

**Dynamique topologique d'une action de groupe sur un
espace homogène : exemples d'actions unipotente et
diagonale**

Damien Ferte

► **To cite this version:**

Damien Ferte. Dynamique topologique d'une action de groupe sur un espace homogène : exemples d'actions unipotente et diagonale. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2003. Français. tel-00007213

HAL Id: tel-00007213

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00007213>

Submitted on 27 Oct 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention Mathématiques et Applications

par

Damien FERTE

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

*Dynamique topologique d'une action de groupe sur un espace homogène :
exemples d'actions unipotente et diagonale*

Soutenue le 16 décembre 2003 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M.	Christophe BAVARD	Rapporteur
M.	Dominique CERVEAU	Examinateur
M.	Gilles COURTOIS	Rapporteur
Mme	Françoise DAL'BO	Directrice
M.	Yves GUIVARC'H	Examinateur
M.	Frédéric PAULIN	Examinateur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Françoise Dal'Bo qui a encadré mon travail de thèse durant ces quelques années de m'avoir proposé ces sujets de recherche. Je lui suis reconnaissant d'avoir suivi de près l'évolution de mes travaux tout en me laissant une grande liberté dans mes recherches. Enfin, il me semble que sa persévérance et son enthousiasme ont été indispensables à l'achèvement de cette thèse.

Christophe Bavard et Gilles Courtois se sont déplacés à Rennes pour la soutenance après avoir accepté la charge de rapporteur. Je les remercie sincèrement. Merci également pour leurs précisions ou questions qui ont été les bienvenues.

Merci à Frédéric Paulin pour sa participation au jury et ses remarques sur le texte.

Merci à Dominique Cerveau et à Yves Guivarc'h d'avoir accepté de faire partie du jury.

Dès le début de ma thèse, j'ai très rapidement apprécié de travailler à la "Tour des maths" ; c'est en partie dû à la gentillesse et la disponibilité du personnel administratif et technique de l'IRMAR et de l'UFR Mathématiques. Merci en particulier à Véronique, Marie-Annick, Dominique, Karine, Danielle.

Merci à tous les membres de l'équipe de Géométrie analytique pour l'ambiance détendue qu'ils y font régner. Je remercie particulièrement Dominique, qui a "géométriquement" marqué mon cursus universitaire rennais ainsi que Bert avec qui j'ai partagé le bureau 731 (et quelques problèmes de traduction).

Les participants du séminaire semi-clandestin Pampers, les adhérents de l'association Jacques Binet et les amateurs de frites crous-tillantes sont des plus recommandables collègues de travail. Qu'ils en soient ici remerciés. Je pense particulièrement à Élise (rieuse et citoyenne), à Erwan (professeur itinérant), à Glenn (grand informateur), à Gwéno (compilateur d'apéritifs) et à Vincent ("J'ai une petite question...").

Merci à Fred et Yvan pour leur présence et leur soutien pendant toute cette période. J'ai quelquefois profité, pour cause de mathématiques extra-rennaises, de la généreuse hospitalité d'Estelle et Chris. Merci à eux.

Martine, Didier, Caroline, Anselme et Émilie ont minutieusement préparé le pot de thèse et se sont déplacés. Je les remercie chaleureusement (sans oublier Valentin!).

Enfin (et j'aurais également pu la citer plus haut), c'est à Solen que j'adresse un grand merci...

Table des matières

Introduction	7
1 Préliminaires	13
1.1 Géométrie et isométries des espaces hyperboliques	13
1.2 Groupes fuchsien et kleiniens	16
1.3 Géométrie et compactifications de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$	17
1.4 Action d'un sous-groupe sur un espace homogène	19
2 Action du groupe unipotent supérieur sur les quotients de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$	21
2.1 Flot des repères	21
2.2 Spectre complexe des groupes kleiniens	23
2.3 Action linéaire sur le plan complexe	30
2.4 Dynamique topologique de l'action du groupe unipotent supérieur	36
3 Action du groupe diagonal sur les quotients de volume fini de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$	39
3.1 Motivation	39
3.2 Exemples d'orbites singulières sur des quotients de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$	40
3.3 Réseaux de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$	44
3.4 Eléments des réseaux irréductibles de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$	45
3.5 Points paraboliques	49
3.6 Orbites fermées	52
3.7 Constructions d'orbites denses	57
3.8 Sur l'impossibilité de deux constructions d'orbites bornées	67
4 Orbites bornées et approximation diophantienne	73
4.1 Réseaux et variétés de Hilbert	73
4.2 Approximation diophantienne par un corps réel quadratique	75
4.3 Lien avec l'action du groupe diagonal	76
Annexe : sur $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$	83
Annexe A. Exemple d'un réseau vérifiant la proposition 3.2.2	83
Annexe B. Conjecture de Littlewood et orbites du groupe diagonal	85
Bibliographie	91

Introduction

Cette thèse a pour objet d'étude la dynamique topologique de deux actions de groupe sur des espaces homogènes. Considérons un groupe de Lie réel G , un sous-groupe discret Γ de G et un sous-groupe fermé H de G . Le groupe H agit alors naturellement sur l'espace homogène $\Gamma \backslash G$ par translation à droite :

$$H \times \Gamma \backslash G \longrightarrow \Gamma \backslash G : (h, \Gamma g) \longmapsto \Gamma gh.$$

A cette action est également associée son action "duale" : l'action du groupe Γ sur l'espace homogène G/H par translation à gauche :

$$\Gamma \times G/H \longrightarrow G/H : (\gamma, gH) \longmapsto \gamma gH.$$

Pour un élément g de G , la double classe ΓgH désignera, selon l'action considérée, l'orbite du point Γg de $\Gamma \backslash G$ par le groupe H ou l'orbite du point gH de G/H par le groupe Γ . L'étude de la dynamique topologique de ces actions de groupes est la description des propriétés topologiques (densité, compacité,...) de ces orbites.

Lorsque le groupe G est un groupe semi-simple et si X désigne l'espace symétrique associé, l'action du groupe H sur $\Gamma \backslash G$ par translation est généralement conjuguée à une action géométrique sur un espace fibré au-dessus de l'espace localement symétrique $\Gamma \backslash X$. Dans cette thèse, nous utiliserons très souvent les deux points de vue : "algébrique" et "géométrique".

Deux des situations les plus classiques correspondent aux cas pour lesquels le groupe G est le groupe projectif unimodulaire $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et le groupe H est le sous-groupe unipotent supérieur N ou le sous-groupe A des matrices diagonales. Un sous-groupe discret Γ de G agit proprement discontinûment sur le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 par isométries orientées. Si, de plus, ce groupe ne possède pas d'élément de torsion, la variété quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ est lisse et les actions des sous-groupes N et A sur $\Gamma \backslash G$ sont alors conjuguées respectivement aux flots horocyclique et géodésique sur le fibré tangent unitaire de la surface $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$. Dans le cas du groupe N , l'action duale de Γ est conjuguée à l'action linéaire sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ (modulo $\pm \mathrm{Id}$) tandis que dans le cas du groupe A , l'action duale est conjuguée à l'action projective sur l'ensemble $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), x \neq y\}$. Ces actions sont deux extensions du système dynamique défini par l'action du groupe Γ sur l'espace homogène G/AN (conjuguée à l'action projective de Γ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$).

Nous traiterons deux situations qui peuvent être considérées comme des généralisations de ces deux cas classiques.

La dynamique topologique du flot horocyclique sur les surfaces hyperboliques est bien comprise (voir par exemple les articles [Sta1, Ghy]). La première situation étudiée ici est l'analogie dans le cas complexe, c'est-à-dire lorsque le groupe G est le groupe unimodulaire complexe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et le groupe H est le groupe unipotent supérieur complexe N de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. D'un point de vue géométrique, un sous-groupe discret Γ de G agit proprement discontinûment par isométries orientées sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 et cette action est libre si le groupe Γ est sans torsion. Un tel groupe est un groupe *kleinien*. L'action du groupe unipotent N est alors conjuguée à un flot à deux paramètres sur le fibré des repères orthonormés directs de la variété hyperbolique $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$. L'action duale est conjuguée à l'action linéaire du groupe Γ sur le plan complexe privé de l'origine (modulo $\pm \mathrm{Id}$). Dans le chapitre 2, nous décrivons la topologie de l'orbite du point Γg en fonction de la nature de l'image $g(\infty)$ par l'homographie g du point ∞ de la sphère $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (le bord à l'infini de \mathbb{H}^3). Pour énoncer ces résultats, notons L_Γ l'ensemble limite du groupe kleinien Γ (voir le chapitre 1 pour les définitions de l'ensemble limite, des points paraboliques et des points horosphériques) et Ω_Γ le sous-ensemble (fermé et invariant par Γ) des éléments g du groupe G tels que le point $g(\infty)$ appartienne à l'ensemble limite L_Γ . Soit x un élément de $\Gamma \backslash G$, l'application $\overline{\Phi}_x$ est définie (voir le paragraphe 2.4) par

$$\overline{\Phi}_x : (x^{-1}\Gamma x \cap N) \backslash N \longrightarrow \Gamma \backslash G : (x^{-1}\Gamma x \cap N)u \longmapsto xu.$$

Son image est exactement l'orbite par le groupe N de l'élément x .

Théorème 2.4.1. *Soient Γ un groupe kleinien non-élémentaire, g un élément du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et x sa classe dans $\Gamma \backslash G$.*

(i) *Si le point $g(\infty)$ n'appartient pas à l'ensemble limite L_Γ , alors l'application $\overline{\Phi}_x$ est un plongement. L'orbite xN est donc fermée dans $\Gamma \backslash G$. C'est l'image du plongement d'un plan.*

(ii) *Si le point $g(\infty)$ est parabolique, l'application $\overline{\Phi}_x$ est un plongement. L'orbite xN est donc fermée dans $\Gamma \backslash G$. C'est l'image du plongement d'un cylindre (resp. tore) si le rang du point parabolique $g(\infty)$ est 1 (resp. 2).*

(iii) *Supposons de plus que le groupe Γ ne soit pas conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. Alors l'orbite xN est dense dans l'ensemble $\Gamma \backslash \Omega_\Gamma$ si et seulement si le point $g(\infty)$ est un point horosphérique.*

Parmi les groupes kleinien, on distingue ceux dont tous les points de l'ensemble limite sont horosphériques ou paraboliques; c'est le cas s'il existe dans \mathbb{H}^3 un domaine fondamental convexe possédant un nombre fini de faces, ces groupes sont *géométriquement finis*. Si tous les points de l'ensemble limite du groupe Γ sont horosphériques, le groupe est *convexe-cocompact*: l'ensemble des éléments g de G tels que les points $g(0)$ et $g(\infty)$ appartiennent à l'ensemble limite L_Γ se projette dans $\Gamma \backslash G$ sur un sous-ensemble compact. Si tous les points du bord $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sont des points limites horosphériques ou paraboliques de rang 2 (resp. horosphériques); le groupe Γ est un *réseau* (resp. *réseau uniforme*) du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Nous obtenons ainsi une caractérisation dynamique de ces catégories de groupes kleinien :

Corollaire 2.4.3. (i) *Si un groupe kleinien non élémentaire Γ est géométriquement fini et n'est pas conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$, les orbites du groupe N sur $\Gamma \backslash G$ sont soit fermées soit denses dans $\Gamma \backslash \Omega_\Gamma$.*

(ii) *Un groupe kleinien Γ est un réseau si et seulement si les orbites du groupe N sont denses dans $\Gamma \backslash G$ ou compactes.*

(iii) *Un groupe kleinien Γ est convexe-cocompact et n'est pas conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ si et seulement si toutes les orbites du groupe N dans $\Gamma \backslash \Omega_\Gamma$ sont denses dans $\Gamma \backslash \Omega_\Gamma$.*

(iv) *Un groupe kleinien Γ est un réseau uniforme si et seulement si toutes les orbites du groupe N sur $\Gamma \backslash G$ sont denses.*

La démonstration de la partie (iii) du théorème 2.4.1 repose sur l'étude de l'action linéaire du groupe Γ . L'argument-clé est la propriété suivante (théorème 2.2.1) du sous-groupe fermé S_Γ de \mathbb{C}^* engendré par les carrés des valeurs propres des éléments du groupe Γ . Ce résultat généralise la “non-arithméticité” du spectre des longueurs d'un groupe d'isométries d'un espace hyperbolique (voir [Dal1]).

Théorème 2.2.1. *Soit Γ un groupe kleinien non élémentaire et sans torsion.*

(i) *Si le groupe Γ n'est pas conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$, alors son spectre S_Γ est égal à \mathbb{C}^* .*

(ii) *Si le groupe Γ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$, mais pas à un sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, alors son spectre S_Γ est égal à \mathbb{R}^* .*

(iii) *Si le groupe Γ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, alors son spectre S_Γ est égal à \mathbb{R}_+^* .*

Ces résultats ont fait l'objet de la publication [Fer] dans laquelle nous avons développé le point de vue géométrique du flot des repères. L'étude présentée ici privilégie l'aspect plus algébrique de l'action du groupe unipotent.

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons à des actions diagonales. Le flot géodésique sur le fibré tangent unitaire des surfaces hyperboliques (et de même l'action du sous-groupe diagonal de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur les quotients de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ par un sous-groupe discret) est très riche. En particulier, il existe beaucoup d'ensembles fermés invariants non homogènes. Nous présentons dans le paragraphe 3.2 deux constructions classiques de tels ensembles. Nous expliquons comment il est possible, pour certains réseaux Γ du groupe $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$, de construire des orbites du groupe diagonal sur $\Gamma \backslash \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ qui soient singulières et donnons dans l'annexe un exemple (construit par M. Rees, [Ree]) d'un tel réseau. Dans la suite du chapitre 3, nous étudions le cas où le groupe G est le produit $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et où le sous-groupe H est le produit des groupes diagonaux. Un sous-groupe discret Γ de G agit alors proprement discontinûment par isométries orientées sur le produit $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ qui est un espace symétrique à courbure négative ou nulle : le produit de deux géodésiques de \mathbb{H}^2 est une sous-variété isométrique à un plan euclidien (un *plat*). La donnée d'un point (z_1, z_2) de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ et d'un plat contenant ce point définit quatre *chambres de Weyl*

(correspondant aux quatre différents produits contenus dans ce plat de rayons géodésiques d'origine z_1 ou z_2). Le groupe G agit simplement transitivement sur l'espace des chambres de Weyl de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ et la translation à droite par le produit A des groupes diagonaux est conjuguée au produit des flots géodésiques sur chaque facteur. Nous étudions la dynamique de l'action du groupe A sur $\Gamma \backslash G$ lorsque le groupe Γ est un *réseau irréductible* du groupe G (un sous-groupe discret de covolume fini ne contenant pas de produits, voir le paragraphe 3.3). Le flot des chambres de Weyl en rang supérieur semble beaucoup plus "rigide" que le flot géodésique sur le fibré tangent unitaire des surfaces hyperboliques. Nous mentionnons une conjecture de H. Furstenberg et G.A. Margulis qui, dans cette situation, s'énonce de la manière suivante :

Conjecture 3.3.4. *Soient G le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et Γ un réseau irréductible du groupe G . Alors toute orbite du groupe diagonal A est soit fermée, soit dense dans $\Gamma \backslash G$.*

Nous caractérisons d'abord, en fonction de la nature des points $g_i(0)$ et $g_i(\infty)$, $i = 1, 2$ les éléments $g = (g_1, g_2)$ du groupe G tels que l'orbite du point Γg soit fermée non bornée (théorème 3.6.2) ou compacte (théorème 3.6.3). La notion d'*élément hyper-régulier*, utilisée dans les énoncés de ces théorèmes, est définie plus loin.

Théorème 3.6.2. *Soient Γ un réseau irréductible du groupe G , g un élément de G et x sa classe dans $\Gamma \backslash G$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *l'orbite xA est fermée non compacte,*
- (ii) *le groupe $g^{-1}\Gamma g \cap A$ est isomorphe à \mathbb{Z} ,*
- (iii) *les points $g(\infty, \infty)$ et $g(0, 0)$ (ou $g(\infty, 0)$ et $g(0, \infty)$) sont des points paraboliques fixés par un même élément hyperbolique du groupe Γ . (Dans ce cas, cet élément n'est pas hyper-régulier.)*

Théorème 3.6.3. *Soit Γ un réseau irréductible du groupe G , g un élément de G et x sa classe dans $\Gamma \backslash G$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *l'orbite xA est compacte,*
- (ii) *le groupe $g^{-1}\Gamma g \cap A$ est isomorphe à \mathbb{Z}^2 ,*
- (iii) *les points $g(\infty, \infty)$ et $g(0, 0)$ sont fixés par un même élément hyperbolique hyper-régulier du groupe Γ .*

La conjecture 3.3.4 a été démontrée par E. Lindenstrauss et B. Weiss ([LW]) pour les orbites dont l'adhérence contient une orbite compacte. Ce texte contient une démonstration simplifiée dans ce cas particulier.

Théorème 3.7.1. *Soit Γ un réseau irréductible du groupe G . Soit y un point de $\Gamma \backslash G$ tel que l'adhérence \overline{yA} de l'orbite yA contienne une orbite compacte. Alors l'orbite yA est compacte ou dense dans $\Gamma \backslash G$.*

A notre connaissance, il n'existe pas de critère simple sur une orbite du flot géodésique sur le fibré tangent unitaire d'une surface hyperbolique pour que cette orbite soit dense. Dans le cas de l'action du groupe A sur $\Gamma \backslash G$, avec Γ un réseau irréductible, nous donnons

des conditions suffisantes sur une orbite pour qu'elle soit dense dans $\Gamma \backslash G$. Une isométrie non triviale du plan hyperbolique est soit *hyperbolique*, soit *elliptique*, soit *parabolique*. Un élément $h = (h_1, h_2)$ du groupe G est dit *mixte* si les deux isométries h_1 et h_2 ne sont pas du même type et il est dit *hyper-régulier* si h_1 et h_2 sont hyperboliques et de valeur propre dominante différente. Si $g = (g_1, g_2)$ appartient au groupe G , notons y le point Γg de $\Gamma \backslash G$ et E_g^1 (resp. E_g^2) l'ensemble

$$\{g_1(0), g_1(\infty)\} \quad (\text{resp. } \{g_2(0), g_2(\infty)\})$$

de points de $\partial \mathbb{H}^2$ définis par g_1 (resp. g_2).

Théorème 3.7.3. *L'orbite yA du point y est dense dans $\Gamma \backslash G$ dans les cas suivants :*

(i) *Un des points de E_g^1 ou E_g^2 est fixé par la composante hyperbolique d'une isométrie mixte de Γ .*

(ii) *L'orbite yA n'est pas compacte et l'un des points de E_g^1 ou E_g^2 est fixé par une isométrie hyperbolique hyper-régulière de Γ .*

Si le réseau Γ n'est pas uniforme, les seules orbites bornées seraient (d'après la conjecture 3.3.4) les orbites compactes. Dans cette direction, nous expliquons dans le paragraphe 3.8 pourquoi les deux constructions d'orbites singulières pour le flot géodésique sur le fibré tangent unitaire d'une surface hyperbolique présentées dans le paragraphe 3.2 ne s'adaptent plus au flot des chambres de Weyl sur $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ (donc à l'action du groupe diagonal A sur $\Gamma \backslash G$).

Le chapitre 4 est consacré aux variétés de Hilbert. Si \mathbb{K} est un corps quadratique réel et $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ est l'anneau des entiers de \mathbb{K} alors l'image discrète Γ dans le groupe $G = \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ du groupe modulaire de Hilbert $\text{PSL}(2, \mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ (voir le chapitre 4 pour les définitions) est un réseau irréductible. La relation entre le flot géodésique sur le fibré tangent unitaire de la courbe modulaire $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^2$ et l'approximation diophantienne des nombres réels par les nombres rationnels est bien connue. Dans ce même esprit, nous relierons la dynamique de l'action du groupe A sur $\Gamma \backslash G$ à l'approximation diophantienne des points de \mathbb{R}^2 par le corps \mathbb{K} (ce lien a été établi précédemment et indépendamment par F. Maucourant dans une forme proche, voir [Mau]). Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux points de \mathbb{R}^2 , la *constante d'approximation* du couple (x, y) (relativement au corps \mathbb{K}) est la quantité

$$\Delta_{\mathbb{K}}(x, y) = \inf_{(p, q) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^2, q \neq 0} N_{\mathbb{K}}(q)^2 \left| x_1 - \frac{p}{q} \right| \cdot \left| y_1 - \frac{p}{q} \right| \cdot \left| x_2 - \sigma \left(\frac{p}{q} \right) \right| \cdot \left| y_2 - \sigma \left(\frac{p}{q} \right) \right|$$

où σ désigne l'automorphisme non trivial du corps \mathbb{K} et $N_{\mathbb{K}}$ désigne la norme sur \mathbb{K} . Nous obtenons alors une caractérisation diophantienne des orbites bornées. Soient $g = (g_1, g_2)$ un élément du groupe G et $x = \Gamma g$ sa classe dans $\Gamma \backslash G$, définissons

$$x^+ = g(\infty, \infty) = (g_1(\infty), g_2(\infty)) \quad \text{et} \quad x^- = g(0, 0) = (g_1(0), g_2(0)).$$

Corollaire 4.3.4. *L'orbite xA est bornée dans $\Gamma \backslash G$ si et seulement si*

$$\Delta_{\mathbb{K}}(x^+, x^-) > 0.$$

Il existe une relation (que nous détaillons dans l'annexe) entre la conjecture de Margulis appliquée à l'action du groupe diagonal sur l'espace homogène $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ et la conjecture de Littlewood sur l'approximation diophantienne simultanée de deux nombres réels par deux nombres rationnels de même dénominateur :

Conjecture. (*Littlewood*) *Soient α et β deux nombres réels, alors*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} n \|n\alpha\| \cdot \|n\beta\| = 0$$

où $\|x\|$ désigne la distance d'un réel x à l'ensemble \mathbb{Z} .

Dans l'esprit de ce lien entre dynamique topologique des orbites du groupe diagonal et approximation diophantienne, la conjecture 3.3.4 peut être traduite en termes de constante d'approximation. Soient \mathbb{K} un corps quadratique réel et Γ le groupe de Hilbert associé.

Question 4.3.9 *Soit g appartenant au groupe G , supposons*

$$\Delta_{\mathbb{K}}(g(\infty, \infty), g(0, 0)) > 0,$$

alors les points $g(\infty, \infty)$ et $g(0, 0)$ sont-ils fixés par un même élément hyperbolique du groupe Γ ?

Afin que ce texte soit relativement autonome et puisqu'il traite de deux situations particulières (bien que représentatives de certaines caractéristiques de cas plus généraux), nous avons voulu fournir les démonstrations de résultats connus en ayant le souci de les rendre les plus élémentaires possible.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous avons rassemblé la plupart des définitions et résultats utilisés dans la suite. Dans le paragraphe 1.1 nous rappelons les modèles de Poincaré du plan et de l'espace hyperbolique, leur compactification géométrique, la classification des isométries orientées et leur action sur le bord. Pour un sous-groupe d'isométries, nous définissons son ensemble limite. Si ce sous-groupe est discret, il s'agira d'un groupe *fuchsien* (ou *kleinien*). Dans le paragraphe 1.2, nous définissons les différents types de points de son ensemble limite et nous en rappelons les principales propriétés. Le paragraphe 1.3 traite du bord géométrique du produit $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$, de la frontière de Furstenberg et des propriétés de l'ensemble limite d'un sous-groupe discret du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Enfin dans le dernier paragraphe 1.4, nous montrons deux propriétés (utilisées plusieurs fois par la suite) de l'action d'un sous-groupe sur un espace homogène. En ce qui concerne la plupart des propriétés énoncées dans ce chapitre, nous renvoyons principalement à la référence [Ebe].

1.1 Géométrie et isométries des espaces hyperboliques

Nous utiliserons les modèles

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}z > 0\} \quad (\text{resp. } \mathbb{H}^3 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : t > 0\})$$

du plan (respectivement de l'espace) hyperbolique. Notons X un de ces modèles et $d(\cdot, \cdot)$ la distance induite par la métrique hyperbolique. Les géodésiques sont alors les demi-cercles orthogonaux à la droite

$$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}z = 0\} \quad (\text{resp. au plan } \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : t = 0\})$$

ou les demi-droites verticales. La *compactification géométrique* de X est l'espace compact obtenu en adjoignant à X son bord ∂X qui est l'ensemble des classes d'équivalence des rayons géodésiques asymptotes. Il existe un homéomorphisme entre le bord ∂X et $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (resp. $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) : l'application qui, à une classe de rayons, associe leur extrémité dans le modèle \mathbb{H}^2 (resp. \mathbb{H}^3). Le groupe des isométries orientées $Is^+(X)$ de X s'identifie au groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$). L'action des isométries se prolonge continûment au bord et coïncide sur ∂X avec l'action par homographies, autrement dit avec l'action projective

de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$). Le groupe des isométries orientées agit transitivement sur X et sur ∂X . Dans ce texte, afin de simplifier les notations, nous confondrons une isométrie de X et une des matrices qui la représentent.

Soient ξ un point de ∂X et $(r_t)_{t \geq 0}$ un rayon géodésique (paramétré par longueur d'arc) dirigé vers ξ . Si x et y sont deux points quelconques de X , la quantité

$$d(y, r_t) - d(x, r_t)$$

converge lorsque t tend vers $+\infty$ vers une quantité $\beta_\xi(x, y)$ indépendante du rayon choisi dans la classe d'équivalence de ξ . La fonction $\beta_\xi(\cdot, \cdot)$ est la *fonction de Busemann* au point ξ . Elle vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $\beta_{g(\xi)}(g.x, g.y) = \beta_\xi(x, y) \quad \forall g \in Is^+(X)$ (invariance par isométrie)
- (ii) $\beta_\xi(x, z) = \beta_\xi(x, y) + \beta_\xi(y, z)$ (propriété de cocycle).

Fixons un point o de X et un point ξ du bord ∂X , les ensembles de niveau de la fonction $\beta_\xi(o, \cdot)$ sont les *horosphères* basées au point ξ . L'horosphère de niveau T est notée $H_\xi(T)$. L'ensemble

$$\mathrm{HB}_\xi(T) = \{x \in X : \beta_\xi(o, x) > T\}$$

est l'*horoboule* basée en ξ de niveau T . Les horosphères de \mathbb{H}^2 sont les droites horizontales (basées au point ∞) et les cercles tangents à \mathbb{R} . Les horosphères de \mathbb{H}^3 sont les plans horizontaux (basées au point ∞) et les sphères tangentes à \mathbb{C} .

Nous classifions les isométries orientées non triviales de X . On appelle *distance de translation* d'une isométrie g de X la quantité

$$d(g) = \inf_{x \in X} d(x, gx).$$

La distance de translation est invariante par conjugaison par une autre isométrie.

Proposition 1.1.1. *Soit g une isométrie orientée et non triviale de X représentée par une matrice M de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ (ou $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$). Alors g vérifie une et une seule des propriétés suivantes.*

- (i) *l'isométrie g fixe un point appartenant à $X \iff d(g) = 0$ est atteint $\iff |\mathrm{tr}(M)| < 2$ (g est dite elliptique)*
- (ii) *l'isométrie g fixe un unique point, appartenant à $\partial X \iff d(g) = 0$ n'est pas atteint $\iff |\mathrm{tr}(M)| = 2$ (g est dite parabolique)*
- (iii) *l'isométrie g fixe deux points, appartenant à $\partial X \iff d(g) > 0$ est atteint $\iff |\mathrm{tr}(M)| > 2$ (g est dite hyperbolique)*

Si g est une isométrie hyperbolique, nous noterons g^+ (resp. g^-) son point fixe attractif (resp. répulsif). Sur la géodésique d'extrémités g^+ et g^- , g agit par translation de g^- vers g^+ de longueur $l(g)$ égale à la distance de translation.

Si l'isométrie g est parabolique fixant le point ξ du bord ∂X , g laisse globalement invariante chaque horosphère et horoboule basée au point ξ .

Soient Γ un sous-groupe d'isométries orientées de X et x un point de X . L'ensemble

$$L_\Gamma = \overline{\Gamma x} \cap \partial X$$

est indépendant du point x choisi. Cet ensemble est l'*ensemble limite* du groupe Γ . C'est un sous-ensemble fermé invariant par le groupe Γ . Cet ensemble limite contient au plus deux points (et dans ce cas, on dit que Γ est un groupe *élémentaire*) ou est un ensemble parfait, en particulier non dénombrable (et le groupe Γ est dit *non-élémentaire*). Si Γ n'est pas élémentaire, alors l'ensemble limite L_Γ est minimal parmi les sous-ensembles de ∂X non-vides, fermés et invariants par Γ .

La propriété suivante est propre aux sous-groupes non-élémentaires du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et n'est pas vraie pour les sous-groupes de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Propriété 1.1.2. *Un sous-groupe non-élémentaire du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est discret ou dense dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Supposons qu'un tel groupe ne soit pas dense. Notons H son adhérence et H° la composante connexe de H contenant Id . Il suffit de montrer que H° est trivial. Puisque ce sous-groupe connexe est strictement inclus dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, il est triangularisable donc élémentaire. L'ensemble limite L_{H° est inclus dans L_H et invariant par H car H° est normalisé par H . Donc cet ensemble limite L_{H° est vide. On en déduit que, si H° n'est pas trivial, il est égal au stabilisateur K d'un point z de \mathbb{H}^2 mais le normalisateur de K est égal à K ce qui contredit le fait que le groupe H soit non-élémentaire. \square

Le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ agit simplement transitivement sur le fibré tangent unitaire $\mathcal{T}^1\mathbb{H}^2$ (par l'application différentielle). En choisissant pour vecteur d'origine le vecteur unitaire v_0 basé au point i et dirigé vers le point ∞ , nous obtenons un difféomorphisme équivariant par la multiplication à gauche par $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$:

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{T}^1\mathbb{H}^2 : g \mapsto g.v_0 = (g.i, \mathcal{T}_i g.v_0).$$

(Quant au groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, il agit simplement transitivement sur le fibré des repères tangents orthonormés, voir le chapitre 2.)

L'image du vecteur v_0 par le flot géodésique au temps t est le vecteur basé au point ie^t et dirigé vers ∞ , c'est-à-dire le vecteur représenté par la matrice

$$\phi^t = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}.$$

Le flot géodésique commute avec l'action (transitive) du groupe des isométries. On en déduit que, via l'identification précédente, le flot géodésique au temps t est représenté par la multiplication à droite par l'élément ϕ^t .

1.2 Groupes fuchsien et kleinien

Nous désignons toujours par X les modèles \mathbb{H}^2 et \mathbb{H}^3 . Les sous-groupes du groupe $Is^+(X)$ des isométries orientées de X qui agissent proprement discontinûment sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 sont les sous-groupes discrets du groupe $Is^+(X)$. Nous appellerons un tel sous-groupe un groupe *fuchsien* ou *kleinien* (selon que l'espace X est \mathbb{H}^2 ou \mathbb{H}^3). Un sous-groupe discret agit librement sur l'espace X si et seulement s'il est sans torsion. Soient Γ un sous-groupe discret et L_Γ son ensemble limite. Les points de cet ensemble peuvent être de différentes sortes :

- Un point ξ de l'ensemble limite est dit *parabolique* s'il est fixé par une isométrie parabolique du groupe Γ (le *rang* de ξ est alors par définition le rang du sous-groupe abélien Γ_ξ , stabilisateur du point ξ dans le groupe Γ).

- Il est dit *parabolique borné* s'il est parabolique et si son stabilisateur Γ_ξ dans Γ agit de façon cocompacte sur $L_\Gamma - \{\xi\}$.

- Il est dit *horosphérique* si toute horoboule centrée en ξ contient un point de l'orbite Γx .

Remarquons que dans le cas de l'espace \mathbb{H}^2 , tout point parabolique est de rang 1 et parabolique borné tandis que dans le cas de l'espace \mathbb{H}^3 , un point parabolique peut être de rang 1 ou 2.

Donnons quelques exemples. Si un point est fixé par une isométrie hyperbolique du groupe Γ , alors c'est un point horosphérique. Le point ∞ et tous les nombres rationnels sont des points paraboliques pour le groupe fuchsien $PSL(2, \mathbb{Z})$. Si deux isométries hyperboliques de X sont sans point fixe commun, alors quitte à prendre une certaine puissance de ces isométries, elles engendrent un sous-groupe discret (dit *de Schottky*) dont l'ensemble limite est strictement inclus dans ∂X et constitué uniquement de points horosphériques (voir par exemple [Mas]).

La proposition suivante regroupe les propriétés de l'ensemble limite d'un groupe discret qui seront utilisées par la suite (voir [Bea, Mas]) (l'assertion (ii) a déjà été énoncée précédemment).

Proposition 1.2.1. *Soit Γ un sous-groupe discret d'isométries orientées de X .*

(i) *L'ensemble limite L_Γ contient tous les points de ∂X fixés par un élément de Γ .*

(ii) *Si le groupe Γ n'est pas élémentaire, l'ensemble L_Γ est l'unique sous-ensemble de ∂X non vide, fermé, invariant par Γ et minimal pour ces trois propriétés.*

(iii) *Si le groupe Γ n'est pas élémentaire, l'ensemble des couples (γ^-, γ^+) où γ parcourt l'ensemble des isométries hyperboliques de Γ est dense dans l'ensemble*

$$L_\Gamma \times^\Delta L_\Gamma = \{(\xi, \xi') \in L_\Gamma : \xi \neq \xi'\}.$$

Certaines classes de groupes kleinien sont caractérisées par leur ensemble limite. Rappelons certaines de ces caractérisations.

- Un sous-groupe discret d'isométries de X est *géométriquement fini* s'il existe dans X un domaine fondamental, pour l'action de ce groupe, qui soit convexe et délimité par un nombre fini de faces. En fait, un groupe discret est géométriquement fini si et seulement si

les points de son ensemble limite sont paraboliques bornés ou horosphériques ([BM, Mas, Dal2]).

- Un groupe discret est un *réseau* (le volume de la variété $\Gamma \backslash X$ est fini) si et seulement si l'ensemble limite L_Γ est égal au bord ∂X et constitué de points horosphériques ou paraboliques bornés.

- C'est un *réseau uniforme* (le quotient $\Gamma \backslash X$ est compact) si et seulement si tous les points du bord ∂X sont horosphériques.

- Si Γ est un sous-groupe discret, la projection sur $\Gamma \backslash \mathcal{T}^1 X$ de l'ensemble des vecteurs unitaires tangents à une géodésique de X dont les deux extrémités appartiennent à l'ensemble limite L_Γ est l'*ensemble non-errant* (relativement à Γ) pour le flot géodésique. Le groupe Γ est *convexe-cocompact* si cet ensemble est compact. Cette propriété est équivalente (pour les groupes discrets non-élémentaires) au fait que l'ensemble limite soit constitué uniquement de points horosphériques.

1.3 Géométrie et compactifications de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$

Considérons la variété $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ muni de la métrique riemannienne définie par

$$\langle u, v \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle_1 + \langle u_2, v_2 \rangle_2$$

où $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ sont des vecteurs de l'espace tangent

$$\mathcal{T}_{(z_1, z_2)}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2) = \mathcal{T}_{z_1} \mathbb{H}^2 \oplus \mathcal{T}_{z_2} \mathbb{H}^2$$

et $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ désigne la métrique riemannienne sur chacun des facteurs. La composante neutre du groupe des isométries de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ est le produit $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ agissant par homographies sur chaque facteur.

