots & 0 & \longrightarrow & A \otimes W_4 \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes R \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes V \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes A.
 \end{array}$$

Pour simplifier, notons $1 \otimes -$ le foncteur $1_A \otimes_{A^e} -$. On a

$$(1 \otimes f') \circ (1 \otimes q') - Id_{A \otimes K_{l-r}(A)} = (1 \otimes d') \circ (1 \otimes s') + (1 \otimes s') \circ (1 \otimes b').$$

D'où, en passant à l'homologie (et en notant $H(-)$ les applications induites en homologie) :

$$H((1 \otimes f') \circ (1 \otimes q')) - H(Id_{A \otimes K_{l-r}(A)}) = 0,$$

$$H(1 \otimes f') \circ H(1 \otimes q') = Id_{A \otimes K_{l-r}(A)}.$$

Donc $H(1 \otimes q')$ est inversible à gauche. De même, il est inversible à droite, et donc $H(1 \otimes q')$ est un isomorphisme, c'est à dire que $1 \otimes q' = q$ est bien un quasi-isomorphisme. ■

On note $\psi = 1_A \otimes_{A^e} \psi'$ et $\varphi = 1_A \otimes_{A^e} \varphi'$. On a donc un quasi-isomorphisme :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & A^{\otimes 5} & \longrightarrow & A^{\otimes 4} & \xrightarrow{b_3} & A^{\otimes 3} & \xrightarrow{b_2} & A^{\otimes 2} & \xrightarrow{b_1} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & \uparrow & & \uparrow \psi & & \uparrow \varphi & & \uparrow inj & & \uparrow Id & & \\
 \cdots & 0 & \longrightarrow & A \otimes W_4 & \xrightarrow{d_3} & A \otimes R & \xrightarrow{d_2} & A \otimes V & \xrightarrow{d_1} & A & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

Explicitons φ et ψ :

$$\begin{aligned} \varphi : A \otimes R &\longrightarrow A^{\otimes 3} \\ \sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} &\mapsto \frac{1}{2} \sum_i [av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} + a \otimes v_1^{(i)} v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \\ &\quad + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} v_3^{(i)} + v_3^{(i)} a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)}], \\ \psi : A \otimes W_4 &\longrightarrow A^{\otimes 4} \\ \sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} &\mapsto \frac{1}{2} \sum_i [a \otimes v_1^{(i)} v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} \\ &\quad + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} + a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} v_4^{(i)}]. \end{aligned}$$

Noter que φ et ψ sont homogènes de degré 0 (lorsque R est concentré en degré 3 et W_4 est concentré en degré 4). On a aussi (voir [7])

$$\begin{aligned} d_1(a \otimes v) &= av - va, \\ d_2\left(\sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}\right) &= \sum_i av_1^{(i)} v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} + v_3^{(i)} av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} + v_2^{(i)} v_3^{(i)} a \otimes v_1^{(i)}, \\ d_3\left(\sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)}\right) &= \sum_i av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} - v_4^{(i)} a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}. \end{aligned}$$

2.3.3 Deux cycles de Hochschild remarquables

Considérons l'élément $w = xf_1 + yf_2$ de $W_4 \subset A^{\otimes 4}$. On remarque que cet élément est stable par tous les automorphismes de $A^{\otimes 4}$ induits par les permutations circulaires des quatre facteurs (ce résultat provient en fait de la classification faite par Artin et Schelter [1]).

D'après l'expression de d , on voit alors que

$$d_2(x \otimes f_1 + y \otimes f_2) = 3(f_1 \otimes x + f_2 \otimes y) = 0$$

puisque $f_1 = f_2 = 0$ dans A . Donc $x \otimes f_1 + y \otimes f_2 \in A \otimes R$ est un cycle du complexe $K(A)$. On a aussi

$$d_3(1 \otimes (xf_1 + yf_2)) = x \otimes f_1 + y \otimes f_2 - x \otimes f_1 - y \otimes f_2 = 0.$$

Donc $1 \otimes (xf_1 + yf_2) \in A \otimes W_4$ est un cycle du complexe $K(A)$.

Alors $\varphi(x \otimes f_1 + y \otimes f_2) \in A^{\otimes 3}$ et $\psi(1 \otimes (xf_1 + yf_2)) \in A^{\otimes 4}$ sont deux cycles de Hochschild particuliers.

Un cycle de Hochschild dans $A^{\otimes 3}$

Nous revenons maintenant à l'algèbre $A = k_0((h))\langle x, y, z \rangle / (f_1, f_2, g)$ munie d'une filtration par les puissances de h . Explicitement, avec

$$\begin{aligned} f_1 &= 2yxy - y^2x - xy^2 - p_1h^2(xy^2 + yxy + y^2x) - q_1h^2x^3, \\ f_2 &= 2xyx - x^2y - yx^2 - p_1h^2(yx^2 + xyx + x^2y) - q_1h^2y^3, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \varphi(x \otimes f_1 + y \otimes f_2) &= \frac{1}{2}[-2x^2 \otimes y \otimes y + 4xy \otimes x \otimes y - 2xy \otimes y \otimes x \\ &\quad - 2y^2 \otimes x \otimes x + 4yx \otimes y \otimes x - 2yx \otimes x \otimes y \\ &\quad - x \otimes y^2 \otimes x + 2y \otimes xy \otimes x - y \otimes yx \otimes x \\ &\quad - y \otimes x^2 \otimes y + 2x \otimes yx \otimes y - x \otimes xy \otimes y \\ &\quad - x \otimes x \otimes y^2 + 2x \otimes y \otimes xy - x \otimes y \otimes yx \\ &\quad - y \otimes y \otimes x^2 + 2y \otimes x \otimes yx - y \otimes x \otimes xy] \\ &\quad + O(h^2). \end{aligned}$$

En utilisant la relation $xy = yx + hz$ de A , on peut écrire

$$\begin{aligned} \varphi(x \otimes f_1 + y \otimes f_2) &= \frac{1}{2}[-2x^2 \otimes y \otimes y - 2y^2 \otimes x \otimes x - x \otimes y^2 \otimes x \\ &\quad - y \otimes x^2 \otimes y - x \otimes x \otimes y^2 - y \otimes y \otimes x^2 \\ &\quad + 4(yx + hz) \otimes x \otimes y - 2yx \otimes x \otimes y \\ &\quad + 4(xy - hz) \otimes y \otimes x - 2xy \otimes y \otimes x \\ &\quad + 2y \otimes (yx + hz) \otimes x - y \otimes yx \otimes x + 2x \otimes (xy - hz) \otimes y \\ &\quad - x \otimes xy \otimes y + 2x \otimes y \otimes (yx + hz) - x \otimes y \otimes yx \\ &\quad + 2y \otimes x \otimes (xy - hz) - y \otimes x \otimes xy] + O(h^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x \otimes f_1 + y \otimes f_2) &= \frac{1}{2}[-2x^2 \otimes y \otimes y - 2y^2 \otimes x \otimes x - x \otimes y^2 \otimes x \\ &\quad - y \otimes x^2 \otimes y - x \otimes x \otimes y^2 - y \otimes y \otimes x^2 \\ &\quad + 2yx \otimes x \otimes y + 2xy \otimes y \otimes x \\ &\quad + y \otimes yx \otimes x + x \otimes xy \otimes y \\ &\quad + x \otimes y \otimes yx + y \otimes x \otimes xy] \\ &\quad + \frac{h}{2}[4z \otimes x \otimes y - 4z \otimes y \otimes x + 2y \otimes z \otimes x \\ &\quad - 2x \otimes z \otimes y + 2x \otimes y \otimes z - 2y \otimes x \otimes z] + O(h^2) \\ &= [*] + h[**] + O(h^2). \end{aligned}$$

Nous allons supprimer le terme $[*]$ en montrant que c'est un bord de $A^{\otimes 3}$. En effet, $[*]$ est égal à

$$\frac{1}{2}b(x \otimes y \otimes y \otimes x + y \otimes x \otimes x \otimes y - x \otimes x \otimes y \otimes y - y \otimes y \otimes x \otimes x).$$

On remarque alors que $\varphi(x \otimes f_1 + y \otimes f_2) - [*]$ est un cycle de Hochschild, dont l'image dans le gradué associé $gr_1(A^{\otimes 3})$ est égale à l'image de $h[**]$. Cette image s'envoie dans $h\Omega_{\mathcal{R}}^2$, par le morphisme de Hochschild-Kostant-Rosenberg, sur l'élément $h(2zdx \wedge dy + ydz \wedge dx + xdy \wedge dz) = h\pi$. D'où le résultat suivant :

Proposition 2.3.2

$$\Pi = \frac{1}{h}[\varphi(xf_1 + yf_2) - \frac{1}{2}b(x \otimes y \otimes y \otimes x + y \otimes x \otimes x \otimes y - x \otimes x \otimes y \otimes y - y \otimes y \otimes x \otimes x)]$$

est un cycle de Hochschild de $A^{\otimes 3}$ dont l'image dans le gradué associé s'envoie sur le générateur π de $H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet}, \partial)$ (voir le théorème 2.2.1 où est introduit π).

Noter que Π est homogène de degré 4 (puisque φ et b sont homogènes de degré 0).

Un cycle de Hochschild dans $A^{\otimes 4}$

On a le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \psi(1 \otimes (xf_1 + yf_2)) &= \frac{1}{2}1 \otimes [-x^2 \otimes y \otimes y - y^2 \otimes x \otimes x - y \otimes x^2 \otimes y \\ &\quad - x \otimes y^2 \otimes x - y \otimes y \otimes x^2 - x \otimes x \otimes y^2 \\ &\quad + (2xy - yx) \otimes x \otimes y + (2yx - xy) \otimes y \otimes x + y \otimes (2xy - yx) \otimes x \\ &\quad + x \otimes (2yx - xy) \otimes y + x \otimes y \otimes (2xy - yx) + y \otimes x \otimes (2yx - xy)] \\ &\quad + O(h^2). \end{aligned}$$

En utilisant la relation $xy = yx + hz$ de A , on peut réécrire ceci en

$$\begin{aligned} \psi(1 \otimes (xf_1 + yf_2)) &= \frac{1}{2}1 \otimes [-x^2 \otimes y \otimes y - y^2 \otimes x \otimes x - y \otimes x^2 \otimes y \\ &\quad - x \otimes y^2 \otimes x - y \otimes y \otimes x^2 - x \otimes x \otimes y^2 \\ &\quad + yx \otimes x \otimes y + xy \otimes y \otimes x + y \otimes yx \otimes x \\ &\quad + x \otimes xy \otimes y + x \otimes y \otimes yx + y \otimes x \otimes xy] \\ &\quad + h1 \otimes [z \otimes x \otimes y - z \otimes y \otimes x + y \otimes z \otimes x \\ &\quad - x \otimes z \otimes y + x \otimes y \otimes z - y \otimes x \otimes z] \\ &\quad + O(h^2) \\ &= [*] + h[**] + O(h^2). \end{aligned}$$

On est alors dans la même situation que précédemment : le terme constant $[*]$ est un bord de Hochschild de $A^{\otimes 4}$. En effet, $[*]$ est égal à

$$\frac{1}{2}b(1 \otimes x \otimes x \otimes y \otimes y + 1 \otimes y \otimes y \otimes x \otimes x - 1 \otimes x \otimes y \otimes y \otimes x - 1 \otimes y \otimes x \otimes x \otimes y).$$

On remarque alors que $\psi(1 \otimes (xf_1 + yf_2)) - [*]$ est un cycle de Hochschild, dont l'image dans le gradué associé $gr_1(A^{\otimes 4})$ est égale à l'image de $h[**]$. Cette image s'envoie dans $h\Omega_{\mathcal{R}}^3$, par le morphisme de Hochschild-Kostant-Rosenberg, sur l'élément $h(dx \wedge dy \wedge dz) = h\delta$. D'où le résultat suivant :

Proposition 2.3.3

$$\Delta = \frac{1}{h}[\psi(xf_1 + yf_2) - \frac{1}{2}b(1 \otimes x \otimes x \otimes y \otimes y + 1 \otimes y \otimes y \otimes x \otimes x - 1 \otimes x \otimes y \otimes y \otimes x - 1 \otimes y \otimes x \otimes x \otimes y)]$$

est un cycle de Hochschild de $A^{\otimes 4}$ dont l'image dans le gradué associé s'envoie sur le générateur δ de $H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^{\bullet})$ (voir le théorème 2.2.1 où est introduit δ).

Puisque ψ et b sont homogènes de degré 0, Δ est homogène de degré 4.

On a donc trouvé des relevés Π et Δ de π et δ dans $HH_2(A)$ et $HH_3(A)$ qui vont nous permettre de conclure.

2.4 Homologie de Hochschild de A

Nous allons maintenant utiliser la dégénérescence de la suite spectrale de Brylinski pour “remonter” le résultat sur l'homologie de Poisson du gradué associé (théorème 2.2.1) en un résultat sur l'homologie de Hochschild de A .

2.4.1 Théorème

Théorème 2.4.1 *Soit A une algèbre AS-régulière de dimension globale 3 de type A cubique, à coefficients génériques. Alors les $HH_i(A)$ sont des $k[C_4]$ -modules libres de rangs 9, 9, 1, 1 pour $i = 0, 1, 2, 3$ respectivement. $HH_2(A)$ est engendré par Π et $HH_3(A)$ est engendré par Δ . Ces k -espaces vectoriels gradués possèdent les séries de Poincaré suivantes :*

$$P(HH_0(A), t) = \frac{t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1}{1 - t^4},$$

$$P(HH_1(A), t) = \frac{2t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t}{1 - t^4} = P(HH_0(A), t) - 1,$$

$$P(HH_2(A), t) = \frac{t^4}{1 - t^4},$$

$$P(HH_3(A), t) = \frac{t^4}{1 - t^4}.$$

De plus, le bord B de Connes est une surjection homogène de degré 0 de $HH_0(A)$ dans $HH_1(A)$ et un isomorphisme de degré 0 de $HH_2(A)$ dans $HH_3(A)$. On a $B(\Pi) = 4\Delta$.

2.4.2 Preuve

Nous allons commencer par énoncer et démontrer un critère de dégénérescence de suites spectrales. Pour cela, rappelons rapidement quelques notions sur les suites spectrales associées à une filtration, que nous avons déjà présentées dans la sous-section 2.1.5.

Soit C un complexe et F une filtration décroissante sur C . Rappelons qu'on a défini $\eta_{p,q} : F_p C_{-p-q} \rightarrow F_p C_{-p-q} / F_{p+1} C_{-p-q}$, et

$$A_{p,q}^r = \{c \in F_p C_{-p-q}; d(c) \in F_{p+r} C_{-p-q-1}\}, Z_{p,q}^r = \eta_{p,q}(A_{p,q}^r),$$

$$B_{p,q}^r = \eta_{p,q}(d(A_{p-r+1,q+r-2}^{r-1})), E_{p,q}^r = Z_{p,q}^r / B_{p,q}^r,$$

ainsi que

$$Z_{p,q}^\infty = \bigcap_{r=1}^\infty Z_{p,q}^r, B_{p,q}^\infty = \bigcup_{r=1}^\infty B_{p,q}^r, E_{p,q}^\infty = Z_{p,q}^\infty / B_{p,q}^\infty.$$

On pose aussi

$$A_{p,q}^\infty = \ker\{d : F_p C_{-p-q} \rightarrow F_p C_{-p-q-1}\}.$$

On a les inclusions

$$\dots \subset B_{p,q}^r \subset B_{p,q}^{r+1} \subset \dots \subset B_{p,q}^\infty \subset Z_{p,q}^\infty \subset \dots \subset Z_{p,q}^{r+1} \subset Z_{p,q}^r \subset \dots$$

et des isomorphismes $Z_{p,q}^r / Z_{p,q}^{r+1} \xrightarrow{\sim} B_{p+r,q-r+1}^{r+1} / B_{p+r,q-r+1}^r$.

On définit alors l'application $\Phi_{p,q}^r$ comme la composée des trois flèches naturelles suivantes :

$$A_{p,q}^\infty \longrightarrow A_{p,q}^r \longrightarrow Z_{p,q}^r \longrightarrow E_{p,q}^r.$$

On a le critère suivant [33] :

Proposition 2.4.2 *Si pour un r donné, $\Phi_{p,q}^r$ est surjective pour tous p, q , alors la suite spectrale dégénère en E^r .*

Preuve.

L'image de la première flèche est égale à $A_{p,q}^\infty$. On sait que $\eta_{p,q}(A_{p,q}^\infty) \subset Z_{p,q}^\infty$ et $\eta_{p,q}(A_{p,q}^\infty)$ contient $B_{p,q}^\infty$ (voir Weibel [35] page 137). Si $\Phi_{p,q}^r$ est surjective,

on a $\eta_{p,q}(A_{p,q}^\infty) = Z_{p,q}^r$ et donc $Z_{p,q}^r \subset Z_{p,q}^\infty$. D'où $Z_{p,q}^r = Z_{p,q}^{r+1} = \dots = Z_{p,q}^\infty$. Puis, à l'aide des isomorphismes ci-dessus, $B_{p,q}^r = B_{p,q}^{r+1} = \dots = B_{p,q}^\infty$, et donc $E^r = E^{r+1} = \dots = E^\infty$. ■

Nous considérons maintenant la suite spectrale de Brylinski associée à notre algèbre A (voir la sous-section 2.1.8), si bien que $k = k_0((h))$. Le second terme de la suite spectrale de Brylinski qui converge vers $HH_*(A)$ est :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes h^{-2} & H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes h^{-1} & 0 & 0 & \cdots & q = 1 \\
 H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes h^{-2} & H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes h^{-1} & H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes 1 & 0 & \cdots & q = 0 \\
 H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes h^{-2} & H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes h^{-1} & H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes 1 & H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes h & \cdots & q = -1 \\
 0 & H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes h^{-1} & H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes 1 & H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes h & \cdots & q = -2 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 p = -2 & p = -1 & p = 0 & p = 1 & &
 \end{array}$$

où $\mathcal{R} = k_0[x, y, z]$. Nous allons montrer que cette suite spectrale dégénère à l'ordre 2. Pour cela, d'après la Proposition 2.4.2, il suffit de montrer que tout élément de $E_{p,q}^2$ se relève par $\Phi_{p,q}^2$ en un élément de $\{c \in F_p C_{-p-q}(A); d(c) = 0\}$. En fait, puisque les différentes colonnes de E^2 sont les mêmes à une puissance de h près, il suffit de montrer que tout élément de $E_{0,*}^2$ se relève en un élément de $\ker(d : F_0 C(A) \rightarrow F_0 C(A))$.

