Cascade bidimensionnelle d'un traceur : diagnostic dans l'espace physique et modélisation

Thomas Dubos

▶ **To cite this version:**

Thomas Dubos. Cascade bidimensionnelle d'un traceur : diagnostic dans l'espace physique et modélisation. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2001. Français. NNT : . tel-00007421

HAL Id: tel-00007421

https://theses.hal.science/tel-00007421

Submitted on 16 Nov 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de l'université Paris VI

Spécialité : Physique des Liquides

Cascade bidimensionnelle d'un traceur : diagnostic dans l'espace physique et modélisation

présentée par

Thomas Dubos

pour obtenir le titre de docteur de l'université Paris VI

soutenue le 18 décembre 2001 devant le jury composé de

M.	Armando BABIANO	Directeur
M.	Yves COUDER	Invité
M.	Jean-Marc CHOMAZ	Examinateur
Mme	Lien HUA	Rapporteur
Mme	Michèle LARCHEVÊQUE	Examinatrice
M.	Alain PUMIR	Examinateur
M.	Joël SOMMERIA	Rapporteur
M.	Patrick TABELING	Co-directeur

Remerciements

Cette thèse est le fruit de presque trois ans de travail au Laboratoire de Météorologie Dynamique, à l'École Normale Supérieure, où j'ai bénéficié d'un environnement scientifique et de moyens de travail motivants. Elle doit évidemment beaucoup à Armando Babiano. J'espère avoir su profiter de sa connaissance intime, acquise grâce à une fréquentation longue et assidue, de la turbulence bidimensionnelle. Il m'a aussi initié à l'expérimentation numérique dans ses atouts et ses limites. Enfin, ses qualités scientifiques et humaines ont rendu passionnants ces longs mois de travail. Ma thèse doit aussi beaucoup à la codirection de Patrick Tabeling, dont j'ai pu apprécier l'exigence de rigueur et le sens physique. Le point de vue de l'expérimentateur est toujours un frein utile à la tentation du numéricien de «tourner les boutons». Qu'ils en soient ici remerciés.

Je tiens à remercier particulièrement Lien Hua, avec qui j'ai eu la chance d'avoir plusieurs discussions toujours très intéressantes. Ses travaux en collaboration avec Patrice Klein et Guillaume Lapeyre sont un point de départ et une référence pour beaucoup de questions abordées dans cette thèse. Ses critiques constructives et sa capacité à entrer dans le point de vue de son interlocuteur m'ont beaucoup apporté. Merci également pour m'avoir apporté son soutien lors de certaines démarches. Je suis très heureux et honoré qu'elle ait accepté d'être rapporteur de cette thèse.

Claude Basdevant a contribué par ses bons conseils et ses suggestions pragmatiques à améliorer plusieurs points de cette thèse. C'est notamment lui qui m'a mis dans les mains l'ouvrage très complet de Pierre Sagaut [**98**]. Merci aussi à Marie Farge et Vladimir Zeitlin dont les suggestions m'ont été fort utiles.

Ma participation à l'ACI «jeunes chercheurs» pilotée par Alexandre Stegner a été une occasion salutaire d'ouverture à des préoccupations plus proprement géophysiques mais aussi un plaisir largement dû à la personnalité de ses autres participants, Riwal Plougonven, Albert Hertzog et Pascale Bouruet-Aubertot. J'y ajouterai Caroline Jullien et Patricia Castiglione, grâce à qui je ne me suis pas trop senti perdu dans certaine conférence.

Enfin, je tiens à remercier tous les membres de mon jury, et particulièrement Joël Sommeria qui a accepté la charge supplémentaire de rapporteur.

Si vous ne trouvez plus rien,
cherchez autre chose !
[81]

Table des matières

Remerciements 3

Introduction 11

partie 1. Turbulence bidimensionnelle 15

Chapitre 1. Notion de cascade turbulente 17
1.1. Cascade tridimensionnelle d'énergie 17
1.1.1. La cascade de Richardson 17
1.1.2. Théories statistiques 19
1.1.3. Représentation spectrale 20
1.2. Cascade de traceur 22
1.2.1. Domaines convectif et diffusif 22
1.2.2. Le régime de Batchelor 23
1.3. Bilan 24

Chapitre 2. Spécificités bidimensionnelles 25
2.1. La double cascade 25
2.2. Structures cohérentes 28
2.3. Transferts d'énergie 28
2.3.1. Intermittence 28
2.3.2. Variance des transferts d'énergie 34
2.4. Bilan 35

Article paru dans *Physical Review E* 37

Article soumis à *Physical Review Letters* 39

Chapitre 3. Spécificités pour un traceur 41
3.1. Contrastes dynamiques 41
3.2. Dynamique des gradients de traceur 42
3.2.1. Partition de l'espace physique 42
3.2.2. Alignements préférentiels 44
3.3. Bilan 46

partie 2. Cascade d'un traceur et paramétrisation 47

Chapitre 4. Diagnostic et paramétrisation 49
4.1. Transport, mélange et paramétrisation 49

4.1.1. Transport et mélange 49
4.1.2. «Mélange» turbulent et paramétrisation 49
4.1.3. Problèmes abordés 50
4.2. Transferts de variance d'échelle en échelle 51
4.2.1. Dynamique des incréments de traceur 51
4.2.2. Flux local et équation de Yaglom 54
4.2.3. La cascade vue dans l'espace physique 57
4.3. Une diffusivité anisotrope : *strain diffusivity* 59
4.3.1. Diffusivité turbulente et hyperdiffusivité 59
4.3.2. Diffusivité de déformation ou *strain diffusivity* 62
4.4. Cascade inverse et paramétrisation 64
4.4.1. Interpédendance des deux cascades 64
4.4.2. *Strain diffusivity* et énergie 65
4.4.3. Énergie : problème inverse 67
4.4.4. Discussion 70

Article paru dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 73

Chapitre 5. Résultats numériques 75
5.1. Flux local et paramétrisation 75
5.2. Comparaison quantitative 79
5.2.1. Filtre effectif 79
5.2.2. Erreur et discussion 82
5.3. Impact sur les grandes échelles 84
5.3.1. Phase transitoire 86
5.3.2. État stationnaire 87
5.3.3. Espace physique 89
5.4. Dynamique comparée de la vorticité et d'un traceur passif 90
5.4.1. Intérêt de diagnostics semi-locaux 93
5.4.2. Expériences numériques 96
5.4.3. Moyennes conditionnées par la déformation 97
5.4.4. Moyennes conditionnées par la rotation effective 100
5.4.5. Moyennes conditionnées par le paramètre s 102

Article soumis à *Journal of Fluid Mechanics* 107

Chapitre 6. Prolongements 109
6.1. Application à la diffusivité efficace 109
6.1.1. Définition 109
6.1.2. Extension à la diffusivité de déformation 110
6.1.3. Extension au flux local 112
6.2. Comparaison avec le modèle Euler-α 116
6.2.1. Formulation 116
6.2.2. *Strain diffusivity* et dérivées en corotation 117

6.2.3. Extension 119

Conclusions et discussion 123

Annexe A. Traceurs actif et passif dans l'espace spectral 127

Annexe B. Incréments, ondelettes et flux locaux 131

Annexe C. Influence des paramétrisations sur les alignements 133

Annexe D. Méthodes numériques et paramètres 139

Annexe E. Principales notations 141

Annexe. Bibliographie 143

Introduction

La turbulence est un phénomène d'une grande importance : pratique, industrielle, météorologique. C'est aussi, aujourd'hui encore, l'un des moins bien compris et modélisés par les physiciens, malgré une connaissance complète des équations du mouvement. Notre description et notre compréhension de la turbulence s'articulent autour du concept de cascade formé notamment par Richardson, Kolmogorov, Batchelor et Kraichnan. Ce concept de cascade transférant entre les différentes échelles de l'écoulement un invariant quadratique comme l'énergie, et construit à l'origine pour elle, permet aussi de représenter l'évolution spatio-temporelle d'un traceur, c'est-à-dire d'une quantité transportée par le fluide.

La turbulence considérée dans cette thèse n'est pas la turbulence «naturelle» et tridimensionnelle mais la turbulence bidimensionnelle. La turbulence bidimensionnelle est en effet un modèle conceptuel utile pour décrire les écoulements géophysiques, atmosphériques ou océaniques. C'est aussi un terrain accessible pour l'exploration numérique et plus récemment expérimentale. De plus elle possède avec la cascade d'enstrophie (carré de la vorticité, la vorticité étant la vitesse locale de rotation de l'écoulement) une cascade de plus que la turbulence tridimensionnelle. Enfin la turbulence bidimensionnelle met en jeu une grande richesse de phénomènes qui sont incomplètement décrits par le concept de cascade dans l'espace de Fourier et les théories statistiques qui lui sont associées.

En particulier, il se développe spontanément dans un écoulement bidimensionnel turbulent des structures de grande durée de vie, dites cohérentes, dont il faut tenir compte dans une description de cette turbulence. Malgré son apparence aléatoire, un écoulement bidimensionnel est loin d'être une sorte de bruit homogène et présente un certain degré d'organisation entraînant de forts contrastes dynamiques : d'une région à l'autre, certaines propriétés peuvent être fortement et durablement différentes. Ces contrastes dynamiques rendent utile une représentation des cascades, c'est-à-dire des échanges d'un invariant quadratique entre échelles, dans l'espace physique et non spectral. Une telle représentation peut ensuite servir de base à une modélisation et une paramétrisation de la turbulence plus proche de ses propriétés dans l'espace physique.

Les travaux théoriques et numériques[1] présentés ici concernent plus particulièrement la cascade d'un traceur en turbulence bidimensionnelle, c'est-à-dire les propriétés de transport et de mélange d'un tel écoulement. Plusieurs facteurs font que le problème du traceur est important. D'abord, les écoulements en général sont étudiés non seulement pour leurs propriétés propres, aérodynamiques pour simplifier, mais aussi pour leur capacité à transporter

[1] À l'exception notable de la question de l'intermittence dans la cascade inverse d'énergie, traitée à partir de données à la fois numériques et expérimentales.

et à mélanger les substances qu'ils contiennent. Ceci est particulièrement vrai pour les écoulements géophysiques, que ce soit parce qu'ils transportent de la chaleur, des polluants ou encore de l'eau. De plus, les contrastes dynamiques se définissent bien à partir des propriétés de transport et de dispersion de l'écoulement à travers la notion de domaine hyperbolique ou elliptique. Enfin, le transport présente un intérêt particulier en deux dimensions parce que la vorticité est conservée le long de la trajectoire d'un élément de fluide : elle est donc un traceur, mais un traceur actif qui rétroagit sur l'écoulement, contrairement à un traceur passif qui se laisse transporter sans influencer l'écoulement[2].

La question qui se pose naturellement est alors dans quelle mesure cette différence de principe se traduit en différence observable. En d'autres termes, traceurs actif et passif sont-ils avant tout traceurs ou avant tout actif/passif ? Dans le premier cas, leurs points communs doivent dominer, alors que dans le second on doit être en mesure de définir un critère qui, étant donné un champ de traceur, permettra de reconnaître s'il est actif ou passif. Cette question n'est pas anodine, d'un point de vue tant pratique que théorique. La théorie de Kraichnan **[56, 57]** traite la vorticité comme un traceur passif. Sa réinterprétation récente dans un cadre plus rigoureux fait de même **[35]** et aboutit aux mêmes corrections logarithmiques, dont la pertinence reste discutée **[14, 49, 69]**. Du point de vue pratique de la modélisation, on doit légitimement se demander si l'on peut paramétriser le transport d'un traceur actif et d'un traceur passif de la même façon, ou si la différence des deux dynamiques justifie un traitement particulier.

Cette thèse se divise en deux parties inégales. Dans une première partie, nous introduisons la notion de cascade turbulente d'énergie et de traceur, et les théories statistiques et spectrales de ces cascades. Nous présentons le caractère original de la turbulence bidimensionnelle, en particulier la direction inversée de sa cascade d'énergie, et motivons l'utilisation d'approches des cascades dans l'espace physique. Une telle approche permet de mettre en évidence l'absence d'intermittence dans la cascade inverse d'énergie, y compris dans des situations dominées par les structures cohérentes **[32]**. Ces transferts d'énergie se distinguent aussi par des propriétés qui diffèrent de l'image à la Kolmogorov **[4]**.

La deuxième partie, consacrée à l'analyse et à la paramétrisation de la cascade d'un traceur, constitue le coeur de la thèse. Celle-ci comprend trois chapitres :

- Le premier chapitre est essentiellement théorique. Nous proposons une méthode de diagnostic de la cascade d'un traceur dans l'esprit de travaux récents sur la dynamique des gradients de traceur. Considérant l'évolution non d'un gradient mais d'un incrément de traceur, nous définissons dans l'espace physique le flux entre échelles de la variance de traceur. Cette approche permet de localiser dans l'espace physique et dans le temps une relation statistique, l'équation de Yaglom.

  Nous nous intéressons ensuite au problème de la paramétrisation du mélange turbulent. Par une méthode élémentaire, nous justifions l'emploi d'une paramétrisation anisotrope

[2]Dorénavant, nous parlerons de «traceur» pour désigner indifféremment un traceur actif ou passif, la distinction étant faite explicitement le cas échéant.

reliée simplement à l'évolution des gradients de traceur **[30]** : le flux sous-maille est proportionnel au gradient de traceur et au tenseur des gradients de vitesse. Nous baptisons ce modèle diffusivité de déformation (*strain diffusivity*, SD) Nous relions les propriétés diffusives de cette paramétrisation aux propriétés géométriques de l'écoulement.

La vorticité étant en deux dimensions un traceur, ceci nous amène au problème de la paramétrisation sous-maille pour la vorticité, et donc pour la vitesse. En turbulence bidimensionnelle, la cascade inverse d'énergie impose aux paramétrisations admissibles de conserver l'énergie, ce qui constitue une contrainte fondamentale mais difficile à satisfaire. Nous montrons que la SD conserve l'énergie, et qu'elle est la seule d'une certaine classe de modèles.

- Dans un deuxième chapitre, nous étudions numériquement les propriétés des outils introduits dans le premier chapitre. Nous montrons que, contrairement à d'autres paramétrisations largement utilisées, la SD induit une diffusion bien corrélée au flux local de variance d'un traceur passif **[31]**. Nous vérifions que le filtre effectif qu'elle impose correspond bien au filtre gaussien à partir duquel elle est calculée. Cependant la réduction de l'erreur commise en cas d'utilisation d'une méthode spectrale et donc d'un filtre raide n'est pas évidente.

  Appliquée à la vorticité dans une situation où le forçage est à très petite échelle, la SD démontre en revanche une bien meilleure représentation des grandes échelles qu'une hyperdiffusivité.

  Enfin nous analysons comparativement les propriétés de cascade de la vorticité et d'un traceur passif. Les critères de comparaison reposent sur des moyennes conditionnelles des dérivées lagrangiennes du carré du gradient du traceur. Nous mettons en évidence pour un champ aléatoire une différence cinématique entre traceur et vorticité, dont il subsiste une trace dans des champs turbulents.
- Dans un dernier chapitre, nous présentons deux prolongements possibles de ces travaux. D'une part, nous proposons d'adapter au flux local de variance un diagnostic du transport utilisé notamment en géophysique, la diffusivité efficace. D'autre part nous discutons les analogies et différences entre la paramétrisation anisotrope que nous avons étudiée et le modèle dispersif Euler-α.

Nous présentons finalement en annexe :

- une comparaison traceur passif / vorticité dans l'espace spectral qui s'appuie sur la phénoménologie de Kraichnan de ces deux cascades,
- une comparaison entre notre définition de flux locaux et une définition à base d'ondelettes **[89]**,
- une étude de l'influence possible des paramétrisations sur les orientations du gradient de traceur,
- les paramètres numériques des simulations analysées dans cette thèse.

Première partie

Turbulence bidimensionnelle

CHAPITRE 1

Notion de cascade turbulente

Nous introduisons dans ce chapitre les notions de cascade turbulente pour l'énergie et pour le traceur, et les théories statistiques et spectrales de ces cascades.

1.1. Cascade tridimensionnelle d'énergie

1.1.1. La cascade de Richardson. Les écoulements d'un fluide incompressible de viscosité cinématique ν et de densité ρ que nous prendrons égale à 1 sont régis par l'équation de Navier-Stokes [**58**] :

$$\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{\nabla} p + \nu \Delta \overrightarrow{u} + \overrightarrow{f}, \tag{1.1.1}$$

où $\overrightarrow{u}$ est la vitesse du fluide, p sa pression, la force $\overrightarrow{f}$ un éventuel forçage externe et Δ est l'opérateur de Laplace. On distingue dans cette équation le terme visqueux $\nu \Delta \overrightarrow{u}$, linéaire en $\overrightarrow{u}$, du terme non linéaire $\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) \overrightarrow{u} + \overrightarrow{\nabla} p$, dit aussi inertiel car résultant de la «force» d'inertie. Dans la limite inviscide où la viscosité ν s'annule, l'équation (1.1.1) devient l'équation d'Euler. L'incompressibilité du fluide impose sur sa vitesse $\overrightarrow{u}$ la contrainte :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u} = 0.$$

Du fait de cette contrainte, la seule donnée du rotationnel $\overrightarrow{\omega}$ de $\overrightarrow{u}$ détermine entièrement $\overrightarrow{u}$. Cette vorticité $\overrightarrow{\omega}$ obéit à l'équation suivante, équivalente à (1.1.1) :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\omega}}{\mathrm{d}t} = \left(\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) \overrightarrow{u} + \nu \Delta \overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{f}, \tag{1.1.2}$$

$$\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{u}. \tag{1.1.3}$$

où l'on a introduit la dérivée lagrangienne, c'est-à-dire la dérivée temporelle obtenue en suivant un élément de fluide :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}. \tag{1.1.4}$$

On construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\omega}$ deux grandeurs quadratiques, l'énergie E et l'enstrophie Z par unité de masse :

$$E = \frac{1}{V} \int \frac{u^2}{2} \mathrm{d}\overrightarrow{x}, \tag{1.1.5}$$

$$Z = \frac{1}{V} \int \frac{\omega^2}{2} \mathrm{d}\overrightarrow{x}, \tag{1.1.6}$$

où V est le volume occupé par le fluide. Par souci de simplicité, nous passons sous silence dans la suite les termes dûs aux frontières du domaine, qui dépendent des conditions aux limites[1]. En l'absence de forçage ($\overrightarrow{f} = 0$), le bilan d'énergie déduit de (1.1.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} V\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \int \overrightarrow{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\overrightarrow{x} \\ &= \int \overrightarrow{u} \cdot \left(\nu\Delta\overrightarrow{u} - \overrightarrow{\nabla}p\right)\mathrm{d}\overrightarrow{x} \\ &= -\nu\int \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}\mathrm{d}\overrightarrow{x}. \end{aligned}$$

La notation $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}$ désigne le tenseur des gradients de $\overrightarrow{u}$ et non sa divergence $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{u}$. L'écriture $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}$ désigne quant à elle le carré scalaire du tenseur $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u} &\equiv \left\|\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}\right\|^2 \\ &= \mathrm{Tr}\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u} \\ &= \sum_{ij}\left(\partial_i u_j\right)^2. \end{aligned}$$

En raison de l'incompressibilité, on a :

$$\frac{1}{V}\int \left\|\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}\right\|^2 \mathrm{d}\overrightarrow{x} = \frac{1}{V}\int \omega^2\mathrm{d}\overrightarrow{x} = 2Z, \tag{1.1.7}$$

d'où le bilan d'énergie :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -2\nu Z \equiv -\varepsilon, \tag{1.1.8}$$

où ε est le taux de dissipation d'énergie par unité de masse. Ainsi l'énergie est conservée par les termes non-linéaires de l'équation de Navier-Stokes et dissipée par les termes visqueux. On parle alors d'écoulement en déclin, par opposition à un écoulement forcé, où la dissipation est compensé par un forçage. La prédominance du terme non-linéaire sur le terme visqueux est mesurée par le nombre de Reynolds R :

$$R \equiv \frac{\left\|\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{u}\right\|}{\|\nu\Delta\overrightarrow{u}\|} = \frac{UL}{\nu},$$

où U et L sont respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques de l'écoulement. À faible nombre de Reynolds, les effets visqueux stabilisent l'écoulement, qui présente un comportement régulier et prévisible (écoulement de Stokes). On dit qu'il est laminaire. Inversement, à grand nombre de Reynolds, le fluide développe des instabilités, l'écoulement est très irrégulier et apparemment aléatoire. C'est le régime turbulent.

Le développement de ces instabilités par les termes non-linéaires se fait à énergie constante. En trois dimensions, les structures de grande échelles se déstabilisent pour donner plusieurs structures de plus petite échelle, elles-mêmes instables, et ainsi de suite en un processus de «cascade» [2]. Finalement, les structures les plus petites sont sensibles à la viscosité (leur échelle

[1]Ces termes sont nuls pour des conditions aux limites périodiques

[2]Nous décrivons ici plus le scénario classique de la cascade de Richardson que des observations expérimentales.

étant petite, le nombre de Reynolds associé l'est aussi) et dissipent de l'énergie. C'est l'image traditionnelle de la cascade de Richardson [58], où l'énergie initialement contenue dans une structure de grande échelle «cascade» d'échelle en échelle sous l'action des termes non-linéaires pour être dissipée à petite échelle. Ce scénario repose sur l'existence d'une gamme d'échelles dites inertielles, entre lesquelles l'énergie est transférée à bilan global nul avant d'arriver à une échelle dissipative.

Cette cascade vers les petites échelles suppose une croissance de l'enstrophie. En effet, pour une même énergie, une structure de petite échelle est plus «enstrophique» qu'une structure de grande échelle. Cette croissance, qui amplifie l'efficacité de la dissipation visqueuse d'après (1.1.8), est rendue possible par la présence au second membre de (1.1.2) du terme d'étirement de tourbillons $\left(\overrightarrow{\omega}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{u}$.

1.1.2. Théories statistiques. Le caractère «aléatoire» d'un écoulement turbulent a conduit à adopter une approche statistique : s'il est illusoire de vouloir prévoir tous les détails d'un écoulement turbulent, on peut espérer en revanche prédire ses caractéristiques moyennes[3]. Par «moyenne», les théoriciens entendent généralement une moyenne sur un ensemble d'écoulements défini par un certain nombre de paramètres macroscopiques (énergie, dissipation d'énergie...) et de contraintes statistiques (stationnarité, isotropie...). Les expérimentateurs et les numériciens ont rarement les moyens de répéter une expérience des dizaines, voire des milliers de fois. Aussi ils considèrent plutôt des moyennes spatiales ou temporelles.

Ces deux statistiques se confondent sous certaines hypothèses concernant le système turbulent lui-même (s'il y a ergodicité, on peut faire des moyennes temporelles) ou l'ensemble statistique (s'il y a homogénéité spatiale, on peut faire des moyennes spatiales). Nous adopterons ici le point de vue théorique. Les moyennes considérées dans ce chapitre seront des moyennes d'ensemble, sous le symbole $\langle\rangle$.

Un des rares résultats exacts en turbulence concerne les fonctions de structure de la vitesse. Les fonctions de structure sont les moments des incréments de vitesse $\delta\overrightarrow{u}$, décomposés en composantes longitudinale et transverse au vecteur séparation $\overrightarrow{l}$, respectivement notées $\delta u_{\|}$ et $\delta\overrightarrow{u}_{\perp}$:

$$\begin{aligned}
\delta\overrightarrow{u}\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{l}\right) &\equiv \overrightarrow{u}\left(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l}\right)-\overrightarrow{u}\left(\overrightarrow{x}\right), \\
\delta u_{\|} &\equiv \frac{\overrightarrow{l}}{l}\cdot\delta\overrightarrow{u}, \\
\delta\overrightarrow{u}_{\perp} &\equiv \delta\overrightarrow{u}-\delta u_{\|}\frac{\overrightarrow{l}}{l}.
\end{aligned}$$

L'incrément de vitesse mesure la variation du champ de vitesse sur une séparation $\overrightarrow{l}$. Ainsi ce sont essentiellement les structures d'échelle l qui contribuent à $\delta\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{l})$. Si l'on considère un ensemble statistique spatialement homogène, localement isotrope et stationnaire, les moyennes ne dépendent plus de $\overrightarrow{x}$ ni de la direction de $\overrightarrow{l}$ mais seulement de sa norme. Sous ces

[3]De même, si on ne peut prédire le temps qu'il fera dans cent ans, on peut estimer le climat qu'il fera alors.

hypothèses, Kolmogorov **[54, 75, 39]** a montré que pour une échelle inertielle l :

$$\langle \delta u_{\|}^3 \rangle = -\frac{4}{5} \langle \varepsilon \rangle \, l. \tag{1.1.9}$$

Cette équation remarquable relie ainsi la statistique d'une échelle inertielle à la dissipation d'énergie, qui se produit à petite échelle. Elle fait apparaître le caractère central du taux de dissipation d'énergie par unité de masse ε. Par extension, Kolmogorov a postulé qu'il était le seul paramètre intervenant dans tous les moments des incréments de vitesse, d'où :

$$\begin{aligned} \langle \delta u_{\|}^n \rangle &\propto \langle \varepsilon \rangle^{n/3} \, l^{n/3} \propto l^{\zeta_n}, \\ \zeta_n &= \frac{n}{3}, \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

où la notation $a \propto b$ signifie que a est proportionnel à b.

Cependant, cette hypothèse d'auto-similarité d'exposant $n/3$ ne tient pas compte des propriétés statistiques du taux de dissipation d'énergie si celui-ci est analysé en termes de champ aléatoire. Si l'on considère une boule D_l centrée au point $\overrightarrow{x}$, de rayon l et de volume V_l , la dissipation d'énergie par unité de masse dans ce volume définit un champ fluctuant $\varepsilon_l(\overrightarrow{x}, t)$:

$$\varepsilon_l(\overrightarrow{x}, t) \equiv \frac{1}{V_l} \int_{D_l} \nu \left\| \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{u}(\overrightarrow{y}) \right\|^2 \mathrm{d}\overrightarrow{y}.$$

Aussi, à la suite de cette remarque formulée par Landau (on pourra consulter **[75, 39]** à ce sujet) Kolmogorov a envisagé que des déviations τ_n par rapport à la loi linéaire $\zeta_n = n/3$ puissent être attribuées à des anomalies rares et intenses du champ ϵ_l et à leur dépendance en échelle **[55]** :

$$\begin{aligned} \left\langle \varepsilon_l^{n/3} \right\rangle &\propto l^{\tau_n}, \\ \langle \delta u_{\|}^n \rangle &\propto \left\langle \varepsilon_l^{n/3} \right\rangle l^{n/3} \propto l^{\zeta_n}, \\ \text{d'où } \zeta_n &= \frac{n}{3} + \tau_n. \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Ce phénomène est appelé intermittence et une grande partie des efforts s'est concentré sur la mesure et la prédiction de ces déviations τ_n. De nombreux modèles phénoménologiques, fondés non sur une équation exacte comme celle de Kolmogorov mais sur des estimations à partir d'un scénario de cascade, ont été développés (un modèle récent est par exemple celui de She-Leveque **[99]**). Certains sont meilleurs que d'autres, cependant les incertitudes expérimentales sur la mesure de τ_n rendent difficile la désignation «du» modèle de turbulence. Nous verrons en 2.3.1 que le niveau d'intermittence dans la cascade d'énergie bidimensionnelle est étonnamment bas.

1.1.3. Représentation spectrale. La représentation du champ de vitesse $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x})$ en intégrale de Fourier de coefficients $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{k})$ présente un certain nombre d'avantages. D'une part, l'incompressibilité et l'opérateur Laplacien s'expriment très simplement :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}) &\Leftrightarrow i\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{u}(\overrightarrow{k}), \\ \Delta \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}) &\Leftrightarrow -k^2 \overrightarrow{u}(\overrightarrow{k}). \end{aligned}$$

D'autre part, la séparation de l'écoulement en composantes d'échelles différentes est naturelle, le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ jouant le rôle de l'échelle[4] : la répartition de l'énergie entre les différentes échelles est définie par le spectre unidimensionnel d'énergie $E(k)$:

$$\begin{aligned} E(k) &\equiv \frac{1}{2}\int_{|\overrightarrow{k}|=k} \overrightarrow{u}(\overrightarrow{k})\cdot\overrightarrow{u}(\overrightarrow{k})^{*}\mathrm{d}\overrightarrow{k}, \\ E &= \int_0^{\infty} E(k)\mathrm{d}k, \end{aligned}$$

où le symbole * désigne la conjugaison. L'hypothèse que $\langle E(k)\rangle$ ne dépend que de $\langle\varepsilon\rangle$ et de k aux échelles inertielles conduit à la prédiction d'Obukhov **[83]** :

$$\langle E(k)\rangle \propto \varepsilon^{2/3}k^{-5/3}. \tag{1.1.12}$$

Enfin, la notion de transfert d'énergie entre échelles est bien définie. Si l'on note $\overrightarrow{n}(\overrightarrow{k})$ la transformée de Fourier des termes non-linéaires $\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{u}+\overrightarrow{\nabla}p$, l'équation de Navier-Stokes (1.1.1) s'écrit dans l'espace spectral :

$$\frac{\partial\overrightarrow{u}(\overrightarrow{k})}{\partial t}+\overrightarrow{n}(\overrightarrow{k})=-\nu k^2\overrightarrow{u}.$$

Ainsi l'énergie $E(k)$ disponible au nombre d'onde k évolue selon l'équation :

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t}+\int_{|\overrightarrow{k}|=k}\overrightarrow{u}(\overrightarrow{k})\cdot\overrightarrow{n}^{*}(\overrightarrow{k})\mathrm{d}\overrightarrow{k}=-2\nu k^2E(k).$$

Les termes non-linéaires étant conservatifs vis-à-vis de l'énergie, ils ne font que l'échanger d'un mode de Fourier à l'autre. On peut ainsi les récrire sous la forme de flux entre nombres d'ondes :

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial k}=-2\nu k^2E(k), \tag{1.1.13}$$

ce qui définit le flux spectral d'énergie $\varepsilon(k)$ par :

$$\varepsilon(k) \equiv \int_{|\overrightarrow{k}|<k}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}^{*}\mathrm{d}\overrightarrow{k}=-\int_{|\overrightarrow{k}|>k}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}^{*}\mathrm{d}\overrightarrow{k}.$$

Les échelles dissipatives se caractérisent par la prédominance du second membre de (1.1.13) ($\nu k^2E(k)\gg\frac{\partial\varepsilon}{\partial k}$) et vice-versa pour les échelles inertielles. Dans une situation statistiquement stationnaire, on aura $\left\langle\frac{\partial E(k)}{\partial t}\right\rangle=0$, d'où :

$$\langle\varepsilon(k)\rangle = 2\nu\int_k^{\infty}(k')^2\langle E(k')\rangle\,\mathrm{d}k',$$

et en particulier $\langle\varepsilon(k)\rangle=\langle\varepsilon\rangle$ dès que k appartient au domaine inertiel. Ainsi le domaine inertiel peut-être défini ou bien comme la gamme d'échelles respectant le spectre de Kolmogorov (1.1.12), ou bien plus rigoureusement comme la gamme d'échelles dans laquelle le flux spectral d'énergie $\varepsilon(k)$ est constant.

Les inconvénients de la représentation spectrale sont assez connus : les termes non-linéaires ont une expression complexe, et cette représentation n'est pas «géométrique». En particulier,

[4]Plus précisément, k est l'inverse d'une échelle.

la structure spatiale de l'écoulement (tourbillons, zones de cisaillements, etc.) n'a pas de représentation simple dans l'espace de Fourier. On peut construire un système possédant la même dynamique spectrale que la turbulence bidimensionnelle tout en détruisant sa structure spatiale ; un tel système se rapproche des prédictions accessibles aux modèles de clôture mais s'éloigne de la turbulence **[2]**.

1.2. Cascade de traceur

1.2.1. Domaines convectif et diffusif. Dans de nombreux cas on s'intéresse, plutôt qu'à l'écoulement lui-même, à la façon dont il répartit dans l'espace ce qu'il transporte : substances (nutriments, sel, polluants, colorants) ou quantités physiques (température notamment). Une grandeur T conservée le long de la trajectoire d'une parcelle de fluide obéit à une équation d'advection-diffusion :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right) T = \kappa \Delta T, \tag{1.2.1}$$

où κ est la diffusivité moléculaire de T . La grandeur quadratique associée à T est sa variance[5] Z_T :

$$Z_T = \int \frac{T^2}{2} \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{V}, \tag{1.2.2}$$

qui est conservée par le terme non-linéaire [6] $n_T \equiv \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right) T$ et dissipée par la diffusion :

$$\frac{\mathrm{d}Z_T}{\mathrm{d}t} = -\nu \int \left\| \vec{\nabla} T \right\|^2 \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{V} \equiv -\eta_T. \tag{1.2.3}$$

On définit de même la distribution spectrale de traceur $Z_T(k)$ et le flux spectral de variance associé $\eta_T(k)$:

$$Z_T(k) \equiv \frac{1}{2} \int_{|\vec{k}|=k} \left| T(\vec{k}) \right|^2 \mathrm{d}\vec{k}, \tag{1.2.4}$$

$$\eta_T(k) \equiv \int_{|\vec{k}|<k} T(\vec{k}) \cdot n_T^*(\vec{k}) \mathrm{d}\vec{k}, \tag{1.2.5}$$

$$\frac{\partial Z_T(k)}{\partial t} + \frac{\partial \eta_T}{\partial k} = -2\kappa k^2 Z_T(k). \tag{1.2.6}$$

Le domaine convectif est alors la gamme d'échelle dans laquelle le terme diffusif $\kappa \Delta T$ est négligeable devant le terme non-linéaire. Dans une situation stationnaire, le flux $\eta_T(k)$ est constant dans le domaine convectif.

On s'attend ainsi à ce que le traceur suive lui aussi une cascade vers les petites échelles. Physiquement, cela signifie que le brassage par l'écoulement d'une tache de traceur produit des structures de petite échelle : filaments résultant de l'étirement d'une tache initiale, fronts apparaissant dans une zone de convergence lorsque des particules initialement éloignées se trouvent ultérieurement proches l'une de l'autre. Il est probable que tous les champs de vitesse n'auront pas la même efficacité pour produire cette cascade. Cette efficacité peut être mesurée

[5] Il faudrait dire demi-variance pour être exact. La notation Z_T se justifie en deux dimensions, où la vorticité est un traceur et la demi-variance du traceur est analogue à l'enstrophie Z.

[6] linéaire en T, mais non linéaire en les variables $(T, \vec{u})$.

par le spectre $Z_T(k)$: un spectre raide, pauvre en petites échelles, résultera d'une cascade peu efficace, et vice-versa.

Suivant un raisonnement dimensionnel analogue à celui de Kolmogorov, Obukhov **[82]** et Corrsin **[24]** ont prédit que le spectre de traceur à un nombre d'onde k à la fois inertiel et convectif ne doit dépendre que de k, $\langle\varepsilon\rangle$ et $\langle\eta_T\rangle$:

$$\langle Z_T(k)\rangle \propto \langle\eta_T\rangle \langle\varepsilon\rangle^{-1/3} k^{-5/3}. \tag{1.2.7}$$

La prédiction analogue pour les fonctions de structure du traceur s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta T &\equiv T\left(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l}\right) - T\left(\overrightarrow{x}\right), \\ \langle \delta T^n\rangle &\propto \left(\langle\eta_T\rangle^{3/2} \langle\varepsilon\rangle^{-1/2} l\right)^{n/3}. \end{aligned}$$

Cette prédiction phénoménologique est en fait soumise à de fortes corrections d'intermittence[7]. La compréhension de l'origine de ces corrections est aujourd'hui beaucoup plus avancée pour le traceur que pour la vitesse, grâce à des progrès théoriques et des vérifications expérimentales récents . Le lecteur intéressé par ce sujet que nous n'aborderons pas pourra se référer aux travaux de Caroline Jullien **[49, 51]** ainsi qu'à la revue de G. Falkovich et collaborateurs **[34]**.

1.2.2. Le régime de Batchelor. Les domaines inertiel et dissipatif d'une part, convectif et diffusif d'autre part se recouvrent différemment en fonction du rapport ν/κ, appelé nombre de Prandtl si T est la température ou nombre de Schmidt si c'est une concentration. Dans le cas où $\nu/\kappa \gg 1$, il existe un domaine à la fois convectif et dissipatif. Dans cette configuration, dite régime de Batchelor qui fut le premier à l'étudier **[10]**, l'essentiel de l'énergie est concentré dans les échelles plus grandes que les échelles convectives. On parle alors aussi de champ de vitesse de grande échelle. Dans la limite d'une variation lente du champ de vitesse, Batchelor obtient au moyen d'un développement de Taylor du champ de vitesse (possible car le champ de vitesse est de grande échelle) le spectre du traceur :

$$\langle Z_T(k)\rangle \propto \frac{\langle\eta_T\rangle}{\gamma} k^{-1}, \tag{1.2.8}$$

où γ est le taux de déformation imposé par le champ de vitesse (valeur propre du gradient de vitesse).

Ce régime est important à plusieurs titres. La faible pente du spectre (observé numériquement **[92, 13]** et expérimentalement **[74]**) indique que ce type d'écoulement induit une cascade de traceur très efficace, plus efficace en particulier que le régime de Corrsin-Obukhov (équation (1.2.7)). De plus, le cadre de Batchelor peut être élargi à un champ de grande échelle non turbulent pourvu qu'il présente du chaos lagrangien, c'est-à-dire que deux particules initialement proches se séparent l'une de l'autre à un rythme exponentiel **[26, 21]**. Enfin et surtout, nous allons voir que l'hypothèse du champ de vitesse de grande échelle s'applique dans de nombreux cas de turbulence géophysique ou bidimensionnelle. Nous nous intéresserons uniquement à ce régime en ce qui concerne la cascade du traceur.

[7]Le mot «intermittence» a ici le sens faible de «déviation de la prédiction dimensionnelle $< \delta T^n > \propto l^{n/3}$» ; le sens strict fait référence aux fluctuations de la dissipation.

1.3. Bilan

Le concept de cascade reste, soixante ans après les travaux de Kolmogorov, au centre de notre compréhension de la turbulence. Il est la base des prédictions phénoménologiques (1.1.10), (1.1.11) et (1.1.12). Il se généralise à la «turbulence» d'un traceur passif, donnant lieu aux prédictions phénoménologiques (1.2.7) et (1.2.8). Cependant ces prédictions sont liées à un cadre statistique bien spécifique (stationnaire, homogène, isotrope) et dans une large mesure à une représentation spectrale de la dynamique. Nous allons voir comment la dimension deux à la fois est un terrain d'application des idées à la Kolmogorov et motive le développement d'approches plus géométriques.

CHAPITRE 2

Spécificités bidimensionnelles

Cette partie ne prétend en aucun cas au titre de revue, et se borne à mettre en lumière certaines caractéristiques qui ont motivé les travaux de cette thèse. Le lecteur plus exigeant pourra se référer à la récente revue **[104]** pour le point de vue expérimental de Patrick Tabeling, ou à **[68]**, ainsi qu'aux travaux historiques de Kraichnan **[56, 57]**.

Les écoulements strictement bidimensionnels n'existent que dans l'imagination des théoriciens et les calculateurs des numériciens. Dans des conditions très contrôlées **[25, 103, 85]**, il est possible de produire en laboratoire des écoulements qui sont avec une bonne approximation bidimensionnels, c'est-à-dire :

– dont la vitesse ne dépend que de deux variables d'espace au lieu de trois

– et dont le vecteur vitesse appartient au plan défini par ces deux variables.

Mais les écoulements géophysiques (atmosphériques et océaniques) ont une tendance naturelle à la bidimensionnalité. D'une part leurs dimensions horizontales (quelques milliers de kilomètres) sont beaucoup plus grandes que leurs dimensions verticales (quelques kilomètres). D'autre part ils sont souvent stratifiés, c'est-à-dire organisés en couches de densités différentes, ce qui inhibe les mouvements verticaux. Enfin la rotation de la terre tend à confiner les mouvements lents de ces fluides dans des plans[1].

Ainsi la motivation première pour l'étude de la turbulence bidimensionnelle est qu'elle constitue le modèle conceptuel le plus simple décrivant les mouvements de l'atmosphère et de l'océan. Dans la hiérarchie des modèles, il occupe ainsi la place la moins élevée. On considère cependant **[88, 93]** qu'il est capable d'expliquer certaines caractéristiques des grandes échelles (plusieurs dizaines de kilomètres) de la circulation dans la stratosphère[2] et les océans. Enfin, outre son intérêt géophysique, ce système pose des questions physiques intéressantes pour elles-mêmes, dont nous exposons quelques-unes dans la suite.

2.1. La double cascade

Il existe une différence fondamentale entre la turbulence tridimensionnelle et la turbulence bidimensionnelle : à deux dimensions, la vorticité est conservée (dans la limite inviscide) le long d'une trajectoire fluide. En effet, le vecteur $\overrightarrow{\omega}$ est orthogonal au plan de l'écoulement de sorte que dans l'équation de la vorticité (1.1.2) le terme d'étirement de tourbillon $\left(\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) \overrightarrow{u}$ s'annule. L'unique composante de la vorticité se comporte donc comme un traceur, avec une

[1]Ce sont précisément ces trois ingrédients qui permettent de produire en laboratoire des écoulements quasi-bidimensionnels.

[2]Partie de l'atmosphère située approximativement entre 20 et 50 km et bien stratifiée, contrairement à la troposphère (0-20 km) où la convection joue un rôle prépondérant.

diffusivité égale à la viscosité et un terme de forçage $\overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{f}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\omega} &= \omega \overrightarrow{e_z}, \\ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \nu \Delta \omega + \overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{f}. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Dès lors, les termes non-linéaires conservent les deux invariants quadratiques E et Z définis par (1.1.5) et (1.1.6) respectivement. Cette double conservation conduit à une double cascade, d'énergie et d'enstrophie ; de plus les deux cascades n'étant pas indépendantes, l'énergie doit cascader vers les *grandes échelles,* comme un raisonnement spectral classique **[38]** permet de s'en convaincre. Suivant une interprétation plus physique discutée en (4.4), on voit qu'un transfert d'énergie vers les petites échelles implique une croissance des gradients de vitesse, donc de l'enstrophie. A contrario, la conservation de l'enstrophie inhibe ces transferts. Ainsi la direction de la cascade d'énergie est inversée par rapport au cas tridimensionnel ; on parle de cascade inverse.

Cette propriété a conduit Kraichnan **[56]** à proposer une phénoménologie à la Kolmogorov de la double cascade. Dans une situation où l'énergie est injectée continûment à un nombre d'onde k_I donné, deux domaines inertiels distincts coexistent. Dans le premier domaine inertiel, aux échelles inférieures à l'injection se développe la cascade d'enstrophie, caractérisée par une dissipation moyenne d'enstrophie $\langle \eta \rangle$ où :

$$\eta \equiv \kappa \int \left\| \overrightarrow{\nabla} \omega \right\|^2 \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V}. \tag{2.1.2}$$

Sa dimension étant l'inverse du cube d'un temps, le résultat dimensionnel pour le spectre d'énergie est :

$$\langle E(k) \rangle \propto \langle \eta \rangle^{2/3} k^{-3}. \tag{2.1.3}$$

En particulier, ce spectre raide implique que l'on se trouve à ces échelles dans les conditions de Batchelor **[50]** (champ de vitesse régulier). Ainsi celui-ci ne se limite pas, comme en trois dimensions, aux échelles visqueuses, mais se prolonge aux échelles inertielles de la cascade d'enstrophie.

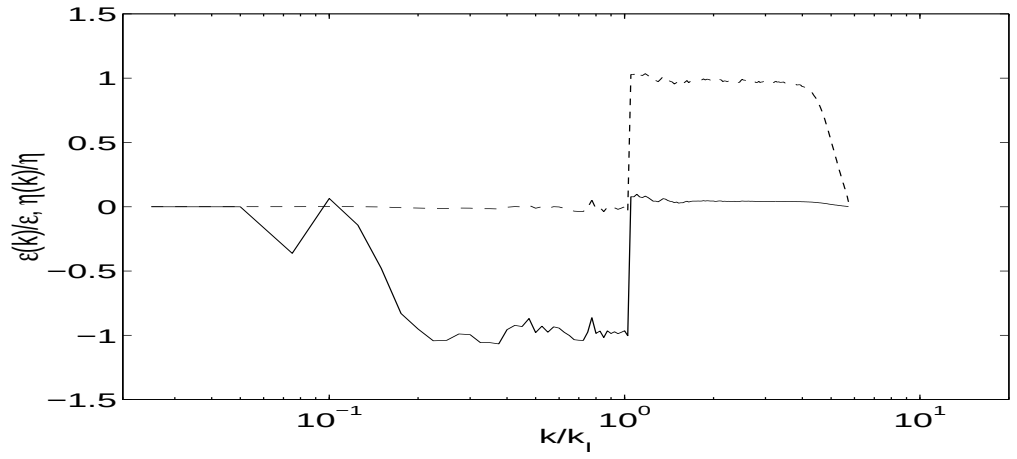
Dans l'autre domaine inertiel, aux échelles plus grandes que l'injection, se développe la cascade inverse d'énergie, caractérisée par un flux spectral moyen constant et négatif

$$\langle \varepsilon \rangle \equiv - \langle \varepsilon(k) \rangle . \tag{2.1.4}$$

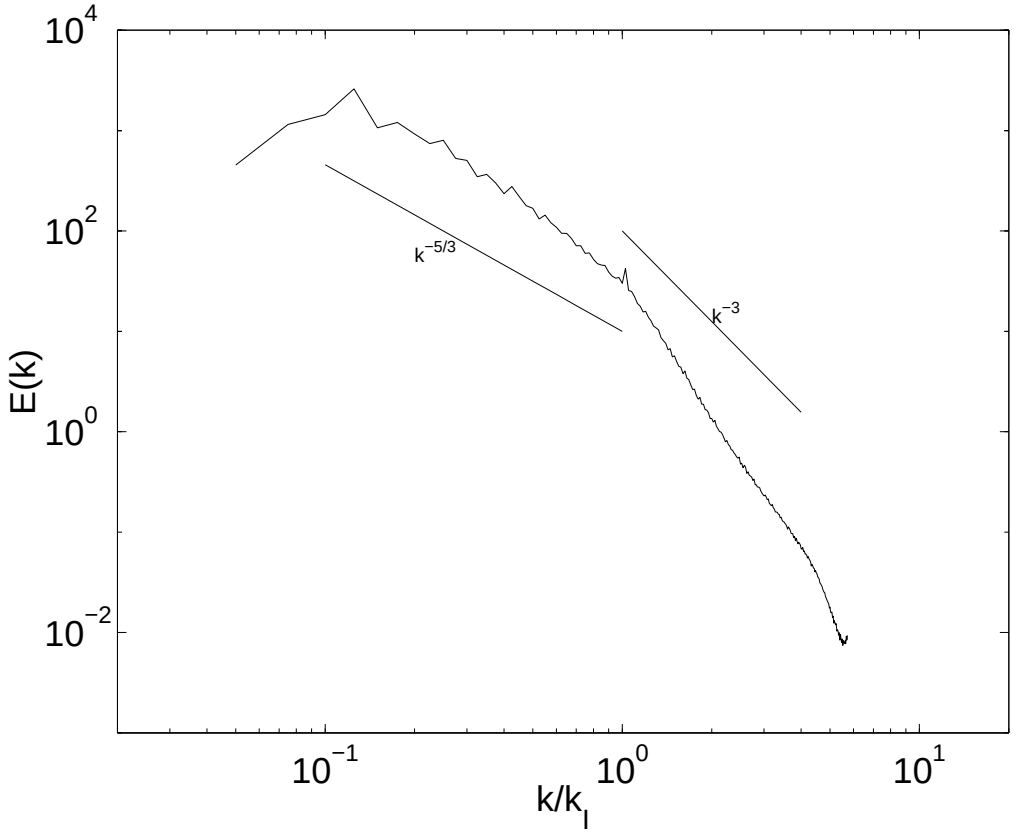
Un raisonnement dimensionnel fournit le même spectre que pour une cascade directe d'énergie :

$$\langle E(k) \rangle \propto \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3}. \tag{2.1.5}$$

Cette loi spectrale est observée aussi bien numériquement **[40, 6, 12]** qu'expérimentalement **[103, 86]**. Elle est même très souvent observée au-delà de la gamme d'échelles où le flux spectral est constant **[27]** (figures 2.1.1 et 5.3.1, cette dernière tirée de **[12]**). En revanche l'interprétation des données atmosphériques comme résultant d'une cascade inverse d'énergie reste un sujet de controverse **[79, 22]**.



(a) Flux d'énergie $\epsilon(k)$ normalisé par ϵ (trait plein) et d'enstrophie $\eta(k)$ normalisé par η (pointillé).



(b) Spectre d'énergie

FIG. 2.1.1. Propriétés spectrales d'une simulation numérique de turbulence bidimensionnelle forcée (expérience DNS.II de **[32]**). L'énergie est injectée au nombre d'onde k_I. Les flux d'énergie et d'enstrophie mettent en évidence les deux domaines inertiels. La cascade d'enstrophie, peu développée ici, présente aux nombres d'ondes $k > k_I$ un spectre d'énergie $E(k)$ plus raide que la prédiction (2.1.3) $E(k) \propto k^{-3}$. Le spectre de la cascade d'énergie (nombres d'onde $k < k_I$) est proche de la prédiction de Kraichnan (2.1.5) $E(k) \propto k^{-5/3}$, même à des échelles où le flux spectral n'est plus constant **[27]**.