On peut distinguer les vecteurs tangents *réguliers*, pour lesquels les deux coordonnées sont non nulles et les vecteurs tangents *singuliers* pour lesquels une coordonnée est nulle. Les vecteurs tangents unitaires sont les vecteurs de la forme (u_1, u_2) où u_1 et u_2 sont des vecteurs tangents à \mathbb{H}^2 et

$$\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 = 1.$$

Les géodésiques paramétrées par longueur d'arc de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ sont les courbes de la forme $(r_1(t), r_2(t))_t$ pour lesquelles $(r_1(t))_t$ et $(r_2(t))_t$ sont des géodésiques de \mathbb{H}^2 parcourues à vitesse respective λ_1 et λ_2 (éventuellement nulle) vérifiant

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1.$$

La géodésique est dite *régulière* si λ_1 et λ_2 sont non nuls et *singulière* sinon. Une géodésique est donc régulière (resp. singulière) si et seulement si elle est tangente à un vecteur régulier (resp. singulier).

Le produit $\delta_1 \times \delta_2$ de deux géodésiques de \mathbb{H}^2 forme un *plat maximal* (une sous-variété totalement géodésique et isométrique à \mathbb{R}^2) de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$. Le produit $r_1 \times r_2$ de deux rayons

géodésiques d'origine z_1 et z_2 et dirigés vers les points ξ_1 et ξ_2 de $\partial\mathbb{H}^2$ forme une *chambre de Weyl* basée au point (z_1, z_2) de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ et dirigée vers le point (ξ_1, ξ_2) de $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$. L'action du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur l'ensemble des rayons géodésiques de \mathbb{H}^2 est simplement transitive donc l'action du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur l'ensemble des chambres de Weyl de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ l'est également.

Le bord géométrique $\partial(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$ de l'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ est l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques asymptotes. Fixons un point o dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$, pour chaque point du bord géométrique, il existe un unique vecteur unitaire tangent en o à un rayon géodésique dirigé vers ce point. On peut donc identifier le bord $\partial(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$ à $\mathcal{T}_o^1(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$:

$$\mathcal{T}_o^1(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2) \longrightarrow \partial(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2) : u \longmapsto u(+\infty).$$

où $u(+\infty)$ désigne la classe du rayon géodésique défini par le vecteur non nul u . On note $\partial_i\mathbb{H}^2$ le bord géométrique du i -ème facteur \mathbb{H}^2 . L'application bijective

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_o^1(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2) &\longrightarrow (\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_+^*) \sqcup \partial_1\mathbb{H}^2 \sqcup \partial_2\mathbb{H}^2 \\ (u_1, u_2) &\longmapsto \begin{cases} \left(u_1(+\infty), u_2(+\infty), \frac{\|u_2\|}{\|u_1\|} \right) & \text{si } u_1, u_2 \neq 0 \\ u_1(+\infty) & \text{si } u_2 = 0 \\ u_2(+\infty) & \text{si } u_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

permet d'exprimer le bord géométrique $\partial(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$ comme la réunion disjointe du *bord régulier*

$$\partial_{reg}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2) = \partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_+^*$$

et du *bord singulier*

$$\partial_{sing}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2) = \partial_1\mathbb{H}^2 \sqcup \partial_2\mathbb{H}^2.$$

On note $\overline{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2}^{vis}$ la compactification (*de visibilité*, ou *géométrique*)

$$(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2) \sqcup \partial(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2).$$

En utilisant les identifications précédentes, nous pouvons décrire la topologie de cette compactification. Une suite $(z_{1,n}, z_{2,n})_n$ dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ converge

- vers un point (ξ_1, ξ_2, λ) de $\partial_{reg}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$ si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(o_2, z_{2,n})}{d(o_1, z_{1,n})} = \lambda \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} z_{i,n} = \xi_i \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

- vers le point ξ_1 de $\partial_1\mathbb{H}^2$ si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(o_2, z_{2,n})}{d(o_1, z_{1,n})} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} z_{1,n} = \xi_1,$$

- et vers le point ξ_2 de $\partial_2\mathbb{H}^2$ si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(o_2, z_{2,n})}{d(o_1, z_{1,n})} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} z_{2,n} = \xi_2.$$

L'ensemble $\mathcal{F} = \partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$ est la *frontière de Furstenberg* de l'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$. En "oubliant" le terme λ on construit une autre compactification :

$$(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2) \sqcup (\mathcal{F} \sqcup \partial_1\mathbb{H}^2 \sqcup \partial_2\mathbb{H}^2).$$

L'action d'un élément $g = (g_1, g_2)$ du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur $\partial(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} g(\xi_1, \xi_2, \lambda) &= (g_1(\xi_1), g_2(\xi_2), \lambda) \quad \text{sur le bord régulier,} \\ g(\xi_1) &= g_1(\xi_1) \quad \text{sur } \partial_1\mathbb{H}^2 \quad \text{et} \quad g(\xi_2) = g_2(\xi_2) \quad \text{sur } \partial_2\mathbb{H}^2. \end{aligned}$$

En particulier, l'action du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur le bord géométrique n'est pas transitive. Cependant, l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur la frontière \mathcal{F} l'est.

Si Γ est un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, on définit également son ensemble limite :

$$L_\Gamma = \overline{\Gamma o} \cap \partial(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$$

qui est la réunion des ensembles limites régulier et singulier

$$L_\Gamma^{reg} = \overline{\Gamma o} \cap \partial_{reg}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2) \quad \text{et} \quad L_\Gamma^{sing} = \overline{\Gamma o} \cap \partial_{sing}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2).$$

L'ensemble L_Γ (resp. L_Γ^{reg} , L_Γ^{sing}) ne dépend pas du choix du point o , est invariant par le groupe Γ et fermé dans $\partial(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$ (resp. $\partial_{reg}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$, $\partial_{sing}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$). Mais ce n'est pas un ensemble minimal en général. L'ensemble L_Γ^{reg} possède cependant la propriété suivante (voir [Ben, Gui, Lin]) que nous utiliserons dans le paragraphe 3.8 :

Théorème 1.3.1. *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Si l'ensemble limite régulier L_Γ^{reg} est non-vide, il est égal au produit*

$$\mathcal{F}_\Gamma \times I \subseteq \mathcal{F} \times \mathbb{R}_+^*$$

où \mathcal{F}_Γ est un sous-ensemble fermé de la frontière \mathcal{F} , invariant par Γ et minimal et I est un intervalle fermé de \mathbb{R}_+^* .

1.4 Action d'un sous-groupe sur un espace homogène

Pour un élément h d'un groupe de Lie H , on note $Z_H(h)$ le centralisateur de h dans H , c'est un sous-groupe fermé de H . La proposition suivante sera utilisée à plusieurs reprises.

Proposition 1.4.1. *Soient Γ un sous-groupe discret d'un groupe de Lie réel G et γ un élément de Γ . Alors l'injection naturelle*

$$Z_\Gamma(\gamma) \backslash Z_G(\gamma) \longrightarrow \Gamma \backslash G : Z_\Gamma(\gamma)g \longrightarrow \Gamma g$$

est un plongement. En particulier, si g est un élément de G et H est le sous-groupe $g^{-1}Z_G(\gamma)g$, alors l'ensemble ΓgH est fermé dans l'espace quotient $\Gamma \backslash G$

Démonstration. L'application

$$Z_{\Gamma}(\gamma)\backslash Z_G(\gamma) \longrightarrow \Gamma\backslash G : Z_{\Gamma}(\gamma)g \longrightarrow \Gamma g$$

est continue et injective. Pour montrer qu'elle est propre, considérons une suite $(g_n)_n$ dans $Z_G(\gamma)$ convergente modulo Γ , il faut montrer qu'elle est également convergente modulo $Z_{\Gamma}(\gamma)$. Il existe une suite $(\gamma_n)_n$ dans Γ et un élément h dans G tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n g_n = h$$

donc la suite $(\gamma_n g_n \gamma g_n^{-1} \gamma_n^{-1})_n$ converge vers $h \gamma h^{-1}$. Mais on a $\gamma_n g_n \gamma g_n^{-1} \gamma_n^{-1} = \gamma_n \gamma \gamma_n^{-1}$ qui appartient au sous-groupe discret Γ (car g_n commute avec γ). Donc la suite $(\gamma_n \gamma \gamma_n^{-1})_n$ est stationnaire :

$$\gamma_n \gamma \gamma_n^{-1} = \gamma_{n_0} \gamma \gamma_{n_0}^{-1} \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

Mais tous les éléments $\gamma_{n_0}^{-1} \gamma_n$ appartiennent au centralisateur $Z_{\Gamma}(\gamma)$ donc la suite $(g_n)_n$ est bien convergente modulo $Z_{\Gamma}(\gamma)$ car la suite des éléments

$$(\gamma_{n_0}^{-1} \gamma_n) g_n = \gamma_{n_0}^{-1} (\gamma_n g_n)$$

converge vers l'élément $\gamma_{n_0}^{-1} h$.

L'image $\Gamma Z_G(\gamma)$ de la projection du groupe $Z_G(\gamma)$ est fermée dans $\Gamma\backslash G$ d'après ce qui précède, il en est donc de même pour l'image $\Gamma Z_G(\gamma)g$ de la projection de l'ensemble $Z_G(\gamma)g$. Mais $Z_G(\gamma)g$ est précisément égal à gH . \square

Nous utiliserons également la propriété suivante qui n'est pas propre à l'action d'un groupe sur un espace homogène.

Propriété 1.4.2. *Soit Γ un groupe dénombrable opérant par homéomorphismes sur un espace localement compact. Alors toute orbite fermée est discrète.*

Démonstration. Notons X l'espace sur lequel le groupe Γ agit et supposons qu'une orbite soit fermée mais ne soit pas discrète dans X . Soit x un point quelconque de cette orbite. Il existe un point y et une suite de points $\gamma_n x$ de l'orbite Γx (γ_n appartenant à Γ) distincts deux à deux et convergeant vers le point y . Puisque l'orbite est fermée, ce point y s'écrit γx avec γ dans Γ et la suite $(\gamma^{-1} \gamma_n x)_n$ converge donc vers x . Elle rencontre tout voisinage de x donc pour la topologie induite, le point x est d'intérieur vide dans l'orbite Γx . On en déduit que l'orbite Γx est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide (ses éléments). Mais cette orbite doit vérifier la propriété de Baire car c'est un sous-ensemble fermé d'un ensemble localement compact. D'où la contradiction. \square

Chapitre 2

Action du groupe unipotent supérieur sur les quotients de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$

Soit G le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et N le sous-groupe unipotent supérieur du groupe G :

$$N = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Nous étudions la dynamique topologique de l'action de N par translation à droite sur le quotient $\Gamma \backslash G$ du groupe G par un groupe kleinien Γ .

2.1 Flot des repères

Nous commençons par interpréter géométriquement l'action du groupe N sur $\Gamma \backslash G$ comme un flot à deux paramètres sur le fibré des repères de la variété hyperbolique $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$.

Notons $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ le fibré des repères orthonormés directs (une orientation étant fixée) de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 . Chaque vecteur tangent u définit une unique géodésique orientée dont les extrémités seront notées $u(+\infty)$ et $u(-\infty)$. Nous dirons qu'un repère (u_0, u_1, u_2) de $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ est *dirigé* vers le point à l'infini $u_0(+\infty)$. Le groupe des isométries orientées de l'espace hyperbolique s'identifie au groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ agissant sur le modèle \mathbb{H}^3 par la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (z, t) = \left(\frac{(az + b)\overline{(cz + d)} + a\bar{c}t^2}{|cz + d|^2 + |c|^2t^2}, \frac{t}{|cz + d|^2 + |c|^2t^2} \right). \quad (2.1)$$

L'action induite sur le bord $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est l'action classique par homographies.

Nous pouvons identifier également l'espace $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ avec le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$: l'application qui associe au repère (u_0, u_1, u_2) le triplet de points

$$(u_0(-\infty), u_0(+\infty), u_1(+\infty))$$

est un homéomorphisme de l'espace $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ sur l'ensemble des triplets de points deux à deux distincts de $\partial\mathbb{H}^3$, ensemble sur lequel le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ agit simplement transitivement. En choisissant comme repère d'origine le repère \mathcal{R}_0 correspondant au triplet $(0, \infty, 1)$ (ce repère est basé au point $o = (0, 1)$ de \mathbb{H}^3), l'application

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{R}\mathbb{H}^3 : g \longmapsto g\mathcal{R}_0$$

permet d'identifier le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ avec ce fibré des repères $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$. Via cette identification, le repère correspondant à l'homographie g est dirigé vers le point $g(\infty)$.

Considérons un repère $u = (u_0, u_1, u_2)$ basé en un point x de \mathbb{H}^3 et dirigé vers le point $\xi = u_0(+\infty)$. La courbure de l'espace \mathbb{H}^3 est constante donc l'application exponentielle définit une isométrie globale, pour la métrique riemannienne induite, entre le sous-espace de $\mathcal{T}_x\mathbb{H}^3$ orthogonal à u_0 et l'horosphère $H_{\xi, x}$ centrée en ξ et passant par x . Pour tout nombre complexe $z = t_1 + it_2$ (t_1 et t_2 réels), l'application

$$\alpha_u : \mathbb{R} \longrightarrow H_{\xi, x} : s \longmapsto \exp_{|H_{\xi, x}}(s(t_1u_1 + t_2u_2))$$

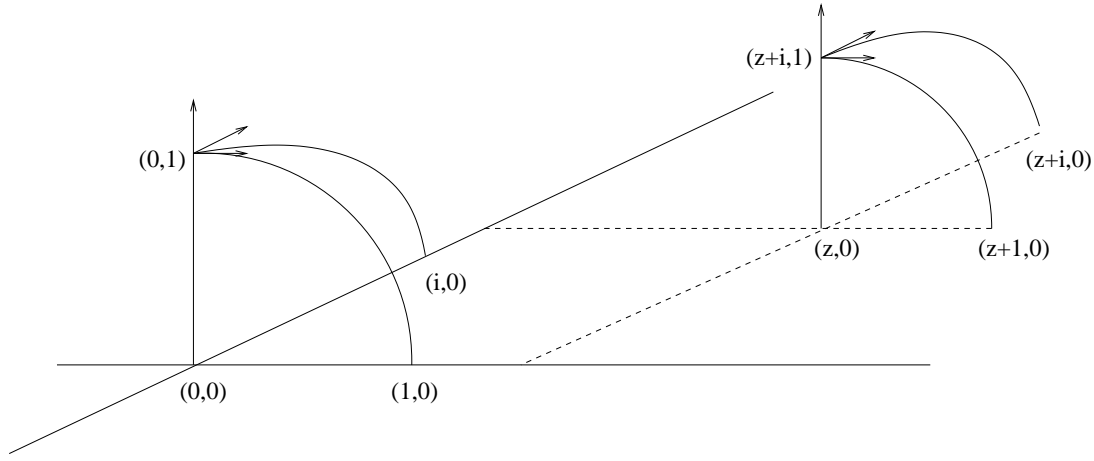
définit une géodésique de $H_{\xi, x}$ (pour la métrique induite) parcourue à la vitesse $|z|$. Le vecteur unitaire u'_0 basé en $\alpha_u(1)$ et dirigé vers ξ et les vecteurs u'_1, u'_2 obtenus par transport parallèle des vecteurs u_1 et u_2 respectivement le long de la courbe α_u entre 0 et 1 forment dans cet ordre un repère orthonormé direct de $\mathcal{T}_{\alpha_u(1)}\mathbb{H}^3$. Cette action de \mathbb{C} sur l'espace $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ définit le *flot horosphérique* $(h^z)_{z \in \mathbb{C}}$ sur l'espace des repères. Ce flot est défini par des notions métriques, il commute donc avec l'action des isométries orientées de l'espace hyperbolique. Soit z un nombre complexe, l'image du repère \mathcal{R}_0 par l'application h^z est le repère correspondant au triplet $(z, \infty, z + 1)$. Ce triplet est l'image du triplet $(0, \infty, 1)$ par l'homographie

$$n_z : \omega \mapsto \omega + z.$$

Considérons maintenant un repère quelconque $g\mathcal{R}_0$ où g est un élément du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Puisque l'action du groupe d'isométries $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ sur $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ commute avec le flot $(h^z)_z$, l'image de ce repère par l'application h^z est le repère $g(h^z(\mathcal{R}_0))$ qui est l'image du repère \mathcal{R}_0 par l'homographie $g \circ n_z$. Le flot horosphérique $(h^z)_z$ est donc représenté par la multiplication à droite par l'élément

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

du sous-groupe unipotent supérieur N de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.



2.2 Spectre complexe des groupes kleinien

Nous définissons ici la *longueur complexe de translation* d'une isométrie hyperbolique de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 . Cette quantité est reliée aux valeurs propres des matrices qui représentent cette isométrie (propriété 2.2.2). Dans l'optique de décrire la dynamique topologique de l'action linéaire d'un groupe kleinien sur le plan vectoriel complexe \mathbb{C}^2 , nous étudions les propriétés du groupe fermé engendré par toutes les valeurs propres d'un groupe kleinien. Nous prouvons que ce *spectre complexe* est égal à \mathbb{C}^* dès que le groupe kleinien n'est ni élémentaire ni conjugué à un sous-groupe d'homographies à coefficients réels.

Définissons le *flot géodésique des repères* $(\phi^s)_{s \in \mathbb{R}}$ sur $\mathcal{R}\mathbb{H}^3$ par le transport parallèle long de la géodésique orientée définie par le premier vecteur du repère. Considérons une isométrie hyperbolique g de \mathbb{H}^3 de point fixe répulsif (resp. attractif) g^- (resp. g^+). Cette isométrie agit par translation sur la géodésique joignant g^- à g^+ , notons $l(g)$ la distance de translation ($l(g) > 0$). Soit (u_0, u_1, u_2) un repère de l'espace tangent basé en un point x de l'axe (g^-, g^+) et dirigé vers g^+ . L'application $\phi^{-l(g)} \circ g$ agit sur $\mathcal{T}_x\mathbb{H}^3$ par isométrie et fixe u_0 donc agit par rotation sur le sous-espace orthogonal à u_0 . Plus généralement, le groupe $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ agit sur l'ensemble des repères orthonormés dont le premier vecteur est u_0 de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot (u_0, u_1, u_2) = (u_0, \cos \theta u_1 + \sin \theta u_2, -\sin \theta u_1 + \cos \theta u_2).$$

On associe à g l'angle de rotation $\theta(g)$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et le nombre complexe $e^{i\theta(g)}$. Le groupe $\text{SO}(2)$ étant abélien, l'angle $\theta(g)$ est indépendant des vecteurs u_1 et u_2 . Il est aussi indépendant du choix du point de base sur l'axe (g^-, g^+) .

Définition. La quantité $l_{\mathbb{C}}(g) = l(g) + i\theta(g)$ (appartenant à $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$) est la *longueur complexe de translation* de l'isométrie hyperbolique g .

Définition. Soit Γ un sous-groupe du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Le spectre complexe S_Γ du groupe Γ est le sous-groupe fermé de \mathbb{C}^* engendré par l'ensemble

$$\{e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma)} : \gamma \in \Gamma, \gamma \text{ hyperbolique}\}.$$

Le principal résultat démontré dans ce paragraphe est le théorème suivant.

Théorème 2.2.1. *Soit Γ un groupe kleinien non élémentaire et sans torsion.*

(i) *Si le groupe Γ n'est pas conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$, alors son spectre S_Γ est égal à \mathbb{C}^* .*

(ii) *Si le groupe Γ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$, mais pas à un sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, alors son spectre S_Γ est égal à \mathbb{R}^* .*

(iii) *Si le groupe Γ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, alors son spectre S_Γ est égal à \mathbb{R}_+^* .*

Ce théorème redémontre la “non-arithméticité” du spectre des longueurs d'un groupe d'isométries d'un espace hyperbolique (voir [Dal1]) en dimension 2 et l'étend en dimension 3. L'article [PRap] présente un résultat proche en termes de densité de Zariski.

Nous utiliserons par la suite le birapport sur $\hat{\mathbb{C}}$ dont nous rappelons une définition. Le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ agit (par homographies) simplement transitivement sur les triplets de points de $\hat{\mathbb{C}}$ deux à deux distincts. Si a, b, c, d sont quatre points de $\hat{\mathbb{C}}$, a, b, c étant deux à deux distincts, le birapport $[a, b, c, d]$ est la valeur $h(d)$ où h est l'unique homographie envoyant le triplet (a, b, c) sur le triplet $(0, \infty, 1)$:

$$[a, b, c, d] = \frac{d-a}{d-b} : \frac{c-a}{c-b}.$$

Le birapport est invariant par homographie.

La propriété suivante exprime la longueur complexe de translation d'une isométrie hyperbolique, à l'aide d'un birapport. (On obtient la version complexe d'une égalité de J.-P. Otal et I. Kim vraie dans un cadre plus général mais à termes réels. [Kim, Ota]).

Propriété 2.2.2. *Soit g une isométrie hyperbolique de point fixe attractif (resp. répulsif) g^+ (resp. g^-) et de valeur propre dominante λ . Soit ξ un point de $\hat{\mathbb{C}}$ distinct des points g^+ et g^- , alors :*

$$[g^-, g^+, \xi, g(\xi)] = \lambda^2 = e^{l_{\mathbb{C}}(g)}.$$

Démonstration. Considérons, pour un nombre complexe λ vérifiant $|\lambda| > 1$, l'isométrie hyperbolique g représentée par la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$. Les points fixes de l'isométrie g sont $g^- = 0$ et $g^+ = \infty$ et la longueur de translation $l_{\mathbb{C}}(g)$ est égale à $\ln |\lambda^2| + i \arg(\lambda^2)$. Pour tout point ξ de $\hat{\mathbb{C}}$ différent de 0 et ∞ :

$$[g^-, g^+, \xi, g(\xi)] = [0, \infty, \xi, \lambda^2 \xi] = \lambda^2 = e^{l_{\mathbb{C}}(g)}.$$

La propriété est donc vraie pour g . Toute isométrie hyperbolique est conjuguée à une isométrie de cette forme et les termes de l'égalité sont des invariants de conjugaison donc la propriété est vraie pour toute isométrie hyperbolique. \square

Une homographie g est holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}} - \{\infty, h^{-1}(\infty)\}$, la définition suivante étend la notion de nombre dérivé à toute la sphère de Riemann.

Définition. Soient g une isométrie de \mathbb{H}^3 représentée par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ et ξ un point de $\hat{\mathbb{C}}$, le nombre dérivé de g en ξ est le nombre complexe non nul $g'(\xi)$ défini par :

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \frac{1}{(c\xi + d)^2} & \text{si } \xi \notin \{\infty, g^{-1}(\infty)\}, \\ g'(\xi) &= \frac{1}{c^2} & \text{si } \xi = \infty \neq g^{-1}(\infty), \\ g'(\xi) &= \frac{1}{(a\xi + b)^2} & \text{si } \xi = g^{-1}(\infty) \neq \infty, \\ g'(\xi) &= \frac{1}{a^2} = d^2 & \text{si } \xi = \infty = g^{-1}(\infty). \end{aligned}$$

Nous utiliserons les deux propriétés suivantes du nombre dérivé d'une homographie.

Propriété 2.2.3. Soit g un élément du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

(i) Si g est une isométrie hyperbolique de point fixe attractif (resp. répulsif) g^+ (resp. g^-), alors

$$g'(g^\pm) = e^{\mp l_{\mathbb{C}}(g)}.$$

(ii) Si ξ, ξ' sont deux points de $\hat{\mathbb{C}}$ distincts des points ∞ et $g^{-1}(\infty)$, alors

$$(g(\xi) - g(\xi'))^2 = g'(\xi)g'(\xi')(\xi - \xi')^2.$$

Démonstration. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ représentant l'isométrie g .

(i) Supposons g hyperbolique. Si le point fixe attractif (resp. répulsif) de g est le point ∞ , alors $c = 0$ et a^2 (resp. a^{-2}) est égal à $e^{l_{\mathbb{C}}(g)}$ d'après la propriété 2.2.2 d'où l'égalité. Si le point fixe attractif (resp. répulsif) de g est un point ξ de $\partial\mathbb{H}^3 - \{\infty\}$, alors le vecteur $\begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice précédente pour la valeur propre $c\xi + d$. Mais le carré (resp. l'inverse du carré) de cette valeur propre est égal à $e^{l_{\mathbb{C}}(g)}$ d'après la propriété 2.2.2 et l'égalité est encore vérifiée.

(ii) Il suffit d'effectuer le calcul suivant :

$$\begin{aligned} (g(\xi) - g(\xi'))^2 &= \left(\frac{a\xi + b}{c\xi + d} - \frac{a\xi' + b}{c\xi' + d} \right)^2 = \left(\frac{(a\xi + b)(c\xi' + d) - (a\xi' + b)(c\xi + d)}{(c\xi + d)(c\xi' + d)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\xi - \xi'}{(c\xi + d)(c\xi' + d)} \right)^2 = g'(\xi)g'(\xi')(\xi - \xi')^2. \end{aligned}$$

□

Les lemmes 2.2.4 et 2.2.5 qui suivent permettent de mettre en relation les points de l'ensemble limite d'un groupe kleinien avec son spectre complexe. Ces deux lemmes sont adaptés des références [Dal2, Kim, Ota].

Lemme 2.2.4. *Soient γ_1 et γ_2 deux isométries hyperboliques dont les points fixes respectifs γ_1^\pm et γ_2^\pm sont deux à deux distincts, alors :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma_1^n) + l_{\mathbb{C}}(\gamma_2^n) - l_{\mathbb{C}}(\gamma_1^n \gamma_2^n)} = [\gamma_1^-, \gamma_2^-, \gamma_2^+, \gamma_1^+]^2.$$

Démonstration. Nous adaptons ici la démonstration de l'article [Dal2]. L'énoncé est invariant par conjugaison. La démonstration consiste à conjuguer simultanément les isométries γ_1 et γ_2 et à appliquer la propriété 2.2.3 (ii). Les isométries γ_1 et γ_2 sont hyperboliques et n'ont aucun point fixe en commun, il existe donc un entier n_0 tel que, pour tout entier n supérieur à n_0 , le groupe engendré par γ_1^n et γ_2^n soit un groupe de Schottky (en particulier un groupe libre et constitué uniquement d'isométries hyperboliques), voir [Mas] ou [GH]. Pour un tel entier n , notons ξ_n le point fixe attractif de l'isométrie $\gamma_1^n \gamma_2^n$. Ce point ξ_n converge vers le point γ_1^+ lorsque n tend vers $+\infty$. L'ensemble

$$\{\gamma_1^-, \gamma_2^-\} \cup \{\xi_n : n \geq n_0\} \cup \{\gamma_2^n(\xi_n) : n \geq n_0\}$$

est dénombrable donc évite un point de $\hat{\mathbb{C}}$. Il existe une homographie envoyant ce point sur le point ∞ . Donc, quitte à conjuguer γ_1 et γ_2 par cette homographie, nous pouvons supposer que l'ensemble précédent ne contient pas le point ∞ . D'après la propriété 2.2.3 (i), on a donc :

$$e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma_1^n) + l_{\mathbb{C}}(\gamma_2^n) - l_{\mathbb{C}}(\gamma_1^n \gamma_2^n)} = (\gamma_1^n)'(\gamma_1^-)(\gamma_2^n)'(\gamma_2^-)(\gamma_1^n \gamma_2^n)'(\xi_n).$$

Pour tout n , chaque homographie est holomorphe au point considéré. En particulier :

$$(\gamma_1^n \gamma_2^n)'(\xi_n) = (\gamma_1^n)'(\gamma_2^n(\xi_n))(\gamma_2^n)'(\xi_n).$$

En appliquant la propriété 2.2.3 (ii), on obtient :

$$e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma_1^n) + l_{\mathbb{C}}(\gamma_2^n) - l_{\mathbb{C}}(\gamma_1^n \gamma_2^n)} = \left(\frac{(\gamma_1^n)(\gamma_1^-) - (\gamma_1^n)(\gamma_2^n(\xi_n))}{\gamma_1^- - \gamma_2^n(\xi_n)} \right)^2 \left(\frac{(\gamma_2^n)(\gamma_2^-) - (\gamma_2^n)(\xi_n)}{\gamma_2^- - \xi_n} \right)^2$$

c'est-à-dire

$$e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma_1^n) + l_{\mathbb{C}}(\gamma_2^n) - l_{\mathbb{C}}(\gamma_1^n \gamma_2^n)} = [\xi_n, \gamma_2^n(\xi_n), \gamma_2^-, \gamma_1^-]^2.$$

La suite $(\xi_n)_n$ tend vers le point γ_1^+ et la suite $(\gamma_2^n(\xi_n))_n$ tend vers γ_2^+ car la suite de fonctions $(\gamma_2^n)_n$ tend uniformément vers γ_2^+ sur les compacts de $\hat{\mathbb{C}} - \{\gamma_2^-\}$. On obtient le résultat par continuité du birapport. \square

Lemme 2.2.5. *Soient Γ un groupe kleinien non élémentaire et L_Γ son ensemble limite. Soient $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ quatre points de L_Γ deux à deux distincts, alors le nombre*

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]^2$$

appartient au spectre complexe S_Γ .

Démonstration. Les points ξ_1, ξ_2, ξ_3 et ξ_4 de l'ensemble limite L_Γ sont deux à deux distincts. D'après la proposition 1.2.1 (iii), il existe deux suites $(\gamma_{1,n})_n$ et $(\gamma_{2,n})_n$ d'isométries hyperboliques du groupe Γ vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_{1,n}^- = \xi_1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_{1,n}^+ = \xi_4, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_{2,n}^- = \xi_2, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_{2,n}^+ = \xi_3.$$

A partir d'un certain rang n_0 , les isométries hyperboliques $\gamma_{1,n}$ et $\gamma_{2,n}$ n'ont pas de point fixe en commun. Pour tout entier n fixé supérieur à n_0 , nous avons donc d'après le lemme précédent 2.2.4 :

$$[\gamma_{1,n}^-, \gamma_{2,n}^-, \gamma_{2,n}^+, \gamma_{1,n}^+]^2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma_{1,n}^k) + l_{\mathbb{C}}(\gamma_{2,n}^k) - l_{\mathbb{C}}(\gamma_{1,n}^k \gamma_{2,n}^k)}.$$

En passant à la limite en n , le terme $[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]^2$ appartient donc à l'adhérence $\overline{S_\Gamma}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$ du sous-groupe S_Γ . Puisque S_Γ est fermé dans \mathbb{C}^* , cette adhérence n'est autre que la réunion de S_Γ et l'ensemble $\{0, \infty\}$ de $\hat{\mathbb{C}}$. Puisque les quatre points ξ_1, ξ_2, ξ_3 et ξ_4 ont été supposés distincts deux à deux, leur birapport n'est égal ni à 0 ni à ∞ d'où la conclusion. \square

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.2.1.

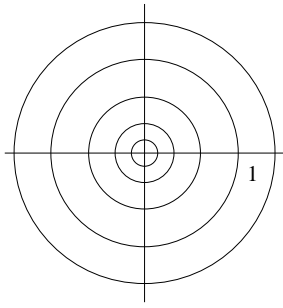
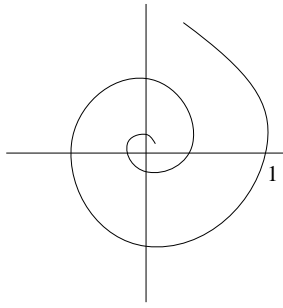
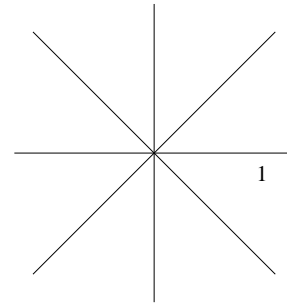
Démonstration du théorème 2.2.1. Le sous-groupe S_Γ (qui est le plus petit sous-groupe fermé de \mathbb{C}^* contenant l'ensemble $\{e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma)} : \gamma \in \Gamma, \gamma \text{ hyperbolique}\}$) est un sous-groupe de Lie réel de \mathbb{C}^* . Il faut montrer que si la dimension de ce sous-groupe n'est pas 2 alors S_Γ est égal à \mathbb{R}^* ou \mathbb{R}_+^* .

Supposons que le sous-groupe S_Γ soit discret dans \mathbb{C}^* . Soient γ une isométrie hyperbolique du groupe Γ et ξ un point de l'ensemble limite L_Γ distinct des points fixes γ^+ et γ^- . Pour tout entier positif n , le point $\gamma^n(\xi)$ appartient également à l'ensemble limite L_Γ donc le lemme 2.2.5 assure que le nombre $[\gamma^-, \xi, \gamma^+, \gamma^n(\xi)]^2$ appartient au sous-groupe S_Γ . Comme le point $\gamma^n(\xi)$ tend vers γ^+ lorsque n tend vers $+\infty$, le birapport $[\gamma^-, \xi, \gamma^+, \gamma^n(\xi)]$ tend vers 1 donc (le sous-groupe a été supposé discret) la suite des points $[\gamma^-, \xi, \gamma^+, \gamma^n(\xi)]^2$ est constante (et égale à 1) à partir d'un certain rang ce qui est impossible car la suite $(\gamma^n(\xi))_n$ n'est pas constante.

Supposons maintenant que S_Γ soit un sous-groupe de dimension 1. La composante connexe S_Γ° contenant 1 est un sous-groupe à un paramètre de \mathbb{C}^* de la forme :

$$\mathbb{R} \longrightarrow S_\Gamma^\circ : t \longmapsto e^{\omega t}$$

avec ω un nombre complexe non nul. Selon le nombre ω , la composante connexe du groupe S_Γ est de la forme suivante :

(A) $\text{Re}w = 0$ (B) $\text{Re}w \neq 0$
 $\text{Im}w \notin 2i\pi\mathbb{Z}$ (C) $\text{Re}w \neq 0$
 $\text{Im}w \in 2i\pi\mathbb{Z}$

Soient ξ_1, ξ_2, ξ_3 trois points de l'ensemble limite L_Γ , deux à deux distincts. Considérons l'homographie h suivante :

$$h : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} : \eta \longmapsto [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta]$$

La notation h^2 désignera l'application $\eta \mapsto (h(\eta))^2$ (avec $\infty^2 = \infty$). C'est un difféomorphisme local en tout point de $\hat{\mathbb{C}} - \{\xi_1, \xi_2\}$. D'après le lemme 2.2.5, $h^2(\eta)$ appartient à S_Γ pour tout point η dans l'ensemble $L_\Gamma - \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$.