Rappelons qu'on a un isomorphisme $E^1 = HH_*(gr_F(A)) \simeq \Omega_{\mathcal{R}}^\bullet \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}]$.

- $E_{0,0}^2 = H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$ est un quotient de $\mathcal{R}$. Soit $\bar{u}$ un élément de $H_0(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$, et $u \in \mathcal{R}$ tel que $\bar{u}$ soit l'image de u . Soit U un relevé de u dans $F_0(A)$ (rappelons que $\mathcal{R} \simeq F_0 A / F_1 A$). Alors $\Phi_{0,0}^2(U) = \bar{u}$ et donc les éléments de $E_{0,0}^2$ proviennent bien d'éléments de $F_0(A)$.
- $E_{0,-1}^2 = H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$. On a vu que tout élément de $H_1(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$ s'écrit $\overline{d\psi}$ avec $\psi \in \mathcal{R}$ (cinquième étape de 2.2.2). On relève $\psi \in \mathcal{R}$ en un élément Ψ de $F_0(A)$. Alors $B(\Psi)$ est un élément de $F_0 A^{\otimes 2}$ tel que $b \circ B(\Psi) = -B \circ b(\Psi) = 0$. On a $\Phi_{0,-1}^2(B(\Psi)) = \overline{d\psi}$, et donc les éléments de $E_{0,-1}^2$ proviennent bien de cycles de Hochschild de $F_0 A^{\otimes 2}$.
- $E_{0,-2}^2 = H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$. Soit $u \in H_2(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$. On a vu que u est la classe de $f(\phi)\pi$ où $f \in k_0[\phi]$, ϕ est un élément remarquable de $\mathcal{R}$ et π est un élément remarquable de $\Omega_{\mathcal{R}}^2$ (cinquième étape de 2.2.2). Rappelons que ϕ est l'image dans $\mathcal{R} = gr_0(A)$ d'un élément central remarquable Φ de

A. Nous avons trouvé dans la Proposition 2.3.2, un cycle de Hochschild Π de $F_0 A^{\otimes 3}$ relevant π . Donc $U = f(\Phi)\Pi$ relève u . Ainsi les éléments de $E_{0,-2}^2$ proviennent bien de cycles de Hochschild de $F_0 A^{\otimes 3}$.

- $E_{0,-3}^2 = H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$. Soit $u \in H_3(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial)$. On a vu que u est la classe de $f(\phi)\delta$ où $f \in k_0[\phi]$ et δ est un élément remarquable de $\Omega_{\mathcal{R}}^3$. Nous avons trouvé dans la Proposition 2.3.3, un cycle de Hochschild Δ de $F_0 A^{\otimes 4}$ relevant δ . Donc $U = f(\Phi)\Delta$ relève u . Ainsi les éléments de $E_{0,-3}^2$ proviennent bien de cycles de Hochschild de $F_0 A^{\otimes 4}$.

La suite spectrale dégénère donc à l'ordre 2. Comme de plus, on a montré dans la sous-section 2.1.5 que cette suite spectrale converge faiblement vers $HH_*(A)$, on a pour tous p et q ,

$$F_p HH_{-p-q}(A)/F_{p+1} HH_{-p-q}(A) \simeq H_{-p-q}(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes_{k_0} (k_0 h^p).$$

Cet isomorphisme se déduit de l'application $\Phi_{p,q}^2$ ainsi que de l'identification entre E^2 et $H_*(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}]$. Il est homogène de degré 0. On a donc pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $p \in \mathbb{Z}$,

$$F_p HH_i(A)/F_{p+1} HH_i(A) \simeq H_i(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes_{k_0} (k_0 h^p).$$

Par suite, on a l'isomorphisme homogène de degré 0 :

$$gr_F(HH_i(A)) \simeq H_i(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}]. \quad (4.24)$$

Il nous reste à remonter ce résultat sur $gr_F(HH_i(A))$ en un résultat sur $HH_i(A)$. Pour ceci, nous allons utiliser des résultats généraux sur les modules filtrés [24], en les adaptant dans le cas de la catégorie graduée.

Soit R une k -algèbre $\mathbb{N}$ -graduée munie d'une $\mathbb{Z}$ -filtration décroissante F . On remarque que F induit naturellement (par restriction) une filtration $F_p(R_n)$ sur R_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a précisément $F_p(R_n) = F_p R \cap R_n$. Nous supposons de plus que la filtration et la graduation de R sont *compatibles*, c'est-à-dire que $F_p R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} F_p(R_n)$. Dans ce cas,

$$(F_p R)/(F_{p+1} R) \simeq (\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} F_p(R_n))/(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} F_{p+1}(R_n)) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (F_p(R_n))/(F_{p+1}(R_n)).$$

D'où l'isomorphisme de k -espaces vectoriels gradués $gr_F(R) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} gr_F(R_n)$.

Soient L, M, N trois R -modules $\mathbb{N}$ -gradués, munis de $\mathbb{Z}$ -filtrations décroissantes encore notées F . Ces filtrations définissent par restriction des filtrations sur L_n, M_n, N_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous noterons $F(L_n), F(M_n), F(N_n)$ ces filtrations. On suppose que les filtrations et graduations de L, M, N sont compatibles. On a donc les isomorphismes de k -espaces vectoriels gradués : $gr_F(L) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} gr_F(L_n)$, $gr_F(M) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} gr_F(M_n)$, $gr_F(N) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} gr_F(N_n)$.

Proposition 2.4.3 *On considère un complexe de R -modules filtrés et gradués :*

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \quad (4.25)$$

où on suppose que f et g sont deux morphismes de R -modules qui sont homogènes de degré 0 et qui préservent la filtration. On en déduit alors un complexe de $gr_F(R)$ -modules gradués :

$$gr_F(L) \xrightarrow{gr_F(f)} gr_F(M) \xrightarrow{gr_F(g)} gr_F(N). \quad (4.26)$$

Supposons FM exhaustive et séparée, FL complète dans la catégorie graduée (i.e. $F(L_n)$ complète pour tout $n \in \mathbb{N}$), et (4.26) exacte. Alors (4.25) est exacte.

Noter que les $gr_F(R)$ -modules $gr_F(L)$, $gr_F(M)$, $gr_F(N)$ sont munis de deux graduations différentes.

Preuve. Nous supposons (4.26) exacte. Comme $gr_F(L) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} gr_F(L_n)$, $gr_F(M) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} gr_F(M_n)$, $gr_F(N) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} gr_F(N_n)$, et $gr_F(f)$ et $gr_F(g)$ sont homogènes de degré 0, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le complexe de k -espaces vectoriels

$$gr_F(L_n) \xrightarrow{gr_F(f)} gr_F(M_n) \xrightarrow{gr_F(g)} gr_F(N_n) \quad (4.27)$$

est exact. En effet, si $y_n \in gr_F(M_n)$ est tel que $gr_F(g)(y_n) = 0$, il existe $x \in \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} gr_F(L_m)$ tel que $y_n = gr_F(f)(x)$. Alors x s'écrit comme une somme finie $x = \sum_{m \in \mathbb{N}} x_m$ où $x_m \in gr_F(L_m)$. Comme $gr_F(f)$ est homogène de degré 0, on a $y_n = gr_F(f)(x_n)$.

Le complexe de k -espaces vectoriels (4.27) est exact, $F(L_n)$ est complète, $F(M_n)$ est exhaustive et séparée. Alors d'après [24] (Theorem D.III.4), le complexe de k -espaces vectoriels

$$L_n \xrightarrow{f} M_n \xrightarrow{g} N_n$$

est exact. Puisque $L = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} L_n$, $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$, $N = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} N_n$, et que f et g sont homogènes de degré 0, le complexe (4.25) est exact. ■

Corollaire 2.4.4 *Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme filtré et homogène de degré 0 entre deux R -modules M et N munis d'une filtration F et d'une graduation comme ci-dessus. On suppose que FM et FN sont séparées et exhaustives, et que de plus FM est complète dans la catégorie graduée (i.e. $F(M_n)$ est complète pour tout n). Alors si $gr_F(f) : gr_F(M) \rightarrow gr_F(N)$ est bijective, f est un isomorphisme.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition 2.4.3 au complexe

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0.$$

■

Proposition 2.4.5 *Soit encore M un R -module filtré et gradué comme ci-dessus, tel que FM soit exhaustive et séparée. On suppose de plus que R est complet dans la catégorie graduée. Si $gr_F(M)$ est un $gr_F(R)$ -module libre-gradué de rang n de base $\{\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}\}$, où pour tout i , $\overline{x_i}$ est la classe dans le gradué associé d'un élément homogène $x_i \in F_0 M$, alors M est un R -module libre gradué de base $\{x_1, \dots, x_n\}$.*

Preuve. Soient $k_1, \dots, k_n$ les degrés respectifs de $x_1, \dots, x_n$. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : R(-k_1) \oplus \dots \oplus R(-k_n) &\longrightarrow M \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \end{aligned}$$

Alors f est un morphisme homogène de degré 0 et filtré, FM et FR^n sont séparées et exhaustives, et FR^n est complète dans la catégorie graduée. Comme par hypothèse, $gr_F(f)$ est bijective, f est un isomorphisme de R -modules gradués par le corollaire 2.4.4. Donc M est un R -module libre-gradué de base $\{x_1, \dots, x_n\}$. ■

Revenons au cas qui nous intéresse, c'est-à-dire $R = k_0((h))[\Phi]$ (muni de la filtration F issue de celle de A), $gr_F(R) = k_0[h, h^{-1}][\phi]$, $M = HH_i(A)$ (muni de la filtration F issue de celle de $C(A)$) et $gr_F(M) = gr_F(HH_i(A))$. Rappelons qu'on a un isomorphisme homogène de degré 0 (voir (4.24)) :

$$gr_F(HH_i(A)) \simeq H_i(\Omega_{\mathcal{R}}^\bullet, \partial) \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}].$$

D'après les relèvements effectués précédemment :

- $gr_F(HH_3(A))$ est un $k_0[h, h^{-1}][\phi]$ -module libre de rang 1 engendré par la classe $\overline{\Delta}$ de l'élément Δ de $F_0 HH_3(A)$, qui est homogène de degré 4. De plus, $FHH_3(A)$ et FR sont séparées et exhaustives, et FR est complète dans la catégorie graduée. Donc, d'après la proposition 2.4.5, $HH_3(A)$ est un $k_0((h))[\Phi]$ -module libre de rang 1 engendré par Δ .
- de même, on montre que $HH_2(A)$ est un $k_0((h))[\Phi]$ -module libre de rang 1 de base Π .
- $gr_F(HH_1(A))$ est un $k_0[h, h^{-1}][\phi]$ -module libre de rang 9 engendré par des classes d'éléments homogènes de degrés respectifs 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4 de $HH_1(A)$. On en déduit que $HH_1(A)$ est un $k_0((h))[\Phi]$ -module libre de rang 9 engendré par des éléments homogènes de degrés respectifs 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4.

- de même, on montre que $HH_0(A)$ est un $k_0((h))[\Phi]$ -module libre de rang 9 engendré par des éléments homogènes de degrés respectifs 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4.

En particulier, les séries de Poincaré des groupes d'homologie sont celles énoncées dans le théorème. Il nous reste à prouver que B est une surjection de $HH_0(A)$ dans $HH_1(A)$ et un isomorphisme de $HH_2(A)$ dans $HH_3(A)$.

Nous avons vu que la suite

$$gr_F HH_0(A) \xrightarrow{gr_F B} gr_F HH_1(A) \longrightarrow 0$$

est exacte. Comme les $FHH_i(A)$ sont séparées, exhaustives et complètes dans la catégorie graduée (rappelons que FA est complète dans la catégorie graduée, voir la proposition 2.1.18), d'après la proposition 2.4.3, la suite

$$HH_0(A) \xrightarrow{B} HH_1(A) \longrightarrow 0$$

est exacte, et donc $B : HH_0 \longrightarrow HH_1$ est surjective.

Puisque $gr_F HH_2(A) \xrightarrow{gr_F B} gr_F HH_3(A)$ est un isomorphisme, B est un isomorphisme de $HH_2(A)$ dans $HH_3(A)$ d'après le corollaire 2.4.4.

Le théorème 2.4.1 est alors prouvé.

Remarque : Comme dans le cas des algèbres de type A quadratiques, on trouve que $HH_0(A)$ et $HH_1(A)$ sont des $k[C]$ -modules libres de rang s^r où C est un élément central, r est le nombre d'équations de l'algèbre A et s le degré de ces relations. On trouve également que $HH_2(A)$ et $HH_3(A)$ sont des $k[C]$ -modules libres de rang 1.

Chapitre 3

Cohomologie de de Rham, homologie cyclique et homologie cyclique périodique de A

Nous allons déduire la cohomologie de de Rham, l'homologie cyclique et l'homologie cyclique périodique de A de l'homologie de Hochschild de A , de la même façon que dans [33].

Proposition 3.0.6 $\left\{ \begin{array}{l} H_{DR}^0(A) = k \\ H_{DR}^i(A) = 0 \text{ si } i \neq 0. \end{array} \right.$

Preuve. D'après le Théorème 2.4.1, le complexe $(HH_*(A), B)$ s'écrit

$$0 \longrightarrow HH_0(A) \xrightarrow{\text{surj}} HH_1(A) \longrightarrow HH_2(A) \xrightarrow{\sim} HH_3(A) \longrightarrow 0.$$

Donc $H_{DR}^0(A) = \ker(B)$, et $H_{DR}^1(A) = H_{DR}^2(A) = H_{DR}^3(A) = 0$. De plus, on sait que $P(HH_0(A), t) = P(HH_1(A), t) + 1$ et que $\dim_k(HH_0(A)_0) = 1$, $\dim_k(HH_1(A)_0) = 0$. Puisque $HH_0(A) \xrightarrow{B} HH_1(A)$ est surjective et homogène de degré 0, on a $H(\ker(B), t) = 1$, et donc $\ker(B) = \ker(B)_0$. On en déduit que $\ker(B) = k$ et $H_{DR}^0(A) = k$. ■

Proposition 3.0.7 *On a des isomorphismes de k -espaces vectoriels gradués :*

$$\left\{ \begin{array}{l} HC_0(A) = HH_0(A), \\ HC_2(A) \simeq k \oplus HH_2(A), \text{ } k \text{ concentré en degré } 0, \\ HC_i(A) = 0 \text{ si } i \text{ est impair,} \\ HC_i(A) \simeq k \text{ (concentré en degré } 0) \text{ si } i \text{ est pair et } i \geq 4. \end{array} \right.$$

Preuve. Le premier terme de la suite spectrale de Connes qui converge vers $HC_*(A)$ (voir [20]) est donné par

$$\begin{aligned} HH_3(A) &\xleftarrow{B} HH_2(A) \xleftarrow{B} HH_1(A) \xleftarrow{B} HH_0(A) \\ HH_2(A) &\xleftarrow{B} HH_1(A) \xleftarrow{B} HH_0(A) \\ HH_1(A) &\xleftarrow{B} HH_0(A) \\ HH_0(A) & \end{aligned}$$

En prenant l'homologie par rapport à B , on trouve le terme E^2 de la suite spectrale :

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & k \\ HH_2(A) & 0 & k & \\ 0 & k & & \\ HH_0(A) & & & \end{array}$$

Cette suite spectrale dégénère à l'ordre 2 de façon évidente, puisque la différentielle des E^i , pour $i \geq 2$, est de bidegré $(-i, i-1)$. On a donc $HC_2(A)^{\leq 0} / HC_2(A)^{\leq -1} \simeq HH_2(A)$ (pour la filtration par les colonnes induite sur l'homologie du complexe total). D'où $HC_2(A)^{\leq 0} \simeq HH_2(A)$ et $HC_2(A)^{\leq 1} \simeq k \oplus HH_2(A)$, et $HC_2(A) \simeq k \oplus HH_2(A)$. De même, $HC_{2i+1}(A) = 0$ si $i \geq 0$, $HC_0(A) = HH_0(A)$ et $HC_{2i}(A) \simeq k$ si $i \geq 2$. ■

Remarque : L'élément $1 - 2 \otimes 1 \otimes 1 \in A \oplus A^{\otimes 3}$, qui est homogène de degré 0, est un générateur de $HC_{2i}(A)$ pour $i \geq 2$. C'est aussi un générateur de la partie de $HC_2(A)$ qui est isomorphe à k .

Corollaire 3.0.8 (i) L'application $S : HC_i(A) \longrightarrow HC_{i-2}(A)$ de la longue suite exacte de Connes est donnée par l'identité si $i \geq 6$ et par l'inclusion de k dans $k \oplus HH_2(A)$ si $i = 4$. Si $i = 2$, alors $S : k \oplus HH_2(A) \longrightarrow HH_0(A)$ est nulle sur $HH_2(A)$ et est l'inclusion canonique $k \hookrightarrow HH_0(A)$ sur k .

