Sur les propriétés algébriques et géométriques des groupes de Kac-Moody

Bertrand Rémy

SUR LES PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES ET GÉOMÉTRIQUES DES GROUPES DE KAC-MOODY

BERTRAND RÉMY

Résumé

Ce mémoire présente un point de vue issu de la théorie des groupes discrets sur les groupes de Kac-Moody. Sur les corps finis, ces groupes sont de type fini ; ils opèrent sur de nouveaux immeubles jouissant bien souvent de remarquables propriétés de courbure négative. Nous montrons en quoi l'étude de ces groupes est partagée entre prouver des résultats de structure issus de l'analogie avec les groupes S-arithmétiques en caractéristique positive, et mettre en évidence des différences, qu'on espère à terme assez profondes pour mener à une famille de groupes simples infinis de présentation finie.

Dans la section 1, on justifie que les groupes de Kac-Moody de type fini peuvent être vus comme des généralisations de certains groupes S-arithmétiques en caractéristique positive. On explique aussi comment ils fournissent de nouveaux immeubles, et pourquoi on peut s'attendre à ce que les groupes eux-mêmes soient nouveaux. Dans la section 2, nous nous intéressons à une classe bien spécifique d'immeubles hyperboliques. Dans ce cadre, nous pouvons produire des groupes de Kac-Moody non abstraitement isomorphes bien que leur soit associé le même immeuble ; nous fabriquons aussi des groupes proches des groupes de Kac-Moody (avec la même combinatoire), mais dans lesquels sont mélangés plusieurs corps de base, d'où en découlent de fortes propriétés de non linéarité. Dans la section 3, nous considérons des groupes totalement discontinus généralisant certains groupes semi-simples sur des corps locaux, comme en attestent leurs propriétés combinatoires fines et leur simplicité topologique. Ces groupes sont les adhérences d'images d'actions non discrètes de groupes de Kac-Moody sur des immeubles. L'étude de leurs frontières de Furstenberg est évoquée. Dans la section 4, nous résumons la preuve de la complète non linéarité de certains groupes de Kac-Moody. C'est ici que nous utilisons les propriétés des groupes topologiques précédents, en les combinant à un théorème de super-rigidité du commensurateur. En fait, on peut construire des groupes dont toutes les images linéaires sont finies, quel que soit le corps de base à l'arrivée. Dans la section 5, nous nous écartons un peu de nos principaux objets d'étude et considérons le problème de l'arithméticité de certains réseaux d'arbres. Nous étudions une classe isolée par H. Bass et A. Lubotzky, les réseaux de type Nagao, et montrons des propriétés de densité de leurs commensurateurs dans des groupes d'automorphismes complets. Nous généralisons pour cela des arguments de Sh. Mozes et montrons que de nombreux réseaux (non uniformes) de Nagao sont arithmétiques en un sens généralisé, alors qu'ils ne sont linéaires sur aucun corps. Dans la section 6, nous conjecturons divers résultats sur les groupes précédemment définis, par exemple, la non linéarité (et peut-être la simplicité) d'une vaste classe de groupes de Kac-Moody de présentation finie. Nous conjecturons également la non moyennabilité ainsi que la simplicité abstraite des groupes de Kac-Moody géométriquement complétés, et proposons un lien entre ces groupes et une autre définition des groupes de Kac-Moody (issue de l'étude des variétés de Schubert et de la théorie des représentations). Nous relions ces conjectures à des travaux en cours sur les compactifications d'immeubles de Bruhat-Tits.

Sommaire

Avant de rentrer dans le vif du sujet, voici une liste de mes publications et travaux en cours.

Publications, prépublications et travaux en cours

1. *Construction de réseaux en théorie de Kac-Moody.* C. R. Acad. Sc. Paris **329** (1999) 475-478.
2. *Groupes de Kac-Moody déployés et presque déployés.* Astérisque **277** (2002), Soc. Math. de France, 348 pages.
3. *Kac-Moody groups: split and relative theories. Lattices.* À paraître dans les actes «Groups: Topological, Combinatorial and Arithmetic Aspects» (Bielefeld, Août 1999), London Math. Soc. Lecture Notes Series (2004), 45 pages.
4. *Immeubles de Kac-Moody hyperboliques. Isomorphismes abstraits entre groupes de même immeuble.* Geometriæ Dedicata **90** (2002) 29-44.
5. *Classical and non-linearity properties of Kac-Moody lattices.* Dans «Rigidity in Dynamics and Geometry» (Cambridge, 2000), M. Burger et A. Iozzi eds, Springer (2002) 391-406.
6. (avec Mark Ronan) *Topological groups of Kac-Moody type, Fuchsian twinnings and their lattices.* Prépublication Institut Fourier **563** (2002) 21 pages, soumis.
7. *Topological simplicity, commensurator super-rigidity and non-linearities of Kac-Moody groups* (appendice par P. Bonvin). Prépublication de l'Institut Fourier **590** (2003) 26 (+4) pages, soumis.
8. *Kac-Moody groups as discrete groups.* Soumis aux actes de la conférence «Geometric Group Theory» (Guwahati – Inde, décembre 2002), 15 pages.
9. (avec P. Abramenko) *Commensurators of some nonuniform tree lattices and Moufang twin trees.* Prépublication de l'Institut Fourier **627** (2003) 23 pages, soumis.
10. (avec Nicolas Monod) *Boundedly generated groups with pseudocharacter(s)*, 3 pages d'appendice à : *Quasi-actions on trees and property (QFA)*, de J. F. Manning.
11. (avec Y. Guivarc'h) *Compactifications of Bruhat-Tits buildings.* En préparation.
12. *Just infinite non-linear Kac-Moody groups.* En préparation.

Introduction

Les groupes de Kac-Moody sont des généralisations en dimension infinie des groupes algébriques semi-simples [Tit87]. Ils partagent de nombreuses propriétés avec ces derniers, essentiellement de nature combinatoire. Par exemple, ils admettent une structure de système de Tits [Bou81, IV.2]. En fait, ils ont une structure combinatoire encore plus fine – appelée *donnée radicielle jumelée* – qui formalise l'existence de sous-groupes radiciels, en général en nombre infini et permutés par un groupe de Coxeter [Tit92]. Des références pour ces notions sont par exemple [Tit89a] et [Rem03b]. On s'attend à ce que les groupes de Kac-Moody et leurs versions tordues forment le volet «groupes» de la classification d'une classe raisonnable d'immeubles, à savoir les immeubles jumelés de Moufang 2-sphériques. Nous n'entrerons pas dans les détails pour ces aspects ; nous ferons néanmoins quelques rappels combinatoires pour faire prendre la mesure du changement de problématique qui s'opère quand on passe du point de vue précédent à celui des groupes discrets (quand il s'agit de groupes de Kac-Moody sur les corps finis).

Le volet géométrique de la combinatoire de système de Tits est l'existence d'une action sur un type remarquable de géométrie : les immeubles. À tout système de Coxeter (W,S) est attaché un complexe simplicial Σ sur les simplexes maximaux duquel W opère simplement transitivement : il s'agit du *complexe de Coxeter* de (W,S) [Ron89, §2]. Un *immeuble* est un complexe simplicial, recouvert par des sous-complexes tous isomorphes à un même complexe de Coxeter Σ, appelés *appartements*, et qui satisfont de remarquables propriétés d'incidence : deux *facettes* (c'est-à-dire simplexes) sont toujours dans un appartement, et étant donnés deux appartements A et A', il existe toujours un isomorphisme simplicial $A \simeq A'$ qui fixe $A \cap A'$ [Bro89, p. 77]. Le point de vue alternatif des systèmes de chambres [Ron89, §3] nous sera au moins aussi utile, car il est plus adapté à l'usage de diverses réalisations géométriques d'un type d'appartement donné. Nous donnerons plus de détails en 1.1, au moment d'évoquer l'action d'un groupe de Kac-Moody sur ses deux immeubles.

Afin de définir un groupe de Kac-Moody général Λ, on a besoin de se donner une matrice à coefficients entiers A, satisfaisant une partie seulement des axiomes des matrices de Cartan au sens classique des algèbres de Lie semi-simples complexes [Hum70, §11]. On a aussi besoin de choisir un corps de base (qui dans ce mémoire sera toujours un corps fini $\mathbf{F}_q$). Écrire en toutes lettres une présentation de Λ requiert l'introduction de beaucoup de préliminaires calculatoires et combinatoires qui sortiraient du cadre dans lequel on souhaite situer notre travail. Nous nous en abstiendrons, et nous renvoyons à [Tit87, subsect. 3.6] et [Rem02b, sect. 9] pour plus de détails. Un résultat de base de la théorie est qu'à un groupe de Kac-Moody est naturellement associée (via les systèmes de Tits) une paire d'immeubles jumelés sur lesquels le groupe opère (fait 2 ci-dessous). L'exemple standard d'un tel groupe est $\Lambda = \mathbf{G}\big(\mathbf{K}[t,t^{-1}]\big)$, où $\mathbf{G}$ est un groupe semi-simple sur un corps de base $\mathbf{K}$, supposé isotrope (c'est-à-dire contenant un tore isomorphe à $\mathbf{K}^\times$ [Bor91, 20.1]) et simplement connexe [Spr98, 8.1.11]. Si nous choisissons un corps de base fini $\mathbf{F}_q$, ce dernier exemple est un groupe S-arithmétique en caractéristique positive, et dans ce cas les immeubles évoqués plus haut sont les immeubles de Bruhat-Tits des groupes de Lie non archimédiens $\mathbf{G}\big(\mathbf{F}_q(\!(t)\!)\big)$ et $\mathbf{G}\big(\mathbf{F}_q(\!(t^{-1})\!)\big)$.

Ces derniers exemples sont un cas très particulier de groupes de Kac-Moody, dits *de type affine*, mais bien d'autres cas sont disponibles. D'une part, cela suggère de voir les groupes de Kac-Moody comme des généralisations de groupes arithmétiques sur des corps de fonctions, ce qui conduit à des questions naturelles, par exemple savoir si certaines propriétés classiques des sous-groupes discrets des groupes de Lie sont encore pertinentes ou vérifiées. D'autre part, on voit que de nouveaux immeubles peuvent être produits grâce aux groupes de Kac-Moody, et cela conduit à se demander si les groupes fournissant des immeubles exotiques sont eux-mêmes nouveaux. Dans le contexte qui nous intéresse, «nouveau» signifie que les immeubles ne sont ni de type sphérique, ni de type affine, c'est-à-dire qu'ils ne proviennent pas de la théorie de Borel-Tits (resp. de Bruhat-Tits) étudiant les groupes algébriques semi-simples isotropes sur les corps quelconques (resp. sur les corps locaux).