Montrons que les cas A et B sont impossibles. Supposons que S_Γ soit un tel sous-groupe. Comme $h^2(\xi_3)$ est égal à 1, il existe un voisinage connexe U de ξ_3 tel que $h^2(U \cap L_\Gamma)$ soit inclus dans un voisinage de 1 dans S_Γ . Au voisinage de ξ_3 l'ensemble limite L_Γ est donc inclus dans une sous-variété de dimension 1 (car h^2 est un difféomorphisme local en ξ_3) : il existe un ouvert connexe U' et une sous-variété P contenant tous les deux ξ_3 tels que

$$U' \cap L_\Gamma \subseteq U' \cap P.$$

Par densité de $\Gamma(\xi_1)$ dans L_Γ , il existe une homographie γ dans le groupe Γ telle que $\gamma(\xi_1)$ appartienne à U' . L'application γ est un difféomorphisme de $\hat{\mathbb{C}}$ et préserve L_Γ donc il existe un voisinage V de ξ_1 envoyé dans U' et vérifiant :

$$V \cap L_\Gamma \subseteq V \cap M$$

où M désigne la sous-variété $\gamma^{-1}(P)$. Le point ξ_1 sépare $M \cap V$ en deux composantes connexes (quitte à restreindre V). Soit M^+ une de ces deux composantes telle que ξ_1 soit la limite d'une suite $(\eta_n)_n$ de points appartenant à $M^+ \cap L_\Gamma$. L'application h étant un difféomorphisme, $h(M)$ est une sous-variété contenant 0 donc quitte à restreindre V , $h^2(M^+)$ est une sous-variété dont un bord est l'origine 0 et les points $h^2(\eta_n)$ appartiennent à $S_\Gamma \cap h^2(M^+)$. Si S_Γ est du type A ou B, on peut choisir n_0 suffisamment grand de façon que S_Γ et $h^2(M^+)$ soient deux sous-variétés transverses en $h^2(\eta_{n_0})$. Il existe alors un voisinage V' de $h^2(\eta_{n_0})$ tel que

$$V' \cap S_\Gamma \cap h^2(M^+) = \{h^2(\eta_{n_0})\}$$

et quitte à restreindre ce voisinage, on peut supposer que h^2 possède un inverse local défini de l'ouvert V' sur un ouvert W . Soit η' un point de $W \cap L_\Gamma$, alors η' appartient à M^+ donc $h^2(\eta')$ appartient à

$$h^2(W \cap L_\Gamma \cap M^+) = h^2(W) \cap h^2(L_\Gamma) \cap h^2(M^+) \subseteq V' \cap S_\Gamma \cap h^2(M^+).$$

Donc $\eta' = \eta_{n_0}$ ce qui est impossible car η_{n_0} n'est pas isolé dans L_Γ .

Il reste à montrer que, dans le cas C, le groupe S_Γ est égal à \mathbb{R}_+^* ou à \mathbb{R}^* et que le groupe Γ est conjugué à un sous-groupe de $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$. Comme $h(\xi_3) = 1$, il existe un voisinage U de ξ_3 dans $\hat{\mathbb{C}}$ vérifiant

$$h(U) \cap S_\Gamma \subseteq \mathbb{R}_+^*.$$

Puisque $h^2(L_\Gamma - \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\})$ est inclus dans S_Γ , $h^2(U \cap L_\Gamma)$ est inclus dans \mathbb{R}_+^* . On en déduit qu'au voisinage de ξ_3 , l'ensemble limite L_Γ est contenu dans la sous-variété $h^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$. Considérons une isométrie hyperbolique γ de Γ et un point de l'ensemble limite L_Γ distinct des points fixes γ^+ et γ^- . Appliquons le raisonnement précédent avec $\xi_1 = \gamma^-$, $\xi_2 = \xi$ et $\xi_3 = \gamma^+$: il existe un voisinage de γ^+ dans L_Γ envoyé sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par h . Donc il existe un rang n_0 tel que le birapport $[\gamma^-, \xi, \gamma^+, \gamma^n(\xi)]$ appartienne à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ pour tout $n \geq n_0$.

En composant avec l'homographie $z \mapsto \frac{z}{z-1}$ qui préserve $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on obtient

$$[\gamma^-, \gamma^+, \xi, \gamma^n(\xi)] \in \mathbb{R}^* \text{ pour tout } n \geq n_0,$$

c'est-à-dire

$$e^{nl_C(\gamma)} \in \mathbb{R}^* \text{ pour tout } n \geq n_0$$

d'après la propriété 2.2.2. On en déduit que $e^{l_C(\gamma)}$ appartient à \mathbb{R}^* donc que le groupe S_Γ est \mathbb{R}^* ou \mathbb{R}_+^* . Il ne reste plus qu'à montrer que le groupe Γ est conjugué dans $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ à un sous-groupe de $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$.

Puisque le point $h^2(\eta)$ appartient à S_Γ pour tout point η de $L_\Gamma - \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ et les points ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 sont envoyés par h respectivement sur 0, 1 et ∞ , l'ensemble limite L_Γ est envoyé par h dans la réunion $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Donc en remplaçant le groupe Γ par son conjugué $\Gamma^* = h\Gamma h^{-1}$, on obtient :

$$L_{\Gamma^*} \subseteq \mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Le cercle $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et (éventuellement) le cercle $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sont les seuls cercles de $\hat{\mathbb{C}}$ contenant une infinité de points de l'ensemble limite L_{Γ^*} donc tout élément γ de Γ^* préserve globalement $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ou échange ces deux cercles. Dans le premier cas, l'homographie γ appartient à $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$. Dans le second cas, γ fixe ou échange les points d'intersection 0 et ∞ . Elle ne peut pas les échanger (sinon elle fixerait un point de la géodésique qui les relie) donc cette homographie est représentée par une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$. Puisque λ^2 (ou λ^{-2}) est égal à $e^{l_C(\gamma)}$ qui est un nombre réel, l'homographie γ appartient à $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$. Enfin, supposons que S_Γ soit le groupe \mathbb{R}_+^* , le groupe Γ est conjugué à un sous-groupe Γ^* de $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ d'après ce qui précède. Si le groupe Γ^* n'est pas contenu dans le groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, il existe dans Γ^* une homographie γ représentée par une matrice réelle de déterminant -1. Une telle matrice possède deux valeurs propres réelles distinctes λ et $-\lambda^{-1}$. Donc l'homographie γ est aussi représentée par une matrice complexe conjuguée à la matrice $\begin{pmatrix} i\lambda & 0 \\ 0 & i\lambda^{-1} \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont de carré négatif. Ce qui contredit le fait que le spectre S_Γ soit le groupe \mathbb{R}_+^* . \square

2.3 Action linéaire sur le plan complexe

Notons G le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. L'application suivante permet d'identifier le quotient G/N à l'espace $\mathbb{C}^2 - \{0\}/\pm \mathrm{Id}$, noté \mathcal{V} (e_1 désigne le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^2) :

$$G/N \longrightarrow \mathcal{V} : gN \longmapsto g(\pm e_1).$$

Cette application conjugue l'action de G par multiplication à gauche sur G/N à l'action linéaire sur \mathcal{V} . Soient Γ un groupe kleinien et L_Γ son ensemble limite. Notons Ω_Γ l'ensemble des éléments g du groupe G tels que le point $g(\infty)$ appartienne à L_Γ . L'ensemble Ω_Γ est un sous-ensemble fermé et invariant par les actions de Γ (par multiplication à gauche) et du groupe unipotent N (par multiplication à droite). Il est envoyé par l'application précédente sur l'ensemble, noté \mathcal{V}_Γ , (invariant par Γ) des "vecteurs" de \mathcal{V} dont la direction projective appartient au sous-ensemble L_Γ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Dans ce paragraphe nous caractérisons les orbites sous l'action de Γ denses dans ce "cône" complexe. Pour établir ce résultat de densité, nous utilisons les propriétés de minimalité de l'ensemble limite pour la composante projective et le théorème 2.2.1 pour la composante "radiale".

Auparavant, nous déduisons du théorème 2.2.1 une propriété de minimalité de l'action d'un groupe kleinien sur l'espace projectif $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (dans l'esprit de [CG1]). L'espace projectif réel de l'espace vectoriel \mathbb{C}^2 est $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ et l'application canonique

$$\pi : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^2 - \{0\}/\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{C}^2 - \{0\}/\mathbb{C}^* = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

est une fibration sur la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Tout sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ par la représentation

$$\rho : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{PSL}(4, \mathbb{R})$$

induite par l'identification entre \mathbb{C}^2 et \mathbb{R}^4 . remarquons que le groupe $\rho(\Gamma)$ n'est pas Zariski-dense mais vérifie les hypothèses de proximalité de [CG1].

Proposition 2.3.1. *Soit Γ un groupe kleinien non élémentaire et non conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. Alors l'ensemble $\pi^{-1}(L_\Gamma)$ est minimal parmi les sous-ensembles non vides de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, fermés et invariants par $\rho(\Gamma)$.*

Démonstration. Notons $[v]$ la classe dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ d'un vecteur v de \mathcal{V} . L'image réciproque par π de chaque point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est une orbite pour l'action par multiplication du groupe \mathbb{U} des nombres complexes de module 1. Le sous-ensemble $\pi^{-1}(L_\Gamma)$ de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ est invariant par $\rho(\Gamma)$ et compact. D'après le lemme de Zorn, il contient un ensemble minimal M . Les actions des groupes \mathbb{U} et Γ commutent donc, pour tout nombre complexe $e^{i\theta}$ dans \mathbb{U} , l'ensemble $e^{i\theta}M$ est un ensemble minimal. Les ensembles M et $e^{i\theta}M$ sont donc égaux ou disjoints. Le sous-groupe T de \mathbb{U} défini par

$$T = \{e^{i\theta} \in \mathbb{U} \mid e^{i\theta}M = M\}$$

décrit donc la fibre de $\pi|_M$:

$$\pi|_M^{-1}(\pi([v])) = T[v] \quad \text{pour tout } [v] \text{ dans } M.$$

C'est un sous-groupe fermé de \mathbb{U} . Par minimalité de L_Γ , la projection de M par π est L_Γ . Il suffit donc de montrer que le groupe T contient l'ensemble

$$\{e^{i\theta(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma, \gamma \text{ hyperbolique}\}$$

puisque le groupe engendré par cet ensemble est dense dans \mathbb{U} d'après le théorème 2.2.1. Soit γ une isométrie hyperbolique du groupe Γ de point fixe attractif γ^+ et de valeur propre dominante λ . Puisque $\pi(M)$ est égal à L_Γ , il existe un vecteur v tel que $[v]$ appartienne à M et $\pi([v])$ soit égal à γ^+ . Le vecteur v est donc un vecteur propre (complexe) pour γ et

$$\gamma^2[v] = [\gamma^2 v] = [\lambda^2 v] = \frac{\lambda^2}{|\lambda^2|} [v] = e^{i\theta(\gamma)} [v]$$

appartient à l'ensemble M . Les deux ensembles minimaux M et $e^{i\theta(\gamma)}M$ n'étant pas disjoints, ils sont égaux donc $e^{i\theta(\gamma)}$ appartient au groupe T . \square

Enonçons maintenant la caractérisation suivante des orbites denses. Soit Γ un groupe kleinien. Nous rappelons que \mathcal{V} désigne l'espace $\mathbb{C}^2 - \{0\} / \pm \text{Id}$ et que \mathcal{V}_Γ désigne l'ensemble des "vecteurs" de \mathcal{V} dont la direction projective appartient à l'ensemble limite L_Γ du groupe kleinien Γ

Théorème 2.3.2. *Soit Γ un sous-groupe kleinien non-élémentaire que l'on suppose non conjugué à un sous-groupe de $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$. Soit v un élément de \mathcal{V}_Γ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *l'orbite Γv est dense dans \mathcal{V}_Γ ,*
- (ii) *la direction projective de v est un point limite horosphérique pour le groupe Γ ,*
- (iii) *il existe une suite $(\gamma_n)_n$ dans Γ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\gamma_n v\| = 0$.*

Afin d'énoncer ce résultat dans le cadre plus classique de l'action linéaire sur le plan complexe \mathbb{C}^2 , nous considérons un sous-groupe discret Γ de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ qui contient la matrice $-\text{Id}$. Notons V_Γ l'ensemble des vecteurs non nuls de \mathbb{C}^2 dont la direction projective appartient à l'ensemble limite du groupe Γ (V_Γ est le relevé de \mathcal{V}_Γ dans $\mathbb{C}^2 - \{0\}$). Nous avons alors la forme équivalente.

Théorème 2.3.3. *Soit Γ un sous-groupe discret non-élémentaire de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, contenant $-\text{Id}$, et que l'on ne suppose pas conjugué à un sous-groupe de matrices réelles. Soit v un vecteur non nul de V_Γ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *l'orbite Γv est dense dans V_Γ ,*
- (ii) *la direction projective du vecteur v est un point limite horosphérique pour le groupe Γ ,*
- (iii) *l'origine 0 de \mathbb{C}^2 est adhérente à l'orbite Γv .*

Ce théorème généralise le résultat de L. Greenberg ([Gre]) sur l'action d'un réseau uniforme de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. La propriété suivante démontre l'équivalence entre les assertions (ii) et (iii). Soit e_1 le premier vecteur de la base canonique, la notation $\|\cdot\|$ désignera la norme hermitienne standard sur \mathbb{C}^2 .

Propriété 2.3.4. *Le point de l'espace \mathbb{H}^3 de coordonnées $(0, 1)$ est noté o . Soit g une matrice de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, notons v le vecteur ge_1 . Alors*

$$\|v\|^2 = e^{\beta_{g(\infty)}(o, g.o)}$$

et le point $g(\infty)$ est un point limite horosphérique si et seulement si l'adhérence de l'orbite Γv contient l'origine.

Démonstration. Montrons d'abord l'égalité. On a :

$$\beta_{g(\infty)}(o, g(o)) = \beta_\infty(g^{-1}.o, o) = -\ln t$$

où $g^{-1}.o = (z, t)$ appartient à $\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^*$. Si g est égale à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a :

$$\|v\|^2 = |a|^2 + |c|^2 \quad \text{et} \quad t = \frac{1}{|a|^2 + |c|^2}$$

d'après la formule 2.1 qui décrit l'action du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ sur \mathbb{H}^3 . Pour démontrer l'équivalence, remarquons que, pour tout élément γ du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$:

$$\|\gamma v\|^2 = e^{\beta_{\gamma g(\infty)}(o, \gamma g.o)} = e^{\beta_{g(\infty)}(\gamma^{-1}.o, g.o)}.$$

Pour toute suite $(\gamma_n)_n$ dans Γ , on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\gamma_n v\|^2 = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\beta_{g(\infty)}(\gamma_n^{-1}.o, g.o)} = -\infty$$

$$\iff g(\infty) \text{ est un point limite horosphérique.}$$

□

L'implication $(i) \Rightarrow (iii)$ est évidente. Il suffira donc d'établir l'implication réciproque pour démontrer le théorème 2.3.2.

Dans la suite on identifiera souvent $\mathbb{C}^2 - \{0\} / \pm \mathrm{Id}$ avec le produit $\hat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^* / \{\pm \mathrm{Id}\}$ de la façon suivante :

$$\mathbb{C}^2 - \{0\} / \pm \mathrm{Id} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^* / \{\pm \mathrm{Id}\} : \pm \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longmapsto (\xi, \alpha^2)$$

où $\xi = \frac{z_1}{z_2}$ appartient à $\hat{\mathbb{C}}$ ($\xi = \infty$ si $z_2 = 0$) et $\alpha^2 = z_2^2$ si $z_2 \neq 0$ ($\alpha^2 = z_1^2$ si $z_2 = 0$).

Remarquons que $\|v\|^2 \geq |\alpha|^2$.

L'action du groupe d'isométries sur $\mathbb{C}^2 - \{0\} / \pm \mathrm{Id}$ s'exprime alors ainsi :

Lemme 2.3.5. *Soient g une homographie et (ξ, α^2) dans $\mathbb{C}^2 - \{0\} / \pm \mathrm{Id}$, alors :*

$$g(\xi, \alpha^2) = (g(\xi), \alpha^2 g'(\xi)^{-1}).$$

Démonstration. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ représentant l'isométrie g . On notera \simeq l'identification entre $\mathbb{C}^2 - \{0\} / \pm \mathrm{Id}$ et $\hat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^* / \{\pm \mathrm{Id}\}$.

Si $\xi \neq \infty$ et $g(\xi) \neq \infty$:

$$g(\xi, \alpha^2) \simeq \begin{pmatrix} \alpha(a\xi + b) \\ \alpha(c\xi + d) \end{pmatrix} \simeq \left(\frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \alpha^2(c\xi + d)^2 \right) = (g(\xi), \alpha^2 g'(\xi)^{-1}).$$

Si $\xi = \infty$ et $g(\xi) \neq \infty$:

$$g(\infty, \alpha^2) \simeq \begin{pmatrix} a\alpha \\ c\alpha \end{pmatrix} \simeq \left(\frac{a}{c}, \alpha^2 c^2 \right) = (g(\infty), \alpha^2 g'(\infty)^{-1}).$$

Si $\xi = \infty$ et $g(\xi) = \infty$:

$$g(\infty, \alpha^2) \simeq \begin{pmatrix} a\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \simeq (\infty, \alpha^2 a^2) = (g(\infty), \alpha^2 g'(\infty)^{-1}).$$

Si $\xi \neq \infty$ et $g(\xi) = \infty$:

$$g(\xi, \alpha^2) \simeq \begin{pmatrix} (a\xi + b)\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \simeq (\infty, \alpha^2(a\xi + b)^2) = (g(\xi), \alpha^2 g'(\xi)^{-1}).$$

□

Lemme 2.3.6. Soient γ_1 et γ_2 deux isométries hyperboliques de points fixes respectifs γ_i^\pm ($i = 1, 2$). On suppose que ces quatre points sont distincts deux à deux et distincts du point ∞ . Il existe une suite $(r_n)_n$ non bornée d'entiers positifs et une suite $(s_n)_n$ d'entiers relatifs telles que la suite de termes $r_n l_{\mathbb{C}}(\gamma_2) + s_n l_{\mathbb{C}}(\gamma_1)$ converge vers 0.

De plus, si $v = (\gamma_1^+, \alpha^2)$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_2^{r_n} \gamma_1^{s_n} v = \left(\gamma_2^+, \alpha^2 \left(\frac{\gamma_2^- - \gamma_1^+}{\gamma_2^- - \gamma_2^+} \right)^2 \right).$$

Démonstration. Montrons tout d'abord l'existence des deux suites d'entiers. Posons $\mu_i = e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma_i)}$ pour $i = 1, 2$. Si le nombre

$$\frac{\ln |\mu_1|}{\ln |\mu_2|} = \frac{p}{q}$$

est rationnel ($p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$), alors

$$|\mu_1^q \mu_2^{-p}| = e^{q \ln |\mu_1| - p \ln |\mu_2|} = 1 \quad \text{et} \quad \mu_1^{qn} \mu_2^{-pn} = 1.$$

On pose alors $r_n = qn$ et $s_n = -pn$ pour tout n .

Si $\frac{\ln |\mu_1|}{\ln |\mu_2|}$ est irrationnel, pour tout n dans \mathbb{N} , il en est de même de $\frac{\ln |\mu_1^n|}{\ln |\mu_2^n|}$. Il existe donc

une suite non stationnaire d'éléments du groupe multiplicatif engendré par μ_1^n et μ_2 qui converge vers 1. Donc, pour tout n dans \mathbb{N} , il existe des entiers p_n et q_n tels que

$$|\mu_1^{np_n} \mu_2^{q_n} - 1| < \frac{1}{n}.$$

Quitte à inverser $\mu_1^{np_n} \mu_2^{q_n}$, on peut supposer que p_n est positif. Les suites $(r_n)_n$ et $(s_n)_n$ définies par $r_n = np_n$ et $s_n = q_n$ conviennent.

Démontrons maintenant la dernière égalité. D'après le lemme 2.3.5, on a :

$$\gamma_2^{r_n} \gamma_1^{s_n} v = \gamma_2^{r_n} (\gamma_1^+, \alpha^2 (\gamma_1^{s_n})' (\gamma_1^+)^{-1}) = (\gamma_2^{r_n} (\gamma_1^+), \alpha^2 (\gamma_2^{r_n})' (\gamma_1^+)^{-1} (\gamma_1^{s_n})' (\gamma_1^+)^{-1}).$$

Comme le point γ_1^+ est différent de γ_2^- , le point $\gamma_2^{r_n} (\gamma_1^+)$ tend vers γ_2^+ lorsque n tend vers $+\infty$. Puisque le point γ_2^+ est différent du point ∞ , pour n suffisamment grand, $\gamma_2^{r_n} (\gamma_1^+)$ est également différent du point ∞ . On peut appliquer la propriété 2.2.3 (ii) :

$$(\gamma_2^{r_n} (\gamma_2^-) - \gamma_2^{r_n} (\gamma_1^+))^2 = (\gamma_2^{r_n})' (\gamma_2^-) (\gamma_2^{r_n})' (\gamma_1^+) (\gamma_2^- - \gamma_1^+)^2$$

Ces deux égalités permettent d'obtenir

$$\gamma_2^{r_n} \gamma_1^{s_n} v = \left(\gamma_2^{r_n} (\gamma_1^+), \alpha^2 \left(\frac{\gamma_2^- - \gamma_1^+}{\gamma_2^- - \gamma_2^{r_n} (\gamma_1^+)} \right)^2 (\gamma_2^{r_n})' (\gamma_2^-) (\gamma_1^{s_n})' (\gamma_1^+)^{-1} \right).$$

Enfin, en appliquant la propriété 2.2.3 (i), on obtient

$$\gamma_2^{r_n} \gamma_1^{s_n} v = \left(\gamma_2^{r_n} (\gamma_1^+), \alpha^2 \left(\frac{\gamma_2^- - \gamma_1^+}{\gamma_2^- - \gamma_2^{r_n} (\gamma_1^+)} \right)^2 e^{r_n l_{\mathbb{C}}(\gamma_2) + s_n l_{\mathbb{C}}(\gamma_1)} \right)$$

et donc le résultat en faisant tendre n vers $+\infty$. \square

Lemme 2.3.7. *Soient Γ un groupe kleinien non élémentaire, γ une isométrie hyperbolique de Γ de point fixe attractif γ^+ et $v = (\gamma^+, \alpha^2)$ un vecteur de $\mathbb{C}^2 - \{0\} / \pm \text{Id}$ dirigé vers γ^+ . Alors pour toute isométrie hyperbolique γ_1 de Γ , les vecteurs $(\gamma^+, \alpha^2 e^{2l_{\mathbb{C}}(\gamma_1)})$ et $(\gamma^+, \alpha^2 e^{-2l_{\mathbb{C}}(\gamma_1)})$ appartiennent à $\overline{\Gamma v}$.*

Démonstration. Si l'isométrie γ_1 fixe γ^+ c'est évident. On peut donc supposer que que l'isométrie γ_1 est sans point fixe commun avec γ (car le groupe Γ est discret). Supposons tout d'abord que le point ∞ ne soit fixé par aucune isométrie hyperbolique de Γ . Les points γ_1^+ et $\gamma_1(\gamma^+)$ sont distincts donc il existe une suite $(g_n)_n$ d'isométries hyperboliques de Γ telle que la suite des points répulsifs (resp. attractifs) g_n^- (resp. g_n^+) converge vers le point γ_1^+ (resp. $\gamma_1(\gamma^+)$) (proposition 1.2.1 (iii)). Puisque ces deux points sont distincts des points fixes de γ , nous pouvons appliquer le lemme précédent à partir d'un certain rang :

$$\left(g_n^+, \alpha^2 \left(\frac{g_n^- - \gamma^+}{g_n^- - g_n^+} \right)^2 \right) \in \overline{\Gamma v}$$

donc le vecteur $v' = \left(\gamma_1(\gamma^+), \alpha^2 \left(\frac{\gamma_1^+ - \gamma^+}{\gamma_1^+ - \gamma_1(\gamma^+)} \right)^2 \right)$ appartient à $\overline{\Gamma v}$. Les points γ_1^- et γ^+ sont distincts donc en appliquant le même raisonnement avec ces deux points, nous obtenons :

$$\left(\gamma^+, \alpha^2 \left(\frac{\gamma_1^+ - \gamma^+}{\gamma_1^+ - \gamma_1(\gamma^+)} \right)^2 \left(\frac{\gamma_1^- - \gamma_1(\gamma^+)}{\gamma_1^- - \gamma^+} \right)^2 \right) \in \overline{\Gamma v'} \subseteq \overline{\Gamma v}$$

Ce vecteur est égal au vecteur $(\gamma^+, \alpha^2 e^{2l_C(\gamma_1)})$ d'après la propriété 2.2.2. En échangeant les rôles de γ_1^+ et γ_1^- , nous obtenons le vecteur $(\gamma^+, \alpha^2 e^{-2l_C(\gamma_1)})$. Le cas général se traite en conjuguant le groupe Γ afin que le point ∞ ne soit pas un point fixe hyperbolique. \square

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème 2.3.2. Rappelons une propriété des stabilisateurs dans les groupes kleinien d'un point fixe hyperbolique : si Γ est un groupe kleinien et ξ est un point du bord $\hat{\mathbb{C}}$ fixé par une isométrie hyperbolique γ du groupe Γ , alors le stabilisateur Γ_ξ du point ξ dans Γ est un sous-groupe monogène constitué d'isométries hyperboliques dont l'axe est l'axe de γ . Les deux isométries qui engendrent ce stabilisateur sont dites *primitives*.

Démonstration du théorème 2.3.2. Pour démontrer l'implication (iii) \Rightarrow (i), nous utilisons ici le théorème 2.2.1. Soit $v = (\xi, \alpha^2)$ un vecteur de \mathcal{V}_Γ . Montrons d'abord (étape 1) que si $\xi = \gamma^+$ est le point fixe d'une isométrie hyperbolique du groupe Γ , alors l'ensemble $\overline{\Gamma v}$ est égal à \mathcal{V}_Γ . L'étape 2 consiste ensuite à montrer que si la condition (iii) est vérifiée, alors l'ensemble $\overline{\Gamma v}$ contient un vecteur dirigé vers le point fixe attractif d'une isométrie hyperbolique du groupe Γ . Il est donc égal à \mathcal{V}_Γ d'après l'étape 1.

Etape 1. Nous pouvons supposer l'isométrie γ primitive dans le groupe Γ . Dans ce cas, exceptées les puissances de γ , aucune isométrie hyperbolique de Γ n'a de point fixe en commun avec γ . Soit β un élément du groupe multiplicatif engendré par l'ensemble $\{e^{l_C(\gamma)} : \gamma \in \Gamma, \gamma \text{ hyperbolique}\}$, alors β^2 s'écrit comme un produit

$$\left(\prod_{j=1}^r e^{n_j l_C(\gamma_j)} \right)^2 = \prod_{j=1}^r e^{\varepsilon_j 2l_C(\gamma_j^{n_j})}$$

où r est un entier positif, chaque γ_j est une isométrie hyperbolique du groupe Γ et chaque n_j est un entier relatif non nul de signe ε_j . Par récurrence sur r et en utilisant le lemme 2.3.7, nous obtenons alors que le vecteur $(\gamma^+, \alpha^2 \beta^2)$ appartient à $\overline{\Gamma v}$. D'après le théorème 2.2.1, si le groupe Γ n'est pas conjugué à un sous-groupe de $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$, l'ensemble $\overline{\Gamma v}$ contient donc l'ensemble des vecteurs de \mathcal{V} dirigés vers le point γ^+ . Considérons maintenant un vecteur quelconque (η, β^2) de \mathcal{V}_Γ et montrons qu'il appartient à $\overline{\Gamma v}$. Le point η appartenant à l'ensemble limite L_Γ , il existe une suite $(\gamma_n)_n$ d'isométries de Γ telle que la suite $(\gamma_n(\gamma^+))_n$ converge vers η . Cette suite étant choisie, il existe une suite $(\alpha_n)_n$ de nombres complexes non nuls telle que la suite des nombres $\gamma_n'(\gamma^+)^{-1} \alpha_n$ converge vers β^2 . Les vecteurs $\gamma_n(\gamma^+, \alpha_n)$ appartiennent à $\overline{\Gamma v}$ et ils tendent, lorsque n tend vers $+\infty$, vers le vecteur (η, β^2) .

Etape 2. Il existe une suite $(\gamma_n)_n$ d'éléments de Γ telle que la suite $(\|\gamma_n v\|)_n$ converge

vers 0. Soient γ un élément hyperbolique du groupe Γ qui ne fixe pas le point ξ et u^+ (resp. u^-) dans \mathcal{V} un vecteur propre dirigé vers le point fixe attractif (resp. répulsif) de γ . Pour tout entier n , le vecteur $\gamma_n v$ se décompose sous la forme

$$\gamma_n v = a_n u^+ + b_n u^-$$

où a_n et b_n sont deux réels non nuls (définis au signe près). La suite $(\|\gamma_n v\|)_n$ convergeant vers 0, il en est de même pour les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$. Puisque le module $|e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma)}|$ est strictement supérieur à 1, il existe une suite non bornée $(r_n)_n$ d'entiers positifs vérifiant

$$|e^{l_{\mathbb{C}}(\gamma)}|^{-1} \leq |a_n| \cdot |e^{r_n l_{\mathbb{C}}(\gamma)}| \leq 1.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que la suite $(a_n e^{r_n l_{\mathbb{C}}(\gamma)})_n$ converge vers un réel non nul a (défini au signe près). La suite des vecteurs

$$\gamma^{r_n} \gamma_n v = a_n e^{r_n l_{\mathbb{C}}(\gamma)} u^+ + b_n e^{-r_n l_{\mathbb{C}}(\gamma)} u^-$$

converge alors vers le vecteur au^+ de \mathcal{V} qui appartient donc à l'ensemble $\overline{\Gamma v}$. L'orbite de u^+ est dense dans \mathcal{V}_{Γ} , il en est de même de l'orbite du vecteur au^+ donc de l'orbite du vecteur v . \square

2.4 Dynamique topologique de l'action du groupe unipotent supérieur

Nous complétons ici les résultats précédents pour décrire la dynamique topologique de l'action du groupe

$$N = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}$$

sur l'espace $\Gamma \backslash G$ où G désigne le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et Γ est un sous-groupe discret du groupe G . Rappelons que Ω_{Γ} désigne l'ensemble des éléments du groupe G tels que le point $g(\infty)$ appartienne à l'ensemble limite L_{Γ} . Cet ensemble Ω_{Γ} est fermé, invariant par l'action de Γ à gauche et par l'action du groupe unipotent supérieur N à droite. Si on identifie le groupe G au fibré des repères de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 , l'ensemble Ω_{Γ} représente l'ensemble des repères dont le premier vecteur est dirigé vers un point de l'ensemble limite.

Tout d'abord nous montrons que toute la dynamique est liée à cet ensemble, et que les orbites associées à un point parabolique de l'ensemble limite sont fermées (voir le paragraphe 1.2 pour la définition des points paraboliques). Mais on n'utilise pas l'hypothèse "parabolique borné". Afin d'énoncer les résultats, considérons un élément g du groupe G , sa classe x dans $\Gamma \backslash G$ et définissons l'application

$$\Phi_x : N \longrightarrow \Gamma \backslash G : u \longmapsto xu.$$

Cette application est une immersion dont l'image est exactement l'orbite xN . Si elle n'est pas injective, on a $xu = xu'$ pour deux éléments distincts u et u' de N . L'intersection

entre les sous-groupes N et $g^{-1}\Gamma g$ est alors non triviale et ne dépend pas du représentant g choisi. L'application précédente se factorise alors en :

$$\overline{\Phi}_x : (g^{-1}\Gamma g \cap N) \backslash N \longrightarrow \Gamma \backslash G : (g^{-1}\Gamma g \cap N)u \longmapsto \Gamma gu$$

qui est une immersion injective.

Théorème 2.4.1. *Soient Γ un groupe kleinien non-élémentaire, g un élément du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et x sa classe dans $\Gamma \backslash G$.*

(i) *Si le point $g(\infty)$ n'appartient pas à l'ensemble limite L_Γ , alors l'application Φ_x est un plongement. L'orbite xN est donc fermée dans $\Gamma \backslash G$. C'est l'image du plongement d'un plan.*

(ii) *Si le point $g(\infty)$ est parabolique, l'application $\overline{\Phi}_x$ est un plongement. L'orbite xN est donc fermée dans $\Gamma \backslash G$. C'est l'image du plongement d'un cylindre (resp. tore) si le rang du point parabolique $g(\infty)$ est 1 (resp. 2).*

(iii) *Supposons de plus que le groupe Γ ne soit pas conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. Alors l'orbite xN est dense dans l'ensemble $\Gamma \backslash \Omega_\Gamma$ si et seulement si le point $g(\infty)$ est un point horosphérique.*

Démonstration. (i) Supposons que l'application Φ_x ne soit pas propre : il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments du groupe N divergente (c'est-à-dire sortant de tout compact de N), une suite $(\gamma_n)_n$ dans le groupe Γ et un élément h du groupe G tels que la suite $(\gamma_n g u_n)_n$ converge vers h dans le groupe G . En projetant sur l'espace \mathbb{H}^3 , on obtient

$$d(gu_n.o, \gamma_n^{-1}h.o) = d(\gamma_n g u_n.o, h.o) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Les suites $(gu_n.o)_n$ et $(\gamma_n^{-1}h.o)_n$ convergent donc vers le même point qui est $g(\infty)$. Ce point appartient donc à l'ensemble limite L_Γ .

(ii) Supposons que le point $g(\infty)$ soit fixé par une isométrie parabolique γ du groupe Γ . Le sous-groupe $g^{-1}Z_G(\gamma)g = Z_G(g^{-1}\gamma g)$ est le centralisateur d'un élément non-trivial du groupe N , il est donc égal à N . D'après la proposition 1.4.1, l'application $\overline{\Phi}_x$ est donc un plongement.

L'assertion (iii) est la traduction duale du théorème 2.3.2 en termes d'action du groupe N sur $\Gamma \backslash G$. \square

Les résultats (i) et (ii) sur les orbites fermées se traduisent de la manière suivante en termes d'action linéaire. Pour simplifier, nous supposons que Γ est un sous-groupe discret du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ contenant $-\mathrm{Id}$. De même que dans la section précédente, la notation V_Γ désigne l'ensemble des vecteurs non nuls de \mathbb{C}^2 dont la direction projective appartient à l'ensemble limite du groupe Γ . D'après la propriété 1.4.2, une orbite fermée du groupe Γ dans \mathbb{C}^2 est discrète. Il vient donc :

Théorème 2.4.2. *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ contenant $-\mathrm{Id}$. Soit v un vecteur non nul de \mathbb{C}^2 .*

(i) *Si le vecteur v n'appartient pas à V_Γ , l'orbite Γv est discrète dans \mathbb{C}^2 .*

(ii) *Si la direction projective du vecteur v est un point parabolique (i.e si le vecteur v est fixé par un élément non trivial de Γ), l'orbite Γv est discrète dans \mathbb{C}^2 .*

Nous obtenons donc, en combinant le théorème 2.4.1 et la classification des groupes kleinien par leur ensemble limite (rappelée dans la section 1.2) une caractérisation dynamique de certaines catégories de groupes kleinien.

Corollaire 2.4.3. *(i) Si un groupe kleinien non élémentaire Γ est géométriquement fini et n'est pas conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$, les orbites du groupe N sur $\Gamma \backslash G$ sont soit fermées soit denses dans $\Gamma \backslash \Omega_\Gamma$.*

(ii) Un groupe kleinien Γ est un réseau si et seulement si les orbites du groupe N sont denses dans $\Gamma \backslash G$ ou compactes.