2.2. Structures cohérentes

L'identité des spectres de Kolmogorov (1.1.12) et de Kraichnan (2.1.5) cache la nature profondément différente des deux cascades. Alors qu'un écoulement turbulent tridimensionnel tend à produire des structures énergétiques de petite échelle, complexifiant ainsi sa structure, un écoulement turbulent bidimensionnel tend à former en raison de la cascade inverse des structures d'échelle de plus en plus grande, en un processus d'organisation spontanée. Ainsi, il a été reconnu très tôt que de tels écoulement tendent à former des tourbillons de forte intensité et de durée de vie beaucoup plus longue que l'échelle de temps donnée par l'enstrophie, le temps de retournement $\tau_r \equiv Z^{-1/2}$. Cette longue durée de vie leur vaut l'appellation de structures cohérentes **[71]**. Toutefois la dimension deux offre une certaine variété en fonction des situations, qu'il convient de bien distinguer :

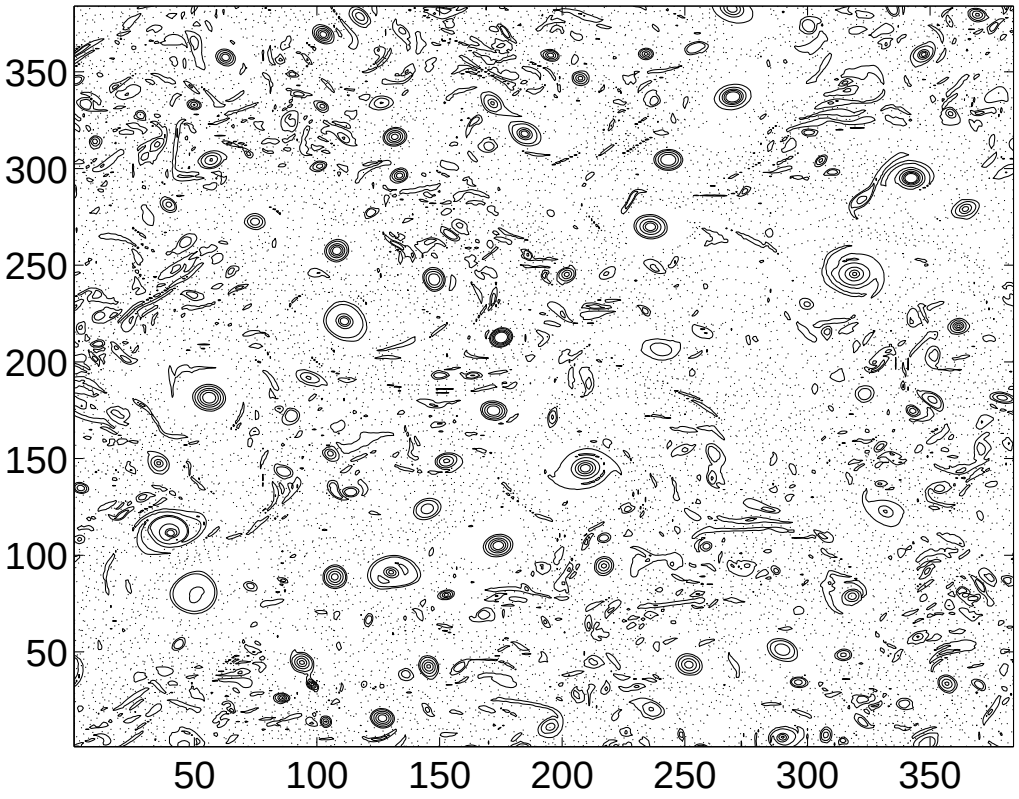
- la turbulence en déclin : un état initial aléatoire étant laissé à lui-même, il développe rapidement une double cascade. L'énergie gagnant les grandes échelles, des tourbillons intenses se forment, souvent par fusion de deux tourbillons de même signes. Ces tourbillons créent à leur périphérie un cisaillement qui forme des filaments de vorticité, selon le mécanisme de cascade directe d'enstrophie. La prédominance de structures de grande échelle se traduit par un spectre raide, dont la pente varie de -5 pour les premières mesures à -3 d'après des résultats récents à haute résolution. Pour le traceur, on est alors à nouveau dans le régime de Batchelor.
- la turbulence de Kraichnan, vérifiant (2.1.3) et (2.1.5) : cet état d'équilibre ne peut être obtenu que par une injection constante d'énergie *et une dissipation à grande échelle.* Cette dissipation, absente des équations de Navier-Stokes (1.1.1) et (2.1.1), est ou bien naturellement présente dans un dispositif expérimental, ou ajoutée synthétiquement dans une simulation. Si des tourbillons de taille proche de l'échelle d'injection peuvent être présents[3] comme dans la simulation présentée en figure 2.2.1, on n'en observe en revanche que peu et de courte durée aux échelles inertielles, ce qui suggère qu'un mécanisme différent de la fusion de paires est à l'oeuvre dans cette cascade inverse d'énergie **[87]**.
- le régime d'accumulation : dans une situation forcée avec une dissipation à grande échelle absente ou insuffisante, l'énergie «remonte» jusqu'à la plus grande échelle offerte par le système (taille du dispositif expérimental ou du domaine de simulation) et s'y concentre, de façon analogue au déclin. On parle parfois de «condensation de Bose-Einstein» **[102, 87]**. On assiste alors à la formation d'un ou deux tourbillons très intenses et cohérents à cette échelle maximale. Ces tourbillons sont bien visibles dans la simulation présentée en figure 2.2.2.

2.3. Transferts d'énergie

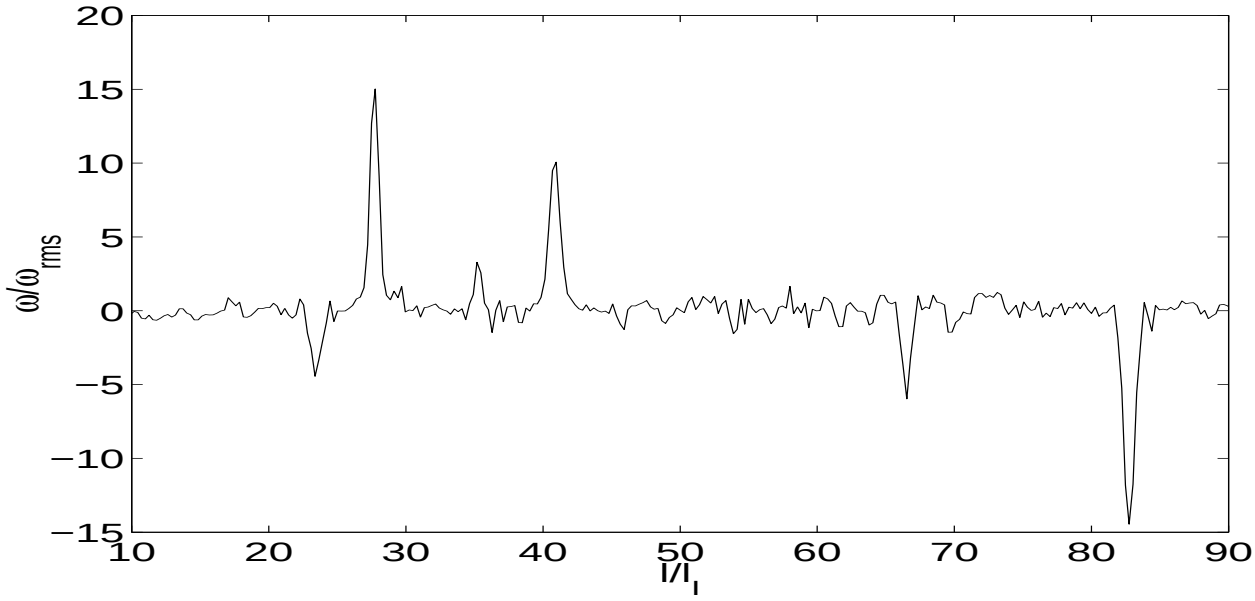
2.3.1. Intermittence. Les résultats présentés dans cette section ont fait l'objet d'une publication dans la revue *Physical Review E* **[32]**.

La cascade tridimensionnelle d'énergie est caractérisée par une forte intermittence. On considère généralement que des structures cohérentes (tubes de vorticité ou «vers» **[29, 48,**

[3]Ceux-ci sont parfois volontairement déstabilisés pour favoriser l'observation de cet état.

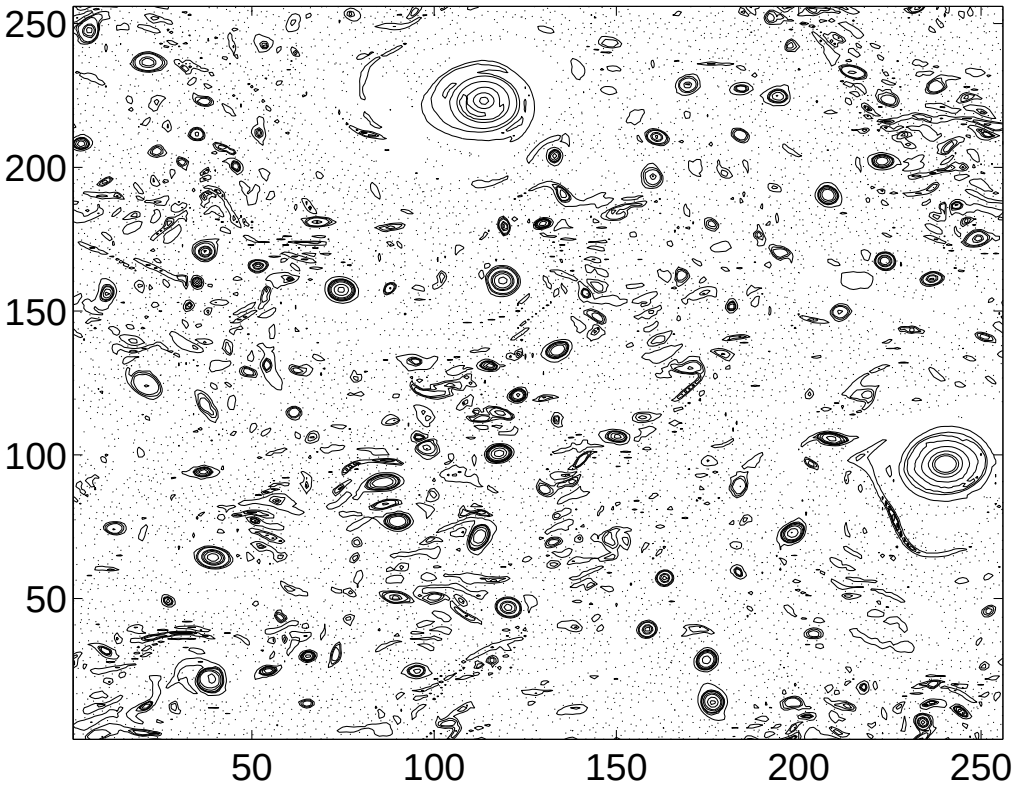


(a) Champ de vorticité

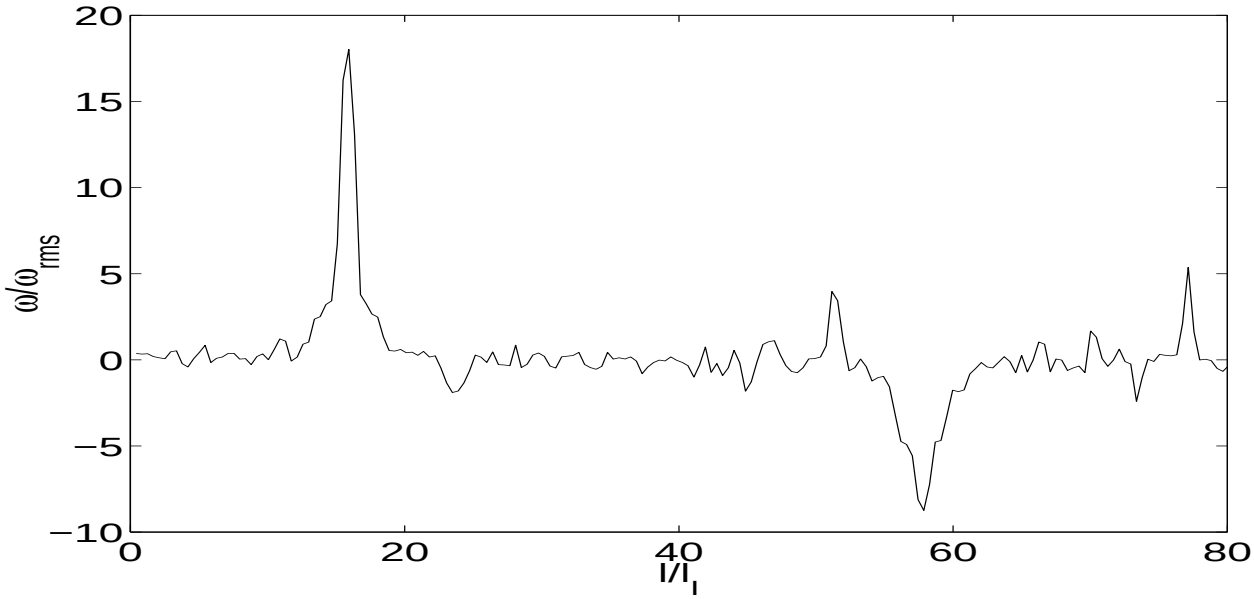


(b) Coupe de la vorticité, normalisée par sa variance

FIG. 2.2.1. Champ et coupe de vorticité dans le régime de cascade inverse. La vorticité est normalisée par son écart-type. Les tourbillons ont la taille de l'échelle d'injection l_I . Leur vorticité intense se distingue des fluctuations modérées qui constituent le «fond» turbulent. Tiré, ainsi que les figures suivantes de ce chapitre, de **[32]**.



(a) Champ de vorticité



(b) Coupe de vorticité, normalisée par sa variance

FIG. 2.2.2. Champ et coupe de la vorticité dans le régime d'accumulation. L'énergie est injectée à l'échelle l_I. La vorticité est normalisée par son écart-type. L'écoulement est dominé par deux tourbillons de grande échelle dont l'intensité dépasse largement les fluctuations moyennes de la vorticité.

105]) pourraient être à l'origine de fluctuations importantes du taux de dissipation d'énergie ε_l et de cette intermittence. Qu'en est-il en deux dimensions ? Il est désormais acquis grâce à des travaux numériques et expérimentaux que cette intermittence est au contraire très faible, voire inexistante. Ces études ont été menées en l'absence structures cohérentes, soit que le forçage soit conçu pour les déstabiliser [**87**], soit que son échelle soit très proche de l'échelle visqueuse [**5, 12**]. Les différentes configurations offertes par la turbulence bidimensionnelle, avec ou sans structures cohérentes, permettent donc d'étudier dans un cadre idéal l'effet de ces structures sur l'intermittence de la cascade d'énergie.

Nous avons mené cette étude en confrontant des données issues de simulations numériques et d'expériences de laboratoire [**32**]. Outre les champs non intermittents et non structurés de [**5**] (noté DNS.I) et [**87**] (noté LE.I), nous avons considéré des champs riches en tourbillons cohérents :

- une simulation de cascade inverse (notée DNS.II) où l'échelle de forçage n'est pas trop proche de l'échelle visqueuse et laisse apparaître des tourbillons intenses (figures 2.1.1 et 2.2.1)
- une simulation du régime d'accumulation documentée dans [**6**] (figure 2.2.2) et notée DNS.III
- une observation expérimentale du régime d'accumulation [**87, 85**] notée LE.II

L'intermittence peut être mesurée de deux façons. La première est d'observer son influence supposée sur les fonctions de structure, c'est-à-dire la déviation τ_n de leurs exposants ζ_n par rapport à une loi linéaire :

$$\begin{aligned} S_n(l) &\equiv \left\langle \delta u_{\|}^n \right\rangle \propto l^{\zeta_n}, \\ \zeta_n &= \frac{n}{3} + \tau_n. \end{aligned}$$

La moyenne $\langle\rangle$ est une moyenne à la fois spatiale et temporelle. Plutôt que de déterminer les exposants ζ_n, ce qui implique des barres d'erreurs importantes, nous vérifions seulement leur dépendance linéaire par deux méthodes standard [**87**]. D'une part, nous calculons les moments normalisés $H_{2n}(l)$ de $\delta u_{\|}$:

$$H_{2n}(l) \equiv \frac{S_{2n}(l)}{S_2(l)^n}. \tag{2.3.1}$$

Une dépendance linéaire de ζ_n se traduit alors par des coefficients H_{2n} indépendants de l'échelle l. D'autre part, nous observons la superposition pour des échelles différentes des distributions de probabilité de l'incrément normalisé s :

$$s \equiv \frac{\delta u_{\|}}{\left\langle \delta u_{\|}^2 \right\rangle^{1/2}} = \frac{\delta u_{\|}}{S_2(l)^{1/2}}.$$

En effet, supposons que s admette une distribution de probabilité $p(s)$ indépendante de l'échelle, alors $\delta u_{\|}$ admet la distribution :

$$q_l(\delta u_{\|}) = S_2(l)^{-1/2} p\left(\frac{\delta u_{\|}}{S_2(l)^{1/2}}\right).$$

On peut alors exprimer les fonction de structure en fonction de $p(s)$:

$$\begin{aligned} S_{2n}(l) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v^{2n} q_l(v) \mathrm{d}v, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} v^{2n} p\left(\frac{v}{S_2(l)^{1/2}}\right) \frac{\mathrm{d}v}{S_2(l)^{1/2}}, \\ &= S_2(l)^n \int_{-\infty}^{+\infty} s^{2n} p(s) \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

et les coefficients $H_{2n}(l)$ sont indépendants de l :

$$H_{2n}(l) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^{2n} p(s) \mathrm{d}s.$$

Le caractère constant des coefficients H_{2n} (ainsi que la superposition des distributions $p(s)$) pour des échelles l inertielles est observée avec une précision satisfaisante dans les trois cas de figure mentionnés plus haut (figure 2.3.1).

Soulignons le fait que le critère d'intermittence est ici le caractère constant des coefficients H_{2n} , indépendamment de leur valeur. Ainsi l'expérience LE.II présente des distributions d'incréments de vitesse quasi-gaussiennes, et il leur correspond un moment normalisé d'ordre 4 $H_{2n}(4) \approx 3$. Mêmes si cela n'est pas visible, elles ne peuvent être exactement gaussiennes en vertu de l'équation de Kolmogorov qui s'écrit en deux dimensions :

$$\left\langle \delta u_{\|}^3 \right\rangle = \frac{3}{2} \langle \varepsilon \rangle \, l. \tag{2.3.2}$$

Une distribution gaussienne aurait un moment d'ordre trois nul. De toute façon, il n'y a pas de raison particulière pour laquelle ces distributions devraient être gaussiennes, et celles mesurées dans les simulations DNS.II et DNS.III sont fortement non-gaussiennes.

Outre cette méthode que l'on peut qualifier d'indirecte, il est souhaitable de mesurer directement l'intermittence à travers le taux local de dissipation d'énergie $\varepsilon_l(\overrightarrow{x})$. Celui-ci apparaît dans l'équation d'évolution de l'énergie cinétique $E_l(\overrightarrow{x})$ contenue dans un domaine de contrôle $D_l(\overrightarrow{x})$ centré sur $\overrightarrow{x}$, de taille l , de frontière Σ_l et d'aire V_l :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_l}{\partial t} &= F_l - \varepsilon_l - \varphi_l, \\ E_l &= \int_{D_l} \frac{u^2}{2} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{y}}{V_l}, \\ \varepsilon_l &= \nu \int_{D_l} \|\nabla u\|^2 \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{y}}{V_l}, \\ \varphi_l &= \oint_{\Sigma_l} \left(\frac{u^2}{2} + p\right) \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} \frac{\mathrm{d}s}{2\pi l}, \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

où nous n'avons pas écrit explicitement la contribution F_l du forçage. L'hypothèse au centre de la notion d'intermittence est **[55]** :

$$\delta u_{\|} \propto l^{1/3} \varepsilon_l^{1/3}.$$

Cependant, en deux dimensions la situation est compliquée par la direction inverse de la cascade d'énergie. Dans ces conditions, le taux de dissipation ne peut être défini par la viscosité

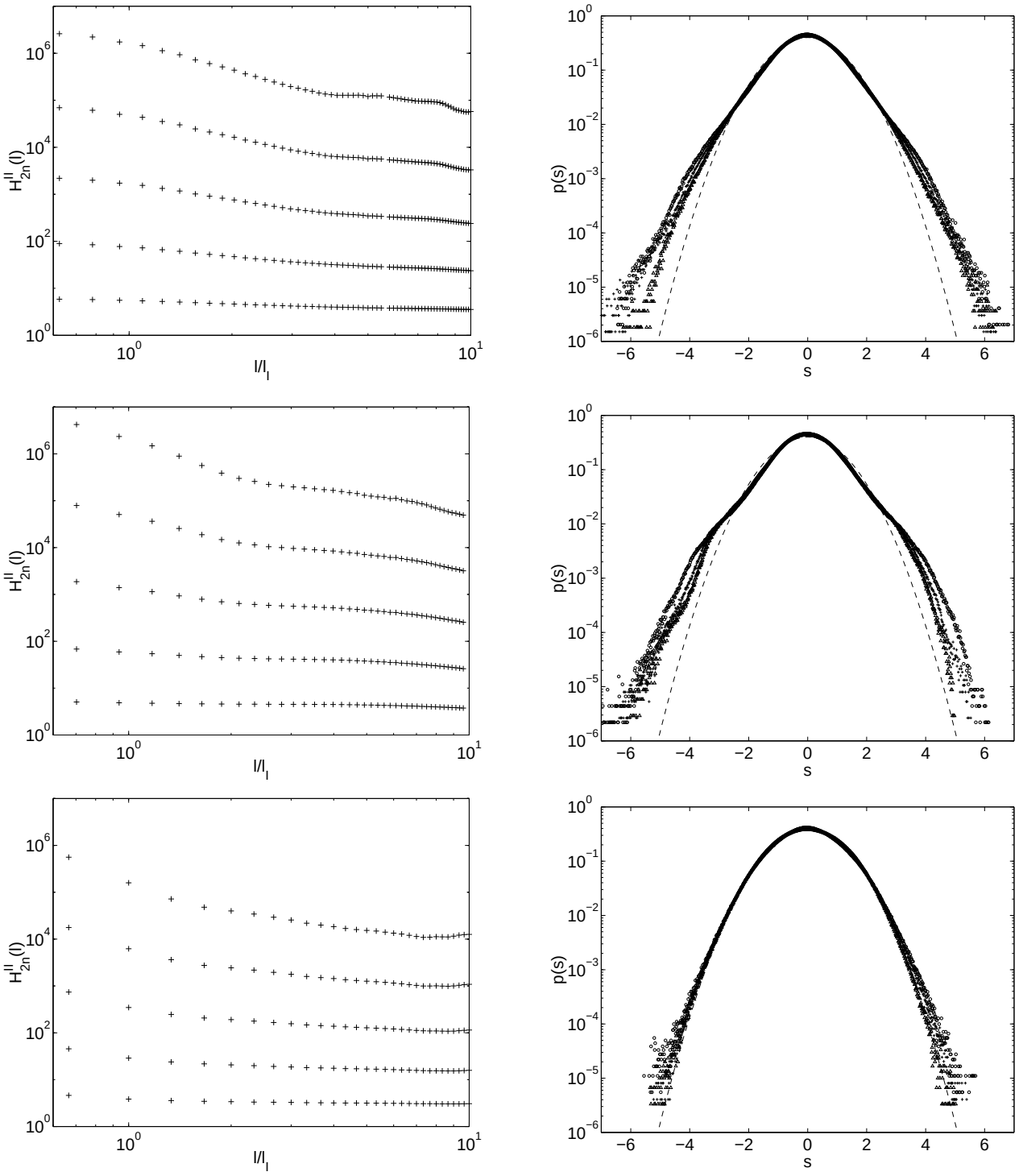


FIG. 2.3.1. Intermittence dans la cascade inverse d'énergie en présence de structures cohérentes, vue par la statistique des incréments de vitesse. À gauche : moments normalisés $H_{2n}(l)$ (équation 2.3.1) pour $2n = 4, 6, 8, 10, 12$. À droite : distributions de probabilité de l'incrément de vitesse longitudinal normalisé $s \equiv \delta u_{\|} / \left\langle \delta u_{\|}^2 \right\rangle^{1/2}$ pour des échelles inertielles. De haut en bas : simulation numérique de cascade inverse ; simulation numérique du régime d'accumulation ; observation expérimentale du régime d'accumulation.

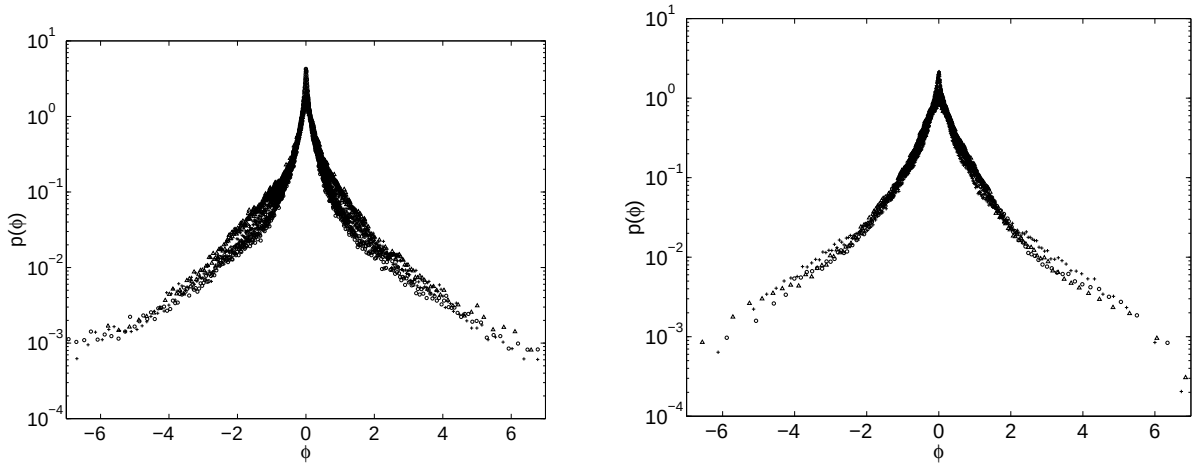


FIG. 2.3.2. Intermittence vue directement à travers la distribution des transferts inertiels d'énergie φ_l (équation 2.3.3). La distribution de la quantité normalisée $\phi = \varphi_l / < \varphi_l^2 >^{1/2}$ est raisonnablement indépendante de l'échelle. À gauche : cascade stationnaire ; à droite : régime d'accumulation

puisque celle-ci agit à petite échelle. C'est la dissipation à grande échelle qui conviendrait. Or celle-ci est largement arbitraire dans les simulations numériques, voire absente dans notre simulation du régime de condensation. En laboratoire, elle est difficile à déterminer. D'où l'idée **[6]** de se reposer non pas sur le terme dissipatif ε_l mais sur la quantité inertielle φ_l qui mesure les transferts d'énergie par les termes non-linéaires de l'équation de Navier-Stokes. Celle-ci est bien définie indépendamment d'un choix de dissipation à grande échelle. Malheureusement l'absence de données de laboratoire fiables concernant la pression rend son calcul impossible dans les expériences physiques.

Nous avons ainsi calculé le flux local d'énergie φ_l dans les expériences numériques seulement. Nous avons vérifié que les distributions normalisées de φ_l ne dépendaient pas significativement de l'échelle inertielle l. Les données dont nous disposions ne permettant pas de calculer avec confiance des moments d'ordre élevé de φ_l (φ_l est déjà un moment d'ordre 3 de la vitesse). nous n'avons pas déterminé les coefficients H_{2n} correspondants. La figure (2.3.2) montre que ce critère qualitatif corrobore les conclusions que l'on peut tirer de l'étude des incréments de vitesse (figure 2.3.1) : de façon surprenante, la présence de structures cohérentes n'augmente pas de façon mesurable le degré d'intermittence de la cascade inverse d'énergie, qui reste négligeable.

Cette étude illustre le fait que des informations importantes sur la dynamique sont contenues dans des grandeurs locales telles que le taux de transfert d'énergie φ_l. Cette information n'est contenue ni dans le spectre $E(k)$, ni dans le flux spectral d'énergie $\varepsilon(k)$. En effet dès que l'on se place dans l'espace de Fourier, on considère de fait des grandeurs qui sont des moyennes spatiales. Dès lors, elles ne peuvent facilement refléter des fluctuations spatiales, qui sont pourtant cruciales.

2.3.2. Variance des transferts d'énergie. L'absence d'intermittence que nous venons de montrer laisse penser que la cascade bidimensionnelle est proche de l'image qu'en donnent les phénoménologies de Kraichnan et Kolmogorov. Pourtant, des inconnues demeurent. La

prédiction de Kraichnan-Kolmogorov (2.1.5) suppose l'existence d'un domaine d'échelles où le flux spectral d'énergie $\varepsilon(k)$ est constant. Or dans les expériences et les simulations où elle est vérifiée **[5, 87, 12]**, on constate que le domaine de flux spectral constant est nettement plus étroit que la gamme d'échelles vérifiant (2.1.5). Si l'on joue sur la forme de la dissipation d'énergie à grande échelle pour élargir le domaine de flux spectral constant, on perd l'accord avec (2.1.5) et on observe un spectre plus raide **[27]**. Il y a là un paradoxe.

De plus, alors que les statistiques des incréments de vitesse ont été étudiées en détail, les propriétés des transferts d'énergie φ_l définis par la relation (2.3.3) restent largement inexplorées. Les propriétés statistiques d'une quantité η_l analogue à ϕ_l mais basée sur l'enstrophie au lieu de l'énergie ont été étudiées dans **[6]**. Cette analyse s'appuie sur la notion de hiérarchie des transferts, développée par She et Leveque **[99]** dans le cadre de leur théorie de l'intermittence tridimensionnelle et adaptée ici au cas bidimensionnel. Nous avons entrepris une étude dans cet esprit, basée sur ϕ_l et la hiérarchie que ces transferts d'énergie définissent **[4]**. Nous renvoyons le lecteur au texte de l'article, inclus, pour les détails de ce travail qui s'écarte du thème de cette thèse. Il en ressort cependant que certaines lois d'échelles semblent contrôlées non pas par les fluctuations rares et intenses des transferts mais par les fluctuations les plus fréquentes, contribuant majoritairement à la variance des transferts.

Ceci rejoint le constat que la contribution du flux d'énergie aux statistiques des incréments de vitesse (à travers l'équation de Kolmogorov (2.3.2)) est très faible **[87, 12]**. Dès lors, le flux moyen doit-il être la grandeur centrale de la cascade s'il est beaucoup plus faible que sa fluctuation ? La cascade inverse bidimensionnelle d'énergie est peut-être plus éloignée du tableau kolmogorien qu'il n'y paraît.

2.4. Bilan

La compréhension actuelle de la turbulence bidimensionnelle s'articule autour du concept de double cascade, variante bidimensionnelle due à Kraichnan des idées de Kolmogorov. La cascade d'enstrophie ne présente pas d'intermittence **[11, 5]**. Notre contribution en qui concerne l'énergie a montré l'absence d'intermittence dans la cascade inverse d'énergie, tout en laissant ouverte la possibilité de propriétés statistiques complexes des transferts. Cependant, l'organisation spatiale de cette turbulence et l'omniprésence des structures cohérentes rendent essentielle une analyse dans l'espace physique de ces cascades, éléments centraux dans la description de la turbulence. Le noyau de cette thèse consiste en le développement d'une telle description pour la cascade d'un traceur et l'étude des conséquences sur le problème de la paramétrisation des échelles sous-maille.

Article paru dans *Physical Review E*

Article soumis à *Physical Review Letters*

(en révision)

CHAPITRE 3

Spécificités pour un traceur

3.1. Contrastes dynamiques

Outre l'importance des structures cohérentes, et en relation avec elles, la turbulence bidimensionnelle est caractérisée par d'importants contrastes dynamiques : d'une région à l'autre, certaines propriétés peuvent être durablement différentes. Ceci est particulièrement vrai pour le transport, en raison essentiellement de la bidimensionnalité et non de la turbulence. En effet un champ de vitesse bidimensionnel et incompressible dérive d'une fonction de courant $\psi(x, y, t)$:

$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{3.1.1}$$

$$u_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{3.1.2}$$

ce qui entraîne que la trajectoire $\overrightarrow{x}(t)$ d'un élément de fluide :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}(t), t)$$

est exactement la trajectoire dans l'espace des phases d'un système hamiltonien dont le hamiltonien ψ dépend du temps. Les coordonnées x et y jouent le rôle de variables conjuguées dans l'équation canonique :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \psi}{\partial y},$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Le fait lourd de conséquence ici est que les systèmes hamiltoniens bidimensionnels dépendant du temps, même de façon simple, peuvent être chaotiques **[90, 3]**. Ainsi selon les propriétés spatiales et temporelles de ψ, les trajectoires pourront être simples (périodiques pour un champ de vitesse figé) ou complexes (chaotiques), la situation la plus réaliste étant intermédiaire entre les deux, avec des régions calmes où les particules suivent des trajectoires régulières (domaines elliptiques), séparées par des zones chaotiques donnant lieu à une dispersion intense (domaines hyperboliques). De plus, la propriété de conservation lagrangienne de la vorticité (au forçage et à la dissipation près) implique une interaction subtile entre le champ de vitesse et ses propriétés de transport.

Physiquement, les tourbillons cohérents sont un exemple typique de domaines elliptiques. Ils sont en effet capables de piéger et de confiner des particules sur des durées longues, les préservant ainsi de la dispersion qui a lieu à l'extérieur des tourbillons **[33]**. Les structures

cohérentes et plus largement les contrastes dynamiques sont ainsi une composante essentielle dans les propriétés de transport de la turbulence bidimensionnelle.

3.2. Dynamique des gradients de traceur

Dans les écoulements bidimensionnels incompressibles, il y a une dualité entre séparation de paire de particules et évolution des gradients de traceurs : à la séparation exponentielle d'une paire correspond l'amplification du gradient du traceur. La dynamique des gradients de traceur est mieux connue en deux qu'en trois dimensions, notamment en raison de la plus grande facilité d'observation et de simulation, et d'une moindre complexité géométrique.

Cette connaissance a en particulier beaucoup progressé récemment, et nous nous proposons dans cette section de dégager brièvement les idées principales qui en découlent. Le lecteur pourra se reporter à la thèse de Guillaume Lapeyre [**59**] ainsi qu'à plusieurs articles [**84, 106, 47, 9, 91, 61, 53**].

3.2.1. Partition de l'espace physique. Les premiers travaux[1] se sont intéressés à l'évolution du vecteur $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{\nabla} T$, gouvernée par l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} T = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{q} + A^T \overrightarrow{q} = 0, \tag{3.2.1}$$

$$\text{où } A_{ij} = \partial_j u_i. \tag{3.2.2}$$

L'hypothèse que le gradient de vitesse $A = \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}$ évolue lentement le long d'une trajectoire lagrangienne (qui revient à négliger $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ devant A^2) ramène cette équation à un problème de valeurs propres [**84, 106**]. Le gradient de vitesse A se décompose en une partie symétrique, le tenseur de déformation S, et une partie antisymétrique donnée par la vorticité ω :

$$2A = S + \omega J,$$

$$\text{où } J = \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix}$$

$$\text{et } S = A + A^T, \tag{3.2.3}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_n & \sigma_s \\ \sigma_s & -\sigma_n \end{bmatrix},$$

$$\omega = \partial_x u_y - \partial_y u_x,$$

$$\sigma_n = \partial_x u_x - \partial_y u_y, \tag{3.2.4}$$

$$\sigma_s = \partial_x u_y + \partial_y u_x$$

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 + \sigma_s^2. \tag{3.2.5}$$

[1] Ces études ne font pas de distinction entre traceur passif et actif.

Nous introduisons ici le tenseur antisymétrique unité J et la déformation σ. À cause de l'incompressibilité, la trace de $-A^T$ est nulle et ce tenseur possède deux valeurs propres opposées[2]. Si leur produit $\det A \equiv Q$ est négatif, elles sont réelles, valent $\pm\sqrt{-Q}$ et sont associées chacune à un vecteur propre $\overrightarrow{e}_{\pm}$. La solution de (3.2.1) aux temps longs est proportionnelle à $\exp\left(t\sqrt{-Q}\right)\overrightarrow{e}_{+}$, correspondant à une croissance exponentielle du gradient et à son alignement le long de la direction propre e_+ de A^T. Dans le cas contraire les valeurs propres sont imaginaires et le gradient ne croît pas mais oscille en décrivant une ellipse orientée à 45 degrés par rapport aux axes propres du tenseur[3] $S = A + A^T$. Enfin le cas dégénéré $Q = 0$ correspond à une croissance linéaire du gradient.

Ceci définit le critère d'Okubo-Weiss Q :

$$Q = \frac{1}{4}\left(\sigma^2 - \omega^2\right). \tag{3.2.6}$$

Il exprime le concept central que la dynamique du gradient de traceur est le résultat d'une compétition entre déformation σ et rotation, mesurée ici par la vorticité ω. Ce critère définit une partition de l'espace physique en zones dont les propriétés sont distinctes. Dans les régions où la déformation domine, il est possible de prédire tant son taux de croissance exponentielle (valeurs propres) que son orientation (vecteurs propres). Ces régions sont dites hyperboliques car les lignes de courant (dans le référentiel en comouvement avec la particule) sont des hyperboles. Dans les régions où la rotation domine, on peut prédire l'absence de croissance des gradients et donc l'inhibition de la cascade de traceur. Elles sont dites elliptiques, en référence aussi à la forme des lignes de courant. Enfin, le critère Okubo-Weiss est relié à la pression par la relation

$$Q = -\frac{1}{2}\Delta P. \tag{3.2.7}$$

Ainsi les régions elliptiques correspondent aux minima de la pression (coeurs des tourbillons) **[62]**.

Cependant l'hypothèse $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t \ll A^2$ n'est vérifiée que rarement dans un écoulement turbulent **[9]** et une amélioration de ce critère a été proposée **[47]**, en tenant compte de $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$. Elle conduit à prendre comme critère d'hyperbolicité la plus grande valeur propre de la Hessienne (différentielle seconde) de la pression. Le mérite du critère de Hua-Klein, comme de celui d'Okubo-Weiss, est d'aboutir à une partition de l'espace physique. Dans un champ turbulent typique, on peut distinguer les coeurs des tourbillons, elliptiques, leur périphérie, hyperbolique, et le reste de l'espace sans caractère elliptique ou hyperbolique affirmé et parfois appelé le marécage.

Un défaut de ces critères est de ne pas être invariant par un changement de référentiel en rotation uniforme, et de manquer ainsi au principe d'objectivité. Ainsi le caractère elliptique ou hyperbolique d'un point de l'espace ne sera pas le même selon que l'écoulement est observé dans un référentiel «fixe» ou en rotation uniforme. De même, les directions propres de A ne sont pas invariantes.

---

[2]Les propriétés de dispersion des écoulements compressibles sont très différentes de celles discutées ici [**84**].
[3]La définition de S adoptée ici diffère d'un facteur 2 de Hua et al.

3.2.2. Alignements préférentiels. Un moyen simple de garantir cette invariance est de considérer une équation scalaire et non vectorielle, celle régissant l'évolution de la norme du gradient de traceur $\overrightarrow{q}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q^2 = -\,\overrightarrow{q}^T S\,\overrightarrow{q}, \tag{3.2.8}$$

La signification physique de ce taux de croissance est assez simple. Les forts gradients marquent la présence de structures de petite échelle dans le champ de traceur. Aussi la croissance du carré du gradient témoigne du processus de formation d'une petite échelle. C'est ainsi un diagnostic de la cascade du traceur. S'il est positif, on a création de petites échelles, et vice-versa. Le tenseur de déformation S est symétrique et possède deux valeurs propres, σ et $-\sigma$:

$$S \sim \begin{bmatrix} \sigma & \\ & -\sigma \end{bmatrix}.$$

Les directions associées à ces valeurs propres sont dites respectivement extensionnelle et compressionnelle. Comme S est symétrique, elles sont orthogonales. Si $\overrightarrow{q}$ est parallèle à la direction compressionnelle, on aura $\overrightarrow{q}^T S\,\overrightarrow{q} = -\sigma q^2$ et $\mathrm{d}q^2/\mathrm{d}t > 0$. Inversement si $\overrightarrow{q}$ est parallèle à la direction extensionnelle, $\overrightarrow{q}^T S\,\overrightarrow{q} = \sigma q^2$ et $\mathrm{d}q^2/\mathrm{d}t < 0$. La croissance du gradient et le processus de cascade sont ainsi fortement conditionnés par les propriétés géométriques des champs de vitesse et de traceur.

Considérons momentanément un cas forcé à grande échelle et dissipé à petite échelle avec une diffusivité κ. S'il s'établit un équilibre entre production de gradients par l'advection et destruction par la diffusion, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}T &= \kappa\Delta T + f_T \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{q} + A^T\overrightarrow{q} &= \kappa\Delta\overrightarrow{q} + \overrightarrow{\nabla}f_T, \\
\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \kappa\Delta\right)q^2 + \overrightarrow{q}^T S\,\overrightarrow{q} &= -2\kappa\left\|\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{q}\right\|^2 + 2\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{\nabla}f_T \\
\text{d'où}\quad \int \overrightarrow{q}^T S\,\overrightarrow{q}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V} &= -2\kappa\int\left\|\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{q}\right\|^2\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V} + 2\int\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{\nabla}f_T\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V}.
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

f_T désigne le forçage et V le volume (enfin, la surface) occupé par le fluide. Si le forçage agit à une échelle l_I grande devant l'échelle diffusive l_D on peut faire les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
\kappa\int\left\|\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{q}\right\|^2\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V} &\approx \frac{1}{l_D^2}\kappa\int(\partial_j T)^2\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V} = \frac{\eta_T}{l_D^2}, \\
\int\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{\nabla}f_T\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V} &\approx \frac{1}{l_I^2}\int Tf\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V} = \frac{\eta_T}{l_I^2}, \\
\int\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{\nabla}f_T\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V} &\ll \kappa\int\left\|\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{q}\right\|^2\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V}.
\end{aligned}$$

Rappelons que η_T désigne le taux de destruction de variance du traceur par la diffusion, équilibré ici par le forçage f_T. Ainsi cet équilibre se traduit pour le gradient de traceur par :

$$\int \overrightarrow{q}^T S \overrightarrow{q} \, \mathrm{d}\overrightarrow{x} = -2\kappa \int \left\| \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{q} \right\|^2 \mathrm{d}\overrightarrow{x} < 0. \tag{3.2.10}$$

L'interprétation géométrique de cet équilibre est que le signe négatif de $\int \overrightarrow{q}^T S \overrightarrow{q} \, \mathrm{d}\overrightarrow{x}$ suppose un alignement préférentiel de $\overrightarrow{q}$ avec l'axe compressionnel de S , c'est-à-dire correspondant à la valeur propre négative. Et en effet un alignement statistique est observé [**91**], d'autant meilleur que la norme du gradient est importante, sans être jamais parfait même pour les plus forts gradients.

Une analyse plus fine dans le cas non forcé et en négligeant la diffusion améliore sensiblement cette prédiction. Le point-clé consiste à se placer dans un référentiel tournant dans lequel les axes de S sont fixes. Ce référentiel tourne à la vitesse angulaire $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ définie par [**61**] :

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} S - 2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} JS \tag{3.2.11}$$

Dans ce référentiel, $\overrightarrow{q}$ fait un angle $\zeta/2 + \pi/4$ avec l'axe compressionnel. L'angle[4] ζ détermine la croissance ou non de la norme du gradient :

$$\frac{\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}t} = -q^2 \sigma \sin\zeta, \tag{3.2.12}$$

mais son évolution est autonome, indépendante de cette norme :

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = \sigma(r - \cos\zeta), \tag{3.2.13}$$

$$\text{où } r \equiv \frac{\omega + 2\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t}{\sigma}. \tag{3.2.14}$$

Ainsi les équations (3.2.13) et (3.2.12) permettent de prédire à la fois l'orientation de $\overrightarrow{q}$ et la croissance de sa norme. Si $|r| < 1$, ζ tend vers le point fixe stable $\zeta^- = \arccos(r)$ et q croît exponentiellement. Dans ce régime, la déformation σ domine la rotation effective $\omega + 2\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$. Si au contraire $|r| > 1$, on est amené à prédire une rotation continue du vecteur $\overrightarrow{q}$, sans croissance. De plus l'angle ζ le plus fréquent correspond à un minimum de $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}t$. D'après (3.2.13) et en faisant l'hypothèse que

$$s \equiv \frac{1}{\sigma^2}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \ll 1, \tag{3.2.15}$$

ce minimum de $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}t$ correspond à un alignement à 45 degrés par rapport aux axes propres de S. Ces résultats sont bien vérifiés sur des exemples analytiques et les expériences numériques de [**61**], mais peuvent être améliorés dans le régime elliptique, en particulier si s n'est pas

[4]Cet angle ζ n'a rien à voir avec les exposants de fonctions de structure ζ_n , sur lesquels nous ne reviendrons plus.

négligeable. Dans le cas où $s \gg 1$, on peut montrer **[53]** que $\overrightarrow{q}$ s'aligne avec une direction propre du tenseur N défini par :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}q^2 = \overrightarrow{q}^T N \overrightarrow{q}, \tag{3.2.16}$$

$$\text{où } N = S^2 - \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} + \omega J S. \tag{3.2.17}$$

Enfin, les paramètres r et s s'expriment en fonction de la Hessienne de la pression car :

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\begin{bmatrix} \partial_{xx} - \partial_{yy} & 2\partial_{xy} \\ -2\partial_{xy} & \partial_{yy} - \partial_{xx} \end{bmatrix} P \tag{3.2.18}$$

3.3. Bilan

Pour récapituler, la cascade de traceur étant vue comme un processus de croissance du gradient de traceur $\overrightarrow{q}$, le diagnostic naturel est le taux de croissance du carré du gradient de traceur $\mathrm{d}q^2/\mathrm{d}t$, donné par la relation (3.2.8). Au-delà du diagnostic, il est possible de prédire la croissance du gradient $\overrightarrow{q}$ et son orientation. Ce faisant, le critère introduit par Lapeyre et collaborateurs reprend en l'améliorant l'idée d'une compétition entre déformation et rotation : là où le critère d'Okubo-Weiss (3.2.6) compare la déformation σ à la vorticité ω, le critère r (3.2.14) compare la déformation σ à la rotation effective $\omega + 2\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$. On est amené ainsi à partitionner l'écoulement en domaines hyperboliques et elliptiques aux propriétés contrastées.

Là ou le critère d'Okubo-Weiss négligeait les variations temporelles du gradient de vitesse A, celui de Lapeyre néglige les variations de la déformation σ. Un degré supplémentaire de prédiction est atteint en tenant compte de ces variations, mesurées par le paramètre s (3.2.15). Enfin, ces deux paramètres r et s sont invariants par changement de référentiel tournant. De plus ils s'expriment en fonction de la Hessienne de la pression, ce qui d'une part exprime le caractère non local en espace du processus d'advection, et d'autre part signifie que ces critères et les propriétés dynamiques sous-jacentes sont déterminés par les grandes échelles de l'écoulement.

Enfin, le processus de création des petites échelles fait intervenir de façon cruciale la géométrie des champs de traceur, de vitesse et d'accélération (pression).

Deuxième partie

Cascade d'un traceur et paramétrisation

CHAPITRE 4

Diagnostic et paramétrisation

4.1. Transport, mélange et paramétrisation

4.1.1. Transport et mélange. Afin d'envisager le problème de la modélisation, il convient de préciser une question de vocabulaire. La notion de transport est souvent associée à celle de mélange, et la distinction entre les deux est importante. Le transport au sens strict concerne l'équation d'advection :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) T = 0. \tag{4.1.1}$$

Considérer cette équation revient à suivre les trajectoires d'éléments de fluide :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t} &= \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}(t), t), \\ \overrightarrow{x}(t=0) &= \overrightarrow{x}_0, \end{aligned}$$

car la connaissance de ces trajectoires permet de résoudre l'équation (4.1.1) :

$$T(\overrightarrow{x}(t), t) = T(\overrightarrow{x_0}, t=0).$$

Le transport est un processus réversible (du moins formellement) et qui conserve la variance totale du traceur $\int T^2 \mathrm{d}\overrightarrow{x}/2$.

Le mélange est lui un processus irréversible qui tend à homogénéiser le traceur et donc à faire décroître sa variance. C'est le rôle de la diffusivité moléculaire κ de l'équation d'advection-diffusion (1.2.1) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \frac{T^2}{2} \mathrm{d}\overrightarrow{x} = -\kappa \int \left\| \overrightarrow{\nabla} T \right\|^2 \mathrm{d}\overrightarrow{x}.$$

Cependant l'un et l'autre sont étroitement liés. Un processus de diffusion pure en l'absence de transport est beaucoup plus lent qu'en présence d'un brassage énergique. C'est une évidence quotidienne que l'on peut interpréter en termes de cascade : la diffusion moléculaire étant d'autant plus efficace que le champ de traceur présente plus de petites échelles, la production de ces petites structures par l'advection joue le rôle d'un catalyseur qui accélère considérablement le mélange, mesuré par la décroissance de la variance du traceur.

4.1.2. «Mélange» turbulent et paramétrisation. Un processus analogue au mélange a lieu en présence de transport pur si l'on tient compte des limitations dues à la résolution, numérique ou expérimentale. Supposons en effet que l'on n'ait accès (ou que l'on ne veuille s'intéresser, par souci d'économie de calcul notamment) qu'à une information $\theta(\overrightarrow{x}, t)$ limitée en résolution et dont les échelles plus petites qu'une échelle de coupure l_0 ont été filtrées par

un filtre passe-bas $p(l)$:

$$\theta(\overrightarrow{x},t) = \overline{T} \equiv \int T(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l})p(l)\mathrm{d}\overrightarrow{l}.$$

Alors, T vérifiant (4.1.1), la cascade directe du traceur dépeuple progressivement les grandes échelles de T au profit des petites échelles, qui sont absentes de θ. Par conséquent, la variance de θ décroît[1] à un rythme fixé approximativement par le flux spectral de variance de traceur à travers le nombre d'onde k_0 correspondant à l'échelle k_0 :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \frac{\theta^2}{2}\mathrm{d}\overrightarrow{x} \approx -\eta_T(k_c). \tag{4.1.2}$$

Cette décroissance implique que l'équation d'évolution de θ n'est pas une simple équation d'advection :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\theta = \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\theta - \overline{\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)T} \neq 0. \tag{4.1.3}$$

Exprimer le second membre de (4.1.3) en fonction de θ et non de T est tout le problème de la paramétrisation de l'effet des termes sous-maille[2].

Mais ce processus n'est pas du mélange à proprement parler. Si la variance de θ décroît, ce qui constitue un «mélange» des grandes échelles, nous avons en revanche mis de côté l'information concernant le mélange à petite échelle. Une information partielle sur ce mélange serait par exemple contenue dans la variance sous-maille v :

$$2v \equiv \overline{T^2} - \theta^2,$$

et on pourra dire que le mélange est efficace si v est faible. Cette information sera cruciale si l'on cherche à évaluer une grandeur dépendant de T de façon non-linéaire. Par exemple la vitesse d'une réaction chimique dépend généralement non-linéairement des concentrations des réactifs, et exponentiellement de la température. Modéliser l'évolution de v ou des moments plus élevés de T , voire de sa distribution de probabilité, est un second problème qui relève du mélange au sens littéral.

4.1.3. Problèmes abordés. Nous nous intéresserons exclusivement au premier problème (équation 4.1.3), que l'on pourra appeler modélisation du transport, du brassage, ou encore du «mélange turbulent», dans le sens large du terme, et ce à travers les questions suivantes.

Quelles sont les caractéristiques que l'on peut attendre d'une paramétrisation réaliste du mélange turbulent ? La décroissance de la variance du traceur résolu ne suffit pas : les formes la garantissant sont légion. Compte tenu des forts contrastes dynamiques qui caractérisent la turbulence bidimensionnelle, *la paramétrisation du transport doit reproduire la cascade du traceur vers les petites échelles, et ce localement dans l'espace.* Nous développons en 4.2 une approche diagnostique de la cascade de traceur en nous attachant à considérer des propriétés locales en temps et en espace, et concernant une seule réalisation de l'écoulement. Ce diagnostic nous permettra en 5.1 de comparer différents modèles.

[1] cette décroissance est purement due aux termes convectifs de l'équation (4.1.1), ce qui relativise son caractère réversible

[2] Nous ne parlons pas ici de la modélisation de phénomènes physiques (instabilités, convection...) se déroulant à une échelle non résolue, mais seulement des effets du transport.

De plus, on peut s'étonner que les paramétrisations les plus usitées (diffusivité turbulente, hyperlaplacien) soient isotropes alors que *la dynamique du traceur est caractérisée par des directions privilégiées*. Nous montrons en 4.3.2 qu'une paramétrisation utilisant cette anisotropie, la diffusivité de déformation ou *strain diffusivity* (SD) peut se justifier à partir d'arguments simples. De plus nous montrons que ses propriétés dissipatives sont en accord avec l'analyse de la cascade de traceur en termes de gradients.

Enfin, peut-on paramétriser le transport d'un traceur actif et d'un traceur passif de la même façon ? La relation entre vitesse et vorticité fait que la paramétrisation du transport de la vorticité affecte directement l'équation de la vitesse et donc le bilan d'énergie. Or, si la cascade d'enstrophie est dirigée comme celle du traceur vers la petite échelle, celle de l'énergie est en sens inverse. Par conséquent, contrairement au cas tridimensionnel où l'on peut utiliser une viscosité turbulente pour augmenter la dissipation d'énergie, la dimension deux suppose une attitude opposée **[8]** : *l'énergie doit être conservée et non dissipée*. Nous montrons en 4.4.2 que la *strain diffusivity* conserve l'énergie, et en 6.2.2 qu'elle est la seule dans une classe de paramétrisations.

