Groupes quantiques localement compacts, actions et extensions

Stefaan Vaes

Université Paris VII -
Denis Diderot

Habilitation à Diriger des Recherches

Spécialité : Mathématiques

Groupes quantiques localement compacts, actions et extensions

Stefaan Vaes

Habilitation soutenue le 4 novembre 2004 devant le jury composé de :

Claire Anantharaman-Delaroche
Saad Baaj
Alain Connes
Magnus Landstad, rapporteur
Ryszard Nest, rapporteur
Georges Skandalis, rapporteur
Alfons Van Daele

Remerciements

Je remercie en premier lieu Georges Skandalis. Sa grande originalité mathématique a beaucoup influencé mes travaux des trois dernières années. Mes remerciements s'adressent également à Magnus Landstad et Ryszard Nest qui ont rapporté sur ce mémoire d'habilitation, ainsi qu'à Claire Anantharaman-Delaroche, Saad Baaj, Alain Connes et Alfons Van Daele qui m'ont fait l'honneur d'être membre du jury. Je souhaite aussi remercier Michèle Wasse qui s'est occupée avec une grande efficacité du travail administratif pendant la préparation de cette habilitation.

Les travaux présentés dans ce mémoire couvrent la période 1998–2003. Pendant cette période j'ai eu l'occasion de travailler à deux endroits très agréables. Je remercie tout d'abord les membres de l'équipe d'Analyse du Département de Mathématiques de la K.U.Leuven, où j'ai fait mes premiers pas dans la recherche mathématique. Je veux remercier plus particulièrement mon directeur de thèse Alfons Van Daele ainsi que Johan Kustermans avec qui j'ai eu une collaboration très fructueuse.

Puis je veux remercier les membres du projet Algèbres d'opérateurs et représentations de l'Institut de Mathématiques de Jussieu. Accueilli tellement chaleureusement en 2001 comme post-doc, je suis resté chez eux et je m'y sens maintenant chez moi, malgré les blagues belges. L'atmosphère stimulante de cette équipe continue à me permettre d'élargir mes horizons mathématiques.

Dans ce mémoire je synthétise mes travaux [1]–[13]. Plusieurs de ces articles ont été écrits en collaboration avec des collègues. Je suis très reconnaissant à mes co-auteurs Saad Baaj, Pieter Desmedt, Johan Kustermans, Johan Quaegebeur, Georges Skandalis, Leonid Vainerman et Alfons Van Daele pour notre collaboration agréable et enrichissante.

Je ne saurais terminer ces remerciements sans dire combien ce travail doit à Annelies et Eline.

Stefaan Vaes — Paris, le 4 novembre 2004.

Table des matières

1 Introduction

La théorie des groupes quantiques localement compacts remonte aux années soixante et un problème d'analyse harmonique. Si G est un groupe abélien localement compact, l'espace $\hat{G}$ des caractères continus sur G a une structure de groupe abélien localement compact. Le théorème de bidualité de Pontryagin affirme que le dual de $\hat{G}$ est canoniquement isomorphe à G. La question était de généraliser cette *dualité de Pontryagin* aux groupes non-abéliens.

En 1938 Tannaka avait déjà établi un théorème de dualité pour les groupes compacts. Ce théorème était généralisé aux groupes localement compacts unimodulaires par Stinespring (1959) et aux groupes localement compacts arbitraires par Eymard (1964) et Tatsuuma (1965). Dans ces généralisations l'objet dual d'un groupe localement compact ne peut plus être un groupe. Contrairement au théorème de Pontryagin on n'a plus une seule catégorie avec une dualité interne.

C'est Kac qui a trouvé une telle catégorie. Dans [Kac61, Kac65] il définit la structure de «*ring group*» dont il démontre qu'elle permet une dualité interne. La théorie contient à la fois les groupes localement compacts unimodulaires et leurs objets duaux. En 1964 Kac et Paljutkin [KP64] ont construit un exemple d'un «ring group» qui n'était ni un groupe ni l'objet dual d'un groupe. Ceci était le premier exemple d'un groupe quantique localement compact.

Utilisant pleinement la théorie modulaire des algèbres de von Neumann développée par Tomita et Takasaki, Kac & Vainerman [KV74] et Enock & Schwartz [ES75] se sont affranchis de l'hypothèse de l'unimodularité et ont défini la structure qu'Enock et Schwartz appellent *algèbre de Kac*. Dans la théorie des algèbres de Kac la généralisation de la dualité de Pontryagin atteint sa forme finale : les algèbres de Kac ont une dualité interne, il y a un théorème de bidualité et chaque groupe localement compact est une algèbre de Kac. Ainsi la théorie des algèbres de Kac peut être considérée comme la première théorie de groupes quantiques localement compacts.

Dans les années quatre-vingt la théorie des groupes quantiques connaît une évolution spectaculaire. Motivée par la physique théorique, l'école de Leningrad découvre des *quantifications d'algèbres de Lie* (voir [Dri86]). Dans un cadre purement algébrique ces groupes quantiques sont définis en termes d'*algèbres de Hopf*. Ces groupes quantiques ont-ils des versions topologiques ? De toutes façons il est clair que les groupes quantiques construits par Drinfel'd et Jimbo ne peuvent être des algèbres de Kac : dans ces exemples et contrairement à la théorie des algèbres de Kac, l'antipode (l'analogue de l'inverse dans un groupe) n'est pas involutive.

En 1987 Woronowicz a partiellement résolu cette question. Il a développé la théorie des *groupes quantiques compacts* [Wor87a, Wor98] et il a démontré que le groupe quantique $SU_q(2)$ en était un exemple [Wor87b]. On remarque que dans cet exemple l'antipode n'est pas involutive et que le groupe quantique $SU_q(2)$ ne peut donc pas être une algèbre de Kac. Rosso a établi le lien entre les travaux de Woronowicz et ceux de Drinfel'd & Jimbo dans [Ros90].

D'autres exemples de groupes quantiques non-compacts et plus généraux que les algèbres de Kac ont été construits dans un langage d'algèbres d'opérateurs par Woronowicz [Wor91] et Majid [Maj91]. La question suivante se posait alors naturellement :

Quelle est la bonne théorie de groupes quantiques localement compacts (1)

contenant à la fois les algèbres de Kac, les groupes quantiques compacts et les exemples isolés de Woronowicz et d'autres ?

Une grande découverte dans cette direction est due à Baaj et Skandalis [BS93]. Ils proposent une théorie d'*unitaires multiplicatifs*. Un unitaire multiplicatif est un opérateur unitaire dans un produit tensoriel $H \otimes H$ d'espaces de Hilbert qui satisfait une *relation pentagonale*. Baaj et Skandalis introduisent les notions de *régularité* et d'*irréductibilité* d'un unitaire multiplicatif et développent une théorie de groupes quantiques à partir de ces deux conditions. Leur théorie unifie les algèbres de Kac et les groupes quantiques compacts, ainsi que les exemples de [Maj91]. De plus leur théorie a une dualité interne et permet l'étude des coactions de groupes quantiques sur des C*-algèbres. On peut dire que, 20 ans après les algèbres de Kac, les groupes quantiques localement compacts ont pris un nouvel essor.

Néanmoins la théorie de Baaj et Skandalis ne répond pas complètement à la question (1). Baaj démontre dans [Baa95] que l'unitaire multiplicatif du groupe quantique $E_\mu(2)$ des déplacements du plan ne satisfait pas la condition de régularité. Egalement certains groupes quantiques construits comme biproduit croisé ne sont pas réguliers [BS98]. Dans [Baa95] Baaj propose de remplacer la régularité par une condition plus faible de *semi-régularité*. Cette condition suffit pour développer une théorie de groupes quantiques dans le même esprit que [BS93]. C'est seulement récemment que nous avons démontré en collaboration avec Saad Baaj et Georges Skandalis [11] qu'il existe des groupes quantiques localement compacts non-semi-réguliers.

En 1996 Woronowicz propose une condition alternative pour les unitaires multiplicatifs : la *maniabilité* [Wor96]. Cette condition est effectivement satisfaite par les unitaires multiplicatifs associés aux algèbres de Kac, aux groupes quantiques compacts et aux exemples connus. Dans un sens l'article de Woronowicz donne une première réponse à la question (1).

Puisqu'un groupe localement compact est défini comme un espace localement compact muni d'une multiplication, on veut, dans l'esprit des algèbres de Kac, développer une théorie qui commence à partir d'une algèbre d'opérateurs (C*-algèbre ou algèbre de von Neumann) munie d'une comultiplication. Puis on veut ajouter des axiomes pour définir des groupes quantiques localement compacts.

Dans [MN94] Masuda et Nakagami proposent de tels axiomes. Ils appellent la structure ainsi définie une *algèbre de Woronowicz*. Malheureusement la liste d'axiomes proposée est relativement longue. On peut dire que Masuda et Nakagami décrivent bien l'objet mathématique qu'on veut étudier, mais qu'ils ne donnent pas d'axiomatique satisfaisante. Récemment Masuda, Nakagami et Woronowicz [MNW03] ont donné une version C*-algébrique de la théorie des algèbres de Woronowicz.

En 1996 Van Daele [VD98] a donné une définition purement algébrique d'une classe spécifique de groupes quantiques localement compacts. Cette classe contient les groupes quantiques compacts et sa théorie admet une dualité interne. Il y a également un système concis et satisfaisant d'axiomes. Comme la théorie de Van Daele est algébrique il est clair qu'elle ne peut décrire tous les groupes quantiques localement compacts. Néanmoins la théorie de Van Daele – et sa version analytique donnée par Kustermans et Van Daele [KVD97] – est une des motivations principales de la théorie présentée dans la première partie de ce mémoire.

Notation. Le symbole le plus utilisé dans ce mémoire est $\otimes$. Selon les cas, ce symbole indiquera
– le produit tensoriel des espaces de Hilbert,
– le produit tensoriel *minimal* des C*-algèbres,
– le produit tensoriel *spatial* des algèbres de von Neumann.

2 Groupes quantiques localement compacts

Dans [2, 3] et en collaboration avec Johan Kustermans, nous proposons une nouvelle définition des groupes quantiques localement compacts. La version C*-algébrique est développée dans [2] et la version von Neumann dans [3]. Un résumé de nos résultats a été publié dans [4].

En résumant un groupe quantique localement compact est une algèbre d'opérateurs munie d'une comultiplication et de deux mesures de Haar : une invariante à gauche, l'autre à droite. Avant donc de donner plus de détails, nous rappelons la notion de mesure sur une algèbre d'opérateurs. Cette théorie d'*intégration non-commutative* a été développée par plusieurs mathématiciens. Les références principales sont Combes [Com68] pour les poids sur les C*-algèbres et Tomita & Takesaki [Tak70] et Haagerup [Haa75] pour le cas des algèbres de von Neumann.

Définition 2.1. Soit A une C*-algèbre. Un poids φ sur A est une application $\varphi : A^+ \to [0, +\infty]$ telle que

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ pour tout $a, b \in A^+$.
2. $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$ pour tout $a \in A^+, \lambda \in \mathbb{R}^+$.

