Etude de la solution stationnaire de l'équation Y(n+1)=a(n)Y(n)+b(n) à coefficients aléatoires

Benoîte de Saporta

▶ **To cite this version:**

Benoîte de Saporta. Etude de la solution stationnaire de l'équation Y(n+1)=a(n)Y(n)+b(n) à coefficients aléatoires. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2004. Français. NNT : . tel-00007497v2

HAL Id: tel-00007497

https://theses.hal.science/tel-00007497v2

Submitted on 7 Dec 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

T H È S E

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de **DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I**

Mention Mathématiques et Applications

PAR

Benoîte de Saporta

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

Etude de la solution stationnaire de l'équation $Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n$ ***à coefficients aléatoires***

Soutenue le 10 novembre 2004 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M.	P. Bougerol	Rapporteur	Université de Paris VI
M.	C. Goldie	Rapporteur	University of Sussex
M.	Y. Guivarc'h	Examinateur	Université de Rennes 1
M.	X. Guyon	Examinateur	Université de Paris I
M.	E. Le Page	Examinateur	Université de Bretagne Sud
M.	J. F. Yao	Directeur de Recherches	Université de Rennes 1

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude envers mon directeur de thèse Jian-Feng Yao pour la qualité de son encadrement. Je le remercie tout particulièrement pour sa disponibilité, sa bonne humeur et son optimisme qui m'ont encouragée tout au long de ces trois années de thèse.

Je remercie mes rapporteurs, Philippe Bougerol et Charles Goldie pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture de cette thèse ainsi que pour leur présence lors de ma soutenance. Merci également à Xavier Guyon et Emile Le Page pour leur participation au jury, et tout particulièrement à Yves Guivarc'h. Sans sa collaboration et son intérêt pour ce travail, cette thèse n'aurait pas sa forme actuelle.

J'ai beaucoup apprécié ces années passées à l'IRMAR pour les excellentes conditions de travail et la bienveillance de tout le personnel. Merci enfin à tous les jeunes chercheurs de Rennes et d'ailleurs avec qui j'ai partagé tant de moments agréables : mes collègues de bureau Manuela, Ronan et surtout Sandrine qui a toujours une réponse à mes questions bêtes ; Glenn qui m'a bien aidée à comprendre les mystères des exposants de Lyapounov ; Solen, Gweno, Vincent, Céline, Greg, Elise, Anne-France et les autres merci pour toutes nos longues conversations et pour votre amitié ! Merci aussi à la nouvelle gńération Hélène et Marie-Amélie pour leur coup de main bienvenu dans l'organisation du pot.

Table des matières

Remerciements **3**

Introduction **9**
Présentation du modèle 9
Solution stationnaire 9
Moments de la loi stationnaire 10
Contribution 11
Plan de la thèse 12

1 Renouvellement multidimensionnel **15**
1.1 Introduction 15
1.2 La théorie classique du renouvellement 16
1.2.1 Support positif 16
1.2.2 Support sur $\mathbb{R}$ 19
1.3 Théorie du renouvellement sur $(\mathbb{R}_+)^p$ 20
1.3.1 Notations et définitions 21
1.3.2 La théorie de Perron-Frobenius 22
1.3.3 Les résultats 23
1.4 Théorie du renouvellement sur $\mathbb{R}^p$ 25
1.5 L'équation sans second membre 27
1.5.1 Points d'accroissement 27
1.5.2 Démonstration du théorème 1.1 28
1.6 Théorie du potentiel 32
1.6.1 Définitions et notations 32
1.6.2 Principe du maximum 33
1.6.3 Application à la fonction de renouvellement 36
1.7 Preuve des théorèmes de renouvellement 37

2 L'équation à coefficients Markoviens **43**
2.1 Origines du modèle et travaux antérieurs 43
2.2 Résultats mathématiques 45
2.2.1 Les résultats de C. M. Goldie 46
2.2.2 Le cas markovien 47
2.3 Les équations de renouvellement 49
2.3.1 Cas positif 50
2.3.2 Cas général 51

2.4 Application du théorème de renouvellement 52
2.4.1 Finitude de la fonction de renouvellement 52
2.4.2 Identification de Z 55
2.4.3 Intégrablilité de G 56
2.4.4 Queue de la distribution 59
2.5 La somme des limites est non nulle 60
2.5.1 Cas particulier : b_0 est de signe constant 60
2.5.2 Minoration de $\mathbb{P}(|R_1| > t)$ 61
2.6 Etude du produit $a_0 \cdots a_{1-n}$ 64
2.6.1 Définitions et notations 64
2.6.2 Etude du processus d'échelle 66
2.6.3 Comportement asymptotique du maximum 68
2.6.4 Conclusion 69
2.7 Démonstration du théorème 2.2 69
2.7.1 Irréductibilité 70
2.7.2 Cas ${}^tP$ ℓ-irréductible 71
2.7.3 Cas ${}^tP$ ℓ-réductible 73
2.7.4 Non nullité des limites 73
2.8 Irréductibilité 76
2.9 Sur l'indépendance des suites (a_n) et (b_n) 80
2.10 Exemple de deux régimes 80
2.10.1 Critère d'existence et calcul de l'exposant κ 81
2.10.2 Quelques simulations 83

3 Queue de la distribution, cas continu **85**
3.1 Introduction 85
3.2 Diffusion linéaire à régime markovien 86
3.2.1 Définitions et notations 86
3.2.2 Propriétés 88
3.2.3 Le théorème principal 89
3.3 Etude d'un opérateur associé 90
3.3.1 Rayon spectral 91
3.3.2 Choix du pas de discrétisation 93
3.4 Détermination de l'exposant κ 96
3.5 Les équations de renouvellement 98
3.5.1 Notations 98
3.5.2 Les équations de renouvellement 99
3.6 Application du théorème de renouvellement 100
3.6.1 Arithméticité de F 101
3.6.2 Finitude de la fonction de renouvellement 104
3.6.3 Identification de Z 106
3.6.4 Intégrabilité de G 107
3.6.5 Queue de la distribution 107
3.7 La limite est non nulle 107
3.7.1 Minoration de $\nu\{x : |x| > t\}$ 107
3.7.2 Etude d'une marche aléatoire 110

4 Résultats multidimensionnels 115
4.1 Introduction . . . 115
4.2 Contexte et notations . . . 115
4.2.1 Notations . . . 115
4.2.2 Cadre du problème . . . 116
4.2.3 Quelques opérateurs . . . 118
4.3 Les résultats de H. Kesten . . . 120
4.3.1 Résultats . . . 120
4.3.2 Un théorème de renouvellement . . . 121
4.3.3 Principes de la démonstration . . . 123
4.4 Les résultats de E. LePage . . . 125
4.4.1 Notations et Résultats . . . 125
4.4.2 Etude d'un opérateur auxiliaire . . . 127
4.4.3 Application du théorème de renouvellement . . . 128
4.4.4 La limite est non nulle . . . 129

5 Nouveau théorème multidimensionnel 133
5.1 Introduction . . . 133
5.2 La condition i-p . . . 134
5.2.1 Définitions . . . 134
5.2.2 L'ensemble limite . . . 135
5.2.3 Arithméticité . . . 138
5.2.4 Exemples en dimension 2 . . . 140
5.3 Présentation des résultats de [33] . . . 142
5.4 Le nouveau théorème . . . 145
5.4.1 Enoncé . . . 145
5.4.2 Un premier exemple en dimension 2 . . . 146
5.4.3 L'exemple de [44] . . . 147
5.5 L'équation de renouvellement . . . 149
5.6 Propriétés de l'opérateur $\mathcal{Q}$ sur la sphère . . . 150
5.6.1 Unicité de la mesure invariante . . . 151
5.6.2 Ergodicité . . . 154
5.7 Application du théorème de renouvellement . . . 155
5.7.1 Preuve de la condition I1 . . . 156
5.7.2 Preuve de la condition I2 . . . 157
5.7.3 Preuve de la condition I3 . . . 158
5.7.4 Preuve de la condition I4 . . . 159
5.7.5 Intégrabilité de G . . . 160
5.7.6 Conclusion . . . 163
5.8 La limite est non nulle . . . 163
5.8.1 Une chaîne de Markov . . . 163
5.8.2 La chaîne relativisée . . . 166
5.8.3 Encore un résultat de renouvellement . . . 167
5.8.4 Conclusion . . . 168
5.9 Démonstration du théorème 5.4 . . . 171

6 Application au modèle AR(d) 175
6.1 Introduction 175
6.2 Hypothèses et résultats de [46] 176
6.3 Application du nouveau théorème 177
6.4 Exemple en dimension $d = 2$ 179

Conclusion 181
Bilan 181
Perspectives 181

Index 183
Index Général 183
Index des Notations 185

Bibliographie 188

Introduction

Présentation du modèle

Cette thèse est consacrée à l'étude de l'équation récursive aléatoire

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad Y_n \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 1. \tag{1}$$

où (a_n, b_n) est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{G} \times \mathbb{R}^d$, où $\mathcal{G} = Gl(d, \mathbb{R})$ est le groupe des matrices réelles carrées, inversibles de taille $d \times d$, et $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne notée $\| \cdot \|$.

La suite de variables aléatoires (Y_n) ainsi définie porte le nom de processus auto-régressif d'ordre 1, ou AR(1) en abrégé, dans la littérature statistique. C'est un modèle très utilisé dans la modélisation des séries chronologiques par exemple, lorsque l'équation est scalaire ($d = 1$). L'équation vectorielle d'ordre $d \geq 2$ contient le cas des processus auto-régressifs d'ordre d, ou modèles AR(d) qui sont des processus scalaires définis par une équation récursive d'ordre d :

$$X_{n+1} = a_{n,1} X_n + a_{n,2} X_{n-1} + \cdots + a_{n,d} X_{n+1-d} + b_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad X_n \in \mathbb{R}.$$

On peut aussi mettre sous forme auto-régressive vectorielle les modèles GARCH (Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) introduits par R. F. Engle, [24] et T. Bollerslev, [8] qui modélisent des séries chronologiques dont la variance conditionnelle dépend du temps.

Plus généralement, les auto-régressions vectorielles apparaissent dans l'étude des marches aléatoires en milieu aléatoire ou des processus de branchement en milieu aléatoire avec immigration.

Solution stationnaire

Ce modèle a été très étudié lorsque la suite (a_n, b_n) est indépendante et identiquement distribuée (iid en abrégé). Dans ce cas, pour une condition initiale Y_0 fixée, la solution de l'équation (1) est donnée par

$$Y_n = b_{n-1} + a_{n-1} b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 b_0 + a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_0 Y_0.$$

Comme la suite (a_n, b_n) est iid, on peut inverser l'ordre de ces produits : Y_n a donc la même loi que la variable aléatoire

$$R_n = a_1 \cdots a_n Y_0 + \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdots a_{k-1} b_k.$$

Sous des hypothèses assez faibles, la suite (R_n) ainsi définie est presque sûrement convergente. En effet, si on suppose que la partie positive du logarithme de a_1 est intégrable :

$$\mathbb{E} \log^+ \|a_1\| < \infty,$$

alors la limite

$$\alpha = \lim \frac{1}{n} \log \|a_1 \cdots a_n\| = \inf \frac{1}{n} \log \|a_1 \cdots a_n\| = \inf \frac{1}{n} \mathbb{E} \log \|a_1 \cdots a_n\| \qquad (2)$$

existe et est constante presque sûrement. Le coefficient α s'appelle *premier exposant de Lyapounov* de la suite (a_n). Sous les hypothèses additionnelles suivantes :

$$\alpha < 0 \qquad \text{et} \qquad \exists \delta > 0 \ \text{ t.q. } \ \mathbb{E}\|b_1\|^\delta < \infty, \qquad (3)$$

la suite (R_n) converge presque sûrement vers la série

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 \cdots a_{k-1} b_k,$$

qui est alors bien définie et indépendante de la valeur initiale Y_0. La loi de R est donc l'unique loi stationnaire de l'équation (1). Remarquons qu'il suffit de supposer que $\mathbb{E} \log \|a_1\|$ est strictement négative pour avoir l'existence du coefficient α et sa stricte négativité.

Moments de la loi stationnaire

On s'intéresse en particulier aux moments de cette loi stationnaire. Quelle que soit la dimension, pour tout $s > 0$, on a :

$$\mathbb{E}\|R\|^s \leq \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\|a_1 a_2 \cdots a_{k-1}\|^s \mathbb{E}\|b_k\|^s \qquad \text{si } s < 1,$$

$$(\mathbb{E}\|R\|^s)^{1/s} \leq \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{E}\|a_1 a_2 \cdots a_{k-1}\|^s)^{1/s} (\mathbb{E}\|b_k\|^s)^{1/s} \quad \text{si } s \geq 1.$$

La première inégalité découle de la concavité des fonctions puissance, et la seconde de l'inégalité de Hőlder. Supposons que b_0 a des moments à tout ordre. Alors, d'après de critère de Cauchy, dès que la quantité

$$k(s) = \lim_n (\mathbb{E}\|a_1 a_2 \cdots a_{n-1}\|^s)^{1/n}$$

est strictement inférieure à 1, les séries ci-dessus convergent et la loi stationnaire a un moment d'ordre s. En dimension 1, cette condition s'écrit simplement $k(s) = \mathbb{E}|a_0|^s < 1$.

Examinons de plus près cette condition. L'application qui à s associe $\log k(s)$ est convexe, et vaut 0 en 0. Donc on a trois cas possibles, illustrés par la figure 1 :

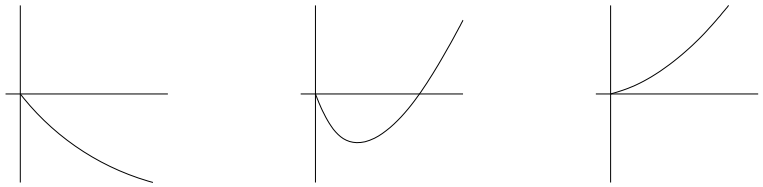


FIG. 1 – Convexité de $\log k(s)$, 3 cas possibles.

1. Pour tout $s > 0$, $k(s) < 1$ et R a un moment à tout ordre.

2. Il existe un unique $\kappa > 0$ tel que $k(\kappa) = 1$ et R a des moments d'ordre s pour au moins tout $s < \kappa$.

3. Pour tout $s > 0$, $k(s) > 1$.

En fait, le troisième cas est exclu. En effet, on peut montrer que la dérivée à droite en 0 de la fonction qui à s associe $\log k(s)$ est du même signe que le coefficient α, que l'on a supposé strictement négatif (hypothèse (3)) pour assurer l'existence de R.

L'étude précise du deuxième cas est intéressante pour les applications à la modélisation des séries financières. En effet certaines de ces séries ne sont pas de carré intégrable.

L'objet des travaux de H. KESTEN [44, 45], E. LEPAGE [47] et C. M. GOLDIE [30] sur lesquels nous reviendrons, est de prouver que dans le deuxième cas, la solution stationnaire R a en fait un moment d'ordre s si et seulement si $s < \kappa$, et qu'alors R a une queue polynômiale d'ordre κ, c'est à dire que la probabilité $t^\kappa \mathbb{P}(\|R\| > t)$ a une limite finie non nulle quand t tend vers l'infini. Le principal outil pour démontrer ce type de résultats est la théorie du renouvellement.

Contribution

Le but de cette thèse est d'étendre ces résultats au cas où la suite (a_n) n'est plus iid, mais une chaîne de Markov. La suite (Y_n) solution de l'équation (1) ainsi redéfinie s'appelle processus auto-regressif à régime markovien (Markov-switching autoregression en anglais). Ce modèle a été introduit par J. D. HAMILTON [37, 38]) et offre des possibilités nouvelles pour modéliser les séries chronologiques qui ont des régimes différents au cours du temps.

Sous une hypothèse de stationnarité, on peut étendre les suites (Y_n), (a_n) et (b_n) à l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, et en rajoutant une hypothèse d'intégrabilité, on peut montrer que l'équation (1) a encore une unique solution stationnaire que l'on

peut écrire sous forme de série comme

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 a_{-1} \cdots a_{n-k+1} b_{n-k}.$$

Cette fois-ci on ne peut plus inverser l'ordre des produits, c'est pourquoi des coefficients à indice négatif apparaissent. Les considérations sur les moments de R peuvent être facilement étendues du cas iid au cas markovien, et on se propose de montrer dans cette thèse que la queue de la solution stationnaire peut encore avoir un comportement polynômial sous certaines conditions.

La première partie de ce travail concerne le cas le plus simple où (a_n) est une chaîne de Markov scalaire ($d = 1$) sur un espace d'états fini. Cette étude nous a conduits à un système d'équations de renouvellement auquel les théorèmes usuels ne s'appliquent pas. On a donc développé une théorie du renouvellement pour ce type de systèmes. A l'aide de ce résultat, et en s'inspirant de la démarche de [47] et [30], on montre que la loi stationnaire de l'équation (1) a une queue polynômiale sous des hypothèses analogues à celles du cas iid. Les techniques ainsi développées ont aussi permis de traiter le cas d'une diffusion continue à régime markovien.

Dans une deuxième partie, on s'intéresse à l'équation (1) multidimensionnelle ($d > 1$). On se limite ici au cas indépendant. Dans ce cas, il est prouvé dans [44] un résultat valable pour les matrices à coordonnées positives ou ayant une densité. Une version complémentaire est donnée dans [47]. Elle est valable pour les matrices dont les produits ont une propriété de récurrence assez forte. On prosose ici une extension de ce dernier résultat où la condition de récurrence est très affaiblie. C'est encore un complémentaire du théorème de [44]. Ce résultat devrait pouvoir être étendu au cas markovien ultérieurement.

Plan de la thèse

Le plan de cette thèse est le suivant. Dans le chapitre 1, on développe une nouvelle théorie du renouvellement pour les systèmes. Dans le chapitre 2, on donne les résultats obtenus sur la queue de la distribution stationnaire de l'équation (1) lorsque la suite (a_n) est une chaîne de Markov scalaire. Le chapitre 3 donne une extension de ces résultats en temps continu.

On passe ensuite au cas multidimensionnel. Dans le chapitre 4, on rappelle en détail les théorèmes déjà existants, ainsi que les grandes lignes de leur démonstration. Dans le chapitre 5 on présente une nouvelle extension de ces résultats. Enfin, dans le chapitre 6 on donne une application à l'étude du modèle AR(d) .

N. B. Dans toute cette thèse, les théorèmes, propositions, lemmes et corollaires avec une numérotation simple sont des rappels de résultats déjà publiés dont on ne donne pas les démonstrations. On pourra les trouver dans les références bibliographiques correspondantes. Les théorèmes, propositions, lemmes et corollaires avec une double numérotation *chapitre.numéro* sont des résultats nouveaux dont la preuve est donnée intégralement.

On trouvera à la fin de cette thèse deux index regroupant les principaux mots-clé utilisés, ainsi que toutes les notations et un renvoi à la page où elles sont définies pour la première fois.

Chapitre 1

Théorème de renouvellement multidimensionnel

1.1 Introduction

Dans l'approche classique du renouvellement, on considère une suite (X_n) de variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune F. Par exemple, ces variables modélisent les durées de vie de différentes pièces de rechange intervenant dans la maintenance d'un appareil. Le *processus de renouvellement* (S_n) associé est la somme de ces variables :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

et correspond à la durée totale de fonctionnement de l'appareil après n renouvellements de la pièce considérée. On lui associe un processus de comptage :

$$N_t = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,\ t]}(S_k),$$

où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A. Ce processus correspond au nombre de renouvellements de la pièce jusqu'au temps t. La *fonction de renouvellement* est l'espérance de ce processus de comptage :

$$U(t) = \mathbb{E}(N_t).$$

Le but d'un théorème de renouvellement est de donner le comportement asymptotique de la fonction de renouvellement U en $+\infty$.

On peut également voir la théorie du renouvellement comme un problème purement analytique, sans lien avec des processus aléatoires. On parle alors d'équations de renouvellement. Une équation de renouvellement est une équation de la forme $Z = F * Z + G$, où F est une mesure, $*$ désigne le produit de convolution, G est une fonction mesurable bornée sur les compacts, et Z une fonction inconnue. On peut obtenir des informations sur la fonction inconnue Z du seul fait qu'elle vérifie

une équation de ce type. En effet, dans le cas classique l'unique solution de cette équation est $Z = U * G$ où U est la fonction de renouvellement associée à la probabilité F. Le but d'un théorème de renouvellement est alors de donner le comportement asymptotique de Z en fonction de F et G.

Il existe de multiples démonstrations du théorème de renouvellement pour chacune de ces deux approches. Ici, on privilégie l'approche analytique. Dans la partie 1.2, on fait des rappels plus précis de la théorie classique du renouvellement en dimension 1, exposée par W. Feller dans [25], chap. XI : on donne les théorèmes de renouvellement ainsi que les grandes lignes de leur démonstration. Dans la partie 1.3, on expose une généralisation de ces théorèmes au cas de systèmes d'équations de renouvellement lorsque toutes les mesures sont à support sur $\mathbb{R}_+ = [0,\ +\infty[$. On donne aussi les grandes étapes des démonstrations. Enfin dans la partie 1.4 on donne des théorèmes de renouvellement multidimensionnels généraux, lorsque les mesures considérées sont à support quelconque. Les parties 1.5, 1.6 et 1.7 sont consacrées à la démonstration intégrale des ces derniers théorèmes.

1.2 La théorie classique du renouvellement

Le théorie classique du renouvellement est exposée dans [25]. On y traite du cas standard où F est une probabilité à support sur $\mathbb{R}_+$ (F correspond alors à une durée de vie), puis du cas où F est à support sur toute la droite réelle. On en rappelle ici les résultats principaux ainsi que la méthode de démonstration.

1.2.1 Support positif

Soit F une probabilité à support sur $\mathbb{R}_+$ telle que $F(0) = 0$. On considérera F indifferemment comme une mesure ou commme une fonction de répartition, ie on notera $F(t) = F([0,\ t])$. Dans tout ce paragraphe, on ne considère que des fonctions qui sont nulles en dehors de $\mathbb{R}_+$. L'équation de renouvellement s'ecrit alors de la façon suivante :

$$Z(t) = F * Z(t) + G(t) = \int_0^t Z(t-s)F(ds) + G(t). \tag{1.1}$$

On note $\gamma = \int F(dx)$ l'espérance de F qui peut éventuellement être infinie. Dans ce cas on convient que $\gamma^{-1} = 0$. On pose $F^{(0)}(t) = \mathbb{1}_{t\geq 0}$, l'élément neutre pour le produit de convolution, et pour tout entier n, $F^{(n+1)} = F * F^{(n)}$ sont les itérées successives de F pour le produit de convolution.

Avec les notations de l'introduction, $F^{(n)}$ est la loi de S_n, donc l'espérance du processus de comptage N_t s'écrit comme la somme $\sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(t)$.

Définition 1 *La* fonction de renouvellement *associée à F est*

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}.$$

La fonction de renouvellement est bien définie, et elle est reliée à la solution Z de l'équation de renouvellement (1.1) par la propriété suivante.

Proposition 1
• *Pour tout $t \geq 0$, la fonction $U(t)$ est finie.*
• *Si G est bornée, alors la fonction $Z = U * G$ définie par*

$$Z(t) = \int_0^t G(t-s)U(ds)$$

est une solution de l'équation (1.1). C'est l'unique solution nulle en dehors de $\mathbb{R}_+$ et bornée sur les compacts.

On rappelle maintenant quelques définitions qui serviront dans toute la suite.

Définition 2 *Une mesure F est* arithmétique *si son support est inclus dans un sous-groupe discret $\lambda\mathbb{Z}$. Son* pas *est alors le plus grand λ ayant cette propriété.*

Définition 3 *Soit G une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $h > 0$, on note $\underline{m}_n(h)$ et $\overline{m}_n(h)$ respectivement les bornes inférieure et supérieure de G sur l'intervalle $[(n-1)h,\ nh]$ pour tout entier n dans $\mathbb{Z}$. On dit que G est* directement Riemann intégrable *si les deux séries*

$$\underline{\sigma}(h) = h\sum_{n\in\mathbb{Z}} \underline{m}_n(h), \qquad \overline{\sigma}(h) = h\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{m}_n(h)$$

sont absolument convergentes pour tout h et tendent vers une même limite finie quand h tend vers 0.

Si G est continue et bornée, on voit qu'elle est directement Riemann intégrable si et seulement si la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \max_{t\in[(n-1),\ n]} |G(t)|$$

converge. Si G est monotone, elle est directement Riemann intégrable si et seulement si elle est intégrable au sens usuel pour la mesure de Lebesgue.

On donne maintenant les deux formes du théorème de renouvellement classique. La première forme fait intervenir la fonction de renouvellement et la seconde traite de la solution de l'équation de renouvellement.

Théorème 1
• *Si F n'est pas arithmétique, alors pour tout $h > 0$, on a :*

$$U(t+h) - U(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{h}{\gamma}.$$

• *Si F est arithmétique, on a la même limite uniquement lorsque h est un multiple entier du pas λ.*

Remarque Ce résultat correspond à l'intuition en terme de renouvellement de pièces défectueuses. En effet, il dit que le nombre moyen de renouvellement d'une pièce pendant une période de durée h au bout d'un temps assez grand est égal à cette durée h divisée par la durée moyenne de fonctionnnement de la pièce.

Théorème 2 *Soit G une fonction directement Riemann intégrable nulle en dehors de $\mathbb{R}_+$. Alors si Z est solution de l'équation $Z = F * Z + G$, et que F n'est pas arithmétique, on a :*

$$Z(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty G(s)ds,$$

et si F est arithmétique de pas λ, alors on a :

$$Z(t+n\lambda) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\lambda}{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty} G(t+k\lambda).$$

La démonstration se fait en quatre étapes.

• On montre que les deux théorèmes sont équivalents en utilisant la définition de directement Riemann intégrable dans un sens, et une équation de renouvellement particulière avec $G = \mathbb{1}_{[t,t+h]}$ dans l'autre sens.

• On étudie les solutions de l'équation de renouvellement sans second membre $Z = F*Z$. Pour cela, on commence par étudier l'ensemble des points d'accroissement des $F^{(n)}$, c'est à dire l'ensemble des t réels tels que pour tout $\varepsilon > 0$ la différence $F^{(n)}(t+\varepsilon)-F^{(n)}(t-\varepsilon)$ soit strictement positive. C'est ici qu'intervient l'arithméticité éventuelle de F. On obtient les résultats suivants :

Lemme 1 *Si a et b sont des points d'accroissement des distributions F_1 et F_2 respectivement, alors $a+b$ est un point d'accroissement de $F_1 * F_2$.*

Lemme 2 *Soit F une distribution et Σ l'ensembles des points d'accroissement de tous les $F^{(n)}$.*

1. *Soit F non concentrée sur la demi-droite positive ou la demi-droite négative. Alors Σ est dense dans $\mathbb{R}$ si F n'est pas arithmétique, et $\Sigma = \lambda\mathbb{Z}$ si F est arithmétique de pas λ.*
2. *Soit F concentrée sur $\mathbb{R}_+$ mais pas à l'origine. Si F n'est pas arithmétique, alors Σ est* asymptotiquement dense à l'infini *au sens que pour tout $\varepsilon > 0$ et et tout t assez grand, l'intervalle $]t,\ t+\varepsilon[$ contient des points de Σ. Si F est arithmétique de pas λ, alors Σ contient tous les points $n\lambda$ pour n assez grand.*

On en déduit les solutions de l'équation sans second membre :

Proposition 2 *Si Z est une solution continue bornée de $Z = F * Z$, alors Z est constante si F n'est pas arithmétique. Si F est arithmétique de pas λ, alors Z est périodique de période λ.*

• En utilisant une équation de renouvellement particulière avec $G(t) = 1 - F(t)$, on montre que les incréments de U sont uniformément bornés. On utilise alors le résultat suivant.

Proposition 3 *Soit (μ_n) une suite de mesures telle que la suite numérique*

$$(\mu_n([-t,\ t]))_n$$

soit bornée pour tout t. Alors il existe une mesure μ et une sous-suite (n_k) tels que la sous-suite $(\mu_{n_k})_k$ converge étroitement vers la mesure μ.

On peut donc trouver une sous-suite (t_k) et une mesure V telles que $(U(t_k + dt))$ tend vers $V(dt)$.

• On identifie cette limite V à l'aide d'équations de renouvellement particulières :

– En prenant G continue à support compact, on montre que V est un multiple de la mesure de Lebesgue (dans le cas non-arithmétique).

– En prenant à nouveau $G(t) = 1 - F(t)$ on montre que le coefficient de multiplicité est γ^{-1}, l'inverse de l'espérance de F.

La limite obtenue étant indépendante du choix de la sous-suite, on a ainsi une vraie convergence vers la quantité attendue.

1.2.2 Support sur $\mathbb{R}$

On suppose maintenant que F est une probabilité non arithmétique qui vérifie $F([-\infty,\ 0[) > 0$ et $F(]0,\ +\infty]) > 0$. Il n'y a plus d'interprétation possible en terme de durée de vie. On parlera plutôt de marche aléatoire. Avec les notation de l'introduction, si (X_n) est une suite iid de loi F, le processus (S_n) est une marche aléatoire sur $\mathbb{R}$. Le processus $N_t = \sum \mathbb{1}_{]-\infty,\ t]} S_n$ est le nombre de passages de la marche dans l'intervalle $]-\infty,\ t]$, et pour tout intervalle I, $U(I)$ est le temps moyen passé par la marche dans l'intervalle I.

On considère maintenant des fonctions à support quelconque sur $\mathbb{R}$. L'équation de renouvellement s'écrit de la façon suivante :

$$Z(t) = F * Z(t) + G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(t-s)F(ds) + G(t). \tag{1.2}$$

Dans ce cas, la fonction de renouvellement U n'est plus nécessairement finie. Par exemple elle est infinie si F est d'espérance nulle.

Définition 4 *On dit que F est* transiente *si pour tout intervalle borné I, $U(I)$ est fini.*

En passant par l'interprétation en terme de marche aléatoire, il est facile de voir que si l'espérance de F est non nulle, alors F est transiente. C'est une conséquence de

la loi des grands nombres.

La convolée $U * G$ n'est plus automatiquement bien définie, et même quand elle l'est, ce n'est plus l'unique solution de l'équation de renouvellement. En effet, pour toute constante c, la fonction $Z_c = U * G + c$ est encore solution. Le théorème de renouvellement qu'on obtient est le suivant.

Théorème 3 *Si γ, l'espérance de F, existe et est strictement positive, alors F est transiente et pour tout $h > 0$ on a :*

$$U(t+h) - U(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{h}{\gamma},$$
$$U(t+h) - U(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0.$$

On peut aussi en déduire un résultat analogue au théorème 2 pour la solution particulière $Z = U * G$ de l'équation de renouvellement lorsque cette quantité est bien définie.

Le schéma de la démonstration est le même que dans le cas précédent. Seules les équations de renouvellement particulières changent légèrement : on remplace $1-F(t)$ par $F^{(0)}(t) - F(t)$.

1.3 Théorie du renouvellement sur $(\mathbb{R}_+)^p$

On s'intéresse maintenant à la forme matricielle de l'équation de renouvellement : Z et G sont des vecteurs, et F est une matrice de distributions. Ceci correspond à un système d'équations de renouvellement. On peut faire une interprétation probabiliste de ces systèmes en terme de théorie du branchement et de durées de vie, ou de files d'attente. Les lois considérées sont donc à support dans $\mathbb{R}_+$. Comme en dimension 1, il y a de multiples preuves des théorèmes de renouvellement, cependant elles se limitent toutes au cas du support dans $\mathbb{R}_+$.

Les travaux les plus récents sont ceux de N. B. Engibaryan [23] et Z. B. Tsalyuk [54]. Dans ces deux articles, les auteurs considèrent des systèmes d'équations de renouvellement avec des mesures à densité. Dans [23], le théorème de renouvellement est étendu à une classe plus vaste que les seules fonctions directement Riemann intégrables (les fonctions intégrables, essentiellement bornées et tendant vers 0 en $+\infty$). La démonstration est basée sur des résultats similaires en dimension 1 et la méthode du pivot de Gauss. Dans [54], on utilise l'analyse complexe et la transformée de Laplace $\widehat{F}(z)$ de F. Sous de bonnes hypothèses (essentiellement que $I - \widehat{F}(z)$ est non inversible pour un nombre fini de points du demi-plan fermé $Re(z) \geq 0$), l'auteur obtient la structure de la résolvante $R = U - F^{(0)}$ de l'équation de renouvellement. Cependant, aucune de ces deux méthode ne s'étend à des classes plus larges de mesures.

On s'intéresse ici aux résultats un peu plus anciens de K. Crump [15] puis K. Athreya et K. Rama Murthy [5] qui sont une extension directe de la méthode

de [25] au cas multidimensionnel. Avant de rappeler ces résultats, on donne quelques définitions générales et un rappel de la théorie des matrices positives. On se place donc maintenant dans $\mathbb{R}^p$, avec $p > 1$.

1.3.1 Notations et définitions

Soit $F = (F_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ une matrice de fonctions de répartition sur $\mathbb{R}$: croissantes, positives, continues à droite, et tendant vers 0 en $-\infty$, que l'on considérera indifféremment comme des fonctions ou des mesures. On généralise la définition de produit de convolution matriciel à la dimension p.

Définition 5 *Pour toute matrice H de taille $p \times r$ de fonctions H_{ij} réelles, mesurables, bornées sur les compacts, le* produit de convolution $F * H$ *est défini pour tout t réel par :*

$$(F * H)_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{p} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{kj}(t-s)F_{ik}(ds),$$

quand ces intégrales sont définies.

Soient $G = {}^t(G_1, \ldots, G_p)$ un vecteur de fonctions réelles, mesurables et bornées sur les compacts, et $Z = {}^t(Z_1, \ldots, Z_p)$, où ${}^tX$ désigne la transposée du vecteur ou de la matrice X.. L'équation de renouvellement multidimensionnelle $Z = F * Z + G$ s'écrit donc sous forme de système comme :

$$Z_i(t) = \sum_{k=1}^{p} \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} Z_j(t-s)F_{ij}(ds) + G_i(t) \Big], \qquad \forall\ 1 \leq i \leq p.$$

Pour tout t réel, on définit, par analogie avec la dimension 1, les quantités suivantes :

• la matrice *espérance* de F : $\Gamma = (\gamma_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ avec $\gamma_{ij} = \int t F_{ij}(dt)$,

• l'élément neutre pour la convolution matricielle : $F^{(0)}(t) = (\delta_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq p}$ avec $\delta_{ij}(t) = \mathbb{1}_{t\geq 0}$ si $i = j$ et 0 sinon, de sorte que $F^{(0)} * H = H$ pour tout H comme dans la définition ci-dessus, (remarquons qu'il s'agit d'une matrice diagonale dont chaque élément diagonal est l'élément neutre pour la convolution en dimension 1),

• les itérées de F pour la convolution : $F^{(n)}(t) = F * F^{(n-1)}(t)$.

Définition 6 *La* fonction de renouvellement *associée à F est*

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(t).$$

La définition d'une matrice de distributions arithmétique est moins intuitive qu'en dimension 1. Il ne suffit pas d'imposer que chaque composante de F soit arithmétique, il faut aussi des conditions de compatibilité entre les différents supports. Cependant, comme on le verra dans la démonstration du lemme 1.2, c'est une extension naturelle de la définition usuelle.

Définition 7 *La matrice de distributions F est* arithmétique *si les quatre assertions suivantes sont vérifiées :*

- *Pour tout $i \neq j$, F_{ij} est concentrée sur un sous-espace de la forme $b_{ij} + \lambda_{ij}\mathbb{Z}$.*
- *Pour tout i, F_{ii} est concentrée sur un sous-espace de la forme $\lambda_{ii}\mathbb{Z}$.*
- *Les λ_{ij} sont des multiples entiers d'un même nombre.*

Soit λ le plus grand possible de ces nombres.

- *Pour tous a_{ij}, a_{jk}, a_{ik} points d'accroissement de F_{ij}, F_{jk}, F_{ik} respectivement, $a_{ij} + a_{jk} - a_{ik}$ est un multiple entier de λ.*

Dans toute la suite, on ne donnera les théorèmes de renouvellement que pour des matrices non arithmétiques.

1.3.2 La théorie de Perron-Frobenius

On fait maintenant quelques rappels d'analyse matricielle qui seront utiles dans toute la suite. Pour les détails et les démonstrations, voir par exemple R. Horn et C. Johnson [42].

Définition 8 *On dit qu'une matrice (ou un vecteur) est* positive *si chacune de ses coordonnées l'est.*

Si A est une matrice positive, on écrira $A \geqslant 0$, et si toutes ses coordonnées sont strictement positives on écrira $A \gg 0$. De même, si une matrice A est plus petite qu'une matrice B coefficient par coefficient on notera $A \leqslant B$, et si cette propriété est vraie au sens strict pour tous les coefficients, on notera $A \ll B$. Dans toute la suite, $\rho(A)$ désignera le rayon spectral de la matrice A.

Le rayon spectral des matrices positives a de bonnes propriétés de comparaison.

Proposition 4 *Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont des matrices quelconques telles que pour tous i, j on ait $|a_{ij}| \leq b_{ij}$ alors $\rho(A) \leq \rho(B)$.*

Proposition 5 *Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont des matrices positives telles que pour tous i, j on ait $a_{ij} < b_{ij}$, alors $\rho(A) < \rho(B)$.*

Proposition 6 *Soit A une matrice positive et $x \gg 0$ un vecteur strictement positif. S'il existe $\alpha, \beta \geq 0$ tels que $\alpha x \leqslant Ax \leqslant \beta x$, alors $\alpha \leq \rho(A) \leq \beta$. Si de plus $\alpha x \ll Ax$, alors $\alpha < \rho(A)$ et si $Ax \ll \beta x$ alors $\rho(A) < \beta$.*

On rappelle aussi la définition de matrice irréductible et apériodique (dans un cadre non probabiliste on parle plutôt de matrice *primitive*).

Définition 9 *Une matrice $A = (a_{ij})$ de taille $p \times p$ est* irréductible *si pour toute partition non triviale (I, J) de $\{1, \ldots, p\}$ on peut trouver i dans I et j dans J tels que $a_{ij} \neq 0$.*

Définition 10 *Une matrice positive A est* apériodique *si il existe $m \geq 1$ tel que A^m soit à coefficients strictement positifs.*

Théorème 4 (Théorème de Perron-Frobenius)

Soit A une matrice positive et irréductible. Alors son rayon spectral $\rho(A)$ en est une valeur propre simple qui admet à gauche et à droite un vecteur propre à coordonnées strictement positives.

Si de plus A est apériodique, alors

$$\lim_{m\to\infty} \frac{A^m}{\big(\rho(A)\big)^m} = L,$$

où $L = m\,{}^t u$, avec $Am = \rho(A)m$, ${}^t uA = \rho(A)\,{}^t u$, ${}^t um = 1$ et u et m sont à coordonnées strictement positives.

1.3.3 Les résultats

Dans ce paragraphe, on suppose que toutes les mesures F_{ij} sont à support sur $\mathbb{R}_+$: pour tout $t < 0$, on a $F_{ij}(t) = 0$. Toutes les fonctions considérées seront aussi nulles en dehors de $\mathbb{R}_+$. L'équation de renouvellement devient : pour tout t positif,

$$Z_i(t) = \sum_{k=1}^{p} \Big[\int_0^t Z_j(t-s)F_{ij}(ds) + G_i(t) \Big], \qquad \forall\ 1 \le i \le p.$$

On a tout d'abord un équivalent de la proposition 1.

Lemme 3

(a) La fonction de renouvellement $U(t)$ est finie pour tout t positif si et seulement si $\rho(F(0)) < 1$.

(b) Si $\rho(F(0)) < 1$, alors $Z = U * G$ est l'unique solution mesurable et bornée sur les compacts de l'équation $Z = F * Z + G$.

Dans tout ce paragraphe on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$\begin{array}{lcl} i & - & \rho(F(0)) < 1, \\ ii & - & 0 < \lim_{t\to\infty} F_{ij}(t) = F_{ij}(\infty) < \infty\ \forall i,j, \\ iii & - & \text{on peut trouver } i \text{ et } j \text{ tels que } F_{ij}(0) < F_{ij}(\infty). \end{array}$$

Remarque Au vu de la démonstration, on peut remplacer l'hypothèse $F(\infty) \gg 0$ par

$$F(\infty) \textit{ irréductible et à puissances bornées en norme.}$$

C'est le cas par exemple si $F(\infty)$ est de rayon spectral 1 et apériodique, c'est-à-dire que dans ce cas il suffit que la condition ii soit vérifiée par une puissance de la matrice $F(\infty)$.

Dans les deux cas, on peut utiliser le théorème de Perron-Frobenius (théorème 4) qui nous donne deux vecteurs propres à coordonnées strictement positives. On fixe les notations suivantes :

$$F(\infty)m = \rho(F(\infty))m, \quad {}^t uF(\infty) = \rho(F(\infty))\,{}^t u, \quad \sum_{i=1}^{p} m_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{p} u_i m_i = 1,$$

où m et u sont de plus à coordonnées strictement positives.

La démarche est adaptée de celle de [25] :

• On commence par montrer l'équivalence entre les deux formes du théorème de renouvellement, celle avec la fonction de renouvellement U et celle avec la solution de l'équation de renouvellement Z. La preuve est la même qu'en dimension 1.

• On étudie ensuite les solutions de l'équation sans second membre. En utilisant les lemmes 1 et 2, on obtient un équivalent de la proposition 2.

Théorème 5 *Supposons que $\rho(F(\infty)) = 1$ et soit $Z(t) = {}^t(Z_1(t), \dots, Z_p(t))$ un vecteur de fonctions bornées, continues tel que $Z = F * Z$. Alors si F n'est pas arithmétique, Z est un vecteur constant.*

Remarque En dimension 1, F doit être une probabilité. Ici, on n'a pas besoin de supposer que chacune des F_{ij} est une probabilité. On fait une hypothèse globale sur le rayon spectral de la matrice $F(\infty)$, à savoir qu'il doit être égal à 1.

• En utilisant une équation de renouvellement particulière avec $G(t) = \big(F(\infty) - F(t)\big)m$, on montre que les incréments des U_{ij} sont uniformément bornés. On utilise alors la proposition 3 qui donne une sous-suite (t_k) et des mesures V_{ij} telles que la suite $(U_{ij}(t_k + dt))$ tend vers $V_{ij}(dt)$ pour tous i, j.

• On identifie cette limite $V = (V_{ij})$ à l'aide d'équations de renouvellement particulières :

– En prenant G ayant une seule coordonnée non nulle et continue à support compact, on montre que les V_{ij} sont toutes des multiples de la mesure de Lebesgue (dans le cas non-arithmétique).

– En prenant à nouveau $G(t) = \big(F(\infty) - F(t)\big)m$ on montre que le coefficient de multiplicité est proportionnel à $m_i u_j$, avec le même coefficient de proportionnalité c pour chaque couple (i, j).

– En utilisant encore $G(t) = \big(F(\infty) - F(t)\big)m$, on calcule explicitement ce coefficient de proportionnalité c.

La limite obtenue étant indépendante du choix de la sous-suite, on a une vraie convergence. On obtient donc les deux versions du théorème de renouvellement.

Théorème 6 *Supposons que $\rho(F(\infty)) = 1$, et que F est non arithmétique. Pour tous i, j et $h > 0$ on a :*

$$U_{ij}(t + h) - U_{ij}(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{m_i u_j}{\gamma} h,$$

où m et u sont les vecteurs propres définis ci-dessus et $\gamma = {}^t u\Gamma m$ ($\gamma^{-1} = 0$ si un des γ_{ij} est infini).

Soit $G = {}^t(G_1(t), \dots, G_p(t))$ un vecteur de fonctions directement Riemann intégrables, et $Z = U * G$. Alors pour tout i on a :

$$Z_i(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{\gamma} m_i \sum_{j=1}^{p} \Big[u_j \int_0^\infty G_j(s)ds \Big].$$

La limite est du même type qu'en dimension 1 puisque γ représente l'espérance de la matrice F renormalisée par les vecteurs propres. On donne aussi un corollaire de ce théorème qui fait intervenir la transformée de Laplace, et qui sera utilisé par la suite dans les paragraphes 2.6 et 3.7.2.

Théorème 7 *Supposons que F est non arithmétique, que $\rho(F(\infty)) \neq 1$, et qu'il existe un réel α tel que $\rho(F_\alpha(\infty)) = 1$, où*

$$(F_\alpha)_{ij}(t) = \int_0^t e^{-\alpha s} F_{ij}(ds).$$

Alors pour tous i, j et $h > 0$ on a :

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{t+h} e^{-\alpha s} U_{ij}(ds) = \frac{\widetilde{m}_i \widetilde{u}_j}{\widetilde{\gamma}} h,$$

où $\widetilde{m}$ et $\widetilde{u}$ sont des vecteurs propres positifs de $F_\alpha(\infty)$ pour la valeur propre 1 normalisés comme ci-dessus, et $\widetilde{\gamma} = {}^t\widetilde{u}\widetilde{\Gamma}\widetilde{m}$ où $\widetilde{\Gamma}$ est l'espérance de $F_\alpha(\infty)$ ($\widetilde{\gamma}^{-1} = 0$ si un des $\widetilde{\gamma}_{ij}$ est infini).

1.4 Théorie du renouvellement sur $\mathbb{R}^p$

On cherche maintenant un théorème de renouvellement matriciel applicable à des distributions à support quelconque (dans le chapitre 2 on appliquera ce théorème à des masses de Dirac). On va pour cela généraliser la méthode de [15] et [5] dans le même esprit que [25] pour le passage du cas à support $\mathbb{R}_+$ au cas à support $\mathbb{R}$ en dimension 1.

Soit $F = (F_{ij})_{1\le i,j\le p}$ une matrice de fonctions de répartition sur $\mathbb{R}$. On reprend les notations du paragraphe 1.3.1, et comme dans le paragraphe précédent, on fait un certain nombre d'hypothèses sur F avant d'énoncer les théorèmes.

• Une hypothèse de finitude des mesures, identique à la deuxième inégalité de la condition *ii*,

$$\forall\ 1 \le i, j \le p \qquad F_{ij}(\infty) = \lim_{t\to\infty} F_{ij}(t) < \infty. \tag{1.3}$$

• Une hypothèse d'irréductibilité et de bornitude, qui remplace la première inégalité de la condition *ii* comme dans la remarque,

$$F(\infty) \text{ est une matrice irréductible et la suite } \|F(\infty)^n\| \text{ est bornée.} \tag{1.4}$$

Comme $F(\infty)$ est une matrice positive et irréductible, on peut encore lui appliquer le théorème de Perron-Frobenius (théorème 4) : son rayon spectral $\rho(F(\infty))$ est une valeur propre simple qui admet à gauche et à droite un vecteur propre à coordonnées strictement positives. Dans tous les théorèmes qui suivent, on supposera de plus, comme dans le cas à support $\mathbb{R}_+$ que

$$\rho(F(\infty)) = 1. \tag{1.5}$$

On adopte les mêmes notations que précédemment : m et u sont des vecteurs propres à coordonnées strictement positives vérifiant le théorème de Perron-Frobenius et normés de la façon suivante :

$$F(\infty)m = m, \quad {}^t u F(\infty) = {}^t u, \quad \sum_{i=1}^{p} m_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{p} u_i m_i = 1. \tag{1.6}$$

- On fait enfin une hypothèse de type transience :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad U(t) < \infty. \tag{1.7}$$

Cette hypothèse était automatiquement vérifiée dans [5] dès que le rayon spectral de $F(0)$ était strictement inférieur à 1 (lemme 3 (a) et hypothèse i). Cependant, elle ne l'est plus dans le cas général comme en dimension 1.

Nous pouvons maintenant énoncer les principaux théorèmes que nous allons démontrer en détail dans les sections suivantes. Le premier est l'analogue exact du théorème 5 et de la proposition 2. Il donne les solutions de l'équation de renouvellement sans second membre.

Théorème 1.1 *Sous les hypothèses (1.3), (1.4), (1.5), et (1.7), si de plus F est non arithmétique et Z est une solution continue bornée de l'équation $Z = F * Z$, alors Z est un vecteur constant.*

Le deuxième traite des incréments de U. Il était vérifié sans difficulté dans le cas à support $\mathbb{R}_+$ et en dimension 1, mais demandera plus de travail ici. Toute la partie 1.6 est consacrée à sa démonstration.

Théorème 1.2 *Sous les hypothèses (1.3), (1.4), (1.5), et (1.7), pour tous i, j, pour tout intervalle borné $I =]a,\ b]$, $U_{ij}(I + t) = U_{ij}(t + b) - U_{ij}(t + a)$ est borné indépendamment de t.*

On donne maintenant les théorèmes de renouvellement qui sont l'analogue des deux parties du théorème 6, et du théorème 3 en dimension 1. Remarquons qu'ici les hypothèses imposent l'existence de l'espérance et donc la non nullité de γ^{-1}.

Théorème 1.3 (Théorème de renouvellement, première forme)
Sous les hypothèses (1.3), (1.4), (1.5), et (1.7), si de plus F est non arithmétique et Γ est bien définie, alors, pour tous i, j et pour tout $h > 0$, on a $\gamma = {}^t u \Gamma m > 0$ et

$$U_{ij}(t + h) - U_{ij}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{m_i u_j}{\gamma} h,$$

où m et u sont les vecteurs définis en (1.6).

Théorème 1.4 (Théorème de renouvellement, deuxième forme)
Sous les hypothèses du théorème 1.3, si G est directement Riemann intégrable, et $Z = U * G$ existe, alors

$$\lim_{t\to\infty} Z_i(t) = \frac{1}{\gamma} m_i \sum_{j=1}^{p} \Big[u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(u)du \Big].$$

Remarque Ici encore, $U*G$ quand elle est définie n'est pas nécessairement l'unique solution de l'équation de renouvellement. En effet, pour toute constante c, le vecteur $Z_c = U * G + cm$ est encore solution.

Les parties suivantes sont consacrées à la démonstration détaillée de ces théorèmes. Dans la partie 1.5, on démontre le théorème 1.1, dans la partie 1.6, on démontre le théorème 1.2, et enfin dans la partie 1.7 on démontre les théorèmes de renouvellement.

1.5 L'équation sans second membre

Comme précédemment, la forme particulière des solutions de l'équation sans second membre $Z = F * Z$ va jouer un rôle important dans la démonstration du théorème de renouvellement. Toute cette section est quasiment identique au cas où les mesures sont distribuées sur $\mathbb{R}_+$, mais on donne l'intégralité des démonstrations à chaque fois.

On commence par l'étude des points d'accroissement de la fonction de renouvellement U en fonction de ceux des itérées $F^{(k)}$.

1.5.1 Points d'accroissement

Lemme 1.1 *Soit Σ_{ij} l'ensemble des points d'accroissement des $F_{ij}^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ie*

$$\Sigma_{ij} = \{a \mid \exists\ k \in \mathbb{N},\ F_{ij}^{(k)}(a+\varepsilon) - F_{ij}^{(k)}(a-\varepsilon) > 0 \quad \forall\ \varepsilon > 0\}.$$

Alors pour tous i, j, k, on a $\Sigma_{ik} + \Sigma_{kj} \subset \Sigma_{ij}$.

Démonstration
Soient x dans Σ_{ik} et y dans Σ_{kj}. On peut donc trouver des entiers n et m tels que x soit un point d'accroissement de $F_{ik}^{(n)}$ et y un point d'accroissement de $F_{kj}^{(m)}$. Par le lemme 1, $x + y$ est alors un point d'accroissement de $F_{ik}^{(n)} * F_{kj}^{(m)}$, donc de $\sum_{k=1}^{p} F_{ik}^{(n)} * F_{kj}^{(m)} = F_{ij}^{(n+m)}$. Ainsi on a bien $\Sigma_{ik} + \Sigma_{kj} \subset \Sigma_{ij}$. □

Le lemme suivant permet de comprendre comment on a choisi la définition d'une matrice arithmétique : on a cherché une condition minimale pour obtenir un résultat analogue au lemme 2.

Lemme 1.2 *Sous l'hypothèse (1.4), si F est non arithmétique alors pour tous i, j, Σ_{ij} est asymptotiquement dense à l'infini au sens suivant :*

$$\forall\ \varepsilon > 0, \qquad \exists\ \Delta_\varepsilon > 0 \quad t.q. \quad \forall x \geq \Delta_\varepsilon \qquad]x,\ x+\varepsilon[\ \cap\ \Sigma_{ij} \neq \emptyset.$$

Démonstration

D'après le lemme 1.1, si $\Sigma_{i_0 j_0}$ est asymptotiquement dense à l'infini dans $\mathbb{R}$, alors il en est de même pour $\Sigma_{i_0 j}$ pour tout j et $\Sigma_{i j_0}$ pour tout i, donc soit les Σ_{ij} sont tous asymptotiquement denses à l'infini, soit aucun ne l'est.

Raisonnons par l'absurde. Si aucun des Σ_{ij} n'est asymptotiquement dense à l'infini, alors en particulier Σ_{ii} ne l'est pas. C'est un sous-espace de $\mathbb{R}$ fermé pour l'addition d'après le lemme 1.1, qui est non réduit à $\{0\}$ car $F(\infty)$ n'est pas la matrice nulle par l'hypothèse (1.4). D'après la classification des sous-groupes de $\mathbb{R}$, il existe donc un réel λ_{ii} tel que $\Sigma_{ii} \subset \lambda_{ii}\mathbb{Z}$ et contient tous les $n\lambda_{ii}$ pour n assez grand (voir la démonstration du lemme V.4.2 de [25]).

Soient c dans Σ_{ij}, et d dans Σ_{ji}. Soit n assez grand pour que $n\lambda_{ii} \in \Sigma_{ii}$ et $(n+1)\lambda_{ii} \in \Sigma_{ii}$, alors par le lemme 1.1, $d - n\lambda_{ii} + c$ et $d - n\lambda_{ii} + c + \lambda_{ii}$ sont dans Σ_{jj}, donc $\lambda_{ii} \geq \lambda_{jj}$, et par symétrie ils sont égaux. Ainsi tous les λ_{jj} sont égaux. Notons $\lambda = \lambda_{jj}$ pour tout j.

On montre de même que si $i \neq j$, $\Sigma_{ij} \subset b_{ij} + \lambda\mathbb{Z}$ (en effet $\Sigma_{ij} + \Sigma_{jj}$ est stable par addition), et par le lemme 1.1, $b_{ij} + b_{jk} = b_{ik} + n\lambda$. F est donc arithmétique, ce qui est absurde. □

1.5.2 Démonstration du théorème 1.1

Comme dans la preuve de [25], on commence par étudier un cas particulier plus régulier.

Lemme 1.3 *Soit K une solution bornée uniformément continue sur $\mathbb{R}$ de l'équation $K = F * K$. Sous les hypothèses (1.3), (1.4), (1.5), et (1.7), si de plus F est non arithmétique et si il existe i_0 tel que*

$$a_{i_0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} K_{i_0}(t) > 0,$$

alors il existe $\delta_{i_0} > 0$ tel que pour tout $h > 0$, on peut trouver un intervalle de longueur h sur lequel $K_{i_0} > \delta_{i_0}$.

Démonstration

Pour tout $1 \leq j \leq p$, on pose $a_j = \sup_{t\in\mathbb{R}} K_j(t)$. Soient i_0 donné par l'énoncé tel que $a_{i_0} > 0$ et j_0 tel que

$$\frac{a_{j_0}}{m_{j_0}} = \max_{1\leq j\leq p} \frac{a_j}{m_j} > 0,$$

où m est le vecteur propre de $F(\infty)$ défini en (1.6). Comme $F(\infty)m = m$, pour tous i, n on a $\sum_{j=1}^p F_{ij}^n(\infty) m_j = m_i$, où les $F_{ij}^n(\infty)$ désignent les coordonnées de $F(\infty)^n$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p} F^n_{j_0 j}(\infty)a_j &= \sum_{j=1}^{p}\Big[F^n_{j_0 j}(\infty)m_j\frac{a_j}{m_j}\Big]\\ &\leq \Big(\sum_{j=1}^{p} F^n_{j_0 j}(\infty)m_j\Big)\frac{a_{j_0}}{m_{j_0}}\\ &= m_{j_0}\frac{a_{j_0}}{m_{j_0}}\\ &= a_{j_0}.\end{aligned}$$

Donc en particulier, il vient :

$$a_{j_0} \geq \sum_{j=1}^{p} F^n_{j_0 j}(\infty)a_j. \tag{1.8}$$

On distingue maintenant deux cas selon que a_{j_0} est atteint ou non.

• Premier cas : $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $K_{j_0}(t_0) = a_{j_0}$.
Par itération de $K = F * K$, on obtient

$$\begin{aligned}a_{j_0} = K_{j_0}(t_0) &= \sum_{r=1}^{p}\int K_r(t_0-u)F^{(n)}_{j_0 r}(du)\\ &\leq \sum_{r=1}^{p}\Big[a_r\int F^{(n)}_{j_0 r}(du)\Big]\\ &= \sum_{r=1}^{p} a_r F^{(n)}_{j_0 r}(\infty)\\ &\leq \sum_{r=1}^{p} a_r F^{n}_{j_0 r}(\infty)\\ &\leq a_{j_0},\end{aligned}$$

d'après l'équation (1.8), car $F^{(n)}_{ij}(\infty) \leq F^n_{ij}(\infty)$. On a ainsi des égalités partout dans cette suite d'inégalités, donc en particulier, il vient :

$$\sum_{r=1}^{p}\int \big(a_r - K_r(t_0-u)\big)F^{(n)}_{j_0 r}(du) = 0.$$

Comme l'intégrande est positive et continue, on en déduit que pout tous r et t, et pour tout point s d'accroissement d'un des $F^{(n)}_{j_0 r}$, c'est à dire pour tout s dans $\Sigma_{j_0 r}$, on a $a_r = K_r(t_0 - s)$. Or d'après le lemme 1.2, $\Sigma_{j_0 r}$ est asymptotiquement dense à l'infini. Comme K_r est uniformément continue, on a donc pout tout r :

$$\lim_{t\to-\infty} K_r(t) = a_r.$$

Par convergence dominée quand t tend vers l'infini dans l'équation $K = F * K$, on trouve $a_i = \sum_{r=1}^{p} a_r F_{ir}^{(n)}(\infty)$. Ainsi pour tous t, r et pour tout T fixé, on a :

$$\begin{aligned} K_r(t) - a_r &= \sum_{l=1}^{p} \int (K_l(t-s) - a_l) F_{rl}^{(n)}(ds), \\ |K_r(t) - a_r| &\leq \sum_{l=1}^{p} \int |K_l(t-s) - a_l| F_{rl}^{(n)}(ds) \\ &= \sum_{l=1}^{p} \int_{-\infty}^{T} |K_l(t-s) - a_l| F_{rl}^{(n)}(ds) + \sum_{l=1}^{p} \int_{T}^{\infty} |K_l(t-s) - a_l| F_{rl}^{(n)}(ds). \end{aligned}$$

Comme les $\|F(\infty)^n\|$ sont bornées par l'hypothèse (1.4), on a $\sup_{n,i,j} F_{ij}^{(n)}(\infty) \leq \sup_{n,i,j} F_{ij}^{n}(\infty) < \infty$. Soit $\varepsilon > 0$, on peut donc choisir un réel T assez grand tel que pour tout n, on ait

$$\sum_{l=1}^{p} \int_{T}^{\infty} |K_l(t-s) - a_l| F_{rl}^{(n)}(ds) < \varepsilon.$$

Comme de plus K est borné et $\lim_{n\to\infty} F^{(n)}(T) = 0$ car $U(T)$ est fini par l'hypothèse (1.7), il vient

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{T} |K_l(t-s) - a_l| F_{rl}^{(n)}(ds) \leq M_l \lim_{n\to\infty} F_{rl}^{(n)}(T) = 0,$$

où $M_l = \sup |K_l - a_l|$. Ainsi pour tout $1 \leq r \leq p$, la fonction K_r est constante égale à a_r. En particulier, $K_{i_0}(t) = a_{i_0} > 0$, d'où le résultat annoncé pour $\delta_{i_0} = a_{i_0}/2$.

• Deuxième cas : Pour tout t, $K_{j_0}(t) \neq a_{j_0}$.
Alors on peut trouver une suite (t_n) tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$ telle que $K_{j_0}(t_n) \to a_{j_0}$. Soit $\zeta_{n,i}(x) = K_i(t_n + x)$. Comme K est bornée et uniformément continue, $(\zeta_{n,i})_{n,i}$ est une famille uniformément bornée et uniformément équicontinue. Par le théorème d'Ascoli, il existe une sous-suite (t_{n_j}) de (t_n) telle que pour tout i, la suite $(\zeta_{n_j,i})_j$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction bornée uniformément continue qu'on note η_i. On a alors

$$\begin{aligned} \zeta_{n_j,i}(t) &= K_i(t_{n_j} + t) \\ &= \sum_{r=1}^{p} \int K_r(t_{n_j} + t - s) F_{ir}(ds) \\ &= \sum_{r=1}^{p} \int \zeta_{n_j,r}(t-s) F_{ir}(ds). \end{aligned}$$

Quand j tend vers ∞, on obtient par convergence dominée :

$$\eta_i(t) = \sum_{r=1}^{p} \int \eta_r(t-s) F_{ir}(ds). \tag{1.9}$$

De plus, pour tous t, i, on a $\eta_i(t) = \lim_{j\to\infty} K_i(t_{n_j} + t)$ qui est inférieure à a_i et par définition de t_n, $\eta_{j_0}(0) = \lim_j K_{j_0}(t_{n_j}) = a_{j_0}$. Ainsi on a $\sup \eta_{j_0} = a_{j_0} > 0$, donc η_{j_0} vérifie les hypothèses du lemme dans le premier cas. D'après la première partie, chaque coordonnée η_i est donc constante, égale à un c_i, avec $c_{j_0} = a_{j_0}$.

De l'équation (1.9), on déduit que $c = {}^t(c_1, \ldots, c_p)$ est un vecteur propre à droite de $F(\infty)$ pour la valeur propre 1. Comme l'espace propre est de dimension 1 d'après le théorème 4, il existe un réel α tel que $c = \alpha m$. Comme $c_{j_0} = a_{j_0} > 0$, on a $\alpha = \frac{c_{j_0}}{m_{j_0}} > 0$ donc c est à coordonnées strictement positives. Soit $h > 0$. Comme $K_{i_0}(t_{n_j}+t)$ tend vers c_{i_0} uniformément sur $[0,\ h]$, pour j assez grand on a $K_{i_0}(t) > \frac{c_{i_0}}{2}$ pour tout t dans $]t_{n_j},\ t_{n_j} + h[$. On a donc le résultat annoncé pour $\delta_{i_0} = \frac{c_{i_0}}{2}$. □

On a maintenant tous les éléments nécessaires pour passer à la démonstration du théorème 1.1 qui dit que les seules solutions continues bornées de l'équation sans second membre sont les constantes.

Démonstration du théorème 1.1

Soit ϕ_ε la fonction qui à t associe $\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{t^2}{2\varepsilon^2})$. Pour tout i, on définit la convolée suivante :

$$f_{\varepsilon,i}(t) = \phi_\varepsilon * Z_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\varepsilon(t-s) Z_i(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\varepsilon(s) Z_i(t-y) ds.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $1 \le i \le p$, comme Z est solution de l'équation $Z = F * Z$, on a

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon,i}(t) &= \sum_{r=1}^{p} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\varepsilon(y) \int_{-\infty}^{\infty} Z_r(t-y-s) F_{ir}(ds) dy \Big] \\ &= \sum_{r=1}^{p} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\varepsilon(y) Z_r(t-y-s) dy \Big) F_{ir}(ds) \Big] \\ &= \sum_{r=1}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon,r}(t-s) F_{ir}(ds). \end{aligned}$$

De plus $f_{\varepsilon,i}$ a des dérivées à tout ordre, sa dérivée première est bornée (car Z est bornée), uniformément continue, et par le théorème de dérivation sous l'intégrale et ce qui précède, $f'_{\varepsilon,i}(t) = \sum_{r=1}^{p} \int f'_{\varepsilon,r}(t-s) F_{ir}(ds)$ pour tout $1 \le i \le p$. Donc f'_ε vérifie l'équation sans second membre $f'_\varepsilon = F * f'_\varepsilon$. On peut lui appliquer le lemme 1.3 : soit $a_i = \sup f'_{\varepsilon,i}$. S'il existe un indice i tel que a_i soit strictement positif, alors on peut trouver un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $h > 0$ on ait un intervalle $]t,\ t+h[$ sur lequel $f'_{\varepsilon,i} > \delta$. En intégrant sur $]t,\ t+h[$ on trouve $\delta h < f_{\varepsilon,i}(t+h) - f_{\varepsilon,i}(t)$. Comme $f_{\varepsilon,i}$ est bornée par une constante M, on a ainsi $\delta h < 2M$ pour tout $h > 0$, ce qui est absurde. Donc pour tout i, $a_i \le 0$. En remplaçant Z_i par $-Z_i$, on trouve de même que pour tout i, $a_i \ge 0$. Ainsi pour tous $i,\ t,\ \varepsilon$, on a $f'_{\varepsilon,i}(t) = 0$. Pour tous $i,\ \varepsilon$, la convolée $f_{\varepsilon,i}$ est donc constante. En faisant tendre ε vers 0, on en conclut que la fonction Z_i est également constante pour tout indice i. □

1.6 Théorie du potentiel

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème 1.2. Il se démontre aisément dans le cas de mesures à support sur $\mathbb{R}_+$ ou en dimension 1, à l'aide d'équations de renouvellement particulières, mais ces méthodes ne se généralisent pas au cas présent. C'est en fait la seule vraie difficulté rencontrée pour passer du cas à support $(\mathbb{R}_+)^p$ au cas à support $\mathbb{R}^p$. On donne ici une preuve originale qui s'inspire de la théorie du potentiel en dimension 1 (voir C. Dellacherie et P. Meyer [22]), en la généralisant à la dimension p.

1.6.1 Définitions et notations

On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$. On rappelle la définition usuelle d'un noyau.

Définition 11 *Un* noyau N *sur* $\mathbb{R}$ *est une application de* $\mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *dans* $[0, +\infty]$ *telle que*
- *l'application* $t \longmapsto N(t, A)$ *est mesurable pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
- *l'application* $A \longmapsto N(t, A)$ *est une mesure pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Pour toute fonction f mesurable positive sur $\mathbb{R}$, on définit l'application Nf sur $\mathbb{R}$ par

$$Nf(t) = \int f(s)N(t, ds).$$

La notion de noyau généralise celle de convolution. En effet, si F est une mesure sur $\mathbb{R}$, on peut lui associer le noyau $N_F(t, A) = \int \mathbb{1}_A(t - s)F(ds)$. Alors, pour toute fonction f comme ci-dessus on a $N_F f = F * f$.

On définit également la composition des noyaux : si M et N sont deux noyaux sur $\mathbb{R}$, leur produit MN est le noyau défini par :

$$MN(t, A) = \int N(s, A)M(t, ds).$$

Si M et N sont des noyaux de convolution correspondant aux mesures F_M et F_N respectivement, alors le noyau produit MN est encore un noyau de convolution pour la mesure convolée $F_M * F_N$.

On généralise maintenant ces définitions à la dimension p.