4.2. Transferts de variance d'échelle en échelle

4.2.1. Dynamique des incréments de traceur. La présence de structures de petite échelle peut être détectée par les gradients de traceur, mais aussi par ses incréments. Par exemple, la présence d'un front ou d'un filament se traduit par une forte différence dans les valeurs prises par le champ de traceur en deux points de part et d'autre du front. C'est cette approche que nous développons ici.

Précisément, nous considérons l'incrément δT défini par :

$$T^{\pm}(\vec{x}, \vec{l}) = T(\vec{x} \pm \vec{l}/2), \tag{4.2.1}$$

$$\delta T = T^{+} - T^{-}. \tag{4.2.2}$$

Il s'agit d'une fonction de deux vecteurs : la position $\vec{x}$ et la séparation $\vec{l}$. Comme c'est l'amplitude de la différence qui est en jeu, nous nous attacherons à son carré δT^2 et à son équation d'évolution. Il sera utile d'introduire également l'incrément de vitesse $\delta\vec{u}$ ainsi que ses composantes longitudinale $\delta u_{\parallel}$ et transverse $\delta u_{\perp}$:

$$\vec{u}^{\pm}(\vec{x}, \vec{l}) = \vec{u}(\vec{x} \pm \vec{l}/2),$$

$$\delta\vec{u} = \vec{u}^{+} - \vec{u}^{-},$$

$$\delta u_{\parallel} = \frac{\vec{l}}{l} \cdot \delta\vec{u}, \tag{4.2.3}$$

$$\delta u_{\perp} = \left(\frac{\vec{l}}{l} \wedge \delta\vec{u}\right) \cdot \vec{e_z}, \tag{4.2.4}$$

où $\vec{e_z}$ est un vecteur unitaire orthogonal au plan de l'écoulement. Ceci étant posé, partant de l'équation de transport :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) T = 0,$$

il vient pour δT :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{u}^{+} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) T^{+} &= 0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{u}^{-} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) T^{-} &= 0, \\
\text{d'où} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\overrightarrow{u}^{+} + \overrightarrow{u}^{-}}{2} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right) \delta T &= -\frac{\delta \overrightarrow{u}}{2} \cdot \overrightarrow{\nabla} \left(T^{+} + T^{-}\right).
\end{aligned}$$

Les relations entre dérivées par rapport à $\overrightarrow{x}$ et à $\overrightarrow{l}$:

$$2 \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{l}} T^{\pm} = \pm \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}} T^{\pm},$$

permettent de transformer cette équation en :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}} + \delta \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{l}}\right) \delta T = 0, \tag{4.2.5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}} + \delta \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{l}}\right) \delta T^{2} = 0, \tag{4.2.6}$$

$$\text{où} \quad \overrightarrow{U} = \frac{\overrightarrow{u}^{+} + \overrightarrow{u}^{-}}{2}.$$

L'équation (4.2.6) s'obtient en multipliant (4.2.5) par $\delta T/2$.

La forme de ces équations d'évolution de δT et δT^2 est familière : ce sont des équations de transport, mais dans l'espace à 4 dimensions formé par les deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{l}$. Ainsi alors que le traceur est transporté dans l'espace physique, son incrément est non seulement transporté dans l'espace physique à la vitesse $\overrightarrow{U}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{l})$ mais aussi dans l'espace des échelles à la vitesse $\delta \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{l})$. Cette interprétation donne une image concrète de la cascade d'échelle en échelle.

L'échelle d'une structure est un scalaire l plutôt qu'un vecteur $\overrightarrow{l}$. Pour passer d'une séparation vectorielle à une échelle, il suffit d'intégrer sur la composante angulaire de $\overrightarrow{l}$. Il faut pour cela exprimer (4.2.6) en coordonnées polaires pour $\overrightarrow{l}$. Tout d'abord, en utilisant l'incompressibilité de $\delta \overrightarrow{u}$ par rapport à la variable $\overrightarrow{l}$:

$$\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{l}} \cdot \delta \overrightarrow{u} = 0,$$

les gradients de (4.2.6) se transforment en divergences de flux :

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta T^{2} + \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}} \cdot (\delta T^{2} \overrightarrow{U}) + \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{l}} \cdot (\delta T^{2} \delta \overrightarrow{u}) = 0. \tag{4.2.7}$$

Les coordonnées polaires pour $\overrightarrow{l}$ font apparaître les composantes longitudinale et transverse de l'incrément de vitesse :

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta T^2 + \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}} \cdot (\delta T^2 \overrightarrow{U}) + \frac{\partial}{l\partial l}(l\delta T^2 \delta u_{\parallel}) + \frac{\partial}{l\partial \phi}(\delta T^2 \delta u_{\perp}) \quad = 0$$

En intégrant sur la dépendance angulaire ϕ, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\oint \delta T^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} + \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}} \cdot \oint \delta T^2 \overrightarrow{U} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} & \\ + \frac{\partial}{l\partial l} l \oint \delta T^2 \delta u_{\parallel} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} \quad &= \quad 0. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

De même qu'en (4.2.6), la variation temporelle de $\oint \delta T^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}$ est due à deux contributions : d'une part un transport dans l'espace physique (divergence sur $\overrightarrow{x}$ du flux $\oint \delta T^2 \overrightarrow{U} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}$) ; d'autre part un transfert entre échelles, traduit par le dernier terme de (4.2.8). Le flux $\oint \delta T^2 \delta u_{\parallel} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}$ est dirigé vers les grandes échelles (la divergence est sur la variable l) . Nous voulons définir un flux vers les petites échelles et homogène à la destruction de variance par la diffusion, η_T et au flux spectral $\eta_T(k)$. Cela nous conduit à adopter la définition suivante de $F(\overrightarrow{x}, l)$, le flux local de variance de traceur des échelles plus grandes que l vers les échelles plus petites :

$$F(\overrightarrow{x}, l) \equiv -\frac{1}{2l}\oint \delta u_{\parallel} \delta T^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}. \tag{4.2.9}$$

Cette définition permet de faire le lien avec l'équation de Yaglom, qui est discuté en 4.2.2. Celle-ci (équation 4.2.17) stipule que, dans une situation forcée et statistiquement stationnaire, localement homogène et isotrope et pour une échelle convective l :

$$\left\langle \delta T^2 \delta u_{\parallel} \right\rangle = -2l \left\langle \eta \right\rangle .$$

Nous avons choisi la normalisation de F de telle sorte que :

$$\langle F(\overrightarrow{x}, l) \rangle = \langle \eta \rangle$$

Ainsi le flux F est bien positif pour une cascade directe. Nous montrons de plus en 4.2.2 que là où l'équation de Yaglom fait un bilan global et statistique du transfert de variance de traceur vers les petites échelles, nous faisons un bilan détaillé, local en espace et en temps, et sur une réalisation du champ de vitesse, de cette même cascade.

Le sens du flux local peut être interprété de façon géométrique (figure 4.2.1) dans le cas idéal où le champ de vitesse est une déformation pure. Un front de traceur se forme alors typiquement perpendiculairement à la direction de compression. Le flux local $F(\overrightarrow{x}, l)$ fait le bilan des contributions à la cascade de toutes les paires séparées de l et centrées sur $\overrightarrow{x}$. Les paires pour lesquelles $\delta u_{\parallel} < 0$ (les deux points de la paire se rapprochent, comme par exemple la paire $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{l_2}/2, \overrightarrow{x} - \overrightarrow{l_2}/2$) sont situées de part et d'autre du front et leur incrément est élevé. Inversement celles pour lesquelles $\delta u_{\parallel} > 0$ (les deux points de la paire s'éloignent, comme $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{l_2}/2, \overrightarrow{x} - \overrightarrow{l_2}/2$) sont situées dans le voisinage du front et l'incrément associé est faible. Ainsi dans cette situation typique, les valeurs négatives de $\delta u_{\parallel}$ sont associées aux valeurs élevées de δT^2et les valeurs positives $\delta u_{\parallel}$ aux faibles valeurs de δT^2. Le bilan net donne

donc un flux $F(x,l) > 0$. Ce signe est le résultat de la corrélation géométrique des champs de vitesse et de traceur. Cependant il pourra occasionnellement être négatif (cascade localement inversée) en fonction de la géométrie locale de ces champs.

Nous avons ainsi défini une grandeur de diagnostic, le flux local $F(\overrightarrow{x},l)$. Il décrit localement le taux de création ($F>0$) ou de destruction ($F<0$) de structures d'échelle plus petite que l dans le champ de traceur. Il est invariant par un changement quelconque de référentiel et par l'ajout d'une constante au champ de traceur. Alors que le taux de croissance du carré du gradient $\mathrm{d}q^2/\mathrm{d}t$ décrit la formation/destruction des structures dont l'échelle est la plus petite possible (l'échelle diffusive), il est ainsi possible de sélectionner l'échelle des structures auxquelles nous nous intéressons, en particulier dans le domaine convectif. En revanche, s'il est possible de prévoir la croissance du gradient de traceur $\overrightarrow{q}$ en fonction des caractéristiques du champ de vitesse, il paraît difficile de proposer une prédiction de $F(\overrightarrow{x},l)$ et nous ne le ferons pas.

4.2.2. Flux local et équation de Yaglom. L'équation de Yaglom (4.2.17) est au traceur ce que l'équation de Kolmogorov est à l'énergie. Dans cette partie, nous nous proposons de la retrouver par une démarche similaire à celle du 4.2. Nous mettrons ainsi en évidence points communs et différences avec l'approche statistique "classique".

L'équation de Yaglom exprime l'équilibre entre le flux de variance du traceur vers les petites échelles et la diffusion. Pour atteindre un tel équilibre, on considère une situation ou le traceur est forcé à grande échelle et diffusé à petite échelle :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}-\kappa\Delta\right)T=f_T.$$

Il vient alors pour l'incrément et son carré :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}}+\delta\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{l}}-\kappa\Delta_{\overrightarrow{x}}\right)\delta T=\delta f_T, \tag{4.2.10}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}}+\delta\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{l}}\right)\delta T^2=2\delta T\Delta_{\overrightarrow{x}}\delta T+2\delta T\delta f_T. \tag{4.2.11}$$

Le terme difficile est $\delta T\Delta_{\overrightarrow{x}}\delta T$. On peut l'évaluer comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_{\overrightarrow{x}}\delta T^2 &= T^+\Delta_{\overrightarrow{x}}T^+ + T^-\Delta_{\overrightarrow{x}}T^- - T^+\Delta_{\overrightarrow{x}}T^- - T^-\Delta_{\overrightarrow{x}}T^+ \\ &\quad -2\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}}T^+\cdot\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}}T^- + \left\|\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}}T^+\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}}T^-\right\|^2, \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

$$\begin{aligned}2\Delta_{\overrightarrow{l}}\delta T^2 &= T^+\Delta_{\overrightarrow{x}}T^+ + T^-\Delta_{\overrightarrow{x}}T^- - T^+\Delta_{\overrightarrow{x}}T^- - T^-\Delta_{\overrightarrow{x}}T^+ \\ &\quad +2\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}}T^+\cdot\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}}T^- + \left\|\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}}T^+\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}}T^-\right\|^2, \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

$$\delta T\Delta_{\overrightarrow{x}}\delta T = T^+\Delta_{\overrightarrow{x}}T^+ + T^-\Delta_{\overrightarrow{x}}T^- - T^+\Delta_{\overrightarrow{x}}T^- - T^-\Delta_{\overrightarrow{x}}T^+. \tag{4.2.14}$$

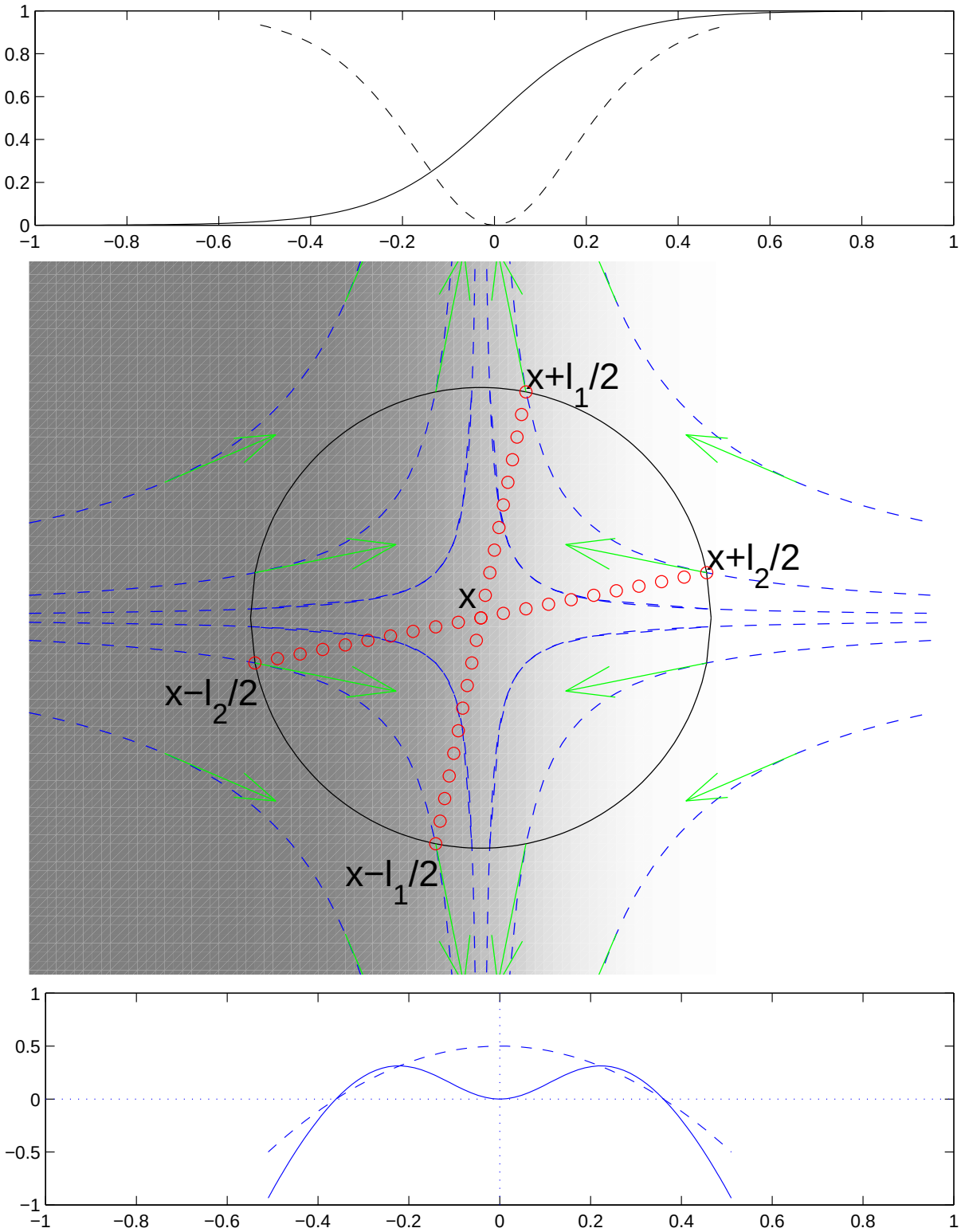


FIG. 4.2.1. Interprétation géométrique schématique du flux local de variance $F(\overrightarrow{x}, l)$ au point $\overrightarrow{x}$ et pour l'échelle l défini par l'équation (4.2.9), dans le cas idéal où le champ de vitesse est une déformation pure. Un front de traceur se forme typiquement perpendiculairement à la direction de compression. Haut : profil de traceur $T(x)$ (trait plein) et carré de l'incrément δT^2 (pointillés) calculé le long du cercle de centre x et de diamètre l. Bas : incrément longitudinal de traceur $\delta u_{\|}$ (pointillés) et contributions élémentaires $\delta T^2 \delta u_{\|}/2l$ (trait plein), calculés le long du cercle de centre $\overrightarrow{x}$ et de diamètre l.

On a utilisé les relations entre dérivées par rapport à $\overrightarrow{x}$ et à $\overrightarrow{l}$:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{l}} T^{\pm} &= \pm\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}} T^{\pm} \\ 4\Delta_{\overrightarrow{l}} T^{\pm} &= \Delta_{\overrightarrow{x}} T^{\pm}. \end{aligned}$$

En combinant (4.2.12), (4.2.13) et (4.2.14), on obtient finalement :

$$\delta T \Delta_{\overrightarrow{x}} \delta T = \left(\frac{1}{4}\Delta_{\overrightarrow{x}} + \Delta_{\overrightarrow{l}}\right) \delta T^2 - \left(\left\|\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}} T^{+}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}} T^{-}\right\|^2\right),$$

d'où en l'injectant dans (4.2.11) :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}} + \delta\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{l}} - \kappa\left(\frac{1}{2}\Delta_{\overrightarrow{x}} + 2\Delta_{\overrightarrow{l}}\right)\right)\delta T^2 \\ &\qquad = 2\delta T\delta f - 2\left(\eta_T^{+} + \eta_T^{-}\right), \\ &\qquad \text{où } \eta_T^{\pm} \equiv \kappa\left\|\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}} T^{\pm}\right\|^2 \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Ainsi, dans cette situation s'ajoutent au transport dans l'espace et entre échelles déjà présents dans (4.2.6) :

- la diffusion de l'incrément dans l'espace physique et dans l'espace des échelles[3]
- le forçage, qui agit à grande échelle seulement
- la destruction de variance par la diffusion.

L'équation (4.2.15) s'exprime, de même que (4.2.6) en terme de flux et en coordonnées polaires pour $\overrightarrow{l}$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\delta T^2 + \overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}}\cdot\left(\overrightarrow{U}\delta T^2\right) - 2\kappa\Delta_{\overrightarrow{x}}\delta T^2 \\ &+\frac{\partial}{l\partial l}\left(l\delta T^2\delta u_{\parallel}\right) - \frac{\kappa}{2l}\frac{\partial}{\partial l}l\frac{\partial}{\partial l}\delta T^2 + \frac{\partial}{l\partial\phi}\left(\delta T^2\delta u_{\perp}\right) - \frac{\kappa}{2l^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\delta T^2 \\ &\qquad = 2\delta T\delta f - 2\left(\eta_T^{+} + \eta_T^{-}\right) \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

Nous n'avons introduit jusque ici aucun cadre statistique. Si l'on considère maintenant un ensemble de réalisations stationnaire, spatialement homogène et isotrope[4], il vient :

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = 0, \quad \left\langle\overrightarrow{\nabla}_{\overrightarrow{x}}\right\rangle = 0, \quad \left\langle\frac{\partial}{\partial\phi}\right\rangle = 0.$$

D'où, en se plaçant à petite échelle, où le terme de forçage $\delta T\delta f$ est négligeable :

$$\frac{\partial}{l\partial l}l\left\langle\delta T^2\delta u_{\parallel}\right\rangle - \frac{\kappa}{2l}\frac{\partial}{\partial l}l\frac{\partial}{\partial l}\left\langle\delta T^2\right\rangle + 4\left\langle\eta_T\right\rangle = 0$$

En intégrant sur l, on obtient finalement l'équation de Yaglom **[108]** :

$$\left\langle\delta T^2\delta u_{\parallel}\right\rangle + 2l\left\langle\eta_T\right\rangle = 2\kappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left\langle\delta T^2\right\rangle \tag{4.2.17}$$

---

[3]Cette relation justifie la convention adoptée ici $\delta T = T(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{l}/2) - T(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{l}/2)$ plutôt que celle plus courante $\delta T = T(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{l}) - T(\overrightarrow{x})$, pour laquelle apparaît un terme de diffusion croisée entre $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{l}$.

[4]On obtiendrait bien sûr le même résultat en intégrant, à l'instar de [**80**], sur le temps t, la position $\overrightarrow{x}$ et la direction ϕ.

Dans la limite $l \to 0$ on retrouve simplement l'équilibre (3.2.10) entre production et destruction de gradients. En effet, on trouve en effectuant un développement limité et au bout d'un calcul assez fastidieux et sans intérêt particulier :

$$\begin{aligned} \langle \delta T^2 \delta u_{\|} \rangle &\approx \frac{l^3}{4} \langle \overrightarrow{q}^T S \overrightarrow{q} \rangle \\ \langle \delta T^2 \rangle &\approx \frac{l^2}{2} \langle q^2 \rangle - \frac{l^4}{32} \left\langle \left\| \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{q} \right\|^2 \right\rangle \end{aligned}$$

Comme on pouvait s'y attendre, les approches en termes de gradients et d'incréments de traceur se rejoignent dans la limite $l \to 0$.

C'est pour une échelle l dans le domaine convectif que l'équation (4.2.17) prend son sens. Pour une telle échelle, le terme $\kappa \mathrm{d} \langle \delta T^2 \rangle / \mathrm{d}l$ devient négligeable, et l'équation (4.2.17) exprime l'égalité du flux de variance d'échelle en échelle, dû à l'advection par l'écoulement, et de la dissipation η_T :

$$\langle F(\overrightarrow{x}, l) \rangle = \langle \eta_T \rangle .$$

Il s'agit cependant d'un bilan statistique, global, moyenné en espace et en temps, de la cascade de traceur. À l'opposé, le flux local $F(\overrightarrow{x}, l)$ intervient dans le bilan (4.2.16) qui est détaillé, instantané et local en espace, sur une seule réalisation des champs de vitesse et de traceur. Ainsi il est à même de refléter les inhomogénéités et contrastes spatiaux de l'écoulement et de mettre en évidence la variabilité spatiale de l'intensité de la cascade, voire le renversement de sa direction, comme nous le verrons plus loin.

4.2.3. La cascade vue dans l'espace physique. Nous présentons ici qualitativement les flux locaux tels qu'on peut les mesurer dans une simulation de résolution 1024^2, stationnaire et forcée à grande échelle (faible nombre d'onde $k_I = 4$) tant pour la vorticité que pour le traceur passif. Les paramètres numériques de cette expérience sont précisés en annexe D et son spectre en annexe A. La structure de l'écoulement s'organise autour des tourbillons cohérents d'échelle proche de celle du forçage (figure 4.2.2). Nous calculons les flux à une échelle l de huit pas de maille, qui est convective. Nous nous en assurons en vérifiant que pour cette valeur de l on a bien (figure 4.2.3) :

$$\langle F(\overrightarrow{x}, l) \rangle = \langle \eta_T \rangle$$

où la moyenne $\langle \rangle$ est une moyenne spatiale.

La distribution spatiale du flux local $F(\overrightarrow{x}, l)$, défini par la relation (4.2.9), est présentée en figure 4.2.4. Il présente des valeurs positives (cascade directe) et négatives (cascade inverse) selon les endroits, son amplitude pouvant largement dépasse sa valeur moyenne $< F(\overrightarrow{x}, l) > \approx \langle \eta_T \rangle = 147$. On peut distinguer ici deux types de régions. D'une part l'intérieur des tourbillons est divisés en quatre quartiers où la cascade est alternativement directe et inverse. Cette structure quadrupolaire est typique des tourbillons elliptiques **[52]**. À l'intérieur d'un tourbillon, les particules suivent des trajectoires quasi-elliptiques sur lesquelles le bilan de cette cascade alternée est quasiment nul, comme nous le verrons en 6.1.

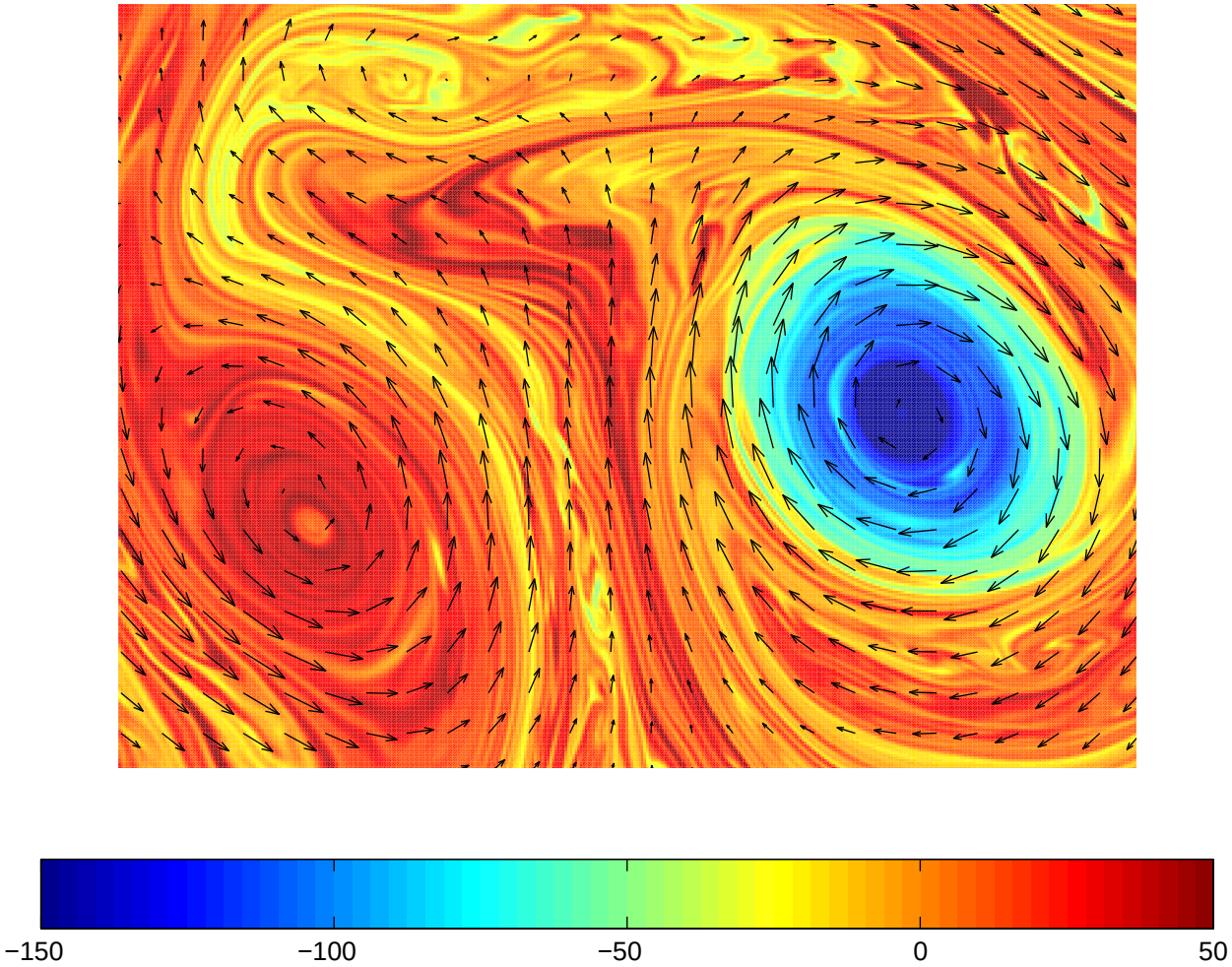


FIG. 4.2.2. Champ de traceur dans un champ de vitesse caractérisé par une cascade d'enstrophie. Détail de taille 300×400 d'un champ de taille 1024×1024. Les tourbillons cohérents d'échelle comparable à l'échelle d'injection $l_I = 128$ pas de maille, de grande durée de vie, peuvent piéger le traceur. Ainsi dans le tourbillon de droite le traceur ne s'est pas mélangé avec l'extérieur et a conservé une valeur élevée, qui aurait rapidement diminué s'il s'était trouvé à l'extérieur. Les tourbillons s'apparient temporairement, formant des structures typiques en dipôle. Les domaines de fort cisaillement à la périphérie des tourbillons donnent lieu à la formation de longs filaments.

Hors des tourbillons, le champ de traceur est constitué de longs filaments soit étirés, soit repliés par le champ de vitesse selon l'endroit. La cascade est en général directe ($F(\overrightarrow{x}, l) > 0$) mais est inversée dans certaines zones. Pour interpréter ce renversement, nous avons tracé sur le même champ la direction de l'axe de compression du gradient de vitesse. Dans les zones de cascade directe, les filaments sont en cours de formation par l'effet de cette compression, et sont orthogonaux à l'axe de compression. Inversement, les zones de cascade inverse (au centre de la figure 4.2.4 par exemple) sont caractérisées par des filaments plutôt parallèles à l'axe de compression. Ces zones semblent correspondre à un repliement des filaments.

Enfin, nous présentons la distribution des valeurs du flux $F(\overrightarrow{x}, l)$ (figure 4.2.5). Elle souligne le fait que le comportement moyen de cascade directe résulte d'une compensation de flux directs et indirects (mis en évidence ci-dessus) d'amplitude assez grande par rapport à la

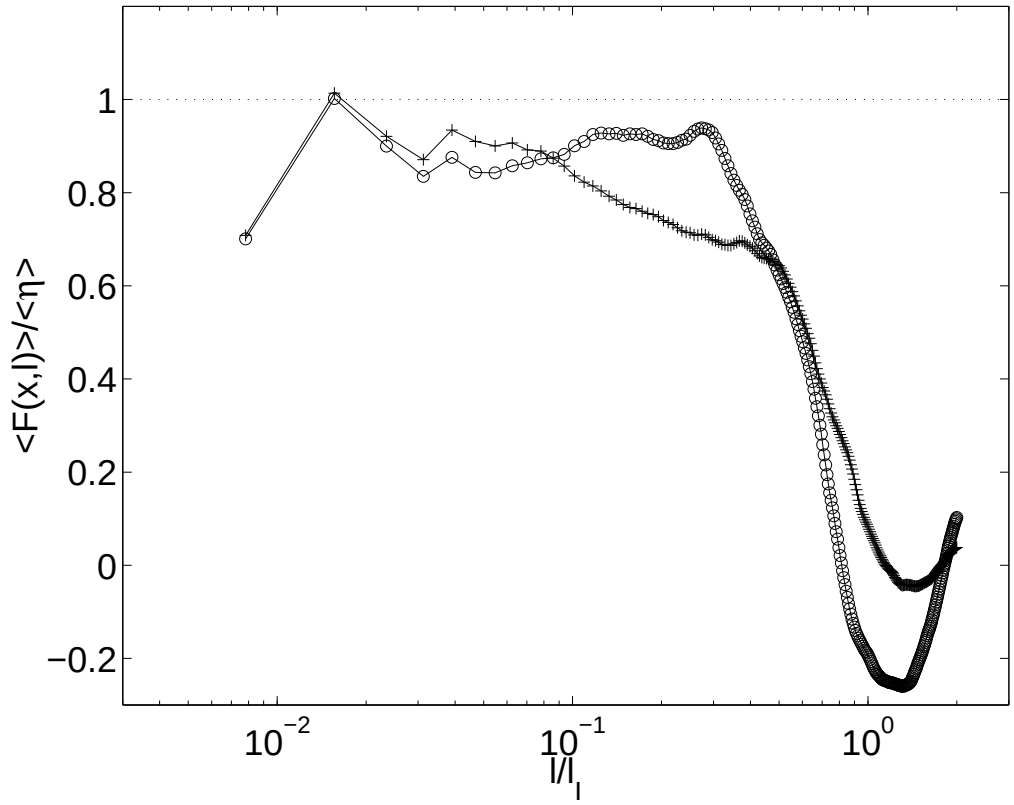


FIG. 4.2.3. Moyenne spatiale du flux de variance $\langle F(\overrightarrow{x}, l)\rangle$ défini par la relation (4.2.9) en fonction de l'échelle réduite l/l_I (l'échelle d'injection l_I vaut 128 pas de maille) , normalisé par la dissipation moyenne η , pour le traceur (croix) et la vorticité (cercles). En vertu de l'équation de Yaglom, le domaine convectif correspond aux échelles pour lesquelles $\langle F(\overrightarrow{x}, l)\rangle = \eta_T$, soit ici $0.03 \leq l/l_I \simeq\leq 0.1$.

valeur moyenne. Le bilan positif résulte d'une asymétrie de la distribution en faveur des flux directs.

4.3. Une diffusivité anisotrope : *strain diffusivity*

Nous présentons rapidement une classe de paramétrisations très usitées, les modèles de diffusivité turbulente et d'hyperdiffusivité. Ceux-ci ne reposent pas sur une estimation du terme sous-maille, mais au mieux sur une hypothèse d'analogie avec la diffusivité moléculaire. De plus ils sont isotropes. Nous proposons ensuite une estimation directe du terme sous-maille. Cette estimation aboutit à un opérateur anisotrope, la diffusivité de déformation ou *strain diffusivity* (SD) faisant intervenir les directions de déformation de l'écoulement. Nous développons ensuite les propriétés de ce modèle.

L'essentiel de ces résultats ont été publiés dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* [**30**].

4.3.1. Diffusivité turbulente et hyperdiffusivité. Rappelons que la paramétrisation consiste à modéliser l'évolution des grandes échelles du champ de traceur T , représentées par un champ filtré θ. De même, seules les grandes échelles du champ de vitesse $\overrightarrow{u}$ seront retenues

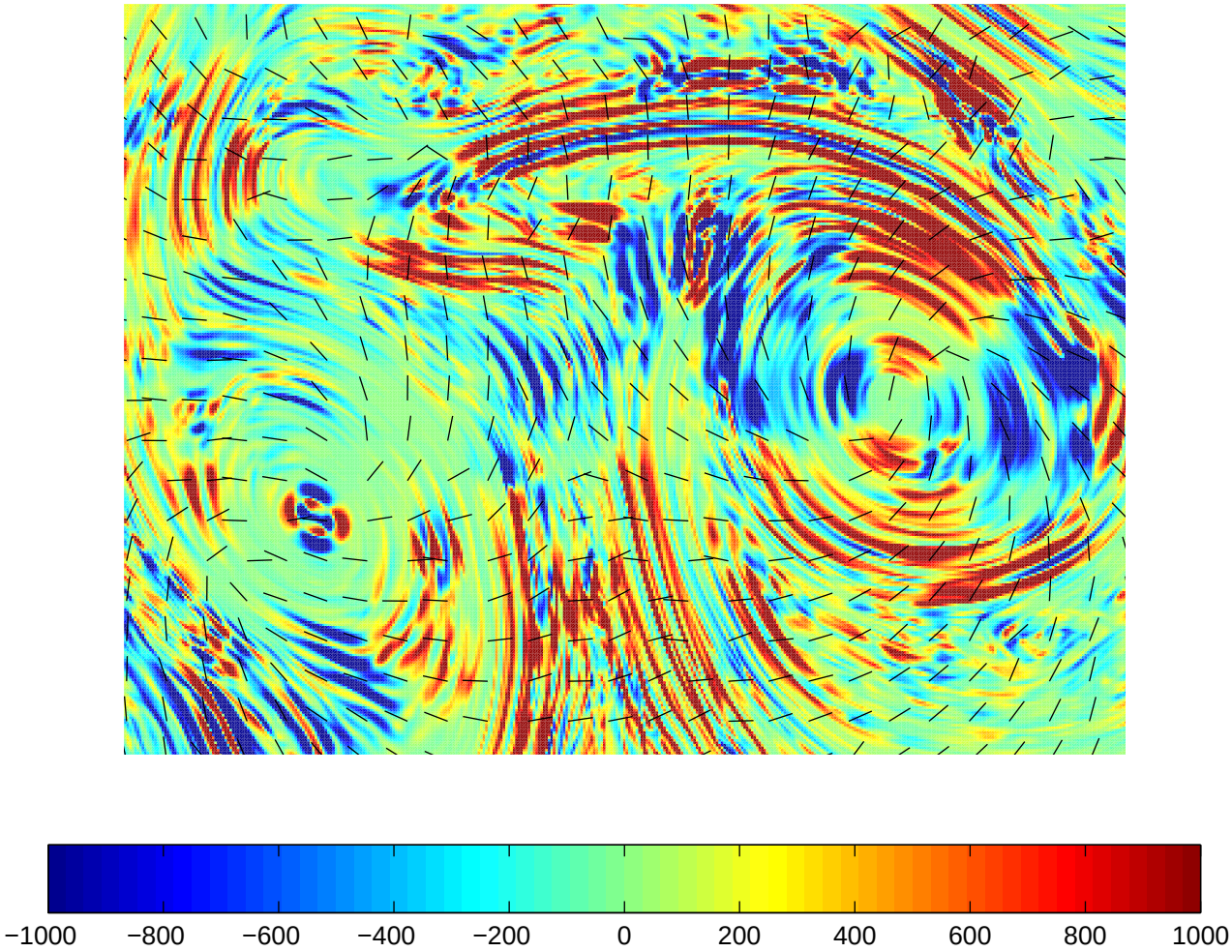


FIG. 4.2.4. Flux de variance du traceur $F(\overrightarrow{x}, l)$ pour une échelle convective l. F peut être comparé à la dissipation moyenne du traceur $\eta_T = 147$. Les traits indiquent la direction compressionnelle du gradient de vitesse.

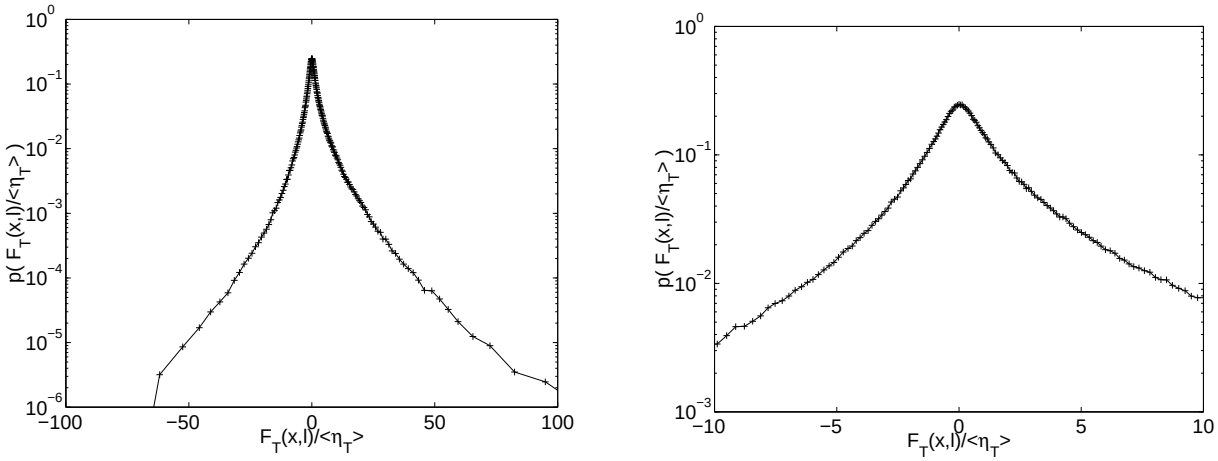


FIG. 4.2.5. À gauche : distribution de probabilité du flux local $F(\overrightarrow{x}, l)$ normalisé par la dissipation moyenne η_T. Des fluctuations très importantes sont présentes. Les valeurs positives sont cependant plus probables que les valeurs négatives, d'où le comportement moyen de cascade directe. À droite : la même courbe, limitée aux faibles fluctuations.

dans le champ $\overrightarrow{v}$:

$$\theta(\overrightarrow{x},t)=\overline{T} \equiv \int T(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l})p(\overrightarrow{l})\mathrm{d}\overrightarrow{l} \tag{4.3.1}$$

$$\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},t)=\overline{\overrightarrow{u}} \equiv \int \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l})p(\overrightarrow{l})\mathrm{d}\overrightarrow{l} \tag{4.3.2}$$

Le terme à modéliser est alors le second membre de l'équation de transport filtrée :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\theta=\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\theta-\overline{\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)T} \tag{4.3.3}$$

L'approche la plus usitée du «mélange turbulent» consiste à postuler **[16]** que, par analogie avec la diffusivité moléculaire, le second membre de (4.3.3) peut être modélisé par la divergence d'un flux proportionnel au gradient de traceur :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\theta=\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\kappa_t\overrightarrow{\nabla}\theta\right).$$

La diffusivité turbulente κ_t doit être estimée en fonction du champ de vitesse et peut dépendre de l'espace et du temps. Parmi de nombreuses propositions **[98]**, le modèle le plus connu reste peut-être celui de Smagorinsky **[100]** qui prescrit :

$$\kappa_t=Cl_0^2\sigma$$

où σ est le taux de déformation du champ de vitesse et C une constante universelle, mais qui joue plutôt un rôle de paramètre ajustable. Assez souvent cependant on se contente d'une diffusivité homogène, éventuellement réajustée de temps en temps **[101]**. De même que la diffusivité moléculaire, la diffusivité turbulente dissipe la variance du traceur à un taux proportionnel au carré de son gradient :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\theta^2}{2} &= \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\kappa_t\overrightarrow{\nabla}\frac{\theta^2}{2}\right)-\eta_t\\ \eta_t &= \kappa_t\left\|\overrightarrow{\nabla}\theta\right\|^2\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Une autre forme de paramétrisation consiste à utiliser un laplacien itéré ou hyperlaplacien :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\theta+\kappa^*(-\Delta)^p\theta=0,$$

où le coefficient d'hyperdiffusivité κ^* est à déterminer de façon empirique. Cette forme n'a pas de justification physique particulière, si ce n'est qu'elle garantit la décroissance de θ^2 :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{\theta^2}{2}\mathrm{d}\overrightarrow{x} = -\int\eta^*\mathrm{d}\overrightarrow{x} \tag{4.3.5}$$

$$\eta^* = \kappa^*\left\|\mathrm{d}^p\theta\right\|^2=\kappa^*\sum_{i_1\ldots i_p}\left(\partial_{i_1\ldots i_p}\theta\right)^2 \tag{4.3.6}$$

Pour l'hyperdiffusivité, il est possible de donner plusieurs définitions de η^* vérifiant (4.3.5). Par exemple, $\eta^*=\kappa^*\left(\Delta^{p/2}\theta\right)^2$ conviendrait aussi pour p pair. Nous avons choisi ici la définition qui nous paraît la plus intrinsèque, proportionnelle au carré euclidien de la $p-$ième différentielle de θ. En particulier, pour $p=1$ on retrouve naturellement (4.3.4).

L'hyperdiffusivité est appréciée des numériciens car elle limite la bande spectrale occupée par les échelles diffusives, libérant de l'espace pour les échelles convectives [**97**]. De plus, diffusivité comme hyperdiffusivité sont particulièrement simples à implanter dans les schémas numériques pseudo-spectraux fréquemment utilisés pour la recherche, et numériquement stables. Nous ne sommes d'ailleurs pas les derniers à l'utiliser.

4.3.2. Diffusivité de déformation ou *strain diffusivity*. Considérons pour les équations (4.3.1, 4.3.2) le cas d'un filtre gaussien :

$$p(l) = \left(2\pi l_0^2\right)^{-1} \exp - \left(l^2/2l_0^2\right). \tag{4.3.7}$$

Nous allons déduire l'équation d'évolution de θ de celle de T moyennant un développement limité au premier ordre non nul en l_0. En effet, combinant l'équation de filtrage (4.3.1) avec celle du transport (4.1.1), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\theta \overrightarrow{u}) &= -\int \left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F}\right) p(l) \mathrm{d}\overrightarrow{l}, \\ \text{où } \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{l}\right) &\equiv \left(\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l}) - \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x})\right) T(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l}) \end{aligned}$$

On voit ici que l'origine du flux $\overrightarrow{F}$ est bien l'advection différentielle des particules, source de la cascade de traceur. De plus, remarquant que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla_x} \cdot \overrightarrow{F} &= \overrightarrow{\nabla_l} \cdot \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla_l} \cdot \overrightarrow{F'}, \\ \text{où } \overrightarrow{F'}\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{l}\right) &\equiv \left(\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l}) - \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x})\right)\left(T(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l}) - T(\overrightarrow{x})\right), \end{aligned}$$

on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\theta \overrightarrow{u}) &= \int \left(T(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l}) - T(\overrightarrow{x})\right)\left(\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l}) - \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x})\right) \cdot \overrightarrow{\nabla} p \mathrm{d}\overrightarrow{l} \\ &= -\frac{1}{l_0^2} \int \left(\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l}) - \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x})\right)\left(T(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l}) - T(\overrightarrow{x})\right) \cdot \overrightarrow{l}\, p(l) \mathrm{d}\overrightarrow{l} \qquad (4.3.8) \\ \text{car } \overrightarrow{\nabla} p &= -\frac{\overrightarrow{l}}{l_0^2} p \end{aligned}$$

La mesure $lp(l)\mathrm{d}\overrightarrow{l}$ est concentrée autour de $l \approx l_0$. À cette échelle, les incréments des champs bruts T et $\overrightarrow{u}$ sont approximativement égaux à ceux des champs filtrés θ et $\overrightarrow{v}$, que l'on peut eux-mêmes estimer par un développement limité[5] :

$$\begin{aligned} \theta(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l}) - \theta(\overrightarrow{x}) &\approx l_i \partial_i \theta + \frac{1}{2} l_i l_j \partial_{ij} \theta, \\ \left(\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l}) - \overrightarrow{v}(\overrightarrow{x})\right) \cdot \overrightarrow{l} &\approx l_k l_m \partial_k v_m + \frac{1}{2} l_j l_k l_m \partial_{kl} v_m \\ \left(\theta(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l}) - T(\overrightarrow{x})\right)\left(\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{l}) - \overrightarrow{v}(\overrightarrow{x})\right) \cdot \overrightarrow{l} &\approx l_i l_k l_m \partial_i \theta \partial_k v_m + \frac{1}{2} l_i l_j l_k l_m \left(\partial_i \theta \partial_{kl} v_m + \partial_{ij} \theta \partial_k v_m\right) \end{aligned}$$

Nous utilisons ici la convention de sommation sur les indices répétés. Nous conservons la notation vectorielle là où elle ne présente pas d'ambiguïté. Les termes impairs en $\overrightarrow{l}$ s'annulent une

[5] Ce raisonnement est légèrement amélioré par rapport à celui de [**30**]

fois intégrés dans (4.3.8), ce qui justifie de pousser les développements ci-dessus au deuxième ordre. Il reste, à l'ordre le plus bas en l_0^2 :

$$-l_0^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+\overrightarrow{\nabla}\cdot(\theta\overrightarrow{u})\right)=\frac{1}{2}(\partial_i\theta\partial_{kl}v_m+\partial_{ij}\theta\partial_k v_m)\int l_i l_j l_k l_m p(l)\mathrm{d}\overrightarrow{l}.$$

On se ramène ainsi au calcul du quatrième moment d'une distribution gaussienne :

$$\int l_i l_j l_k l_m p(l)\mathrm{d}\overrightarrow{l}=l_0^4\left(\delta_{ij}\delta_{km}+\delta_{ik}\delta_{jm}+\delta_{im}\delta_{jl}\right)$$

où δ désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{ij}=0$ si $i\neq j$, $\delta_{ij}=1$ si $i=j$. D'où :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial t}+\overrightarrow{\nabla}\cdot(\theta\overrightarrow{u}) &= -\frac{l_0^2}{2}\left(\partial_i\theta\partial_{jj}v_i+2\partial_j\theta\partial_{ij}v_i+2\partial_{ij}\theta\partial_j v_i+\partial_{ii}\theta\partial_j v_j\right)\\ \text{soit } \frac{\partial\theta}{\partial t}+\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\theta\left(\overrightarrow{u}+\frac{l_0^2}{2}\Delta\overrightarrow{v}\right)\right) &= -l_0^2\partial_i\left(\partial_j\theta\partial_j v_i\right)\end{aligned}$$

Il reste à éliminer $\overrightarrow{u}$. Or l'équation de filtrage (4.3.2) s'écrit, avec notre choix de $p(l)$ et au premier ordre en l_0^2 :

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}+\frac{l_0^2}{2}\Delta\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}+\frac{l_0^2}{2}\Delta\overrightarrow{v}+O(l_0^4)$$

D'où finalement l'équation fermée :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\partial_i(l_0^2\partial_j v_i\partial_j\theta) = 0, \tag{4.3.9}$$

où la dérivée lagrangienne $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ implique la vitesse résolue :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla}.$$

L'équation (4.3.9) peut aussi s'obtenir formellement par inversion des relations de filtrage **[67]**. Cette méthode permet de voir qu'on obtiendrait le même résultat pour tout filtre vérifiant :

$$\begin{aligned}\int\overrightarrow{l}\,p(\overrightarrow{l})\mathrm{d}\overrightarrow{l} &= 0\\ \text{et } \int l_i l_j p(\overrightarrow{l})\mathrm{d}\overrightarrow{l} &= l_0^2\delta_{ij}\end{aligned}$$

En effet dans ce cas on aura, au premier ordre en l_0^2 :

$$\begin{aligned}\theta &= \int\left(T+\overrightarrow{l}\cdot\overrightarrow{\nabla}T+\frac{1}{2}l_i l_j\partial_{ij}T\right)p(\overrightarrow{l})\mathrm{d}\overrightarrow{l},\\ &= T+\frac{l_0^2}{2}\Delta T.\end{aligned}$$

Notons que cette condition est vérifiée pour tout filtre positif isotrope, mais non par exemple pour un filtre raide, agissant par troncature dans l'espace de Fourier.

Nous pensons avoir donné ici une déduction de (4.3.9) faisant bien apparaître le processus d'advection différentielle qui, faisant se rapprocher ou s'éloigner les éléments de fluide, est à la base de la cascade. Le résultat (4.3.9) est un flux sous-maille proportionnel au gradient de θ, comme dans l'hypothèse de diffusivité turbulente. En revanche le facteur de proportionnalité n'est pas un scalaire mais un tenseur, proportionnel au gradient de vitesse. Nous l'appellerons

dans la suite diffusivité de déformation, ou en anglais *strain diffusivity*[6] , que nous abrégerons en SD. Cette diffusivité est ainsi anisotrope, contrairement à la diffusivité turbulente et à l'hyperdiffusivité, qui sont des opérateurs isotropes.

Enfin, le taux de décroissance de la variance du traceur s'obtient en multipliant (4.3.9) par θ :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\theta}{2}^2 + \partial_i\left(l_0^2\partial_j v_i \partial_j \frac{\theta^2}{2}\right) &= -\eta_{sd} \\ \eta_{sd} &= -l_0^2\partial_j\theta\partial_j v_i\partial_i\theta \end{aligned}$$

On reconnaît ainsi que η_{sd} est proportionnel au taux de croissance du gradient[7] de θ, défini par (3.2.8). C'est en soi une propriété intéressante car nous avons vu que ce taux est un diagnostic de la cascade du traceur. On peut dès lors estimer que l'action diffusive de la SD sera concentrée sur les domaines hyperboliques et fortement réduite dans les domaines elliptiques. Elle possède ainsi une sélectivité spatiale dans son action diffusive. De plus le bilan global sera bien une décroissance de la variance de traceur, car les gradients de θ ont une tendance globale à croître sous l'effet du transport :

$$\int \eta_{sd}\mathrm{d}\overrightarrow{x} = -\frac{l_0^2}{2}\int \overrightarrow{\nabla}\theta\cdot S\cdot\overrightarrow{\nabla}\theta\mathrm{d}\overrightarrow{x} > 0$$

4.4. Cascade inverse et paramétrisation

4.4.1. Interpédendance des deux cascades. De même que la cascade directe de traceur rend nécessaire l'introduction d'une paramétrisation, la cascade directe d'enstrophie rend nécessaire l'introduction d'une paramétrisation dans l'équation de la vorticité, dès lors que l'échelle dissipative n'est pas résolue. On utilise généralement les mêmes modèles sous-maille pour les deux problèmes (traceur et vorticité).