Si φ est un poids sur une C*-algèbre A, nous introduisons les notations

$$\mathcal{M}_\varphi^+ = \{a \in A^+ \mid \varphi(a) < +\infty\} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_\varphi = \{a \in A \mid \varphi(a^*a) < +\infty\} .$$

Nous disons que φ est *densément défini* si $\mathcal{M}_\varphi^+$ est dense dans A^+. Nous disons que φ est *fidèle* si $a \in A^+, \varphi(a) = 0$ implique que $a = 0$.

Si φ est un poids sur une algèbre de von Neumann M, nous disons que φ est *semi-fini* si $\mathcal{M}_\varphi^+$ est faiblement dense dans M^+. Nous disons que φ est *normal* si $\lim_i \varphi(a_i) = \varphi(\lim_i a_i)$ pour chaque suite généralisée croissante bornée (a_i) dans M. Nous rappelons que d'après la théorie modulaire de Tomita-Takesaki chaque poids normal semi-fini fidèle φ sur une algèbre de von Neumann admet un groupe modulaire d'automorphismes (σ_t^φ). Le poids φ satisfait la condition KMS relativement à (σ_t^φ).

Nous rappelons qu'on associe à une C*-algèbre A la *C*-algèbre des multiplicateurs* $\mathrm{M}(A)$. Si $\pi : A \to \mathrm{B}(H)$ est une représentation non-dégénérée, la C*-algèbre $\mathrm{M}(A)$ est donnée par

$$\mathrm{M}(A) = \{x \in \mathrm{B}(H) \mid xA, Ax \subset A\} .$$

Si A et B sont des C*-algèbres, on dit qu'un *-homomorphisme $\theta : A \to \mathrm{M}(B)$ est *non-dégénéré* si l'espace vectoriel engendré par $\theta(A)B$ est dense dans B.

Définition 2.2. Soit A une C*-algèbre. On dit que Δ est une *comultiplication* sur A si $\Delta : A \to \mathrm{M}(A \otimes A)$ est un *-homomorphisme non-dégénéré tel que

$$(\Delta \otimes \iota)\Delta = (\iota \otimes \Delta)\Delta \ . \tag{2}$$

Soit M une algèbre de von Neumann. On dit que Δ est une *comultiplication* sur M si $\Delta : M \to M \otimes M$ est un *-homomorphisme normal unifère tel que la même relation soit vraie.

La propriété (2) satisfaite par une comultiplication Δ s'appelle *co-associativité*.

Pour comprendre la théorie des groupes quantiques localement compacts il est important de garder en tête le cas d'un groupe localement compact G où on prend

$$\Delta(f)(p, q) = f(pq)$$

sur $A = C_0(G)$ pour la version C*-algébrique ou sur $M = \mathrm{L}^\infty(G)$ pour la version von Neumann.

Définition 2.3 (Groupe quantique von Neumann). Soit (M, Δ) une algèbre de von Neumann munie d'une comultiplication. Nous disons que (M, Δ) est un *groupe quantique localement compact* s'il existe des poids normaux semi-finis fidèles φ et ψ sur M tels que

1. $(\iota \otimes \varphi)\Delta(x) = \varphi(x)1$ pour tout $x \in \mathcal{M}_\varphi^+$.
2. $(\psi \otimes \iota)\Delta(y) = \psi(y)1$ pour tout $y \in \mathcal{M}_\psi^+$.

La version C*-algébrique de cette définition est légèrement plus compliquée.

Définition 2.4 (Groupe quantique C*-algébrique). Soit (A, Δ) une C*-algèbre munie d'une comultiplication. Nous disons que (A, Δ) est un *groupe quantique localement compact* si les espaces vectoriels engendrés par

$$\{(\iota \otimes \omega)\Delta(x) \mid \omega \in A^*, x \in A\} \quad \text{et} \quad \{(\omega \otimes \iota)\Delta(x) \mid \omega \in A^*, x \in A\}$$

sont denses dans A et s'il existe sur A des poids φ et ψ densément définis, semi-continus inférieurement, fidèles et (presque) KMS tels que

1. $(\iota \otimes \varphi)\Delta(x) = \varphi(x)1$ pour tout $x \in \mathcal{M}_\varphi^+$.
2. $(\psi \otimes \iota)\Delta(y) = \psi(y)1$ pour tout $y \in \mathcal{M}_\psi^+$.

On dit qu'un poids φ densément défini et semi-continu inférieurement sur une C*-algèbre A est *KMS* s'il existe un groupe à un paramètre (σ_t) d'automorphismes de A tel que φ satisfait la condition KMS par rapport à (σ_t).

Dans la définition ci-dessus il suffit de supposer que les poids invariants sont *presque KMS*. Pour chaque poids densément défini et semi-continu inférieurement φ sur une C*-algèbre A on peut faire une construction GNS. Ceci donne un espace de Hilbert H_φ et une représentation non-dégénérée π_φ de A sur H_φ. Aussi, d'après un résultat de Baaj, le poids φ sur A peut être remonté en un poids $\widetilde{\varphi}$ sur l'algèbre de von Neumann $\pi_\varphi(A)''$. Nous disons que φ est *presque KMS* si ce poids $\widetilde{\varphi}$ est fidèle. La terminologie se justifie par le fait que le poids $\widetilde{\varphi}$ satisfait la condition KMS par rapport à son groupe modulaire. Bien que φ ne soit pas forcément un poids KMS, le groupe modulaire existe néanmoins sur l'algèbre de von Neumann $\pi_\varphi(A)''$. Nous remarquons qu'un poids KMS est presque KMS mais la réciproque n'est pas vraie en général.

On démontre dans [2] que les poids de Haar d'un groupe quantique C*-algébrique sont automatiquement des poids KMS sur la C*-algèbre A.

Deuxièmement nous remarquons qu'il est clair que les groupes localement compacts donnent des exemples de groupes quantiques localement compacts. Dans ce cas les poids invariants φ et ψ sont donnés par

$$\varphi(f) = \int_G f(x)\, d_l x \quad \text{et} \quad \psi(f) = \int_G f(x)\, d_r x \;,$$

où on intègre par rapport à une mesure de Haar invariante à gauche, respectivement à droite.

Nous verrons plus tard qu'il y a une correspondance bijective entre les groupes quantiques C*-algébriques et les groupes quantiques von Neumann. Etant donné une C*-algèbre et un poids, la construction GNS permet de définir une algèbre de von Neumann et un poids sur cette algèbre. De cette manière nous associons à chaque groupe quantique C*-algébrique un groupe quantique von Neumann. La correspondance réciproque est moins évidente. Il faut dégager à partir d'un groupe quantique von Neumann une sous-C*-algèbre naturelle qui joue le rôle de l'algèbre des *fonctions continues qui tendent vers zéro à l'infini*. Ceci donne une version quantique du théorème de Weil : chaque groupe mesuré muni d'une classe de mesure invariante possède une unique topologie localement compacte.

Dans la théorie des groupes localement compacts l'existence de la mesure de Haar est un des grands théorèmes. Jusqu'à présent il a été impossible de développer une théorie de groupes quantiques localement compacts où l'existence de la mesure de Haar est un tel théorème. Ce problème vient du fait que les axiomes de l'antipode n'ont pas de sens évident dans le cadre des algèbres d'opérateurs. Dans une algèbre de Hopf l'antipode satisfait la relation algébrique suivante :

$$\mathrm{m}(\iota \otimes S)\Delta(x) = \varepsilon(x)1 \;.$$

Malheureusement dans un cadre topologique ceci n'a pas de sens : l'antipode S est non-bornée et anti-multiplicative. Il n'est donc pas évident de donner un sens à $\iota \otimes S$ sur un produit tensoriel topologique. Aussi, l'application de multiplication $\mathrm{m} : A \otimes A \to A$ qui est bien définie sur le produit tensoriel algébrique est rarement continue pour la norme d'un produit tensoriel de C*-algèbres.

Malgré le fait qu'il n'apparaît pas d'antipode ni de co-unité dans la définition d'un groupe quantique localement compact, celles-ci ne sont pas absentes de la théorie, au contraire. On verra plus loin comment l'existence de la mesure de Haar nous permet de *construire l'antipode d'un groupe quantique localement compact*.

Bien que l'existence des poids de Haar soit supposée dans la définition d'un groupe quantique localement compact, les notations φ et ψ n'apparaissent pas dans (M, Δ) ou (A, Δ). Ceci est justifié par le théorème d'unicité suivant.

Théorème 2.5. *Soit (A, Δ) un groupe quantique C*-algébrique. Alors, deux poids densément définis continus inférieurement et invariants à gauche sont proportionnels.*

Soit (M, Δ) un groupe quantique von Neumann. Alors, deux poids normaux semi-finis fidèles et invariants à gauche sont proportionnels.

Donnons maintenant plus de détails sur la correspondance entre les groupes quantiques C*-algébriques et von Neumann et introduisons aussi le dual d'un groupe quantique localement compact. L'outil principal est un *unitaire multiplicatif* dans le sens de Baaj et Skandalis.

Définition 2.6 (Baaj et Skandalis [BS93]). Soit H un espace de Hilbert et $W \in \mathrm{B}(H \otimes H)$ un opérateur unitaire. On dit que W est un *unitaire multiplicatif* si

$$W_{12}W_{13}W_{23} = W_{23}W_{12} \ .$$

Dans cette définition nous utilisons la notation suivante : W_{12} est l'opérateur sur $H \otimes H \otimes H$ donné par $W_{12}(\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \xi_3) = W(\xi_1 \otimes \xi_2) \otimes \xi_3$. Les opérateurs W_{13} et W_{23} sont définis d'une façon analogue.

Fixons pour le reste de cette section un groupe quantique von Neumann (M, Δ) avec un poids φ invariant à gauche. Rappelons la construction GNS de φ. Nous considérons les éléments de carré intégrable :

$$\mathcal{N}_\varphi = \{x \in M \mid \varphi(x^*x) < +\infty\} \ .$$

Alors, en complétant $\mathcal{N}_\varphi$ pour le produit scalaire donné par $\langle x, y\rangle = \varphi(y^*x)$, nous obtenons un espace de Hilbert H. Posons

$$\Lambda : \mathcal{N}_\varphi \to H \quad \text{avec} \quad \langle \Lambda(x), \Lambda(y)\rangle = \varphi(y^*x) \quad \text{et} \quad \pi : M \to \mathrm{B}(H) : \pi(x)\Lambda(y) = \Lambda(xy) \ .$$

L'invariance à gauche de φ permet de définir un opérateur $W \in M \otimes \mathrm{B}(H)$ par la formule

$$(\omega \otimes \iota)(W^*)\Lambda(x) = \Lambda\big((\omega \otimes \iota)\Delta(x)\big) \quad \text{pour tout} \ \ x \in \mathcal{N}_\varphi, \omega \in M_* \ .$$

Alors il est facile de voir que W^* est une isométrie, $WW^* = 1$. Par contre, il n'est pas du tout évident que W soit un unitaire. Pour démontrer le résultat suivant on a besoin d'un poids de Haar invariant à droite.