(ii) On en déduit l'homologie cyclique périodique :

$$\begin{cases} HC_*^{per}(A) \simeq k \text{ si } * \text{ est pair,} \\ HC_*^{per}(A) = 0 \text{ si } * \text{ est impair.} \end{cases}$$

Preuve. (i) On a la longue suite exacte de Connes :

$$\cdots \longrightarrow HH_n(A) \xrightarrow{I} HC_n(A) \xrightarrow{S} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{B} HH_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Cette suite est définie de la façon suivante : c'est la longue suite exacte associée à la suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow C_n(A) \xrightarrow{i} C_n(A) \oplus C_{n-2}(A) \oplus \cdots \xrightarrow{s} C_{n-2}(A) \oplus C_{n-4}(A) \oplus \cdots \longrightarrow 0,$$

où i est l'injection canonique de $C_n(A)$ dans $C_n(A) \oplus C_{n-2}(A) \oplus \dots$ et s est la surjection canonique de $C_n(A) \oplus C_{n-2}(A) \oplus \dots$ dans $C_{n-2}(A) \oplus C_{n-4}(A) \oplus \dots$. Le morphisme s donne une application entre les deux bicomplexes $(C_*(A), b, B)$ et $(C_{*-2}(A), b, B)$, et donc en passant en homologie par rapport à b et B , une application S homogène de degré 0 entre les termes E^2 suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & 0 & 0 & k \\ & & 0 & & 0 & 0 & k & \\ HH_2(A) & & 0 & & k & & & \\ & & 0 & & k & & & \\ HH_0(A) & & & & & & & \end{array}$$

(suite spectrale qui converge vers $HC_*(A)$)

et

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & 0 & 0 & k \\ & & 0 & HH_2(A) & 0 & k & & \\ & & 0 & & 0 & k & & \\ & & 0 & HH_0(A) & & & & \\ & & 0 & & & & & \end{array}$$

(suite spectrale qui converge vers $HC_{*-2}(A)$).

S est l'identité si $i \geq 6$, car alors $HC_i(A) = HC_{i-2}(A) = k$ ou $= 0$ suivant la parité de i . Pour $i = 4$, on a bien $k \hookrightarrow k \oplus HH_2(A)$.

Pour $i = 2$, $HH_2(A) \oplus k \longrightarrow HH_0(A)$, via $k \hookrightarrow HH_0(A)$ et $HH_2(A) \longrightarrow 0$.

(ii) On dit qu'un ensemble $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de R -modules, munis d'applications $A_{i+1} \rightarrow A_i$, vérifie la condition de Mittag-Leffler (voir [35] p.82) si pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $j \geq k$ tel que $Im(A_i \rightarrow A_k) = Im(A_j \rightarrow A_k)$ pour tout $i \geq j$. On sait par ailleurs que si le système projectif

$$\dots \xrightarrow{S} HC_n(A) \xrightarrow{S} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{S} \dots$$

vérifie la condition de Mittag-Leffler, sa limite projectif est égale à $HC_*^{per}(A)$ où $*$ est "pair" ou "impair" (voir [17]).

Pour l'algèbre A qui nous intéresse : dans le cas "impair", ce système projectif est

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0,$$

qui vérifie la condition de Mittag-Leffler, et donc $HC_{*impair}^{per}(A) = 0$.

Dans le cas "pair", le système projectif est

$$\dots \longrightarrow k \xrightarrow{S} k \xrightarrow{S} k \oplus HH_2(A) \xrightarrow{S} HH_0(A)$$

où la dernière application est l'injection de k dans $HH_0(A)$. On voit alors que ce système vérifie la condition de Mittag-Leffler de façon évidente. On en déduit que $HC_{\text{pair}}^{\text{per}}(A) \simeq k$. ■

Chapitre 4

Cohomologie de Hochschild

4.1 Un “petit” complexe qui calcule la cohomologie de Hochschild

Rappelons que nous avons trouvé dans la section 2.3.1 un morphisme injectif de résolutions de A - A -bimodules q' entre la bar-résolution de A et la résolution de Koszul de A (version bimodules) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & A^{\otimes 5} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 4} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 3} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 2} & \longrightarrow & 0 \\
 & \uparrow \psi' & & \uparrow \varphi' & & \uparrow inj & & \uparrow Id & & \\
 \cdots & A \otimes W_4 \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes R \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes V \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes A & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

On applique alors le foncteur $Hom_{A^e}(-, A)$ à ce morphisme de résolutions, on obtient un morphisme de complexes de $k[C_4]$ -modules à gauche :

$$\begin{array}{ccccccc}
 Hom_{A^e}(A^{\otimes 5}, A) & \xleftarrow{\psi^3} & Hom_{A^e}(A^{\otimes 4}, A) & \xleftarrow{\psi^2} & Hom_{A^e}(A^{\otimes 3}, A) & \xleftarrow{\psi^1} & Hom_{A^e}(A^{\otimes 2}, A) \\
 \downarrow \tilde{\psi} & & \downarrow \tilde{\varphi} & & \downarrow surj & & \downarrow Id \\
 Hom_{A^e}(A \otimes W_4 \otimes A, A) & \leftarrow & Hom_{A^e}(A \otimes R \otimes A, A) & \leftarrow & Hom_{A^e}(A \otimes V \otimes A, A) & \leftarrow & Hom_{A^e}(A \otimes A, A)
 \end{array}$$

où les deux premiers morphismes sont l'identité de $Hom_{A^e}(A^{\otimes 2}, A)$ et la surjection canonique de $Hom_{A^e}(A^{\otimes 3}, A)$ dans $Hom_{A^e}(A \otimes V \otimes A, A)$. Ici, le foncteur Hom_{A^e} correspond aux morphismes de la catégorie $A^e\text{-Mod}$ des A^e -modules, c'est-à-dire à tous les morphismes de A^e -modules. Les morphismes $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ sont donnés par

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi}(f)(a \otimes r \otimes b) &= f \circ \varphi'(a \otimes r \otimes b), \\
 \tilde{\psi}(f)(a \otimes w \otimes b) &= f \circ \psi'(a \otimes w \otimes b).
 \end{aligned}$$

Nous noterons $\tilde{q}$ ce morphisme de complexes. Le résultat suivant est analogue à la proposition 2.3.1, et est encore conséquence du Lemma 2.4.1 de [35].

Proposition 4.1.1 *Le morphisme $\tilde{q}$ est un quasi-isomorphisme.*

Lemme 4.1.2 *Pour tout k -espace vectoriel E , on a un isomorphisme canonique de $k[C_4]$ -modules à gauche $\text{Hom}_{A^e}(A \otimes E \otimes A, A) \simeq \text{Hom}_k(E, A)$. Si E est gradué et de dimension finie, ces modules sont naturellement des k -espaces vectoriels gradués et cet isomorphisme est de degré 0.*

Preuve. Les deux applications :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{A^e}(A \otimes E \otimes A, A) &\longrightarrow \text{Hom}_k(E, A) \\ f &\mapsto [e \mapsto f(1 \otimes e \otimes 1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hom}_k(E, A) &\longrightarrow \text{Hom}_{A^e}(A \otimes E \otimes A, A) \\ F &\mapsto [\alpha \otimes e \otimes \beta \mapsto \alpha F(e) \beta] \end{aligned}$$

sont des morphismes de $k[C_4]$ -modules à gauche, réciproques l'un de l'autre. ■

Le quasi-isomorphisme $\tilde{q}$ peut alors se réécrire :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \text{Hom}_k(A^{\otimes 3}, A) & \xleftarrow{b^3} & \text{Hom}_k(A^{\otimes 2}, A) & \xleftarrow{b^2} & \text{Hom}_k(A, A) & \xleftarrow{b^1} & A \\ & \downarrow \tilde{\psi} & & \downarrow \tilde{\varphi} & & \downarrow \text{surj} & & \downarrow \text{Id} \\ \cdots & \text{Hom}_k(W_4, A) & \xleftarrow{\tilde{d}^3} & \text{Hom}_k(R, A) & \xleftarrow{\tilde{d}^2} & \text{Hom}_k(V, A) & \xleftarrow{\tilde{d}^1} & A \end{array}$$

Nous allons maintenant expliciter les différentielles $\tilde{d}$.

- Rappelons la définition de l'application d'_1 (voir 2.3.1) :

$$\begin{aligned} d'_1 : A \otimes V \otimes A &\longrightarrow A \otimes A \\ \alpha \otimes v \otimes \beta &\mapsto \alpha v \otimes \beta - \alpha \otimes v \beta. \end{aligned}$$

Soit $f \in \text{Hom}_{A^e}(A \otimes A, A)$. Il existe $\eta \in A$ tel que pour tous $\alpha, \beta \in A$, on ait $f(\alpha \otimes \beta) = \alpha \eta \beta$. Alors

$$\begin{aligned} \tilde{d}^1(\eta)(v) &= f \circ d'_1(1 \otimes v \otimes 1) \\ &= f(v \otimes 1 - 1 \otimes v) \\ &= v\eta - \eta v. \end{aligned}$$

Donc $\tilde{d}^1$ est l'application

$$\begin{aligned} \tilde{d}^1 : A &\longrightarrow \text{Hom}_k(V, A) \\ \eta &\mapsto [v \mapsto v\eta - \eta v]. \end{aligned}$$

- Rappelons la définition de l'application d'_2 (voir 2.3.1) :

$$\begin{aligned}
d'_2 : A \otimes R \otimes A &\longrightarrow A \otimes V \otimes A \\
1 \otimes f_1 \otimes 1 &\mapsto [axy \otimes y \otimes 1 + byx \otimes y \otimes 1 + ay^2 \otimes x \otimes 1 + cx^2 \otimes x \otimes 1 \\
&\quad + ax \otimes y \otimes y + by \otimes x \otimes y + ay \otimes y \otimes x + cx \otimes x \otimes x \\
&\quad + a \otimes x \otimes y^2 + b \otimes y \otimes xy + a \otimes y \otimes yx + c \otimes x \otimes x^2] \\
1 \otimes f_2 \otimes 1 &\mapsto [ayx \otimes x \otimes 1 + bxy \otimes x \otimes 1 + ax^2 \otimes y \otimes 1 + cy^2 \otimes y \otimes 1 \\
&\quad + ay \otimes x \otimes x + bx \otimes y \otimes x + ax \otimes x \otimes y + cy \otimes y \otimes y \\
&\quad + a \otimes y \otimes x^2 + b \otimes x \otimes yx + a \otimes x \otimes xy + c \otimes y \otimes y^2].
\end{aligned}$$

Soit $f \in \text{Hom}_{A^e}(A \otimes V \otimes A, A)$. D'après le lemme 4.1.2, il existe $F \in \text{Hom}_k(V, A)$ telle que $f(\alpha \otimes v \otimes \beta) = \alpha F(v)\beta$.

$$\begin{aligned}
\tilde{d}^2(F)(f_1) &= f \circ d'_2(1 \otimes f_1 \otimes 1) \\
&= f(axy \otimes y \otimes 1 + byx \otimes y \otimes 1 + ay^2 \otimes x \otimes 1 + cx^2 \otimes x \otimes 1 \\
&\quad + ax \otimes y \otimes y + by \otimes x \otimes y + ay \otimes y \otimes x + cx \otimes x \otimes x \\
&\quad + a \otimes x \otimes y^2 + b \otimes y \otimes xy + a \otimes y \otimes yx + c \otimes x \otimes x^2) \\
&= axyF(y) + byxF(y) + ay^2F(x) + cx^2F(x) \\
&\quad + axF(y)y + byF(x)y + ayF(y)x + cxF(x)x \\
&\quad + aF(x)y^2 + bF(y)xy + aF(y)yx + cF(x)x^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{d}^2(F)(f_2) &= f \circ d'_2(1 \otimes f_2 \otimes 1) \\
&= f(ayx \otimes x \otimes 1 + bxy \otimes x \otimes 1 + ax^2 \otimes y \otimes 1 + cy^2 \otimes y \otimes 1 \\
&\quad + ay \otimes x \otimes x + bx \otimes y \otimes x + ax \otimes x \otimes y + cy \otimes y \otimes y \\
&\quad + a \otimes y \otimes x^2 + b \otimes x \otimes yx + a \otimes x \otimes xy + c \otimes y \otimes y^2) \\
&= ayxF(x) + bxyF(x) + ax^2F(y) + cy^2F(y) \\
&\quad + ayF(x)x + bxF(y)x + axF(x)y + cyF(y)y \\
&\quad + aF(y)x^2 + bF(x)yx + aF(x)xy + cF(y)y^2.
\end{aligned}$$

On connaît donc explicitement $\tilde{d}^2 : \text{Hom}_k(V, A) \longrightarrow \text{Hom}_k(R, A)$.

- Rappelons la définition de l'application d'_3 (voir 2.3.1):

$$\begin{aligned}
d'_3 : A \otimes W_4 \otimes A &\longrightarrow A \otimes R \otimes A \\
1 \otimes w \otimes 1 &\mapsto x \otimes f_1 \otimes 1 + y \otimes f_2 \otimes 1 - 1 \otimes f_1 \otimes x - 1 \otimes f_2 \otimes y.
\end{aligned}$$

Soit $f \in \text{Hom}_{A^e}(A \otimes R \otimes A, A)$. D'après le lemme 4.1.2, il existe une application $F \in \text{Hom}_k(R, A)$ telle que $f(\alpha \otimes r \otimes \beta) = \alpha F(r)\beta$. On a alors

$$\tilde{d}^3(F)(w) = f \circ d'_3(1 \otimes w \otimes 1)$$

$$\begin{aligned}
&= f(x \otimes f_1 \otimes 1 + y \otimes f_2 \otimes 1 - 1 \otimes f_1 \otimes x - 1 \otimes f_2 \otimes y) \\
&= xF(f_1) + yF(f_2) - F(f_1)x - F(f_2)y.
\end{aligned}$$

On a donc explicité le complexe :

$$0 \longleftarrow \text{Hom}_k(W_4, A) \xleftarrow{\tilde{d}^3} \text{Hom}_k(R, A) \xleftarrow{\tilde{d}^2} \text{Hom}_k(V, A) \xleftarrow{\tilde{d}^1} A \longleftarrow 0. \quad (1.1)$$

Lemme 4.1.3 *Soit E un k -espace vectoriel de dimension finie. Soit $\{x_i\}_{i \in I}$ une base de E , et $\{x_i^*\}_{i \in I}$ sa base duale. Les applications suivantes sont des isomorphismes de $k[C_4]$ -modules à gauche, réciproques l'un de l'autre :*

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_k(E, A) &\longrightarrow A \otimes E^* \\
f &\mapsto \sum_{i \in I} f(x_i) \otimes x_i^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \otimes E^* &\longrightarrow \text{Hom}_k(E, A) \\
\alpha \otimes x_i^* &\mapsto [e \mapsto x_i^*(e)\alpha]
\end{aligned}$$

Si E est gradué, ces modules sont naturellement des k -espaces vectoriels gradués et ces isomorphismes sont homogènes de degré 0.

On obtient donc un nouveau complexe isomorphe au complexe (1.1) :

$$0 \longleftarrow A \otimes W_4^* \xleftarrow{\tilde{d}^3} A \otimes R^* \xleftarrow{\tilde{d}^2} A \otimes V^* \xleftarrow{\tilde{d}^1} A \longleftarrow 0. \quad (1.2)$$

Nous notons encore $\tilde{d}$ les différentielles de ce complexe. Nous allons expliciter les différentielles $\tilde{d}$. Nous noterons $\{x^*, y^*\}$ la base duale de $\{x, y\}$, $\{f_1^*, f_2^*\}$ la base duale de $\{f_1, f_2\}$ et $\{w^*\}$ la base duale de la base $\{w\}$ de W_4 . On a

$$\tilde{d}^1(\eta) = (x\eta - \eta x) \otimes x^* + (y\eta - \eta y) \otimes y^*.$$

L'application $\tilde{d}^1$ est un morphisme de $k[C_4]$ -modules gradués qui préserve la graduation (V^* est concentré en degré -1). On a

$$\begin{aligned}
\tilde{d}^2(\alpha_1 \otimes x^* + \alpha_2 \otimes y^*) &= [axy\alpha_2 + byx\alpha_2 + ay^2\alpha_1 + cx^2\alpha_1 + ax\alpha_2y + by\alpha_1y \\
&\quad + ay\alpha_2x + cx\alpha_1x + a\alpha_1y^2 + b\alpha_2xy + a\alpha_2yx + c\alpha_1x^2] \otimes f_1^* \\
&\quad + [ayx\alpha_1 + bxy\alpha_1 + ax^2\alpha_2 + cy^2\alpha_2 + ay\alpha_1x + bx\alpha_2x \\
&\quad + ax\alpha_1y + cy\alpha_2y + a\alpha_2x^2 + b\alpha_1yx + a\alpha_1xy + c\alpha_2y^2] \otimes f_2^*.
\end{aligned}$$

L'application $\tilde{d}^2$ est un morphisme de $k[C_4]$ -modules gradués qui préserve la graduation (R^* est concentré en degré -3). On a

$$\tilde{d}^3(\alpha_1 \otimes f_1^* + \alpha_2 \otimes f_2^*) = [x\alpha_1 + y\alpha_2 - \alpha_1x - \alpha_2y] \otimes w^*.$$

L'application $\tilde{d}^3$ est un morphisme de $k[C_4]$ -modules gradués qui préserve la graduation (on considère W_4^* concentré en degré -4).

On a donc obtenu un quasi-isomorphisme de complexes de $k[C_4]$ -modules entre le complexe qui calcule la cohomologie de Hochschild et un petit complexe que nous noterons $\tilde{K}(A)$:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & Hom_k(A^{\otimes 3}, A) & \xleftarrow{b} & Hom_k(A^{\otimes 2}, A) & \xleftarrow{b} & Hom_k(A, A) & \xleftarrow{b} & A \\ & \downarrow \tilde{\psi} & & \downarrow \tilde{\varphi} & & \downarrow surj & & \downarrow Id \\ \cdots & A \otimes W_4^* & \xleftarrow{\tilde{d}^3} & A \otimes R^* & \xleftarrow{\tilde{d}^2} & A \otimes V^* & \xleftarrow{\tilde{d}^1} & A. \end{array}$$

4.2 Un isomorphisme entre deux “petits” complexes

Nous allons maintenant expliciter un isomorphisme de complexes entre le complexe $\tilde{K}(A)$ que nous venons de construire :

$$0 \longleftarrow A \otimes W_4^* \xleftarrow{\tilde{d}^3} A \otimes R^* \xleftarrow{\tilde{d}^2} A \otimes V^* \xleftarrow{\tilde{d}^1} A \longleftarrow 0$$

et le complexe de Koszul $K(A)$ qui calcule l'homologie de Hochschild :

$$0 \longleftarrow A \xleftarrow{d_1} A \otimes V \xleftarrow{d_2} A \otimes R \xleftarrow{d_3} A \otimes W_4 \longleftarrow 0.$$

Rappelons que dans ce dernier complexe (voir [7]),

$$\begin{aligned} d_1(a \otimes v) &= av - va, \\ d_2\left(\sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}\right) &= \sum_i av_1^{(i)} v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} + v_3^{(i)} av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} + v_2^{(i)} v_3^{(i)} a \otimes v_1^{(i)}, \\ d_3\left(\sum_i a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)}\right) &= \sum_i av_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)} \otimes v_4^{(i)} - v_4^{(i)} a \otimes v_1^{(i)} \otimes v_2^{(i)} \otimes v_3^{(i)}. \end{aligned}$$

On définit alors des isomorphismes de A -modules gradués θ_1 , θ_2 , θ_3 et θ_4 de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \theta_1 : A \otimes k &\longrightarrow A \otimes W_4 \\ a \otimes 1 &\mapsto -a \otimes w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_2 : A \otimes V^* &\longrightarrow A \otimes R \\ a \otimes x^* &\mapsto a \otimes f_1 \\ a \otimes y^* &\mapsto a \otimes f_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_3 : A \otimes R^* &\longrightarrow A \otimes V \\
a \otimes f_1^* &\mapsto a \otimes x \\
a \otimes f_2^* &\mapsto a \otimes y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_4 : A \otimes W_4^* &\longrightarrow A \otimes k \\
a \otimes w^* &\mapsto -a \otimes 1
\end{aligned}$$

Ces isomorphismes sont homogènes de degré 4.