Comme la vorticité est directement reliée à la vitesse, on introduit du même coup une paramétrisation dans l'équation de Navier-Stokes, ce qui modifie le bilan d'énergie. Par exemple, pour un laplacien, on obtient :

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \kappa^*\Delta\omega \\ \Updownarrow \qquad (4.4.1) \\ \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} + \overrightarrow{\nabla}\Pi = \kappa^*\Delta\overrightarrow{v} \end{gathered}$$

de sorte que le bilan d'énergie (résolue) est :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= -2\kappa^* Z, \qquad (4.4.2) \\ \text{où } Z &= \frac{1}{V}\int\frac{\omega^2}{2}\mathrm{d}^2\overrightarrow{x} \end{aligned}$$

Or la cascade d'énergie est dirigée en turbulence bidimensionnelle vers les grandes échelles. Plus précisément, si l'échelle de coupure se trouve dans le domaine inertiel de la cascade

[6] Leonard [**67**] parle de *tensor diffusivity*.
[7] taux défini en ne prenant en compte que les termes convectifs et non les termes de paramétrisation.

d'enstrophie, le flux d'énergie à travers cette échelle est nul dans la limite des grands nombres de Reynolds. L'énergie résolue doit donc être constante, ce qui ne peut être réalisé par l'équation (4.4.2). La paramétrisation des échelles sous-maille doit ainsi répondre à la double contrainte, apparemment contradictoire, de dissipation de l'enstrophie et de conservation de l'énergie.

Ce paradoxe peut être bien exprimé en termes d'amplification des gradients des champs en jeu. Pour un écoulement tridimensionnel, la cascade vers les petites échelles de la vitesse et du traceur se traduit par les équations d'évolution de leurs gradients[8] respectifs $\overrightarrow{\omega}$ et $\overrightarrow{q}$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\omega}}{\mathrm{d}t} - & \quad (\overrightarrow{\omega}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v} &= \nu\Delta\overrightarrow{v} \\ \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t} + & \quad (\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v} &= \kappa\Delta\overrightarrow{q} \end{aligned}$$

Dès lors, $\overrightarrow{\omega}$ et $\overrightarrow{q}$ sont amplifiés par l'étirement ; les gradients résolus sous-estiment les gradients réels, ce qui justifie l'emploi comme paramétrisation d'une viscosité/diffusivité augmentée, la viscosité/diffusivité turbulente, pour obtenir une estimation correcte de la dissipation .

À deux dimensions, le terme d'étirement des tourbillons $(\overrightarrow{\omega}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v}$ disparaît, les gradients de vitesse ne sont plus amplifiés et la viscosité turbulente ne se justifie plus. Mais si l'on considère la vorticité, son caractère de traceur et l'amplification de ses gradients inciterait à employer une diffusivité turbulente, qui d'après (4.4.1) n'est autre qu'une viscosité turbulente. Ainsi le concept de viscosité turbulente est inadapté à la turbulence bidimensionnelle car elle dissipe l'énergie. C'est d'ailleurs une des raisons de l'échec de la paramétrisation de Smagorinsky dans la simulation d'écoulement géophysiques. La section suivante est consacrée à l'étude des propriétés de la *strain diffusivity* lorsqu'elle est appliquée à la vorticité.

4.4.2. *Strain diffusivity* et énergie. Si l'on utilise la *SD* comme paramétrisation pour la vorticité, l'énergie sera-t-elle conservée ? Pour répondre à cette question, nous allons tout d'abord déterminer l'équation correspondante pour la vitesse, avant de passer au bilan d'énergie.

Nous allons montrer **[30]** que l'équation de la vorticité avec *SD* :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \partial_i(l_0^2\partial_j\omega\partial_j v_i) = 0 \tag{4.4.3}$$

est simplement le rotationnel de l'équation d'Euler avec *SD* :

$$\frac{\mathrm{d}v_k}{\mathrm{d}t} + \partial_i(l_0^2\partial_j v_k\partial_j v_i) + \partial_k\Pi = 0. \tag{4.4.4}$$

En effet, prenant le gradient de cette dernière équation, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\partial_l v_k + \partial_l v_i\partial_i v_k + l_0^2\partial_i(\partial_{jl}v_k\partial_j v_i) + l_0^2\partial_{jl}v_i\partial_{ij}v_k + \partial_{kl}\Pi = 0. \tag{4.4.5}$$

[8]La vorticité $\overrightarrow{\omega}$ n'est que la partie antisymétrique du gradient de vitesse, mais en raison de l'incompressibilité et de l'équation (1.1.7). la moyenne de son carré est égale au celle du carré scalaire du gradient de vitesse.

La vorticité est le rotationnel de la vitesse :

$$\begin{aligned}\omega &= -\mathrm{Tr}(AJ) \\ &= -J_{lk}A_{kl} \\ &= J_{kl}\partial_l v_k\end{aligned}$$

En contractant l'équation (4.4.5) avec J_{kl}, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \partial_i(l_0^2\partial_j\omega\partial_j v_i) + J_{kl}(\partial_l v_i\partial_i v_k + l_0^2\partial_{jl}v_i\partial_{ij}v_k) = 0. \tag{4.4.6}$$

Le terme $J_{kl}\partial_l v_i\partial_i v_k$ est le terme d'étirement des tourbillons, nul en deux dimensions. Quant à $J_{kl}\partial_{jl}v_i\partial_{ij}v_k$, il est nul lui aussi car :

$$\begin{aligned}\partial_{jl}v_i\partial_{ij}v_k &= \left((\partial_{xx}v_x)^2 + (\partial_{yy}v_y)^2\right)\delta_{kl} \\ \text{et } J_{kl}\delta_{kl} &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi l'équation (4.4.6) se réduit bien à (4.4.3) grâce à la nullité de ses deux derniers termes. Il est intéressant de noter qu'aucun de ces deux termes ne s'annule en trois dimensions. Ce sont les propriétés géométriques très particulières de la dimension deux qui les contraignent à s'annuler.

Le simple fait que l'équation de la vorticité avec *SD* soit simplement le rotationnel de l'équation d'Euler avec *SD* est en lui-même non trivial. En effet la diffusivité $\kappa_{ij} = -l_0^2\partial_j v_i$ est non seulement anisotrope mais variable en espace. Lorsqu'on l'applique à la vitesse, elle fait apparaître dans l'équation de la vorticité un terme proportionnel à son gradient, $J_{kl}\partial_l\kappa_{ij}\partial_{ij}v_k$. Il se trouve que la proportionnalité de κ_{ij} au gradient de vitesse annule ce terme, mais il n'en serait pas de même en général pour une autre forme de κ_{ij}.

Enfin, le bilan d'énergie s'obtient en multipliant (4.4.4) par v_k :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v^2 + \partial_i\left(l_0^2\partial_j v_i\partial_j(v^2)\right) + 2\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla}\Pi = 2l_0^2\partial_i v_k\partial_j v_k\partial_j v_i.$$

On reconnaît dans le terme $\partial_j v_i\partial_i v_k$ le carré matriciel du tenseur des gradients de vitesse. Ce tenseur 2×2 étant de trace nulle en vertu de l'incompressibilité, son carré est proportionnel au tenseur unité [9] :

$$\partial_j v_i\partial_i v_k = \frac{\omega^2 - \sigma^2}{4}\delta_{jk}.$$

En faisant une nouvelle fois appel à l'incompressibilité, on a donc :

$$\begin{aligned}\partial_i v_k\partial_j v_k\partial_j v_i &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v^2 + \partial_i\left(l_0^2\partial_j v_i\partial_j(v^2)\right) + 2\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla}\Pi &= 0.\end{aligned}$$

[9] Ce "petit miracle", pour reprendre les termes de G. Falkovich, est le même qui permet de calculer, dans le cas bidimensionnel, l'exposant de Lyapunov d'un champ de vitesse à long temps de corrélation [**21**]

Ainsi l'énergie est transportée passivement (aux travail des forces de pression près) sans puits dissipatif. On a donc conservation de l'énergie, non seulement globalement mais localement.

Nous avons montré deux propriétés de la SD appliquée à la vorticité. Premièrement, la vitesse obéit à une équation de Navier-Stokes possédant une viscosité anisotrope $-l_0^2\partial_j v_i$. Deuxièmement, cette viscosité conserve l'énergie, contrairement aux opérateurs isotropes (laplacien, hyperlaplacien). Ainsi l'introduction de cette diffusivité/viscosité anisotrope tenant compte de la géométrie de l'écoulement, dont nous montrons en 5.1 qu'elle permet de mieux représenter la cascade de traceur, permet aussi de paramétriser la cascade d'enstrophie de façon compatible avec la conservation de l'énergie[10].

4.4.3. Énergie : problème inverse. Une fois établi que la *strain diffusivity* conserve l'énergie, il semble naturel de se poser le problème inverse et de déterminer plus généralement la forme des paramétrisations respectant cette contrainte. Cette approche, prenant comme point de départ la propriété générique de conservation de l'énergie, s'apparente à celle qui avait débouché sur l'APVM **[97]**. Nous répondrons à cette question en nous plaçant dans le cadre de la modélisation dite "structurelle" **[98]** : nous exprimerons le tenseur sous-maille en fonction de l'échelle de coupure l_0 et des champs résolus, en respectant les propriétés d'invariance de l'équation d'Euler et les propriétés génériques de la turbulence bidimensionnelle[11]. Cette étude s'inspire de celle de **[70]** qui traite de la dimension trois, où les tenseurs ont beaucoup plus d'invariants qu'en dimension deux, et où on n'a pas à conserver l'énergie, au contraire.

Le tenseur sous-maille τ_{ij} intervient dans l'équation d'Euler filtrée :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} + \partial_i P &= 0 \\ v_i &= \overline{u_i} \\ \Pi &= \overline{P} \\ &\Downarrow \\ \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} + \partial_j \tau_{ij} + \partial_i \Pi &= 0 \qquad (4.4.8) \\ \tau_{ij} &= v_i v_j - \overline{u_i u_j} \qquad (4.4.9) \end{aligned} \qquad (4.4.7)$$

C'est donc un tenseur symétrique. Seule sa partie anisotrope[12] $\tau_{ij} - \frac{1}{2}\tau_{kk}\delta_{ij}$ participe réellement à (4.4.8), car sa partie isotrope $\frac{1}{2}\tau_{kk}\delta_{ij}$ ne contribue qu'à la pression :

$$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} + \partial_j(\tau_{ij} - \frac{1}{2}\tau_{kk}\delta_{ij}) + \partial_i(\Pi + \frac{1}{2}\tau_{kk}) = 0.$$

Nous voulons maintenant exprimer τ_{ij} en fonction du champ $\overrightarrow{v}$. Pour respecter l'invariance galiléenne, il suffit de considérer le gradient de vitesse $A_{ij} = \partial_j u_i$, qu'on peut décomposer selon la relation (3.2.2) en partie symétrique (déformation) et antisymétrique (rotation) :

[10]Nous avons introduit la SD en 4.3.2 au moyen d'un développement limité au premier ordre non nul en l_0^2. L'opérateur qu'on peut obtenir en poussant ce développement à l'ordre suivant ne conserve pas l'énergie.

[11]à la façon de la physique macroscopique qui, par exemple, déduit les propriétés mécaniques ou électriques des cristaux de leurs propriétés de symétrie

[12]On dit aussi partie déviatoire.

$$2A = S + \omega J.$$

Comme $\det S = -\sigma^2$ est le seul invariant de S, nous disposons d'un tenseur S et de trois scalaires l_0, ω et σ pour exprimer τ_{ij}. La situation bidimensionnelle est beaucoup plus simple que la tridimensionnelle car l'espace des matrices 2×2 symétriques est seulement de dimension 3 (au lieu de 6) ; le triplet (S, JS, δ_{ij}) en constitue une base. Nous avons donc en toute généralité :

$$\tau_{ij} = l_0^2 \left(a(\sigma,\omega)S + b(\sigma,\omega)JS + c(\sigma,\omega)\delta_{ij}\right) \tag{4.4.10}$$

où les paramètres a et b ont la dimension de σ ou ω, alors que c a la dimension de σ^2 (τ_{ij} est homogène à une vitesse au carré). Enfin, la force sous-maille $\partial_k \tau_{ik}$ doit être identique dans un référentiel inertiel et un référentiel tournant **[28, 46]**. On a, ψ étant la fonction de courant[13] :

$$\overrightarrow{v} = -J\overrightarrow{\nabla}\psi,$$

ce qui donne pour les divergences des tenseurs S et JS :

$$\begin{aligned}
\partial_k S_{jk} &= \partial_k \left(\partial_j v_k + \partial_k v_j\right) \\
&= \Delta v_j \\
&= \Delta(-J_{jk}\partial_k \psi) \\
&= J_{jk}\partial_k \omega, \\
\partial_k J_{ij} S_{jk} &= J_{ij} J_{jk} \partial_k \omega \\
&= -\partial_k \omega
\end{aligned}$$

Autrement dit, en notation vectorielle :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} \cdot S &= J\overrightarrow{\nabla}\omega, \\
\overrightarrow{\nabla} \cdot JS &= -\overrightarrow{\nabla}\omega.
\end{aligned}$$

Donc, en prenant la divergence de (4.4.10), il vient :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \tau = l_0^2 \left(aJ\overrightarrow{\nabla}\omega + S\overrightarrow{\nabla}a - b\overrightarrow{\nabla}\omega + JS\overrightarrow{\nabla}b + \overrightarrow{\nabla}c\right).$$

On peut tout exprimer en fonction de $\overrightarrow{\nabla}\omega$ et $\overrightarrow{\nabla}\sigma$ au moyen de la règle de dérivation composée :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}a &= \frac{\partial a}{\partial \omega}\overrightarrow{\nabla}\omega + \frac{\partial a}{\partial \sigma}\overrightarrow{\nabla}\sigma, \\
\overrightarrow{\nabla}b &= \frac{\partial b}{\partial \omega}\overrightarrow{\nabla}\omega + \frac{\partial b}{\partial \sigma}\overrightarrow{\nabla}\sigma, \\
\overrightarrow{\nabla}c &= \frac{\partial c}{\partial \omega}\overrightarrow{\nabla}\omega + \frac{\partial c}{\partial \sigma}\overrightarrow{\nabla}\sigma.
\end{aligned}$$

[13] Nous exprimons ici simplement le rotationnel en fonction du gradient et de la matrice antisymétrique unité J.

Il vient finalement pour la force sous-maille :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla}\cdot\tau &= l_0^2\left(aJ\overrightarrow{\nabla}\omega + S\left(\frac{\partial a}{\partial\omega}\overrightarrow{\nabla}\omega + \frac{\partial a}{\partial\sigma}\overrightarrow{\nabla}\sigma\right) - b\overrightarrow{\nabla}\omega\right.\\ &\quad \left. + JS\left(\frac{\partial b}{\partial\omega}\overrightarrow{\nabla}\omega + \frac{\partial b}{\partial\sigma}\overrightarrow{\nabla}\sigma\right) + \frac{\partial c}{\partial\omega}\overrightarrow{\nabla}\omega + \frac{\partial c}{\partial\sigma}\overrightarrow{\nabla}\sigma\right)\end{aligned}$$

Par un changement de référentiel tournant, seule la vorticité ω se trouve modifiée. L'invariance impose donc

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\overrightarrow{\nabla}\cdot\tau = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial a}{\partial\omega}J\overrightarrow{\nabla}\omega + S\left(\frac{\partial^2 a}{\partial\omega^2}\overrightarrow{\nabla}\omega + \frac{\partial^2 a}{\partial\omega\partial\sigma}\overrightarrow{\nabla}\sigma\right)\\ +JS\left(\frac{\partial^2 b}{\partial\omega^2}\overrightarrow{\nabla}\omega + \frac{\partial^2 b}{\partial\omega\partial\sigma}\overrightarrow{\nabla}\sigma\right) &+ \left(-\frac{\partial b}{\partial\omega} + \frac{\partial^2 c}{\partial\omega^2}\right)\overrightarrow{\nabla}\omega + \frac{\partial^2 c}{\partial\omega\partial\sigma}\overrightarrow{\nabla}\sigma = 0.\end{aligned}$$

La valeur de A étant donnée, on peut choisir arbitrairement les vecteurs $\overrightarrow{\nabla}\omega$ et $\overrightarrow{\nabla}\sigma$. En prenant alternativement $\overrightarrow{\nabla}\sigma = 0$ puis $\overrightarrow{\nabla}\omega = 0$ il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial\omega}J + S\frac{\partial^2 a}{\partial\omega^2} + JS\frac{\partial^2 b}{\partial\omega^2} - \frac{\partial b}{\partial\omega} + \frac{\partial^2 c}{\partial\omega^2} &= 0,\\ -S\frac{\partial^2 a}{\partial\omega\partial\sigma} + JS\frac{\partial^2 b}{\partial\omega\partial\sigma} + \frac{\partial^2 c}{\partial\omega\partial\sigma} &= 0.\end{aligned}$$

Comme la famille de tenseurs (S, JS, J, δ_{ij}) est libre, les coefficients s'annulent individuellement. Ainsi a doit être indépendant de ω donc proportionnel à σ. De

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 b}{\partial\omega^2} &= 0\\ \text{et } \frac{\partial^2 b}{\partial\omega\partial\sigma} &= 0,\end{aligned}$$

on déduit :

$$b = C\omega + b'(\sigma).$$

Le tenseur τ doit être invariant par une symétrie miroir. Sous l'effet d'une telle symétrie, on a :

$$\begin{aligned}J &\to -J\\ \omega &\to -\omega\\ \sigma &\to \sigma.\end{aligned}$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
b(\sigma,\omega) &= -b(\sigma,-\omega) \\
&= C\omega, \\
\text{d'où } \frac{\partial^2 c}{\partial \omega^2} &= \frac{\partial b}{\partial \omega} = C, \\
\text{donc } c &= f(\sigma) + C\frac{\omega^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Dimensionnellement, la dépendance de $f(\sigma)$ en σ doit être quadratique. Nous trouvons donc :

$$
\tau_{ij} = l_0^2 \left(-B\sigma S + C\left(\omega J S + \frac{\omega^2}{2}\delta_{ij}\right) + D\sigma^2\delta_{ij} \right). \tag{4.4.11}
$$

La constante D est sans réelle importance puisque elle s'intègre dans la pression. On reconnaît dans le terme $-l_0^2 B\sigma S$ le modèle de Smagorinsky **[100, 101]** consistant à prendre une viscosité turbulente isotrope $\nu_t = Bl_0^2\sigma$. Quant à l'autre terme, il correspond en fait précisément à la *SD*, en prenant $C = D = 1/2$. En effet, l'équation (4.4.4) correspond à :

$$
\begin{aligned}
\tau_{ik} &= l_0^2 \partial_j v_i \partial_j v_k \\
&= l_0^2 A A^T \\
&= \frac{l_0^2}{4}(S+\omega J)(S+\omega J)^T \\
&= \frac{l_0^2}{2}\left(\omega J S + \frac{\sigma^2+\omega^2}{2}\delta_{ik}\right) \qquad (4.4.12)
\end{aligned}
$$

Ainsi le tenseur sous-maille se décompose simplement en deux parties : la première correspond au modèle de Smagorinsky qui dissipe de l'énergie ; la seconde conserve l'énergie et correspond à la *SD*. Dans le cadre des contraintes de départ que nous nous sommes données pour exprimer le tenseur sous-maille τ, la SD est donc le seul modèle respectant toutes les propriétés génériques requises : invariance galiléenne, invariance par changement de référentiel tournant, invariance par parité et surtout conservation de l'énergie.

4.4.4. Discussion. Parmi les propriétés de la SD que nous avons mis en évidence, lesquelles retrouve-t-on ou non dans d'autres paramétrisations ? Nous nous limiterons pour cette discussion aux modèles suivants :

- la *viscosité turbulente* (isotrope)
- le laplacien itéré ou *hyperviscosité*
- la méthode du *tourbillon anticipé* **[8, 97]** (*anticipated potential vorticity method* ou APVM en anglais). Plus radicale et plus innovante, celle-ci part de la double contrainte de dissipation de l'enstrophie et de conservation de l'énergie pour aboutir à une forme originale de paramétrisation qui les satisfait exactement.
- le modèle thermodynamique *MEPP*[14] de Robert et Sommeria , fondé sur l'hypothèse que l'effet des échelles sous-maille est de ramener les grandes échelles vers un état d'équilibre thermodynamique **[72, 94]** tout en conservant l'énergie. Dans son expression la plus

[14]Maximum entropy production principle, principe de production maximale d'entropie

simple **[95]**, une viscosité turbulente assure la relaxation et un terme de dérive compense la perte d'énergie associée.

- le *modèle à deux fluides de Laval, Dubrulle et Nazarenko* **[63, 65, 66]** qui ne retient que les interactions non-locales (entre grandes et petites échelles) **[64]**. Cette hypothèse de non-localité est analogue à celle qui conduit à ne retenir dans la *strain diffusivity* que l'effet déformant des grandes échelles.

Plusieurs propriétés nous intéressent ici :

- le *principe d'objectivité* : invariance galiléenne et invariance par changement de référentiel en rotation. La SD, le modèle à deux fluides et la diffusivité/hyperdiffusivité respectent ce principe. Le modèle MEPP peut être rendu invariant galiléen au prix d'une complexification de son expression et de l'introduction de paramètres supplémentaires **[19]**. L'APVM n'est pas invariante galiléenne, ce qui constitue un handicap sérieux. Malgré de bonnes qualités numériques, elle reste peut utilisée.
- la *conservation de l'énergie*. La diffusivité turbulente dissipe beaucoup d'énergie et l'hyperdiffusivité permet d'en dissiper moins sans résoudre complètement ce problème. On lui connaît d'autres inconvénients, notamment de surestimer les extrema de vorticité, mais sa simplicité lui vaut d'être largement utilisée, notamment en océanographie. La SD, l'APVM et le modèle à deux fluides conservent l'énergie. Le modèle MEPP conserve l'énergie ; cette conservation n'est pas assurée seulement par la forme du modèle mais aussi par l'ajustement à chaque instant d'un de ses paramètres.
- l'*anisotropie*. Viscosité, hyperdiffusivité et APVM sont isotropes. La déformation induite par l'écoulement intervient dans l'évolution des petites échelles du modèle à deux fluides, ainsi que dans la SD. L'anisotropie peut être introduite dans le modèle MEPP comme une contrainte imposée au flux sous-maille **[15]**.
- le nombre de *paramètres indéterminés*, que l'on souhaite le plus faible possible. La viscosité turbulente est mal définie et de nombreux modèles existent **[98]**. L'hyperviscosité et l'APVM comprennent chacune un paramètre ajustable, que l'on peut estimer en fonction du temps de retournement. Dans le modèle MEPP, la viscosité turbulente reste un paramètre libre ; elle peut être estimée par des théories cinétiques **[17, 18]** mais les expressions obtenues sont fortement non-locales en espace et en temps et/ou valides près de l'équilibre thermodynamique. Le modèle à deux fluides et la SD ont pour seul paramètre l'échelle de coupure.
- la *réversibilité* (invariance renversement de l'écoulement du temps). Le modèle à deux fluides et la SD sont dynamiques dans la mesure où ils sont déduits de l'équation d'Euler. Une conséquence est qu'ils héritent de sa réversibilité, contrairement à l'APVM, au modèle MEPP ou à la viscosité turbulente qui découlent d'une hypothèse supplémentaire de nature statistique. Ces derniers sont irréversibles. La question qui se pose est si le modèle doit comporter une partie irréversible ou si une approche dynamique et formellement réversible convient. Le caractère irréversible du mélange de la vorticité laisse penser que la dynamique à long terme doit être modélisée par un tel terme irréversible.

Si l'on veut préserver les propriétés précédentes (objectivité, conservation de l'énergie), seul conviendrait alors le modèle MEPP [**15**]. Cependant il convient de noter ici que le caractère réversible de la SD est assez formel dans la mesure où dans un champ turbulent, elle induit bien une dissipation d'enstrophie en raison de la tendance des gradients de traceur à croître (*cf* section 4.3.2). Ainsi bien que son expression soit réversible, son action tire parti de cette tendance «irréversible» des échelles résolues de l'écoulement[15]. En revanche, comme cette dissipation suppose une certaine structure géométrique, elle n'agira pas sur un pur bruit non structuré : en anticipant un peu, ce problème se posera en 5.2. D'un point de vue fondamental, une contribution irréversible paraît donc nécessaire. D'un point de vue pratique et numérique, et dans la mesure où les termes «non locaux» de la SD et du modèle à deux fluides semblent dominants [**64, 15**], cette contribution pourra être modélisée ou bien de façon fine (modèle MEPP) ou bien de façon moins précise : dissipation ajoutée explicitement [**31, 66**] ou assurée implicitement par le schéma numérique [**73, 66**].

[15]On retrouve ici le fait que le système formé des échelles explicites est semblable aux échelles implicites, contrairement à la physique statistique classique où le monde microscopique et les monde macroscopique sont entièrement séparés. On peut dès lors tirer parti des propriétés explicites pour modéliser l'action des échelles implicites.

Article paru dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*

CHAPITRE 5

Résultats numériques

Nous présentons dans ce chapitre un certain nombre de résultats numériques. Les détails des paramètres intervenant dans les diverses simulations que nous exploitons sont rassemblés en annexe D.

5.1. Flux local et paramétrisation

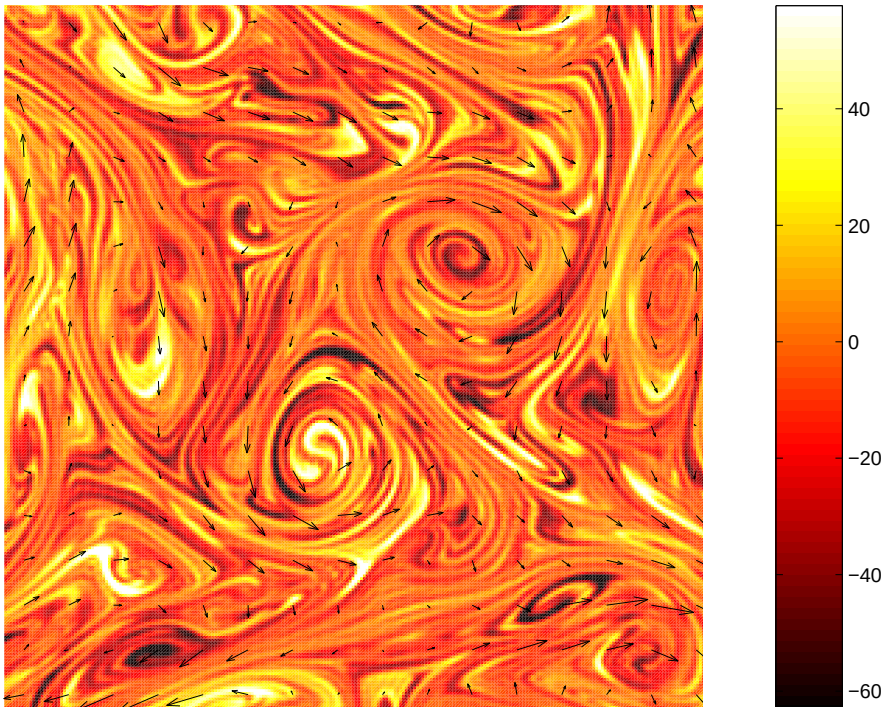
Nous avons construit en 4.2 un diagnostic de la cascade de traceur, le flux $F(\overrightarrow{x}, l)$ (équation 4.2.9). Nous avons présenté brièvement les propriétés des modèles de diffusivité turbulente et d'hyperdiffusivité. Enfin, nous avons introduit en 4.3.2 la paramétrisation anisotrope *strain diffusivity* dont nous avons discuté les propriétés de dissipation. Nous nous proposons maintenant d'étudier l'organisation spatiale du taux de destruction de variance de traceur induit par ces différentes paramétrisations et de la comparer à celle du flux local de variance. Nous comparons ici les unes aux autres les paramétrisations appliquées à un traceur passif, toutes choses étant égales par ailleurs. En particulier le champ de vitesse est le même dans toutes les simulations.

Nous menons cette étude sur plusieurs simulations numériques de turbulence en déclin, donc en l'absence de forçage pour la vorticité comme pour le traceur passif. Il s'agit des simulations à résolution 512^2 de la section 5.2.1, où la vorticité subit une diffusion laplacienne. En revanche plusieurs paramétrisation sous-maille sont utilisées pour le traceur passif : diffusivité laplacienne, bilaplacien Δ^2, hyperlaplacien Δ^8, SD[1], correspondant respectivement aux champs notés T_1 , T_2 , T_3 et θ_3 du 5.2.1. À partir d'une condition initiale identique pour tous les traceurs passifs, la simulation dure 40 temps de retournement, une durée suffisante pour que les petites échelles prennent éventuellement la marque de la paramétrisation.

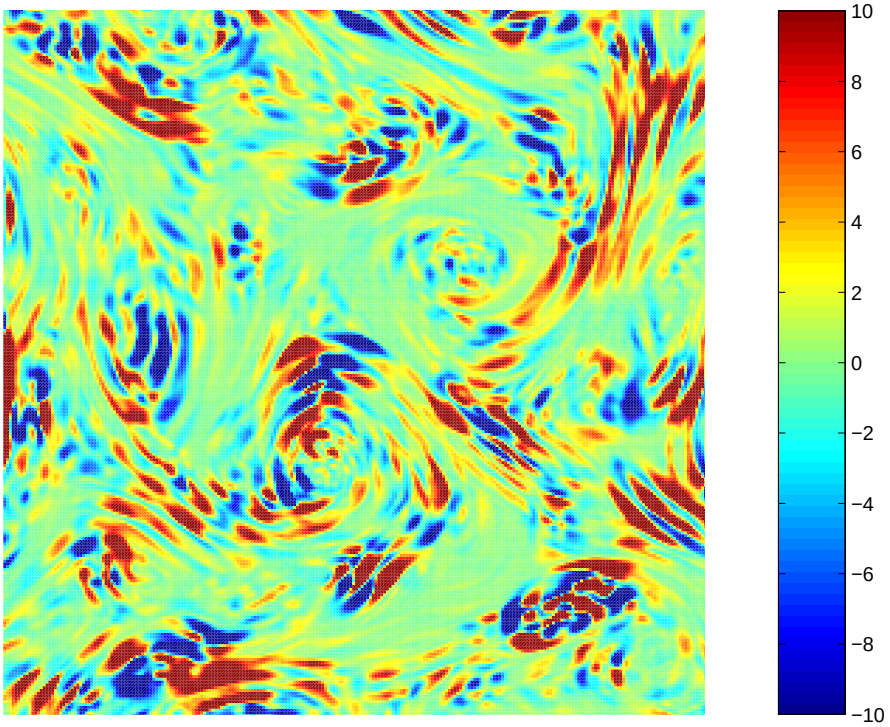
Nous présentons en 5.1.1 les champs de traceur et de vitesse (figure 5.1.1a) et les flux correspondant (figure 5.1.1b), en nous concentrant sur une paire de tourbillons. La surface de la fenêtre représente un quart du domaine total de simulation. On peut constater sur la figure 5.1.2a que la *SD* reproduit de façon satisfaisante la structure spatiale des transferts et notamment leurs changement de signe. Inversement, la diffusivité isotrope qui induit par construction une diffusion partout positive, ne peut pas reproduire ces changements de signe (figure 5.1.2b). Cela renvoie au fait qu'une diffusivité isotrope ne tient compte que de la présence de gradients de traceur, alors que la *SD* tient compte du processus dynamique et local de leur croissance - ou non-croissance, et par ce moyen de leurs alignements.

Finalement, la figure (5.1.3) présente les champs de dissipation pour les laplaciens itérés. En plus d'être eux aussi partout positifs, ils n'ont que peu de rapport avec la structure spatiale des transferts. Ce n'est pas très surprenant puisque ces opérateurs sont appréciés plus pour

[1]avec une dissipation auxiliaire hyperlaplacienne pour des questions de stabilité numérique, *cf* 5.2.2.

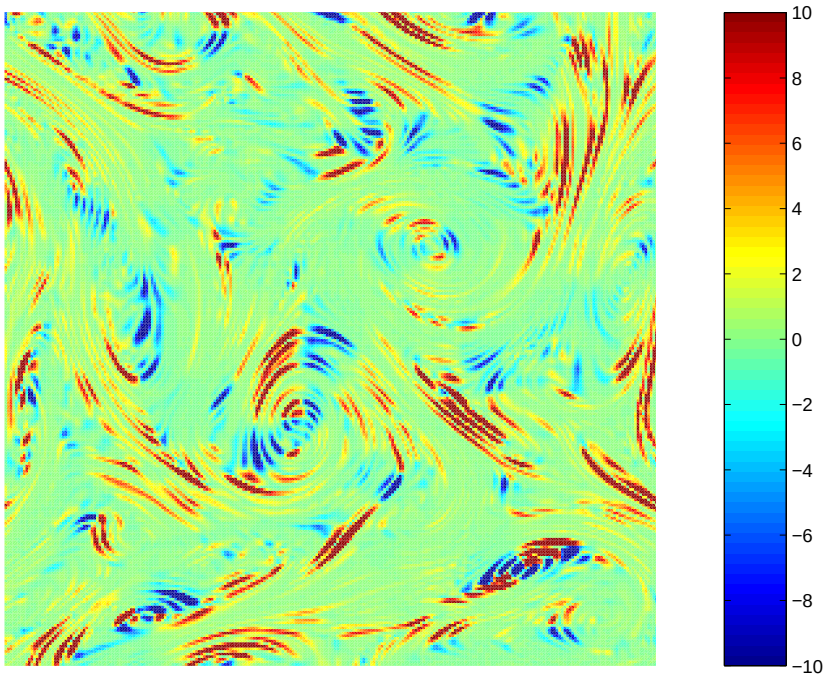


(a) Champ de traceur

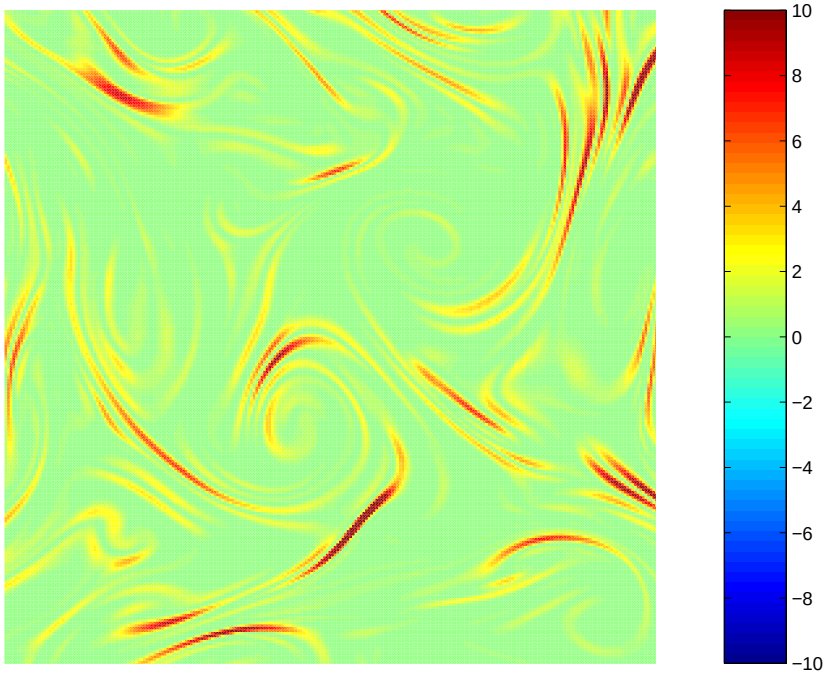


(b) Flux local de variance

FIG. 5.1.1. Champ de traceur (a) et flux local de variance $F(\overrightarrow{x}, l)$ (b). L'échelle l vaut 8 pas de maille. Le flux est normalisé par sa valeur moyenne. Bien que celle-ci soit positive, le flux fluctue et prend des valeurs positives (cascade directe) et négatives (cascade localement renversée) selon l'endroit.

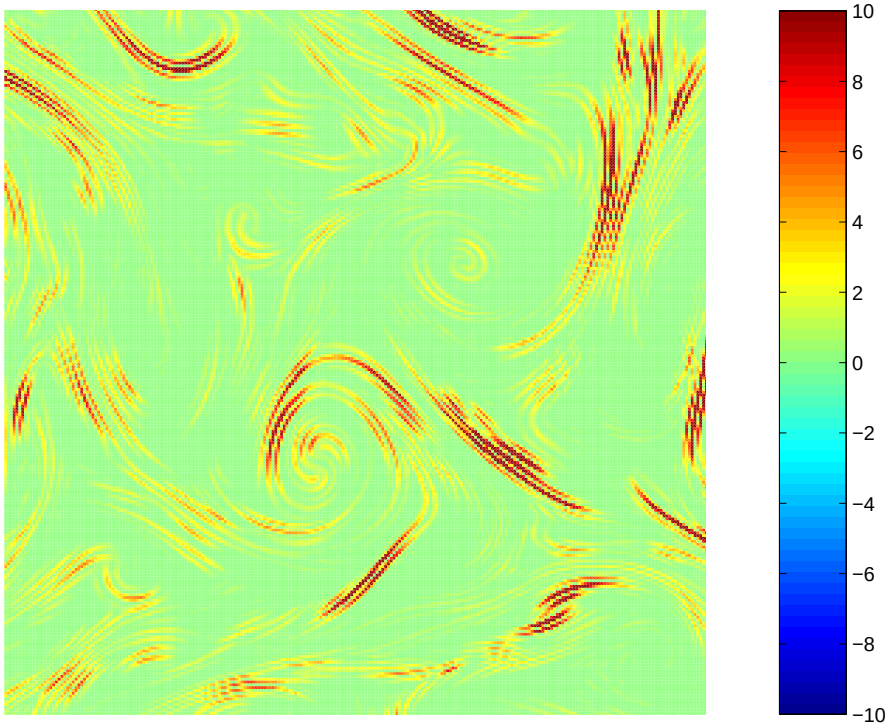


(a) SD

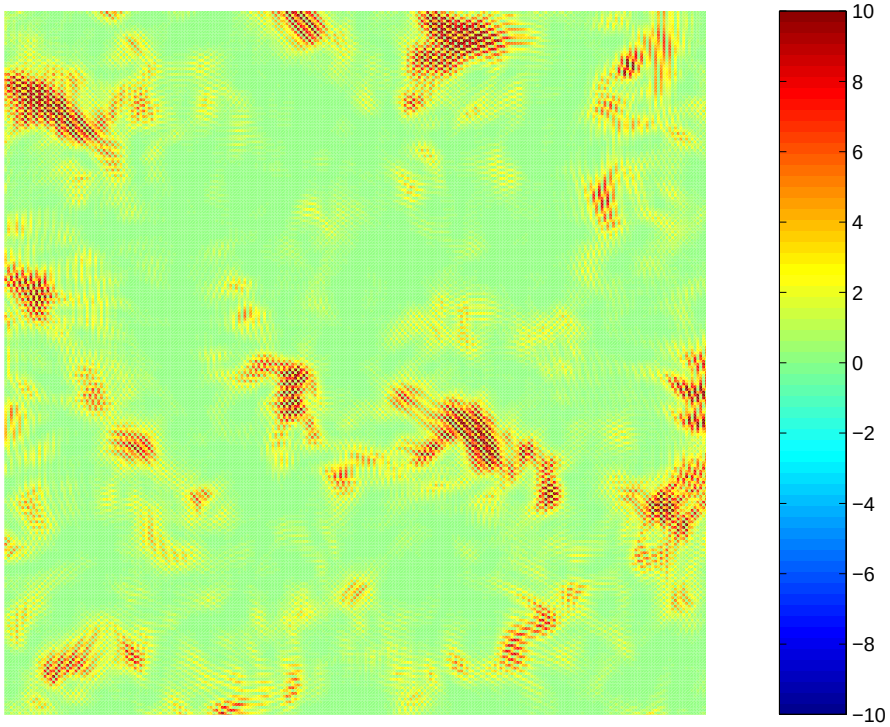


(b) Diffusivité isotrope

FIG. 5.1.2. Taux η de destruction de la variance du traceur. (a) SD : $\eta_{sd}(\overrightarrow{x}) = -l_0^2 \partial_i\theta\partial_i u_j \partial_j\theta$. (b) Diffusivité isotrope : $\eta_t(\overrightarrow{x}) = \kappa_t \left\| \overrightarrow{\nabla}\theta \right\|^2$. La dissipation η est normalisée par sa moyenne spatiale. Alors que la diffusion laplacienne est partout positive (l'échelle de couleurs inclut des valeurs négatives pour pouvoir comparer les différents champs, mais la diffusion laplacienne est bien positive), celle due à la diffusivité de déformation prend des valeurs positives et négatives.



(a) Bilaplacien Δ^2



(b) Hyperlaplacien Δ^8

FIG. 5.1.3. Taux η de destruction de la variance du traceur. (a) Bilaplacien, $\eta^*(\overrightarrow{x}) = \kappa^* \sum_{ij} (\partial_{ij}\theta)^2$ (b) Laplacien itéré huit fois, $\eta^*(\overrightarrow{x}) = \kappa^* \sum_{i_1 \ldots i_8} (\partial_{i_1 \ldots i_8}\theta)^2$. La dissipation η est normalisée par sa moyenne spatiale (l'échelle de couleurs inclut des valeurs négatives pour pouvoir comparer les différents champs, mais la diffusion hyperlaplacienne est bien positive).

leur sélectivité dans l'espace de Fourier, où ils élargissent les domaines inertiels/convectifs. La contrepartie est que leur action est essentiellement uniforme et ne tient pas compte des contrastes dynamiques de l'écoulement **[36]**.

En résumant, la dissipation $\eta_{sd}(\overrightarrow{x})$ due à la SD est fidèle à la structure spatiale des transferts locaux de variance entre échelles $F(\overrightarrow{x}, l)$ ainsi que leur signe. La dissipation due à une diffusivité turbulente isotrope $\eta_t(\overrightarrow{x})$ ne peut reproduire le signe car elle est partout positive. Enfin, la dissipation $\eta^*(\overrightarrow{x})$ due à une hyperdiffusivité ne reproduit ni la structure ni le signe du flux local $F(\overrightarrow{x}, l)$.

5.2. Comparaison quantitative

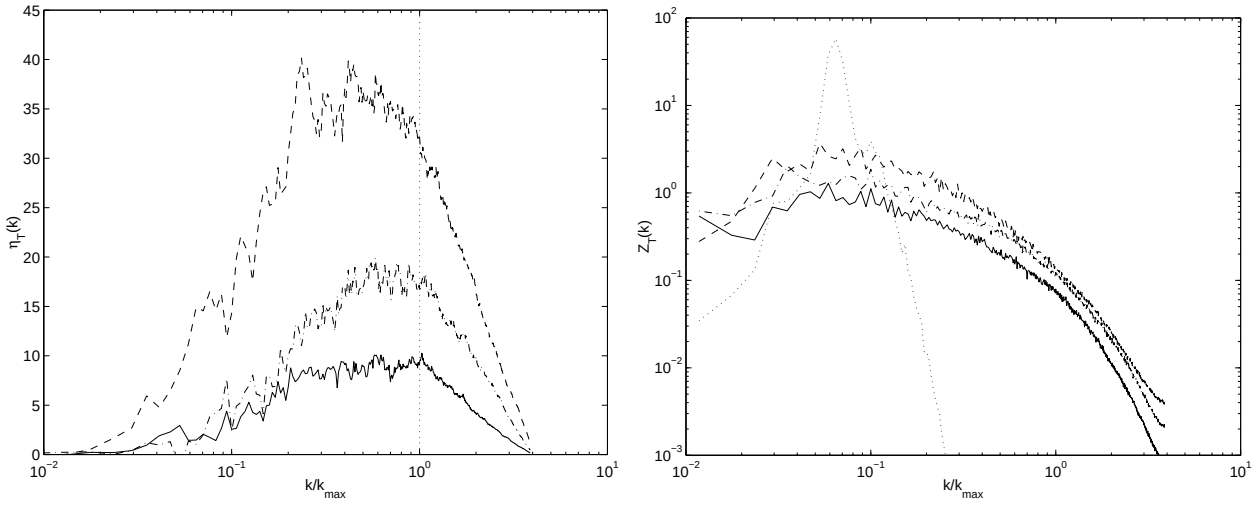
Nous venons de voir que la *strain diffusivity* permettait de reproduire la cascade de traceur passif de façon beaucoup plus fidèle que les autres opérateurs testés, laplacien et hyperlaplacien. Après ce test statique, il convient d'effectuer un test dynamique comparant le résultat d'une simulation de référence à haute résolution aux résultats de simulations à faible résolution utilisant pour le traceur une paramétrisation.

Nous procédons de la façon suivante. Une simulation de référence notée T_0 est menée à résolution 2048^2 . La vorticité est dissipée par une forte viscosité laplacienne de façon à ce que l'échelle visqueuse soit résolue par les simulations à résolution dégradée 512^2. Ainsi la troncature n'élimine que des échelles visqueuses et le champ de vitesse est identique dans toutes les simulations, à haute ou basse résolution[2]. En revanche le traceur subit dans la simulation T_0 une faible diffusivité ajustée de façon à ce que l'échelle diffusive soit inférieure à la maille des simulations à résolution 512^2. Nous illustrons ceci dans la figure 5.2.1a en présentant le flux spectral de traceur $\eta_T(\overrightarrow{k})$, défini par la relation (1.2.5), pour la simulation T_0 à différents instants. À résolution 512^2, le nombre d'onde maximal résolu par le modèle est $k_{max} = 170$. Comme le flux spectral à travers ce nombre d'onde est important dans la simulation T_0, et en vertu de (4.1.2), une paramétrisation sera nécessaire pour le traceur à la résolution inférieure 512^2.

La condition initiale de la vorticité et du traceur consiste en un champ aléatoire gaussien concentré autour du mode de Fourier $k_0 = 10$. La simulation est en déclin, pour le traceur comme pour la vorticité. Elle est divisée en deux temps. La première partie permet de développer la cascade et de remplir les petites échelles du traceur. L'état atteint après ce premier temps (20 temps de retournement) sert à initialiser les simulations à résolution 512^2 pour la comparaison proprement dite. À partir de cet état, on poursuit la simulation à pleine résolution ainsi que celles à résolution dégradée pendant 40 autres temps de retournement. La comparaison est faite entre les états finaux. Les spectres du traceur à ces différents instants sont présentés en figure 5.1.1b.

5.2.1. Filtre effectif. Nous avons déduit en 4.3.2 la strain *diffusivity* du filtre gaussien reliant champ brut T et champ résolu θ (relation (4.3.1)). Inversement, étant donné une paramétrisation, on peut lui associer un filtre effectif p **[98]**. Ce filtre p est celui qui associe

[2]Nous aurions aussi bien pu prescrire un champ de vitesse comme dans **[73]**, mais il nous a paru plus intéressant de prendre un véritable champ de vitesse turbulent.



(a) Flux spectral de variance du traceur

(b) Spectre du traceur

FIG. 5.2.1. Flux spectral (a) et spectre (b) du traceur dans la simulation de référence à résolution 2048^2. Les courbes sont séparées de 20 temps de retournement : instant initial (pointillés), état initial pour la comparaison (tirets), état intermédiaire (tirets-pointillés), état final (trait plein). Le flux spectral à l'instant initial n'est pas représenté. Les nombres d'onde sont normalisés par le nombre d'onde maximal à résolution 512^2 : $k_{max} = 170$. Le flux spectral à travers ce nombre d'onde est important, rendant nécessaire la paramétrisation à cette faible résolution.

le champ brut, solution de l'équation sans paramétrisation, au champ θ. Si le calcul de la section 4.3.2 est correct, le filtre effectif doit être gaussien. Nous utiliserons la représentation de Fourier $p(k)$ du filtre, qui vaut d'après la relation (4.3.7) :

$$\begin{aligned} p(l) &= \left(2\pi l_0^2\right)^{-1} \exp - \left(l^2/2l_0^2\right) \\ p(k) &= \exp\left(-l_0^2 k^2/2\right), \\ |p(k)|^2 &= \exp\left(-l_0^2 k^2\right), \end{aligned}$$

Comme le filtrage est une opération de convolution on a :

$$\begin{aligned} \theta &\approx \int T(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{l}) p(l) \mathrm{d}\overrightarrow{l} \\ &\approx T * p \\ \text{d'où } \theta(\overrightarrow{k}) &= T(\overrightarrow{k}) p(k) \\ \text{et } |p(k)|^2 &= \frac{Z_\theta(k)}{Z_T(k)} \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

On devrait donc mesurer $\frac{Z_\theta(k)}{Z_T(k)} \approx \exp(-l_0^2 k^2)$, où $Z_\theta(k)$ et $Z_T(k)$ sont les spectres unidimensionnels de traceur définis par la relation (1.2.4).

Il est apparu que la *SD* ne supportait pas de grandes valeurs de l_0, sous peine d'instabilité numérique. Cela se comprend dans la mesure où elle découle d'un développement limité en l_0. Nous avons pris pour l_0 la taille de la maille du modèle, soit $2\pi/512$. Il est difficile de dépasser

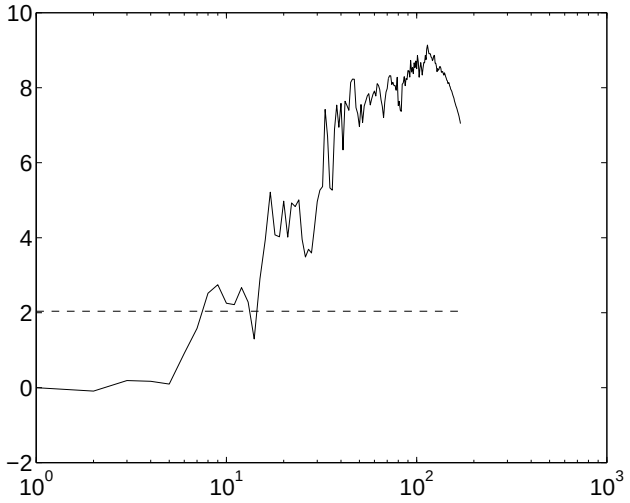


FIG. 5.2.2. Intensités comparées de la dissipation due à la *strain diffusivity* et de la dissipation auxiliaire (hyperlaplacien Δ^8). La première est donnée par la valeur à l'échelle de coupure k_{max} du flux spectral $\eta_\theta(k_{kmax}) \approx 7$; la seconde est donnée par la ligne pointillée.

le double de cette valeur. D'autre part, il apparaît à long terme du bruit à petite échelle qui pourrait aussi être attribué à un problème d'instabilité numérique. Nous revenons sur cette question en 5.2.2. Pour l'instant nous nous contentons d'ajouter une dissipation auxiliaire capable de stabiliser la simulation, tout en vérifiant que son action dissipative reste faible. Précisément, nous avons procédé à une simulation utilisant en plus de la *SD* un des trois autres opérateurs (laplacien, bilaplacien, hyperlaplacien) :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \partial_i(l_0^2 \partial_j v_i \partial_j \theta) + \kappa_p(-\Delta^p)\theta \;=\; 0 \tag{5.2.2}$$

Dès lors le traceur «brut» associé à θ vérifie[3] :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \kappa_p(-\Delta^p)T = 0 \tag{5.2.3}$$

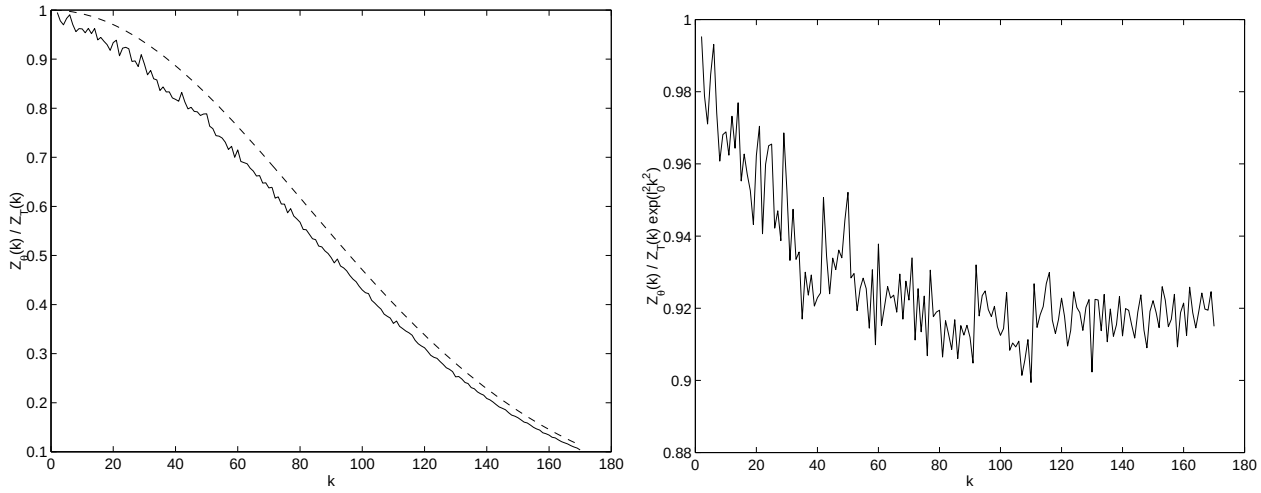
et ce sont donc ces champs θ et T qu'il faut considérer dans la définition du filtre effectif (5.2.1). Le plus simple est de reprendre pour κ_p des valeurs identiques avec et sans SD. Ainsi les trois champs (T_1, T_2, T_3) simulés selon l'équation (5.2.3) où respectivement $p = 1, 2, 8$ servent dans cette section à mesurer le filtre effectif imposé par la SD, et en 5.2.2 à être comparés au champ de référence pour évaluer l'erreur commise par les différentes paramétrisations. Nous disposons de plus de 3 simulations utilisant la SD, notées θ_1, θ_2 et θ_3, soit au total 6 champs de traceur à la résolution 512^2. Les différents paramètres sont rassemblés en annexe D.