Du point de vue des espaces métriques, la théorie de Kac-Moody est un procédé de fabrication algébrique d'espaces à courbure négative ou nulle en un sens singulier. Les distances en question sont même souvent hyperboliques, et les groupes d'isométries jouissent toujours, par définition, de fortes propriétés de transitivité. L'origine algébrique de ces groupes permet d'obtenir des résultats de structure (notamment des dévissages combinatoires) pour divers sous-groupes (discrets ou non) du groupe de tous les automorphismes. Par conséquent, dans le cas des immeubles de Kac-Moody hyperboliques, on peut combiner des techniques de combinatoire des groupes telles que les systèmes de Tits, avec des arguments d'espaces métriques hyperboliques au sens de Gromov. Cela nous fait dire que la tendance générale pour étudier les groupes de Kac-Moody de type fini devrait aller des méthodes algébriques et combinatoires vers celles de nature géométrique et dynamique. Dans ce mémoire, nous expliquons notamment comment la théorie des groupes de Kac-Moody de type fini (les groupes de Kac-Moody de corps de base fini) conduit naturellement à étudier des groupes totalement discontinus non dénombrables, que nous appelons *groupes de Kac-Moody géométriquement complétés*, et qui généralisent les groupes semi-simples sur les corps locaux de caractéristique positive. Nous sommes tout particulièrement intéressés par les arguments soulignant la nouveauté de ces groupes en général, en prouvant par exemple qu'ils ne peuvent être linéaires sur aucun corps. En résumé, l'étude des groupes de Kac-Moody de type fini est partagée entre d'une part prouver des propriétés classiques en faveur de l'analogie avec les groupes arithmétiques, et d'autre part mettre en évidence des différences, en s'appuyant sur les connaissances acquises grâce au premier point. Toute la question est de savoir à quel stade la situation se singularise par rapport au cas arithmétique (linéaire) classique.

Cette approche trouve sa source dans divers travaux. En ce qui concerne les réseaux des produits d'arbres, M. Burger et Sh. Mozes ont mis en évidence nombre de propriétés classiques des réseaux de groupes de Lie (parmi lesquelles le théorème du sous-groupe normal de G.A. Margulis, qui implique qu'un réseau irréductible de groupe de Lie semi-simple de rang supérieur à centre trivial, est *juste infini* : tous ses quotients propres sont finis). Cependant, une grande différence avec le cas classique est la possibilité de produire des groupes non résiduellement finis, ce qui est impossible dans le cas des groupes de type fini linéaires. L'application principale est la construction des premiers groupes simples infinis de présentation finie et sans torsion (ce sont des produits amalgamés de groupes libres) [BM97], [BM00a], [BM00b]. De son côté, Y. Shalom [Sha00] montre au moyen d'outils issus de la théorie des représentations que beaucoup de propriétés peuvent être prouvées pour les réseaux irréductibles de produits de groupes localement compacts généraux. Puisque les arbres sont des cas particuliers de dimension un des immeubles, ces références nous encouragent à penser que les groupes de Kac-Moody fourniront des exemples intéressants de groupes de type fini, non linéaires mais compréhensibles à travers leurs actions diagonales sur des produits d'immeubles.

1. Groupes S-arithmétiques généralisés opérant sur de nouveaux immeubles

Cette section est pour l'essentiel consacrée aux résultats supportant l'analogie entre groupes de Kac-Moody sur un corps fini et les groupes $\{0;\infty\}$-arithmétiques sur les corps de fonctions [Rem02a, sect. 2-3]. Les arguments sont l'existence d'une action diagonale discrète sur le produit de deux immeubles (1.1), des résultats de finitude cohomologique (1.2) et d'annulation de cohomologie (1.3). Dans les deux dernières sous-sections (1.4 et 1.5), nous donnons des arguments montrant que la théorie de Kac-Moody fournit de nouveaux objets intéressants du côté des immeubles comme du côté des groupes.

1.1. **Actions discrètes sur des immeubles et finitude du covolume.** Un groupe de Kac-Moody est engendré par les groupes radiciels indexés par les racines simples et leurs opposées (en nombre fini), et par un sous-tore maximal convenable qui les normalise [Tit87, §3.6]. Puisque sur $\mathbf{F}_q$ tous ces groupes sont finis, nous obtenons :

Fait 1. *Tout groupe de Kac-Moody Λ sur un corps fini est de type fini.*

Rappelons maintenant le point de vue des systèmes de chambres sur les immeubles. Un *système de chambres* sur un ensemble S est un ensemble I muni d'une relation d'équivalence $\sim_s$ pour chaque $s \in S$; $\sim_s$ est appelée *s-adjacence* et les éléments de I sont appelés les *chambres.* On parle de chambres *s-adjacentes* si elles sont $\sim_s$-équivalentes. Si maintenant (W, S) est un système de Coxeter, un *immeuble de type* (W, S) est un couple (I, d) où I est un ensemble et d est une application *W-distance* $d : I \times I \to W$ qui vérifie pour tous $x, y \in I$ les conditions suivantes, avec $w = d(x, y)$.

- (IM1) on a $w = 1$ si et seulement si $x = y$;
- (IM2) si $z \in I$ vérifie $d(y, z) = s$ pour $s \in S$ alors $d(x, z) = ws$ ou w ; et si $\ell(ws) > \ell(w)$, alors $d(x, z) = ws$;
- (IM3) pour tout $s \in S$, il existe $z \in I$ tel que $d(y, z) = s$ et $d(x, z) = ws$.

Dans le cas des immeubles, on a $x \sim_s y$ si et seulement si $d(x, y) \in \langle s\rangle$. Rappelons enfin qu'une action de groupe sur I est dite *fortement transitive* si pour tout $w \in W$ elle est transitive sur les paires de chambres à W-distance w. La combinaison de [Tit87, 5.8 proposition 4] et de [Ron89, théorème 5.2] fournit :

Fait 2. *Soit Λ un groupe de Kac-Moody.*

- (i) *Le groupe Λ fait partie de deux systèmes de Tits (Λ, B_+, N, S) et (Λ, B_-, N, S) de même groupe de Weyl $W = N/(N \cap B)$.*
- (ii) *Au système de Tits $(\Lambda, B_\pm, N, S)$ est associé un immeuble $X_\pm$ dont les chambres sont en bijection avec les classes $gB_\pm$ pour g parcourant Λ.*
- (iii) *La Λ-action par translation à gauche des classes $gB_\pm$ est fortement transitive sur chaque immeuble.*
- (iv) *Dès que W est infini, les groupes B_+ et B_- ne sont pas conjugués, mais Λ admet toujours une décomposition de Birkhoff $\Lambda = \bigsqcup_{w\in W} B_+ wB_-$ qui définit une codistance δ^* entre chambres de signes opposés par $\delta^*(gB_+, hB_-) = \delta^*(hB_-, gB_+)^{-1} = w$ pour $g^{-1}h \in B_+ wB_-$.*
- (v) *Si le corps de base est fini, le nombre de chambres de $X_\pm$ dont l'adhérence contient une facette de type sphérique donnée, est fini.*

La *codistance*, encore appelée le *jumelage*, du point (iv) remplace l'existence d'un élément de plus grande longueur dans le cas d'un groupe de Weyl fini [Abr97, §2 définition 3]. Poser l'existence d'une codistance est le point de départ de la théorie des immeubles jumelés [Tit89b], [Tit90].

Désormais, Λ est un groupe de Kac-Moody de corps de base $\mathbf{F}_q$. Le fait 2 est essentiel pour comprendre les groupes de Kac-Moody : la géométrie des immeubles est le principal substitut à une structure issue de la géométrie algébrique sur Λ, non disponible dans l'état actuel de nos connaissances. Dans le cas d'un groupe $\{0;\infty\}$-arithmétique $\Lambda = \mathbf{G}\big(\mathbf{F}_q[t,t^{-1}]\big)$, les immeubles $X_\pm$ sont les immeubles de Bruhat-Tits de $\mathbf{G}\big(\mathbf{F}_q(\!(t)\!)\big)$ et $\mathbf{G}\big(\mathbf{F}_q(\!(t^{-1})\!)\big)$. Dans le cas général, il est encore vrai que pour un groupe de Kac-Moody arbitraire, l'action diagonale sur le produit d'immeubles $X_- \times X_+$ est discrète [Rem99]. En outre, cette action possède des domaines fondamentaux convexes agréables à manipuler puisque ce sont des intersections de racines (vues comme demi-espaces) [Abr97, §3, corollaire 1]. L'étape suivante dans l'analogie avec les groupes arithmétiques consiste à se demander si Λ est un *réseau* de $X_- \times X_+$, à savoir si le quotient du groupe localement compact $\mathrm{Aut}(X_-) \times \mathrm{Aut}(X_+)$ par l'action diagonale de Λ définie à partir du fait précédent, porte une mesure invariante finie [Mar91, 0.40]. C'est le résultat principal de [Rem99] :

Théorème 3. *Supposons que le groupe de Weyl W de Λ soit infini et notons $W(t) = \sum_{w\in W} t^{\ell(w)}$ sa série de croissance. Supposons que $W(\frac{1}{q}) < \infty$. Alors Λ est un réseau de $X_+ \times X_-$ pour son action diagonale, et pour tout point $x_- \in X_-$ le stabilisateur $\Lambda(x_-)$ est un réseau de X_+. Ces réseaux ne sont jamais cocompacts.*

Quand tous les groupes radiciels sont d'ordre q (par exemple quand Λ est déployé [Rem02b, 11.1.5]), le nombre $W(\frac{1}{q})$ est le covolume de Λ pour une normalisation naturelle des mesures de Haar. L'action de Λ sur $X_+ \times X_-$ est toujours discrète. Dans le cas arithmétique $\Lambda = \mathbf{G}(\mathbf{F}_q[t,t^{-1}])$, le groupe de Weyl est à croissance polynomiale (il est virtuellement abélien parce que c'est un groupe de réflexions affine). Par conséquent la condition $W(\frac{1}{q}) < \infty$ est vide et $\mathbf{G}(\mathbf{F}_q[t,t^{-1}])$ est toujours un réseau de $\mathbf{G}\big(\mathbf{F}_q(\!(t)\!)\big) \times \mathbf{G}\big(\mathbf{F}_q(\!(t^{-1})\!)\big)$, quelle que soit la taille q du corps $\mathbf{F}_q$. Nous retrouvons ainsi un cas particulier d'un résultat bien connu de la théorie de la réduction en caractéristique positive [Beh69], [Har69].