Théorème 2.7. *L'opérateur W est un unitaire dans $M \otimes \mathrm{B}(H)$.*

Exemple 2.8. Dans le cas classique où $M = \mathrm{L}^\infty(G)$, on vérifie sans peine que $H = \mathrm{L}^2(G)$ et que W est l'unitaire sur $\mathrm{L}^2(G \times G)$ donné par

$$(W\xi)(p, q) = \xi(p, p^{-1}q) \ .$$

Comme la représentation $\pi : M \to \mathrm{B}(H)$ est fidèle on identifie M avec son image dans $\mathrm{B}(H)$ et on suppose donc que M agit sur son espace standard H. Nous avons alors

$$\Delta(x) = W^*(1 \otimes x)W \quad \text{pour tout} \ \ x \in M \ .$$

Alors W est un unitaire multiplicatif sur $H \otimes H$.

Nous pouvons maintenant associer à un groupe quantique von Neumann un groupe quantique C*-algébrique.

Proposition 2.9. *L'adhérence normique A de*

$$\{(\iota \otimes \omega)(W) \mid \omega \in \mathrm{B}(H)_*\}$$

est une sous-C-algèbre faiblement dense de M. La restriction de Δ à A donne une comultiplication sur A et (A, Δ) est un groupe quantique C*-algébrique.*

Nous avons un unitaire multiplicatif à notre disposition. On peut donc utiliser les travaux de Baaj et Skandalis [BS93] et Woronowicz [Wor96] pour définir le dual d'un groupe quantique localement compact.

Théorème 2.10. *Soit $\hat{A}$ l'adhérence normique de*

$$\{(\omega \otimes \iota)(W) \mid \omega \in M_*\}$$

et soit $\hat{M}$ l'adhérence faible de $\hat{A}$.

1. *$\hat{A}$ est une C*-algèbre et $\hat{M}$ est une algèbre de von Neumann.*
2. *La formule*

$$\hat{\Delta}(x) = \hat{W}^*(1 \otimes x)\hat{W} \quad \textit{où } \hat{W} = \Sigma W^* \Sigma \textit{ et } \Sigma \textit{ est la volte},$$

   définit une comultiplication sur $\hat{A}$ et sur $\hat{M}$.
3. *De cette manière $(\hat{A}, \hat{\Delta})$ et $(\hat{M}, \hat{\Delta})$ sont des groupes quantiques localement compacts, respectivement C*-algébriques et von Neumann.*

Remarque 2.11. Dans le cas où $M = \mathrm{L}^\infty(G)$ on vérifie que $\hat{A} = C_r^*(G)$, la C*-algèbre réduite du groupe localement compact G et $\hat{M} = \mathcal{L}(G)$, l'algèbre de von Neumann du groupe. La comultiplication est donnée par $\hat{\Delta}(\lambda_g) = \lambda_g \otimes \lambda_g$.

Dans notre définition d'un groupe quantique localement compact il n'apparaît pas d'antipode. Nous allons voir maintenant comment la construire.

Proposition 2.12. *Soit (M, Δ) un groupe quantique von Neumann et W l'unitaire multiplicatif associé. Alors, il existe une unique application linéaire*

$$S : \mathcal{D}(S) \subset M \to M$$

qui satisfait les conditions suivantes.

1. *Pour tout $\omega \in \mathrm{B}(H)_*$, $(\iota \otimes \omega)(W) \in \mathcal{D}(S)$ et*

$$S\big((\iota \otimes \omega)(W)\big) = (\iota \otimes \omega)(W^*) \, .$$

2. *L'application S est fermé pour la topologie σ-forte*.*
3. *L'espace vectoriel $\{(\iota \otimes \omega)(W) \mid \omega \in \mathrm{B}(H)_*\}$ est un coeur pour S et la topologie σ-forte*.*

De plus, l'application S admet une unique décomposition polaire $S = R\tau_{-i/2}$ où R est un anti-automorphisme de M et (τ_t) est un groupe à un paramètre d'automorphismes de M qui commutent à R.

On peut démontrer que $\Delta R = \sigma(R \otimes R)\Delta$ où σ est la volte sur $M \otimes M$. Si alors φ est un poids invariant à gauche sur (M, Δ), φR sera un poids invariant à droite.

On démontre également l'existence d'une constante $\nu > 0$ telle que $\varphi\tau_t = \nu^{-t}\varphi$.

Nous remarquons que R et τ_t laissent invariante la C*-algèbre $A \subset M$ et que le groupe à un paramètre (τ_t) est normiquement continu sur A. L'antipode existe donc également sur le groupe quantique C*-algébrique.

Terminologie 2.13. L'application linéaire S s'appelle l'*antipode*, l'anti-automorphisme R l'*antipode unitaire*, le groupe d'automorphismes (τ_t) le *groupe d'échelle* et ν la *constante d'échelle* de (M, Δ).

Remarque 2.14. Dans le cas $M = \mathrm{L}^\infty(G)$, on a : $\tau_t = \iota$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $S(f)(p) = R(f)(p) = f(p^{-1})$. Plus généralement le groupe d'échelle est trivial pour toute algèbre de Kac.

Les groupes quantiques $ax+b$ et $az+b$ développés par Woronowicz & Zakrzewski [Wor01, WZ02] et Van Daele [VD01] donnent des exemples de groupes quantiques localement compacts dont la constante d'échelle est différente de 1.

Dans l'étude des groupes quantiques localement compacts la théorie modulaire, c'est-à-dire la théorie des poids sur les C*-algèbres et les algèbres de von Neumann, joue un rôle crucial. Si (M, Δ) est un groupe quantique von Neumann avec un poids invariant à gauche φ et un poids invariant à droite ψ, nous notons par (σ_t) le groupe modulaire de φ et par (σ'_t) le groupe modulaire de ψ. Ces groupes modulaires sont des groupes à un paramètre d'automorphismes de M.

Proposition 2.15. *Les trois groupes à un paramètre (τ_t), (σ_t) et (σ'_t) commutent entre eux. Ils satisfont les formules*

$$\begin{aligned} &\Delta\sigma_t = (\tau_t \otimes \sigma_t)\Delta \ , \quad \Delta\sigma'_t = (\sigma'_t \otimes \tau_{-t})\Delta \quad \textit{et} \quad \Delta\tau_t = (\sigma_t \otimes \sigma'_{-t})\Delta = (\tau_t \otimes \tau_t)\Delta \ , \\ &\varphi\sigma'_t = \nu^t \varphi \quad \textit{et} \quad \psi\sigma_t = \nu^{-t}\psi \ . \end{aligned}$$

Dans [1] j'étudie en détail les paires de poids φ et ψ qui satisfont une relation d'invariance relative du style $\varphi\sigma'_t = \nu^t\varphi$. Ceci permet de décrire la dérivée de Radon-Nikodym de ψ par rapport à φ comme un opérateur non-borné injectif auto-adjoint δ affilié à l'algèbre de von Neumann M (et même à la C*-algèbre A). Cet opérateur joue le rôle de la *fonction modulaire* d'un groupe localement compact. Nous appelons δ l'*élément modulaire* de (M, Δ). Exactement comme dans le cas des groupes localement compacts l'élément modulaire δ est un caractère : $\Delta(\delta) = \delta \otimes \delta$.

3 Coactions de groupes quantiques

Dans [5] j'étudie les coactions de groupes quantiques localement compacts sur les algèbres de von Neumann. Les résultats de cet article sont techniques et constituent surtout un outil pour l'étude d'extensions et de sous-groupes quantiques fermés.

Dans [Eno77] les coactions d'algèbres de Kac sur des algèbres de von Neumann ont été étudiées. Dans la première partie de [5] j'indique sans preuve détaillée comment les résultats d'Enock peuvent être généralisés aux groupes quantiques localement compacts. Le résultat principal est le Théorème 3.6.

Dans une deuxième partie de [5] je construis pour chaque coaction une *implémentation canonique* qui est une coreprésentation du groupe quantique. Pour obtenir cette implémentation nous généralisons la théorie des *poids duaux* de Haagerup [Haa78] au cas des groupes quantiques localement compacts.

A chaque coaction α sur une algèbre de von Neumann N on associe deux algèbres de von Neumann : l'*algèbre des points fixes* N^α et le produit croisé $\hat{M} \ltimes N$. Dans une dernière partie de [5] j'étudie les inclusions d'algèbres de von Neumann

$$N^\alpha \subset N \quad \text{et} \quad \alpha(N) \subset \hat{M} \ltimes N \; .$$

Je fais une analyse des poids opératoriels sur ces inclusions pour démontrer qu'elles donnent des exemples d'inclusions étudiées par Enock et Nest dans [EN96]. Nous allons voir avec plus de détails les liens avec les travaux d'Enock et Nest dans la section 5.

Dans toute cette section les groupes quantiques seront des *groupes quantiques von Neumann.*

Définition 3.1. Soit (M, Δ) un groupe quantique localement compact. Une *coaction (à gauche)* de (M, Δ) sur une algèbre de von Neumann N est un *-homomorphisme normal unifère fidèle

$$\alpha : N \to M \otimes N \quad \text{qui satisfait} \quad (\Delta \otimes \iota)\alpha = (\iota \otimes \alpha)\alpha \; .$$

Nous remarquons que dans le cas où $M = \mathrm{L}^\infty(G)$ et où G agit sur une algèbre de von Neumann N, on aura $\alpha : N \to \mathrm{L}^\infty(G) \otimes N$ par $\alpha(x)(g) = \alpha_{g^{-1}}(x)$.

Dans la définition nous considérons des coactions à gauche. Il y a évidemment aussi des coactions à droite et, en utilisant la volte, une coaction à droite de (M, Δ) correspond à une coaction à gauche de $(M, \Delta^{\mathrm{op}})$, où Δ^{op} est la comultiplication opposée, donnée par $\Delta^{\mathrm{op}} = \sigma\Delta$ où σ est la volte sur $M \otimes M$.

Nous rappelons qu'on suppose toujours que l'algèbre de von Neumann M est représentée sur l'espace de Hilbert H qui est l'espace de la représentation GNS du poids invariant φ.

Définition 3.2. Soit $\alpha : N \to M \otimes N$ une coaction d'un groupe quantique localement compact (M, Δ) sur une algèbre de von Neumann N. Alors, nous définissons le *produit croisé*

$$\hat{M} \ltimes N = \big(\, \alpha(N) \; \cup \; \hat{M} \otimes 1 \, \big)'' \subset \mathrm{B}(H) \otimes N \; .$$

Le produit croisé est donc la sous-algèbre de von Neumann de $\mathrm{B}(H) \otimes N$ engendré par $\alpha(N)$ et $\hat{M} \otimes 1$.

Remarque 3.3. Jusqu'à présent j'ai toujours adopté la notation $M \ltimes N$ pour le produit croisé que je propose désormais de noter $\hat{M} \ltimes N$, ce qui donne une notation plus compatible avec [BS93] et avec celle utilisée par les algébristes. Espérons que cela ne crée pas trop de confusion...

Fixons une coaction $\alpha : N \to M \otimes N$ d'un groupe quantique localement compact (M, Δ) sur une algèbre de von Neumann N.

Définition 3.4. La sous-algèbre N^α de N définie par

$$N^\alpha = \{x \in N \mid \alpha(x) = 1 \otimes x\}$$

s'appelle l'*algèbre des points fixes* de α.