(iii) Un groupe kleinien Γ est convexe-cocompact et n'est pas conjugué à un sous groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ si et seulement si toutes les orbites du groupe N dans $\Gamma \backslash \Omega_\Gamma$ sont denses dans $\Gamma \backslash \Omega_\Gamma$.

(iv) Un groupe kleinien Γ est un réseau uniforme si et seulement si toutes les orbites du groupe N sur $\Gamma \backslash G$ sont denses.

Chapitre 3

Action du groupe diagonal sur les quotients de volume fini de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$

3.1 Motivation

Dans le contexte général d'un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact G et d'un réseau Γ de ce groupe, G.A. Margulis a proposé dans [Mar1] (après H. Furstenberg) une généralisation de la conjecture de Raghunathan sur la dynamique de l'action d'un sous-groupe unipotent connexe H sur $\Gamma \backslash G$ (conjecture résolue par M. Ratner, voir par exemple [Sta]). Un sous-espace de $\Gamma \backslash G$ est dit *homogène* s'il est fermé et égal à une orbite d'un sous-groupe de G . Une orbite est *singulière* si son adhérence n'est pas homogène.

Conjecture 3.1.1. ([Mar1]) *Soient G un groupe de Lie réel semi-simple connexe sans facteur compact et de centre fini, Γ un réseau de G et H un sous-groupe connexe de G . Alors, tout point x de $\Gamma \backslash G$ vérifie au moins l'une des assertions suivantes :*

- (a) *l'adhérence de l'orbite xH est homogène,*
- (b) *il existe un sous-groupe fermé connexe F de G et un morphisme continu surjectif φ de F sur un groupe de Lie L tels que :*
 - *le groupe F contient H ,*
 - *l'orbite xF est fermée dans $\Gamma \backslash G$,*
 - *l'image par φ du stabilisateur de x dans F est un sous-groupe fermé de L ,*
 - *l'image $\varphi(H)$ est un sous-groupe à un paramètre sans élément unipotent.*

La situation (b) correspond au cas où l'orbite xH est contenue dans le sous-espace homogène xF dans lequel l'action du groupe H se factorise en l'action d'un groupe diagonalisable à un paramètre. Il existe pour ce type d'action (par exemple l'action du groupe diagonal sur $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ qui est conjugué au flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de la surface hyperbolique $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$) des orbites dont l'adhérence n'est pas homogène, nous en construisons dans le paragraphe 3.2. Lorsque le groupe G est le groupe $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ et le groupe H est le groupe des matrices diagonales nous montrons également comment la présence d'éléments particuliers dans le réseau Γ permet de construire des points de $\Gamma \backslash G$

dont l'orbite est singulière. Dans la suite de ce chapitre nous nous intéressons à cette conjecture lorsque le groupe G est le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, le groupe H est le produit des groupes diagonaux et Γ est un réseau irréductible. Dans ce cas, la situation (b) est impossible (paragraphe 3.3). Nous décrivons les orbites fermées (paragraphe 3.6) et donnons ensuite des conditions suffisantes de densité (paragraphe 3.7). Enfin, dans le paragraphe 3.8, nous montrons que les constructions précédentes d'orbites singulières pour le flot géodésique sur le fibré tangent unitaire des surfaces hyperboliques sont impossibles dans la situation étudiée ici.

3.2 Exemples d'orbites singulières sur des quotients de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$

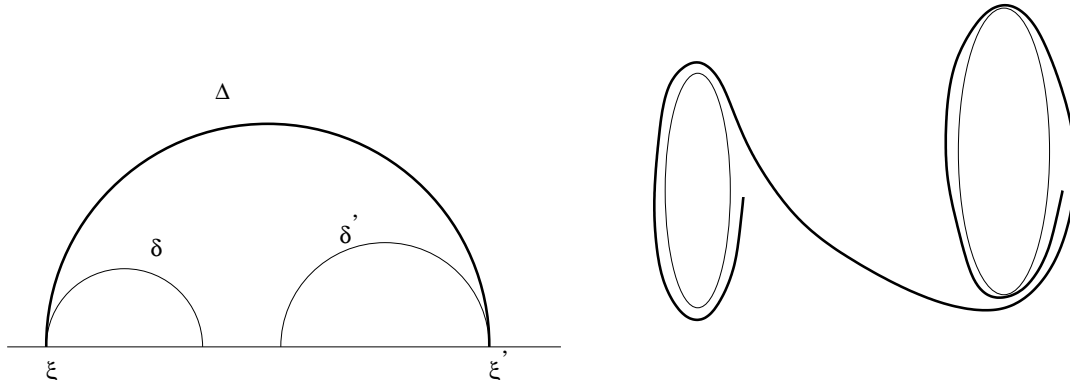
Si Γ est un sous-groupe discret et A est le sous-groupe diagonal du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, l'action du groupe A par translation à droite sur $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est conjuguée au flot géodésique sur $\Gamma \backslash \mathcal{T}^1 \mathbb{H}^2$. Dans ce cas, toutes les orbites vérifient l'assertion (b) de la conjecture 3.1.1. Le théorème suivant montre que la situation (a) n'est pas toujours satisfaite.

Théorème 3.2.1. *Soit Γ un groupe fuchsien non-élémentaire. Alors*

- 1) *il existe des orbites du flot géodésique dans $\Gamma \backslash \mathcal{T}^1 \mathbb{H}^2$ bornées et non -compactes,*
- 2) *il existe des orbites singulières du flot géodésique dans $\Gamma \backslash \mathcal{T}^1 \mathbb{H}^2$.*

Remarquons que si Γ est un réseau uniforme, toutes les orbites denses pour le flot géodésique vérifient 1) et pas 2). La démonstration du théorème 3.2.1 contient deux constructions différentes. La première est très classique et consiste à “recoller” des semi-orbites bornées et permet d'obtenir des orbites vérifiant 1) et 2). La seconde est basée sur l'existence de sous-groupes convexe-cocompacts dans un groupe fuchsien non-élémentaire, on obtient alors des orbites vérifiant 1). Cette deuxième construction permet également d'obtenir des orbites singulières dont l'adhérence est un sous-ensemble fermé, invariant par le flot géodésique et minimal (voir [Mor]).

Première construction. Considérons deux isométries hyperboliques γ et γ' du groupe Γ sans point fixe commun. Et choisissons un point ξ (resp ξ') du bord $\partial \mathbb{H}^2$ fixé par γ (resp. γ'). Notons δ (resp. δ') l'axe de l'isométrie γ (resp. γ') et Δ la géodésique de \mathbb{H}^2 joignant les deux points ξ et ξ' .



Les géodésiques δ et δ' se projettent dans $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ sur deux géodésiques compactes. La géodésique Δ est la réunion de deux rayons géodésiques asymptotes (dans \mathbb{H}^2) à δ ou δ' . Elle se projette donc dans $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ sur une géodésique bornée mais non compacte car ξ et ξ' ne sont pas fixés par une même isométrie de Γ . En fait l'orbite pour le flot géodésique dans $\Gamma \backslash \mathcal{T}^1 \mathbb{H}^2$ associée à Δ n'est pas fermée mais est localement fermée, son adhérence n'est donc pas une sous-variété. \square

Deuxième construction. Nous savons que le groupe Γ contient un sous-groupe Γ_o qui est convexe-cocompact (par exemple un groupe de Schottky). Notons Ω'_o l'ensemble non errant de $\mathcal{T}^1 \mathbb{H}^2$ pour le flot géodésique (relativement au groupe Γ_o , voir la définition au paragraphe 1.2). Le quotient $\Gamma_o \backslash \Omega'_o$ est compact. L'ensemble des orbites du flot géodésique dans $\Gamma_o \backslash \Omega'_o$ n'est pas dénombrable et toutes ces orbites sont bornées. Considérons la projection canonique

$$\Gamma_o \backslash \mathcal{T}^1 \mathbb{H}^2 \longrightarrow \Gamma \backslash \mathcal{T}^1 \mathbb{H}^2$$

dont la fibre est dénombrable puisque s'identifiant à l'espace des classes Γ/Γ_o . Toutes les orbites sont envoyées par cette projection sur des orbites du flot géodésique. En particulier, l'ensemble (non dénombrable) des orbites contenues dans $\Gamma_o \backslash \Omega'_o$ est envoyé sur un ensemble non dénombrable d'orbites bornées dans $\Gamma \backslash \mathcal{T}^1 \mathbb{H}^2$. Il en existe donc qui ne sont pas compactes. \square

Concernant le groupe $SL(3, \mathbb{R})$ et le sous-groupe diagonal, un exemple pour lequel certaines orbites vérifient la situation (b) a été construit par M. Rees ([Ree]). Nous expliquons ici sur quoi repose cette construction.

Soit G le groupe $SL(3, \mathbb{R})$, un élément de G diagonalisable sur \mathbb{R} est dit *régulier* si ses valeurs propres sont deux à deux distinctes et *singulier* sinon. Soient A le sous-groupe de G des matrices diagonales à coefficients positifs et Γ un sous-groupe discret de G . Considérons l'action du groupe A sur l'espace $\Gamma \backslash G$ par multiplication à droite. Nous démontrons ici en quoi la présence dans le groupe Γ d'éléments singuliers possédant un centralisateur dans Γ non commutatif permet d'obtenir la situation (b) de la conjecture 3.1.1 et implique l'existence d'orbites dont l'adhérence n'est pas homogène.

Proposition 3.2.2. *Soit Γ un sous-groupe discret de G . On suppose que le groupe Γ contient un élément γ non trivial, diagonalisable sur \mathbb{R} , singulier, sans valeur propre de module 1 et tel que son centralisateur dans le groupe Γ ne soit pas virtuellement abélien. Alors il existe un point x de $\Gamma \backslash G$ dont l'orbite par le groupe A vérifie l'assertion (b) mais pas l'assertion (a) de la conjecture 3.1.1.*

Démonstration. On suppose donc que le sous-groupe discret Γ contient un élément γ vérifiant :

$$\gamma = g \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix} g^{-1}$$

où g appartient au groupe G et λ est un réel strictement supérieur à 1 (quitte à remplacer γ par son carré). Quitte à conjuguer le réseau Γ , nous supposons $g = \text{Id}$. Notons F la

composante connexe du centralisateur dans G de la matrice diagonale γ . Ce sous-groupe est constitué de toutes les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \det(M)^{-1} \end{pmatrix}$$

où M appartient au groupe $GL^+(2, \mathbb{R})$. En particulier le groupe F contient le groupe A . Notons Z_Γ l'intersection de Z_G° et Γ . Soit φ le morphisme surjectif de groupes défini par :

$$\varphi : F \longrightarrow SL(2, \mathbb{R}) : \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \det(M)^{-1} \end{pmatrix} \longmapsto \det(M)^{-\frac{1}{2}}M.$$

Le noyau $\ker \varphi$ du morphisme φ est constitué de toutes les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{-2} \end{pmatrix}, \quad \mu > 0,$$

il contient donc le sous-groupe engendré par γ . L'image par φ du sous-groupe discret Z_Γ est un sous-groupe discret de $SL(2, \mathbb{R})$. En effet, considérons une suite d'éléments

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} M_n & 0 \\ 0 & \det(M_n)^{-1} \end{pmatrix}$$

dans Z_Γ . Alors il existe une suite $(k_n)_n$ d'entiers relatifs telle que

$$1 \leq \lambda^{-2k_n} \det(M_n)^{-1} < \lambda^2 \text{ pour tout } n$$

et quitte à prendre une sous-suite, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^{-2k_n} \det(M_n)^{-1} = \delta^2$$

pour un réel δ appartenant à l'intervalle $[1, \lambda]$. Si la suite $(\gamma_n)_n$ vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\gamma_n) = \text{Id}, \quad \varphi(\gamma_n) \neq \text{Id},$$

alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\gamma^{k_n} \gamma_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\gamma_n) = \text{Id}.$$

Mais puisque

$$\gamma^{k_n} \gamma_n = \begin{pmatrix} \lambda^{k_n} M_n & 0 \\ 0 & \lambda^{-2k_n} \det(M_n)^{-1} \end{pmatrix},$$

on en déduit que la suite de matrices $(\lambda^{k_n} M_n)_n$ converge dans le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ vers $\delta^{-1} \text{Id}$ donc que la suite $(\gamma^{k_n} \gamma_n)_n$ converge vers la matrice

$$\begin{pmatrix} \delta^{-1} \text{Id} & 0 \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix}.$$

Cette suite est donc constante à partir d'un certain rang (car contenue dans le sous-groupe discret Γ) ce qui contredit le fait que la suite $(\varphi(\gamma_n))_n$ ne contienne pas de sous-suite stationnaire. Notons Λ le sous-groupe discret $\varphi(Z_\Gamma)$ de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. D'après la proposition 1.4.1, nous savons que l'orbite ΓF est fermée dans $\Gamma \backslash G$.

L'application

$$\bar{\varphi} : \Gamma F \longrightarrow \Lambda \backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) : \Gamma h \longmapsto \Lambda \varphi(h)$$

est une fibration principale dont chaque fibre est homéomorphe à un cercle. Montrons cette assertion :

- L'application $\bar{\varphi}$ est bien définie : si les éléments h_1 et $\gamma' h_2$ sont égaux (avec γ' dans Γ , h_1 et h_2 dans F), alors

$$h_1 h_2^{-1} = \gamma'$$

appartient au groupe Z_Γ donc $\varphi(h_2)$ appartient à la classe $\Lambda \varphi(h_1)$.

- L'application $\bar{\varphi}$ est une fibration car φ est une fibration et les groupes Γ et Λ sont discrets.

- Si les deux points Γh_1 et Γh_2 ont la même image par $\bar{\varphi}$, il existe un élément z dans le groupe Z_Γ tel que

$$\varphi(h_1) = \varphi(z) \varphi(h_2).$$

On en déduit que h_1 appartient à la classe $z h_2 \ker \varphi$ donc que le point Γh_1 de $\Gamma \backslash G$ appartient à $\Gamma h_2 \ker \varphi$. Donc chaque fibre de $\bar{\varphi}$ est contenue dans une orbite $\Gamma h \ker \varphi$ et on a en fait égalité, l'autre inclusion étant évidente. Le sous-groupe de $\ker \varphi$ engendré par γ agit trivialement sur chaque fibre car h commute avec γ . Donc le quotient de $\ker \varphi$ par ce sous-groupe agit transitivement sur chaque fibre ce qui montre que $\bar{\varphi}$ est une fibration en cercles.

Soit A' le sous-groupe de A constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & \nu^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu > 0.$$

Soit a un élément de A , il s'écrit de manière unique comme le produit $a_0 a'$ d'un élément a_0 de $\ker \varphi$ et d'un élément a' de A' . Pour tout h dans le groupe F , on a alors

$$\bar{\varphi}(\Gamma h a) = \bar{\varphi}(\Gamma h a_0 a') = \Lambda \varphi(h a_0 a') = \Lambda \varphi(h a') = \Lambda \varphi(h) \varphi(a') = \Lambda \varphi(h) \phi^{2 \ln \nu}$$

si $a' = \mathrm{diag}(\nu, \nu^{-1}, 1)$. Donc l'orbite $\Gamma h A$ du point Γh de $\Gamma \backslash G$ pour l'action du groupe diagonal A se projette sur l'orbite par le groupe diagonal $\varphi(A')$ du point $\Lambda \varphi(h)$ de $\Lambda \backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Si E est un sous-ensemble quelconque de $\Lambda \backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ fermé et invariant par le flot géodésique, alors $\bar{\varphi}^{-1}(E)$ est un sous-ensemble fermé dans ΓF (donc dans $\Gamma \backslash G$) invariant par l'action de A . Puisque l'application φ est surjective, toute orbite de $\varphi(A')$ dans $\Lambda \backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ peut être ainsi "relevée" dans $\Gamma \backslash G$. Montrons maintenant le groupe Λ n'est pas élémentaire (ce qui, d'après le théorème 3.2.1 entraîne l'existence d'orbites singulières pour l'action de $\varphi(A')$). Si deux éléments h_1 et h_2 du groupe F sont tels que $\varphi(h_1)$ et $\varphi(h_2)$ commutent, il est évident que h_1 et h_2 commutent. D'autre part, si Λ est un groupe élémentaire, il possède un sous-groupe abélien Λ' d'indice fini. Puisque Λ est l'image de Z_Γ par le morphisme φ , la préimage par φ de Λ' dans le sous-groupe Z_Γ de F

est un sous-groupe d'indice fini dans Z_Γ et abélien d'après ce qui précède. Donc le groupe Z_Γ est virtuellement abélien ce qui a été exclu par hypothèse. \square

Remarquons que si Γ est un réseau uniforme de G , le fait que l'orbite ΓgF soit fermée dans $\Gamma \backslash G$ implique que le sous-groupe Z_Γ est un réseau uniforme du groupe gFg^{-1} donc n'est pas virtuellement abélien.

3.3 Réseaux de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$

Nous considérons ici le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ que l'on notera G . Pour chaque valeur (1 ou 2) de l'indice i , notons p_i la projection

$$p_i : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$$

sur le i -ème facteur. Les réseaux du groupe G satisfont à l'alternative suivante (voir par exemple [Ebe]) :

Proposition 3.3.1. (voir [Ebe] p40) *Soit Γ un réseau du groupe G . Alors Γ vérifie une (et une seule) des deux propriétés suivantes.*

a) *En restriction au groupe Γ , la projection p_1 (resp. p_2) est d'image discrète et son noyau Γ_1 (resp. Γ_2) est un réseau de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \{\mathrm{Id}\}$ (resp. $\{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$). Le sous-groupe produit $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ est alors d'indice fini dans Γ .*

b) *En restriction au groupe Γ , chaque projection p_i est injective et d'image dense.*

La propriété b) est une conséquence du fait que le centre du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est trivial. Un réseau est dit *réductible* s'il satisfait la propriété a) et *irréductible* sinon. Il existe des réseaux irréductibles uniformes et non-uniformes. Des exemples de réseaux irréductibles non-uniformes sont donnés par les réseaux de Hilbert (voir le chapitre 4). Ce sont en fait essentiellement les seuls d'après un résultat de A. Selberg.

Théorème 3.3.2. (Selberg, [Sel]) *Soit Γ un réseau irréductible et non uniforme du groupe G . Alors il existe un élément g dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ tel que le réseau conjugué $g\Gamma g^{-1}$ soit commensurable à un réseau de Hilbert.*

Le produit des sous-groupes diagonaux du groupe G sera noté A . L'action de A sur G par multiplication à droite est conjuguée à l'action du produit des deux flots géodésiques sur la variété $\mathcal{T}^1\mathbb{H}^2 \times \mathcal{T}^1\mathbb{H}^2$. Traduisons la conjecture 3.1.1 dans le cas où H est le groupe A . Si le réseau Γ est réductible, l'action du groupe A sur $\Gamma \backslash G$ est donc conjuguée (quitte à considérer un sous-groupe d'indice fini de Γ , d'après la proposition 3.3.1) au produit des flots géodésiques sur les fibrés tangents unitaires de deux surfaces hyperboliques. Dans ce cas, la situation (b) de la conjecture 3.1.1 se produit et il existe des orbites singulières d'après le théorème 3.2.1. A l'opposé, si le réseau Γ est irréductible, la situation (b) ne peut pas se produire. Pour démontrer ceci, nous utiliserons la proposition suivante (démontrée dans le paragraphe 3.6).

Proposition 3.3.3. *Soient G le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et Γ un réseau irréductible du groupe G . Si F est un sous-groupe de Lie de G connexe et contenant strictement le sous-groupe A , alors l'action de F sur $\Gamma \backslash G$ est minimale (toutes les orbites sont denses).*

Supposons qu'il existe un élément g dans G tel que le point $x = \Gamma g$ vérifie l'assertion (b) mais pas l'assertion (a) de la conjecture 3.1.1. Puisque on a supposé que l'orbite xA n'est pas fermée, le groupe F contient strictement le groupe A et d'après la proposition 3.3.3, l'orbite xF est dense donc égale à $\Gamma \backslash G$ (car elle est fermée). Le sous-groupe Γ étant discret, les groupes F et G sont donc égaux. L'image du groupe A par le morphisme φ est un groupe à un paramètre donc le noyau de φ est un sous-groupe propre distingué de G . On en déduit que ce morphisme se factorise par la projection canonique p_1 (quitte à permuter les indices) : il existe un morphisme continu surjectif

$$\bar{\varphi} : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow L$$

tel que $\varphi = \bar{\varphi} \circ p_1$. Mais le stabilisateur G_x du point x dans G est le groupe conjugué $g\Gamma g^{-1}$ donc son image par p_1 est dense dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ donc $\varphi(G_x)$ est dense dans L ce qui contredit la troisième assertion de la situation (b).

La conjecture générale 3.1.1 devient donc dans ce cas particulier :

Conjecture 3.3.4. *Soient G le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et Γ un réseau irréductible du groupe G . Alors toute orbite du groupe diagonal A est soit fermée, soit dense dans $\Gamma \backslash G$.*

En particulier, si Γ est un réseau irréductible non uniforme, toute orbite bornée devrait être compacte. Signalons que cette même assertion mais dans le cadre du groupe $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$, du sous-groupe diagonal et du réseau $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$, impliquerait la conjecture de Littlewood (voir l'annexe B, [Mar2]).

Nous caractérisons les orbites fermées et les orbites compactes pour l'action de A dans le paragraphe 3.6 avant de démontrer la proposition 3.3.3. Les paragraphes 3.4 et 3.5 rassemblent des informations sur le type des éléments présents dans un réseau irréductible du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et sur la géométrie des quotients non compacts et de volume fini de $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$. Enfin, dans le paragraphe 3.7, nous démontrons les théorèmes 3.7.1 et 3.7.3 sur les orbites denses.

3.4 Eléments des réseaux irréductibles de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$

Nous utiliserons la même terminologie que l'article [Shi] en disant qu'un élément $g = (g_1, g_2)$ du groupe G est *elliptique* (resp. *parabolique*, *hyperbolique*) si les deux isométries g_1 et g_2 du plan hyperbolique sont elliptiques (resp. paraboliques, hyperboliques). Si l'élément $g = (g_1, g_2)$ est hyperbolique, il fixe quatre points sur la frontière $\mathcal{F} = \partial \mathbb{H}^2 \times \partial \mathbb{H}^2$, ce sont les couples (g_1^\pm, g_2^\pm) . Le couple de points attractifs (g_1^+, g_2^+) (resp. répulsifs (g_1^-, g_2^-)) sera noté g^+ (resp. g^-). Un élément hyperbolique est dit *hyper-régulier* s'il est hyperbolique et si les valeurs propres dominantes de g_1 et g_2 sont différentes (cette définition coïncide avec la notion d'élément *hyper-régulier* dans l'article [PRag]). Enfin, un élément non trivial n'appartenant à aucune de ces catégories sera dit *mixte*.

La distance de translation

$$d(g) = \inf_{x \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2} d(x, gx)$$

d'un élément $g = (g_1, g_2)$ du groupe G vérifie

$$d^2(g) = \inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2} d^2(x_1, g_1 x_1) + d^2(x_2, g_2 x_2) = \inf_{x_1 \in \mathbb{H}^2} d^2(x_1, g_1 x_1) + \inf_{x_2 \in \mathbb{H}^2} d^2(x_2, g_2 x_2).$$

Cette distance est donc atteinte si et seulement si ni g_1 ni g_2 n'est parabolique.

La proposition 3.4.1 est un cas particulier du résultat classique suivant : tout élément d'un réseau uniforme d'un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact est semi-simple. La démonstration qui suit est plus simple.

Proposition 3.4.1. *Si une isométrie $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ appartient à un réseau uniforme Γ du groupe G , alors ni γ_1 ni γ_2 n'est parabolique.*

Démonstration. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que la distance de translation $d(\gamma)$ est atteinte. Puisque Γ est un réseau uniforme du groupe G , le quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ est compact donc il existe un sous-ensemble compact \mathcal{D} de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ vérifiant

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 = \bigcup_{\gamma' \in \Gamma} \gamma'(\mathcal{D}).$$

On a alors

$$d(\gamma) = \inf_{z \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2} d(z, \gamma z) = \inf_{z \in \mathcal{D}, \gamma' \in \Gamma} d(\gamma' z, \gamma \gamma' z) = \inf_{z \in \mathcal{D}, \gamma' \in \Gamma} d(z, \gamma'^{-1} \gamma \gamma' z).$$

Si deux suites $(z_n)_n$ (dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$) et $(\gamma'_n)_n$ (dans Γ) vérifient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(z_n, \gamma'_n{}^{-1} \gamma \gamma'_n z_n) = d(\gamma),$$

par compacité, on peut supposer que la suite $(z_n)_n$ converge vers un point z de \mathcal{D} . Mais alors

$$d(\gamma) \leq d(z, \gamma'_n{}^{-1} \gamma \gamma'_n z) \leq 2d(z, z_n) + d(z_n, \gamma'_n{}^{-1} \gamma \gamma'_n z_n)$$

où le terme de droite converge vers $d(\gamma)$. Puisque l'orbite Γz est discrète dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$, la suite $(\gamma'_n{}^{-1} \gamma \gamma'_n z)_n$ est constante à partir d'un rang n_0 et la distance de translation $d(\gamma)$ est égale à la distance $d(z, \gamma'_{n_0}{}^{-1} \gamma \gamma'_{n_0} z)$. \square

Dans le cas d'un réseau irréductible général, nous avons la :

Proposition 3.4.2. *Dans un réseau irréductible non uniforme,*

- (i) *il existe des éléments paraboliques,*
- (ii) *il n'existe pas d'élément mixte dont une des composantes est parabolique.*

En d'autres termes : si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ appartient à un réseau irréductible, alors γ_1 et γ_2 sont simultanément paraboliques ou non.

Démonstration. Cette proposition est vraie dans les réseaux de Hilbert (voir le chapitre 4). On utilise le théorème 3.3.2 pour la généraliser à tout réseau irréductible non uniforme. Si Γ est un réseau irréductible, il existe un élément g dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ et un réseau de Hilbert $\Gamma_{\mathbb{K}}$ associé au corps quadratique réel \mathbb{K} tels que le groupe

$$\Gamma_o = g^{-1}\Gamma g \cap \Gamma_{\mathbb{K}}$$

soit d'indice fini dans $g^{-1}\Gamma g$ et dans $\Gamma_{\mathbb{K}}$. Si γ est un élément parabolique du réseau de Hilbert $\Gamma_{\mathbb{K}}$, il existe un entier n tel que γ^n appartienne à Γ_o . L'élément $g\gamma^n g^{-1}$ appartient donc à Γ et il est également parabolique ce qui prouve (i). Pour montrer l'assertion (ii), considérons $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ dans Γ et supposons γ_1 parabolique. Le groupe $g\Gamma_o g^{-1}$ est d'indice fini dans Γ donc il existe un entier n strictement positif tel que γ^n appartienne à $g\Gamma_o g^{-1}$ donc au groupe $g\Gamma_{\mathbb{K}}g^{-1}$. On a alors

$$\mathrm{tr}(\gamma_2^n) = \mathrm{tr}(g_2^{-1}\gamma_2^n g_2) = \sigma_{\mathbb{K}}(\mathrm{tr}(g_1^{-1}\gamma_1^n g_1)) = \sigma_{\mathbb{K}}(2) = 2$$

où $\sigma_{\mathbb{K}}$ désigne l'automorphisme non-trivial du corps \mathbb{K} . On en déduit que la composante γ_2 est également parabolique car elle n'est pas d'ordre fini (le réseau Γ est irréductible). \square

Supposons le réseau Γ irréductible. Par injectivité des projections p_1 et p_2 , ni γ_1 ni γ_2 n'est trivial. On en déduit également que si l'une des composantes est elliptique d'ordre fini, alors l'autre est elliptique de même ordre. Ceci n'est possible que si le groupe Γ possède de la torsion et c'est le seul cas où le groupe discret Γ contient un élément elliptique. Puisque les projections $p_1(\Gamma)$ et $p_2(\Gamma)$ sont denses dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, il existe des éléments dans Γ dont une composante est elliptique (resp. hyperbolique).

L'existence d'éléments hyperboliques et d'éléments hyper-réguliers dans un réseau est assurée par la proposition suivante.

Proposition 3.4.3. *Tout réseau du groupe G contient un élément hyper-régulier (donc en particulier une isométrie hyperbolique)*

On utilisera pour cette démonstration le lemme classique suivant :

Lemme 3.4.4. *(Selberg) Soit Γ un réseau du groupe G . Pour tout élément g du groupe G et tout voisinage U de Id dans G , il existe un entier n strictement positif tel que*

$$Ug^n U \cap \Gamma \neq \emptyset.$$

Démonstration. Soient g appartenant à G et U un voisinage de Id dans G . Quitte à remplacer U par $U \cap U^{-1}$, on peut supposer que le voisinage U est stable par inversion. Pour la mesure de Haar, tous les ensembles Ug^n , où n est un entier positif, sont de même mesure strictement positive. D'après l'hypothèse de covolume fini sur Γ , il existe donc deux indices différents n_1 et n_2 tels que Ug^{n_1} et Ug^{n_2} ne soient pas Γ -disjoints : il existe γ dans Γ tel que

$$\gamma Ug^{n_1} \cap Ug^{n_2} \neq \emptyset.$$

Si n_2 est supérieur à n_1 , l'ensemble $Ug^{n_2-n_1}U$ contient γ . \square

Démonstration de la proposition 3.4.3. Soient Γ un réseau du groupe $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $g = (g_1, g_2)$ un élément hyperbolique de G . D'après le lemme 3.4.4, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage U de Id tel que, pour tous h et h' dans U et pour tout entier n strictement positif, l'élément $hg^n h'$ est hyperbolique (et hyper-régulier si g l'est). Quitte à effectuer une conjugaison, nous pouvons supposer que chaque élément g_i est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda_i > 1.$$

Soit $\varepsilon > 0$, remarquons tout d'abord que, pour tous $h = (h_1, h_2)$ et $h' = (h'_1, h'_2)$ tels que

$$\|h_i - \mathrm{Id}\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|h'_i - \mathrm{Id}\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

et pour tout entier strictement positif n , l'élément $hg^n h'$ vérifie

$$1 - 2\varepsilon \leq \left| \frac{\mathrm{tr}(h_i g_i^n h'_i)}{\mathrm{tr}(g_i^n)} \right| \leq (1 + \varepsilon)^2 \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

En effet (le calcul étant le même pour chaque indice, nous l'omettrons pour alléger les notations), si

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

alors

$$hg^n h' = \begin{pmatrix} aa'\lambda^n + bc'\lambda^{-n} & ab'\lambda^n + bd'\lambda^{-n} \\ ca'\lambda^n + dc'\lambda^{-n} & cb'\lambda^n + dd'\lambda^{-n} \end{pmatrix}$$

et

$$(1 - 2\varepsilon)(\lambda^n + \lambda^{-n}) \leq \mathrm{tr}(hg^n h') \leq (1 + \varepsilon)^2(\lambda^n + \lambda^{-n}).$$

Puisque g est hyperbolique, alors

$$|\mathrm{tr}(g_i^n)| = \lambda_i^n + \lambda_i^{-n} > \lambda_i + \lambda_i \geq |\mathrm{tr}(g_i)| > 2 \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

donc il existe un réel $\varepsilon > 0$, dépendant uniquement de g tel que $|\mathrm{tr}(h_i g_i^n h'_i)| > 2$, c'est-à-dire $hg^n h'$ est hyperbolique. Si on suppose de plus que l'élément g est hyper-régulier, alors λ_1 est strictement supérieur à λ_2 (quitte à permuter) et les valeurs propres dominantes de $h_i g_i^n h'_i$ sont alors distinctes dès que ε est assez petit car

$$\left| \frac{\mathrm{tr}(h_1 g_1^n h'_1)}{\mathrm{tr}(h_2 g_2^n h'_2)} \right| \geq \frac{1 - 2\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Donc l'élément $hg^n h'$ est hyper-régulier. \square

Pour résumer ces résultats, nous pouvons dire que les éléments non triviaux d'un réseau irréductible de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sont de l'un des types suivants :

- hyperboliques (et il existe des éléments hyper-réguliers),
- elliptiques d'ordre fini (si et seulement si le réseau possède de la torsion),
- mixtes de la forme (e, h) ou (h, e) avec e elliptique d'ordre infini et h hyperbolique.
- paraboliques (si et seulement si le réseau n'est pas uniforme).

3.5 Points paraboliques

Soit G le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Le fait qu'un réseau du groupe G ne soit pas uniforme est lié à la présence d'éléments paraboliques (propositions 3.4.1 et 3.4.2). Nous définissons les points *paraboliques* de la frontière $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$ associés à un sous-groupe discret.

Définition. Soit Γ un sous-groupe discret de G . Un point ξ de $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$ est un point *parabolique* (pour le sous-groupe Γ) s'il est fixé par un élément parabolique du groupe Γ . Le *rang* du point parabolique ξ est alors le rang du sous-groupe abélien constitué des éléments paraboliques de Γ fixant ξ .

Le rang d'un point parabolique peut-être 1 ou 2. L'ensemble des points paraboliques est un sous-ensemble de $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$ invariant par le groupe Γ .

Définition. Soit Γ un sous-groupe discret de G . Une *pointe* (pour le groupe Γ) est une classe de points paraboliques modulo Γ .

Considérons la somme des fonctions de Busemann sur chacun des facteurs : pour un point $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ de $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$ et deux points $z = (z_1, z_2)$ et $z' = (z'_1, z'_2)$ de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$, notons

$$\beta_\xi(z, z') = \beta_{\xi_1}(z_1, z'_1) + \beta_{\xi_2}(z_2, z'_2).$$

Le point (∞, ∞) sera souvent noté ∞ . Pour ce point, on obtient :

$$\beta_\infty(z, z') = \ln \left(\frac{\mathrm{Im}z_1 \mathrm{Im}z_2}{\mathrm{Im}z'_1 \mathrm{Im}z'_2} \right).$$

Ce cocycle permet de définir horosphères et horoboules de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ en choisissant pour origine dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ le point $o = (i, i)$.

Définition. Soient ξ un point de la frontière et T un réel. L'horosphère basée en ξ de niveau T est l'ensemble

$$H_\xi(T) = \{z \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \mid \beta_\xi(z, o) = T\}.$$

L'horoboule (ouverte) basée en ξ de niveau T est l'ensemble

$$HB_\xi(T) = \{z \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \mid \beta_\xi(z, o) > T\}.$$

L'horosphère $H_\xi(T)$ (resp. horoboule $HB_\xi(T)$) est la réunion des produits d'horosphères $H_{\xi_1}(T_1) \times H_{\xi_2}(T_2)$ (resp. d'horoboules $HB_{\xi_1}(T_1) \times HB_{\xi_2}(T_2)$) pour les couples de réels (T_1, T_2) vérifiant

$$T_1 + T_2 = T \quad (\text{resp. } T_1 + T_2 > T).$$

Dans le cas où $\xi = \infty$, on obtient :

$$H_\infty(T) = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \mid \text{Im}z_1 \text{Im}z_2 = T\}$$

$$\text{et } \text{HB}_\infty(T) = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \mid \text{Im}z_1 \text{Im}z_2 > T\}.$$

Le stabilisateur G_∞ dans G du point ∞ est le groupe AN des (couples de) matrices triangulaires supérieures. Dans ce sous-groupe, nous pouvons distinguer :

- le sous-groupe N constitué des éléments paraboliques et de l'élément neutre,
- et le sous-groupe G_∞^β constitué des éléments laissant invariante la fonction $\beta_\infty(\cdot, o)$ (ou de manière équivalente les horosphères et horoboules basées au point ∞). Ce sous-groupe est constitué des éléments de la forme

$$\left(\left(\begin{pmatrix} a & b_1 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^{-1} & b_2 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) \right)$$

où a est strictement positif et b_1, b_2 sont quelconques. On peut également le décrire comme le groupe $A'N$ où A' est le sous-groupe de A constitué des éléments de la forme (ϕ^t, ϕ^{-t}) (ces éléments ne sont pas hyper-réguliers). Le sous-groupe G_∞^β agit simplement transitivement sur chaque horosphère basée au point ∞ . Pour un point ξ quelconque, nous noterons de même G_ξ^β le sous-groupe de G laissant invariante la fonction $\beta_\xi(\cdot, o)$.