1.2. **Propriétés de finitude cohomologiques.** Les questions de finitude cohomologiques sont difficiles et non complètement résolues dans le cas des groupes arithmétiques sur les corps de fonctions [Beh03], à la différence du cas des corps de nombres. Pourtant, il est naturel de s'attendre à ce que certains des résultats connus pour les corps de fonctions se démontrent également pour les groupes de Kac-Moody. C'est en effet le cas, à condition de prêter une attention toute particulière aux sous-matrices principales de la matrice de Cartan généralisée qui définit le groupe ; c'est le thème du livre de P. Abramenko [Abr97]. Les théorèmes qui suivent résument les théorèmes 1 et 2 de [Abr03], en utilisant un langage un peu différent. Par exemple, nous introduisons les sous-groupes paraboliques (définis en termes de systèmes de Tits dans [loc. cit.]) à travers l'action sur les immeubles associés : un sous-groupe parabolique est un stabilisateur (ou encore un fixateur) de facette. Rappelons qu'un groupe discret Δ est dit *de type FP_n* s'il existe une résolution projective du $\mathbf{Z}[\Delta]$-module trivial $\mathbf{Z}$ tel que les $n+1$ premiers modules soient de type fini [Bro87, VIII.5]. Rappelons aussi que Δ est dit *de type F_n* s'il existe un complexe d'Eilenberg-MacLane de groupe fondamental Δ dont le n-squelette est fini (voir [Bro87, VIII théorème 7.1] pour le lien entre ces deux propriétés). Nous notons enfin que les résultats cités ci-dessous sont encore valides dans le contexte plus général des *systèmes de Tits jumelés* abstraits [Abr97, §1].

Théorème 4. *Soit Λ un groupe de Kac-Moody sur $\mathbf{F}_q$ et soit Γ un stabilisateur de facette. Soit Σ le complexe de Coxeter du groupe de Weyl W de Λ, c'est-à-dire le modèle des appartements dans les immeubles $X_\pm$ de Λ. Notons R une chambre dans Σ et Π l'ensemble des réflexions par rapport aux faces de codimension 1 de R.*

(i) *Si toute paire de réflexions de Π engendre un groupe fini et si $q > 3$, alors Γ est de type fini ; mais Γ n'est pas de type FP_2, en particulier n'est pas de présentation finie dès qu'une partie de trois réflexions de Π engendre un sous-groupe infini de W.*

(ii) *Si toute partie de trois réflexions de Π engendre un groupe fini et si $q > 6$, alors Γ est de présentation finie ; mais Γ n'est pas de type FP_3 dès qu'une partie de quatre réflexions de Π engendre un sous-groupe infini de W.*

Quand toute paire de réflexions de Π engendre un groupe fini, on dit que le groupe de Kac-Moody est 2-*sphérique.* Avec la propriété de Moufang [Ron89, 6.4] et l'existence d'un jumelage [Abr97, Definition 3], cette notion joue un rôle crucial dans les problèmes de classification de certaines classes d'immeubles à groupe de Weyl infini. D'autres résultats sont disponibles dans [Abr97] ; ils traitent des propriétés de finitude cohomologiques supérieures FP_n et F_n pour n quelconque. D'après le fait 1, la présentation finie est la première propriété de finitude non évidente pour le groupe Λ lui-même. Dans ce cas, on a un résultat de P. Abramenko et B. Mühlherr [AM97] :

Théorème 5. *Avec les notations ci-dessus, si toute paire de réflexions de* Π *engendre un groupe fini et si* $q > 3$*, alors le groupe de Kac-Moody* Λ *est de présentation finie.*

À titre d'exemple, les groupes de Kac-Moody Λ dont les appartements sont des pavages du plan hyperbolique par des triangles équilatéraux d'angle $\frac{\pi}{4}$ sont de présentation finie pour $q > 3$, mais tel n'est pas le cas pour les groupes dont les appartements sont des pavages par des r-gones hyperboliques réguliers à angles droits ($r \geq 5$) [Abr03, contre-exemple 2]. Nous verrons en 1.4 que de tels groupes de Kac-Moody existent dans les deux cas.

1.3. **Cohomologie continue et propriété (T) de Kazhdan.** D'après les résultats de J. Dymara et T. Januszkiewicz, être 2-sphérique est une condition cruciale également pour avoir des annulations de cohomologie continue pour les groupes d'automorphismes complets des immeubles. Le théorème ci-dessous est un cas particulier de [DJ02, théorème E].

Théorème 6. *Soit* Λ *un groupe de Kac-Moody sur* $\mathbf{F}_q$*. On note* A *sa matrice de Cartan généralisée, supposée de taille* $m \times m$*. Soit* $n < m$ *tel que toutes les sous-matrices principales de taille* $n \times n$ *de* A *soient des matrices de Cartan classiques (i.e. de type fini). Alors, pour* $1 \leq k \leq n-1$ *et* q *assez grand, les groupes de cohomologie continue* $\mathrm{H}^k_{\mathrm{ct}}\big(\mathrm{Aut}(X_\pm), \rho\big)$ *s'annulent pour toute représentation unitaire* ρ*.*

La cohomologie en degré 1 est très utile puisque l'annulation de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(G, \rho)$ pour toute représentation unitaire ρ est équivalente à la propriété (T) de Kazhdan [dlHV89, chap. 4]. Dans les cas favorables, on obtient donc la propriété (T) pour les groupes d'automorphismes complets $\mathrm{Aut}(X_\pm)$ quand q est assez grand, par conséquent pour leur produit $\mathrm{Aut}(X_+) \times \mathrm{Aut}(X_-)$, et finalement pour tout réseau dans ce produit par le théorème de S.P. Wang [Mar91, III, théorème 2.12]. Autrement dit, le résultat ci-dessus dit notamment que beaucoup de groupes de Kac-Moody possèdent la propriété (T), qui est une propriété fondamentale des réseaux des groupes de Lie simples de rang supérieur, archimédiens ou non [Mar91, III].

1.4. **Exemples hyperboliques.** L'existence d'immeubles avec une forme prescrite pour les chambres et les links est bien connue dans nombre de cas [Ron86], [Bou97]. Certains exemples conduisent à d'intéressants groupes d'automorphismes complets et réseaux [BP00], alors que d'autres, de façon surprenante, ont peu d'automorphismes bien qu'ils soient plutôt familiers puisqu'ils sont euclidiens, pavés par des triangles équilatéraux [Bar00, théorème 7]. Le résultat ci-dessous [Rem02c, proposition 2.3] montre que certains immeubles relèvent à la fois de la théorie de Kac-Moody et de la géométrie hyperbolique en un sens généralisé [BH99, III.H]. Cela permet de combiner des arguments de nature algébrique et géométrique pour étudier les groupes de Kac-Moody correspondants.

Proposition 7. *Soit* P *un polyèdre de l'espace hyperbolique* $\mathbb{H}^n$*, avec des angles diédraux égaux à* 0 *ou à* $\frac{\pi}{m}$ *pour* $m = 2$*,* 3*,* 4 *ou* 6*. Alors pour toute puissance* q *d'un nombre premier, il existe un groupe de Kac-Moody dont les immeubles sont d'épaisseur constante égale à* $q+1$ *et où les appartements sont des pavages de* $\mathbb{H}^n$ *par* P *; ces immeubles sont des espaces métriques géodésiques, propres et* $\mathrm{CAT}(-1)$*.*

Rappelons que l'*épaisseur* en une cellule C de codimension 1 d'un immeuble est le nombre de cellules de dimension maximale dont l'adhérence contient C. Rappelons également que d'après G. Moussong

[Mou88], tout groupe de Coxeter opère proprement discontinûment sur un complexe cellulaire CAT(0), avec quotient compact. Ce complexe fournit une réalisation métrique du complexe de Coxeter considéré [Ron89, chap. 2], dans laquelle les cellules sont en bijection avec les les facettes de type sphérique. On sait en outre que ce complexe peut être muni d'une métrique CAT(-1) si et seulement si le groupe de Coxeter est hyperbolique au sens de Gromov (qui est une propriété plus faible en général [GdlH90, chap. 3]). Cependant, le complexe cellulaire en question n'est pas aussi facile à comprendre qu'un pavage hyperbolique comme dans la proposition 7. En utilisant le complexe à courbure négative ou nulle de G. Moussong comme modèle d'appartement, M. Davis [Dav97] a prouvé l'existence de réalisations métriques CAT(0) pour tout immeuble, qui sont elles aussi CAT(-1) dès que le groupe de Weyl est Gromov-hyperbolique.

1.5. **Non linéarités faciles.** Nous venons d'une part de citer en 1.1-1.3 des arguments qui appuient l'analogie entre groupes arithmétiques sur des corps de fonctions et groupes de Kac-Moody sur les corps finis. D'autre part, 1.4 montre que les géométries obtenues en général sont assurément nouvelles puisque des immeubles hyperboliques peuvent être produits. Cependant, il n'est pas prouvé à ce stade que les groupes eux-mêmes ne sont pas déjà bien connus, et que seules les actions sont nouvelles : quels arguments fournir pour mettre en évidence la nouveauté de ces groupes ? Cette question est très liée aux problématiques de rigidité, c'est-à-dire de montrer que des groupes qui opèrent naturellement sur un certain type de géométrie ne peuvent opérer que de façon très dégénérée sur un autre type de géométrie. Un moyen d'attaquer ce problème consiste à prouver que les groupes en question ne sont linéaires sur aucun corps. Les linéarités les plus faciles à écarter sont recensées dans le résultat qui suit [Rem02a, théorème 4.6] :

Théorème 8. *Soit Λ un groupe de Kac-Moody sur $\mathbf{F}_q$ à groupe de Weyl infini, et soit Γ un stabilisateur de facette dans Λ. Alors Γ contient toujours un sous-groupe infini d'exposant p. Par conséquent Γ, et donc Λ, ne peut être linéaire sur aucun corps de caractéristique différente de p.*

Ce résultat dit en particulier que les groupes de Kac-Moody comme dans l'énoncé du théorème 8 ne peuvent opérer fidèlement sur aucun espace symétrique (les espaces symétriques sont les géométries naturellement attachées aux groupes de Lie semi-simples réels), ni sur aucun immeuble de Bruhat-Tits dès lors que cet immeuble est associé à un groupe algébrique semi-simple sur un corps local de caractéristique incompatible. Produire un sous-groupe infini d'exposant p fait appel à des arguments de systèmes de racines de Kac-Moody et de murs parallèles dans les complexes de Coxeter infinis. Ensuite, des arguments élémentaires d'adhérence de Zariski et de groupes algébriques impliquent qu'un groupe infini d'exposant une puissance de p ne peut être linéaire que sur un corps de caractéristique p car toute adhérence de Zariski d'un tel groupe est de composante neutre unipotente [Mar91, lemme VIII.3.7]. Comme nous l'a signalé F. Paulin, pour Λ, et aussi pour Γ lorsque celui-ci est de type fini, on peut conclure sans recours aux adhérences de Zariski, grâce au lemme de Selberg en caractéristique positive. Ce résultat affirme que si un groupe de type fini est linéaire en caractéristique $l > 0$, alors il contient un sous-groupe d'indice fini dans lequel les éléments de torsion ne peuvent être que de l-torsion [Alp87].