La dissipation auxiliaire ne dépasse pas 25% de la dissipation totale (figure 5.2.2). Il est possible de diminuer ce coefficient pour obtenir un ratio de l'ordre de 5% tout en préservant la stabilité numérique[4], mais nous avons conservé les mêmes coefficients de diffusivité/hyperdiffusivité pour les raisons exposées ci-dessus.

Ces précisions étant apportées, la figure (5.2.3) présente le filtre effectif calculé pour la SD associée à un hyperlaplacien Δ^8 (champs T_3 et θ_3). On constate qu'il est très proche de sa valeur

[3]Le laplacien commute avec l'opération de filtrage.

[4]Ce point a été notamment vérifié dans des simulations forcées sur un grand nombre de temps de retournement.



(a) Filtre effectif $|p(k)|^2$

(b) Filtre effectif compensé par sa valeur théorique $|p(k)|^2 \exp(l_0^2 k^2)$

FIG. 5.2.3. Filtre effectif : (a) filtre effectif $|f(k)|^2 = Z_\theta(k)/Z_T(k)$, comparé à sa valeur théorique $\exp(-l_0^2 k^2)$ (tirets) - (b) filtre effectif compensé : $\exp(l_0^2 k^2) Z_\theta(k)/Z_T(k) \approx 1$ à moins de 10% près sur toute la gamme spectrale, bien au-delà de la validité de l'approximation $\exp(-l_0^2 k^2) \approx 1 - l_0^2 k^2$.

théorique $|p(k)|^2 = \exp(-l_0^2 k^2)$, avec un écart à cette valeur inférieur à 10% sur toute la gamme spectrale, y compris pour les k élevés, pour lesquels l'approximation $\exp(-l_0^2 k^2) \approx 1 - l_0^2 k^2$ n'est plus du tout valide. Ainsi la *SD* impose bien le filtre gaussien pour lequel elle a été calculée.

5.2.2. Erreur et discussion. Nous abordons ici la comparaison proprement dite. Nous calculons la différence entre le traceur de référence T_0 à résolution 2048^2 et les traceurs à résolution 512^2 utilisant une paramétrisation, T_1, T_2 et T_3 :

$$\delta_i \equiv T_i - T_0.$$

D'autre part, les traceurs $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ vérifiant (5.2.2) sont comparé à T_0 après déconvolution par le filtre p , ce qui se réalise facilement dans l'espace de Fourier :

$$\delta_i^{sd}(\overrightarrow{k}) \equiv e^{l_0^2 k^2/2} \theta_i(\overrightarrow{k}) - T_0(\overrightarrow{k}).$$

Les coefficients de diffusivité/hyperdiffusivité ont été ajustés de façon à minimiser l'erreur totale $\int \delta_i^2 \mathrm{d}\overrightarrow{x}$. La figure (5.2.4) présente les erreurs commises en fonction du nombre d'onde k, et rapportées au spectre de référence :

$$\begin{aligned} \epsilon_i(k) &\equiv \frac{|\delta_i(k)|^2}{|T_0(k)|^2}, \\ \epsilon_i^{sd}(k) &\equiv \frac{|\delta_i^{sd}(k)|^2}{|T_0(k)|^2} \end{aligned}$$

Insistons ici sur le fait que nous ne nous contentons pas de comparer les spectres entre eux, mais calculons la différence δ_i ou δ_i^{sd} puis son spectre.

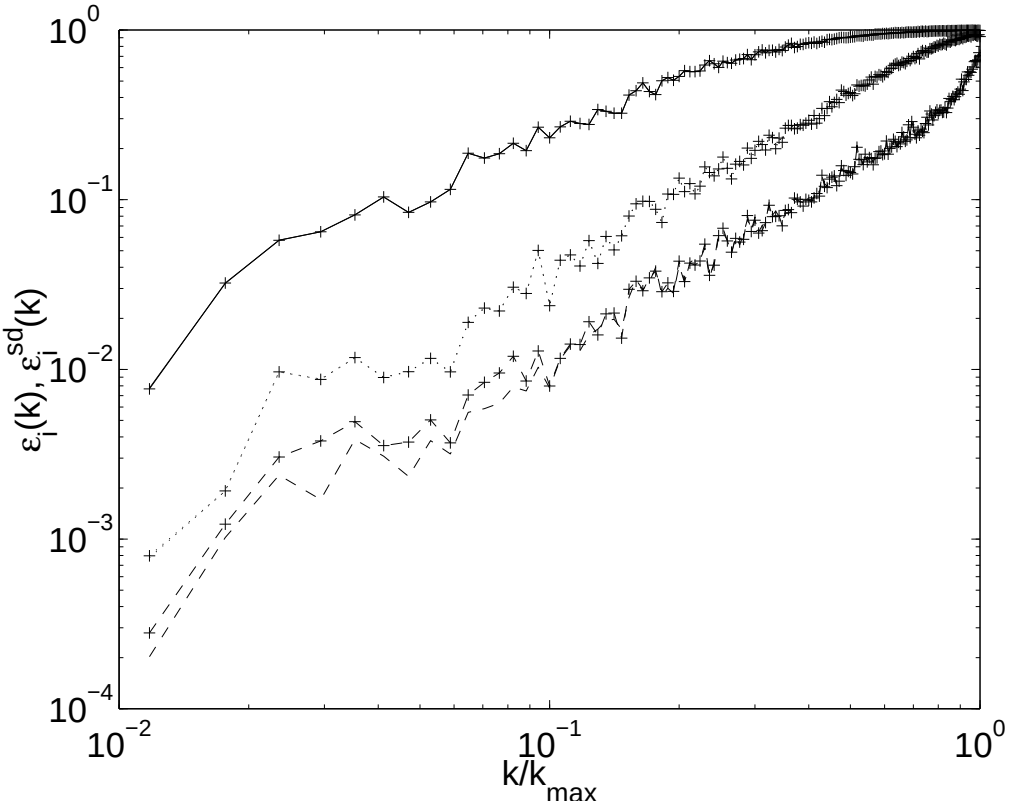


FIG. 5.2.4. Erreur relative $\epsilon(k)$ commise par les différentes paramétrisations, en fonction du nombre d'onde k. Courbes sans symboles : laplacien ϵ_1(trait continu), bilaplacien ϵ_2(pointillés), hyperlaplacien ϵ_3(tirets). Avec symboles : *strain diffusivity* avec différentes dissipations auxiliaires : laplacien ϵ_1^{sd} (trait continu), bilaplacien ϵ_3^{sd} (pointillés), hyperlaplacien ϵ_3^{sd} (tirets).

On constate que l'erreur est plus importante pour les petites échelles (grand k) que pour les grandes; ceci n'est pas très surprenant. On observe aussi que ϵ_i^{sd} ne se distingue quasiment pas de ϵ_i. Ce résultat est relativement décevant : l'amplitude de l'erreur commise n'est pas diminuée par l'utilisation de la *SD* et dépend surtout de la dissipation auxiliaire utilisée. Elle diminue quand l'ordre p de l'opérateur utilisé augmente.

Peut-être ne pouvait-on en fait pas espérer mieux. En effet, le résultat principal a été constaté au paragraphe précédent, à savoir que le filtre effectif correspondait bien à nos attentes. Cependant, dans la mesure où nous utilisons un code pseudo-spectral, le filtre correspondant au schéma numérique n'est pas gaussien, comme cela a été dit en (4.3.2). La *SD* serait donc probablement mieux adaptée à un schéma numérique appliquant naturellement un tel filtrage, comme un schéma de type volumes finis.

D'autre part, on peut s'interroger sur l'origine de l'instabilité à long terme qui apparaît lorsque l'on utilise la *SD* sans dissipation auxiliaire. On peut la chercher dans la forme elle-même de l'opérateur. En effet, comme le tenseur de diffusivité $-l_0^2 \partial_j v_i$ est de trace nulle, il possède donc à la fois une direction propre correspondant à une diffusivité positive, et une autre direction correspondant au contraire à une diffusivité négative[5], source potentielle d'instabilité. Le schéma numérique utilisé pour résoudre (4.3.9) doit donc contrôler avec soin

[5]C'est précisément cette diffusivité négative qui permet de rendre compte des renversements locaux de la cascade de traceur.

cette instabilité, probablement de façon plus fine que la «rustine» que nous avons utilisée. Mettre au point une telle méthode numérique est un travail important qui déborde du cadre de cette thèse. En revanche, d'autres s'y sont essayés avec un certain succès : citons les travaux de Moeleker et Leonard, à base de décomposition en ondelettes [**67**] ou de méthodes particulaires [**73**]. Ces derniers obtiennent avec leur méthode dans un écoulement de chaos lagrangien des résultats supérieurs au modèle de Smagorinsky (figure 5.2.5). Signalons cependant que leur modèle contient aussi une dissipation par le biais d'une réorganisation régulière des positions des particules («remeshing»).

Enfin, en ce qui concerne le point de vue de son coût numérique, celui de la SD est essentiellement le même que pour le modèle de Smagorinsky, car il est nécessaire dans les deux cas de calculer le gradient de vitesse. Pour un schéma numérique pseudo-spectral comme celui que nous utilisons, le surcoût est de l'ordre de 50%, ce qui peut paraître important. Il résulte de ce que le terme $\partial_j v_i \partial_j \theta$ doit être calculé dans l'espace physique alors qu'un laplacien/hyperlaplacien se calcule directement dans l'espace de Fourier. En revanche, ce surcoût est probablement nettement plus faible dans un modèle de type volumes finis où tout est calculé dans l'espace physique.

5.3. Impact sur les grandes échelles

Nous nous proposons dans cette section d'étudier l'impact de la paramétrisation utilisée pour la vorticité sur les grandes échelles de l'écoulement. Le problème posé par la dissipation d'énergie à petite échelle est plus spécialement important lorsque l'on veut étudier la cascade inverse d'énergie. En effet, dans cette situation on cherche à étendre au maximum le domaine inertiel occupé par la cascade inverse, ce qui suppose soit une résolution élevée, soit de placer le forçage à un nombre d'onde k_I proche du plus grand nombre d'onde résolu k_{max}. C'est par exemple le cas dans la simulation notée «DNS.I» de [**32**] et dans celle de [**12**], où le rapport entre ces deux nombres d'onde vaut $k_{max}/k_I = 2$. Cependant il est possible que ce choix de nombre d'onde de forçage ait des conséquence sur la dynamique des grandes échelles. En particulier, si l'on utilise un laplacien ou un laplacien itéré, la quantité d'énergie dissipée à petite échelle est du même ordre de grandeur que celle qui est dissipée à grande échelle. On peut le constater par exemple sur la figure 5.3.1 tirée de [**12**].

Si le forçage est placé suffisamment loin de la coupure spectrale, on laisse la cascade d'enstrophie se développer dans l'intervalle et on n'a pas ce problème. En revanche on sacrifie une partie de la gamme spectrale à la cascade d'enstrophie. C'est le cas dans la simulation «DNS.II» de [**32**] (figure 2.2.1). Dans cette simulation à résolution 512^2, le nombre d'onde maximal est de $k_{max} = 230$ et le forçage est placé au nombre d'onde $k_I = 40$ d'où un rapport $k_{max}/k_I \approx 6$. La dissipation d'énergie à petite échelle est donnée par le flux spectral d'énergie $\varepsilon(k)$ aux nombres d'ondes k supérieurs au nombre d'onde de forçage ; on peut voir sur la figure 2.1.1 que cette dissipation représente une faible fraction du flux d'énergie vers les grandes échelles. On se rapproche en cela de la limite des grands nombres de Reynolds, dans laquelle la dissipation d'énergie à petite échelle tend vers 0.

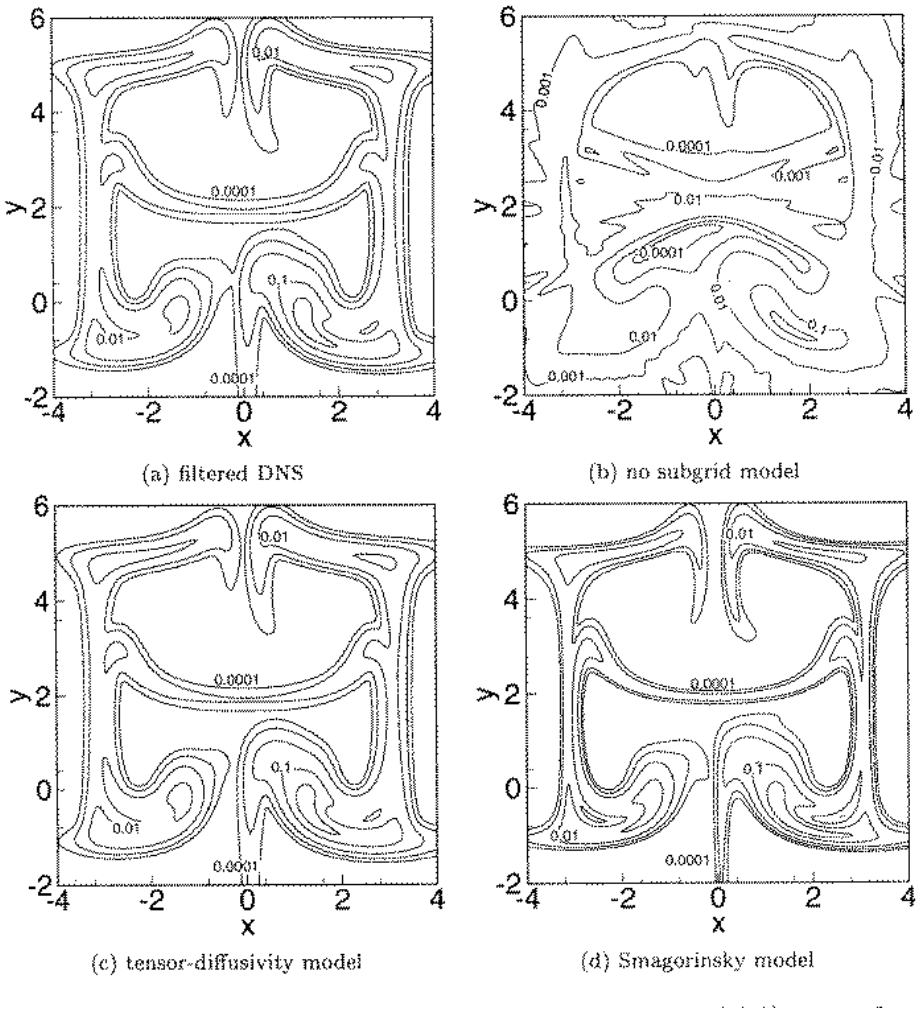


FIG. 5.2.5. Lignes de niveau de traceur dans une simulation utilisant la SD. Le champ de vitesse est périodique dans le temps et présente du chaos lagrangien. (a) Simulation de référence : simulation directe, à haute résolution, puis filtrée par un filtre gaussien (b) Simulation sans modèle sous-maille (c) Simulation utilisant la SD (d) Simulation utilisant le modèle de Smagorinsky. La forme des isolignes de traceur de (a) est mieux reproduite par (c) que par (d). Tiré de **[73]**.

Nous pouvons donc prendre la simulation «DNS.II» comme une référence résolvant correctement les deux cascades, et la comparer à des simulations à plus faible résolution dans lesquelles se pose le problème de la proximité de k_I et k_{max} . Nous considérerons deux simulations à la résolution de 128^2 :

– l'une, notée 128H, utilise un hyperlaplacien :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \kappa^* \Delta^8 \omega = \alpha\psi + f.$$

L'hyperdiffusivité κ^* est ajustée de la façon suivante : elle doit être assez élevée pour éviter l'accumulation d'enstrophie à petite échelle, sans excès pour ne pas dissiper complètement les petites échelles.

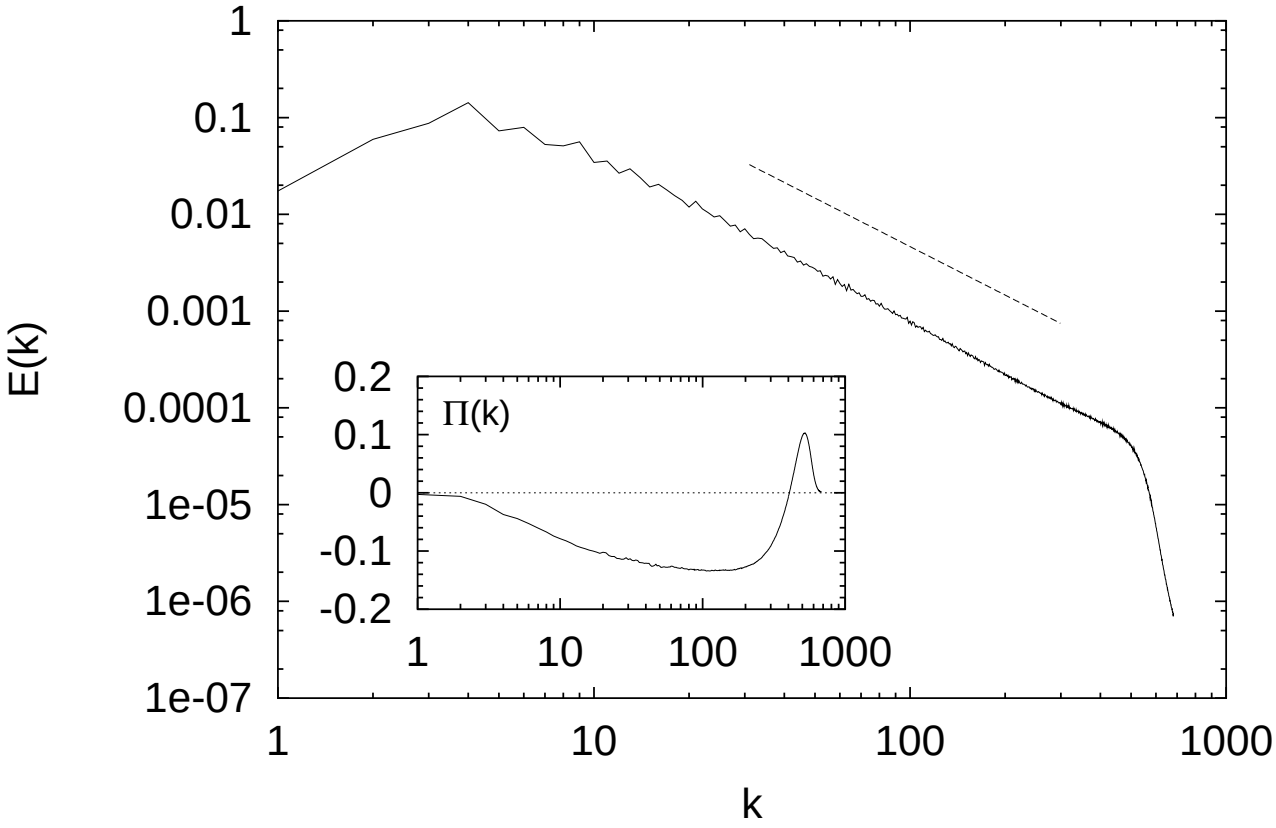


FIG. 5.3.1. Spectre d'énergie $E(k)$ et flux spectral d'énergie $\Pi(k) = \varepsilon(k)$ dans la simulation de cascade inverse d'énergie de **[12]**. La quantité d'énergie dissipée à petite échelle (maximum de $\Pi(k)$) est du même ordre grandeur que celle qui est dissipée à grande échelle (minimum de $\Pi(k)$). Cette simulation utilise à petite échelle un hyperlaplacien d'ordre $p = 8$ et à grande échelle une friction linéaire.

– l'autre notée 128SD, utilise la SD, complétée comme dans la section 5.2.1 par une hyperdiffusivité auxiliaire :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + l_0^2 \partial_i \left(\partial_j \omega \partial_j v_i\right) + \kappa^* \Delta^8 \omega = \alpha\psi + f.$$

Après quelques essais, nous avons opté pour la valeur d'un demi pas de maille pour l_0. L'hyperdiffusivité κ^* est prise identique à celle de 128H.

Le coefficient α contrôlant l'intensité de la dissipation à grande échelle (proportionnelle à la fonction de courant ψ) est identique pour les trois simulations. De même le forçage f est identique : il consiste à garder constant le coefficient de Fourier $\omega(\overrightarrow{k})$ pour le vecteur d'onde $\overrightarrow{k} = (k_I, 0)$. Les deux simulations sont initialisées avec un champ tiré de la simulation (DNS.II), limité aux nombres d'onde[6] $k \leq k_{max} = 57$. Ainsi seules changent la résolution et la paramétrisation.

5.3.1. Phase transitoire. Nous présentons en figure 5.3.2 l'évolution temporelle de l'enstrophie et de l'énergie dans les deux simulations, durant les 500 premiers temps de retournement (gauche) et sur toute la durée de la simulation (droite). La simulation 128SD se stabilise

[6]La simulation n'est pas «complètement désaliasée» : $2k_{max} = 0.9 \times 128$

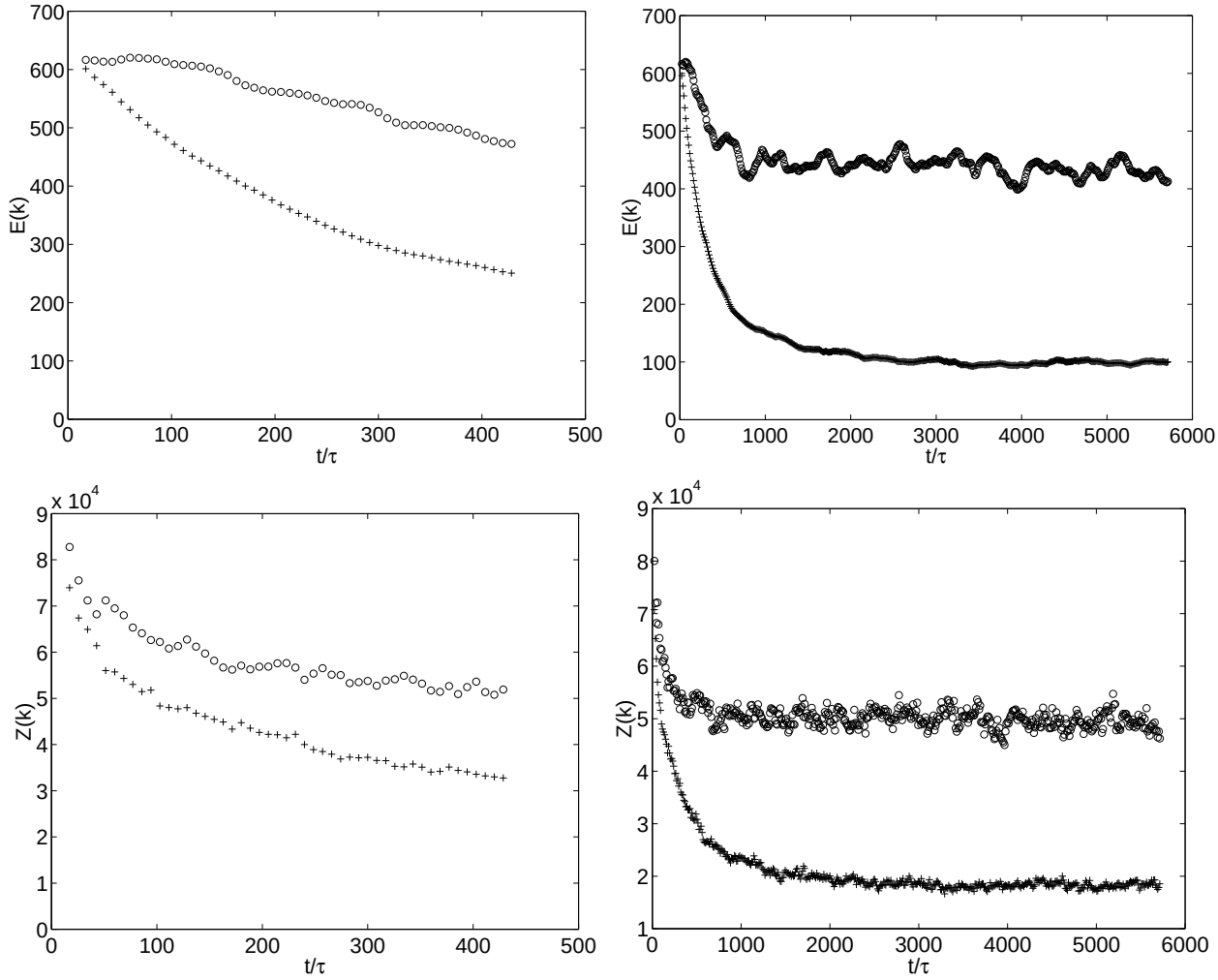


FIG. 5.3.2. Évolution de l'énergie (haut) et de l'enstrophie (bas) dans les simulations 128SD (croix) et 128H (cercles) en fonction du temps normalisé par le temps de retournement initial $\tau = Z^{-1/2}$. À gauche : détail sur les 500 premiers temps de retournement.

au bout d'environ 1000 temps de retournement alors qu'il en faut environ 3000 à la simulation 128H. De plus, l'énergie et l'enstrophie de 128H se stabilisent à des valeurs très inférieures à celles de départ, ce qui souligne le caractère excessivement dissipatif de l'hyperviscosité dans cette configuration[7]. La simulation 128SD subit une déperdition d'environ un quart de l'énergie et la moitié de l'enstrophie, contre environ 80% pour 128H.

5.3.2. État stationnaire. Nous étudions les propriétés spectrales moyennes des simulations 128SD et 128H sur la deuxième moitié de l'expérience, soit environ 3000 temps de retournement, et les comparons à celle de «DNS.II». Comparons tout d'abord les spectres d'énergie, présentés en figure 5.3.3. Les spectres des deux expériences 128H et 128SD sont moins énergétiques que celui de DNS.II . Ceci peut-être directement attribué au problème de la dissipation d'énergie à petite échelle : l'énergie qui est dissipée à petite échelle est autant d'énergie perdue pour la cascade inverse et pour les grandes échelles, qui se trouvent ainsi privées d'une partie de leur énergie.

[7]L'hyperviscosité est pourtant moins dissipative qu'une viscosité ordinaire.

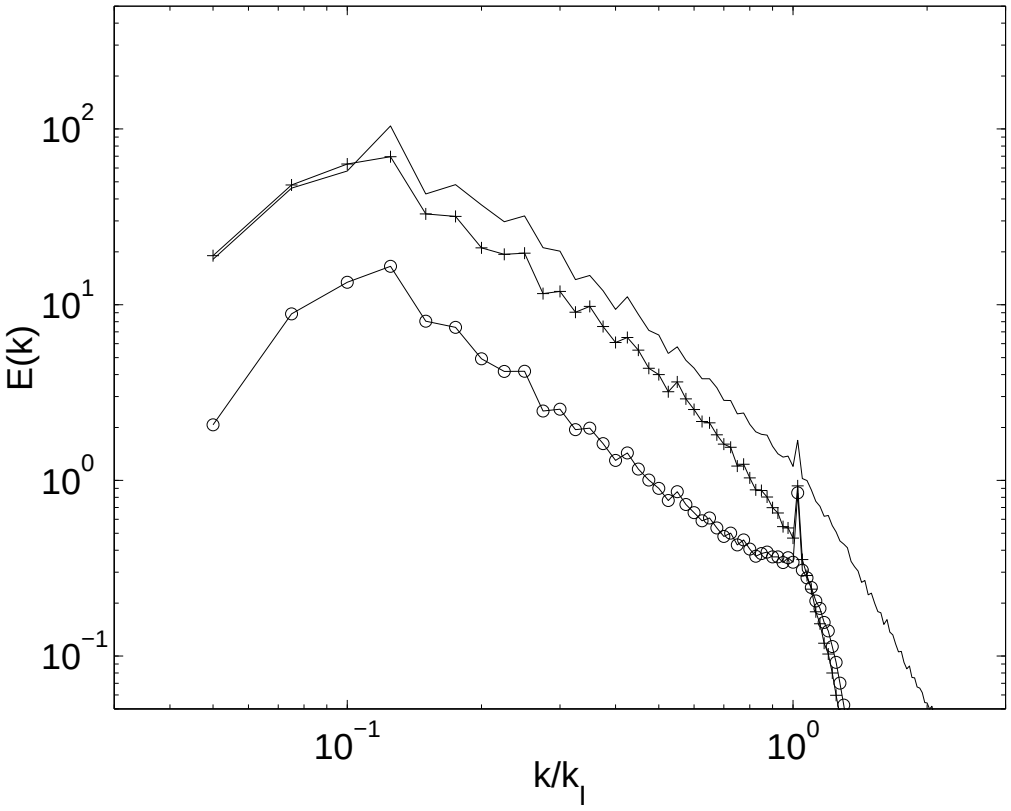


FIG. 5.3.3. Spectre d'énergie $E(k)$ dans les expériences DNS.II (pas de symbole), 128H (cercle) et 128SD (croix), en fonction du nombre d'onde normalisé k/k_I.

Cette interprétation est confirmée par l'étude du flux spectral d'énergie $\varepsilon(k)$ (figure 5.3.4). La valeur de $\varepsilon(k)$ pour $k > k_I$ donne la dissipation à petite échelle. Elle est faible pour la simulation DNS.II, plus importante pour 128SD, et encore plus pour 128H. Il est intéressant de remarquer que nous avons pris la même hyperdiffusivité κ^* pour 128H et 128SD. Nous voyons ici que la SD non seulement conserve l'énergie mais limite la dissipation associée à la paramétrisation auxiliaire que nous avons dû introduire. Cette action peut se comprendre de la façon suivante : en imposant son filtre effectif, la SD réduit l'amplitude des modes de Fourier de nombre d'onde élevé, et ce à énergie constante. Ce faisant, elle prive l'hyperviscosité de son support : celle-ci agit en effet tout près de la coupure spectrale.

Si l'on s'intéresse au flux d'énergie vers la grande échelle ($\varepsilon(k)$ pour $k < k_I$), on s'aperçoit que ceux de DNS.II et de 128SD sont assez proches, tandis que celui de 128H est nettement plus faible. De plus la différence entre les flux d'énergie de R128SD et de R128H est supérieure à l'excès de dissipation présenté par 128H. Rappelons ici que le forçage utilisé ne consiste pas à injecter une quantité contrôlée d'énergie, mais à garder constant un mode de Fourier. Cette technique injecte de l'énergie à un taux qui est essentiellement contrôlé par la dynamique. Nous voyons ici que l'hyperlaplacien non seulement dissipe l'énergie mais perturbe suffisamment la dynamique pour limiter significativement les transferts d'énergie vers la grande échelle. La SD reste quant à elle beaucoup plus proche de la dynamique de référence, DNS.II .

Nous présentons enfin le flux spectral d'enstrophie $\eta(k)$ (figure 5.3.5). Il apparaît clairement que le flux d'enstrophie de 128SD reproduit mieux celui de DNS.II que ne le fait 128H, où il

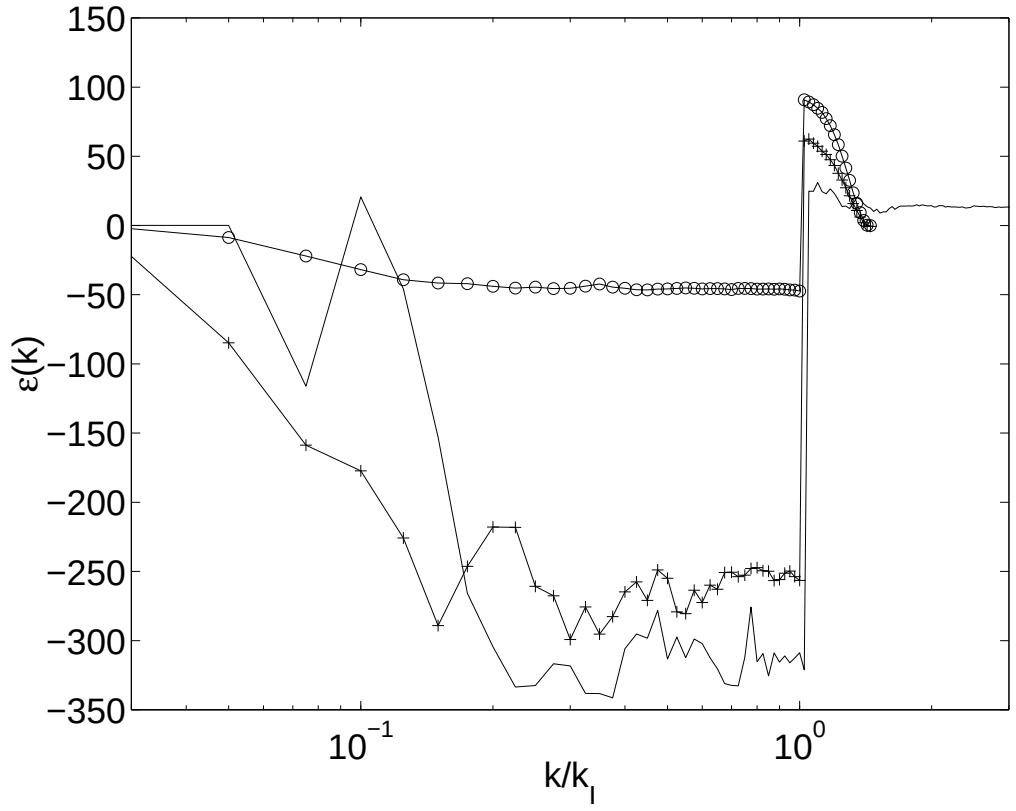


FIG. 5.3.4. Flux spectral d'énergie $\varepsilon(k)$dans les expériences DNS.II (pas de symboles), 128H (cercles) et 128SD (croix), en fonction du nombre d'onde normalisé k/k_I.

est inférieur de moitié. Nous avons vérifié qu'on ne pouvait pas obtenir la valeur correcte du flux d'enstrophie dans 128H à moins d'augmenter déraisonnablement l'hyperdiffusivité κ^*.

Remarque : les flux spectraux présentés ici font intervenir les termes non-linéaires et la SD :

$$\begin{aligned} n_\omega(\overrightarrow{k}) &\equiv \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\overrightarrow{u}\omega + l_0^2\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}\overrightarrow{\nabla}\omega\right), \\ \varepsilon(k) &\equiv \int_{|\overrightarrow{k}|<k}\frac{1}{k^2}\omega(\overrightarrow{k})n_\omega^*(\overrightarrow{k})\mathrm{d}\overrightarrow{k}, \\ \eta(k) &\equiv \int_{|\overrightarrow{k}|<k}\omega(\overrightarrow{k})n_\omega^*(\overrightarrow{k}). \end{aligned}$$

Ainsi leur valeur au nombre d'onde maximal k_{max} est égale à la dissipation due à la SD, les termes inertiels étant conservatifs :

$$\begin{aligned} \varepsilon(k_{max}) &= \varepsilon_{sd}, \\ \eta(k_{max}) &= \eta_{sd}. \end{aligned}$$

On peut constater sur la figure 5.3.4 que la SD conserve effectivement l'énergie, et sur la figure 5.3.5 qu'elle dissipe l'enstrophie. *Fin de la remarque.*

5.3.3. Espace physique. Enfin nous présentons en figure 5.3.6 un champ de vorticité de la simulation DNS.II, que l'on peut comparer aux champs des simulations 128SD et 128H présentés en figure 5.3.7. Ces deux dernières ont beaucoup de mal à ressembler à DNS.II ,

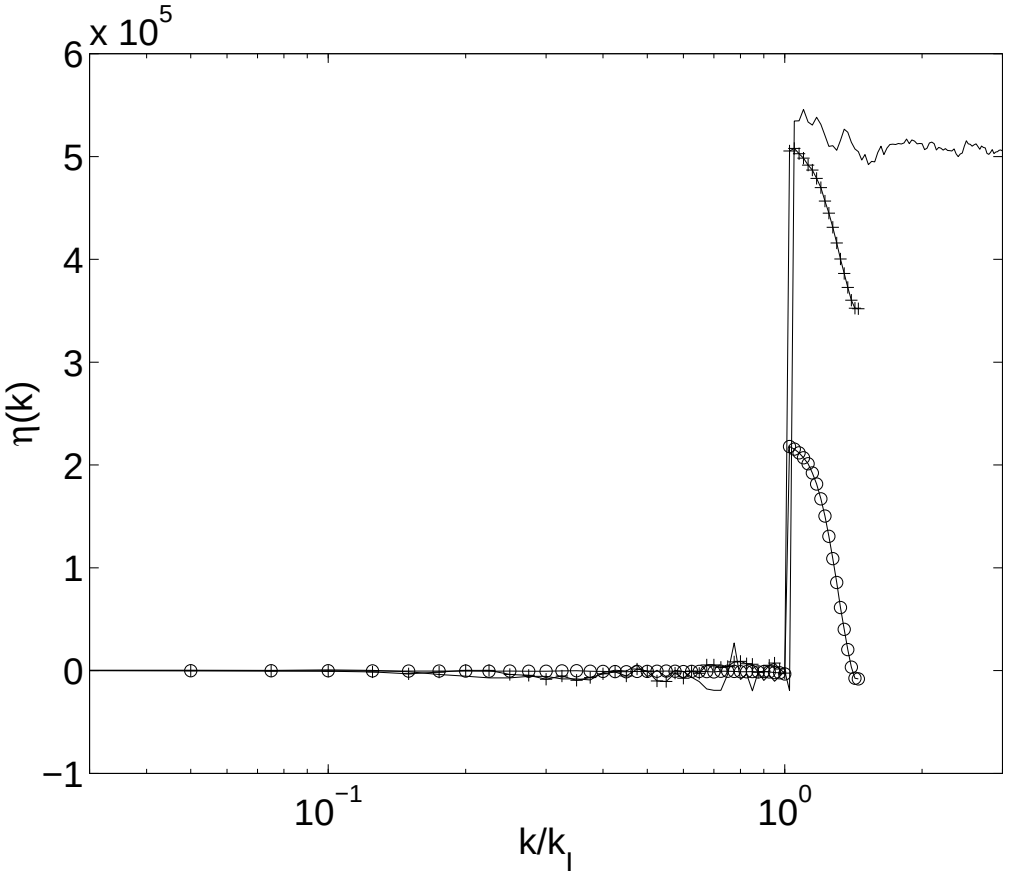


FIG. 5.3.5. Flux spectral d'enstrophie $\eta(k)$ dans les expériences DNS.II (pas de symboles), 128H (cercles) et 128SD (croix), en fonction du nombre d'onde normalisé k/k_I.

notamment parce que les tourbillons bien visibles de DNS.II ont une taille à la limite de leur résolution. L'organisation du champ 128SD semble se faire non pas autour de tourbillons individuels ou de dipôles comme dans DNS.II , mais plutôt autour de groupes de tourbillons agglutinés, produisant des lignes de courant de plus grande échelle que leur taille individuelle. Une telle organisation se rapprocherait donc plutôt de celle observée en laboratoire **[86]**. Ces groupes de tourbillons sont difficiles à apercevoir dans la simulation 128H. La structure spatiale de cette dernière est marquée par des stries rectilignes dont le réalisme est douteux. La structure spatiale qualitative de 128SD nous semble plus réaliste que celle de 128H.

Nous avons mis en évidence plusieurs propriétés de la SD relativement à l'énergie : la SD conserve l'énergie et limite la dissipation associée à la paramétrisation auxiliaire ; elle perturbe beaucoup moins les transferts d'énergie qu'un hyperlaplacien ; enfin elle reproduit nettement mieux la cascade d'enstrophie. Ces propriétés ont un impact fort sur les grandes échelles de l'écoulement dans la situation où l'échelle de forçage est proche de la maille du modèle.

5.4. Dynamique comparée de la vorticité et d'un traceur passif

Un traceur est simplement une quantité conservée le long d'une trajectoire lagrangienne. Mais alors qu'un traceur passif n'a pas d'influence sur l'écoulement, un traceur est dit actif s'il

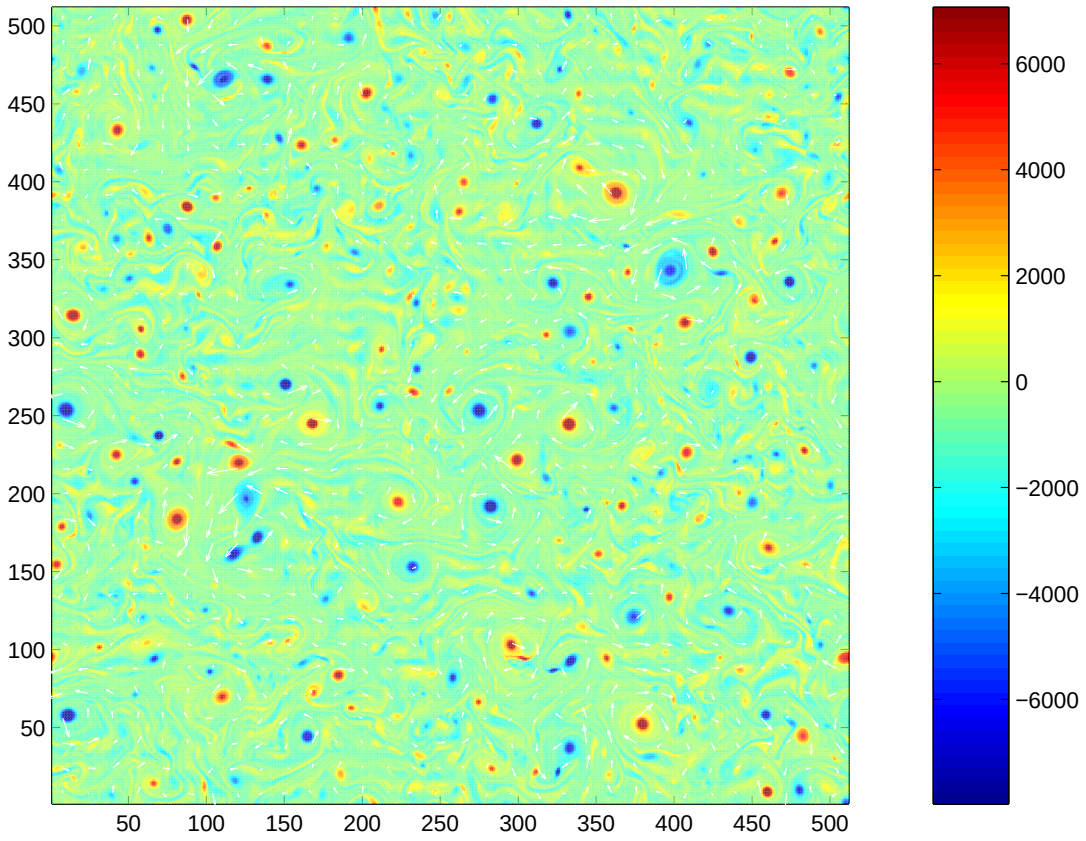


FIG. 5.3.6. Champs de vitesse et de vorticité de la simulation DNS.II.

rétroagit sur la vitesse. De tels traceurs sont très importants notamment dans les écoulements géophysiques. Ainsi les différences de température et de salinité dans l'océan induisent des différences de densité et des forces d'Archimède qui sont un des moteurs de la circulation océanique. La vorticité potentielle des modèles géophysiques [**88**] ou la vorticité du modèle bidimensionnel est un traceur encore plus fortement lié au champ de vitesse puisque celui-ci peut être reconstruit à partir de celui-là. Bien que traceurs actif et passif obéissent formellement à la même équation de transport (1.2.1), cette équation linéaire pour un traceur passif est implicitement non-linéaire pour un traceur actif, via le couplage traceur-vitesse.

La question qui se pose naturellement est dans quelle mesure cette différence de principe se traduit en différence observable. En d'autres termes, traceurs actif et passif sont-ils avant tout traceurs ou avant tout actif/passif ? Dans le premier cas, leurs points communs doivent dominer, alors que dans le second on doit être en mesure de définir un critère qui, étant donné un champ de traceur, permettra de reconnaître s'il est actif ou passif.

Les observations disponibles ne permettent pas réellement de trancher. D'une part, la cascade de traceur passif a tendance à être plus efficace que celle de la vorticité, ce que l'on peut expliquer par certains modèles de clôture [**43**]. Cette propriété est observée de façon transitoire par Lapeyre et collaborateurs [**60**], mais cette différence s'évanouit lorsque la turbulence se développe. Les propriétés d'alignement observées ne mettent alors pas en évidence de différence entre un traceur passif et la vorticité. Pourtant la capacité d'organisation du champ de vorticité en structures cohérentes n'a pas d'équivalent pour le traceur passif. Mais en-dehors de ces structures, traceurs actifs et passifs sont très similaires ; ils ont tendance à avoir des isolignes

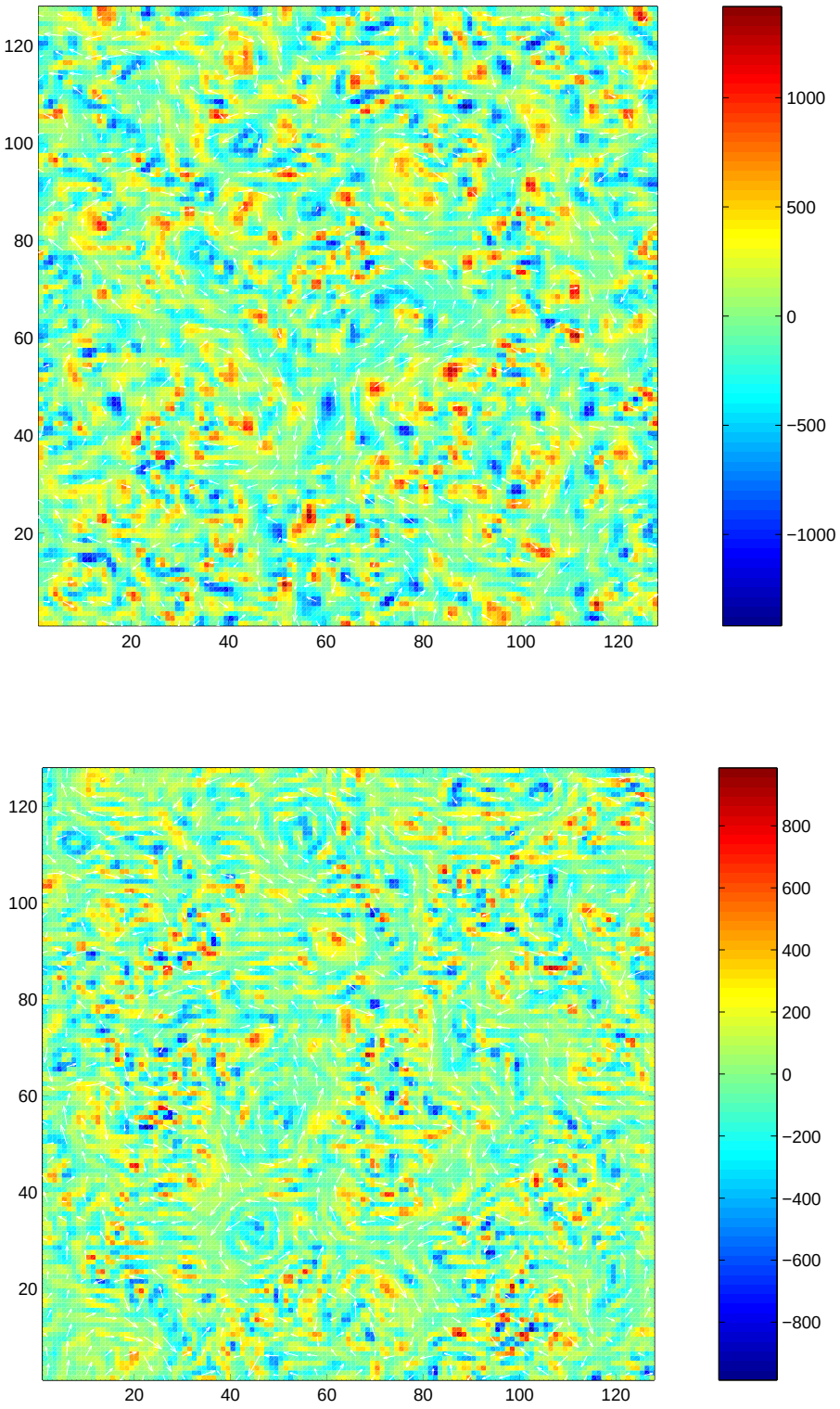


FIG. 5.3.7. Champs de vitesse et de vorticité des simulations 128SD (haut) et 128H (bas).

très semblables dans des simulations numériques [**1, 2**], des expériences de laboratoire [**49**] et dans la stratosphère polaire où les forts gradients de vorticité potentielle coïncident avec ceux des traceurs chimiques. Ainsi alors que des différences qualitatives «évidentes» existent, il est difficile dans une turbulence développée de les traduire quantitativement.

Nous aborderons cette question en étudiant comparativement les propriétés des deux cascades. Nous présentons maintenant cette étude, essentiellement «géométrique», dans le prolongement des travaux de Lapeyre et collaborateurs [**61, 53, 60**].

5.4.1. Intérêt de diagnostics semi-locaux. La dynamique bidimensionnelle d'un traceur est caractérisée par des propriétés géométriques d'alignement de son gradient avec des directions privilégiées, dictées par l'écoulement. Il est alors naturel de chercher à distinguer la vorticité d'un traceur passif au moyen de leurs propriétés d'alignement avec ces directions, et de leur alignement mutuel.

C'est le principe de l'étude de Lapeyre et collaborateurs [**60**]. Dans ce travail, ils étudient dans des simulations en déclin contenant un traceur passif un ensemble de diagnostics testant ces alignements : alignement dans les domaines hyperboliques, dans les domaines elliptiques, alignement relatif des gradients de vorticité et de traceur passif, pondérés en fonction de la norme des gradients. Tous ces diagnostics convergent au bout d'un temps suffisant vers une valeur identique pour le traceur passif et la vorticité. Ainsi, alors que des différences transitoires sont observées lors des premiers instants des expériences, ces différences s'estompent lorsque la turbulence se développe.