Nous utiliserons à plusieurs reprises la proposition suivante (voir [Shi]). Le stabilisateur du point ξ dans le groupe Γ est noté Γ_ξ .

Proposition 3.5.1. (*Shimizu, [Shi]*) Soit Γ un sous-groupe discret de $G = \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

(i) Si le point $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ de $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$ est un point parabolique, il existe deux constantes strictement positives T_1 et T_2 telles que, pour tout élément appartenant à $\Gamma - \Gamma_\xi$:

$$\gamma(\text{HB}_{\xi_1}(T_1) \times \text{HB}_{\xi_2}(T_2)) \cap (\text{HB}_{\xi_1}(T_1) \times \text{HB}_{\xi_2}(T_2)) = \emptyset.$$

(ii) Si le point $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ de $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$ est un point parabolique de rang 2, il existe une constante strictement positive T telle que, pour tout élément appartenant à $\Gamma - \Gamma_\xi$:

$$\gamma \text{HB}_\xi(T) \cap \text{HB}_\xi(T) = \emptyset.$$

Le théorème suivant montre que le stabilisateur Γ_ξ dans un réseau irréductible Γ d'un point parabolique ξ préserve globalement chaque horosphère basée en ξ et agit de façon uniforme sur chacune de ces horosphères.

Théorème 3.5.2. Soient Γ un réseau irréductible et ξ un point parabolique pour le groupe Γ . Alors le stabilisateur Γ_ξ est un réseau (uniforme) du groupe G_ξ^β . En particulier le point ξ est parabolique de rang 2.

Démonstration. Nous pouvons supposer, en conjuguant le groupe Γ que le point ξ est le point ∞ . Il faut donc montrer que le stabilisateur Γ_∞ est contenu dans le groupe G_∞^β et que le quotient est compact. Soit Γ_∞^p l'ensemble des éléments paraboliques de Γ fixant le point ∞ . C'est un sous-groupe discret de N qui est non trivial car ∞ est un point

parabolique.

- Montrons tout d'abord que ce groupe est un réseau de N . Si ce n'est pas le cas, il est isomorphe à \mathbb{Z} et la projection $p_1(\Gamma_\infty^p)$ (resp. $p_2(\Gamma_\infty^p)$) est un sous-groupe discret (et non trivial car Γ est irréductible) du groupe $p_1(N)$ (resp. $p_2(N)$). Pour i valant 1 ou 2, le groupe $p_i(\Gamma_\infty)$ normalise $p_i(N)$. Soit γ un élément appartenant à Γ_∞ , l'action par conjugaison de

$$p_i(\gamma) = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & a_i^{-1} \end{pmatrix}$$

s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & t_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a_i^2 t_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons une action linéaire (en identifiant $p_i(N)$ et \mathbb{R}) qui préserve un réseau, le déterminant a_i^2 est donc entier. En considérons γ^{-1} nous obtenons donc $a_i^2 = 1$ ce qui montre que Γ_∞ est inclus dans N . En utilisant la proposition 3.5.1 (i), on en déduit que l'inclusion (isométrique et ouverte) de $\text{HB}_\infty(T_1) \times \text{HB}_\infty(T_2)$ dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ passe au quotient en une injection (isométrique et ouverte)

$$\Gamma_\infty^p \backslash (\text{HB}_\infty(T_1) \times \text{HB}_\infty(T_2)) \hookrightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2.$$

Mais ceci contredit l'hypothèse de volume fini car

$$\int_{\Gamma_\infty^p \backslash \text{HB}_\infty(T_1) \times \text{HB}_\infty(T_2)} \frac{dx_1 dy_1 dx_2 dy_2}{y_1^2 y_2^2} = \int_{\mathcal{D}} dx_1 dx_2 \int_{T_1}^{+\infty} \int_{T_2}^{+\infty} \frac{dy_1 dy_2}{y_1^2 y_2^2} = +\infty$$

avec \mathcal{D} un domaine fondamental pour l'action de Γ_∞^p sur le produit $\text{HB}_\infty(T_1) \times \text{HB}_\infty(T_2)$ (identifié à \mathbb{R}^2) de mesure infinie. Donc le sous-groupe Γ_∞^p est un réseau du groupe N .

- Montrons maintenant que le stabilisateur Γ_∞ est un réseau du groupe G_∞^β . Ce groupe N est normalisé par Γ_∞ . L'action par conjugaison d'un élément

$$\gamma = \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2^{-1} \end{pmatrix} \right)$$

sur N identifié à \mathbb{R}^2 s'écrit

$$(t_1, t_2) \mapsto (a_1^2 t_1, a_2^2 t_2).$$

Cette action linéaire préserve un réseau donc son déterminant est entier et, en considérant γ^{-1} , nous obtenons $(a_1 a_2)^2 = 1$ c'est-à-dire : γ appartient au groupe G_∞^β . Le stabilisateur Γ_∞ est donc un sous-groupe du groupe G_∞^β , il reste à montrer que c'est un réseau. Pour cela on effectue le même type de raisonnement que précédemment : d'après la proposition 3.5.1 (ii), l'application

$$\Gamma_\infty \backslash \text{HB}_\infty(T) \hookrightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2.$$

est une injection (isométrique et ouverte). Mais le volume de $\Gamma_\infty \backslash \text{HB}_\infty(T)$ n'est fini que si Γ_∞ contient un élément hyperbolique. Ce qui implique que le quotient $\Gamma_\infty \backslash \text{H}_\infty(T)$ de l'horosphère $\text{H}_\infty(T)$ est compact. \square

Corollaire 3.5.3. *Soient ξ et ξ' deux points paraboliques pour un réseau irréductible Γ . Alors il existe un réel T vérifiant :*

$$\gamma \in \Gamma \text{ et } \gamma \text{HB}_\xi(T) \cap \text{HB}_{\xi'}(T) \neq \emptyset \implies \gamma\xi = \xi'.$$

Démonstration. Le rang des points paraboliques ξ et ξ' est égal à 2 d'après le théorème 3.5.2. On utilise alors la proposition 3.5.1. \square

Nous utiliserons dans la suite la propriété suivante (appelée "Hypothèse (F)" dans [Shi]) sur les réseaux irréductibles du groupe G . Cette propriété est trivialement vérifiée pour les réseaux uniformes. Les réseaux de Hilbert satisfont à cette propriété (voir par exemple [Fre]) qui se "transmet" par commensurabilité. Mais en ce qui concerne les réseaux non uniformes, il ne semble pas exister de démonstration n'utilisant pas le théorème d'arithmécité 3.3.2 de Selberg.

Propriété 3.5.4. ([Shi]) *Soit Γ un réseau irréductible du groupe G . Il existe un domaine fondamental \mathcal{D} pour l'action de Γ dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ de la forme*

$$\mathcal{D} = \mathcal{C} \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_r$$

où \mathcal{C} est un compact, $\{\xi^1, \dots, \xi^r\}$ est un système minimal de représentants des pointes de Γ et pour tout i , V_i est un domaine fondamental pour l'action de Γ_{ξ^i} sur $\text{HB}_{\xi^i}(T)$ (T suffisamment grand). En particulier, il n'existe qu'un nombre fini de points paraboliques modulo Γ .

3.6 Orbites fermées

Pour un réseau irréductible Γ du groupe $G = \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, nous caractérisons les orbites fermées sous l'action du groupe diagonal A . Soient g un point du groupe G et x sa classe Γg dans $\Gamma \backslash G$. Alors l'application

$$\Psi_x : (g^{-1}\Gamma g \cap A) \backslash A \longrightarrow \Gamma \backslash G : (g^{-1}\Gamma g \cap A)a \longmapsto xa$$

est injective, continue et son image est exactement l'orbite xA du point x .

Lemme 3.6.1. *Soit Γ un réseau irréductible du groupe G .*

- 1) *S'il existe un élément γ dans Γ non trivial et tel que $g^{-1}\gamma g$ appartienne au groupe A , alors l'application Ψ_x est propre.*
- 2) *L'orbite xA est fermée dans $\Gamma \backslash G$ si et seulement si l'application Ψ_x est propre.*

Démonstration. 1) Si γ est non trivial, ses deux composantes sont non triviales (car Γ est irréductible). Il en est de même de $g^{-1}\gamma g$ et le centralisateur de cet élément est donc le groupe A . Il suffit donc d'appliquer la proposition 1.4.1.

2) Si cette application est propre, son image xA est donc fermée. Réciproquement, supposons que l'orbite xA soit fermée et que l'application Ψ_x ne soit pas propre. Il existe une suite $(a_n)_n$ de A divergente modulo le sous-groupe $(g^{-1}\Gamma g \cap A)$ et telle que la suite

$(xa_n)_n$ soit convergente vers un point xa (où a appartient à A). Il existe donc une suite $(\gamma_n)_n$ dans Γ vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n g a_n = ga.$$

La suite $(\gamma_n)_n$ est sans sous-suite stationnaire car la suite $(a_n)_n$ est divergente dans A . Notons α la classe de g dans G/A , on a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \alpha = \alpha$$

dans l'espace G/A . La double classe $\Gamma g A$ est fermée donc l'orbite $\Gamma \alpha$ est fermée dans G/A . D'après la propriété 1.4.2 l'orbite $\Gamma \alpha$ est discrète dans G/A . Ce qui implique que la suite $(\gamma_n \alpha)_n$ est constante à partir d'un certain rang. Il existe donc deux indices m et n tels que

$$\gamma_m \neq \gamma_n \text{ et } \gamma_m g = \gamma_n g a' \text{ avec } a' \in A.$$

Donc $g^{-1} \gamma_n^{-1} \gamma_m g$ est un élément non trivial de $g^{-1} \Gamma g \cap A$ ce qui implique que l'application Ψ_x est propre d'après le 1). D'où la contradiction. \square

Nous caractérisons maintenant les points de $\Gamma \backslash G$ dont l'orbite pour le groupe A est fermée non compacte (théorème 3.6.2) ou compacte (théorème 3.6.3). Cette caractérisation des orbites fermées non compactes ne semblait pas, à notre connaissance, être clairement établie jusqu'à un article récent de G. Tomanov et B. Weiss ([TW]).

Théorème 3.6.2. *Soient Γ un réseau irréductible du groupe G , g un élément de G et x sa classe dans $\Gamma \backslash G$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *l'orbite xA est fermée non compacte,*
- (ii) *le groupe $g^{-1} \Gamma g \cap A$ est isomorphe à \mathbb{Z} ,*
- (iii) *les points $g(\infty, \infty)$ et $g(0, 0)$ (ou $g(\infty, 0)$ et $g(0, \infty)$) sont des points paraboliques fixés par un même élément hyperbolique du groupe Γ . (Dans ce cas, cet élément n'est pas hyper-régulier.)*

Remarquons que l'application "orbitale" associée à un point de $\Gamma \backslash G$

$$A \longrightarrow \Gamma \backslash G \quad : \quad a \longmapsto xa$$

n'est donc jamais propre. (Il n'existe pas d'orbite divergente.)

Le théorème suivant permet de retrouver dans les cas des réseaux irréductibles du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ un résultat général de G. Prasad et M.S. Raghunathan dans [PRag] sur les orbites compactes du groupe diagonal.

Théorème 3.6.3. *Soit Γ un réseau irréductible du groupe G , g un élément de G et x sa classe dans $\Gamma \backslash G$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *l'orbite xA est compacte,*
- (ii) *le groupe $g^{-1} \Gamma g \cap A$ est isomorphe à \mathbb{Z}^2 ,*
- (iii) *les points $g(\infty, \infty)$ et $g(0, 0)$ sont fixés par un même élément hyperbolique hyper-régulier du groupe Γ .*

Si Γ est un réseau irréductible, il existe, d'après la proposition 3.4.3, des éléments hyper-réguliers donc des orbites compactes.

Démonstration du théorème 3.6.2. (i) \Rightarrow (ii). Si l'orbite xA n'est pas compacte, le sous-groupe discret $g^{-1}\Gamma g \cap A$ de A n'est pas isomorphe à \mathbb{Z}^2 , il suffit donc de montrer qu'il n'est pas trivial. D'après le lemme 3.6.1, l'application Ψ_x est propre. L'hypothèse (F) fournit une partition

$$\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 = \overline{C} \sqcup \overline{V}_1 \sqcup \dots \sqcup \overline{V}_r$$

où \overline{C} est compact et \overline{V}_i est l'injection canonique de $\Gamma_{\xi^i} \backslash \text{HB}_{\xi^i}(T)$ dans $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ (avec ξ^1, \dots, ξ^r un système minimal de représentants des pointes et T un réel suffisamment grand). Nous utiliserons les deux projections continues et propres suivantes :

$$\pi_o : G \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 : g \longmapsto go$$

$$\text{et } \overline{\pi}_o : \Gamma \backslash G \longrightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 : \Gamma g \longmapsto \Gamma go.$$

L'image $\overline{\pi}_o(xA)$ est un plat fermé et non compact dans $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ donc le sous-ensemble $\Psi_x^{-1}(\overline{C} \cap \overline{\pi}_o(xA))$ est un sous-ensemble compact de $g^{-1}\Gamma g \cap A \backslash A$. Supposons $g^{-1}\Gamma g \cap A$ trivial, $\Psi_g^{-1}(\overline{C} \cap \overline{\pi}_o(xA))$ est un donc sous-ensemble compact de A . Il existe une boule dans A (pour une norme quelconque sur l'algèbre $\text{Lie}(A)$) contenant $\Psi_x^{-1}(\overline{C} \cap \overline{\pi}_o(xA))$. Puisque la dimension de A est 2, le complémentaire E de cette boule est connexe donc $\overline{\pi}_o(\Psi_g(E))$ est connexe donc inclus dans l'un des \overline{V}_i , disons \overline{V}_1 . Donc l'ensemble connexe

$$\pi_o(gE) = \{ga.o \mid a \in E\}$$

est inclus dans l'ensemble $\Gamma \text{HB}_{\xi^1}(T)$ qui est une réunion disjointe d'horoboules (proposition 3.5.3), donc quitte à remplacer le point parabolique ξ^1 par un point de la même classe $\Gamma \xi^1$ et à modifier T ainsi que la taille de E , nous savons donc que $\pi_o(gE)$ est inclus dans l'horoboule $\text{HB}_{\xi^1}(T)$. Mais l'ensemble des points de la frontière $\partial \mathbb{H}^2 \times \partial \mathbb{H}^2$ adhérents à $\pi_o(gE)$ est l'ensemble des quatre points

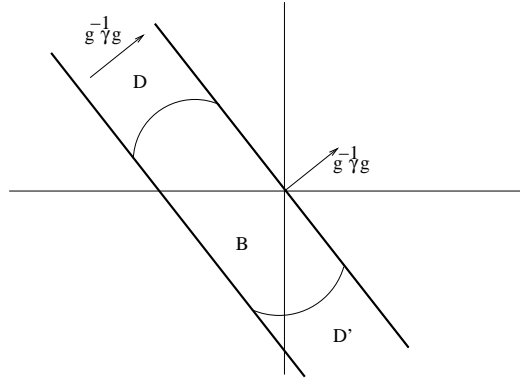
$$\{g(\infty, \infty), g(0, 0), g(0, \infty), g(\infty, 0)\}$$

qui ne peut pas être contenu dans l'ensemble

$$(\{\xi_1^1\} \times \partial \mathbb{H}^2) \cup (\partial \mathbb{H}^2 \times \{\xi_2^1\}).$$

des points de la frontière $\partial \mathbb{H}^2 \times \partial \mathbb{H}^2$ adhérents à l'horoboule $\text{HB}_{\xi^1}(T)$. D'où la contradiction.

(ii) \Rightarrow (iii). Supposons que le groupe $g^{-1}\Gamma g \cap A$ soit isomorphe à \mathbb{Z} . Soit $g^{-1}\gamma g$ un générateur de ce groupe, où γ est hyperbolique et appartient à Γ . Soit B une "bande" fermée de A contenant un domaine fondamental pour l'action du groupe $g^{-1}\Gamma g \cap A$ sur A .



Puisque le groupe $g^{-1}\Gamma g \cap A$ n'est pas trivial, l'application Ψ_x est propre. En effectuant le même raisonnement que précédemment, on montre qu'il existe

- une partie compacte de B dont le complémentaire est la réunion disjointe de deux sous-ensembles D et D' connexes et non bornés de B,
- deux points paraboliques ξ et ξ' ,
- et un réel T,

tels que

$$\pi_o(gD) \subseteq \text{HB}_\xi(T) \text{ et } \pi_o(gD') \subseteq \text{HB}_{\xi'}(T).$$

Il existe dans D deux éléments a et b tels que

$$(g^{-1}\gamma g)a = b,$$

donc $\gamma \text{HB}_\xi(T) \cap \text{HB}_\xi(T) \neq \emptyset$. D'après la proposition 3.5.3, γ fixe donc le point parabolique ξ . Le même raisonnement montre que γ fixe également ξ' . Les points ξ et ξ' appartiennent donc au sous-ensemble

$$\{g(\infty, \infty), g(0, 0), g(\infty, 0), g(0, \infty)\}$$

de $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$. Puisque ces deux points peuvent être reliés par une géodésique, le couple $\{\xi, \xi'\}$ est donc

$$\{g(\infty, \infty), g(0, 0)\} \text{ ou } \{g(\infty, 0), g(0, \infty)\}.$$

Enfin, puisque l'élément hyperbolique γ fixe un point parabolique, il n'est pas hyper-régulier d'après le théorème 3.5.2.

(iii) \Rightarrow (i). Si les points $g(\infty, \infty)$ et $g(0, 0)$ (ou $g(\infty, 0)$ et $g(0, \infty)$) sont fixés par un élément hyperbolique γ du réseau Γ , alors $g^{-1}\gamma g$ appartient au sous-groupe A. Dans ce cas l'application Ψ_x est propre et l'orbite xA est fermée d'après le lemme 3.6.1. Si cette orbite est compacte, le sous-groupe $g^{-1}\Gamma g \cap A$ est un réseau de A mais alors il contient un élément hyper-régulier qui fixe un point parabolique ce qui est impossible d'après le théorème 3.5.2. \square

Nous démontrons maintenant le théorème 3.6.3.

Démonstration du théorème 3.6.3. (i) \Rightarrow (ii). Si l'orbite xA est compacte, d'après le lemme 3.6.1, l'application Ψ_x est propre donc le quotient $(g^{-1}\Gamma g \cap A) \backslash A$ est compact,

d'où (ii).

(ii) \Rightarrow (iii). Si le sous-groupe $g^{-1}\Gamma g \cap A$ est un réseau du groupe A , il contient un élément hyper-régulier qui peut s'écrire $g^{-1}\gamma g = a$ où γ est hyper-régulier appartenant à Γ et a appartient à A . On a alors

$$\gamma g(\infty) = ga(\infty) = g(\infty) \quad \text{et} \quad \gamma g(0) = ga(0) = g(0).$$

(iii) \Rightarrow (i). Si un élément hyper-régulier γ du réseau Γ fixe les points $g(0, 0)$ et $g(\infty, \infty)$, alors $g^{-1}\gamma g$ appartient au sous-groupe A donc l'orbite xA est fermée d'après le lemme 3.6.1. Mais alors xA est compacte car sinon, d'après le théorème 3.6.2, $g^{-1}\gamma g$ n'est pas hyper-régulier. \square

Si Γ est un réseau irréductible de G , et si l'orbite ΓgA du point Γg est compacte, il existe $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ non-trivial appartenant à $\Gamma \cap gAg^{-1}$. Si Z_i désigne le centralisateur de γ_i dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, alors le groupe gAg^{-1} est égal au groupe $Z = Z_1 \times Z_2$. Le groupe $\Gamma \cap gAg^{-1}$ est isomorphe à \mathbb{Z}^2 et les projections induites

$$p_i : \Gamma \cap gAg^{-1} \longrightarrow Z_i$$

sont injectives. Donc $p_1(\Gamma \cap gAg^{-1})$ (resp. $p_2(\Gamma \cap gAg^{-1})$) est dense dans $p_1(gAg^{-1}) = Z_1$ (resp. $p_2(gAg^{-1}) = Z_2$).

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 3.3.3. Dans la suite de ce paragraphe et dans le paragraphe 3.7, nous noterons U^+ (resp. U^-) le sous-groupe unipotent supérieur (resp. inférieur) du groupe G . Pour i valant 1 ou 2, nous noterons A_i (resp. U_i^+, U_i^-) la projection du groupe A (resp. U^+, U^-) suivant la i -ème coordonnée. Chaque lettre gothique $\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, \mathfrak{u}^+ \dots$ désignera l'algèbre de Lie du groupe correspondant $G, A, U^+ \dots$. L'application adjointe Ad est la conjugaison. Si $g = (g_1, g_2)$ appartient au groupe G :

$$\text{Ad}(g) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} : (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \longmapsto (g_1 \mathbf{v}_1 g_1^{-1}, g_2 \mathbf{v}_2 g_2^{-1}).$$

Démonstration de la proposition 3.3.3. Soit F un sous-groupe fermé connexe de G contenant A . Il est normalisé par A donc son algèbre de Lie est une somme directe de sous-espaces propres par $\text{Ad}(A)$ de l'algèbre \mathfrak{g} . Ces sous-espaces sont $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{u}_i^+, \mathfrak{u}_i^-$, pour i valant 1 ou 2. On en déduit que, quitte à permuter les indices et les exposants, le groupe F contient le sous-groupe AU_1^+ constitué des éléments de la forme

$$\left(\left(\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1^{-1} \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} a_2 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} \end{array} \right) \right), \quad a_1, a_2 > 0, b_1 \in \mathbb{R}.$$

Il suffit donc de montrer que le sous-groupe AU_1^+ agit de façon minimale sur $\Gamma \backslash G$. Nous allons en fait montrer que toutes les orbites du sous-groupe $A_1U_1^+$ sont denses. Par dualité, il est équivalent de prouver la minimalité de l'action de Γ sur $G/A_1U_1^+$. Si on identifie ce quotient avec $\partial\mathbb{H}^2 \times \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, le groupe Γ agit par la formule :

$$\gamma \cdot (\xi_1, g_2) = (p_1(\gamma)\xi_1, p_2(\gamma)g_2),$$

où l'action est définie par homographie sur le premier facteur et par multiplication matricielle sur le second. Fixons un élément (ξ_1, g_2) de $\partial\mathbb{H}^2 \times \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Le groupe Γ étant

un réseau irréductible, nous savons (proposition 3.4.3 et théorème 3.6.3) qu'il existe un point Γh dans $\Gamma \backslash G$ dont l'orbite pour l'action de A est compacte. Le groupe $\Gamma \cap hAh^{-1}$ est alors un réseau du groupe $h_1A_1h_1^{-1} \times h_2A_2h_2^{-1}$ et ses projections sur chaque facteur sont denses. Il existe donc une suite $(\gamma_n)_n$ d'éléments appartenant à $\Gamma \cap hAh^{-1}$ telle que :

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p_2(\gamma_n) = Id,$$

(ii) toutes les isométries $p_1(\gamma_n)$ sont hyperboliques de même point fixe attractif (resp. répulsif) η_1^+ (resp. η_1^-),

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p_1(\gamma_n)\xi = \eta_1^+, \text{ pour tout point } \xi \text{ dans } \partial\mathbb{H}^2 - \{\eta_1^-\}.$$

Soient α dans Γ et ξ'_1 dans $\partial\mathbb{H}^2$. Soient V un voisinage de ξ'_1 dans $\partial\mathbb{H}^2$ et W un ouvert de $\partial\mathbb{H}^2$ disjoint de $p_1(\alpha)\xi_1$. Puisque l'action de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ est transitive sur les couples de points distincts de $\partial\mathbb{H}^2$ et la projection $p_1(\Gamma)$ est dense dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, il existe un élément β dans Γ vérifiant :

$$p_1(\beta)\eta_1^+ \in V \quad \text{et} \quad p_1(\beta)\eta_1^- \in W.$$

En particulier le point $p_1(\beta^{-1}\alpha)\xi_1$ est différent du point η_1^- . La suite $(\beta\gamma_n\beta^{-1}\alpha)_n$ vérifie alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_1(\beta\gamma_n\beta^{-1}\alpha)\xi_1 = p_1(\beta)\eta_1^+ \in V \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p_2(\beta\gamma_n\beta^{-1}\alpha)g_2 = p_2(\alpha)g_2.$$

Le voisinage V étant arbitraire, on en déduit que l'élément $(\xi'_1, p_2(\alpha)g_2)$ appartient à l'adhérence de l'orbite $\Gamma(\xi_1, g_2)$. Puisque ξ'_1 et α sont arbitraires, ceci prouve que l'orbite $\Gamma(\xi_1, g_2)$ est dense dans $\partial\mathbb{H}^2 \times \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. \square

3.7 Constructions d'orbites denses

Soient G le groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ et Γ un réseau irréductible du groupe G . Dans ce paragraphe, nous établissons deux conditions suffisantes de densité d'une orbite du sous-groupe A sur $\Gamma \backslash G$.

Le premier résultat affirme qu'une orbite dont l'adhérence contient une orbite compacte vérifie la conjecture 3.3.4. Mentionnons (voir [Mos]) que la réunion des orbites compactes est un sous-ensemble dense de $\Gamma \backslash G$.

Théorème 3.7.1. *Soit Γ un réseau irréductible du groupe G . Soit y un point de $\Gamma \backslash G$ tel que l'adhérence \overline{yA} de l'orbite yA contienne une orbite compacte. Alors l'orbite yA est compacte ou dense dans $\Gamma \backslash G$.*

Ce théorème est un cas particulier du théorème suivant dû à E. Lindenstrauss et B. Weiss ([LW]). Voir également [Moz] pour les cas du groupe $\text{PGL}(2, \mathbb{Q}_p) \times \text{PGL}(2, \mathbb{Q}_l)$.

Théorème 3.7.2. *(Lindenstrauss-Weiss, [LW]) Soient G le groupe $\text{SL}(d, \mathbb{R})$, Γ un réseau de G , A le groupe des matrices diagonales à coefficients positifs et D_{ij} le sous-groupe de A constitué des matrices $\text{diag}(a_1, \dots, a_d)$ vérifiant $a_i = a_j$.*

Soit y un point de G/Γ . On suppose qu'il existe un point x dans G/Γ vérifiant :

1- l'orbite Ax est compacte,

2- Pour tout couple (i, j) vérifiant $1 \leq i \neq j \leq d$, le groupe D_{ij} agit ergodiquement sur le tore Ax .

Alors il existe un sous-groupe réductif H de G , contenant A , tel que \overline{Ay} soit égal à l'orbite H_y . De plus le stabilisateur H_y du point y dans H est un réseau du groupe H .

La preuve du théorème 3.7.1 est simplifiée par rapport à la preuve originale de [LW]. En particulier, il n'est fait usage ni des résultats de M. Ratner et N. Shah sur les orbites des sous-groupes unipotents, ni du théorème d'arithméticité de G. Margulis.

Le second résultat démontré dans ce paragraphe fournit une condition suffisante de densité en termes de points à l'infini. Soit $g = (g_1, g_2)$ un élément du groupe G et y le point Γg de $\Gamma \backslash G$. Notons

$$E_g^1 = \{g_1(0), g_1(\infty)\} \text{ et } E_g^2 = \{g_2(0), g_2(\infty)\}$$

les ensembles de points de $\partial\mathbb{H}^2$ définis par g_1 et g_2 . D'après le théorème 3.6.3, si l'orbite yA est compacte, les points de l'ensemble $E_g = E_g^1 \times E_g^2$ sont fixés par des éléments diagonalisables du groupe Γ .

Théorème 3.7.3. *L'orbite yA du point $y = \Gamma g$ est dense dans $\Gamma \backslash G$ dans les cas suivants :*

(i) un des points de E_g^1 ou E_g^2 est fixé par la composante hyperbolique d'une isométrie mixte de Γ ;

(ii) l'orbite yA n'est pas compacte et l'un des points de E_g^1 ou E_g^2 est fixé par une isométrie hyperbolique hyper-régulière de Γ .

Nous démontrons tout d'abord le théorème 3.7.1. Notons G le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Considérons un point y de $\Gamma \backslash G$ tel que l'adhérence \overline{yA} de l'orbite yA contienne un point x dont l'orbite xA est compacte. Remarquons que si ce point x appartient à l'orbite yA , les deux orbites xA et yA sont égales donc l'orbite de y est compacte. Nous allons montrer que dans le cas contraire, l'orbite yA est dense dans $\Gamma \backslash G$.

Rappelons que nous notons U^+ (resp. U^-) le sous-groupe unipotent supérieur (resp. inférieur) du groupe G et pour i valant 1 ou 2, A_i (resp. U_i^+, U_i^-) la projection du groupe A (resp. U^+, U^-) suivant la i -ème coordonnée. Chaque lettre gothique $\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, \mathfrak{u}^+ \dots$ désigne l'algèbre de Lie du groupe correspondant $G, A, U^+ \dots$ Si a appartient au sous-groupe A , alors les sous-algèbres \mathfrak{u}^+ et \mathfrak{u}^- sont invariantes par $\mathrm{Ad}(a)$.

Nous fixons les normes suivantes sur les algèbres $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, \mathfrak{u}^+ et \mathfrak{u}^- : si \mathbf{v} désigne l'élément

$$\left(\left(\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{array} \right) \right)$$

appartenant à \mathfrak{g} , posons

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{g}} = \max(|a_1|, |b_1|, |c_1|, |a_2|, |b_2|, |c_2|),$$

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{u}^+} = \max(|b_1|, |b_2|) \text{ si } \mathbf{v} \text{ appartient à } \mathfrak{u}^+,$$

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{u}^-} = \max(|c_1|, |c_2|) \text{ si } \mathbf{v} \text{ appartient à } \mathfrak{u}^-.$$

Si un élément g de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ vérifie $g(0) \neq \infty$, alors il existe un unique élément unipotent supérieur u^+ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tel que $g(0) = u^+(0)$. L'élément $(u^+)^{-1}g$ fixe donc le point 0 de $\partial\mathbb{H}^2$ donc s'écrit de manière unique comme un produit u^-a avec u^- unipotent inférieur et a diagonal. On obtient donc la décomposition de Bruhat $g = u^+u^-a$ de l'élément g (définie pour tout élément g de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tel que $g(0) \neq \infty$). En effectuant cette décomposition sur chaque facteur du groupe G et puisque le sous-groupe Γ est discret, il existe donc des voisinages W_\circ (respectivement W^+ , W^-) de 0 dans \mathfrak{a} (respectivement \mathfrak{u}^+ , \mathfrak{u}^-) tels que l'application

$$\Psi : W^+ \times W^- \longrightarrow \Gamma \backslash G : (\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-) \longmapsto x \exp(\mathbf{u}^+) \exp(\mathbf{u}^-)$$

soit une immersion injective et l'application

$$\hat{\Psi} : W^+ \times W^- \times W_\circ \longrightarrow \Gamma \backslash G : (\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, \mathbf{a}) \longmapsto x \exp(\mathbf{u}^+) \exp(\mathbf{u}^-) \exp(\mathbf{a})$$

soit un difféomorphisme sur son image.

Démonstration du théorème 3.7.1. Nous allons montrer que, si le point x appartient à $\overline{y\mathbb{A}} - y\mathbb{A}$ alors il existe un sous-groupe V parmi U_1^+ , U_2^+ , U_1^- ou U_2^- (donc normalisé par \mathbb{A}) tel que l'orbite xV soit contenue dans $\overline{y\mathbb{A}}$. L'orbite xAV est alors contenue dans $\overline{y\mathbb{A}}$ et elle est dense d'après la proposition 3.3.3. Ce qui prouve que l'orbite $y\mathbb{A}$ est elle-même dense dans $\Gamma \backslash G$.

Quitte à restreindre les voisinages W^+ et W^- , nous les supposons symétriques. Puisque le point x appartient à $\overline{y\mathbb{A}} - y\mathbb{A}$, il existe une suite $(y_n)_n$ dans $y\mathbb{A} - x\mathbb{A}$ convergeant vers x . Pour n assez grand on a

$$y_n = \hat{\Psi}(\mathbf{u}_n^+, \mathbf{u}_n^-, \mathbf{a}_n)$$

où les suites $(\mathbf{a}_n)_n$, $(\mathbf{u}_n^+)_n$ et $(\mathbf{u}_n^-)_n$ tendent vers 0 (car $\hat{\Psi}$ est un difféomorphisme) et où les éléments \mathbf{u}_n^+ et \mathbf{u}_n^- ne sont pas simultanément nuls (car y_n n'appartient pas à $x\mathbb{A}$). Puisque les orbites $y\mathbb{A}$ et $x\mathbb{A}$ sont invariantes par \mathbb{A} , la suite de points $(\Psi(\mathbf{u}_n^+, \mathbf{u}_n^-))_n$ est contenue dans $y\mathbb{A} - x\mathbb{A}$ et converge vers le point x .