2. Groupes non isomorphes de même immeuble. Groupes de Kac-Moody généralisés

Dans cette section, nous nous focalisons sur les immeubles dont les appartements sont des pavages de plan hyperbolique. Puisque nous nous intéressons à la possibilité de produire des immeubles et des groupes nouveaux, il est naturel de considérer le cas des groupes de Weyl fuchsiens, correspondant aux groupes de Kac-Moody exotiques les plus simples. Les résultats ont une teneur essentiellement algébrique et combinatoire ; ils soulignent l'importance du rôle des conditions introduites dans les classifications d'immeubles. Comme dans le cas des immeubles sphériques, les isomorphismes abstraits entre groupes de Kac-Moody de même immeuble peuvent être décomposés comme produits d'automorphismes élémentaires (2.1). Pourtant, on peut mettre en évidence une différence avec le cas classique, à savoir l'existence en tout rang de groupes non isomorphes de même immeuble naturellement associé (2.2). En outre, la structure locale des immeubles fuchsiens à angles droits est particulièrement simple : cela permet de construire des groupes très proches des groupes de Kac-Moody, mais pour ainsi dire définis avec plusieurs corps de base (2.3). En revenant à la théorie géométrique des groupes, cela donne des réseaux d'immeubles de rang arbitrairement grand satisfaisant de fortes propriétés de non linéarité (2.4). Les deux dernières sous-sections rendent compte d'un travail commun avec M. Ronan.

2.1. **Factorisation d'automorphismes abstraits.** Nous disons qu'un immeuble est *fuchsien* si son groupe de Weyl est le groupe de réflexions d'un pavage de plan hyperbolique (auquel cas ce pavage sera un modèle privilégié pour les appartements). D'après un théorème de Poincaré [Mas88, 4.H], les pavages fuchsiens sont des réalisations de complexes de Coxeter puisque les groupes de pavages sont précisément des groupes de Coxeter : ce sont les pavages infinis des géométries les plus familières après les espaces euclidiens. Des faits élémentaires de géométrie hyperbolique permettent de prouver le résultat suivant [Rem02c, théorème 3.1] :

Théorème 9. *Soient G et G' deux groupes de Kac-Moody définis sur le même corps fini $\mathbf{F}_q$ à $q \geq 4$ éléments. Supposons que les immeubles associés soient tous isomorphes ($\star$) ou bien au même arbre localement fini, ($\star\star$) ou bien au même immeuble fuchsien à chambres régulières. Alors, à conjugaison près dans G, tout isomorphisme abstrait de G dans G' est la composition d'une permutation des racines simples et éventuellement d'une opposition globale du signe des racines.*

Ce résultat de factorisation est proche du résultat classique de R. Steinberg sur les groupes simples finis de type de Lie, qui affirme qu'un automorphisme abstrait d'un tel groupe est le produit d'un automorphisme de diagramme de Dynkin, d'un automorphisme de corps et d'un automorphisme intérieur [Car72, théorème 12.5.1]. D'autres factorisations d'isomorphismes ont récemment été obtenues par P.-E. Caprace ; ce dernier travail est complémentaire du théorème ci-dessus dans le sens où il traite le cas des corps de base algébriquement clos [Cap03, théorème 6].

2.2. **Plusieurs classes d'isomorphisme.** Soit R un r-gone régulier à angles droits du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$. À tout entier $q \geq 2$ est associé un unique immeuble $I_{r,q+1}$ dont les appartements sont des pavages de Poincaré de $\mathbb{H}^2$ par R, et tels que le link en chaque sommet est le graphe biparti complet de paramètres $(q+1, q+1)$ [Bou97, 2.2.1]. Ici, le *link* d'un sommet est une sphère suffisamment petite autour du sommet, que nous voyons comme un graphe. Nous appelons un tel immeuble un *immeuble fuchsien à angles droits* de paramètres r et $q+1$. Ces espaces sont intéressants parce que localement ils ressemblent à des produits d'arbres, ce qui les rend simples d'un point de vue combinatoire, mais globalement leur groupes de Weyl sont irréductibles et fuchsiens, ce qui mène à de remarquables propriétés de rigidité [Bou97], [BP00]. Par unicité et par la proposition 7, pour tout entier $r \geq 5$ l'immeuble $I_{r,q+1}$ est l'immeuble associé au système de Tits [Ron89, 5.3] d'un groupe de Kac-Moody dès que q est une puissance d'un nombre premier. En utilisant le théorème 9, on peut montrer qu'il y a des groupes de Kac-Moody abstraitement non isomorphes avec le même immeuble $I_{r,q+1}$ associé [Rem02c, §4, proposition] :

Corollaire 10. *Soient $q \geq 4$ une puissance de nombre premier et $r \geq 5$ un entier. Alors il existe plusieurs classes d'isomorphisme abstrait de groupes de Kac-Moody dont les immeubles associés sont tous isomorphes au même immeuble $I_{r,q+1}$.*

Ce résultat est en contraste avec le cas sphérique, où d'après la classification de J. Tits, un immeuble irréductible fini de rang ≥ 3 détermine uniquement un corps et un groupe algébrique sur ce corps [Tit74, théorème 11.4]. Ici, le rang r est un entier ≥ 5 aussi grand qu'on veut. C'est un argument de plus qui explique pourquoi dans la classification des immeubles jumelés de Moufang [MR95], [Mue99], les immeubles sont supposés 2-sphériques : les groupes de Kac-Moody dont les immeubles associés sont des $I_{r,q+1}$ ne satisfont pas cette propriété. Un renforcement naturel du corollaire, et non élucidé à notre connaissance, est de savoir s'il est possible d'associer plusieurs classes d'isomorphismes abstraits de groupes de Kac-Moody au même jumelage d'immeubles. Autrement dit, dans le nouveau problème on impose non seulement la géométrie des immeubles mais aussi le jumelage qui les relie (fait 2).

2.3. **Mélange de corps de base.** Un argument plus fort encore montre que la condition «2-sphérique» est nécessaire pour qu'un immeuble jumelé de Moufang soit l'objet d'une classification raisonnable (où le volet «groupes» serait la famille des groupes de Kac-Moody, éventuellement tordus). En effet, certaines généralisations de groupes de Kac-Moody à plusieurs corps de base peuvent être construites, pourvu que les appartements soient des pavages fuchsiens à angles droits. Ici «généralisation» signifie que les groupes satisfont les mêmes axiomes combinatoires que les groupes de Kac-Moody (dans leur version la plus forte, à savoir celle des données radicielles jumelées [Tit92, §3.3]). Précisément, voici un théorème prouvé avec M. Ronan [RR02, théorème 3.E] :

Théorème 11. *Un immeuble fuchsien à angles droits est l'immeuble positif (ou, de façon équivalente, l'immeuble négatif) d'un jumelage de Moufang dès que l'épaisseur en chaque facette de codimension* 1 *est le cardinal d'une droite projective.*

Dans le cas des arbres, une construction plus théorique est esquissée par J. Tits [Tit90, §9]. Notons que dans le résultat ci-dessus le rang du groupe de Weyl est arbitrairement grand ≥ 5, alors que dans le cas des arbres, le groupe de Weyl est un groupe diédral infini (de rang 2 comme groupe de Coxeter).

2.4. **Non linéarités fortes.** Au-delà de son intérêt combinatoire, la construction ci-dessus peut-être vue comme un procédé de fabrication de réseaux d'immeubles hyperboliques jouissant de propriétés de non linéarité très fortes. D'après le théorème 8 la caractéristique p du corps de base d'un groupe de Kac-Moody empêche le groupe d'être linéaire sur un corps de caractéristique différente de p. Par conséquent, mélanger des corps de diverses caractéristiques dans le théorème 11 doit permettre d'obtenir des groupes qui ne sont linéaires sur aucun corps ; c'est en effet le cas [RR02, théorème 4.A] :

Théorème 12. *Soient r un entier ≥ 5 et $\{\mathbf{K}_i\}_{i \in \mathbf{Z}/r}$ une famille finie de corps pour laquelle deux caractéristiques positives distinctes apparaissent. Soit Λ un groupe défini comme dans le théorème 11 à partir de ces corps et soit Γ un stabilisateur de chambre. Alors tout homomorphisme de groupes $\rho : \Gamma \to \prod_{\alpha \in A} \mathrm{GL}(N_\alpha, \mathbf{F}_\alpha)$ a un noyau infini, quelle que soit la famille finie $\{\mathrm{GL}(N_\alpha, \mathbf{F}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de groupes linéaires $\mathrm{GL}(N_\alpha)$ et de corps $\mathbf{F}_\alpha$.*

Notons que le résultat est plus fort qu'une simple non linéarité puisque le mélange des corps de base est également autorisé dans l'image de la représentation. En outre, le noyau est non seulement non trivial, mais en fait systématiquement infini. Si l'on revient au problème de linéarité des groupes de Kac-Moody, ce résultat, combiné au théorème 8, circonscrit le problème réellement difficile au cas de la non linéarité quand la caractéristique du corps du groupe linéaire à l'arrivée est celle du corps de base du groupe, supposé de Kac-Moody *au sens strict*. C'est cette question qui est étudiée plus en détail dans la section 4.