Soit $\eta \in A$. On a

$$\begin{aligned}
d_3(\eta \otimes w) &= \eta x \otimes f_1 + \eta y \otimes f_2 - x\eta \otimes f_1 - y\eta \otimes f_2 \\
&= (\eta x - x\eta) \otimes f_1 + (\eta y - y\eta) \otimes f_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2(\eta \otimes f_1) &= [a\eta xy \otimes y + b\eta yx \otimes y + a\eta y^2 \otimes x + c\eta x^2 \otimes x] \\
&+ [ay\eta x \otimes y + by\eta y \otimes x + ax\eta y \otimes y + cx\eta x \otimes x] \\
&+ [ay^2\eta \otimes x + bxy\eta \otimes y + ayx\eta \otimes y + cx^2\eta \otimes x] \\
&= [a\eta y^2 + c\eta x^2 + by\eta y + cx\eta x + ay^2\eta + cx^2\eta] \otimes x \\
&+ [a\eta xy + b\eta yx + ay\eta x + ax\eta y + bxy\eta + ayx\eta] \otimes y.
\end{aligned}$$

Et de même,

$$\begin{aligned}
d_2(\eta \otimes f_2) &= [a\eta yx + b\eta xy + ax\eta y + ay\eta x + byx\eta + ayx\eta] \otimes x \\
&+ [a\eta x^2 + c\eta y^2 + b\eta x\eta + cy\eta y + ax^2\eta + cy^2\eta] \otimes y.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
d_1(\eta \otimes x) &= \eta x - x\eta \\
d_1(\eta \otimes y) &= \eta y - y\eta.
\end{aligned}$$

On constate alors, en comparant les différentielles d_1 , d_2 et d_3 aux différentielles $\tilde{d}^3$, $\tilde{d}^2$ et $\tilde{d}^1$, qu'on a un isomorphisme de complexes de $k[C_4]$ -modules gradués, de degré 4 :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longleftarrow & A \otimes W_4^* & \xleftarrow{\tilde{d}^3} & A \otimes R^* & \xleftarrow{\tilde{d}^2} & A \otimes V^* & \xleftarrow{\tilde{d}^1} & A & \longleftarrow & 0 \\
& & \downarrow \theta_4 & & \downarrow \theta_3 & & \downarrow \theta_2 & & \downarrow \theta_1 & & \\
0 & \longleftarrow & A & \xleftarrow{d_1} & A \otimes V & \xleftarrow{d_2} & A \otimes R & \xleftarrow{d_3} & A \otimes W_4 & \longleftarrow & 0.
\end{array}$$

4.3 Résumé de la situation et conclusion

Pour résumer, le diagramme suivant de $k[C_4]$ -modules est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longleftarrow & \text{Hom}_k(A^{\otimes 3}, A) & \xleftarrow{b^3} & \text{Hom}_k(A^{\otimes 2}, A) & \xleftarrow{b^2} & \text{Hom}_k(A, A) & \xleftarrow{b^1} & A & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow \tilde{\psi} & & \downarrow \tilde{\varphi} & & \downarrow \text{surj} & & \downarrow \text{Id} & & \\
 0 & \longleftarrow & A \otimes W_4^* & \xleftarrow{\tilde{d}^3} & A \otimes R^* & \xleftarrow{\tilde{d}^2} & A \otimes V^* & \xleftarrow{\tilde{d}^1} & A & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow \theta_4 & & \downarrow \theta_3 & & \downarrow \theta_2 & & \downarrow \theta_1 & & \\
 0 & \longleftarrow & A & \xleftarrow{d_1} & A \otimes V & \xleftarrow{d_2} & A \otimes R & \xleftarrow{d_3} & A \otimes W_4 & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow \text{inj} & & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \\
 0 & \longleftarrow & A & \xleftarrow{b_1} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{b_2} & A^{\otimes 3} & \xleftarrow{b_3} & A^{\otimes 4} & \longleftarrow & \cdots
 \end{array}$$

Les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes de $k[C_4]$ -modules, on a donc le résultat suivant :

Théorème 4.3.1 *On a des isomorphismes de $k[C_4]$ -modules $HH^i(A) \simeq HH_{3-i}(A)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$. Autrement dit, A vérifie la dualité de Poincaré.*

Nous allons pouvoir donner des résultats plus précis car on connaît explicitement ces quasi-isomorphismes.

D'après le théorème 2.4.1, $HH_3(A)$ est le $k[C_4]$ -module libre engendré par $\psi(1 \otimes w)$. Puisque ψ est un quasi-isomorphisme, $\ker(d_3)$ est le $k[C_4]$ -module libre engendré par $1 \otimes w$. Donc $\ker(\tilde{d}^1)$ est le $k[C_4]$ -module libre engendré par 1. Et donc $\ker(b^1)$ est aussi le $k[C_4]$ -module libre engendré par 1. Donc $HH^0(A) = Z(A) = k[C_4]$.

Théorème 4.3.2 *Le centre d'une algèbre AS-régulière de type A cubique à coefficients génériques est égal à $k[C_4]$.*

De la même manière, $HH_2(A)$ est le $k[C_4]$ -module libre engendré par $\varphi(x \otimes f_1 + y \otimes f_2)$. Puisque φ est un quasi-isomorphisme, $H_2(K(A), d)$ est le $k[C_4]$ -module libre engendré par $x \otimes f_1 + y \otimes f_2$. Donc $H^2(\tilde{K}(A), \tilde{d})$ est le $k[C_4]$ -module libre engendré par $x \otimes x^* + y \otimes y^*$. Cet élément correspond dans $\text{Hom}_k(V, A)$ à l'injection canonique de V dans A . Or il existe une unique dérivation de A qui prolonge cette application : il s'agit du morphisme D défini sur chaque composante homogène A_n de A par $D|_{A_n} = n\text{Id}_{A_n}$, dit "dérivation eulérienne".

D'où le résultat :

Théorème 4.3.3 *$HH^1(A) = \text{Der}(A)/\{\text{dérivations intérieures}\}$ est le $k[C_4]$ -module libre de rang 1 engendré par la dérivation eulérienne D .*

Enfin, on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.3.4 *$HH^2(A)$ et $HH^3(A)$ sont des $k[C_4]$ -modules libres de rang 9.*

Remarque : l'algèbre A est un k -espace vectoriel gradué et pour tout $i \geq 1$, $A^{\otimes i}$ est un k -espace vectoriel gradué, mais $\text{Hom}_k(A^{\otimes i}, A)$ n'est pas gradué en général. Nous ne donnons donc pas ici de séries de Poincaré des $HH^*(A)$. Voir la section "Cohomologie de Hochschild graduée" du chapitre suivant.

Chapitre 5

Compléments

5.1 Cas non générique

Les résultats que nous avons obtenus sont valables pour des algèbres à coefficients génériques. Mais les homologies que nous avons calculé peuvent être différentes dans le cas où a , b et c ne sont plus génériques. Considérons par exemple l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de Heisenberg, que nous noterons encore A , qui est le quotient de l'algèbre libre $k\langle x, y \rangle$ par les relations

$$[x, [x, y]] = 0,$$

$$[y, [y, x]] = 0.$$

Cette algèbre, qui correspond aux paramètres $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$, peut se réécrire comme le quotient de l'algèbre libre à trois générateurs $k\langle x, y, z \rangle$ par les relations $[x, y] = z$, $[z, x] = 0$, $[y, z] = 0$. L'élément z est central. Dans cette algèbre, avec les notations de l'introduction, on a $C_4 = -2z^2$.

Alors z est central, mais n'appartient pas à $k[C_4] = k[z^2]$. Donc $HH^0(A) = Z(A) \neq k[C_4]$ pour cette algèbre.

D'après Kassel [17], on a $HH_*(A) \simeq H_*(\Omega_{k[x,y,z]}^*, \partial)$, où ∂ est la différentielle introduite par Brylinski, et où le crochet de Poisson sur $k[x, y, z]$ est donné par : $\{x, y\} = z$, $\{z, x\} = 0$, $\{y, z\} = 0$. Cet isomorphisme est induit par le morphisme

$$\begin{aligned} \Omega_{k[x,y,z]}^n &\longrightarrow A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \\ Pdx_1 \wedge \dots \wedge dx_n &\mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \eta(P) \otimes x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

où $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, $x_1, \dots, x_n \in kx \oplus ky \oplus kz$, S_n est le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$, $\overline{A} = A/k$ et $\eta(P)$ est le symétrisé de P . Le morphisme η est défini

de la façon suivante : si $x_1, \dots, x_m \in kx \oplus ky \oplus kz$, on pose

$$\eta(x_1 \dots x_m) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_m} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)}$$

et on prolonge par linéarité.

On remarque que z est un Casimir de ce crochet de Poisson. Dans son article [25], P. Nuss a calculé explicitement $H_*(\Omega_{k[x,y,z]}^\bullet, \partial)$, et a obtenu les résultats suivants :

$HH_0(A) \simeq k[x, y]$, $HH_1(A) \simeq (k[x, y]/k)^2$, $HH_2(A) \simeq k[z] \oplus (k[x, y]/k)$, $HH_3(A) \simeq k[z]$, $HC_0(A) \simeq k[x, y]$, $HC_1(A) \simeq k[x, y]/k$, $HC_2(A) \simeq k[z] \oplus k$, $HC_{2i} \simeq k$ si $i \geq 2$, $HC_{2i+1} = 0$ si $i \geq 1$.

Soulignons quelques différences entre ces résultats et ceux obtenus dans le cas générique. Par exemple, le groupe d'homologie cyclique $HC_1(A)$ n'est pas nul.

D'autre part, Nuss montre que $im(\partial_1) = (z)$. Alors, d'après l'isomorphisme donné par Kassel entre $H_0(\Omega_{k[x,y,z]}^\bullet, \partial)$ et $HH_0(A)$, on a pour tout $\bar{a} \in HH_0(A)$, $z\bar{a} = \bar{z}\bar{a} = 0$ dans $HH_0(A)$. Donc $k[z]$ agit trivialement sur $HH_0(A)$, ce qui est très différent du cas générique, où $HH_0(A)$ est un module libre sur $Z(A)$!

5.2 Cohomologie de Hochschild graduée

Si R est une k -algèbre graduée, si M et N sont deux R -modules $\mathbb{N}$ -gradués, on note $\underline{Hom}_R(M, N)$ l'ensemble des morphismes *gradués* du R -module gradué M vers le R -module gradué N . Plus précisément, si on note $N(i)$ (où $i \in \mathbb{Z}$) le module N muni de la graduation $N(i)_n = N_{i+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et si on note $hom_R(M, N(i))$ l'ensemble des morphismes de degré 0 de M vers $N(i)$, on a $\underline{Hom}_R(M, N) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} hom_R(M, N(i))$.

Nous partons maintenant du morphisme de résolutions explicité dans la sous-section 2.3.1 :

$$\begin{array}{ccccccc} A^{\otimes 5} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 4} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 3} & \xrightarrow{b'} & A^{\otimes 2} \longrightarrow 0 \\ \uparrow \psi' & & \uparrow \varphi' & & \uparrow inj & & \uparrow Id \\ A \otimes W_4 \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes R \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes V \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes A \longrightarrow 0. \end{array}$$

On applique le foncteur contravariant $\underline{Hom}_{A^e}(-, A)$ et on obtient un quasi-isomorphisme de complexes de $k[C_4]$ -modules à gauche (par un résultat similaire à la Proposition 4.1.1) :

$$\begin{array}{ccccccc}
\underline{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 5}, A) & \xleftarrow{b^3} & \underline{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 4}, A) & \xleftarrow{b^2} & \underline{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 3}, A) & \xleftarrow{b^1} & \underline{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 2}, A) \\
\downarrow \tilde{\psi} & & \downarrow \tilde{\varphi} & & \downarrow surj & & \downarrow Id \\
\underline{Hom}_{A^e}(A \otimes W_4 \otimes A, A) & \leftarrow & \underline{Hom}_{A^e}(A \otimes R \otimes A, A) & \leftarrow & \underline{Hom}_{A^e}(A \otimes V \otimes A, A) & \leftarrow & \underline{Hom}_{A^e}(A \otimes A, A).
\end{array}$$

Puisque W_4 , R et V sont des k -espaces vectoriels gradués de dimension finie, on a $\underline{Hom}_{A^e}(A \otimes W_4 \otimes A, A) = Hom_{A^e}(A \otimes W_4 \otimes A, A)$,
 $\underline{Hom}_{A^e}(A \otimes R \otimes A, A) = Hom_{A^e}(A \otimes R \otimes A, A)$,
 $\underline{Hom}_{A^e}(A \otimes V \otimes A, A) = Hom_{A^e}(A \otimes V \otimes A, A)$ et bien sûr
 $\underline{Hom}_{A^e}(A \otimes A, A) = Hom_{A^e}(A \otimes A, A)$.

Remarque : Le complexe $\underline{Hom}_{A^e}(A^{\otimes \bullet}, A)$ est un sous-complexe du complexe $Hom_{A^e}(A^{\otimes \bullet}, A)$ qui calcule la cohomologie de Hochschild. Ces deux complexes calculent la même cohomologie puisqu'ils sont tous deux quasi-isomorphes au même "petit" complexe. En conséquence, les groupes de cohomologie de Hochschild peuvent être munis d'une graduation issue de celle du complexe $\underline{Hom}_{A^e}(A^{\otimes \bullet}, A)$.

Grâce aux isomorphismes $\underline{Hom}_{A^e}(A^{\otimes \bullet+2}, A) \simeq \underline{Hom}_k(A^{\otimes \bullet}, A)$, on a un quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longleftarrow & \underline{Hom}_k(A^{\otimes 3}, A) & \xleftarrow{b^3} & \underline{Hom}_k(A^{\otimes 2}, A) & \xleftarrow{b^2} & \underline{Hom}_k(A, A) & \xleftarrow{b^1} & A & \longleftarrow & 0 \\
& & \downarrow \tilde{\psi} & & \downarrow \tilde{\varphi} & & \downarrow surj & & \downarrow Id & & \\
0 & \longleftarrow & A \otimes W_4^* & \xleftarrow{\tilde{d}^3} & A \otimes R^* & \xleftarrow{\tilde{d}^2} & A \otimes V^* & \xleftarrow{\tilde{d}^1} & A & \longleftarrow & 0.
\end{array}$$

Ce quasi-isomorphisme est homogène de degré 0. On obtient donc en définitive un quasi-isomorphisme homogène de degré 4 entre le complexe qui calcule les $HH^i(A)$ et celui qui calcule les $HH_i(A)$. D'où

$$P(HH^0(A), t) = \frac{1}{1 - t^4},$$

ce que l'on savait déjà puisque $Z(A) = k[C_4]$,

$$P(HH^1(A), t) = \frac{1}{1 - t^4},$$

ce que l'on savait déjà puisque $HH^1(A)$ est le $k[C_4]$ -module libre de rang 1 engendré par la dérivation D qui est homogène de degré 0 et

$$\begin{aligned}
P(HH^2(A), t) &= \frac{2t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t}{t^4(1 - t^4)}, \\
P(HH^3(A), t) &= \frac{t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1}{t^4(1 - t^4)}.
\end{aligned}$$

5.3 Cohomologie de Hochschild des algèbres AS-régulières quadratiques

Michel Van den Bergh a montré dans [34] qu'il y a une dualité de Poincaré $HH_i(A) \simeq HH^{3-i}(A)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$, si A est une algèbre AS-régulière de dimension globale 3, à relations quadratiques. Nous allons nous intéresser au cas des algèbres quadratiques de type A. Rappelons que ces algèbres sont définies par $A = k\langle x, y, z \rangle / (f_1, f_2, f_3)$ avec

$$f_1 = ayz + bzy + cx^2,$$

$$f_2 = azx + bxz + cy^2,$$

$$f_3 = axy + byx + cz^2,$$

où $(a : b : c) \in \mathbb{P}_k^2 \setminus S$ et

$$S = \{(a : b : c) \in \mathbb{P}_k^2; a^3 = b^3 = c^3\} \cup \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}.$$