Définition 12 *La matrice* $N = (N_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ *est un* noyau *sur* $\mathbb{R}^p$ *si chacune de ses composantes* N_{ij} *est un noyau sur* $\mathbb{R}$ *au sens de la définition 11.*

Pour toute fonction $f = {}^t(f_1, \ldots, f_p)$ mesurable à coordonnées positives, l'action de N sur f est définie par analogie avec le produit matriciel de la façon suivante : $Nf = {}^t\big((Nf)_1), \ldots, (Nf)_p\big)$ avec

$$(Nf)_i(t) = \sum_{j=1}^{p} N_{ij} f_j(t).$$

De même, si M et N sont deux noyaux sur $\mathbb{R}^p$, leur composée est le noyau $MN = \big((MN)_{ij}\big)$ où

$$(MN)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} M_{ik} N_{kj}.$$

On définit enfin le noyau unité I par

$$\left\{ \begin{array}{rcll} I_{ij}(t,A) & = & 0 & \text{si} \quad i \neq j, \\ I_{ii}(t,A) & = & \mathbb{1}_A(t). & \end{array} \right.$$

Ainsi, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$, on a $If = f$, et pour tout noyau N, on a $IN = NI = N$.

Dans toute la suite N désignera un noyau sur $\mathbb{R}^p$. On notera N^k ses puissances pour la composition définie ci-dessus, avec la convention que $N^0 = I$.

Définition 13 *Le* noyau potentiel *associé au noyau N est le noyau*

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} N^k.$$

Cette notion généralise celle de fonction de renouvellement. En effet, si N est un noyau de convolution pour la mesure F, alors son noyau potentiel G est le noyau de convolution associé à la fonction de renouvellement U de F.

Sur l'ensemble des fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $(\mathbb{R}_+)^p$ on définit la relation d'ordre partiel suivante :

$$u \preceq v \quad \text{si} \quad \forall\, 1 \leq i \leq p, \quad u_i \leq v_i.$$

Cet ordre a la bonne propriété suivante : si $u \preceq v$ alors pour tout noyau M, on a $Mu \preceq Mv$.

Définition 14 *Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}_+)^p$ une fonction à coordonnées positives. On dit qu'elle est* excessive *pour le noyau N si elle vérifie*

$$Nu \preceq u.$$

1.6.2 Principe du maximum

Le but de ce paragraphe est d'étudier la localisation du maximum du potentiel d'une fonction positive. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et A^c son complémentaire. On note J_A le noyau sur $\mathbb{R}^p$ qui vérifie $(J_A f)_i(t) = f_i(t)\mathbb{1}_A(t)$, pour toute fonction f mesurable de $\mathbb{R}$ dans $(\mathbb{R}_+)^p$, c'est-à-dire que pour tous t dans $\mathbb{R}$ et B dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (J_A)_{ij}(t,B) & = & 0 & \text{si } i \neq j, \\ (J_A)_{ii}(t,B) & = & \mathbb{1}_{A\cap B}(t). & \end{array} \right.$$

Remarquons que $J_A f$ ne dépend que de la valeur de f sur A, et que ce n'est pas un noyau de convolution.

Soit G_A le noyau potentiel associé à NJ_A et G^A celui de $J_A N$. On a $NG^A = G_A N$ et $J_A G_A = G^A J_A$. On définit de même les noyaux analogues associés au complémentaire A^c. On définit également le noyau $H_A = J_A + J_{A^c} G_{A^c} N J_A = G^{A^c} J_A$ qui a des propriétés particulières.

On donne maintenant une série de propositions qui précisent les propriétés des noyaux ci-dessus et vont nous servir à établir un principe du maximum. Des définitions de H_A et de J_A on déduit immédiatement la proposition suivante.

Proposition 1.1 *Pour tout t dans $\mathbb{R}$, les mesures $(H_A)_{ij}(t,\cdot)$ sont portées par A, et pour tout t dans A, et B dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a :*

$$\begin{cases} (H_A)_{ij}(t,B) &= 0 \qquad \text{si } i \neq j, \\ (H_A)_{ii}(t,B) &= \mathbb{1}_B(t). \end{cases}$$

Proposition 1.2 *Si u est une fonction excessive, alors $H_A u \preceq u$.*

Démonstration

On montre par récurrence sur k qu'on a la relation suivante :

$$J_A u + \sum_{m=0}^{k} \Big[J_{A^c} (N J_{A^c})^m N J_A u \Big] \preceq u. \tag{1.10}$$

Pour $k = 0$, comme u est excessive et $J_A u \preceq u$ par définition de J_A, on a $NJ_A u \preceq Nu \preceq u$. Puis en appliquant J_{A^c} à cette inégalité et en ajoutant $J_A u$ à chaque membre, il vient $J_A u + J_{A^c} N J_A u \preceq J_A u + J_{A^c} u = u$.

Faisons l'hypothèse de récurrence au rang k.

Au rang $k+1$, on applique N puis J_{A^c} aux deux membres de l'inégalité de l'hypothèse de récurrence. On obtient :

$$\begin{aligned} J_{A^c} u \succeq J_{A^c} N u \quad &\succeq \quad J_{A^c} N J_A u + \sum_{m=0}^{k} \Big[J_{A^c} N J_{A^c} (N J_{A^c})^m N J_A u \Big] \\ &= \quad \sum_{m=0}^{k+1} \Big[J_{A^c} (N J_{A^c})^m N J_A u \Big]. \end{aligned}$$

En ajoutant $J_A u$ aux deux membres, on trouve :

$$J_{A^c} u + J_A u = u \succeq J_A u + \sum_{m=0}^{k+1} \Big[J_{A^c} (N J_{A^c})^m N J_A u \Big].$$

ce qui achève la démonstration par récurrence. En faisant tendre k vers $+\infty$ dans l'équation (1.10), on obtient bien $H_A u \preceq u$. □

Proposition 1.3 *On a les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} H_A &= J_A + J_{A^c} N H_A, \qquad \textit{donc} \quad NH_A = H_A \textit{ sur } A^c. \\ NH_A &= G_{A^c} N J_A. \end{aligned}$$

Démonstration

On a $G_{A^c} = I + NJ_{A^c}G_{A^c}$, donc $NH_A = NJ_A + NJ_{A^c}G_{A^c}NJ_A = G_{A^c}NJ_A$. On en déduit que $J_{A^c}NH_A = J_{A^c}G_{A^c}NJ_A = H_A - J_A$. Donc $H_A = J_A + J_{A^c}NH_A$. □

Proposition 1.4 *Soit u une fonction excessive. Alors $H_A u$ est la plus petite (pour la relation d'ordre $\preceq$) fonction excessive majorant u sur A.*

Démonstration

Soit $v = H_A u$. Comme u est excessive, on a $v = H_A u \preceq u$ d'après la proposition 1.2, et donc $Nv \preceq Nu \preceq u$. Comme $u = v$ sur A par la proposition 1.1, en particulier on a $Nv \preceq v$ sur A. Par la proposition 1.3, $NH_A = H_A$ sur A^c, donc sur cet ensemble $Nv = v$. Ainsi $Nv \preceq v$ partout et v est bien excessive.

Si w est excessive et majore u sur A, on a $H_A u \preceq H_A w$ par la proposition 1.1, et $H_A w \preceq w$ par la proposition 1.2. Donc $H_A u \preceq H_A w \preceq w$ partout. □

Proposition 1.5 *On a les égalités suivantes :*

$$G = H_A G + J_{A^c} G_{A^c} = H_A G + G^{A^c} J_{A^c}.$$

Démonstration

On multiplie l'égalité $I - J_{A^c}N = I - N + J_A N$ à gauche par G^{A^c} et à droite par G. On obtient :

$$G^{A^c}(I - J_{A^c}N)G = G^{A^c}(I - N)G + G^{A^c}J_A NG.$$

Or par définition on a $G^{A^c}(I - J_{A^c}N) = I = (I - N)G$. Donc on a

$$\begin{aligned} G &= G^{A^c} + G^{A^c} J_A NG \\ &= G^{A^c} J_{A^c} + G^{A^c} J_A (I + NG) \\ &= G^{A^c} J_{A^c} + H_A G \\ &= J_{A^c} G_{A^c} + H_A G, \end{aligned}$$

qui est bien l'égalité cherchée. □

Proposition 1.6 *Si f est une fonction à coordonnées positives quelconque, v une fonction excessive, et $A = \cup_{i=1}^p \{f_i > 0\}$, alors*

$$Gf \preceq v \quad \textit{sur } A \qquad \Longrightarrow \qquad Gf \preceq v \quad \textit{sur } \mathbb{R}.$$

Démonstration

Comme $Gf \preceq v$ sur A, on a, par la propostition 1.1, $H_A Gf \preceq H_A v$. Or v est excessive, donc par la proposition 1.2 on a $H_A v \preceq v$. Enfin par la proposition 1.5, on a $Gf = H_A Gf + G^{A^c} J_{A^c} f = H_A Gf$ car par définition de A, $J_{A^c} f = 0$. Ainsi $Gf = H_A Gf \preceq H_A v \preceq v$. □

On donne maintenant une notion de borne supérieure pour les fonctions vectorielles.

Définition 15 *Soit f une fonction à coordonnées positives, et $A \subset \mathbb{R}$. On définit la* borne supérieure *de f par :*

$$\sup_{t\in A} f(t) = \max_{1\le i\le p} \Big(\sup_{t\in A}(f_i(t)) \Big).$$

Cette définition est compatible avec notre relation d'ordre $\preceq$. En effet, sur l'ensemble A défini à la proposition 1.6 on a $f \preceq \sup_{t\in A} f(t)\mathbf{1}$, où $\mathbf{1} = {}^t(1, \ldots, 1)$ est la fonction dont toutes les coordonnées sont constantes égales à 1.

Corollaire 1.1 (Principe du Maximum) *Si la fonction $\mathbf{1}$ est excessive, alors pour toute fonction f à coordonnées positives, on a :*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} Gf(t) \;=\; \sup_{t\in A} Gf(t),$$

où $A = \cup_{i=1}^p \{f_i > 0\}$ est le support de f.

Démonstration

Soit $\alpha = \sup_{t\in A} Gf(t)$. Si α est infini, c'est évident. Sinon, on a $Gf \preceq \alpha\mathbf{1}$ sur A. Comme $\mathbf{1}$ est excessive, la proposition 1.6 donne $Gf \preceq \alpha\mathbf{1}$ sur $\mathbb{R}$. Donc $\sup_{t\in\mathbb{R}} Gf(t) \le \alpha$, et ainsi $\sup_{t\in\mathbb{R}} Gf(t) \;=\; \sup_{t\in A} Gf(t)$. □

1.6.3 Application à la fonction de renouvellement

On peut maintenant donner la démonstration du théorème 1.2. Soit m le vecteur propre défini en (1.6), et $N = (N_{ij})$ le noyau de convolution associé à F et renormalisé par le vecteur propre m de la façon suivante pour obtenir la propriété d'excessivité de le fonction $\mathbf{1}$:

$$N_{ij}(t, A) = \frac{m_j}{m_i} \int \mathbb{1}_A(t-s) F_{ij}(ds).$$

Alors $(Nf)_i(t) = \sum_{j=1}^p \Big[\frac{m_j}{m_i} \int f_j(t-s) F_{ij}(ds) \Big] = \Big((\frac{m_j}{m_i} F_{ij}) * f \Big)_i (t)$.

La fonction $\mathbf{1}$ est bien excessive pour N. En effet, comme m est un vecteur propre de $F(\infty)$, on a :

$$\begin{aligned}(N\mathbf{1})_i(t) &= \sum_{j=1}^{p}\Big[\frac{m_j}{m_i}\int F_{ij}(ds)\Big] \\ &= \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{p} m_j F_{ij}(\infty) \\ &= \frac{m_i}{m_i} = 1.\end{aligned}$$

Le potentiel G associé à N vérifie $G_{ij} = \frac{m_j}{m_i}U_{ij}$. Soit $h > 0$ un réel fixé, $A = [-h,\ h]$, et $f_i = \mathbb{1}_A$ pour $1 \le i \le p$. On a alors

$$\begin{aligned}(Gf)_i(t) &= \sum_{j=1}^{p}\Big[\frac{m_j}{m_i}\int \mathbb{1}_{[-h,\ h]}(t-s)U_{ij}(ds)\Big] \\ &= \sum_{j=1}^{p}\Big[\frac{m_j}{m_i}\big(U_{ij}(t+h) - U_{ij}(t-h)\big)\Big].\end{aligned}$$

La fonction Gf admet une borne supérieure finie au sens de la définition 15 sur l'intervalle borné $A = [-h,\ h]$, car U est fini d'après l'hypothèse (1.7). En vertu du principe du maximum, on a donc $\sup_{t\in\mathbb{R}} Gf(t) = \sup_{t\in[-h,\ h]} Gf(t)$. Notons i_0 l'indice de la coordonnée de Gf qui réalise cette borne supérieure. En prenant une suite (t_n) de points de A qui permet d'approcher la borne supérieure, et en majorant $\mathbb{1}_{[-h,\ h]}(t_n - x)$ par $\mathbb{1}_{[-2h,\ 2h]}(x)$, on obtient que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $1 \le i \le p$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p}\frac{m_j}{m_i}\big(U_{ij}(t+h) - U_{ij}(t-h)\big) &= (Gf)_i(t) \\ &\le \sup_{|t|\le h}(Gf)_{i_0}(t) \\ &\le \sum_{j=1}^{p}\frac{m_j}{m_{i_0}}\big(U_{i_0 j}(2h) - U_{i_0 j}(-2h)\big) \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Comme tous ces termes sont positifs et que $m_i > 0$ pour tout i, on en déduit que chaque $U_{ij}(t+h) - U_{ij}(t-h)$ est borné indépendemment de t. Pour obtenir le résultat annoncé avec un intervalle borné I quelconque, il suffit de l'inclure dans un intervalle symétrique. □

1.7 Preuve des théorèmes de renouvellement

On démontre maintenant les théorèmes de renouvellement 1.3 et 1.4. Grâce au résultat de la section précédente, la preuve est à nouveau identique à celle du cas

où le support des mesures est dans $\mathbb{R}_+$ pour les deux premières étapes. L'équation de renouvellement utilisée dans la troisième étape est légèrement différente puisqu'on prend $F(\infty)\mathbb{1}_{t\geq 0}$ au lieu de $F(\infty)$, et $Z(t) = m\mathbb{1}_{t\geq 0}$ au lieu de $Z(t) = m$. La démarche est cependant la même.

Démonstration du théorème 1.3

Pour tout intervalle $I =]a,\ b]$, pour tous $1 \leq i, j \leq p$, et $t \in \mathbb{R}$, on note $U_{ij}^{(t)}(I) = U_{ij}(t+b) - U_{ij}(t+a)$. Par le théorème 1.2, la famille $\left(U_{ij}^{(t)}(I)\right)_t$ est bornée. La proposition 3 donne alors l'existence d'une suite (t_n) tendant vers $+\infty$ et de mesures V_{ij} telles que pour tous $1 \leq i, j \leq p$ et tout intervalle I, $U_{ij}^{(t_n)}(I) \xrightarrow[n\to\infty]{} V_{ij}(I)$.

• Première étape : Les V_{ij} sont des multiples de la mesure de Lebesgue.
Soit $k_0 \in \{1, \ldots, p\}$ et $a > 0$. On définit un vecteur $G(t)$ par $G_k(t) = 0$ pour tout $k \neq k_0$ et G_{k_0} est non nulle et continue à support dans $[0,\ a]$. Alors $Z = U * G$ est bien définie, et Z est solution de l'équation de renouvellement

$$\forall\ 1 \leq i \leq p, \qquad Z_i(t) = G_i(t) + \sum_{k=1}^{p} \int Z_k(t-s)F_{ik}(ds). \tag{1.11}$$

Pour tout i, on a :

$$\begin{aligned} Z_i(t_n + t) &= \int G_{k_0}(t_n + t - s)U_{ik_0}(ds) \\ &= \int G_{k_0}(t - s)U_{ik_0}^{(t_n)}(ds) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \int G_{k_0}(t - s)V_{ik_0}(ds). \end{aligned}$$

Soit $\zeta_i(t) = \int G_{k_0}(t-s)V_{ik_0}(ds)$. Alors ζ_i est continue, bornée et $Z_i(t_n + t)$ tend vers $\zeta_i(t)$. Par convergence dominée dans l'équation de renouvellement (1.11), on obtient

$$\forall\ 1 \leq i \leq p, \qquad \zeta_i(t) = \sum_{k=1}^{p} \int \zeta_k(t-s)F_{ik}(ds).$$

Par le théorème 1.1 on en déduit que ζ_i est constante pour tout i. Donc la valeur de l'intégrale $\int G_{k_0}(t-s)V_{ik_0}(ds)$ est indépendante de t, et ce pour toute fonction G_{k_0} continue à support compact. Ainsi V_{ik_0} est invariante par translation et finie sur les compacts, c'est donc un multiple de la mesure de Lebesgue. On note ℓ la mesure de Lebesgue. Donc il existe $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tels que pour tous i, j, on ait $V_{ij} = a_{ij}\ell$.

• Deuxième étape : Montrons que $a_{ij} = cm_iu_j$.
On fixe de nouveau un k_0 et on définit maintenant G par $G_k(t) = 0$ pour tout $k \neq k_0$ et $G_{k_0}(t) = \mathbb{1}_{[0,\ 1]}(t)$. Alors $Z = U * G$ est bien définie, et Z est solution de l'équation de renouvellement $Z = G + F * Z$. On a pour tout x,

$$\begin{aligned} Z_i(t_n - t) &= \int G_{k_0}(t_n - t - s)U_{ik_0}(ds) \\ &= U_{ik_0}(t_n - t) - U_{ik_0}(t_n - t - 1) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} a_{ik_0}. \end{aligned}$$

Par convergence dominée dans l'équation de renouvellement $Z(t_n) = G(t_n) + F * Z(t_n)$, on trouve $a_{ik_0} = \sum_{k=1}^{p} a_{kk_0} F_{ik}(\infty)$. Donc ${}^t(a_{1k_0}, \ldots, a_{pk_0})$ est un vecteur propre de $F(\infty)$ pour la valeur propre 1. Comme l'espace propre est de dimension 1 d'après le théorème 4, il existe une constante r_{k_0} telle que pour tout i, $a_{ik_0} = r_{k_0} m_i$. En remplaçant F par ${}^tF$, on prouve de même l'existence d'une constante s_{k_0} telle que pour tout j, $a_{k_0 j} = s_{k_0} u_j$. Ainsi pour tous i, k_0, on a $a_{ik_0} = r_{k_0} m_i = s_i u_{k_0}$. Donc le rapport $\frac{s_i}{m_i} = \frac{r_{k_0}}{u_{k_0}} = c$ est indépendant de i, et $a_{ij} = r_j m_i = c m_i u_j$.

• Troisième étape : Identification de la constante c.
On choisit maintenant $G(t) = \big(F(\infty)\mathbb{1}_{t\geq 0} - F(t)\big)m$. Soit $Z(t) = m\mathbb{1}_{t\geq 0}$. Alors ces fonctions vérifient la relation suivante :

$$
\begin{aligned}
&G_i(t) + \textstyle\sum_{k=1}^{p} \int Z_k(t-s) F_{ik}(ds) \\
&\qquad = \begin{cases} m_i - \sum_{j=1}^{p} F_{ij}(t) m_j + \sum_{k=1}^{p} m_k F_{ik}(t) = m_i & \text{si } t \geq 0 \\ -\sum_{j=1}^{p} F_{ij}(t) m_j + \sum_{k=1}^{p} m_k F_{ik}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \\
&\qquad = Z_i(t).
\end{aligned}
$$

Donc $G + F * Z = Z$. En itérant cette égalité, on trouve :

$$
Z = \sum_{k=0}^{n-1} F^{(k)} * G + F^{(n)} * Z.
$$

Or on peut calculer explicitement le reste $F^{(n)} * Z$. En effet, on a :

$$
\begin{aligned}
(F^{(n)} * Z)_i(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{p} Z_k(t-s) F_{ik}^{(n)}(ds) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \Big[m_k \int_{-\infty}^{t} F_{ik}^{(n)}(ds) \Big] \\
&= \sum_{k=1}^{p} m_k F_{ik}^{(n)}(t),
\end{aligned}
$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand n tend vers l'infini car la fonction de renouvellement $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(t)$ est finie pour tout t. Donc $Z = U * G$. Comme G est décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_- =]-\infty,\ 0]$, G est directement Riemann intégrable. Pour conclure, on a besoin du lemme suivant qui fait le lien entre les deux formes du théorème de renouvellement.

Lemme 1.4 *Soit G un vecteur de fonctions directement Riemann intégrables, et U une matrice de fonctions de répartition telle que pour tout t réel, tout $h > 0$ et tous $1 \leq i, j \leq p$, on ait :*

$$
U_{ij}(t_n + t + h) - U_{ij}(t_n + h) \xrightarrow[n\to\infty]{} a_{ij} h.
$$

Si $Z = U * G$ existe, alors on a :

$$Z_i(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{p} \Big[a_{ik} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(s)ds \Big].$$

Ainsi en utilisant ce lemme ainsi que le résultat de la première étape, on trouve $m_i = Z_i(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(s)ds$. Or par définition de G on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} G_k(s)ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{p} \big(F_{kj}(\infty) \mathbb{1}_{y\geq 0} - F_{kj}(s) \big) m_j ds \\
&= \sum_{j=1}^{p} \Big[m_j \int_{-\infty}^{\infty} s F_{kj}(ds) \Big] \\
&= \sum_{j=1}^{p} m_j \gamma_{kj}.
\end{aligned}$$

Comme $a_{ij} = c m_i u_j$, on en déduit que

$$m_i = c \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} m_i u_j \gamma_{jk} m_k.$$

Or $\sum_{k,j} u_j \gamma_{jk} m_k \neq 0$ car $m_i > 0$ d'où $c = \big(\sum_{k,j} u_j \gamma_{jk} m_k \big)^{-1} = \gamma^{-1}$. Cette valeur est indépendante du choix de la suite (t_n). Comme $(U_{ij}(I+t))_t$ est bornée par hypothèse, de toute suite (t), on peut extraire une sous-suite convergente. Donc on a la convergence faible de $U_{ij}^{(t)}$ vers $a_{ij}\ell$ quand t tend vers $+\infty$. □

Remarque On a vu que si on fixe un k_0 et qu'on définit le vecteur G par $G_k(t) = 0$ pour tout $k \neq k_0$ et $G_{k_0}(t) = \mathbb{1}_{[0,\ 1]}(t)$. Alors $Z = U * G$ existe et est positive puisque G l'est. Donc on a nécessairement $\gamma \geq 0$, et comme on a vu que $\gamma \neq 0$, on a bien $\gamma > 0$.

Pour achever ce chapitre, il reste à donner la démonstration du lemme 1.4. La démarche est exactement la même qu'en dimension 1

Démonstration du lemme 1.4

Soit $h > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $g_k(t) = \mathbb{1}_{[(k-1)h,\ kh]}(t)$, $G_i^k = g_k$ pour tout i, et $Z^k = U * G^k$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
Z_i^k(t_n) &= \sum_{j=1}^{p} \int G_j^k(t_n - s) U_{ij}(ds) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \Big[U_{ij}(t_n - (k-1)h) - U_{ij}(t_n - kh) \Big] \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} h.
\end{aligned}$$

La limite est indépendante de n et k, donc pour tous $n,\ k,\ i,\ Z_i^k(t_n) \leq M_h$.

Soient $\underline{m}_k^i$ et $\overline{m}_k^i$ respectivement le minimum et le maximum de G_i sur $[(k-1)h,\ kh]$. Comme G est directement Riemann intégrable, les séries $\underline{\sigma}^i = h\sum \underline{m}_k^i$ et $\overline{\sigma}^i = h\sum \overline{m}_k^i$ sont absolument convergentes, et leur différence tend vers 0 quand h tend vers 0 (voir définition 3). Pour tout i, on a :

$$\begin{array}{lrcl}
 & \displaystyle\sum_{j=-k}^{k} \underline{m}_j^i g_j(t_n) \leq & G_i(t_n) & \leq \displaystyle\sum_{j=-k}^{k} \overline{m}_j^i g_j(t_n) + \sum_{|j|>k} \overline{m}_j^i g_j(t_n), \\
\displaystyle\sum_{\substack{r=1\\|j|\leq k}}^{p} \underline{m}_j^r \int g_j(t_n-y)U_{ir}(dy) \leq & Z_i(t_n) & \leq \displaystyle\sum_{\substack{r=1\\|j|\leq k}}^{p} \overline{m}_j^r \int g_j(t_n-y)U_{ir}(dy) + M_h \sum_{\substack{r=1\\|j|>k}}^{p} \overline{m}_j^r, \\
n\to\infty \qquad \displaystyle\sum_{r=1}^{p}\sum_{j=-k}^{k} \underline{m}_j^r a_{ir} h \leq & \overline{\lim}\ Z_i(t_n) & \leq \displaystyle\sum_{r=1}^{p}\sum_{j=-k}^{k} \overline{m}_j^r a_{ir} h + M_h \sum_{r=1}^{p}\sum_{|j|>k} \overline{m}_j^r, \\
k\to\infty \qquad \displaystyle\sum_{r=1}^{p} \underline{\sigma}^r a_{ir} \leq & \overline{\lim}\ Z_i(t_n) & \leq \displaystyle\sum_{r=1}^{p} \overline{\sigma}^r a_{ir},
\end{array}$$

où $\overline{\lim}$ désigne la limite supérieure. On fait tendre h vers 0 et on trouve $\overline{\lim}\ Z_i(t_n) = \sum_{r=1}^{p} a_{ir} \int G_r(s)ds$. On trouve la même valeur pour la limite inférieure. Donc il vient $\lim Z_i(t_n) = \sum_{r=1}^{p} a_{ir} \int G_r(s)ds$. □

Du lemme 1.4 et du théorème 1.3 on déduit directement la deuxième forme du théorème de renouvellement.

Chapitre 2

L'équation à coefficients Markoviens

On étudie l'équation récursive aléatoire présentée dans l'introduction :

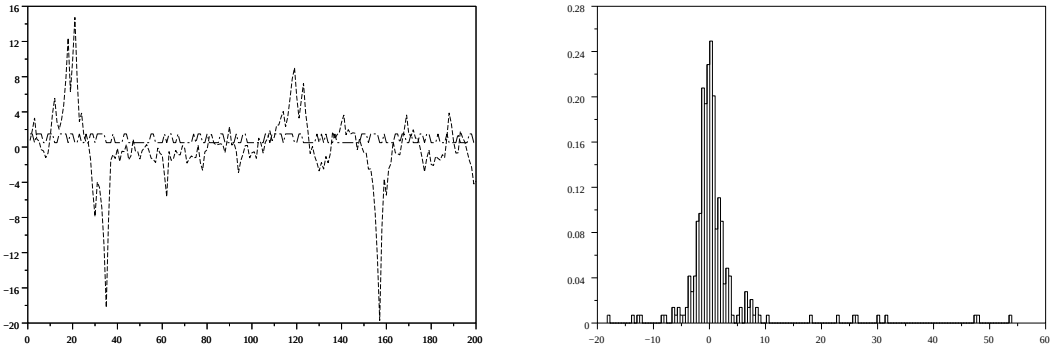
$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.1}$$

où (a_n) est une chaîne de Markov réelle à espace d'états fini et (b_n) une suite de variables aléatoires iid indépendante de la suite (a_n) et telles que (a_n, b_n) soit stationnaire et ergodique. La figure 2.1 montre une trajectoire de la suite (Y_n) avec les valeurs de la suite (a_n) correspondantes, ainsi qu'un histogramme de 300 valeurs de Y_{5000} (voir partie 2.10 pour les notations).

2.1 Origines du modèle et travaux antérieurs

La suite (Y_n) définie par la relation récursive (2.1) porte le nom de *processus autoregressif à régime markovien* (*Markov-switching auto-regression* en anglais) dans la littérature statistique. Ce modèle offre des possibilités nouvelles pour modéliser des séries chronologiques qui sont, en citant J. D. Hamilton qui les a introduites en économétrie, '*subject to discrete shifts in regime – episodes across which the dynamic behaviour of the series is markedly different*' (sujettes à des changements discrets de régime – des épisodes au cours desquels le comportement de la série est notablement différent). En effet dans la modélisation proposée, on observe la suite (Y_n), série chronologique d'observations, et sa dynamique est controlée par la suite (a_n), suite d'états, qui constitue le modèle du système étudié. La suite des états (a_n) est *cachée*, au sens où elle n'est pas observable. On connaît simplement l'ensemble des états possibles $\{e_1, \ldots, e_p\}$. Le problème statistique consiste à inférer la dynamique du système, i.e. la structure de la chaîne de Markov (a_n), essentiellement sa matrice de transition P, à partir d'une suite d'observations $Y_1, \ldots, Y_n$.

Ainsi dans les travaux pionniers de J. D. Hamilton ([37, 38]) en macro-économie quantitative, l'auteur a analysé la croissance du produit intérieur brut (PIB) américain (série (Y_n)) à l'aide de ce modèle (en fait une variante vectorielle de dimension 4). Il utilisait deux régimes $\{e_1, e_2\}$ représentant les périodes de *récession* et



(a) (b)

FIG. 2.1 – Simulation d'une auto-régression à deux régimes avec paramètres $p = 0.5$, $q = 0.7$, $e_1 = 1.5$, $e_2 = 0.5$, $b \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y_0 = 0$. (a) Une trajectoire de (a, Y) jusqu'à $n = 200$. (b) Histogramme de 300 valeurs de Y_{5000}.

de *croissance* respectivement. Les conclusions qu'il en a tirées ont ainsi apporté des preuves quantitatives à la théorie du *business cycle*, notamment sur son asymétrie, i.e. les durées moyennes des périodes de récession et de croissance sont distinctes. Comme pour une chaîne de Markov à deux états les durées moyennes de séjour dans chaque état sont simplement $1/p_{12}$ et $1/p_{21}$, l'asymétrie du business cycle qui faisait l'objet de nombreux débats économiques tient son explication ici par le fait que les deux probabilités de transition sont différentes (bien entendu le plus délicat étant de démontrer auparavant l'adéquation du modèle proposé).

Les modèles à régime markovien, de par leur simplicité d'interprétation et leur richesse en modélisation obtenue en variant le nombre des états et le type du bruit (b_n), ont depuis attiré beaucoup d'applications. En France citons deux travaux récents : C. PERRAUDIN [51] qui propose une analyse comparée des marchés du travail français et américain, et J. RYNKIEWICZ, A. DUTOT, A. ET F. STEINER [53] sur la prévision des pics d'ozone en région parisienne. Un livre récent de J. D. HAMILTON, [40], rassemblant les applications atteste de cette popularité.

Sur l'aspect méthodologique, les procédures d'estimation et de test statistique sont maintenant bien établies, grâce aux travaux cités notamment. En revanche, les propriétés fines de ces modèles, y compris la justification théorique des procédures proposées ne seront établies que beaucoup plus tard. Ainsi la convergence de l'estimateur de vraisemblance apparaît dans l'article de C. FRANCQ ET M. ROUSSIGNOL [26]. Dans [56] et [27], J.-F. YAO et C. FRANCQ ET J.-M. ZAKOÏAN respectivement établissent divers critères assurant l'ergodicité, i.e. une certaine convergence de la suite Y_n vers sa loi stationnaire. Dans l'article [57], J.-F. YAO ET J.-G. ATTALI étendent l'idée de régime markovien à une équation de récurrence non linéaire du type $Y_{n+1} = f(a_n, Y_n) + b_n$ utilisant une famille de fonctions $f(a, y)$ lipschiziennes ou à croissance sous-linéaire en y.

Ce chapitre complète l'étude théorique de ces modèles. On s'intéresse en particulier à la solution stationnaire de l'équation (2.1). Dans la partie 2.2, on rappelle les résultats obtenus sur la queue de la solution stationnaire dans le cas iid, puis on donne les nouveaux résultats dans le cas markovien. Les parties 2.3 à 2.8 contiennent la démonstration de ces résultats. Dans la partie 2.9, on discute de l'hypothèse d'indépendance entre les deux suites (a_n) et (b_n). Enfin, dans la partie 2.10 on donne des exemples de calculs explicites en dimension 2, ainsi que des résultats de simulations.

2.2 Résultats mathématiques

Rappelons le théorème général de A. Brandt montré dans [11] sur l'existence d'une solution stationnaire de l'équation (2.1).

Théorème 8 *Si la suite (a_n, b_n) est stationnaire, ergodique, et vérifie la condition*

$$-\infty \leq \mathbb{E}[\log |a_0|] < 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\log^+ |b_0|] < \infty,$$

alors la suite (R_n) définie par

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_{n-k} b_{n-1-k}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

est l'unique solution stationnaire de l'équation (2.1). La série dans le terme de droite de (2.2) est presque-sûrement absolument convergente. De plus, pour toute solution (Y_n) de l'équation (2.1), on a

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} |R_n - Y_n| = 0) = 1.$$

En particulier, la loi de Y_n converge vers la loi stationnaire.

Remarque P. Bougerol et N. Picard ont montré dans [9] que sous une hypothèse de non-anticipation et des conditions de moment, la condition $\mathbb{E} \log |a_0|$ strictement négative est également nécessaire à l'existence d'une solution stationnaire.

Dans toute la suite, on supposera donc que les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$\alpha = \mathbb{E} \log |a_0| < 0, \qquad \mathbb{E} \log^+ |b_0| < \infty, \tag{2.3}$$

et on appelle (R_n) l'unique solution stationnaire de l'équation (2.1). On s'intéresse à la queue de cette distribution stationnaire, c'est-à-dire au comportement asymptotique de $\mathbb{P}(xR_1 > t)$ quand t tend vers l'infini, et $x \in \{-1, 1\}$.

La queue de la solution stationnaire de l'équation (2.1) a déjà été étudiée lorsque la suite (a_n, b_n) est iid, y compris dans le cas multidimentionnel : les a_n sont des

matrices et Y_n et b_n des vecteurs. Dans [44, 45], H. KESTEN établit un théorème de renouvellement pour une certaine classe d'opérateurs et en déduit des résultats sur le comportement de la loi stationnaire quand les a_n ont une densité ou sont des matrices positives. Dans [47], E. LEPAGE utilise le même théorème de renouvellement pour étendre les résultats de Kesten à des matrices iid inversibles plus générales. Ces résultats seront rappelés en détail dans le chapitre 4. Enfin, dans [30], C. M. GOLDIE démontre un théorème de renouvellement implicite spécifique avec lequel il retrouve les résultats de Kesten dans le cas scalaire. Il applique aussi son théorème à l'étude de la queue de la solution stationnaire de plusieurs autres récurrences aléatoires faisant intervenir des variables iid. Après avoir rappelé en détail les résultats de [30], on va adapter ces techniques au cas présent, et utiliser la théorie du renouvellement exposée dans le chapitre 1.

2.2.1 Les résultats de C. M. Goldie

Dans ce paragraphe, on suppose que (a_n, b_n) est une suite iid vérifiant la condition (2.3). Comme on se limite à la dimension 1, on ne cite ici que les résultats de [30], avec cependant quelques variantes provenant de [47].

Théorème 9 *Soit (a_n, b_n) une suite iid telle qu'il existe un exposant $\kappa > 0$ vérifiant*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|a_0|^\kappa &= 1, \\ \mathbb{E}\big[|a_0|^\kappa \log^+ |a_0|\big] &< \infty, \\ \mathbb{E}|b_0|^\kappa &< \infty, \end{aligned}$$

et que la loi conditionnelle de $\log|a_0|$ sachant $a_0 \neq 0$ soit non-arithmétique.

• *Premier cas : Si a_0 est presque sûrement positif alors on a les convergences suivantes quand t tend vers l'infini*

$$t^\kappa \mathbb{P}(R_1 > t) \longrightarrow C_+, \tag{2.4}$$

et

$$t^\kappa \mathbb{P}(R_1 < -t) \longrightarrow C_-, \tag{2.5}$$

où C_+ et C_- sont des constantes positives.

• *Deuxième cas : Si a_0 peut prendre des valeurs négatives : $\mathbb{P}(a_0 < 0) > 0$, alors les limites (2.4) et (2.5) sont vraies aussi avec $C_+ = C_- \geq 0$.*

• *Dans les deux cas, la somme $C_+ + C_-$ est strictement positive si et seulement si l'application affine aléatoire $x \longmapsto a_0 x + b_0$ n'a pas de point fixe presque sûr : pour tout x fixé $\mathbb{P}(b_0 = (1 - a_0)x) < 1$.*

On a aussi des formules pour ces constantes. Sous les hypothèses du théorème 9, la quantité $\gamma = \mathbb{E}\big[|a_0|^\kappa \log|a_0|\big]$ est strictement positive, et dans le premier cas, on a

$$\begin{aligned} C_+ &= \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \big(\mathbb{P}(R_1 > t) - \mathbb{P}(a_0 R_0 > t)\big) t^{\kappa-1} dt, \\ C_- &= \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \big(\mathbb{P}(R_1 < -t) - \mathbb{P}(a_0 R_0 < -t)\big) t^{\kappa-1} dt, \end{aligned}$$

et dans le deuxième cas :

$$C_+ = C_- = \frac{1}{2\gamma}\int_0^\infty \big(\mathbb{P}(|R_1| > t) - \mathbb{P}(|a_0 R_0| > t)\big)t^{\kappa-1}dt.$$

Remarque Dans les deux cas on a :

$$C = C_+ + C_- = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty \big(\mathbb{P}(|R_1| > t) - \mathbb{P}(|a_0 R_0| > t)\big)t^{\kappa-1}dt,$$

et toutes les intégrales ci-dessus sont bien définies.

Les étapes de la démonstration sont les suivantes :

• On introduit la régularisée :

$$z(x,t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > u)du,$$

qui a la même limite que $t^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > t)$ d'après le lemme suivant.

Lemme 4 *Si* $\int_0^t u^\kappa \mathbb{P}(R_1 > u)du \sim ct$ *quand* t *tend vers* $+\infty$*, alors on a aussi* $\mathbb{P}(R_1 > t) \sim ct^{-\kappa}$ *quand* t *tend vers* $+\infty$*.*

A l'aide de l'équation récursive et de la propriété d'indépendance, on montre que z vérifie une équation de renouvellement implicite : la fonction G qui apparaît fait intervenir la loi de R_1.

• On utilise ensuite un théorème de renouvellement pour trouver la limite de z. Cependant cette limite fait intervenir l'intégrale de G qui n'est pas nécessairement strictement positive, à priori.

• Pour montrer que la somme des limites obtenues est non nulle, on utilise une extension de l'inégalité de symétrisation de Lévy établie par A. K. Grincevičius dans [32], et le lemme de Feller-Chung (voir S.C. Chow et H. Teicher [14]). On obtient ainsi, à un facteur près, une minoration de la probabilité $\mathbb{P}(|R_1| > t)$ par la probabilité $\mathbb{P}(|a_1 \cdots a_n| > t)$.

• On obtient enfin un équivalent de cette dernière probabilité en étudiant le maximum de la marche aléatoire $S_n = \sum_{k-1}^n \log|a_k|$ par des méthodes de temps d'échelle et de renouvellement (voir W. Feller, [25], chap. XII).

2.2.2 Le cas markovien

Enonçons maintenant les nouveaux théorèmes obtenus dans le cadre markovien. Comme dans le cas iid on distingue deux cas selon que les a_n sont positifs ou non.

Théorème 2.1 *Soit (a_n) une chaîne de Markov irréductible, apériodique, stationnaire à espace d'états fini $E = \{e_1, \dots, e_p\} \subset \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, de matrice de transition $P = (p_{ij})$ et de loi stationnaire μ.*

Soit (b_n) une suite de variables aléatoires iid non nulles, indépendante de la suite (a_n). Si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. *il existe un exposant $\kappa > 0$ tel que le rayon spectral de la matrice $P_\kappa = diag(e_i^\kappa)^t P$ soit égal à 1,*
2. *les $\log e_i$ ne sont pas tous des multiples entiers d'un même nombre,*
3. *$\mathbb{E}|b_0|^\kappa < \infty$,*

alors pour tout x dans $\{-1, 1\}$ on a :

$$t^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > t) \xrightarrow[t\to\infty]{} L(x),$$

où $L(1) + L(-1) > 0$. Si $b_0 \geq 0$, alors $L(-1) = 0$, et $L(1) > 0$. Si $b_0 \leq 0$, alors $L(1) = 0$, et $L(-1) > 0$.

Théorème 2.2 *Soit (a_n) une chaîne de Markov irréductible, apériodique, stationnaire de loi μ, de matrice de transition $P = (p_{ij})$ sur l'espace d'états fini $E = \{e_1, \dots, e_p\}$, avec $e_1, \dots e_\ell > 0$ et $e_{\ell+1}, \dots e_p < 0$ pour un $0 \leq \ell \leq p-1$.*

Soit (b_n) une suite de variables aléatoires iid non constantes, indépendante de la suite (a_n). Si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. *il existe un exposant $\kappa > 0$ tel que le rayon spectral de la matrice $P_\kappa = diag(|e_i|^\kappa)^t P$ soit égal à 1,*
2. *les $\log |e_i|$ ne sont pas tous des multiples entiers d'un même nombre,*
3. *$\mathbb{E}|b_0|^\kappa < \infty$,*

alors pour tout x dans $\{-1, 1\}$ on a :

$$t^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > t) \xrightarrow[t\to\infty]{} L(x),$$

où $L(1) + L(-1) > 0$. Si de plus la matrice ${}^tP$ est ℓ-irréductible (voir définition 21), alors $L(1) = L(-1) > 0$.

Les hypothèses 2. et 3. sont similaires au cas iid. Puisque les a_n ne sont jamais nuls, l'hypothèse 2. va servir de même à montrer une condition de non arithméticité nécessaire à l'utilisation de la théorie du renouvellement. L'hypothèse 3. sert elle à établir qu'une certaine fonction est directement Riemann intégrable.

L'hypothèse 1. est nouvelle et provient de la dépendance markovienne. On verra au paragraphe 2.4.1 que le rayon spectral $\rho(P_\kappa)$ peut être obtenu par la formule

$$\rho(P_\kappa) = \lim(\mathbb{E}|a_0 \cdots a_{1-n}|^\kappa)^{1/n}.$$

C'est donc un substitut logique de l'hypothèse $\mathbb{E}|a_0|^\kappa = 1$ du cas iid. On retrouve en fait la même formule que dans le cas multidimensionnel (voir l'introduction et le chapitre 4).

Remarquons aussi que l'on ne retrouve l'égalité à priori des deux limites quand (a_n) peut prendre des valeurs négatives que dans le cas où on a la ℓ-irréductibilité. Ici aussi on obtiendra une expression des constantes $L(x)$ similaire à celle de [30].

Comme présenté dans l'introduction, l'application $\kappa \longmapsto \log \rho(P_\kappa)$ est convexe (voir le paragraphe 2.4.1), sa dérivée à droite en 0 est strictement négative, et $\rho(P_0) = \rho(P) = 1$. Donc ici encore deux cas seulement peuvent se présenter.

- Soit pour tout $s > 0$, on a $\rho(P_s) < 1$, auquel cas on peut montrer que $\mathbb{E}|R_1|^s < \infty$ pour tout s, dès que $\mathbb{E}|b_0|^s < \infty$ (voir proposition 2.3), et ainsi $\mathbb{P}(|R_1| > t) = o(t^{-s})$ pour tout s. La va riable aléatoire R_1 a alors des moments finis à tout ordre.

- Soit il existe un unique exposant $\kappa > 0$ tel que $\rho(P_\kappa) = 1$, et $\rho(P_s) \longrightarrow \infty$ quand s tend vers l'infini. C'est le cas que l'on étudie ici. La queue est alors polynômiale.

La démonstration de ces théorèmes utilise la même démarche que [30] et [47]. Dans la partie 2.3, on donne les équations de renouvellement vérifiées par la régularisée z. Les parties 2.4 à 2.6 sont consacrées à la démonstration du théorème 2.1. Dans la partie 2.4, on applique un théorème de renouvellement multidimensionnel. Dans la partie 2.5, on étudie un cas particulier, et on établit une minoration de la probabilité $\mathbb{P}(|R_1| > t)$ en fonction des produits $a_0 \cdots a_{-n}$. Enfin dans la partie 2.6 on étudie la marche aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^{n} \log a_{1-k}$. Dans les parties 2.7 et 2.8, on démontre le théorème 2.2. La partie 2.8 est consacrée à l'étude détaillée de la notion de ℓ-irréductibilité.

2.3 Les équations de renouvellement

De même que dans [47] et [30], on cherche une équation de renouvellement satisfaite par la régularisée :

$$z(x,t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > u) du.$$

Pour prendre en compte la caractère markovien, on récrit z comme une somme de probabilités conditionnées : pour tous (x,t) dans $\{-1,1\} \times \mathbb{R}$, on pose $z(x,t) = \sum_{i=1}^{p} Z_i(x,t)$, où :

$$Z_i(x,t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i) du.$$

On pose aussi $Z = {}^t(Z_1, \ldots, Z_p)$. Comme $R_1 = a_0 R_0 + b_0$, pour tous (x,u) dans $\{-1,1\} \times \mathbb{R}$ et pour tout i on a :

$$\mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i) = \mathbb{P}(xa_0 R_0 > u, a_0 = e_i) + \psi_i(x,u),$$

avec

$$\begin{aligned}\psi_i(x,t) &= \mathbb{P}(xR_1 > t, a_0 = e_i) - \mathbb{P}(xa_0R_0 > t, a_0 = e_i)\\ &= \mathbb{P}(t - xb_0 < xa_0R_0 \leq t, a_0 = e_i) -\\ &\quad \mathbb{P}(t < xa_0R_0 \leq t - xb_0, a_0 = e_i). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Posons $G_i(x,t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa \psi_i(x,u)du$, la régularisée de ψ_i et $G = {}^t(G_1, \ldots, G_p)$. Par définition de G, on a la formule suivante pour la fonction z :

$$z(x,t) = \sum_{i=1}^{p}\Big[e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xa_0R_0 > u, a_0 = e_i)du + G_i(x,t)\Big]. \tag{2.7}$$

On veut maintenant faire un changement de variable pour se ramener à un terme en xR_0. C'est ici que le signe de a_0 intervient. On distingue donc deux cas, selon que a_0 est toujours positif ou peut changer de signe.

2.3.1 Cas positif

Supposons que tous les états de la chaîne de Markov sont positifs. Alors pour tous (x,t) dans $\{-1,1\}\times\mathbb{R}$ et pour tout i, par changement de variable et en utilisant le théorème de Fubini, il vient :

$$\begin{aligned} & e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xa_0R_0 > u, a_0 = e_i)du\\ &= e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{1}_{xa_0(\omega)R_0(\omega)>u}\mathbb{1}_{a_0(\omega)=e_i}d\mathbb{P}(\omega)du\\ &= \mathbb{E}\Big[e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{1}_{xR_0>\frac{u}{e_i}}\mathbb{1}_{a_0=e_i}du\Big]\\ &= \mathbb{E}\Big[e^{-t}e_i^{\kappa-1}\int_0^{\frac{e^t}{e_i}} u^\kappa \mathbb{1}_{xR_0>u}\mathbb{1}_{a_0=e_i}du\Big]\\ &= e^{-(t-\log e_i)}e_i^\kappa\int_0^{e^{t-\log e_i}} u^\kappa \mathbb{P}(xR_0 > u, a_0 = e_i)du. \end{aligned} \tag{2.8}$$

La propriété de Markov et la stationnarité de la suite (R_n) donnent alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(xR_0 > u, a_0 = e_i) &= \sum_{j=1}^{p}\mathbb{P}(xR_0 > u, a_0 = e_i, a_{-1} = e_j)\\ &= \sum_{j=1}^{p}\mathbb{P}(xR_0 > u | a_0 = e_i, a_{-1} = e_j)\mathbb{P}(a_0 = e_i, a_{-1} = e_j)\\ &= \sum_{j=1}^{p}\mathbb{P}(xR_0 > u | a_{-1} = e_j)\mu(e_j)p_{ji}\\ &= \sum_{j=1}^{p}\mathbb{P}(xR_1 > u | a_0 = e_j)\mu(e_j)p_{ji}. \end{aligned}$$

On obtient donc la relation suivante reliant les fonctions Z_i entre elles à l'aide des fonctions G_i : pour tout i on a

$$\begin{aligned} Z_i(x,t) &= \sum_{j=1}^{p} \Big[e^{-(t-\log e_i)} e_i^\kappa \int_0^{e^{t-\log e_i}} u^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_j) p_{ji} du \Big] + G_i(x,t) \\ &= e_i^\kappa \sum_{j=1}^{p} \Big[p_{ji} Z_j(x, t - \log e_i) \Big] + G_i(x,t). \end{aligned}$$

On peut récrire ce système d'équations comme un système d'équations de convolution en la variable t :

$$\forall\ 1 \le i \le p, \qquad Z_i(x,t) = \sum_{j=1}^{p} \Big[F_{ij} * Z_j(x,t) \Big] + G_i(x,t),$$

où F_{ij} désigne la mesure suivante :

$$F_{ij}(t) = e_i^\kappa p_{ji} \mathbb{1}_{t \ge \log e_i}. \tag{2.9}$$

La matrice $F = (F_{ij})$ est alors une matrice de distributions au sens du paragraphe 1.3.1. Avec les notations du chapitre 1, on a donc le système d'équations de renouvellement suivant (à x fixé) :

$$Z(x,t) = F * Z(x,t) + G(x,t). \tag{2.10}$$

2.3.2 Cas général

On étudie maintenant le cas général. Pour pouvoir connaître le signe de a_0, quite à réordonner les états on suppose qu'il existe $0 \le \ell \le p-1$ tel que $e_1, \dots, e_\ell > 0$ et $e_{\ell+1}, \dots, e_p < 0$. Si $\ell = 0$, on est dans le cas où tous les e_i sont négatifs. Alors l'équation (2.8) devient

$$\begin{aligned} & e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(x a_0 R_0 > u, a_0 = e_i) du \\ &= e^{-(t - \log|e_i|)} |e_i|^\kappa \int_0^{e^{t-\log|e_i|}} u^\kappa \mathbb{P}(sgn(xe_i) R_0 > u, a_0 = e_i) du, \end{aligned}$$

où $sgn(xe_i)$ désigne le signe de xe_i. Pour obtenir des équations similaires à celles du cas positif, on double la dimension : on introduit cette fois-ci $2p$ nouvelles fonctions :

$$\forall\ 1 \le i \le p, \quad Z_i^+(t) = Z_i(1,t) = e^{-t} \textstyle\int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(R_1 > u, a_0 = e_i) du,$$

$$\forall\ 1 \le i \le p, \quad Z_i^-(t) = Z_i(-1,t) = e^{-t} \textstyle\int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(-R_1 > u, a_0 = e_i) du.$$

Par la même démarche que dans le cas positif, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall\ 1 \le i \le \ell, \qquad & Z_i^+(t) = |e_i|^\kappa \textstyle\sum_{j=1}^p p_{ji} Z_j^+(t - \log|e_i|) + G_i(1,t), \\ \forall\ \ell+1 \le i \le p, \quad & Z_i^+(t) = |e_i|^\kappa \textstyle\sum_{j=1}^p p_{ji} Z_j^-(t - \log|e_i|) + G_i(1,t), \\ \forall\ 1 \le i \le \ell, \qquad & Z_i^-(t) = |e_i|^\kappa \textstyle\sum_{j=1}^p p_{ji} Z_j^-(t - \log|e_i|) + G_i(-1,t), \\ \forall\ \ell+1 \le i \le p, \quad & Z_i^-(t) = |e_i|^\kappa \textstyle\sum_{j=1}^p p_{ji} Z_j^+(t - \log|e_i|) + G_i(-1,t), \end{aligned} \tag{2.11}$$

qu'on peut aussi récrire comme système d'équations de renouvellement. En effet, on pose

$$\widetilde{Z} = {}^t(Z_1^+, \dots, Z_p^+, Z_1^-, \dots, Z_p^-) \text{ et } \widetilde{G} = {}^t(G_1^+, \dots, G_p^+, G_1^-, \dots, G_p^-),$$

avec $G_i^+(t) = G_i(1,t)$ et $G_i^-(t) = G_i(-1,t)$. On définit aussi la matrice $\widetilde{F} = (\widetilde{F}_{ij})$ de taille $2p \times 2p$ par :

$$\widetilde{F}_{ij}(t) = \begin{cases} |e_{\bar{i}}|^\kappa p_{\bar{j}\bar{i}} \mathbb{1}_{t \geq \log|e_{\bar{i}}|} & \text{si } 1 \leq i \leq \ell \text{ et } 1 \leq j \leq p, \\ & \quad \text{ou } p+\ell+1 \leq i \leq 2p \text{ et } 1 \leq j \leq p, \\ & \quad \text{ou } \ell+1 \leq i \leq p+\ell \text{ et } p+1 \leq j \leq 2p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\bar{i} = i$ si $i \leq p$ et $i - p$ sinon (voir l'équation (2.21) pour une forme matricielle explicite de $\widetilde{F}$). Alors le système (2.11) devient :

$$\widetilde{Z}(t) = \widetilde{F} * \widetilde{Z}(t) + \widetilde{G}(t).$$

2.4 Application du théorème de renouvellement

On commence maintenant la démonstration du théorème 2.1. Dans toute cette partie et les deux suivantes on supposera donc que les hypothèses de ce théorème sont vérifiées. On va appliquer le théorème de renouvellement 1.4 aux équations précédentes. Pour cela, on doit vérifier que la matrice de distribution F définie par l'équation (2.9) et le vecteur de fonctions G en satisfont les hypothèses.

On remarque immédiatement que les propriétés suivantes sont vérifiées :

- la matrice $F(\infty)$ est finie : en effet, on a $F_{ij}(\infty) = e_i^\kappa p_{ji} < \infty$.
- La matrice espérance $\Gamma = (\gamma_{ij})$ de F est bien définie. En effet, on a $\gamma_{ij} = e_i^\kappa p_{ji} \log e_i$.
- Comme les $\log e_i$ ne sont pas tous multiples entier d'un même nombre, la matrice F n'est pas arithmétique.
- Par définition, on a $F(\infty) = P_\kappa$ qui est irréducible et apériodique car P l'est et que les e_i ne sont pas nuls.
- On a choisi κ de sorte que $\rho(P_\kappa) = \rho(F(\infty)) = 1$.

On donne la preuve des autres points dans les paragraphes suivants.

2.4.1 Finitude de la fonction de renouvellement

Rappelons que la fonction de renouvellement s'écrit $U = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}$ (définition 6). Il faut vérifier que pour tout t réel, $U(t)$ est fini. Pour cela, on commence par étudier

le rayon spectral des matrices $P_s = diag(e_i^s)^t P$, i.e. $(P_s)_{ij} = e_i^s p_{ji}$, pour $s > 0$. Ces matrices jouent le rôle de transformées de Laplace (voir la partie 2.6). Pour la lisibilité des démonstrations, on va utilier ici des indices positifs.

Proposition 2.1 *Pour tout $s > 0$, on a :*

$$\rho(P_s) = \lim \left(\mathbb{E}|a_0 \cdots a_{-n}|^s\right)^{1/n} = \lim \left(\mathbb{E}|a_0 \cdots a_n|^s\right)^{1/n}.$$

Démonstration

La propriété de Markov permet de développer l'espérance de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|a_0 a_1 \cdots a_n|^s &= \sum_{i_0,\ldots,i_n} \mathbb{P}(a_0 = e_{i_0}, \ldots, a_n = e_{i_n})|e_{i_0} \cdots e_{i_n}|^s \\
&= \sum_{i_n,\ldots,i_n} p_{i_1 i_0} p_{i_2 i_1} \cdots p_{i_n i_{n-1}} \mu(e_{i_n})|e_{i_0} \cdots e_{i_n}|^s \\
&= \sum_{i,j} (P_s^n)_{ij} \mu(e_j)|e_j|^s,
\end{aligned}$$

où P_s^n désigne la puissance n-ème de la matrice P_s. On peut récrire cette équation matriciellement comme

$$\mathbb{E}|a_0 a_1 \cdots a_n|^s = {}^t\mathbf{1}(P_s^n)D_s, \tag{2.12}$$

où $\mathbf{1}$ désigne encore le vecteur de fonctions dont toutes les coordonnées sont constantes égales à 1 et D_s est le vecteur de coordonnées $(\mu(i)|e_i|^s)_{1\le i\le p}$. Comme P, et donc P_s est irréductible et apériodique, le théorème 4 donne la convergence

$$\frac{P_s^n}{\rho^n(P_s)} \xrightarrow[n\to\infty]{} A, \tag{2.13}$$

où A est une matrice constante à coordonnées strictement positives. Donc la suite $({}^t\mathbf{1}(P_s^n)D_s)^{1/n}$ tend vers $\rho(P_s)$ quand n tend vers l'infini. □

On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 2.1 *L'application $s \longmapsto \log\left(\rho(P_s)\right)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.*

Précisons encore quelques propriétés de ce rayon spectral.

Proposition 2.2 *La dérivée à gauche en zéro de la fonction $s \longmapsto \log\left(\rho(P_s)\right)$ est strictement négative.*

Pour démontrer cette proposition, on donne une autre expression du rayon spectral de P_s qui va nous permette d'utiliser une propriété de sous-miltiplicativité. On pose $\mathbb{E}_e[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot \mid a_0 = e]$ pour tout état e de E.

Lemme 2.1 *Soit*

$$h_n(s) = \max_{e\in E} \mathbb{E}_e[(a_1 \cdots a_n)^s].$$

Alors on a $\rho(P_s) = \inf_n (h_n(s))^{1/n}$.

Démonstration

Commençons par montrer que la suite (h_n) est sous-multiplicative. Pour tout état e, on a par la propriété de Markov :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_e[(a_1\cdots a_n a_{n+1}\cdots a_{n+m})^s] &= \mathbb{E}_e\big[(a_1\cdots a_n)^s \mathbb{E}_{a_n}[(a_1\cdots a_m)^s]\big] \\ &\leq h_m(s)\mathbb{E}_e[(a_1\cdots a_n)^s] \\ &\leq h_m(s)h_n(s),\end{aligned}$$

puisque $\mathbb{E}_{a_n}[(a_1\cdots a_m)^s] \leq h_m(s)$. Donc $\lim_n (h_n(s))^{1/n} = \inf_n (h_n(s))^{1/n}$.
De plus, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|a_0 a_1\cdots a_n|^s &= \sum_{e\in E} \mathbb{E}_e|a_1\cdots a_n|^s e^s \mu(e) \\ &\leq h_n(s)\sum_{e\in E} e^s\mu(e).\end{aligned}$$

Comme $\sum_{e\in E} e^s\mu(e) > 0$, la proposition 2.1 donne

$$\rho(P_s) \leq \lim_n (h_n(s))^{1/n}.$$

Pour l'inégalité dans l'autre sens, on choisit une suite d'états (e_{i_n}) telle que $h_n(s) = \mathbb{E}_{e_{i_n}}[(a_1\cdots a_n)^s]$. L'égalité ci-dessus donne donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|a_0 a_1\cdots a_n|^s &\geq h_n(s) e_{i_n}^s \mu(e_{i_n}) \\ &\geq C h_n(s),\end{aligned}$$

avec $C = \min_{e\in E} e^s\mu(e) > 0$. Ainsi il vient

$$\rho(P_s) \geq \lim_n (h_n(s))^{1/n}.$$

Comme $\lim_n (h_n(s))^{1/n} = \inf_n (h_n(s))^{1/n}$, le lemme est ainsi démontré. □

Démonstration de la proposition 2.2

Pour tout n, on fixe $e_{i_n} \in E$ de sorte que $h_n(s) = \mathbb{E}_{e_{i_n}}[(a_1\cdots a_n)^s]$. Comme à n fixé, le produit $a_1\cdots a_n$ est borné, on a :

$$\frac{\partial}{\partial s} h_n(s) = \mathbb{E}_{e_{i_n}}[(a_1\cdots a_n)^s \log(a_1\cdots a_n)],$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \frac{1}{n}\log h_n(s) = \frac{1}{n}\mathbb{E}_{e_{i_n}}[\log(a_1\cdots a_n)].$$

Pour tout $e \in E$, le théorème ergodique pour les chaînes de Markov donne :

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}_e[\log(a_1\cdots a_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\log a_0 = \alpha < 0. \tag{2.14}$$

Comme l'espace d'états E est fini, cette convergence est uniforme sur E. Ainsi, pour toute suite d'états (e_{i_n}), on a :

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}_{e_{i_n}}[\log(a_1\cdots a_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha < 0.$$

Donc il existe un entier N tel que

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \frac{1}{N} \log h_N(s) \leq \frac{\alpha}{2} < 0.$$

En particulier, l'application $s \longmapsto \frac{1}{N} \log h_N(s)$ est strictement négative sur un intervalle de la forme $]0, \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$. Alors on déduit du lemme précédent que :

$$\begin{aligned} \log \rho(P_s) &= \inf_n \frac{1}{n} \log h_n(s) \\ &\leq \frac{1}{N} \log h_N(s) \end{aligned}$$

qui est strictement négative pour tout $s \in]0, \varepsilon[$. Comme la fonction $s \longmapsto \log \rho(P_s)$ est convexe et vaut 0 en 0, ce résultat implique que sa dérivée à droite en zéro est strictement négative. □

On a $\rho(P_0) = 1$ puisque ${}^tP_0 = P$ est une matrice markovienne, et de plus, dans le cas présent, $\rho(P_\kappa) = 1$, donc la proposition 2.2 et le corollaire 2.1 donnent immédiatement le résultat suivant :

Corollaire 2.2 *Pour tout $0 < s < \kappa$, on a $\rho(P_s) < 1$.*

L'allure de la fonction $s \longmapsto \log\big(\rho(P_s)\big)$ est donc identique à celle donnée par la figure 2.6 (a), page 83.

Maintenant on peut étudier la finitude de la fonction de renouvellement U. Fixons s dans $]0,\ \kappa[$. On a $P_{\kappa-s} = (e_i^{\kappa-s} p_{ji}) = \big(\int e^{-su} F_{ij}(du)\big)$. Le corollaire 2.2 dit que $\rho(P_{\kappa-s}) < 1$, donc la série $\sum (P^n_{\kappa-s})_{ij}$ converge pour tous i, j. Comme pour tout n on a aussi $(P^n_{\kappa-s})_{ij} = \int e^{-su} F^{(n)}_{ij}(du)$, il vient :

$$(P^n_{\kappa-s})_{ij} \ \geq \ \int_{-\infty}^{t} e^{-su} F^{(n)}_{ij}(du) \ \geq \ e^{-st} \int_{-\infty}^{t} F^{(n)}_{ij}(du) \ = \ e^{-st} F^{(n)}_{ij}(t).$$

Donc, pour tous i, j et t réel, on a $U_{ij}(t) = \sum F^{(n)}_{ij}(t) \leq \ e^{st} \sum (P^n_{\kappa-s})_{ij} \ < \infty$. Ainsi la fonction de renouvellement est bien finie.

2.4.2 Identification de Z

On veut montrer que la fonction Z est en fait exactement égale à la solution particulière $U * G$ de l'équation de renouvellement (2.10). Pour cela, on itère cette équation, ce qui donne :

$$Z = \sum_{k=0}^{n-1} \Big[F^{(k)} * G\Big] + F^{(n)} * Z.$$

Il suffit donc de prouver que $F^{(n)} * Z$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, ce qui prouvera aussi que $U * G$ est bien définie. Or l'équation (2.7) implique que pour tout i, on a :

$$(F * Z)_i(x, t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(x a_0 R_0 > u, a_0 = e_i) du.$$

Par un calcul similaire, on montre que pour tous n et i on a :

$$(F^{(n)} * Z)_i(x,t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(x a_0 \cdots a_{1-n} R_{1-n} > u, a_0 = e_i) du,$$

ce qui donne en sommant sur i :

$$\sum_{i=1}^{p} (F^{(n)} * Z)_i(x,t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(x a_0 \cdots a_{1-n} R_{1-n} > u) du.$$

Or $\log(a_0 \cdots a_{1-n}) = \sum_{k=1}^{n} \log a_{1-k}$, donc par la limite (2.14) et l'hypothèse (2.3) on en déduit que le produit $a_0 \cdots a_{1-n}$ tend vers 0. Ainsi, pour tout $u > 0$, le théorème de convergence dominée donne

$$\mathbb{P}(x a_0 \cdots a_{1-n} R_{1-n} > u) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

car $R_1 < \infty$ presque sûrement et la suite (R_n) est stationnaire. Ainsi on a la convergence

$$\sum_{i=1}^{p} (F^{(n)} * Z)_i(x,t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Comme tous les termes de cette somme sont positifs, chacun tend vers 0 et on a bien $Z = U * G$.

2.4.3 Intégrablilité de G

Pour montrer que G est directement Riemann intégrable coordonnée par coordonnée (voir définition 3), on commence par l'étude des moments de R_1. Leur existence est liée à la valeur du rayon spectral des matrices P_s via la proposition 2.1 comme expliqué dans l'introduction.

Proposition 2.3 *Pour tout $0 \leq s < \kappa$, la variable aléatoire R_1 admet un moment d'ordre s fini.*

Démonstration

Si $s < \min\{1, \kappa\}$, alors par une inégalité de concavité et l'indépendance des deux suites (a_n) et (b_n) on a :

$$\mathbb{E}|R_1|^s \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\mathbb{E}(a_0 a_{-1} \cdots a_{1-k})^s \mathbb{E}|b_{-k}|^s \Big],$$

et si $1 \leq s < \kappa$, on utilise l'inégalité de Hőlder à la place de la concavité, ce qui donne :

$$(\mathbb{E}|R_1|^s)^{1/s} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Big[(\mathbb{E}(a_0 a_{-1} \cdots a_{1-k})^s)^{1/s} (\mathbb{E}|b_{-k}|^s)^{1/s} \Big].$$

Comme la suite (b_n) est iid, les termes $\mathbb{E}|b_{-k}|^s$ sont tous constants égaux à $\mathbb{E}|b_0|^s$. De plus, cette espérance est finie. En effet, on a $\mathbb{E}|b_0|^s \leq (\mathbb{E}|b_0|^\kappa)^{s/\kappa} < \infty$ par hypothèse. De plus, la proposition 2.1 et le corollaire 2.2 impliquent que les séries

$$\sum_k [\mathbb{E}(a_0 a_{-1} \cdots a_{1-k})^s]^{1/s} \quad \text{et} \quad \sum_k \mathbb{E}(a_0 a_{-1} \cdots a_{1-k})^s$$

sont convergentes par le critère de Cauchy. Ainsi $\mathbb{E}|R_1|^s < \infty$ pour tout $s < \kappa$. □

Pour montrer que chaque $G_i(x, \cdot)$ est directement Riemann intégrable, on suit le méthode de [30] qui repose sur les deux lemmes suivants.

Lemme 5 *Si f est dans $L^1(\mathbb{R})$, alors la fonction*

$$\check{f}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-u)} f(u) du$$

est directement Riemann intégrable.

Lemme 6 *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité. Alors on a :*

$$\int_0^\infty \big|\mathbb{P}(X > t) - \mathbb{P}(Y > t)\big| t^{\kappa-1} dt = \frac{1}{\kappa} \mathbb{E}\big|(X^+)^\kappa - (Y^+)^\kappa\big|,$$

où X^+ désigne la partie positive de X.