3. Généralisation de groupes algébriques sur des corps locaux

Un groupe de Kac-Moody Λ opère discrètement sur le produit de ses immeubles, mais son action sur un seul des deux facteurs n'est pas discrète. Par conséquent, cela a un sens de prendre l'adhérence $\overline{\Lambda} \subset \mathrm{Aut}(X_\pm)$ de l'image d'un groupe de Kac-Moody pour une telle action (le groupe $\mathrm{Aut}(X_\pm)$ est ici muni de la topologie, localement compacte car $X_\pm$ est localement fini, pour laquelle une base de voisinages de l'identité est donnée par les fixateurs de parties finies). Le groupe ainsi obtenu est appelé un *groupe de Kac-Moody géométriquement complété* (le noyau de la Λ-action sur $X_\pm$ est le centre fini $Z(\Lambda)$). Dans le cas classique $\Lambda = \mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[t,t^{-1}])$, $X_\pm$ est l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{SL}_n\big(\mathbf{F}_q(\!(t)\!)\big)$ ou de $\mathrm{SL}_n\big(\mathbf{F}_q(\!(t^{-1})\!)\big)$, respectivement. Si $\mu_n(\mathbf{F}_q)$ désigne le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbf{F}_q$, l'image $\Lambda/Z(\Lambda)$ de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[t,t^{-1}])$ pour l'action sur $X_\pm$ est $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[t,t^{-1}])/\mu_n(\mathbf{F}_q)$ et les complétions $\overline{\Lambda}$ sont $\mathrm{PSL}_n\big(\mathbf{F}_q(\!(t)\!)\big)$ et $\mathrm{PSL}_n\big(\mathbf{F}_q(\!(t^{-1})\!)\big)$, respectivement. En fait, il existe beaucoup d'arguments, outre le procédé de fabrication ci-dessus, pour comparer un groupe de Kac-Moody géométriquement complété à un groupe semi-simple sur un corps local : existence d'une combinatoire raffinant celle des systèmes de Tits (3.1), caractérisation purement en termes de pro-p sous-groupes des fixateurs de chambres (3.2), simplicité topologique (3.3). Pourtant, comme pour les groupes discrets de départ, on peut trouver des phénomènes qui suggèrent que les groupes totalement discontinus ainsi obtenus sont nouveaux (3.4). Nous citons à la fin un résultat de coexistence de réseaux non linéaires non uniformes et de réseaux uniformes munis de plongements convexes-cocompacts dans des espaces hyperboliques réels (3.5).

3.1. **Systèmes de Tits raffinés.** La structure de *système de Tits raffiné* a été introduite par V. Kac and D. Peterson [KP85] ; c'est une généralisation des BN-paires scindées, une notion issue de la théorie des groupes finis de type de Lie. Il s'agit d'un sextuplet (G, N, U_+, U_-, H, S) qui vérifie les axiomes suivants :

(RT1) G est un groupe dont N, U_+, U_- sont des sous-groupes. G est engendré par N et U_+. H est distingué dans N et normalise U_+ et U_-. S est une partie de $W := N/H$ formée d'éléments d'ordre 2 qui engendrent W.

(RT2) Pour chaque $s \in S$, on pose $U_s := U_+ \cap s^{-1}U_-s$, et on requiert pour tous $w \in W$ et $s \in S$:
- (RT2a) $s^{-1}U_s s \neq \{1\}$ et $s^{-1}(U_s \setminus \{1\})s \subset U_s s H U_s$.
- (RT2b) $w^{-1}U_s w \subset U_+$ ou $w^{-1}U_s w \subset U_-$.
- (RT2c) $U_+ = U_s(U_+ \cap s^{-1}U_+ s)$.

(RT3) Si $u_- \in U_-$, $u_+ \in U_+$ et $n \in N$ sont tels que $u_- n u_+ = 1$, alors $u_- = u_+ = n = 1$.

Une des propriétés de base est que dans ce cas (G, HU_+, N, S) est un système de Tits [KP85, lemme 3.1]. Bien entendu, la différence avec un simple système de Tits est la formalisation dans les axiomes mêmes de l'existence d'un radical unipotent abstrait dans le sous-groupe de Borel. Le résultat qui suit est également un travail commun avec M. Ronan [RR02, théorème 1.C] :

Théorème 13. *Soit Λ un groupe de Kac-Moody sur un corps fini $\mathbf{F}_q$ de caractéristique p. Alors le groupe de Kac-Moody géométriquement complété associé $\overline{\Lambda}$ admet une structure de système de Tits raffiné ; le système de Tits définit une action sur un immeuble dans laquelle les fixateurs de facettes sont, à indice fini près, des pro-p groupes.*

Il est classique qu'un groupe opérant fortement transitivement sur un immeuble admet naturellement une structure de système de Tits [Ron89, théorème 5.2], par conséquent l'intérêt du premier point réside dans la différence entre un simple système de Tits et un système de Tits raffiné. En outre, les propriétés standard des doubles classes dans les décompositions de Bruhat impliquent que les groupes de Kac-Moody géométriquement complétés sont compactement engendrés [Rem03c, corollaire 1.B.1]. On explique en [Rem03c, 1.B.1] comment les systèmes de Tits raffinés pour les groupes $\overline{\Lambda}$ à groupes de Weyl infinis impliquent la présence de beaucoup de torsion dans les fixateurs de facettes – qu'on appelle les *sous-groupes parahoriques*. C'est un argument de plus pour justifier que l'analogie avec les groupes semi-simples sur les corps locaux n'est pertinente que pour les corps de même caractéristique p que le corps de base fini du groupe de Kac-Moody considéré (les sous-groupes parahoriques des groupes semi-simples sur les extensions finies des corps $\mathbf{Q}_l$ sont virtuellement sans torsion). Par analogie avec le cas classique de la théorie de Bruhat-Tits [BT72], [BT84], nous appelons *sous-groupe d'Iwahori* un fixateur de chambre dans $\overline{\Lambda}$.

3.2. **Sous-groupes d'Iwahori.** Revenant au cas particulier $\Lambda = \mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[t, t^{-1}])$, donnons-nous un sommet v dans l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{SL}_n\big(\mathbf{F}_q(\!(t)\!)\big)$. Alors son stabilisateur est isomorphe à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[[t]])$, et pour une chambre convenable contenant v le sous-groupe d'Iwahori correspondant est le groupe des matrices dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[[t]])$ qui deviennent triangulaires supérieures après réduction modulo t. En outre, le premier sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[[t]])$, c'est-à-dire le noyau de la flèche de réduction modulo t, est un pro-p sous-groupe maximal dont le normalisateur est le sous-groupe d'Iwahori ci-dessus. Dans le cadre Kac-Moody général, le résultat ci-dessous [Rem03c, proposition 1.B.2] est une généralisation de [PR94, théorème 3.10].

Proposition 14. *Les sous-groupes d'Iwahori sont caractérisés comme étant les normalisateurs des pro-p sous-groupes de Sylow du groupe de Kac-Moody géométriquement complété $\overline{\Lambda}$.*

En général, l'analogue du premier sous-groupe de congruence d'un fixateur de sommet doit être défini comme le fixateur de l'étoile autour du sommet en question. Ces premiers sous-groupes de congruence sont les conjugués du radical unipotent (au sens combinatoire) du système de Tits raffiné de 3.1, et ce sont aussi les pro-p sous-groupes de Sylow [Ser94, I.1.4] de $\overline{\Lambda}$. (Rappelons que dans le cas d'un groupe fini de type de Lie sur un corps fini de caractéristique p, le radical unipotent abstrait de la BN-paire scindée est un p-sous-groupe de Sylow [BCC$^+$70, B corollaire 3.5].)

3.3. **Simplicité topologique.** Vu la simplicité des groupes algébriques adjoints sur des corps assez gros, le théorème ci-dessous [Rem03c, théorème 2.A.1] est assez attendu :

Théorème 15. *Pour $q \geq 4$, un groupe de Kac-Moody géométriquement complété sur le corps fini $\mathbf{F}_q$ est le produit direct d'un nombre fini de groupes topologiquement simples, avec un facteur par composante connexe du diagramme de Dynkin.*

Le résultat ci-dessus est très utile quand on a étendu des homomorphismes de groupes abstraits depuis des groupes de Kac-Moody de type fini vers des groupes linéaires, en représentations linéaires continues de groupes de Kac-Moody géométriquement complétés (théorème 20). Les arguments de preuve sont essentiellement qu'un sous-groupe normal dans un système de Tits irréductible ou bien est transitif sur les chambres ou bien agit trivialement sur l'immeuble correspondant [Bou81, IV.2], que les sous-groupes d'Iwahori sont virtuellement pro-p, et qu'une partie génératrice d'un groupe de Kac-Moody peut être choisie comme réunion de sous-groupes finis de type de Lie, parfaits dès que $q \geq 4$. Nous ne voyons pas d'obstruction à ce que les groupes de Kac-Moody géométriquement complétés soient en fait simples en tant que groupes abstraits (question 33).

3.4. **Frontières de Furstenberg non homogènes.** Quand l'immeuble $X_\pm$ est à appartements hyperboliques, l'existence de nombreuses translations hyperboliques permet de faire un peu de dynamique topologique. Soit Y un espace compact métrisable. On note $\mathcal{M}^1(Y)$ l'espace des mesures de probabilité sur Y ; c'est un espace compact métrisable pour la topologie faible-$*$. On suppose que Y admet une action continue par un groupe topologique G. On dit que Y est une *frontière de Furstenberg* pour G si l'action est *G-minimale* et *G-fortement proximale* [Mar91, VI.1.5]. La première condition requiert que toute G-orbite soit dense dans Y, et la seconde que toute adhérence de G-orbite dans $\mathcal{M}^1(Y)$ contienne une mesure de Dirac. Les arguments de [Rem03c, lemme 4.B.1] permettent de prouver :

Lemme 16. *Soit Λ un groupe de Kac-Moody dont les immeubles ont des appartements isomorphes à des pavages d'espaces hyperboliques. Alors le bord géodésique $\partial_\infty X_\pm$, au sens des espaces* CAT(-1)*, est une frontière de Furstenberg pour tout groupe fermé d'automorphismes de l'immeuble $X_\pm$ contenant $\overline{\Lambda}$.*

Si l'on se réfère au cas des groupes algébriques semi-simples sur des corps locaux (archimédiens ou non), l'existence de frontières de Furstenberg non homogènes est un phénomène nouveau. En effet, dans ce dernier cas toute frontière de Furstenberg est une image équivariante de la variété de drapeaux maximale du groupe en question (autrement dit, est une variété de drapeaux) [GJT98, 9.37]. Un lemme, dû à H. Furstenberg [Fur72, 4.4], affirme que si un groupe topologique G contient un sous-groupe P fermé moyennable et cocompact, alors toute frontière de Furstenberg est une image équivariante de G/P, en particulier est homogène. Nous en déduisons donc qu'à la différence des groupes de Lie avec leurs sous-groupes paraboliques minimaux, les groupes de Kac-Moody géométriquement complétés n'ont pas de sous-groupe cocompact moyennable en général.

3.5. **Coexistence de deux types de réseaux.** Nous refermons cette section en citant un résultat qui affirme que certains groupes de Kac-Moody géométriquement complétés contiennent des réseaux de natures différentes [RR02, proposition 4.B].