Soit A une telle algèbre. Elle est de Koszul quadratique. En particulier, on a la résolution de Koszul de A par des A - A -bimodules :

$$0 \leftarrow A \leftarrow A \otimes A \leftarrow A \otimes V \otimes A \leftarrow A \otimes R \otimes A \leftarrow A \otimes W_3 \otimes A \leftarrow 0,$$

où V est engendré par x, y, z , R est engendré par f_1, f_2, f_3 et W_3 est engendré par $w = xf_1 + yf_2 + zf_3 = f_1x + f_2y + f_3z$. Ceci va nous permettre de rendre plus explicite l'isomorphisme entre homologie et cohomologie de Hochschild, en utilisant la même méthode que dans le chapitre 4. Cela va être plus simple car l'injection canonique

$$\begin{array}{ccccccc} A \otimes A & \leftarrow & A \otimes V \otimes A & \leftarrow & A \otimes R \otimes A & \leftarrow & A \otimes W_3 \otimes A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A \otimes A & \leftarrow & A^{\otimes 3} & \leftarrow & A^{\otimes 4} & \leftarrow & A^{\otimes 5} \end{array} \quad (3.1)$$

est un morphisme de la bar-résolution de A dans la résolution de Koszul de A par des A - A -bimodules (voir [33]). Soit alors le diagramme commutatif de $k[C_3]$ -modules :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \leftarrow & Hom_k(A^{\otimes 3}, A) & \xleftarrow{b^3} & Hom_k(A^{\otimes 2}, A) & \xleftarrow{b^2} & Hom_k(A, A) & \xleftarrow{b^1} & A & \leftarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow Id & & \\ 0 & \leftarrow & A \otimes W_3^* & \xleftarrow{\tilde{d}^3} & A \otimes R^* & \xleftarrow{\tilde{d}^2} & A \otimes V^* & \xleftarrow{\tilde{d}^1} & A & \leftarrow & 0 \\ & & \downarrow \iota_4 & & \downarrow \iota_3 & & \downarrow \iota_2 & & \downarrow \iota_1 & & \\ 0 & \leftarrow & A & \xleftarrow{d_1} & A \otimes V & \xleftarrow{d_2} & A \otimes R & \xleftarrow{d_3} & A \otimes W_3 & \leftarrow & 0 \\ & & \downarrow Id & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \leftarrow & A & \xleftarrow{b_1} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{b_2} & A^{\otimes 3} & \xleftarrow{b_3} & A^{\otimes 4} & \leftarrow & \cdots \end{array}$$

où le morphisme entre la première et la seconde ligne est obtenu en appliquant le foncteur $Hom_{A^e}(-, A)$ à l'injection (3.1) et le morphisme entre les deux dernières lignes est obtenu en appliquant le foncteur $A \otimes_{A^e} -$ à l'injection (3.1). Ces deux morphismes de complexes sont des quasi-isomorphismes. Les applications d_1, d_2, d_3 sont définies sur des bases par

$$\begin{aligned} d_1 : \eta \otimes x &\mapsto \eta x - x\eta, \\ \eta \otimes y &\mapsto \eta y - y\eta, \\ \eta \otimes z &\mapsto \eta z - z\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 : \eta \otimes f_1 &\mapsto a\eta y \otimes z + b\eta z \otimes y + c\eta x \otimes x + az\eta \otimes y + by\eta \otimes z + cx\eta \otimes x, \\ \eta \otimes f_2 &\mapsto a\eta z \otimes x + b\eta x \otimes z + c\eta y \otimes y + ax\eta \otimes z + bz\eta \otimes x + cy\eta \otimes y, \\ \eta \otimes f_3 &\mapsto a\eta x \otimes y + b\eta y \otimes x + c\eta z \otimes z + ay\eta \otimes x + bx\eta \otimes y + cz\eta \otimes z, \end{aligned}$$

et enfin

$$d_3 : \eta \otimes w \mapsto \eta x \otimes f_1 + \eta y \otimes f_2 + \eta z \otimes f_3 - x\eta \otimes f_1 - y\eta \otimes f_2 - z\eta \otimes f_3.$$

On vérifie également que les applications $\tilde{d}^1, \tilde{d}^2$ et $\tilde{d}^3$ sont données par :

$$\tilde{d}^1(\eta) = (x\eta - \eta x) \otimes x^* + (y\eta - \eta y) \otimes y^* + (z\eta - \eta z) \otimes z^*,$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}^2(\alpha_1 x^* + \alpha_2 y^* + \alpha_3 z^*) &= (ay\alpha_3 + bz\alpha_2 + cx\alpha_1 + a\alpha_2 z + b\alpha_3 y + c\alpha_1 x) \otimes f_1^* \\ &\quad + (az\alpha_1 + bx\alpha_3 + cy\alpha_2 + a\alpha_3 x + b\alpha_1 z + c\alpha_2 y) \otimes f_2^* \\ &\quad + (ax\alpha_2 + by\alpha_1 + cz\alpha_3 + a\alpha_1 y + b\alpha_2 x + c\alpha_3 z) \otimes f_3^* \end{aligned}$$

et enfin,

$$\tilde{d}^3(\alpha_1 \otimes f_1^* + \alpha_2 \otimes f_2^* + \alpha_3 \otimes f_3^*) = (x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 - \alpha_1 x - \alpha_2 y - \alpha_3 z) \otimes w^*.$$

On vérifie alors que ι est un isomorphisme de complexes, où

$$\begin{aligned} \iota_1(1) &= -1 \otimes w \\ \iota_2(1 \otimes x^*) &= 1 \otimes f_1, \\ \iota_2(1 \otimes y^*) &= 1 \otimes f_2, \\ \iota_3(1 \otimes f_1^*) &= 1 \otimes x, \\ \iota_3(1 \otimes f_2^*) &= 1 \otimes y, \end{aligned}$$

$$\iota_4(1 \otimes w^*) = -1.$$

Dans le cas où l'algèbre A est à coefficients génériques, Michel Van den Bergh a calculé l'homologie de Hochschild de A (voir les résultats donnés dans l'introduction). Le cycle de Hochschild $\Delta \in HH_3(A)$ se remonte en $1 \otimes w \in A \otimes W_3$, puis en $-1 \in A$.

Proposition 5.3.1 *Le centre d'une algèbre AS-régulière de dimension globale 3, de type A quadratique à coefficients génériques est égal à $k[C_3]$.*

Ce résultat est déjà connu. Il a été obtenu par des méthodes plus géométriques par Odesskii et Feigin (voir [27] et [26]) et peut également se déduire de l'approche de Artin, Tate et Van den Bergh (voir [2], [3], [4] pour cette approche et [30] en ce qui concerne le centre).

De même, le cycle $\Pi \in HH_3(A)$ se relève en $x \otimes f_1 + y \otimes f_2 \in A \otimes R$ puis en $x \otimes x^* + y \otimes y^* \in A \otimes V^*$, ce qui correspond à la dérivation eulérienne $D \in Hom_k(A, A)$.

Proposition 5.3.2 *$HH^1(A) = Der(A)/\{\text{dérivations intérieures}\}$ est le $k[C_3]$ -module libre de rang 1 engendré par la dérivation D .*

On obtient enfin le résultat suivant :

Proposition 5.3.3 *$HH^2(A)$ et $HH^3(A)$ sont des $k[C_3]$ -modules libres de rang 8.*

5.4 Morphismes du complexe de Koszul vers la bar-résolution

Nous avons vu un morphisme de résolutions particulier q' entre la résolution de Koszul de A par des A - A -bimodules (voir 1.2) et la bar-résolution de A dans la partie 2.3.1, dans le cas où A est l'algèbre AS-régulière cubique. Dans cette partie, nous allons donner une méthode simple pour obtenir un morphisme de la résolution de Koszul de A comme A - A -bimodule vers la bar-résolution de A , qui sera valable pour toute algèbre de Koszul généralisée A . L'idée de cette méthode est due à Bernhard Keller. Nous pouvons alors donner une formule explicite pour ce morphisme de résolutions. Nous donnons aussi un morphisme de résolutions explicite de la résolution de Koszul $K_l(A)$ de k comme A -module à gauche (voir 1.2) vers la bar-résolution du A -module à gauche k . Nous commençons par quelques rappels sur la bar-résolution.

5.4.1 La bar-résolution

Dans cette partie, A est une k -algèbre $\mathbb{N}$ -graduée connexe : $A = k \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \dots$. Rappelons quelques résultats concernant la bar-résolution. On pourra se référer à [20] et aussi à [21] pour une présentation détaillée de la bar-résolution normalisée.

Nous allons nous placer dans le cadre de la bar-résolution normalisée. Ce choix sera justifié ultérieurement. On note $\bar{A} = A/k \simeq A_{\geq 1} = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots$. Rappelons que le complexe C_*^{norm} est donné par

$$\dots A \otimes \bar{A}^{\otimes n} \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes \bar{A}^{\otimes(n-1)} \otimes A \xrightarrow{b'} \dots \xrightarrow{b'} A \otimes \bar{A} \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0,$$

où μ est le produit de A et

$$b'(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n.$$

Soit $s' : A \otimes \bar{A}^{\otimes(n-1)} \otimes A \rightarrow A \otimes \bar{A}^{\otimes n} \otimes A$, définie sur tout élément $a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n$ de $A \otimes \bar{A}^{\otimes(n-1)} \otimes A$ tel que a_0 soit un élément homogène de A par

$$\begin{aligned} s'(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) &= 0 \text{ si } a_0 \in k, \\ &= 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \text{ si } a_0 \in A_{\geq 1}. \end{aligned}$$

Le complexe C_*^{norm} est un complexe de A - A -bimodules gradués (i.e. un complexe dans la catégorie $A\text{-grMod-}A$) et s' est un morphisme de k -espaces vectoriels gradués qui est homogène de degré 0 (morphisme de la catégorie $k\text{-grMod}$). On vérifie que s' est une homotopie contractante : $b's' + s'b' = Id$, et donc l'identité de C_*^{norm} est homotope à 0. Ceci montre que le complexe C_*^{norm} est exact. Cette résolution de A comme A - A -bimodule est appelée la bar-résolution normalisée de A .

On applique le foncteur $- \otimes_A k$ au complexe C_*^{norm} . On obtient alors un complexe C_*^k :

$$\dots \xrightarrow{b} A \otimes \bar{A}^{\otimes n} \xrightarrow{b} A \otimes \bar{A}^{\otimes(n-1)} \xrightarrow{b} \dots \xrightarrow{b} A \otimes \bar{A} \xrightarrow{b} A \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0,$$

où ϵ est la projection canonique sur k et b est encore défini par

$$b(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n.$$

Pour cela, on utilise le fait que si $a_n \in \bar{A}$ et $a_{n+1} \in A$ alors $\epsilon(a_n a_{n+1}) = 0$. C'est pour avoir ce résultat que l'on utilise la bar-résolution normalisée.

L'application $s = s' \otimes_A 1_k$ se réécrit alors, pour tout élément $a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}$ de $A \otimes \overline{A}^{\otimes(n-1)}$ où a_0 est un élément homogène de A , comme

$$\begin{aligned} s(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) &= 0 \text{ si } a_0 \in k, \\ &= 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \text{ si } a_0 \in A_{\geq 1}. \end{aligned}$$

L'application s est encore une homotopie contractante puisque

$$(b' \otimes_A 1_k)(s' \otimes_A 1_k) + (s' \otimes_A 1_k)(b' \otimes_A 1_k) = Id \otimes_A 1_k.$$

Donc le complexe C_*^k est une résolution du A -module à gauche ${}_A k$. C'est un complexe de A -modules à gauche gradués (complexe de $A\text{-grMod}$), et s est un morphisme de k -espaces vectoriels gradués qui est homogène de degré 0 (morphisme de $k\text{-grMod}$).

5.4.2 Cas des complexes de bimodules

Dans tout ce qui suit, l'algèbre A est une algèbre N -homogène de Koszul généralisée. Nous allons écrire un morphisme de résolutions entre la résolution de Koszul de A comme A - A -bimodule et la bar-résolution normalisée de A . Ce morphisme est bien connu sur les premiers termes car le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} A \otimes \overline{A} \otimes A & \xrightarrow{b'} & A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow i' & & \uparrow Id & & \uparrow Id & & \\ A \otimes V \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

commute, où i' est l'injection canonique et μ est la multiplication de A . Nous allons expliciter des morphismes de A - A -bimodules $\varphi'_2, \varphi'_3, \varphi'_4$, etc..., tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & A \otimes \overline{A}^{\otimes 3} \otimes A & \xrightarrow{b'} & A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \otimes A & \xrightarrow{b'} & A \otimes \overline{A} \otimes A & \xrightarrow{b'} & A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A & \\ & \uparrow \varphi'_3 & & \uparrow \varphi'_2 & & \uparrow i' & & \uparrow Id & & \uparrow Id & \\ \cdots & A \otimes W_{N+1} \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes W_N \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes V \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A & \end{array}$$

commute.

Nous allons donner une méthode pour construire φ'_2 . Nous cherchons φ'_2 telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \otimes A & \xrightarrow{b'} & A \otimes \overline{A} \otimes A \\ \uparrow \varphi'_2 & & \uparrow i' \\ A \otimes W_N \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes V \otimes A. \end{array}$$

Nous connaissons le morphisme d'espaces vectoriels gradués

$$s' : A \otimes \overline{A} \otimes A \rightarrow A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \otimes A.$$

On commence par définir φ'_2 sur W_N . On identifie W_N au sous-espace $k \otimes W_N \otimes k$ de $A \otimes W_N \otimes A$. Si $r \in W_N$, on pose $\varphi'_2(r) = s' \circ i' \circ d'(r)$, qui appartient bien à $A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \otimes A$. De plus, puisque s' est une homotopie contractante, les égalités suivantes sont vérifiées sur les éléments de W_N :

$$\begin{aligned} b' \circ \varphi'_2 &= b' \circ s' \circ i' \circ d' \\ &= (Id - s' \circ b') \circ i' \circ d' \\ &= i' \circ d' - s' \circ b' \circ i' \circ d'. \end{aligned}$$

Or on a

$$s' \circ b' \circ i' \circ d' = s' \circ Id \circ d' \circ d' = 0.$$

Donc $b' \circ \varphi'_2 = i' \circ d'$. Nous avons défini φ'_2 sur $k \otimes W_N \otimes k$, nous l'avons donc défini sur une base du A^e -module libre $A \otimes W_N \otimes A$. On étend ensuite φ'_2 par A - A -bilinéarité en une application définie sur $A \otimes W_N \otimes A$. Alors φ'_2 est bien un morphisme de A - A -bimodules qui rend le diagramme ci-dessus commutatif puisque nous avons vérifié cette propriété sur une base de $A \otimes W_N \otimes A$.

La même méthode permet ensuite de définir de proche en proche tous les φ'_i . Nous allons maintenant donner des formules explicites pour ces morphismes.

Nous commençons par écrire φ'_2 . On note I_A l'identité de A et $I_{\overline{A}}$ l'identité de $\overline{A}$. Pour $i \geq 2$, on note $m_i : A^{\otimes i} \rightarrow A$ le produit répété de A et on note suivant le contexte $m_1 = I_A$ ou $m_1 = I_{\overline{A}}$.

Lemme 5.4.1 *Le morphisme φ'_2 est la restriction à $A \otimes W_N \otimes A$ de l'application $\tilde{\varphi}'_2 = \sum_{i=1}^{N-1} I_A \otimes m_{N-i} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_i$ qui va de $A \otimes \overline{A}^{\otimes N} \otimes A$ dans $A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \otimes A$.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned} & s' \circ i' \circ d'(1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_N \otimes 1) \\ &= s' \circ i'((r_1 \dots r_{N-1}) \otimes r_N \otimes 1 + (r_1 \dots r_{N-2}) \otimes r_{N-1} \otimes r_N + \cdots + 1 \otimes r_1 \otimes (r_2 \dots r_N)) \\ &= 1_A \otimes ((r_1 \dots r_{N-1}) \otimes r_N \otimes 1 + \cdots + r_1 \otimes r_2 \otimes (r_3 \dots r_N)). \end{aligned}$$

Le terme $1 \otimes r_1 \otimes (r_2 \dots r_N)$ s'annule par s' . On obtient

$$\begin{aligned} \varphi'_2(a \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_N \otimes b) &= a \otimes (r_1 \dots r_{N-1}) \otimes r_N \otimes b + a \otimes (r_1 \dots r_{N-2}) \otimes r_{N-1} \otimes r_N b \\ &\quad + \cdots + a \otimes r_1 \otimes r_2 \otimes (r_3 \dots r_N b) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N-1} I_A \otimes m_{N-i} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_i \right) (a \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_N \otimes b). \end{aligned}$$

■

On a donc une écriture explicite de φ'_2 . En particulier, si $N = 3$, on trouve :

$$\varphi'_2(a \otimes r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 \otimes b) = a \otimes r_1 r_2 \otimes r_3 \otimes b + a \otimes r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 b.$$

On explicite ensuite φ'_3 . Plus généralement, le passage de φ'_{2i} à φ'_{2i+1} va être particulièrement simple à écrire. Nous cherchons φ'_3 tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes \overline{A}^{\otimes 3} \otimes A & \xrightarrow{b'} & A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \otimes A \\ \uparrow \varphi'_3 & & \uparrow \varphi'_2 \\ A \otimes W_{N+1} \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes W_N \otimes A. \end{array}$$

Lemme 5.4.2 *Le morphisme φ'_3 est la restriction à $A \otimes W_{N+1} \otimes A$ de l'application $\tilde{\varphi}'_3 = \sum_{i=1}^{N-1} I_A \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-i} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_i$ qui va de $A \otimes \overline{A}^{\otimes N+1} \otimes A$ dans $A \otimes \overline{A}^{\otimes 3} \otimes A$.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned} & s' \circ \varphi'_2 \circ d'(1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{N+1} \otimes 1) \\ &= s' \circ \varphi'_2(r_1 \otimes \cdots \otimes r_{N+1} \otimes 1) - s' \circ \varphi'_2(1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{N+1}) \\ &= 1_A \otimes \varphi'_2(r_1 \otimes \cdots \otimes r_{N+1} \otimes 1). \end{aligned}$$

D'où

$$\varphi'_3 = \sum_{i=1}^{N-1} I_A \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-i} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_i.$$

■

Pour $N = 3$, on trouve donc que

$$\varphi'_3(a \otimes r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 \otimes r_4 \otimes b) = a \otimes r_1 \otimes r_2 r_3 \otimes r_4 \otimes b + a \otimes r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 \otimes r_4 b.$$

Nous donnons (sans démonstration) les expressions de φ'_4 , φ'_5 et φ'_6 .

Le morphisme φ'_4 est la restriction à $A \otimes W_{2N} \otimes A$ de l'application

$$\tilde{\varphi}'_4 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} I_A \otimes m_{N-j} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-i} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{i+j-1}$$

qui va de $A \otimes \overline{A}^{\otimes 2N} \otimes A$ dans $A \otimes \overline{A}^{\otimes 4} \otimes A$.