Proposition 2.4 *Pour tous i et x, les applications $t \longmapsto G_i(x,t)$ sont directement Riemann intégrables sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration

Pour tout i, on pose $\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid a_0 = e_1)$, et $\mathbb{E}_i$ l'espérance correspondante. Alors, pour tous x, t, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{G_i(x,t)}{\mu(i)} &= e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa [\mathbb{P}_i(xR_1 > u) - \mathbb{P}_i(xa_0R_0 > u)] du \\
&= e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{v\kappa} [\mathbb{P}_i(xR_1 > e^v) - \mathbb{P}_i(xa_0R_0 > e^v)] e^v dv \\
&= \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-v)} e^{v\kappa} [\mathbb{P}_i(xR_1 > e^v) - \mathbb{P}_i(xa_0R_0 > e^v)] dv \\
&= \check{g}_i(x,t),
\end{aligned}$$

avec $g_i(x,t) = e^{t\kappa}[\mathbb{P}_i(xR_1 > e^t) - \mathbb{P}_i(xa_0R_0 > e^t)]$. Donc d'après le lemme 5, $G_i(x,\cdot)$ est directement Riemann intégrable dès que $g_i(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Or on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |g_i(x,t)| dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\kappa} |\mathbb{P}_i(xR_1 > e^t) - \mathbb{P}_i(xa_0R_0 > e^t)| dt \\
&= \int_0^\infty u^{\kappa-1} |\mathbb{P}_i(xR_1 > u) - \mathbb{P}_i(xa_0R_0 > u)| du.
\end{aligned}$$

Le lemme 6 donne une autre expression de cette dernière quantité :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty u^{\kappa-1}|\mathbb{P}_i(xR_1 > u) - \mathbb{P}_i(xa_0R_0 > u)|du \\
&= \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}_i\big|\big((xR_1)^+\big)^\kappa - \big((xa_0R_0)^+\big)^\kappa\big| \\
&= \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}_i\big|\big((xa_0R_0 + xb_0)^+\big)^\kappa - \big((xa_0R_0)^+\big)^\kappa\big|.
\end{aligned}$$

On écrit cette dernière quantité comme une somme de quatre intégrales I_1, I_2, I_3 et I_4 avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}_i[\mathbb{1}_{-xb_0<xa_0R_0\le 0}(xa_0R_0 + xb_0)^\kappa], \\
I_2 &= \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}_i[\mathbb{1}_{0<xa_0R_0\le -xb_0}(xa_0R_0)^\kappa], \\
I_3 &= \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}_i\big[\mathbb{1}_{xb_0>0}\mathbb{1}_{xa_0R_0>0}\big((xa_0R_0 + xb_0)^\kappa - (xa_0R_0)^\kappa\big)\big], \\
I_4 &= \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}_i\big[\mathbb{1}_{0<-xb_0\le xa_0R_0}\big((xa_0R_0)^\kappa - (xa_0R_0 + xb_0)^\kappa\big)\big].
\end{aligned}$$

Ces quatre indicatrices recouvrent bien tous le scas possibles, puisque si $xa_0R_0 < 0$ et $xb_0 < 0$, ou $xa_0R_0 \le -xb_0 < 0$ ou $xa_0R_0 < 0 < -xb_0$ alors les dexu parties positives ci-dessus sont simultanément nulles. On va maintenant montrer que chacune de ces quatres expressions est finie, ce qui preouvera notre proposition. Majoration de I_1 :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}_i[\mathbb{1}_{-xb_0<xa_0R_0\le 0}(xa_0R_0 + xb_0)^\kappa] \\
&\le \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}_i\big[\big((xb_0)^+\big)^\kappa\big] \\
&\le \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}[|b_0|^\kappa\mathbb{1}_{a_0=e_i}]\mu(i) \\
&\le \frac{\mu(i)}{\kappa}\mathbb{E}[|b_0|^\kappa],
\end{aligned}$$

et cette dernière quantité est finie par hypothèse. Majoration de I_2 :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}_i[\mathbb{1}_{0<xa_0R_0\le -xb_0}(xa_0R_0)^\kappa] \\
&\le \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}_i\big[\big((xb_0)^+\big)^\kappa\big] \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

de même que pour I_1. Pour majorer I_3 et I_4, on rappelle les inégalités générales suivantes : pour tous $r > 0$, et x, y réels, on a

$$|x + y|^r \le c_r(|x|^r + |y|^r),$$

avec $c_r = \max\{2^{r-1}, 1\}$. On utilisera aussi le résultat de convexité suivant :

$$\big||x|^r - |y|^r\big| \le \begin{cases} |x-y|^r & \text{si} \quad 0 < r \le 1 \\ r|x-y|\max\{|x|,|y|\}^{r-1} & \text{si} \quad r > 1 \end{cases}$$

On distingue maintenant deux cas selon que κ est inférieur à 1 ou non. Si $\kappa \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} I_3, I_4 &\leq \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}_i|xb_0 + xa_0R_0 - xa_0R_0|^\kappa \\ &= \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}_i|b_0|^\kappa \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Si $\kappa > 1$, en utilisant ce qui précède on trouve

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \mathbb{E}_i[|xb_0 + xa_0R_0|^{\kappa-1}|b_0|] \\ &\leq c_{\kappa-1}\mathbb{E}_i[|b_0|^{\kappa-1}|b_0|] + c_{\kappa-1}\mathbb{E}_i[|b_0||a_0R_0|^{\kappa-1}]. \end{aligned}$$

Or sous la probabilité $\mathbb{P}_i$, R_0 est indépendant de (a_0, b_0), donc il vient

$$I_3 \leq c_{\kappa-1}\mathbb{E}_i|b_0|^\kappa + c_{\kappa-1}e_i^{\kappa-1}\mathbb{E}_i|b_0|\mathbb{E}_i|R_0|^{\kappa-1},$$

et cette dernière quantité est finie puisque $\kappa > 1$ et par la proposition 2.3. De même, pour I_4 on a :

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \mathbb{E}_i[|b_0||a_0R_0|^{\kappa-1}] \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Donc G est bien directment Riemann intégrable. □

2.4.4 Queue de la distribution

On a donc prouvé que la matrice F et le vecteur G satisfont les hypothèses du théorème de renouvellement 1.4. Donc pour tous i et x, avec les notations de ce théorème, on a la convergence suivante :

$$Z_i(x,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\gamma}m_i \sum_{j=1}^{p}\Big[u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(x,s)ds\Big].$$

En sommant sur i, on obtient :

$$z(x,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\gamma}\sum_{j=1}^{p}\Big[u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(x,s)ds\Big], \tag{2.15}$$

car $\sum m_i = 1$ d'après l'hypothèse (1.6). Cette limite est aussi celle de $t^\kappa\mathbb{P}(xR_1 > t)$ par le lemme 4. On a donc les limites suivantes :

$$\begin{aligned} t^\kappa\mathbb{P}(R_1 > t) &\xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\gamma}\sum_{j=1}^{p}\big[u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(1,s)ds\big], \\ t^\kappa\mathbb{P}(R_1 < -t) &\xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\gamma}\sum_{j=1}^{p}\big[u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(-1,s)ds\big]. \end{aligned}$$

On reconnait une expression similaire à celle des constantes C_+ et C_- de [30] en tenant compte des calculs faits dans la preuve de la proposition 2.4. Comme $G_i(1,t)$ est à priori différent de $G_i(-1,t)$, les deux limites obtenues sont à priori différentes.

Pour obtenir un vrai équivalent, il reste à prouver que ces limites sont non nulles. En fait, on montre seulement que la somme des deux limites est non nulle de même que dans le cas iid. On ne peut pas espérer faire mieux en général, comme le montre le cas particulier où b_0 est de signe constant.

2.5 La somme des limites est non nulle

Cette section est une première étape vers la preuve que la somme des limites précédentes est non nulle. On commence par étudier le cas particulier simple où b_0 est de signe constant.

2.5.1 Cas particulier : b_0 est de signe constant

L'équation (2.6) définit les fonctions ψ_i dont les G_i sont les régularisées :

$$\psi_i(x,t) = \mathbb{P}(t - xb_0 < xa_0R_0 \leq t, a_0 = e_i) - \mathbb{P}(t < xa_0R_0 \leq t - xb_0, a_0 = e_i).$$

Si $b_0 \geq 0$ et $x = 1$, ou $b_0 \leq 0$ et $x = -1$, on a $xb_0 \geq 0$ et pour tous i et t la probabilité $\mathbb{P}(t < xa_0R_0 \leq t - xb_0, a_0 = e_i)$ est nulle. On a ainsi

$$G_i(x,t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa \psi_i(x,u)du = e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(u - xb_0 < xa_0R_0 \leq u, a_0 = e_i)du \ \geq \ 0.$$

De même, si $b_0 \leq 0$ et $x = 1$, ou $b_0 \geq 0$ et $x = -1$, on a $xb_0 \leq 0$, et la probabilité $\mathbb{P}(t - xb_0 < xa_0R_0 \leq t, a_0 = e_i)$ est nulle pour tous i et t. Ainsi on a :

$$G_i(x,t) = -e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(u < xa_0R_0 \leq u - xb_0, a_0 = e_i)du \ \leq \ 0.$$

Donc, à x fixé, tous les $G_i(x,\cdot)$ sont de signe constant et ont le même signe. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\lim z(x,t) = 0$. Alors la formule (2.15) implique que

$$\frac{1}{\gamma}\sum_{j=1}^{p}\Big[u_j\int_{-\infty}^{\infty} G_j(x,y)dy\Big] = 0.$$

Comme γ et tous les u_j sont strictement positifs, et que les G_j sont de même signe constant à x fixé, ceci implique que $G_j(x,t) = 0$ pour tout j et tout $t \in \mathbb{R}$ puisque G_j est continue. Ainsi, on a $Z(x,t) = U * G(x,t) = 0$ pour tout t, et aussi $z(x,t) = 0$. Donc il vient $\mathbb{P}(xR_1 > t) = 0$ pour presque tout t positif.

- Si $b_0 \geq 0$, on a $R_1 \geq 0$, ce qui contredit $\mathbb{P}(xR_1 > t) = 0$ si $x = 1$. Ainsi $\lim z(1,t) > 0$. Et clairement $\lim z(-1,t) = 0$.

– Si $b_0 \leq 0$, on a $R_1 \leq 0$, ce qui contredit $\mathbb{P}(xR_1 > t) = 0$ si $x = -1$. Ainsi $\lim z(-1,t) > 0$. Et clairement $\lim z(1,t) = 0$.

Le cas particulier du théorème 2.1 est ainsi démontré.

2.5.2 Minoration de $\mathbb{P}(|R_1| > t)$

Etudions maintenant le cas général où b_0 change de signe. Comme dans le cas iid, la première étape pour montrer que la somme des limites est non nulle est d'obtenir une minoration de la probabilité $\mathbb{P}(|R_1| > t)$. Pour cela, on adapte la méthode de [30] décrite au paragraphe 2.2.1.

Proposition 2.5 *On peut trouver $\varepsilon > 0$ et une constante correspondante $C > 0$ tels que pour tout t assez grand, on ait :*

$$\mathbb{P}(|R_1| > t) \geq C\ \mathbb{P}(\sup_n\ a_0 \cdots a_{1-n} > \frac{2t}{\varepsilon}).$$

La clé de cette minoration est une extension au cas markovien de l'inégalité de symétrisation de Lévy, suivie d'une extension du lemme de Feller-Chung (voir [14]). Rappelons que $R_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \cdots a_{1-k} b_{-k}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$R_1^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_0 \cdots a_{1-k} b_{-k} \quad \text{et} \quad \Pi_n = a_0 \cdots a_{1-n}.$$

Pour étendre l'inégalité de symétrisation de Lévy au cas markovien, on a besoin d'une notion de médiane conditionnelle à notre chaîne de Markov inversée.

Définition 16 *Soient $0 \leq j \leq k$ et X une variable aléatoire $\sigma(a_{-j}, \ldots a_{-k})$-mesurable. On note $med_i(X)$ sa médiane conditionnellement à $a_{-j} = e_i$: elle vérifie*

$$\mathbb{P}(med_i(X) \leq X \mid a_{-j} = e_i) \geq \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(med_i(X) \geq X \mid a_{-j} = e_i) \geq \frac{1}{2}.$$

On note $med_-(X) = \min_{1 \leq i \leq p}\{med_i(X)\}$.

Cette nouvelle médiane a la propriété suivante pour tout i :

$$\mathbb{P}(med_-(X) \leq X \mid a_{-j} = e_i) \geq \mathbb{P}(med_i(X) \leq X \mid a_{-j} = e_i) \geq \frac{1}{2}.$$

On peut maintenant donner l'extension de l'inégalité de symétrisation de Lévy.

Lemme 2.2 *Pour tous $t > 0$ et $n \geq 1$, on a :*

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1 \leq j \leq n} \Big\{R_1^j + \Pi_j med_-\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big)\Big\} > t\Big) \leq 2\mathbb{P}(R_1^n > t).$$

Démonstration

Soit $T = \inf\Big\{j \leq n \text{ t.q. } R_1^j + \Pi_j med_-\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big) > t\Big\}$ si cet ensemble est non vide, $n+1$ sinon, et $B_j = \Big\{med_-\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big) \leq \frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big\}$.

L'événement $(T = j)$ est dans la tribu engendrée par $a_0, \ldots, a_{1-j}, b_0, \ldots, b_{1-j}$, et B_j dans celle engendrée par $a_{-j}, \ldots, a_{1-n}, b_{-j}, \ldots, b_{1-n}$. Donc ces deux événements sont indépendants conditionnellement à a_{-j}. De plus, pour tous i, j on a par définition de la médiane conditionnelle :

$$\mathbb{P}(B_j \mid a_{-j} = e_i) \geq \mathbb{P}\Big(med_i\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big) \leq \frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big)\Big) \geq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, comme les produits Π_j sont positifs, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_1^n > t) &\geq \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{n}[B_j \cap (T = j)]\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p}\mathbb{P}(B_j \mid a_{-j} = e_i)\mathbb{P}(T = j \mid a_{-j} = e_i)\mu(e_i) \\
&\geq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p}\mathbb{P}(T = j \mid a_{-j} = e_i)\mu(e_i) \\
&\geq \frac{1}{2}\mathbb{P}(T \leq n) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}\Big(\max_{1\leq j\leq n}\Big\{R_1^j + \Pi_j med_-\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big)\Big\} > t\Big),
\end{aligned}$$

par définition de T. C'est bien l'inégalité recherchée. □

Sous nos hypothèses, quand n tend vers l'infini, R_1^n tend vers R_1, et à j fixé $\Pi_j^{-1}(R_1^n - R_1^j)$ tend vers une variable aléatoire $\widehat{R}$ qui a la même loi que R_1. On pose $m_0 = med_-(R_1) = med_-(\widehat{R})$, et on fait tendre n vers l'infini dans le lemme 2.2. On obtient alors, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_j\{R_1^j + \Pi_j m_0\} > t\Big) \leq 2\mathbb{P}(R_1 > t). \tag{2.16}$$

En remplaçant R_1 par $-R_1$, on obtient une formule similaire, et ainsi en additionnant les deux, on a pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}(\sup_j |R_1^j + \Pi_j m_0| > t) \leq 2\mathbb{P}(|R_1| > t). \tag{2.17}$$

On peut minorer la première probabilité par une formule faisant intervenir les différences successives : pour tout $t > |m_0|$, on a

$$\mathbb{P}(\sup_n\{R_1^n + \Pi_n m_0\} > t) \geq \mathbb{P}(\exists n \text{ t.q. } |(R_1^{n+1} + \Pi_{n+1}m_0) - (R_1^n + \Pi_n m_0)| > 2t),$$

où R_1^0 vaut 0, et Π_0 vaut 1. Or cette différence se calcule explicitement :

$$\begin{aligned}(R_1^{n+1} + \Pi_{n+1} m_0) - (R_1^n + \Pi_n m_0) &= a_0 \cdots a_{1-n} b_{-n} + (\Pi_{n+1} - \Pi_n) m_0 \\ &= \Pi_n \big(b_{-n} + (a_{-n} - 1) m_0\big).\end{aligned}$$

Donc de l'inégalité (2.17) on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|R_1| > t) &\geq \frac{1}{2}\mathbb{P}(\exists n \ \text{ t.q. } \ \big|\Pi_n\big(b_{-n} + (a_{-n} - 1)m_0\big)\big| > 2t) \\ &\geq \frac{1}{2}\mathbb{P}(\exists n \ \text{ t.q. } \ \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon} \text{ et } \big|b_{-n} + (a_{-n} - 1)m_0\big| > \varepsilon). \quad (2.18)\end{aligned}$$

On utilise maintenant une extension de l'inégalité de Feller-Chung (voir [14]) pour transformer cette probabilité d'intersection en produit de probabilités et isoler le terme en Π_n.

Lemme 2.3 *Pour tous $t > |m_0|$ et $\varepsilon > 0$ on a :*

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\exists n \ \textit{t.q. } \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon} \ \textit{et } \big|b_{-n} + (a_{-n} - 1)m_0\big| > \varepsilon\Big) \\ &\quad \geq \min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}(|b_0 + (e_i - 1)m_0| > \varepsilon) \mathbb{P}\Big(\exists n \ \textit{t.q. } \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon}\Big).\end{aligned}$$

Démonstration

On pose $A_0 = \emptyset$, $A_n = \{\Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon}\}$ et $B_n = \{|b_{-n} + (a_{-n} - 1)m_0| > \varepsilon\}$. Conditionnellement à a_{-n}, B_n est indépendant de $A_0, \ldots, A_n$. Donc on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} [A_n \cap B_n]\big) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\big(B_n \cap A_n \bigcap_{j=0}^{n-1} [B_j \cap A_j]^c\big) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\big(B_n \cap A_n \bigcap_{j=0}^{n-1} A_j^c\big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(B_n \mid a_{-n} = e_i) \mathbb{P}\big(A_n \bigcap_{j=0}^{n-1} A_j^c \mid a_{-n} = e_i\big) \mu(e_i).\end{aligned}$$

où A^c désigne le complémentaire de l'ensemble A. Or, par la stationnarité du couple (a_n, b_n), et indépendance de ces deux suites, on a l'égalité $\mathbb{P}(B_n \mid a_{-n} = e_i) = \mathbb{P}(|b_0 + (e_i - 1)m_0| > \varepsilon)$. Ainsi il vient :

$$\mathbb{P}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} [A_n \cap B_n]\big) \geq \min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}(|b_0 + (e_i - 1)m_0| > \varepsilon) \mathbb{P}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big),$$

ce qui correspond à l'inégalité annoncée. □

On peut maintenant donner la preuve de la proposition 2.5.

Démonstration de la proposition 2.5

De l'équation (2.18) et du lemme 2.3 on déduit que pour tous $t > |m_0|$ et $\varepsilon > 0$ on a :

$$\mathbb{P}(|R_1| > t) \geq \frac{1}{2} \min_{1\leq i\leq p} \mathbb{P}(|b_0 + (e_i - 1)m_0| > \varepsilon)\mathbb{P}(\exists n \ \text{ t.q. } \ \Pi_{n-1} > \frac{2t}{\varepsilon}).$$

Comme b_0 n'est pas constant (sinon on est dans un des cas particuliers traités au paragraphe 2.5.1), on peut trouver un coefficient $\varepsilon > 0$ assez petit pour que l'on ait $\min_{1\leq i\leq p}\{\mathbb{P}(|b_0 + (e_i - 1)m_0| > \varepsilon)\} > 0$. Donc, il existe une constante C strictement positive telle que pour tout $t > |m_0|$, on ait :

$$\mathbb{P}(|R_1| > t) \geq C \ \mathbb{P}(\sup_n \ \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon}),$$

et la proposition est démontrée. □

Remarque La condition $\mathbb{P}(b_0 = (1 - a_0)c) < 1$ requise par [30] dans le cas iid pour assurer la non nullité de la somme des constantes est automatiquement vraie ici grâce à l'hypothèse d'indépendance des deux suites (voir aussi la partie 2.9).

On est maintenant ramené à l'étude du comportement asymptotique de ces produits Π_n. C'est l'objet de la section suivante.

2.6 Etude du produit $a_0 \cdots a_{1-n}$

Pour obtenir une estimation (dite de Cramér) de la probabilité $\mathbb{P}(\sup_n \ \Pi_n > t)$, on utilise la méthode des hauteurs d'échelle donnée dans [25] pour l'étude du maximum d'une marche aléatoire iid, et celle des marches aléatoires *associées* qui permet de transformer une marche à drift négatif en une marche à drift positif. Ces méthodes ont été étendues aux marches markoviennes par E. Arjas et T. P. Speed dans [1]. On commence par introduire quelques définitions et notations.

2.6.1 Définitions et notations

On définit la notion de processus de renouvellement markovien (*Markov renewal process* en anglais), par analogie avec un processus de renouvellement standard à pas iid (voir chapitre 1).

Définition 17 *Soient (X_n) une chaîne de Markov réelle sur un espace d'états fini, f une fonction mesurable et (Y_n) la suite $Y_n = f(X_n)$. On lui associe une marche aléatoire de la façon suivante :*

$$S_0 = 0, \qquad S_n = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

On dit que le processus (X_n, S_n) est un processus de renouvellement markovien.

Définition 18 *Une matrice* semi-markovienne *(ou* sous-stochastique*) est une matrice positive dont la somme des lignes est inférieure ou égale à* 1*. Si la somme de chaque ligne vaut exactement* 1*, c'est alors une matrice* markovienne *ou* stochastique*.*

On associe à un processus de renouvellement markovien une matrice semi-markovienne ayant pour coordonnées $q_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_n = e_j,\ Y_n \leq t \mid X_{n-1} = e_i)$, où les e_i sont les états de la chaîne (X_n).

On considère la marche aléatoire suivante. On pose $S_0 = 0$ et pour tout entier n,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \log(a_{1-k}) = \log(a_0 \cdots a_{1-n}) = \log \Pi_n.$$

Le processus (a_{1-n}, S_n) est donc un processus de renouvellement markovien (avec la fonction f égale à l'identité), ou une marche aléatoire à régime markovien (*Markov-modulated random walk* en anglais) dans la terminologie de S. Asmussen [4, 2]. On note $Q = (q_{ij})$ sa matrice semi-markovienne :

$$q_{ij}(t) = \mathbb{P}(a_{-n} = e_j,\ \log a_{-n} \leq t \mid a_{1-n} = e_i) = \mathbb{1}_{t \geq \log e_j} \frac{\mu(e_j)}{\mu(e_i)} p_{ji}.$$

C'est aussi une matrice de distributions au sens du paragraphe 1.3.1.

Définition 19 *Le premier* temps d'échelle *de cette marche aléatoire est*

$$\tau = \tau_1 = \inf\{n \geq 1 \ t.q.\ S_n > 0\},$$

et la première hauteur d'échelle *est* S_τ*.*

Le processus d'échelle $(a_{1-\tau}, S_\tau)$ est encore un processus de renouvellement markovien d'après la propriété de Markov forte. On lui associe la matrice semi-markovienne $H(t)$ dont les coordonnées sont :

$$H_{ij}(t) = \mathbb{P}(\tau < \infty,\ S_\tau \leq t,\ a_{1-\tau} = e_j \mid a_1 = e_i).$$

C'est aussi une matrice de distributions au sens de la partie 1.3.1. Comme $S_\tau > 0$, H a pour support la demi-droite positive.

Avant de poursuivre, on a besoin de connaître la répartition des états de l'espace E autour de la valeur 1.

Lemme 2.4 *Il existe un* i *tel que* $e_i > 1$*.*

Démonstration

Raisonnons par l'absurde. Si tous les états e_i étaient inférieurs où égaux à 1, alors pour tout $s > 0$, la matrice ${}^tP_s$ serait sous-stochastique, et donc de rayon spectral inférieur ou égal à 1 par la proposition 6. Or la fonction $s \longmapsto \log \rho(P_s)$ est convexe, de dérivée strictement négative en 0 et $\rho(P_\kappa) = 1$, donc en particulier, pour tout

$s > \kappa$, on a $\rho(P_s) > 1$ ce qui contredit notre hypothèse. □

Ainsi il existe des états strictement supérieurs à 1. Quite à réordonner les états, on suppose que $e_1, \dots, e_q > 1$ et $e_{q+1}, \dots, e_p \leq 1$.

Par définition du temps d'échelle, on a $S_{\tau-1} \leq 0$ et $S_\tau > 0$, ce qui implique que $\log(a_{1-\tau}) > 0$, i.e. $a_{1-\tau} > 1$, donc $a_{1-\tau} \in \{e_1, \dots, e_q\}q$. Ainsi $H_{ij} = 0$ pour tout $j > q$. On note $\overline{H}$ la matrice carrée extraite $(H_{ij})_{1\leq i,j\leq q}$. De plus, S_τ ne peut pas excéder la valeur $\max \log(e_i)$ puisque $S_{\tau-1} \leq 0$, donc H (et par conséquent $\overline{H}$) a un support borné.

Définition 20 *Par récurrence, on défininit le n-ème temps d'échelle par*

$$\tau_n = \inf\{k > \tau_{n-1} \ t.q. \ S_k > S_{\tau_{n-1}}\},$$

et S_{τ_n} la hauteur d'échelle correspondante.

On vérifie qu'on a bien :

$$H_{ij}^{(n)}(t) = \mathbb{P}(\tau_n < \infty, \ S_{\tau_n} \leq t, \ a_{1-\tau_n} = e_j \mid a_1 = e_i),$$

où $H^{(n)}$ désigne la n-ème convolée de H. On a aussi $\overline{H^{(n)}} = \overline{H}^{(n)}$, avec des notations évidentes. La fonction de renouvellement (voir définition 6) associée à H sera notée $\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} H^{(n)}$, et celle associée à $\overline{H}$ sera notée $\overline{\Psi}$.

Remarquons aussi que $H(\infty)$ et $\overline{H}(\infty)$ ont le même rayon spectral. En effet, pour tout t on pose $\widetilde{H}(t) = (H_{ij}(t))_{q+1\leq i\leq p, \ 1\leq j\leq q}$, de sorte que la matrice $H(t)$ s'écrit sous forme de blocs de la façon suivante :

$$H(t) = \begin{pmatrix} \overline{H}(t) & 0 \\ \widetilde{H}(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme cette matrice est triangulaire par blocs, on en déduit que $\rho(H(\infty)) = \rho(\overline{H}(\infty))$.

2.6.2 Etude du processus d'échelle

Comme dans [25] pour le cas iid, on veut maintenant utiliser un théorème de renouvellement. Ici, il est plus facile de démontrer les hypothèses du théorème 7 que d'appliquer directement les résultats de [1]. On cherche donc à appliquer le théorème 7 avec $F = \overline{H}$ et $\alpha = \kappa$. Certaines hypothèses sont immédiatement vérifiées :

- Comme $H(0) = 0$, on a $\rho(\overline{H}(0)) < 1$, donc l'hypothèse i est vérifiée.
- Comme tous les $H_{ij}(t)$ sont des probabilités, $\overline{H}(\infty)$ est finie.

– L'espérance $\overline{\Gamma}$ de $\overline{H}_\kappa(t) = \int_0^t e^{-\kappa u}\overline{H}(du)$ est finie car on a vu que $\overline{H}$ est à support fini.

– L'hypothèse que les $\log e_i$ ne sont pas tous multiples entiers d'un même nombre assure encore la non-arithméticité de $\overline{H}$.

Il reste donc à démontrer l'irréductibilité et l'apériodicité, ainsi qu'à calculer la valeur du rayon spectral de $\overline{H}_\kappa(\infty)$.

On a pour tous $1 \leq i, j \leq q$:

$$\begin{aligned}
\overline{H}_{ij}(\infty) &= \mathbb{P}(\tau < \infty,\ a_{1-\tau} = e_j \mid a_1 = e_i) \\
&\geq \mathbb{P}(\tau = 1,\ a_{1-\tau} = e_j \mid a_1 = e_i) \\
&= \mathbb{P}(a_0 > 1,\ a_0 = e_j \mid a_1 = e_i) \\
&= \mathbb{P}(a_0 = e_j \mid a_1 = e_i) \ = \ p_{ji}\frac{\mu(e_j)}{\mu(e_i)}.
\end{aligned}$$

Comme tous les $\mu(e_i)$ sont strictement positifs, et que la matrice P est irréducible et apériodique, on en déduit que $\overline{H}(\infty)$ est aussi irréducible et apériodique. Ceci prouve en outre que $\overline{H}(\infty)$ n'est pas la matrice nulle, donc il existe i et j tels que $\overline{H}_{ij}(0) < \overline{H}_{ij}(\infty)$, et l'hypothèse *iii* est aussi vérifiée.

Calculons maintenant le rayon spectral de $\overline{H}_\kappa(\infty)$. Pour cela, on suit la méthode de [1]. On introduit la transformée de Laplace $\widehat{Q}(s) = (\hat{q}_{ij}(s))$ de la matrice Q :

$$\hat{q}_{ij}(s) = \int e^{st} q_{ij}(dt) = e_j^s \frac{\mu(e_j)}{\mu(e_i)} p_{ji} = \Delta_s^{-1} P_s \Delta_s,$$

avec $\Delta_s = diag(e_i^s \mu(e_i))$. A cette conjugaison près $\widehat{Q}(s)$ n'est autre que la matrice P_s. En particulier, $\widehat{Q}(s)$ et P_s ont le même rayon spectral, donc $\rho\big(\widehat{Q}(\kappa)\big) = 1$.

De plus, comme $P_\kappa = F(\infty)$, on a $P_\kappa m = m$ où m est le vecteur propre défini par l'équation (1.6). Donc $\Delta_\kappa^{-1} m$ est un vecteur propre à droite à coordonnées strictement positives de la matrice $\widehat{Q}(\kappa)$ pour la valeur propre 1. Posons $\Sigma = \Delta_\kappa^{-1\,t} m = diag(\frac{m_i}{\mu(e_i)})$. Alors la matrice :

$$Q_\kappa(t) = \Sigma^{-1}\Big(\int_{-\infty}^{t} e^{\kappa u} Q(du)\Big)\Sigma$$

est encore une matrice semi-markovienne puisque $Q_\kappa(\infty) = \widehat{Q}(\kappa)$. Soit $({}^\kappa a_{1-n}, {}^\kappa S_n)$ le processus de renouvellement markovien qui lui est associé. Ceci revient à faire un changement de loi sur le processus (a_{1-n}, S_n), par le même type de transformation que pour les marches aléatoires associées dans le cas iid. En effet, dans ce cas la transformation effectuée sur la loi F du pas de la marche est $F(dx) \to e^{\kappa x} F(dx)$, où κ est choisi de telle sorte que $\int e^{\kappa x} F(dx) = 1$. Si la marche de départ a un drift négatif, la marche associée ainsi construite a un drif positif. On va voir que cette propriété est encore vrai dans le cas markovien. Rappelons le résultat suivant de [1] :

Proposition 7 *La matrice $\Sigma^{-1}H_\kappa(\infty)\Sigma$ est la matrice semi-markovienne associée au processus d'échelle $({}^\kappa S_{\tau_n})$, et l'espérance de $\log({}^\kappa a_{1-n})$ est la dérivée de $s \longmapsto \log\rho(\widehat{Q}(s))$ au point κ.*

Or, on a vu que $\rho(\widehat{Q}(s)) = \rho(P_s)$. De plus, $\log\rho(P_0) = \log\rho(P_\kappa) = 0$, la dérivée à droite en 0 de $s \longmapsto \log\rho(P_s)$ est strictement négative (proposition 2.2) et cette fonction est convexe (corollaire 2.1). Donc la dérivée de $s \longmapsto \log\rho(\widehat{Q}(s))$ en κ est strictement positive, i.e. $\mathbb{E}[\log({}^\kappa a_{1-n})] > 0$, et la marche $({}^\kappa S_n)$ tend presque sûrement vers $+\infty$ par le théorème ergodique pour les chaînes de Markov. On rappelle maintenant la proposition 4.2 de [2] :

Proposition 8 *Soient $\mathcal{P}$ une probabilité sur Ω et $\mathcal{E}$ l'espérance correspondante. On note $\mathcal{H}_{ij}(t) = \mathcal{P}(\tau < \infty,\ S_\tau \le t,\ a_{1-\tau} = e_j \mid a_1 = e_i)$. Alors on a :*
si $\mathcal{E}(\log a_0) > 0$ alors $\rho(\mathcal{H}(\infty)) = 1$, et
si $\mathcal{E}(\log a_0) < 0$ alors $\rho(\mathcal{H}(\infty)) < 1$.

On en déduit que $\rho(\Sigma^{-1}H_\kappa(\infty)\Sigma) = \rho(H_\kappa(\infty)) = \rho(\overline{H}_\kappa(\infty)) = 1$.

On a maintenant démontré que les hypothèse du théorème 7 sont vérifiées. On va donc pouvoir l'appliquer dans le paragraphe suivant.

2.6.3 Comportement asymptotique du maximum

Soit $M = \sup_n S_n = \sup_n S_{\tau_n}$, le maximum de la marche aléatoire (S_n). On va exprimer la probabilité $\mathbb{P}(M \le t \mid a_1 = e_i)$ à l'aide de la fonction de renouvellement Ψ. Par définition de H, on a, pour tous $1 \le i \le p$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M \le t \mid a_1 = e_i) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_n < \infty, S_{\tau_n} \le t, \tau_{n+1} = \infty \mid a_1 = e_i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(\tau_n < \infty, S_{\tau_n} \le t, \tau_{n+1} = \infty, a_{1-\tau_n} = e_j \mid a_1 = e_i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{p} \big[\mathbb{P}(\tau_n < \infty, S_{\tau_n} \le t, a_{1-\tau_n} = e_j \mid a_1 = e_i) \times \\
&\quad (1 - \mathbb{P}(\tau_{n+1} < \infty \mid a_{1-\tau_n} = e_j)\big] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{p} \big[H_{ij}^{(n)}(t)\big(1 - \sum_{k=1}^{p} H_{jk}(\infty)\big)\big] \\
&= \sum_{j=1}^{p} \big[\Psi_{ij}(t)\big(1 - \sum_{k=1}^{p} H_{jk}(\infty)\big)\big],
\end{aligned}$$

et si $i \le q$ ceci devient :

$$\mathbb{P}(M \le t \mid a_1 = e_i) = \sum_{j=1}^{q} \big[\overline{\Psi}_{ij}(t)\big(1 - \sum_{k=1}^{q} \overline{H}_{jk}(\infty)\big)\big].$$

Quand t tend vers l'infini, le théorème 7 donne alors l'équivalent suivant :

$$\begin{aligned} 1-\mathbb{P}(M\leq t \mid a_1=e_i) &= \sum_{j=1}^{q}\Big[\big(1-\sum_{k=1}^{q}\overline{H}_{jk}(\infty)\big)\int_t^\infty e^{-\kappa u}(e^{\kappa u}\overline{\Psi}_{ij})(du)\Big] \\ &\sim \sum_{j=1}^{q}\Big[\big(1-\sum_{k=1}^{q}\overline{H}_{jk}(\infty)\big)\int_t^\infty e^{-\kappa u}\frac{1}{\overline{\gamma}}\overline{m}_i\overline{u}_j du\Big] \\ &= \sum_{j=1}^{q}\Big[\big(1-\sum_{k=1}^{q}\overline{H}_{jk}(\infty)\big)\frac{1}{\overline{\gamma}}\overline{m}_i\overline{u}_j\Big]e^{-\kappa t}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

où $\overline{m}$ et $\overline{u}$ sont des vecteurs propres à coordonnées strictement positives de $\overline{H}_\kappa(\infty)$, normalisés comme en (1.6), et $\overline{\gamma}={}^t\overline{u}\overline{\Gamma}\overline{m}>0$.

Enfin, il reste à prouver qu'il existe $j\leq q$ tel que la quantité $1-\sum_{k=1}^{q}\overline{H}_{jk}(\infty)$ soit strictement positive. Or la proposition 8 dit que $\rho(\overline{H}(\infty))=\rho(H(\infty))<1$ car $\mathbb{E}\log|a_0|<0$ (hypothèse (2.3)). Donc $\overline{H}(\infty)$ n'est pas une matrice stochastique et ainsi il existe $j\leq q$ tel que $1-\sum_{k=1}^{q}\overline{H}_{jk}(\infty)>0$.

2.6.4 Conclusion

Donc on a démontré que le terme de droite dans la limite (2.19) est strictement positif, et ainsi quand t tend vers l'infini on a :

$$e^{\kappa t}\mathbb{P}(M>t)\geq\sum_{i=1}^{q}e^{\kappa t}\mathbb{P}(M>t\mid a_1=e_i)\mu(e_i)\geq C>0, \tag{2.20}$$

où C est une constante strictement positive dont la valeur peur changer d'une ligne à l'autre. Enfin en regroupant l'équation (2.20) et la proposition 2.5, on obtient, pour t assez grand :

$$\begin{aligned} t^\kappa\mathbb{P}(|R_1|>t) &\geq Ct^\kappa\mathbb{P}(\sup_n\ \Pi_n>\frac{2t}{\varepsilon}) \\ &= Ct^\kappa\mathbb{P}(\sup_n\ \log\Pi_n>\log\frac{2t}{\varepsilon}) \\ &= Ct^\kappa\mathbb{P}(M>\log\frac{2t}{\varepsilon}) \\ &\geq Ct^\kappa t^{-\kappa} \\ &\geq C>0. \end{aligned}$$

Et donc avec les notations du théorème 2.1 on a $L(-1)+L(1)>0$. Le théorème 2.1 est donc maintenant intégralement démontré.

2.7 Démonstration du théorème 2.2

On suppose maintenant que les hypothèses du théorème 2.2 sont vérifiées. Comme dans les sections précédentes, il s'agit de montrer que $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ vérifient les hypothèses

du théorème 1.4, appliquer ce théorème et montrer que la limite trouvée est non nulle. Comme dans le cas positif, on remarque tout de suite que $\widetilde{F}_{ij}(\infty)$ est finie et que son espérance $\widetilde{\Gamma}$ est bien définie. Et l'hypothèse que les $\log|e_i|$ ne sont pas tous multiples entiers d'un même nombre donne encore la non arithméticité de $\widetilde{F}$.

Pour les autres points, on s'appuie le travail déjà fait dans le cas positif. Rappelons que l'on a $e_1, \dots e_\ell > 0$ et $e_{\ell+1}, \dots e_p < 0$ pour un $0 \leq \ell \leq p-1$. Pour tout réel t, soit $F(t)$ la matrice $(|e_i|^\kappa p_{ji} \mathbb{1}_{t \geq \log|e_i|})_{1 \leq i,j \leq p}$. C'est une matrice positive, et on a :

$$\widetilde{F} = \begin{pmatrix} (F)_{1\leq i\leq \ell,\ 1\leq j\leq p} & 0 \\ 0 & (F)_{\ell+1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq p} \\ 0 & (F)_{1\leq i\leq \ell,\ 1\leq j\leq p} \\ (F)_{\ell+1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq p} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

On va appliquer les résultats précédents à F et en déduire les propriétés de $\widetilde{F}$. Grâce au travail effectué dans le cas positif, on sait que $F(\infty)$ est irréductible, apériodique et de rayon spectral égal à 1.

2.7.1 Irréductibilité

L'irréductibilité de $F(\infty)$ n'entraine pas nécessairement celle de $\widetilde{F}(\infty)$. En effet, la matrice A_1 suivante est irréductible, mais la matrice B_1 associée pour $\ell = 1$ ne l'est pas (pour la partition $(\{1,3,5\},\ \{2,4,6\})$).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour préciser ce phénomène, on introduit une nouvelle définition.

Définition 21 *Soit $A = (a_{ij})_{i\leq i,j\leq p}$ une matrice positive et $0 \leq \ell \leq p-1$ un entier. On dit que A est* ℓ-réductible *si il existe (I, J) une partition (éventuellement triviale) de $\{1, \dots, p\}$ telle que*

$$\begin{aligned} &\bullet \textit{Pour tout } 1 \leq i \leq \ell \qquad \textit{si } i \in I, \quad \textit{alors } a_{ij} = 0 \quad \forall j \in J, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \textit{si } i \in J, \quad \textit{alors } a_{ij} = 0 \quad \forall j \in I. \\ &\bullet \textit{Pour tout } \ell+1 \leq i \leq p \quad \textit{si } i \in I, \quad \textit{alors } a_{ij} = 0 \quad \forall j \in I, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \textit{si } i \in J, \quad \textit{alors } a_{ij} = 0 \quad \forall j \in J. \end{aligned}$$

Dans le cas contraire on dit que A est ℓ-irréductible.

Dans le paragraphe 2.8, nous étudirons plus en détail cette notion de ℓ-irréductibilité. En particulier, la proposition 2.6 implique ici que la matrice $\widetilde{F}(\infty)$ est irréductible si et seulement si la matrice $F(\infty)$ est ℓ-irréductible.

Pour la suite de la démontration du théorème 2.2, on va donc distinguer deux cas, selon que ${}^tP$, et donc en fait $F(\infty)$ est ou non ℓ-réductible pour la valeur de ℓ donnée par le théorème 2.2.

2.7.2 Cas ${}^tP$ ℓ-irréductible

On suppose dans ce paragraphe que la matrice ${}^tP$ est ℓ-irréductible. Dans ce cas, $F(\infty)$ est également ℓ-irréductible pour l'exposant κ fixé par le théorème 2.2, et par la proposition 2.6, $\widetilde{F}(\infty)$ est irréductible. De plus, par construction on a $\|\widetilde{F}(\infty)^n\| \leq \|F(\infty)^n\|$ pour tout n. Comme $F(\infty)$ est apériodique par les résultats du cas positif, cette suite de normes est donc bornée. Montrons que les autres propriétés de la matrice F se transmettent à la matrice $\widetilde{F}$.

Lemme 2.5 *Soient $A = (a_{ij})_{i\leq i,j\leq p}$ une matrice positive, $0 \leq \ell \leq p-1$ un entier, et*

$$B = \begin{pmatrix} (a_{ij})_{1\leq i\leq l,\ 1\leq j\leq p} & 0 \\ 0 & (a_{ij})_{l+1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq p} \\ 0 & (a_{ij})_{1\leq i\leq l,\ 1\leq j\leq p} \\ (a_{ij})_{l+1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq p} & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors A et B ont le même rayon spectral.

Démonstration

Calculons le polynôme caractéristique de B. En ajoutant les p dernières colonnes de $B - XI_{2p}$ aux p premières, puis en soustrayant les p premières lignes de la matrice ainsi obtenue aux p dernières, on obtient $det(B-XI_{2p}) = det(A-XI_p)det(A_1-XI_p)$, où A_1 est la matrice suivante :

$$A_1 = \begin{pmatrix} (a_{ij})_{1\leq i\leq l,\ 1\leq j\leq p} \\ (-a_{ij})_{l+1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq p} \end{pmatrix}.$$

Ainsi le rayon spectral de B est le maximum de celui de A et de celui de A_1. Comme A est positive et que coordonnée par coordonnée $|A_1| = A$, la proposition 4 implique que $\rho(A_1) \leq \rho(A)$. Donc $\rho(B) = \rho(A)$. □

Ainsi le rayon spectral de $\widetilde{F}(\infty)$ est bien égal à 1 puisque celui de $F(\infty)$ l'est. Remarquons aussi que si λ est une valeur propre de A, et X un vecteur propre associé, alors on a $B{}^t({}^tX, {}^tX) = {}^t({}^t(AX), {}^t(AX)) = \lambda{}^t({}^tX, {}^tX)$, et donc ${}^t({}^tX, {}^tX)$ est un vecteur propre de B pour la même valeur propre. Soient m et u des vecteurs propres de $F(\infty)$ pour la valeur propre 1, à coordonnées strictement positives et tels que $\sum m_i = \sum m_i u_i = 1$. Alors $\widetilde{m} = \frac{1}{2}{}^t({}^tm, {}^tm)$ est un vecteur propre à droite de $\widetilde{F}(\infty)$ à coordonnées strictement positives et $\sum \widetilde{m_i} = 1$. Et $\widetilde{u} = {}^t({}^tu, {}^tu)$ un vecteur propre à gauche à coordonnées strictement positives vérifiant $\sum_{i=1}^{2p} \widetilde{u}_i\widetilde{m}_i = \sum_{i=1}^{p} u_i m_i = 1$.

Soit $\widetilde{U} = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{F}^{(k)}$ la fonction de renouvellement associée à $\widetilde{F}$. On veut démontrer que pour tout t réel $\widetilde{U}(t)$ est fini. Or pour tout t, on a $\widetilde{F}_{ij}(t) \leq F_{\overline{i}\overline{j}}(t)$ (où $\overline{i} = i$ si $i \leq p$ et $i-p$ sinon), et il en est de même pour leur k-ème produit de convolution. De plus on a vu dans le cas positif que $U(t) < \infty$, où $U = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}$ est la fonction

de renouvellement associée à F. Donc il en est de même pour $\widetilde{U}(t)$.

Comme dans le cas positif, pour démontrer que $\widetilde{Z} = \widetilde{U} * \widetilde{G}$, il suffit de prouver que $\widetilde{F}^{(n)} * \widetilde{Z} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Or on a vu au paragraphe 2.3 que :

$$\begin{aligned}(\widetilde{F} * \widetilde{Z})_i(t) &= \sum_{j=1}^{p} e^{-(t-\log|e_i|)} \int_0^{e^{t-\log|e_i|}} |e_i|^\kappa p_{ji} u^\kappa \mathbb{P}(\pm R_1 > u, a_0 = e_j) du \\ &= e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(\pm a_0 R_0 > u, a_0 = e_i) du.\end{aligned}$$

On obtient de même pour tout n l'égalité suivante :

$$(\widetilde{F}^{(n)} * \widetilde{Z})_i(t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(\pm a_0 \cdots a_{1-n} R_{1-n} > u, a_0 = e_i) du,$$

et donc, comme dans le cas positif, on a :

$$\sum_{i=1}^{p} (\widetilde{F}^{(n)} * \widetilde{Z})_i(t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(\pm a_0 \cdots a_{1-n} R_{1-n} > u) du.$$

Or on a vu que la limite (2.14) assure que le produit $a_0 \cdots a_{1-n}$ tend vers 0. Donc pour tout $u > 0$, le théorème de convergence dominée implique que la probabilité $\mathbb{P}(\pm a_0 \cdots a_{1-n} R_{1-n} > u)$ tend aussi vers 0, car $R < \infty$ presque sûrement et est stationnaire. Ainsi la suite $\left(\sum_{i=1}^{p} (\widetilde{F}^{(n)} * \widetilde{Z})_i(t) \right)$ tend vers 0, et comme tous les termes de cette somme sont positifs, chacun tend vers 0. On a donc, comme annoncé $\widetilde{Z} = \widetilde{U} * \widetilde{G}$.

On a $\widetilde{G}_i(t) = G_{\tilde{i}}(\pm 1, t)$ et cette fonction est directement Riemann intégrable sous les hypothèses du théorème 2.2, de même que dans le cas positif.

On a donc prouvé que $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ vérifient toutes les hypothèses du théorème 1.4. Donc pour tous i, t, on a la limite suivante, avec $\widetilde{\gamma} = {}^t\widetilde{u}\widetilde{\Gamma}\widetilde{m}$,

$$\widetilde{Z}_i(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\widetilde{\gamma}} \widetilde{m}_i \sum_{j=1}^{2p} \widetilde{u}_j \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}_j(s) ds \qquad \forall\ 1 \le i \le 2p. \tag{2.22}$$

Remarquons que $\widetilde{\gamma} = \gamma = {}^t u \Gamma m$ où Γ désigne l'espérance de F. En effet, on a :

$${}^t\widetilde{u}\widetilde{\Gamma}\widetilde{m} = \frac{1}{2}({}^t u, {}^t u) \begin{pmatrix} (\gamma_{ij})_{1\le i\le l,\ 1\le j\le p} & 0 \\ 0 & (\gamma_{ij})_{l+1\le i\le p,\ 1\le j\le p} \\ 0 & (\gamma_{ij})_{1\le i\le l,\ 1\le j\le p} \\ (\gamma_{ij})_{l+1\le i\le p,\ 1\le j\le p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix}.$$

Donc $\widetilde{\gamma} = \frac{1}{2}({}^t u \Gamma m + {}^t u \Gamma m) = \gamma$. En sommant les termes de la limite (2.22), on obtient pour tout x dans $\{-1,\ 1\}$:

$$z(x,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{p} u_j \int_{-\infty}^{\infty} \big(G_j(-1,s) + G_j(1,s)\big) ds, \tag{2.23}$$

et on utilise à nouveau le lemme 4 pour obtenir la queue de la distribution de R_1. Remarquons aussi que la formule (2.23) donne l'égalité des deux limites pour $x = 1$ et $x = -1$, et qu'on retrouve la formule $C = C_+ + C_-$ du paragraphe 2.2.1.

2.7.3 Cas ${}^tP$ ℓ-réductible

Supposons maintenant que la matrice ${}^tP$ est ℓ-réductible. Dans ce cas, on sait par la remarque suivant la démonstration de la proposition 2.6 qu'il existe une partition non triviale (I, J) de $\{1, \ldots, 2p\}$ telle que pour tous (i, j) dans $I \times J$ on ait $\widetilde{F}_{ij} = \widetilde{F}_{ji} = 0$. De plus, I et J sont de cardinal p et leur restriction à l'ensemble $\{1, \ldots, p\}$ est encore une partition. Pour fixer les notations, on supposera que l'élément 1 est dans l'ensemble I. Cette propriété de réductibilité implique que le système (2.11) se décompose en deux sous-systèmes indépendants de taille p, l'un pour les $(\widetilde{Z}_i)_{i\in I}$ et l'autre pour les $(\widetilde{Z}_j)_{j\in J}$. La matrice associée a chacun de ces deux systèmes est la matrice F qui vérifie les hypothèse du théorème de renouvellement 1.4 comme on l'a vu au cas positif. Dans la section précédente, on a vu aussi que pour tout i, $\widetilde{G}_i$ est directement Riemann intégrable. Donc on peut appliquer le théorème 1.4 et on obtient pour tout i dans I :

$$\widetilde{Z}_i(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\gamma} m_{\bar{i}} \sum_{k\in I} u_{\bar{k}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}_k(s)ds,$$

et pour tout j dans J :

$$\widetilde{Z}_j(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\gamma} m_{\bar{j}} \sum_{k\in J} u_{\bar{k}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}_k(s)ds.$$

En sommant ces égalités, on obtient :

$$z(1,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{p} u_k \int_{-\infty}^{\infty} \big(\mathbb{1}_I(k)G_k(1,s) + \mathbb{1}_J(k)G_k(-1,s)\big)ds,$$

et

$$z(-1,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{p} u_k \int_{-\infty}^{\infty} \big(\mathbb{1}_J(k)G_k(1,s) + \mathbb{1}_I(k)G_k(-1,s)\big)ds.$$

Dans ce cas, on n'a plus nécessairement l'égalité à priori des deux limites quand $x = 1$ et $x = -1$, mais leur somme a toujours la même expression que dans le cas précédent ainsi que dans le cas iid.

2.7.4 Non nullité des limites

Il nous reste à établir que la somme de ces deux limites est non nulle. Pour cela, la propriété de ℓ-irréductibilité n'intervient plus. La preuve est donc commune aux deux cas précédents, puisque la somme des limites a la même expression.

Le cas particulier du paragraphe 2.5.1 lorsque b_0 est de signe constant n'est plus valable ici puisque les a_n peuvent changer de signe. Comme on l'a vu au paragraphe 2.5, on a besoin de supposer que b_0 est non constante pour obtenir la minoration de la proposition 2.5, c'est pourquoi on a rajouté cette hypothèse dans le théorème 2.2 (voir aussi la partie 2.9 pour une hypothèse alternative). A cette différence près, les résultats du paragraphe 2.5 peuvent encore s'étendre au cas présent.

Pour l'analogue du lemme 2.2, on n'a plus la propriété de positivité des produits Π_j. Mais on peut adapter la démonstration pour obtenir quand même le résultat, en découpant les événements selon le signe que prend le produit Π_n.

On commence par définir une autre médiane conditionnelle. Soit X une variable aléatoire. Avec les notations du paragraphe 2.5.2, on définit $med_+(X)$ par

$$med_+(X) = \max_{1\leq i\leq p}\{med_i(X)\}.$$

L'analogue du lemme 2.2 est alors le lemme suivant.

Lemme 2.6 *Pour tous $t > 0$ et $n \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned} 2\mathbb{P}(R_1 > t) \;\; \geq \;\; & \mathbb{P}\Big(\max_{1\leq j\leq n} \Big\{ \mathbb{1}_{\Pi_j>0}\Big[R_1^j + \Pi_j med_-\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big)\Big]\Big\} > t\Big) + \\ & \mathbb{P}\Big(\max_{1\leq j\leq n} \Big\{ \mathbb{1}_{\Pi_j<0}\Big[[R_1^j + \Pi_j med_+\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big)\Big]\Big\} > t\Big) \end{aligned}$$

Démonstration

Par analogie avec le lemme 2.2, on définit les événements suivants :

$$T_+ = \inf\Big\{ j \leq n \text{ t.q. } \Pi_j > 0 \;\text{ et }\; R_1^j + \Pi_j med_-\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big) > t\Big\}$$

si cet ensemble est non vide, $n+1$ sinon,

$$T_- = \inf\Big\{ j \leq n \text{ t.q. } \Pi_j < 0 \;\text{ et }\; R_1^j + \Pi_j med_+\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big) > t\Big\}$$

si cet ensemble est non vide, $n+1$ sinon,

$$B_j^+ = \Big\{ med_-\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big) \leq \frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big\}, \text{ et } B_j^- = \Big\{ med_+\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big) \geq \frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big\}.$$

Les événement $(T_+ = j)$ et $(T_- = j)$ sont dans la tribu engendrée par $a_0, \ldots, a_{1-j}$, et $b_0, \ldots, b_{1-j}$, et les événemets B_j^+ et B_j^- dans celle engendrée par $a_{-j}, \ldots, a_{1-n}$, $b_{-j}, \ldots, b_{1-n}$. Donc ces événements sont indépendants conditionnellement à a_{-j}. De plus, pour tous i, j on a, par définition des médianes conditionnelles :

$$\mathbb{P}(B_j^+ \mid a_{-j} = e_i) \geq \mathbb{P}(med_i\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big) \leq \frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big)) \geq \frac{1}{2},$$

et

$$\mathbb{P}(B_j^- \mid a_{-j} = e_i) \geq \mathbb{P}(med_i\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big) \geq \frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big)) \geq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on peut minorer la probabilité que R_1^n soit plus grand que t de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_1^n > t) &\geq \sum_{j=1}^{n} \Big[\mathbb{P}\big(R_1^j + \Pi_j\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big) > t, \Pi_j > 0\big) + \\
&\quad \mathbb{P}\big(R_1^j + \Pi_j\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big) > t, \Pi_j < 0\big)\Big] \\
&\geq \mathbb{P}\big(\bigcup_{j=1}^{n} \big[[(T_+ = j) \cap B_j^+] \cup [(T_- = j) \cap B_j^-]\big]\big) \\
&\geq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} \Big[\mathbb{P}(T_+ = j \mid a_{-j} = e_i)\mathbb{P}(B_j^+ \mid a_{-j} = e_i) + \\
&\quad \mathbb{P}(T_- = j \mid a_{-j} = e_i)\mathbb{P}(B_j^- \mid a_{-j} = e_i)\Big] \\
&\geq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} \Big[\mathbb{P}(T_+ = j \mid a_{-j} = e_i) + \mathbb{P}(T_- = j \mid a_{-j} = e_i)\Big] \\
&\geq \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(T_+ \leq n) + \mathbb{P}(T_- \leq n)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big[\mathbb{P}\Big(\max_{1\leq j\leq n}\Big\{\mathbb{1}_{\Pi_j>0}\Big[R_1^j + \Pi_j med_-\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big)\Big]\Big\} > t\Big) + \\
&\quad \mathbb{P}\Big(\max_{1\leq j\leq n}\Big\{\mathbb{1}_{\Pi_j<0}\Big[R_1^j + \Pi_j med_+\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big)\Big]\Big\} > t\Big)\Big],
\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. □

De même que dans le cas positif, sous nos hypothèses, quand n tend vers l'infini R_1^n tend vers R_1, et à j fixé $\Pi_j^{-1}(R_1^n - R_1^j)$ tend vers une variable aléatoire $\widehat{R}$ qui a la même loi que R_1. On pose $m_- = med_-(R_1) = med_-(\widehat{R})$ et $m_+ = med_+(R_1) = med_+(\widehat{R})$ et on fait tendre n vers l'infini dans le lemme 2.6. On obtient alors, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_j\{\mathbb{1}_{\Pi_j>0}(R_1^j + \Pi_j m_-)\} > t\Big) + \mathbb{P}\Big(\sup_j\{\mathbb{1}_{\Pi_j<0}(R_1^j + \Pi_j m_+)\} > t\Big) \leq 2\mathbb{P}(R_1 > t).$$

En remplaçant R_1 par $-R_1$, on obtient une formule similaire, et ainsi, pour tout $t > 0$ il vient :

$$\mathbb{P}\Big(\sup_j \mathbb{1}_{\Pi_j>0}|R_1^j + \Pi_j m_-| > t\Big) + \mathbb{P}\Big(\sup_j \mathbb{1}_{\Pi_j<0}|R_1^j + \Pi_j m_+| > t\Big) \leq 2\mathbb{P}(|R_1| > t).$$

On en déduit par le même raisonnement que dans le cas positif appliqué à chacun

de ces deux termes que pour tout $\varepsilon > 0$ on a pour tout $t > \max\{|m_+|, |m_-|\}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|R_1| > t) \;\geq\; & \frac{1}{2}\mathbb{P}\Big(\exists n \;\text{ t.q. }\; \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon} \text{ et } \big|b_{-n} + (a_{-n} - 1)m_-\big| > \varepsilon\Big) + \\ & \frac{1}{2}\mathbb{P}\Big(\exists n \;\text{ t.q. }\; \Pi_n < -\frac{2t}{\varepsilon} \text{ et } \big|b_{-n} + (a_{-n} - 1)m_+\big| > \varepsilon\Big). \quad (2.24)\end{aligned}$$

On applique maintenant le lemme 2.3 à chacune de ces deux probabilités, et on obtient pour tous $t > \max\{|m_+|, |m_-|\}$ et $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\exists n \;\text{ t.q. }\; \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon} \text{ et } \big|b_{-n} + (a_{-n} - 1)m_-\big| > \varepsilon\Big) \\ &\quad\geq \min_{1\leq i\leq p} \mathbb{P}(|b_0 + (e_i - 1)m_-| > \varepsilon)\mathbb{P}\big(\exists n \;\text{ t.q. }\; \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon}\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\exists n \;\text{ t.q. }\; \Pi_n < -\frac{2t}{\varepsilon} \text{ et } \big|b_{-n} + (a_{-n} - 1)m_+\big| > \varepsilon\Big) \\ &\quad\geq \min_{1\leq i\leq p} \mathbb{P}(|b_0 + (e_i - 1)m_+| > \varepsilon)\mathbb{P}\big(\exists n \;\text{ t.q. }\; \Pi_n < -\frac{2t}{\varepsilon}\big).\end{aligned}$$

Comme dans le cas positif, si b_0 n'est pas constant on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\min_{1\leq i\leq p}\{\mathbb{P}(|b_0+(e_i-1)m_-| > \varepsilon)\} > 0$ et $\min_{1\leq i\leq p}\{\mathbb{P}(|b_0+(e_i-1)m_+| > \varepsilon)\} > 0$. On obtient donc l'analogue de la proposition 2.5 : il existe une constante C strictement positive telle que pour tout t assez grand, on ait :

$$\mathbb{P}(|R_1| > t) \geq C\ \mathbb{P}(\sup_n\ |\Pi_n| > \frac{2t}{\varepsilon}).$$

On définit ensuite une nouvelle marche markovienne (S_n) par $S_n = \log|a_0 \cdots a_{1-n}|$, et à l'apparition des valeurs absolues près, toute l'étude est identique. Donc dans tous les cas la somme des limites est non nulle. En particulier, dans le cas ℓ-irréductible, on a l'égalité des deux limites, donc cette limite unique est non nulle. La démonstration du théorème 2.2 est ainsi complète.

2.8 Irréductibilité

On donne maintenant les détails de l'étude de la notion de ℓ-réductibilité et son lien précis avec la réductibilité usuelle. Par définition, ces deux notions d'irréductibilité ne dépendent pas de la valeur des coefficients des matrices concernées, mais seulement du fait qu'ils soient nuls ou non. Pour visualiser ce type de propriétés, on associe à une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ un graphe étiqueté et orienté à p sommets numérotés de 1 à p. Une arête joint le sommet i au sommet j si et seulement si le coefficient a_{ij} est non nul. L'irréductibilité usuelle se traduit alors par l'existence d'un chemin orienté permettant de joindre n'importe quel sommet à tout autre sommet. En particulier le graphe est alors connexe.

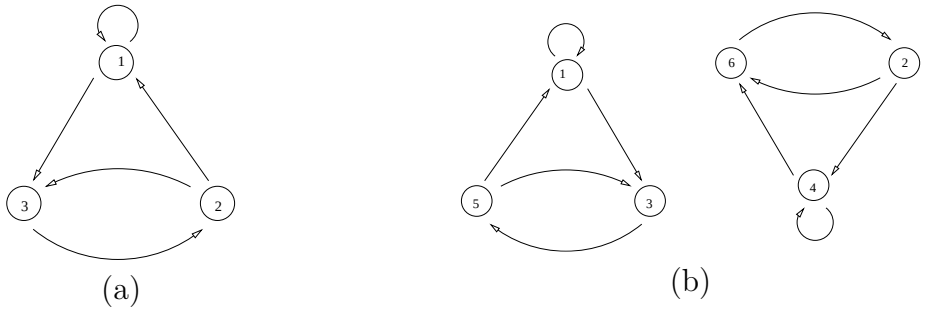


FIG. 2.2 – (a) Graphe correspondant à la matrice A_1. (b) Graphe correspondant à la matrice B_1.

On rappelle l'exemple des matrices A_1 et B_1 donné dans la partie précédente :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La figure 2.2 donne les graphes correspondants aux matrices A_1 et B_1. La matrice A_1 est irréductible. On constate que le graphe de B_1 n'est pas connexe, donc en particulier la matrice B_1 est réductible. Le graphe donne aussi une partition pour laquelle B_1 est réductible : c'est la partition $(\{1,3,5\},\ \{2,4,6\})$.

Il n'y a pas de lien direct entre les notions d'irréductibilité et de ℓ-irréductibilité. En effet, la matrice A_1 est irréductible mais elle est 1-réductible pour la partition $(\{1,3\},\{2\})$. La matrice A_2 suivante

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est 0-, 1- et 2-irréductible, mais elle est réductible pour la partition $(\{1\},\{2,3\})$. La notion de ℓ-irréductibilité dépend aussi de la valeur de ℓ. Ainsi, la matrice A_1 est 1-réductible mais 2-irréductible. La matrice B_1' correspondant à A_1 pour cette nouvelle valeur de ℓ est :

$$B_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et son graphe est donné par la figure 2.3. Modifions maintenant la matrice A_1 pour

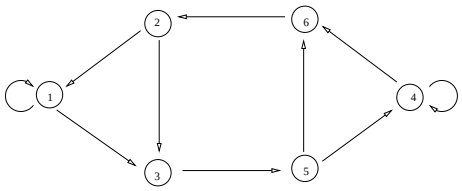


FIG. 2.3 – Graphe correspondant à la matrice B_1'

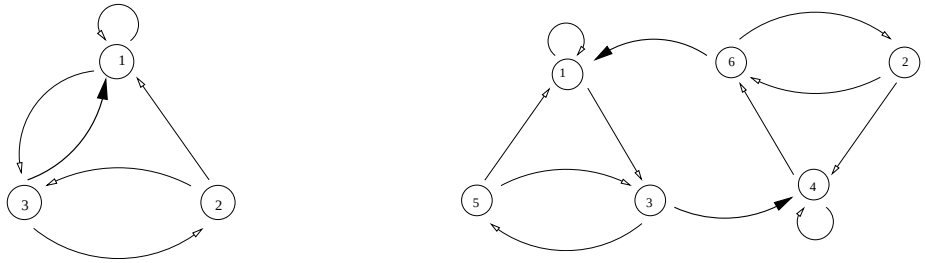


FIG. 2.4 – (a) Graphe correspondant à la matrice A_3. (b) Graphe correspondant à la matrice B_3.

la rendre 1-irréductible. Soient

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et leurs graphes donnés par la figure 2.4.

En fait, si on se limite aux matrices A irréductibles le lien entre ces deux notions de réductibilité est le suivant :

Proposition 2.6 *Soient $A = (a_{ij})_{i\leq i,j\leq p}$ une matrice positive irréductible, et $0 \leq \ell \leq p-1$ un entier. Alors la matrice B définie comme suit :*

$$B = \begin{pmatrix} (a_{ij})_{1\leq i\leq \ell,\ 1\leq j\leq p} & 0 \\ 0 & (a_{ij})_{\ell+1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq p} \\ 0 & (a_{ij})_{1\leq i\leq \ell,\ 1\leq j\leq p} \\ (a_{ij})_{\ell+1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq p} & 0 \end{pmatrix}$$

est irréductible si et seulement si A est ℓ-irréductible.

Démonstration de la proposition 2.6

• Supposons que A est ℓ-réductible pour la partition (I, J). On pose $\bar{I} = I \cup (J+p)$ et $\bar{J} = J \cup (I+p)$, de sorte que $(\bar{I}, \bar{J})$ est une partition non triviale de $\{1, \ldots, 2p\}$. Soient $i \in \bar{I}$ et $j \in \bar{J}$. Alors on a :

	$1 \leq j \leq p$	$p+1 \leq j \leq 2p$
$1 \leq i \leq \ell$	$b_{ij} = a_{ij} = 0$ car $i \in I$ et $j \in J$	$b_{ij} = 0$ par définition de B
$\ell+1 \leq i \leq p$	$b_{ij} = 0$ par définition de B	$b_{ij} = a_{i,j-p} = 0$ car $j-p \in I$ et $i \in I$
$p+1 \leq i \leq p+\ell$	$b_{ij} = 0$ par définition de B	$b_{ij} = a_{i-p,j-p} = 0$ car $i-p \in J$ et $j-p \in I$
$p+\ell+1 \leq i \leq 2p$	$b_{ij} = a_{i-p,j} = 0$ car $i-p \in J$ et $j \in J$	$b_{ij} = 0$ par définition de B

Remarquons qu'on a aussi pour tout $i \in \bar{J}$ et $j \in \bar{I}$:

	$1 \leq j \leq p$	$p+1 \leq j \leq 2p$
$1 \leq i \leq l$	$b_{ij} = a_{ij} = 0$ car $i \in J$ et $j \in I$	$b_{ij} = 0$ par définition de B
$l+1 \leq i \leq p$	$b_{ij} = 0$ par définition de B	$b_{ij} = a_{i,j-p} = 0$ car $j-p \in J$ et $i \in J$
$p+1 \leq i \leq p+l$	$b_{ij} = 0$ par définition de B	$b_{ij} = a_{i-p,j-p} = 0$ car $i-p \in I$ et $j-p \in J$
$p+l+1 \leq i \leq 2p$	$b_{ij} = a_{i-p,j} = 0$ car $i-p \in I$ et $j \in I$	$b_{ij} = 0$ par définition de B

De sorte que pour tous $(i,j) \in \bar{I} \times \bar{J}$ on a $b_{ij} = b_{ji} = 0$, et B est réductible.