Etape 1 : Nous montrons qu'il existe un élément \mathbf{u}^+ (ou \mathbf{u}^-) non nul de l'algèbre \mathfrak{u}^+ (ou \mathfrak{u}^-) vérifiant : $x \exp(\mathbf{u}^+)$ appartient à $\overline{y\mathbb{A}}$. Pour tout élément a du groupe \mathbb{A} fixant le point x , le point

$$\Psi(\mathrm{Ad}(a)\mathbf{u}_n^+, \mathrm{Ad}(a)\mathbf{u}_n^-) = xa \exp(\mathbf{u}_n^+) a^{-1} a \exp(\mathbf{u}_n^-) a^{-1} = x \exp(\mathbf{u}_n^+) \exp(\mathbf{u}_n^-) a^{-1}$$

appartient à l'orbite $y\mathbb{A}$. Puisque le stabilisateur \mathbb{A}_x est un réseau (uniforme) du groupe \mathbb{A} , il existe dans \mathbb{A}_x un élément a de la forme $(\phi^{\lambda_1}, \phi^{\lambda_2})$ avec λ_1 et λ_2 deux nombres réels strictement supérieurs à 1. Pour tout $1 > \varepsilon > 0$ il existe un entier n tel que

$$\|\mathbf{u}_n^+ + \mathbf{u}_n^-\|_{\mathfrak{g}} < \varepsilon.$$

Fixons un tel n et notons

$$\mathbf{u}_n^- = \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ c_1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ c_2 & 0 \end{array} \right) \right) \text{ et } \mathbf{u}_n^+ = \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \right).$$

Alors on a, pour tout entier p :

$$\text{Ad}(a^p)(\mathbf{u}_n^+ + \mathbf{u}_n^-) = \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & b_1 \lambda_1^{2p} \\ c_1 \lambda_1^{-2p} & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & b_2 \lambda_2^{2p} \\ c_2 \lambda_2^{-2p} & 0 \end{array} \right) \right).$$

Si p est un entier positif, on a pour $i = 1, 2$: $|c_i \lambda_i^{-2p}| < |c_i| < \varepsilon$. D'autre part les nombres b_1 et b_2 ne sont pas tous deux nuls donc, en définissant R comme le maximum des valeurs λ_1^2 et λ_2^2 , il existe un entier p positif tel que $1 \leq \max(|b_1 \lambda_1^{2p}|, |b_2 \lambda_2^{2p}|) \leq R$. Fixons cet entier p . Les vecteurs $\mathbf{v}_n^+ = \text{Ad}(a^p)\mathbf{u}_n^+$ de \mathfrak{u}^+ et $\mathbf{v}_n^- = \text{Ad}(a^p)\mathbf{u}_n^-$ de \mathfrak{u}^- vérifient donc :

- le point $\Psi(\mathbf{v}_n^+, \mathbf{v}_n^-)$ appartient à l'orbite yA ,
- $1 \leq \|\mathbf{v}_n^+ + \mathbf{v}_n^-\|_{\mathfrak{g}} \leq R$,
- $\|\mathbf{v}_n^-\|_{\mathfrak{u}^-} \leq \varepsilon$.

Puisque $1 > \varepsilon > 0$ est arbitraire, il existe donc une suite $(\mathbf{v}_n^+)_n$ dans \mathfrak{u}^+ que l'on peut supposer convergente vers un vecteur \mathbf{u}^+ non nul de \mathfrak{u}^+ et une suite $(\mathbf{v}_n^-)_n$ dans \mathfrak{u}^- qui converge vers 0, ces deux suites vérifiant : $\Psi(\mathbf{v}_n^+, \mathbf{v}_n^-)$ appartient à l'orbite yA . En passant à la limite il vient : $\Psi(\mathbf{u}^+, 0)$ appartient à \overline{yA} .

Etape 2 : Il existe un vecteur \mathbf{v} de l'algèbre \mathfrak{u}_1^+ (ou \mathfrak{u}_2^+) tel que le point $x \exp(\mathbf{v})$ appartient à \overline{yA} .

Si le vecteur \mathbf{u}^+ appartient à une des sous-algèbres \mathfrak{u}_1^+ ou \mathfrak{u}_2^+ , on peut choisir \mathbf{u}^+ et il n'y a rien à faire. On suppose donc que l'élément \mathbf{u}^+ est de la forme

$$\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \right) \text{ avec } b_1 \neq 0.$$

Soient λ_2 un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et a l'élément $(\text{Id}, \phi^{\lambda_2})$ du sous-groupe A . Lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, on a

$$\text{Ad}(a^n)\mathbf{u}^+ = \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & b_2 \lambda_2^{2n} \\ 0 & 0 \end{array} \right) \right)$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ad}(a^n)\mathbf{u}^+ = \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \right).$$

Soit \mathbf{v} cette limite. L'orbite xA est un tore compact donc l'action de a^{-1} par multiplication sur xA est récurrente : il existe une suite divergente $(k_n)_n$ d'entiers positifs telle que, dans $\Gamma \backslash G$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x a^{-k_n} = x.$$

Alors la suite des termes

$$x \exp(\mathbf{u}^+) a^{k_n} = x a^{-k_n} \exp(\text{Ad}(a^{k_n})\mathbf{u}^+)$$

est contenue dans l'ensemble invariant $\overline{y\bar{A}}$ et converge vers le point $x \exp(\mathbf{v})$ qui appartient donc à $\overline{y\bar{A}}$.

Etape 3 : Pour tout réel t , le point $x \exp(t\mathbf{v})$ appartient à $\overline{y\bar{A}}$.

Notons α le morphisme de groupes

$$A \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : a = (\phi^{\lambda_1}, \phi^{\lambda_2}) \longmapsto \lambda_1.$$

Avec la notation précédente pour \mathbf{v} , on a

$$\text{Ad}(a)\mathbf{v} = \left(\begin{pmatrix} 0 & b_1 \lambda_1^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \alpha(a)^2 \mathbf{v}.$$

Si $a = (\phi^{\lambda_1}, \phi^{\lambda_2})$ est un élément du stabilisateur A_x , le point

$$x \exp(\alpha(a)^2 \mathbf{v}) = x \exp(\text{Ad}(a)\mathbf{v}) = xa \exp(\mathbf{v})a^{-1} = x \exp(\mathbf{v})a^{-1}$$

appartient donc à $\overline{y\bar{A}}$. Puisque le réseau Γ est irréductible, la projection du stabilisateur A_x suivant la première coordonnée est dense donc l'ensemble $\alpha(A_x)$ est dense dans \mathbb{R}_+^* . Donc l'assertion est vraie pour tout réel t positif. Dans l'étape 1, on a supposé les voisinages W^+ et W^- symétriques donc, en remplaçant les suites $(\mathbf{u}_n^+)_n$ (resp. $(\mathbf{u}_n^-)_n$) par les suites $(-\mathbf{u}_n^+)_n$ (resp. $(-\mathbf{u}_n^-)_n$) dans tout le raisonnement on obtient : $x \exp(-\mathbf{v})$ appartient à $\overline{y\bar{A}}$. \square

Pour démontrer le théorème 3.7.3, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 3.7.4. *Soit Γ un sous-groupe discret de $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tel que les projections $p_1(\Gamma)$ et $p_2(\Gamma)$ soient denses. Alors, pour tout élément g_1 dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ et tout point ξ_2 dans le bord $\partial\mathbb{H}^2$, il existe une suite $(\gamma_n)_n$ de Γ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_1(\gamma_n) = g_1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_2(\gamma_n)z_2 = \xi_2 \text{ pour tout point } z_2 \text{ de } \mathbb{H}^2.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour l'action de Γ sur l'espace

$$\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times (\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2)$$

définie par

$$\gamma(h, z) = (p_1(\gamma)h, p_2(\gamma)z),$$

on a :

$$\overline{\Gamma(\text{Id}, z_2)} \supseteq \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \partial\mathbb{H}^2 \text{ pour tout point } z_2 \text{ de } \mathbb{H}^2.$$

Puisque la projection $p_1(\Gamma)$ est dense, il existe une suite $(\alpha_n)_n$ dans Γ , non stationnaire, telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_1(\alpha_n) = \text{Id}.$$

Le groupe Γ étant discret, la suite $(p_2(\alpha_n))_n$ n'est pas bornée donc, quitte à extraire une sous-suite, la suite $(p_2(\alpha_n)z'_2)_n$ converge, pour tout point z'_2 dans \mathbb{H}^2 , vers un point η du bord $\partial\mathbb{H}^2$. Pour deux éléments quelconques β et δ du groupe Γ , la suite $(\delta\alpha_n\delta^{-1}\beta)_n$ vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_1(\delta\alpha_n\delta^{-1}\beta) = p_1(\beta)$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_2(\delta\alpha_n\delta^{-1}\beta)z_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_2(\delta\alpha_n)(p_2(\delta^{-1}\beta)z_2) = p_2(\delta)\eta$$

donc l'adhérence $\overline{\Gamma(\text{Id}, z_2)}$ contient $p_1(\Gamma) \times p_2(\Gamma)\eta$ donc $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \partial\mathbb{H}^2$. \square

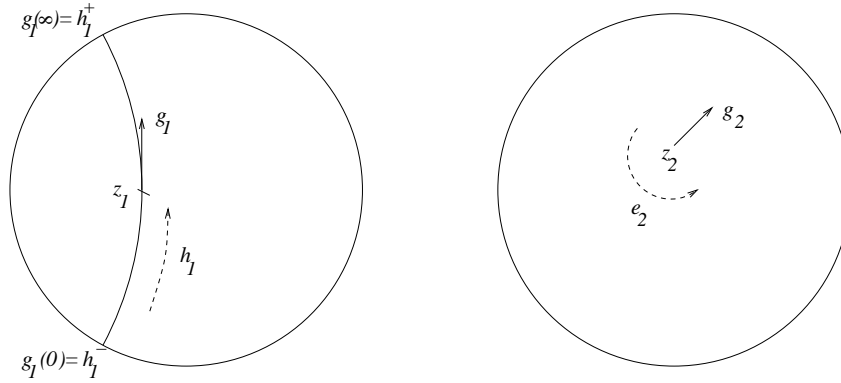
Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.7.3. Les trois premières étapes de la démonstration concernent la partie (i) tandis que la partie (ii) est démontrée dans l'étape 4.

Démonstration du théorème 3.7.3. Nous démontrons par étapes le résultat dans la situation (i) en commençant par des situations particulières pour finir avec les hypothèses générales. Plaçons-nous dans la situation (i). Quitte à permuter les indices, nous pouvons supposer qu'il existe un élément γ de Γ vérifiant :

- la composante $p_1(\gamma) = h_1$ est hyperbolique de point attractif $h_1^+ = g_1(\infty)$,
- la composante $p_2(\gamma) = e_2$ est elliptique, notons x_2 son unique point fixe (appartenant à \mathbb{H}^2).

Notons g_i la composante $p_i(g)$ et z_i la composante $p_i(z)$ du point $z = g.o$.

Etape 1 : Supposons d'abord que $g_1(\infty) = h_1^+$, $g_1(0) = h_1^-$ et $z_2 = x_2$.



Soit k une isométrie orientée elliptique de \mathbb{H}^2 fixant le point x_2 , il existe une suite croissante d'entiers $(m_n)_n$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_2^{m_n} = k.$$

Alors

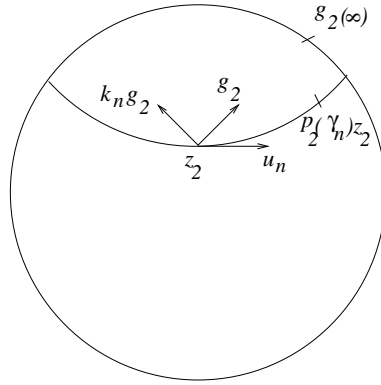
$$\gamma^{m_n} g(\phi^{-m_n h_1}, \text{Id}) = (g_1, e_2^{m_n} g_2) \longrightarrow (g_1, k g_2) \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

donc l'élément $(g_1, k g_2)$ appartient à $\overline{\Gamma g A}$. Soit \tilde{g}_1 dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$; d'après le lemme 3.7.4, il existe une suite $(\gamma_n)_n$ dans Γ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_1(\gamma_n) = \tilde{g}_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p_2(\gamma_n)z_2 = g_2(\infty).$$

Pour tout n , définissons u_n comme l'unique élément de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ représentant le vecteur unitaire tangent en z_2 à la géodésique orientée passant par z_2 et $p_2(\gamma_n)z_2$ (dans cet ordre).

Ce vecteur est égal au vecteur $p_2(\gamma_n)k_n g_2 \phi^{-t_n}$ pour $t_n = d(z_2, p_2(\gamma_n)z_2)$ et une unique isométrie k_n fixant z_2 .



Puisque la suite $(p_2(\gamma_n)z_2)_n$ converge vers le point $g_2(\infty)$, la suite $(u_n)_n$ converge vers g_2 . Alors

$$\gamma_n(g_1, k_n g_2)(\text{Id}, \phi^{-t_n}) = (p_1(\gamma_n)g_1, p_2(\gamma_n)k_n g_2 \phi^{-t_n}) \longrightarrow (\tilde{g}_1 g_1, g_2) \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

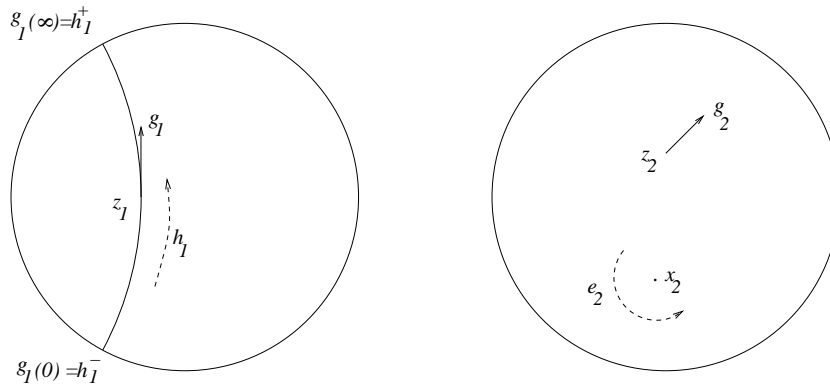
On en déduit que l'ensemble $\overline{\Gamma g A}$ contient $(\tilde{g}_1 g_1, g_2)$ donc l'ensemble $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \{g_2\}$ car \tilde{g}_1 est arbitraire.

Soit maintenant $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2)$ dans le groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \text{PSL}(2, \mathbb{R})$; il existe une suite $(\gamma_n)_n$ dans Γ telle que $(p_2(\gamma_n))_n$ converge dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ vers \tilde{g}_2 . D'après ce qui précède, l'élément $(p_1(\gamma_n)^{-1} \tilde{g}_1 g_1, g_2)$ appartient à $\overline{\Gamma g A}$. Or la suite d'éléments

$$\gamma_n(p_1(\gamma_n)^{-1} \tilde{g}_1 g_1, g_2) = (\tilde{g}_1 g_1, p_2(\gamma_n)g_2)$$

converge, lorsque n tend vers $+\infty$, vers l'élément $\tilde{g}g$ donc $\tilde{g}g$ appartient à $\overline{\Gamma g A}$. On en déduit que l'orbite $\Gamma g A$ est dense car \tilde{g} est arbitraire.

Etape 2. Supposons maintenant seulement que $g_1(\infty) = h_1^+$ et $g_1(0) = h_1^-$.

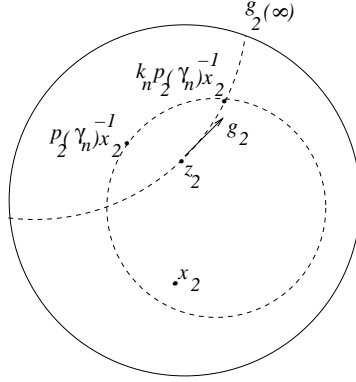


De même que précédemment, pour tout élément k dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ fixant le point x_2 , l'ensemble $\overline{\Gamma g A}$ contient $(g_1, k g_2)$. D'après le lemme 3.7.4, il existe une suite $(\gamma_n)_n$ dans

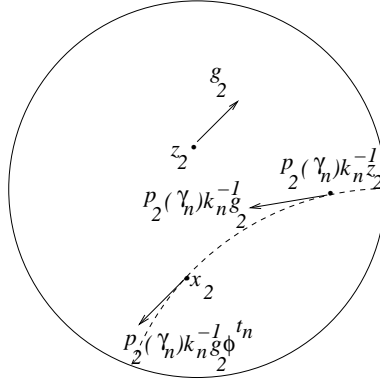
Γ , non stationnaire, telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_1(\gamma_n) = \text{Id} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p_2(\gamma_n)y_2 = g_2(\infty) \quad \text{pour tout point } y_2 \text{ de } \mathbb{H}^2.$$

Puisque la suite $(p_2(\gamma_n))_n$ ne contient pas de sous-suite convergente, la suite de points $(p_2(\gamma_n)^{-1}x_2)_n$ ne possède pas de sous-suite convergente dans \mathbb{H}^2 ; il en résulte que, pour n assez grand, le point z_2 est contenu dans le disque (hyperbolique) ouvert de centre x_2 et de rayon $d(x_2, p_2(\gamma_n)^{-1}x_2)$. Le cercle correspondant est l'orbite $K'_2(p_2(\gamma_n)^{-1}x_2)$ où le groupe K'_2 est le stabilisateur dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ du point x_2 . Donc, à partir d'un certain rang, il existe un élément k_n dans K'_2 tel que la géodésique orientée passant par les points z_2 et $k_n p_2(\gamma_n)^{-1}x_2$ (dans cet ordre) soit dirigée vers $g_2(\infty)$.



Alors la géodésique orientée passant par les points $p_2(\gamma_n)k_n^{-1}z_2$ et x_2 (dans cet ordre) est dirigée vers le point $p_2(\gamma_n)k_n^{-1}g_2(\infty)$ du bord $\partial\mathbb{H}^2$. En particulier, la géodésique tangente au vecteur $p_2(\gamma_n)k_n^{-1}g_2$ contient le point x_2 donc il existe un réel t_n tel que le vecteur unitaire $p_2(\gamma_n)k_n^{-1}g_2\phi^{t_n}$ soit basé au point x_2 .



Quitte à prendre une sous-suite, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_2(\gamma_n)k_n^{-1}g_2\phi^{t_n} = u_2$$

où u_2 est un vecteur unitaire tangent au point x_2 . Puisque l'élément $(g_1, k_n^{-1}g_2)$ appartient,

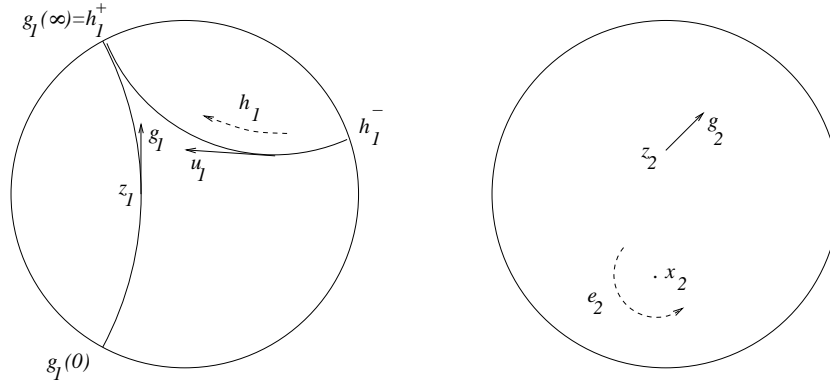
pour tout n , à $\overline{\Gamma gA}$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(g_1, k_n^{-1}g_2)(\text{Id}, \phi^{tn}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (p_1(\gamma_n)g_1, p_2(\gamma_n)k_n^{-1}g_2\phi^{tn}) = (g_1, u_2)$$

appartient à $\overline{\Gamma gA}$. D'après l'étape 1, l'orbite $\Gamma(g_1, u_2)A$ est dense donc l'orbite ΓgA est dense également.

Etape 3. Supposons maintenant seulement que $g_1(\infty) = h_1^+$.

Soit u_1 dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ représentant un vecteur unitaire tangent à l'axe de l'isométrie h_1 et dirigé vers h_1^+ ; les géodésiques définies par g_1 et u_1 sont asymptotes (au point h_1^+).



Il existe une suite $(t_n)_n$ de nombres réels, tendant vers $+\infty$, telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(h_1^n u_1.o, g_1 \phi^{tn}.o) = 0$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(u_1.o, h_1^{-n} g_1 \phi^{tn}.o) = 0.$$

D'autre part, pour tout n :

$$h_1^{-n} g_1 \phi^{tn}(\infty) = h_1^{-n} g_1(\infty) = h_1^+ = u_1(\infty)$$

donc la suite $(h_1^{-n} g_1 \phi^{tn})_n$ converge vers u_1 dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Puisque $p_2(\gamma) = e_2$ est une isométrie elliptique, il existe une sous-suite $(m_n)_n$ dans \mathbb{N} , strictement croissante et telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_2(\gamma^{-m_n}) = \text{Id}.$$

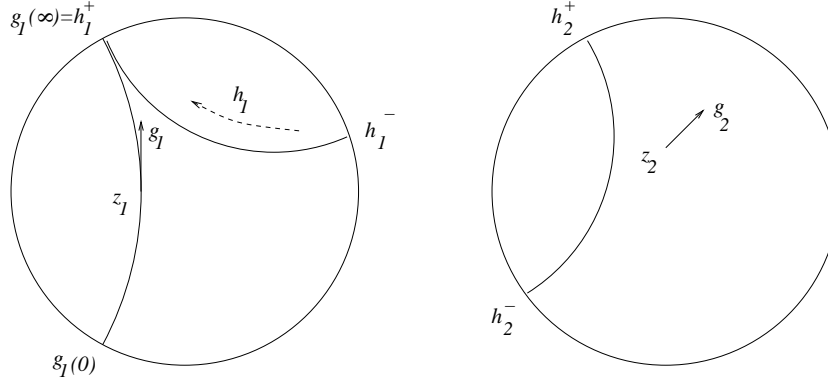
Donc la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^{-m_n} g(\phi^{tm_n}, \text{Id}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (h_1^{-m_n} g_1 \phi^{tm_n}, e_2^{-m_n} g_2) = (u_1, g_2)$$

appartient à $\overline{\Gamma gA}$. D'après l'étape 2, l'orbite $\Gamma(u_1, g_2)A$ est dense dans G donc l'orbite ΓgA est dense dans G .

Pour démontrer le théorème dans la situation (ii), nous allons montrer que l'adhérence de l'orbite ΓgA contient une orbite vérifiant la condition (i).

Etape 4. Notons $\gamma = (h_1, h_2)$ l'élément hyper-régulier fixant un des points de E_g^1 ou E_g^2 . On peut supposer que $g_1(\infty)$ est le point fixe attractif h_1^+ de l'isométrie h_1 et que $g_2(\infty)$ n'est pas fixé par h_2 (sinon on peut appliquer le théorème 3.7.1 car l'élément γ donne alors lieu à une orbite compacte contenue dans l'adhérence de l'orbite du point Γg).

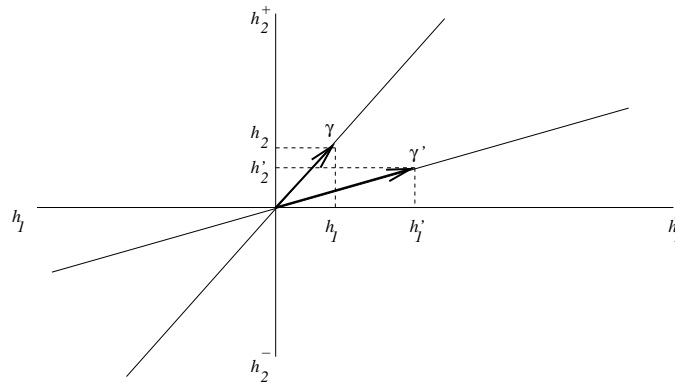


Puisque l'élément γ est hyper-régulier, son centralisateur dans Γ est un réseau du groupe abélien $Z = Z_1 \times Z_2$ où Z_i est le centralisateur dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ de h_i , $i = 1, 2$. Il existe donc un élément $\gamma' = (h'_1, h'_2)$ dans $\Gamma \cap Z$ vérifiant :

$$h_i'^{\pm} = h_i^{\pm} \quad \text{pour } i = 1, 2$$

$$\text{et} \quad \frac{l(h_2)}{l(h_1)} > \frac{l(h'_2)}{l(h'_1)}.$$

En identifiant les éléments de Z et leur préimage dans l'algèbre $\text{Lie}(Z)$, on a donc la configuration suivante :



Le réseau $\Gamma \cap Z$ de Z ne se décompose pas en un produit dans $Z_1 \times Z_2$ donc le groupe engendré par h_1 et h'_1 (respectivement h_2 et h'_2) est dense dans Z_1 (respectivement Z_2) et

l'adhérence des semi-groupes

$$\left\{ h_2^m h_2'^{m'} \mid m, m' \in \mathbb{Z}, m \geq 0, m' \leq 0 \right\} \text{ et } \left\{ h_2^m h_2'^{m'} \mid m, m' \in \mathbb{Z}, m \leq 0, m' \geq 0 \right\}$$

du groupe Z_2 est d'intérieur non-vide.

L'application

$$Z_2 \longrightarrow \partial\mathbb{H}^2 : c_2 \longmapsto c_2(g_2(\infty))$$

est un homéomorphisme sur son image : la composante connexe de $\partial\mathbb{H}^2 - \{h_2^\pm\}$ contenant $g_2(\infty)$. D'autre part, pour tout ouvert non vide U du bord $\partial\mathbb{H}^2$, il existe un élément $r = (r_1, r_2)$ dans le réseau Γ vérifiant :

- (1) l'isométrie r_1 est elliptique
- (2) l'isométrie r_2 est hyperbolique de point fixe attractif r_2^+ appartenant à U .

(Il suffit de conjuguer convenablement un élément mixte quelconque de Γ en utilisant la densité du groupe $p_2(\Gamma)$.) Donc il existe un élément $r = (r_1, r_2)$ dans Γ vérifiant (1) et :

- (2') l'isométrie r_2 est hyperbolique de point fixe attractif r_2^+ appartenant à l'ensemble

$$\overline{\left\{ h_2^m h_2'^{m'} \mid m, m' \in \mathbb{Z}, m \geq 0, m' \leq 0 \right\}}(g_2(\infty)).$$

Il existe donc des suites $(m_n)_n$ d'entiers positifs et $(m'_n)_n$ d'entiers négatifs telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_2^{m_n} h_2'^{m'_n} = c_2 \text{ appartient à } Z_2 \text{ et } c_2 g_2(\infty) = r_2^+.$$

Puisque le sous-groupe Γ est discret, la suite $(h_1^{m_n} h_1'^{m'_n})_n$ diverge (dans le centralisateur Z_1) et, d'après le choix de γ et γ' , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_1^{m_n} h_1'^{m'_n}(x) = h_1^- \text{ pour tout point } x \text{ de } \mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2 - \{h_1^+\}.$$

En particulier la suite $(h_1^{m_n} h_1'^{m'_n} g_1(0))_n$ converge vers le point h_1^- . Nous avons donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_1^{m_n} h_1'^{m'_n} g_1(0) = h_1^- \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} h_1^{m_n} h_1'^{m'_n} g_1(\infty) = h_1^+$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_2^{m_n} h_2'^{m'_n} g_2(0) = c_2 g_2(\infty) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} h_2^{m_n} h_2'^{m'_n} g_2(\infty) = c_2(g_2(\infty)) = r_2^+$$

En utilisant l'action du groupe A , il existe donc un élément \tilde{g} dans $\overline{\Gamma g A}$ tel que $p_2(\tilde{g})$ soit dirigé vers r_2^+ . D'après la condition (i) du théorème, l'orbite $\Gamma \tilde{g} A$ est dense dans G , il en est donc de même pour l'orbite $\Gamma g A$. \square

3.8 Sur l'impossibilité de deux constructions d'orbites bornées

Dans le cas du groupe $G = \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, pour lequel la dimension du groupe diagonal (le *rang* du groupe) est égal à 2, nous expliquons pourquoi les deux constructions

du paragraphe 3.2 sont impossibles.

La première construction ne fonctionne pas en rang supérieur car, contrairement aux deux rayons géodésiques, on ne peut pas contrôler simultanément les quatre chambres de Weyl d'un même plat en les dirigeant vers des orbites compactes. Soient Γ un réseau irréductible et $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ un élément hyper-régulier de Γ . Soit h dans G tel que les points $h(0, 0)$ et $h(\infty, \infty)$ de $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$ soient fixés par Γ . D'après le théorème 3.6.3, l'orbite du point Γh est compacte. Si un élément g appartenant à G vérifie $g(\infty, \infty) = (\gamma_1^+, \gamma_2^+)$, l'ensemble

$$\{g(\phi^{t_1}, \phi^{t_2}).o : t_1, t_2 \geq 0\}$$

est à distance finie de l'ensemble $hA.o$ (où o désigne le point (i, i) de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$). Donc l'ensemble (la "semi-orbite")

$$\{\Gamma g(\phi^{t_1}, \phi^{t_2}) : t_1, t_2 \geq 0\}$$

est borné dans $\Gamma \backslash G$. Mais l'orbite ΓgA est dense dans $\Gamma \backslash G$ d'après le théorème 3.7.1 ou le théorème 3.7.3.

Pour étudier la seconde construction, nous utiliserons la généralisation suivante de l'ensemble non-errant (voir [Gui] et [CG1]).

Définition. Soit Γ un sous-groupe discret du groupe $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Un élément g de G est *non-errant* pour le groupe Γ si, pour tout voisinage V de g dans G , il existe une suite $(\gamma_n)_n$ dans Γ et deux suites non bornées $(t_{1,n})_n$ et $(t_{2,n})_n$ de réels positifs vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_{2,n}}{t_{1,n}} = \lambda \in]0, +\infty[\quad \text{et} \quad \gamma_n V \cap V(\phi^{t_{1,n}}, \phi^{t_{2,n}}) \neq \emptyset \quad \text{pour tout } n.$$

L'ensemble *non-errant* est l'ensemble des éléments non-errants pour le groupe Γ , il sera noté Ω'_Γ ou Ω'

Remarque 3.8.1. Pour cette définition, il est équivalent de supposer que la suite $(t_{1,n}, t_{2,n})_n$ est de la forme $(t_n, \lambda t_n)_n$ avec $\lambda > 0$ et $(t_n)_n$ une suite non bornée de réels positifs.

Cet ensemble possède des propriétés semblables à l'ensemble non-errant pour le flot géodésique.

Propriété 3.8.2. L'ensemble non-errant d'un sous-groupe discret Γ est fermé, invariant par Γ et par le sous-groupe A . De plus, il est également invariant par la multiplication à droite par l'élément d'ordre 2

$$k_0 = \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right) \right).$$

Démonstration. - Soit $(g_n)_n$ une suite d'éléments de l'ensemble non-errant Ω' convergeant vers l'élément g du groupe G . Tout voisinage de g contient un voisinage d'un élément g_n . Puisque tous les points de la suite $(g_n)_n$ appartiennent à l'ensemble non-errant, il en donc de même du point g . Donc l'ensemble non-errant Ω' est fermé dans G .

- L'invariance par Γ est évidente.

- Soient g un élément de Ω' , V un voisinage de g dans G et a un élément de A . Il existe un réel λ strictement positif, une suite $(t_n)_n$ non-bornée de réels positifs et une suite $(\gamma_n)_n$ telles que, pour tout n :

$$\gamma_n V \cap V(\phi^{t_n}, \phi^{\lambda t_n}) \neq \emptyset$$

donc

$$\gamma_n V a \cap V a(\phi^{t_n}, \phi^{\lambda t_n}) = \gamma_n V a \cap V(\phi^{t_n}, \phi^{\lambda t_n}) a \neq \emptyset.$$

Puisque tout voisinage de ga s'écrit Va où V est un voisinage de g , ceci montre que le point ga est non-errant.

- Tout voisinage de gk_0 dans G s'écrit Vk_0 où V est un voisinage de g dans G . Pour tout γ dans Γ et tout a dans A , on a :

$$(Vk_0)a \cap \gamma^{-1}(Vk_0) = Va^{-1}k_0 \cap \gamma^{-1}(Vk_0) = (Va^{-1} \cap \gamma^{-1}V)k_0 = \gamma^{-1}(\gamma V \cap Va)a^{-1}k_0.$$

Donc les éléments g et gk_0 appartiennent simultanément à l'ensemble non-errant. \square

Rappelons que l'ensemble limite régulier

$$L_\Gamma^{reg} = L_\Gamma \cap (\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2 \times]0, +\infty[)$$

du groupe Γ est un produit

$$L_\Gamma^{reg} = \mathcal{F}_\Gamma \times I$$

où \mathcal{F}_Γ est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{F} = \partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$ invariant par Γ et I est un intervalle de $]0, +\infty[$.

Propriété 3.8.3. *Soit Γ un sous-groupe discret Zariski-dense du groupe G . Un élément h de G est non-errant si et seulement si les points $h(\infty, \infty)$ et $h(0, 0)$ appartiennent à l'ensemble limite \mathcal{F}_Γ .*

Démonstration. Supposons d'abord que l'élément h est non-errant. Si V est un voisinage (que l'on peut supposer compact) de h dans G , il existe un réel strictement positif λ , une suite $(t_n)_n$ non bornée de réels positifs, une suite $(\gamma_n)_n$ dans Γ et des suites $(h'_n)_n$ et $(h''_n)_n$ dans V tels que

$$h'_n(\phi^{t_n}, \phi^{\lambda t_n}) = \gamma_n h''_n \quad \text{pour tout } n.$$

La suite $((\phi^{t_n}, \phi^{\lambda t_n}).o)_n$ converge vers le point $(\infty, \infty, \lambda)$ du bord régulier

$$\partial_{reg}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2) = \partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2 \times]0, +\infty[$$

de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ et nous pouvons supposer que la suite $(h'_n)_n$ converge vers un élément h' de V . L'action du groupe G sur le compact $\overline{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2}^{vis}$ étant continue, la suite des points

$h'_n(\phi^{t_n}, \phi^{\lambda t_n}).o$ de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ converge vers le point $h'(\infty, \infty, \lambda) = (h'(\infty, \infty), \lambda)$ du bord régulier $\partial_{reg}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$. Puisque la distance

$$d(\gamma_n h'.o, h'_n(\phi^{t_n}, \phi^{\lambda t_n}).o) = d(\gamma_n h'.o, \gamma_n h''_n.o) = d(h'.o, h''_n.o)$$

est bornée, la suite $(\gamma_n h'.o)_n$ converge également vers le point $(h'(\infty, \infty), \lambda)$ du bord régulier donc vers le point $h'(\infty, \infty)$ de la frontière de Furstenberg $\mathcal{F} = \partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$. Donc $h'(\infty, \infty)$ est un point de l'ensemble limite \mathcal{F}_Γ . Mais $h'(\infty, \infty)$ est un point de $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$ arbitrairement proche de $h(\infty, \infty)$ car le voisinage V est arbitraire. On en déduit que $h(\infty, \infty)$ appartient à l'ensemble \mathcal{F}_Γ car cet ensemble est fermé. En ce qui concerne le point $g(0, 0)$, il suffit de remarquer que l'élément gk_0 appartient à l'ensemble non-errant (d'après la propriété 3.8.2) donc le point $gk_0(\infty, \infty) = g(0, 0)$ appartient à \mathcal{F}_Γ .