Le morphisme φ'_5 est la restriction à $A \otimes W_{2N+1} \otimes A$ de l'application $\tilde{\varphi}'_5$ qui va de $A \otimes \overline{A}^{\otimes (2N+1)} \otimes A$ dans $A \otimes \overline{A}^{\otimes 5} \otimes A$ et qui est définie par

$$\tilde{\varphi}'_5 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} I_A \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-j} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-i} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{i+j-1}.$$

Le morphisme φ'_6 est la restriction à $A \otimes W_{3N} \otimes A$ de l'application $\tilde{\varphi}'_6$ définie sur $A \otimes \overline{A}^{\otimes(3N)} \otimes A$ et à valeurs dans $A \otimes \overline{A}^{\otimes 6} \otimes A$, qui est définie par

$$\varphi'_6 = \sum_{i,j,k=1}^{N-1} I_A \otimes m_{N-k} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-j} \otimes m_{N-i} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{i+j+k-2}.$$

On a plus généralement le résultat suivant :

Proposition 5.4.3 *Soit $i \geq 1$. Alors le morphisme φ'_{2i} est la restriction à $A \otimes W_{iN} \otimes A$ de l'application*

$$\tilde{\varphi}'_{2i} = \sum_{k_1, \dots, k_i=1}^{N-1} I_A \otimes m_{N-k_1} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-k_2} \otimes \cdots \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-k_i} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{k_1+\dots+k_i-(i-1)}$$

qui va de $A \otimes \overline{A}^{\otimes(iN)} \otimes A$ dans $A \otimes \overline{A}^{\otimes(2i)} \otimes A$. On en déduit que le morphisme φ'_{2i+1} est la restriction à $A \otimes W_{(i+1)N} \otimes A$ de l'application

$$\tilde{\varphi}'_{2i+1} = \sum_{k_1, \dots, k_i=1}^{N-1} I_A \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-k_1} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-k_2} \otimes \cdots \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-k_i} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{k_1+\dots+k_i-(i-1)}$$

qui va de $A \otimes \overline{A}^{\otimes(iN+1)} \otimes A$ dans $A \otimes \overline{A}^{\otimes(2i+1)} \otimes A$.

Preuve. Les deux formules sont vraies pour $i = 1$ d'après les Lemmes 5.4.1 et 5.4.2. Supposons les formules vraies pour i et montrons qu'elles sont vraies pour $i + 1$. Rappelons que les applications en question rendent le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} A \otimes \overline{A}^{\otimes 2(i+1)+1} \otimes A & \xrightarrow{b'} & A \otimes \overline{A}^{\otimes 2(i+1)} \otimes A & \xrightarrow{b'} & A \otimes \overline{A}^{\otimes 2i+1} \otimes A & \xrightarrow{b'} & A \otimes \overline{A}^{\otimes 2i} \otimes A \\ \uparrow \varphi'_{2(i+1)+1} & & \uparrow \varphi'_{2(i+1)} & & \uparrow \varphi'_{2i+1} & & \uparrow \varphi'_{2i} \\ A \otimes W_{(i+1)N+1} \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes W_{(i+1)N} \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes W_{iN+1} \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes W_{iN} \otimes A. \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} & s' \circ \varphi'_{2i+1} \circ d'(1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{(i+1)N} \otimes 1) \\ &= s' \circ \varphi'_{2i+1} \left(\left(\sum_{j=1}^{N-1} m_{N-j} \otimes I_{\overline{A}}^{\otimes(iN+1)} \otimes m_j \right) (r_1 \otimes \cdots \otimes r_{(i+1)N} \otimes 1) + 1 \otimes (\cdots) \right). \end{aligned}$$

Le terme $1 \otimes (\cdots)$ est annulé par $s' \circ \varphi'_{2i+1}$. D'où

$$(s' \circ \varphi'_{2i+1} \circ d')(1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{(i+1)N} \otimes 1)$$

$$\begin{aligned}
&= s' \circ \left(\sum_{k_1, \dots, k_i=1}^{N-1} I_A \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-k_1} \cdots \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-k_i} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{k_1+\dots+k_i-(i-1)} \right) \\
&\quad \circ \left(\sum_{j=1}^{N-1} m_{N-j} \otimes I_{\overline{A}}^{\otimes(iN+1)} \otimes m_j \right) (r_1 \otimes \cdots \otimes r_{(i+1)N} \otimes 1) \\
&= s' \circ \left(\sum_{j, k_1, \dots, k_i=1}^{N-1} m_{N-j} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-k_1} \otimes I_{\overline{A}} \otimes \cdots \otimes m_{N-k_i} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{j+k_1+\dots+k_i-(i-1)-1} \right) \\
&\quad (r_1 \otimes \cdots \otimes r_{(i+1)N} \otimes 1) \\
&= s' \circ \left(\sum_{k_1, \dots, k_i, k_{i+1}=1}^{N-1} m_{N-k_1} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-k_2} \otimes \cdots \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-k_{i+1}} \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{k_1+\dots+k_{i+1}-i} \right) \\
&\quad (r_1 \otimes \cdots \otimes r_{(i+1)N} \otimes 1).
\end{aligned}$$

D'où la formule pour $\varphi'_{2(i+1)}$. De plus,

$$\begin{aligned}
&s' \circ \varphi'_{2(i+1)} \circ d'(1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{(i+1)N+1} \otimes 1) \\
&= s' \circ \varphi'_{2(i+1)}(r_1 \otimes \cdots \otimes r_{(i+1)N+1} \otimes 1 + 1 \otimes (\cdots)) \\
&= s' \circ \varphi'_{2(i+1)}(r_1 \otimes \cdots \otimes r_{(i+1)N+1} \otimes 1).
\end{aligned}$$

On en déduit la formule pour $\varphi'_{2(i+1)+1}$. ■

Puisque la résolution de Koszul est une résolution minimale de A comme A - A -bimodule gradué, le morphisme φ' que nous avons donné ci-dessus est injectif (voir par exemple [9]). On a donc écrit de façon explicite une injection du complexe de Koszul “version bimodules” $K_{l-r}(A)$ dans la bar-résolution de A (tout ceci se passe dans la catégorie $A\text{-grMod-}A$). On peut donc vraiment voir le complexe de Koszul comme un sous-complexe de la bar-résolution, mais de façon moins évidente que dans le cas quadratique où il s’agit vraiment d’une inclusion !

Notons que les morphismes φ'_2 et φ'_3 que nous avons explicités pour $N = 3$ sont différents de ceux que nous avons donnés dans le calcul de l’homologie de Hochschild (voir 2.3.1). Un tel morphisme de résolutions n’est unique qu’à homotopie près.

5.4.3 Cas des complexes de modules

Dans cette section, A est encore une algèbre N -homogène de Koszul. Nous allons maintenant écrire un morphisme de résolutions entre la résolution de Koszul de k comme A -module à gauche et le complexe C_*^k . Rappelons que nous venons d’expliciter une injection φ' de la résolution de Koszul de A par

des A - A -bimodules dans la bar-résolution normalisée de A :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & A \otimes \overline{A}^{\otimes 3} \otimes A & \xrightarrow{b'} & A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \otimes A & \xrightarrow{b'} & A \otimes \overline{A} \otimes A & \xrightarrow{b'} & A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A \\
 & \uparrow \varphi'_3 & & \uparrow \varphi'_2 & & \uparrow i' & & \uparrow Id & & \uparrow Id \\
 \cdots & A \otimes W_{N+1} \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes W_N \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes V \otimes A & \xrightarrow{d'} & A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A.
 \end{array}$$

Nous appliquons le foncteur $- \otimes_A k$ à ce diagramme. Nous avons vu que le complexe $C_*^k = C_*^{norm} \otimes_A k$ est une résolution de k par des A -modules à gauche. Par ailleurs, le complexe $K_{l-r}(A) \otimes_A k$ est en fait la résolution de Koszul $K_l(A)$ de k par des A -modules à gauche. Pour tout $i \geq 2$, on pose $\varphi_i = \varphi'_i \otimes_A 1_k$. Les applications φ_i sont des morphismes de A -modules à gauche, tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & A \otimes \overline{A}^{\otimes 3} & \xrightarrow{b} & A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} & \xrightarrow{b} & A \otimes \overline{A} & \xrightarrow{\mu} & A & \xrightarrow{\epsilon} & {}_A k & \longrightarrow & 0 \\
 & \uparrow \varphi_3 & & \uparrow \varphi_2 & & \uparrow i & & \uparrow Id & & \uparrow Id & & \\
 \cdots & A \otimes W_{N+1} & \xrightarrow{\delta} & A \otimes W_N & \xrightarrow{\delta} & A \otimes V & \xrightarrow{\delta} & A & \xrightarrow{\epsilon} & {}_A k & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

Puisque la résolution de Koszul $K_l(A)$ est une résolution minimale du A -module à gauche ${}_A k$, on a donc défini un morphisme injectif de la résolution de Koszul de k par des A -modules à gauche dans la résolution C_*^k de k (tout se passe dans la catégorie $A\text{-grMod}$). De plus, l'expression des morphismes φ_i se déduit de celle des morphismes φ'_i . On obtient facilement les résultats suivants :

Lemme 5.4.4 *Le morphisme φ_2 est la restriction à $A \otimes W_N$ de l'application $\tilde{\varphi}_2 = I_A \otimes m_{N-1} \otimes I_{\overline{A}}$ qui va de $A \otimes \overline{A}^{\otimes N}$ dans $A \otimes \overline{A}^{\otimes 2}$. On a plus explicitement $\varphi_2(a \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_N) = a \otimes (r_1 \cdots r_{N-1}) \otimes r_N$.*

Lemme 5.4.5 *Le morphisme φ_3 est la restriction à $A \otimes W_{N+1}$ de l'application $\tilde{\varphi}_3 = I_A \otimes I_{\overline{A}} \otimes m_{N-1} \otimes I_{\overline{A}}$ qui va de $A \otimes \overline{A}^{\otimes(N+1)}$ dans $A \otimes \overline{A}^{\otimes 3}$. Plus explicitement, on a $\varphi_3(a \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{N+1}) = a \otimes r_1 \otimes (r_2 \cdots r_N) \otimes r_{N+1}$.*

Et plus généralement :

Proposition 5.4.6 *Soit $i \in \mathbb{N}$. Alors φ_{2i} est la restriction à $A \otimes W_{iN}$ de l'application $\tilde{\varphi}_{2i} : A \otimes \overline{A}^{\otimes(iN)} \rightarrow A \otimes \overline{A}^{\otimes(2i)}$ définie par*

$$\tilde{\varphi}_{2i} = I_A \otimes (m_{N-1} \otimes I_{\overline{A}})^{\otimes i}.$$

De plus le morphisme φ_{2i+1} est la restriction à $A \otimes W_{iN+1}$ de l'application $\tilde{\varphi}_{2i+1} : A \otimes \overline{A}^{\otimes(iN+1)} \rightarrow A \otimes \overline{A}^{\otimes(2i+1)}$ définie par

$$\tilde{\varphi}_{2i+1} = I_A \otimes I_{\overline{A}} \otimes (m_{N-1} \otimes I_{\overline{A}})^{\otimes i}.$$

5.5 Résultats partiels sur les autres contractés d'une algèbre de Koszul cubique

Dans cette section, nous travaillons sur les 3-complexes de Koszul (voir [8], [10] et les rappels faits dans le chapitre 1). Plus précisément, pour une algèbre de Koszul cubique, nous regardons les homologies des contractés des 3-complexes de Koszul qui ne correspondent pas à la résolution de Koszul. On sait d'après [8] qu'un contracté différent du complexe de Koszul ne peut pas avoir tous ses groupes d'homologie nuls, sauf si l'algèbre est triviale.

5.5.1 Homologies des autres contractés

Nous considérons une algèbre de Koszul cubique A quelconque. Son 3-complexe de Koszul à gauche $\overline{K}_l(A)$ s'écrit

$$\cdots \xrightarrow{\overline{\delta}_5} A \otimes W_4 \xrightarrow{\overline{\delta}_4} A \otimes R \xrightarrow{\overline{\delta}_3} A \otimes V^{\otimes 2} \xrightarrow{\overline{\delta}_2} A \otimes V \xrightarrow{\overline{\delta}_1} A \longrightarrow 0.$$

Nous complétons la fin de ce complexe en

$$\cdots \xrightarrow{\overline{\delta}_2} A \otimes V \xrightarrow{\overline{\delta}_1} A \xrightarrow{\epsilon} k \xrightarrow{Id_k} k \longrightarrow 0.$$

Nous obtenons encore un 3-complexe. La résolution de Koszul de ${}_A k$ est alors le contracté $K_l(A)$:

$$\cdots \xrightarrow{\overline{\delta}_5 \circ \overline{\delta}_6} A \otimes W_4 \xrightarrow{\overline{\delta}_4} A \otimes R \xrightarrow{\overline{\delta}_2 \circ \overline{\delta}_3} A \otimes V \xrightarrow{\overline{\delta}_1} A \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0.$$

Mais il existe aussi deux autres contractés du 3-complexe $\overline{K}_l(A)$ (complété) :

$$C_{1,0}(\overline{K}_l(A)) : \cdots \xrightarrow{\overline{\delta}_6} A \otimes W_5 \xrightarrow{\overline{\delta}_4 \circ \overline{\delta}_5} A \otimes R \xrightarrow{\overline{\delta}_3} A \otimes V^{\otimes 2} \xrightarrow{\overline{\delta}_1 \circ \overline{\delta}_2} A \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0,$$

$$C_{2,1}(\overline{K}_l(A)) : \cdots \xrightarrow{\overline{\delta}_6 \circ \overline{\delta}_7} A \otimes W_5 \xrightarrow{\overline{\delta}_5} A \otimes W_4 \xrightarrow{\overline{\delta}_3 \circ \overline{\delta}_4} A \otimes V^{\otimes 2} \xrightarrow{\overline{\delta}_2} A \otimes V \xrightarrow{\epsilon \circ \overline{\delta}_1} k \xrightarrow{Id_k} k \longrightarrow 0.$$

Pour simplifier, nous employerons les notations $C_{1,0}$ et $C_{2,1}$ à la place de $C_{1,0}(\overline{K}_l(A))$ et $C_{2,1}(\overline{K}_l(A))$. Si (C, d) est un N-complexe quelconque, nous adoptons les notations de Kassel et Wambst [18] :

$${}_p H_n(C) = \frac{\ker(d^p : C_n \rightarrow C_{n-p})}{\operatorname{im}(d^{N-p} : C_{n+N-p} \rightarrow C_n)}.$$

Alors, d'après Kassel et Wambst [18] ou Dubois-Violette [15], on a une longue suite exacte (pour $N = 3$) :

$$\cdots \xrightarrow{i_*}_2 H_2(C) \xrightarrow{d_*}_1 H_1(C) \xrightarrow{i_*}_2 H_1(C) \xrightarrow{d_*}_1 H_0(C) \xrightarrow{i_*}_2 H_0(C) \longrightarrow 0$$

où

$$i_* : \frac{\ker(d^p)}{\operatorname{im}(d^{N-p})} \longrightarrow \frac{\ker(d^{p+1})}{\operatorname{im}(d^{N-p-1})}$$

provient simplement de l'inclusion de $\ker(d^p)$ dans $\ker(d^{p+1})$, et

$$d_* : \frac{\ker(d^p)}{\operatorname{im}(d^{N-p})} \longrightarrow \frac{\ker(d^{p-1})}{\operatorname{im}(d^{N-p+1})}$$

est induite par d . Dans notre cas, dire que $K_l(A)$ est exact équivaut à dire que ${}_1H_0 = 0$, ${}_2H_2 = 0$, ${}_1H_3 = 0$, ${}_2H_5 = 0$ etc... La longue suite exacte se réécrit donc :

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow {}_2H_3 \longrightarrow {}_1H_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow {}_1H_1 \longrightarrow {}_2H_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow {}_2H_0 \longrightarrow 0.$$

On a alors pour tout $n \geq 1$, un isomorphisme explicite (donné alternativement par i_* et d_*) : $H_n(C_{2,1}) \simeq H_n(C_{1,0})$. De plus, $H_0(C_{2,1}) = H_0(C_{1,0}) = 0$. On a alors un quasi-isomorphisme de $C_{2,1}$ dans $C_{1,0}$, donné par

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & A \otimes W_5 & \xrightarrow{\bar{\delta}_4 \circ \bar{\delta}_5} & A \otimes R & \xrightarrow{\bar{\delta}_3} & A \otimes V^{\otimes 2} & \xrightarrow{\bar{\delta}_1 \circ \bar{\delta}_2} & A & \xrightarrow{\epsilon} & k & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 \\ & Id \uparrow & & \bar{\delta}_4 \uparrow & & Id \uparrow & & \bar{\delta}_1 \uparrow & & Id \uparrow & & & & \\ \cdots & A \otimes W_5 & \xrightarrow{\bar{\delta}_5} & A \otimes W_4 & \xrightarrow{\bar{\delta}_3 \circ \bar{\delta}_4} & A \otimes V^{\otimes 2} & \xrightarrow{\bar{\delta}_2} & A \otimes V & \xrightarrow{\epsilon \circ \bar{\delta}_1} & k & \xrightarrow{Id} & k & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Il suffit donc de calculer l'homologie d'un de ces deux complexes.

Remarques :

- Si on considère les contractés du 3-complexe non-augmenté $\overline{K}_l(A)$, on a $H_n(C_{2,1}) \simeq H_n(C_{1,0})$ pour tout $n \geq 1$, mais $H_0(C_{1,0}) = k \oplus H_0(C_{2,1})$.
- On peut raisonner de la même façon avec le 3-complexe dont la résolution de Koszul de A par des A - A -bimodules est un contracté.