• Supposons que B est réductible pour la partition non triviale (I,J). On pose :

$$\begin{aligned} I_1 &= I \cap \{1,\ldots,p\}, \quad I_2 = I \cap \{p+1,\ldots,2p\}, \\ J_1 &= J \cap \{1,\ldots,p\}, \quad J_2 = J \cap \{p+1,\ldots,2p\}, \end{aligned}$$

et $\mathcal{I} = I_1 \cap (I_2 - p)$, $\mathcal{J} = J_1 \cap (J_2 - p)$ et $\mathcal{K} = (\mathcal{I} \cup \mathcal{J})^c$, de sorte que $(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ est une partition de $\{1,\ldots,p\}$. Supposons que $\mathcal{I}$ est non vide. Alors la partition $(\mathcal{I}, \mathcal{J} \cup \mathcal{K})$ est non triviale.

Soit $(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$. Alors (i,j) et $(i,j+p)$ sont dans $I \times J$. Si $i \leq \ell$ alors $a_{ij} = b_{ij} = 0$ et si $i > \ell$, alors $a_{ij} = b_{i,j+p} = 0$.

Soit $(i,k) \in \mathcal{I} \times \mathcal{K}$. Alors soit k est dans I_1 et $k+p$ dans J_2, et donc $(i,k+p)$ et $(i+p,k+p)$ sont dans $I \times J$, soit k est dans J_1 et donc (i,k) et $(i+p,k)$ sont dans $I \times J$. Dans le premier cas, si $i \leq \ell$ alors $a_{ik} = b_{i+p,k+p} = 0$ et si $i > \ell$ alors $a_{ik} = b_{i,k+p} = 0$. Dans le second cas, si $i \leq \ell$ alors $a_{ik} = b_{i,k} = 0$ et si $i > \ell$ alors $a_{ik} = b_{i+p,k} = 0$.
Ainsi pour tous (i,j) dans $\mathcal{I} \times (\mathcal{J} \cup \mathcal{K})$, on a $a_{ij} = 0$ ce qui contredit l'irréductibilité de A. Donc $\mathcal{I}$ est vide.

On montre de façon analogue que $\mathcal{J}$ est vide, et on a donc $I_1 = J_2 - p$ et $I_2 = J_1 + p$. Considérons (I_1, J_1) la partition (éventuellement triviale) de $\{1,\ldots,p\}$.

Soit $1 \leq i \leq \ell$. Si $i \in I_1$ alors pour tout $j \in J_1$ on a $a_{ij} = b_{ij} = 0$, et si $i \in J_1$, alors $i+p \in I$ et pour tout $j \in J_1$ on a $a_{ij} = b_{i+p,j+p} = 0$.

Soit $\ell + 1 \leq i \leq p$. Si $i \in I_1$ alors pour tout $j \in I_1$, on a $j + p \in J$ donc $a_{ij} = b_{i,j+p} = 0$, et si $i \in J_1$, alors $i + p \in I$ et pour tout $j \in J_1$ on a $a_{ij} = b_{i+p,j} = 0$. Ainsi A est ℓ-réductible. □

Remarque Comme on l'a vu dans cette démonstration, et comme on le constate sur la figure 2.2, si A est irréductible et ℓ-réductible, la matrice B associée vérifie une propriété plus forte que la réductibilité : son graphe se décompose en deux composantes connexes qui ont la même structure que la graphe de A. On a en fait deux copies distinctes de A.

2.9 Sur l'indépendance des suites (a_n) et (b_n)

On peut affaiblir l'hypothèse d'indépendance des deux suites (a_n) et (b_n) admise dans ce chapitre. Elle n'intervient en fait que dans la démonstration de la proposition 2.3 et du lemme 2.3. Si on y regarde de plus près, on voit que dans la proposition 2.3 on a seulement besoin de l'indépendance de b_{-n} et de $a_0, \dots a_{1-n}$, en plus de la stationnarité de la suite (a_n, b_n). Quand au lemme 2.3, la propriété d'indépendance peut être remplacée par une hypothèse d'absence de point fixe presque sûr, comme dans le cas iid.

Plus précisemment, soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $a_0, \dots a_{-n}$. La propriété qu'on utilise dans la démonstration de la proposition 2.3 est en fait l'indépendance entre b_{-n} et $\mathcal{F}_{n-1}$.

Pour le lemme 2.3, on peut en modifier ainsi la démonstration : $\min_{1\leq i\leq p} \mathbb{P}(|b_0 + (e_i - 1)m_0| > \varepsilon)$ devient $\min_{1\leq i\leq p} \mathbb{P}(|b_0 + (a_0 - 1)m_0| > \varepsilon \mid a_0 = e_i)$. Si on rajoute l'hypothèse que l'application affine aléatoire $x \longmapsto a_0 x + b_0$ n'a pas de point fixe presque sûr pour toute valeur initiale constante de a_0 : pour tous $1 \leq i \leq p$ on suppose que $\mathbb{P}(b_0 + a_0 x = x \mid a_0 = e_i) < 1$, alors on peut encore trouver $\varepsilon > 0$ tel que ce minimum soit non nul. Dans ce cas, on n'a plus besoin d'exclure le cas b_0 constant dans le théorème 2.2.

Ainsi, les théorèmes 2.1 et 2.2 restent valides si on remplace l'hypothèse d'indépendance des deux suites (et b_0 non constant) par les deux hypothèses suivantes :

1. (a_n, b_n) est une suite stationnaire telle que pour tout n, b_{-n} soit indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$,
2. pour tous $1 \leq i \leq p$, on a $\mathbb{P}(b_0 + a_0 x = x \mid a_0 = e_i) < 1$.

L'hypothèse d'absence de point fixe est alors une extension naturelle de celle faite dans le cas iid pour obtenir la non nullité de la somme des deux limites.

2.10 Exemple de deux régimes

Dans le cas simple à deux régimes $p = 2$, où la chaîne de Markov (a_n) ne prend que deux valeurs, on peut expliciter certains calculs, comme celui de l'exposant κ

ainsi qu'un critère d'existence.

2.10.1 Critère d'existence et calcul de l'exposant κ

Lorsque $p = 2$, l'espace d'états est $E = \{e_1, e_2\}$ et la matrice de transition s'écrit $P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$, avec $0 \leq p, q \leq 1$. Comme P est irréductible et apériodique, on a en fait $p < 1$, $q < 1$ et $p + q \neq 0$. L'unique loi invariante de P est $\mu = \frac{1}{2-p-q}(1-q, 1-p)$, et l'hypothèse (2.3) se traduit par la condition

$$|e_1|^{1-q}|e_2|^{1-p} < 1. \tag{2.25}$$

Pour tout $s > 0$, la matrice P_s s'écrit :

$$P_s = \begin{pmatrix} |e_1|^s p & |e_1|^s(1-q) \\ |e_2|^s(1-p) & |e_2|^s q \end{pmatrix},$$

et son polynôme caractéristique est :

$$\chi_s(X) = X^2 - (|e_1|^s p + |e_2|^s q)X + |e_1 e_2|^s(p + q - 1).$$

Il a pour discriminant

$$\Delta_s = |e_1|^{2s} p^2 + |e_2|^{2s} q^2 + 2|e_1 e_2|^s(pq - 2p - 2q + 2).$$

Comme P_s est une matrice irréductible (puisque P l'est et que les e_i ne peuvent être nuls) et positive, le théorème 4 implique que son rayon spectral est une valeur propre de P_s, donc nécessairement on a $\Delta_s \geq 0$. On peut donc donner la valeur ρ_s du rayon spectral de P_s :

$$\rho_s = \frac{|e_1|^s p + |e_2|^s q + \sqrt{\Delta_s}}{2}. \tag{2.26}$$

Regardons maintenant dans lequel des deux cas admissibles de comportement de la fonction $s \longmapsto \log(\rho_s)$ on se trouve en fonction des valeurs de e_1, e_2, p et q :

1. soit $\rho_s < 1$ pour tout s et la solution stationnaire a des moments à tout ordre,
2. soit $\rho_s \longrightarrow \infty$ quand s tend vers l'infini, et la solution stationnaire a une queue polynômiale d'ordre κ ou κ est l'unique point $s > 0$ tel que $\rho_s = 1$.

• Si $|e_1| \leq 1$ et $|e_2| \leq 1$.
Alors ${}^tP_s$ est une matrice sous-stochastique pour tout s et donc de rayon spectral toujours inférieur ou égal à 1. On est alors dans le premier cas.

• Si $|e_1| > 1$.
La condition (2.25) impose alors $|e_2| < 1$. Deux cas se présentent en fonction de la valeur de p.

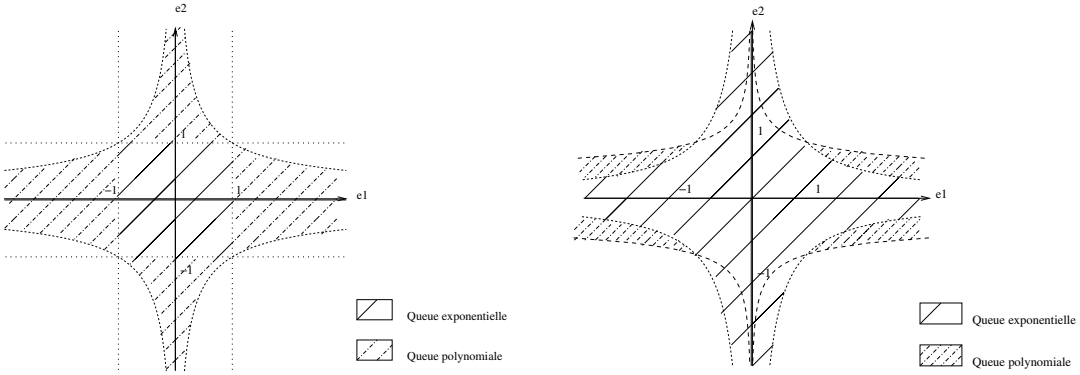


FIG. 2.5 – (a) Queue de la distribution pour $p = 0.5$, $q = 0.7$. (b) Queue de la distribution pour $p = 0$, $q = 0.7$.

– Si $p \neq 0$, alors en faisant tendre s vers l'infini dans (2.26) on constate que ρ_s tend vers l'infini, on est donc dans le deuxième cas.

– Si $p = 0$, alors l'expression de ρ_s et Δ_s se simplifie :

$$\rho_s = \frac{|e_2|^s q + \sqrt{\Delta_s}}{2} \quad \text{et} \quad \Delta_s = |e_2|^{2s} q^2 + 4|e_1 e_2|^s (1-q),$$

et ρ_s tend vers l'infini si et seulement si Δ_s tend vers l'infini, c'est-à-dire si et seulement si $|e_1 e_2| > 1$. Cette dernière condition est vérifiée si et seulement si $|e_1| > |e_2|^{-1}$.

La seconde condition est compatible avec la condition d'ergodicité (2.25) puisque $|e_2| < 1$ et $1/1-q > 1$: on a bien $|e_2|^{-1} < |e_2|^{-1/1-q}$.

• Par symétrie on a un résultat analogue si on suppose $|e_2| > 1$.

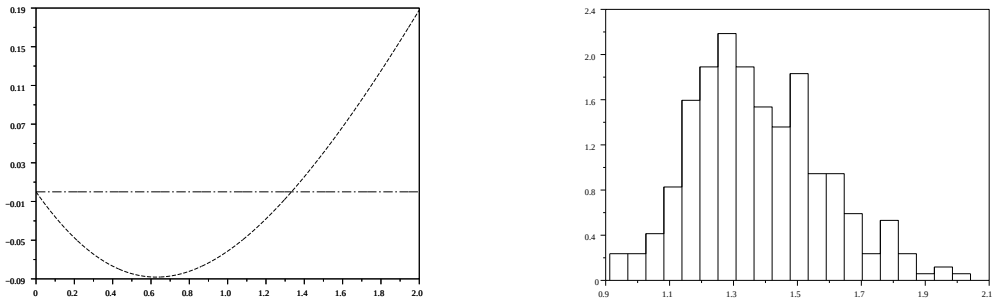
Récapitulons ces résultats, illustrés par les figures 2.5. Les zones hachurées en trait plein correspondent au premier cas, et celles hachurées en pointillé correspondent au second cas. L'ensemble de toutes les zones hachurées correspond à la zone d'existence d'une solution stationnaire.

On est dans le premier cas si
– $|e_1| \leq 1$ et $|e_2| \leq 1$,
– $p = 0$ et $1 < |e_1| \leq |e_2|^{-1}$,
– $q = 0$ et $1 < |e_2| \leq |e_1|^{-1}$.

On est dans le second cas si
– $|e_1| > 1$ et $p \neq 0$,
– $p = 0$ et $|e_2|^{-1} < |e_1| < |e_2|^{-1/1-q}$,
– $|e_2| > 1$ et $q \neq 0$,
– $q = 0$ et $|e_1|^{-1} < |e_2| < |e_1|^{-1/1-p}$.

On peut étendre ces résultats partiellement aux dimensions supérieures (c'est une forme de réciproque du lemme 2.4).

Proposition 2.7 *Pour tout $p \geq 2$, si tous les termes diagonaux de P sont non nuls, on est dans le cas polynômial si et seulement si il existe i tel que $|e_i| > 1$.*



(a) (b)

FIG. 2.6 – (a) La fonction $\log \rho(P_s)$. (b) Histogramme de 300 valeurs de l'estimateur de Hill de κ chacune obtenue à l'aide d'un échantillon de $m = 5000$ valeurs de $Y_{n=2000}$.

Démonstration

Si tous les $|e_i|$ sont inférieurs ou égaux à 1, la matrice P_s est sous-stochastique pour tous s donc on est dans le premier cas.

Et s'il existe i tel que $|e_i| > 1$, alors la trace de P_s tend vers l'infini quand s tend vers l'infini. Comme c'est la somme des valeurs propres de P_s, ceci implique que son rayon spectral tend aussi vers l'infini, et donc on est dans le second cas. □

Si on ne suppose pas que tous les termes diagonaux de P sont non nuls, la condition sur les e_i pour être dans le second cas est plus compliquée à expliciter comme on vient de le voir pour $p = 2$.

2.10.2 Quelques simulations

On termine ce chapitre par quelques simulations qui illustrent les résultats précédents, toujours pour le cas de la dimension 2. On choisit les valeurs suivantes :

$$p = 0.5, \quad q = 0.7, \quad e_1 = 1.5, \quad \text{et} \quad e_2 = 0.5,$$

et on suppose que b_0 suit une loi normale centrée réduite. La condition (2.25) est bien vérifiée. La figure 2.1 donnée en début de chapitre est tracée avec ces valeurs. Le tracé de la fonction $\log \rho(P_s)$ est donné par la figure 2.6. Un calcul numérique (avec le logiciel SCILAB) donne comme valeur approchée pour l'exposant critique $\kappa = 1.3330929$. On se propose de vérifier que la queue de la loi stationnaire est bien de la forme Lt^{κ} avec la méthode de l'estimateur de Hill (voir [41]) que l'on rappelle ci-dessous.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et $\overline{F}$ la queue de sa distribution, i.e. $\overline{F}(t) = \mathbb{P}(X > t)$. On suppose que $\overline{F}$ se comporte comme $t^{-\kappa}$ pour t grand. Plus précisemment, $\overline{F}(t) = L(t)t^{-\kappa}$ où L est une fonction à variation lente, i.e. possédant

la propriété :

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{L(ts)}{L(t)} = 1, \qquad \forall\ s > 0.$$

L'estimateur proposé par Hill pour l'exposant κ à l'aide d'un échantillon $x_1, \ldots, x_n$ de X est basé sur les statistiques d'ordre de l'échantillon, que l'on note $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$. L'estimateur de κ^{-1} proposé est alors :

$$S_n = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \Big[\log(x_{(n+1-i)}) - \log(x_{(n+1-k_n)}) \Big],$$

où (k_n) est une suite d'entiers précisée dans la proposition suivante.

Proposition 9 *Si* $1 \leq k_n$, $k_n \to +\infty$ *et* $n^{-1}k_n \to 0$, *alors* S_n *converge en probabilité vers* κ^{-1}.

On simule la chaîne (a_k) et les variables b_k, puis la suite (Y_k) à l'aide de l'équation récursive (2.1) jusqu'au rang $n = 2000$. On obtient ainsi une valeur de Y_{2000}. Le théorème 8 assure que (Y_n) converge vers la loi stationnaire. On répète l'opération $m = 5000$ fois pour obtenir un échantillon approché de la loi stationnaire, à partir duquel on calcule l'estimateur de Hill. En exécutant plusieurs fois le programme (ici 300 fois), on obtient un histogramme des valeurs de κ données par l'estimateur de Hill (figure 2.6). La moyenne en est 1.3781119, et la médiane 1.3532018.

Chapitre 3

Queue de la distribution, cas continu

3.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le modèle linéaire autorégressif à régime markovien en temps discret défini par l'équation (2.1) a trouvé de nombreuses applications. Dans les années 1990, les modèles en temps continu se sont rapidement développés en modélisation stochastique. Cet engouement s'explique en grande partie par le succès rencontré par les équations différentielles stochastiques (EDS) en mathématiques dites financières. Une autre raison plus lointaine et non financière est que les modèles en temps continu permettent d'analyser des données dont le pas d'échantillonnage est *variable dans le temps*. Ce type d'observations irrégulièrement espacées est courant en biologie ou en agronomie où les instants d'observation sont rarement automatisés.

La diffusion de Ornstein-Uhlenbeck à régime markovien que nous allons présenter et analyser dans ce chapitre fait partie des premiers modèles en temps continu importants en modélisation. Les résultats proposés démontrent que ce modèle est capable de produire une loi stationnaire dont la queue à l'infini possède un équivalent (inversement) polynômial (*heavy tail* en anglais), de même qu'en temps discret. Cette proprité de la loi stationnaire est l'une des caractéristique recherchées en modélisation économétrique. Signalons à ce propos une approche différente et populaire qui consiste à remplacer le mouvement brownien qui dirige l'EDS d'Ornstein-Uhlenbeck par un processus de Lévy général : voir les travaux de O. E. Barndorff-Nielsen et N. Shephard [6], et P. J. Brockwell [13].

Les propriétés de ce type de processus de Ornstein-Uhlenbeck à régime markovien, en particulier des conditions d'ergodicité et d'existence de moments de la loi limite sont données par G. K. Basak, A. Bisi et M. K. Ghosh dans [7] et X. Guyon, S. Iovleff et J.-F. Yao [36]. L'idée pour étudier le comportement de cette diffusion est de discrétiser l'équation pour se ramener à un processus autorégressif en temps discret. L'étude de la queue de la loi stationnaire se fait alors de la même façon que dans le chapitre précédent.

Dans la partie 3.2, on définit la diffusion de Ornstein-Uhlenbeck à régime markovien et on en donne les premières propriétés en rappelant les résultats principaux de [36]. On fixera les notations de ce chapitre, et on énoncera le théorème principal sur la queue de la distribution stationnaire. Les parties 3.3 à 3.7 sont consacrées à sa démonstration.

3.2 Diffusion linéaire à régime markovien

Commençons par préciser ce qu'est une diffusion de Ornstein-Uhlenbeck à régime markovien et fixer les notations.

3.2.1 Définitions et notations

Une diffusion de Ornstein-Uhlenbeck Y à régime markovien se construit en deux temps.

Soit X un processus markovien de saut (voir par exemple W. Feller, [25]) tel que :
- son espace d'états $E = \{1, \dots, p\}$ est fini, et $p > 1$,
- sa fonction d'intensité λ est strictement positive sur E,
- son noyau $q = (q(i,j))$ sur E est irréductible et satisfait $q(i,i) = 0$ pour tout i dans E.

Alors le processus X est ergodique au sens de la définition suivante.

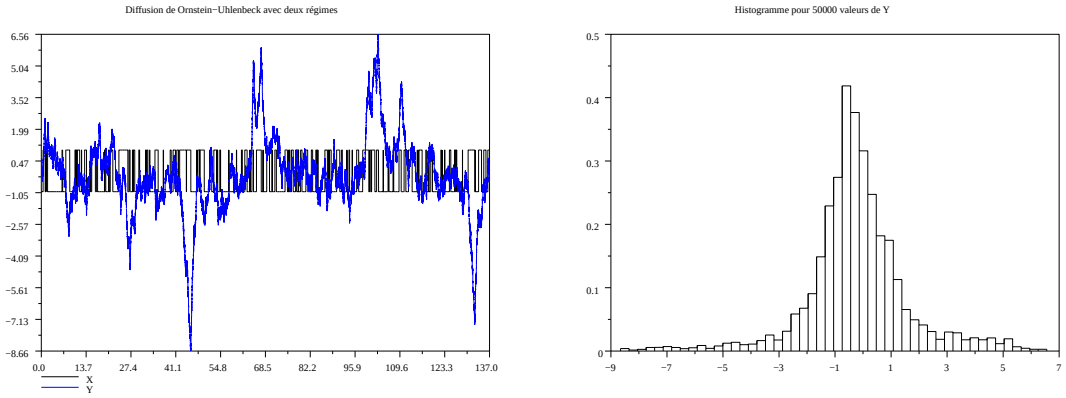
Définition 22 *Un processus à temps continu $S = (S_t)_{t\geq 0}$ est* ergodique *s'il existe une probabilité ν telle que la loi de S_t converge faiblement vers ν quand $t \to \infty$ indépendamment de la condition initiale S_0. La loi ν est alors la* loi limite *de S. Si S est un processus markovien, ν en est l'unique loi invariante.*

On note μ l'unique probabilité invariante de X. Soit (P_t) le semi-groupe markovien associé. Rappelons que pour $h > 0$ assez petit et pour tous états i, j dans E, on a :

$$P_h(i,j) = \begin{cases} \lambda(i)q(i,j)h + o(h) & \text{si } j \neq i, \\ 1 - \lambda(i)h + o(h) & \text{si } j = i. \end{cases}$$

On considère la version canonique $(\Omega, \mathcal{A}, (Q_x)_{x\in E})$ de X où $\Omega = D([0,+\infty[)$ est l'ensemble des fonctions càdlàg réelles sur $[0,+\infty[$, et $\mathcal{A}$ la σ-algèbre associée à la métrique de Skorokhod. Si ν est une probabilité sur E, on note $Q_\nu(\cdot) = \int Q_x(\cdot)\nu(dx)$.

Soit $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard défini sur un espace probabilisé $(\Theta, \mathcal{B}, Q')$, et $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$ la filtration brownienne associée. On se place maintenant sur l'espace produit $(\Omega\times\Theta, \mathcal{A}\times\mathcal{B}, (Q_x \otimes Q'))$. En particulier, sous la probabilité $\mathbb{P}_\mu = Q_\mu \otimes Q'$ le processus X est stationnaire.



(a) (b)

FIG. 3.1 – (a) Simulation d'une diffusion à deux régimes avec paramètres $\lambda(1) = 1$, $\lambda(2) = 2$, $e(1) = -1$, $e(2) = 1$, $\sigma(1) = \sigma(2) = 1$. (b) Histogramme de la diffusion pour 50000 valeurs régulièrement échantillonnées.

Conditionnellement à X, $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus de diffusion réel, défini pour tout ω dans Ω par :

– Y_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable sur $(\Theta, \mathcal{B}, Q')$,

– Y est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dY_t = e(X_t)Y_t dt + \sigma(X_t)dW_t, \qquad t \geq 0. \tag{3.1}$$

Ainsi (Y_t) est une diffusion linéaire dirigée par un processus *exogène* X. Ici e et $\sigma(\cdot)$ sont deux fonctions mesurables réelles. L'équation (3.1) admet alors une unique solution forte (voir I. KARATZAS ET S. SHREVE, [43]), donc Y est bien défini. La figure 3.1 donne un exemple d'une trajectoire de Y et un histogramme de ses valeurs.

Définition 23 *Le processus Y ainsi défini s'appelle* diffusion linéaire à régime markovien.

On peut aussi expliciter la solution de l'EDS (3.1). Pour tous $0 \leq s \leq t$, on pose :

$$a(s,t) = a_{s,t}(\omega) = \exp \int_s^t e(X_u)du.$$

Alors le processus Y se représente de la façon suivante :

$$Y_t = Y_t(\omega) = a(0,t)\Big[Y_0 + \int_0^t a(0,u)^{-1}\sigma(X_u)dW_u\Big],$$

et pour tous $0 \leq s \leq t$, Y satisfait l'équation récursive aléatoire

$$\begin{aligned} Y_t &= a(s,t)\Big[Y_s + \int_s^t a(s,u)^{-1}\sigma(X_u)dW_u\Big] \\ &= a(s,t)Y_s + \int_s^t \Big[\exp \int_u^t e(X_v)dv\Big]\sigma(X_u)dW_u, \end{aligned}$$

que l'on peut récrire de la façon suivante :

$$Y_t(\omega) = a_{s,t}(\omega)Y_s(\omega) + V_{s,t}^{1/2}(\omega)\xi_{s,t}, \tag{3.2}$$

où $\xi_{s,t}$ est une variable gaussienne centrée réduite dépendant uniquement du mouvement brownien (W_u) pour $s \leq u \leq t$, et

$$V_{s,t}(\omega) = \int_s^t \exp\Big[2\int_u^t e(X_v)dv\Big]\sigma^2(X_u)du.$$

3.2.2 Propriétés

Les propriétés de ce type de processus, en particulier des conditions d'ergodicité et d'existence de moments de la loi limite sont données dans [7] et [36]. On en rappelle ici les résultats qui vont nous servir par la suite. Comme annoncé en introduction, toute l'étude repose sur des discrétisations de Y.

Définition 24 *Pour $\delta > 0$, on appelle* discrétisation de pas δ *de Y le processus en temps discret $Y^{(\delta)} = (Y_{n\delta})_{n\in\mathbb{N}}$.*

Soit $\delta > 0$ fixé. Considérons la discrétisation $Y^{(\delta)}$. L'équation (3.2) implique que pour tout $n \geq 0$, on a

$$Y_{(n+1)\delta}(\omega) = a_n(\omega)Y_{n\delta}(\omega) + V_n^{1/2}(\omega)\xi_{n+1}, \tag{3.3}$$

avec

$$\begin{array}{rclcl} a_n(\omega) & = & a_n(\delta)(\omega) & = & \exp\Big[\int_{n\delta}^{(n+1)\delta} e(X_u(\omega))du\Big], \\ V_n(\omega) & = & V_n(\delta)(\omega) & = & \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} \exp\Big[2\int_u^{(n+1)\delta} e(X_v(\omega))dv\Big]\sigma^2(X_u(\omega))du, \end{array}$$

et (ξ_n) est une suite iid sur $(\Theta, \mathcal{B}, Q')$ de loi gaussienne centrée réduite. On est ainsi ramené à l'étude d'une équation discrète proche de celle étudiée dans le chapitre précédent. Comme le processus X est stationnaire, la suite (a_n, V_n) l'est aussi, et on peut étendre l'équation (3.3) à $\mathbb{Z}$. Remarquons aussi qu'ici $b_n = V_n^{1/2}\xi_n$ a des moments à tout ordre car V_n est bornée puisque e et σ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, et que ξ_n est gaussienne.

On applique maintenant le théorème 8 aux discrétisées. Dans toute la suite, on supposera que l'hypothèse suivante est vérifiée :

$$\alpha = \mathbb{E}_\mu[e(X_t)] = \sum_{i\in E} e(i)\mu(i) < 0. \tag{3.4}$$

C'est l'analogue de la condition (2.3) puisque pour tout $\delta > 0$ on a :

$$\mathbb{E}_\mu[\log a_1] = \mathbb{E}_\mu\Big[\int_0^\delta e(X_u)du\Big] = \int_0^\delta \mathbb{E}_\mu[e(X_u)]du = \delta\alpha.$$

Proposition 10 *Si l'hypothèse (3.4) est vérifiée, alors il existe une unique solution stationnaire $(\widetilde{Y}_{n\delta})$ de l'équation (3.3) sur $\mathbb{Z}$ et elle est donnée par*

$$\widetilde{Y}_{n\delta} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_{n-k}V_{n-k-1}^{1/2}\xi_{n-k-1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 11 *Sous l'hypothèse (3.4), la diffusion linéaire Y à régime markovien X définie par l'EDS (3.1) est ergodique.*

Dans toute la suite, ν désignera la loi limite de Y. En particulier, les $(\widetilde{Y}_{n\delta})$ sont toutes de même loi marginale ν d'après le corollaire suivant.

Corollaire 1 *Sous l'hypothèse (3.4), quel que soit le choix de $\delta > 0$, toutes les discrétisations $Y^{(\delta)}$ sont ergodiques et ont la même loi limite notée ν qui est aussi celle de Y.*

3.2.3 Le théorème principal

On peut maintenant énoncer le théorème principal que l'on se propose de démontrer ici. Il s'agit de préciser le comportement de la queue de ν, la loi limite du processus Y.

Théorème 3.1 *Soit Y est une diffusion linéaire à régime markovien comme ci-dessus, telle que l' hypothèse (3.4) soit vérifiée.*

1. *Si pour tout i, $e(i) < 0$, alors la loi limite de Y a des moments à tout ordre :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^s \nu(ds) < \infty.$$

2. *S'il existe i_0 dans E tel que $e(i_0) > 0$, alors il existe un exposant $\kappa > 0$ et une constante $L > 0$ tels que :*

$$\begin{aligned} t^\kappa \nu(]t, +\infty[) &\xrightarrow[t\to+\infty]{} L, \\ t^\kappa \nu(]-\infty, -t[) &\xrightarrow[t\to+\infty]{} L. \end{aligned}$$

Les deux cas énoncés forment une dichotomie, donc ce théorème décrit tous les cas possibles. La démonstration de ce théorème repose sur les discrétisations de Y introduites ci-dessus, l'utilisation de la relation de récurrence associée, et des méthodes de renouvellement comme dans le chapitre précédent.

Le plan de la démonstration est le suivant. Dans la partie 3.3 on étudie un opérateur associé à notre problème qui joue le même rôle que les matrices P_s du chapitre précédent, et on prouve le premier point du théorème 3.1. Dans toute la suite, on se place dans le second cas. On commence par donner une méthode de calcul de l'exposant κ dans la partie 3.4. Dans la partie 3.5, on donne les équations de renouvellement associées à ce problème. Enfin dans la partie 3.6 on applique le théorème de renouvellement 1.4 et dans la partie 3.7 on démontre que la limite obtenue est non nulle.

3.3 Etude d'un opérateur associé

On étudie maintenant un opérateur qui va jouer un rôle de transformée de Laplace (voir paragraphe 3.7.2) comme les matrices P_s dans la chapitre précédent. On note $\mathbb{P}_i$ la probabilité conditionnelle par rapport à $X_0 = i$: $\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}_\mu(\cdot \mid X_0 = i)$, et $\mathbb{E}_i$ l'espérance correspondante $\mathbb{E}_i[\cdot] = \mathbb{E}_\mu[\cdot \mid X_0 = i]$.

Définition 25 *Soient $s \geq 0$ et $\delta > 0$ fixés. On définit l'opérateur $A_{(s,\delta)}$ par*

$$A_{(s,\delta)}\varphi(i) = \mathbb{E}_i[a_0^s(\delta)\varphi(X_\delta)],$$

pour toute fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}$ et tout état i dans E.

Cet opérateur possède une propriété de semi-groupe en la variable δ :

Proposition 3.1 *Soit $s \geq 0$ fixé. Alors pour tous $\delta, \gamma > 0$ on a :*

$$A_{(s,\delta)}A_{(s,\gamma)} = A_{(s,\delta+\gamma)}.$$

Démonstration

Soit une fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}$ et un état i dans E. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} A_{(s,\delta)}A_{(s,\gamma)}\varphi(i) &= \mathbb{E}_i[a_0^s(\delta)A_{(s,\gamma)}\varphi(X_\delta)] \\ &= \mathbb{E}_i\big[a_0^s(\delta)\mathbb{E}_{X_\delta}[a_0^s(\gamma)\varphi(X_\gamma)]\big] \\ &= \mathbb{E}_i\Big[\exp\big(s\int_0^\delta e(X_u)du\big)\ \mathbb{E}_{X_\delta}\big[\exp\big(s\int_0^\gamma e(X_u)du\big)\ \varphi(X_\gamma)\big]\Big]. \end{aligned}$$

On utilise maintenant la propriété de Markov. Il vient :

$$\begin{aligned} A_{(s,\delta)}A_{(s,\gamma)}\varphi(i) &= \mathbb{E}_i\Big[\exp\big(s\int_0^{\delta+\gamma} e(X_u)du\big)\ \varphi(X_{\delta+\gamma})\Big] \\ &= \mathbb{E}_i[a_0^s(\delta+\gamma)\varphi(X_{\delta+\gamma})] \\ &= A_{(s,\delta+\gamma)}\varphi(i), \end{aligned}$$

donc on a bien l'égalité annoncée. □

Notons que l'on peut aussi écrire $A_{(s,\delta)}\varphi(i)$ sous forme de somme comme

$$A_{(s,\delta)}\varphi(i) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{E}_i[a_0^s \mathbb{1}_{X_\delta=j}]\varphi(j),$$

et donc $A_{(s,\delta)}$ s'écrit matriciellement $A_{(s,\delta)} = ((A_{(s,\delta)})_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ avec les coordonnées suivantes $(A_{(s,\delta)})_{ij} = \mathbb{E}_i[a_0^s \mathbb{1}_{X_\delta=j}]$. Comme P_s, c'est un opérateur positif. On va voir qu'il possède d'autres propriétés satisfaites par les matrices P_s.

3.3.1 Rayon spectral

On donne maintenant les propriétés du rayon spectral de A (les démonstrations non détaillées ici sont données dans [36]). On va voir qu'il a les même caractéristiques que celui des matrices P_s du chapitre précédent, et que c'est encore sa valeur qui permet de déterminer l'existence de l'exposant κ et sa valeur.

Proposition 12 *Soient $s > 0$ et $\delta > 0$ fixés. Alors l'opérateur $A_{(s,\delta)}$ est irréductible, apériodique et vérifie la relation suivante :*

$$\mathbb{E}_\mu[(a_1 \cdots a_k)^s] = \sum_{i \in E} A^k_{(s,\delta)}\mathbf{1}(i)\mu(i) = \mu A^k_{(s,\delta)}\mathbf{1}, \tag{3.5}$$

où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1 sur E.

On retrouve encore la même formule que dans l'introduction. On en déduit des propriétés similaires.

Corollaire 3.1 *Le rayon spectral de A peut s'écrire comme :*

$$\rho(A_{(s,\delta)}) = \lim_{k\to\infty} \left(\mathbb{E}_\mu[(a_1 \cdots a_k)^s]\right)^{1/k}.$$

Démonstration

Comme $A_{(s,\delta)}$ est une matrice positive irréductible et apériodique par la proposition 12, le théorème 4 donne l'existence d'une matrice $B_{(s,\delta)}$ à coefficients strictement positifs telle que

$$\frac{(A_{(s,\delta)})^n}{(\rho(A_{(s,\delta)}))^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} B_{(s,\delta)}. \tag{3.6}$$

En injectant ceci dans l'équation (3.5) on obtient le résultat annoncé. □

Corollaire 3.2 *Pour tout $\delta > 0$ fixé, l'application $s \longmapsto \log \rho(A_{(s,\delta)})$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.*

Démonstration

C'est une conséquence immédiate du corollaire 3.2 et du fait que les fonctions

$$s \mapsto \mathbb{E}_\mu[(a_1 \cdots a_k)^s]$$

sont log-convexes. □

Remarque Pour tout $\delta > 0$ fixé et pour tout i dans E, on a $A_{(0,\delta)}\mathbf{1}(i) = \mathbb{E}_i(1) = 1$, donc comme $A_{(0,\delta)}$ est une matrice positive, c'est également une matrice stochastique et $\rho(A_{(0,\delta)}) = 1$.

On étudie maintenant la dérivée logarithmique du rayon spectral en 0.

Proposition 3.2 *Pour tout $\delta > 0$ fixé, la dérivée à droite en 0 de $s \longmapsto \log \rho(A_{(s,\delta)})$ est strictement négative.*

Pour démontrer cette proposition, on donne une autre expression du rayon spectral de $A_{(s,\delta)}$ qui va nous permette d'utiliser une propriété de sous-miltiplicativité comme dans le chapitre précédent.

Lemme 3.1 *Soit*

$$h_n(s) = \max_{1\le i\le p} \mathbb{E}_i[(a_1\cdots a_n)^s].$$

Alors on a $\rho(A_{(s,\delta)}) = \inf_n(h_n(s))^{1/n}$.

Démonstration

Commençons par montrer que la suite (h_n) est sous-multiplicative. Pour tout état i, on a par la propriété de Markov :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i[(a_1\cdots a_n a_{n+1}\cdots a_{n+m})^s] &= \mathbb{E}_i\big[(a_1\cdots a_n)^s \mathbb{E}_{X_{(n+1)\delta}}[(a_1\cdots a_m)^s]\big]\\ &\le h_m(s)\mathbb{E}_i[(a_1\cdots a_n)^s]\\ &\le h_m(s)h_n(s),\end{aligned}$$

puisque $\mathbb{E}_{X_{(n+1)\delta}}[(a_1\cdots a_m)^s] \le h_m(s)$. Donc $\lim_n(h_n(s))^{1/n} = \inf_n(h_n(s))^{1/n}$.
De plus, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu|a_1\cdots a_n|^s &= \sum_i \mathbb{E}_i|a_1\cdots a_n|^s\mu(i)\\ &\le h_n(s).\end{aligned}$$

La proposition 12 donne alors

$$\rho(A_{(s,\delta)}) \le \lim_n (h_n(s))^{1/n}.$$

Pour l'inégalité dans l'autre sens, on choisit une suite d'états (i_n) telle que $h_n(s) = \mathbb{E}_{i_n}[(a_1\cdots a_n)^s]$. L'égalité ci-dessus donne donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|a_1\cdots a_n|^s &\ge h_n(s)\mu(i_n)\\ &\ge Ch_n(s),\end{aligned}$$

avec $C = \min_i \mu(i) > 0$. Ainsi il vient

$$\rho(A_{(s,\delta)}) \ge \lim_n (h_n(s))^{1/n}.$$

Comme $\lim_n(h_n(s))^{1/n} = \inf_n(h_n(s))^{1/n}$, le lemme est ainsi démontré. □

Démonstration de la proposition 3.2

Pour tout n, on fixe i_n de sorte que $h_n(s) = \mathbb{E}_{i_n}[(a_1\cdots a_n)^s]$. Comme à n fixé, le produit $a_1\cdots a_n$ est borné, on a :

$$\frac{\partial}{\partial s}h_n(s) = \mathbb{E}_{i_n}[(a_1\cdots a_n)^s \log(a_1\cdots a_n)],$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\frac{1}{n}\log h_n(s) = \frac{1}{n}\mathbb{E}_{i_n}[\log(a_1\cdots a_n)].$$

Pour tout i, le théorème ergodique pour les chaînes de Markov donne :

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}_i[\log(a_1\cdots a_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}_\mu \log a_0 = \mathbb{E}_\mu \int_0^\delta e(X_u)du = \delta\alpha < 0. \tag{3.7}$$

Comme l'espace d'états E est fini, cette convergence est uniforme sur E. Ainsi, pour toute suite d'états (i_n), on a :

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}_{i_n}[\log(a_1\cdots a_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta\alpha < 0.$$

Donc il existe un entier N tel que

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \frac{1}{N}\log h_N(s) \leq \frac{\delta\alpha}{2} < 0.$$

En particulier, l'application $s \longmapsto \frac{1}{N}\log h_N(s)$ est strictement négative sur un intervalle de la forme $]0,\varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$. Alors on déduit du lemme précédent que :

$$\begin{aligned}\log\rho(A_{(s,\delta)}) &= \inf_n \frac{1}{n}\log h_n(s)\\ &\leq \frac{1}{N}\log h_N(s)\end{aligned}$$

qui est strictement négative pour tout $s \in]0,\varepsilon[$. Comme la fonction $s \longmapsto \log\rho(A_{(s,\delta)})$ est convexe et vaut 0 en 0, ce résultat implique que sa dérivée à droite en zéro est strictement négative. □

On vient donc de démontrer que pour tout $\delta > 0$ fixé, l'application $s \longmapsto \log\rho(A_{(s,\delta)})$ est convexe (corollaire 3.2), de dérivée strictement négative en 0 (proposition 3.2) et vaut 0 en 0. On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.3 *Soit $\delta > 0$ fixé. On a la dichotomie suivante :*

1. *soit pour tout $s > 0$, $\rho(A_{(s,\delta)}) < 1$,*
2. *soit il existe un unique $\kappa > 0$ tel que $\rho(A_{(\kappa,\delta)}) = 1$, et alors $\rho(A_{(s,\delta)}) > 1$ pour tout $s > \kappa$ et $\rho(A_{(s,\delta)}) < 1$ pour tout $0 < s < \kappa$.*

3.3.2 Choix du pas de discrétisation

Nous allons maintenant montrer que la dichotomie précédente est indépendante de la valeur du pas de discrétisation δ choisi, et que dans le deuxième cas, la valeur de κ est également indépendante de δ.

Proposition 3.3 *Soit $s \geq 0$ fixé. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe $\delta > 0$ tel que $\rho(A_{(s,\delta)}) < 1$,*
2. *pour tout $\delta > 0$ on a $\rho(A_{(s,\delta)}) < 1$.*

La même équivalence a lieu si on considère les cas "> 1" ou encore "$= 1$" au lieu de "< 1".

Démonstration

Soit $\delta > 0$ tel que $\rho(A_{(s,\delta)}) < 1$, et $\gamma > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$ on définit $m_n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq \beta_n < \delta$ de sorte que $n\gamma = m_n\delta + \beta_n$, i.e. m_n est la partie entière de $n\gamma/\delta$ et β_n sa partie fractionnaire multipliée par δ. Alors on a, par la propriété de semi-groupe de la proposition 3.1 :

$$A^n_{(s,\gamma)} = A_{(s,n\gamma)} = A^{m_n}_{(s,\delta)} A_{(s,\beta_n)}.$$

Or pour tout n on a :

$$\begin{aligned} \|A_{(s,\beta_n)}\| &\leq \max_i \mathbb{E}_i[a_0^s(\beta_n)] \\ &\leq \exp(s\beta_n \max_i(e(i))) \\ &\leq \exp(s\delta \max_i(e(i))). \end{aligned}$$

Cette borne est indépendante de n. Donc il vient :

$$\log \|A^n_{(s,\gamma)}\| \leq \log \|A^{m_n}_{(s,\delta)}\| + c,$$

où c est une constante positive. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \log \rho(A_{(s,\gamma)}) &= \lim_n \frac{1}{n} \log \|A^n_{(s,\gamma)}\| \\ &\leq \limsup_n \frac{1}{n} \log \|A^{m_n}_{(s,\delta)}\| \\ &\leq \frac{\gamma}{\delta} \log \rho(A_{(s,\delta)}), \end{aligned}$$

car $m_n \sim \frac{n\gamma}{\delta}$. Donc $\rho(A_{(s,\gamma)}) \leq \rho(A_{(s,\delta}{}^{\gamma/\delta} < 1$.

Considérons maintenant le cas "$= 1$". Soit δ_0 fixé et κ_0 correspondant tel que $\rho(A_{(\kappa_0,\delta_0)}) = 1$. La fonction $s \longmapsto \rho(A_{(s,\delta_0)})$ est log-convexe donc continue et croissante au point κ_0. On a donc :

$$\rho(A_{(\kappa_0,\delta_0)}) = \sup_{s<\kappa_0} \rho(A_{(s,\delta_0)}).$$

Fixons $\delta > 0$ et montrons que $\rho(A_{(\kappa_0,\delta)}) = 1$. D'après le corollaire 3.3, pour tout $s < \kappa_0$ on a $\rho(A_{(s,\delta_0)}) < 1$. Donc par la proposition 3.3, pour tout $s < \kappa_0$ on a également $\rho(A_{(s,\delta)}) < 1$. Ainsi, on a :

$$\rho(A_{(\kappa_0,\delta)}) = \sup_{s<\kappa_0} \rho(A_{(s,\delta)}) \leq 1.$$

Or si on suppose que $\rho(A_{(\kappa_0,\delta)}) < 1$, alors, toujours par la proposition 3.3, on aurait $\rho(A_{(\kappa_0,\delta_0)}) < 1$ ce qui est absurde. Donc on a bien $\rho(A_{(\kappa_0,\delta)}) = 1$.

Le cas "> 1" se déduit des deux précédents grâce au corollaire 3.3. □

Dans la suite on notera A_s au lieu de $A_{(s,\delta)}$ chaque fois que la propriété énoncée ne dépendra pas du choix de δ. Cette indépendance permet aussi de choisir δ différemment selon ce qu'on veut démontrer. On dispose d'un critère simple pour savoir dans lequel des deux cas on se trouve.

Proposition 3.4 *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *pour tout i dans E, $e(i) \leq 0$,*
2. *pour tout $s > 0$, $\rho(A_s) < 1$.*

Démonstration

Supposons que pour tout i dans E, on ait $e(i) \leq 0$. Fixons $\delta > 0$. Alors pour tout $s > 0$, on a $a_0^s \leq 1$. Donc pour tout i, $A_s\mathbf{1}(i) = \mathbb{E}_i[a_0^s] \leq 1$, ainsi on a $A_s\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}$, ce qui implique que $\rho(A_s) \leq 1$ pour tout $s > 0$ par la proposition 6. En utilisant le corollaire 3.3, on en déduit que pour tout s, on a en fait $\rho(A_s) < 1$.

Supposons maintenant que pour tout $s > 0$, on ait $\rho(A_s) < 1$. On raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe i_0 tel que $e(i_0) > 0$. Fixons $\delta > 0$ suffisamment petit et $s \geq 2\lambda(i_0)e(i_0)^{-1}$. D'après un calcul fait dans [36], si δ est assez petit, pour toute fonction φ de E dans $\mathbb{R}$ on a, pour tout i dans E :

$$A_s\varphi(i) = [1 + \delta(se(i) - \lambda(i))]\varphi(i) + \delta\lambda(i)\sum_{j\neq i}[q(i,j)\varphi(j)] + o(\delta). \tag{3.8}$$

Soit ψ la fonction de E dans $\mathbb{R}$ qui à i_0 associe 1 et à tout $i \neq i_0$ associe 0. Alors pour tout $i \neq i_0$ on a $A_s\psi(i) = \mathbb{E}_i[a_1^s\mathbf{1}_{X_\delta = i_0}] \geq 0$ et pour $i = i_0$ on a :

$$A_s\psi(i_0) = 1 + \delta(se(i_0) - \lambda(i)) + o(\delta) \geq 1 + \delta\frac{se(i_0)}{2} + o(\delta)$$

car on a choisi $s \geq 2\lambda(i)e(i_0)^{-1}$. Donc vectoriellement, pour δ assez petit on a

$$\begin{aligned} A_s\psi &\geqslant \big(1 + \delta\frac{se(i_0)}{2} + o(\delta)\big)\psi \\ &\geqslant \big(1 + \delta\frac{se(i_0)}{4}\big)\psi. \end{aligned}$$

Donc $\rho(A_s) \geq 1 + \delta\frac{se(i_0)}{4} > 1$ par la proposition 6, ce qui est absurde. □

Remarque Cette proposition est l'analogue de la proposition 2.7 du chapitre précédent, mais sans restriction cette fois-ci puisque le fait d'avoir choisi la fonction d'intensité λ strictement positive correspond à imposer que tous les p_{ii} soient non nuls.

On rappelle enfin un résultat de [36] qui fait le lien entre le rayon spectral de A et les moments de ν (voir aussi l'introduction et la proposition 2.3).

Proposition 13 *Soit $s > 0$. Si $\rho(A_s) < 1$, alors la loi limite ν de Y a un moment d'ordre s.*

Donc dans le premier cas du corollaire 3.3, ν a des moments à tout ordre, ce qui prouve le premier point du théorème 3.1 grâce à la proposition 3.4.

3.4 Détermination de l'exposant κ

On se place maintenant et dans toute la suite de ce chapitre dans le cas où l'exposant κ existe. Avant de passer à la démonstration du théorème principal, on donne une autre méthode de calcul de κ. Il s'agit toujours d'un rayon spectral, mais ici les coefficients de la matrice en question s'expriment directement avec les paramètres du processus de saut X sans faire d'intégration. On rappelle la proposition suivante de [36] :

Proposition 14 *Soit $s > 0$ fixé. Alors on a $\rho(A_s) < 1$ si et seulement si*

$$\begin{cases} \forall i \in E, \quad se(i) - \lambda(i) < 0 \\ \rho(M_s) < 1 \end{cases}$$

où M_s est la matrice de coordonnées $q(i,j)\frac{\lambda(i)}{\lambda(i)-se(i)}$.

Posons $s_1 = \min\{\frac{\lambda(i)}{e(i)} \mid e(i) > 0\}$. La matrice M_s est définie pour tout $s < s_1$. On a en fait le résultat plus précis suivant.

Proposition 3.5 *Pour tout $0 < s < s_1$, $\rho(M_s) < 1$ si et seulement si $\rho(A_s) < 1$, et $\rho(M_s) > 1$ si et seulement si $\rho(A_s) > 1$.*

Démonstration

• Supposons que $\rho(M_s) < 1$. M_s est une matrice positive et irréductible puisque la matrice q l'est, que la fonction λ est strictement positive et que $s < s_1$. Donc d'après le théorème de Perron-Frobenius (théorème 4), il existe un vecteur φ à coordonnées strictement positives tel que $M_s\varphi = \rho(M_s)\varphi \ll \varphi$. Donc pour tout i dans E, on a :

$$\varphi(i) > \sum_j q(i,j)\frac{\lambda(i)}{\lambda(i) - se(i)}\varphi(j),$$

ou encore, puisque $s < s_1$,

$$(se(i) - \lambda(i))\varphi(i) + \lambda(i)\sum_{j=1}^{p} q(i,j)\varphi(j) < 0. \tag{3.9}$$

Par la proposition 3.3 on peut choisir δ suffisamment petit pour que la formule (3.8) soit valable. On a donc

$$\begin{aligned} A_s\varphi(i) &= [1 + \delta(se(i) - \lambda(i))]\varphi(i) + \delta\lambda(i)\sum_{j\neq i}[q(i,j)\varphi(j)] + o(\delta) \\ &= \varphi(i) + \delta[(se(i) - \lambda(i))\varphi(i) + \lambda(i)\sum_j q(i,j)\varphi(j)] + o(\delta) \\ &< \varphi(i), \end{aligned}$$

pour δ assez petit, en utilisant la formule (3.9). Donc coordonnée par coordonnée on a $A_s\varphi \ll \varphi$, et comme A_s est une matrice positive on en déduit que $\rho(A_s) < 1$ par la proposition 6. On démontre de même que si $\rho(M_s) > 1$ alors on a aussi $\rho(A_s) > 1$.

Seul le sens des inégalités change.

• Supposons maintenant que $\rho(A_s) < 1$. A_s étant irréductible et apériodique, le théorème 4 donne l'existence d'un vecteur ψ à coordonnées strictement positives tel que $A_s\psi = \rho(A_s)\psi \ll \psi$. Donc pour tout δ assez petit, on a pour tout i dans E :

$$\delta[(se(i) - \lambda(i))\psi(i) + \lambda(i)\sum_j q(i,j)\psi(j)] + o(\delta) = A_s\psi(i) - \psi(i) < 0.$$

Donc pour tout i on a $(se(i)-\lambda(i))\psi(i)+\lambda(i)\sum_j q(i,j)\psi(j) < 0$, ou encore, puisque $s < s_1$, $\psi(i) > \frac{\lambda(i)}{\lambda(i)-se(i)}\sum_j q(i,j)\psi(j) < 0$, et donc $M_s\psi \ll \psi$. Comme M_s est positive, on en déduit que $\rho(M_s) < 1$ par la proposition 6. Ici encore on démontre de même que $\rho(A_s) > 1$ implique $\rho(M_s) > 1$. □

Montrons maintenant que M_κ existe, i.e. $\kappa < s_1$.

Proposition 3.6 *Le rayon spectral de M_s tend vers l'infini quand s tend vers s_1.*

Démonstration

Soient $i_0 \in E$ tel que $\frac{\lambda(i_0)}{e(i_0)} = s_1$. Comme la matrice q est irréductible et apériodique, il existe un entier n tel que $q^n \gg 0$. Pour ce n, la trace de M_s^n vaut :

$$tr(M_s^n) = \sum_{i,j_1,\dots j_n} \frac{\lambda(i)\lambda(j_1)\cdots\lambda(j_n)}{(\lambda(i) - se(i))(\lambda(j_1) - se(j_1))\cdots(\lambda(j_n) - se(j_n))}(q^n)_{ii}.$$

Tous les termes de cette somme sont strictement positifs pour tout $s < s_1$, le nombre de termes est fixé et fini et $\frac{\lambda(i_0)}{\lambda(i_0)-se(i_0)}$ tend vers l'infini quand s tend vers s_1. Comme la trace est la somme des valeurs propres, on en déduit que le rayon spectral de M_s^n, et donc celui de M_s tend vers l'infini quand s tend vers s_1. □

Corollaire 3.4 *L'exposant κ est l'unique solution de l'équation $\rho(M_s) = 1$ sur l'intervalle $]0,\ s_1[$.*

Démonstration

Pour tout $s < \kappa$, on a $\rho(A_s) < 1$ par le corollaire 3.3, donc on a aussi $\rho(M_s) < 1$ par la proposition 3.5 pour tout indice $0 < s < \min\{\kappa, s_1\}$. De plus par la proposition 3.6 $\rho(M_s) \to \infty$ quand s tend vers s_1. Donc toujours par la proposition 3.5 on en déduit que $\rho(A_s) > 1$ pour s tendant vers s_1. Donc le corollaire 3.3 implique que $\kappa < s_1$, et que $\rho(A_s) > 1$ pour tout indice $\kappa < s < s_1$. Par la proposition 3.5 on a donc aussi $\rho(M_s) > 1$ pour tout $\kappa < s < s_1$. Or, toutes les coordonnées de M_s sont continues en s, donc il en est de même pour son rayon spectral. Donc $\rho(M_\kappa) = 1$, et c'est l'unique valeur de s dans l'intervalle $]0,\ s_1[$ qui vérifie cette propriété. □

En dimension 2, on peut calculer explicitement l'exposant κ. On a $E = \{1, 2\}$ et le noyau stochastique q est égal à :

$$q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La loi invariante du processus X est $\mu = (\frac{\lambda(2)}{\lambda(1)+\lambda(2)}, \frac{\lambda(1)}{\lambda(1)+\lambda(2)})$. On suppose que $e(1)$ ou $e(2)$ est strictement positif. L'hypothèse (3.4) est vérifiée dès que

$$\lambda(1)e(2) + \lambda(2)e(1) < 0. \tag{3.10}$$

Pour tout i dans E, posons $r_i = \frac{e(i)}{\lambda(i)}$. On a donc $r_1 + r_2 < 0$, $r_1 r_2 < 0$, et $s_1 = \max\{r_1^{-1}, r_2^{-1}\}$. Pour $s \in [0, s_1[$, la matrice M_s est égale à :

$$M_s = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1-sr_1} \\ \frac{1}{1-sr_2} & 0 \end{pmatrix},$$

et son rayon spectral vaut $\left[(1-sr_1)(1-sr_2)\right]^{-1/2}$. Ce rayon vaut 1 pour

$$\kappa = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{\lambda(2)}{e(2)} + \frac{\lambda(1)}{e(1)}.$$

En particulier, dans l'exemple de la figure 3.1, on a $\kappa = 1$, donc la loi limite ν n'a ni variance ni espérance.

3.5 Les équations de renouvellement

Nous allons maintenant donner les équations de renouvellement correspondant à notre problème. On fixe le pas à $\delta = 1$ dans toute la suite, et on travaille sur la discrétisée $Y^{(1)}$.

3.5.1 Notations

Pour ne pas alourdir les notations et se rapprocher de celles du chapitre précédent, on notera $b_n = V_n^{1/2}\xi_n$ et

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_{n-k}b_{n-1-k},$$

au lieu de $\widetilde{Y}_n$ désignera l'unique solution stationnaire de l'équation (3.3) :

$$R_{n+1} = a_n R_n + b_n, \tag{3.11}$$

donnée par la proposition 10. D'après le corollaire 1, la loi limite ν de Y est la loi de R_1. C'est donc la variable aléatoire R_1 que nous allons étudier.

La suite (a_n) n'est ni iid, ni une chaîne de Markov, on ne peut donc pas appliquer directement les résultats du chapitre 2. Cependant, conditionnellement à X_n, a_{n-1} et a_n sont indépendants. On reprend ici la même démarche en tenant compte de cette particularité. On signalera les différences au fur et à mesure de leur apparition.

On peut déjà remarquer que l'énoncé du théorème 3.1 est beaucoup plus simple que celui du théorème 2.1. En effet, certaines hypothèses, comme la non-arithméticité, sont automatiquement vérifiées en temps continu, et le bruit b_0 est très particulier

puisqu'il est gaussien.

Ici, les coefficients a_n sont des exponentielles, donc sont toujours strictement positifs. Autre particularité, les ξ_n sont des variables gaussiennes donc symétriques, et elles sont indépendantes des suites (a_n) et (V_n). On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\mu\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_0a_{-1}\cdots a_{1-k}b_{-k} > t\Big) &= \mathbb{P}_\mu\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_0a_{-1}\cdots a_{1-k}V_{-k}^{1/2}\xi_{-k} > t\Big)\\ &= \mathbb{P}_\mu\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_0a_{-1}\cdots a_{1-k}V_{-k}^{1/2}(-\xi_{-k}) > t\Big)\\ &= \mathbb{P}_\mu\Big(-\sum_{k=0}^{\infty} a_0a_{-1}\cdots a_{1-k}b_{-k} > t\Big).\end{aligned}$$

Ainsi la queue de la distribution de la loi stationnaire ν est la même dans les deux directions : $\nu(]t,+\infty[) = \nu(]-\infty,-t[)$ pour tout t, donc si les limites annoncées dans le théorème 3.1 existent, elles sont nécessairement égales. Il suffit donc d'étudier une seule de ces deux limites. On choisit d'étudier la limite du côté positif , c'est-à-dire la probabilité $\mathbb{P}_\mu(R_1 > t)$.

Pour étudier la loi stationnaire, on introduit, comme précédemment une régularisée : pour tout t dans $\mathbb{R}$, on pose

$$z(t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}_\mu(R_1 > u)du.$$

Le lemme 4 assure encore que si $z(t)$ a une limite quand t tend vers $+\infty$, alors $t^\kappa\mathbb{P}_\mu(R_1 > t)$ a la même limite.

Pour prendre en compte le caractère markovien, on introduit les probabilités conditionnées : pour tout i dans E, et t dans $\mathbb{R}$, on pose

$$Z_i(t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}_\mu(R_1 > u, X_1 = i)du,$$

de sorte que z est égal à la somme des Z_i : $z(t) = \sum_{i=1}^p Z_i(t)$. On va montrer que le vecteur de fonctions $Z = {}^t(Z_1,\ldots,Z_p)$ est solution d'un système d'équations de renouvellement par la même démarche que dans le chapitre précédent.

3.5.2 Les équations de renouvellement

Comme la suite (R_n) est solution de l'équation (3.11), on a $R_1 = a_0R_0 + b_0$, donc pour tout t dans $\mathbb{R}$, on peut écrire

$$\mathbb{P}_\mu(R_1 > u, X_1 = i) = \mathbb{P}_\mu(a_0R_0 > u, X_1 = i) + \psi_i(u),$$

où les fonctions ψ_i sont définies de façon analogue à celles du chapitre précédent :

$$\psi_i(t) = \mathbb{P}_\mu(t - b_0 < a_0R_0 \le t, X_1 = i) - \mathbb{P}_\mu(t < a_0R_0 \le t - b_0, X_1 = i).$$

On introduit également leur régularisée. On pose $G_i(t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa \psi_i(u)du$, et $G = {}^t(G_1, \dots, G_p)$. Alors on a

$$z(t) = \sum_{i=1}^{p} \Big[e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}_\mu(a_0 R_0 > u, X_1 = i)du + G_i(t) \Big].$$

On cherche à récrire cette équation comme un système d'équations de renouvellement. Le premier terme de la somme peut être transformé comme suit. Par définition, on a $a_0 \geq 0$ et conditionnellement à X_0, a_0 et R_0 sont indépendants. Ainsi par changement de variable et stationnarité, il vient :

$$\begin{aligned}
& e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}_\mu(a_0 R_0 > u, X_1 = i)du \\
&= \sum_{j=1}^{p} e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}_j(a_0 R_0 > u, X_1 = i)\mu(j)du \\
&= \sum_{j=1}^{p} \mathbb{E}_j \Big[a_0^\kappa \mathbb{1}_{X_1=i} e^{-(t-\log a_0)} \int_0^{e^{t-\log a_0}} u^\kappa \mathbb{P}_j(R_0 > u)du \Big] \mu(j) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \mathbb{E}_j \Big[a_0^\kappa \mathbb{1}_{X_1=i} e^{-(t-\log a_0)} \int_0^{e^{t-\log a_0}} u^\kappa \mathbb{P}_\mu(R_0 > u \mid X_0 = j)du \Big] \mu(j) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \mathbb{E}_j \Big[a_0^\kappa \mathbb{1}_{X_1=i} e^{-(t-\log a_0)} \int_0^{e^{t-\log a_0}} u^\kappa \mathbb{P}_\mu(R_1 > u, X_1 = j)du \Big].
\end{aligned}$$

On obtient donc le système suivant :

$$\begin{aligned}
\forall\ 1 \leq i \leq p \qquad Z_i(t) &= \sum_{j=1}^{p} \Big[\mathbb{E}_j \big[a_0^\kappa \mathbb{1}_{X_1=i} Z_j(t - \log a_0) \big] \Big] + G_i(t) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \Big[F_{ij} * Z_j(t) \Big] + G_i(t), \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

où la matrice $F = (F_{ij})_{i,j\in E}$ est définie par :

$$F_{ij}(t) = \mathbb{E}_j[a_0^\kappa \mathbb{1}_{X_1=i} \mathbb{1}_{t \geq \log a_0}].$$

La matrice F est une matrice de distributions au sens de la partie 1.3.1, et le système (3.12) est un système d'équations de renouvellement que l'on peut récrire matriciellement sous la forme $Z = F * Z + G$. Pour pouvoir appliquer le théorème 1.4 il faut maintenant vérifier que la matrice F et le vecteur G en satisfont les hypothèses. C'est ce qu'on va faire dans la section suivante.

3.6 Application du théorème de renouvellement

Par définition de a_0, on a la majoration suivante :

$$a_0 = \exp\Big[\int_0^1 e(X_u)du \Big] \leq \exp\big(\max_{1\leq i\leq p} e(i) \big),$$

donc a_0 est borné et par conséquent pour tous les états i, j de E, les mesures F_{ij} sont finies et $F_{ij}(\infty) = \mathbb{E}_j[a_0^\kappa \mathbb{1}_{X_1=i}]$. En particulier, on remarque que $F(\infty) = {}^tA_\kappa$. Comme la matrice A_κ est irréductible et apériodique par la proposition 12, il en est de même pour F, qui est également de rayon spectral égal à 1 par définition de κ. D'autre part, les $\gamma_{ij} = \mathbb{E}_j[a_0^\kappa \mathbb{1}_{X_1=i} \log a_0]$ sont bien définis, donc les F_{ij} sont d'espérance finie. On note encore $\Gamma = (\gamma_{ij})$ la matrice espérance de F.

On montre que les autres hypothèses du théorème 1.4 sont satisfaites dans les paragraphes suivants.

3.6.1 Arithméticité de F

On veut montrer que la matrice F n'est pas arithmétique au sens de la définition 7. Dans le chapitre 2 la démonstration était immédiate car les a_i ne pouvaient prendre qu'un nombre fini de valeurs que l'on avait choisies explicitement en dehors d'un réseau. Ici, cette propriété de non arithméticité est vraie sans aucune restriction sur la fonction e grâce à la continuité du processus X sous-jacent. Cependant, la démonstration est un peu délicate à écrire.

Soient $e_m = \min_{i\in E}\{e(i)\}$ la plus petite valeur de la fonction e sur l'espace d'états E, $e_M = \max_{i\in E}\{e(i)\}$ sa la plus grande valeur, et i_0, j_0 des états de E où ces extrema sont réalisés, i.e. $e(i_0) = e_m$ et $e(j_0) = e_M$. On va montrer que tous les points de l'intervalle ouvert $]e_m,\ e_M[$ sont des points d'accroissement de la variable aléatoire $\log a_1$.

Proposition 3.7 *Pour tous i, j états de E, pour tout x dans l'intervalle $]e_m,\ e_M[$ et pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, la probabilité*

$$\mathbb{P}_i\Big(\int_0^1 e(X_u)du\ \in\ ]x-\varepsilon,\ x+\varepsilon[,\ X_1 = j\Big)$$

est strictement positive, c'est-à-dire que x est un point d'accroissement de la variable aléatoire $\log a_1$ conditionnellement à $X_0 = i$ et $X_1 = j$.

Démonstration

Soit x un réel de l'intervalle $]e_m,\ e_M[$. L'idée est de montrer qu'il y a un ensemble de mesure non nulle de trajectoires de X qui restent le temps voulu en i_0 et j_0 pour que l'intégrale de $e(X)$ soit proche de x (voir figure 3.2) : ce sont les trajectoires qui sautent très rapidement de la valeur initiale i à la valeur i_0, qui restent un certain temps en i_0 puis sautent en j_0 et y restent jusqu'à sauter à la valeur terminale j peu avant le temps 1.

La démonstration est un peu technique, car à priori les sauts directs de i à i_0, de i_0 à j_0 et de j_0 à j ne sont pas forcément possibles. La propriété d'irréductibilité assure juste qu'on peut passer de chacune de ces valeurs à la suivante en un nombre fini de sauts, que l'on peut supposer s'effectuer en des temps très courts.