Proposition 3.5. *Il existe un unique *-homomorphisme*

$$\hat{\alpha} : \hat{M} \ltimes N \to (\hat{M} \ltimes N) \otimes \hat{M}$$

tel que $\hat{\alpha}\big(\alpha(x)\big) = \alpha(x) \otimes 1$ et $\hat{\alpha}(a \otimes 1) = \hat{\Delta}(a)_{13}$ pour tout $x \in N$ et $a \in \hat{M}$. Alors $\hat{\alpha}$ est une coaction à droite du groupe quantique dual $(\hat{M}, \hat{\Delta})$. Nous appelons $\hat{\alpha}$ la coaction duale *de α.*

Avant d'énoncer le théorème de bidualité dû à Enock et Schwartz pour les algèbres de Kac et valable pour les groupes quantiques localement compacts avec presque la même preuve, nous donnons plus de détails sur le produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une coaction *à droite* $\alpha : N \to N \otimes M$. Comme une coaction à droite de (M, Δ) correspond à une coaction à gauche de $(M, \Delta^{\mathrm{op}})$, le produit croisé est donné par

$$N \rtimes \hat{M}' = \big(\alpha(N) \cup 1 \otimes \hat{M}'\big)'' .$$

Ici on utilise que le dual de $(M, \Delta^{\mathrm{op}})$ est canoniquement isomorphe à $(\hat{M}', \hat{\Delta}')$.

Théorème 3.6 (Enock & Schwartz). *Le produit croisé $M' \ltimes (\hat{M} \ltimes N)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{B}(H) \otimes N$.*

L'algèbre des points fixes de la coaction duale $\hat{\alpha}$ est exactement $\alpha(N)$:

$$\big(\hat{M} \ltimes N\big)^{\hat{\alpha}} = \alpha(N) .$$

Nous expliquons maintenant comment obtenir une *implémentation canonique* pour toute coaction.

Définition 3.7. On appelle *coreprésentation unitaire* de (M, Δ) sur un espace de Hilbert K un unitaire $U \in M \otimes \mathrm{B}(K)$ tel que

$$(\Delta \otimes \iota)(U) = U_{13} U_{23} .$$

Dans ce cas-là on a automatiquement $U \in \mathrm{M}(A \otimes \mathcal{K}(K))$.

Dans ce mémoire toutes les coreprésentations sont unitaires et nous enlevons donc l'adjectif «unitaire».

Dans le cas où $M = \mathrm{L}^\infty(G)$ et (u_g) est une représentation unitaire de G sur K, on aura $U \in \mathrm{L}^\infty(G) \otimes \mathrm{B}(K)$ par la formule $U(g) = u_g$.

Dans la définition suivante nous utilisons la notation $\hat{\varphi}$ pour le poids invariant à gauche du groupe quantique dual $(\hat{M}, \hat{\Delta})$.

Définition 3.8. Soit θ un poids normal semi-fini fidèle sur N. La formule

$$\widetilde{\theta}(z) = \theta\alpha^{-1}\big((\iota \otimes \hat{\varphi})\hat{\alpha}(z)\big) \quad \text{pour } \ z \in (\hat{M} \ltimes N)^+$$

définit un poids normal semi-fini fidèle sur le produit croisé $\hat{M} \ltimes N$. Nous appelons $\widetilde{\theta}$ le *poids dual* de θ.

Pour donner un sens à la formule précédente il faut se convaincre que $(\iota \otimes \hat{\varphi})\hat{\alpha}(z)$ appartient à $\alpha(N)^+$ (ou plutôt la partie positive étendue de $\alpha(N)$ car $(\iota \otimes \hat{\varphi})\hat{\alpha}(z)$ n'est pas forcément borné).

Soit H_θ l'espace de la représentation GNS d'un poids normal semi-fini fidèle θ sur N. L'étape cruciale dans [5] consiste à démontrer que $H \otimes H_\theta$ est l'espace de la représentation GNS du poids dual $\widetilde{\theta}$ et que le produit croisé $\hat{M} \ltimes N$ est donc en position standard sur $H \otimes H_\theta$. Ceci permet de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.9. *Soit θ un poids normal semi-fini fidèle sur N et soit π_θ la représentation GNS de N sur H_θ. Alors il existe une coreprésentation U de (M, Δ) sur H_θ tel que*

$$(\iota \otimes \pi_\theta)\alpha(x) = U^*(1 \otimes \pi_\theta(x))U \quad \textit{et} \quad (\hat{J} \otimes J_\theta)U = U^*(\hat{J} \otimes J_\theta) .$$

Dans cette formule $\hat{J}$ et J_θ sont les conjugaisons modulaires des poids $\hat{\varphi}$ et θ.

*La coreprésentation U est canoniquement définie et est appelée l'*implémentation canonique *de α.*

Le théorème précédent dit qu'une coaction sur une algèbre de von Neumann N admet une implémentation par une coreprésentation sur l'espace de la représentation standard de N.

Chaque groupe quantique (M, Δ) coagit sur lui-même par comultiplication et le produit croisé est donné par $\hat{M} \ltimes M \cong \mathrm{B}(H)$. Dans [6] et en collaboration avec Alfons Van Daele nous développons la théorie modulaire du poids φ sur (M, Δ), du poids $\hat{\varphi}$ sur $(\hat{M}, \hat{\Delta})$ et du poids «combiné» sur $\hat{M} \ltimes M$ (qui est un poids dual dans le sens de la Définition 3.8). Nous écrivons tous les opérateurs modulaires en termes des éléments modulaires δ de (M, Δ) et $\hat{\delta}$ de $(\hat{M}, \hat{\Delta})$.

4 Extensions de groupes quantiques et exemples

Dans [7, 8, 9, 10, 11, 12] nous étudions différents aspects de la théorie des extensions de groupes quantiques localement compacts.

Les extensions *d'un groupe fini par l'objet dual d'un groupe fini* ont été étudiées par Kac dans [Kac68]. La célèbre *algèbre de Hopf de Kac-Paljutkin* a été obtenue de cette manière. Kac a introduit dans [Kac68] un groupe de cohomologie qui classifie de telles extensions. Dans [12] et en collaboration avec Saad Baaj et Georges Skandalis nous généralisons cette *cohomologie de Kac* au cadre des groupes localement compact.

Kac démontre dans [Kac68] que chaque extension d'un groupe fini par l'objet dual d'un groupe fini est donné par un *biproduit croisé à cocycles*. La construction du biproduit croisé de groupes localement compacts a été étudiée par Majid dans [Maj91] et par Baaj et Skandalis dans [BS93, BS98].

La *théorie générale des extensions* a été développée dans [7] en collaboration avec Leonid Vainerman, avec qui j'ai également fait une classification des extensions de *groupes de Lie de petite dimension* [8]. En collaboration avec Pieter Desmedt et Johan Quaegebeur nous avons étudié la moyennabilité des extensions dans [9].

Nous verrons plus loin comment les extensions donnent lieu à des couples assortis à cocycles de groupes quantiques localement compacts. Avec Saad Baaj j'ai construit leur *double produit croisé* dans [10] ce qui généralise la construction du *double quantique* de Drinfel'd.

En collaboration avec Saad Baaj et Georges Skandalis j'ai étudié les aspects C*-algébriques des biproduits croisés dans [11]. Des *couples assortis de groupes adéliques* mènent à des exemples de groupes quantiques localement compacts non-semi-réguliers.

Dans une première partie de cette section nous discutons en détail les définitions de morphismes, sous-groupes quantiques fermés et quotients quantiques. Toutes ces définitions sont un peu réparties dans les articles [7, 8, 10] et [Kus01].

Avant de pouvoir définir la notion d'extension, c'est-à-dire d'une suite exacte courte de groupes quantiques

$$e \longrightarrow (M_1, \Delta_1) \longrightarrow (M, \Delta) \longrightarrow (\hat{M}_2, \hat{\Delta}_2) \longrightarrow e \ ,$$

if faut expliquer la notion de *morphisme* entre groupes quantiques localement compacts. Ces morphismes ont été étudiés pour les algèbres de Kac dans [ES92] et le cas général des groupes quantiques localement compacts est dû à Kustermans [Kus01].

Nous avons vu que dans le cas $M = \mathrm{L}^\infty(G)$, le groupe quantique dual est donné par $C_r^*(G)$ dans le cadre C*-algébrique et par $\mathcal{L}(G)$ dans le cadre von Neumann. Il y a maintenant une troisième algèbre associée à G : la C*-algèbre maximale $C^*(G)$. De la même manière un groupe quantique localement compact a une C*-algèbre (duale) maximale.

La C*-algèbre duale réduite $\hat{A}$ est engendrée par la coreprésentation régulière de (M, Δ). La C*-algèbre duale universelle $\hat{A}^u$ sera engendrée par une coreprésentation universelle.

Proposition 4.1. *A isomorphisme près, il existe une unique paire $(\hat{A}^u, W^u)$ formée d'une C*-algèbre $\hat{A}^u$ et d'un unitaire $W^u \in \mathrm{M}(A \otimes \hat{A}^u)$ tels que*

1. $(\Delta \otimes \iota)(W^u) = W^u_{13} W^u_{23}$,
2. $\{(\omega \otimes \iota)(W^u) \mid \omega \in M_*\}$ *est dense dans* $\hat{A}^u$,
3. *pour chaque coreprésentation $X \in M \otimes \mathrm{B}(K)$ de (M, Δ) sur un espace de Hilbert K, il existe un *-homomorphisme non-dégénéré $\theta : \hat{A}^u \to \mathrm{B}(K)$ tel que $X = (\iota \otimes \theta)(W^u)$.*

En particulier nous avons une projection canonique $\pi_{\hat{A}} : \hat{A}^u \to \hat{A}$ telle que $(\iota \otimes \pi_{\hat{A}})(W^u) = W$.

De la même façon nous avons une C*-algèbre universelle A^u et $\hat{W}^u \in \mathrm{M}(\hat{A} \otimes A^u)$ satisfaisant

1. $(\hat{\Delta} \otimes \iota)(\hat{W}^u) = \hat{W}^u_{13} \hat{W}^u_{23}$,
2. $\{(\omega \otimes \iota)(\hat{W}^u) \mid \omega \in \hat{M}_*\}$ est dense dans A^u,
3. pour chaque coreprésentation $X \in \hat{M} \otimes \mathrm{B}(K)$ de $(\hat{M}, \hat{\Delta})$ sur un espace de Hilbert K, il existe un *-homomorphisme non-dégénéré $\theta : A^u \to \mathrm{B}(K)$ tel que $X = (\iota \otimes \theta)(\hat{W}^u)$.

On a également une projection $\pi_A : A^u \to A$ telle que $(\iota \otimes \pi_A)(\hat{W}^u) = \hat{W}$.

Remarque 4.2. Dans le cadre des groupes localement compacts on étudie aussi l'algèbre de Banach involutive $\mathrm{L}^1(G)$ munie du produit de convolution. On démontre alors que $C^*(G)$ est la C*-algèbre enveloppante de $\mathrm{L}^1(G)$. Kustermans a démontré dans [Kus01] un résultat analogue pour les groupes quantiques localement compacts.