Réciproquement, supposons que les points $h(\infty, \infty)$ et $h(0, 0)$ appartiennent à l'ensemble \mathcal{F}_Γ . Soit V un voisinage de h dans G . D'après un résultat de Y. Benoist (voir [Ben]), l'ensemble des couples $\{\gamma^+, \gamma^-\}$ (où γ parcourt les éléments hyperboliques du groupe Γ) est dense dans l'ensemble $\mathcal{F}_\Gamma \times^\Delta \mathcal{F}_\Gamma$ des couples de points en *opposition* de \mathcal{F}_Γ (deux points $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ et $\xi' = (\xi'_1, \xi'_2)$ de la frontière $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$ sont en opposition si $\xi_1 \neq \xi'_1$ et $\xi_2 \neq \xi'_2$). La projection

$$G \longrightarrow \mathcal{F} \times^\Delta \mathcal{F} : g \longmapsto (g(\infty, \infty), g(0, 0))$$

de G sur $\mathcal{F} \times^\Delta \mathcal{F}$ est ouverte, il existe donc un élément hyperbolique $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ dans Γ et un élément h' dans le voisinage V tels que

$$\gamma^+ = h'(\infty, \infty) \quad \text{et} \quad \gamma^- = h'(0, 0).$$

L'élément $h'^{-1}\gamma h'$ fixe les points $(0, 0)$ et (∞, ∞) de $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$ donc appartient au sous-groupe diagonal A . Il est égal à $(\phi^{l(\gamma_1)}, \phi^{l(\gamma_2)})$ et on a l'égalité

$$h'(\phi^{nl(\gamma_1)}, \phi^{nl(\gamma_2)}) = h'(h'^{-1}\gamma h')^n = \gamma^n h' \quad \text{pour tout } n,$$

ce qui prouve que h est un élément de l'ensemble non-errant. \square

Lemme 3.8.4. *Soit Γ un sous-groupe discret Zariski-dense tel que le quotient $\Gamma \backslash \Omega'$ soit compact. Alors son ensemble limite \mathcal{F}_Γ est égal au produit $L_{p_1(\Gamma)} \times L_{p_2(\Gamma)}$ dans $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$.*

Démonstration. Considérons (ξ_1^+, ξ_2^+) et (ξ_1^-, ξ_2^-) deux points de l'ensemble limite \mathcal{F}_Γ . Pour montrer que \mathcal{F}_Γ est un produit, il suffit de montrer que les points (ξ_1^+, ξ_2^-) et (ξ_1^-, ξ_2^+) appartiennent également à \mathcal{F}_Γ . Si $\xi_1^- = \xi_1^+$ ou $\xi_2^- = \xi_2^+$, c'est évident. On suppose donc le contraire, il existe alors un élément g dans le groupe G tel que

$$g(\infty, \infty) = (\xi_1^+, \xi_2^+) \quad \text{et} \quad g(0, 0) = (\xi_1^-, \xi_2^-).$$

d'après la propriété 3.8.3 cet élément appartient à l'ensemble non-errant Ω'_Γ . Soit $(t_n)_n$ une suite non bornée de réels positifs. Puisque le quotient $\Gamma \backslash \Omega'$ est compact, quitte à remplacer $(t_n)_n$ par une sous-suite, il existe une suite $(\gamma_n)_n$ dans Γ et un élément h de G vérifiant :

$$\gamma_n g(\phi^{t_n}, \phi^{-t_n}) \longrightarrow h \quad \text{lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

Puisque la suite $(g(\phi^{t_n}, \phi^{-t_n}).o)_n$ converge vers le point (ξ_1^+, ξ_2^-) de \mathcal{F} et

$$d(g(\phi^{t_n}, \phi^{-t_n}).o, \gamma_n^{-1}h.o) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \longrightarrow +\infty,$$

on en déduit que ce point appartient à l'ensemble limite \mathcal{F}_Γ . On procède de même avec le point (ξ_1^-, ξ_2^+) à l'aide d'une suite $(t_n)_n$ non bornée de réels négatifs. L'ensemble fermé \mathcal{F}_Γ est clairement contenu dans le produit $L_{p_1(\Gamma)} \times L_{p_2(\Gamma)}$. Puisque l'ensemble \mathcal{F}_Γ est un produit $L_1 \times L_2$, alors l'ensemble fermé L_1 (resp. L_2) est invariant par $p_1(\Gamma)$ (resp. $p_2(\Gamma)$) donc

$$L_{p_1(\Gamma)} \subseteq L_1 \quad (\text{resp. } L_{p_2(\Gamma)} \subseteq L_2)$$

d'où l'égalité

$$\mathcal{F}_\Gamma = L_{p_1(\Gamma)} \times L_{p_2(\Gamma)}.$$

□

La proposition suivante 3.8.5 (on pourra consulter [Qui] pour un énoncé général) montre qu'à l'exclusion des situations de produit, un groupe qui agit de façon cocompacte sur son ensemble non-errant est en fait un réseau uniforme. la notion de groupe "convexe-cocompact" a donc peu d'intérêt pour les sous-groupes de $G = \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Proposition 3.8.5. *Soit Γ un sous-groupe discret Zariski-dense du groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Si le quotient $\Gamma \backslash \Omega'$ est compact alors Γ est un réseau uniforme ou contient le produit de deux groupes non-élémentaires.*

Démonstration. Si les projections $p_1(\Gamma)$ et $p_2(\Gamma)$ sont denses, l'ensemble limite \mathcal{F}_Γ est égal d'après le lemme 3.8.4 à la frontière $\mathcal{F} = \partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$. L'ensemble non-errant Ω' est donc égal d'après la propriété 3.8.3 au groupe G entier. Puisque, par hypothèse, le quotient $\Gamma \backslash \Omega'$ est compact, le groupe Γ est alors un réseau uniforme. Il reste à montrer que si les projections $p_1(\Gamma)$ et $p_2(\Gamma)$ ne sont pas denses, alors Γ contient un produit de sous-groupes non-élémentaires de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Supposons que la projection $p_2(\Gamma)$ ne soit pas dense. Puisque Γ est supposé Zariski-dense, les projections ne sont pas élémentaires, donc $p_2(\Gamma)$ est discret d'après la propriété 1.1.2. Notons Γ_1^* le noyau dans Γ de la projection p_2 . C'est un sous-groupe discret. Soient $g = (g_1, g_2)$ un élément de Ω' et $(t_n)_n$ une suite non bornée de réels positifs. Par compacité, quitte à extraire une sous-suite, il existe une suite $(\gamma_n)_n$ dans Γ et un élément $h = (h_1, h_2)$ du groupe G vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n g(\phi^{t_n}, \text{Id}) = h.$$

En particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_2(\gamma_n)g_2 = h_2$$

donc la suite $p_2(\gamma_n)$ est stationnaire à partir d'un certain rang n_0 (car $p_2(\Gamma)$ est discrète) donc $\gamma_{n_0}^{-1}\gamma_n$ appartient au noyau Γ_1^* que l'on identifie à un sous-groupe de $p_1(\Gamma)$. Soit o un point quelconque de \mathbb{H}^2 . De l'égalité

$$d(p_1(\gamma_{n_0})g_1\phi^{t_n}.o, p_1(\gamma_{n_0}\gamma_n^{-1})h_1.o) = d(p_1(\gamma_n)g_1\phi^{t_n}.o, h_1.o),$$

on déduit que le point $p_1(\gamma_{n_0})g_1(\infty)$ appartient à l'ensemble limite $L_{\Gamma_1^*}$ qui est donc non-vide. Le sous-groupe Γ_1^* est distingué dans $p_1(\Gamma)$ donc cet ensemble limite $L_{\Gamma_1^*}$ est invariant par le groupe $p_1(\Gamma)$. Il est donc égal à l'ensemble limite $L_{p_1(\Gamma)}$ et Γ_1^* n'est pas élémentaire. Mais ce sous-groupe discret Γ_1^* est normalisé par le groupe $p_1(\Gamma)$ donc normalisé par l'adhérence $\overline{p_1(\Gamma)}$ donc centralisé par la composante connexe contenant l'identité du groupe $\overline{p_1(\Gamma)}$. Or le centralisateur d'un groupe non-élémentaire est trivial, on en déduit donc que la projection $p_1(\Gamma)$ est discrète. Par le même argument que précédemment, le noyau Γ_2^* (identifié à un sous-groupe de $p_2(\Gamma)$) dans Γ de la projection p_1 est discret, non-élémentaire et $L_{\Gamma_2^*} = L_{p_2(\Gamma)}$. Donc le groupe Γ contient le sous-groupe $\Gamma_1^* \times \Gamma_2^*$ et est contenu dans le sous-groupe discret $p_1(\Gamma) \times p_2(\Gamma)$. \square

On déduit de ce résultat qu'un réseau irréductible non uniforme de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ne contient aucun sous-groupe Γ_o qui agit de manière cocompacte sur son ensemble non-errant. La première construction du théorème 3.2.1 n'est donc pas possible.

Chapitre 4

Orbites bornées et approximation diophantienne

La dynamique topologique de l'action du groupe diagonal A sur le quotient

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$$

est intimement reliée à l'approximation diophantienne des nombres réels par les nombres rationnels et à leur développement en fraction continue. Un nombre réel α est dit *mal approché* par les rationnels si

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} n \|n\alpha\| > 0$$

(où $\|\cdot\|$ est la distance à \mathbb{Z}). Si g appartient au groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, il est connu que l'orbite xA du point $x = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})g$ est bornée si et seulement si les images $g(\infty)$ et $g(0)$ par l'homographie g des points ∞ et 0 de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sont des nombres réels mal approchés. Ce lien entre dynamique topologique du flot géodésique et approximation diophantienne est beaucoup plus général (voir par exemple l'article [HP] de S. Hersonsky et F. Paulin). Il faut également citer le lien entre la dynamique topologique sur les espaces homogènes et les questions de théorie des nombres (l'analogie de l'exemple précédent pour les matrices de taille 3×3 laisse apparaître la conjecture de Littlewood, voir l'annexe). Les références [Dan] et [Sta] détaillent ces relations (en particulier, la résolution de la conjecture d'Oppenheim, à l'aide de l'étude des flots unipotents). Les réseaux irréductibles non uniformes du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sont essentiellement des réseaux de Hilbert d'après le théorème d'arithmécité 3.3.2 de A. Selberg. Dans ce chapitre nous relierons la dynamique topologique de l'action du groupe diagonal sur le quotient de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ par un réseau de Hilbert associé à un corps quadratique réel \mathbb{K} à l'approximation des points de la frontière de Furstenberg $\mathcal{F} = \partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$ par les deux représentations réelles du corps \mathbb{K} .

4.1 Réseaux et variétés de Hilbert

Nous rappelons ici la définition d'un réseau de Hilbert du groupe $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et certaines propriétés géométriques de la variété quotient associée.

Fixons un entier positif l sans facteur carré et notons \mathbb{K} l'extension réelle de degré 2 du corps \mathbb{Q}

$$\mathbb{Q}(\sqrt{l}) = \{a + b\sqrt{l} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

L'ensemble des éléments de $\mathbb{Q}(\sqrt{l})$ qui sont entiers sur \mathbb{Z} constitue l'anneau des entiers, noté $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Cet anneau est décrit par le théorème suivant (voir par exemple [Sam]).

Théorème 4.1.1. *Avec les notations précédentes,*

- si l'entier l est congru à 2 ou 3 modulo 4, $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \{a + b\sqrt{l} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$,
- si l'entier l est congru à 1 modulo 4, $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \left\{ \frac{a+b\sqrt{l}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b[2] \right\}$.

On notera $\sigma_{\mathbb{K}}$ ou σ l'automorphisme de corps

$$\sigma : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : a + b\sqrt{l} \longmapsto a - b\sqrt{l}$$

et N ou $N_{\mathbb{K}}$ la norme sur \mathbb{K} (qui est à valeurs entières sur l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$)

$$N : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{Q} : x \longmapsto x\sigma(x).$$

L'automorphisme σ permet d'injecter \mathbb{K} (donc $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$) dans \mathbb{R}^2 :

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x \longmapsto (x, \sigma(x)).$$

L'image du corps \mathbb{K} est un sous-groupe dense de \mathbb{R}^2 et l'image de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ est un sous-groupe discret (et un réseau) de \mathbb{R}^2 . L'injection de \mathbb{K} dans \mathbb{R}^2 peut être étendue à l'injection de $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ dans $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})^2$ par :

$$\infty \longmapsto (\infty, \infty).$$

L'automorphisme σ définit également un automorphisme du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{K})$:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto g^\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) \\ \sigma(c) & \sigma(d) \end{pmatrix}$$

et les deux sous-groupes $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{K})$ et $\mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ s'injectent de façon naturelle dans le groupe G :

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{K}) \longrightarrow G : g \longmapsto (g, g^\sigma).$$

L'image du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{K})$ est un sous-groupe dense de G et l'image du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ est un sous-groupe discret de G .

Définition. L'image Γ (ou $\Gamma_{\mathbb{K}}$) du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ dans G est le groupe (modulaire) de Hilbert (associé à l'entier l) et la variété quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ est la variété (modulaire) de Hilbert (associée à l).

Soit Γ le groupe de Hilbert associé à l'entier l . Le sous-groupe des éléments paraboliques de Γ fixant le point (∞, ∞) est constitué des matrices de la forme :

$$\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sigma(b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

où b appartient à l'anneau \mathcal{O} . Puisque l'image de l'anneau \mathcal{O} dans \mathbb{R}^2 est un réseau, on en déduit que le point ∞ est parabolique de rang 2. Ce point est également fixé par une isométrie hyperbolique de Γ car le stabilisateur Γ_∞ est constitué des matrices de la forme :

$$\left(\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) \\ 0 & \sigma(a^{-1}) \end{pmatrix} \right) \right)$$

où a appartient au groupe des unités \mathcal{O}^\times qui est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \{\pm 1\}$ d'après le théorème des unités de Dirichlet (voir [Sam]).

Une référence pour le théorème suivant est par exemple [Fre].

Théorème 4.1.2. (voir [Fre]) *Soient l un entier positif sans facteur carré et \mathbb{K} le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{l})$. Alors le groupe de Hilbert associé Γ est un réseau de G . Les points paraboliques du groupe Γ sont en bijection avec (l'image dans $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$ de) l'ensemble $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$. Les pointes sont en bijection avec les orbites du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$. Ces orbites sont en nombre fini, égal au nombre de classes du corps \mathbb{K} .*

Les groupes de Hilbert contiennent des éléments d'ordre fini. Pour obtenir un sous-groupe d'indice sans torsion (et donc un revêtement fini lisse de la variété de Hilbert correspondante), on peut considérer un sous-groupe de congruence adéquat (voir [Fre]) :

Propriété 4.1.3. (voir [Fre]) *Soient l un entier positif sans facteur carré et \mathbb{K} le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{l})$. Soient d un entier supérieur ou égal à 3 et (d) l'idéal de l'anneau \mathcal{O} engendré par d . Alors le noyau de la projection canonique*

$$\mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}/(d))$$

est un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{PSL}(2, \mathcal{O})$ sans torsion.

4.2 Approximation diophantienne par un corps réel quadratique

Comme précédemment, fixons un entier positif l sans facteur carré, notons \mathbb{K} le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{l})$ et $\mathcal{O}_\mathbb{K}$ l'anneau des entiers du corps \mathbb{K} . L'ensemble des points de la variété de Hilbert $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ s'identifie à l'espace quotient $\mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}) \backslash \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ lui-même en bijection avec le groupe des classes d'idéaux (fractionnaires) du corps \mathbb{K} . Nous définissons différentes constantes d'approximation sur \mathbb{R}^2 et sur les couples de points de \mathbb{R}^2 par rapport au corps quadratique \mathbb{K} ou à une classe d'idéaux de \mathbb{K} .

Définition. Soit $x = (x_1, x_2)$ un couple de nombres réels.

1) La quantité

$$\delta(x) = \delta_{\mathbb{K}}(x) = \inf_{(p,q) \in \mathcal{O}^2, q \neq 0} N(q)^2 \left| x_1 - \frac{p}{q} \right| \cdot \left| x_2 - \sigma \left(\frac{p}{q} \right) \right|$$

est la *constante d'approximation* (relativement au corps \mathbb{K}) de x .

2) Soit ξ un point de $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$, la quantité

$$\delta_{\xi}(x) = \inf_{\substack{(p,q) \in \mathcal{O}^2, q \neq 0 \\ \frac{p}{q} \in \text{PSL}(2, \mathcal{O})\xi}} N(q)^2 \left| x_1 - \frac{p}{q} \right| \cdot \left| x_2 - \sigma \left(\frac{p}{q} \right) \right|$$

est la *constante d'approximation* (relativement au point ξ) de x .

Définition. Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux couples de nombres réels.

1) La quantité

$$\Delta(x, y) = \Delta_{\mathbb{K}}(x, y) = \inf_{(p,q) \in \mathcal{O}^2, q \neq 0} N(q)^2 \left| x_1 - \frac{p}{q} \right| \cdot \left| y_1 - \frac{p}{q} \right| \cdot \left| x_2 - \sigma \left(\frac{p}{q} \right) \right| \cdot \left| y_2 - \sigma \left(\frac{p}{q} \right) \right|$$

est la *constante d'approximation* (relativement au corps \mathbb{K}) du couple (x, y) .

2) Soit ξ un point de $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$, la quantité

$$\Delta_{\xi}(x, y) = \inf_{\substack{(p,q) \in \mathcal{O}^2, q \neq 0 \\ \frac{p}{q} \in \text{PSL}(2, \mathcal{O})\xi}} N(q)^2 \left| x_1 - \frac{p}{q} \right| \cdot \left| y_1 - \frac{p}{q} \right| \cdot \left| x_2 - \sigma \left(\frac{p}{q} \right) \right| \cdot \left| y_2 - \sigma \left(\frac{p}{q} \right) \right|$$

est la *constante d'approximation* (relativement au point ξ) du couple (x, y) .

Remarques 4.2.1. 1) Les fonctions δ_{ξ} et Δ_{ξ} ne dépendent que de la classe $\text{PSL}(2, \mathcal{O})\xi$.

2) La valeur $\delta(x)$ (resp. $\Delta(x, y)$) est le minimum sur un ensemble de représentants ξ^1, \dots, ξ^r des valeurs $\delta_{\xi^i}(x)$ (resp. $\Delta_{\xi^i}(x, y)$).

3) Si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ appartiennent à \mathbb{R}^2 , on a :

$$\delta_{\mathbb{K}}(x_1, x_2) = \delta_{\mathbb{K}}(x_2, x_1)$$

$$\text{et } \Delta_{\mathbb{K}}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \Delta_{\mathbb{K}}((x_1, y_2), (y_1, x_2)) = \Delta_{\mathbb{K}}((y_1, x_2), (x_1, y_2)).$$

4.3 Lien avec l'action du groupe diagonal

Soit Γ le réseau de Hilbert associé au corps quadratique réel \mathbb{K} . Nous nous intéressons au lien entre les constantes d'approximation associées au corps \mathbb{K} et la position d'un plat ou d'une chambre de Weyl dans l'espace localement symétrique $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$. Rappelons (voir la section 3.5) que l'horoboule $\text{HB}_{\xi}(T)$ est l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 : \beta_{\xi}(z, o) > T\}.$$

Soient E un sous-ensemble de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ et ξ un point parabolique pour le réseau Γ . La projection de l'ensemble E dans $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ est $\Gamma \backslash \Gamma E$.

Définition. Soient E un sous-ensemble de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ et ξ une pointe. On dit que l'ensemble $\Gamma \backslash \Gamma E$ évite la pointe $\Gamma \xi$ s'il existe un réel T tel que, dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$:

$$\Gamma E \cap \text{HB}_\xi(T) = \emptyset.$$

Cette définition ne dépend pas du représentant ξ choisi dans la classe $\Gamma \xi$. La propriété suivante est une conséquence de la propriété 3.5.4 sur la décomposition d'un domaine fondamental

$$\mathcal{D} = \mathcal{C} \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_r$$

de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ pour l'action de Γ en un sous-ensemble compact \mathcal{C} et des domaines fondamentaux V_i pour l'action de Γ_{ξ^i} sur $\text{HB}_\xi^i(T)$ où $\{\xi^1, \dots, \xi^r\}$ est un système minimal de représentants des pointes de Γ .

Propriété 4.3.1. *Un sous-ensemble de l'espace $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ est borné si et seulement s'il évite toutes les pointes.*

Le théorème suivant relie la position d'un plat dans l'espace localement symétrique $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ aux propriétés diophantiennes (relativement à la notion d'approximation précédemment définie) des points de la frontière $\mathcal{F} = \partial \mathbb{H}^2 \times \partial \mathbb{H}^2$ que ce plat définit.

Théorème 4.3.2. *Soit $g = (g_1, g_2)$ un élément du groupe G , définissons*

$$x^+ = g(\infty, \infty) = (g_1(\infty), g_2(\infty)) \text{ et } x^- = g(0, 0) = (g_1(0), g_2(0)).$$

Soient p_0 et q_0 deux éléments de \mathcal{O} premiers entre eux, la fraction $\xi = \frac{p_0}{q_0}$ représente une pointe. Si \mathcal{P} désigne le plat qui supporte l'orbite gA , alors :

$$N(p_0^2 + q_0^2) \sup_{z \in \mathcal{P}, \gamma \in \Gamma} e^{\beta_\xi(\gamma z, o)} = \frac{|g_1(\infty) - g_1(0)| \cdot |g_2(\infty) - g_2(0)|}{4\Delta_\xi(x^+, x^-)}.$$

Remarque 4.3.3. *Soit $g = (g_1, g_2)$ un élément du groupe G . Clairement, le premier membre de l'égalité ne dépend que de la classe de g dans $\Gamma \backslash G$. Le second membre est à priori défini seulement si les quatre points $g_1(\infty)$, $g_1(0)$, $g_2(\infty)$, $g_2(0)$ de $\partial \mathbb{H}^2$ sont réels (différents de ∞). Supposons l'égalité du théorème vraie dans ce cas, elle prend alors un sens si l'élément $g = (g_1, g_2)$ est quelconque. En effet, il existe un élément $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ du groupe Γ (par exemple une isométrie hyperbolique telle que les points fixes de γ_1 et γ_2 soient réels) vérifiant :*

$$\gamma_1 g_1(\infty), \gamma_1 g_1(0), \gamma_2 g_2(\infty), \gamma_2 g_2(0) \text{ sont différents de } \infty.$$

Définissons alors le terme de droite comme étant égal à :

$$\frac{|\gamma_1 g_1(\infty) - \gamma_1 g_1(0)| \cdot |\gamma_2 g_2(\infty) - \gamma_2 g_2(0)|}{4\Delta_\xi(\gamma x^+, \gamma x^-)},$$

cette définition ayant bien un sens car cette quantité est indépendante de l'élément γ choisi dans le groupe Γ .

Nous obtenons alors une caractérisation diophantienne des orbites bornées du groupe diagonal dans $\Gamma \backslash G$.

Corollaire 4.3.4. *Avec les mêmes notations, l'orbite ΓgA est bornée dans $\Gamma \backslash G$ si et seulement si $\Delta(x^+, x^-) > 0$.*

Démonstration du théorème 4.3.2. Notons

$$x_1^+ = g_1(\infty), \quad x_1^- = g_1(0), \quad x_2^+ = g_2(\infty), \quad x_2^- = g_2(0).$$

D'après la remarque 4.3.3, il suffit de montrer l'égalité dans le cas où les quatre points x_1^+, x_1^-, x_2^+ et x_2^- sont tous réels. Notons ∞ le point (∞, ∞) de $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$. On a, pour deux points $z = (z_1, z_2)$ et $z' = (z'_1, z'_2)$ de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$,

$$\beta_\infty(z, z') = \ln \left(\frac{\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2}{\operatorname{Im} z'_1 \operatorname{Im} z'_2} \right).$$

Si $h = (h_1, h_2)$ désigne l'isométrie associée à la matrice $\begin{pmatrix} p_0 & 0 \\ q_0 & p_0^{-1} \end{pmatrix}$ appartenant au groupe $\operatorname{SL}(2, \mathbb{K})$, alors l'image du point (∞, ∞) par h est le point ξ . On a alors, pour tout élément $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ dans Γ :

$$\beta_\xi(\gamma z, o) = \beta_{h(\infty)}(\gamma z, o) = \beta_\infty(h^{-1}\gamma z, h^{-1}o) = \beta_\infty(h^{-1}\gamma z, o) - \beta_\infty(h^{-1}o, o).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \mathcal{P}, \gamma \in \Gamma} e^{\beta_\infty(h^{-1}\gamma z, o)} &= \sup_{z \in \mathcal{P}, \gamma \in \Gamma} \operatorname{Im}(h_1^{-1}\gamma_1 z_1) \operatorname{Im}(h_2^{-1}\gamma_2 z_2) \\ &= \frac{1}{4} \sup_{\gamma \in \Gamma} |h_1^{-1}\gamma_1 x_1^+ - h_1^{-1}\gamma_1 x_1^-| \cdot |h_2^{-1}\gamma_2 x_2^+ - h_2^{-1}\gamma_2 x_2^-|. \end{aligned}$$

Si l'isométrie $h^{-1}\gamma$ est représentée par le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right)$, alors

$$|h_i^{-1}\gamma_i x_i^+ - h_i^{-1}\gamma_i x_i^-| = \frac{|x_i^+ - x_i^-|}{|c_i x_i^+ + d_i| \cdot |c_i x_i^- + d_i|} \text{ pour } i = 1, 2$$

Notons e_2 le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et Σ l'ensemble

$$\{(p, q) \in \mathcal{O}^2 : (q - p) \in {}^t e_2 h^{-1} \operatorname{PSL}(2, \mathcal{O})\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} &\sup_{\gamma \in \Gamma} |h_1^{-1}\gamma_1 x_1^+ - h_1^{-1}\gamma_1 x_1^-| \cdot |h_2^{-1}\gamma_2 x_2^+ - h_2^{-1}\gamma_2 x_2^-| \\ &= \frac{|x_1^+ - x_1^-| \cdot |x_2^+ - x_2^-|}{\inf_{(p, q) \in \Sigma} |qx_1^+ - p| \cdot |qx_1^- - p| \cdot |\sigma(q)x_2^+ - \sigma(p)| \cdot |\sigma(q)x_2^- - \sigma(p)|}. \end{aligned}$$

Si Σ' désigne l'ensemble

$$\{(p, q) \in \mathcal{O}^2 : (q - p) \in \mathcal{O}^{\times t} e_2 h^{-1} \operatorname{PSL}(2, \mathcal{O})\},$$

alors

$$\begin{aligned} & \inf_{(p,q) \in \Sigma} |qx_1^+ - p| \cdot |qx_1^- - p| \cdot |\sigma(q)x_2^+ - \sigma(p)| \cdot |\sigma(q)x_2^- - \sigma(p)| \\ &= \inf_{(p,q) \in \Sigma'} |qx_1^+ - p| \cdot |qx_1^- - p| \cdot |\sigma(q)x_2^+ - \sigma(p)| \cdot |\sigma(q)x_2^- - \sigma(p)|. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sup_{z \in \mathcal{P}, \gamma \in \Gamma} e^{\beta_\infty(h^{-1}\gamma z, o)} = \frac{|x_1^+ - x_1^-| \cdot |x_2^+ - x_2^-|}{4 \inf_{(p,q) \in \Sigma'} N(q)^2 |x_1^+ - \frac{p}{q}| \cdot |x_1^- - \frac{p}{q}| \cdot |x_2^+ - \sigma(\frac{p}{q})| \cdot |x_2^- - \sigma(\frac{p}{q})|}$$

Pour obtenir l'égalité souhaitée, il suffit donc d'établir l'égalité des ensembles Σ' et $\{(p, q) \in \mathcal{O}^2 : \text{pgcd}(p, q) = 1 \text{ et } \frac{p}{q} \in \text{PSL}(2, \mathcal{O})\xi\}$:

- Si $(q - p) = u(q_0 - p_0)\gamma$ avec u dans \mathcal{O}^\times et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\text{PSL}(2, \mathcal{O})$, alors

$$\frac{p}{q} = \frac{-u(bq_0 - dp_0)}{u(aq_0 - cp_0)} = \frac{dp_0 - bq_0}{-cp_0 + aq_0} = \gamma^{-1} \frac{p_0}{q_0} = \gamma^{-1} \xi.$$

- Supposons que p et q soient premiers entre eux et vérifient $\frac{p}{q} = \gamma \frac{p_0}{q_0}$. Il existe alors u dans \mathbb{K}^* vérifiant :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = u \gamma \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}.$$

Puisque p_0 et q_0 sont premiers entre eux et la matrice γ appartient au groupe $\text{SL}(2, \mathbb{K})$, les deux coordonnées du vecteur dans le terme de droite sont des éléments de \mathcal{O} premiers entre eux. En utilisant le lemme de Gauss, on en déduit que u est une unité de l'anneau \mathcal{O} . On vérifie ensuite que $(q - p) = u(q_0 - p_0)\gamma^{-1}$.

Enfin on calcule

$$e^{\beta_\infty(h^{-1}o, o)} = \text{Im}(h_1^{-1}i) \text{Im}(h_2^{-1}i) = \frac{1}{p_0^2 + q_0^2} \cdot \frac{1}{\sigma(p_0)^2 + \sigma(q_0)^2} = \frac{1}{N(p_0^2 + q_0^2)}$$

pour obtenir l'égalité souhaitée. \square

Une chambre de Weyl de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ est un produit de deux rayons géodésiques de \mathbb{H}^2 . Pour ces ensembles, contrairement aux plats, il n'y a pas de lien quantitatif entre la valeur de la constante d'approximation et la position dans $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ mais nous pouvons cependant obtenir un énoncé qualitatif. Soit Γ le réseau de Hilbert associé au corps \mathbb{K} .

Théorème 4.3.5. *Soit \mathcal{W} une chambre de Weyl pointée dirigée vers le point x de $\mathcal{F} = \partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$. Soit ξ un point parabolique, alors la projection $\Gamma\mathcal{W}$ évite la pointe $\text{PSL}(2, \mathcal{O})\xi$ si et seulement si $\delta_\xi(x) > 0$.*

De même que pour le théorème 4.3.2, le théorème 4.3.5 a un sens pour tout $x = (x_1, x_2)$ dans \mathcal{F} car il existe $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ dans Γ tel que $\gamma_1 x_1$ et $\gamma_2 x_2$ soient réels. On peut alors définir $\delta_\xi(\gamma x)$ et le fait que ce nombre soit strictement positif ou non ne dépend pas du choix de γ dans le groupe Γ .

On utilisera pour la démonstration du théorème 4.3.5 la remarque suivante :

Remarque 4.3.6. Soient \mathcal{W} une chambre de Weyl dirigée vers le point x et ξ un point parabolique. Alors dans l'espace $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$, la chambre de Weyl $\Gamma \mathcal{W}$ évite la pointe $\mathrm{PSL}(2, \mathcal{O})\xi$ si et seulement si $\Gamma \tilde{\mathcal{W}}$ évite la pointe $\mathrm{PSL}(2, \mathcal{O})\xi$ pour toute chambre de Weyl $\tilde{\mathcal{W}}$ dirigée vers x .

Démonstration du théorème 4.3.5. Si $x = (x_1, x_2)$, d'après la remarque 4.3.6, il suffit de montrer le théorème pour la chambre \mathcal{W} qui est le produit de deux rayons géodésiques verticaux τ_1 et τ_2 dirigés respectivement vers les points x_1 et x_2 . Soit p_0 et q_0 deux éléments de l'anneau \mathcal{O} , premiers entre eux et tels que ξ soit égal à $\frac{p_0}{q_0}$. Soit h l'isométrie associée à la matrice $\begin{pmatrix} p_0 & 0 \\ q_0 & p_0^{-1} \end{pmatrix}$ appartenant au groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$, alors l'image du point ∞ par h est le point ξ . On a

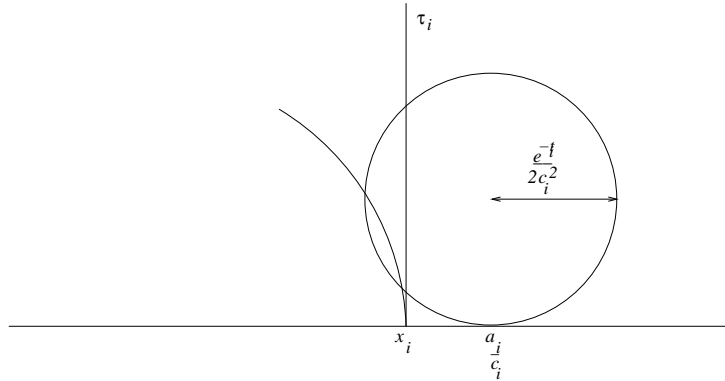
$$\mathrm{HB}_\xi(T) = h.\mathrm{HB}_\infty(T') \text{ avec } T' = T + \beta_\infty(o, h^{-1}o)$$

et on obtient la suite d'équivalences :

$$\begin{aligned} \Gamma \mathcal{W} \text{ n'évite pas } \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O})\xi &\iff \forall T', \exists \gamma \in \Gamma : \mathcal{W} \cap \gamma h \mathrm{HB}_\infty(T') \neq \emptyset \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall T', \exists \gamma \in \Gamma, \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} : t_1 + t_2 > T' \\ \text{et } \gamma^{-1} \mathcal{W} \cap h(\mathrm{HB}_\infty(t_1) \times \mathrm{HB}_\infty(t_2)) \neq \emptyset \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall T', \exists \gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma, \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} : t_1 + t_2 > T' \\ \text{et } \tau_i \cap \gamma_i h_i(\mathrm{HB}_\infty(t_i)) \neq \emptyset \text{ pour } i = 1, 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Pour $i = 1, 2$, l'image par l'isométrie de \mathbb{H}^2 associée à la matrice $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ de l'horoboule

$\mathrm{HB}_\infty(t_i)$ est le disque euclidien de \mathbb{H}^2 tangent au bord au point $\frac{a_i}{c_i}$ et de rayon $\frac{e^{-t_i}}{2c_i^2}$.



On en déduit que

$$\begin{aligned} \Gamma \mathcal{W} \text{ n'évite pas } \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O})\xi &\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall T', \exists \gamma \in \Gamma, \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} : t_1 + t_2 > T' \text{ et } \left| x_i - \frac{a_i}{c_i} \right| < \frac{e^{-t_i}}{2c_i^2} \\ \text{pour } i = 1, 2 \text{ où } \gamma h = \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right) \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall T', \exists \gamma \in \Gamma : N(c)^2 \left| x_1 - \frac{a}{c} \right| \cdot \left| x_2 - \sigma\left(\frac{a}{c}\right) \right| < \frac{e^{-T'}}{4} \\ \text{où } \gamma h = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) \\ \sigma(c) & \sigma(d) \end{pmatrix} \right) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc $\Gamma\mathcal{W}$ évite la pointe $\mathrm{PSL}(2, \mathcal{O})\xi$ si et seulement si

$$\inf_{\gamma \in \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O})} \mathrm{N}(c)^2 \left| x_1 - \frac{a}{c} \right| \cdot \left| x_2 - \sigma \left(\frac{a}{c} \right) \right| > 0 \text{ où } \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \gamma h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

ce qui est équivalent à

$$\inf_{(p, q): \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}) \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}} \mathrm{N}(q)^2 \left| x_1 - \frac{p}{q} \right| \cdot \left| x_2 - \sigma \left(\frac{p}{q} \right) \right| > 0.$$

Pour tout élément γ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathcal{O})$, les coordonnées du vecteur $\gamma \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$ sont des éléments de \mathcal{O} premiers entre eux (car p_0 et q_0 sont premiers entre eux). D'autre part, la fonction

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{N}(q)^2 \left| x_1 - \frac{p}{q} \right| \cdot \left| x_2 - \sigma \left(\frac{p}{q} \right) \right|$$

est constante sur la classe $\mathcal{O}^\times \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ donc l'infimum est réalisé sur l'ensemble

$$\left\{ (p, q) : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathcal{O}^\times \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}) \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \right\}$$

qui est égal à l'ensemble

$$\left\{ (p, q) : \mathrm{pgcd}(p, q) = 1 \text{ et } \frac{p}{q} \in \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}) \frac{p_0}{q_0} \right\}$$

d'après le même type de raisonnement que précédemment. D'où la conclusion. \square

Nous pouvons, comme pour les plats et les orbites du groupe A , obtenir à partir de l'énoncé sur les chambres de Weyl, un énoncé sur les orbites du semi-groupe A^+ .