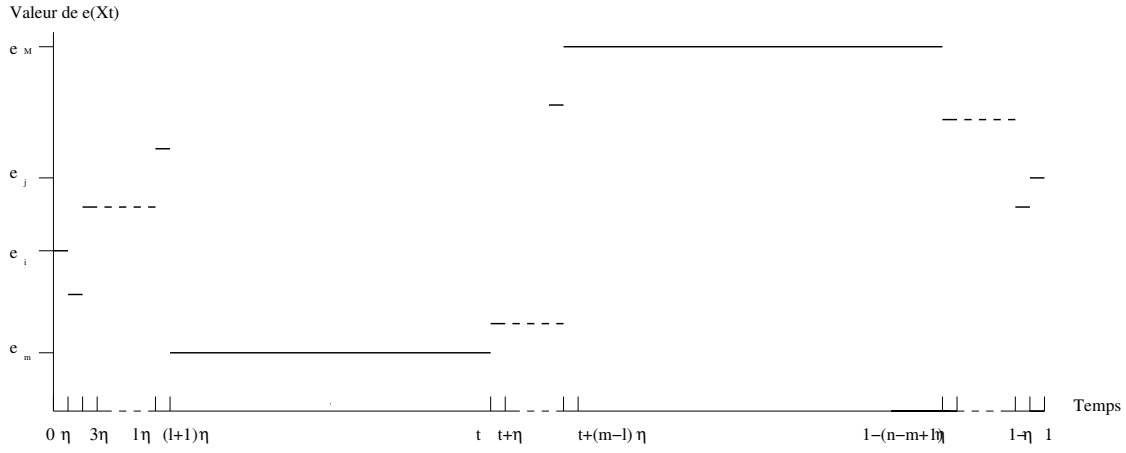


FIG. 3.2 – Trajectoire de la chaîne de Markov (X_t)

Formalisons ceci. Soit $0 < t < 1$ tel que $x = te_m + (1-t)e_M$. Fixons i et j dans l'espace d'états E. Comme la matrice q est irréductible, on peut trouver des entiers $0 \leq l \leq m \leq n$ et des états $k_1, \ldots, k_n$ dans E tels que les produits :

$$q_{i,k_1} q_{k_1,k_2} \cdots q_{k_l,i_0}, \quad q_{i_0,k_{l+1}} q_{k_{l+1}k_{l+2}} \cdots q_{k_m,j_0}, \quad q_{j_0,k_{m+1}} q_{k_{m+1}k_{m+2}} \cdots q_{k_n,j}$$

soient strictement positifs. On pose aussi

$$\begin{aligned} y \;=\; & e(i) + e(k_1) + \cdots + e(k_l) - (l+1)e_m + e(k_{l+1}) + \cdots + \\ & e(k_m) - (n-l+1)e_M + e(k_{m+1}) + \cdots + e(k_n) + e(j), \end{aligned}$$

et $z = \min\left\{\frac{\varepsilon}{|y|}, \frac{t}{l+1}, \frac{1-t}{n-l+1}\right\}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_i\Big(\int_0^1 e(X_u)du \;\in]x-\varepsilon,\; x+\varepsilon[,\; X_1 = j \Big) \\ & \geq \;\; \mathbb{P}_i\Big(X_u = i \text{ sur } [0,\; \eta[,\; X_u = k_1 \text{ sur } [\eta,\; 2\eta[, \ldots, \\ & \qquad X_u = k_l \text{ sur } [l\eta,\; (l+1)\eta[,\; X_u = i_0 \text{ sur } [(l+1)\eta, t[, \\ & \qquad X_u = k_{l+1} \text{ sur } [t,\; t+\eta[,\; X_u = k_{l+2} \text{ sur } [t+\eta,\; t+2\eta[, \ldots, \\ & \qquad X_u = k_m \text{ sur } [t+(m-l-1)\eta,\; t+(m-l)\eta[, \\ & \qquad X_u = j_0 \text{ sur } [t+(m-l)\eta,\; 1-(n-m+1)\eta[, \\ & \qquad X_u = k_{m+1} \text{ sur } [1-(n-m+1)\eta,\; 1-(n-m)\eta[, \ldots, \\ & \qquad X_u = k_n \text{ sur } [1-2\eta,\; 1-\eta[, \\ & \qquad X_u = j \text{ sur } [1-\eta,\; 1] \;,\;\; \eta \in]0,\; z[\;\Big). \end{aligned} \tag{3.13}$$

En effet, on a construit cet événement pour que sur celui-ci, les égalités suivantes

aient lieu (voir figure 3.2) :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 e(X_u)du \\
&= \eta e(i) + \eta e(k_1) + \cdots + \eta e(k_l) + (t-(l+1)\eta)e_m + \eta e(k_{l+1}) + \cdots + \eta e(k_m) \\
&\quad +((1-t)-(n-l+1)\eta)e_M + \eta e(k_{m+1}) + \cdots + \eta e(k_n) + \eta e(j) \\
&= te_m + (1-t)e_M + \eta y \\
&= x + \eta y,
\end{aligned}$$

donc si $\eta < \frac{\varepsilon}{|y|}$ alors la valeur de l'intégrale $\int_0^1 e(X_u)du$ est bien dans l'intervalle $]x-\varepsilon,\ x+\varepsilon[$.

On peut calculer explicitement la probabilité (3.13). Pour ce faire, on appelle $S_1, \ldots, S_n$ les *temps d'attente* du processus X c'est-à-dire le temps passé dans chaque état, et $J_0, \ldots J_n$ ses *sauts*. On rappelle (voir par exemple [50]) que l'on a la propriété suivante.

Proposition 15 *Le suite de variables aléatoires (J_n) est une chaîne de Markov (μ, q) sur l'espace d'états E, et conditionnellement à $J_0, \ldots J_{n-1}$, les variables aléatoires $S_1, \ldots, S_n$ sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre respectif $\lambda(J_0), \ldots, \lambda(J_{n-1})$.*

Avec ces notations, la probabilité (3.13) peut se récrire comme :

(3.13)
$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(J_0 = i,\ S_1 = \eta,\ J_1 = k_1,\ S_2 = \eta, \ldots, J_l = k_l,\ S_{l+1} = \eta,\ J_{l+1} = i_0, \\
&\qquad S_{l+2} = t + (l-1)\eta,\ J_{l+2} = k_{l+1},\ S_{l+3} = \eta, \ldots,\ J_{m+1} = k_m,\ S_{m+2} = \eta, \\
&\qquad J_{m+2} = j_0,\ S_{m+3} = 1 - t + (n-l+1)\eta,\ J_{m+3} = k_{m+1},\ S_{m+4} = \eta, \ldots \\
&\qquad J_{n+1} = k_{n-1},\ S_{n+2} = \eta,\ J_{n+2} = k_n,\ S_{n+3} = \eta,\ J_{n+3} = j,\ S_{n+4} \geq \eta\ , \\
&\qquad \eta \in\ ]0,\ z[),
\end{aligned}$$

ou encore, sous forme d'intégrale :

(3.13)
$$\begin{aligned}
&= \int_0^z \mathbb{P}(J_0 = i,\ S_1 \in d\eta,\ J_1 = k_1,\ S_2 \in d\eta, \ldots, J_l = k_l,\ S_{l+1} \in d\eta,\ J_{l+1} = i_0, \\
&\qquad \frac{t - S_{l+2}}{l-1} \in d\eta,\ J_{l+2} = k_{l+1},\ S_{l+3} \in d\eta, \ldots J_{m+1} = k_m,\ S_{m+2} \in d\eta, \\
&\qquad J_{m+2} = j_0,\ \frac{(1-t) - S_{m+3}}{n-l+1} \in d\eta,\ J_{m+3} = k_{m+1},\ S_{m+4} \in d\eta, \ldots, \\
&\qquad J_{n+1} = k_{n-1},\ S_{n+2} \in d\eta,\ J_{n+2} = k_n,\ S_{n+3} \in d\eta,\ J_{n+3} = j,\ S_{n+4} \geq \eta).
\end{aligned}$$

Comme on connaît les lois des S_k et J_k, on peut maintenant calculer explicitement cette intégrale. En conditionnant successivement et en utilisant la proposition

précédente et la propriété de Markov, on obtient :

(3.13)

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^z \mathbb{P}(J_0=i)\mathbb{P}(\ S_1\in d\eta \mid J_0=i)\times \\
&\qquad \mathbb{P}(J_1=k_1,\ S_2\in d\eta,\dots,\ J_{n+3}=j,\ S_{n+4}\geq\eta\mid J_0=i) \\
&= \int_0^z \Big[\mu(i)\lambda(i)e^{-\lambda(i)\eta}\mathbb{P}(J_1=k_1,\ S_2\in d\eta,\dots,\ J_{n+3}=j,\ S_{n+4}\geq\eta\mid J_0=i)\Big]d\eta \\
&= \mu(i)\lambda(i)\int_0^z \Big[e^{-\lambda(i)\eta}\mathbb{P}(S_2\in d\eta\mid J_0=i,J_1=k_1)\mathbb{P}(J_1=k_1\mid J_0=i)\times \\
&\qquad \mathbb{P}(S_2\in d\eta,\dots,S_{n+4}\geq\eta\mid J_0=i,J_1=k_1)\Big]d\eta \\
&= \mu(i)q_{i,k_1}\lambda(i)\lambda(k_1)\int_0^z \Big[e^{-\lambda(i)\eta}e^{-\lambda(k_1)\eta}\mathbb{P}(J_2=k_2,\dots,S_{n+4}\geq\eta\mid J_0=i,J_1=k_1)\Big]d\eta \\
&= \mu(i)q_{i,k_1}q_{k_1,k_2}\cdots q_{k_l,i_0}q_{i_0,k_{l+1}}\cdots q_{k_m,j_0}q_{j_0,k_{m+1}}\cdots q_{k_n,j}\times \\
&\qquad \lambda(i)\lambda(k_1)\cdots\lambda(k_n)\lambda(i_0)(l-1)\lambda(j_0)(n-l+1)\times \\
&\qquad \int_0^z \Big[e^{-\lambda(i)\eta}e^{-\lambda(k_1)\eta}\dots e^{-\lambda(k_n)\eta}e^{-\lambda(i_0)(t-(l-1)\eta)}e^{-\lambda(j_0)(1-t-(n-l+1)\eta}e^{-\lambda(j)\eta}\Big]d\eta,
\end{aligned}
$$

donc par choix de $k_1,\dots,k_n$, de z, et la stricte positivité de la fonction d'intensité λ, on en déduit que cette quantité est bien strictement positive. □

La proposition 3.7 implique en particulier qu'aucune des mesures

$$F_{ij}(\cdot)=\mathbb{E}_j[a_0^{\kappa}\mathbb{1}_{X_1=i}\mathbb{1}_{\cdot\geq\log a_0}]$$

n'est à support discret. Par conséquent, la matrice F ne peut pas être arithmétique au sens de la définition 7.

3.6.2 Finitude de la fonction de renouvellement

Nous allons montrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$, la fonction de renouvellement $U(t)$ est finie. Pour cela, comme au chapitre précédent on va contrôler U par les convolées successives de F. Puisqu'on a vu que $F(\infty)={}^tA_\kappa$, on commence par généraliser cette relation en donnant deux lemmes qui relient les convolées de F aux puissances de l'opérateur A_κ.

Lemme 3.2 *Pour tous n,i,j,t on a :*

$$F_{ij}^{(n)}(t)=\mathbb{E}_j[a_1^{\kappa}\cdots a_n^{\kappa}\mathbb{1}_{\log a_1\cdots a_n\geq t}\mathbb{1}_{X_{n+1}=i}].$$

Démonstration

On fait une preuve par récurrence sur n. Pour $n=1$, c'est la définition de F. Supposons que la formule est vraie pour n fixé. Alors en utilisant la stationnarité et

la propriété de Markov on trouve :

$$\begin{aligned}
F_{ij}^{(n+1)}(t) &= \sum_{k=1}^{p} F_{ik} * F_{kj}^{(n)}(t) \;=\; \sum_{k=1}^{p} \int F_{kj}^{(n)}(t-u) F_{ik}(du) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \int \mathbb{E}_j[a_1^\kappa \cdots a_n^\kappa \mathbb{1}_{\log a_1 \cdots a_n \geq t-u} \mathbb{1}_{X_{n+1}=k}] \mathbb{E}_k[a_0^\kappa \delta_u(\log a_0) \mathbb{1}_{X_1=i}] \\
&= \sum_{k=1}^{p} \int \mathbb{E}_\mu[a_1^\kappa \cdots a_n^\kappa \mathbb{1}_{\log a_1 \cdots a_n \geq t-u} \mathbb{1}_{X_{n+1}=k} \mathbb{1}_{X_0=j}] \times \\
&\quad \mathbb{E}_\mu[a_{n+1}^\kappa \delta_u(\log a_{n+1}) \mathbb{1}_{X_{n+2}=i} \mathbb{1}_{X_{n+1}=k}] \frac{1}{\mu(k)\mu(j)} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \mathbb{E}_\mu[a_1^\kappa \cdots a_n^\kappa \mathbb{1}_{\log a_1 \cdots a_n \geq t-\log a_{n+1}} \mathbb{1}_{X_0=j} \mid \mathbb{1}_{X_{n+1}=k}] \times \\
&\quad \mathbb{E}_\mu[a_{n+1}^\kappa \mathbb{1}_{X_{n+2}=i} \mid \mathbb{1}_{X_{n+1}=k}] \frac{\mu(k)}{\mu(j)} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \mathbb{E}_\mu[a_1^\kappa \cdots a_n^\kappa a_{n+1}^\kappa \mathbb{1}_{\log a_1 \cdots a_n \geq t-\log a_{n+1}} \mathbb{1}_{X_0=j} \mathbb{1}_{X_{n+2}=i} \mid \mathbb{1}_{X_{n+1}=k}] \frac{\mu(k)}{\mu(j)} \\
&= \mathbb{E}_\mu[a_1^\kappa \cdots a_n^\kappa a_{n+1}^\kappa \mathbb{1}_{\log a_1 \cdots a_n a_{n+1} \geq t} \mathbb{1}_{X_0=j} \mathbb{1}_{X_{n+2}=i}] \frac{1}{\mu(j)} \\
&= \mathbb{E}_j[a_1^\kappa \cdots a_n^\kappa a_{n+1}^\kappa \mathbb{1}_{\log a_1 \cdots a_n a_{n+1} \geq t} \mathbb{1}_{X_{n+2}=i}].
\end{aligned}$$

Donc la formule est vraie pour $n+1$ et par récurrence le lemme est démontré. □

On a vu que $F(\infty) = {}^tA_\kappa$. La proposition 3.1 et le lemme précédent impliquent aussi que pour tout n on a $F^{(n)}(\infty) = {}^tA_\kappa^n = F(\infty)^n$, et plus généralement on a le lemme suivant :

Lemme 3.3 *Pour tous n entier et $0 \leq s < \kappa$ on a :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-su} F^{(n)}(du) = {}^tA_{\kappa-s}^n.$$

Démonstration

Pour tous i, j dans E, on a, par le lemme précédent et la propriété de semi-groupe donnée par la proposition 3.1 :

$$\begin{aligned}
\int_{\infty}^{\infty} e^{-su} F_{ij}^{(n)}(du) &= \int_{\infty}^{\infty} e^{-su} \mathbb{E}_j[a_1^\kappa \cdots a_n^\kappa \delta_u(\log a_1 \cdots a_n) \mathbb{1}_{X_{n+1}=i}] \\
&= \mathbb{E}_j[a_1^\kappa \cdots a_n^\kappa e^{-s \log a_1 \cdots a_n} \mathbb{1}_{X_{n+1}=i}] \\
&= \mathbb{E}_j[a_1^{\kappa-s} \cdots a_n^{\kappa-s} \mathbb{1}_{X_{n+1}=i}] \\
&= (A_{\kappa-s}^n)_{ji},
\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. □

On utilise maintenant ce lemme pour prouver la finitude de la fonction de renouvellement. Soit $0 < s < \kappa$ fixé. Par définition de U, on a :

$$\begin{aligned} U_{ij}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{ij}^{(n)}(t) \\ &= e^{st}e^{-st}\int_{-\infty}^{t}\sum_{n=0}^{\infty} F_{ij}^{(n)}(du) \\ &\leq e^{st}\int_{-\infty}^{t} e^{-su}\sum_{n=0}^{\infty} F_{ij}^{(n)}(du) \\ &\leq e^{st}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-su}F_{ij}^{(n)}(du) \\ &= e^{st}\sum_{n=0}^{\infty}(A_{\kappa-s}^{n})_{ji}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

d'après le lemme précédent. Or par le corollaire 3.3, on a $\rho(A_{\kappa-s}) < 1$. Donc la dernière série dans l'équation (3.14) converge. Ainsi $U_{ij}(t)$ est fini pour tous i, j dans E et t dans $\mathbb{R}$.

3.6.3 Identification de Z

On veut maintenant montrer que Z est exactement égale à la solution particulière $U*G$ de l'équation de renouvellement (3.12). En itérant cette équation, il vient, pour tout n,

$$Z = F^{(n)} * Z + \sum_{k=0}^{n-1} F^{(k)} * G. \tag{3.15}$$

Or on a vu dans la partie 3.5.2 que

$$\sum_{i=1}^{p}(F * Z)_i(t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\kappa}\mathbb{P}_{\mu}(a_1R_0 > u)du.$$

Par un calcul similaire, on montre que pour tout n, on a

$$\sum_{i=1}^{p}(F^{(n)} * Z)_i(t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\kappa}\mathbb{P}_{\mu}(a_0a_{-1}\cdots a_{1-n}R_{1-n} > u)du.$$

Or on a vu à l'équation (3.7) que $a_0a_{-1}\cdots a_{1-n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi par le théorème de convergence dominée $\sum_{i=1}^{p}(F^{(n)} * Z)_i(x,t)$ tend aussi vers 0 quand n tend vers l'infini, et comme tous les termes de la somme sont positifs, chacun tend donc vers 0, et ainsi on a bien $Z = U * G$ en passant à la limite dans l'équation (3.15), ce qui prouve au passage que $U * G$ est bien définie.

3.6.4 Intégrabilité de G

La preuve est la même que dans le chapitre précédent, paragraphe 2.4.3, en remplaçant les conditionnements par a_0 par des conditionnements par X_0. On a encore $\mathbb{E}_\mu|b_0|^\kappa < \infty$. En effet, $\mathbb{E}_\mu|b_0|^\kappa = \mathbb{E}_\mu(V_0^{s/2})\mathbb{E}_\mu|\xi_0|^\kappa$ par indépendance, et ξ_0 a des moments à tous ordres car c'est une variable gaussienne, et V_0 est bornée. La seule différence qui apparaît est dans la majorationde $\mathbb{E}_i[|b_0||a_0R_0|^{\kappa-1}]$. Par la preopriété d'indépendance conditionnelle, on a :

$$\mathbb{E}_i[|b_0||a_0R_0|^{\kappa-1}] \leq \mathbb{E}_i[|b_0|a_0^{\kappa-1}]\mathbb{E}_i|R_0|^{\kappa-1},$$

et cette quantité est finie puisque a_0 est borné et par la proposition 13.

3.6.5 Queue de la distribution

On a montré que la matrice F et le vecteur G vérifient les hypothèse du théorème 1.4. Donc avec les notations de ce théorème, on a, pour tous i, t,

$$Z_i(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\gamma} m_i \sum_{j=1}^{p} u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(s)ds. \tag{3.16}$$

En sommant sur tous les états i, on obtient :

$$z(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{p} u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(s)ds, \tag{3.17}$$

car $\sum m_i = 1$. Ici encore, rien n'impose à priori que cette limite est non nulle. C'est ce qu'on démontre dans la partie suivante.

3.7 La limite est non nulle

La méthode est la même que dans le chapitre précédent. On établit une minoration de la probabilité $\mathbb{P}(|R_1| > t)$ par une probabilité faisant intervenir des produits de a_n, et on étudie ensuite la marche aléatoire de pas $\log a_n$.

3.7.1 Minoration de $\nu\{x : \ |x| > t\}$

On commence par minorer la probabilité $\mathbb{P}_\mu(|R_1| > t)$.

Proposition 3.8 *Il existe $\varepsilon > 0$ et une constante correspondante $C > 0$ tels que pour tout t assez grand, on ait :*

$$\mathbb{P}_\mu(|R_1| > t) \geq C \ \mathbb{P}_\mu(\sup_n \ (a_0 \cdots a_{1-n}) > \frac{2t}{\varepsilon}).$$

Rappelons que $R_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 a_{-1} \cdots a_{1-k} b_{-k}$. On pose, pour tout $n \geq 1$,

$$R_1^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_0 a_{-1} \cdots a_{1-k} b_{-k} \quad \text{et} \quad \Pi_n = a_0 a_{-1} \cdots a_{1-n}.$$

On adapte la définition de médiane conditionnelle.

Définition 26 *Soit S une variable aléatoire $\sigma(X_t, W_t, a \le t \le b)$-mesurable. On note $med_i(S)$ une médiane de S conditionnellement à $X_b = i$ pour $1 \le i \le p$ et $med_-(S)$ leur minimum $med_-(S) = \min_i\{med_i(S)\}$.*

Avec cette notion, on peut étendre l'inégalité de symétrisation de Lévy.

Lemme 3.4 *Pour tous $t > 0$ et $n \ge 1$, on a*

$$\mathbb{P}_\mu\Big(\max_{1\le j\le n}\Big\{R_1^j + \Pi_j med_-\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big)\Big\} > t\Big) \le 2\mathbb{P}_\mu(R_1^n > t).$$

Démonstration

On pose $T = \inf\Big\{j \le n \text{ t.q. } R_1^j + \Pi_j med_-\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big) > t\Big\}$ si cet ensemble est non vide, $n+1$ sinon, et $B_j = \Big\{med_-\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big) \le \frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big\}$.

L'événement $(T = j)$ est dans la σ-algèbre engendrée par $(X_t, W_t, (1-j) \le t \le 1)$, est B_j est dans la σ-algèbre engendrée par $(X_t, W_t, 1-n \le t \le 1-j)$. Ainsi ces deux événements sont indépendants conditionnellement à X_{1-j}. De plus, pour tous i et j on a $\mathbb{P}_\mu(B_j \mid X_{1-j} = i) \ge \mathbb{P}_\mu\Big(med_i\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big) \le \frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j} \mid X_{1-j} = i\Big) \ge \frac{1}{2}$ par définition de la médiane conditionnelle. Donc, comme les produits Π_j sont positifs, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\mu(R_1^n > t) &\ge \mathbb{P}_\mu\Big(\bigcup_{j=1}^n [B_j \cap (T = j)]\Big) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p \mathbb{P}_\mu(B_j \mid X_{1-j} = i)\mathbb{P}(T = j \mid X_{(1-j)} = i)\mu(i) \\
&\ge \frac{1}{2}\mathbb{P}_\mu(T \le n) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}_\mu\Big(\max_{1\le j\le n}\Big\{R_1^j + \Pi_j med_-\Big(\frac{R_1^n - R_1^j}{\Pi_j}\Big)\Big\} > t\Big),
\end{aligned}$$

et le lemme est démontré. □

Sous nos hypothèses, R_1^n tend vers R_1 quand n tend vers l'infini, et à j fixé, $\Pi_j^{-1}(R_1^n - R_1^j)$ converge vers une variable aléatoire $\widehat{R}$ qui a la même loi que R_1. On pose $m_0 = med_-(R_1) = \min_i\{med(R_1 \mid X_1 = i)\} = med_-(\widehat{R})$, et en faisant tendre n vers l'infini dans le lemme 3.4, on obtient, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}_\mu\Big(\sup_j\{R_1^j + \Pi_j m_0\} > t\Big) \le 2\mathbb{P}_\mu(R_1 > t).$$

Si on remplace R_1 par $-R_1$, on obtient une formule similaire, et donc, en regroupant ces deux formules il vient :

$$\mathbb{P}_\mu\Big(\sup_j |R_1^j + \Pi_j m_0| > t\Big) \le 2\mathbb{P}_\mu(|R_1| > t). \tag{3.18}$$

De plus, pour tout $t > |m_0|$, on peut minorer la première probabilité en faisant intervenir les différences successives :

$$\mathbb{P}_\mu\Big(\sup_n |R_1^n + \Pi_n m_0| > t\Big) \geq \mathbb{P}_\mu\Big(\exists n \ \text{ t.q. } \ |(R_1^{n+1} + \Pi_{n+1} m_0) - (R_1^n + \Pi_n m_0)| > 2t\Big),$$

où on a posé $R_1^0 = 0$ et $\Pi_0 = 1$. Or, on a

$$\begin{aligned}(R_1^{n+1} + \Pi_{n+1} m_0) - (R_1^n + \Pi_n m_0) &= a_0 a_{-1} \cdots a_{1-n} b_{-n} + (\Pi_{n+1} - \Pi_n) m_0 \\ &= \Pi_n\big(b_{-n} + (a_{-n} - 1) m_0\big).\end{aligned}$$

Donc l'équation (3.18) donne, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\mu(|R_1| > t) &\geq \frac{1}{2}\mathbb{P}_\mu\Big(\exists n \text{ t.q. } \big|\Pi_n\big(b_{-n} + (a_{-n} - 1) m_0\big)\big| > 2t\Big) \\ &\geq \frac{1}{2}\mathbb{P}_\mu\Big(\exists n \text{ t.q. } \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon} \text{ et } \big|b_{-n} + (a_{-n} - 1) m_0\big| > \varepsilon\Big). \quad (3.19)\end{aligned}$$

On étend maintenant l'inégalité de Feller-Chung :

Lemme 3.5 *Pour tous $t > |m_0|$ et $\varepsilon > 0$, on a :*

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_\mu\Big(\exists n \ \ t.q. \ \ \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon} \ et \ \big|b_{-n} + (a_{-n} - 1) m_0\big| > \varepsilon\Big) \\ &\quad \geq \min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}_i(|b_0 + (a_0 - 1) m_0| > \varepsilon) \mathbb{P}_\mu\big(\exists n \ \ t.q. \ \ \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon}\big).\end{aligned}$$

Démonstration

On pose $A_0 = \emptyset$, $A_n = \{\Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon}\}$ et $B_n = \{|b_{-n} + (a_{-n} - 1) m_0| > \varepsilon\}$. Conditionnellement à X_{1-n}, B_n est indépendant de $A_0, \ldots, A_n$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} [A_n \cap B_n]\big) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_\mu\big(B_n \cap A_n \bigcap_{j=0}^{n-1} [B_j \cap A_j]^c\big) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_\mu\big(B_n \cap A_n \bigcap_{j=0}^{n-1} A_j^c\big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}_\mu(B_n \mid X_{1-n} = i) \mathbb{P}_\mu\big(A_n \bigcap_{j=0}^{n-1} A_j^c \mid X_{1-n} = i\big) \mu(i).\end{aligned}$$

Or par stationnarité de X, on a $\mathbb{P}_\mu(B_n \mid X_{1-n} = i) = \mathbb{P}_i(|b_0 + (a_0 - 1) m_0| > \varepsilon)$. Donc il vient :

$$\mathbb{P}_\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} [A_n \cap B_n]\big) \geq \min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}_i(|b_0 + (a_0 - 1) m_0| > \varepsilon) \mathbb{P}_\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big),$$

ce qui achève la démonstration. □

On peut maintenant donner la preuve de la proposition 3.8.

Démonstration de la proposition 3.8

L'équation (3.19) et le lemme 3.5 donnent, pour tous $t > |m_0|$ et $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}_\mu(|R_1| > t) \geq \frac{1}{2} \min_{1\leq i\leq p} \mathbb{P}_i(|b_0 + (a_0 - 1)m_0| > \varepsilon)\mathbb{P}_\mu(\exists n \text{ t.q. } \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon}).$$

Comme $b_0 = V_0^{1/2}\xi_0$, que V_0 et a_0 sont bornées, mais que ξ ne l'est pas car c'est une variable gaussienne, on ne peut pas avoir l'égalité $\mathbb{P}_i$-presque sure $b_0 = (1 - a_0)m_0$. Donc on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\min_{1\leq i\leq p} \mathbb{P}_i(|b_0 + (a_0 - 1)m_0| > \varepsilon) > 0$. Ainsi, on peut trouver une constante $C > 0$ telle que pour tout $t > |m_0|$, on ait

$$\mathbb{P}_\mu(|R_1| > t) \geq C\ \mathbb{P}_\mu(\sup_n\ \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon})$$

comme annoncé. □

Remarque La raison apparente pour laquelle le minimum des probabilités $\mathbb{P}_i(|b_0 + (a_0 - 1)m_0| > \varepsilon)$ est strictement positif est différente de celle invoquée au chapitre précédent. En effet, ce n'est plus l'indépendance des suites (a_n) et (b_n) qui fait tout marcher, mais des propriétés de bornitude. En fait, dans les deux cas, ces propriétés particulières de la suite (a_n, b_n) permettent de montrer l'absence automatique de point fixe presque sûr pour l'application $x \longmapsto a_0x + b_0$, qui est la propriété fondamentale utilisée pour conclure, de même que dans le cas iid.

Il faut maintenant étudier le comportement de ces produits Π_n. Pour estimer la probabilité $\mathbb{P}_\mu(\sup_n\ \Pi_n > t)$, on utilise encore la méthode des processus de renouvellement markoviens et des hauteurs d'echelle.

3.7.2 Etude d'une marche aléatoire

Commençons par introduire quelques nouvelles notations. Soit $S_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, on pose

$$S_n\ =\ \sum_{k=1}^{n} \log(a_{1-k})\ =\ \log \Pi_n\ =\ \int_{1-n}^{1} e(X_u)du.$$

Comme le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est encore une chaîne de Markov, (X_{1-n}, S_n) est bien un processus de renouvellement markovien au sens de la définition 17. On lui associe la matrice semi-markovienne $K = (k_{ij})$ définie de la façon suivante :

$$k_{ij}(t) = \mathbb{P}_\mu(X_0 = j,\ \log a_0 \leq t \mid X_1 = i).$$

C'est une matrice de distributions au sens de la partie 1.3.1. On note τ le premier temps d'échelle de cette marche aléatoire (voir définition 19) : $\tau = \tau_1 = \inf\{n \geq 1 \text{ t.q. } S_n > 0\}$, et la première hauteur d'échelle est S_τ. La matrice semi-markovienne

du processus d'échelle est notée $H(t)$. Elle décrit la distribution de S_τ et ses coordonnées sont les suivantes :

$$H_{ij}(t) = \mathbb{P}_\mu(\tau < \infty, S_\tau \leq t, X_{1-\tau} = j \mid X_1 = i).$$

C'est aussi une matrice de distributions au sens de la partie 1.3.1. Comme $S_\tau > 0$, H a pour support la demi-droite positive. De plus, $S_\tau > 0$, $S_{1-\tau} \leq 0$ et les a_n sont bornés, donc $S_\tau \leq \sup \log a_n \leq \sup e(i) < \infty$, et H est à support fini.

On définit aussi le n-ème indice d'échelle par $\tau_n = \inf\{n > \tau_{n-1} \text{ t.q. } S_n > S_{\tau_{n-1}}\}$, et S_{τ_n} la hauteur d'échelle correspondante. On peut vérifier que l'on a :

$$H_{ij}^{(n)}(t) = \mathbb{P}_\mu(\tau_n < \infty, S_{\tau_n} \leq t, X_{1-\tau_n} = j \mid X_1 = i),$$

où $H^{(n)}$ est la n-ème convolée de H. On note aussi $\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} H^{(n)}$ la fonction de renouvellement associée à H.

Pour préciser le comportement asymptotique de la marche (S_{τ_n}), on va utiliser le théorème de renouvellement 7 pour $F = H$ et $\alpha = \kappa$. Certaines de ses hypothèses sont immédiatement vérifiées :

– comme $H(0) = 0$, on a $\rho(H(0)) < 1$,

– comme les H_{ij} sont des probabilités, $H(\infty)$ est finie,

– comme H est à support fini, l'espérance $\overline{\Gamma}$ de $H_\kappa(\infty) = \int_0^\infty e^{-\kappa u} H(du)$ est finie,

– la non arithméticité se prouve comme dans la section 3.6.1.

Ici encore il y a une différence notable avec la chapitre précédent : du fait que les a_i ne prennent pas un nombre fini de valeurs il n'est plus nécessaire de tronquer la matrice H. En effet, pour tout i, j dans E, on a :

$$\begin{aligned} H_{ij}(\infty) &= \mathbb{P}_\mu(\tau < \infty,\ X_{1-\tau} = j \mid X_1 = i) \\ &\geq \mathbb{P}_\mu(\tau = 1,\ X_0 = j \mid X_1 = i) \\ &= \mathbb{P}_j(\log a_0 > 0,\ X_1 = i)\frac{\mu(j)}{\mu(i)} \\ &= \mathbb{P}_j\Big(\int_0^1 e(X_u)du > 0,\ X_1 = i\Big)\frac{\mu(j)}{\mu(i)}, \end{aligned}$$

et d'après la proposition 3.7, cette dernière quantité est strictement positive car 0 est dans l'intervalle $]e_m,\ e_M[$ par hypothèse. Ainsi la deuxième hypothèse du théorème 7 est valide. On en déduit de qu'on peut trouver i et j tels que $0 = H_{ij}(0) < H_{ij}(\infty)$, et la troisième hypothèse est aussi vraie.

Calculons maintenant le rayon spectral de $H_\kappa(\infty)$. Pour cela, on introduit la transformée de Laplace $\widehat{K}(s) = (\hat{k}_{ij}(s))$ de la matrice K :

$$\hat{k}_{ij}(s) = \int e^{st} k_{ij}(dt) = \mathbb{E}_i[a_0^s \mathbb{1}_{X_1=i}]\frac{\mu(j)}{\mu(i)} = \Delta^{-1}({}^tA_s)\Delta,$$

avec $\Delta = diag(\mu(i))$. A cette conjugaison près $\widehat{K}(s)$ n'est autre que la transposée de la matrice A_s. En particulier, $\widehat{K}(s)$ et A_s ont le même rayon spectral, donc $\rho\big(\widehat{K}(\kappa)\big) = 1$.

De plus, on en déduit que $\widehat{K}(\kappa)$ est une matrice positive et irréductible, et comme ${}^tA_\kappa = F(\infty)$, donc $\Delta^{-1}m$ est un vecteur propre à droite à coordonnées strictement positives de la matrice $\widehat{K}(\kappa)$ pour la valeur propre 1. Posons $\Sigma = \Delta^{-1}{}^tm = diag(\frac{m_i}{\mu(i)})$. Alors la matrice :

$$K_\kappa(t) = \Sigma^{-1}\Big(\int_{-\infty}^{t} e^{\kappa u}K(du)\Big)\Sigma$$

est encore une matrice semi-markovienne. Notons $({}^\kappa X_{1-n}, {}^\kappa S_n)$ le processus de renouvellement markovien qui lui est associé. Ceci revient à faire un changement de loi sur le processus (X_{1-n}, S_n).

On utilise maintenant la proposition 7 : la matrice $\Sigma^{-1}K_\kappa(\infty)\Sigma$ est la matrice semi-markovienne associée au processus d'échelle $({}^\kappa S_{\tau_n})$, et l'espérance de $\log({}^\kappa a_1)$ est la dérivée de l'application $s \longmapsto \log\rho(\widehat{K}(s))$ au point κ.

Or, on a vu que $\rho(\widehat{K}(s)) = \rho(A_s)$. De plus, $\log\rho(A_0) = \log\rho(A_\kappa) = 0$, la dérivée à droite en 0 de $s \longmapsto \log\rho(A_s)$ est strictement négative (proposition 3.2) et cette fonction est convexe (corollaire 3.2). Donc la dérivée de l'application $s \longmapsto \log\rho(\widehat{K}(s))$ en κ est strictement positive, i.e. $\mathbb{E}_\mu[\log({}^\kappa a_1)] > 0$, et la marche $({}^\kappa S_n)$ tend presque sûrement vers $+\infty$ par le théorème ergodique. On utilise maintenant la proposition 8 pour conclure que

$$\rho(\Sigma^{-1}K_\kappa(\infty)\Sigma) = \rho(K_\kappa(\infty)) = 1.$$

On a donc démontré que toutes les hypothèse du théorème 7 sont vérifiées. Soit maintenant $M = \sup_n S_n = \sup_n S_{\tau_n}$, le maximum de notre marche aléatoire. Par définition de H, on a pour tout $1 \le i \le p$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\mu(M \le t \mid X_1 = i)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_\mu(\tau_n < \infty, S_{\tau_n} \le t, \tau_{n+1} = \infty \mid X_1 = i)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{p}\mathbb{P}_\mu(\tau_n < \infty, S_{\tau_n} \le t, \tau_{n+1} = \infty,\ X_1 = i \mid X_{1-\tau_n} = j)\frac{\mu(j)}{\mu(i)}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{p}\big[\mathbb{P}_\mu(\tau_n < \infty, S_{\tau_n} \le t, X_{1-\tau_n} = j \mid X_1 = i) \times\\
&\quad (1 - \mathbb{P}_\mu(\tau_{n+1} < \infty \mid X_{1-\tau_n} = j)\big]\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{p}\big[H_{ij}^{(n)}(t)\big(1 - \sum_{k=1}^{p}H_{jk}(\infty)\big)\big]\\
&= \sum_{j=1}^{p}\big[\Psi_{ij}(t)\big(1 - \sum_{k=1}^{p}H_{jk}(\infty)\big)\big]. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Le théorème 7 appliqué à l'équation (3.20) donne, quand t tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} 1-\mathbb{P}_\mu(M\le t\mid X_1=i) &= \sum_{j=1}^p\Big[\big(1-\sum_{k=1}^p H_{jk}(\infty)\big)\int_t^\infty e^{-\kappa u}(e^{\kappa u}\Psi_{ij})(du)\Big]\\ &\underset{t\to\infty}{\sim} \sum_{j=1}^p\Big[\big(1-\sum_{k=1}^p H_{jk}(\infty)\big)\int_t^\infty e^{-\kappa u}\frac{1}{\overline{\gamma}}\overline{m}_i\overline{u}_j du\Big]\\ &= \sum_{j=1}^p\Big[\big(1-\sum_{k=1}^p H_{jk}(\infty)\big)\frac{1}{\overline{\gamma}}\overline{m}_i\overline{u}_j\Big]e^{-\kappa t}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

où $\overline{m}$ et $\overline{u}$ sont des vecteurs propres à gauche et à droite de $H_\kappa(\infty)$ à coordonnées strictement positives normalisés comme en (1.6), et $\overline{\gamma}={}^t\overline{u}\overline{\Gamma}\overline{m}>0$.

Il reste encore à prouver qu'il existe un $j\le p$ tel que $1-\sum_{k=1}^p H_{jk}(\infty)>0$. Or la proposition 8 dit que $\rho(H(\infty))<1$ puisque $\mathbb{E}_\mu\log a_0<0$. La matrice $H(\infty)$ est donc sous-stochastique et non stochastique, donc il existe j tel que $1-\sum_{k=1}^p H_{jk}(\infty)>0$.

On a ainsi montré que le terme de droite dans l'équation (3.21) est strictement positif, et donc il existe une constante $C>0$ telle que, quand t tend vers l'infini on ait :

$$e^{\kappa t}\mathbb{P}_\mu(M>t)\ge\sum_{i=1}^p e^{\kappa t}\mathbb{P}_\mu(M>t\mid X_1=i)\mu(i)\ge C. \tag{3.22}$$

En injectant ce résultat dans la proposition 3.8, on obtient, pout t assez grand :

$$t^\kappa\mathbb{P}_\mu(|R_1|>t)\ \ge K\ >\ 0, \tag{3.23}$$

et donc avec les notations du théorème 3.1, on a $L>0$, ce qui achève la démonstration.

Chapitre 4

Résultats multidimensionnels

4.1 Introduction

On passe maintenant à l'étude de notre équation récursive $Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n$ dans le cas multidimensionnel. On fixe un entier $d > 1$. Alors, Y_n et b_n sont des vecteurs de $\mathbb{R}^d$ et les coefficients a_n sont des matrices de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Ce type d'équation multidimensionnelle apparaît dans l'étude des marches aléatoires en milieu aléatoire ou des processus de branchement en milieu aléatoire avec immigration. Les équations vectorielles contiennent également le cas des équations récursives scalaires d'ordre d supérieur à un (voir chapitre 6).

On a déjà mentionné que la solution stationnaire de cette équation à coefficients iid a été étudiée par H. Kesten [44, 45] puis E. LePage [47]. Ce chapitre est consacré à un exposé plus en détail de leurs résultats et de leurs méthodes de démonstration. Il servira à la fois d'introduction et de comparaison avec le chapitre suivant qui étendra ces résultats.

Dans la partie 4.2, on donne le cadre du problème et on fixe les notations qui seront utilisées dans ce chapitre et le suivant. Dans la partie 4.3, on expose les résultats de [44, 45] concernant les matrices positives. On y donne aussi un théorème de renouvellement pour des fonctionnelles d'une chaîne de Markov qui servira dans toute la suite. La partie 4.4 est consacrée aux résultats de [47].

4.2 Contexte et notations

Dans ce paragraphe, on décrit notre problème et son cadre, et on donne une série de notations qui serviront dans tout ce chapitre ainsi que dans le chapitre 5.

4.2.1 Notations

Sauf indication contraire, tous les vecteurs considérés dorénavant seront des vecteurs ligne. On considère donc $\mathbb{R}^d$ comme l'ensemble des vecteurs ligne, et on le munit de la norme euclidienne notée $\|\cdot\|$. On note par le même symbole $\|\cdot\|$ la

norme matricielle associée : pour tout vecteur ligne $x = (x_1, \dots x_d)$, et toute matrice a de taille $d \times d$, on a

$$\|x\| = \Big(\sum_{k=1}^{d} x_k^2\Big)^{1/2}, \qquad \|a\| = \sup_{\|x\|=1} \|xa\|.$$

On rappelle que la norme euclidienne d'une matrice s'exprime par un rayon spectral : $\|a\|^2 = \rho(a^t a)$.

Soit $\mathbb{S}^{d-1}$ la sphère de $\mathbb{R}^d$, i.e. l'ensemble des vecteurs ligne de norme 1, et $\mathbb{S}_+$ ses éléments positifs au sens de la définition 8 :

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1\}, \qquad \mathbb{S}_+ = \{x \in \mathbb{S}^{d-1} |\ x \geqslant 0\}.$$

On réservera la lettre x pour désigner des éléments de la sphère.

On note $\mathcal{P}^{d-1} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ l'espace projectif correspondant aux vecteurs ligne de $\mathbb{R}^d$. C'est l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^d$. On réservera la lettre v pour désigner des éléments de l'espace projectif. Si x est un vecteur de la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$, on notera $\bar{x}$ son image dans $\mathcal{P}^{d-1}$. Si v est un élément de $\mathcal{P}^{d-1}$, on appellera $\tilde{v}$ un de ses antécédents dans $\mathbb{S}^{d-1}$ (quand le signe n'intervient pas). On munit $\mathcal{P}^{d-1}$ de la distance $\delta_{\mathcal{P}}$ suivante :

$$\delta_{\mathcal{P}}(v, v') = \min\{\|x - x'\| \text{ t.q. } x, x' \in \mathbb{S}^{d-1},\ \bar{x} = v, \bar{x'} = v'\}.$$

Soit $\mathcal{G} = Gl(d, \mathbb{R})$ le groupe linéaire des matrices carrées inversibles réelles de taille d. On note par $\cdot$ l'action à droite du groupe $\mathcal{G}$ sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$: pour tous x dans $\mathbb{S}^{d-1}$ et a dans $Gl(d, \mathbb{R})$, on pose

$$x \cdot a = \frac{xa}{\|xa\|}.$$

Si a n'est pas une matrice inversible et que $xa = 0$, on conviendra que $x \cdot a = 0$. On notera simplement va l'action à droite de $\mathcal{G}$ sur l'espace projectif.

Enfin, si μ est une mesure, on notera S_μ son support, et pour toute matrice a, on désignera ses coefficients par $a(i, j)$.

4.2.2 Cadre du problème

Dans ce chapitre et les suivants, par souci de clarté, on notera en majuscule toutes les variables aléatoires. Ainsi on notera A_n au lieu de a_n et B_n au lieu de b_n les coefficients de l'équation récursive.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et (A_n, B_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sur Ω où les (A_n) sont des matrices carrées de taille d, et les (B_n) des vecteurs colonne de $\mathbb{R}^d$. On étudie l'équation aux différences aléatoires suivante :

$$Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n \qquad n \geq 0. \tag{4.1}$$

On appelle η la loi du couple (A_1, B_1), et μ celle de A_1.

On a un analogue du théorème 8 dans ce cas (voir aussi P. Bougerol et N. Picard, [9]) : si la condition suivante est vérifiée :

$$\mathbb{E}[\log^+ \|A_0\|] < +\infty. \tag{4.2}$$

alors la limite ci-dessous existe pour tout x dans $\mathbb{S}^{d-1}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A_1 \cdots A_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|xA_1 \cdots A_n\| = \alpha. \tag{4.3}$$

Si de plus α est strictement négatif, alors le produit $\|A_0 \cdots A_n\|$ converge exponentiellement vite vers 0. Si on a aussi $\mathbb{E}\|B_0\|^\beta < \infty$ pour un $\beta > 0$, alors la série

$$R_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} A_n A_{n-1} \cdots A_{n-k-1} B_k$$

converge presque sûrement et la suite (R_n) est l'unique solution stationnaire de l'équation (4.1).

Ici, par la propriété d'indépendance on peut donner une autre variable aléatoire plus simple qui suit aussi la loi stationnaire. En effet, pour un vecteur colonne Y_0 donné, la solution de l'équation (4.1) est :

$$Y_{n+1} = B_n + A_n B_{n-1} + A_n A_{n-1} B_{n-2} + \cdots + A_n A_{n-1} \cdots A_1 B_0 + A_n A_{n-1} \cdots A_0 Y_0,$$

qui, par la propriété d'indépendance, a la même loi que

$$\sum_{k=1}^{n+1} A_1 \cdots A_{k-1} B_k + A_1 \cdots A_{n+1} Y_0.$$

Sous la condition 4.2, et si de plus $\alpha < 0$ et $\mathbb{E}\|B_0\|^\beta < \infty$ pour un $\beta > 0$, alors la série

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} A_1 \cdots A_{k-1} B_k$$

converge presque sûrement. La variable aléatoire R suit alors la loi stationnaire de l'équation (4.1). C'est cette variable que nous allons étudier.

Le coefficient α défini par la limite 4.3 s'appelle le *premier exposant de Lyapounov* de la suite (A_n). Sous une condition additionnelle de non anticipation, il est démontré dans [9] que la condition $\alpha < 0$ est nécessaire à l'existence d'une solution stationnaire de l'équation (4.1). Dans le cas critique où $\alpha = 0$, M. Babillot, P. Bougerol et L. Elie ont montré que la chaîne de Markov (Y_n) peut encore avoir une mesure (non bornée) stationnaire lorsque les A_n sont des homothéties.

Dans toute la suite, on se place dans le cas où l'exposant de Lyapounov α est trictement négatif.

Comme la norme matricielle choisie est sous-multiplicative, pour avoir $\alpha < 0$ il suffit d'avoir $\mathbb{E}\log\|A_1\| < 0$ par la loi des grands nombres. On dispose aussi d'un autre critère de négativité du coefficient α. Soit $\otimes$ le *produit de Kronecker* des matrices. Il se définit comme suit : si $a = (a_{ij})$ et $b = (b_{ij})$ sont des matrices carrées de taille d, leur produit de Kronecker est la matrice carrée de taille d^2 qui s'ecrit par blocs de la façon suivante :

$$a \otimes b = \begin{pmatrix} a_{11}b & \cdots & a_{1n}b \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b & \cdots & a_{nn}b \end{pmatrix}.$$

On a alors la propriété suivante :

Proposition 4.1 *Si le rayon spectral de la matrice $\mathbb{E}[A_1 \otimes {}^tA_1]$ est de module strictement inférieur à 1, alors on a $\alpha < 0$*

Démonstration

On remarque que α ne dépend pas du choix de la norme puisqu'elles sont toutes équivalentes en dimension finie. Considérons nos matrices comme des éléments de $\mathbb{R}^{d\times d}$ muni de sa norme euclidienne notée $\|\cdot\|_{d\times d}$. On a alors

$$\|a\|^2_{d\times d} = \sum_{ij} a(i,j)^2 = tr(a\,{}^ta),$$

où tr désigne la trace de la matrice. On note $S_n = A_n \cdots A_1$, et $F_n = \mathbb{E}[S_n\,{}^tS_n]$. On a alors :

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \mathbb{E}[S_{n+1}\,{}^tS_{n+1}] \\ &= \mathbb{E}[A_{n+1}S_n\,{}^tS_n\,{}^tA_{n+1}] \\ &= \mathbb{E}[A_{n+1}\mathbb{E}[S_n\,{}^tS_n]\,{}^tA_{n+1}] \end{aligned}$$

par indépendance. Ainsi, on a la relation $F_{n+1} = TF_n$ où T est l'opérateur de $\mathbb{R}^{d\times d}$ dans lui-même qui a une matrice a associe $\mathbb{E}[A_1 a\,{}^tA_1]$. En particulier, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|A_1\cdots A_n\|^2_{d\times d} &= \mathbb{E}\|A_n\cdots A_1\|^2_{d\times d} \\ &= tr(F_n) \quad = \quad tr(T^n I) \\ &\leq d^2\rho(T)^n, \end{aligned}$$

où I désigne la matrice identité. En particulier, dès que $\rho(T)$ est strictement inférieur à 1, alors α est négatif. Soit maintenant E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient ij qui vaut 1. Alors dans la base $(E_{11}, E_{12}, \ldots E_{1d}, E_{21}, \ldots E_{dd})$ de $\mathbb{R}^{d\times d}$, l'opérateur T s'écrit exactement comme $\mathbb{E}[A_1 \otimes {}^tA_1]$, d'où la proposition.□

4.2.3 Quelques opérateurs

On introduit maintenant une série d'opérateurs qui vont intervenir tout au long de ce chapitre et du suivant. Les opérateurs qui sont des restrictions ou des extensions les uns des autres seront notés par le même lettre avec des indices ou des

exposants différents. On pourra se rapporter à ce paragraphe pour savoir de quel opérateur il s'agit.

On suppose qu'il existe $\sigma > 0$ tel que $\mathbb{E}[\|A_1\|^\sigma \log^+ \|A_1\|] < \infty$. Les opérateurs suivants sont définis pour tout s dans l'intervalle $[0,\ \sigma]$.

Opérateurs sur l'espace projectif

On réserve les lettres droites aux opérateurs définis sur l'espace projectif. Pour toute fonction f continue sur $\mathcal{P}^{d-1}$ et pour tout v dans $\mathcal{P}^{d-1}$, on définit

$$P^s f(v) = \mathbb{E}[\|\tilde{v}A_1\|^s f(vA_1)] = \int \|\tilde{v}a\|^s f(va)\mu(da).$$

On verra qu'il existe une unique (à coefficient multiplicatif près) fonction continue e_s strictement positive sur $\mathcal{P}^{d-1}$ qui vérifie

$$P^s e_s = k(s)e_s,$$

où $k(s)$ est le rayon spectral de P^s et a pour expression

$$k(s) = \lim_n \left(\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_n\|^s\right)^{1/n}.$$

On définit alors un opérateur markovien sur $\mathcal{P}^{d-1}$ de la façon suivante :

$$Q^s f(v) = \frac{1}{k(s)e_s(v)} \int \|\tilde{v}a\|^s e_s(va) f(va)\mu(da).$$

Opérateurs sur la sphère

On peut étendre les deux opérateurs précédents à la sphère. On garde les mêmes lettres pour les désigner, mais avec une police cursive. Pour toute fonction f continue sur $\mathbb{S}^{d-1}$ et pour tout x dans $\mathbb{S}^{d-1}$, on définit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^s f(x) &= \int \|xa\|^s f(x \cdot a)\mu(da) \\ \mathcal{Q}^s f(x) &= \frac{1}{k(s)e_s(\bar{x})} \int \|xa\|^s e_s(\bar{x}a) f(x \cdot a)\mu(da). \end{aligned}$$

Remarquons que si f est symétrique sur la sphère, il en est de même pour $\mathcal{P}^s f$ et $\mathcal{Q}^s f$ dont les images dans l'espace projectif sont alors $P^s f$ et $Q^s f$ respectivement.

Opérateurs sur $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$

Pour tous les opérateurs suivants, la valeur de s est fixée égale à une valeur critique κ vérifiant $k(\kappa) = 1$. Dorénavant, on omet donc l'exposant $s = \kappa$. Pour marquer qu'il s'agit maintenant d'opérateurs sur un espace produit, on rajoute un exposant à gauche à deux chiffres. Pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ et pour tous (x, u) dans $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$, on définit :

$${}^{12}\mathcal{Q}f(x,u) = \frac{1}{e_\kappa(\bar{x})} \int \|xa\|^\kappa e_\kappa(\bar{x}a) f\Big(x \cdot a, \frac{u + xb}{\|xa\|}\Big)\eta(da, db).$$

Pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}$ et pour tous (x,t) dans $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}$, on définit :

$$^{13}\mathcal{Q}f(x,u)=\frac{1}{e_\kappa(\bar{x})}\int\|xa\|^\kappa e_\kappa(\bar{x}a)f(x\cdot a,t-\log\|xa\|)\eta(da,db).$$

Opérateurs sur $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

On présente enfin deux dernier opérateurs sur $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et donc munis d'un exposant à trois chiffres. Pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et pour tous (x,u,t) dans $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on définit :

$$\begin{aligned}^{123}\mathcal{N}f(x,u,t) &= \int f\Big(x\cdot a,\frac{u+xb}{\|xa\|},t-\log\|xa\|\Big)\eta(da,db)\\ ^{123}\mathcal{Q}f(x,u,t) &= \frac{1}{e_\kappa(\bar{x})}\int\|xa\|^\kappa e_\kappa(\bar{x}a)f\Big(x\cdot a,\frac{u+xb}{\|xa\|},t-\log\|xa\|\Big)\eta(da,db).\end{aligned}$$

L'opérateur $^{123}\mathcal{Q}$ est donc une extension commune des deux opérateurs $^{12}\mathcal{Q}$ et $^{13}\mathcal{Q}$.

4.3 Les résultats de H. Kesten

On rappelle maintenant les principaux résultats de [44], qui concernent les matrices positives au sens de la définition 8. Puis on donne les grandes étapes de la démonstration.

4.3.1 Résultats

Comme en dimension 1, l'étude de la queue de la solution stationnaire passe par celle des produits $A_1\dots A_n$. Le premier théorème donne des résultats sur le maximum de ces produits, et le deuxième sur la queue de la solution stationnaire de l'équation (4.1).

Théorème 10 *Soit (A_n) une suite de matrices réelles iid de taille $d\times d$ et de loi μ telles que :*

$$\mathbb{P}(A_0\geqslant 0)=1,\quad \mathbb{P}(A_0 \text{ a une ligne de } 0)=0,$$
$$\mathbb{E}[\log^+\|A_0\|]<+\infty. \tag{4.4}$$

Supposons aussi que le sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par

$$\{\log\rho(a)\mid a=a_1\dots a_n,\ n\in\mathbb{N},\ a_i\in S_\mu,\ a\gg 0\}$$

est dense. Alors, il existe une constante $\alpha<\infty$ telle que pour tout $x\in\mathbb{S}_+$ on ait :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|A_1\cdots A_n\|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|xA_1\cdots A_n\|=\alpha, \tag{4.5}$$

presque sûrement. Si de plus α est strictement négatif, et s'il existe $\sigma>0$ tel que

$$\mathbb{E}\Big[\min_{1\leq i\leq d}\Big\{\sum_{j=1}^d A_0(i,j)\Big\}\Big]^\sigma\geq d^{\sigma/2},\quad \text{et}\quad \mathbb{E}[\|A_0\|^\sigma\log^+\|A_0\|]<\infty,$$

alors il existe un exposant κ dans l'intervalle $]0,\ \sigma]$ tel que la limite

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\kappa}\mathbb{P}(\max_n \|xA_1\cdots A_n\| > t)$$

existe et est strictement positive pour tout x dans $\mathbb{S}_+$.

Ce premier résultat est donc l'analogue des résultats des parties 2.6 et 3.7.2 sur le maximum des produits $a_0\cdots a_{1-n}$. On donne maintenant le théorème sur la queue de la loi stationnaire de l'équation (4.1).

Théorème 11 *Soit (A_n, B_n) une suite de variables aléatoires iid où les A_n sont des matrices carrées et les B_n des vecteurs colonne. Supposons que la suite (A_n) vérifie toutes les hypothèses du théorème 10, et que, avec les notations de ce théorème :*

$$\mathbb{P}(B_0 = 0) < 1, \quad \mathbb{P}(B_0 \geqslant 0) = 1, \quad \mathbb{E}\|B_0\|^{\kappa} < \infty.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, la limite

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\kappa}\mathbb{P}(xR > t)$$

existe et est finie. De plus pour tout x dans $\mathbb{S}_+$, cette limite est strictement positive.

Remarque Dans ce contexte multidimensionnel, l'ensemble des directions x dans lesquelles on regarde le comportement de la queue de la loi stationnaire est un ensemble infini. Ici, comme dans le cas où les coefficients a_n étaient tous positifs en dimension 1, la limite n'est pas nécessairement strictement positive dans toutes les directions. Par exemple, si on choisit un vecteur x dans $\mathbb{S}_+$, xR est positif donc la probabilité $\mathbb{P}(xR < -t) = \mathbb{P}(-xR > t)$ est nulle pour tout t positif.

4.3.2 Un théorème de renouvellement

Comme dans les chapitres précédents, la démonstration des théorèmes repose sur la théorie du renouvellement. Le théorème utilisé est celui de [45] qui est valable pour des fonctionnelles d'une chaîne de Markov sur un espace compact général. Il fait apparaître des opérateurs de dimension infinie, puisque maintenant non seulement les matrices A_n peuvent prendre une infinité de valeurs distinctes, mais encore l'espace $\mathbb{S}^{d-1}$ des directions dans lesquelles on regarde la queue de la distribution est lui aussi infini.

Soit (X_n) une chaîne de Markov stationnaire sur un espace métrique séparable (S, d). On note $P^n(x, \mathcal{A}) = \mathbb{P}(X_{k+n} \in \mathcal{A}|X_k = x)$ la n-ème probabilité de transition pour cette chaîne, $\mathbb{S}$ la tribu engendrée par les ouverts de S, et $\mathcal{B}$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$. Soit (U_n) une suite de variables aléatoires définie sur le même espace probabilisé et telle que la distribution de U_i ne dépende que de X_i et X_{i+1}, et pas des

autres X_j et U_j quand X_i et X_{i+1} sont donnés. Formellement, on suppose que pour tous x, y dans S, il existe une distribution $F_x^y(\cdot)$ telle que pour $\mathcal{A}_i \in \mathbb{S}$ et $\mathcal{B}_j \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_i \in \mathcal{A}_i, 0 \le i \le n, U_j \in \mathcal{B}_j, 0 \le j < n | X_0 = x_0)\\ &= \mathbf{1}_{\mathcal{A}_0}(x_0) \int_{\mathcal{A}_1} P(x_0, dx_1) \int \ldots \int_{\mathcal{A}_n} P(x_{n-1}, dx_n) \prod_{i=0}^{n-1} F_{x_i}^{x_{i+1}}(\mathcal{B}_i). \qquad (4.6)\end{aligned}$$

On note aussi $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par les X_i et les U_i, et P_x l'unique mesure sur $\mathcal{F}$ pour laquelle $P_{x_0}(X_i \in \mathcal{A}_i, 0 \le i \le n, U_j \in \mathcal{B}_j, 0 \le j < n)$ est donné par l'équation (4.6). On note E_x l'espérance par rapport à P_x.

On définit de plus une suite de variables aléatoires (V_n) par $V_0 = 0$, et pour tout $n \ge 1$:

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} U_i.$$

Enfin si f est une fonction $\mathcal{F}$-mesurable de $(S \times \mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$, et $\delta > 0$, on pose

$$\begin{aligned}&f^\delta(x_0, v_0, x_1, v_1, \ldots)\\ &= \lim_{n \to \infty} \sup\{f(y_0, w_0, y_1, w_1, \ldots) \text{ t.q. } d(x_i, y_i) + |v_i - w_i| < \delta \ \forall i \le n\}.\end{aligned}$$

On énonce maintenant une série de conditions :

Condition I1 : Il existe une mesure de probabilité φ sur $\mathbb{S}$ telle que $\varphi P = \varphi$ et pour tout x dans S et tout $\mathcal{A}$ ouvert tel que $\varphi(\mathcal{A}) > 0$ on a

$$P_x\{\exists n \text{ tq } X_n \in \mathcal{A}\} = 1.$$

Condition I2 : Pour cette mesure φ, on a

$$\int |\lambda| F_x^y(d\lambda) P(x, dy) \varphi(dx) < \infty,$$

et presque sûrement

$$\lim_{n \to \infty} \frac{V_n}{n} = \gamma = \int \lambda F_x^y(d\lambda) P(x, dy) \varphi(dx) > 0.$$

Condition I3 : Il existe une suite de réels (ζ_n) qui engendre un sous-groupe dense dans $\mathbb{R}$ et telle que pour tous ζ_n et $\delta > 0$, il existe y dans S ayant la propriété suivante :
pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$ avec $\varphi(\mathcal{A}) > 0$, des entiers m_1 et m_2 et un réel τ tels que pour tout $x \in \mathcal{A}$:

$$P_x\big(d(X_{m_1}, y) < \varepsilon, |V_{m_1} - \tau| \le \delta\big) > 0,$$

et

$$P_x\big(d(X_{m_2}, y) < \varepsilon, |V_{m_2} - \tau - \zeta_n| \le \delta\big) > 0.$$

Condition I4 : Pour tout x dans S fixé et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $r_0 > 0$ tel que pour toute fonction $\mathcal{F}$-mesurable f de $(S \times \mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout y tel que $d(x, y) < r_0$ on ait :

$$E_x f(X_0, V_0, X_1, V_1, \ldots) \leq E_y f^\varepsilon(X_0, V_0, X_1, V_1, \ldots) + \varepsilon \|f\|,$$

et

$$E_y f(X_0, V_0, X_1, V_1, \ldots) \leq E_x f^\varepsilon(X_0, V_0, X_1, V_1, \ldots) + \varepsilon \|f\|.$$

On peut maintenant énoncer le théorème de renouvellement :

Théorème 12 *Si les conditions I1 à I4 sont vérifiées, alors pour toute fonction G de $S \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et directement Riemann intégrable, et pour tout x dans S on a :*

$$\lim_{t \to \infty} E_x \sum_{n=0}^{\infty} G(X_n, t - V_n) = \frac{1}{\alpha} \int_S \int_{-\infty}^{+\infty} G(y, s) ds \varphi(dy).$$

La condition I1 assure que la chaîne (X_n) visite tous les ouverts chargés par la mesure invariante φ, c'est une condition de type récurrence. La condition I2 assure l'existence d'une certaine espérance et sa stricte positivité, c'est une condition de transience pour la suite (V_n). La condition I3 est une condition de type non-arithméticité. Enfin, la condition I4 est une condition de contraction. Elle assure que si deux trajectoires de la chaîne (X_n, V_n) partent de deux points voisins, alors elles restent voisines sur toute leur trajectoire.

4.3.3 Principes de la démonstration

La démonstration du théorème 12 se fait en plusieurs étapes. Nous choisissons ici de les présenter dans un ordre un peu différent de celui donné en [44] pour plus de clarté et de cohérence avec la suite du chapitre ainsi qu'avec le chapitre suivant.

Etude d'un opérateur auxiliaire.
Pour tout $0 \leq s \leq \sigma$, où σ est donné par le théorème 10, on définit l'opérateur $\mathcal{P}^s$ sur l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{S}_+$ par :

$$\mathcal{P}^s f(x) = \mathbb{E}[\|xA_1\|^s f(x \cdot A_1)] = \int \|xa\|^s f(x \cdot a) \mu(da),$$

où μ désigne la loi de A_1. On étudie les éléments propres de cet opérateur. A l'aide d'un théorème de point fixe, on commence par montrer l'existence d'une mesure propre.

Lemme 7 *Pour tout $0 \leq s \leq \sigma$, il existe une probabilité ν^s sur $\mathbb{S}_+$ et un réel $k(s)$ tels que :*

$$0 < \mathbb{E}\Big[d^{-1/2} \min_{1 \leq i \leq d} \Big\{ \sum_{j=1}^{p} A_1(i,j) \Big\}\Big]^s \leq k(s) \leq \mathbb{E}\|A_1\|^s, \quad \textit{et} \quad \nu^s \mathcal{P}^s = k(s) \nu^s.$$

On introduit ensuite la suite de fonctions $r_s(x,n) = k(s)^{-n}\mathbb{E}\|xA_1\cdots A_n\|^s$, et on montre que sa somme de Césaro converge vers une fonction e_s qui est une fonction propre pour l'opérateur $\mathcal{P}^s$.

Lemme 8 *Pour tout $0 \leq s \leq \sigma$, il existe une fonction e_s strictement positive sur $\mathbb{S}_+$ qui vérifie :*

$$\mathcal{P}^s e_s = k(s) e_s.$$

L'étape suivante est de montrer l'existence d'un exposant κ tel que $k(\kappa) = 1$. Pour cela, on prouve que

$$\log k(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\|A_1\cdots A_n\|^s,$$

et on utilise un argument de convexité. On retrouve le même type d'expression que dans l'introduction.

Application du théorème de renouvellement.
L'étape suivante est d'appliquer le théorème de renouvellement aux produits de matrices. On pose

$$\Pi_0 = I_d, \qquad \Pi_n = A_1\cdots A_n.$$

Pour appliquer le théorème 12, on prend pour espace le sous-ensemble fermé $\mathbb{S}_+$ de la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1}$. On définit la suite (X_n, U_n) de la façon suivante :

$$X_n = \begin{cases} X_0\cdot\Pi_n & \text{si } X_0\Pi_n \neq 0, \\ 0 & \text{si } X_0\Pi_n = 0, \end{cases} \qquad U_n = \begin{cases} \log \frac{\|X_0\Pi_{n+1}\|}{\|X_0\Pi_n\|} & \text{si } X_0\Pi_n \neq 0, \\ -\infty & \text{si } X_0\Pi_n = 0. \end{cases}$$

Alors, pour tout $X_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, la suite V_n est :

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} U_i = \log \frac{\|X_0\Pi_n\|}{\|X_0\|} = \log\|X_0A_1\cdots A_n\|.$$

Remarque En dimension $d \geq 2$, la norme n'est plus multiplicative. C'est pour cela qu'on décompose la quantité $\log\|X_0A_1\cdots A_n\|$ en une somme de quotients plutôt qu'en une somme simple. La suite (V_n) joue le même rôle que les marches aléatoires (S_n) des deux chapitres précédents.

Les variables aléatoires V_n mesurent la norme du vecteur $xA_1\cdots A_n$ après n pas, et X_n sa direction et son sens. On a alors :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}\in\mathcal{A} \mid (X_i,U_i)_{i\leq n-1}, X_n = x_n) = \frac{1}{e_\kappa(\bar{x}_n)}\int \|x_n a\|^\kappa e_\kappa(\bar{x}_n a)\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x_n\cdot a)\mu(da),$$

donc l'opérateur de transition considéré est

$$\mathcal{Q}^\kappa f = \frac{1}{e_\kappa}\mathcal{P}^\kappa(e_\kappa f).$$

On montre ensuite que les condition I1 à I4 sont bien vérifiées dans ce contexte. Le théorème 12 donne alors l'existence d'une constante K strictement positive telle que pour tout x dans $\mathbb{S}_+$, on ait :

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\kappa}\mathbb{P}(\max_n \|xA_1\cdots A_n\| > t) = Ke_{\kappa}(x).$$

Comme e_κ est strictement positive, cette limite est bien non nulle sur $\mathbb{S}_+$.

Retour à l'équation récursive.
Enfin la dernière étape est de faire le lien avec la solution stationnaire de l'équation (4.1). Pour cela, on encadre la probabilité $\mathbb{P}(\|R\| > t)$ par des probabilités dépendant du maximum des produits $A_1\cdots A_n$. La preuve est très différente de celle de [30], elle ne s'appuie plus sur une médiane. Ces inégalités s'obtiennent ici par les propriétés de positivité, l'utilisation de temps d'échelle, et l'utilisation de l'équation récursive et de l'indépendance. En réappliquant le thérorème de renouvellement à des régularisées bien choisies, on obtient la limite annoncée.