Proposition 4.3. *Il existe une unique comultiplication Δ^u sur A^u telle que*

$$(\iota \otimes \Delta^u)(\hat{W}^u) = \hat{W}^u_{13} \hat{W}^u_{12} \, .$$

Cette comultiplication satisfait $\Delta \pi_A = (\pi_A \otimes \pi_A)\Delta^u$.

De la même façon on a une comultiplication $\hat{\Delta}^u$ sur $\hat{A}^u$.

Définition 4.4. Un morphisme $(M, \Delta) \xrightarrow{\pi} (M_1, \Delta_1)$ de groupes quantiques localement compacts est un *-homomorphisme non-dégénéré $\pi : A^u \to \mathrm{M}(A_1^u)$ tel que $\Delta_1^u \pi = (\pi \otimes \pi)\Delta^u$.

Il est très important de remarquer que π n'existe ni comme *-homomorphisme $M \to M_1$, ni comme *-homomorphisme $A \to \mathrm{M}(A_1)$. Néanmoins, comme on verra plus loin, il y a des cas importants où le *-homomorphisme $M \to M_1$ existe.

Notation 4.5. Nous écrivons

$$^uW = \Sigma \, \hat{W}^{u*} \, \Sigma \in \mathrm{M}(A^u \otimes \hat{A}) \, .$$

Alors, $(\pi_A \otimes \iota)(^uW) = W$ si $\pi_A : A^u \to A$ est la projection canonique, et $(\Delta^u \otimes \iota)(^uW) = {^uW_{13}} {^uW_{23}}$.

Proposition 4.6. *Il existe un unique unitaire* ${}^uW^u \in \mathrm{M}(A^u \otimes \hat{A}^u)$ *tel que*

$$(\Delta^u \otimes \iota)({}^uW^u) = ({}^uW^u)_{13}\,({}^uW^u)_{23}\ ,$$
$$(\iota \otimes \hat{\Delta}^u)({}^uW^u) = ({}^uW^u)_{13}\,({}^uW^u)_{12}\ ,$$
$$(\pi_A \otimes \iota)({}^uW^u) = {}^uW \quad et \quad (\iota \otimes \pi_{\hat{A}})({}^uW^u) = W^u\ .$$

Par universalité, il est clair qu'on peut dualiser les morphismes.

Proposition 4.7. *Soit* $(M,\Delta) \xrightarrow{\pi} (M_1,\Delta_1)$ *un morphisme de groupes quantiques localement compacts. Il existe alors un unique morphisme* $(\hat{M}_1,\hat{\Delta}_1) \xrightarrow{\hat{\pi}} (\hat{M},\hat{\Delta})$ *tel que*

$$(\iota \otimes \hat{\pi})({}^uW_1^u) = (\pi \otimes \iota)({}^uW^u)\ .$$

Le théorème suivant de Kustermans démontre qu'on peut étudier les morphismes dans un cadre purement von Neumann, en considérant plutôt les coactions associées.

Théorème 4.8 (Kustermans [Kus01]).
1. *Soit* $(M,\Delta) \xrightarrow{\pi} (M_1,\Delta_1)$ *un morphisme de groupes quantiques localement compacts. Il existe une unique coaction à droite* $\alpha : M \to M \otimes M_1$ *de* (M_1,Δ_1) *sur* M *telle que*

$$(\alpha \otimes \iota)(W) = W_{13}\,(\pi_{A_1}\pi \otimes \iota)({}^uW)_{23}$$

   où $\pi_{A_1} : A_1^u \to A_1$ *est la projection canonique.*
2. *La coaction* α *satisfait* $(\Delta \otimes \iota)\alpha = (\iota \otimes \alpha)\Delta$.
3. *Si* $\alpha : M \to M \otimes M_1$ *est une coaction de* (M_1,Δ_1) *sur* M *qui satisfait* $(\Delta \otimes \iota)\alpha = (\iota \otimes \alpha)\Delta$, *il existe un unique morphisme* $(M,\Delta) \xrightarrow{\pi} (M_1,\Delta_1)$ *tel que* α *soit donné par* π.

On dit que α *est la* coaction associée à π.

D'une façon informelle la coaction α est donnée par $\alpha = (\iota \otimes \pi)\Delta$. Alors on a effectivement

$$(\alpha \otimes \iota)(W) = (\iota \otimes \pi \otimes \iota)(\Delta \otimes \iota)(W) = W_{13}\,(\pi \otimes \iota)(W)_{23}$$

bien que ces formules n'aient pas de sens précis. De la même façon informelle on a

$$(\Delta \otimes \iota)\alpha = (\Delta \otimes \iota)(\iota \otimes \pi)\Delta = (\iota \otimes \iota \otimes \pi)(\iota \otimes \Delta)\Delta = (\iota \otimes \alpha)\Delta\ .$$

Nous voulons maintenant définir la notion de sous-groupe quantique fermé. Supposons qu'on a, dans le cadre classique, un homomorphisme continu $\rho : G_1 \to G$ entre groupes localement compacts. Ceci donne un morphisme (dans le sens de la Définition 4.4) $(\mathrm{L}^\infty(G),\Delta) \xrightarrow{\pi} (\mathrm{L}^\infty(G_1),\Delta_1)$ donné par $\pi(f)(p) = f(\rho(p))$ pour tout $f \in C_0(G)$ et $p \in G_1$. Son morphisme dual $\hat{\pi} : C^*(G_1) \to \mathrm{M}(C^*(G))$ est donné par $\hat{\pi}(\lambda_p) = \lambda_{\rho(p)}$ pour tout $p \in G_1$. Comment peut-on caractériser le fait que ρ identifie G_1 à un sous-groupe fermé de G ?

Proposition 4.9. *Soit* $\rho : G_1 \to G$ *un homomorphisme continu entre les groupes localement compacts* G_1 *et* G. *Alors les énoncés suivants sont équivalents.*

1. *L'homomorphisme* ρ *identifie* G_1 *avec un sous-groupe fermé de* G.

2. *Il existe un *-homomorphisme normal et fidèle $\mathcal{L}(G_1) \to \mathcal{L}(G)$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} C^*(G_1) & \xrightarrow{\hat{\pi}} & \mathrm{M}(C^*(G)) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{L}(G_1) & \longrightarrow & \mathcal{L}(G) \end{array}$$

La Proposition 4.9 donne une caractérisation d'un sous-groupe fermé uniquement en termes d'algèbres d'opérateurs. Ceci justifie la définition suivante.

Définition 4.10. Nous disons que (M_1, Δ_1) est un *sous-groupe quantique fermé* de (M, Δ) si on a un morphisme $(M, \Delta) \xrightarrow{\pi} (M_1, \Delta_1)$ tel qu'il existe un *-homomorphisme normal et fidèle $\hat{M}_1 \to \hat{M}$ qui rend le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \hat{A}_1^u & \xrightarrow{\hat{\pi}} & \mathrm{M}(\hat{A}^u) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \hat{M}_1 & \longrightarrow & \hat{M} \end{array}$$

De manière duale, nous disons que (M_1, Δ_1) est un *quotient quantique* de (M, Δ) si on a un morphisme $(M_1, \Delta_1) \xrightarrow{\pi} (M, \Delta)$ tel qu'il existe un *-homomorphisme normal et fidèle $M_1 \to M$ qui rend le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{array}{ccc} A_1^u & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{M}(A^u) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ M_1 & \longrightarrow & M \end{array}$$

Remarque 4.11. Si donc (M_1, Δ_1) est un quotient quantique de (M, Δ), on réalise M_1 comme sous-algèbre de von Neumann de M telle que Δ_1 est la restriction de Δ à M_1. Dans l'appendice de [10] nous démontrons la réciproque suivante.

Soit (M, Δ) un groupe quantique localement compact et $M_1 \subset M$ une sous-algèbre de von Neumann telle que $\Delta(M_1) \subset M_1 \otimes M_1$. Alors, les énoncés suivants sont équivalents.

1. Définissant Δ_1 comme la restriction de Δ à M_1, (M_1, Δ_1) est un groupe quantique localement compact (et donc un quotient quantique de (M, Δ)).
2. $R(M_1) = M_1$ et $\tau_t(M_1) = M_1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où R est l'antipode unitaire et (τ_t) le groupe d'échelle de (M, Δ).

Ayant défini les notions de sous-groupe quantique et quotient quantique nous pouvons définir les extensions.

Définition 4.12. Nous disons que

$$e \longrightarrow (M_1, \Delta_1) \xrightarrow{\pi_1} (M, \Delta) \xrightarrow{\hat{\pi}_2} (\hat{M}_2, \hat{\Delta}_2) \longrightarrow e$$

est une *suite exacte courte* de groupes quantiques localement compacts si

1. (M_1, Δ_1) est un quotient quantique de (M, Δ),
2. $(\hat{M}_2, \hat{\Delta}_2)$ est un sous-groupe quantique fermé de (M, Δ),

3. $\pi_1(M_1) = M^\mu$ où $\mu : M \to M \otimes \hat{M}_2$ est la coaction associée au morphisme $\hat{\pi}_2$ par le Théorème 4.8.

Dans ce cas-là nous disons que (M, Δ) est une *extension* de (M_1, Δ_1) par $(\hat{M}_2, \hat{\Delta}_2)$.

Remarque 4.13. Il est donc clair que la donnée d'une suite exacte courte

$$e \longrightarrow (M_1, \Delta_1) \xrightarrow{\pi_1} (M, \Delta) \xrightarrow{\hat{\pi}_2} (\hat{M}_2, \hat{\Delta}_2) \longrightarrow e$$

revient à donner des *-homomorphismes normaux et fidèles $\pi_1 : M_1 \to M$ et $\pi_2 : M_2 \to \hat{M}$ tel que

1. $\Delta \pi_1 = (\pi_1 \otimes \pi_1)\Delta_1$ et $\hat{\Delta}\pi_2 = (\pi_2 \otimes \pi_2)\Delta_2$,
2. $\pi_1(M_1) = M^\mu$ où $\mu : M \to M \otimes \hat{M}_2$ est comme dans la définition précédente.

C'est cette définition que nous avons donnée dans [7].

Remarque 4.14. Soit $(\hat{M}_2, \hat{\Delta}_2)$ un sous-groupe quantique fermé de (M, Δ) donné par le morphisme $(M, \Delta) \xrightarrow{\hat{\pi}_2} (\hat{M}_2, \hat{\Delta}_2)$. On peut alors définir la notion de *sous-groupe quantique normal* et démontrer que $(\hat{M}_2, \hat{\Delta}_2)$ est un sous-groupe quantique fermé normal de (M, Δ) si et seulement si il existe un quotient quantique (M_1, Δ_1) de (M, Δ) tel que la suite

$$e \longrightarrow (M_1, \Delta_1) \xrightarrow{\pi_1} (M, \Delta) \xrightarrow{\hat{\pi}_2} (\hat{M}_2, \hat{\Delta}_2) \longrightarrow e$$

soit exacte. Voir la première partie de [8] pour les détails.

De manière heuristique le résultat principal de [7] signifie que les extensions de (M_1, Δ_1) par $(\hat{M}_2, \hat{\Delta}_2)$ sont données par les *biproduits croisés à cocycles* de (M_1, Δ_1) et (M_2, Δ_2). Si on veut décrire dans le cas classique une extension G de G/H par H à l'aide d'une action et d'un 2-cocycle, on commencera par prendre une section borélienne $G/H \to G$. Une telle section existe toujours si les groupes localement compacts en question ont une base d'ouverts dénombrable.