Corollaire 4.3.7. *Soit $g = (g_1, g_2)$ un élément du groupe G . Supposons que le point $g(\infty, \infty)$ appartienne à \mathbb{R}^2 et notons x ce point. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) la semi-orbite $\Gamma g A^+$ est bornée,
- (ii) la semi-orbite $\Gamma g \overline{A^+}$ est bornée,
- (iii) la constante d'approximation $\delta(x)$ est strictement positive.

Remarque 4.3.8. *Si un des points $g_1(\infty)$ ou $g_2(\infty)$ est égal à ∞ , la semi-orbite $\Gamma g A^+$ n'est pas bornée.*

Démonstration du corollaire 4.3.7. Puisque $g \overline{A^+}$ se projette sur une chambre de Weyl pointée en $g.o$ et dirigée vers le point x , on sait que l'orbite $\Gamma g \overline{A^+}$ est bornée si et seulement si $\delta(x) > 0$. L'autre équivalence provient du fait que :

$$(\Gamma g \overline{A^+})a = \Gamma g a \overline{A^+} \subseteq \Gamma g A^+ \subseteq \Gamma g \overline{A^+} \text{ pour un (tout) élément } a \text{ de } A^+$$

qui montre que $\Gamma g A^+$ est bornée si et seulement si $\Gamma g \overline{A^+}$ l'est. \square

Si la conjecture 3.3.4 est vraie, les seules orbites bornées de A sur le quotient $\Gamma \backslash G$ sont les orbites compactes (car un réseau de Hilbert n'est pas uniforme). En utilisant le corollaire 4.3.4 et le théorème 3.6.3, ceci peut s'exprimer en termes d'approximation diophantienne de la manière suivante.

Question 4.3.9. *Soit g appartenant au groupe G , supposons*

$$\Delta_{\mathbb{K}}(g(\infty, \infty), g(0, 0)) > 0,$$

alors les points $g(\infty, \infty)$ et $g(0, 0)$ sont-ils fixés par un même élément hyperbolique du groupe Γ ?

A notre connaissance, il n'y a pas d'exemple connu d'orbite pour le semi-groupe A^+ qui soit bornée, hormis les orbites asymptotes à une orbite compacte. La question suivante est donc plus précise.

Question 4.3.10. *Soit \mathbb{K} un corps réel quadratique et Γ le groupe de Hilbert associé. Soit x un point de \mathbb{R}^2 . Supposons*

$$\delta_{\mathbb{K}}(x) > 0,$$

le point x (en tant qu'élément de la frontière $\mathcal{F} = \partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$) est-il fixé par un élément hyperbolique du groupe Γ ?

Annexe : sur $SL(3, \mathbb{R})$

Annexe A. Exemple d'un réseau vérifiant la proposition 3.2.2

Nous explicitons ici l'exemple de [Ree] d'un réseau du groupe $SL(3, \mathbb{R})$ vérifiant la proposition 3.2.2.

Soit M une matrice du groupe $SL(3, \mathbb{R})$, alors il existe un unique couple (B, C) de matrices dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant

$$M = B + 2^{\frac{1}{4}}C \quad \text{et} \quad {}^t(M')M = M {}^t(M') = \text{Id}$$

avec $M' = B - 2^{\frac{1}{4}}C$, ce sont les matrices

$$B = \frac{1}{2}(M + \text{cof}(M)) \quad \text{et} \quad C = 2^{\frac{-5}{4}}(M - \text{cof}(M))$$

où $\text{cof}(M)$ désigne la matrice des cofacteurs de la matrice M . Elles vérifient alors les deux égalités

$$B {}^tB - \sqrt{2}C {}^tC = \text{Id} \quad \text{et} \quad C {}^tB - B {}^tC = 0.$$

Considérons la représentation

$$\rho : SL(3, \mathbb{R}) \longrightarrow SL(6, \mathbb{R}) : M \longmapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \text{cof}(M) \end{pmatrix}$$

du groupe $SL(3, \mathbb{R})$. Si P désigne la matrice

$$\begin{pmatrix} \text{Id} & 2^{\frac{1}{4}}\text{Id} \\ \text{Id} & -2^{\frac{1}{4}}\text{Id} \end{pmatrix},$$

alors

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\text{Id} & \frac{1}{2}\text{Id} \\ 2^{\frac{-5}{4}}\text{Id} & -2^{\frac{-5}{4}}\text{Id} \end{pmatrix}$$

et le groupe conjugué $P^{-1}\rho(SL(3, \mathbb{R}))P$ est le sous-groupe $\mathbf{G}_1(\mathbb{R})$ de $SL(6, \mathbb{R})$ constitué des points réels du groupe algébrique

$$\mathbf{G}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} B & \sqrt{2}C \\ C & B \end{pmatrix} \in SL(6) : \begin{array}{l} B {}^tB - \sqrt{2}C {}^tC = \text{Id} \\ C {}^tB - B {}^tC = 0 \end{array} \right\}$$

défini sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Notons σ l'automorphisme de corps non trivial de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et \mathbf{G}_1^σ le groupe conjugué à \mathbf{G}_1 :

$$\mathbf{G}_1^\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} B & -\sqrt{2}C \\ C & B \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(6) : \begin{array}{l} B {}^t B + \sqrt{2}C {}^t C = \mathrm{Id} \\ C {}^t B - B {}^t C = 0 \end{array} \right\}.$$

En remarquant que

$$(B + i2^{\frac{5}{4}}C) {}^t (B - i2^{\frac{5}{4}}C) = (B {}^t B + \sqrt{2}C {}^t C) + i2^{\frac{1}{4}}C {}^t B - B {}^t C = \mathrm{Id},$$

on obtient

$$\mathbf{G}_1^\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} B & -\sqrt{2}C \\ C & B \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(6) : (B + i2^{\frac{5}{4}}C) \in \mathrm{U}(3) \right\}.$$

Donc le groupe $\mathbf{G}_1^\sigma(\mathbb{R})$ des points réels de \mathbf{G}_1^σ est un groupe compact isomorphe à $SU(3)$.

L'image de l'injection

$$\mathbf{G}_1(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) \hookrightarrow \mathbf{G}_1(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}_1^\sigma(\mathbb{R}) : g \mapsto (g, g^\sigma)$$

est un sous-groupe discret conjugué (par restriction des scalaires) au groupe des points entiers $\mathbf{H}_1(\mathbb{Z})$ d'un groupe algébrique \mathbf{H}_1 défini sur \mathbb{Q} . Le groupe $\mathbf{H}_1(\mathbb{R})$ des points réels est isomorphe à $SL(3, \mathbb{R}) \times SU(3)$. Ce groupe est semi-simple donc, d'après un théorème de Borel et Harish-Chandra ([Bor]), l'image de l'injection précédente est un réseau du groupe $\mathbf{G}_1(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}_1^\sigma(\mathbb{R})$. Puisque le groupe $\mathbf{G}_1^\sigma(\mathbb{R})$ est compact, le sous-groupe $\mathbf{G}_1(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ est donc un réseau du groupe $\mathbf{G}_1(\mathbb{R})$ et le sous-groupe

$$\Gamma = \rho^{-1}(P\mathbf{G}_1(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])P^{-1})$$

est un réseau du groupe $SL(3, \mathbb{R})$. De plus, tous les éléments du groupe compact $\mathbf{G}_1^\sigma(\mathbb{R})$ sont semi-simples, donc tous les éléments du réseau $\mathbf{G}_1(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ sont semi-simples donc ce réseau est un réseau uniforme et Γ est un réseau uniforme du groupe $SL(3, \mathbb{R})$. Nous avons

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left\{ \rho^{-1} \left(P \begin{pmatrix} B & \sqrt{2}C \\ C & B \end{pmatrix} P^{-1} \right) : \begin{pmatrix} B & \sqrt{2}C \\ C & B \end{pmatrix} \in \mathbf{G}_1(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) \right\} \\ &= \rho^{-1} \left(\left\{ \begin{pmatrix} B + 2^{\frac{1}{4}}C & 0 \\ 0 & B - 2^{\frac{1}{4}}C \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} B & \sqrt{2}C \\ C & B \end{pmatrix} \in \mathbf{G}_1(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) \right\} \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) \\ B + 2^{\frac{1}{4}}C \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{R}) : \begin{array}{l} B {}^t B - \sqrt{2}C {}^t C = \mathrm{Id} \\ C {}^t B = B {}^t C \end{array} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Nous allons exhiber dans le réseau Γ une matrice diagonale vérifiant les hypothèses du théorème 3.2.2. Soient b_1, b_2, b_3 et c_1, c_2, c_3 six nombres appartenant à l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, alors la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} b_1 + 2^{\frac{1}{4}}c_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 + 2^{\frac{1}{4}}c_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 + 2^{\frac{1}{4}}c_3 \end{pmatrix}$$

appartient au groupe Γ si et seulement si :

$$\prod_{i=1}^{i=3} \left(b_i + 2^{\frac{1}{4}} c_i \right) = 1 \quad \text{et} \quad b_i^2 - \sqrt{2} c_i^2 = 1 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

Remarquons que si un nombre

$$\lambda = (\lambda_1 + \sqrt{2}\lambda_2) + 2^{\frac{1}{4}}(\lambda_3 + \sqrt{2}\lambda_4) \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \text{ dans } \mathbb{Z},$$

est un élément de l'anneau $\mathbb{Z}[2^{\frac{1}{4}}]$, différent de 1 et dont la norme relative au sous-corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$N_{\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{4}})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(\lambda) = (\lambda_1 + \sqrt{2}\lambda_2)^2 - \sqrt{2}(\lambda_3 + \sqrt{2}\lambda_4)^2$$

est égale à 1, alors la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix}$$

vérifient les conditions précédentes 4.1 et appartient donc au réseau Γ . Le réel

$$\lambda = (3 + 2\sqrt{2}) + 2^{\frac{1}{4}}(2 + 2\sqrt{2})$$

convient. Il permet donc de construire une matrice diagonale singulière dans le réseau Γ .

Annexe B. Conjecture de Littlewood et orbites du groupe diagonal

Le lien entre la conjecture de Littlewood et la topologie des orbites du groupe diagonal sur $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ est implicitement établie dans l'article [CS] de Cassels et Swinnerton-Dyer et explicite dans l'article [Mar2] de Margulis. Nous suivons globalement ici les arguments de cet article.

Si f est une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} , on lui associe la quantité

$$m(f) = \inf \{ |f(v)| : v \in \mathbb{Z}^3, v \neq 0 \}.$$

Notons G le groupe $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ et A le sous-groupe de G constitué des matrices diagonales à coefficients positifs. Nous allons montrer l'équivalence des deux énoncés suivants :

Conjecture 4.3.11. *Soient L_1, L_2, L_3 trois formes linéaires sur \mathbb{R}^3 . Supposons que leur produit $L_1 L_2 L_3$ n'est pas multiple d'un produit à coefficients entiers, alors*

$$m(L_1 L_2 L_3) = 0.$$

Conjecture 4.3.12. *Toute orbite bornée pour l'action du groupe A sur $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ est une orbite compacte.*

Une matrice g de G définit trois formes linéaires sur \mathbb{R}^3 (les trois lignes de la matrice g). Considérons l'application

$$Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto xyz,$$

alors $Q \circ g$ est le produit des trois formes linéaires définies par g . Le sous-groupe discret $SL(3, \mathbb{Z})$ de G est un réseau non-uniforme que l'on notera Γ . Pour montrer l'équivalence entre ces deux conjectures, nous allons établir la proposition suivante.

Proposition 4.3.13. *Soit g appartenant au groupe G , alors on a les équivalences :*

- (i) *l'orbite $Ag\Gamma$ est bornée dans $G/\Gamma \iff m(Q \circ g) > 0$*
- (ii) *l'orbite $Ag\Gamma$ est compacte dans $G/\Gamma \iff Q \circ g$ est multiple de la norme d'un corps cubique totalement réel $\iff Q \circ g$ est multiple non nul d'un produit à coefficients entiers de trois formes linéaires.*

Nous utiliserons à plusieurs reprises la proposition suivante appelée critère de Mähler (voir par exemple [Bor]) qui décrit la partie non-compacte du quotient $G/SL(3, \mathbb{Z})$ à l'aide de la systole des réseaux de \mathbb{R}^3 .

Proposition 4.3.14. *(Critère de Mähler) Soit E un sous-ensemble du groupe $SL(3, \mathbb{R})$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La projection de l'ensemble E dans le quotient $SL(3, \mathbb{R})/SL(3, \mathbb{Z})$ est relativement compact,*
- (ii) *il existe un réel strictement positif δ tel que, pour tout vecteur v non nul de \mathbb{Z}^3 et tout élément g dans E , la norme du vecteur $g.v$ est supérieure à δ .*

Nous ne démontrerons pas l'assertion :

$Q \circ g$ est multiple de la norme d'un corps cubique totalement réel $\iff Q \circ g$ est multiple non nul d'un produit à coefficients entiers de trois formes linéaires

Une référence pour cette propriété (utilisée également dans l'article [CS]) est [Bac].

Démonstration de la proposition 4.3.13. Notons L_1, L_2, L_3 les trois formes linéaires associées aux lignes de la matrice g :

$$g.v = \begin{pmatrix} L_1(v) \\ L_2(v) \\ L_3(v) \end{pmatrix} \quad \text{pour tout vecteur } v \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

(i) \Rightarrow : D'après le critère de Mähler, si l'orbite $Ag\Gamma$ est bornée, il existe un réel strictement positif c tel que, pour tout a dans A et tout vecteur v non nul de \mathbb{Z}^3 , la norme (euclidienne) du vecteur $ag.v$ soit supérieure à c . Fixons un vecteur v non nul dans \mathbb{Z}^3 . Si a est l'élément $diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, alors le vecteur $a^n g.v$ est égal à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n L_1(v) \\ \lambda_2^n L_2(v) \\ \lambda_3^n L_3(v) \end{pmatrix},$$

et on obtient alors la minoration

$$\lambda_1^{2n}|L_1(v)|^2 + \lambda_2^{2n}|L_2(v)|^2 + \lambda_3^{2n}|L_3(v)|^2 = \|a^n g.v\|^2 \geq c^2 \quad \text{pour tout } n \text{ entier.}$$

Si a est tel que $\lambda_1 > 1$ et $\lambda_2, \lambda_3 < 1$ en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $L_1(v) \neq 0$. On montre de même que les formes linéaires L_2 et L_3 ne s'annulent pas en v . Posons maintenant

$$\lambda_i = \frac{|L_1(v)L_2(v)L_3(v)|^{\frac{1}{3}}}{|L_i(v)|} = \frac{|Q \circ g(v)|^{\frac{1}{3}}}{|L_i(v)|^{\frac{1}{3}}} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Alors la matrice $a = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ appartient au sous-groupe A et vérifie

$$c^2 \leq \|ag.v\|^2 = \sum_{i=1}^3 |\lambda_i L_i(v)|^2 = \sum_{i=1}^3 |Q \circ g(v)|^{\frac{2}{3}} = 3|Q \circ g(v)|^{\frac{2}{3}},$$

ce qui montre que $m(Q \circ g) \geq \left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^3$.

(i) \Leftarrow : Si l'orbite $Ag\Gamma$ n'est pas bornée, toujours avec le critère de Mähler, il existe une suite $(a_n)_n$ dans A et une suite $(v_n)_n$ de vecteurs non nuls de \mathbb{Z}^3 telles que la suite $(a_n g.v_n)_n$ converge vers le vecteur nul. En particulier, le produit des coordonnées converge vers 0. Et ce produit est égal à la valeur $Q \circ g(v_n)$ de $Q \circ g$ en v_n . Ceci montre que $m(Q \circ g)$ est nul.

(ii) : Supposons l'orbite $Ag\Gamma$ compacte. Le groupe $g\Gamma g^{-1} \cap A$ est alors un réseau uniforme de A . Il existe donc une matrice non triviale γ dans le réseau Γ et une matrice $a = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ dans A vérifiant $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ telles que $g\gamma = ag$. C'est-à-dire

$$L_i \circ \gamma = \lambda_i L_i \quad \text{ou encore} \quad {}^t\gamma {}^tL_i = \lambda_i {}^tL_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de la matrice ${}^t\gamma$. Le polynôme caractéristique de cette matrice est le polynôme caractéristique de la matrice γ , donc à coefficients entiers. Ce polynôme caractéristique est également irréductible sur \mathbb{Q} . En effet : soit P un diviseur non trivial de ce polynôme caractéristique. Le noyau V de l'endomorphisme $P(\gamma)$ est non trivial et invariant par γ . On en déduit que le sous-espace gV est invariant par tout élément de A donc qu'il existe une base de gV strictement incluse dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) . Supposons par exemple que gV soit inclus dans le noyau de e_3^* . Si le polynôme P est à coefficients rationnels, il existe un vecteur v dans V non-trivial et à coordonnées entières. Mais si l'on se donne l'élément $a = \text{diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4)$ de A , la suite des vecteurs

$$a^n g.v = 2^{-n} e_1^*(gv) + 2^{-n} e_2^*(g.v)$$

converge vers le vecteur nul, ce qui contredit le critère de Mähler car l'orbite $Ag\Gamma$ est compacte. Donc le polynôme caractéristique de la matrice ${}^t\gamma$ est irréductible sur \mathbb{Q} et les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont contenues dans une extension cubique totalement réelle \mathbb{L} de \mathbb{Q} et vérifient :

$$\lambda_i = \sigma^{i-1}(\lambda_1)$$

où σ engendre le groupe de Galois de \mathbb{L} sur \mathbb{Q} . L'extension \mathbb{L} est le corps des fractions de son anneau des entiers \mathcal{O} donc il existe dans \mathcal{O} un vecteur propre u de la matrice ${}^t\gamma$

pour la valeur propre λ_1 . Les vecteurs $u, \sigma(u), \sigma^2(u)$ (où σ agit sur chaque coordonnée) forment une base propre de la matrice ${}^t\gamma$. Les vecteurs colonnes de g sont également vecteurs propres de ${}^t\gamma$. Chaque valeur propre étant simple, on en déduit qu'il existe trois réels μ_1, μ_2, μ_3 tels que

$${}^tL_i = \mu_i \sigma^{i-1}(u) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Notons U la matrice dont les vecteurs colonnes sont dans cet ordre $u, \sigma(u)$ et $\sigma^2(u)$, on obtient donc

$$g = \begin{pmatrix} \mu_1 & {}^t u \\ \mu_2 & {}^t \sigma(u) \\ \mu_3 & {}^t \sigma^2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} {}^t U.$$

Si v est un vecteur de \mathbb{Z}^3 ,

$$Q \circ g(v) = \mu_1 \mu_2 \mu_3 ({}^t u \cdot v) ({}^t \sigma(u) \cdot v) ({}^t \sigma^2(u) \cdot v) = \mu_1 \mu_2 \mu_3 N_{\mathbb{L}} ({}^t u \cdot v)$$

et $Q \circ g$ est donc multiple de la norme $N_{\mathbb{L}}$ sur \mathbb{L} donc multiple d'un produit à coefficients entiers de formes linéaires.

Supposons maintenant que $Q \circ g$ soit multiple d'un produit à coefficients entiers de trois formes linéaires. Soit D le groupe des matrices diagonales de $SL(3, \mathbb{R})$, si l'on montre que $g^{-1}Dg \cap SL(3, \mathbb{Z})$ est un réseau uniforme de $g^{-1}Dg$ alors l'orbite $Dg\Gamma$ est compacte dans G/Γ et il en est de même de l'orbite $Ag\Gamma$ (car A est d'indice fini dans D). D'après [Bac], le produit $Q \circ g$ est multiple de la norme $N_{\mathbb{L}}$ pour un corps cubique \mathbb{L} totalement réel. Soit θ une unité de l'anneau des entiers du corps \mathbb{L} . La multiplication à droite par la matrice

$$d_\theta = \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2(\theta) \end{pmatrix}$$

est une application linéaire qui, dans la base $(u, \sigma(u), \sigma^2(u))$, est représentée par une matrice de déterminant 1 à coefficients entiers : $d_\theta U = \gamma U$ où γ appartient au groupe $SL(3, \mathbb{Z})$. On a alors

$$\begin{aligned} d_\theta g &= d_\theta \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} {}^t U = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} {}^t (U d_\theta) \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} {}^t (\gamma U) = g {}^t \gamma. \end{aligned}$$

On obtient donc un morphisme (injectif) de groupes

$$\mathcal{O} \longrightarrow gDg^{-1} \cap \Gamma : \theta \longmapsto g d_\theta g^{-1}.$$

D'après le théorème des unités de Dirichlet (voir par exemple [Sam]), le groupe \mathcal{O} contient un sous-groupe abélien libre de rang 2. Ce qui prouve que $g^{-1}Dg \cap SL(3, \mathbb{Z})$ est un réseau uniforme de $g^{-1}Dg$. \square

Nous montrons maintenant que la conjecture 4.3.11 implique la conjecture de Littlewood. Pour cela, nous utiliserons le théorème d'isolation de Cassels et Swinnerton-Dyer :

Théorème 4.3.15. (*Cassels - Swinnerton-Dyer, [CS]*) Soient L_1, L_2, L_3 trois formes linéaires sur \mathbb{R}^3 . On suppose que le produit $f = L_1 L_2 L_3$ est à coefficients entiers et ne s'annule pas sur $\mathbb{Q}^3 - \{0\}$. Alors pour tous réels δ_1 et δ_2 avec $\delta_1 < \delta_2$, il existe un voisinage de f (i.e. un produit de voisinages de L_1, L_2 et L_3) sur lequel, à l'exception des multiples de f , toute forme f^* vérifie :

$$f^*(\mathbb{Z}^3 - \{0\}) \cap]\delta_1, \delta_2[\neq \emptyset.$$

(En particulier, si $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 > 0$ on obtient $m(f^*) < \delta_2$.)

Considérons deux nombres réels α et β , nous voulons montrer, en supposant la conjecture 4.3.11 vraie, que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} n\{n\alpha\}\{n\beta\} = 0$$

où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire du réel x . Si un des deux nombres α ou β est rationnel, c'est évident. Supposons donc que ni α ni β ne soit rationnel et qu'il existe $\delta > 0$ tel que $n\{n\alpha\}\{n\beta\} \geq \delta$ pour tout entier strictement positif n . Considérons les matrices

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad a = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

de $\text{SL}(3, \mathbb{R})$. On a alors, pour tout vecteur non nul $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ à coordonnées entières avec $x \neq 0$ et tout entier n

$$|Q(a^n g.v)| = |Q \circ g(v)| = |x(x\alpha + y)(x\beta + z)| \geq \delta.$$

Puisque

$$|Q \circ a^n g(v)|^2 = |4^{-n}x|^2 \cdot |2^n(ax + y)|^2 \cdot |2^n(bx + z)|^2 \geq \delta^2,$$

en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique

$$\frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) \geq (a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}} \quad \text{pour tous réels } a_1, a_2, a_3 \text{ strictement positifs,}$$

nous obtenons

$$\left\| a^n g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|^2 = |4^{-n}x|^2 + |2^n(ax + y)|^2 + |2^n(bx + z)|^2 \geq 3\delta^{\frac{2}{3}} > 0$$

pour tout entier positif n et tous x, y, z entiers avec x non nul. Si x est nul, la minoration est encore vraie car y ou z est non nul donc

$$\left\| a^n g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|^2 \geq 2^{2n}.$$

Il n'existe donc pas, dans la famille $\{a^n g \mathbb{Z}^3\}_{n \geq 1}$ de réseaux de \mathbb{R}^3 , de vecteur non nul arbitrairement petit. D'après le critère de Mähler, cela signifie qu'il existe une sous-suite $(a^{k_n})_n$, une suite $(\gamma_n)_n$ dans le groupe $SL(3, \mathbb{Z})$ et une matrice h de $SL(3, \mathbb{R})$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{k_n} g \gamma_n = h \quad \text{dans } SL(3, \mathbb{R}).$$

Soit v un vecteur non nul à coordonnées entières, notons

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_n = \gamma_n \cdot v = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

La suite de vecteurs $(a^{k_n} g \cdot v_n)_n$ converge vers le vecteur $h \cdot v$ donc, étant donné le choix de la matrice a , on en déduit que la coordonnée x_n est non nulle à partir d'un certain rang. D'après ce qui précède, on a alors

$$|Q \circ h(v)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |Q \circ a^{k_n} g \cdot v_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |Q \circ g \cdot v_n| \geq \delta.$$

Donc $m(Q \circ h) > 0$ et d'après la conjecture 4.3.11, nous savons qu'il existe un produit f à coefficients entiers de trois formes linéaires et un réel μ non nul tel que $Q \circ h = \mu f$. La suite d'applications $(\frac{1}{\mu} Q \circ g \gamma_n)_n$ converge vers f et vérifie :

$$\frac{1}{\mu} Q \circ g \gamma_n(\mathbb{Z}^3) \cap]0, \mu^{-1} \delta[= \emptyset.$$

D'après le théorème d'isolation 4.3.15, à partir d'un certain rang, chaque application $\frac{1}{\mu} Q \circ g \gamma_n$ est un multiple de f :

$$\frac{1}{\mu} Q \circ g \gamma_n = \mu_n f \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = 1.$$

Nous pouvons maintenant montrer que le réel α est rationnel ce qui contredit les hypothèses et termine la démonstration. Pour cela, désignons par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 , on a les égalités

$$\alpha \beta = Q \circ g(e_1) = \mu \mu_n f \circ \gamma_n(e_1) \quad \text{et} \quad (\alpha + 1) \beta = Q \circ g(e_1 + e_2) = \mu \mu_n f \circ \gamma_n(e_1 + e_2)$$

ce qui entraîne que le nombre

$$1 + \frac{1}{\alpha} = \frac{f \circ \gamma_n(e_1)}{f \circ \gamma_n(e_1 + e_2)}$$

est rationnel car γ_n appartient au groupe $SL(3, \mathbb{Z})$ et f est à coefficients entiers.

Bibliographie

- [Bac] Bachmann, P. *Die arithmetik der quadratischen Formen*, Zweite Abteilung, especially Kap.12 (Die zerlegbaren Formen). Leipzig and Berlin : Teubner (1923).
- [Bea] Beardon, A. F. *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Mathematics, 91. Springer-Verlag, New York, (1983).
- [Ben] Benoist, Y. *Propriétés asymptotiques des groupes linéaires*, Geometric And Functional Analysis no. 7 (1997), 1-47.
- [BM] Beardon, A. F. ; Maskit, B. *Limit points of Kleinian groups and finite sided fundamental polyhedra*, Acta Math. 132 (1974), 1–12.
- [Bor] Borel, A. *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, (1969).
- [CG1] Conze, J.-P. ; Guivarc'h, Y. *Limit sets of groups of linear transformations*, Ergodic theory and harmonic analysis (Mumbai, 1999). Sankhyā Ser. A 62 (2000), no. 3, 367–385.
- [CG2] Conze, J.-P. ; Guivarc'h, Y. *Densité d'orbites d'actions de groupes linéaires et propriétés d'équidistribution de marches aléatoires*, Rigidity in dynamics and geometry, 39–76, Springer, Berlin, (2002).
- [CS] Cassels, J. W. S. ; Swinnerton-Dyer, H. P. F. *On the product of three homogeneous linear forms and the indefinite ternary quadratic forms*, Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 248, (1955). 73–96.
- [Dal1] Dal'Bo, F. *Remarques sur le spectre des longueurs d'une surface et comptages*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 30 (1999), no. 2, 199–221.
- [Dal2] Dal'Bo, F. *Topologie du feuilletage fortement stable*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 50 (2000), no. 3, 981–993.
- [Dan] Dani, S. G. *Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), 780–789, Birkhäuser, 1995.
- [Ebe] Eberlein, P. B. *Geometry of nonpositively curved manifolds*, Chicago Lectures in Mathematics, (1996).
- [Fer] Ferte, D. *Flot horosphérique des repères sur les variétés hyperboliques de dimension 3 et spectre des groupes kleiniens*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 33 (2002), no. 1, 99–123.
- [Fre] Freitag, E. *Hilbert modular forms*, Springer-Verlag, (1990).
- [Ghy] Ghys, É. *Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92. Astérisque No. 206, (1992), 93–136.

- [Gre] Greenberg, L. *Discrete groups with dense orbits*, in Auslander, L. ; Green, L. ; Hahn, F. *Flows on homogeneous spaces*. Annals of Mathematics Studies, No. 53 Princeton University Press, Princeton, N.J. (1963).
- [Gui] Guivarc’h, Y. *Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques des sous-groupes du groupe linéaire*, Ergodic Theory Dynam. Systems 10 (1990), no. 3, 483–512.
- [GH] Ghys, É. ; de la Harpe, P. (Editors) *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, 83. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1990).
- [HP] Hersonsky, S. ; Paulin, F. *Diophantine approximation in negatively curved manifolds and in the Heisenberg group*, Rigidity in dynamics and geometry, 203–226, Springer, Berlin, (2002).
- [Kim] Kim, I. *Marked length spectrum on the finite set of elements determines the irreducible representation in the isometry group of rank one symmetric space of noncompact type*, The Third Pacific Rim Geometry Conference (Seoul, 1996), 99–107, Monogr. Geom. Topology, 25, Internat. Press, Cambridge, MA, (1998).
- [Lin] Link, G. *Limit sets of discrete groups acting on symmetric spaces*, PhD Thesis, Univ. Karlsruhe, (2002).
- [LW] Lindenstrauss, E. ; Weiss, B. *On sets invariant under the action of the diagonal group*, Ergodic Theory Dynam. Systems 21 (2001), no. 5, 1481–1500.
- [Mar1] Margulis, G. A. *Problems and Conjectures in Rigidity Theory*, in Mathematics : Frontiers and Perspectives, 161–174, Amer. Math. Soc. (2000).
- [Mar2] Margulis, G. A. *Oppenheim conjecture*, Fields Medallists’ lectures, 272–327, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (1997).
- [Mas] Maskit, B. *Kleinian groups*, Springer-Verlag, Berlin, (1988).
- [Mau] Maucourant, F. *Approximation diophantienne, dynamique des chambres de Weyl et répartition d’orbites de réseaux*, Thèse de l’Université de Lille I, (2002).
- [Mor] Morse, H. M. *Recurrent geodesics on a surface of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. 22 (1921), no. 1, 84–100.
- [Mos] Mostow, G. D. *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Annals of Mathematics Studies, No. 78. Princeton University Press, Princeton, N.J. (1973).
- [Moz] Mozes, S. *On closures of orbits and arithmetic of quaternions*, Israël J. Math. 86 (1994), no. 1-3, 195–209.
- [Ota] Otal, J.-P. *Sur la géométrie symplectique de l’espace des géodésiques d’une variété à courbure négative*, Rev. Mat. Iberoamericana 8 (1992), no. 3, 441–456.
- [PRag] Prasad, G. ; Raghunathan, M. S. *Cartan subgroups and lattices in semi-simple groups*, Ann. of Math. (2) 96 (1972), 296–317.
- [PRap] Prasad, G. ; Rapinchuk, A. S. *Existence of irreducible \mathbb{R} -regular elements in Zariski-dense subgroups*, Math. Res. Lett. 10 (2003), no. 1, 21–32.
- [Qui] Quint, J.-F. *Groupes convexes cocompacts en rang supérieur*, Prépublication, (2003).

- [Ree] Rees, M. *Some \mathbb{R}^2 -Anosov flows*, Preprint, University of Minnesota, (1982).
- [Sam] Samuel, P. *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, (1967).
- [Sel] Selberg, A. *Recent developments in the theory of discontinuous groups of motions of symmetric spaces*, Proceedings of the Fifteenth Scandinavian Congress (Oslo, 1968) Lecture Notes in Mathematics, Vol. 118, 99–120, Springer, Berlin, (1970).
- [Shi] Shimizu, H. *On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes*, Ann. of Math. (2) 77, (1963) 33–71.
- [Sta1] Starkov, A. N. *Fuchsian groups from the dynamical viewpoint*, J. Dynam. Control Systems 1 (1995), no. 3, 427–445.
- [Sta] Starkov, A. N. *Dynamical systems on homogeneous spaces*, Trans. of Math. Monographs, 190. AMS, Providence, RI, (2000).
- [TW] Tomanov, G. ; Weiss, B. *Closed orbits for actions of maximal tori on homogeneous spaces*, Duke Math. Journal, vol. 119, no.2, (2003), 367-391.

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude de deux exemples d'action d'un groupe sur un espace homogène et de leur dynamique topologique. Chacune de ces actions est conjuguée à un flot sur une fibration sur un espace localement symétrique.

Le premier chapitre est consacré à des généralités sur les espaces hyperboliques, leur produit et leur groupe d'isométries.

Dans le second chapitre, nous étudions l'action du groupe unipotent supérieur sur le quotient du groupe projectif unimodulaire complexe 2×2 par un sous-groupe discret. Cette action est conjuguée à un flot des repères orthonormés directs de l'espace tangent d'une variété hyperbolique de dimension 3. Nous caractérisons les orbites denses et les orbites fermées et obtenons ainsi une caractérisation dynamique de certaines catégories de groupes kleinien (géométriquement finis, convexe-cocompacts, réseaux).

Nous considérons, dans le troisième chapitre, le produit de deux groupes projectifs unimodulaires réels 2×2 et nous étudions l'action du produit des sous-groupes diagonaux sur les quotients de mesure finie. Lorsqu'un tel quotient est irréductible, une conjecture de Margulis affirme que les orbites sont alors denses ou fermées. Nous caractérisons les orbites fermées et nous exhibons certains points de la frontière de Furstenberg du bi-disque donnant lieu à des orbites denses.

Dans le quatrième chapitre, nous relierons, pour les réseaux de Hilbert, la conjecture précédente à l'approximation diophantienne des couples de réels par les éléments d'un corps réel quadratique.

Mots-clés : action de groupe, dynamique topologique, sous-groupes discrets, espaces (localement) symétriques, flot des repères, flot des chambres de Weyl, approximation diophantienne.

Abstract

This thesis deals with two examples of group actions on homogeneous spaces and their topological dynamics. Each of them is conjugate to a flow on a fibered space over a locally symmetric space.

The first chapter contains generalities about hyperbolic spaces, their products and their isometries groups.

The second chapter is devoted to the action of the upper unipotent subgroup on the quotient of the projective unimodular complex 2×2 group by a discrete subgroup. This action is conjugate to a frame flow on the tangent bundle of an hyperbolic 3-manifold. Dense and closed orbits are characterised. Hence we obtain a dynamical characterisation of different classes of Kleinian groups (geometrically finite, convex-cocompact and lattices).

In the third chapter, we consider the product of two copies of the real projective unimodular 2×2 group and study the action of the product of diagonal subgroups on finite-volume quotients. When such a quotient is irreducible, Margulis conjectured that every orbit is either dense or closed. Closed orbits are characterised and we exhibit points of the Furstenberg boundary giving rise to dense orbits.

In the last chapter, we look more closely at the special case of Hilbert modular lattices. We study the relation between the above conjecture about orbits and the diophantine approximation of pairs of real numbers by a real quadratic field.

Key-words : group action, topological dynamics, discrete subgroups, (locally) symmetric spaces, frame flow, Weyl chamber flow, diophantine approximation.