4.4 Les résultats de E. LePage

Toutes les démonstrations de [44] utilisent largement la positivité des matrices et le théorème de Perron-Frobenius (théorème 4) ce qui n'est bien sûr pas généralisable à une classe plus vaste de matrices. Cependant, dans [47], E. LePage, établit un nouveau résultat matriciel où les A_n sont simplement inversibles. Sa démarche suit les mêmes grandes étapes que précédemment, mais les démonstrations sont beaucoup plus techniques.

4.4.1 Notations et Résultats

Comme cette fois-ci on ne se restreint plus aux vecteurs positifs, pour étudier la direction d'un vecteur on regardera son image dans l'espace projectif $\mathcal{P}^{d-1}$. D'autre part, les matrices qu'on va manipuler ne sont plus à priori positives, leur rayon spectral n'est plus automatiquement une valeur propre. On rappelle la définition suivante.

Définition 27 *Soit μ une mesure sur l'ensembles des matrices $d\times d$. Une matrice a est dite* μ-réalisable *s'il existe un entier n et des matrices $a_1,\dots a_n$ dans le support de μ telles que $a = a_1\cdots a_n$ et si de plus a admet une valeur propre simple réelle $\lambda(a)$ qui en module excède toutes les autres valeurs propres de a ($|\lambda(a)|$ est alors égale au rayon spectral de a).*

Dans la suite on aura également besoin de la définition suivante.

Définition 28 *Une mesure ν sur l'espace projectif $\mathcal{P}^{d-1}$ est* irréductible *si elle ne charge pas de sous-variété projective.*

On peut maintenant énoncer le théorème principal de [47].

Théorème 13 *Soit $(A_n, B_n) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R}^d$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi.*

1. *Si $\mathbb{E}\log^+ \|A_1\| < \infty$, alors la limite $\lim_n \frac{1}{n}\log\|A_1 A_2 \cdots A_n\| = \alpha$ existe et est différente de $+\infty$ presque sûrement. Si $\alpha < 0$ et si pour un $\beta > 0$ on a $0 < \mathbb{E}\|B_1\|^\beta < \infty$, alors la série $R = \sum_{k=1}^{\infty} A_1 A_2 \cdots A_{k-1} B_k$ converge presque sûrement et sa loi est la solution stationnaire de l'équation (4.1).*
2. *Si de plus les conditions suivantes sont satisfaites :*
   (i) pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{S}^{d-1}$ et tout $x \in \mathbb{S}^{d-1}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int \mathbb{1}_{\mathcal{U}}(x \cdot a)\mu^n(da) > 0,$$

   où μ est la loi de A_1,

   (ii) l'ensemble $\{\log|\rho(a)| \ \ t.q. \ \ a \text{ est } \mu\text{-réalisable}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$,

   (iii) pour tout vecteur colonne x, on a $\mathbb{P}(A_1 x + B_1 = x) < 1$,

   (iv) il existe un σ tel que $\mathbb{E}[p(A_1)^\sigma] \geq 1$, où $p(A_1)$ désigne la plus petite valeur propre de la matrice symétrique $(A_1{}^t A_1)^{1/2}$, et un $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E}[\sup\{\|A_1\|, \|B_1\|\}]^{\sigma+\delta} < +\infty$, et $\mathbb{E}(\|A_1\|^{-\delta}) < \infty$,

alors il existe un exposant $\kappa \in]0, \ \sigma]$ tel que $\lim_n (\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_n\|^\kappa)^{1/n} = 1$ et l'on a pour tout $x \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$\lim_{t\to\infty} t^\kappa \mathbb{P}(xR > t) = H_\kappa(\bar{x}),$$

où H_κ est une fonction continue sur $\mathcal{P}^{d-1}$, strictement positive et vérifiant pour tout v dans $\mathcal{P}^{d-1}$,

$$H_\kappa(v) = \int \|\tilde{v}A\|^\kappa H_\kappa(vA)\mu(dA).$$

Le premier point est identique aux hypothèses de [44] et assure juste l'existence d'une loi stationnaire pour l'équation (4.1) comme vu au paragraphe 4.2.2. L'hypothèse 2(*ii*) est identique à celle de Kesten. C'est une condition de non-arithméticité qui sert à établir la condition I3 du théorème 12. On retrouve en 2(*iii*) l'hypothèse d'absence de point fixe presque sûr qu'on a déjà vue en dimension 1. Enfin, l'hypothèse 2(*iv*) donne un critère d'existence de l'exposant κ un peu différent de celui de [44]. Il s'agit d'une condition suffisante pour que la courbe représentative de la fonction $s \longmapsto \log k(s)$ remonte.

L'hypothèse 2(*i*) quant à elle est nouvelle. Elle impose que la chaîne de Markov (X_n) définie précédemment visite tous les ouverts de $\mathbb{S}^{d-1}$. C'est donc une condition de récurrence. C'est cette condition qu'on va affaiblir dans le chapitre suivant. Remarquons que cette condition est incompatible avec les hypothèses de Kesten. En effet, si les A_i sont à valeurs dans les matrices positives et que x est un vecteur positif de $\mathbb{S}^{d-1}$, alors la chaîne $x \cdot A_1 \cdots A_n$ ne visite jamais l'ouvert des vecteurs non positifs. Le théorème 13 est donc un complément du théorème 11 plus qu'une extension.

Remarquons aussi que la fonction limite H_κ est en fait une fonction propre de l'opérateur P^κ, et donc on verra que c'est un multiple de la fonction propre e_κ qui

est strictement positive sur l'espace projectif $\mathcal{P}^{d-1}$. Donc la limite de $t^\kappa \mathbb{P}(xR > t)$ est strictement positive dans toutes les directions, contrairement au cas des matrices positives. De plus, la fonction $x \longmapsto H_\kappa(\bar{x})$ est symétrique sur la sphère, donc les limites dans deux directions opposées sont toujours égales. On retrouve donc les mêmes caractéristiques que dans le cas unidimensionnel (théorème 9) lorsque les a_n changent de signe.

Ici encore la démonstration repose sur le théorème de renouvellement de Kesten (théorème 12). On en donne les principales étapes dans les paragraphes suivants.

4.4.2 Etude d'un opérateur auxiliaire

Pour vérifier les conditions d'application du théorème 12, on commence par étudier certaines chaînes de Markov à valeur dans l'espace projectif $\mathcal{P}^{d-1}$. Pour tout s dans l'intervalle $[0,\ \sigma]$, on définit l'opérateur P^s sur l'ensemble des fonctions continues sur $\mathcal{P}^{d-1}$: pour tout $v \in \mathcal{P}^{d-1}$, on pose :

$$P^s f(v) = \mathbb{E}[\|\tilde{v}A_1\|^s f(vA_1)] = \int \|\tilde{v}a\|^s f(va)\mu(da).$$

Notons $k(s)$ le rayon spectral de P^s. C'est bien la même fonction que celle définie par [44]. L'opérateur P^s a les propriétés suivantes.

Proposition 16 *Pour tout s tel que $\mathbb{E}\|A_1\|^s < \infty$, il existe une fonction e_s strictement positive sur $\mathcal{P}^{d-1}$ telle que*

$$P^s e_s = k(s) e_s.$$

De plus, toute autre fonction continue positive f vérifiant $P^s f = k(s) f$ est proportionnelle à e_s. Si de plus, il existe un σ tel que $\mathbb{E}[p(A_1)^\sigma] \geq 1$, où $p(A_1)$ désigne la plus petite valeur propre de la matrice $(A_1 {}^t A_1)^{1/2}$, alors il existe un réel κ dans l'intervalle $]0,\ \sigma]$ tel que $k(\kappa) = 1$.

On retrouve la même définition de κ que dans [44]. La démonstration de cette proposition se fait de même en utilisant un théorème de point fixe, la compacité de la sphère unité et la log-convexité du rayon spectral.

On introduit ensuite le noyau markovien suivant : pour toute fonction f continue sur $\mathcal{P}^{d-1}$ et pour tout $v \in \mathcal{P}^{d-1}$,

$$Q^s f(v) = \frac{1}{k(s)e_s(v)} \int \|\tilde{v}a\|^s e_s(va) f(va)\mu(da).$$

Le but de cette première étape est de montrer que c'est un opérateur quasi-compact sur un espace de fonction hőldériennes convenable.

Sur $\Omega_1 = S_\mu^{\mathbb{N}}$, on condidère les probabilités Q_v^s, $v \in \mathcal{P}^{d-1}$, définies par

$$\begin{aligned} &Q_v^s(A_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_n) \\ &\quad = \frac{1}{k(s)^n e_s(v)} \int \|\tilde{v}a_1 \cdots a_n\|^s e_s(va_1 \cdots a_n) \mathbb{1}_{\mathcal{A}_1}(a_1) \cdots \mathbb{1}_{\mathcal{A}_n}(a_n)\mu(da_1) \cdots \mu(da_n). \end{aligned}$$

On construit maintenant une Q_v^s-martingale et on étudie sa convergence.

Proposition 17 *Il existe une application $v \longmapsto \nu_v$ continue de $\mathcal{P}^{d-1}$ dans l'ensemble $M^1(\mathcal{P}^{d-1})$ des probabilités sur $\mathcal{P}^{d-1}$ muni de la topologie de la convergence en variation et telle que pour tout $v \in \mathcal{P}^{d-1}$ on ait :*

$$\nu_v = \frac{1}{k(s)e_s(v)} \int \|\tilde{v}a\|^s e_s(va) a\nu_{va}\mu(da),$$

où $a\nu$ désigne la mesure image de ν par l'application a.

Théorème 14 *Pour tout $v \in \mathcal{P}^{d-1}$, la suite $(A_1A_2\cdots A_n\nu_{vA_1A_2\cdots A_n})$ est une Q_v^s-martingale dans $M^1(\mathcal{P}^{d-1})$ qui converge Q_v^s-presque sûrement vers une mesure de Dirac δ_Z. De plus, pour tout $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, la suite*

$$\frac{\|xA_1\cdots A_n\|}{\|A_1\cdots A_n\|}$$

converge Q_v^s-presque sûrement vers une variable aléatoire strictement positive.

On montre ensuite la négativité d'un certain cocycle, et on obtient la propriété de quasi-compacité. Pour toute fonction f continue sur $\mathcal{P}^{d-1}$, et pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$ on pose

$$|f| = \sup_{v\in\mathcal{P}^{d-1}} |f(v)|, \quad [f]_\varepsilon = \sup_{v\neq v'\in\mathcal{P}^{d-1}} \frac{|f(v)-f(v')|}{\delta_{\mathcal{P}}^\varepsilon(v,v')}, \quad \|f\|_\varepsilon = |f| + [f]_\varepsilon,$$

où $\delta_{\mathcal{P}}$ est la distance sur $\mathcal{P}^{d-1}$ définie au paragraphe 4.2.1. Soit $\mathcal{L}_\varepsilon$ l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathcal{P}^{d-1}$ telles que $\|f\|_\varepsilon < \infty$.

Théorème 15 *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{L}_\varepsilon$ et tout $n \geq 1$ on ait*

$$(Q^s)^n f = \pi^s(f)\mathbf{1} + U^s(f),$$

où π^s est l'unique probabilité Q^s-invariante de $M^1(\mathcal{P}^{d-1})$ et U^s est un opérateur sur $\mathcal{L}_\varepsilon$ de rayon spectral strictement inférieur à 1 et tel que $U^s\mathbf{1} = 0$.

4.4.3 Application du théorème de renouvellement

On retrouve la méthode déjà exposée en dimension 1. On étudie la régularisée suivante :

$$z(x,t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xR > u)du,$$

pour tout x dans $\mathbb{S}^{d-1}$ et t dans $\mathbb{R}$. Elle a bien la même limite que $\mathbb{P}(xR > t)$ grâce au lemme suivant, ou encore au lemme 4

Lemme 9 *Si $z(x,t)$ admet une limite quand t tend vers $+\infty$, alors $\mathbb{P}(xR > t)$ a la même limite.*

A l'aide de l'équation récursive et de l'indépendance on montre que z vérifie une équation de renouvellement de la forme :

$$z(x,t) = \mathbb{E}[\|xA_1\|^\kappa z(x\cdot A_1, t-\log\|xA_1\|)] + g(x,t), \quad \forall x\in\mathbb{S}^{d-1},\ t\in\mathbb{R}, \tag{4.7}$$

où $g(x,t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa \psi(x,u)du$ est la régularisée de la fonction :

$$\psi(x,t) = \mathbb{P}(t - xB_0 < xA_0R \le t) - \mathbb{P}(t < xA_0R \le t - xB_0).$$

On renormalise cette équation de renouvellement. Soit ${}^{13}\mathcal{Q} = {}^{13}\mathcal{Q}^\kappa$ l'extension suivante du noyau Q^κ à $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}$:

$${}^{13}\mathcal{Q}f(x,t) = \frac{1}{e_\kappa(\bar{x})}\int \|xa\|^\kappa e_\kappa(\bar{x}a) f(x\cdot a, t-\log\|xa\|)\mu(da).$$

On pose

$$Z(x,t) = \frac{z(x,t)}{e_\kappa(\bar{x})}, \quad \text{et} \quad G(x,t) = \frac{g(x,t)}{e_\kappa(\bar{x})}.$$

L'équation (4.7) équivaut alors à :

$$Z(x,t) = {}^{13}\mathcal{Q}Z(x,t) + G(x,t), \quad \forall x\in\mathbb{S}^{d-1},\ t\in\mathbb{R}. \tag{4.8}$$

On montre ensuite que la chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}$ définie par

$$(X_n, V_n) = (x\cdot A_1\cdots A_n,\ t - \log\|xA_1\cdots A_n\|),$$

et de probabilité de transition ${}^{13}\mathcal{Q}$ satisfait les hypothèse du théorème 12. On obtient alors une expression de la limite sous la forme d'un multiple de la fonction propre e_κ. Comme on n'est plus dans le cas des matrices positives, il faut encore montrer que la constante multiplicative est bien non nulle.

4.4.4 La limite est non nulle

L'idée originale de [47] pour montrer que la limite est non nulle est de se ramener à une équation récursive aléatoire scalaire à coefficients positifs, et d'étudier un processus d'échelle particulier. Ici encore la méthode est à priori très différente de celle de [30], il n'est pas question de médiane, cependant on va retrouver de nombreuses analogies.

Une chaîne de Markov

On introduit une extension de la chaîne de Markov (X_n, V_n) à $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$$(X_n, W_n, V_n) = (x\cdot A_1\cdots A_n,\ \frac{u + xR_n}{\|xA_1\cdots A_n\|},\ t - \log\|xA_1\cdots A_n\|),$$

où $R_n = \sum_{k=1}^n A_1\cdots A_{k-1}B_k$. Son noyau de transition est défini par :

$${}^{123}\mathcal{N}f(x,u,t) = \mathbb{E}[f(x\cdot A_1, \frac{u+xB_1}{\|xA_1\|}, t - \log\|xA_1\|)],$$

pour toute fonction f mesurable bornée sur $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Alors la suite (W_n) vérifie l'équation récursive aléatoire scalaire suivante :

$$W_{n+1} = c_n W_n + d_n,$$

où $c_n = \|X_n A_{n+1}\|^{-1}$ et $d_n = \frac{X_n B_{n+1}}{\|X_n A_{n+1}\|}$. On introduit le temps d'echelle :

$$\tau = \tau_1 = \inf\{n \geq 1 \mid W_n > u\},$$

qui est le premier temps où xR_n devient positif, et le noyau (sous-Markovien) correspondant :

$$\begin{aligned} {}^{123}\mathcal{N}_\tau f(x,u,t) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau<\infty} f(x \cdot A_1 \cdots A_\tau, \frac{u + xR_\tau}{\|xA_1 \cdots A_\tau\|}, t - \log \|xA_1 \cdots A_\tau\|)] \\ &= \mathbb{E}_{x,u,t}[\mathbb{1}_{\tau<\infty} f(X_\tau, U_\tau, T_\tau)], \end{aligned}$$

où $\mathbb{E}_{x,u,t}$ désigne l'espérance sur l'espace $\Omega_2 = (\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ décrivant la chaîne (X_n, W_n, V_n) partant de $(X_0 = x, W_0 = u, V_0 = t)$. Si la fonction f ne dépend pas de la variable u, alors ${}^{123}\mathcal{N}_\tau f(x,u,t)$ ne dépend pas non plus de u par la propriété de Markov. Pour toute fonction f mesurable bornée sur $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ on pose :

$${}^{13}\mathcal{N}_\tau f(x,t) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau<\infty} f(x \cdot A_1 \cdots A_\tau, t - \log \|xA_1 \cdots A_\tau\|)].$$

C'est le noyau qui décrit le comportement du processus d'échelle (X_{τ_n}, V_{τ_n}). Soient $z_e(x,t) = \mathbb{P}(xR > e^t)$ et $g_e(x,t) = {}^{123}\mathcal{N}_\tau \Phi(x,0,t)$, où $\Phi(x,u,t) = \mathbb{P}(e^t - u < xR \leq e^t)$. Ces fonctions vérifient une équation de renouvellement par rapport au noyau du processus d'échelle :

$$z_e(x,t) = {}^{13}\mathcal{N}_\tau z_e(x,t) + g_e(x,t). \tag{4.9}$$

La chaîne relativisée

On étudie maintenant une relativisation du noyau ${}^{123}\mathcal{N}$ par la fonction propre e_κ :

$${}^{123}\mathcal{Q} f(x,u,t) = \frac{1}{e_\kappa(\bar{x})} \int e_\kappa(\bar{x}a) \|xa\|^\kappa f(x \cdot a, \frac{u + xb}{\|xa\|}, t - \log \|xa\|) \eta(da,db), \tag{4.10}$$

où η désigne la loi du couple (A_1, B_1). C'est encore un noyau markovien puisque sa restriction $\mathcal{Q}$ à la sphère l'est. C'est aussi un noyau de type transformée de Laplace puisqu'on a fait apparaître un terme en $\|xa\|^\kappa$. On définit également, de même que précedemment les noyaux ${}^{123}\mathcal{Q}_\tau f(x,u,t)$ et ${}^{13}\mathcal{Q}_\tau f(x,t) = {}^{123}\mathcal{Q}_\tau f(x,0,t)$ quand la fonction f ne dépend pas de la deuxième coordonnée.

On désigne par $\mathcal{Q}_{x,u,t}$ les probabilités sur l'espace $\Omega_2 = (\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ décrivant la chaîne de Markov (X_n, W_n, V_n) relativisée quand $(X_0, W_0, V_0) = (x,u,t)$, et $\mathbb{E}^\kappa_{x,u,t}$ l'espérance correspondante. Le résultat clé de cette partie est le suivant.

Théorème 16 *On a :*

$$\sup_{x,u,t} \mathbb{E}^\kappa_{x,u,t}[\tau] = \sup_x \mathbb{E}^\kappa_{x,0,0}[\tau] < \infty.$$

On en déduit que l'opérateur ${}^{13}\mathcal{Q}_\tau$ est Markovien.

Encore un résultat de renouvellement

On pose $h_\kappa(x,t) = e_\kappa(\bar{x})e^{-\kappa t}$, et $Z_e = z_e h_\kappa^{-1}$ et $G_e = g_e h_\kappa^{-1}$. La définition de ${}^{13}\mathcal{Q}_\tau$ et l'équation (4.9) entrainent que pour tous $(x,t) \in \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$, on a :

$$Z_e(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^{13}\mathcal{Q}_\tau^n G_e(x,t). \tag{4.11}$$

et on démontre "à la main" un résultat de type renouvellement qui donne la limite de Z_e, donc celle de z. On montre par l'absurde qu'elle est non nulle, en utilisant le lemme suivant.

Lemme 10 *Pour tout x dans $\mathbb{S}^{d-1}$, et pour tout t dans $\mathbb{R}$, on a*

$$\mathbb{P}(xR < t) < 1.$$

Démonstration du théorème 16

La dernière étape est la démonstration du théorème 16. Pour cela, on considère la chaîne de Markov $M_n = (X_n, W_n)$ à valeurs dans $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ de probabilité de transition :

$${}^{12}\mathcal{Q}f(x,u) = \frac{1}{e_\kappa(\bar{x})} \int e_\kappa(\bar{x}a)\|xa\|^\kappa f\Big(x \cdot a, \frac{u + xb}{\|xa\|}\Big)\eta(da,db),$$

qui est la restriction de ${}^{123}\mathcal{Q}$ à $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$, et on montre que cet opérateur est quasi-compact sur un espace à poids bien choisi. Si f est une fonction de $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on pose :

$$\begin{aligned}
|f|_\varepsilon &= \sup_{(x,u)\in\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}} \frac{|f(x,u)|}{1+u^{2\varepsilon}}, \\
[f]_\varepsilon &= \sup_{\substack{x\neq y\in\mathbb{S}^{d-1} \\ u\in\mathbb{R}}} \frac{|f(x,u)-f(y,u)|}{\|x-y\|^\varepsilon(1+u^{2\varepsilon})}, \\
\|f\|_\varepsilon &= |f|_\varepsilon + [f]_\varepsilon.
\end{aligned}$$

On définit deux espaces de Banach $(\mathcal{C}_\varepsilon, |\cdot|_\varepsilon)$ et $(L_\varepsilon, \|\cdot\|_\varepsilon)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_\varepsilon &= \{f : \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid |f|_\varepsilon < \infty\}, \\
L_\varepsilon &= \{f : \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \|f\|_\varepsilon < \infty\}.
\end{aligned}$$

On peut alors montrer que :

Théorème 17 *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que ${}^{12}\mathcal{Q}$ soit un opérateur quasi-compact sur L_{ε_0}, et que l'on ait pour tous $n \geq 1$, $f \in L_{\varepsilon_0}$:*

$${}^{12}\mathcal{Q}^n(f) = \phi(f)\mathbf{1} + V^n(f),$$

où ϕ est l'unique probabilité ${}^{12}\mathcal{Q}$-invariante portée par $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}$, et V est un opérateur sur L_{ε_0} de rayon spectral strictement inférieur à 1 tel que pour tout $f \in L_{\varepsilon_0}$, on ait :

$$\phi(V(f)) = V(\phi(f)) = 0.$$

On établit enfin l'existence d'un moment d'ordre 1 pour les temps d'entrée de la chaîne de Markov (M_n) dans certains ouverts.

Proposition 18 *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ tel que $\phi(\mathcal{O}) > 0$, et soit $T_{\mathcal{O}} = \inf\{n \geq 1 \mid M_n \in \mathcal{O}\}$, le temps d'entrée de la chaîne de Markov (M_n) dans $\mathcal{O}$. Alors pour tout compact C de $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$, on a :*

$$\sup_{(x,u)\in C} \mathbb{E}^{\kappa}_{x,u,0}(T_{\mathcal{O}}) < \infty.$$

Et on en déduit le théorème 16 en appliquant cette proposition à l'ouvert $\mathcal{O} = \mathbb{S}^{d-1} \times]0, +\infty[$.

Chapitre 5

Une nouvelle version du théorème multidimensionnel

5.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter une nouvelle version du théorème multidimensionnel iid de [47] en affaiblissant l'hypothèse de récurrence. Ce travail se base sur les travaux récents de Y. Guivarc'h et E. LePage [33].

On se place dans le même cadre qu'au chapitre précédent. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et (A_n, B_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sur Ω où les (A_n) sont des éléments du groupe $\mathcal{G} = Gl(d, \mathbb{R})$, i.e. des matrices carrées inversible de taille d, $d \geq 2$, et les (B_n) des vecteurs colonne de $\mathbb{R}^d$. On étudie l'équation aux différences aléatoires suivante :

$$Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n \qquad n \geq 1. \tag{5.1}$$

Dans toute la suite, on supposera les hypothèses suivantes vérifées :

- $\lim_n \frac{1}{n} \log \|A_1 A_2 \cdots A_n\| = \alpha < 0$ presque sûrement,
- il existe $\beta > 0$ tel que $\mathbb{E}\|B_1\|^\beta < \infty$.

Comme vu précédemment, l'équation (5.1) admet alors une unique solution stationnaire qui suit la même loi que la variable aléatoire $R = \sum_{k=1}^{\infty} A_1 A_2 \cdots A_{k-1} B_k$.

On a rappelé au chapitre 4 qu'une des hypothèses principales du théorème de [47] est que la chaîne de Markov $(X_n) = (X_0 \cdot A_1 \cdots A_n)$ doit visiter tous les ouverts de la sphère quel que soit son point de départ $X_0 = x$. C'est cette hypothèse qu'on veut affaiblir. On la remplace par une condition sur le semi-groupe engendré par le support de la loi μ de A_1, dite condition i-p.

Dans la partie 5.2, on définit cette condition i-p. Dans la partie 5.3 on présente les résultats de [33] qui sous cette condition i-p redonnent les bonnes propriétés des opérateurs P^s et Q^s définis dans le chapitre précédent. Dans la partie 5.4, on donne

le nouvel énoncé du théorème sur la queue de la loi stationnaire, et les partie 5.5 à 5.9 sont consacrées à sa démonstration.

5.2 La condition i-p

Les notion d'irréductibilité et de proximalité de semi-groupes de matrices qui sont définies ci-dessous ont été introduites par H. Furstenberg dans [28] et [29]. Sous ces hypothèses, il montre en particulier que la loi stationnaire d'une équation du type équation 5.1 n'a pas d'atomes. Ces notions ont été reprises et développées par Y. Guivarc'h et A. Raugi dans [34] puis par I. Goldsheid et Y. Guivarc'h dans [31]. On présente ici une synthèse des principaux résultats.

5.2.1 Définitions

Commençons par donner quelques définitions et notations. Soit Γ un semi-groupe inclus dans le groupe linéaire des matrices inversible $\mathcal{G}$.

Définition 29 *Le semi-groupe Γ est dit* irréductible *(resp.* fortement irréductible*) s'il ne laisse pas de sous-espace (resp. de réunion finie de sous-espaces) invariant.*

Définition 30 *On dit que Γ agit de manière* proximale *sur l'espace métrique (X, d) si pour tous x, y dans X il existe une suite (a_n) d'éléments de Γ telle que $\lim_n d(a_n \cdot x, a_n \cdot y) = 0$.*

Définition 31 *On note $\Gamma_1 \subset End(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des endomorphismes u de $\mathbb{R}^d$ tels qu'il existe une suite (a_n) d'éléments de Γ avec $\lim_n \frac{a_n}{\|a_n\|} = u$, et $rang(u) = 1$.*

Définition 32 *Un élément a du groupe $\mathcal{G}$ est dit* proximal *si ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ satisfont $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_d|$. On note Γ_0 l'ensemble des éléments proximaux de Γ.*

Remarque Si a est une matrice proximale, comme $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, et a est à coefficients réels, la valeur propre dominante λ_1 est nécessairement réelle, sinon son complexe conjugué serait aussi valeur propre et de même module.

On rappelle que l'on considère l'action à droite des matrices. Les vecteurs propres seront donc toujours des vecteurs ligne propres pour l'action à droite.

Si la matrice a est dans Γ_0, la direction propre associée à la valeur propre dominante est unique et notée $p_+(a)$. Le point $p_+(a)$ est dans l'espace projectif $\mathcal{P}^{d-1}$. On l'appelle *direction dominante* de a, ou *vecteur propre dominant* si on se place sur la sphère. Le sous-espace stable formé par la somme directe des sous-espaces caractéristiques correspondant aux autres valeurs propres de a s'appelle l'*hyperplan répulsif* de a. Son image projective est notée $V_-(a)$. Pour tout $v \notin V_-(a)$, on a alors la convergence de va^n vers $p_+(a)$ dans l'espace projectif.

On a alors les trois équivalences suivantes, qui vont permettre de définir la condition i-p .

Théorème 18 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
i - Γ *est irréductible et proximal sur l'espace projectif* $\mathcal{P}^{d-1}$,
ii - Γ *est fortement irréductible et* $\Gamma_1 \neq \emptyset$,
iii- Γ *est fortement irréductible et* $\Gamma_0 \neq \emptyset$.

Définition 33 *On dit que* Γ *vérifie la* condition i-p *(pour* irréductibilité et proximalité*) s'il vérifie l'une des conditions équivalentes du théorème précédent.*

Si le semi-groupe Γ vérifie la condition i-p, il a en fait *beaucoup* d'éléments proximaux, au sens suivant.

Lemme 11 *Si* Γ *vérifie la condition i-p, soient* $V_1, \dots V_r$ *des sous-espaces de* $\mathcal{P}^{d-1}$. *Alors il existe* $a \in \Gamma_0$ *tel que son hyperplan répulsif* $V_-(a)$ *ne contienne aucun des sous-espaces* V_i.

On note $Zc(\Gamma)$ l'*adhérence algébrique* de Γ, c'est-à-dire l'ensemble des zéros communs à tous les polynômes à coefficients réels nuls sur Γ. On a le résultat suivant.

Théorème 19 *Le semi-goupe* Γ *vérifie l'une des conditions du théorème 18 si et seulement si son adhérence* $Zc(\Gamma)$ *la vérifie.*

Ce résultat donne une vaste classe de semi-groupes vérifiant la condition i-p. Il suffit en effet que $Zc(\Gamma)$ contienne le groupe spécial linéaire $SL(d)$ pour que cette condition soit réalisée, et c'est *génériquement* le cas si Γ est inclus dans $SL(d)$ et est engendré par deux éléments. Ici, génériquement signifie presque partout par rapport à la *mesure de Haar* sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. On rappelle que la mesure de Haar sur un groupe topologique localement compact muni de la tribu des boréliens est l'unique mesure (à constante multiplicative près) invariante par translation et finie sur les compacts. La mesure de Haar μ_H sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ a une expression explicite : en effet, pour tous $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ boréliens de $\mathcal{G}$, on a :

$$\mu_H(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \int \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(a)\mathbb{1}_{\mathcal{B}}(b)|\det(a)|^{-d}|\det(b)|^{-d} da\ db,$$

où $d\cdot$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{d^2}$.

5.2.2 L'ensemble limite

On définit maintenant l'ensemble limite d'un semi-groupe et on donne ses propriétés sous la condition i-p.

Définition 34 *Si* Γ *vérifie la condition i-p, on appelle* ensemble limite *de* Γ *la partie* $L(\Gamma)$ *de* $\mathcal{P}^{d-1}$ *formée des points correspondants aux droites* $Im(u)$ *de* $\mathbb{R}^d$, *avec* $u \in \Gamma_1$.

Cet ensemble limite est non vide et se caractérise de la façon suivante.

Proposition 19 *Si Γ vérifie la condition i-p, alors pour tout v dans $\mathcal{P}^{d-1}$, la fermeture de l'orbite $v\Gamma$ de v contient l'ensemble limite $L(\Gamma)$. En particulier, $L(\Gamma)$ est l'unique fermé Γ-invariant minimal de $\mathcal{P}^{d-1}$. Il n'est pas contenu dans une réunion dénombrable de sous-espaces projectifs. De plus, l'adhérence de $p_+(\Gamma_0) = \{p_+(a) \mid a \in \Gamma_0\}$ est exactement $L(\Gamma)$.*

En particulier, si $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(V)$ désigne la fermeture de l'ensemble V dans l'espace projectif $\mathcal{P}^{d-1}$, l'ensemble limite s'écrit comme l'intersection de toutes les fermetures des orbites :

$$L(\Gamma) = \bigcap_{v \in \mathcal{P}^{d-1}} \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(v\Gamma). \tag{5.2}$$

Lorsque le semi-groupe Γ vérifie la condition i-p, qui est une condition projective, son action sur la sphère a aussi des propriétés particulières.

Proposition 5.1 *Soit $\Gamma \subset \mathcal{G}$ un semi-groupe vérifiant la condition i-p. Alors on est dans l'un des deux cas suivants.*

1. *L'action de Γ sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$ possède un unique ensemble fermé Γ-invariant minimal. Cet ensemble est symétrique et son image projective est égale à $L(\Gamma)$.*
2. *L'action de Γ sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$ possède deux ensembles fermés Γ-invariants minimaux. Ces deux ensembles sont disjoints, symétriques l'un de l'autre, et ont la même image $L(\Gamma)$ dans l'espace projectif $\mathcal{P}^{d-1}$.*

Démonstration

Notons par $\mathcal{F}_{\mathbb{S}}(U)$ la fermeture de l'ensemble U dans la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$. On pose

$$F = \bigcap_{x \in \mathbb{S}^{d-1}} \mathcal{F}_{\mathbb{S}}(x \cdot \Gamma),$$

où $x \cdot a = \frac{xa}{\|xa\|}$. C'est un fermé Γ-invariant de la sphère.

•Premier cas : l'ensemble F est non vide.
Alors par construction, c'est un ensemble symétrique, et c'est la préimage de l'ensemble limite $L(\Gamma)$ sur la sphère d'après la formule (5.2). Il est clairement contenu dans tout fermé Γ-invariant de la sphère. Ainsi l'ensemble F est bien l'unique fermé Γ-invariant minimal de la sphère.

•Deuxième cas : l'ensemble F est vide.
Comme l'ensemble limite $L(\Gamma)$ est non vide, on peut trouver x_0 dans $\mathbb{S}^{d-1}$ tel que son image projective $\bar{x}_0$ soit dans $L(\Gamma)$. En particulier, d'après la proposition 19, $\bar{x}_0$ est dans toutes les fermetures des orbites projectives. Donc, pour tout y dans la sphère, la fermeture de l'orbite de y dans la sphère $\mathcal{F}_{\mathbb{S}}(y \cdot \Gamma)$ contient x_0 ou $-x_0$. On définit alors deux sous-ensembles :

$$\begin{aligned} S_1 &= \{y \in \mathbb{S}^{d-1} \mid x_0 \in \mathcal{F}_{\mathbb{S}}(y \cdot \Gamma)\}, \\ S_2 &= \{y \in \mathbb{S}^{d-1} \mid -x_0 \in \mathcal{F}_{\mathbb{S}}(y \cdot \Gamma)\}. \end{aligned}$$

Les ensemble S_1 et S_2 sont symétriques et recouvrent la sphère. On prend maintenant le plus petit fermé Γ-invariant de chacun de ces ensembles : on pose

$$F_1 = \bigcap_{y \in S_1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}}(y \cdot \Gamma), \quad \text{et } F_2 = \bigcap_{y \in S_2} \mathcal{F}_{\mathbb{S}}(y \cdot \Gamma).$$

Par construction, F_1 et F_2 sont des fermés Γ-invariants symétriques l'un de l'autre. Ils sont non vides puisque x_0 est dans F_1 et $-x_0$ dans F_2. Leur image dans l'espace projectif est égale à $L(\Gamma)$. De plus, F_1 et F_2 sont disjoints puisque $F_1 \cap F_2 = F$ est vide. Enfin, F_1 et F_2 sont minimaux. En effet, s'il existe $F_3 \subset F_1$ fermé Γ-invariant, alors on a :

$$\bigcap_{x \in F_3} \mathcal{F}_{\mathbb{S}}(x \cdot \Gamma) \subset F_3 \subset F_1 = \bigcap_{x \in F_1} \mathcal{F}_{\mathbb{S}}(x \cdot \Gamma),$$

donc $F_3 = F_1$, et il en est de même pour F_2. D'autre part, si $F_4 \subset \mathbb{S}_{d-1}$ est un fermé Γ-invariant non vide, alors son image projective contient $L(\Gamma)$. Donc F_4 intersecte F_1 ou F_2, et par ce qui précède il contient en fait F_1 ou F_2. □

On peut aussi donner un critère pour savoir dans lequel des deux cas précédents on se trouve.

Proposition 5.2 *On est dans le deuxième cas de la proposition 5.2 si et seulement si* Γ *préserve un cône convexe fermé saillant d'intérieur non vide.*

Démonstration

Si Γ préserve un tel cône C, alors C et son symétrique $-C$ intersectent la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$ suivant deux fermés Γ-invariants disjoints et non vides. Donc on a au moins deux fermés Γ-invariants minimaux.

Si on a deux fermés Γ-invariants minimaux F_1 et F_2 sur la sphère, on appelle C_1 et C_2 les cônes engendrés par leurs enveloppes convexes. En particulier, C_1 et C_2 sont encore Γ-invariants puisque la convexité est une relation linéaire.

On veut montrer par l'absurde que C_1 et C_2 s'intersectent seulement en $\{0\}$. Si $C_1 \cap C_2 \neq \{0\}$, on peut trouver des vecteurs $y_1, \ldots, y_p \in F_1$, $z_1, \ldots, z_q \in F_2$ et des réels positifs α_1 et β_j de somme respective 1 tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_i = y = z = \sum_{j=1}^{q} \beta_j z_j,$$

par définition de l'enveloppe convexe. Par le lemme 11, on peut alors trouver un élément proximal a dans Γ_0 dont l'hyperplan répulsif $V_-(a)$ ne contienne aucun des y_i et z_j. On a donc :

$$\lim_n \frac{ya^n}{\|a^n\|} = \lim_n \sum \alpha_i \frac{y_i a^n}{\|y_i a^n\|} \frac{\|y_i a^n\|}{\|a^n\|} = \sum \alpha_i u_i a_+,$$

où $u_i = \lim \frac{\|y_i a^n\|}{\|a^n\|} > 0$ et a_+ est le vecteur dominant de a qui est dans F_1. De même, on a :

$$\lim_n \frac{za^n}{\|a^n\|} = \lim_n \sum \beta_j \frac{z_j a^n}{\|z_j a^n\|} \frac{\|z_j a^n\|}{\|a^n\|} = \sum \beta_j v_j a_-,$$

où $v_j = \lim \frac{\|z_j a^n\|}{\|a^n\|} > 0$ et a_- est le vecteur dominant de a qui est dans F_2. Or $a_- = -a_+$, donc on a $\sum \alpha_i u_i = -\sum \beta_j v_j$ ce qui est absurde.

On a donc montré que C_1 et C_2 sont des cônes convexes fermés d'intersection nulle. Ainsi on peut trouver un hyperplan H qui les sépare. Ce sont donc des cônes saillants.

Enfin, si le cône convexe C_1 est d'intérieur vide, il est nécessairement contenu dans un sous-espace vectoriel $E = vect(C_1)$ de dimension strictement inférieur à d. Ce sous-espace est alors Γ-invariant puisque C_1 l'est, ce qui contredit l'irréductibilité imposée par la condition i-p. □

5.2.3 Arithméticité

L'action du semi-groupe Γ sur l'ensemble limite a aussi une propriété de type non-arithméticité.

Théorème 20 *Soit S un fermé de $\mathcal{G}$ qui engendre le semi-groupe Γ. On suppose que Γ vérifie la condition i-p, que φ est une fonction continue sur $L(\Gamma)$ et que :*

$$e^{i\alpha}\varphi(v) = \|\tilde{v}a\|^{it}\varphi(va) \qquad \forall a \in S,\ v \in L(\Gamma),$$

où $\tilde{v}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$ de norme 1 ayant pour image v dans $\mathcal{P}^{d-1}$. Alors on a nécessairement $t = 0$, $e^{i\alpha} = 1$, et φ est constante sur $L(\Gamma)$.

On en déduit une propriété analogue à la condition $2(ii)$ du théorème 13.

Proposition 5.3 *Si le semi-groupe Γ vérifie la condition i-p, alors le sous-groupe engendré par $S_\Gamma = \{\log \rho(a),\ a \in \Gamma_0\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

La démonstration de cette proposition est donnée par Y. Guivarc'h et R. Urban dans [35]. On la rappelle ici. Elle découle de trois lemmes. Le premier est un résultat de R. Bowen, [10].

Lemme 12 *Soit A un ensemble fini, $\Omega = A^{\mathbb{N}}$ et θ le décalage sur Ω. Pour tout fonction φ sur Ω, on note*

$$S_n\varphi(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ \theta^k(\omega).$$

Si la fonction φ est hőldérienne, et que pour tout point ω périodique de période p la somme $S_p\varphi(\omega)$ est dans $\mathbb{Z}$, alors on a :

$$\varphi = \varphi' + \psi - \psi \circ \theta,$$

où φ' est une fonction hőldérienne à valeurs entières sur Ω, et ψ une fonction hőldérienne sur Ω.

Lemme 5.1 *Soient g et h des matrices dans $\mathcal{G}$ telles que h est proximal, et $p_+(h)g \notin V_-(h)$. Alors, pour n pair assez grand $h^n g$ est proximal et on a :*

$$\lim_n p_+(h^n g) = p_+(h)g, \qquad \lim_n V_-(h^n g) = V_-(h).$$

Démonstration

Soit n pair et u_n l'application linéaire $u_n = \frac{h^n}{\|h^n\|}$. En dehors du sous-espace $V_-(h)$, la suite (u_n) converge vers la projection π_h sur $\mathbb{R}p_+(h)$. Donc en dehors de $V_-(h)$ la suite $(u_n g)$ converge vers la projection sur $\pi_h g$ qui a pour image $\mathbb{R}p_+(h)g$ et pour noyau $V_-(h)$. Donc, si $p_+(h)g \notin V_-(h)$, alors $\pi_h g$ est colinéaire à une projection. Ainsi $\pi_h g$ est proximal. Il en est donc de même pour $u_n g$ pour n assez grand. □

Lemme 5.2 *Soit Γ un semi-groupe de matrices inversibles vérifiant la condition i-p. Alors on peut trouver a et b dans Γ_0 telles que $p_+(a) \neq p_+(b)$, $V_-(a) \neq V_-(b)$ et $p_+(a) \notin V_-(b)$, $p_+(b) \notin V_-(a)$.*

Démonstration

Soit a matrice proximale de Γ. On peut trouver une matrice proximale b dans Γ telle que $V_-(a) \neq V_-(b)$ et $p_+(a) \notin V_-(b)$ par le lemme 11. Si de plus $p_+(b) \notin V_-(a)$ et $p_+(a) \neq p_+(b)$ on a trouvé un couple (a, b) satisfaisant. Sinon, toujours par le lemme 11 appliqué au dual de l'ensemble des vecteurs ligne, on peut trouver g dans Γ tel que $p_+(b)g$ ne soit pas contenu dans $V_-(b) \cup V_-(a) \cup p_+(a)$. On applique alors le lemme 12 et on remplace b par $b' = b^n g$ pour n pair assez grand. Alors $V_-(b')$ est proche de $V_-(b)$, donc les relations $V_-(a) \neq V_-(b')$ et $p_+(a) \notin V_-(b')$ sont encore satisfaites. Comme $p_+(b')$ est aussi proche de $p_=(b)g$ qui n'est pas contenu dans $V_-(a) \cup p_+(a)$, on a aussi $p_+(b') \notin V_-(a)$ et $p_+(a) \neq p_+(b')$. □

Démonstration de la proposition 5.3

Comme Γ vérifie la condition i-p, on peut en choisir deux éléments a_1 et a_2 comme dans la lemme 5.2. Soient C_1 et C_2 deux voisinages fermés disjoints de $p_+(a_1)$ et $p_+(a_2)$ dans $\mathcal{P}^{d-1}$ qui n'intersectent pas $V_-(a_1)$ et $V_-(a_2)$. Pour tout v en dehors de $V_-(a_1) \cup V_-(a_2)$, on a :

$$\lim_n (C_1 \cup C_2)a_1^n = p_+(a_1), \qquad \lim_n (C_1 \cup C_2)a'^n = p_+(a_2),$$
$$\lim_n v a_1^n = p_+(a_1), \qquad \lim_n v a_2^n = p_+(a_2).$$

De plus, on peut choisir n assez grand pour avoir aussi les relation suivantes, où $a_1^n = a$ et $a_2^n = b$:

$$va \in C_1,\ vb \in C_2, \quad (C_1 \cup C_2)a \subset Int(C_1),\ (C_1 \cup C_2)b \subset Int(C_2),$$

où Int désigne l'intérieur d'un ensemble. On en déduit que le semi-groupe $\Gamma(a, b)$ engendré par a et b est libre, et il suffit de prouver la proposition 5.3 pour ce semi-groupe.

On note δ la distance triviale sur l'ensemble $\{a, b\}$, ie $\delta(a, b) = 1$, et on munit $\Omega = \{a, b\}^{\mathbb{N}}$ de la distance $\delta(\omega, \omega') = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\delta(\omega_k, \omega'_k)$. On définit un homéomorphisme $\mathfrak{z}$ entre Ω et $L(\Gamma(a, b))$ comme suit. Si $\omega = (\omega_k) \in \Omega$, alors pour tout v en dehors de $V_-(a) \cup V_-(b)$, la suite $v\omega_n \cdots \omega_1$ converge vers $\mathfrak{z}(\omega) \in C_1 \cup C_2$ (voir [33], théorème 6.4). L'application $\mathfrak{z}$ est un homéomorphisme bi-hőldérien qui a la propriété suivante : si θ désigne le décalage sur Ω, et qu'on considère $\mathfrak{z}(\omega)$ comme un vecteur ligne, on a

$$\mathfrak{z}(\theta\omega)\omega_1 = \|\mathfrak{z}(\theta\omega)\omega_1\|\mathfrak{z}(\omega).$$

Soient maintenant φ la fonction $\varphi(\omega) = \log \|\mathfrak{z}(\theta\omega)\omega_1\|$, et sa somme $S_n\varphi(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(\theta^k\omega)$. On a alors $S_n\varphi(\omega) = \log \|\mathfrak{z}(\theta^n\omega)\omega_{n-1}\cdots\omega_1\|$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\log \|\mathfrak{z}(\theta^n\omega)\omega_{n-1}\cdots\omega_1\| &= \log \frac{\|\mathfrak{z}(\theta^n\omega)\omega_{n-1}\cdots\omega_1\|}{\|\mathfrak{z}(\theta^n\omega)\|} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \log \frac{\|\mathfrak{z}(\theta^{k+1}\omega)\omega_k\cdots\omega_1\|}{\|\mathfrak{z}(\theta^k\omega)\omega_{k-1}\cdots\omega_1\|} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \log \frac{\|\mathfrak{z}(\theta^k\omega)\omega_{k-1}\cdots\omega_1\|\|\mathfrak{z}(\theta^{k+1}\omega)\omega_k\|}{\|\mathfrak{z}(\theta^k\omega)\omega_{k-1}\cdots\omega_1\|} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \log \|\mathfrak{z}(\theta^{k+1}\omega)\omega_k\| \\
&= \sum_{k=0}^{n} \varphi(\theta^k\omega),
\end{aligned}$$

par la propriété de la fonction $\mathfrak{z}$ énoncée ci-dessus.

Si ω est périodique de période p, ie $\theta^p\omega = \omega$, alors $\mathfrak{z}(\omega)$ est un vecteur propre dominant de $\omega_{p-1}\cdots\omega_1$ par construction, et la valeur propre correspondante λ_p vérifie

$$\log|\lambda_p| = S_p\varphi(\omega)$$

d'après ce qui précède. Si S_Γ n'engendre pas un sous-groupe dense dans $\mathbb{R}$, il existe un réel $c > 0$ tel que $S_\Gamma \subset c\mathbb{Z}$, donc $S_p\varphi(\omega)$ est dans $c\mathbb{Z}$ pour tout point périodique ω de période p. On utilise maintenant le lemme 12 appliqué à $c^{-1}\varphi$. En particulier, la fonction $\exp(2i\pi c^{-1}\varphi)$ peut se récrire comme $\exp(2i\pi(\psi - \psi\circ\theta)$ avec ψ hőldérienne sur Ω.

On associe à cette fonction ψ une fonction $\overline{\psi}$ hőldérienne sur l'ensemble limite $L(\Gamma(a,b))$ définie par $\overline{\psi}(\mathfrak{z}(\omega)) = \psi(\omega)$, et on note u la fonction $\exp(2i\pi\overline{\psi})$. Alors u est continue sur l'ensemble limite $L(\Gamma(a,b))$, et pour tous γ dans $\Gamma(a,b)$ et x dans $L(\Gamma(a,b))$ on a

$$\|x\gamma\|^{2i\pi/c} = \frac{u(x)}{u(x\gamma)}.$$

Le théorème 20 implique alors que $2i\pi c^{-1} = 0$ et $u = 1$ ce qui est impossible. □

5.2.4 Exemples en dimension 2

On donne maintenant une famille explicite de semi-groupes vérifiant la condition i-p lorsque $d = 2$.

Proposition 5.4 *Soient a et a' deux matrices de $Gl(2,\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes :*

– a et a' ont chacune deux valeurs propres réelles de modules distincts,

– *les quatre espaces propres correspondants sont deux à deux distincts.*
Alors le semi-groupe Γ *engendré par* a *et* a' *vérifie la condition i-p.*

Démonstration

Irréductibilité : Supposons qu'il existe un sous-espace E non trivial de $\mathbb{R}^2$ stable par Γ. Alors E est de dimension 1. En particulier, E est stable par a, donc E est un espace propre de a. De même, E est un espace propre de a', ce qui est impossible puisque a et a' n'ont pas de sous-espace propre commun, par hypothèse.

Proximalité : Comme a et a' ont des valeurs propres distinctes en module, ce sont des matrices proximales. On note E_+ l'espace propre dominant de a, E'_+ celui de a', et E_-, E'_- respectivement le deuxième espace propre de a et a', c'est-à-dire leur hyperplan répulsif. On veut montrer que le semi-groupe Γ est proximal sur l'espace projectif $\mathcal{P}^{d-1}$. Soient v et w dans $\mathcal{P}^{d-1}$, et x et y une de leurs préimages dans la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$.

Premier cas : $x \notin E_-$ et $y \notin E_-$,
alors v et w ne sont pas dans l'hyperplan répulsif de a, donc va^n et wa^n convergent vers la direction dominante $p_+(a)$. En particulier, on a $\lim_n \delta_{\mathcal{P}}(va^n, wa^n) = 0$.

Deuxième cas : $x \in E_-$ et $y \in E_-$,
alors $v = w$ puisque E_- est de dimension 1, donc pour toute suite (a_n) d'éléments de Γ, on a $\lim_n \delta_{\mathcal{P}}(va_n, wa_n) = 0$.

Troisième cas : $x \in E_-$ et $y \notin (E_- \cup E'_-)$,
alors, comme $E_- \cap E'_- = \{0\}$ par hypothèse, v et w ne sont pas dans l'hyperplan répulsif de a', donc de même que pour le premier cas, on a $\lim_n \delta_{\mathcal{P}}(va'^n, wa'^n) = 0$ puisque va'^n et wa'^n tendent vers $p_+(a')$.

Dernier cas : $x \in E_-$ et $y \in E'_-$,
alors ax est dans E_- puisque c'est un espace propre, et ya n'est pas dans E'_- puisque cet espace est de dimension 1 et non stable par a. Ainsi xa et ya sont dans le deuxième ou le troisième cas, donc on a $\lim_n \delta_{\mathcal{P}}(vaa_n, waa_n) = 0$ pour toute suite (a_n) d'éléments de Γ, ou alors $\lim_n \delta_{\mathcal{P}}(vaa'^n, waa'^n) = 0$.

Le semi-groupe Γ agit donc de manière proximale sur l'espace projectif. □

Avec cette proposition, on peut construire des semi-groupes vérifiant la condition i-p et qui ont soit un soit deux ensembles fermé minimaux Γ-invariants sur la sphère (voir proposition 5.1).

Exemple 1 Si a et a' sont des matrices positives, les deux sous-ensembles des vecteurs positifs et des vecteurs négatifs (i.e. dont toutes les coordonnées sont négatives) sont des fermés Γ-invariants non-vide et distincts. On a donc deux ensembles limites distincts sur la sphère. Voici un exemple numérique :

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres de a sont 2 et 1, et les espaces propres correspondants sont $E_+ = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0\}$ et $E_- = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0\}$. Les valeurs propres de a' sont 2 et -1, et les espaces propres correspondants sont

$E'_+ = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = -x_1\}$ et $E'_- = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 2x_2\}$.

Exemple 2 Si a est une matrice positive et a' une matrice négative, l'ensembles des vecteurs positifs et des vecteurs négatifs est un fermé Γ-invariant symétrique, donc il contient le ou les ensembles Γ invariants minimaux. De plus a' envoie les vecteurs positifs sur les négatifs et vice-versa, donc il y a nécessairement un unique fermé Γ-invariant minimal. De plus cet ensemble limite n'est pas la sphère entière. Voici un exemple numérique :

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres de a sont 2 et 1, et les espaces propres correspondants sont $E_+ = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0\}$ et $E_- = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0\}$. Les valeurs propres de a' sont -2 et 1, et les espaces propres correspondants sont $E'_+ = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = -x_1\}$ et $E'_- = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 2x_2\}$.

Plus généralement, dès que l'une des deux matrices a sa valeur propre dominante négative, on aura un unique ensemble limite sur la sphère puisqu'on pourra passer de $-x$ à x pour le vecteur propre dominant correspondant (voir la démonstration de la proposition 5.1).

5.3 Présentation des résultats de [33]

Le but de cette partie est de présenter les résultats de [33] qui nous seront utiles par la suite, et en particulier de redonner les propriétés des opérateurs P^s et Q^s sous la condition i-p. Ce sont ces résultats qui vont remplacer ceux de la partie 4.4.2.

Soit μ une probabilité sur $\mathcal{G}$, telle que le semi-groupe Γ_μ engendré par son support S_μ vérifie la condition i-p. On suppose de plus que :

$$\exists\ \sigma > 0 \text{ t.q. } \int \|a\|^\sigma \mu(da) < +\infty, \text{ et } \int \|a\|^\sigma \log|det(a)|\mu(da) > -\infty, \qquad (5.3)$$

et on considère pour s dans l'intervalle $[0, \sigma[$ l'opérateur P^s sur $\mathcal{P}^{d-1}$ défini par

$$P^s\varphi(v) = \int \|\tilde{v}g\|^s \varphi(va)\mu(da).$$

De même que précédemment, on pose

$$k(s) = \lim_n \Big(\int \|a\|^s \mu^n(da) \Big)^{1/n}, \qquad \alpha = \lim_n \frac{1}{n} \int \log\|a\| \mu^n(da).$$

Définition 35 *Pour un fermé F de $\mathcal{G}$ on définit son* exposant de croissance *par*

$$\gamma^\infty(F) = \lim_n \frac{1}{n} \sup\{\log\|a_n \cdots a_1\| \ : \ a_k \in F,\ 1 \le k \le n\}.$$

Les propriétés spectrales de l'opérateurs P^s sont réunies dans le théorème suivant.

Théorème 21 *Pour $\varepsilon > 0$ assez petit (dépendant de s), l'opérateur P^s de $H_\varepsilon(\mathcal{P}^{d-1})$, espace des fonctions ε-hőldériennes sur $\mathcal{P}^{d-1}$, admet pour rayon spectral $k(s)$.*

Il possède une unique fonction propre continue e_s et une unique mesure propre ν^s normalisées ($|e_s| = 1$, $\nu^s(e_s) = 1$) correspondant à $k(s)$.

De plus, e_s est strictement positive sur $\mathcal{P}^{d-1}$ et hőldérienne d'ordre $\underline{s} = \min\{s, 1\}$, et ν^s a pour support $L(\Gamma)$.

On a la décompostition en somme directe

$$P^s = k(s)(\nu^s \otimes e_s + U^s),$$

où U^s commute avec le projecteur $p^s = \nu^s \otimes e_s$: $U^s p^s = p^s U^s = 0$, et est de rayon spectral strictement inférieur à 1.

La fonction $s \longmapsto k(s)$ est définie sur $[0, \sigma]$. Elle a les propriétés suivantes.

Théorème 22 *La fonction $s \mapsto \log k(s)$ est strictement convexe sur $[0, \sigma[$ et sa dérivée à droite en 0 vaut α.*

Ainsi, pour qu'une solution $\kappa > 0$ de l'équation $k(s) = 1$ existe, il suffit que la fonction $\log k$ prenne des valeurs strictement positives. On rappelle un encadrement du rayon spectral $k(s)$ donné dans [33].

Lemme 13 *Pour tout $0 \leq s \leq \sigma$, il existe une constante C_s strictement positive telle que, pour tout entier n, on ait :*

$$C_s \int \|a\|^s \mu^n(da) \leq k(s)^n \leq \int \|a\|^s \mu^n(da).$$

On peut maintenant préciser les conditions d'existence d'une solution strictement positive de $k(s) = 1$.

Proposition 5.5 *Si $\sigma = \sup\{s;\ \mathbb{E}\|A_1\|^s < \infty\}$ est fini, alors il existe un unique $\kappa > 0$ solution de l'équation de l'équation $k(s) = 1$ sur $]0, \sigma]$.*

Démonstration

D'après le lemme ci-desuus, pris pour $n = 1$, on a $k(s) \geq C_s \mathbb{E}\|A_1\|^s$. Or la fonction $s \longmapsto \mathbb{E}\|A_1\|^s$ est log-convexe, donc continue, ainsi $\mathbb{E}\|A_1\|^s$ prend des valeurs positives. Ainsi, $\log k$ prend des valeurs positives, et κ existe. □

Dans le cas où σ est infini, c'est-à-dire $\mathbb{E}\|A_1\|^s < \infty$ pour tout s, on peut trouver une asymptote de la courbe représentative de la fonction $\log k$.

Théorème 23 *Si $\sigma = +\infty$, on a*

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{\log k(s)}{s} = \gamma^\infty(S_\mu).$$

Ceci nous donne un critère simple d'existence de κ. En effet, l'exposant de croissance $\gamma^\infty(S_\mu)$ peut aussi s'exprimer en terme de rayons spectraux.

Lemme 14 *Supposons que le fermé $F \subset \mathcal{G}$ engendre un semi-groupe vérifiant le condition i-p. Alors on a l'égalité*

$$\gamma^\infty(F) = \limsup_n \frac{1}{n} \sup\{\log \rho(a) \mid a \in F^n\}.$$

Donc dans ce cas, κ existe si et seulement si $\gamma^\infty(S_\mu) > 0$, c'est-à-dire si et seulement si Γ_μ contient une matrice de rayon spectral strictement plus grand que 1. On dit alors que Γ_μ est *dilatant*.

Remarque C'est bien le semi-groupe Γ_μ qui doit être dilatant, et non le support S_μ de la loi μ. En effet, choisissons $\mu = 0.05\delta_a + 0.95\delta a'$ avec

$$a = \begin{pmatrix} 0.9 & 1 \\ 0 & 0.45 \end{pmatrix}, \qquad a' = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 1 & 0.45 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices engendrent un semi-groupe qui vérifie la condition i-p d'après la proposition 5.4, on a $\alpha < 0$ par la proposition 4.1 car $\mathbb{E}[A_1 \otimes {}^tA_1] = 0.98 < 1$. Or S_μ n'est pas dilatant puisaue a et a' sont toutes deux de rayon spectral 0.9. Cependant le rayon spectral de aa' est 1.93, donc Γ_μ est bien dilatant.

En résumé, on a la proposition suivante.

Proposition 5.6 *Si $\sigma = +\infty$, alors l'exposant κ existe si et seulement si Γ_μ est dilatant.*

Soit Q^s l'opérateur markovien sur $\mathcal{P}^{d-1}$ défini par :

$$Q^s\varphi(v) = \frac{1}{k(s)e_s(v)} P^s(e_s\varphi)(v) = \int \varphi(va) q^s(v,a)\mu(da),$$

où $q^s(v,a)$ est défini par :

$$q^s(v,a) = \frac{\|\tilde{v}a\|^s}{k(s)} \frac{e_s(va)}{e_s(v)}.$$

L'opérateur Q^s est quasi-compact. Plus précisément, on a les résultats suivants.

Théorème 24 *Q^s a une unique probabilité invariante π^s. Elle a pour support l'ensemble limite $L(\Gamma)$.*
De plus, Q^s est quasi-compact sur $H_\varepsilon(\mathcal{P}^{d-1})$, 1 est son unique valeur propre de module 1, et on a la décomposition spectrale

$$Q^s = \pi^s \otimes 1 + V^s,$$

où $\pi^s \otimes 1$ et V^s commutent et V^s est de rayon spectral strictement inférieur à 1.

On note $\Omega_1 = (S_\mu)^{\otimes\mathbb{N}}$ et Q_v^s la probabilité sur Ω_1 dont les projections sur les facteurs $(S_\mu)^{\otimes n}$ sont données par $q_n^s(v,\omega)d\mu^{\otimes n}(\omega)$, où $\omega = (a_k)_{k>0}$ et

$$\begin{aligned} q_n^s(v,\omega) &= q^s(v,a_1)q^s(va_1,a_2)\cdots q^s(va_1\cdots a_{n-1},a_n) \\ &= \frac{q^s(v,a_1\cdots a_n)}{k(s)^{n-1}}. \end{aligned}$$

On donne aussi l'analogue de la proposition 17 et du théorème 14.

Théorème 25 *Soit μ une mesure de probabilité telle que son support S_μ vérifie la condition i-p.*
Il existe une unique application $v \longmapsto \nu_v$ continue de $\mathcal{P}^{d-1}$ dans l'ensemble $M^1(\mathcal{P}^{d-1})$ des probabilités sur $\mathcal{P}^{d-1}$ muni de la topologie de la convergence en variation et telle que pour tout $v \in \mathcal{P}^{d-1}$ on ait :

$$\nu_v = \frac{1}{k(s)e_s(v)} \int \|\tilde{v}a\|^s e_s(va) a\nu_{va}\mu(da).$$

Soit (A_n) est une suite de matrices iid de loi μ. Pour tout $v \in \mathcal{P}^{d-1}$, la suite $(A_1A_2\cdots A_n\nu_{vA_1A_2\cdots A_n})$ est une Q_v^s-martingale dans $M^1(\mathcal{P}^{d-1})$ qui converge Q_v^s-presque sûrement au sens vague vers une mesure de Dirac δ_Z.
De plus, pour tout $v \in \mathcal{P}^{d-1}$, la suite

$$\frac{\|vA_1\cdots A_n\|}{\|A_1\cdots A_n\|}$$

converge Q_v^s-presque sûrement vers la variable aléatoire strictement positive $|vZ|$.

5.4 Le nouveau théorème

5.4.1 Enoncé

On donne maintenant le nouvel énoncé du théorème multidimensionnel.

Théorème 5.1 *Soit $(A_n, B_n) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R}^d$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi η.*

1. *Si $\mathbb{E}\log^+\|A_1\| < \infty$, la limite $\lim_n \frac{1}{n}\log\|A_1A_2\cdots A_n\| = \alpha$ existe et est $< +\infty$ presque sûrement. Si de plus $\alpha < 0$ et pour un $\beta > 0$ on a $0 < \mathbb{E}\|B_1\|^\beta < \infty$, alors la série $R = \sum_{k=1}^\infty A_1A_2\cdots A_{k-1}B_k$ converge presque sûrement et sa loi est la solution stationnaire de (5.1).*
2. *Si de plus les conditions suivantes sont satisfaites :*
   - *(i) le semi-groupe Γ_μ engendré par le support S_μ de la loi μ de A_1 vérifie la condition i-p, et est dilatant,*
   - *(ii) le semi-goupe Γ_μ ne laisse pas de cône convexe fermé saillant d'intérieur non vide invariant,*
   - *(iii) pour tout vecteur colonne x de $\mathbb{R}^d$, on a $\mathbb{P}(A_1x + B_1 = x) < 1$,*

alors il existe un unique κ *dans* $]0,\sigma]$ *vérifiant* $k(\kappa)=1$.
Si de plus $\kappa<\sigma$, $\int \|a\|^\sigma \log|\det(g)|\mu(da) > -\infty$, *et* $\mathbb{E}\|B_1\|^\kappa < +\infty$, *alors on a pour tout vecteur* x *de* $\mathbb{S}^{d-1}$

$$\lim_{t\to\infty} t^\kappa \mathbb{P}(xR>t) = \ell e_\kappa(\bar{x}),$$

où ℓ *est une constante strictement positive et* e_κ *est la fonction propre donnée par le théorème 21.*

Le premier point est le même que dans [47]. Il assure l'existence et l'unicité de la loi stationnaire sur $\mathbb{R}^d$.

On a remplacé la condition de récurrence $2(i)$ par la condition i-p et la condition que Γ_μ ne laisse pas de cône convexe fermé saillant d'intérieur non vide invariant. Sous la condition i-p, cette dernière propriété est équivalente à l'unicité de l'ensemble minimal Γ-invariant sur la sphère. Ceci permet d'assurer l'unicité de la mesure invariante de l'opérateur $\mathcal{Q}^s$ sur la sphère, la condition i-p n'imposant que l'unicité de cette mesure sur l'espace projectif (voir corollaire 5.1). C'est cette unicité qui assure que la limite obtenue sera non nulle dans toutes les directions.

Les conditions (i) et (ii) sont plus faibles que la condition $2(i)$ de [47] comme le montre l'exemple 2 du paragraphe 5.2.4 : la chaîne de Markov construite à partir de la mesure $\mu=\frac{1}{2}(\delta_a+\delta_{a'})$ ne visite pas tous les ouverts quand elle part d'un vecteur positif ou négatif. Pourtant il y a bien un unique fermé Γ-invariant minimal sur la sphère. Ici encore, le cas des matrices positives est exclu, ce théorème doit donc être considéré comme le complément de celui de [44]. Par ailleurs, sous la condition i-p, dans le cas où il existe un cône invariant, on conjecture que la démonstration de Kesten s'adapte, ce cas étant sensiblement identique à celui des matrices positives.

La condition sur les matrices μ-réalisables a disparu. Ici, cette notion est remplacée par l'appartenance à Γ_0 qui désigne la même propriété. L'hypothèse de densité du sous-groupe engendré par les rayons spectraux des matrices proximales est en fait vérifiée automatiquement sous la condition i-p par la proposition 5.3.

L'hypothèse de non existence de point fixe presque sûr est inchangée. Enfin, on donne un autre critère d'existence d'un exposant critique κ lié à la convexité, et la conclusion est identique à celle de [47]. En particulier, on a la même limite dans les deux directions opposées.

5.4.2 Un premier exemple en dimension 2

En dimension $d=2$, prenons une suite (A_n,B_n) iid telle que B_n soit un vecteur gaussien centré réduit et (A_n) suive la loi $\mu=\frac{1}{2}(\delta_a+\delta_{a'})$, où

$$a=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a'=\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Toutes les conditions d'intégrabilité sont donc vérifiées.

Les valeurs propres de a sont 2 et 1, et les espaces propres correspondants sont $E_+ = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0\}$ et $E_- = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0\}$. Les valeurs propres de a' sont $-\frac{1}{10} \pm \frac{2}{2\sqrt{5}}$ et E_+ et E_- ne sont pas des espaces propres de a', donc on est bien dans le cadre de la proposition 5.4. Ainsi le semi-groupe Γ engendré par le support de μ vérifie la condition i-p. De plus, a est positive et b négative, donc d'après l'exemple 2 du paragraphe 5.2.4 et la proposition 5.2, Γ ne préserve pas de cône convexe fermé saillant d'intérieur non vide.

Comme A_1 est à support fini mais pas B_1, l'application $x \longmapsto A_1 x + B_1$ ne peut avoir de point fixe presque sûr.

Comme on a choisi la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, la norme matricielle associée est caractérisée par $\|a\|^2 = \rho(a^t a)$. Ici, on a donc $\|a\|^2 = 3 + \sqrt{5} = 5.24$ et $\|a'\|^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{50} = 0.10$. Donc $\mathbb{E}\log(A_1) = \frac{1}{4}\log\|a\|^2 + \frac{1}{4}\log\|a'\|^2 < 0$ (sa valeur est environ -0.15). On a donc bien $\alpha < 0$ et l'existence d'une solution stationnaire.

Enfin, le rayon spectral de a vaut 2 qui est strictement plus grand que 1, donc Γ_μ est dilatant et il existe un exposant $\kappa > 0$ tel que $k(\kappa) = 1$. Ainsi, toutes les hypothèses du théorème 5.1 sont vérifiées. Comme on l'a dit plus haut, cet exemple ne rentre pas dans le cadre du théorème 13.