5.5.2 L'algèbre AS-régulière cubique de type A

L'algèbre A est maintenant l'algèbre AS-régulière cubique. Comme cette algèbre est de dimension globale 3, son 3-complexe $\overline{K}_l(A)$ (non-augmenté) se résume à

$$0 \longrightarrow A \otimes W_4 \xrightarrow{\bar{\delta}_4} A \otimes R \xrightarrow{\bar{\delta}_3} A \otimes V^{\otimes 2} \xrightarrow{\bar{\delta}_2} A \otimes V \xrightarrow{\bar{\delta}_1} A \longrightarrow 0.$$

Ses contractés sont

$$K_l(A) : 0 \longrightarrow A \otimes W_4 \xrightarrow{\bar{\delta}_4} A \otimes R \xrightarrow{\bar{\delta}_2 \circ \bar{\delta}_3} A \otimes V \xrightarrow{\bar{\delta}_1} A \longrightarrow 0,$$

$$C_{1,0} : 0 \longrightarrow A \otimes R \xrightarrow{\bar{\delta}_3} A \otimes V^{\otimes 2} \xrightarrow{\bar{\delta}_1 \circ \bar{\delta}_2} A \longrightarrow 0,$$

$$C_{2,1} : 0 \longrightarrow A \otimes W_4 \xrightarrow{\bar{\delta}_3 \circ \bar{\delta}_4} A \otimes V^{\otimes 2} \xrightarrow{\bar{\delta}_2} A \otimes V \longrightarrow 0.$$

Il est facile de voir que $H_0(C_{1,0}) = k \oplus V$ et $H_0(C_{2,1}) = V$. Nous allons maintenant tout écrire sous forme matricielle. Rappelons que l'algèbre A est définie par les relations

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} axy^2 + byxy + ay^2x + cx^3 \\ ayx^2 + bxyx + ax^2y + cy^3 \end{pmatrix}.$$

On a $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = MX = {}^tXM$ où

$$M = \begin{pmatrix} ay^2 + cx^2 & axy + byx \\ ayx + bxy & ax^2 + cy^2 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Le 3-complexe $\overline{K}_l(A)$ se réécrit sous forme matricielle :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot {}^tX} A^2 \xrightarrow{\cdot M_2} A^4 \xrightarrow{\cdot M_1} A^2 \xrightarrow{\cdot X} A \longrightarrow 0,$$

où

$$M_1 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \\ y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} cx & by & ay & ax \\ ay & ax & bx & cy \end{pmatrix}. \text{ D'où}$$

$$\begin{aligned} K_l(A) &: 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot {}^tX} A^2 \xrightarrow{\cdot M} A^2 \xrightarrow{\cdot X} A \longrightarrow 0 \\ C_{1,0} &: 0 \longrightarrow A^2 \xrightarrow{\cdot M_2} A^4 \xrightarrow{\cdot M_1 X} A \longrightarrow 0 \\ C_{2,1} &: 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot {}^tXM_2} A^4 \xrightarrow{\cdot M_1} A^2 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Puisque A est intègre, on a $H_2(C_{2,1}) = 0$. Il ne reste donc qu'un groupe d'homologie à calculer.

Essayons de calculer $H_1(C_{2,1})$. Par définition,

$$im(\cdot {}^tXM_2) = A.(m_{11}, m_{21}, m_{12}, m_{22}),$$

où m_{ij} est la composante (i, j) de la matrice M . D'autre part, on peut montrer sans trop de difficultés que

$$ker(\cdot M_1) = A.(m_{11}, 0, m_{12}, 0) + A.(m_{21}, 0, m_{22}, 0) + A.(0, m_{11}, 0, m_{12}) + A.(0, m_{21}, 0, m_{22}).$$

$$\text{On a donc } H_1(C_{2,1}) \simeq \frac{A.(m_{11}, 0, m_{12}, 0) + A.(m_{21}, 0, m_{22}, 0) + A.(0, m_{11}, 0, m_{12}) + A.(0, m_{21}, 0, m_{22})}{A.(m_{11}, m_{21}, m_{12}, m_{22})}.$$

Remarques :

- Montrons que $H_1(C_{2,1}) \neq 0$. On considère l'élément $(m_{11}, 0, m_{12}, 0)$ de A^4 . Comme m_{11} et m_{12} sont deux éléments non nuls de A (puisque ils sont de degré 2), $(m_{11}, 0, m_{12}, 0)$ est un élément non nul de A^4 . De plus,

$(m_{11}, 0, m_{12}, 0) \notin A \cdot (m_{11}, m_{21}, m_{12}, m_{22})$. Sinon, il existerait $u \in A$ tel que $um_{21} = 0$ et $um_{11} = m_{11}$. Comme A est intègre et $m_{21} \neq 0$, on a forcément $u = 0$, ce qui est impossible puisque $um_{11} = m_{11} \neq 0$. Donc la classe de $(m_{11}, 0, m_{12}, 0)$ est un élément non nul de $H_1(C_{2,1})$.

- Ce A -module est engendré par les trois éléments $(m_{21}, 0, m_{22}, 0)$, $(0, m_{11}, 0, m_{12})$, $(0, m_{21}, 0, m_{22})$, mais ces trois éléments ne sont pas A -linéairement indépendants : on a par exemple

$$x \cdot (0, m_{11}, 0, m_{12}) + y \cdot (0, m_{21}, 0, m_{22}) = (0, f_1, 0, f_2) = 0.$$

Questions :

- Peut-on préciser la structure de ce module ? Est-ce un A -module libre ?
- Ce module est-il un invariant attaché à l'algèbre N -homogène A ? Peut-on donner une interprétation de ce module ?

5.6 L'algèbre duale $A^!$ est-elle de Frobenius ?

5.6.1 Rappels

Nous commençons par rappeler la définition de la propriété de Frobenius. On pourra se référer à [29] pour une étude des algèbres de Frobenius.

Définition 5.6.1 *Une k -algèbre graduée connexe de dimension finie R est de Frobenius si $R \simeq R^*$ en tant que R -modules à gauche, où $R^* = \text{Hom}_k(R, k)$ est munie de la structure de R -module à gauche induite par l'action à droite de R sur elle-même.*

Si R est une algèbre de Frobenius, soit $\varphi : R \rightarrow R^*$ un isomorphisme de R -modules à gauche. On peut montrer que cet isomorphisme est unique à la multiplication par un scalaire non nul près. On associe alors à φ un crochet de Frobenius : $(x, y) = \langle x, \varphi(y) \rangle$, pour tous x et $y \in R$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité. Alors $(\cdot, \cdot)$ est un crochet bilinéaire non dégénéré tel que $(ab, c) = (a, bc)$ pour tous a, b, c éléments de A . L'algèbre A est dite symétrique si le crochet de Frobenius qui lui est associé est symétrique.

Nous rappelons maintenant quelques résultats obtenus par Roland Berger et le présent auteur dans [10].

Proposition 5.6.2 *(Corollary 5.12 de [10]) Soit A une algèbre N -homogène, de Koszul généralisé, de dimension globale finie D . On note $E(A)$ l'algèbre de Yoneda de A (i.e. $\text{Ext}_A(k, k)$). Alors A est AS-Gorenstein si et seulement si l'algèbre de dimension finie $E(A)$ est de Frobenius.*

Si l'algèbre A vérifie les hypothèses de la proposition précédente, l'algèbre de Yoneda de A est connue explicitement. On suppose $N \geq 3$. Alors on a pour tout i , $0 \leq i \leq D$, les isomorphismes $E(A)_i \simeq A_{n(i)}^!$ (voir 1.2 pour la définition de $n(i)$). Le produit de $E(A)$ est donné sur deux éléments $f \in E(A)_i \simeq A_{n(i)}^!$ et $g \in E(A)_j \simeq A_{n(j)}^!$ par

$$f \bullet g = \begin{cases} fg & \text{si } i \text{ ou } j \text{ pairs} \\ 0 & \text{si } i \text{ et } j \text{ impairs} \end{cases},$$

où fg désigne le produit dans $A^!$. On peut alors se demander si, pour une algèbre A vérifiant les hypothèses de la proposition 5.6.2, l'algèbre $A^!$ est aussi de Frobenius.

On suppose dans tout ce qui suit que A est une algèbre de Koszul N -homogène de dimension globale finie D , telle que $\text{Ext}_A^D(k, A) = k$. On a montré dans ce cas que $\dim(A_{n(D)}^!) = 1$ et que D est impair si $N \geq 3$ [10]. On fixe un générateur u de $A_{n(D)}^!$ et on note $\overline{\Phi}$ l'unique application $A^!$ -linéaire à gauche de $A^!$ dans $A^{!*}$ telle que $\overline{\Phi}(1) = u^*$, où u^* est la base de $A_{n(D)}^{!*}$ duale de la base u de $A_{n(D)}^!$. Alors A est AS-Gorenstein si et seulement si les applications linéaires $\overline{\Phi}_{n(i)} : A_{n(D-i)}^! \rightarrow A_{n(i)}^{!*}$ sont bijectives pour tout i , $0 \leq i \leq D$ (en fait $0 < i < D$ suffit). D'après la Remark 5.7 de [10], on a le résultat suivant :

Proposition 5.6.3 *Soit A une k -algèbre N -homogène de Koszul généralisée, de dimension globale finie D et AS-Gorenstein. Alors $\overline{\Phi}$ est bijective si et seulement si $A^!$ est Frobenius et le plus grand i tel que $A_i^! \neq 0$ est $i = n(D)$.*

Preuve. Soit donc A une k -algèbre N -homogène de Koszul généralisée, de dimension globale finie D , AS-Gorenstein.

On suppose que l'application $\overline{\Phi}$ est bijective. Alors $\overline{\Phi}$ est un isomorphisme de $A^!$ -modules de $A^!$ dans $A^{!*}$, donc l'algèbre de dimension finie $A^!$ est Frobenius. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme $\overline{\Phi} : A_i^! \rightarrow A_{n(D)-i}^{!*}$. On en déduit que si $i < 0$, $A_{n(D)-i}^{!*} = 0$. Donc $A_i^! = 0$ si $i > n(D)$.

Réciproquement, si $A^!$ est Frobenius et si le plus grand i tel que $A_i^! \neq 0$ est $i = n(D)$, il existe un isomorphisme Ψ de $A^!$ -modules gradués de $A^!$ dans $A^{*(-n(D))}$. Cet isomorphisme est entièrement déterminé par $\Psi(1) \in A_{n(D)}^{!*}$. Comme $\dim(A_{n(D)}^{!*}) = 1$ puisque A est AS-Gorenstein, Ψ est égal à $\overline{\Phi}$ à une constante multiplicative non nulle près. Donc $\overline{\Phi}$ est une bijection. ■

Introduisons la propriété suivante :

(P) Le plus grand entier i tel que $A_i^! \neq 0$ est $i = n(D)$.

Proposition 5.6.4 *Soit A une algèbre comme dans la Proposition 5.6.3, ne vérifiant pas (P) et telle que $A^!$ soit de Frobenius. Alors A est une algèbre de polynômes à une variable.*

Preuve. On note n le plus grand entier i tel que $A_i^! \neq 0$. Par hypothèse, $n > n(D)$. Comme A est Frobenius, il existe un isomorphisme de $A^!$ -modules gradués $\Psi : A^! \rightarrow A^{!*}(-n)$. Comme $A_i^! = 0$ si $i \geq n(D) + N - 1$, on a

$$n(D) + 1 \leq n \leq n(D) + N - 2.$$

Donc $1 \leq n - n(D) \leq N - 2$, et $A_{n-n(D)}^{!*} = V^{\otimes(n-n(D))}$. Comme $A_{n-n(D)}^{!*} \simeq A_{n(D)}^!$, $\dim(A_{n(D)}^!) = 1$ et $n - n(D) \geq 1$, on a nécessairement $\dim(V) = 1$. Donc $A = k[x]/(R)$, avec $R \subset kx^N$. Si $R = kx^N$, A est de dimension globale infinie, ce qui est contraire aux hypothèses. Donc $R = 0$ et $A = k[x]$. ■

Comme conséquence des Propositions 5.6.3 et 5.6.4, on a immédiatement

Proposition 5.6.5 *Soit A comme dans la Proposition 5.6.3, A n'étant pas une algèbre de polynômes à une variable. Alors $A^!$ est Frobenius si et seulement si A vérifie (P) et pour tout $0 < j < n(D)$, l'application $\bar{\Phi}_j : A_{n(D)-j}^! \rightarrow A_j^{!*}$ est bijective.*

5.6.2 Algèbres AS-régulières cubiques de type A

Dans cette section, A désigne une algèbre AS-régulière de dimension globale 3, de type A à relations cubiques, c'est-à-dire que

$$A = k\langle x, y \rangle / (f_1, f_2)$$

avec

$$f_1 = axy^2 + byxy + ay^2x + cx^3,$$

$$f_2 = ayx^2 + bxyx + ax^2y + cy^3,$$

où $(a : b : c) \in \mathbb{P}_k^2 \setminus S$, avec

$$S = \{(a : b : c) \in \mathbb{P}_k^2, a^2 = b^2 = c^2\} \cup \{(0 : 0 : 1), (0 : 1 : 0)\}.$$

Bien sûr, les algèbres AS-régulières de dimension globale 3 ne sont jamais des algèbres de polynômes à une variable.

Lemme 5.6.6 *L'algèbre A vérifie la propriété (P).*

Preuve. On sait déjà que $A_{n(3)}^! = A_4^! \neq 0$. Il reste donc à montrer que $A_5^! = 0$, ce qui équivaut à $W_5 = 0$. Rappelons que $W_4 = (V \otimes R) \cap (R \otimes V)$ est engendré par

$$w = ax^2y^2 + bxyxy + axy^2x + cx^4 + ay^2x^2 + byxyx + ayx^2y + cy^4.$$

Soit $w' \in W_5$. Comme $w' \in (V \otimes W_4) \cap (W_4 \otimes V)$, il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$ tels que

$$w' = \alpha xw + \beta yw = \gamma wx + \delta wy.$$

On a

$$\begin{aligned} w' = & \alpha(ax^3y^2 + bx^2yxy + ax^2y^2x + cx^5 + axy^2x^2 + bxyxyx + axyx^2y + cxy^4) \\ & + \beta(ayx^2y^2 + byxyxy + ayxy^2x + cyx^4 + ay^3x^2 + by^2xyx + ay^2x^2y + cy^5) \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} w' = & \gamma(ax^2y^2x + bxyxyx + axy^2x^2 + cx^5 + ay^2x^3 + byxyx^2 + ayx^2yx + cy^4x) \\ & + \delta(ax^2y^3 + bxyxy^2 + axy^2xy + cx^4y + ay^2x^2y + byxyxy + ayx^2y^2 + cy^5). \end{aligned}$$

On identifie alors les coefficients des monômes dans les deux écritures de w' et on trouve que $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Donc $W_5 = 0$. ■

Puisque A est AS-Gorenstein, les morphismes $\overline{\Phi}_0, \overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_3$ et $\overline{\Phi}_4$ sont bijectifs. En fait, en utilisant la relation $w = xf_1 + yf_2 = f_1x + f_2y$, ainsi que la définition de $\overline{\Phi} : \overline{\Phi}(\alpha) = \alpha.w$, on a :

$$\overline{\Phi}_4 : 1 \mapsto w, \overline{\Phi}_3 : \begin{cases} x^* \mapsto f_1 \\ y^* \mapsto f_2 \end{cases}, \overline{\Phi}_1 : \begin{cases} f_1^* \mapsto x \\ f_2^* \mapsto y \end{cases}, \overline{\Phi}_0 : w^* \mapsto 1.$$

D'après la Proposition 5.6.5, $A^!$ est de Frobenius si et seulement si $\overline{\Phi}_2$ est bijectif. En utilisant l'écriture explicite de $w \in W_4 \simeq A_4^{!*}$:

$$w = ax^2y^2 + bxyxy + axy^2x + cx^4 + ay^2x^2 + byxyx + ayx^2y + cy^4,$$

il est facile d'expliciter $\overline{\Phi}_2$:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_2(x^*x^*) &= cx^2 + ay^2, \\ \overline{\Phi}_2(x^*y^*) &= bxy + ayx, \\ \overline{\Phi}_2(y^*x^*) &= axy + byx, \\ \overline{\Phi}_2(y^*y^*) &= ax^2 + cy^2. \end{aligned}$$

La matrice de $\overline{\Phi}_2$, dans la base usuelle $\{x^2, xy, yx, y^2\}$ de $V^{\otimes 2}$ et dans la base $\{x^{*2}, x^*y^*, y^*x^*, y^{*2}\}$ de $(V^*)^{\otimes 2}$ est donc :

$$U = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & a \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible si et seulement si $(c^2 - a^2)(b^2 - a^2) \neq 0$. Donc l'algèbre $A^!$ est de Frobenius si et seulement si $(c^2 - a^2)(b^2 - a^2) \neq 0$. D'où le résultat suivant :

Proposition 5.6.7 *Soit A une algèbre AS-régulière de dimension globale 3, à relations cubiques, de type A. L'algèbre $A^!$ est de Frobenius si et seulement si les coefficients des relations de A vérifient $(c^2 - a^2)(b^2 - a^2) \neq 0$. En particulier, pour toute algèbre AS-régulière A de dimension globale 3, de type A cubique, à coefficients génériques, l'algèbre $A^!$ est Frobenius.*

Par ailleurs, nous avons introduit dans [10] un 3-complexe de Koszul à gauche $\overline{K}_l(A)$ ainsi que son dual $\overline{L}_l(A)$ (ces 3-complexes sont notés respectivement $K_l(A)$ et $L_l(A)$ dans [10]). Au sujet de $\overline{K}_l(A)$, on pourra consulter également la section précédente ainsi que le premier chapitre de cette thèse (section 1.2). Alors on peut définir à partir de $\overline{\Phi}$ un morphisme de 3-complexes :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & A \otimes V^* & \rightarrow & A \otimes (V^*)^{\otimes 2} & \rightarrow & A \otimes R^* & \rightarrow & A \otimes W^* & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1 \otimes \overline{\Phi}_4 & & \downarrow 1 \otimes \overline{\Phi}_3 & & \downarrow 1 \otimes \overline{\Phi}_2 & & \downarrow 1 \otimes \overline{\Phi}_1 & & \downarrow 1 \otimes \overline{\Phi}_0 & & \\ 0 & \rightarrow & A \otimes W & \rightarrow & A \otimes R & \rightarrow & A \otimes V^{\otimes 2} & \rightarrow & A \otimes V & \rightarrow & A & \rightarrow & 0. \end{array}$$

D'après ce qui précède, $1 \otimes \overline{\Phi}$ est un isomorphisme de 3-complexes si les coefficients de l'algèbre A vérifient $(c^2 - a^2)(b^2 - a^2) \neq 0$. L'écriture sous forme matricielle de cet isomorphisme est particulièrement simple à écrire :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\cdot^t X} & A^2 & \xrightarrow{\cdot^t M_1} & A^4 & \xrightarrow{\cdot^t M_2} & A^2 & \xrightarrow{\cdot^X} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow Id & & \downarrow Id & & \downarrow U & & \downarrow Id & & \downarrow Id & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\cdot^t X} & A^2 & \xrightarrow{\cdot^t M_2} & A^4 & \xrightarrow{\cdot^t M_1} & A^2 & \xrightarrow{\cdot^X} & A & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

où les matrices M_1 et M_2 sont définies dans la section précédente. On en déduit que les contractés respectifs de $\overline{K}_l(A)$ et $\overline{L}_l(A)$ sont isomorphes. En ce sens, les contractés de $\overline{K}_l(A)$ et leurs duals sont isomorphes.