Proposition 17. *Il existe des groupes de Kac-Moody géométriquement complétés $\overline{\Lambda}$ sur $\mathbf{F}_q$ qui contiennent à la fois des réseaux non uniformes qui ne peuvent être linéaires sur aucun corps de caractéristique* 0 *ou première à q, et des réseaux uniformes qui admettent des plongements convexes-cocompacts dans des espaces hyperboliques réels. Le rang du groupe de Weyl de ces groupes $\overline{\Lambda}$ peut être choisi arbitrairement grand.*

Une conséquence de [BM96, corollaire 0.5 et proposition 1.7] est que si un groupe de Kac-Moody Λ est S-arithmétique et tel que $\overline{\Lambda}$ est un groupe de Lie simple de rang supérieur, alors un réseau de $\overline{\Lambda}$ fixe un point pour chacune de ses actions sur un espace propre CAT(-1) à groupe d'isométries cocompact. Par conséquent, le phénomène de coexistence du résultat ci-dessus est exclu dans la situation algébrique classique, à moins que l'immeuble de $\overline{\Lambda}$ soit un arbre, c'est-à-dire que le groupe de Weyl de Λ soit diédral infini (de rang 2 en tant que groupe de Coxeter).

4. Non linéarité en égale caractéristique

Compte tenu des résultats de non linéarité du théorème 8, les linéarités qu'il reste à exclure concernent les homomorphismes des groupes de Kac-Moody sur les corps finis de caractéristique p vers les groupes linéaires de même caractéristique. Pourtant, les groupes de Kac-Moody qui sont S-arithmétiques, tels que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[t,t^{-1}])$, sont évidemment linéaires en égale caractéristique. Par conséquent la question est plutôt, pour tout corps fini de caractéristique p, de trouver des exemples de groupes de Kac-Moody qui ne peuvent être linéaires sur des corps de caractéristique p non plus. L'idée principale est d'utiliser une propriété de super-rigidité (4.1) afin de montrer que l'existence d'un homomorphisme abstrait fidèle depuis un groupe de Kac-Moody de type fini vers un groupe algébrique, implique l'existence d'un plongement du groupe de Kac-Moody géométriquement complété correspondant vers un groupe simple non archimédien (4.2). On s'attend à ce que l'existence d'un tel plongement soit plus facile à réfuter parce qu'on obtient en même temps et à un niveau plus géométrique un plongement des sommets de l'immeuble de Kac-Moody (qu'on a la liberté de choisir exotique) vers un immeuble euclidien. Ceci permet de tirer parti de l'incompatibilité entre géométries hyperbolique et euclidienne. C'est effectivement le cas pour certains groupes de Kac-Moody dont les immeubles sont fuchsiens à angles droits (4.3). Le même cercle d'idées permet de montrer un résultat complémentaire : la plupart des images de représentations linéaires non fidèles des groupes de Kac-Moody de type fini sont virtuellement résolubles (4.4). En combinant l'existence de groupes non linéaires avec ce dernier résultat, on peut construire des groupes de Kac-Moody de présentation finie dont toutes les images linéaires sont finies (4.5).

4.1. **Super-rigidité du commensurateur.** Rappelons que le *commensurateur* d'une inclusion de groupes $\Delta \subset G$ est le groupe :

$$\mathrm{Comm}_G(\Delta) = \{g \in G \mid \Delta \cap g\Delta g^{-1} \text{ est d'indice fini à la fois dans } \Delta \text{ et dans } g\Delta g^{-1}\}.$$

Le théorème qui suit est essentiellement dû à G.A. Margulis [Mar91, VII.5.4], la formulation ci-dessous étant écrite dans [Bon03, théorème 1]. G.A. Margulis a prouvé le résultat quand G est un groupe semi-simple sur un corps local. Une liste, sans doute non exhaustive, de contributions ultérieures est la suivante : dans [AB94], le groupe semi-simple G est remplacé par un groupe contenant un sous-groupe moyennable $P \subset G$ au rôle analogue à celui d'un sous-groupe parabolique minimal ; dans [Bur95] l'existence de P est remplacée par l'existence d'un substitut de frontière de Furstenberg ; dans [BM02] de telles frontières sont construites pour des groupes G compactement engendrés ; enfin, le théorème de double ergodicité de [Kai02] montre qu'en fait des frontières convenables sont disponibles pour tout groupe localement compact et dénombrable à l'infini, grâce aux frontières de Poisson. Des approches différentes conduisent à des résultats similaires : dans [Mar94] au moyen d'applications harmoniques équivariantes et dans [Sha00] grâce à des arguments de théorie des représentations.

Théorème 18. *Soient G un groupe localement compact et dénombrable à l'infini, $\Gamma \subset G$ un réseau et Λ un sous-groupe de G tel que $\Gamma \subset \Lambda \subset \mathrm{Comm}_G(\Gamma)$. Soient k un corps local et H un groupe algébrique connexe presque k-simple. Supposons que $\pi : \Lambda \to H_k$ soit un homomorphisme tel que $\pi(\Lambda)$ soit dense pour la topologie de Zariski sur H et que $\pi(\Gamma)$ soit non borné pour la topologie de Hausdorff sur H_k, issue de celle de k. Alors π s'étend en un homomorphisme continu $\overline{\Lambda} \to H_k/Z(H_k)$, où $Z(H_k)$ désigne le centre de H_k.*

Un autre résultat de super-rigidité consiste à étendre les représentations de réseaux (plutôt que celles de leurs commensurateurs) en représentations continues du groupe topologique ambiant (et en fait en représentations algébriques quand cela a un sens, à savoir quand le groupe G est lui-même algébrique). C'est un résultat plus difficile à obtenir, qui requiert d'ailleurs des hypothèses plus fortes (par exemple, le fait que le groupe algébrique ambiant G est de rang supérieur) ; il est une fois encore dû à G.A. Margulis. Les premiers résultats en caractéristique positive ont été prouvés par T.N. Venkataramana [Ven88].

4.2. **Théorème de plongement.** Pour le théorème qui suit, nous nous sommes inspirés d'un papier d'A. Lubotzky, Sh. Mozes et R.J. Zimmer [LMZ94], où la super-rigidité est utilisée pour réfuter des linéarités de commensurateurs de réseaux d'arbres. Rappelons que les arbres (sans sommet terminal) sont des immeubles de dimension 1, et que la théorie de Kac-Moody produit des réseaux pour des immeubles de dimension arbitraire. Nous avons d'abord [RR02, 1.B lemme 2] :

Lemme 19. *Soit Λ un groupe de Kac-Moody sur $\mathbf{F}_q$ et soit Γ un fixateur de facette dans Λ. Alors on a l'inclusion : $\Lambda \subset \mathrm{Comm}_{\overline{\Lambda}}(\Gamma)$.*

Ce lemme montre qu'il est pertinent de penser à utiliser la super-rigidité du commensurateur pour contrôler les représentations linéaires d'un groupe de Kac-Moody de type fini grâce à des représentations à la structure plus riche. En effet, quand q est assez grand, Γ est un réseau de $\overline{\Lambda}$ (théorème 3). On obtient en fait [Rem03c, §3 théorème] :

Théorème 20. *Soit Λ un groupe de Kac-Moody sur le corps fini $\mathbf{F}_q$, de caractéristique p et à $q > 4$ éléments. On note W le groupe de Weyl, supposé infini, de Λ, et X_+ et X_- ses deux immeubles. Soit $\overline{\Lambda}$ le groupe de Kac-Moody géométriquement complété associé. Nous faisons les hypothèses suivantes.*

- (TS) *Le groupe $\overline{\Lambda}$ est topologiquement simple.*
- (NA) *Le groupe $\overline{\Lambda}$ est non moyennable.*
- (LT) *Le groupe Λ est un réseau de $X_+ \times X_-$ pour son action diagonale.*

Alors, si Λ est linéaire sur un corps de caractéristique p, il existe :
– un corps local k de caractéristique p et un k-groupe adjoint connexe k-simple $\mathbf{G}$;
– un plongement topologique $\mu : \overline{\Lambda} \to \mathbf{G}(k)$ d'image dense pour la topologie de Zariski sur $\mathbf{G}$ et non bornée pour la topologie Hausdorff sur $\mathbf{G}(k)$ issue de celle de k ;
– et un plongement μ-équivariant $\iota : \mathcal{V}_{X_+} \to \mathcal{V}_\Delta$ de l'ensemble des sommets de l'immeuble de Kac-Moody X_+ de Λ vers l'ensemble des sommets de l'immeuble de Bruhat-Tits Δ de $\mathbf{G}(k)$.

Les conditions (TS) et (LT) sont remplies dès que le groupe de Weyl W de Λ est irréductible et q est assez grand. La condition (NA) est discutée dans 6, où il est conjecturé qu'elle est en fait toujours satisfaite (Problème 34). Notons que la conclusion du théorème 18 fournit un prolongement continu mais il n'y a pas de raison évidente pour que cet homomorphisme continu soit une application fermée. En fait, il faut travailler encore un peu [Rem03c, lemme 3.C] pour prouver ce fait. Outre la simplicité topologique de $\overline{\Lambda}$, les arguments utilisés sont de nature combinatoire (essentiellement, la décomposition de Bruhat de $\overline{\Lambda}$ par rapport à un sous-groupe d'Iwahori).

4.3. **Groupes de Kac-Moody non linéaires.** Au moins dans le cas des groupes de Kac-Moody dont les immeubles sont fuchsiens à angles droits, on peut montrer que les groupes topologiques associés ne peuvent être sous-groupes fermés d'aucun groupe de Lie simple non archimédien. Cela implique la non linéarité complète des groupes de Kac-Moody de type fini en question [Rem03c, théorème 4.C.1].

Théorème 21. *Soit Λ un groupe de Kac-Moody sur $\mathbf{F}_q$ dont les immeubles sont fuchsiens à angles droits. Supposons que pour toute paire prénilpotente de racines non contenue dans un sous-système de racines sphérique, les groupes radiciels correspondants commutent. Alors, pour q assez grand le groupe Λ n'est linéaire sur aucun corps.*

La prénilpotence des paires de racines relève de la théorie des systèmes de racines abstraits des groupes de Coxeter [Tit87], [Rem02b, 1.4.1] : en voyant les racines comme des demi-appartements, une paire de racines est prénilpotente si et seulement si les murs des racines se coupent ou si une racine contient l'autre. La condition sur les commutations de groupes radiciels est technique, mais elle n'est en réalité pas très restrictive et une hypothèse plus faible peut être faite – voir la remarque suivant [Rem03c, lemme 4.A.2].