Les diagnostics utilisés par Lapeyre et collaborateurs sont globaux : ce sont des moyennes spatiales de grandeurs liées aux alignements des gradients de traceur passif et de vorticité avec les directions privilégiées données par l'écoulement. Ils font seulement une dichotomie entre domaines elliptiques et hyperboliques. Pour aller plus loin et quantifier une éventuelle différence entre la dynamique de ces deux traceurs aux temps longs, nous proposons de construire des diagnostics plus locaux dans l'espace physique.

L'idée la plus simple consisterait à considérer directement un champ diagnostic tel que le flux de variance ou le taux de croissance des gradients, et à comparer le champ correspondant à un traceur passif à celui correspondant à la vorticité. Cependant une telle comparaison est difficile à mettre en oeuvre. On peut le constater sur les figures 5.4.1 et 5.4.2 où nous présentons la dérivée seconde du gradient de vorticité et d'un traceur passif (respectivement) dans la simulation forcée dont nous avons présenté un détail en 4.2.3 : la structure spatiale de ces champs est qualitativement très proche ; mais si l'on considère la différence entre ces champs, il est impossible de séparer ce qui relève de leur caractère aléatoire de ce qui relève d'une tendance de fond due à la dynamique.

Aussi nous utiliserons comme diagnostics des moyennes conditionnelles, conditionnées par les paramètres «de structure» du champ de vitesse introduits en 3.2 : déformation σ, rotation effective adimensionnée r, fluctuation adimensionnée de la déformation s. En effet de telles moyennes réalisent un compromis entre les deux extrêmes présentés ci-dessus : elles sont moins globales que des moyennes sur tout l'écoulement, et ainsi donnent un aperçu plus fin. Mais elles sont tout de mêmes des moyennes et permettent de dégager des tendances, malgré le

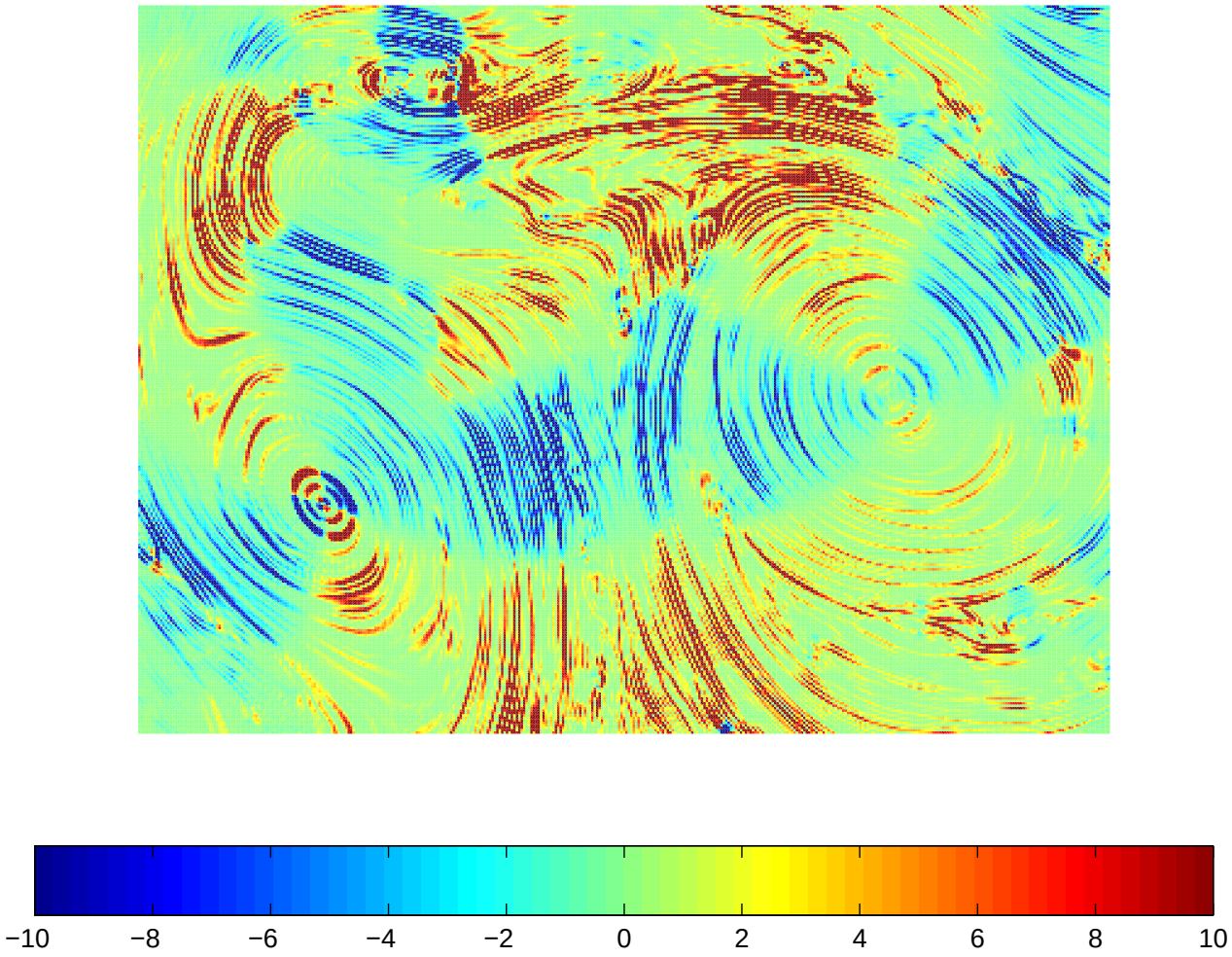


FIG. 5.4.1. Dérivée seconde du carré du gradient de vorticité dans la simulation forcée. Les valeurs sont normalisées par la moyenne spatiale. Détail de taille 400×300 d'un champ de taille 1024×1024.

caractère aléatoire des champs de traceur passif et de vorticité. Nous considérerons plusieurs diagnostics. Nous avons déjà abondamment mentionné comme étant un diagnostic de cascade la dérivée lagrangienne du carré de la norme du gradient de traceur $\overrightarrow{q}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q^2 = -\overrightarrow{q} \cdot S \cdot \overrightarrow{q} \tag{5.4.1}$$

Son interprétation en termes de cascade est simple : une croissance des gradients indique une cascade directe, et inversement. Nous utiliserons aussi la dérivée lagrangienne seconde :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}q^2 = \overrightarrow{q} \cdot N \cdot \overrightarrow{q} \tag{5.4.2}$$

$$N = S^2 - \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} + \omega JS \tag{5.4.3}$$

Ce diagnostic est un peu plus difficile à interpréter : dans une zone de croissance exponentielle du gradient, on peut s'attendre à ce qu'il soit positif. Une valeur négative correspondrait plutôt à une oscillation temporelle de la norme du gradient, donc à une région où la cascade est inactive. Son intérêt apparaît plus spécialement à l'instant initial aléatoire d'une simulation,

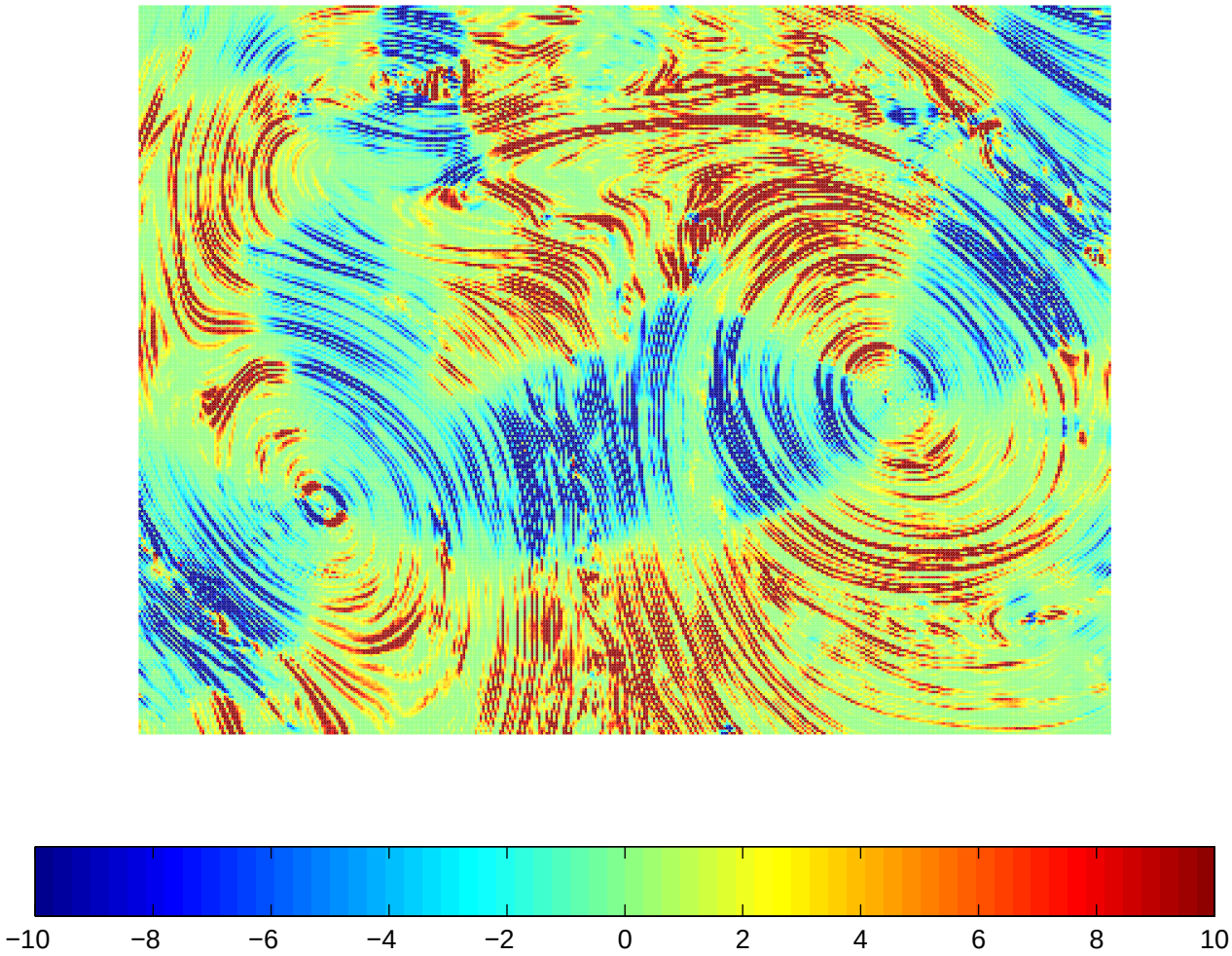


FIG. 5.4.2. Dérivée seconde du carré du gradient de traceur passif dans la simulation forcée. Les valeurs sont normalisées par la moyenne spatiale. Détail de taille 400×300 d'un champ de taille 1024×1024.

lorsque le traceur passif est encore indépendant du champ de vitesse, avant que le processus d'advection n'ait induit une corrélation. Dans ces champs aléatoires la moyenne spatiale $\langle \mathrm{d}q^2/\mathrm{d}t \rangle$ est nulle pour gradient $\overrightarrow{q_\omega}$ de la vorticité comme pour le gradient $\overrightarrow{q_T}$ du traceur passif. Ce diagnostic ne contient dont pas d'information utile sur la croissance moyenne des gradients. Cette information est donnée par la dérivée seconde. Aux temps courts, on aura :

$$\left\langle q^2(t) \right\rangle \approx \left\langle q^2 \right\rangle_{t=0} + \frac{t^2}{2} \left\langle \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} q^2 \right\rangle_{t=0}.$$

Pour le traceur passif, on peut montrer (*cf* 5.4.3) que :

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} q_T^2 \right\rangle = 2Z \left\langle q_T^2 \right\rangle$$

de sorte qu'on a toujours initialement une croissance moyenne des gradients du traceur passif. En revanche pour la vorticité, si par exemple le spectre initial est concentré autour d'un nombre

d'onde k_0 (comme dans la situation LARGE de **[60]**), on aura :

$$\begin{aligned} \omega &= -\Delta\psi \approx k_0^2\psi, \\ \text{d'où } \frac{\partial\omega}{\partial t} &\approx 0 \\ \text{et donc } \left\langle \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} q_\omega^2 \right\rangle &\approx 0. \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

On a donc dans ce cas quasi-stationnaire une stagnation initiale des gradients de vorticité. Des moyennes conditionnelles doivent permettre de distinguer les régions où ces gradients tendent à croître de celles où ils tendent à décroître.

Ces deux quantités testent directement l'alignement des gradients avec la géométrie de l'écoulement : le premier avec les axes propres de S , le second avec les axes propres de N. Ce dernier est plus particulièrement pertinent dans les domaines elliptiques, comme nous l'avons mentionné en 3.2.

5.4.2. Expériences numériques. Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, nous utiliserons dans la suite les trois expériences suivantes, toutes à la résolution de 1024^2 :

- la simulation «SMALL» de **[60]**, que Guillaume Lapeyre a eu l'amabilité de mettre à notre disposition. Il s'agit d'une simulation en déclin, où la dissipation est laplacienne, et où traceur passif et vorticité ont des conditions initiales indépendante l'une de l'autre. Ceci est réalisé en se donnant le spectre $Z(k) = Z_T(k)$ et des modes de Fourier de phases aléatoires. Le spectre choisi est étalé : $Z(k) = Z_T(k) \propto k^{-1}$. Nous étudierons l'état initial et l'état final, au bout d'environ 100 temps de retournement. Dans cet état, la turbulence est bien développée et l'écoulement est dominé par deux gros tourbillons de grande échelle.
- une simulation équivalente à la simulation «LARGE» de **[60]**. Il s'agit à nouveau d'une simulation en déclin avec une dissipation Laplacienne, mais contenant deux traceurs passifs initialement indépendants et indépendants de la vorticité. Le spectre initial des traceurs (et de la vorticité) est maintenant concentré autour du nombre d'onde $k_0 = 10$. Nous étudierons l'état initial et l'état obtenu au bout de 70 temps de retournement. La turbulence est développée dans le sens où le champ comporte de nombreux tourbillons cohérents, des filaments, etc. mais est moins avancée que dans l'expérience SMALL.
- une simulation forcée stationnaire, contenant deux traceurs passifs, avec une diffusion/viscosité laplacienne. Le forçage consiste à garder constante l'amplitude du mode $k = 4$ de sorte que des cascades stationnaires de traceur passif et d'enstrophie se mettent en place. Une dissipation à grande échelle est nécessaire pour obtenir la stationnarité. Pour les besoins de la comparaison, elle est aussi appliquée aux traceurs passifs. Le spectre de cette simulation est présenté en A. Nous avons présenté un détail de cette simulation en 4.2.3.

Les simulations en déclin permettent de s'affranchir de la part d'arbitraire que contient le choix d'un forçage, et surtout de la dissipation à grande échelle. Mais la simulation stationnaire est seule à même de garantir que l'on mesure des propriétés asymptotiques, valables aux temps longs, et non des phénomènes transitoires. La présence de deux traceurs passifs

(excepté dans la simulation SMALL) permet de s'assurer qu'une éventuelle différence est bien significative : la différence traceur passif-vorticité doit en effet être supérieure à la fluctuation traceur passif-traceur passif pour être concluante. Nous considérons comme significative une différence observable dans les trois simulations.

5.4.3. Moyennes conditionnées par la déformation. La déformation apparaît explicitement dans la définition des diagnostics de cascade (5.4.1) et (5.4.2). Il apparaît donc assez naturel de commencer par elle. De plus, dans l'hypothèse ou le vecteur $\overrightarrow{q}$ est distribué de façon isotrope et statistiquement indépendante d'un tenseur M , on a :

$$\langle \overrightarrow{q} \cdot M \cdot \overrightarrow{q} \rangle = \frac{1}{2} \langle q^2 \rangle \, \mathrm{Tr} M$$

donc en particulier, toujours sous cette hypothèse :

$$E\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q^2 \,;\, \sigma\right) = 0, \tag{5.4.5}$$

$$E\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} q^2 \,;\, \sigma\right) = \sigma^2 E\left(q^2 \,;\, \sigma\right), \tag{5.4.6}$$

où $E(a\,;\,b)$ est l'espérance conditionnelle de a relativement à b et σ est toujours le taux de déformation. Rappelons que S, $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t$ et JS sont de trace nulle. Ainsi la quantité

$$z(\sigma) \equiv \frac{E\left(\mathrm{d}^2 q^2/\mathrm{d}t^2 \,;\, \sigma\right)}{E\left(q^2 \,;\, \sigma\right)} \tag{5.4.7}$$

a dans ce cas une valeur prévisible, $z(\sigma) = \sigma^2$. Cependant, le gradient d'un traceur passif n'est en général pas indépendant du champ de vitesse, comme en témoignent justement ses propriétés d'alignement. Cette condition ne peut être vérifiée qu'à un seul instant : l'instant initial d'une expérience ou d'une simulation.

Comme nous l'avons discuté en 5.4.1, même à l'instant initial le gradient de vorticité $\overrightarrow{q}_\omega$ n'est pas indépendant du champ de vitesse, donc de N. On doit donc s'attendre à ce que $z_\omega(\sigma) \neq z_T(\sigma)$, ce qui fait de z un bon candidat pour notre étude comparative. Nous avons donc tout d'abord calculé $z_T(\sigma)$ et $z_\omega(\sigma)$ en prenant pour ω et T les conditions initiales des simulations «SMALL» et «LARGE». Les diagnostics $z_T(\sigma)$ et $z_\omega(\sigma)$ dans ces deux cas sont présentés en figure (5.4.3).

Tout d'abord, nous avons bien $z_T(\sigma) = \sigma^2$. Nous observons[8] que $z_\omega(\sigma)$ semble être une fonction affine de σ^2, et que dans tous les cas $z_\omega(\sigma) < z_T(\sigma)$. Cela est cohérent avec le fait que la cascade de vorticité est initialement moins efficace que celle de traceur passif. En particulier, en dessous d'une certaine valeur de σ, $z_\omega(\sigma)$ prend des valeurs négatives. Cela est nécessaire pour que le bilan global (5.4.4) soit nul et indique que, au moins initialement, ces gradients de vorticité vont commencer par décroître. Ainsi, alors que tous les gradients du traceur passif tendent à augmenter, quoique à des vitesses différentes en fonction de σ, les points initialement situés dans les zones de faible déformation ont tendance à voir leur gradient de vorticité décroître.

[8]Nous ne connaissons pas de justification à cette observation empirique, ni à l'identité de $z_T(\sigma)$ et $z_\omega(\sigma)$ dans le cas SMALL.

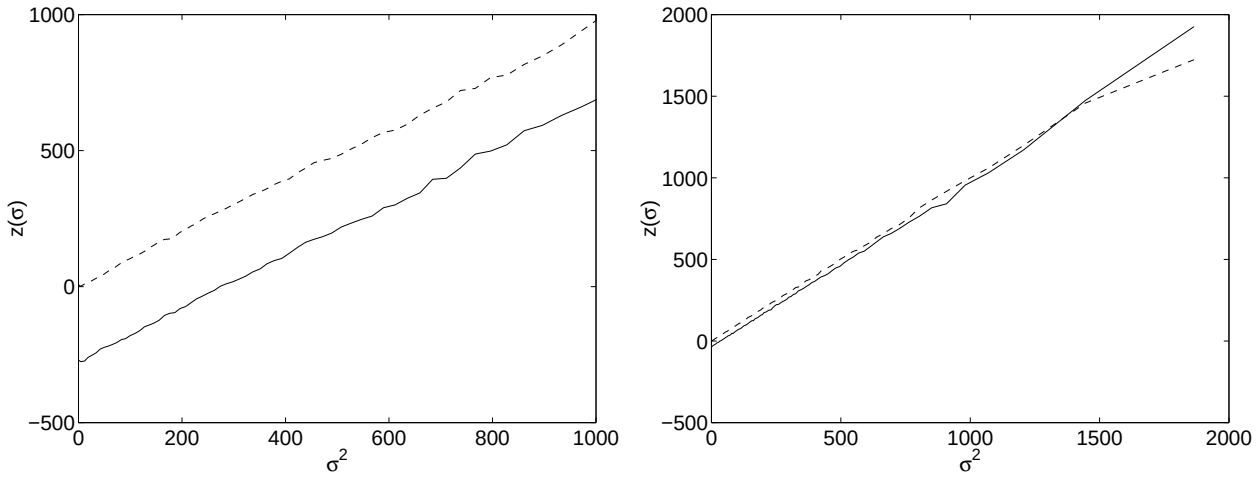


FIG. 5.4.3. Diagnostics $z_\omega(\sigma)$ (trait plein) et $z_T(\sigma)$ (tirets) (équation 5.4.7) pour des champs de traceur passif T et de vorticité ω aléatoires et de même spectre. (a) Spectre concentré autour du nombre d'onde $k = 10$. (b) Spectre étalé, de distribution $Z(k) = Z_T(k) \propto k^{-1}$

Cet effet est nettement plus marqué pour le spectre concentré autour d'un nombre d'onde (figure 5.4.3a) que pour le spectre étalé (figure 5.4.3b). Nous mettons en évidence ici une propriété cinématique de la vorticité : sa connexion avec la vitesse, qui se traduit par les corrélations entre le gradient de vorticité et le tenseur N, modifie ses propriétés de cascade par rapport à celle d'un traceur passif, pour lequel ces corrélations sont absentes. Cet effet est fortement dépendant de la façon dont l'enstrophie est répartie entre les échelles : si elle est très concentrée autour d'un nombre d'onde, il est maximal. En revanche, si le spectre est étalé, l'effet diminue fortement.

En particulier pour un spectre d'enstrophie en k^{-1}, on observe qu'il est quasi-nul. Or c'est justement vers cette pente que tend le spectre d'enstrophie dans une turbulence en déclin et dans une cascade stationnaire d'enstrophie. De plus, longtemps après l'instant initial, le traceur passif a acquis une corrélation avec le champ de vitesse qui fait que la relation (5.4.6) n'est plus valable. On doit donc s'attendre à ce que la différence mise en évidence par le diagnostic $z(\sigma)$ diminue lorsque la turbulence se développe.

C'est ce que nous avons mesuré, en utilisant cette fois les instants finaux des trois simulations indiquées plus haut. Pour la simulation «LARGE», nous avons attendu 70 temps de retournement ; la simulation «SMALL» est analysée au bout d'environ 100 temps de retournement. La figure 5.4.4 présente, en plus du diagnostic au second ordre $z(\sigma)$, la vitesse de cascade conditionnée par σ :

$$h(\sigma) \equiv \frac{E\left(\mathrm{d}q^2/\mathrm{d}t\,;\,\sigma\right)}{E\left(q^2\,;\,\sigma\right)}$$

qui n'est plus nulle maintenant que les deux cascades sont bien développées. Dans le champ «LARGE», la quantité $h(\sigma)$ fait apparaître une petite différence entre le traceur passif et la vorticité. Cependant on ne la retrouve pas dans les deux autres expériences.

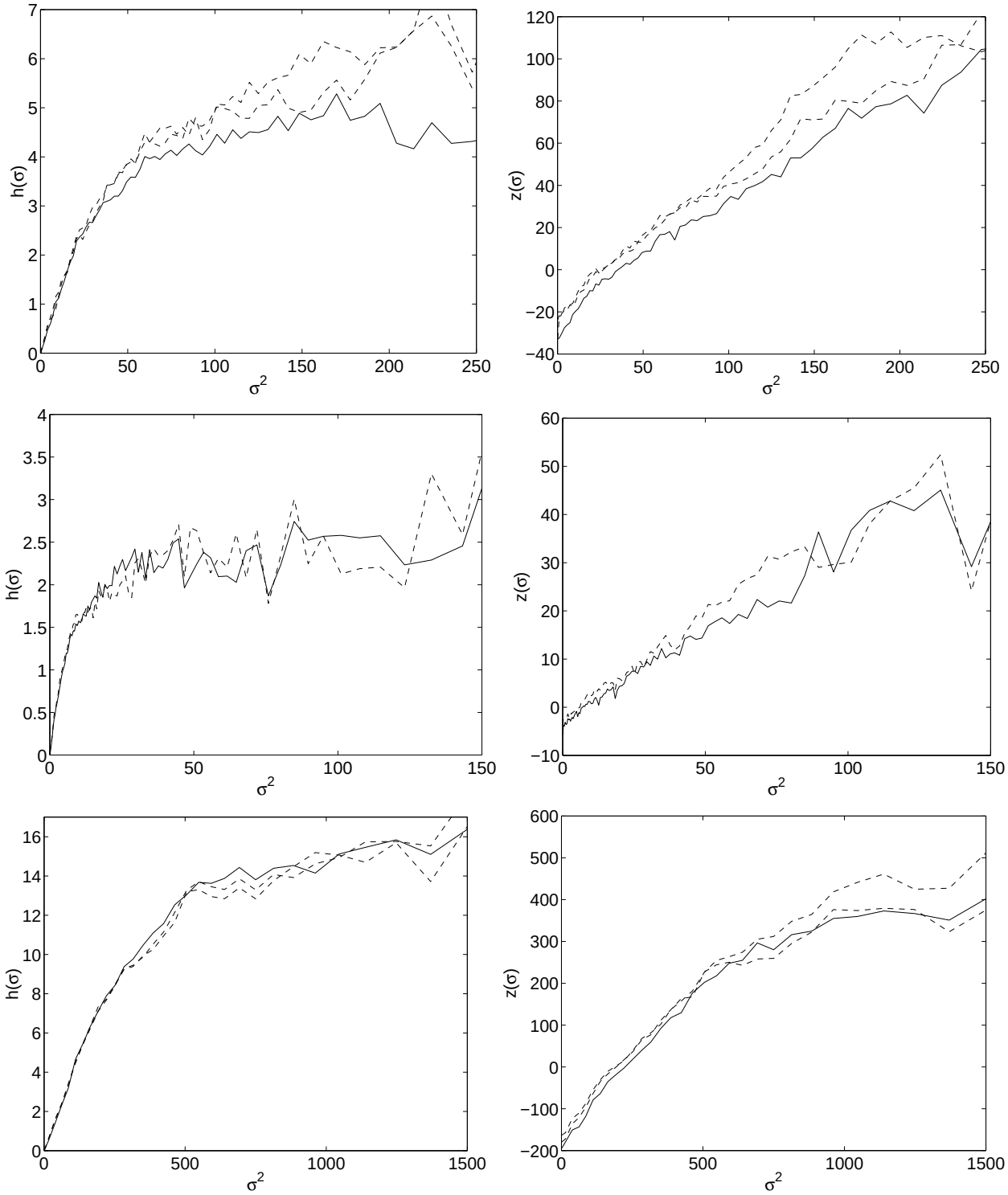


FIG. 5.4.4. Diagnostics de cascade conditionnés par la déformation σ, pour la vorticité (trait plein) et le traceur passif (tirets) . De haut en bas : simulation en déclin «LARGE», simulation en déclin «SMALL» et simulation forcée stationnaire. Gauche : $h(\sigma) = E\left(\mathrm{d}q^2/\mathrm{d}t\,;\,\sigma\right)/E\left(q^2\,;\,\sigma\right)$. Droite : $z(\sigma) = E\left(\mathrm{d}^2q^2/\mathrm{d}t^2\,;\,\sigma\right)/E\left(q^2\,;\,\sigma\right)$. Dans les simulations en déclin, l'enstrophie a diminué par rapport à l'instant initial, d'où les valeurs moins élevées prises par σ^2 ici que dans la figure 5.4.3.

En ce qui concerne le diagnostic au deuxième ordre $z(\sigma)$, on constate que $z_T(\sigma) \neq \sigma^2$, ce qu'on peut attribuer aux corrélations qui se forment entre le traceur passif et le champ de vitesse. La différence entre $z_T(\sigma)$ et $z_\omega(\sigma)$ qui existait à l'instant initial de la simulation «LARGE» a considérablement diminué. Ainsi, alors que les deux cascades présentaient initialement une différence mesurable, celle-ci (telle que mesurée par ces diagnostics) se réduit lorsque la turbulence se développe, probablement sous l'effet combiné de la répartition de l'enstrophie entre échelles et des corrélations qui se développent entre le champ de traceurs passif et la vitesse. Dans l'expérience SMALL, la différence déjà initialement insignifiante entre $z_T(\sigma)$ et $z_\omega(\sigma)$ (figure 5.4.3b) et le reste aux instants ultérieurs. Enfin, la superposition parfaite des courbes $z_T(\sigma)$ et $z_\omega(\sigma)$ dans l'expérience forcée nous oblige à conclure que s'il existe une différence qui persiste dans la turbulence développé, elle doit être mise en évidence par d'autres quantités.

5.4.4. Moyennes conditionnées par la rotation effective. Nous venons de voir que la différence entre la dynamique du traceur passif et celle de la vorticité était beaucoup plus visible, dans le cas gaussien, lorsque le spectre était concentré autour d'un nombre d'onde k_0. Ce cas correspond à une relation linéaire entre la fonction de courant ψ et la vorticité :

$$\omega = -\Delta\psi = k_0^2\psi.$$

Dans un champ turbulent, une telle relation n'est pas vérifiée globalement. En revanche, elle peut être vérifiée localement dans une structure cohérente : c'est d'ailleurs un moyen largement utilisé de les caractériser. Aussi on peut légitimement supposer que la différence que nous cherchons sera maximale dans ces structures cohérentes.

S'il est difficile d'identifier les structures cohérentes, nous disposons en revanche d'un critère simple pour déterminer approximativement les domaines elliptiques : si la rotation effective domine la rotation, on est dans un domaine elliptique ; si la déformation domine, on est dans un domaine hyperbolique. Cette compétition est mesurée par le paramètre sans dimension r (équation (3.2.14)) :

$$r \equiv \frac{\omega + 2\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t}{\sigma}$$

Ainsi la différence entre les deux dynamiques devrait être plus visible dans les régions où $|r| \gg 1$. Pour le savoir, nous calculons maintenant les moyennes conditionnées par r :

$$\begin{aligned} h(r) &\equiv \frac{E\left(\mathrm{d}q^2/\mathrm{d}t\,;\,r\right)}{E\left(q^2\,;\,r\right)} \\ z(r) &\equiv \frac{E\left(\mathrm{d}^2q^2/\mathrm{d}t^2\,;\,r\right)}{E\left(q^2\,;\,r\right)} \end{aligned}$$

La figure 5.4.5 présente ces diagnostics calculés dans les trois simulations. Ils sont tracés en fonction non de r mais de $\alpha(r) \equiv 1/(1+r^2)$ qui a l'avantage d'être compris entre 0 et 1. Ainsi les domaines elliptiques correspondent à $\alpha < 1/2$. Nous voyons ici l'intérêt de considérer la dérivée lagrangienne seconde du gradient. En effet, les différence traceur passif-vorticité sur la dérivée première sont très faibles, alors que la dérivée seconde fait apparaître une différence

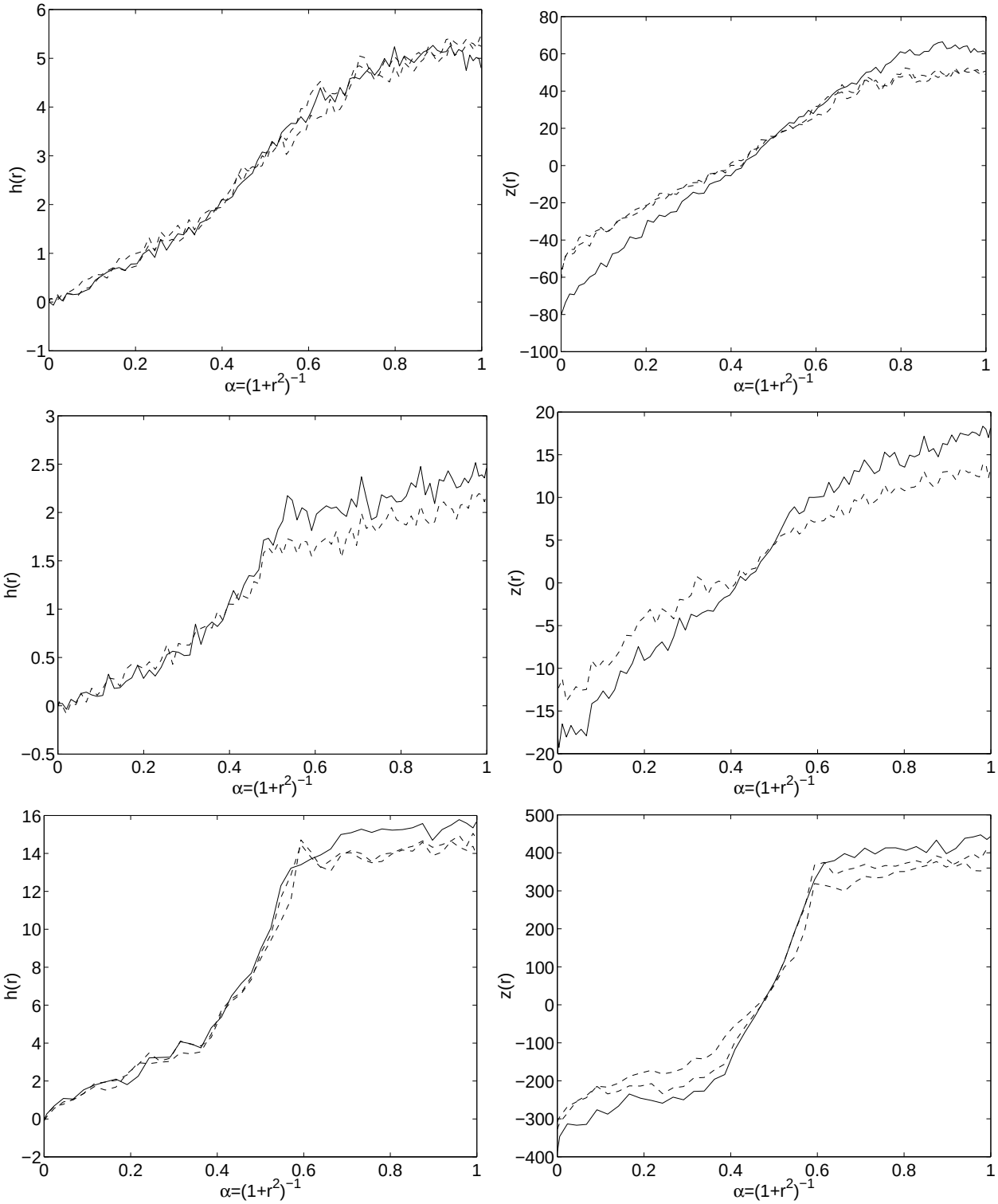


FIG. 5.4.5. Diagnostics de cascade conditionnés par le rapport r entre rotation effective et déformation, pour la vorticité (trait plein) et le traceur passif (tirets). De haut en bas : simulation en déclin «LARGE», simulation en déclin «SMALL» et simulation forcée stationnaire. Gauche : $h(r) \equiv E\left(\mathrm{d}q^2/\mathrm{d}t\,;\,r\right)/E\left(q^2\,;\,r\right)$. Droite : $z(r) \equiv E\left(\mathrm{d}^2q^2/\mathrm{d}t^2\,;\,r\right)/E\left(q^2\,;\,r\right)$. L'abscisse est $\alpha(r) \equiv 1/(1+r^2)$.

assez nette dans les simulations en déclin pour les valeurs extrêmes de α, c'est-dire-dans les domaines fortement elliptiques ou fortement hyperboliques.

Cependant, la différence mise en évidence dans la situation de déclin ne se retrouve pas dans le champ forcé. On peut donc douter de sa robustesse aux temps longs.

5.4.5. Moyennes conditionnées par le paramètre s. Il apparaît que le paramètre r ne suffit pas à définir des régions de l'espace où les cascades de traceur passif et de vorticité présentent une différence robuste. Or dans les régions elliptiques, les propriétés d'alignement des gradients dépendent aussi du second paramètre sans dimension s (équation 3.2.15) :

$$s \equiv \frac{1}{\sigma^2}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$$

En particulier, lorsque $s \gg 1$, le gradient de traceur tend à s'aligner avec un axe propre du tenseur N, tenseur qui intervient dans la dérivée seconde de la norme du gradient (équations 3.2.17 et 5.4.3). Ceci nous a incités à examiner les moyennes de $\mathrm{d}q^2/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}^2q^2/\mathrm{d}t^2$ conditionnées par s et limitées aux domaines elliptiques ($|r| > 1$).

Nous calculons donc les quantités :

$$\begin{aligned} h(s) &\equiv \frac{E\left(\mathrm{d}q^2/\mathrm{d}t\,;\,s\right)_{|r|>1}}{E\left(q^2\,;\,s\right)_{|r|>1}} \\ z(s) &\equiv \frac{E\left(\mathrm{d}^2q^2/\mathrm{d}t^2\,;\,s\right)_{|r|>1}}{E\left(q^2\,;\,s\right)_{|r|>1}} \end{aligned}$$

La figure 5.4.6 présente ces diagnostics en fonction non de s mais de $\beta(s) \equiv 1/(1+s^2)$, à nouveau pour garder ce paramètre dans un intervalle borné. Ici encore, la différence mise en évidence par la dérivée première ne peut pas être considéré comme significative. En revanche, la dérivée seconde présente une différence qui cette fois persiste dans la simulation forcée. On peut vérifier que les deux courbes correspondant aux deux traceurs passifs sont quasiment confondues et bien distinctes de la courbe correspondant à la vorticité. Elles sont systématiquement situées au-dessus de celle-ci. Ceci indique que le gradient de vorticité s'aligne plus facilement avec l'axe propre de N (correspondant à la valeur propre négative) que ne le fait le gradient d'un traceur passif.

Nous avons aussi calculé ces diagnostics dans les domaines hyperboliques ($|r| < 1$) ou sans imposer de condition sur r. Dans ce cas on observe aussi une différence $z_T(s) \neq z_\omega(s)$, mais pas l'inégalité $z_T(s) > z_\omega(s)$, ce qui rend l'interprétation de cette différence plus délicate. Nous nous en tiendrons donc dans cette discussion aux diagnostics déjà présentés. Enfin nous présentons pour information en figure 5.4.7 les distributions de probabilité des paramètres α et β dans la simulation forcée. La distribution de α est à peu près homogène, tandis que celle de β est un peu plus concentrée dans les valeurs extrêmes. Il n'y a toutefois pas de valeurs très peu probables, ce qui assure que toutes les moyennes conditionnelles sont significatives.

Nous avons mis en évidence un certain nombre de différences entre les propriétés d'un traceur passif et de la vorticité. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur la première et

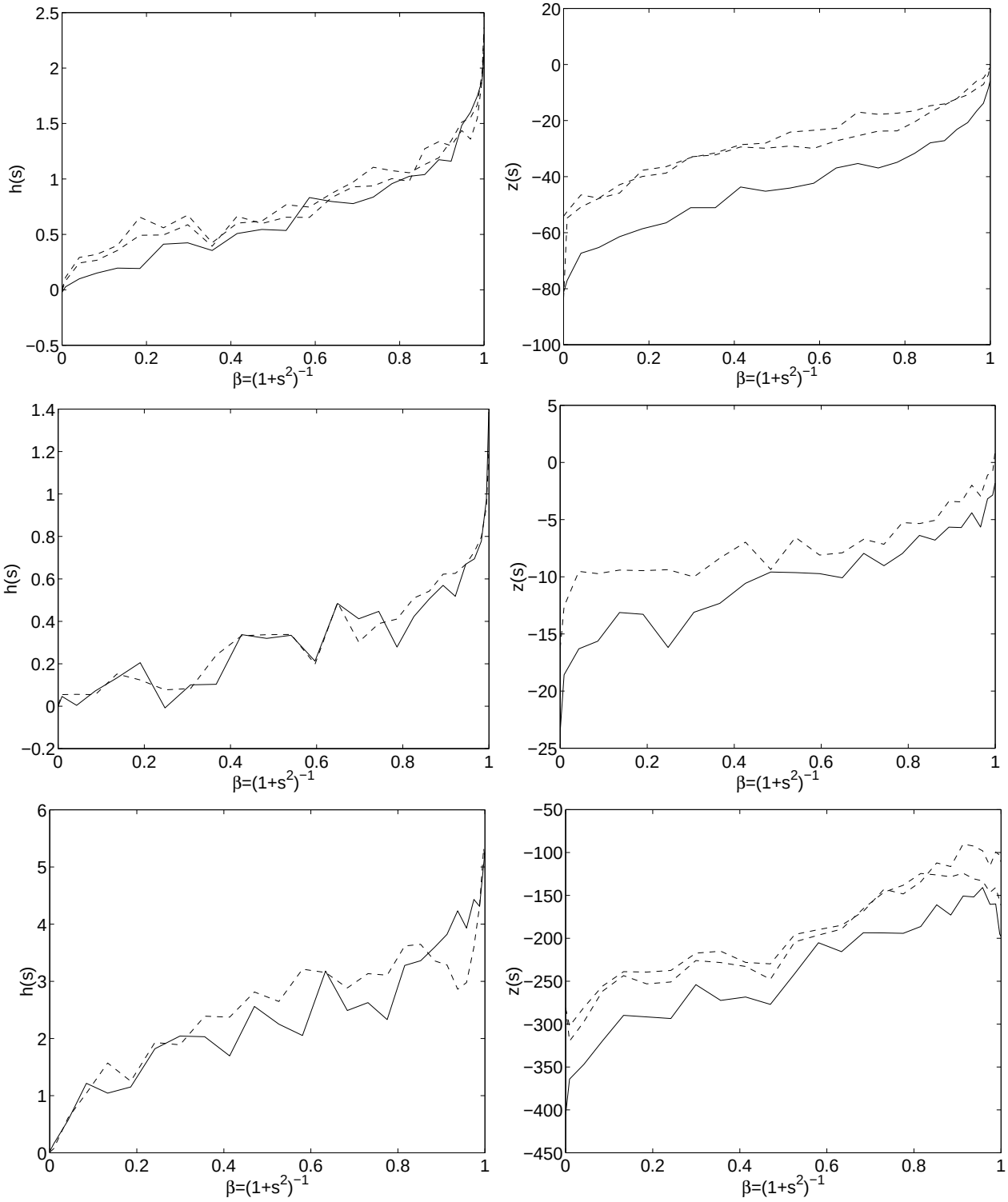


FIG. 5.4.6. Diagnostics de cascade limités aux domaines elliptiques ($|r| > 1$) et conditionnés par le rapport s entre la déformation et sa dérivée lagrangienne, pour la vorticité (trait plein) et le traceur passif (tirets). De haut en bas : simulation en déclin «LARGE», simulation en déclin «SMALL» et simulation forcée stationnaire. Gauche : $h(s) = E\left(\mathrm{d}q^2/\mathrm{d}t\,;\, s\right)/E\left(q^2\,;\, s\right)$. Droite : $z(s) = E\left(\mathrm{d}^2q^2/\mathrm{d}t^2\,;\, s\right)/E\left(q^2\,;\, s\right)$. L'abscisse est $\beta(s) \equiv 1/(1+s^2)$.

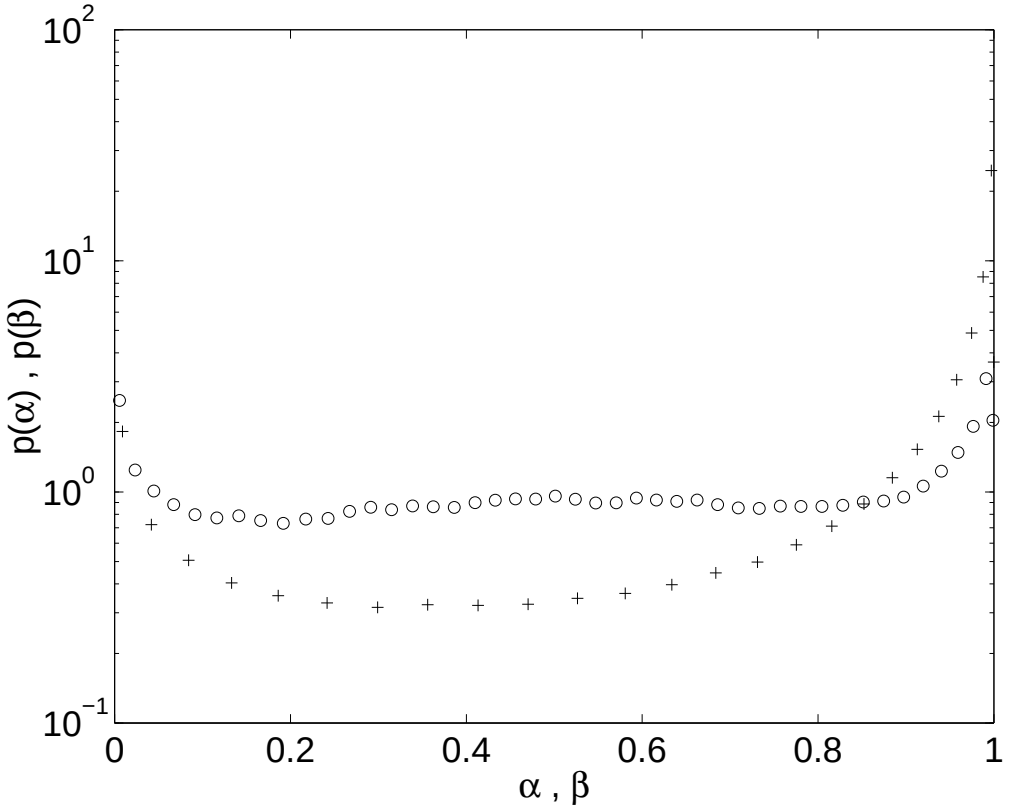


FIG. 5.4.7. Distribution de probabilité des paramètres α (cercles) et β (croix) dans la simulation forcée.

surtout la deuxième dérivée lagrangienne du carré du gradient de ces traceurs, suivant en cela l'interprétation de la cascade de traceur comme étant un processus créateur ou destructeur de gradients.

Ces différences apparaissent lorsque l'on calcule des moyennes de ces dérivées lagrangiennes, conditionnées par des paramètres adéquats[9]. Une première différence a été mise en évidence par les statistiques conditionnées par la déformation σ. Cette différence est de nature cinématique, c'est-à-dire qu'on peut l'observer sur des champs aléatoires. Elle est forte si le spectre de vorticité est concentré. S'il est étalé ou si la turbulence se développe, elle disparaît. Elle ne répond donc pas vraiment à la question initiale, qui visait à quantifier une différence entre les deux dynamiques turbulentes. En revanche elle démontre une tendance cinématique du gradient de vorticité à s'aligner avec l'axe propre «négatif» de N, tendance se traduisant par l'inégalité $z_\omega < z_T$.

Cette première observation confirme l'idée assez naturelle que la différence entre les deux dynamiques doit être la plus importante dans les structures cohérentes. Cette idée avait déjà été confirmée par des méthodes totalement différentes [**2**]. Pourtant l'étude des moyennes conditionnées par le paramètre r, qui distingue les domaines elliptiques des domaines hyperboliques n'a pas permis de mettre en évidence de façon convaincante une différence qui subsiste dans une turbulence stationnaire.

[9]Nous n'avons employé que des grandeurs «objectives», c'est-à-dire invariantes par changement de référentiel galiléen ou en rotation.

Finalement, c'est en conditionnant par le paramètre s que l'on peut mettre en évidence une telle différence. Ceci confirme l'importance de cette quantité pour la dynamique des domaines elliptiques. Il apparaît ainsi que dans ces domaines le gradient de vorticité et celui de traceur passif ne réagissent pas de la même façon aux fluctuations de la déformation σ, que mesure s. Le gradient de vorticité s'aligne mieux que le gradient de traceur passif avec l'axe propre «négatif» de N, suivant en cela la tendance cinématique mise en évidence en premier.

En tout état de cause, il reste que la différence mise en évidence est ténue. Il apparaît à la suite de cette étude qu'assimiler la vorticité à un traceur passif reste une bonne approximation, en particulier dans les domaines hyperboliques.

Article soumis à *Journal of Fluid Mechanics*

CHAPITRE 6

Prolongements

6.1. Application à la diffusivité efficace

6.1.1. Définition. La diffusivité efficace [**76, 77**] est une quantité de diagnostic utilisée pour quantifier le mélange à travers une isoligne de traceur, notamment en géophysique pour identifier des barrières au transport [**77, 78, 42**]. Elle apparaît lorsque l'on exprime l'équation d'advection-diffusion dans des coordonnées liées aux isolignes de traceur au lieu des coordonnés spatiales. Nous rappelons son interprétation dans le contexte géophysique, avant de voir comment on peut modifier sa définition en faisant intervenir les diagnostics de la cascade de traceur.

Autour d'un minimum absolu du champ de traceur, chaque isoligne de traceur $T(\overrightarrow{x},t)=\Theta$ entoure un domaine d'aire $A(\Theta,t)$. Ceci définit une fonction monotone $A(\Theta,t)$ qui possède une réciproque $\Theta(A,t)$. En exprimant l'équation d'advection-diffusion dans cette nouvelle coordonnée d'aire, il vient [**76**] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial A}\left(\kappa_{eff}\frac{\partial\Theta}{\partial A}\right) \\ \text{où } \kappa^A_{eff} &= \frac{\partial A}{\partial\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\int \eta_T \mathrm{d}\overrightarrow{x}, \\ \text{et } \eta_T &= \kappa\left\|\overrightarrow{\nabla}\theta\right\|^2, \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

où κ est la diffusivité moléculaire et l'intégrale de surface s'entend sur le domaine entouré par l'isoligne. On a ainsi transformé une équation d'advection-diffusion en une équation de pure diffusion dans de nouvelles coordonnées. Si l'on s'intéresse au tourbillon antarctique [**41**], on préférera substituer à la coordonnée d'aire A une latitude équivalente ϕ via la relation

$$A = 2\pi R^2(1-sin\phi)$$

où R est le rayon terrestre. On définit ainsi la diffusivité efficace κ_{eff}, qui a la dimension usuelle d'une surface par unité de temps :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Theta}{\partial t} &= \frac{1}{R\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\kappa^\phi_{eff}\frac{\cos\phi}{R}\frac{\partial\Theta}{\partial\phi}\right) \\ \kappa_{eff} &= \frac{1}{R^2\cos^2\phi}\kappa^A_{eff} \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

La diffusivité efficace κ_{eff} dépend de la latitude ϕ. On imagine bien que la diffusion de Θ sera plus rapide à travers une latitude où elle est importante que si elle est très faible. C'est pourquoi elle permet d'identifier des barrières au transport. Dans le cas du tourbillon antarctique, elle met en évidence la présence de deux zones relativement bien mélangées,

l'intérieur du tourbillon et l'extérieur, séparées par une zone de très faible κ_{eff} , jouant le rôle de barrière .

6.1.2. Extension à la diffusivité de déformation. Nous reprenons ici en géométrie plane la démarche qui amène à définir κ_{eff} en la généralisant au cas d'une diffusivité anisotrope et variable en espace $\kappa_{ij}(\overrightarrow{x})$. Nous nous intéresserons au cas de la SD : $\kappa_{ij} = -l_0^2 \partial_j v_i$.