5.4.3 L'exemple de [44]

Dans [44], H. Kesten pose le problème suivant, que son théorème ne permet pas de résoudre :

> En dimension $d = 2$, on fixe m_1 et m_2 deux matrices à coefficients strictement positifs telles que $\log\rho(m_1)$ et $\log\rho(m_2)$ engendrent un sous-goupe dense dans $\mathbb{R}$. Soit $m_3 = r_\theta$ une rotation d'angle θ et μ la mesure $\mu = p_1\delta_{m_1} + p_2\delta_{m_2} + p_3\delta_{m_3}$ avec $p_i > 0$ et $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Est-ce-que cette mesure donne une loi invariante à queue polynômiale ?

Ce problème ne rentre pas dans le cadre du théorème de Kesten (théorème 11) puisqu'une matrice de rotation n'est pas positive sauf si c'est l'identité, c'est à dire la rotation triviale. On va montrer qu'à l'exception des angles θ congrus à 0 modulo $\frac{\pi}{2}$, le semi-groupe Γ engendré par les trois matrices ci-dessus vérifie la condition i-p, donc rentre dans le cadre du théorème 5.1 (sous des condition d'irrationnalité de l'angle de la rotation pour avoir un unique ensemble limite sur la sphère). On donnera aussi un contre-exemple pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Irréductibilité

Si l'angle θ n'est pas congru à 0 modulo π, alors la matrice r_θ n'a pas de sous-espace propre réel, donc par conséquent elle ne laisse aucun sous-espace non trivial stable. Il en est donc de même pour le semi-groupe Γ qui est ainsi irréductible.

Proximalité

Comme m_1 et m_2 sont des matrices à coefficients strictement positifs, d'après le théorème de Perron Frobenius (théorème 4) leur rayon spectral est une valeur propre

simple. Donc m_1 et m_2 ont chacune deux valeurs propres réelles, qui sont de module distinct, sauf si l'opposé du rayon spectral est aussi valeur propre. Mais ce cas est exclu, puisqu'alors la trace de la matrice serait nulle, ce qui est impossible puisque ses coefficients sont strictement positifs. Ainsi, m_1 et m_2 sont des matrices proximales.

Soient E_+ et E_- les espaces propres de m_1, E_+ correspondant à la valeur propre dominante. Soient v et w dans $\mathcal{P}^{d-1}$ et x et y une de leurs préimages dans $\mathbb{S}^{d-1}$.

Si $x \notin E_-$ et $y \notin E_-$, alors vm_1^n et wm_1^n convergent vers $p_+(m_1)$, donc la suite $\delta_{\mathcal{P}}(vm_1^n, wm_1^n)$ tend vers 0.

Si $x \in E_-$ et $y \in E_-$, alors $v = w$.

Si $x \notin E_-$ et $y \in E_-$, alors ou bien xr et yr ne sont pas dans E_-, ou bien xr^2 et yr^2 ne sont pas dans E_-, à condition que θ ne soit pas congru à 0 modulo $\frac{\pi}{2}$. Donc on peut conclure comme dans le premier cas : $\delta_{\mathcal{P}}(vrm_1^n, wrm_1^n)$ ou $\delta_{\mathcal{P}}(vr^2m_1^n, wr^2m_1^n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On a la même conclusion si E_- n'est pas un espace propre de m_2 (voir la preuve de la proposition 5.4).

Donc si θ n'est pas congru à 0 modulo $\frac{\pi}{2}$, ou si E_- n'est pas un espace propre de m_2, le semi-groupe Γ agit de manière proximale sur l'espace projectif, et on peut appliquer le théorème 5.1.

Fermés invariants sur la sphère
Si $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel, les orbites des points par la rotation sont denses dans la sphère, donc on a pour tout v dans l'espace projectif $\mathcal{P}^{d-1} = \mathcal{F}_{\mathcal{P}}\{vr^n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset L(\Gamma)$ (proposition 19). Ainsi $L(\Gamma) = \mathcal{P}^{d-1}$ et par la proposition 5.2, Γ a un unique fermé invariant minimal sur la sphère. On a le même résultat si $\frac{\theta}{\pi}$ est rationnel de la forme $\frac{2k+1}{n}$, puisqu'alors pour tout x dans la sphère on a $r^n x = -x$, donc tout fermé Γ-invariant est symétrique.

Remarque La condition sur les rayon spectraux des matrices m_1 et m_2 n'a pas été utilisée (voir proposition 5.3).

Contre-exemple pour $\theta = \frac{\pi}{2}$
Dans ce cas, il se peut que le semi-groupe engendré par nos trois matrices ne vérifie pas la condition i-p. En effet, si on choisit

$$m_1 = \begin{pmatrix} \frac{e^1+1}{2} & \frac{e^1-1}{2} \\ \frac{e^1-1}{2} & \frac{e^1+1}{2} \end{pmatrix}, \qquad m_2 = \begin{pmatrix} \frac{e^\pi+1}{2} & \frac{e^\pi-1}{2} \\ \frac{e^\pi-1}{2} & \frac{e^\pi+1}{2} \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors on a $\rho(m_1) = e^1$, $\rho(m_2) = e^\pi$, donc $\log \rho(m_1)$ et $\log \rho(m_2)$ engendrent bien un sous-groupe dense dans $\mathbb{R}$. Mais la réunion des deux espaces $\{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2\}$ et

$\{(x_1, x_2) \mid x_1 = -x_2\}$ est stable par m_1, m_2 et r, donc le semi-groupe Γ n'est pas fortement irréductible. Il ne vérifie donc pas la condition i-p. Dans ce cas on ne peut pas répondre à la question de [44].

Dans toute la suite, on supposera les hypothèses du théorème 5.1 vérifiées. Notons qu'elles vont nous permettre d'utiliser les théorèmes 21 et 24. La démonstration se déroule en cinq étapes détaillées dans les sections suivantes. Ce sont les mêmes étapes que dans les chapitre précédents. Dans la partie 5.5, on obtient l'équation de renouvellement associée à ce problème. Dans la partie 5.6, on étudie l'opérateur qui apparaît dans l'équation de renouvellement. Dans la partie 5.7, on lui applique le théorème de renouvellement 12. Enfin les parties 5.8 et 5.9 sont consacrées à la preuve que le limite obtenue est non nulle.

5.5 L'équation de renouvellement

Cette étape est identique à celle de [47] ainsi qu'à celles déjà présentées dans les chapitres 2, 3 et 4. Pour utiliser le théorème 12, on commence par chercher une équation de renouvellement vérifiée par la régularisée :

$$z(x,t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xR > u) du.$$

On note $R_1 = \sum_{k=2}^{\infty} A_2 \cdots A_{k-1} B_k$. On a $R = A_1 R_1 + B_1$, et R_1 est indépendant de (A_1, B_1) et de même loi que R. Donc pour tous (x,t) dans $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{P}(xR > t) = \mathbb{P}(xA_1R_1 + xB_1 > t) = \mathbb{P}(xA_1R_1 > t) + \psi(x,t),$$

où $\psi(x,t) = \mathbb{P}(t - xB_1 < xA_1R_1 \leq t) - \mathbb{P}(t < xA_1R_1 \leq t - xB_1)$. On note encore g sa régularisée : $g(x,t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \psi(x,u) du$. Ainsi,

$$z(x,t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xA_1R_1 > u) du + g(x,t). \tag{5.4}$$

En utilisant le théorème de Fubini, l'indépendance de A_1 et R_1 et le fait que R_1 et R sont de même loi, il vient, grâce à un changement de variable :

$$\begin{aligned}
e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xA_1R_1 > u) &= \mathbb{E}\big(e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{1}_{xA_1R_1 > u} du\big) \\
&= \mathbb{E}\Big[\|xA_1\|^\kappa \int e^{-(t - \log\|xA_1\|)} \int_0^{e^{t-\log\|xA_1\|}} u^\kappa \mathbb{1}_{x\cdot A_1R_1 > u} du\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\|xA_1\|^\kappa e^{-(t-\log\|xA_1\|)} \int_0^{e^{t-\log\|xA_1\|}} u^\kappa \mathbb{P}(x\cdot A_1R > u) du\Big] \\
&= \mathbb{E}\big[\|xA_1\|^\kappa z(x\cdot A_1, t - \log\|xA_1\|)\big],
\end{aligned}$$

avec $x \cdot A = \frac{xA}{\|xA\|}$. Ainsi on a :

$$z(x,t) = \mathbb{E}\big[\|xA_1\|^\kappa z(x\cdot A_1, t - \log\|xA_1\|)\big) + g(x,t)].$$

Comme dans la chapitre précédent, on note ${}^{13}\mathcal{Q} = {}^{13}\mathcal{Q}^{\kappa}$ l'extension de Q^{κ} à $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$ {}^{13}\mathcal{Q}f(x,t) = \frac{1}{e_{\kappa}(\bar{x})} \int \|xa\|^{\kappa} e_{\kappa}(\bar{x}a) f(x \cdot a, t - \log \|xa\|) \mu(da). $$

On pose maintenant $Z(x,t) = z(x,t)e_{\kappa}(\bar{x})^{-1}$ et $G(x,t) = g(x,t)e_{\kappa}(\bar{x})^{-1}$. On obtient donc l'équation de renouvellement suivante :

$$ Z(x,t) = {}^{13}\mathcal{Q}Z(x,t) + G(x,t). \tag{5.5} $$

En itérant cette équation, il vient :

$$ Z(x,t) = {}^{13}\mathcal{Q}^{n+1}Z(x,t) + \sum_{k=0}^{n} {}^{13}\mathcal{Q}^{k}G(x,t). $$

Soit $F(x,t) = \mathbb{P}(xR > t)$. On a de même que pour l'équation (5.4)

$$ \begin{aligned} {}^{13}\mathcal{Q}^{n+1}Z(x,t) &= \frac{1}{e_{\kappa}(\bar{x})} \mathbb{E}\Big[e^{-t} \int_0^{e^t} u^{\kappa} F(xA_1A_2 \cdots A_{n+1}, u) e_{\kappa}(\bar{x}A_1A_2 \cdots A_{n+1}) du \Big] \\ &= \frac{1}{e_{\kappa}(\bar{x})} e^{-t} \int_0^{e^t} u^{\kappa} \mathbb{E}\big[F(xA_1A_2 \cdots A_{n+1}, u) e_{\kappa}(\bar{x}A_1A_2 \cdots A_{n+1}) \big] du \end{aligned} $$

Or pour tout $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, on a $\lim \|xA_1 \cdots A_n\| = 0$ car $\alpha < 0$. Donc pour tout $u > 0$, on a par convergence dominée, $\lim \mathbb{E}\big[F(xA_1A_2 \cdots A_{n+1}, u) e_{\kappa}(\bar{x}A_1A_2 \cdots A_{n+1})\big] = 0$ puisque e_{κ} est bornée. Ainsi, il vient $\lim {}^{13}\mathcal{Q}^{n+1}Z(x,t) = 0$. On a donc

$$ Z(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} {}^{13}\mathcal{Q}^{k}G(x,t). \tag{5.6} $$

C'est une formule analogue à celle obtenue au chapitre 1 reliant la solution de l'équation de renouvellement à la fonction de renouvellement.

On veut maintenant appliquer le théorème de renouvellement de Kesten à cette équation. Ce sera la deuxième étape de notre démonstration. Mais avant cela, on a besoin de préciser quelques propriétés de l'opérateur $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{\kappa}$, restriction de ${}^{13}\mathcal{Q}$ à la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$.

5.6 Propriétés de l'opérateur $\mathcal{Q}$ sur la sphère

L'opérateur $\mathcal{Q}$ sur $\mathbb{S}^{d-1}$ est la restriction de ${}^{13}\mathcal{Q}$ à la sphère. Il est défini par :

$$ \mathcal{Q}f(x) = \frac{1}{e_{\kappa}(\bar{x})} \int \|xa\|^{\kappa} e_{\kappa}(\bar{x}a) f(x \cdot a) \mu(da). $$

C'est aussi l'extension naturelle de Q^{κ} à la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$. Nous allons montrer qu'il en possède certaines propriétés analogues.

5.6.1 Unicité de la mesure invariante

Le théorème 24 dit que l'opérateur Q^κ sur $\mathcal{P}^{d-1}$ a une unique probabilité invariante π^κ. On va montrer que c'est encore vrai pour l'opérateur $\mathcal{Q}$ sur $\mathbb{S}^{d-1}$. On commence par rappeler une propriété donnée dans [33].

Lemme 15 *Soit X un espace métrique compact et Q un opérateur Markovien préservant $\mathcal{C}(X)$, l'ensemble des fonctions continues sur X. On suppose que pour toute fonction φ dans $\mathcal{C}(X)$, la suite $(Q^n\varphi)$ est équicontinue et que les seules fonctions Q-invariantes continues sont les constantes. Alors Q admet une unique probabilité invariante.*

L'opérateur $\mathcal{Q}$ est bien Markovien et il préserve les fonctions continues sur $\mathbb{S}^{d-1}$. Comme dans la partie 5.3, on définit la fonction q sur $\mathbb{S}^{d-1} \times S_\mu$ par

$$q(x,a) = \frac{\|xa\|^\kappa e_\kappa(\bar{x}a)}{e_\kappa(\bar{x})}.$$

Remarquons que par définition q ne dépend pas du signe de x. C'est donc exactement la même fonction que q^κ sur l'espace projectif. On a aussi

$$q_n(x,\omega) = q(x,a_1)q(xa_1,a_2)\cdots q(xa_1\cdots a_{n-1},a_n) = q(x,a_1\cdots a_n).$$

Commençons par montrer la propriété d'équicontinuité. Comme la fonction q sur la sphère est la même que sur l'espace projectif, on peut directement utiliser le résultat suivant de [33].

Lemme 16 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous x, x' dans $\mathbb{S}^{d-1}$, on ait*

$$|q(x,a) - q(x',a)| \le C\|x - x'\|^{\underline{\kappa}}\|a\|^\kappa,$$

où $\underline{\kappa} = \min\{1,\kappa\}$.

On en déduit la propriété d'équicontinuité.

Proposition 5.7 *Pour toute fonction φ continue sur $\mathbb{S}^{d-1}$, la suite $(\mathcal{Q}^n\varphi)$ est équicontinue.*

Démonstration

Par densité, il suffit de voir que cette propriété est vrai pour les fonctions φ qui sont ε-hőldériennes sur $\mathbb{S}^{d-1}$ avec $\varepsilon < \underline{\kappa}$. Soit une telle fonction φ, on note $[\varphi]_\varepsilon$ son coefficient de Hőlder et on a, pour tous x, x' dans $\mathbb{S}^{d-1}$

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{Q}^n\varphi(x) - \mathcal{Q}^n\varphi(x')| \\
&\quad\le\ |\varphi| \int |q(x,a) - q(x',a)|\mu^n(da) + [\varphi]_\varepsilon \int q(x',a)\|x\cdot a - x'\cdot a\|^\varepsilon \mu^n(da) \\
&\quad\le\ C\|x - x'\|^\varepsilon \int \|a\|^\kappa \mu^n(da).
\end{aligned}$$

En effet, on utilise le lemme 16 et la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \|xa\|\|x'a\|(x'\cdot a - x\cdot a) &= x'a(\|xa\| - \|x'a\|) + \|x'a\|(x'a - xa) \\ \|xa\|\|x'a\|\|x'\cdot a - x\cdot a\| &\leq \|x'a\|\big|\|xa\| - \|x'a\|\big| + \|x'a\|\|x'a - xa\| \\ &\leq 2\|x'a\|\|(x-x')a\|. \end{aligned}$$

Donc il vient

$$\|x'\cdot a - x\cdot a\| \leq \frac{2}{\|xa\|}\|(x-x')a\|. \tag{5.7}$$

Et d'autre part on a $q(x,a) \leq C\|xa\|^\kappa$ par définition de q.

Or le lemme 13 rappelé précédemment dit que $\int \|a\|^\kappa \mu^n(da) \leq ck^n(\kappa)$, et ici $k(\kappa) = 1$ par définition de κ, donc on a

$$|\mathcal{Q}^n\varphi(x) - \mathcal{Q}^n\varphi(x')| \leq C\|x - x'\|^\varepsilon$$

ce qui prouve l'équicontinuité. □

Montrons maintenant que les seules fonctions $\mathcal{Q}$-invariantes sont les constantes.

Proposition 5.8 *Si Γ_μ vérifie la condition i-p, l'ensemble des solutions continues sur la sphère de l'équation*

$$f(x) = \int \|xa\|^\kappa f(x\cdot a)\mu(da) \tag{5.8}$$

est de dimension 1 *ou* 2. *Il est de dimension* 1 *si et seulement si il existe un unique fermé Γ_μ-invariant minimal sur la sphère.*

Démonstration

L'équation (5.8) est équivalente à $\mathcal{P}f = f$ où $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\kappa$ est l'extension de l'opérateur P^κ à la sphère :

$$\mathcal{P}f(x) = \int \|xa\|^\kappa f(x\cdot a)\mu(da).$$

Cette équation a toujours au moins une solution continue sur la sphère : c'est $f(x) = e_\kappa(\bar{x})$, d'après le théorème 21 puisque $k(\kappa) = 1$. Cette solution est continue, symétrique et strictement positive sur la sphère.

Soit φ une autre solution de l'équation (5.8). Alors, on a :

$$\frac{\varphi(x)}{e_\kappa(\bar{x})} = \frac{1}{e_\kappa(\bar{x})}\int \|xa\|e_\kappa(\bar{x}a)\frac{\varphi(x\cdot a)}{e_\kappa(\bar{x}a)}\mu(da).$$

On appelle Z_- et Z_+ respectivement l'ensemble où la fonction φe_κ^{-1} atteint son minimum et son maximum sur le sphère. D'après l'équation ci-dessus, ces deux ensembles sont des fermés Γ_μ-invariants de la sphère. Donc s'il existe un unique fermé Γ_μ-invariant minimal, il est contenu dans Z_- et Z_+ qui sont donc d'intersection non vide. En particulier, la fonction φe_κ^{-1} est constante, donc l'espace des solutions est

de dimension 1.

On se place maintenant dans le cas où il existe F_1 et F_2 deux fermé minimaux Γ_μ-invariants. Le théorème de Markov-Kakutani donne alors deux probabilités π_1 et π_2 distinctes invariantes pour l'opérateur markovien $\mathcal{Q}$ sur la sphère, respectivement portées par F_1 et F_2. Comme f est une fonction $\mathcal{Q}$-invariante continue si et seulement si ${f e_\kappa}^{-1}$ est solution continue de l'équation (5.8), et que l'opérateur $\mathcal{Q}$ vérifie la propriété d'équicontinuité par la proposition 5.7, si l'ensemble des solutions de l'équation (5.8) est de dimension 1, alors par le lemme 15 il existe une unique probabilité invariante, ce qui est impossible. Donc l'espace des solutions est de dimension au moins 2.

Soient φ et ψ deux solutions continues non nulles de l'équation (5.8). On peut les décomposer en partie paire et partie impaire. Soit $\check{\varphi}$ la fonction définie par $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ sur la sphère. Alors on a :

$$\varphi = \frac{\varphi + \check{\varphi}}{2} + \frac{\varphi - \check{\varphi}}{2},$$

et de même pour ψ. On remarque que si φ est solution de l'équation (5.8), alors $\check{\varphi}$ l'est aussi, donc les parties paires et impaire de φ et ψ sont solution. On peut donc se limiter à regarder les solutions paires et les solutions impaires.

Soit φ une solution paire de l'équation (5.8). En raisonnaant comme dans le premier cas, on voit que les ensembles où φe_κ^{-1} atteint son maximum et son minimum sont des fermés Γ_μ-invariants. De plus, ils sont chacun symétriques puisque cette fonction est paire. Ils contiennent donc tous deux F_1 et F_2. Donc φ est un multiple de e_κ.

Soient maintenant φ et ψ deux solutions impaires non nulles de l'équation (5.8). Soit Z_1 l'ensemble des points où φ atteint son maximum. Son symétrique $-Z_1$ est alors l'ensemble des points où φ atteint son minimum. Ces deux ensembles sont des fermés Γ_μ-invariants de la sphère, donc l'un contient F_1 et l'autre F_2. Quite à changer φ en $-\varphi$, on peut supposer que Z_1 contient F_1. En particulier, φ est constante égale à son maximum m_1 sur F_1. Quite à changer ψ en $-\psi$, on peut aussi supposer que ψ est égale à son maximum m_2 sur F_1. La fonction $m_2\varphi - m_1\psi$ est alors impaire et solution de l'équation (5.8). Donc quite à changer son signe, elle est aussi égale à son maximum sur F_1. Or par construction, elle vaut 0 sur F_1, c'est donc la fonction nulle sur la sphère, et φ et ψ sont multiples l'une de l'autre.

Ainsi, si on a deux fermés minimaux inavriants, l'ensemble des solutions paires est de dimension 1 et l'ensemble des solutions impaires de dimension au plus 1, donc par ce qui précède l'ensemble des solutions est bien de dimension exactement 2. □

Comme f est une fonction $\mathcal{Q}$-invariante continue si et seulement si ${f e_\kappa}^{-1}$ est une solution continue de l'équation (5.8) on en déduit immédiatement le corollaire suivant grâce à la proposition 5.2.

Corollaire 5.1 *Si le semi-groupe Γ_μ ne laisse pas invariant un cône convexe fermé saillant d'intérieur non vide, alors les seules fonctions $\mathcal{Q}$-invariantes continues sont les constantes.*

On peut maintenant conclure, en utilisant le lemme 15.

Théorème 5.2 *L'opérateur $\mathcal{Q}$ a une unique probabilité invariante π sur $\mathbb{S}^{d-1}$.*

Cette probabilité possède une propriété de symétrie sur la sphère. C'est la relevée de π^κ, l'unique probabilité Q^κ-invariante sur l'espace projectif.

Corollaire 5.2 *L'unique probabilité $\mathcal{Q}$-invariante π est symétrique sur $\mathbb{S}^{d-1}$.*

Démonstration

Soit $\check{\pi}$ la mesure symétrique de π sur $\mathbb{S}^{d-1}$: pour tout $\mathcal{A}$ borélien de $\mathbb{S}^{d-1}$, on a $\check{\pi}(\mathcal{A}) = \pi(-\mathcal{A})$. Alors pour toute fonction f borélienne bornée sur la sphère, on a $\int f(x)\check{\pi}(dx) = \int f(-x)\pi(dx)$. Posons $\check{f}(x) = f(-x)$. En particulier, comme π est $\mathcal{Q}$-invariante, on a :

$$\begin{aligned}
\int f(x)\check{\pi}(dx) &= \int f(-x)\pi(dx) = \int \check{f}(x)\pi(dx) = \int \mathcal{Q}\check{f}(x)\pi(dx) \\
&= \int \frac{1}{e_\kappa(\bar{x})} \int \|xa\|^\kappa \check{f}(x\cdot a)\mu(da)\pi(dx) \\
&= \int \frac{1}{e_\kappa(\bar{x})} \int \|xa\|^\kappa f(-x\cdot a)\mu(da)\pi(dx) \\
&= \int \frac{1}{e_\kappa(-\bar{x})} \int \|-xa\|^\kappa f(-x\cdot a)\mu(da)\pi(dx) \\
&= \int \mathcal{Q}f(-x)\pi(dx) = \int \mathcal{Q}f(x)\check{\pi}(dx).
\end{aligned}$$

Donc $\check{\pi}$ est aussi une probabilité $\mathcal{Q}$ sur la sphère, et par unicité de la mesure invariante, on en déduit que $\check{\pi} = \pi$ et π est donc symétrique. □

Il en résulte aussi que le support de π est l'unique fermé Γ_μ-invariant minimal sur la sphère, puisque l'ensemble limite $L(\Gamma_\mu)$ est le support de π^κ sur l'espace projectif.

5.6.2 Ergodicité

De même qu'au paragraphe 5.3, pour tout x dans $\mathbb{S}^{d-1}$, on définit sur Ω_1 les probabilités $\mathcal{Q}_x$ comme étant celles dont les projections sur les facteurs $(S_\mu)^{\otimes n}$ sont données par $q_n(x,\omega)d\mu^{\otimes n}(\omega)$, où $\omega = (a_k)_{k>0}$ et

$$q_n(x,\omega) = q(x,a_1)q(xa_1,a_2)\cdots q(xa_1\cdots a_{n-1},a_n) = q(x,a_1\cdots a_n).$$

Définition 36 *Le décalage θ sur Ω_1 est dit $q\otimes\mu$-*ergodique *si pour toute fonction F borélienne sur Ω_1 et vérifiant $F\circ\theta = F$ il existe une constante $c\in\mathbb{R}$ telle que $F = c$ $\mathcal{Q}_x$-presque sûrement pour tout x dans $\mathbb{S}^{d-1}$.*

On rappelle une condition suffisante donnée dans [33] pour avoir la propriété de $q \otimes \mu$-ergodicité.

Proposition 20 *Supposons que le noyau markovien $\mathcal{Q}_x$ soit continu en variation. Alors le décalage θ sur Ω_1 est $q \otimes \mu$-ergodique dès que la condition suivante est réalisée : les seules solutions φ continues sur $\mathbb{S}^{d-1}$ de l'équation $\mathcal{Q}\varphi = \varphi$ sont les constantes.*

Soit π l'unique mesure $\mathcal{Q}$-invariante sur $\mathbb{S}^{d-1}$ donnée par le théorème 5.2. On définit la probabilité $\mathcal{Q}_\pi$ sur Ω_1 par $\mathcal{Q}_\pi = \int \mathcal{Q}_x \pi(dx)$. On a alors le résultat suivant.

Théorème 5.3 *La probabilité $\mathcal{Q}_\pi$ est ergodique : pour toute fonction f borélienne sur Ω_1 et vérifiant $f \circ \theta = f$ il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $f = c$ $\mathcal{Q}_\pi$-presque sûrement.*

Démonstration

Soit $\omega = (a_k)_{k>0}$ et f une fonction mesurable bornée ne dépendant que des n premières coordonnées. On a

$$\mathcal{Q}_x(f) = \int f(\omega) q(x, a_1 \cdots a_n) \mu(da_1) \cdots \mu(da_n).$$

On applique le lemme 16. Il vient :

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}_x(f) - \mathcal{Q}_{x'}(f)| &\leq \int |f(\omega)| \, |q(x, a_1 \cdots a_n) - q(x', a_1 \cdots a_n)| \mu(da_1) \cdots \mu(da_n) \\ &\leq C|f|_\infty \int \|x - x'\|^{\underline{\kappa}} \|a_1 \cdots a_n\|^\kappa \mu(da_1) \cdots \mu(da_n) \\ &\leq C|f|_\infty \|x - x'\|^{\underline{\kappa}} k^n(\kappa), \end{aligned}$$

par le lemme 13. Donc pour la norme en variation on a $\|\mathcal{Q}_x - \mathcal{Q}_{x'}\| \leq C\|x - x'\|^{\underline{\kappa}}$, puisque $k(\kappa) = 1$, d'où la continuité en variation de $\mathcal{Q}_x$. Par la proposition 20 et le fait que les seules fonctions $\mathcal{Q}$-invariantes continues sur $\mathbb{S}^{d-1}$ soient les constantes, on en déduit que le décalage θ est $q \otimes \mu$-ergodique.

Soit maintenant une fonction F borélienne bornée sur Ω_1 et vérifiant $F \circ \theta = F$. Alors il existe une constante c telle que $F = c$ $\mathcal{Q}_x$-presque sûrement pour tout x dans $\mathbb{S}^{d-1}$. On a donc

$$\mathcal{Q}_\pi(|F - c|) = \int \mathcal{Q}_x(|F - c|) \pi(dx) = 0,$$

et ainsi $F = c$ $\mathcal{Q}_\pi$-presque sûrement. □

5.7 Application du théorème de renouvellement

On définit la suite (X_n, U_n) sur $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$X_n = X_0 \cdot A_1 A_2 \cdots A_n, \qquad U_n = \log \frac{\|X_0 A_1 \cdots A_{n+1}\|}{\|X_0 A_1 \cdots A_n\|} = \log \|X_n \cdot A_{n+1}\|.$$

La suite (X_n) est une chaîne de Markov de probabilité de transition $\mathcal{Q}$. On veut vérifier que la suite (X_n, U_n) satisfait les conditions d'application du théorème 12. Pour cela, on calcule la probabilité :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_i \in \mathcal{A}_i,\ 0 \le i \le n,\ U_j \in \mathcal{B}_j, 0 \le j < n \mid X_0 = x_0) \\
&= \frac{1}{e_\kappa(\bar{x}_0)} \int \|x_0 a_1 \cdots a_n\| e_\kappa(\bar{x}_0 a_1 \cdots a_n) \mathbb{1}_{\mathcal{A}_0}(x_0) \cdots \mathbb{1}_{\mathcal{A}_n}(x_0 \cdot a_1 \cdots a_n) \\
&\quad \times \mathbb{1}_{\mathcal{B}_0}\Big(\log \frac{\|x_0 a_1\|}{\|x_0\|}\Big) \cdots \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{n-1}}\Big(\log \frac{\|x_0 a_1 \cdots a_n\|}{\|x_0 a_1 \cdots a_{n-1}\|}\Big) \mu(da_1) \cdots \mu(da_n) \\
&= \mathbb{1}_{\mathcal{A}_0}(x_0) \int_{\mathcal{A}_1} Q(x_0, dx_1) \int \ldots \int_{\mathcal{A}_n} Q(x_{n-1}, dx_n) \prod_{i=0}^{n-1} F_{x_i}^{x_{i+1}}(\mathcal{B}_i), \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

où $F_x^y(\mathcal{B}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\mathcal{B}}(y)\mathbb{1}_{y=\log\|xA_1\|})$ est bien de la forme requise pour le théorème de Kesten. On note $\mathcal{Q}_{x_0,0}$ la mesure sur $S_\mu^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}$ ainsi définie, et $\mathbb{E}_{x_0,0}^\kappa$ l'espérance correspondante comme dans la partie 4.3.2.

Ici on a $V_n = \log\|X_0 A_1 \cdots A_n\|$ et l'équation de renouvellement (5.6) peut se récrire sous la forme :

$$Z(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_{x,0}^\kappa G(X_n, t - V_n). \qquad (5.10)$$

On est donc bien dans le cadre du théorème 12 de Kesten. Pour l'appliquer, il faut prouver que les conditions I1 à I4 sont vérifiées, et que G est directement Riemann intégrable. C'est ce qu'on va faire dans les paragraphes qui suivent.

5.7.1 Preuve de la condition I1

C'est une nouvelle démonstration inspirée de [47] où on remplace l'utilisation de la propriété de récurrence $2(i)$ par la condition i-p.

Soient π l'unique probabilité $\mathcal{Q}$-invariante sur $\mathbb{S}^{d-1}$ donnée par le théorème 5.2, et $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{S}^{d-1}$ tel que $\pi(\mathcal{U}) > 0$. Il existe une fonction φ continue sur $\mathbb{S}^{d-1}$ telle que $\mathbb{1}_{\mathcal{U}} \ge \varphi \ge 0$ et $\pi(\varphi) > 0$. Or pour tout x sur la sphère on a la convergence :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{Q}_x^j(\varphi) \longrightarrow \pi(\varphi) > 0.$$

En effet, toutes les valeurs d'adhérence de la série $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathcal{Q}_x^j$ sont des probabilités $\mathcal{Q}$-invariantes sur $\mathbb{S}^{d-1}$, donc par unicité, la série converge vers π, la convergence étant uniforme sur $\mathbb{S}^{d-1}$ par l'équicontinuité de la proposition 5.7. Donc on peut trouver $\delta > 0$ et n_0 tels que

$$\inf_{x \in \mathbb{S}^{d-1}} \mathcal{Q}_x^{n_0}(\mathbb{1}_{\mathcal{U}}) \ge \inf_{x \in \mathbb{S}^{d-1}} \mathcal{Q}_x^{n_0}(\varphi) \ge \delta.$$

Le théorème de Borel Cantelli pour les chaînes de Markov (voir par exemple L. Breiman, [12]) dit alors que pour tout x dans $\mathbb{S}^{d-1}$ on a

$$\mathcal{Q}(\bigcup_{n\geq 1} x\cdot A_1\cdots A_n\in\mathcal{U}) = \mathcal{Q}_x(\bigcup_{n\geq 1} X_n\in\mathcal{U}) = 1,$$

ce qui achève la preuve de la condition I1.

5.7.2 Preuve de la condition I2

La première partie de la preuve est plus rapide que celle de [47] grâce au résultat d'ergodicité donné par le théorème 5.3.

La probabilité $\mathcal{Q}_\pi$ est ergodique d'après le théorème 5.3. La suite (A_n) est stationnaire sous cette probabilité et la suite $V_n = \log\|X_0A_1\cdots A_n\|$ est sous-additive. De plus, par hypothèse, on a $\int \big|\log\|a_1\|\big|\ \|a_1\|^\kappa\mu(da_1)<\infty$, donc $\mathbb{E}^\kappa_\pi(\log^+\|A_1\|)<\infty$ et on peut appliquer le théorème ergodique sous-additif de Kingman : la suite $\frac{V_n}{n}$ converge $\mathcal{Q}_\pi$-presque sûrement vers une constante γ. Et on a $\gamma=\mathbb{E}^\kappa_\pi(\log\|A_1\|)$, ce qui est bien de la formule souhaitée pour la condition I2.

Il reste donc maintenant à montrer que $\gamma>0$. On rejoint ici la preuve de [47]. Comme par hypothèse, $\lim\frac{1}{n}\log\|A_1\cdots A_n\|=\alpha<0$, on peut trouver $n_1>0$ tel que $\mathbb{E}\log\|A_1\cdots A_{n_1}\|<0$ par la loi des grands nombre. Le lemme de Fatou pour les suites uniformément intégrables (voir [14]) donne alors

$$\frac{d}{du}\mathbb{E}\|A_1\cdots A_{n_1}\|^u\Big|_{u=0} = \lim_{u\to 0}\frac{\mathbb{E}\|A_1\cdots A_{n_1}\|^u-1}{u}\leq \mathbb{E}\log\|A_1\cdots A_{n_1}\|<0.$$

Donc, comme la fonction $s\mapsto\mathbb{E}\|A_1\cdots A_{n_1}\|^s$ est convexe et vaut 1 en 0, on peut trouver $0<s<\kappa$ tel que $\mathbb{E}\|A_1\cdots A_{n_1}\|^s=e^{-\beta}<1$ pour un certain $\beta>0$. Ainsi par indépendance des A_i et sous-multiplicativité de la norme, on a, pour tout $n\geq 1$,

$$\mathbb{E}\|A_1\cdots A_n\|^s\leq Ke^{-\beta n}.$$

Donc, pour tout x dans $\mathbb{S}^{d-1}$, l'inégalité de Tchebychev donne

$$\mathbb{P}(\|xA_1\cdots A_n\|\geq e^{-\frac{\beta n}{2s}})\leq e^{\frac{\beta n}{2}}\mathbb{E}\|A_1\cdots A_n\|^s\leq Ke^{-\frac{\beta n}{2}},$$

et ainsi il vient

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Q}(\|xA_1\cdots A_n\|\leq e^{\frac{\beta n}{4\kappa}})\\
&= \frac{1}{e_\kappa(\bar{x})}\mathbb{E}\big[\|xA_1\cdots A_n\|^\kappa e_\kappa(\bar{x}A_1\cdots A_n\|);\ \|xA_1\cdots A_n\|\leq e^{\frac{\beta n}{4\kappa}}\big]\\
&\leq \frac{|e_\kappa|}{e_\kappa(\bar{x})}\Big(e^{-\frac{\beta n\kappa}{2s}}+\mathbb{E}\big]\|xA_1\cdots A_n\|^\kappa;\ e^{-\frac{\beta n}{2s}}\leq\|xA_1\cdots A_n\|\leq e^{\frac{\beta n}{4\kappa}}\big]\Big)\\
&\leq C(e^{-\frac{\beta n\kappa}{2s}}+Ke^{-\frac{\beta n}{2}}e^{\frac{\beta n}{4}}).
\end{aligned}$$

On a donc $\sum_n\mathcal{Q}(\|xA_1\cdots A_n\|\leq e^{\frac{\beta n}{4\kappa}})=\sum_n\mathcal{Q}_x(e^{V_n}\leq e^{\frac{\beta n}{4\kappa}})<\infty$, ce qui permet de conclure, par le lemme de Borel Cantelli, que $\gamma\geq\frac{\beta}{4\kappa}>0$, ce qui achève la preuve de la condition I2.

5.7.3 Preuve de la condition I3

Ici encore on suit le schéma de la preuve de [47], mais avec les outils de [33].

Soit $a \in \Gamma_0$ un élément proximal. Comme a est dans le semi-groupe Γ_μ, il existe un entier k tel que $a \in S_\mu^{\otimes k}$, i.e. $a = a_1 \cdots a_k$ avec $a_1, \dots a_k$ dans le support de μ. On appelle $a_+ \in \mathbb{S}^{d-1}$ un vecteur dominant de a dans la sphère. On a donc $a_+ \cdot a^n = \pm a_+$ et $\|a_+ a^n\| = \rho(a)^n$. Par ce qu'on a vu à la démonstration de la proposition 5.1, et par la proposition 5.2, a_+ est dans F, l'unique fermé Γ_μ-invariant minimal sur la sphère. En particulier, a_+ est dans le support de π l'unique mesure $\mathcal{Q}$-invariante sur la sphère. On peut donc trouver un voisinage $\mathcal{U}$ de a_+ dans $\mathbb{S}^{d-1}$ vérifiant $\pi(\mathcal{U}) > 0$.

Quite à restreindre $\mathcal{U}$, on peut supposer qu'il n'intersecte pas l'hyperplan répulsif de a. Donc pour tout $x \in \mathcal{U}$, on a

$$\left\| \frac{xa^n - \lambda^n a_+}{\lambda^n} \right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \qquad \frac{\|xa^n\|}{|\lambda|^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ est la valeur propre dominante de a. On sait de plus que λ est réelle. Quite à restreindre encore $\mathcal{U}$, on peut supposer que les convergences ci-dessus sont uniformes en x. On a alors :

$$\begin{aligned} \|x \cdot a^{2n} - a_+\| &= \left\| \frac{xa^{2n}}{\|xa^{2n}\|} - \frac{\lambda^{2n} a_+}{\lambda^{2n}} \right\| \\ &\le \left\| \frac{xa^{2n}}{\|xa^{2n}\|} - \frac{xa^{2n}}{|\lambda|^{2n}} \right\| + \left\| \frac{xa^{2n} - \lambda^{2n} a_+}{\lambda^{2n}} \right\| \\ &\le \left| 1 - \frac{\|xa^{2n}\|}{|\lambda|^{2n}} \right| + \left\| \frac{xa^{2n} - \lambda^{2n} a_+}{\lambda^{2n}} \right\|, \end{aligned}$$

donc pour $n \ge n_0$ assez grand il vient $\|x \cdot a^{2n} - a_+\| < \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, on a :

$$|\log \|xa^n\| - n \log \rho(a)| = \log \frac{\|xa^n\|}{|\lambda|^n},$$

donc pour $n \ge n_0$ assez grand il vient $|\log \|xa^n\| - n \log \rho(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme ces relations sont continues, on peut encore trouver un voisinage $\mathcal{W}_a$ de a dans $S_\mu^{\otimes k}$ tel que pour toute matrice a' dans $\mathcal{W}_a$ on ait $\|x \cdot a'^{2n} - a_+\| < \varepsilon$ et $|\log \|xa'^n\| - n \log \rho(a)| < \varepsilon$ pour tout $n \ge n_0$. Donc pour tout $n \ge n_0$ et pour tout x dans $\mathcal{U}$ on a :

$$\mathcal{Q}(\|x \cdot A_1 \cdots A_{2nk}\| < \varepsilon,\ |\log \|xA_1 \cdots A_{2nk}\| - 2n \log \rho(a)| < \varepsilon) > 0.$$

En prenant cette inégalité pour $n = n_0$ puis $n = n_0 + 1$, on obtient la condition I3 avec $m_1 = 2n_0 k$, $m_2 = 2(n_0 + 1)k$, $\tau = 2n_0 \log \rho(a)$ et $\zeta_n = 2 \log \rho(a)$. La suite (ζ_n) ainsi construite engendre un sous-groupe dense dans $\mathbb{R}$ par la proposition 5.3.

5.7.4 Preuve de la condition I4

La démonstration est exactement la même que dans [47], excepté pour le théorème invoqué à la fin.

Soient $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\varepsilon > 0$, et $\delta > 0$ qu'on précisera plus loin. On pose :

$$E(x,\delta,k) = \Big\{\omega \;\Big|\; \|xA_1\cdots A_l\| \geq \delta\|A_1\cdots A_l\|, \forall 1 \leq l \leq k\Big\},\ E(x,\delta) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(x,\delta,k).$$

Alors, si $\|y-x\| < \delta\delta_1$ et $\omega = (a_k) \in E(x,\delta,k)$, on a :

$$\begin{aligned}
(1-\delta_1)\|xa_1\cdots a_k\| &\leq \|xa_1\cdots a_k\| - \|x-y\|\frac{\|xa_1\cdots a_k\|}{\delta} \\
&\leq \|xa_1\cdots a_k\| - \|x-y\|\|a_1\cdots a_k\| \\
&\leq \|ya_1\cdots a_k\| \\
&\leq \|xa_1\cdots a_k\| + \|x-y\|\|a_1\cdots a_k\| \\
&\leq \|xa_1\cdots a_k\| + \delta\delta_1\|a_1\cdots a_k\| \\
&\leq (1+\delta_1)\|xa_1\cdots a_k\|. \qquad (5.11)
\end{aligned}$$

De plus, l'inégalité (5.7) donne :

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{ya_1\cdots a_k}{\|ya_1\cdots a_k\|} - \frac{xa_1\cdots a_k}{\|xa_1\cdots a_k\|}\Big\| &\leq 2\frac{\|x-y\|\|a_1\cdots a_k\|}{\|xa_1\cdots a_k\|} \\
&< 2\frac{\delta\delta_1\|a_1\cdots a_k\|}{\|xa_1\cdots a_k\|} \\
&< 2\frac{\delta\delta_1}{\delta} \\
&= 2\delta_1. \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

Donc pour une trajectoire de la chaîne (X_n, V_n) de point de départ $(X_0 = y, V_0 = 0)$ avec $\|y-x\| < \delta\delta_1$ et $\omega \in E(x,\delta)$, on a d'après l'équation (5.12), et pour δ_1 assez petit

$$\Big\|X_k - \frac{xA_1\cdots A_k}{\|xA_1\cdots A_k\|}\Big\| = \Big\|\frac{yA_1\cdots A_k}{\|yA_1\cdots A_k\|} - \frac{xA_1\cdots A_k}{\|xA_1\cdots A_k\|}\Big\| < 2\delta_1,$$

et d'après l'équation (5.11), il vient :

$$\begin{aligned}
\Big|V_k - \log\|xA_1\cdots A_k\|\Big| &= \Big|\log\frac{\|yA_1\cdots A_k\|}{\|xA_1\cdots A_k\|}\Big| \\
&\leq \max(|\log(1+\delta_1)|, |\log(1-\delta_1)|) \\
&\leq 2\delta_1.
\end{aligned}$$

Soit f une fonction mesurable, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\kappa}_{y,0} f(X_0, V_0, X_1, \ldots) &\leq \mathbb{E}^{\kappa}_{y,0}\big(f, E(x,\delta)\big) + \mathbb{E}^{\kappa}_{y,0}\big(f, E(x,\delta)^c\big) \\
&\leq \mathbb{E}^{\kappa}_{y,0}\big(f^{2\delta}(X_0, V_0, X_1, \ldots), E(x,\delta)\big) + |f|_{\infty}\mathcal{Q}_y\big(E(x,\delta)^c\big)
\end{aligned}$$

où $E(x,\delta)^c$ désigne le complémentaire de $E(x,\delta)$. Soit $D \in S_\mu^{\otimes k}$. Puisque e_κ est bornée inférieurement et supérieurement par des constantes stictement positives, et d'après l'inégalité (5.11), on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_y(E(x,\delta,k)\cap D) &= \frac{1}{e_\kappa(\bar y)}\int_{E(x,\delta,k)\cap D}\|yA_1\cdots A_k\|^\kappa e_\kappa(\bar y A_1\cdots A_k)\mu(dA_1)\cdots\mu(dA_k)\\
&\geq \frac{e_\kappa(\bar x)}{e_\kappa(\bar y)}\frac{1}{e_\kappa(\bar x)}\int_{E(x,\delta,k)\cap D}(1-\delta_1)^\kappa\|xA_1\cdots A_k\|^\kappa\frac{e_\kappa(\bar y A_1\cdots A_k)}{e_\kappa(\bar x A_1\cdots A_k)}\times\\
&\quad e_\kappa(\bar x A_1\cdots A_k)\mu(dA_1)\cdots\mu(dA_k)\\
&\geq C\mathcal{Q}_x(E(x,\delta,k)\cap D), \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

où C est une constante positive. Or par le théorème 25, on sait que $\frac{\|xA_1\cdots A_l\|}{\|A_1\cdots A_l\|}$ converge $Q_{\bar x}$-presque sûrement vers une quantité strictement positive. Donc on peut trouver une constante $c>0$ tel que pour l assez grand $\|xA_1\cdots A_l\| > c\|A_1\cdots A_l\|$, $Q_{\bar x}$-presque sûrement, et ainsi $Q_{\bar x}\big(E(x,\delta)^c\big)$ tend vers 0 quand δ tend vers 0. Or $E(x,\delta)^c$ est un ensemble symétrique, donc pour tout x, $\mathcal{Q}_x\big(E(x,\delta)^c\big) = Q_{\bar x}\big(E(x,\delta)^c\big) \to 0$. Par la majoration (5.13), il en est de même pour $\mathcal{Q}_y(E(x,\delta)^c)$ indépendamment de y. Ainsi pour δ assez petit, $\mathcal{Q}_y(E(x,\delta)^c) < \frac{\varepsilon}{2}$ indépendamment de y.

De même, on montre que, pour δ_1 assez petit :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^\kappa_{y,0}\big(f^{2\delta}(X_0,V_0,X_1,\ldots);E(x,\delta)\big)\\
&\leq (1+\delta_1)^\kappa\sup_{\|z_1-z_2\|\leq 2\delta_1}\frac{e_\kappa(\bar z_1)}{e_\kappa(\bar z_2)}\mathbb{E}^\kappa_{x,0}\big(f^{2\delta}(X_0,V_0,X_1,\ldots);E(x,\delta)\big)\\
&\leq (1+\frac{\varepsilon}{2})\mathbb{E}^\kappa_{x,0}f^{2\delta}(X_0,V_0,X_1,\ldots)\\
&\leq \mathbb{E}^\kappa_{x,0}f^{2\delta}+\frac{\varepsilon}{2}|f|_\infty,
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité voulue :

$$\mathbb{E}^\kappa_{y,0}(f(X_0,V_0,X_1,\ldots)\leq\mathbb{E}^\kappa_{x,0}(f^{2\delta}(X_0,V_0,X_1,\ldots)+\varepsilon|f|_\infty.$$

L'autre inégalité de la condition I4 se montre de manière analogue.

5.7.5 Intégrabilité de G

Commençons par préciser les propriétés de la loi de R, et en particulier l'existence de ses moments d'ordre strictement inférieur à κ.

Proposition 5.9 *La loi de R ne charge aucun sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$.*

La démonstration est la même que dans [47], sauf pour l'utilisation de la condition i-p. Elle utilise la propriétés d'irréductibilité forte. Le raisonnement est également proche de celui des lemmes 6.1 et 6.2 de [33].

Démonstration

Soit ϕ la loi de R et posons pour $g=(a(g),b(g))\in\mathcal{G}\times\mathbb{R}^d$ et x un vecteur

$\mathbb{R}^d$, $gx = a(g)x + b(g)$. On raisonne par l'absurde. Considérons l'ensemble $\mathcal{H}_\phi$ des sous-espaces affines W de $\mathbb{R}^d$ de dimension minimale qui vérifient $\phi(W) > 0$. Si W_1 et W_2 sont deux tels sous-espaces distincts, on a $\phi(W_1 \cap W_2) = 0$ puisque $dim(W_1 \cap W_2) < dim(W_i)$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des sous-espaces W de $\mathcal{H}_\phi$ vérifiant de plus $\phi(W) \geq \varepsilon$ est fini. Par conséquent, il existe une sous-espace W_0 de dimension minimale maximisant $\phi(W)$. Notons $m = \phi(W_0)$.

On rappelle que η est la loi de $g_1 = (A_1, B_1)$. Par stationnarité on a $\phi = \int g\phi \, d\eta(g)$ et en itérant cette équation on obtient :

$$\phi(W_0) = \int (g\phi)(W_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \eta^n(dg).$$

Donc on a $g\phi(W_0) = \phi(W_0) = m$ pour tout g dans un sous-ensemble $\mathcal{A}$ du goupe affine de $\mathbb{R}^d$ de mesure 1 pour la probabilité $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \eta^n$. L'ensemble des $g^{-1}W_0,\ g \in \mathcal{A}$ est donc fini. Soit G_η le sous-groupe fermé engendré par le support de η. Alors l'ensemble $\mathcal{F} = \{g^{-1}W_0,\ g \in G_\eta\}$ est également fini et stable par G_η. On distingue maintenant deux cas :

Si $dim(W_0) = 0$, l'équibarycentre v_0 de $\mathcal{F}$ est invariant par tout élément $g \in G_\eta$, et en particulier, on a $\mathbb{P}(g_1 v_0 = A_1 v_0 + B_1 = v_0) = 1$ ce qui contredit notre hypothèse.

Si $1 \leq dim(W_0) \leq d-1$, soit V_0 le sous-espace vectoriel qui est la direction de W_0. Alors $\mathcal{F} = \{g^{-1}V_0,\ g \in G_\mu\}$ est une réunion finie de sous-espaces propres par ce qui précède, et elle est G_μ-invariante, ce qui contredit l'irréductibilité forte de la condition i-p (voir théorème 18). Donc la loi de R ne charge aucune sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$. □

Corollaire 5.3 *L'application G est continue sur $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$.*

Démonstration

Il suffit de montrer que $(x,t) \longmapsto f(x,t) = \int_0^{e^t} u^\kappa \big(\mathbb{P}(xR > u) - \mathbb{P}(xA_1R_1 > u)\big)du$ est continue sur $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$. Or on a

$$\begin{aligned} & f(x,t) - f(x_0,t_0) \\ &= \int_0^{e^{t_0}} u^\kappa \big(\mathbb{P}(xR > u) - \mathbb{P}(x_0R > u)\big)du - \int_0^{e^{t_0}} u^\kappa \big(\mathbb{P}(xA_1R_1 > u) - \mathbb{P}(x_0A_1R_1 > u)\big)du \\ &\quad + \int_{e^{t_0}}^{e^t} u^\kappa \big(\mathbb{P}(xR > u) - \mathbb{P}(xA_1R_1 > u)\big)du. \end{aligned}$$

Par le théorème de continuité sous l'intégrale, comme R ne charge pas de sous-espace affine (proposition 5.9), on a bien la continuité pour chacune de ces intégrales. □

Proposition 5.10 *Pour tout $0 \leq s < \kappa$ on a $\mathbb{E}\|R\|^s < \infty$.*

Démonstration

On utilise la propriété de convexité exposée dans l'introduction. Pour tout $0 < s < \kappa$, on a, si $s < \min\{1, \kappa\}$,

$$\mathbb{E}\|R\|^s \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\|A_1 A_2 \cdots A_{k-1}\|^s \mathbb{E}\|B_k\|^s,$$

et si $1 \leq s < \kappa$,

$$(\mathbb{E}\|R\|^s)^{1/s} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbb{E}\|A_1 A_2 \cdots A_{k-1}\|^s)^{1/s} (\mathbb{E}\|B_k\|^s)^{1/s}.$$

Par hypothèse, pour tout $0 < s < \kappa$, on a $\mathbb{E}\|B_k\|^s \leq (\mathbb{E}\|B_k\|^\kappa)^{s/\kappa} < \infty$ et on a aussi

$$\lim_n (\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_n\|^s)^{1/n} = k(s) < 1,$$

par la stricte convexité de l'application $s \mapsto \log k(s)$ (théorème 22) et la définition de κ. □

On en déduit que G est directement Riemann intégrable, comme dans les chapitres 2 et 3.

Proposition 5.11 *La fonction $t \longmapsto \sup_{x \in \mathbb{S}^{d-1}} |G(x,t)|$ est directement Riemann intégrable sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration

On rappelle que Pour tous x, t, on a $G(x,t) = G_1(x,t) - G_2(x,t)$, où

$$G(x,t) = \frac{e^{-t}}{e_\kappa(\bar{x})} \int_0^{e^t} u^\kappa [\mathbb{P}(u - xB_1 < xA_1R_1 \leq u) - \mathbb{P}(u < xA_1R_1 \leq u - xB_1)] du.$$

On va montrer comme au paragraphe 2.4.3 que chaque $G(x, \cdot)$ est directement Riemann intégrable, et que les majorations obtenues sont uniofmes en x. On peut déjà remarque que la fonction e_κ est minorée sur la sphère, donc à une constante près on majore G par une fonction similaire à celle du paragraphe 2.4.3. On fait les mêmes découpages, et tous les calculs sont identiques sauf pour la majoration de $\mathbb{E}[|xB_1||xA_1R_1|^{\kappa-1}]$. On utilise plutôt l'indépendance et l'inégalité de Hőlder qui donnent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|xB_1||xA_1R_1|^{\kappa-1}] &\leq \mathbb{E}[\|B_1\|\|A_1\|^{\kappa-1}\|R_1|^{\kappa-1}] \\
&= \mathbb{E}[\|B_1\|\|A_1\|^{\kappa-1}]\mathbb{E}[\|R_1|^{\kappa-1}] \\
&\leq \mathbb{E}[\|B_1\|^\kappa]^{1/\kappa} \mathbb{E}[\|A_1\|^\kappa]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \mathbb{E}[\|R_1|^{\kappa-1}],
\end{aligned}$$

et toutes ces espérances sont finies par choix des hypothèses et par la proposition 5.10. □

5.7.6 Conclusion

Toutes les hypothèses du théorème 12 sont maintenant vérifiées. On a donc

$$\lim_{t\to+\infty} Z(x,t) = \frac{1}{\gamma}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \pi(dy) \int_{-\infty}^{+\infty} G(y,u)du = \ell, \tag{5.14}$$

où π est l'unique probabilité $\mathcal{Q}$-invariante sur la spère $\mathbb{S}^{d-1}$. Remarquons que cette limite ℓ est une constante positive ou nulle : elle ne dépend pas de x. Comme $Z(x,t) = z(x,t)e_\kappa^{-1}(\bar{x})$, on a donc pour tout x dans $\mathbb{S}^{d-1}$:

$$\lim_{t\to+\infty} z(x,t) = \ell e_\kappa(\bar{x}).$$

Cette limite est aussi celle de $t^\kappa \mathbb{P}(xR > t)$ grâce au lemme 4 ou au lemme 9.

Pour achever la preuve du théorème 5.1, il reste à montrer que la constante ℓ est strictement positive, puisqu'on sait déjà que e_κ ne s'annule pas sur $\mathcal{P}^{d-1}$. C'est ce qu'on va faire dans les deux dernières parties.

5.8 La limite est non nulle

Ici, les méthodes scalaires utilisant la médiane ne sont plus valables comme on l'a vu au chapitre précédent. La preuve présentée ici est la même que celle de [47], on remplace juste l'utilisation de sa propriété de récurrence par la condition i-p.

5.8.1 Une chaîne de Markov

On introduit la chaîne de Markov suivante sur $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(X_n, W_n, V_n) = (x \cdot A_1 \cdots A_n,\ \frac{u + xR_n}{\|xA_1 \cdots A_n\|},\ t - \log \|xA_1 \cdots A_n\|),$$

où $R_n = \sum_{k=1}^n A_1 \cdots A_{k-1} B_k$. Son noyau de transition est :

$${}^{123}\mathcal{N} f(x,u,t) = \mathbb{E}[f(x \cdot A_1, \frac{u + xB_1}{\|xA_1\|}, t - \log \|xA_1\|)],$$

pour toute fonction f mesurable bornée sur $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En effet, on passe de (X_n, W_n, V_n) à $(X_{n+1}, W_{n+1}, V_{n+1})$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= x \cdot A_1 \cdots A_{n+1} = \frac{xA_1 \cdots A_{n+1}}{\|xA_1 \cdots A_{n+1}\|} = \frac{\frac{xA_1\cdots A_n}{\|xA_1\cdots A_n\|}A_{n+1}}{\|\frac{xA_1\cdots A_n}{\|xA_1\cdots A_n\|}A_{n+1}\|} \\ &= \frac{(x \cdot A_1 \cdots A_n)A_{n+1}}{\|(x \cdot A_1 \cdots A_n)A_{n+1}\|} = X_n \cdot A_{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \frac{u + xR_{n+1}}{\|xA_1 \cdots A_{n+1}\|} = \frac{u + xR_n + xA_1 \cdots A_n B_{n+1}}{\|xA_1 \cdots A_{n+1}\|} \\ &= \frac{\|xA_1 \cdots A_n\|}{\|xA_1 \cdots A_{n+1}\|}\left(\frac{u + xR_n}{\|xA_1 \cdots A_n\|} + \frac{xA_1 \cdots A_n B_{n+1}}{\|xA_1 \cdots A_n\|}\right) \\ &= \|\frac{xA_1 \cdots A_n}{\|xA_1 \cdots A_n\|}A_{n+1}\|^{-1}(W_n + x \cdot A_1 \cdots A_n B_{n+1}) = \frac{W_n + X_n B_{n+1}}{\|X_n A_{n+1}\|}, \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= t - \log\|xA_1\cdots A_{n+1}\| \quad = \quad t - \log\|xA_1\cdots A_n\| - \log\frac{\|xA_1\cdots A_{n+1}\|}{\|xA_1\cdots A_n\|} \\ &= V_n - \log\|X_nA_{n+1}\|. \end{aligned}$$

Comme (A_n, B_n) est une suite iid, on voit donc que (X_n), (X_n, W_n), (X_n, V_n) et (X_n, W_n, V_n) sont bien des chaînes de Markov, et que (X_n, W_n, V_n) a bien pour noyau de transition ${}^{123}\mathcal{N}$. Dans la suite, les opérateurs ayant pour exposant 123 se rapportent à la chaîne (X_n, W_n, V_n), ceux ayant pour exposant 12 se rapportent à (X_n, W_n) et ceux ayant pour exposant 13 se rapportent à (X_n, V_n).

On remarque aussi que (W_n) vérifie l'équation récursive aléatoire scalaire suivante :

$$W_{n+1} = c_nW_n + d_n,$$

où $c_n = \|X_nA_{n+1}\|^{-1}$ et $d_n = \frac{X_nB_{n+1}}{\|X_nA_{n+1}\|}$. On introduit le temps d'arrêt suivant :

$$\tau = \tau_1 = \inf\{n \geq 1 \mid xR_n > 0\},$$

et le noyau (sous-Markovien) correspondant :

$$\begin{aligned} {}^{123}\mathcal{N}_\tau f(x,u,t) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau<\infty} f(x\cdot A_1\cdots A_\tau, \frac{u+xR_\tau}{\|xA_1\cdots A_\tau\|}, t - \log\|xA_1\cdots A_\tau\|)] \\ &= \mathbb{E}_{x,u,t}[\mathbb{1}_{\tau<\infty} f(X_\tau, W_\tau, V_\tau)], \end{aligned}$$

où $\mathbb{E}_{x,u,t}$ désigne l'espérance sur l'espace des trajectoires de la chaîne (X_n, W_n, V_n) partant de $(X_0 = x, W_0 = u, V_0 = t)$. Remarquons que si f ne dépend pas de u, alors ${}^{123}\mathcal{N}_\tau f(x,u,t)$ ne dépend pas non plus de u puisque τ ne dépend pas de u. Pour toute fonction f mesurable bornée sur $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}$ on pose :

$${}^{13}\mathcal{N}_\tau f(x,t) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau<\infty} f(x\cdot A_1\cdots A_\tau, t - \log\|xA_1\cdots A_\tau\|)].$$

Nous allons montrer que ce noyau vérifie une équation de renouvellement.

Soient $z_e(x,t) = \mathbb{P}(xR > e^t)$ et $g_e(x,t) = {}^{123}\mathcal{N}_\tau\Phi(x,0,t)$, où Φ est définie par $\Phi(x,u,t) = \mathbb{P}(e^t - u < xR \leq e^t)$. On peut calculer explicitement $g_e(x,t)$. Pour cela, on pose $R' = \sum_{k=\tau+1}^{\infty} A_{\tau+1}\cdots A_{k-1}B_k$. C'est une copie de R indépendante de R_τ et de $A_1,\ldots A_\tau$. On peut expliciter la fonction g_e :

$$\begin{aligned} &g_e(x,t) \\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\tau<\infty}\mathbb{P}\big(e^{t-\log\|xA_1\cdots A_\tau\|} - \frac{xR_\tau}{\|xA_1\cdots A_\tau\|} < x\cdot A_1\cdots A_\tau R' \leq e^{t-\log\|xA_1\cdots A_\tau\|}\big)\big] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau<\infty}\mathbb{P}(e^t - xR_\tau < xA_1\cdots A_\tau R' \leq e^t)]. \end{aligned} \tag{5.15}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} {}^{13}\mathcal{N}_\tau z_e(x,t) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau<\infty}\mathbb{P}(x\cdots A_1\cdots A_\tau R' > e^{t-\log\|xA_1\cdots A_\tau\|})] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau<\infty}\mathbb{P}(xA_1\cdots A_\tau R' > e^t)]. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Ainsi, en additionnant les équations (5.15) et (5.16) on trouve :

$$\begin{aligned} {}^{13}\mathcal{N}_\tau z_e(x,t) + g_e(x,t) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau<\infty}\mathbb{P}(xA_1\cdots A_\tau R' > e^t - xR_\tau)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau<\infty}\mathbb{1}_{xA_1\cdots A_\tau R'+xR_\tau>e^t}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau<\infty}\mathbb{1}_{xR>e^t}]. \end{aligned}$$

Or si $xR > e^t$, comme $xR_n \to xR$, on a nécéssairement $xR_n > 0$ pour n assez grand, donc $(\tau < \infty, xR > e^t) = (xR > e^t)$. Ainsi

$$\begin{aligned} {}^{13}\mathcal{N}_\tau z_e(x,t) + g_e(x,t) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{xR>e^t}] \\ &= z_e(x,t). \end{aligned}$$

Donc pour tous (x,t) dans $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}$, on a l'équation de renouvellement suivante :

$$z_e(x,t) = {}^{13}\mathcal{N}_\tau z_e(x,t) + g_e(x,t).$$

Si on itère cette équation, il vient :

$$z_e(x,t) = {}^{13}\mathcal{N}_\tau^{n+1} z_e(x,t) + \sum_{k=0}^{n} {}^{13}\mathcal{N}_\tau^k g_e(x,t). \tag{5.17}$$

On définit par récurrence la suite de temps d'arrêt (τ_n) de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \tau_1 &=& \tau, \\ \tau_{n+1} &=& \inf\{k > \tau_n \mid xR_k > xR_{\tau_n}\}. \end{array} \right.$$

Pour toute fonction f mesurable bornée, on a alors :

$${}^{123}\mathcal{N}_\tau^n f(x,u,t) = \mathbb{E}_{x,u,t}[\mathbb{1}_{\tau_n<\infty} f(X_{\tau_n}, W_{\tau_n}, V_{\tau_n})].$$

En effet, d'après le calcul fait au début de ce paragraphe, et l'indépendance, on a :

$$\begin{aligned} &{}^{123}\mathcal{N}_{\tau_2} f(x,u,t) \\ &= \mathbb{E}_{x,u,t}[\mathbb{1}_{\tau_2<\infty} f(X_{\tau_2}, W_{\tau_2}, V_{\tau_2})] \\ &= \mathbb{E}_{x,u,t}[\mathbb{1}_{\tau_1<\infty}\mathbb{1}_{\tau_2-\tau_1<\infty} f(X_{\tau_1}\cdot A_{\tau_1+1}\cdots A_{\tau_2}, \\ &\quad \frac{W_{\tau_1} + X_{\tau_1}\sum_{k=1}^{\tau_2-\tau_1} A_{\tau_1+1}\cdots A_{\tau_1+k-1}B_{\tau_1+k}}{\|X_{\tau_1}A_{\tau_1+1}\cdots A_{\tau_2}\|}, V_{\tau_1} - \log\|X_{\tau_1}A_{\tau_1+1}\cdots A_{\tau_2}\|)] \\ &= \mathbb{E}_{x,u,t}\big[\mathbb{1}_{\tau_1<\infty}\mathbb{E}_{X_{\tau_1},W_{\tau_1},V_{\tau_1}}[\mathbb{1}_{\tau_2-\tau_1<\infty} f(X_{\tau_2-\tau_1}, W_{\tau_2-\tau_1}, V_{\tau_2-\tau_1})]\big] \\ &= \mathbb{E}_{x,u,t}\big[\mathbb{1}_{\tau_1<\infty}\mathbb{E}_{X_{\tau_1},W_{\tau_1},V_{\tau_1}}[\mathbb{1}_{\tau<\infty} f(X_\tau, W_\tau, V_\tau)]\big] \\ &= \mathbb{E}_{x,u,t}\big[\mathbb{1}_{\tau_1<\infty}\,{}^{123}\mathcal{N}_\tau f(X_{\tau_1}, W_{\tau_1}, V_{\tau_1})\big] \\ &= {}^{123}\mathcal{N}_\tau^2 f(u,u,t). \end{aligned}$$

On en déduit la relation suivante pour $f = z_e$:

$${}^{13}\mathcal{N}_\tau^{n+1} z_e(x,t) = \mathbb{E}_{x,0,t}[\mathbb{1}_{\tau_n<\infty}\mathbb{P}(xA_1\cdots A_{\tau_n}R' > e^t)],$$

où R' est de même loi que R et indépendant de $A_1,\ldots,A_{\tau_n},B_1,\ldots,B_{\tau_n}$. Comme τ_n tend vers l'infini, et que $\|A_1\cdots A_n\|$ tend vers 0, on a $\mathbb{P}$-presque sûrement :

$$\mathbb{1}_{\tau_n<\infty} xA_1\cdots A_{\tau_n} \xrightarrow[n\longmapsto\infty]{} 0.$$

Donc par convergence dominée on a aussi :

$$^{13}\mathcal{N}_\tau^{n+1} z_e(x,t) \xrightarrow[n\longmapsto\infty]{} 0.$$

Ainsi en faisant tendre n vers l'infini dans l'équation (5.17) on obtient, pout tous $(x, t \in \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R})$:

$$z_e(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^{13}\mathcal{N}_\tau^n g_e(x,t). \tag{5.18}$$

5.8.2 La chaîne relativisée

On étudie maintenant la chaîne relativisée. On pose $h_\kappa(x,t) = e_\kappa(\bar{x})e^{-\kappa t}$. Le noyau relativisé est :

$$\begin{aligned}
&{}^{123}\mathcal{Q}f(x,u,t)\\
&= \frac{{}^{123}\mathcal{N}(fh_\kappa)(x,u,t)}{h_\kappa(x,t)}\\
&= \frac{1}{e_\kappa(\bar{x})}\int e^{\kappa t} e_\kappa(\bar{x}a) e^{-\kappa(t-\log\|xa\|)} f(x\cdot a, \frac{u+xb}{\|xa\|}, t-\log\|xa\|)\eta(da,db)\\
&= \frac{1}{e_\kappa(\bar{x})}\int e_\kappa(\bar{x}a)\|xa\|^\kappa f(x\cdot a, \frac{u+xb}{\|xa\|}, t-\log\|xa\|)\eta(da,db),
\end{aligned}$$

où η est la loi de (A_1, B_1). On définit également, de même que précédemment :

$$\begin{aligned}
{}^{123}\mathcal{Q}_\tau f(x,u,t) &= \frac{{}^{123}\mathcal{N}_\tau(fh_\kappa)(x,u,t)}{h_\kappa(x,t)}\\
&= \frac{1}{e_\kappa(\bar{x})}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau<\infty} e_\kappa(\bar{x}A_1\cdots A_\tau)\|xA_1\cdots A_\tau\|^\kappa \times\\
&\qquad f(x\cdot A_1\cdots A_\tau, \frac{u+xR_\tau}{\|xA_1\cdots A_\tau\|}, t-\log\|xA_1\cdots A_\tau\|)],
\end{aligned}$$

et ${}^{13}\mathcal{Q}_\tau f(x,t) = {}^{123}\mathcal{Q}_\tau f(x,0,t)$ quand f ne dépend pas de la deuxième coordonnée.