L'idée principale à ce stade est de contourner la non existence de structure algébrique sur $\overline{\Lambda}$ grâce à des arguments dynamiques. Il s'agit de montrer que par le prolongement continu $\mu : \overline{\Lambda} \to \mathbf{G}(k)$, les sous-groupes paraboliques de $\overline{\Lambda}$ vont s'envoyer sur des sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}(k)$. Dans le cas des immeubles hyperboliques, on commence par définir les sous-groupes paraboliques de $\overline{\Lambda}$ par analogie géométrique avec les espaces symétriques ou les immeubles de Bruhat-Tits : on pose que ces groupes sont les fixateurs dans $\overline{\Lambda}$ des points du bord $\partial_\infty X_+$ de l'immeuble X_+. Dans le cas des groupes algébriques $\mathbf{G}(k)$, G. Prasad [Pra77, lemme 2.4] a mis en évidence une caractérisation des sous-groupes paraboliques et de leurs radicaux unipotents en termes de dynamique d'éléments semi-simples bien choisis. Ce sont ces critères qu'on utilise pour montrer que μ respecte ces classes de sous-groupes [Rem03c, lemme 4.B.2]. La contradiction vient du fait que dans $\overline{\Lambda}$ les analogues de radicaux unipotents ne sont par normalisés par les sous-groupes paraboliques, alors qu'ils le sont par définition dans le cas algébrique classique. Un argument essentiel dans cet enchaînement est la différence entre la très forte dynamique d'un groupe fuchsien, virtuellement libre non abélien, sur le bord du plan hyperbolique, avec l'action, via un quotient fini, d'un groupe de réflexions euclidien sur le bord du pavage qui l'engendre.

4.4. **Résolubilité virtuelle des images linéaires non fidèles.** Dans 4.2, le point de départ est une représentation linéaire fidèle d'un groupe de Kac-Moody de type fini. Partir d'une représentation linéaire non injective est tout aussi intéressant, puisque dans ce cas on peut montrer que les images sont résolubles à indice fini près. En d'autres termes, quand le noyau est non trivial, il est « gros » [Rem03a, théorème 11] :

Théorème 22. *Soit Λ un groupe de Kac-Moody à diagramme de Dynkin connexe, défini sur un corps fini $\mathbf{F}_q$ de caractéristique p, avec q assez grand. Soit $\rho : \Lambda \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$ une représentation dans un groupe linéaire sur un corps $\mathbf{F}$. Alors, si ρ est non injective, le groupe $\rho(\Lambda)$ est virtuellement résoluble. En particulier, si Λ a la propriété de Kazhdan, alors le groupe $\rho(\Lambda)$ est fini.*

Rappelons que par le théorème 6, beaucoup de groupes de Kac-Moody sur $\mathbf{F}_q$ ont la propriété (T) de Kazhdan quand q est assez grand. Le théorème ci-dessus se prouve avec des arguments du même type que ceux utilisés pour le théorème 20. Afin de pouvoir appliquer le théorème 18, il faut prendre l'adhérence de Zariski de l'image $\rho(\Lambda)$ et diviser par le radical $R\big(\overline{\rho(\Lambda)}^Z\big)$ du groupe algébrique ainsi obtenu. Il suffit ensuite de montrer que l'image de Λ dans $\overline{\rho(\Lambda)}^Z / R\big(\overline{\rho(\Lambda)}^Z\big)$ est finie, ce qui peut se faire grâce au théorème de Burnside [Jac89, 4.5, Exercise 8]. Enfin, un moyen de remplir la condition de non bornitude dans la topologie Hausdorff pour l'image de Λ est d'utiliser des astuces du papier de J. Tits sur l'existence de groupes libres dans les groupes linéaires [Tit72]. Pour ce résultat aussi, nous sommes très redevables des idées que nous avons pu trouver dans [LMZ94].

4.5. **Groupes dont les images linéaires sont finies.** On peut finalement utiliser le résultat précédent pour mettre en évidence une classe de groupes de Kac-Moody de type fini, dont les immeubles associés sont hyperboliques et dont toutes les images linéaires sont finies [Rem03a, théorème 16] :

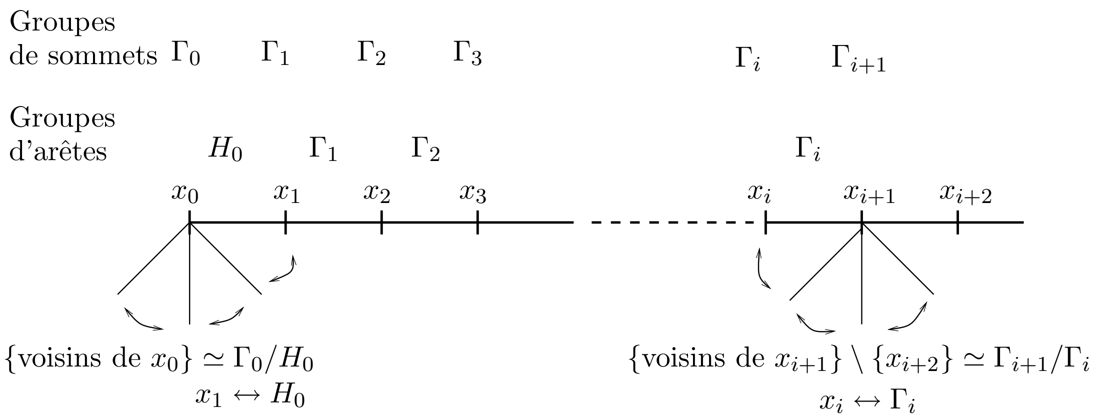
Théorème 23. *Il existe un entier N tel que pour tout groupe de Kac-Moody Λ sur $\mathbf{F}_q$ dont les immeubles ont des appartements isomorphes au pavage du plan hyperbolique par ses triangles réguliers d'angle $\frac{\pi}{4}$, si $q \geq N$ alors toute image linéaire de Λ est finie, quel que soit le corps de base à l'arrivée.*

L'énoncé est encore vrai si l'on remplace un, deux ou trois des angles $\frac{\pi}{4}$ de la chambre fondamentale par des angles $\frac{\pi}{6}$. La preuve est en gros la suivante. Par le théorème 22, il suffit de voir que les groupes comme dans l'énoncé ne sont linéaires sur aucun corps, tout en possédant la propriété (T). Cette dernière propriété est une conséquence du théorème 6 ; en outre, des arguments de données radicielles jumelées montrent que ces groupes contiennent des sous-groupes de type Kac-Moody, qui sont non linéaires parce que la preuve du théorème 21 s'applique à eux.

5. Arithméticité de réseaux d'arbres non uniformes

Nous exposons dans cette section un travail commun avec P. Abramenko [AR03], portant sur l'arithméticité des réseaux d'arbres. C'est une notion bien connue quand le groupe ambiant est un groupe algébrique sur un corps local [Zim84, Definitions 6.1.1 and 10.1.11], et d'après un critère de G.A. Margulis, un réseau de groupe de Lie semi-simple est arithmétique si et seulement si son commensurateur est dense [Zim84, théorème 6.2.5]. En général, pour l'inclusion $\Delta \subset G$ d'un sous-groupe discret dans un groupe localement compact G, on pose que Δ est *arithmétique dans* G si $\mathrm{Comm}_G(\Delta)$ est dense dans G. Quand G est le groupe d'automorphismes d'une géométrie, on compte sur cette géométrie pour prouver l'arithméticité de réseaux bien choisis. Par exemple, tout réseau cocompact d'arbre est arithmétique [Liu94]. Sh. Mozes a prouvé le premier résultat d'arithméticité d'un réseau non uniforme : le commensurateur du réseau de Nagao $\mathrm{PSL}_2\big(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t^{-1}]\big)$ est dense dans le groupe d'automorphismes complet de l'arbre de Bruhat-Tits de valence $p+1$, un groupe bien plus gros que $\mathrm{PSL}_2\big(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(\!(t)\!)\big)$. En retravaillant la preuve de [Moz99], nous prouvons des résultats de densité pour une classe de réseaux d'arbres non uniformes (5.1). Cette classe est assez large pour que certains des arbres considérés ne puissent provenir d'aucun groupe algébrique ou de Kac-Moody. En fait, les réseaux considérés ne sont linéaires sur aucun corps en général (5.2).

5.1. **Réseaux de type Nagao et automorphismes préservant le niveau.** Les réseaux de type Nagao ont été introduits par H. Bass et A. Lubotzky [BL01, §10] et nos résultats portent sur une certaine sous-classe de ceux-ci. Soit R un rayon infini de sommets $\{x_i\}_{i\geq 0}$. À chaque sommet x_i nous associons un groupe fini Γ_i de sorte que $\Gamma_i \subset \Gamma_{i+1}$ pour tout $i > 0$. Nous nous donnons un sous-groupe H_0 commun à Γ_0 et à Γ_1. Nous posons $k = [\Gamma_0 : H_0]$, $q_0 = k-1$, $q_1 = [\Gamma_1 : H_0]$ et $q_i = [\Gamma_i : \Gamma_{i-1}]$ pour $i \geq 2$; nous supposons $q_i \geq 2$ pour tout $i \geq 0$. De façon à définir un graphe de groupes, nous attachons H_0 à l'arête $\{x_0, x_1\}$ et Γ_i à $\{x_i, x_{i+1}\}$ pour $i > 0$.



Notons Γ le groupe fondamental et T l'arbre de Bass-Serre associés à ce graphe de groupes [Ser77, I.5.1], de sorte que Γ agit sur T avec R comme domaine fondamental. Pour chaque $i \geq 0$, on a $\mathrm{Stab}_\Gamma(x_i) \simeq \Gamma_i$ et $\mathrm{Stab}_\Gamma([x_0; x_1]) \simeq H_0 = \Gamma_0 \cap \Gamma_1$. Chaque sommet x est dans une Γ-orbite $\Gamma.x_i$ pour un $i \geq 0$ bien défini, que nous appelons le *niveau* de x et notons $\ell(x) = i$. Géométriquement, le niveau, restreint au rayon R, coïncide avec l'opposé de la fonction de Busemann associée à R [BH99, II.8.17]. Le groupe Γ ainsi défini est un *réseau de type Nagao* et nous disons que Γ est *de type Nagao commutativement scindé* s'il existe des sous-groupes H_0-invariants $U_j \subset \Gamma_j$ tels que $\Gamma_i \simeq H_0 \ltimes (U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_i)$ pour tout $i > 0$. Nous notons $G = \mathrm{Aut}(T)$ le groupe de tous les automorphismes de T, muni de sa topologie compacte ouverte (une base de voisinages de l'identité est donnée par les fixateurs de parties finies de T). Enfin, nous introduisons le sous-groupe $L = \{g \in G \mid \ell(g.x) = \ell(x)$ pour tout sommet $x \in T\}$.