On peut voir par un raisonnement géométrique **[76]** que :

$$\oint f(\overrightarrow{x},t)\frac{\mathrm{d}s}{\left\|\overrightarrow{\nabla} T\right\|} = \frac{\partial}{\partial\Theta}\int f(\overrightarrow{x},t)\mathrm{d}\overrightarrow{x} \tag{6.1.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= -\oint \frac{\partial T}{\partial t}\frac{\mathrm{d}s}{\left\|\overrightarrow{\nabla} T\right\|} \\ &= -\frac{\partial}{\partial\Theta}\int \frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}\overrightarrow{x}\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

où s est l'abscisse curviligne le long de l'isoligne de traceur, f est une fonction quelconque de l'espace et du temps, et l'intégrale de surface s'entend toujours sur le domaine entouré par l'isoligne. Le traceur obéit à l'équation d'advection-diffusion :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla} T = \partial_i\left(\kappa_{ij}\partial_j T\right) \tag{6.1.5}$$

Le terme d'advection ne modifie pas l'aire $A(\Theta)$ entourée par l'isoligne car le champ de vitesse est incompressible. En injectant (6.1.5) dans (6.1.4), il vient :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\Theta}\int \partial_i\left(\kappa_{ij}\partial_j T\right)\mathrm{d}\overrightarrow{x}.$$

On en déduit, en utilisant le théorème de Stokes :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\Theta}\oint \partial_i T\cdot\kappa_{ij}\cdot n_j \mathrm{d}s,$$

où la normale sortante $\overrightarrow{n}$ est donnée par $\overrightarrow{\nabla} T/\left\|\overrightarrow{\nabla} T\right\|$, d'où :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\Theta}\oint \partial_i T\cdot\kappa_{ij}\cdot\partial_j T\frac{\mathrm{d}s}{\left\|\overrightarrow{\nabla} T\right\|}.$$

En faisant usage une deuxième fois de (6.1.3) puis de la règle $\partial\Theta/\partial t = -(\partial\Theta/\partial A)(\partial A/\partial t)$ il vient finalement :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial A}\left(\kappa_{eff}^A\frac{\partial\Theta}{\partial A}\right) \\ \text{où } \kappa_{eff}^A &= \frac{\partial A}{\partial\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\int \partial_i T\cdot\kappa_{ij}\cdot\partial_j T\mathrm{d}\overrightarrow{x}.\end{aligned} \tag{6.1.6}$$

On reconnaît sous l'intégrale dans la définition de κ_{eff}^A la dissipation de variance de traceur induite par la diffusivité. Si la diffusivité est isotrope, on retrouve (6.1.1). Dans le cas anisotrope

de la SD, ce terme sera la dissipation η_{sd} :

$$\begin{aligned} \eta_{sd} &= \partial_i T \cdot \kappa_{ij} \cdot \partial_j T \\ &= -\frac{l_0^2}{2} \overrightarrow{\nabla} T \cdot S \cdot \overrightarrow{\nabla} T. \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

Dans un domaine borné de surface Σ, nous pouvons reformuler l'expression (6.1.6) en termes de statistiques conditionnelles. En effet ,

$$P(\Theta) \equiv A(\Theta)/\Sigma$$

est la fonction de distribution cumulée de T et

$$p(\Theta) \equiv \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial A}{\partial \Theta}$$

est la densité de probabilité de T . De plus on a :

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} \int \partial_i T \cdot \kappa_{ij} \cdot \partial_j T \mathrm{d}\overrightarrow{x} = p(\Theta) E(\eta\,;\,\Theta),$$

où $E(\eta\,;\,\Theta)$ désigne l'espérance conditionnelle de η relativement à T. Finalement, il vient simplement :

$$\begin{aligned} \kappa_{eff}^A &= \Sigma^2 \tau_{eff}^{-1}, \\ \tau_{eff}^{-1} &= E(\eta\,;\,\Theta) p(\Theta)^2. \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

La quantité τ_{eff} peut être interprétée comme un temps efficace de cascade. Elle est invariante par rapport à tout changement monotone de variable $T \mapsto g(T)$. Ceci reflète le fait que c'est plus une propriété du champ de vitesse que du traceur lui-même, utilisé comme révélateur de ses propriétés de dispersion.

Étant donné un champ de traceur et connaissant la diffusivité κ, il est possible de calculer le champ de diffusivité efficace et ainsi de distinguer le régions de fort mélange (forte κ_{eff}, τ_{eff} court) des barrières (faible κ_{eff}, τ_{eff} long). Nous présentons en figure 6.1.1 la diffusivité efficace calculée[1] dans l'expérience forcée du 4.2.3. Nous nous concentrons sur le tourbillon[2] de droite de la figure (4.2.2). On distingue nettement deux zones : alors qu'à l'extérieur du tourbillon le mélange est efficace (fort τ_{eff}^{-1}), l'intérieur est caractérisé par une quasi-absence de mélange (très faible τ_{eff}^{-1}). Contrairement au cas du tourbillon stratosphérique **[41]** où l'intérieur est bien mélangé et est séparé de l'extérieur par une barrière, c'est tout l'intérieur du tourbillon qui fait ici obstacle au mélange. La différence tient peut-être au fait que la structure interne de ces deux tourbillons est en fait assez différente : ici l'intérieur du tourbillon est quasiment en rotation solide, alors que l'intérieur du tourbillon stratosphérique présente un cisaillement important. Nous voyons ici les limites de l'approximation bidimensionnelle en tant que modèle d'écoulement géophysique.

Dans un contexte géophysique, parler de diffusivité moléculaire n'a pas de sens dans la mesure où l'on manipule des données dont la résolution est au mieux de l'ordre de plusieurs

[1] avec une diffusivité isotrope et en géométrie plane (6.1.8).

[2] ceci parce que cette méthode de diagnostic est efficace lorsque les isolignes de traceur sont dans la mesure du possible fermées.

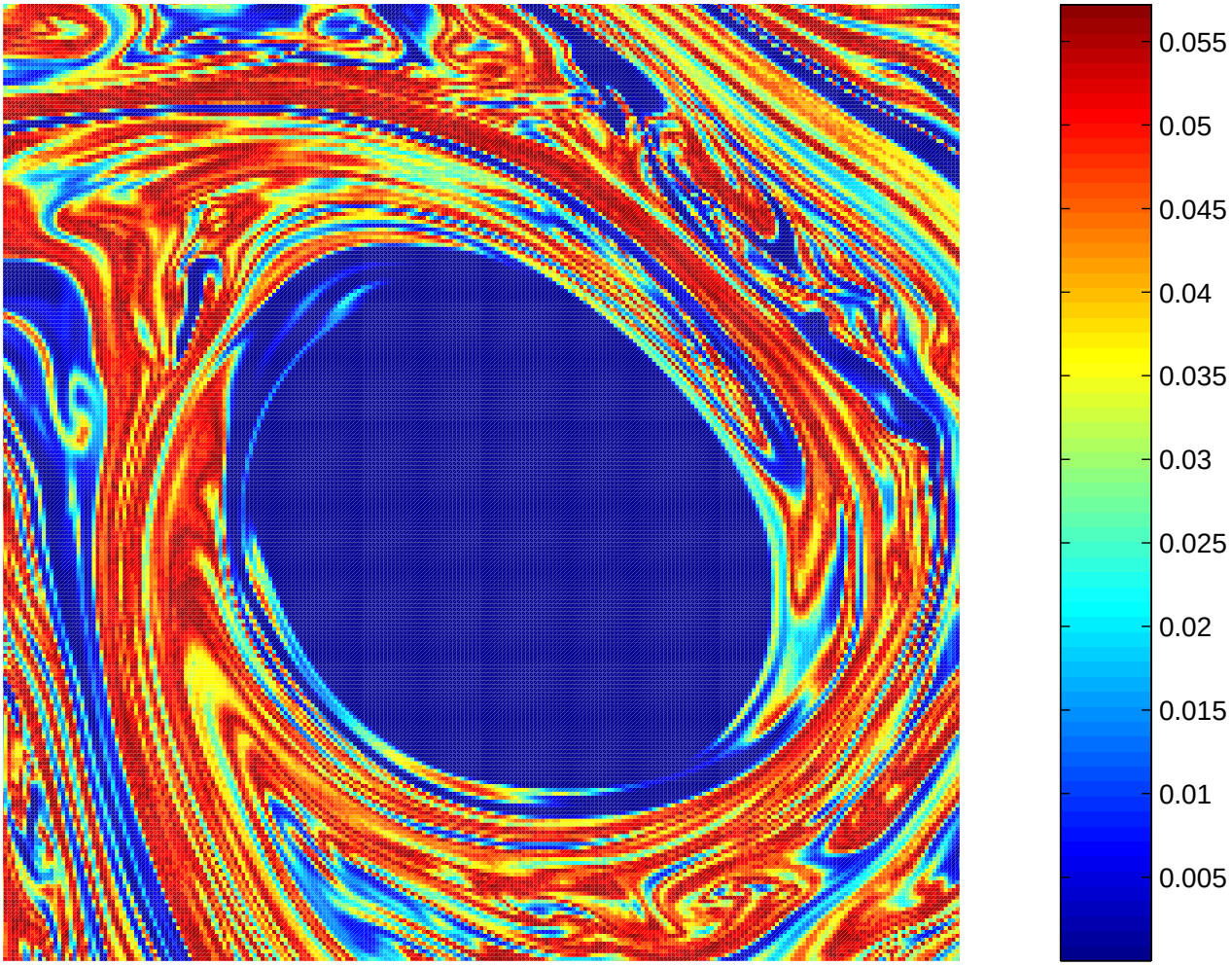


FIG. 6.1.1. Diffusivité efficace $\kappa^A_{eff} = \Sigma^2 \tau^{-1}_{eff}$ autour du tourbillon de droite de la figure (4.2.2). Alors qu'à l'extérieur du tourbillon le mélange est efficace (fort τ_{eff}), l'intérieur est caractérisé par une quasi-absence de mélange (très faible τ^{-1}_{eff}).

dizaines de kilomètres **[107]**. On peut donc tout aussi légitimement utiliser comme diffusivité le tenseur $\kappa_{ij} = -l_0^2 \partial_j v_i$ correspondant à la SD et substituer dans (6.1.8) η_{sd}, défini par (6.1.7), à η_T . Nous présentons en figure 6.1.2a la corrélation entre les temps efficaces de cascade définis d'une part à partir de la dissipation isotrope η (τ_{eff}, équation 6.1.8), d'autre part à partir de la SD :

$$\tau_{sd}^{-1} = E(\eta_{sd}\,;\,\Theta) p(\Theta)^2 \tag{6.1.9}$$

On observe que pour une longueur l_0 ajustée à un demi-pas de maille, les deux quantités coïncident exactement. Le diagramme logarithmique (6.1.2b) permet de mettre en valeur cette proportionnalité pour les petites amplitudes. En particulier, bien que la grandeur η_{sd} ne soit pas définie positive, la diffusivité efficace qu'on en déduit est positive. Ainsi les deux quantités donnent la même image des propriétés de mélange de ce système tourbillonnaire.

6.1.3. Extension au flux local. Nous venons de redéfinir la diffusivité efficace en remplaçant la diffusivité isotrope par la SD, anisotrope. La grandeur importante est la dissipation de variance η , qui définit la diffusivité efficace par l'équation (6.1.8). Or dans le cas de la SD,

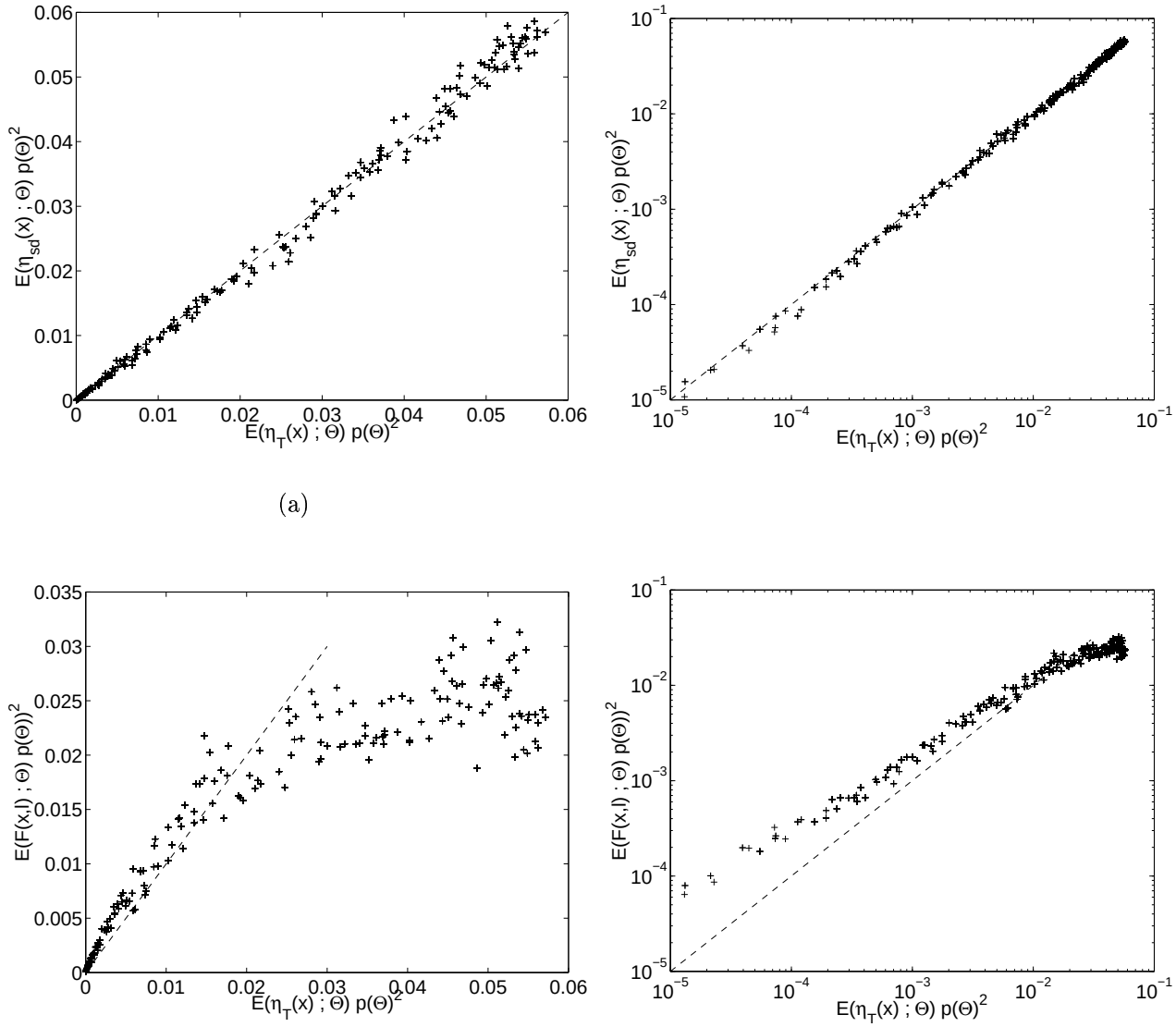


FIG. 6.1.2. Corrélations entre diffusivités efficaces. (a)(b) : τ_{sd}^{-1} (équation 6.1.9) en fonction de τ_{eff}^{-1} (équation 6.1.8). La relation linéaire entre τ_{sd}^{-1} et τ_{eff}^{-1} s'étend sur une large gamme de valeurs, mise en évidence par une échelle logarithmique (b). (c)(d) : τ_F^{-1} (équation 6.1.10) en fonction de τ_{eff}^{-1}.

celle-ci est proportionnelle au taux de croissance du gradient de traceur, diagnostic local de la cascade du traceur. On peut donc tenter de la remplacer par un autre diagnostic, le flux local $F(\overrightarrow{x}, l)$.

Ce choix permet de choisir l'échelle l à laquelle nous analysons les propriétés de transport de l'écoulement, contrairement aux deux précédents qui sont focalisés sur les plus petites échelles résolues. Comme en 4.2.3, nous avons pris pour l une échelle convective valant 8 pas de maille. Nous présentons en figure 6.1.2cd la corrélation entre les temps efficaces définis d'une part à partir de la dissipation isotrope η_T (τ_{eff} , équation 6.1.8), d'autre part à partir du flux local :

$$\tau_F^{-1} = E\left(F(\overrightarrow{x}, l)\,;\,\Theta\right) p(\Theta)^2 \tag{6.1.10}$$

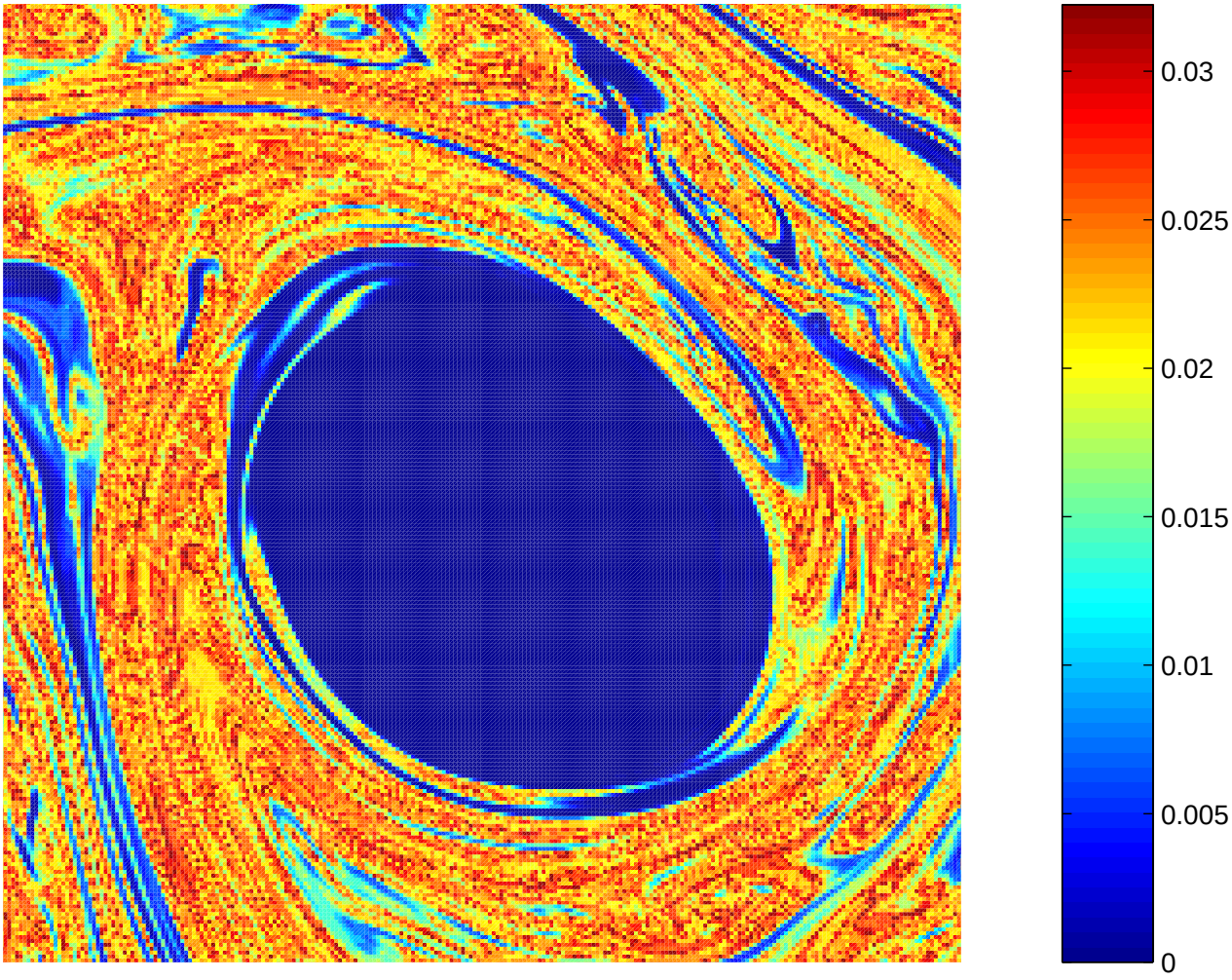


FIG. 6.1.3. Diffusivité efficace modifiée, où le flux local $F(\overrightarrow{x}, l)$ remplace la dissipation (équation 6.1.10).La structure spatiale de τ_{eff}^{-1} est cohérente avec l'image d'un tourbillon imperméable au transport donnée par la figure 6.1.1.

Premièrement, il apparaît là aussi que τ_F est partout positif. À nouveau, cela n'était pas garanti puisque F prend des valeurs positives et négatives. Ainsi la tendance globale à la cascade directe est observée ici de façon plus locale sur des moyennes le long d'isolignes de traceur. En particulier, cela montre qu'à l'intérieur du tourbillon il y a compensation presque exacte entre les quartiers de cascade directe et les quartiers de cascade inverse observés en 4.2.3. Deuxièmement, la corrélation observée sur la figure (6.1.2cd) n'est plus linéaire. Ceci traduit le fait que $F(\overrightarrow{x}, l)$ mesure les propriétés de transport à l'échelle l et non à l'échelle diffusive. Ces propriétés peuvent être différentes. Néanmoins la structure spatiale de τ_{eff}^{-1} présentée en figure 6.1.1 reste cohérente avec l'image qualitative d'un tourbillon imperméable au transport.

Dans les deux substitutions que nous avons opérées, la connaissance du champ de vitesse, en plus du champ de traceur, est nécessaire. Cela peut être une difficulté si le champ de traceur provient par exemple d'observations par satellite [**78**]. Ceci n'est pas un problème en revanche si, comme dans [**41, 42**], le champ de traceur est synthétique et calculé à partir du champ de vent. Dans ce cas, pourquoi pourrait-on préférer τ_{sd} ou τ_F à la définition originelle de τ_{eff} ?

Pour τ_{sd}, on pourra préférer sa connexion au processus de croissance des gradients, donc à la cascade «convective»[3], sans référence à une forme particulière de dissipation petite échelle. Dans le même ordre d'idées, on pourra utiliser (comme nous l'avons fait) τ_F en choisissant une échelle l convective, pour obtenir un résultat indépendant du choix de telle ou telle dissipation petite échelle. D'un point de vue pratique, on pourra aussi préférer calculer le flux $F(\overrightarrow{x}, l)$, défini à partir d'incréments, plutôt que les quantités η et η_{sd} , impliquant des gradients plus problématiques numériquement.

[3]par opposition à diffusif, comme inertiel s'oppose à dissipatif. Il ne s'agit pas ici de convection.

6.2. Comparaison avec le modèle Euler-α

6.2.1. Formulation. La *strain diffusivity* présente des similitudes avec le modèle Euler-α. On pourra trouver dans [**28**] une discussion complète sur les relations entre le modèle Euler-α et les modèles sous-maille de similarité (auxquels la *SD* s'apparente) mais focalisée sur la dimension trois. Des simulations numériques du modèle Euler-α bidimensionnel sont documentées dans la thèse de Jean-Philippe Laval [**63**]. Nous allons indiquer brièvement ce qu'est ce modèle et ses principales propriétés, afin de mettre en évidence les points communs et les différences avec ce que nous venons de présenter. Ceci nous permettra de reformuler de façon plus compacte les équations (4.4.4) et (4.4.3). Nous verrons ensuite comment il est possible de modifier cette dernière pour en faire une équation dispersive dans l'esprit du modèle Euler-α mais d'une façon adaptée à la dimension deux.

Dans le modèle Euler-α (tridimensionnel) la vitesse obéit à une équation d'Euler modifiée :

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{u} + u_j\overrightarrow{\nabla}v_j + \overrightarrow{\nabla}p = 0, \tag{6.2.1}$$

$$\text{où } (1-\alpha^2\Delta)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}, \tag{6.2.2}$$

où le paramètre α est une longueur. Ainsi la vitesse d'advection $\overrightarrow{v}$ est différente de la quantité de mouvement $\overrightarrow{u}$ qu'elle transporte. Elles sont liées par la relation (6.2.2) qui rend $\overrightarrow{v}$ plus régulière que $\overrightarrow{u}$. Cependant cette équation ne provient pas d'une procédure de type LES [**28**] : elle découle d'un principe variationnel [**44**] où le lagrangien de l'équation d'Euler, qui n'est autre que l'énergie, a été remplacé par la pseudo-énergie :

$$\begin{aligned} E_\alpha &\equiv \frac{1}{2}\int \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V} \\ &= \frac{1}{2}\int \left(v^2 + \alpha^2\left\|\nabla\overrightarrow{v}\right\|^2\right)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V}, \end{aligned}$$

où V est le volume occupé par le fluide.

Dès lors, cette pseudo-énergie est conservée par l'équation (6.2.1). Il s'agit donc ici d'une équation d'Euler modifiée de façon dispersive et non dissipative. Cette conservation est mise en évidence par la formulation *implicite* [**20**] :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} - \alpha^2\overrightarrow{\nabla}\cdot\widehat{S} + \overrightarrow{\nabla}p = 0 \tag{6.2.3}$$

$$\begin{aligned} \widehat{S} &\equiv \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\left(\Omega S - S\Omega\right) \\ S_{ij} &\equiv \partial_j v_i + \partial_i v_j \\ \Omega_{ij} &\equiv \partial_j v_i - \partial_i v_j. \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Ici $\widehat{S}$ est la *dérivée en corotation* de S. Comme nous sommes ici en trois dimensions, la vorticité est représentée par le tenseur antisymétrique Ω. La dérivée temporelle de (6.2.4) fait référence à (6.2.3), d'où le caractère implicite de cette équation. On obtient la conservation de E_α de la

façon suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \int \overrightarrow{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V} \\
&= \alpha^2 \int \overrightarrow{v} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \widehat{S} \right) \mathrm{d}\overrightarrow{x} \\
&= -\frac{\alpha^2}{2} \int \mathrm{Tr}(S\widehat{S}) \mathrm{d}\overrightarrow{x} \\
&= -\frac{\alpha^2}{4} \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{Tr}S^2 \mathrm{d}\overrightarrow{x} \\
&= -\alpha^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \frac{\left\| \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{v} \right\|^2}{2} \mathrm{d}\overrightarrow{x}.
\end{aligned}$$

Rappelons, pour obtenir la dernière égalité, que :

$$\begin{aligned}
\| \nabla \overrightarrow{v} \|^2 &= \mathrm{Tr} A A^T, \\
&= \frac{1}{4} \mathrm{Tr} S^2 + \frac{\omega^2}{2},
\end{aligned}$$

et qu'en vertu de l'incompressibilité :

$$\int \omega^2 \mathrm{d}\overrightarrow{x} = \int \| \nabla \overrightarrow{v} \|^2 \mathrm{d}\overrightarrow{x}.$$

6.2.2. *Strain diffusivity* et dérivées en corotation. Nous allons montrer que la *SD* correspond simplement à prendre comme tenseur sous-maille

$$\tau = -\frac{l_0^2}{2} \widehat{S}, \tag{6.2.5}$$

mais où la dérivée lagrangienne intervenant dans la dérivée en corotation est définie *explicitement* par l'équation d'Euler :

$$\begin{aligned}
\widehat{S} &\equiv \frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t} - \omega JS \\
\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t} &\equiv -2 \begin{bmatrix} \partial_{xx} - \partial_{yy} & 2\partial_{xy} \\ 2\partial_{xy} & \partial_{yy} - \partial_{xx} \end{bmatrix} P \\
\Delta P &= \frac{\sigma^2 - \omega^2}{2}
\end{aligned}$$

Remarque : la décomposition de $\widehat{S}$ sur la base (S, JS) fait apparaître les paramètres sans dimension r et s introduits par Klein et collaborateurs **[53]** :

$$\widehat{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} S - \left(2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \omega \right) JS = \sigma \left(sS - rJS \right).$$

Ces paramètres sont incontournables dès que l'on forme des quantités qui, comme $\widehat{S}$, sont invariantes par passage dans un référentiel tournant. Ici c'est $\widehat{S}$ lui-même qui est invariant et non seulement sa divergence, comme en 4.4.3. *Fin de la remarque*

Ainsi (4.4.4) pourra s'écrire de façon plus compacte :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{l_0^2}{2}\overrightarrow{\nabla}\cdot\widehat{S} + \overrightarrow{\nabla}\Pi = 0 \tag{6.2.6}$$

Il suffit en fait pour cela de remarquer que $\overrightarrow{\nabla}\cdot \mathrm{D}S/\mathrm{D}t$ dérive d'un gradient et ne contribue donc qu'à la pression :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}\cdot\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t} &= -2\left[\begin{array}{cc}\partial_x & \partial_y\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}\partial_{xx}-\partial_{yy} & 2\partial_{xy}\\ 2\partial_{xy} & \partial_{yy}-\partial_{xx}\end{array}\right]P,\\
&= \overrightarrow{\nabla}(-2\Delta P),\\
&= \overrightarrow{\nabla}(\sigma^2-\omega^2).
\end{aligned}$$

Ainsi prendre $\tau = -\frac{l_0^2}{2}\widehat{S}$ revient (aux termes de pression près) à prendre $\tau = \frac{l_0^2}{2}\omega JS$, c'est-à-dire d'après (4.4.12) à la SD.

De même l'équation de la vorticité (4.4.3) peut se mettre sous forme compacte. En effet celle-ci :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{l_0^2}{2}\overrightarrow{\nabla}\cdot\left((S+\omega J)\overrightarrow{\nabla}\omega\right) = 0$$

se réduit à :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{l_0^2}{2}\overrightarrow{\nabla}\cdot(S\overrightarrow{\nabla}\omega) = 0, \tag{6.2.7}$$

car $\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\omega J\overrightarrow{\nabla}\omega\right) = 0$ (divergence d'un rotationnel). Si l'on pose $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{\nabla}\omega$, la dérivée en corotation de $\overrightarrow{q}$ est :

$$\begin{aligned}
\widehat{\overrightarrow{q}} &\equiv \frac{\mathrm{D}\overrightarrow{q}}{\mathrm{D}t} - \frac{\omega}{2}J\overrightarrow{q},\\
&= -\frac{1}{2}(S+\omega J)^T\overrightarrow{q} - \frac{\omega}{2}J\overrightarrow{q},\\
&= -\frac{1}{2}S\overrightarrow{q}.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} - l_0^2\overrightarrow{\nabla}\cdot\widehat{\overrightarrow{q}} = 0, \tag{6.2.8}$$

qui est l'analogue pour la vorticité de (6.2.6).

Par ailleurs, la formulation (6.2.6) permettre de mettre le bilan d'énergie sous une forme très simple :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} + \overrightarrow{\nabla}\cdot\left((2\Pi - l_0^2\widehat{S})\overrightarrow{v}\right) &= -l_0^2\mathrm{Tr}\left(\widehat{S}\nabla\overrightarrow{v}\right),\\
&= -\frac{l_0^2}{2}\mathrm{Tr}\left(\widehat{S}S\right),\\
&= -\frac{l_0^2}{4}\mathrm{Tr}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}S^2,\\
&= -\frac{l_0^2}{2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\sigma^2.
\end{aligned}$$

Ici encore le symbole $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ désigne la dérivée déduite de l'équation d'Euler (4.4.7). À nouveau, en vertu de l'incompressibilité :

$$\int \sigma^2 \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V} = \int \omega^2 \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V} = 2Z,$$

où Z est l'enstrophie, qui est conservée par l'équation d'Euler. Ainsi le bilan global d'énergie s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{l_0^2}{2}\frac{\mathrm{D}Z}{\mathrm{D}t} = 0. \tag{6.2.9}$$

On voit ainsi que le fait que la *SD* conserve l'énergie est intimement lié à la conservation de l'enstrophie par l'équation d'Euler bidimensionnelle, donc à la propriété bidimensionnelle de non-amplification des gradients de vitesse et à la cascade inverse d'énergie. Il s'agit d'une propriété en quelque sorte «naturelle».

6.2.3. Extension. L'intérêt du modèle Euler-α en trois dimension est que la conservation de E_α limite la croissance des gradients de vitesse donc la formation des petites échelles. En deux dimensions, cette propriété est d'un intérêt limité car l'équation d'Euler conserve déjà $E_\alpha = E + \alpha^2 Z$. C'est plutôt la croissance des gradients de vorticité qu'il s'agirait alors de contrôler. L'équation de la vorticité $\overrightarrow{\zeta} \equiv \mathrm{rot}\,\overrightarrow{u}$ pour le modèle Euler-α s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\zeta}}{\mathrm{d}t} = \left(\overrightarrow{\zeta}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{v}.$$

A deux dimensions, le second membre s'annule. On retrouve la conservation bidimensionnelle de la vorticité[4]. Pour contrôler la croissance des gradients de vorticité, il faudrait construire une équation qui conserve une pseudo-enstrophie Z_α :

$$\begin{aligned} Z_\alpha &\equiv \frac{1}{2}\int \omega\zeta \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V}, \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\omega^2 + \alpha^2 \left\|\overrightarrow{\nabla}\omega\right\|^2\right)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V}. \end{aligned}$$

Ceci peut se faire en rendant l'équation (6.2.8) implicite :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} - \alpha^2\overrightarrow{\nabla}\cdot\widehat{\overrightarrow{q}} &= 0, \\ \overrightarrow{q} &= \overrightarrow{\nabla}\omega, \\ \widehat{\overrightarrow{q}} &\equiv \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t} - \frac{\omega}{2}J\overrightarrow{q}. \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

[4]Il faut bien distinguer ici la vorticité de l'advection ($\overrightarrow{\omega} = \mathrm{rot}\,\overrightarrow{v}$) de la vorticité de la quantité de mouvement ($\overrightarrow{\zeta} = \mathrm{rot}\,\overrightarrow{u}$).

En effet dans ce cas la conservation de Z_α est acquise :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} &= \int \omega \cdot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V},\\ &= \alpha^2 \int \omega \overrightarrow{\nabla} \cdot \widehat{\overrightarrow{q}}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V},\\ &= -\alpha^2 \int \overrightarrow{q} \cdot \widehat{\overrightarrow{q}}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V},\\ &= -\alpha^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \frac{q^2}{2}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V}.\end{aligned}$$

On peut résoudre explicitement (6.2.10) en en prenant le gradient :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t} + \tfrac{1}{2}\left(S+\omega J\right)^T \overrightarrow{q} - \alpha^2 \partial_{ij}\widehat{\overrightarrow{q}} = 0,$$

$$\text{soit} \qquad (1-\alpha^2\partial_{ij})\,\widehat{\overrightarrow{q}} = -\tfrac{S}{2}\overrightarrow{q},$$

ce qui, en reportant dans (6.2.10) donne la forme explicite :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha^2}{2}(1-\alpha^2\Delta)^{-1}\overrightarrow{\nabla}\cdot(S\overrightarrow{\nabla}\omega) = 0 \tag{6.2.11}$$

Cette équation, désormais dispersive, se distingue de (6.2.7) par l'opérateur non-local $(1-\alpha^2\Delta)^{-1}$. Quel est le bilan d'énergie de cette équation ? On a :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_\alpha}{\mathrm{d}t} &= \int \left(-\psi+\alpha^2\omega\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V},\\ &= -\int \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}(1-\alpha^2\Delta)\psi\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V},\\ &= -\int \psi(1-\alpha^2\Delta)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V},\\ &= \frac{\alpha^2}{2}\int \psi\overrightarrow{\nabla}\cdot(S\overrightarrow{\nabla}\omega)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V},\\ &= 0.\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\omega = -\Delta\psi$ et l'égalité

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\int \psi\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{V}.$$

La nullité finale vient de ce que la *SD* conserve l'énergie.

Nous avons ainsi construit un modèle (6.2.11) qui possède deux invariants quadratiques, E_α et Z_α. Formellement, il applique à la vorticité une diffusivité anisotrope et non-locale. Ce modèle est différent du modèle Euler-α puisque il n'a pas les mêmes invariants quadratiques. Ainsi, alors que les équations explicites (6.2.6) et (6.2.8) étaient équivalentes, leurs variantes implicites (6.2.3) et (6.2.10) décrivent des systèmes dispersifs différents. Le deuxième paraît plus approprié à la situation bidimensionnelle car plus à même de contrôler la croissance des gradients de vorticité. Il n'est cependant pas évident qu'on puisse le faire découler d'un principe

variationnel, comme le modèle Euler-α (6.2.3). Enfin, rien n'interdit d'appliquer l'équation (6.2.11) à un traceur passif.

En tout état de cause, il convient de souligner que ces modèles dispersifs seuls ne peuvent pas paramétriser une cascade directe. En effet, justement parce qu'ils conservent E_α (3D) ou Z_α (2D), cette quantité croîtra sans limite dans une situation forcée, d'où une divergence à plus ou moins long terme.

Conclusions et discussion

Nous nous sommes efforcés dans cette thèse d'analyser les cascades turbulentes bidimensionnelles du point de vue de l'espace physique. Ce point de vue est motivé par le caractère organisé de cette turbulence et par l'importance qu'y ont les structures cohérentes. Nous avons notamment montré l'absence d'intermittence dans la cascade inverse d'énergie, y compris dans des situations dominées par ces structures cohérentes [**32**]. Soulignons cependant que les mécanismes de cette cascade restent mal compris, et qu'il reste certainement beaucoup à en apprendre, notamment en ce qui concerne les transferts d'énergie [**4**].

Nous proposons une méthode de diagnostic de la cascade d'un traceur : considérant l'évolution d'un incrément de traceur, nous définissons dans l'espace physique le flux entre échelles de la variance de traceur. Nous nous intéressons ensuite au problème de la paramétrisation du mélange turbulent. Nous justifions l'emploi une paramétrisation anisotrope, que nous baptisons diffusivité de déformation (*strain diffusivity*, SD) [**30**]. Nous relions ses propriétés diffusives aux propriétés géométriques de l'écoulement. La vorticité est en deux dimensions un traceur actif, et la paramétrisation sous-maille pour la vorticité agit sur la vitesse. La cascade inverse d'énergie impose aux paramétrisations admissibles de conserver l'énergie. Nous montrons que la SD conserve l'énergie, et qu'elle est la seule d'une classe de modèles simples.

Nous étudions numériquement les propriétés des outils introduits. Nous montrons que, contrairement à une diffusivité/hyperdiffusivité isotrope, la SD induit une diffusion bien corrélée au flux local de variance de traceur [**31**]. Le filtre effectif qu'elle impose correspond au filtre gaussien à partir duquel elle est calculée. Cependant la réduction de l'erreur commise en cas d'utilisation d'une méthode spectrale et d'un filtre raide n'est pas évidente. Appliquée à la vorticité dans une situation où le forçage est à très petite échelle, la SD démontre en revanche une bien meilleure représentation des grandes échelles qu'une hyperdiffusivité.

Enfin, nous analysons comparativement les propriétés de cascade de la vorticité et d'un traceur passif. Les critères de comparaison reposent sur des moyennes conditionnelles des dérivées lagrangiennes du carré du gradient du traceur. Nous mettons en évidence pour un champ aléatoire une différence cinématique entre traceur et vorticité, dont il subsiste une trace dans des champs turbulents.

Nous avons choisi de nous consacrer plus particulièrement à la cascade du traceur pour les raison évoquées en introduction. Le flux local de variance que nous avons défini à partir de la dynamique des incréments de traceur donne une image surprenante de la cascade du traceur et bien différente de sa représentation spectrale : loin d'être un processus continu de création de petites échelles, c'est un ensemble de flux directs et inverses dont le bilan global, positif, est beaucoup plus faible que les transferts individuels. L'introduction dans la diffusivité d'une

anisotropie reliée à la géométrie de l'écoulement au moyen du gradient de vitesse permet de représenter non seulement les flux directs mais aussi les flux inverses, ce que ne font pas la diffusivité turbulente ou une hyperdiffusivité qui ne peuvent représenter que les flux directs. La SD prolonge jusqu'à l'échelle de la maille du modèle la structure dans l'espace physique de la cascade du traceur. Elle exploite pour cela les alignements privilégiés des gradients, qui sont déterminés par les grandes échelles de l'écoulement. Elle repose en ce sens sur le caractère non-local de la cascade de traceur. Des modèles du type de la SD, calculés au moyen d'un défiltrage, ont été proposés en simulation des grandes échelles de la turbulence tridimensionnelle **[23]** ou de l'advection chaotique **[67]**. Notre contribution aura consisté à mettre en évidence ses propriétés géométriques et sa cohérence avec la cascade de traceur. De notre point de vue, ce sont ces propriétés qui rendent son usage intéressant dans une turbulence bidimensionnelle.

Le problème de la paramétrisation de la vorticité et de la conservation de l'énergie, résolu par la SD, était a priori plus difficile que celui de la paramétrisation d'un traceur passif. Il apparaît aussi plus crucial puisque nous montrons que l'utilisation de la SD dans une situation stationnaire forcée à petite échelle apporte une amélioration notable de la qualité de la simulation, alors que nous n'avions pu montrer de façon convaincante le gain apporté par l'utilisation de la SD pour un traceur passif[5]. La double contrainte de dissipation de l'enstrophie et conservation de l'énergie limite considérablement les paramétrisations admissibles pour la vorticité. Ceci doit en fait être considéré comme un critère utile permettant de rejeter les modèles irréalistes : les modèles ont plutôt tendance à être trop ajustables et trop peu contraints que l'inverse, et le respect des invariances et des symétries a souvent été un guide fructueux en physique. Ici les mérites de la SD sont plus évidents pour la vorticité que pour un traceur passif.

La vorticité est un traceur actif et même très actif. En effet, alors que la température ou la salinité de l'océan sont actifs en rétroagissant sur l'écoulement par les forces d'Archimède qu'elles induisent, la vorticité bidimensionnelle, comme la vorticité potentielle des modèles équilibrés, *est* l'écoulement. Aussi il pouvait paraître paradoxal de ne détecter aucune différence asymptotique entre les dynamiques de la vorticité et d'un traceur passif **[60]**. Nous avons montré que ce n'était pas tout à fait vrai : on peut détecter dans des champs turbulents la trace de la corrélation cinématique entre le gradient de vorticité et le tenseur N. Cependant cette différence est ténue et l'approximation assimilant les deux cascades reste assez bonne, sauf aux échelles comparables à celles des structures cohérentes.

Cette approximation a jusqu'ici été utilisée pour appliquer à la cascade d'enstrophie des résultats obtenus pour la cascade de traceur **[57, 35]**. On peut aussi envisager de s'en servir en sens inverse. En effet c'est bien la vorticité qui pilote les propriétés de transport de l'écoulement : alors qu'un front de traceur passif est le simple résultat de l'advection, un front de vorticité est un constituant de l'écoulement qui peut constituer une barrière infranchissable pour un élément de fluide contraint à conserver sa vorticité. Autrement dit, un écoulement turbulent bidimensionnel ne peut pas mélanger n'importe comment : ce mélange est astreint

[5]Ce gain apparaît en revanche dans [**73**], où une méthode particulaire est employée.

à conserver la vorticité, et indirectement à conserver l'énergie. Une mise en pratique de cette contrainte consisterait à postuler qu'on doit utiliser la même paramétrisation pour un traceur passif et la vorticité. La contrainte de conservation de l'énergie devient alors un guide non seulement pour la paramétrisation de la cascade d'enstrophie mais aussi pour celle du traceur passif. Ce n'est pas la démarche que nous avons suivi dans cette thèse, puisque nous avons d'abord considéré les deux problèmes de façon indépendante, mais on peut voir la SD comme une justification a posteriori d'une telle démarche.

Les résultats présentés ici se limitent à la turbulence bidimensionnelle, qui est un modèle certes utile mais néanmoins limité. L'introduction dans un modèle océanographique d'une diffusivité variable en espace et en temps améliore considérablement le réalisme de ce modèle [**96**]. On peut imaginer alors que l'introduction d'une diffusivité anisotrope comme la SD permettrait une amélioration comparable, d'autant plus qu'elle concernerait des traceurs actifs (température, salinité). Un travail dans cette direction représente un effort conséquent, mais à notre avis justifié.

Dans le même ordre d'idées, on peut se demander dans quelle mesure les outils étudiés ici conservent leur intérêt en turbulence tridimensionnelle. En effet celle-ci est moins contrainte que la turbulence bidimensionnelle car elle ne possède pas de cascade d'enstrophie mais seulement les cascades directes d'énergie et de traceur. Néanmoins la représentation des flux inverses d'énergie y est une question importante [**45**], et la modélisation par une diffusivité turbulente en est aussi incapable en trois dimensions qu'en deux. De fait, l'utilisation d'un modèle analogue à la SD est préconisée[6] par Leonard pour représenter une partie de la cascade d'énergie [**67**]. Dès lors, l'anisotropie introduite par la SD, essentielle en deux dimensions, a toutes les chances de jouer un rôle important pour la paramétrisation du mélange turbulent tridimensionnel d'un traceur. Les propriétés géométriques de cette turbulence, notamment les alignements, sont moins bien connus en trois qu'en deux dimensions, mais jouent certainement un rôle important.

Enfin nous avons suggéré une piste permettant d'utiliser le flux local de variance de traceur pour le diagnostic de barrières au mélange, qui est une préoccupation importante en géophysique. Il s'agit peut-être d'une fausse piste, mais elle mérite certainement d'être explorée un peu plus sur des données géophysiques.

[6]En pratique, un tel modèle ou un modèle proche comme ceux de similarité d'échelles, n'est pas assez dissipatif et est plutôt employé en compagnie d'une diffusivité turbulente [**98**]. On peut faire le parallèle entre ce caractère peu dissipatif et les questions de réversibilité et de stabilité discutés respectivement en 4.4.4 et 5.2.2.

ANNEXE A

Traceurs actif et passif dans l'espace spectral

Dans cette annexe, nous comparons les propriétés spectrales de la vorticité et d'un traceur passif. Cela nous permet par la même occasion de documenter les propriétés de la simulation forcée analysée en 5.4.

La théorie de Kraichnan [**57**] de la cascade d'enstrophie est fondée sur l'idée que celle-ci cascade vers les petites échelles comme un traceur passif. Dans cette phénoménologie, le flux spectral de traceur passif peut être estimé selon :

$$\eta_T = \frac{kZ_T(k)}{\tau_T(k)} \tag{A.0.12}$$

En effet le flux η_T doit être proportionnel au carré du traceur. Le cascade résultant de l'action d'étirement des structures d'échelle plus grandes que $1/k$, le temps de cascade $\tau(k)$ peut alors être estimé en fonction du taux d'étirement dû à ces grandes échelles. La vitesse étant non-divergente, il s'exprime en fonction de l'enstrophie de ces échelles :

$$\begin{aligned} \tau_T(k) &= C_T S(k)^{-1/2}, \\ \text{où } S(k) &\equiv \int_0^k Z(k)\mathrm{d}k. \end{aligned} \tag{A.0.13}$$

Pour un spectre d'énergie autosimilaire $E(k) \propto k^{-\alpha}$ avec $\alpha < 3$, il vient :

$$\begin{aligned} Z(k) &\propto k^{2-\alpha}, \\ \tau_T(k) &\propto k^{\frac{\alpha-3}{2}}, \\ Z_T(k) &\propto k^{\frac{\alpha-5}{2}}. \end{aligned}$$

En particulier pour $\alpha = 5/3$, cette phénoménologie donne le spectre de Corrsin-Obukhov $Z_T(k) \propto k^{-5/3}$ (équation (1.2.7)). Dans la cascade d'enstrophie, assimilant la vorticité à un traceur passif, on trouve

$$Z(k) \propto k^{\frac{\alpha-5}{2}} \propto k^{2-\alpha}$$

d'où $\alpha = 3$, ce qui est précisément la limite à laquelle la loi autosimilaire $\tau_T(k) \propto k^{\frac{3-\alpha}{2}}$ ne tient plus. On peut en fait résoudre le système d'équations (A.0.12, A.0.13) :

$$\tau_Z(k) = \frac{k}{\eta_Z}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}k} = C_Z S(k)^{-1/2},$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}S^{3/2} &= \frac{3\eta_Z}{2C_Z k}, \\
S(k) &= \left(\frac{3\eta_Z}{2C_Z}\log\frac{k}{k_0}\right)^{2/3}, \\
Z(k) &= \left(\frac{3\eta_Z}{2C_Z}\right)^{2/3}\frac{2}{3}k^{-1}\left(\log\frac{k}{k_0}\right)^{-1/3}, \\
E(k) &= \left(\frac{3\eta_Z}{2C_Z}\right)^{2/3}\frac{2}{3}k^{-3}\left(\log\frac{k}{k_0}\right)^{-1/3}, \\
Z_T(k) &= C_T\eta_T k^{-1}\left(\frac{3\eta_Z}{2C_Z}\log\frac{k}{k_0}\right)^{-1/3}.
\end{aligned}$$

La nécessité de ces corrections logarithmiques fait toujours débat [**14, 49, 69**]. Ce qui nous intéresse ici est de comparer pour la vorticité et un traceur passif dans quelle mesure cette approche phénoménologique est valide. D'une part, dans quelle gamme d'échelle $kZ_T(k)S(k)^{1/2}$ et $kZ(k)S(k)^{1/2}$ sont-ils constants ? Et d'autre part, les constantes C_Z et C_T sont-elles égales ?

Nous avons considéré cette question dans une simulation de turbulence forcée stationnaire. En effet il est apparu que dans une situation de déclin, on n'a jamais :

$$\eta_T(k) = C_T k Z(k) S(k)^{1/2}.$$

où le flux spectral $\eta(k)$ dépend de l'échelle dans ce cas instationnaire. La stationnarité est atteinte en ajoutant une dissipation à grande échelle. Pour que la comparaison soit juste, nous l'appliquons aussi au traceur, bien que ce ne soit pas très physique :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \nu\Delta\omega + \alpha\Delta^{-1}\omega + f_\omega \\
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \nu\Delta T + \alpha\Delta^{-1}T + f_T
\end{aligned}$$

Le forçage consiste à garder constant un mode de Fourier donné. Lorsque la dissipation à petite échelle est laplacienne, ce qui correspond à la simulation utilisée en 4.2, 5.4 et 6.1, les spectres sont plus pentus que k^{-1} (figure A.0.1) et on ne peut pas discuter cette phénoménologie. On a tout de même une superposition des spectres d'enstrophie et de traceur à petite échelle, comme dans la situation en déclin de [**60**].

Nous utilisons donc ici une autre simulation avec un hyperlaplacien d'ordre 8. Les résultats sont présentés en figure (A.0.2). Les spectres vérifient la loi autosimilaire théorique sur environ une décade. La loi phénoménologique (A.0.13) est testée en calculant pour chaque nombre d'onde k la quantité $kZ(k)S(k)^{1/2}/\eta$, théoriquement égale à la constante C_Z (C_T pour le traceur). Il apparaît que $kZ_T(k)S(k)^{1/2}/\eta_T$ est constant sur environ une décade, et $kZ(k)S(k)^{1/2}/\eta$ sur une demi-décade seulement. La différence se situe à proximité de l'échelle de forçage. Ce phénomène peut être relié à l'existence de tourbillons d'échelle comparable à celle du forçage, qui inhibent plus la cascade d'enstrophie que celle du traceur. Ce constat rejoint les conclusions du 5.4, bien qu'il ne soit pas possible d'établir un lien rigoureux entre les propriétés spectrales étudiées ici et les propriétés géométriques étudiées en 5.4.