Nous ne savons pas si l'analogue d'une telle section borélienne existe toujours pour les suites exactes courtes de groupes quantiques localement compacts *à prédual séparable*. Par contre, nous savons démontrer l'existence d'une telle section dans d'importants cas particuliers. Nous introduisons donc une terminologie pour les extensions qui permettent une section borélienne.

Définition 4.15. Nous disons que l'extension

$$e \longrightarrow (M_1, \Delta_1) \xrightarrow{\pi_1} (M, \Delta) \xrightarrow{\hat{\pi}_2} (\hat{M}_2, \hat{\Delta}_2) \longrightarrow e$$

est *clivée* s'il existe un unitaire $X \in M_2 \otimes M$ tel que $(\iota \otimes \mu)(X) = (W_2)_{13} X_{12}$, où $\mu : M \to M \otimes \hat{M}_2$ est la coaction associée à $\hat{\pi}_2$.

Théorème 4.16. *Chaque extension clivée de (M_1, Δ_1) par $(\hat{M}_2, \hat{\Delta}_2)$ est donnée par un biproduit croisé à cocycles de (M_1, Δ_1) et (M_2, Δ_2). Inversement chaque biproduit croisé à cocycles donne une extension clivée.*

Remarque 4.17. Nous n'expliquerons pas dans ce texte la notion d'un biproduit croisé à cocycles de groupes quantiques localement compacts. Cette notion a été introduite dans [7]. Pour pouvoir construire un biproduit croisé à cocycles comme groupe quantique localement compact, il faut étudier les produits croisés à cocycles et leur théorie modulaire. Ceci constitue donc une partie importante de l'article [7]. Le cas spécial d'un biproduit croisé à cocycles de groupes *non-quantiques* localement compacts sera expliqué plus loin. Cela donnera déjà une première idée des formules impliquées.

Nous verrons plus loin que les extensions d'un groupe localement compact $(\mathrm{L}^\infty(G_1), \Delta_1)$ par le dual d'un groupe localement compact $(\mathcal{L}(G_2), \hat{\Delta}_2)$ jouent un rôle particulièrement important pour construire des *exemples de groupes quantiques localement compacts.* Il est donc intéressant d'avoir le résultat suivant.

Proposition 4.18. *Si G_1, G_2 sont des groupes localement compacts avec une base d'ouverts dénombrable, toute extension*

$$e \longrightarrow (\mathrm{L}^\infty(G_1), \Delta_1) \xrightarrow{\pi_2} (M, \Delta) \xrightarrow{\hat{\pi}_1} (\mathcal{L}(G_2), \hat{\Delta}_2) \longrightarrow e \tag{3}$$

est clivée. Par le théorème 4.16 une telle extension est donnée par un biproduit croisé à cocycles de G_1 et G_2.

Dans [8] en collaboration avec Leonid Vainerman et dans [11, 12] en collaboration avec Saad Baaj et Georges Skandalis, nous étudions en détail plusieurs aspects de la théorie des extensions de la forme (3).

Tous les groupes localement compacts que nous étudions désormais ont une *base d'ouverts dénombrable.*

Définition 4.19. Nous appelons *couple assorti* une paire G_1, G_2 de sous-groupes fermés d'un groupe localement compact G tels que

$$G_1 \cap G_2 = \{e\} \quad \text{et} \quad G_1 G_2 \quad \text{a un complément de mesure nulle dans } G \;.$$

Soit $G_1, G_2 \subset G$ un couple assorti. Nous expliquons d'abord comment construire, sans 2-cocycles, un groupe quantique localement compact à l'aide de ces données. Puis nous passons à la construction avec des 2-cocycles ce qui permet de décrire toutes les extensions de $(\mathrm{L}^\infty(G_1), \Delta_1)$ par $(\mathcal{L}(G_2), \hat{\Delta}_2)$.

Notation 4.20. Pour presque tout $x \in G$ nous définissons $p_1(x) \in G_1$ et $p_2(x) \in G_2$ tel que

$$x = p_1(x) p_2(x) \;.$$

Nous considérons l'action à gauche de G_2 sur G/G_2. L'application $G_1 \to G/G_2$ donne un isomorphisme $\mathrm{L}^\infty(G/G_2) \cong \mathrm{L}^\infty(G_1)$. Nous avons donc le produit croisé

$$M = G_2 \ltimes \mathrm{L}^\infty(G/G_2) = G_2 \ltimes \mathrm{L}^\infty(G_1) \;.$$

Nous pouvons représenter l'algèbre de von Neumann M sur l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(G_2 \times G_1)$ comme

$$M = \big(\, \alpha(\mathrm{L}^\infty(G_1)) \, \cup \, \mathcal{L}(G_2) \otimes 1 \, \big)''$$

où $\alpha(F)$ est l'opérateur de multiplication avec la fonction $\alpha(F)(s,g) = F(p_1(sg))$ pour presque tout $s \in G_2$, $g \in G_1$.

Alors, il existe une comultiplication Δ sur M telle que

$$\Delta\alpha = (\alpha \otimes \alpha)\Delta_1 \quad \text{et} \quad \Delta(\lambda_s \otimes 1) = \big((\lambda_s \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1)\big) \, \big((\alpha \otimes \iota)(X_s) \otimes 1\big)$$

où $X_s \in \mathrm{L}^\infty(G_1) \otimes \mathcal{L}(G_2)$ est donné par $X_s(g) = \lambda_{p_2(sg)}$.

Théorème 4.21. *La paire (M, Δ) est un groupe quantique localement compact. Ce groupe quantique est une extension de* $(\mathrm{L}^\infty(G_1), \Delta_1)$ *par* $(\mathcal{L}(G_2), \hat{\Delta}_2)$.

Nous appelons (M, Δ) le biproduit croisé *de G_1 et G_2.*

Remarque 4.22. Les extensions de $(\mathrm{L}^\infty(G_1), \Delta_1)$ par $(\mathcal{L}(G_2), \hat{\Delta}_2)$ données comme biproduits croisés de G_1 et G_2 doivent être considérées comme des *extensions scindées*.

Tous les ingrédients du groupe quantique (M, Δ) peuvent être calculés explicitement. En particulier le dual de (M, Δ) sera de nouveau un biproduit croisé, de G_2 et G_1 interchangés. L'unitaire multiplicatif de (M, Δ) est un opérateur de transformation sur $G_2 \times G_1 \times G_2 \times G_1$ qui est une *transformation pentagonale* dans le sens de [BS98]. Les opérateurs modulaires de (M, Δ) ainsi que le groupe d'échelle peuvent être calculés en termes des fonctions modulaires des groupes localement compacts G_1, G_2 et G.

Dans [7, 8, 11] nous avons étudié plusieurs exemples concrets de biproduits croisés et ceux-ci donnent des exemples de groupes quantiques localement compacts avec des propriétés parfois surprenantes. En particulier, dans [8] nous classifions les biproduits croisés de groupes de Lie de petite dimension et nous expliquons qu'on obtient de cette façon une grande proportion de groupes quantiques «de petite dimension».

Dans [11] nous étudions en collaboration avec Saad Baaj et Georges Skandalis les biproduits croisés d'un point de vue C*-algébrique.

Théorème 4.23. *Les C*-algèbres associées au biproduit croisé (M, Δ) sont données par les produits croisés réduits et pleins suivants :*

$$A = G_2 \,{}_r\!\ltimes C_0(G/G_2) \quad et \quad A^u = G_2 \,{}_p\!\ltimes C_0(G/G_2)\ .$$

En considérant la coaction de (A, Δ) sur lui-même par translation, nous avons

$$\hat{A} \,{}_r\!\ltimes A = (G_2 \times G_1) \,{}_r\!\ltimes C_0(G) \quad et \quad \hat{A} \,{}_p\!\ltimes A = (G_2 \times G_1) \,{}_p\!\ltimes C_0(G)\ ,$$

où l'action de $G_2 \times G_1$ sur G est donnée par $(s, g) \cdot x = sxg$.

Nous avons vu dans l'introduction que Baaj et Skandalis [BS93] et Baaj [Baa95] ont développé la théorie des unitaires multiplicatifs réguliers, respectivement semi-réguliers. Comme corollaire du dernier théorème nous avons le résultat suivant.

Corollaire 4.24. *L'unitaire multiplicatif du biproduit croisé (M, Δ) est*

1. *régulier si et seulement si $G = G_1G_2$ et l'application $G_1 \times G_2 \to G : (g, s) \mapsto gs$ est un homéomorphisme ;*
2. *semi-régulier si et seulement si G_1G_2 est un ouvert de G et $G_1 \times G_2 \to G_1G_2 \subset G$: $(g, s) \mapsto gs$ est un homéomorphisme.*

Nous remarquons que dans le cas où G est un groupe de Lie et $G_1, G_2 \subset G$ est un couple assorti, l'ensemble G_1G_2 est automatiquement ouvert dans G et $G_1 \times G_2 \to G_1G_2$ est un homéomorphisme. Les biproduits croisés associés sont donc semi-réguliers, mais pas forcément réguliers.

Dans [11] (en collaboration avec Saad Baaj et Georges Skandalis) nous avons donné des exemples de couples assortis tel que G_1G_2 est d'intérieur vide dans G. Ces exemples sont donnés par des *groupes adéliques*. Les biproduits croisés associés sont donc des groupes quantiques localement compacts non-semi-réguliers.

Pour pouvoir décrire toutes les extensions de $(\mathrm{L}^\infty(G_1), \Delta_1)$ par $(\mathcal{L}(G_2), \hat{\Delta}_2)$ il faut ajouter des 2-cocycles à la construction des biproduits croisés (voir le Théorème 4.16).

Définition 4.25. Une paire de 2-cocycles $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ pour le couple assorti $G_1, G_2 \subset G$ sont deux fonctions mesurables $\mathcal{U} : G_2 \times G_1 \times G_1 \to \mathbb{T}$ et $\mathcal{V} : G_2 \times G_2 \times G_1 \to \mathbb{T}$ telles que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U}(p_2(sg), h, k)\, \overline{\mathcal{U}}(s, gh, k)\, \mathcal{U}(s, g, hk)\, \overline{\mathcal{U}}(s, g, h) = 1 \;, \\
&\mathcal{V}(t, r, g)\; \overline{\mathcal{V}}(st, r, g)\; \mathcal{V}(s, tr, g)\; \overline{\mathcal{V}}(s, t, p_1(rg)) = 1 \;, \\
&\mathcal{U}(t, g, h)\, \overline{\mathcal{U}}(st, g, h)\, \mathcal{U}(s, p_1(tg), p_1(p_2(tg)h))\; \mathcal{V}(p_2(sp_1(tg)), p_2(tg), h)\; \overline{\mathcal{V}}(s, t, gh)\; \mathcal{V}(s, t, g) = 1 \;,
\end{aligned}$$

pour presque tout $s, t, r \in G_2$ et $g, h, k \in G_1$.