On désigne par $\mathcal{Q}_{x,u,t}$ les probabilités sur l'espace $\Omega_2 = (\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ décrivant la chaîne de Markov (X_n, W_n, V_n) relativisée quand $(X_0, W_0, V_0) = (x,u,t)$, et $\mathbb{E}^\kappa_{x,u,t}$ l'espérance correspondante. On énonce maintenant le résultat clé de cette partie :

Théorème 5.4 *On a :*

$$\sup_{x,u,t} \mathbb{E}^\kappa_{x,u,t}[\tau] = \sup_x \mathbb{E}^\kappa_{x,0,0}[\tau] < \infty.$$

La démonstration de ce théorème sera donnée dans la partie 5.9. On peut en donner tout de suite quelques corollaires.

Corollaire 5.4 *Pour tous $(x,u,t) \in \mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a :*

$$\mathcal{Q}_{x,u,t}(\tau<\infty) = \mathcal{Q}_{x,t}(\tau<\infty) = \mathcal{Q}_x(\tau<\infty) = 1.$$

Démonstration

D'après le théorème 5.4, on a $\mathcal{Q}_{x,u,t}(\tau < \infty) = 1$ pour tous $(x, u, t) \in \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Comme τ ne dépend ni de u ni de t, et que $\mathcal{Q}_{x,t}$ et $\mathcal{Q}_x$ sont les traces respectives de $\mathcal{Q}_{x,u,t}$ sur $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{S}^{d-1}$, on a $\mathcal{Q}_{x,u,t}(\tau < \infty) = \mathcal{Q}_{x,t}(\tau < \infty) = \mathcal{Q}_x(\tau < \infty) = 1$.□

Corollaire 5.5 *L'opérateur* ${}^{13}\mathcal{Q}_\tau$ *est Markovien.*

Démonstration

En effet, on a par définition :

$$\begin{aligned} {}^{13}\mathcal{Q}_\tau \mathbf{1}(x,t) &= \frac{1}{e_\kappa(\bar{x})} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau<\infty} e_\kappa(\bar{x} A_1 \cdots A_\tau) \| x A_1 \cdots A_\tau \|^\kappa] \\ &= \mathbb{E}^\kappa_{x,0,t}[\mathbb{1}_{\tau<\infty}] \\ &= \mathcal{Q}_{x,0,t}(\tau < \infty), \end{aligned}$$

et cette dernière quantité vaut 1 par le corollaire précédent. □

5.8.3 Encore un résultat de renouvellement

On pose maintenant $Z_e(x,t) = z_e(x,t) h_\kappa(x,t)^{-1}$ et $G_e(x,t) = g_e(x,t) h_\kappa(x,t)^{-1}$. On déduit alors de l'équation (5.18) et de la définition de ${}^{13}\mathcal{Q}_\tau$ que pour tous $(x,t) \in \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$, on a :

$$Z_e(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^{13}\mathcal{Q}^n_\tau G_e(x,t). \tag{5.19}$$

C'est une égalité de type renouvellement. Cette fois-ci, il est plus rapide de calculer à la main la limite de Z_e à partir de cette égalité, plutôt que de vérifier les hypothèses d'un des théorèmes de renouvellement déjà cités, puisqu'on sait déjà qu'une telle limite existe.

La restriction $\mathcal{Q}_\tau$ de ${}^{13}\mathcal{Q}_\tau$ au compact $\mathbb{S}^{d-1}$ est un opérateur Markovien. Il admet donc des probabilités invariantes (voir par exemple [49]). On fixe ρ, une probabilité extrêmale parmi ces probabilités invariantes. On apelle $\mathcal{Q}_\rho$ la probabilité $\int \mathcal{Q}_{x,0,0} \rho(dx)$ sur Ω_2, et $\mathbb{E}^\kappa_\rho = \int \mathbb{E}^\kappa_{x,0,0} \rho(dx)$ l'espérance correspondante.

Lemme 5.3 *Il existe une constante* $0 < \gamma_\tau < +\infty$ *telle que :*

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \| x A_1 \cdots A_{\tau_n} \| = \gamma_\tau$$

$\mathcal{Q}_\rho$*-presque sûrement.*

Démonstration

On commence par montrer que la suite $(\tau_n n^{-1})$ converge $\mathcal{Q}_\rho$-presque sûrement à l'aide de la loi des grands nombres. Pour cela, on considère la suite L de variables aléatoires définie par :

$$\begin{cases} L_0 = \tau \\ L_n = \tau_{n+1} - \tau_n \end{cases}$$

Elle est iid sous $\mathcal{Q}_\rho$. La loi de garnds nombres donne donc la convergence $\mathcal{Q}_\rho$-presque sûre suivante :

$$\lim_n \frac{\tau_n}{n} = \int \mathbb{E}^\kappa_{x,0,0}[\tau]\rho(dx) < \infty,$$

l'intégrale étant finie par le théorème 5.4. D'autre part, par la preuve de la condition I2 faite au paragraphe 5.7.2, pour tout $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, on a

$$\mathcal{Q}_x(\lim \frac{1}{n} \log \|xA_1 \cdots A_n\| = \lim \frac{1}{n} \log \|A_1 \cdots A_n\| = \gamma) = 1.$$

Or $\mathcal{Q}_x$ et la restriction de $\mathcal{Q}_{x,0,0}$ à $S_\mu^{\mathbb{N}}$ sont égales. Donc on a aussi

$$\mathcal{Q}_{x,0,0}(\lim \frac{1}{n} \log \|xA_1 \cdots A_n\| = \lim \frac{1}{n} \log \|A_1 \cdots A_n\| = \gamma) = 1,$$

et par conséquent

$$\mathcal{Q}_\rho(\lim \frac{1}{n} \log \|xA_1 \cdots A_n\| = \lim \frac{1}{n} \log \|A_1 \cdots A_n\| = \gamma) = 1.$$

Ainsi, $\mathcal{Q}_\rho$-presque sûrement on a :

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{V_{\tau_n}}{n} &= \lim \frac{V_{\tau_n}}{\tau_n} \lim \frac{\tau_n}{n} \\ &= \gamma \int \mathbb{E}^\kappa_{x,0,0}[\tau]\rho(dx) \end{aligned}$$

De plus γ et $\int \mathbb{E}^\kappa_{x,0,0}[\tau]\rho(dx)$ sont strictement positifs, donc $\gamma_\tau = \gamma \int \mathbb{E}^\kappa_{x,0,0}[\tau]\rho(dx)$ l'est aussi. □

On travaille maintenant sur les fonctions Z_e et G_e tronquées. Soit $L > 0$. On pose $G_e^L(x,t) = G_e(x,t)\mathbb{1}_{[-L,L]}(t)$, et $Z_e^L(x,t) = Z_e(x,t)\mathbb{1}_{[-L,L]}(t)$. Comme G_e^L est une fonction positive à support compact, la relation (5.19) et la théorie du potentiel (voir [22] et la partie 1.6) on a $Z_e^L(x,t) = \sum_{n=0}^\infty {}^{13}\mathcal{Q}_\tau^n G_e^L(x,t)$. On peut maintenant énoncer le résultat de renouvellement :

Proposition 21 *Pour tout $L > 0$, on a :*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int \sum_{n=0}^\infty {}^{13}\mathcal{Q}_\tau^n G_e^L(x,u)\rho(dx)du = \frac{1}{\gamma_\tau} \int\int_{-\infty}^{+\infty} G_e^L(x,u)\rho(dx)du.$$

La démonstration est exactement la même que dans [47] grâce au résultat du lemme 5.3. Comme elle est longue et très calculatoire, on ne la répète pas ici.

5.8.4 Conclusion

De la proposition 21 et de ce qui précède, on déduit que pour tout $L > 0$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int Z_e^L(x,u)\rho(dx)du = \frac{1}{\gamma_\tau} \int\int_{-\infty}^{+\infty} G_e^L(x,u)\rho(dx)du.$$

Comme Z_e et G_e sont positives, le théorème de convergence monotone sous l'intégrale donne alors, quand L tend vers l'infini :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t\int Z_e(x,u)\rho(dx)du = \frac{1}{\gamma_\tau}\iint_{-\infty}^{+\infty} G_e(x,u)\rho(dx)du.$$

D'autre part, on sait par la limite (5.14) et les remarques suivantes que $Z_e(x,t)$ tend vers ℓ quand t tend vers l'infini, donc par convergence dominée on a en fait

$$\frac{1}{\gamma_\tau}\iint_{-\infty}^{+\infty} G_e(x,u)\rho(dx)du = \ell.$$

Le but de cette partie est de montrer que ℓ est non nulle. Pour cela, on raisonne par l'absurde. Supposons que $\ell = 0$. Alors on a :

$$\frac{1}{\gamma_\tau}\iint_{-\infty}^{+\infty} G_e(x,u)\rho(dx)du = 0.$$

Or par définition, ρ est une probalilité $\mathcal{Q}_\tau$-invariante, donc on a aussi, pour tout n entier :

$$\frac{1}{\gamma_\tau}\iint_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} {}^{13}\mathcal{Q}_\tau G_e(x,u)\rho(dx)du = 0.$$

On utilise encore le théorème de convergence monotone pour en déduire que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int Z_e(x,u)\rho(dx)du = 0.$$

Par la même preuve qu'au corollaire 5.3, on peut montrer que Z et donc Z_e est continue sur $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}$. Donc pour tout t dans $\mathbb{R}$, on a $\int Z_e(x,t)\rho(dx) = 0$, et donc en particulier, il vient :

$$\int \mathbb{P}(xR > 0)\rho(dx) = 0. \tag{5.20}$$

Pour montrer que ce résultat est absurde, on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 5.4 *Le support S_R de la loi de R n'est pas compact dans $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration

On raisonne par l'absurde. Soit Γ_η le semi-groupe fermé de $Aff(\mathbb{R}^d)$, groupe des applications affines sur $\mathbb{R}^d$, engendré par le support de la loi η de (A_1, B_1). On note $g = (a(g), b(g))$ un élément de Γ_η. Comme on a l'égalité en loi $R = A_1R + B_1$, S_R est stable par Γ_η.

Supposons que S_R est compact. Par hypothèse, l'équation $gx = x$ n'a pas de point fixe presque sûr, donc S_R n'est pas réduit à un point. Soient $x_1 \neq x_2$ deux points distincts de S_R, et $y = x_1 - x_2 \neq 0$. Alors, pour tout $g \in \Gamma_\eta$, $a(g)y = gx_1 - gx_2$ est dans $S_R - S_R$ qui est un compact fixe. Ainsi on a

$$\sup_{g\in\Gamma_\eta} \|a(g)y\| < \infty. \tag{5.21}$$

Soit maintenant V l'espace vectoriel engendré par les $a(g)y$, $g \in \Gamma_\eta$, et W son orthogonal. Alors W est stable à droite par $a(\Gamma_\eta) = \gamma_\mu$. En effet, si z est dans W et $a = a(g)$ dans γ_μ, pour tous scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et tous $g_1, \ldots g_n$ dans Γ_η, on a :

$$\begin{aligned} zA(g)(\lambda_1 a(g_1)y + \cdots + \lambda_n a(g_n)y) &= z(\lambda_1 a(gg_1)y + \cdots + \lambda_n a(gg_n)y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

W est un espace vectoriel stable par Γ_μ, donc d'après la condition $i-p$, W est réduit à 0. Ainsi, $V = \mathbb{R}^d$, et pour tout $v \in V = \mathbb{R}^d$, on a d'après la relation (5.21) :

$$\sup_{g \in \Gamma_\eta} \|a(g)v\| < \infty.$$

Le théorème de Banach-Steinhaus implique alors que :

$$\sup_{g \in \Gamma_\eta} \|a(g)\| < \infty. \tag{5.22}$$

Or on a vu dans la démonstration de la condition I2 (section 5.7.2) que sous la probabilité $\mathcal{Q}_\pi$, $V_n = \log \|X_0 A_1 \cdots A_n\|$ tend vers $+\infty$, donc $\|A_1 \cdots A_n\|$ aussi, ce qui contredit la relation (5.22). Donc S_R n'est pas compact. □

Lemme 5.5 *Pour tout x dans $\mathbb{S}^{d-1}$, et pour tout t dans $\mathbb{R}$, on a*

$$\mathbb{P}(xR < t) < 1.$$

Démonstration

On compactifie l'ensemble des vecteurs colonne $\mathbb{R}^d$ en lui adjoignant l'ensemble $\mathbb{S}_c^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1\}$ des vecteurs colonne de norme 1 : soit $\widehat{\mathbb{R}}^d = \mathbb{R}^d \cup \mathbb{S}_c^{d-1}$ muni de la topologie suivante :

- $\mathbb{R}^d$ est ouvert dans $\widehat{\mathbb{R}}^d$,
- $(x_n) \in \mathbb{R}^d$ converge vers $x \in \mathbb{S}_c^{d-1}$ si $\begin{cases} \lim \|x_n\| = +\infty, \\ \lim \frac{x_n}{\|x_n\|} = x. \end{cases}$

L'action à gauche de $g \in \mathit{Aff}(\mathbb{R}^d)$ sur $\widehat{\mathbb{R}}^d$ est définie par :

$$\begin{cases} gx = a(g)x + b(g) & \text{si } x \in \mathbb{R}^d, \\ gx = \frac{a(g)x}{\|a(g)x\|} & \text{si } x \in \mathbb{S}_c^{d-1}. \end{cases}$$

Cette action est bien continue sur $\widehat{\mathbb{R}}^d$. De plus $\mathbb{S}_c^{d-1}$ est stable par $a(\Gamma_\eta) = \Gamma_\mu$.

On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe x_0 dans $\mathbb{S}^{d-1}$, et t_0 dans $\mathbb{R}$ tels que $\mathbb{P}(x_0 R < t_0) = 1$. Soit $\widehat{\mathcal{F}}(S_R)$ l'adhérence de S_R dans $\widehat{\mathbb{R}}^d$, et $C_R = \widehat{\mathcal{F}}(S_R) \cap \mathbb{S}_c^{d-1}$. Or S_R n'est pas compact dans $\mathbb{R}^d$ par le lemme 5.4, mais $\widehat{\mathcal{F}}(S_R)$ est compact dans $\widehat{\mathbb{R}}^d$. Donc C_R est non vide. Soit $y_0 \in C_R$. Il existe une suite (x_n) de S_R telle que $\|x_n\|$ tend vers l'infini, et $\frac{x_n}{\|x_n\|}$ tend vers y_0. Comme x_n est dans S_R pour tout n, et que $\mathbb{P}(x_0 R < t_0) = 1$, on a $x_0 x_n < t_0$, donc en passant à la limite, on a $x_0 y_0 \leq 0$.

D'autre part, S_R donc aussi $\widehat{\mathcal{F}}(S_R)$ et $\mathbb{S}_c^{d-1}$ sont stables par Γ_μ, donc C_R l'est aussi : pour tout $g \in \Gamma_\mu$, $a(g)y_0 \in C_R$, donc en particulier $x_0(a(g)y_0) \leq 0$. Ceci implique $(x_0 \cdot a(g))y_0 \leq 0$. En particulier, sous la probabilité $\mathcal{Q}_{x_0}$, la chaîne de Markov $x_0 \cdot A_1 \cdots A_n$ reste dans le demi espace $V = \{x \in \mathbb{S}^{d-1} \mid xy_0 \leq 0\}$. D'après la preuve de la condition I1 (section 5.7.1), le complémentaire de V : $W = \{x \in \mathbb{S}^{d-1} \mid xy_0 > 0\}$ n'intersecte pas le support de π. Donc le support de π est contenu dans une demi-sphère, ce qui contredit le corrolaire 5.2. □

De l'équation (5.20), on déduit que $\mathbb{P}(xR > 0) = 0$ pour tout x dans le support de ρ, ce qui contredit le lemme 5.5. Donc la limite ℓ est bien strictement positive, et la démonstration du théorème 5.1 sera achevée quand on aura prouvé le théorème 5.4. C'est l'objet de la dernière partie.

5.9 Démonstration du théorème 5.4

Soit $M_n = (X_n, W_n)$ la chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ de probabilité de transition :

$$^{12}\mathcal{Q}f(x,u) = \frac{1}{e_\kappa(\bar{x})} \int e_\kappa(\bar{x}a)\|xa\|^\kappa f\Big(x \cdot a, \frac{u + xb}{\|xa\|}\Big)\eta(da, db),$$

restriction de $^{123}\mathcal{Q}$ à $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$. On commence par montrer que cet opérateur est quasi-compact sur un espace bien choisi. Si f est une fonction continue de $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on pose :

$$\begin{aligned} |f|_\varepsilon &= \sup_{(x,u)\in\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}} \frac{|f(x,u)|}{1+u^{2\varepsilon}}, \\ [f]_\varepsilon &= \sup_{\substack{x\neq y\in\mathbb{S}^{d-1} \\ u\in\mathbb{R}}} \frac{|f(x,u)-f(y,u)|}{\|x-y\|^\varepsilon(1+u^{2\varepsilon})}, \\ \|f\|_\varepsilon &= |f|_\varepsilon + [f]_\varepsilon. \end{aligned}$$

On définit deux espaces de Banach $(\mathcal{C}_\varepsilon, |\cdot|_\varepsilon)$ et $(L_\varepsilon, \|\cdot\|_\varepsilon)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\varepsilon &= \{f : \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid |f|_\varepsilon < \infty\}, \\ L_\varepsilon &= \{f : \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \|f\|_\varepsilon < \infty\}. \end{aligned}$$

Proposition 22 *On peut trouver ε_0 tel que les hypothèses du théorème de Ionescu Tulcea Marinescu soient satisfaites par les espaces $\mathcal{C}_\varepsilon$, L_ε et l'opérateur $^{12}\mathcal{Q}$.*

Cette vérification est faite dans les lemmes 3.13, 3.14 et 3.15 de [47], qui sont encore valides sous nos hypothèses. Il suffit de remplacer l'appel au lemme 1.8 par le théorème 8.7 de [33] qui donne exactement le même résultat sous la condition i-p. Ici aussi comme la preuve est longue et calculatoire on ne la répète pas.

Soit G_1 l'ensemble des valeurs propres de module 1 de $^{12}\mathcal{Q}$ dans L_{ε_0}, et pour $\lambda \in G_1$, on note :

$$D(\lambda) = \{f \in L_{\varepsilon_0} \mid {}^{12}\mathcal{Q}f = \lambda f\}.$$

D'après le théorème de Ionescu Tulcea Marinescu (voir par exemple [49]), G_1 est fini, et pour toute $f \in L_{\varepsilon_0}$, on a :

$$^{12}\mathcal{Q}f = \sum_{\lambda \in G_1} \lambda W_\lambda + V,$$

où W_λ est le projecteur sur le sous-espace de dimension finie $D(\lambda)$, et V est un opérateur de rayon spectral strictement inférieur à 1 et qui commute avec tous les W_λ. De plus, si $\lambda \neq \lambda'$, alors W_λ et $W_{\lambda'}$ commutent également.

Lemme 5.6 *La seule valeur propre de module* 1 *de* $^{12}\mathcal{Q}$ *est* 1*, et les seules fonctions propres correspondantes sont les constantes.*

Démonstration

Soient $\lambda \in G_1$ et $f \neq 0$ dans $D(\lambda)$. Montrons que f ne dépend pas de la variable u. Pour tous $(x,u) \in \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
&|f(x,u) - f(x,0)| \\
&= |^{12}\mathcal{Q}^n f(x,u) - {}^{12}\mathcal{Q}^n f(x,0)| \\
&\leq |u|^{\varepsilon_0} \|f\|_{\varepsilon_0} \sup_x \frac{1}{e_\kappa(\bar{x})} \int e_\kappa(\bar{x}A_1 \cdots A_n) \|xA_1 \cdots A_n\|^{s-\varepsilon_0} \mu(dA_1) \cdots \mu(dA_n) \\
&= |u|^{\varepsilon_0} \|f\|_{\varepsilon_0} \sup_x \mathbb{E}_x(\|xA_1 \cdots A_n\|^{-\varepsilon_0}).
\end{aligned}$$

Or $\sup_x \mathbb{E}_x(\|xA_1 \cdots A_n\|^{-\varepsilon_0})$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini comme démontré dans la preuve du lemme 3.15 de [47]. Donc pour tous $(x,u) \in \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$, on a $f(x,u) = f(x,0)$. On notera maintenant $f(x) = f(x,u)$, et on a donc :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lambda\, {}^{12}\mathcal{Q}f(x) \\
&= \frac{\lambda}{e_\kappa(\bar{x})} \int e_\kappa(\bar{x}A_1) \|xA_1\|^\kappa f(x \cdot A_1) \mu(dA_1) \\
&= \lambda \mathcal{Q}f(x).
\end{aligned}$$

Soit $M = \{x \in \mathbb{S}^{d-1} \mid |f(x)| = \|f\|\}$, c'est un fermé non vide. Comme $|\lambda| = 1$, pour tout $x \in M$, on a :

$$\|f\| = |f(x)| = |\mathcal{Q}f(x)| \leq \mathcal{Q}|f|(x) \leq \|f\|,$$

donc on a égalité dans l'équation précédente, et M est Γ_μ-invariant. Il contient donc l'unique fermé Γ_μ-invariant minimal sur la sphère, qui est aussi le support de π. Donc $\pi(f) = \|f\| > 0$.

Comme on a vu à la preuve de la condition I1, pour tout $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, on a $\frac{1}{n}\sum \mathcal{Q}^k f(x) \to \pi(f)$. Donc ici, $\frac{1}{n}\sum \lambda^k f(x) \to \pi(f)$. Comme f n'est pas la fonction nulle, on peut trouver $x_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Si $\lambda \neq 1$, alors $\frac{1}{n}\sum \lambda^k = \frac{1-\lambda^n}{n(1-\lambda)}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, ce qui est impossible puisque $f(x_0) > 0$ et $\pi(f) > 0$. Donc $\lambda = 1$ et $f = \pi(f)$ est constante. □

Ces résultats sont résumés dans le théorème suivant.

Théorème 5.5 *Il existe $0 < \varepsilon_0$ tel que ${}^{12}\mathcal{Q}$ soit un opérateur quasi-compact sur L_{ε_0}, et que l'on ait pour tous $n \geq 1$, $f \in L_{\varepsilon_0}$:*

$$ {}^{12}\mathcal{Q}^n(f) = \phi(f)\mathbf{1} + V^n(f), $$

où ϕ est l'unique probabilité ${}^{12}\mathcal{Q}$-invariante portée par $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}$, et V est un opérateur sur L_{ε_0} de rayon spectral strictement inférieur à 1 tel que pour tout $f \in L_{\varepsilon_0}$, on ait :

$$ \phi(V(f)) = V(\phi(f)) = 0. $$

On établit maintenant l'existence d'un moment d'ordre 1 pour les temps d'entrée de la chaîne de Markov (M_n) dans tous les ouverts chargés par la mesure invariante.

Proposition 5.12 *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}$ tel que $\phi(\mathcal{O}) > 0$, et soit $T_{\mathcal{O}} = \inf\{n \geq 1 \mid M_n \in \mathcal{O}\}$, le temps d'entrée de la chaîne de Markov (M_n) dans $\mathcal{O}$. Alors pour tout compact C de $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}$, on a :*

$$ \sup_{(x,u)\in C} \mathbb{E}^{\kappa}_{x,u,0}(T_{\mathcal{O}}) < \infty. $$

Démonstration

Soit f une fonction infiniment dérivable à support compact dans $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{1}_{\mathcal{O}} \geq f \geq 0$ et $\phi(f) > 0$. Notons $T_f = \inf\{n \geq 1 \mid f(M_n) > 0\}$. On a alors $T_f \geq T_{\mathcal{O}}$.

Soit ρ une probabilité quelconque sur $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}$, et ψ_l la fonction définie par :

$$ \psi_l(j) = \begin{cases} \sum_{k=l-j+1}^{l} \rho({}^{12}\mathcal{Q}^k f) & \text{si} \quad 1 \leq j \leq l, \\ \sum_{k=1}^{l} \rho({}^{12}\mathcal{Q}^k f) & \text{si} \quad j > l. \end{cases} $$

On a alors :

$$ \begin{aligned} \mathbb{E}^{\kappa}_{\rho}[\psi_l(T_f)] &= \mathbb{E}^{\kappa}_{\rho}\Big[\sum_{j=1}^{l} \mathbb{1}_{T_f=j} \sum_{k=l-j+1}^{l} \rho({}^{12}\mathcal{Q}^k f)\Big] + \mathbb{E}^{\kappa}_{\rho}\Big[\mathbb{1}_{T_f>l} \sum_{k=1}^{l} \rho({}^{12}\mathcal{Q}^k f)\Big] \\ &= \sum_{k=1}^{l} \rho({}^{12}\mathcal{Q}^k f) - \mathbb{E}^{\kappa}_{\rho}\Big[\sum_{j=1}^{l} \mathbb{1}_{T_f=j} \sum_{k=1}^{l-j} \rho({}^{12}\mathcal{Q}^k f)\Big]. \end{aligned} \tag{5.23} $$

Par ailleurs, d'après la propriété de Markov, on a l'égalité :

$$ \sum_{k=1}^{l} \rho({}^{12}\mathcal{Q}^k f) = \mathbb{E}^{\kappa}_{\rho}\Big[\sum_{j=1}^{l} \mathbb{1}_{T_f=j} \sum_{k=1}^{l-j} {}^{12}\mathcal{Q}^k f(M_j)\Big]. $$

On déduit donc de l'équation (5.23) que :

$$ \mathbb{E}^{\kappa}_{\rho}[\psi_l(T_f)] = \mathbb{E}^{\kappa}_{\rho}\Big[\sum_{j=1}^{l} \mathbb{1}_{T_f=j} \sum_{k=1}^{l-j} [{}^{12}\mathcal{Q}^k f(M_j) - \rho({}^{12}\mathcal{Q}^k f)]\Big]. $$

Soit S_f le support de f. On a donc :

$$\mathbb{E}_\rho^\kappa[\psi_l(T_f)] \leq \sup_{\substack{(x,u)\in S_f \\ m\geq 1}} \Big| \sum_{k=1}^m {}^{12}\mathcal{Q}^k f(x,u) - \phi(f) \Big| + \sup_{m\geq 1} \Big| \sum_{k=1}^m \rho({}^{12}\mathcal{Q}^k f) - \phi(f) \Big|. \quad (5.24)$$

Si ρ a son support dans un compact C, alors membre de droite de l'équation (5.24) est majoré par une constante $\beta(C) < \infty$ d'après le théorème 5.5. D'après ce même théorème, on a aussi

$$\lim_{l\to+\infty} \psi_l(j) = \phi(f) j.$$

Le lemme de Fatou permet donc de conclure que $\phi(f)\mathbb{E}_\rho^\kappa[T_f] \leq \beta(C)$. En particulier, on a :

$$\sup_{(x,u)\in C} \mathbb{E}_{x,u,0}^\kappa[T_f] \leq \frac{\beta(C)}{\phi(f)},$$

et donc, comme $T_f \geq T_{\mathcal{O}}$, on en déduit que $\sup_{(x,u)\in C} \mathbb{E}_{x,u,0}^\kappa[T_{\mathcal{O}}] < \infty$. □

On peut maintenant donner la démonstration du théorème 5.4.

Démonstration du théorème 5.4

On commence par montrer par l'absurde que $\phi(\mathbb{S}^{d-1}\times]0,+\infty[) > 0$. Sinon, il existerait un point $(x_0,u_0) \in \mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}$ tel que u_0 soit la borne supérieure de la projection du support de ϕ sur $\mathbb{R}$. Le support de ϕ étant stochastiquement fermé pour la chaîne de Markov (M_n), on en déduit que pour tout $n \geq 0$,

$$\mathcal{Q}_{x_0,u_0}(W_n \geq u_0) = 1,$$

et donc également, par définition de W_n, on aurait $\mathbb{P}(x_0 R_n \geq 0)$, ce qui contredit le lemme 5.5.

Soit maintenant l'ouvert $\mathcal{O} = \mathbb{S}^{d-1}\times]0,+\infty[$. Pour tous $(x,u,t) \in \mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}_{x,u,t}^\kappa(\tau) = \mathbb{E}_{x,0,0}^\kappa(\tau) = \mathbb{E}_{x,0,0}^\kappa(T_{\mathcal{O}}).$$

Comme $\phi(\mathcal{O}) > 0$, la proposition 5.12 donne alors $\sup \mathbb{E}_{x,u,t}^\kappa(\tau) < \infty$. □

Chapitre 6

Application au modèle AR(d)

6.1 Introduction

Ce court chapitre est destiné à une application du théorème 5.1 au modèle AR(d) à coefficients réels iid. Ce modèle très utilisé en statistiques comprend en particulier la classe des modèles GARCH. La caractérisation de la queue de la loi stationnaire a été étudiée par K. Klűppelberg et S. Pergamenchtchikov, [46]. Nous allons montrer que le théorème 5.1 permet d'obtenir les même résultats sous des hypothèses beaucoup moins restrictives.

Les équations auto-régressives linéaires d'ordre $d \geq 2$, ou modèle AR(d),sont des équations de la forme :

$$X_n = a_{1,n}X_{n-1} + \cdots + a_{d,n}X_{n-d} + b_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6.1}$$

Pour les étudier, on se ramène à une équation vectorielle dans $\mathbb{R}^d$ de la façon suivante : on pose

$$\begin{array}{rcl} Y_n & = & {}^t(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-d+1}), \\ B_n & = & {}^t(b_n, 0, \ldots, 0), \end{array} \qquad A_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{d-1,n} & a_{d,n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A_n est la matrice compagnon associée aux coefficients $(a_{i,n})$.

L'équation (6.1) est alors équivalente à :

$$Y_n = A_{n-1}Y_{n-1} + B_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{6.2}$$

qui est une équation du même type que dans les deux chapitres précédents.

Dans l'article [46], il est démontré, à l'aide d'un théorème de renouvellement spécifique, que la solution stationnaire de l'équation (6.1) peut avoir une queue polynômiale. Leurs hypothèses sont assez restrictives. Le but de ce chapitre est de

montrer que le théorème 5.1 qui est beaucoup plus général s'applique bien dans ce contexte.

Dans la partie 6.2, on rappelle les hypothèses et les résultats de [46]. Dans la partie 6.3, on montre que le résultat de [46] est en fait un cas particulier du théorème 5.1. Enfin dans la partie 6.4 on donne un exemple simple et explicite en dimension $d = 2$ où le théorème 5.1 s'applique, mais qui ne rentre pas dans le cadre de [46].

6.2 Hypothèses et résultats de [46]

Les hypothèses faites dans [46] sont les suivantes :

(H1) Pour tous i et n, $a_{i,n}$ se décompose de la façon suivante :

$$a_{i,n} = \alpha_i + \sigma_i \eta_{i,n} \qquad \eta_n = {}^t(\eta_{1,n}, \dots, \eta_{d,n}),$$

où les α_i sont des réels quelconques, les σ_i sont des réels positifs, et $(\eta_{i,n})_{i,n}$ est une suite iid de variable aléatoires de carré intégrable centrées et réduites :

$$\mathbb{E}\eta_{i,n} = 0, \qquad \mathbb{E}\eta_{i,n}^2 = 1.$$

(H2) La suite (b_n) est une suite de variables aléatoires iid de carré intégrable et également centrées et réduites. De plus, (b_n) est indépendante de la suite (η_n).

Sous ces hypothèses, on a en particulier $\mathbb{E}\log^+ \|A_1\| < \infty$ et $\mathbb{E}\|B_1\| < \infty$, donc, comme vu au chapitre 4, la limite

$$\alpha = \lim \frac{1}{n} \log \|A_1 \cdots A_n\|$$

existe et est finie.

(H3) Les valeurs propres de la matrice $\mathbb{E}[A_1 \otimes A_1]$ sont de module strictement inférieur à 1.

Cette hypothèse assure que la limite α ci-dessus est strictement négative (proposition 4.1). On a donc existence et unicité de la solution stationnaire de l'équation (6.2). On la note encore R, et on peut l'écrire sous forme de série comme $\sum A_1 \cdots A_{k-1} B_k$. Sa première coordonnée est alors l'unique solution stationnaire de l'équation (6.1).

(H4) Les variables aléatoires $\eta_{i,n}$ ont une densité ϕ continue, symétrique, strictement positive sur $\mathbb{R}$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, elle a des moments finis à tout ordre.

(H5) Il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathbb{E}[a_{1,1} - \alpha_1]^{2m} = \sigma_1^{2m}\mathbb{E}[\eta_{1,1}]^{2m} > 1.$$

En particulier, ceci implique que $\sigma_1 > 0$.

(H6) Les variables aléatoires b_n ont un moment fini à tout ordre.

(H7) Pour toute suite réelle (c_k) vérifiant $0 < \sum |c_k| < \infty$, la variable aléatoire $C = \sum c_k b_k$ a une densité symétrique décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Cette dernière condition est technique et à priori difficile à vérifier. Les auteurs donnent donc une autre condition suffisante pour avoir (H7).

(H7') La variable aléatoire b_1 a une densité f bornée, symétrique, dérivable, de dérivée continue bornée et négative sur $\mathbb{R}_+$.

(H8) On a $\alpha_d^2 + \sigma_d^2 > 0$.

Cette condition assure que $a_{d,n} = det(A_n)$ est presque sûrement non nul, donc la matrice A_n est inversible.

Théorème 26 *Sous les hypothèses (H), la solution stationnaire de l'équation (6.2) vérifie, pour tout vecteur ligne x de $\mathbb{R}^d$ de norme 1 :*

$$\lim_{t\to+\infty} t^\kappa \mathbb{P}(xR > t) = h(x),$$

où h est une fonction continue, strictement positive sur la sphère, et κ est l'unique solution strictement positive de l'équation $k(\kappa) = 1$, où

$$k(s) = \lim(\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_n\|^s)^{1/n}.$$

En particulier, ce théorème s'applique au *Modèle linéaire gaussien*, i.e. au cas où $\eta_{1,n}$ et b_1 suivent des lois normales centrées réduite.

A partir de ce résultat, on retrouve la queue de la loi stationnaire de l'équation (6.1) en choisissant $x = (1, 0, \ldots, 0)$.

6.3 Application du nouveau théorème

On montre maintenant que le théorème précédent est un fait un cas particulier du théorème 5.1.

Tout d'abord, comme indiqué plus haut, l'hypothèse (H8) assure qu'on manipule bien des matrices inversibles, et la suite (A_n, B_n) est iid par les hypothèses (H1) et

(H2).

Les hypothèses (H1), (H4) et (H6) assurent automatiquement toutes les conditions d'intégrabilité (avec $\sigma = \infty$), et l'hypothèse (H3) assure la négativité du coefficient α et l'existence d'une solution stationnaire.

L'équation $A_1 x + B_1 = x$ prend une forme particulièrement simple ici. Notons $x_1, \ldots, x_d$ les coordonnées de x. On a alors :
$A_1 x + B_1 =$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{d-1,1} & a_{d,1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{d,1}x_d + b_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{d-1} \end{pmatrix}$$

donc x est solution de cette équation si et seulement si toutes ses coordonnées sont égales et $(a_{1,1} + \cdots + a_{d-1,1} - 1)x_1 + b_1 = 0$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}((a_{1,1} + \cdots + a_{d-1,1} - 1)x_1 + b_1 = 0) \\ &= \int \mathbb{P}((a_{1,1} + \cdots + a_{d-1,1} - 1)x_1 + b_1 = 0 \mid b_1 = y) d\mathbb{P}(b_1 = y) \\ &= \int \mathbb{P}((a_{1,1} + \cdots + a_{d-1,1} - 1)x_1 + y = 0) d\mathbb{P}(b_1 = y), \end{aligned}$$

puisque les $a_{i,1}$ et b_1 sont indépendantes par l'hypothèse (H2). De plus, cette dernière probabilité est nulle puisque les $a_{i,1}$ sont indépendantes entre elles et ont une densité par les hypothèse (H1) et (H4). Ainsi on n'a pas de point fixe presque sûr.

Examinons maintenant le semi-groupe Γ engendré par le support de la loi μ des matrices A_n. Comme $\alpha_d^2 + \sigma_d^2 > 0$ et $\sigma_1 > 0$ par les hypothèses (H5) et (H8), et que les variables aléatoires η ont une densité strictement positive par l'hypothèse (H4), le support S de μ contient au moins toutes les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $*$ peut prendre n'importe qu'elle valeur réelle, 0 signifie un réel éventuellement nul, et β un réel non nul. Ici, $\beta = \alpha_d$ ou $\beta = *$ si $\sigma_d > 0$. En faisant des produits de telles matrices, on voit que S^{2d-1} est alors le groupe $\mathcal{G}$ tout entier. Ainsi, $\Gamma = \mathcal{G}$ vérifie la condition i-p. De plus, ce semi-goupe ne laisse pas de cône saillant invariant. Enfin, comme $\sigma = \infty$ et que $\Gamma = \mathcal{G}$, Γ contient une matrice de rayon spectral strictement plus grand que 1, donc l'équation $k(\kappa) = 0$ a bien une unique solution

strictement positive.

Le théorème 5.1 s'applique donc bien ici. On remarque qu'on n'a pas utilisé l'hypothèse (H7). De plus, on obtient un résultat plus précis que [46] puisqu'on sait que la fonction limite $h(x)$ est un multiple de la fonction propre e_κ. En particulier, elle a une propriété remarquable de symétrie.

6.4 Exemple en dimension $d = 2$

Au vu des résultats des chapitres 4 et 5, on se doute qu'on peut beaucoup affaiblir les hypothèses de [46], en particulier, les hypothèses de densité et d'indépendence mutuelle de tous les coefficients. C'est ce qu'on va faire sur un exemple.

On se place en dimension $d = 2$, et on considère une mesure μ portée par deux matrices a et a', c'est-à-dire que les coefficients $a_{1,1}$ et $a_{1,2}$ ne peuvent prendre que deux valeurs, et que ces coefficients ne sont pas indépendants. On a vu au paragraphe 5.2.4 une condition suffisante pour que deux telles matrices engendrent un semi-groupe vérifiant la condition i-p : il suffit qu'elles aient chacune deux valeurs propres distinctes en modules, et que les quatre espaces propres correspondants soient deux à deux distincts. Par exemple, choisissons :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de a sont -1 et 2, et les espaces propres correspondants pour l'action à droite sont $E_{-1} = \{(x_1, x_2) \mid 2x_1 = -x_2\}$ et $E_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2\}$. Celles de a' sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ d'espaces propres correspondants $E_{-\frac{1}{2}} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 4x_2\}$ et $E_{\frac{1}{4}} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = -2x_2\}$. Les quatre espaces propres sont distincts, donc le semi-groupe engendré par ces deux matrices vérifie la condition i-p. Comme de plus a' a une valeur propre dominante négative, on sait que ce semi-groupe a un unique ensemble fermé invariant minimal sur la sphère, donc il ne laisse pas de cône convexe fermé saillant d'intérieur non vide invariant.

Vérifions maintenant la condition d'existence d'une solution stationnaire, c'est-à-dire $\alpha < 0$. Comme la norme euclidienne des matrices compagnon est toujours plus grande que 1, puisque $(0, 1)a = (1, 0)$ pour toute matrice compagnon a, on ne peut pas espérer montrer que $\mathbb{E} \log \|A_1\| < 0$. On va donc utiliser le critère de la proposition 4.1 avec le produit de Kronecker. Si $\mu = p\delta_a + (1-p)\delta_{a'}$, avec $p = \frac{1}{4}$, alors on a :

$$\mathbb{E}[A_1 \otimes A_1] = \begin{pmatrix} \frac{1}{128} & \frac{19}{256} & \frac{19}{256} & \frac{361}{1024} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{19}{16} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{19}{16} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul numérique par ordinateur (avec le logiciel SCILAB) donne les valeurs propres de cette matrice. Ce sont 0.6439022, 0.5475041 et -0.59375 comme valeur propre double. En particulier, le rayon spectral est strictement inférieur à 1, donc

on a bien $\alpha < 0$ et l'existence et l'unicité d'une solution stationnaire.

Comme le rayon spectral de a est strictement plus grand que 1, l'équation $k(\kappa) = 1$ a bien une solution strictement positive.

Il reste à choisir la loi de b_1. Si on choisit une loi continue avec des moments à tout ordre, comme la loi normale, on aura automatiquement l'absence de point fixe presque sûr comme dans le chapitre 3. On peut aussi choisir une loi discrète, donc sans densité, et ne prenant pas seulement les valeurs $1 - a_{1,1} - a_{1,2}$, c'est à dire autres que -2 et $\frac{9}{8}$.

On voit bien sur cet exemple que les hypothèses de densité et d'indépendance de tous les coefficients faites dans [46] sont superflues.

Conclusion

Nous terminons cette thèse par un rapide bilan et un aperçu des prolongement possibles.

Bilan

Sous des hypothèses simples, le modèle auto-régressif linéaire à coefficients aléatoires admet une unique solution stationnaire notée R. Le comportement à l'infini de sa queue a été étudié par H. Kesten, E. LePage puis C. Goldie lorsque les coefficients sont indépendants. Ils ont montré en particulier que cette queue peut avoir un comportement polynômial, c'est-à-dire que $t^{\kappa}\mathbb{P}(\|R\| > t)$ tend vers une constante non nulle quand t tend vers l'infini. Ils ont donné de plus une caractérisation de cette constante κ comme l'unique solution de l'équation $k(s) = 1$, où $k(s) = \lim(\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_n\|^s)^{1/n}$.

Dans cette thèse, on a étendu le résultat ci-dessus dans deux directions. D'une part, on a considéré une modèle auto-régressif scalaire à coefficients markoviens. On a vu qu'on retrouve alors la propriété de queue polynômiale sous des hypothèses similaires à celles du cas iid. De plus, le coefficient κ se calcule de la même façon. D'autre part, dans la cas miltidimensionnel iid on a étendu les résultats existants à une vaste classe de matrices, c'est-à-dire aux matrices vérifiant la condition i-p.

Perspectives

Pour poursuivre notre étude dans le cas markovien, plusieurs pistes se présentent. En dimension un, on peut essayer d'étendre le résultat à une chaîne de Markov plus générale, à espace d'états infini. On ne pourra donc plus utiliser la théorème de renouvellement vectoriel. Il faudra plutôt faire appel à un théorème du même type que celui de H. Kesten, valable pour des opérateurs markoviens.

Un autre prolongement naturel de ce travail est d'obtenir un résultat multidimensionnel pour les chaînes de Markov. Dans un premier temps, on peut se limiter aux chaînes de Markov à espace d'états fini, ce qui est suffisant pour les applications statistiques.

En ce qui concerne le modèle à coefficients iid, on conjecture que le nouvel énoncé obtenu est le complément optimal du théorème de H. Kesten, c'est à dire que dans

le cas où il existe un cône invariant, la démonstration de Kesten pour les matrices positives reste valide . Il faudrait vérifier rigoureusement ce point.

Au cours des démonstrations, on a constaté que c'est le terme linéaire en a_1 qui détermine le comportement de la loi stationnaire lorsqu'on regarde l'application affine $x \longmapsto a_1 x + b_1$. On peut donc espérer traiter de la même façon des récurrences non linéaires du type $Y_{n+1} = a_n Y_n + b(Y_n)$ où b est une fonction scalaire sous linéaire, c'est-à-dire vérifiant $\frac{b(x)}{x} \to 0$ quand x tend vers l'infini, de sorte que le terme linéaire est encore le terme dominant.

Enfin, en plus de s'intéresser à la queue de la solution stationnaire, on peut étudier la vitesse dec onvergence du processus (Y_n) vers la loi stationnaire. On peut également étudier ses valeurs extrêmes, o'u l'outil probabiliste de base reste la théorie du renouvellement.

Index Général

$q \otimes \mu$-ergodique, 154

Adhérence algébrique, 135
Arithmétique, 17, 22, 123, 138
Asymptotiquement dense, 18, 28
Auto-régression, 9, 43

Borne supérieure, 36

Chaîne de Markov, 43, 156, 163
Condition i-p, 135
Conditions I1-I4, 122
Convexité, 10, 53, 91, 127, 143
Critère de Cauchy, 57

Décalage, 138, 139, 154
Diffusion, 12
Diffusion à régime markovien, 87
Diffusion de Ornstein-Uhlenbeck, 85
Dilatant, 144
Directement Riemann intégrable, 17
Direction dominante, 134
Discrétisation, 88
Drift, 64

EDS, 85
Ensemble limite, 135
Equation de renouvellement, 15
Equation récursive aléatoire, 9
Equicontinuité, 151
Ergodicité, 43, 44, 85, 86, 89, 154
Espace projectif, 116, 125
Estimateur de Hill, 83
Estimation de Cramér, 64
Exposant de croissance, 142
Exposant de Lyapounov, 10, 117

Fonction
  à variation lente, 84
  d'intensité, 86
  de répartition, 16, 21
  de renouvellement, 15, 16, 21
  excessive, 33
  hőldérienne, 143

Graphe, 76

Groupe spécial linéaire, 135

Hauteur d'échelle, 65, 110
Hyperplan répulsif, 134

i.i.d., 9
Inégalité
  Feller Chung, 47, 63, 76, 109
  symétrisation de Lévy, 47, 61, 74, 108
  Tchebychev, 157
Indépendance, 80
Irréductibilité, 70, 76, 134
Irréductibilité forte, 134

Loi limite, 86
Loi stationnaire, 10, 85

Médiane, 61, 74, 108
Marche aléatoire, 19, 64
  à régime markovien, 65, 76
  associée, 64
Markov switching, 11, 43
Matrcie
  compagnon, 175
Matrice
  ℓ-irréductible, 70
  μ-réalisable, 125
  apériodique, 22
  irréductible, 22
  markovienne, 65
  positive, 22
  primitive, 22
  semi-markovienne, 65
  sous-stochastique, 65
  stochastique, 65
Mesure de Haar, 135
Mesure irréductible, 125
Modèle AR(1), 9
Modèle AR(d), 9, 175
Modèle GARCH, 9
Modèle linéaire gaussien, 177
Moments, 10, 56, 85, 95, 160

Norme euclidienne, 9

Noyau, 32, 86
Noyau potentiel, 33

Point d'accroissement, 18, 27
Point périodique, 138
Potentiel, 32
Processus
  échelle, 112
  d'échelle, 65, 129
  de comptage, 15
  de renouvellement, 15
  de renouvellement markovien, 64, 110
  markovien de saut, 86
Produit de convolution, 15
Produit de convolution matriciel, 21
Produit de Kronecker, 118
Proximalité, 134

Quasi-compact, 127, 144, 171
Queue de distribution, 11, 45, 83, 85
Queue exponentielle, 89
Queue polynômiale, 11, 49, 85, 89

Récurrence, 123, 126
Régime markovien, 11, 43, 85
Renouvellement, 11, 15

Série chronologique, 43
Sauts, 103
Semi-groupe, 90, 134
Semi-groupe markovien, 86
Solution stationnaire, 9, 45, 89
Sous-espace affine, 161
Sphère, 116
Statinnarité, 86
Stationnarité, 11, 43, 80
Statistique d'ordre, 84
Stochastiquement fermé, 174

Temps continu, 85
Temps d'échelle, 47, 65, 110, 125, 130
Temps d'attente, 103
Théorème
  Ascoli, 30
  Banach Steinhaus, 170
  Borel Cantelli, 157
  Continuité sous l'intégrale, 161
  Convergence dominée, 30, 56, 72, 106, 150, 166
  Convergence monotone, 169
  Dérivation sous l'intégrale, 31
  Ergodique, 157
  Fatou, 157, 174
  Fubini, 50, 149
  Ionescu-Tulcea Marinescu, 171
  Markov Kakutani, 153
  Perron Frobenius, 23
  Principe du maximum, 36
  Queue de la solution stationnaire
    cas continu, 89
    dim 1, cas iid, 46
    dim 1, cas markovien, 48
    dim d condition i-p, 145
    dim d, cas i.i.d. positif, 121
    dim d, cas i.i.d. récurrent, 126
  Renouvellement
    dim 1 cas général, 20
    dim 1 cas positif, 17
    dim p cas général, 26
    dim p cas positif, 24
    Kesten, 123
Trace, 118
Transformée de Laplace, 20, 25, 53, 67, 90, 111
Transience, 19, 26, 123

Vecteur positif, 22
Vecteur propre dominant, 134

Index des Notations

(A_n), 116, 126, 133, 175
(B_n), 116, 126, 133, 175
(M_n), 131, 171
(P_t), 86
(R_n), 45, 98, 163
(S_n), 65, 76, 110
(U_n), 124, 155
(V_n), 88, 122, 124, 129, 156, 163
(W_n), 129, 163
(X_n), 124, 129, 155, 163, 175
(Y_n), 9, 43, 116, 175
$(\Omega, \mathcal{A}, (Q_x)_{x\in E})$, 86
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 116, 133
$(\Theta, \mathcal{B}, Q')$, 86
(ξ_n), 88
(a_n), 9, 48, 88
$(a_{i,n})$, 175
(b_n), 9, 48, 88, 175
$*$, 15, 21
A_s, 94
$A_{(s,\delta)}$, 90
C_+, 46
C_-, 46
$D(\lambda)$, 171
$E = \{1, \ldots, p\}$, 86
$E = \{e_1, \ldots, e_p\}$, 48
F, 16
$F(\infty) = (F_{ij}(\infty))$, 23
$F = (F_{ij})$, 21, 51, 70, 100
$F^{(0)}$, 16, 21
$F^{(n)}$, 16, 21
F_x^y, 122
G, 16, 33
$G(x,t)$, 129, 150
$G = {}^t(G_1, \ldots, G_p)$, 21, 50, 100
G^A, 34
$G_1(x,t)$, 162
$G_2(x,t)$, 162
G_A, 34
$G_e(x,t)$, 131, 167
$G_e^L(x,t)$, 168
$Gl(d, \mathbb{R})$, 9
$H = (H_{ij})$, 65, 111
$H_\varepsilon(\mathcal{P}^{d-1})$, 143
I, 33
J_A, 33
$K = (k_{ij})$, 110
L, 89
$L(\Gamma)$, 135
$L(x)$, 48
M, 68, 112
$M^1(\cdot)$, 128
M_s, 96
N, 32
$N = (N_{i,j})_{1\le i,j\le p}$, 32
$P = (p_{ij})$, 48
P^s, 119, 127, 142
P_s, 53
P_κ, 48
$Q = (q_{ij})$, 65
Q^s, 119, 127, 144
Q_v^s, 127, 145
R, 10, 12, 117, 133, 176
R_1, 149
R_1^n, 61, 107
S_μ, 116, 142
U, 16
$U = (U_{ij})$, 21, 52, 104
$V_-(a)$, 134
$V_{s,t}$, 88
$W = (W_t)$, 86
$X = (X_t)$, 86
$Y = (Y_t)$, 87
Z, 16
$Z(x,t)$, 129, 150
$Z = {}^t(Z_1, \ldots, Z_p)$, 21, 49, 99
$Z_e(x,t)$, 131, 167
$Z_e^L(x,t)$, 168
Γ, 134
$\Gamma = (\gamma_{ij})$, 21, 52, 101
Γ_0, 134
Γ_1, 134
Γ_μ, 142
Ω_1, 127, 145
Ω_2, 130, 166
Π_n, 61, 107, 124

$\Psi = (\Psi_{ij})$, 66, 111
Σ_{ij}, 27
α, 10, 45, 88, 117, 126, 133, 142
α_i, 176
$\bar{i}$, 52
$\check{\varphi}$, 153
δ, 48, 88, 126
$\delta_{\mathcal{P}}$, 116
ℓ, 48, 146
η, 117, 145
$\eta_n = {}^t(\eta_{1,n}, \ldots, \eta d, n)$, 176
γ, 16, 24, 26, 59, 107, 157
$\gamma^{\infty}(\cdot)$, 142
$\geqslant$, 22
$\gg$, 22
$\mathbb{1}$, 15
κ, 11, 46, 48, 89, 93, 121, 124, 126
λ, 86
$\log^+$, 10
$\mathbb{E}_{\rho}^{\kappa}$, 167
$\mathbb{E}_{x,u,t}^{\kappa}$, 130, 166
$\mathbb{E}_i$, 90
$\mathbb{E}_{x,u,t}$, 130, 164
$\mathbb{P}_i$, 90
$\mathbb{P}_{\mu}$, 86
$\mathbb{R}$, 9
$\mathbb{R}_+$, 16
$\mathbb{R}_+^*$, 48
$\mathbb{R}_-$, 39
$\mathbb{S}^{d-1}$, 116
$\mathbb{S}_+$, 116
$\mathbb{Z}$, 11
$\mathbf{1} = {}^t(1, \ldots, 1)$, 36
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 32
$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$, 86
$\mathcal{F}_{\mathbb{S}}(\cdot)$, 136
$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\cdot)$, 136
$\mathcal{G}$, 9
$\mathcal{P}$, 152
$\mathcal{P}^s$, 119, 123
$\mathcal{P}^{d-1}$, 116
$\mathcal{Q}$, 124, 150
$\mathcal{Q}^s$, 119
$\mathcal{Q}_x$, 154
$\mathcal{Q}_{\pi}$, 155
$\mathcal{Q}_{\rho}$, 167
$\mathcal{Q}_{x,u,t}$, 130, 166
μ, 48, 86, 123, 126, 142, 145
ν, 89
ν^s, 123, 143
$\otimes$, 118
$\overline{H}$, 66
$\overline{H}_{\kappa}$, 67
$\overline{\Gamma} = (\overline{\gamma}_{ij})$, 67, 111
$\overline{\Psi}$, 66
π, 154
π^s, 128, 144
$\preceq$, 33
$\psi(x,t)$, 129, 149
$\psi_i(t)$, 99
$\psi_i(x,t)$, 50
ρ, 167
$\rho(\cdot)$, 22
σ, 87, 119, 126, 142
σ_i, 176
τ, 65, 110, 130, 164
τ_n, 66, 111, 165
$\mathit{Aff}(\mathbb{R}^d)$, 169
θ, 154
$\tilde{v}$, 116
$\underset{\sim}{s}$, 143
$\widehat{K}(s) = (\hat{k}_{ij}(s))$, 111
$\widehat{Q}(s) = (\hat{q}_{ij}(s))$, 67
$\widetilde{F} = (\widetilde{F}_{ij})$, 52
$\widetilde{G} = {}^t(G_1^+, \ldots, G_p^+, G_1^-, \ldots, G_p^-)$, 52
$\widetilde{U}$, 71
$\widetilde{Z} = {}^t(Z_1^+, \ldots, Z_p^+, Z_1^-, \ldots, Z_p^-)$, 52
$\widetilde{\Gamma} = (\widetilde{\gamma}_{ij})$, 70
$\widetilde{m}$, 71
$\widetilde{u}$, 71
$\xi_{s,t}$, 88
$a_{s,t}$, 87
d, 9, 115, 133
$e(\cdot)$, 87
e_s, 119, 124, 127, 143
f^{δ}, 122
$g(x,t)$, 129, 149
$g_e(x,t)$, 130, 164
$h_{\kappa}(x,t)$, 131, 166
$k(s)$, 10, 119, 123, 127, 142
m, 23, 26, 59, 107

m_+, 75
m_-, 75
m_0, 62, 108
med_+, 74
med_-, 61, 108
med_i, 61, 108
p, 21, 48, 86
$p_+(a)$, 134
q, 66
$q(x, a)$, 151
$q = (q(i, j))$, 86
$q^s(v, a)$, 144
$q_n^s(v, \omega)$, 145
$q_n(x, \omega)$, 151
s_1, 96
sgn, 51
u, 23, 26, 59, 107
$x \cdot a$, 116
$z(t)$, 99
$z(x, t)$, 49, 128, 149
$z_e(x, t)$, 130, 164
^{c}, 33
^{t}, 21
$^{123}\mathcal{N}$, 120, 129, 163
$^{123}\mathcal{N}_\tau$, 130, 164
$^{123}\mathcal{Q}$, 120, 130, 166
$^{123}\mathcal{Q}_\tau$, 130, 166
$^{12}\mathcal{Q}$, 119, 131, 171
$^{13}\mathcal{N}_\tau$, 130, 164
$^{13}\mathcal{Q}$, 120, 129, 150
$^{13}\mathcal{Q}_\tau$, 130, 166

$\bar{x}$, 116

Bibliographie

[1] Arjas, E., and Speed, T. P. An extension of Cramér's estimate for the absorption probability of a random walk. *Proc. Cambridge Philos. Soc. 73* (1973), 355–359.

[2] Asmussen, S. Aspects of matrix Wiener-Hopf factorisation in applied probability. *Math. Sci. 14*, 2 (1989), 101–116.

[3] Asmussen, S. *Ruin probabilities*, vol. 2 of *Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2000.

[4] Asmussen, S. *Applied probability and queues*, second ed., vol. 51 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[5] Athreya, K. B., and Rama Murthy, K. Feller's renewal theorem for systems of renewal equations. *J. Indian Inst. Sci. 58*, 10 (1976), 437–459.

[6] Barndorff-Nielsen, O. E., and Shephard, N. Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol. 63*, 2 (2001), 167–241.

[7] Basak, G. K., Bisi, A., and Ghosh, M. K. Stability of a random diffusion with linear drift. *J. Math. Anal. Appl. 202*, 2 (1996), 604–622.

[8] Bollerslev, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *J. Econometrics 31*, 3 (1986), 307–327.

[9] Bougerol, P., and Picard, N. Strict stationarity of generalized autoregressive processes. *Ann. Probab. 20*, 4 (1992), 1714–1730.

[10] Bowen, R. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Springer-Verlag, Berlin, 1975. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 470.

[11] Brandt, A. The stochastic equation $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ with stationary coefficients. *Adv. in Appl. Probab. 18*, 1 (1986), 211–220.

[12] Breiman, L. *Probability*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1968.

[13] Brockwell, P. J. Lévy-driven CARMA processes. *Ann. Inst. Statist. Math. 53*, 1 (2001), 113–124.

[14] Chow, Y. S., and Teicher, H. *Probability theory. Independence, interchangeability, martingales*, third ed. Springer-Verlag, New York, 1997.

[15] Crump, K. S. On systems of renewal equations. *J. Math. Anal. Appl. 30* (1970), 425–434.

[16] de Saporta, B. Renewal theorem for a system of renewal equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 39* (2003), 823–838.

[17] de Saporta, B. Tail of the stationnary solution of the stochastic equation $y_{n+1} = a_n y_n + b_n$ with markovian coefficients. Accepté sous réserve de correction dans Stochastic Processes and Applications, 2004.

[18] de Saporta, B. Tail of the stationnary solution of the stochastic equation $y_{n+1} = a_n y_n + b_n$ with markovian coefficients. Note aux comptes rendus de l'Académie des Sciences, à paraître, 2004.

[19] de Saporta, B., Guivarc'h, Y., and Le Page, E. On the multidimensional stochasti equation $y_{n+1} = a_n y_n + b_n$. *C. R. Acad. Sci. 339*, 7 (2004), 499–502.

[20] de Saporta, B., and Yao, J.-F. Tail of a linear diffusion with markov switching. A paraître dans Annals of Applied Probability, 2004.

[21] de Saporta, B., and Yao, J.-F. Tail of a linear diffusion with markov switching. *C. R. Acad. Sci. 339*, 9 (2004), 643–646.

[22] Dellacherie, C., and Meyer, P.-A. *Probabilités et potentiel. Chapitres IX à XI. Théorie discrète du potentiel*, revised ed. Hermann, Paris, 1983.

[23] Engibaryan, N. B. Renewal theorems for a system of integral equations. *Sb. Mat. 189* (1998), 1795–1808.

[24] Engle, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica 50*, 4 (1982), 987–1007.

[25] Feller, W. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.

[26] Francq, C., and Roussignol, M. Ergodicity of autoregressive processes with Markov-switching and consistency of the maximum-likelihood estimator. *Statistics 32*, 2 (1998), 151–173.

[27] Francq, C., and Zakoïan, J.-M. Stationarity of multivariate Markov-switching ARMA models. *J. Econometrics 102*, 2 (2001), 339–364.

[28] Furstenberg, H. Noncommuting random products. *Trans. Amer. Math. Soc. 108* (1963), 377–428.

[29] Furstenberg, H. Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces. In *Harmonic analysis on homogeneous spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVI, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972)*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973, pp. 193–229.

[30] Goldie, C. M. Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. *Ann. Appl. Probab. 1*, 1 (1991), 126–166.

[31] Goldsheid, I. Y., and Guivarc'h, Y. Zariski closure and the dimension of the Gaussian law of the product of random matrices. I. *Probab. Theory Related Fields 105*, 1 (1996), 109–142.

[32] Grincevičius, A. K. Products of random affine transformations. *Lithuanian math. J. 20* (1980), 279–282.

[33] Guivarc'h, Y., and Le Page, E. Simplicité de spectres de Lyapunov et propriété d'isolation spectrale pour une famille d'opérateurs de transfert sur

l'espace projectif. In *Random Walks and Geometry (Workshop Vienna 2001)*, V. Kaimanovitch, Ed. De Gruyter, 2004, pp. 181–259.

[34] Guivarc'h, Y., and Raugi, A. Products of random matrices : convergence theorems. In *Random matrices and their applications (Brunswick, Maine, 1984)*, vol. 50 of *Contemp. Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 31–54.

[35] Guivarc'h, Y., and Urban, R. Semigoup actions on d-dimensional tori. preprint, 2004.

[36] Guyon, X., Iovleff, S., and Yao, J.-F. Linear diffusion with stationary switching regime. *ESAIM Probability and statistics 8* (2004), 25–35.

[37] Hamilton, J. D. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica 57*, 2 (1989), 357–384.

[38] Hamilton, J. D. Analysis of time series subject to changes in regime. *J. Econometrics 45*, 1-2 (1990), 39–70.

[39] Hamilton, J. D. Estimation, inference and forecasting of time series subject to change in regime. In *Handbook of Statistics*, C. R. eds G. Maddala and D. Vinod, Eds., vol. 11. Elsevier, Amsterdam, 1993, pp. 230–260.

[40] Hamilton, J. D. *Advances in Markov-Switching Models (Applications in Business Cycle Research and Finance)*. Springer-Verlag, 2002.

[41] Hill, B. M. A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Statist. 3*, 5 (1975), 1163–1174.

[42] Horn, R., and Johnson, C. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[43] Karatzas, I., and Shreve, S. E. *Brownian Motion and Stochastic calculus*. Springer, New-York, 1991.

[44] Kesten, H. Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Math 131* (1973), 207–248.

[45] Kesten, H. Renewal theory for functionals of a markov chain with general state space. *Ann. Probability 2* (1974), 355–386.

[46] Klüppelberg, C., and Pergamenchtchikov, S. The tail of the stationary distribution of a random coefficient AR(q) model. *Ann. Appl. Probab. 14*, 2 (2004), 971–1005.

[47] Le Page, E. Théorème de renouvellement pour les produits de matrices aléatoires. equations aux différences aléatoires. In *Séminaires de probabilités de Rennes* (1983).

[48] Merlet, G. Théorème d'oseledec. séparation des exposants de lyapunov dans deux cas simples. Mémoire de DEA, 2002.

[49] Norman, F. *Markov Processes and Learning Models*. Academic Press, New York and London, 1972.

[50] Norris, J. R. *Markov Chains*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[51] Perraudin, C. *Asymétries Conjonctuelles et Dynamique de l'Emploi : Essai de Modélisations Non-linéaires*. PhD thesis, Université Paris I, 1999.

[52] Royer, S. Estimateur de hill. Mémoire de séminaire de DEA, 2003.

[53] Rynkiewicz, J., Dutot, A., and Steiner, F. Ozone modeling in an urban atmosphere using artificial neural network. In *Proceedings of the Second conference on air pollution modelling and simulation* (2002), Springer, pp. 537–543.

[54] Tsalyuk, Z. B. The structure of the resolvent of a system of renewal equations with a difference kernel. *Russian Math. (Iz. VUZ) 45* (2001), 68–76.

[55] Williams, D. *Probability with martingales*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[56] Yao, J.-F. On square-integrability of an AR process with Markov switching. *Statist. Probab. Lett. 52*, 3 (2001), 265–270.

[57] Yao, J.-F., and Attali, J.-G. On stability of nonlinear AR processes with Markov switching. *Adv. in Appl. Probab. 32*, 2 (2000), 394–407.

Etude de la solution stationnaire de l'équation $Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n$ à coefficients aléatoires

Résumé

Le modèle auto-régressif linéaire (AR) en temps discret et à coefficients aléatoires englobe de nombreuses classes de modèles très utilisés en modélisation statistique. Sous des hypothèses simples, ce modèle a une unique solution stationnaire. Le comportement à l'infini de sa queue a été étudié par H. Kesten, E. LePage puis C. Goldie lorsque les coefficients sont indépendants. Cette thèse étend leurs résultats dans deux directions. Dans une première partie, on étudie le modèle AR scalaire à régime markovien introduit par J. D. Hamilton en économétrie. On obtient un résultat similaire au cas indépendant qui s'étend aussi au temps continu. Dans une deuxième partie, on s'intéresse au modèle multidimensionnel à coefficient indépendants. On étend les résultats existants à une vaste classe de coefficients vérifiant une condition d'irréductibilité et de proximalité. Les techniques utilisées dans les deux parties font appel à la théorie du renouvellement et des opérateurs markoviens.

Study of the stationnary solution of Equation $Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n$ with random coefficients

Abstract

The linear autoregressive process (AR) in discrete time with random coefficients contains a large class of time series models that are very popular in statistics. Under weak assumptions, this process has a unique stationnary solution. The behaviour of its tail at infinity has been investigated by H. Kesten, E. LePage and C. Goldie when the coefficients are independent. This thesis extends their results in two directions. In a first part, we study the one-dimensionnal AR process with Markov switching introduced by J. D. Hamilton in econometrics. We get a similar result as in the independent case that can also be extended to continuous time processes. In a second part, we study the multidimensional model with independent coefficients. We extend the results mentionned above to a wider class of coefficients, namely a class with a property of irreducibility and proximality. Both parts make an intensive use of Renewal theory and Markovian operators.