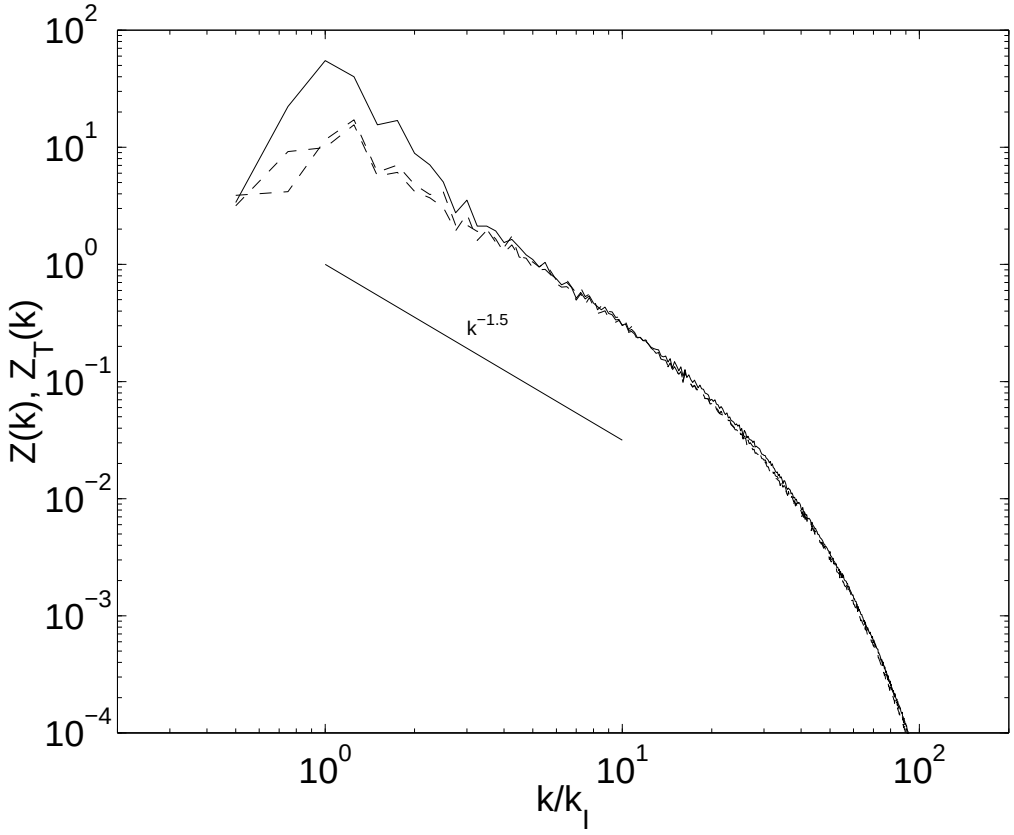
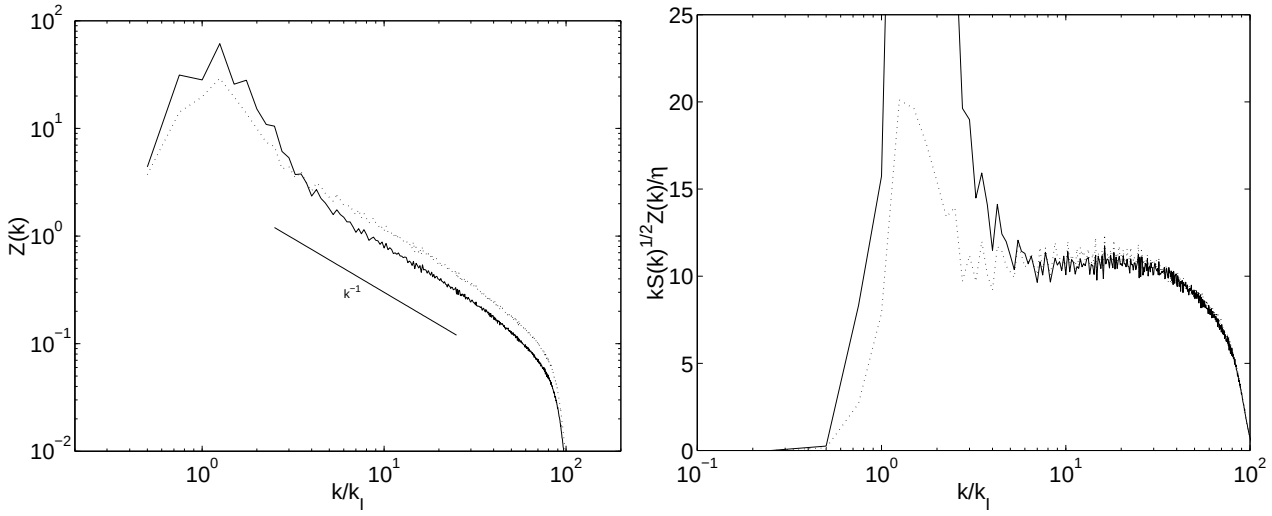


FIG. A.0.1. Spectre d'enstrophie (trait plein) et de traceur passif (pointillés) dans une simulation de turbulence forcée à grande échelle utilisant un laplacien. Les nombres d'onde sont normalisés par l'échelle d'injection $k_I = 4$. Les spectres suivent une loi en $Z(k) \propto k^{-1.5}$ plus raide que la prédiction phénoménologique. Ils se distinguent près du forçage et se rejoignent à petite échelle.

En revanche, au-delà d'une certaine échelle les deux cascades se rejoignent. En effet on observe que les deux constantes C_Z et C_T sont indiscernables dans notre expérience. Ainsi de ce point de vue spectral, les deux cascades ne se distinguent plus dès que l'on se place à une échelle quelque peu éloignée du forçage. Ceci rejoint les observations de **[60]** qui observe, dans une situation de déclin, que les spectres d'enstrophie et de traceur sont identiques à petite échelle.



(a) Spectres d'enstrophie et de traceur

(b) Constantes phénoménologiques

FIG. A.0.2. Phénoménologie de Kraichnan pour la vorticité (trait plein) et pour le traceur passif (pointillés) dans une simulation de turbulence forcée à grande échelle utilisant un hyperlaplacien. Les nombres d'onde sont normalisés par l'échelle d'injection $k_I = 4$. Vorticité et traceur obéissent à la même équation, y compris pour la dissipation grande échelle. (a) Spectres de la vorticité et du traceur, comparés à la loi d'échelle théorique $Z(k) \propto k^{-1}$. La gamme d'échelles inertielles ne permet pas de discuter l'existence de corrections logarithmiques. (b) Constantes phénoménologiques C_Z (trait plein) et C_T (pointillés). La relation phénoménologique (A.0.13) est un peu mieux vérifiée par le traceur que par la vorticité. Les deux constantes ont sensiblement la même valeur.

ANNEXE B

Incréments, ondelettes et flux locaux

Pour définir un flux local de variance (équation (4.2.9)), nous nous sommes appuyés sur une représentation en espace et en échelles réalisée par les incréments $\delta T(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{l})$. Une telle représentation espace-échelle peut aussi être obtenue au moyen d'une décomposition en ondelettes . Des flux locaux d'enstrophie correspondant à cette représentation (transformée en ondelettes continue) ont été proposés par Thierry Philipovitch [**89**]. Nous discutons brièvement ici cette approche. Pour une revue sur l'utilisation des ondelettes en turbulence, on pourra consulter [**37**].

Étant donnée une ondelette analysatrice $\phi(\overrightarrow{x})$, les coefficients en ondelettes de ω sont définis par :

$$\widetilde{\omega}(\lambda, \theta, \overrightarrow{x}) \equiv \int \omega(\overrightarrow{x}')\phi\left(R_\theta \cdot \frac{\overrightarrow{x}' - \overrightarrow{x}}{\lambda}\right) \mathrm{d}\overrightarrow{x}',$$

où R_θ désigne la rotation d'angle θ. Les variables (λ, θ) correspondent à notre variable d'échelle $\overrightarrow{l}$. Inversement, les incréments $\delta\omega$ peuvent être vus comme des coefficients en ondelettes rudimentaires, avec comme ondelette analysatrice $\phi(\overrightarrow{x}) = \delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}) - \delta(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x_0})$, $\overrightarrow{x_0}$ étant un vecteur unitaire. Ces coefficients permettent de définir des spectres locaux $Z(k, \overrightarrow{x})$ qui vérifient un analogue de la relation de Parseval :

$$\begin{aligned} Z \equiv \frac{1}{S}\int \frac{\omega^2}{2}\mathrm{d}\overrightarrow{x} &= \int_0^\infty \mathrm{d}k \int Z(k, \overrightarrow{x})\mathrm{d}\overrightarrow{x}, \\ Z(k, \overrightarrow{x}) &\equiv \frac{k}{SC_\phi k_0^2}\int_0^{2\pi} \left|\widetilde{\omega}(k_0/k, \theta, \overrightarrow{x})\right|^2 \mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

où les constantes k_0 et C_ϕ dépendent de l'ondelette utilisée et S est la surface du domaine d'intégration. Ceci permet de définir un flux local de variance :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z(k, \overrightarrow{x})}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_z(k, \overrightarrow{x})}{\partial k} &= 0, \\ \Pi_z(k, \overrightarrow{x}) &= \int_k^\infty T_z(k', \overrightarrow{x})\mathrm{d}k', \\ T_z(k, \overrightarrow{x}) &= \frac{k}{SC_\phi k_0^2}\int_0^{2\pi} \widetilde{\omega}\left(\frac{k_0}{k}, \theta, \overrightarrow{x}\right)\widetilde{n_\omega}^*\left(\frac{k_0}{k}, \theta, \overrightarrow{x}\right)\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Ici $n_\omega \equiv \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}\omega$ est le terme non-linéaire de l'équation de ω, $\widetilde{n_\omega}$ sa transformée en ondelettes et * la conjugaison. Cette relation est analogue à la définition (1.2.5) du flux spectral.

Le problème de cette définition est que, comme cela est d'ailleurs discuté dans [**89**], elle mélange transferts entre échelles et transferts dans l'espace physique. Pour séparer les transferts dans l'espace physique, il est nécessaire d'ajouter à l'équation d'évolution du spectre local

le terme correspondant, c'est-à-dire la divergence sur $\overrightarrow{x}$ d'un flux dans l'espace physique :

$$\frac{\partial Z(k,\overrightarrow{x})}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_z(k,\overrightarrow{x})}{\partial k} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\Pi}_z(k,\overrightarrow{x}) = 0 \tag{B.0.14}$$

Mais alors cette équation ne suffit pas à déterminer le flux espace-échelles $\left(\Pi_z, \overrightarrow{\Pi}_z\right)$ de façon unique. Philipovitch propose de se ramener à une équation de Poisson en le faisant dériver d'un gradient, mais rien ne justifie cette hypothèse. Dans notre approche, l'équation (4.2.7) est l'équivalent de (B.0.14). Cependant, la forme fonctionnelle du flux y est déduite directement de l'équation d'advection, ce qui permet de le définir sans ambiguïté. Nous résolvons ainsi rigoureusement le problème posé par (B.0.14). Ceci suggère qu'il est nécessaire, pour définir sans ambiguïté le flux $\Pi_z(k,\overrightarrow{x})$, d'écrire explicitement l'équation d'évolution de $Z(k,\overrightarrow{x})$ puis de la mettre sous la forme (B.0.14) à l'aide de manipulations du type de celles que nous avons utilisées, notamment en exploitant les relations entre dérivées par rapport à l'espace et par rapport à l'échelle.

ANNEXE C

Influence des paramétrisations sur les alignements

Les critères utilisés en 5.4 pour comparer les cascades de la vorticité et d'un traceur passif reflètent des propriétés d'orientation des gradients de ces traceurs. Les simulations numériques analysées utilisent toutes une diffusion laplacienne. Nous étudions dans cette annexe l'influence de la paramétrisation employée dans l'équation du transport sur les propriétés d'orientation des gradients de traceur.

Rappelons tout d'abord quelles sont ces propriétés. Nous reprenons les notations de **[53]** (figure C.0.1). Les directions définies par l'écoulement sont :

- la direction compressionnelle S_- correspondant à la valeur propre négative du tenseur de déformation S défini par (3.2.3).
- la direction N_- correspondant à la plus petite valeur propre du tenseur N intervenant dans la dérivée lagrangienne seconde du carré du gradient du traceur (équations (3.2.16,3.2.17).
- la direction P''_- correspondant à la plus petite valeur propre de la Hessienne de la pression. Nous ne considérerons pas cette dernière direction.

Les propriétés théoriques d'alignements sont les suivantes :

- une tendance de $\overrightarrow{q}$ à s'aligner avec S_- **[91]**. Cette tendance est mesurée par la distribution de probabilité de l'angle $\zeta/2 + \pi/4$ entre $\overrightarrow{q}$ et S_-
- dans les domaines hyperboliques (définis par la condition $|r| > 1$, où r est défini par l'équation (3.2.14), la valeur d'équilibre de ζ prédite par **[61]** est $\zeta = \zeta_L \equiv -\arccos(r)$
- dans les domaines elliptiques ($|r| < 1$) **[61]** prédit la valeur la plus probable de ζ comme étant $\zeta_L = \frac{\pi}{2}(1 - \mathrm{sign}(r))$. La direction N_- donne aussi une bonne prédiction de la direction de $\overrightarrow{q}$ dans ce cas. Cette dernière tendance est mesurée par la distribution de l'angle $\zeta - \alpha$.

Nous synthétisons ces propriétés d'alignements sous la forme suivante. Nous divisons l'espace en points hyperboliques et points elliptiques au moyen du critère r . Puis nous calculons les distributions de probabilité de $\zeta + \pi/2$, $\zeta - \zeta_L$ et $\zeta - \alpha$, d'une part dans les domaines hyperboliques et d'autre part dans les domaines elliptiques.

Pour comparer l'influence de différentes paramétrisations, nous calculons ces distributions de probabilité dans trois expériences qui se distinguent uniquement par la paramétrisation utilisée :

- la simulation LARGE, qui utilise une dissipation laplacienne
- une simulation utilisant la SD, notée LARGE_SD
- une simulation utilisant un hyperlaplacien, notée LARGE_H

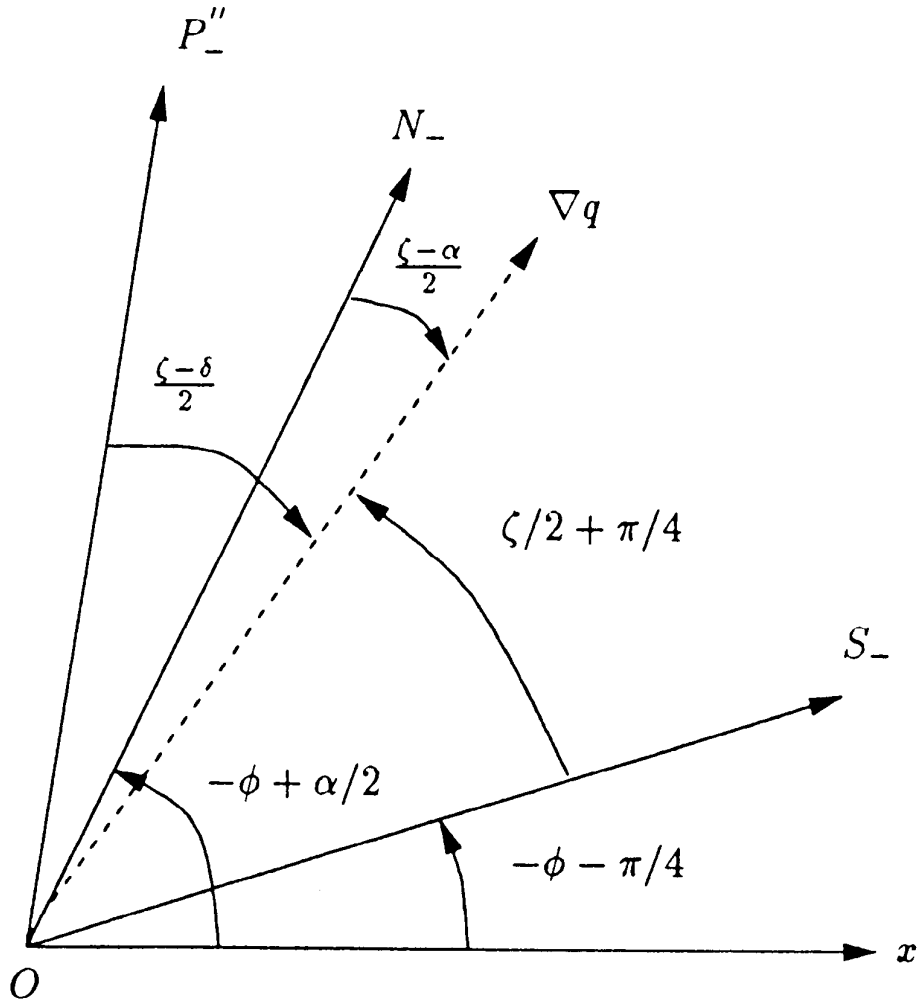


FIG. C.0.1. Orientation relative du gradient de traceur et des directions privilégiées définies par l'écoulement. Il s'agit des directions correspondant à la plus petite valeur propre des tenseurs suivants : tenseur de déformation S, direction compressionnelle S_- ; tenseur N , direction N_- ; Hessienne de la pression P''_- , direction P''_-. Tiré de **[53]**. NB : le traceur est noté q, et son gradient ∇q. Dans nos notations, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{\nabla} T$ est le gradient du traceur T.

Les paramètres correspondants sont récapitulés en annexe D. Ces simulations contiennent, outre la vorticité pour laquelle les résultats sont présentés en figure C.0.2, un traceur passif pour lequel les résultats sont présentés en figure C.0.3.

On obtient dans les deux cas, vorticité et traceur passif, des résultats très semblables. Dans les domaines hyperboliques, seuls les alignements observés avec la dissipation laplacienne se distinguent des deux autres (SD et hyperdiffusivité). L'alignement du gradient de traceur avec la direction S_- et celle prédite par **[61]** est légèrement plus sélectif pour une dissipation laplacienne que pour la SD ou une hyperdiffusivité. Cependant cette tendance n'est pas confirmée dans d'autres simulations. Toutes les autres courbes se superposent parfaitement. En particulier les alignements avec les directions propres de la matrice N, dont dépendent les diagnostics z du 5.4, sont quasiment insensibles à la paramétrisation.

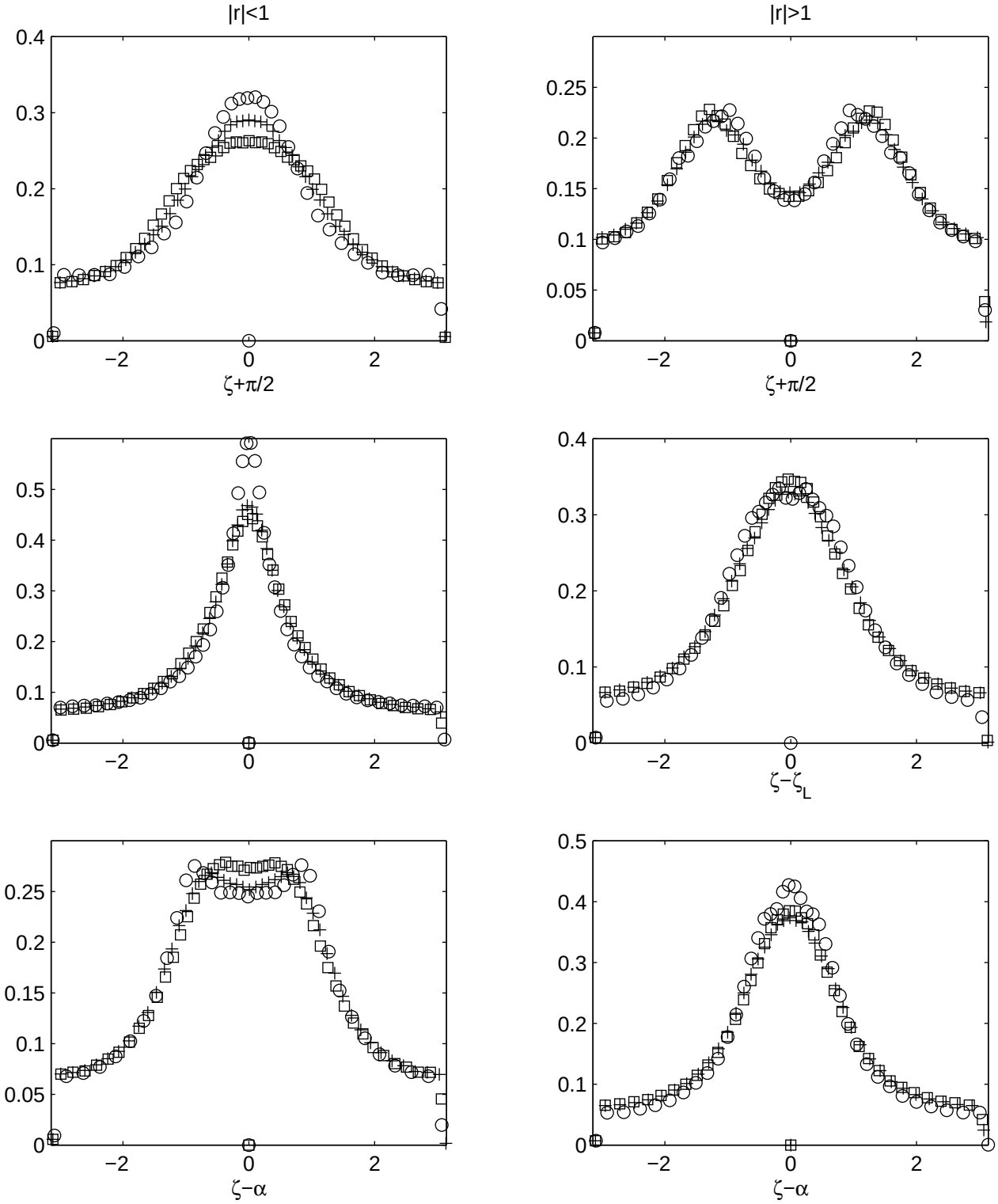


FIG. C.0.2. Probabilités d'alignement du gradient de vorticité avec les directions définies par l'écoulement (figure C.0.1), dans les simulations LARGE (cercles), LARGE_SD (croix) et LARGE_H (carrés), dans les domaines hyperboliques (gauche) et elliptique (droite). De haut en bas : alignement avec la direction compressionnelle, avec la direction prédite par **[61]**, et avec la direction N_-.

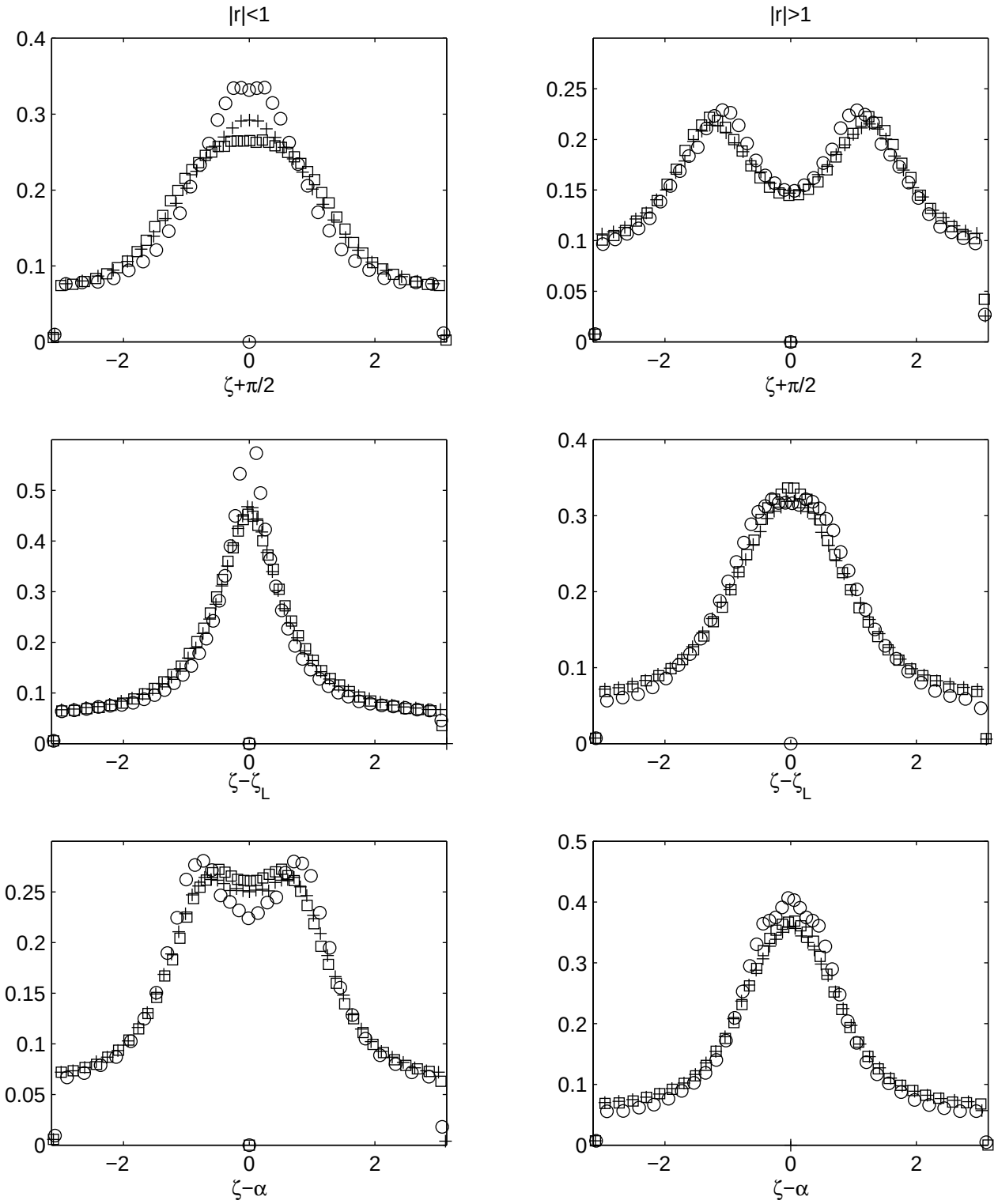


FIG. C.0.3. Probabilités d'alignement du gradient de traceur passif avec les directions définies par l'écoulement (figure C.0.1), dans les simulations LARGE (cercles), LARGE_SD (croix) et LARGE_H (carrés), dans les domaines hyperboliques (gauche) et elliptique (droite). De haut en bas : alignement avec la direction compressionnelle, avec la direction prédite par **[61]**, et avec la direction N_-.

Nous concluons à une faible dépendance de ces alignements en fonction de la diffusivité utilisée. Ce résultat confirme l'interprétation de **[53]** selon laquelle ces alignements sont pilotés par les grandes échelles de l'écoulement via la hessienne de la pression.

ANNEXE D

Méthodes numériques et paramètres

Nos simulations sont faites en utilisant un schéma pseudo-spectral [7] résolvant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial t}+\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\overrightarrow{u}\omega+l_0^2\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}\overrightarrow{\nabla}\omega\right) &= \alpha\Delta^{-1}\omega-\nu^* k_{max}^{-2p}\left(-\Delta\right)^p\omega+f_\omega,\\ \frac{\partial T}{\partial t}+\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\overrightarrow{u}T+l_0^2\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}\overrightarrow{\nabla}T\right) &= \alpha\Delta^{-1}T-\kappa^* k_{max}^{-2p}\left(-\Delta\right)^p T+f_T,\end{aligned}$$

dans un domaine bi-périodique de taille $2\pi\times 2\pi$. Pour une résolution $N\times N$, le pas de maille vaut $\Delta x=\frac{2\pi}{N}$. Les modes de Fourier de vecteur plus grand que $k_{max}=c\frac{N}{2}$sont tronqués à chaque pas de temps. L'erreur d'aliasage est éliminée si $c=2/3$. Le pas de temps Δt doit satisfaire le critère CFL de stabilité numérique : $u_{max}\Delta t<\Delta x$.

Les termes linéaires sont intégrés de façon exacte de l'espace de Fourier. Les termes non-linéaires sont intégrés selon un pas de temps saute-mouton, remplacé régulièrement par un pas de temps Euler. La vitesse, le gradient de vitesse et le gradient de vorticité sont déduits de la vorticité dans l'espace de Fourier. De même le gradient de traceur est déduit du traceur dans l'espace de Fourier. Les produits $\overrightarrow{u}\omega$, $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}\overrightarrow{\nabla}\omega$, $\overrightarrow{u}T$ et $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u}\overrightarrow{\nabla}T$ sont calculés dans l'espace physique.

Le coefficient α contrôle la dissipation d'énergie à grande échelle dans les situations forcées. Les coefficients ν^* et κ^*contrôlent la dissipation à petite échelle. La longueur l_0 contrôle

Section	Simulation/Champ	N	k_{max}	Δt	$l_0/\Delta x$	p	ν^*,κ^*	α	k_I	E	Z
5.2	$\overrightarrow{u}$	2048	682	2e-4		1	640			1.5	150
	T_0					1	10				
5.1, 5.2	$\overrightarrow{v}$	512	170	2e-4		1	40			1.3	90
	T_1					1	30				
	T_2					2	30				
	T_3					8	50				
	θ_1				1	1	30				
	θ_2				1	2	30				
	θ_3				1	8	50				
5.3	DNS.II	512	230	2.5e-5		8	2.8e4	7	40	750	11e4
	128H	128	57	1e-4		8	1000	7	40	100	2e4
	128SD	128	57	1e-4	0.5	8	1000	7	40	450	5e4
5.4, Annexe C	LARGE	1024	340	4e-4		1	50			1.4	140
4.2, 5.4, 6.1	Forcée	1024	460	1e-4		1	50	1	4	16.9	213
Annexe A	Forcée	1024	460	1e-4		8	500	1	4	18.7	265
Annexe C	LARGE_H	1024	340	4e-4		8	50			1.4	140
	LARGE_SD	1024	340	4e-4	2	8	50			1.4	140

TAB. 1. Paramètres numériques des simulations

l'intensité de la *strain diffusivity*. Le forçage f_ω ou f_T consiste à garder constant le mode de Fourier pour le nombre d'onde $\overrightarrow{k_I} = (0, k_I)$. Nous indiquons également la valeur de l'enstrophie Z et de l'énergie E. Nous donnons leur valeur initiale pour les simulations en déclin et leur valeur d'équilibre pour les simulations forcées.

ANNEXE E

Principales notations

		cf équation	page
T	Traceur passif	1.2.1	22
θ	Traceur filtré / résolu	4.3.1	61
$\overrightarrow{u}$	Vitesse	1.1.1	17
$\overrightarrow{v}$	Vitesse filtrée / résolue	4.3.2	61
ω	Vorticité	3.2.4	42
P	Pression	1.1.1	17
Π	Pression filtrée / résolue	4.4.8	67
ν	Viscosité cinématique moléculaire	1.1.1	17
κ	Diffusivité moléculaire	1.2.1	22
E	Énergie	1.1.5	17
Z	Enstrophie	1.1.6	17
Z_T	Variance du traceur	1.2.2	22
ε	Taux de dissipation d'énergie	1.1.8	18
η	Taux de dissipation d'enstrophie	2.1.2	26
η_T	Taux de destruction de la variance du traceur	1.2.3	22
$\overrightarrow{q}$	Gradient de traceur	3.2.1	42
A_{ij}	Gradient de vitesse	3.2.2	42
S_{ij}	Tenseur de déformation	3.2.3	42
σ	Taux de déformation	3.2.5	42
J	Tenseur antisymétrique unité	3.2.4	42
r	Rotation effective adimensionnée	3.2.14	45
s	Fluctuation adimensionnée de la déformation	3.2.15	45
δT	Incrément de traceur	4.2.2	51
$\delta u_{\parallel}$	Incrément de vitesse longitudinal	4.2.3	51
$\delta u_{\perp}$	Incrément de vitesse transverse	4.2.4	51
F	Flux local de variance du traceur	4.2.9	53
$\overrightarrow{x}$	Position		
$\overrightarrow{l}$	Séparation	4.2.2	51
τ_{ij}	Tenseur sous-maille	4.4.9	67

Bibliographie

[1] A. Babiano, C. Basdevant, B. Legras, et R. Sadourny. Dynamique comparée du tourbillon et d'un scalaire passif en turbulence bidimensionnelle incompressible. *C.R.Acad.Sc Paris*, 299 :601–604, 1984.

[2] A. Babiano, C. Basdevant, B. Legras, et R. Sadourny. Vorticity and passive scalar dynamics in two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 183 :379–397, 1987.

[3] A. Babiano, G. Boffeta, A. Provenzale, et A. Vulpiani. Chaotic advection in point vortex models and two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 6(7) :2465–2474, 1994.

[4] A. Babiano et T. Dubos. On universal features of non-homogeneous / non-local two-dimensional inverse energy cascade. *soumis à Phys. Rev. Lett.*, 2001.

[5] A. Babiano, B. Dubrulle, et P. Frick. Scaling properties of two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. E*, 52 :3719, 1995.

[6] A. Babiano, B. Dubrulle, et P. Frick. Some properties of two-dimensional inverse energy cascade dynamics. *Phys. Rev. E*, 55(3) :2693–2706, 1997.

[7] C. Basdevant, B. Legras, R. Sadourny, et M. Beland. A study of barotropic model flows : intermittency waves and predictability. *J. Atmos. Sci.*, 38 :2305–2326, 1981.

[8] C. Basdevant, M. Lesieur, et R. Sadourny. Subgrid-scale modeling of enstrophy transfer in two-dimensional turbulence. *J. Atmos. Sci.*, 35 :1028–1042, 1978.

[9] C. Basdevant et T. Philipovitch. On the validity of the "weiss criterion" in two-dimensional turbulence. *Physica D*, 73 :17–30, 1994.

[10] G. K. Batchelor. Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. *J. Fluid Mech.*, 5 :113–133, 1959.

[11] R. Benzi, G. Paladin, S. Patarnello, P. Santangelo, et A. Vulpiani. Intermittency and coherent structures in two-dimensional turbulence. *J. Phys. A*, 19 :3771–3784, 1986.

[12] G. Boffetta, A. Celani, et M. Vergassola. Inverse cascade in two-dimensional turbulence : deviations from gaussianity. *Phys. Rev. E*, 61(R29), 2000.

[13] D. Bogucki, J.A. Domaradzki, et P.K. Yeung. Direct numerical simulations of passive scalars with Pr>1 advected by turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 343(111-130), 1997.

[14] V. Borue. Inverse energy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 72(1475), 1994.

[15] F. Bouchet. *Mécanique statistique pour des écoulements géophysiques.* Thèse de doctorat, 2001.

[16] J. Boussinesq. Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, 1877.

[17] P-H. Chavanis. Quasilinear theory of the 2D Euler equation. *Phys. Rev. Lett.*, 84(24) :5512–5515, 2000.

[18] P-H. Chavanis. Kinetic theory of point vortices : diffusion coefficient and systematic drift. *Phys. Rev. E*, 64 :026309, 2001.

[19] P-H. Chavanis et J. Sommeria. Thermodynamical approach for small-scale parametrization in 2D turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 78(17) :3302–3305, 1997.

[20] S. Chen, D.D. Holm, L.G. Margolin, et R. Zhang. Direct numerical simulations of the navier-stokes alpha model. *Physica D*, 133 :66–83, 1999.

[21] M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, et V. Lebedev. Statistics of a passive scalar advected by a large-scale two-dimensional velocity field : Analytic solution. *Phys. Rev. E*, 1994.

[22] J.Y.N. Cho et E. Lindborg. Horizontal velocity structure functions in the upper troposphere and lower stratosphere - 1 : Observations. *J. Geophys. Res.*, 106(D10) :10223–10232, 2001.

[23] R. A. Clark, J.H. Ferziger, et W. C. Reynolds. Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow. *J. Fluid. Mech.*, 91(1) :1–16, 1979.

[24] S. Corrsin. On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence. *J. Applied Phys.*, 22 :469–473, 1951.

[25] Y. Couder. Observation expérimentale de la turbulence bidimensionnelle dans un film liquide mince. *C. R. Acad. Sci*, 297 :641–645, 1983.

[26] A. Crisanti, M. Falconi, G. Paladin, et A. Vulpiani. Role of lagrangian chaoticity on the small scale structure of passive scalars in fluids. *Physica A*, 166 :305–324, 1990.

[27] S. Danilov et D. Gurarie. Non universal features of forced two-dimensional turbulence in the energy range. *Phys. Rev. E*, 63(020203(R)), 2001.

[28] J.A. Domaradzki et D.D. Holm. Navier-stokes alpha model : LES equations with nonlinear dispersion. *Special LES volume of ERCOFTAC bulletin*, 2001.

[29] S. Douady, Y. Couder, et M.-E. Brachet. Direct observation of the intermittency of vorticity filaments in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 67 :983, 1991.

[30] T. Dubos. A spatially selective parameterization for the transport of a passive or active tracer by a large scale flow. *C.R.Ac.Sci. (Paris)*, 329 :509–516, 2001.

[31] T. Dubos et A. Babiano. Cascades in two-dimensional mixing : a physical space approach. *J. Fluid Mech.*, 467 :81–100, 2002.

[32] T. Dubos, J. Paret, A. Babiano, et P. Tabeling. Intermittency and coherent structures in the two-dimensional inverse energy cascade : comparing numerical and laboratory experiments. *Phys. Rev. E*, 64(036302), 2001.

[33] D. Elhmaidi, A. Provenzale, et A. Babiano. Elementary topology of two-dimensional turbulence from a lagrangian viewpoint and single-particle dispersion. *J. Fluid Mech.*, 257 :533–558, 1993.

[34] G. Falkovich, X. Gawedsky, et M. Vergassola. Particles and fields in fluid turbulence. *cond-mat*, 0105199, 2001.

[35] G. Falkovich et V. Lebedev. Nonlocal vorticity cascade in two dimensions. *Phys. Rev. E*, 49(3) :R1800–1803, 1994.

[36] M. Farge, M. Holschneider, et J-F. Colonna. Wavelet analysis of coherent structures in two-dimensional turbulent flows. *Topological Fluid Dynamics*, pages 765–776, 1989.

[37] M. Farge, N.K. Kevlahan, V. Perrier, et K. Schneider. Turbulence analysis, modelling and computing using wavelets. In *Wavelets in physics*. Cambridge University Press, 1999.

[38] R. Fjortoft. On changes in the spectral distribution of kinetic energy for two-dimensional non-divergent flow. *Tellus*, 5 :225–230, 1953.

[39] U. Frisch. *Turbulence*. Cambridge University Press, 1995.

[40] U. Frisch et P.L. Sulem. Numerical simulation of the inverse energy cascade in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 27 :1921, 1984.

[41] P. Haynes et E. Shuckburgh. Effective diffusivity as a diagnostic of atmospheric transport - 1. stratosphere. *J. Geophys. Res*, 105(D18) :22777–22794, 2000.

[42] P. Haynes et E. Shuckburgh. Effective diffusivity as a diagnostic of atmospheric transport - 2. troposphere and lower stratosphere. *J. Geophys. Res*, 105(D18) :22795–22810, 2000.

[43] G. Holloway et S.S. Kristmannsson. Stirring and transport of tracer fields by geostrophic turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 141 :27–50, 1984.

[44] D.D. Holm, J.E. Marsden, et T.S. Ratiu. The euler-poincaré equations in geophysical fluid dynamics. *The mathematics of ocean and atmosphere dynamics*, 1998.

[45] K. Horiuti. Backward scatter of subgrid-scale energy in wall-bounded turbulence and free shear flow. *J. Phys. Soc. Japan*, 66(1) :91–107, 1997.

[46] K. Horiuti. Constraints on the subgrid-scale models in a frame of reference undergoing rotation. *J. Fluid Mech.*, soumis, 2001.

[47] B.L. Hua et P. Klein. An exact criterion for the stirring properties of nearly two-dimensional turbulence. *Physica D*, 113 :98–110, 1998.

[48] J. Jimenez, A.A. Wray, P.G. Saffman, et R.S. Rogallo. The structure of intense vorticity in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 255 :65, 1993.

[49] M-C. Jullien. *Dispersion de traceurs passifs dans des expériences de turbulence bidimensionnelle.* Thèse de doctorat, 2000.

[50] M.-C. Jullien, P. Castiglione, et P. Tabeling. Experimental observation of Batchelor dispersion. *Phys. Rev. Lett.*, 85(17) :3636–3639, 2000.

[51] M.-C. Jullien, P. Castiglione, et P. Tabeling. Intermittency of a passive tracer in the inverse energy cascade. *Phys. Rev. Lett.*, 2001.

[52] Y. Kimura et J.R. Herring. Gradient enhancement and filament ejection for non-uniform elliptic vortex in 2d turbulence. *J. Fluid Mech.*, 2001.

[53] P. Klein, B. L. Hua, et G. Lapeyre. Alignment of tracer gradients in two-dimensional turbulence using second order lagrangian dynamics. *Physica D*, 146 :246–260, 2000.

[54] A.N. Kolmogorov. Local structure of turbulence in noncompressible fluid with very high reynolds number. *Doklady Acad. Sci.*, 30(4), 1941.

[55] A.N. Kolmogorov. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 1962.

[56] R.H. Kraichnan. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 10 :1417–1423, 1967.

[57] R.H. Kraichnan. Inertial-range transfer in two- and three-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 47(3) :525–535, 1971.

[58] L. Landau et E. Lifshitz. *Mécanique des fluides.* Éditions Mir, 1971.

[59] G. Lapeyre. *Topologie du mélange dans les écoulements géophysiques.* Thèse de doctorat, 2000.

[60] G. Lapeyre, B. L. Hua, et P. Klein. Dynamics of the orientation of gradients of passive and active scalars in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 13 :251–264, 2001.

[61] G. Lapeyre, P. Klein, et B. L. Hua. Does the tracer gradient align with the strain eigenvectors in 2d turbulence ? *Phys. Fluids*, 11(12) :3729–3737, 1999.

[62] M. Larchevêque. Pressure field, vorticity field and coherent structures in two-dimensional incompressible turbulent flows. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 5 :215–222, 1993.

[63] J-P. Laval. *Développemement d'un nouveau modèle dynamique pour la turbulence.* Thèse de doctorat, 1999.

[64] J-P. Laval, B. Dubrulle, et S.V. Nazarenko. Nonlocality of interaction of scales in the dynamics of 2D incompressible fluids. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :4061–4064, 1999.

[65] J-P. Laval, B. Dubrulle, et S.V. Nazarenko. Dynamical modeling of subgrid scales in 2D turbulence. *Physica D*, 142 :231–253, 2000.

[66] J-P. Laval, B. Dubrulle, et S.V. Nazarenko. Fast numerical simulations of 2D turbulence using a dynamic model for subgrid motions. *Prépublication*, 2001.

[67] A. Leonard. Large-eddy simulation of chaotic convection and beyond. *AIAA*, 97-0204, 1997.

[68] M. Lesieur. *Turbulence in fluids.* Kluwer Academic Publishers, 1990.

[69] E. Lindborg et K. Alvelius. The kinetic energy spectrum of the two-dimensional enstrophy turbulence cascade. *Phys. Fluids*, 12(5) :945–947, 2000.

[70] T.S. Lund et E.A. Novikov. *Annual Research Briefs - Center for Turbulence Research*, 1992.

[71] J.C. McWilliams. The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 146 :21–43, 1984.

[72] J. Miller. Statistical mechanics of Euler equations in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 65 :2137–2140, 1990.

[73] P. Moeleker et A. Leonard. Lagrangian methods for the tensor-diffusivity subgrid model. *Advances in Turbulence VIII*, pages 599–602, 2000.

[74] F. Moisy. *Étude expérimentale des fluctuations de vitesse, de température et de pression en turbulence développée.* Thèse de doctorat, 2000.

[75] S. Monin et A.M. Yaglom. *Statistical fluid mechanics.* MIT press, 1971.

[76] N. Nakamura. Modified lagrangian-mean statistics of the stratospheric polar vortices. part I : formulation and analysis of GFDL SKYHI GCM. *J. Atmos. Sci.*, 52(11) :2096–2108, 1995.

[77] N. Nakamura. Two-dimensional mixing, edge formation and permeability diagnosed in area coordinates. *J. Atmos. Sci*, 53 :1524–1537, 1996.

[78] N. Nakamura et J. Ma. Modified lagrangian-mean statistics of the stratospheric polar vortices. part II : nitours oxide and seasonal barrier migration in the cryogenic limb array etalon spectrometer and SKYHI general circulation model. *J. Geophys. Res.*, 102(D22) :25721–25735, 1997.

[79] G.D. Nastrom et K.S. Gage. A climatology of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft. *J. Atmos. Sci.*, 42(9) :950–960, 1984.

[80] Nie et Tanveer. A note on third-order structure functions in turbulence. *Proc. R. Soc. London A*, 455(1615-1635), 1999.

[81] Noir Désir / Brigitte Fontaine. L'Europe. *Des Visages des Figures*, 2001.

[82] A. Obukhov. Structure of the temperature field in turbulent flows. 13, 1949.

[83] A.M. Obukhov. Energy distribution in the spectrum of turbulent flows. *Iz. Akad. Nauk, Ser.-Geogr. i Geofiz*, 5 :453–466, 1941.

[84] A. Okubo. Horizontal dispersion of floatable particles in the vicinity of velocity singularities such as convergences. *Deep-Sea Res.*, 17 :445–454, 1970.

[85] J. Paret. *Turbulence bidimensionnelle et dispersion turbulente : étude expérimentale.* Thèse de doctorat, 1999.

[86] J. Paret et P. Tabeling. Experimental observation of the two-dimensional inverse energy cascade. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :4162, 1997.

[87] J. Paret et P. Tabeling. Intermittency in the two-dimensional inverse cascade of energy. *Phys. Fluids*, 10(12) :3126, 1998.

[88] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics.* Springer, 1979.

[89] T. Philipovitch. *Applications de la transformée en ondelettes continue à la turbulence homogène isotrope bidimensionnelle.* Thèse de doctorat, Université Paris 7, 1994.

[90] R.T. Pierrehumbert. Chaotic mixing of tracer and vorticity by modulated travelling rossby waves. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 58 :285–319, 1991.

[91] B. Protas, A. Babiano, et N. K.-R. Kevlahan. On geometrical alignment properties of two-dimensional forced turbulence. *Physica D*, 128 :169–179, 1999.

[92] A. Pumir. A numerical study of the mixing of a passive tracer in three dimensions in the presence of a mean gradient. *Phys. Fluids*, 6 :2118–2132, 1994.

[93] P.B. Rhines. Geostrophic turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 11 :401–441, 1979.

[94] R. Robert et J. Sommeria. Statistical equilibrium states for two-dimensional flows. *J. Fluid Mech.*, 229 :291–310, 1991.

[95] R. Robert et J. Sommeria. Relaxation towards a statistical equilibrium state in two-dimensional perfect fluid dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 69 :2776–2779, 1992.

[96] V. Rupolo, B. A. Babiano, V. Artale, et V. Iudicone. Horizontal space-time dependent tracer diffusivity field for an OGCM : a sensivity study in the mediterranean sea. *Prépublication*, 2001.

[97] R. Sadourny et C. Basdevant. Une classe d'opérateurs adaptés a la modélisation de la diffusion turbulente en dimension deux. *C. R. Acad. Sci.*, 292(II) :1061–1064, 1981.

[98] P. Sagaut. *Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements incompressibles*. Springer, 1998.

[99] Z.S. She et E. Leveque. Universal scaling laws in fully developped turbulence. *Phys. Rev. Letters*, 72(336), 1994.

[100] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations. *Mon. Wea. Rev.*, 91 :99–164, 1963.

[101] J. Smagorinsky. Some historical remarks on the use of nonlinear viscosities. *Large Eddy Simulation of Complex Engineering and Geophysical Flows*, 1993.

[102] L.M. Smith et V. Yakhot. Finite size effects in forced two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 274 :115, 1994.

[103] J. Sommeria. Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box. *J. Fluid Mech.*, 170 :139, 1986.

[104] P. Tabeling. Two-dimensional turbulence : a physicist approach. *Report and progress in physics*, 2002.

[105] A. Vincent et M. Meneguzzi. The dynamics of vorticity tubes in homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 258 :245, 1994.

[106] J. Weiss. The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional turbulence. *Physica D*, 48 :273–294, 1991.

[107] K.B. Winters et E.A. D'Asaro. Diascalar flux and the rate of fluid mixing. *F. Fluid Mech.*, 317 :179–193, 1996.

[108] A. M. Yaglom. On the local structure of temperature field in turbulent flow. 69(6), 1949.

Abstract

We present numerical and theoretical results concerning the two-dimensional turbulent cascades, and especially the cascade of a tracer, from a standpoint in physical space. Such an approach allows to demonstrate the non-intermittent character of the inverse energy cascade, even in situations dominated by coherent structures [**32**]. The main part of the thesis is devoted to the analysis and modeling of the cascade of a tracer.

We propose a method to diagnose the cascade of a tracer : considering the evolution of a tracer increment, we define in physcal space a scale-to-scale flux of tracer variance.

We then get interested into the problem of turbulent mixing parameterization. We motivate the use of an anisotropic model, which we call strain diffusivity (SD) [**30**]. We connect its diffusive properties to the geometrical properties of the advecting flow.

Vorticity in two dimensions is an active tracer, and its subgrid-scale parameterization affects velocity. The inverse energy cascade constrains admissible parameterizations to conserve energy. We show that SD conserves energy and that it is the only one among a certain class of simple models.

We study numerically the properties of the tools we introduced. We show that, at contrast with an isotropic diffusivity/hyperdiffusivity, SD induces a diffusion that is well correlated to the local flux of tracer variance [**31**]. We check that it does impose the effective gaussian filter it is obtained from. However the reduction of the error committed when using it in conjunction with a spectral method is not obvious. Nevertheless, it produces a much better representation of the large scales of the flow when used on vorticity in small-scale forced situation.

We finally compare the cascade properties of vorticity and a passive tracer. The criterions we use are based on conditional averages of the lagrangian derivatives of the squared tracer gradient. We demonstrate in random fields an kinematic difference between vorticity and a passive tracer, which partly remains in turbulent fields.

Keywords : two-dimensional turbulence, cascade, inverse energy cascade, intermittency, tracer, physical space, tracer gradient, alignment, parameterization, mixing, anisotropy, energy conservation.

Résumé

Nous présentons des résultats numériques et théoriques concernant les cascades en turbulence bidimensionnelle, et plus spécialement la cascade d'un traceur, en développant une approche dans l'espace physique. Une telle approche permet de mettre en évidence l'absence d'intermittence dans la cascade inverse d'énergie, y compris dans des situations dominées par les structures cohérentes **[32]**. Le coeur de la thèse est consacré à l'analyse et à la modélisation de la cascade d'un traceur.

Nous proposons une méthode de diagnostic de la cascade d'un traceur : considérant l'évolution d'un incrément de traceur, nous définissons dans l'espace physique le flux entre échelles de la variance de traceur.

Nous nous intéressons ensuite au problème de la paramétrisation du mélange turbulent. Nous justifions l'emploi une paramétrisation anisotrope, que nous baptisons diffusivité de déformation (*strain diffusivity*, SD)**[30]**. Nous relions ses propriétés diffusives aux propriétés géométriques de l'écoulement.

La vorticité est en deux dimensions un traceur actif, et la paramétrisation sous-maille pour la vorticité agit sur la vitesse. La cascade inverse d'énergie impose aux paramétrisations admissibles de conserver l'énergie. Nous montrons que la SD conserve l'énergie, et qu'elle est la seule d'une classe de modèles simples.

Nous étudions numériquement les propriétés des outils introduits. Nous montrons que, contrairement à une diffusivité/hyperdiffusivité isotrope, la SD induit une diffusion bien corrélée au flux local de variance de traceur **[31]**. Le filtre effectif qu'elle impose correspond au filtre gaussien à partir duquel elle est calculée. Cependant la réduction de l'erreur commise en cas d'utilisation d'une méthode spectrale et d'un filtre raide n'est pas évidente. Appliquée à la vorticité dans une situation où le forçage est à très petite échelle, la SD démontre en revanche une bien meilleure représentation des grandes échelles qu'une hyperdiffusivité.

Enfin, nous analysons comparativement les propriétés de cascade de la vorticité et d'un traceur passif. Les critères de comparaison reposent sur des moyennes conditionnelles des dérivées lagrangiennes du carré du gradient du traceur. Nous mettons en évidence pour un champ aléatoire une différence cinématique entre traceur passif et vorticité, dont il subsiste une trace dans des champs turbulents.

Mots-clefs : turbulence bidimensionnelle, cascades, cascade inverse d'énergie, intermittence, traceur, espace physique, gradients de traceur, alignements, paramétrisation, mélange, anisotropie, conservation de l'énergie.