Ecrites telles quelles les formules de la définition précédente sont très peu compréhensibles. Néanmoins on peut voir que les deux premières formules expriment que $\mathcal{U}$ est un 2-cocycle pour l'action à droite de G_1 sur $G_1 \backslash G$ et que $\mathcal{V}$ est un 2-cocycle pour l'action à gauche de G_2 sur G/G_2. La troisième égalité est une relation de compatibilité entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. Nous allons voir plus loin comment il faut comprendre la notion de 2-cocycle pour un couple assorti.

Théorème 4.26. *Sur le produit croisé à cocycle $M = G_2 \; {}_{\mathcal{V}}\!\ltimes \mathrm{L}^\infty(G_1)$ il existe une structure de groupe quantique localement compact telle qu'on ait une extension*

$$e \longrightarrow (\mathrm{L}^\infty(G_1), \Delta_1) \longrightarrow (M, \Delta) \longrightarrow (\mathcal{L}(G_2), \hat{\Delta}_2) \longrightarrow e \;.$$

Nous appelons (M, Δ) *le* biproduit croisé à cocycles *de* G_1 *et* G_2*.*

Chaque extension de $(\mathrm{L}^\infty(G_1), \Delta_1)$ *par* $(\mathcal{L}(G_2), \hat{\Delta}_2)$ *est de cette forme.*

Deux biproduits croisés à cocycles donnent des extensions isomorphes si et seulement si

1. les couples assortis G_1, G_2 sont les mêmes ;
2. les paires de 2-cocycles sont cohomologues.

On peut donc, étant donné un couple assorti $G_1, G_2 \subset G$, définir un groupe de 2-cohomologie formé des paires $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ de 2-cocycles pour le couple assorti, divisé par le sous-groupe des 2-cocycles cohomologues à 0. Dans [7] nous avons appelé ce groupe de 2-cohomologie le *groupe d'extensions* du couple assorti $G_1, G_2 \subset G$.

Dans [12] Saad Baaj, Georges Skandalis et moi étudions plus systématiquement cette 2-cohomologie. Nous donnons une interprétation plus naturelle des relations de la Définition 4.25. Ceci permet de définir un groupe de cohomologie $H^n(\text{couple assorti}, \mathbb{T})$ associé au couple assorti $G_1, G_2 \subset G$ et à coefficients dans le G-module trivial $\mathbb{T}$ (où dans n'importe quel G-module polonais).

Dans [12] nous généralisons les travaux de Kac pour les groupes finis aux groupes localement compacts. En particulier nous démontrons qu'il y a une suite exacte longue

$$\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow H^n(G_1, \mathbb{T}) \oplus H^n(G_2, \mathbb{T}) \longrightarrow H^n(\text{couple assorti}, \mathbb{T}) \longrightarrow H^{n+1}(G, \mathbb{T}) \\
\longrightarrow H^{n+1}(G_1, \mathbb{T}) \oplus H^{n+1}(G_2, \mathbb{T}) \longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

qu'on appelle la *suite exacte de Kac*. Dans cette suite exacte $H^n(G, \mathbb{T})$ est la cohomologie mesurable de G à coefficients dans le G-module trivial $\mathbb{T}$, au sens de Moore.

La suite exacte de Kac permet de calculer explicitement le groupe d'extensions dans plusieurs exemples. Ainsi on peut expliquer dans [12] les calculs ad hoc de paires de 2-cocycles faits dans [8].

5 Coactions extérieures de groupes et de groupes quantiques

Dans [13] j'étudie les actions strictement extérieures de groupes quantiques sur des facteurs. Ce travail a deux motivations principales.

Wassermann a démontré comment des actions extérieures (ou minimales) de groupes (quantiques) compacts donnent des exemples intéressants de sous-facteurs dans l'esprit de Jones. Il est donc important de savoir quels sont les groupes quantiques compacts qui peuvent agir extérieurement sur un facteur. D'importants résultats dans cette direction ont été obtenus par Ueda, Izumi et Banica.

Dans [EN96] Enock et Nest ont montré comment des actions de groupes quantiques localement compacts apparaissent dans l'étude de sous-facteurs irréductibles, de profondeur 2 et d'indice infini. Si $N_0 \subset N_1$ est une telle inclusion qui satisfait une condition technique de régularité et si $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots$ est le tour de Jones associée, Enock et Nest construisent une structure de groupe quantique localement compact sur le commutant relatif $N_2 \cap N_0'$. Ils démontrent que ce groupe quantique agit extérieurement sur N_1 de sorte que N_0 soit l'algèbre des points fixes.

On se pose alors une question naturelle : tout groupe quantique localement compact peut-il apparaître dans la construction d'Enock et Nest ? De façon équivalente : tout groupe quantique localement compact peut-il agir extérieurement sur un facteur ?

Définition 5.1. Nous disons qu'une coaction $\alpha : N \to M \otimes N$ d'un groupe quantique localement compact sur un facteur N est *strictement extérieure* si

$$\hat{M} \ltimes N \, \cap \, \alpha(N)' = \mathbb{C} \, ,$$

c'est-à-dire si le commutant relatif de N dans le produit croisé est trivial.

Remarque 5.2. Une action (α_g) d'un groupe discret G sur un facteur N est strictement extérieure au sens de la Définition 5.1 ci-dessus si et seulement si α_g est un automorphisme extérieur de N pour tout $g \neq e$.

Cependant, pour qu'une action (α_g) d'un groupe localement compact G sur un facteur N soit strictement extérieure, il est nécessaire (mais en général non suffisant) que α_g soit un automorphisme extérieur pour tout $g \neq e$.

Dans [13] je réponds d'abord affirmativement à la question d'existence d'actions strictement extérieures des groupes localement compacts.

Théorème 5.3. *Chaque groupe localement compact G peut agir strictement extérieurement sur le facteur hyperfini II_1.*

Pour obtenir une telle action strictement extérieure on utilise la réalisation du facteur hyperfini II_1 comme complétion d'une algèbre de Clifford associée à un espace de Hilbert réel.

Comme on verra plus loin il n'est pas possible en général de trouver des coactions strictement extérieures d'un groupe quantique localement compact sur le facteur hyperfini II_1. En particulier la construction d'une action sur l'algèbre de Clifford ne peut pas être généralisée. Dans un sens qu'on précisera plus loin, on peut dire qu'un groupe quantique localement compact doit être plus unimodulaire que le facteur sur lequel il agit strictement extérieurement.

Shlyakhtenko a donné dans [Shl97] une version «libre» de l'algèbre de Clifford. Sa construction des *algèbres d'Araki-Woods libres* donne lieu à beaucoup d'exemples de facteurs de type III.

Théorème 5.4. *Il existe un facteur Araki-Woods libre N de type III_1 tel que chaque groupe quantique localement compact puisse agir strictement extérieurement sur N.*

Une première classification des facteurs est due à Murray et von Neumann qui distinguaient les facteurs de type I, II_1, II_∞ et III. Connes a fait une classification plus fine des facteurs de type III en type III_λ pour $0 \leq \lambda \leq 1$. Les groupes quantiques localement compacts peuvent-ils coagir strictement extérieurement sur des facteurs de type III_λ $(0 < \lambda < 1)$, II_∞ ou II_1 ? Il y a une obstruction à l'existence de telles coactions.

Définition 5.5. Soit (M, Δ) un groupe quantique localement compact et soit (τ_t) son groupe d'échelle. Nous définissons

$$T(M, \Delta) = \{t \in \mathbb{R} \mid \text{il existe un unitaire } u \in M \text{ tel que } \tau_t = \operatorname{Ad} u \text{ et } \Delta(u) = u \otimes u\} .$$

Nous appelons $T(M, \Delta)$ l'invariant T du groupe quantique (M, Δ).

Nous rappelons que Connes a donné la définition suivante de l'invariant T d'une algèbre de von Neumann N. Fixons un poids normal semi-fini fidèle φ sur N et notons (σ_t) son groupe modulaire. Alors,

$$T(N) = \{t \in \mathbb{R} \mid \text{il existe un unitaire } u \in N \text{ tel que } \sigma_t = \operatorname{Ad} u \} .$$

Connes a démontré que l'invariant $T(N)$ ne dépend pas du choix de φ.

Nous allons voir maintenant comment l'invariant $T(M, \Delta)$ est lié à l'invariant $T(N)$ d'un facteur.

Théorème 5.6. *Soit (M, Δ) un groupe quantique localement compact qui coagit strictement extérieurement sur un facteur N. Alors,*

1. *l'invariant $T(N)$ du facteur N est inclus dans $T(M, \Delta)$;*
2. *si N est un facteur II_∞, il existe un groupe à un paramètre (ρ^{it}) d'unitaires dans M tel que $\tau_t = \operatorname{Ad} \rho^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\Delta(\rho) = \rho \otimes \rho$;*
3. *si N est un facteur II_1, le groupe d'échelle est trivial.*

Dans le théorème suivant nous constatons qu'en général l'invariant $T(M, \Delta)$ est la seule obstruction pour pouvoir coagir sur des facteurs de certains types.

Théorème 5.7. *Soit (M, Δ) un groupe quantique localement compact.*

1. *Si $t_0 \in T(M, \Delta)$, alors (M, Δ) peut coagir strictement extérieurement sur l'unique facteur Araki-Woods libre de type III_λ avec $0 < \lambda < 1$ et $|t_0| = \frac{2\pi}{|\log \lambda|}$.*

2. *S'il existe un groupe à un paramètre* (ρ^{it}) *d'unitaires dans* M *tel que* $\tau_t = \operatorname{Ad}\rho^{it}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $\Delta(\rho) = \rho \otimes \rho$, *alors* (M, Δ) *peut coagir strictement extérieurement sur le facteur* $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\infty) \otimes \mathrm{B}(K)$ *de type* II_∞*, où* $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\infty)$ *est le facteur du groupe libre avec une infinité de générateurs.*
3. *Si le groupe d'échelle* (τ_t) *est trivial,* (M, Δ) *peut coagir strictement extérieurement sur le facteur* $\mathcal{L}(\mathbb{F}_\infty)$ *de type* II_1*.*
4. *Si* Γ *est un sous-groupe dénombrable dense de* $\mathbb{R}$ *et si* $\Gamma \subset T(M, \Delta)$*, alors* (M, Δ) *peut coagir strictement extérieurement sur un facteur de type* III_0 *dont le flot des poids est donné par l'action de* $\mathbb{R}$ *sur le groupe dual* $\hat{\Gamma}$*.*

Les facteurs Araki-Woods libres sont très loin d'être moyennables. Passons donc à l'étude de coactions strictement extérieures de groupes quantiques sur des *facteurs moyennables* (ou injectifs, selon la terminologie). On a d'abord un résultat évident.

Proposition 5.8. *Si un groupe quantique localement compact* (M, Δ) *coagit strictement extérieurement sur un facteur moyennable, alors* (M, Δ) *est co-moyennable.*

A ce stade, il n'est pas clair si l'implication inverse est vraie. Néanmoins ceci paraît très improbable comme on verra plus loin. Un important problème ouvert est de mieux comprendre quels groupes quantiques localement compacts peuvent coagir strictement extérieurement sur des facteurs moyennables.

Un premier résultat positif est le suivant.