5.6.3 Les autres types d'algèbres AS-régulières cubiques

Toutes les algèbres AS-régulières cubiques de dimension globale 3 sont de Koszul généralisé (voir [10], Proposition 5.2). Soit $A = T(V)/(R)$ une telle algèbre. D'après les résultats rappelés précédemment, son algèbre de Yoneda $E(A)$ est de Frobenius. En particulier, l'application $\overline{\Phi}_i : A_i^! \longrightarrow A_{4-i}^{!*}$ est un isomorphisme pour $i = 0, 1, 3, 4$. Si on montre que $\overline{\Phi}_2$ est aussi un isomorphisme et que $W_5 = 0$, alors l'algèbre $A^!$ est elle aussi de Frobenius d'après la

Proposition 5.6.5. Rappelons que W_4 a pour base w , où

$$w = xf_1 + yf_2 = (q_{11}f_1 + q_{12}f_2)x + (q_{21}f_1 + q_{22}f_2)y,$$

où $Q = (q_{ij})_{i,j=1,2}$ est une matrice inversible à coefficients dans k , $\{x, y\}$ est une base de V et $\{f_1, f_2\}$ est une base de R (voir [1]).

Remarque : dans tous les types suivants, les coefficients α et β ne sont pas nuls (coefficients diagonaux des formes de Jordan des matrices inversibles Q).

Type E. Soit A l'algèbre de type E. Ses relations sont :

$$\begin{aligned} f_1 &= y^3 + x^3, \\ f_2 &= y^2x + \beta yxy + \beta^2 xy^2, \end{aligned}$$

où β est une racine 3ème de l'unité. D'où

$$w = y^3x + \beta y^2xy + \beta^2 yxy^2 + xy^3 + x^4.$$

Donc $\overline{\Phi}_2(x^{*2}) = x^2$, $\overline{\Phi}_2(x^*y^*) = \beta y^2$, $\overline{\Phi}_2(y^*x^*) = y^2$, $\overline{\Phi}_2(y^{*2}) = \beta^2 yx + xy$ et $\overline{\Phi}_2$ n'est pas bijective. On en déduit que si A est l'algèbre de type E, l'algèbre $A^!$ n'est pas Frobenius. Par ailleurs, on montre par le calcul que $W_5 = 0$.

Type H. Soit A l'algèbre de type H. Ses relations sont données par

$$\begin{aligned} f_1 &= -\alpha^3 y^3 + x^2y + \alpha xyx + \alpha^2 yx^2, \\ f_2 &= y^2x - \alpha yxy + \alpha^2 xy^2 + \alpha^3 x^3, \end{aligned}$$

où α est une racine primitive 8ème de l'unité. D'où

$$w = y^3x - \alpha y^2xy + \alpha^2 yxy^2 - \alpha^3 xy^3 + x^3y + \alpha x^2yx + \alpha^2 xyx^2 + \alpha^3 yx^3.$$

On a donc $\overline{\Phi}_2(x^{*2}) = \alpha^2 xy + \alpha^3 yx$, $\overline{\Phi}_2(x^*y^*) = -\alpha y^2 + x^2$, $\overline{\Phi}_2(y^*x^*) = y^2 + \alpha x^2$, $\overline{\Phi}_2(y^{*2}) = \alpha^2 yx - \alpha^3 xy$. Alors le déterminant de $\overline{\Phi}_2$ est $\alpha^4(1 + \alpha^2)^2$. Donc $\overline{\Phi}_2$ est inversible. On montre facilement que $W_5 = 0$. On en déduit que si A est l'algèbre de type H, l'algèbre duale $A^!$ est Frobenius.

Type S_1 . Les algèbres A de type S_1 sont données par les relations

$$\begin{aligned} f_1 &= xy^2 + \alpha y^2x + ayxy, \\ f_2 &= \alpha^2 yx^2 + \alpha x^2y + \alpha axyx, \end{aligned}$$

où $\alpha \in k^*$, $a \in k$. D'où

$$w = x^2y^2 + \alpha xy^2x + \alpha^2 y^2x^2 + \alpha yx^2y + axyxy + \alpha ayxyx.$$

On en déduit que $\overline{\Phi}_2(x^{*2}) = \alpha^2 y^2$, $\overline{\Phi}_2(x^* y^*) = \alpha y x + \alpha x y$, $\overline{\Phi}_2(y^* x^*) = \alpha x y + \alpha \alpha y x$, $\overline{\Phi}_2(y^{*2}) = x^2$. Le déterminant de $\overline{\Phi}_2$ est alors $\alpha^3(a^2 - \alpha)$. Donc $\overline{\Phi}_2$ est inversible si et seulement si $a^2 - \alpha \neq 0$. On vérifie que pour toute algèbre A de type S_1 , on a $W_5 = 0$. Donc si A est une algèbre de type S_1 , $A^!$ est Frobenius si et seulement si ses coefficients vérifient $a^2 - \alpha \neq 0$.

Type S_2 . Les algèbres A de type S_2 ont pour relations

$$\begin{aligned} f_1 &= xy^2 + \alpha y^2 x, \\ f_2 &= \alpha^2 y x^2 - \alpha x^2 y, \end{aligned}$$

où $\alpha \in k^*$. D'où

$$w = x^2 y^2 + \alpha x y^2 x + \alpha^2 y^2 x^2 - \alpha y x^2 y.$$

On en déduit que $\overline{\Phi}_2(x^{*2}) = \alpha^2 y^2$, $\overline{\Phi}_2(x^* y^*) = -\alpha y x$, $\overline{\Phi}_2(y^* x^*) = \alpha x y$, $\overline{\Phi}_2(y^{*2}) = x^2$. Le déterminant de $\overline{\Phi}_2$ est $-\alpha^4$, donc $\overline{\Phi}_2$ est inversible. De plus $W_5 = 0$ pour toute algèbre A de type S_2 . Les algèbres $A^!$ où A est de type S_2 sont toujours Frobenius.

Type S'_2 . Soit A l'algèbre de type S'_2 . Cette algèbre a pour relations

$$\begin{aligned} f_1 &= xy^2 + y^2 x + x^3, \\ f_2 &= yx^2 - x^2 y. \end{aligned}$$

D'où

$$w = x^2 y^2 + xy^2 x + y^2 x^2 - yx^2 y + x^4.$$

Donc $\overline{\Phi}_2(x^{*2}) = y^2 + x^2$, $\overline{\Phi}_2(x^* y^*) = -yx$, $\overline{\Phi}_2(y^* x^*) = xy$, $\overline{\Phi}_2(y^{*2}) = x^2$. Le déterminant de $\overline{\Phi}_2$ est -1 , donc $\overline{\Phi}_2$ est inversible. De plus $W_5 = 0$ pour l'algèbre A de type S'_2 . L'algèbre $A^!$ est Frobenius.

Proposition 5.6.8 *Soit A une algèbre AS-régulière cubique de dimension globale 3. Alors l'algèbre $A^!$ est de Frobenius si et seulement si l'algèbre A est*

- de type A avec $a^2 \neq b^2$ et $a^2 \neq c^2$;
- de types H , S_2 , S'_2 ;
- de type S_1 avec $a^2 \neq \alpha$.

5.6.4 L'algèbre $A^!$ est-elle symétrique ?

Soit A une algèbre AS-régulière, de dimension globale 3, à relations cubiques. Nous avons montré dans [10] que l'algèbre de Yoneda $E(A)$, qui est

de Frobenius, n'est symétrique que pour les algèbres de type A. Rappelons brièvement comment nous avons obtenu ce résultat.

On a

$$E(A) = k \oplus A_1^! \oplus A_3^! \oplus A_4^! \simeq k \oplus V^* \oplus R^* \oplus W_4^*.$$

Le crochet de Frobenius de $E(A)$ est donné sur des bases de $V^* \oplus R^*$ et $R^* \oplus V^*$ par :

$$(x^*, f_1^*)_{E(A)} = \langle x^* f_1^*, w \rangle = 1, \quad (y^*, f_2^*)_{E(A)} = \langle y^* f_2^*, w \rangle = 1,$$

$$(y^*, f_1^*)_{E(A)} = \langle y^* f_1^*, w \rangle = 0, \quad (x^*, f_2^*)_{E(A)} = \langle x^* f_2^*, w \rangle = 0,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité. De même,

$$(f_1^*, x^*)_{E(A)} = \langle f_1^* x^*, w \rangle = q_{11}, \quad (f_2^*, x^*)_{E(A)} = \langle f_2^* x^*, w \rangle = q_{12},$$

$$(f_1^*, y^*)_{E(A)} = \langle f_1^* y^*, w \rangle = q_{21}, \quad (f_2^*, y^*)_{E(A)} = \langle f_2^* y^*, w \rangle = q_{22}$$

où les q_{ij} , $i = 1, 2$, sont les composants d'une matrice inversible Q . Le crochet est nul ou trivial sur les autres termes. On en déduit que ce crochet n'est symétrique que si $Q = Id$, c'est-à-dire si A est de type A.

Par ailleurs, si A est une algèbre AS-régulière cubique telle que $A^!$ soit de Frobenius, le crochet de Frobenius de l'algèbre $A^!$ est encore donné par $(z^*, f^*) = \langle z^* f^*, w \rangle$ et $(f^*, z^*) = \langle f^* z^*, w \rangle$ si $z \in V$ et $f \in R$. Donc si l'algèbre n'est pas de type A, l'algèbre $A^!$ ne peut pas être symétrique.

Si A est une algèbre de type A, telle que $(c^2 - a^2)(b^2 - a^2) \neq 0$, il est facile de calculer le crochet de Frobenius de $A^!$. Il suffit de montrer la propriété de symétrie sur les crochets d'éléments de degré 2. On a par exemple

$$(x^* y^*, y^* x^*) = \langle x^* y^*, \overline{\Phi}_2(y^* x^*) \rangle = \langle x^* y^*, axy + byx \rangle = a,$$

$$(y^* x^*, x^* y^*) = \langle y^* x^*, \overline{\Phi}_2(x^* y^*) \rangle = \langle y^* x^*, bxy + ayx \rangle = a$$

et on vérifie que le crochet $(\cdot, \cdot)$ est symétrique. D'où enfin le résultat :

Proposition 5.6.9 *Soit A une algèbre AS-régulière de dimension globale 3 à relations cubiques. On suppose de plus que A est telle que $A^!$ est de Frobenius (voir la Proposition 5.6.8). Alors $A^!$ est symétrique si et seulement si A est de type A.*

Bibliographie

- [1] M. Artin et W. Schelter, Graded algebras of global dimension 3, *Adv. in Math.* **66** (1987), 171-216.
- [2] M. Artin, J. Tate et M. Van den Bergh , Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves, *The Grothendieck Festschrift, Vol. 1*, Birkhauser, 1990.
- [3] M. Artin, J. Tate, M. Van den Bergh, Modules over regular algebras of dimension 3, *Inv. Math.* **106** (1991), 335-388.
- [4] M. Artin, M. Van den Bergh, Twisted homogeneous coordinate rings, *J. Algebra* **133** (1990), 249-271.
- [5] A. A. Beilinson, V. Ginzburg, W. Soergel, Koszul duality patterns in representation theory, *J. Am. Math. Soc.* **9** (1996), 473-527.
- [6] R. Berger, Koszulity for nonquadratic algebras, *J. Algebra* **239** (2001), 705-734.
- [7] R. Berger, Koszulity for nonquadratic algebras (II), math.QA/0301172.
- [8] R. Berger, M. Dubois-Violette, M. Wambst, Homogeneous Algebras, *J. Algebra* **261** (2003), 172-185.
- [9] R. Berger, La catégorie graduée (version de juin 2003), preprint, <http://webperso.univ-st-etienne.fr/~rberger/>.
- [10] R. Berger, N. Marconnet, Koszul and Gorenstein properties for homogeneous algebras (2003), math.QA/0310070.
- [11] N. Bourbaki, “Algèbre commutative, chapitres 1 et 2”, Hermann, 1961.
- [12] N. Bourbaki, “Algèbre, chapitre 3”, Hermann, 1961.
- [13] J.-L. Brylinski, A differential complex for Poisson Manifolds, *J. Differential Geom.* **28** (1988), 93-114.
- [14] A. Connes, M. Dubois-Violette, Yang-Mills algebra, *Lett. Math. Phys.* **61** (2002) 149-158.
- [15] M. Dubois-Violette, $d^N = 0$: Generalized homology, *K-theory* **14** (1998), no2, 371-404.

- [16] D. Eisenbud, “Commutative Algebra”, Springer-Verlag, 1995.
- [17] C. Kassel, L’homologie cyclique des algèbres enveloppantes, *Invent. math.* **91** (1988), 221-251.
- [18] C. Kassel, M. Wambst, Algèbre homologique des N-complexes et homologie de Hochschild aux racines de l’unité, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto University* **34** (1998), no2, 91-114 .
- [19] B. Keller, Invariance of cyclic homology under derived equivalence. Representation theory of algebras (Cocoyoc, 1994), 353-361, CMS Conf. Proc., 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [20] J.-L. Loday, “Cyclic Homology”, Springer, 1997.
- [21] J. Mc Cleary, “A User’s Guide to Spectral Sequences”, Cambridge studies in advanced mathematics, 2001.
- [22] N. Marconnet, Homologies d’algèbres Artin-Schelter régulières cubiques, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **338** (2004), 117-120.
- [23] N. Marconnet, Homologies of cubic Artin-Schelter regular algebras, *J. Algebra* **278** (2004), 638-665.
- [24] C. Năstăsescu, F. Van Oystaeyen, Graded Ring Theory, North-Holland, 1982.
- [25] P. Nuss, L’homologie cyclique des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie de dimension trois, *J. Pure Appl. Algebra*, **73** (1991), 39-71.
- [26] A. Odesskii, Sklyanin algebras, math.QA/0303021.
- [27] A. Odesskii, B.L. Feigin, Sklyanin elliptic algebras, Translation in *Funct. Anal. Appl.* 23 (1989), no. 3, 207-214.
- [28] S. B. Priddy, Koszul resolutions, *Trans. A.M.S.* **152** (1970), 39-60.
- [29] S. P. Smith, Some finite-dimensional algebras related to elliptic curves, Representation theory of algebras and related topics (Mexico City, 1994), 315-348, CMS Conf. Proc., 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [30] S. P. Smith, J. Tate, The center of the 3-dimensional and 4-dimensional Sklyanin algebras, *K-Theory* **8** (1994), 19-63.
- [31] J. T. Stafford, Noncommutative projective geometry, ICM 2002, Vol II, Beijing Higher Education Press, 93-103 (2002).
- [32] M. Van den Bergh, Regular algebras of dimension 3, *Séminaire Dubreil-Malliavin*, Lecture Notes in Math. 1296, Springer-Verlag, Berlin 1987, 228-234.
- [33] M. Van den Bergh, Non-commutative homology of some three-dimensional quantum spaces, *K-Theory* **8** (1994), 213-230.

- [34] M. Van den Bergh, A relation between Hochschild homology and cohomology for Gorenstein rings, *Proc. Am. Math. Soc.* **126** (5) (1998), 1345-1348, and *Proc. Am. Math. Soc.* **130** (2002), 2809-2810.
- [35] C. A. Weibel, “An introduction to homological algebra”, Cambridge University Press, 1994.

Résumé.

Les algèbres Artin-Schelter régulières sont des analogues non-commutatifs d'algèbres de polynômes. En dimension globale 3, ces algèbres graduées sont homogènes et ont des relations de degré 2 ou 3. Dans cette thèse, nous nous intéressons à certaines algèbres Artin-Schelter régulières de dimension globale 3, à relations cubiques.

Nous commençons par calculer l'homologie de Hochschild des algèbres Artin-Schelter régulières de dimension globale 3, cubiques de type A à coefficients génériques. Soit A une telle algèbre. Nous suivons la méthode employée par M. Van den Bergh (K-Theory 8 (1994) 213-230) dans le cas quadratique, en considérant cette algèbre comme déformation d'une algèbre de polynômes, avec crochet de Poisson remarquable. Nous calculons alors l'homologie de Poisson et nous montrons que la suite spectrale de Brylinski associée dégénère. Pour cela, nous utilisons le fait que cette algèbre est de Koszul au sens généralisé défini par R. Berger (J. Algebra 239 (2001) 705-734) et nous donnons un nouveau quasi-isomorphisme entre la résolution de Koszul de A par des A - A -bimodules et la bar-résolution de A .

Nous déduisons la cohomologie de de Rham, l'homologie cyclique et l'homologie cyclique périodique de l'homologie de Hochschild de A , en utilisant des résultats classiques.

La propriété de Koszul généralisée nous permet d'écrire un quasi-isomorphisme explicite entre le complexe qui calcule la cohomologie de Hochschild de A et le complexe qui calcule l'homologie de Hochschild de A , obtenant ainsi une dualité de Poincaré. Nous déduisons alors la cohomologie de Hochschild de A de l'homologie de Hochschild de A . Nous déterminons le centre de A , ce qui n'était pas connu.

Nous terminons par divers compléments. En particulier, nous explicitons une injection de la résolution de Koszul par des A - A -bimodules vers la bar-résolution de A , valable pour toute algèbre de Koszul généralisée A .

Mots-clés : algèbres Artin-Schelter régulières, algèbres de Koszul généralisées, homologie de Hochschild, homologie de Poisson.