Proposition 5.9. *Si* (M, Δ) *est le biproduit croisé associé à un couple assorti* G_1, G_2*, alors* (M, Δ) *peut coagir strictement extérieurement sur un facteur moyennable si et seulement si* (M, Δ) *est co-moyennable.*

Remarquons ici que nous avons démontré dans [9] (en collaboration avec Desmedt et Quaegebeur) qu'un biproduit croisé $M = G_2 \ltimes \mathrm{L}^\infty(G_1)$ est co-moyennable si et seulement si le groupe G_2 est moyennable. En particulier il existe donc des groupes quantiques localement compacts qui ne sont pas des algèbres de Kac et qui peuvent coagir strictement extérieurement sur des facteurs moyennables.

Un autre résultat positif est le théorème suivant.

Théorème 5.10. *Une algèbre de Kac compacte peut coagir strictement extérieurement sur le facteur hyperfini* II_1 *si et seulement si elle est co-moyennable.*

Si une algèbre de Kac discrète a une coreprésentation fidèle dans le facteur hyperfini II_1 *(en particulier, si elle est moyennable), alors elle peut coagir strictement extérieurement sur le facteur hyperfini* II_1*.*

Finalement nous indiquons pourquoi il paraît très improbable que l'implication inverse de la Proposition 5.8 soit vraie en général.

Dans [Wor87b] Woronowicz a construit le groupe quantique compact $SU_q(2)$ pour $0 < q < 1$. Ce groupe quantique est co-moyennable.

Proposition 5.11. *Si le groupe quantique compact* $SU_q(2)$ *coagit strictement extérieurement sur un facteur moyennable, alors le facteur hyperfini* II_1 *a un sous-facteur irréductible d'indice* $(q + q^{-1})^2$*.*

Un résultat important non publié de Popa dit qu'il existe des valeurs $\lambda > 4$ telles que le facteur hyperfini II_1 n'admette pas de sous-facteur irréductible d'indice λ. Comme $(q + q^{-1})^2$ parcourt toutes les valeurs plus grandes que 4, le résultat de Popa aurait comme corollaire que, pour certaines valeurs de q, $SU_q(2)$ n'a pas de coaction strictement extérieure sur un facteur moyennable.

Liste des publications présentées pour l'habilitation à diriger des recherches

[1] S. Vaes, A Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras. *Journal of Operator Theory* **46** (2001), 477–489.

[2] J. Kustermans & S. Vaes, Locally compact quantum groups. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* **33** (2000), 837–934.

[3] J. Kustermans & S. Vaes, Locally compact quantum groups in the von Neumann algebraic setting. *Mathematica Scandinavica* **92** (2003), 68–92.

[4] J. Kustermans & S. Vaes, The operator algebra approach to quantum groups. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* **97** (2000), 547–552.

[5] S. Vaes, The unitary implementation of a locally compact quantum group action. *Journal of Functional Analysis* **180** (2001), 426–480.

[6] S. Vaes & A. Van Daele, The Heisenberg commutation relations, commuting squares and the Haar measure on locally compact quantum groups. Dans *Operator algebras and mathematical physics : conference proceedings, Constanta (Romania), 2001*. Ed. J.-M. Combes, J. Cuntz, G.A. Elliott, G. Nenciu, H. Siedentop et S. Stratila. Theta Foundation, Bucarest (2003), pp. 379–400.

[7] S. Vaes & L. Vainerman, Extensions of locally compact quantum groups and the bicrossed product construction. *Advances in Mathematics* **175** (2003), 1–101.

[8] S. Vaes & L. Vainerman, On low-dimensional locally compact quantum groups. Dans *Locally Compact Quantum Groups and Groupoids. Proceedings of the Meeting of Theoretical Physicists and Mathematicians, Strasbourg, February 21 - 23, 2002.*, Ed. L. Vainerman, IRMA Lectures on Mathematics and Mathematical Physics, Walter de Gruyter, Berlin, New York (2003), pp. 127–187.

[9] P. Desmedt, J. Quaegebeur & S. Vaes, Amenability and the bicrossed product construction. *Illinois Journal of Mathematics* **46** (2002), 1259–1277.

[10] S. Baaj & S. Vaes, Double crossed products of locally compact quantum groups. *Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu*, à paraître.

[11] S. Baaj, G. Skandalis & S. Vaes, Non-semi-regular quantum groups coming from number theory. *Communications in Mathematical Physics* **235** (2003), 139-167.

[12] S. Baaj, G. Skandalis & S. Vaes, Measurable Kac cohomology for bicrossed products. *Transactions of the American Mathematical Society*, à paraître.

[13] S. Vaes, Strictly outer actions of groups and quantum groups. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*, à paraître.

Autres publications

[14] S. Vaes, A new approach to induction and imprimitivity results. *Prépublication*

[15] S. Vaes, Induction of C*-algebra coactions. Dans *Non-commutative Geometry, September 2004*, Oberwolfach Reports, à paraître.

[16] S. Vaes, États quasi-libres libres et facteurs de type III (d'après D. Shlyakhtenko). Dans *Séminaire Bourbaki, exp. 937*, à paraître dans *Astérisque*.

[17] S. Vaes & A. Van Daele, Hopf C*-algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society (3)* **82** (2001), 337–384.

[18] J. Kustermans & S. Vaes, A simple definition for locally compact quantum groups. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Série I* **328** (1999), 871–876.

[19] S. Vaes, Examples of locally compact quantum groups through the bicrossed product construction. Dans *Proceedings of the XIIIth International Congress of Mathematical Physics, Imperial College, London, 2000.* Editors A. Grigoryan, A. Fokas, T. Kibble and B. Zegarlinski, International Press of Boston, Somerville MA (2001), pp. 341–348.

[20] J. Kustermans, S. Vaes, L. Vainerman, A. Van Daele & S.L. Woronowicz, Locally compact quantum groups. Dans *Lecture Notes School/Conference on Noncommutative Geometry and Quantum groups, Warsaw, 2001.* Banach Centre Publications, à paraître.

[21] S. Vaes, Locally compact quantum groups. *Thèse de doctorat*, K.U.Leuven, 2001.

Références

[Baa95] S. Baaj, Représentation régulière du groupe quantique des déplacements de Woronowicz. *Astérisque* **232** (1995), 11–48.

[BS93] S. Baaj & G. Skandalis, Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C*-algèbres. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* **26** (1993), 425–488.

[BS98] S. Baaj & G. Skandalis, Transformations pentagonales. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **327** (1998), 623–628.

[Com68] F. Combes, Poids sur une C*-algèbre. *J. Math. Pures Appl.* (9) **47** (1968), 57–100.

[Dri86] V. G. Drinfel'd, Quantum groups. *Proceedings ICM Berkeley* (1986), 798–820.

[Eno77] M. Enock, Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac. *J. Funct. Anal.* **26** (1977), 16–47.

[EN96] M. Enock & R. Nest, Irreducible inclusions of factors, multiplicative unitaries and Kac algebras. *J. Funct. Anal.* **137** (1996), 466–543.

[ES75] M. Enock & J.-M. Schwartz, Une dualité dans les algèbres de von Neumann. *Supp. Bull. Soc. Math. France* Mémoire **44** (1975), 1–144.

[ES92] M. Enock & J.-M. Schwartz, Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups. Springer-Verlag, Berlin (1992).

[Haa75] U. Haagerup, Normal weights on W*-algebras. *J. Funct. Anal.* **19** (1975), 302–317.

[Haa78] U. Haagerup, On the dual weights for crossed products of von Neumann algebras. I, II. *Math. Scand.* **43** (1978), 99–118, 119–140.

[Kac61] G.I. Kac, Generalization of the group principle of duality. *Soviet Math. Dokl.* **2** (1961), 581–584.

[Kac65] G.I. Kac, Ring groups and the principle of duality, I, II. *Trans. Moscow Math. Soc.* (1963), 291–339, (1965), 94–126.

[Kac68] G.I. Kac, Extensions of groups to ring groups. *Math. USSR Sbornik* **5** (1968), 451–474.

[KP64] G.I. Kac & V.G. Paljutkin, Example of a ring group generated by Lie groups (Russian). *Ukr. Math. J.* **16**, No.1 (1964), 99–105.

[KV74] G.I. Kac & L.I. Vainerman, Nonunimodular ring-groups and Hopf-von Neumann algebras. *Math. USSR, Sbornik* **23** (1974), 185–214.

[KK03] E. Koelink & J. Kustermans, A locally compact quantum group analogue of the normalizer of $SU(1,1)$ in $SL(2,\mathbb{C})$. *Comm. Math. Phys.* **233** (2003), 231–296.

[Kus01] J. Kustermans, Locally compact quantum groups in the universal setting.*Int. J. Math.* **12** (2001), 289–338.

[KVD97] J. Kustermans & A. Van Daele, C*-algebraic quantum groups arising from algebraic quantum groups. *Internat. J. Math.* **8** (1997), 1067–1139.

[Maj91] S. Majid, Hopf-von Neumann algebra bicrossproducts, Kac algebra bicrossproducts, and the classical Yang-Baxter equations. *J. Funct. Anal.* **95** (1991), 291–319.

[MN94] T. Masuda & Y. Nakagami, A von Neumann algebra framework for the duality of the quantum groups. *Publ. RIMS, Kyoto University* **30** (1994), 799–850.

[MNW03] T. Masuda, Y. Nakagami & S.L. Woronowicz, A C*-algebraic framework for quantum groups. *Internat. J. Math.* **14** (2003), 903–1001.

[Ros90] M. Rosso, Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif. *Duke Math. J.* **61** (1990), 11–40.

[Shl97] D. Shlyakhtenko, Free quasi-free states. *Pac. J. Math.* **177** (1997), 329–368.

[Tak70] M. Takesaki, Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications. *Lecture Notes in Mathematics* **128**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[VD98] A. Van Daele, An algebraic framework for group duality. *Adv. in Math.* **140** (1998), 323–366.

[VD01] A. Van Daele, The Haar measure on some locally compact quantum groups. *Prépublication K.U.Leuven* (2001).

[Wor80] S.L. Woronowicz, Pseudospaces, pseudogroups and Pontrjagin duality. Proceedings of the International Conference on Mathematical Physics, Lausanne, 1979. *Lecture Notes in Physics* **116** (1980), 407–412.

[Wor87a] S.L. Woronowicz, Compact matrix pseudogroups. *Commun. Math. Phys.* **111** (1987), 613–665.

[Wor87b] S.L. Woronowicz, Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus. *Publ. RIMS, Kyoto University* **23** (1987), 117–181.

[Wor91] S.L. Woronowicz, Quantum $E(2)$ group and its Pontryagin dual. *Lett. Math. Phys.* **23** (1991), 251–263.

[Wor96] S.L. Woronowicz, From multiplicative unitaries to quantum groups. *Int. J. Math.* **7** (1996), 127–149.

[Wor98] S.L. Woronowicz, Compact quantum groups, in 'Symétries quantiques' (Les Houches, 1995). North-Holland, Amsterdam (1998), 845–884.

[Wor01] S.L. Woronowicz, Quantum $az+b$ group on complex plane. *Internat. J. Math.* **12** (2001), 461–503.

[WZ02] S.L. Woronowicz & S. Zakrzewski, Quantum $ax+b$ group. *Rev. Math. Phys.* **14** (2002), 797–828.