Théorème 24. *Soient T un arbre et Γ un réseau de type Nagao commutativement scindé comme ci-dessus.*

(i) *Le groupe $C(\Gamma) \cap L$ est dense dans le groupe L des automorphismes préservant le niveau.*

(ii) *Si T est birégulier et si $C(\Gamma)$ n'est pas contenu dans L, alors l'adhérence de $C(\Gamma)$ dans G contient le sous-groupe G° d'indice 2 dans G des éléments préservant le type des sommets.*

Pour ce qui est de la preuve, la modification la plus significative par rapport à [Moz99] est le remplacement de la description des automorphismes en termes d'actions locales autour des sommets par des arguments plus calculatoires. Notre approche est moins géométrique, mais elle permet de traiter le cas où les groupes U_j sont non triviaux quelconques, alors que dans $\mathrm{PSL}_2\big(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t^{-1}]\big)$ ces groupes sont cycliques d'ordre p.

5.2. **Cas des arbres jumelés de Moufang.** Les arbres jumelés de Moufang généralisent les immeubles associés aux groupes de Kac-Moody de rang 2 de type non sphérique [RT94], [RT99]. Si $(T_\pm, \delta^*)$ est un arbre jumelé de Moufang et si A désigne le groupe d'automorphismes de δ^*, alors la preuve du théorème 3 montre que le stabilisateur dans A d'un sommet v_- de l'arbre négatif T_- est un réseau de T_+ dont un domaine fondamental est un rayon géodésique. Cela permet de voir le stabilisateur $\mathrm{Stab}_A(v_-)$, que nous noterons dorénavant Γ, comme un réseau de type Nagao de T_+. Le réseau Γ est commutativement scindé dès que l'hypothèse suivante est vérifiée :

(Comm) : pour toute paire prénilpotente de racines $\{a; b\}$, les groupes radiciels U_a et U_b commutent.

Théorème 25. *Si l'arbre jumelé épais de Moufang $(T_\pm, \delta^*)$ satisfait* (Comm) *et si Γ est un réseau de T_+ comme ci-dessus, alors l'adhérence de $C(\Gamma)$ contient G°. Par conséquent, $C(\Gamma)$ est dense dans G si T_+ n'est pas régulier ou encore si T_+ est régulier et A contient un automorphisme qui intervertit les types de sommets.*

Il existe une grande variété d'arbres jumelés de Moufang [AR03, exemples 66-70]. Un de nos arbres jumelés favoris est constitué de deux arbres de valence 7, c'est-à-dire à groupes radiciels d'ordre 6. En effet, le fait que la valence ne soit le cardinal d'aucune droite projective implique que l'arbre n'est associé à aucun groupe algébrique ou de Kac-Moody ; et le cardinal des groupes radiciels implique que Γ ne peut être linéaire sur aucun corps [loc. cit., exemple 69] : nous obtenons donc un réseau d'arbre paradoxalement non linéaire, mais arithmétique en un sens généralisé.

Nos résultats portent pour l'instant sur les arbres, mais on peut imaginer des généralisations aux immeubles de dimension supérieure :

Question 26. *Soit X_+ l'immeuble positif d'un groupe de Kac-Moody Λ sur $\mathbf{F}_q$. Est-ce qu'un fixateur de facette négative dans Λ est arithmétique dans $\mathrm{Aut}(X_+)$? Plus généralement, quels réseaux, pas nécessairement issus de la théorie de Kac-Moody, sont arithmétiques dans $\mathrm{Aut}(X_+)$?*

Bien entendu ces questions n'ont d'intérêt que pour des immeubles où $\mathrm{Aut}(X_+)$ est significativement plus gros que $\overline{\Lambda}$, par exemple pour les immeubles fuchsiens à angles droits. Un argument en faveur d'une réponse positive à la première question est le suivant. Une idée importante dans la preuve de [Moz99] est de se ramener, pour les réseaux non uniformes, au résultat de densité de Y. Liu sur les réseaux cocompacts. Grâce à des travaux de F. Haglund, on sait que les réseaux uniformes de certains immeubles hyperboliques sont arithmétiques [Hag03], ce qui donne une généralisation de [Liu94] en dimension supérieure.

6. Conjectures, travaux en cours, projets

Dans cette dernière section, nous formulons un certain nombre de conjectures et de problèmes, portant à la fois sur les groupes de Kac-Moody de type fini (6.1) et sur les groupes de Kac-Moody géométriquement complétés (6.2). Dans les deux cas se posent naturellement des questions de simplicité abstraite. On expose aussi des travaux en cours en commun avec Y. Guivarc'h sur les compactifications d'immeubles de Bruhat-Tits, car on peut imaginer que les résultats obtenus dans ce cadre classique aideront à améliorer certains résultats de non linéarité (6.3).

6.1. **Groupes de type fini.** Nous traitons d'abord les non linéarités puis nous nous intéressons au problème plus difficile de la simplicité.

6.1.1. *Non linéarités.* Pour les groupes de Kac-Moody discrets, on peut imaginer un résultat plus fort que celui déjà prouvé (théorème 21). Vu la nature dynamique des arguments de la preuve, on se risque à la conjecture suivante.

Conjecture 27. *Si le groupe de Weyl W est hyperbolique au sens de Gromov et si q est assez grand, alors le groupe de Kac-Moody de type fini Λ n'est linéaire sur aucun corps.*

Rappelons que si un groupe de Coxeter est Gromov-hyperbolique, il opère en fait proprement discontinûment sur un espace CAT(-1), avec un quotient compact. Cet espace est obtenu par recollement de cellules et est en général plus compliqué qu'un pavage hyperbolique [Mou88]. Des arguments sur la combinatoire des systèmes de racines devraient pallier à cet inconvénient géométrique, et ils devraient aussi permettre de se débarasser de l'hypothèse technique sur les paires prénilpotentes dans le théorème 21. Une autre question technique est la suivante :

Question 28. *L'hypothèse «q assez grand» est-elle superflue pour certains des résultats de non linéarité ?*

Autrement dit : existe-t-il une matrice de Cartan généralisée A et un nombre premier p tel que le groupe de Kac-Moody correspondant Λ soit linéaire avec le corps de base $\mathbf{Z}/p$ mais ne le soit plus en prenant pour corps de base $\mathbf{F}_{p^r}$ pour r assez grand ? Pour que Λ soit un réseau du produit de ses immeubles ou pour que $\overline{\Lambda}$ soit topologiquement simple – des faits cruciaux dans notre preuve, la valeur de q est déterminante (théorème 3). Par conséquent, si la réponse est oui, la non linéarité nécessitera de nouveaux arguments. En outre, un contre-exemple dû à P. Abramenko montre que pour les immeubles dont les chambres sont des triangles hyperboliques réguliers d'angle $\frac{\pi}{4}$, les fixateurs de facettes dans certains groupes sur $\mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_3$ ne sont pas de type fini [Abr03, contre-exemple 1], donc ne peuvent avoir la propriété (T) [Mar91, théorème III.2.7] ; mais pour q assez grand les groupes sur $\mathbf{F}_q$ sont de Kazhdan (théorème 6).

Le problème le plus intéressant de non linéarité semble être le suivant :

Problème 29. *Trouver une condition nécessaire et suffisante de non linéarité d'un groupe de Kac-Moody impliquant seulement la matrice de Cartan généralisée définissant le groupe.*

Bien entendu, si la matrice de Cartan généralisée A est affine, le groupe associé est linéaire car S-arithmétique. Une reformulation optimiste de la question est : les groupes de type affine sont-ils les seuls exemples linéaires (pour q assez grand) ?

6.1.2. *Simplicité.* On peut voir les non-linéarités comme la possibilité de se poser des questions de pure théorie des groupes de type fini. Commençons par rappeler deux notions : un groupe de type fini est dit *résiduellement fini* si l'intersection de ses sous-groupes d'indice fini est triviale (le groupe s'injecte dans sa complétion profinie), et il est dit *juste infini* si tout sous-groupe distingué non trivial est d'indice fini (tous les quotients propres du groupe sont finis). Un théorème de Mal'cev affirme qu'un groupe linéaire de type fini est résiduellement fini, et un théorème plus difficile de

Margulis dit que les sous-groupes normaux des réseaux irréductibles des groupes de Lie semi-simples de rang ≥ 2 sont ou bien d'indice fini ou bien finis car centraux (en particulier, ces réseaux sont juste infinis quand le groupe algébrique ambiant est adjoint) [Mar91, VIII.2.6]. La preuve de ce théorème utilise des arguments ergodiques dans la même veine que les preuves de super-rigidité et d'arithméticité. Notons que pour les groupes infinis la finitude résiduelle est une propriété en quelque sorte opposée à la simplicité (puisqu'elle implique l'existence de beaucoup de sous-groupes distingués), et voyons en quoi ces notions sont utiles pour discuter la question qui nous intéresse le plus sur les groupes de Kac-Moody de type fini.

Question 30. *Existe-t-il des groupes de Kac-Moody infinis de type fini qui soient simples ? En existe-t-il qui soient en outre de présentation finie ?*

D'une part, les groupes de Kac-Moody affines comme $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[t,t^{-1}])$ ne donneront rien puisqu'étant S-arithmétiques, et donc linéaires, ils sont résiduellement finis d'après Mal'cev. D'autre part, grâce à un résultat de J.S. Wilson on peut prouver la réduction suivante :

Lemme 31. *Soit Λ un groupe de Kac-Moody juste infini sur $\mathbf{F}_q$ avec $q \geq 4$, et à groupe de Weyl irréductible. Alors si Λ est non résiduellement fini, il contient un sous-groupe d'indice fini qui est simple.*

Preuve. Introduisons le groupe N, intersection des sous-groupes d'indice fini : $N = \bigcap_{[\Lambda:\Delta]<\infty} \Delta$. Comme Λ est non résiduellement fini, on a par définition : $N \neq \{1\}$, et comme Λ est juste infini, on a : $N \lhd \Lambda$ avec $[\Lambda : N] < \infty$. D'après [Wil71, proposition 1], le groupe N est produit direct fini de sous-groupes simples deux à deux isomorphes ; il suffit donc de montrer que ce produit ne comporte qu'un facteur non trivial. Supposons qu'on en ait deux, disons H et G. Par simplicité topologique de Λ (théorème 15), on a d'abord $\overline{N} = \overline{\Lambda}$ car $N \lhd \Lambda$, et puis $\overline{G} = \overline{H} = \overline{\Lambda}$. Prenons alors deux éléments g et h dans $\overline{\Lambda}$ qui ne commutent pas, et écrivons-les : $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ et $h = \lim_{n\to\infty} h_n$, avec $g_n \in G$ et $h_n \in H$ pour tout $n \geq 1$. Nous obtenons une contradiction en écrivant : $[g,h] = \lim_{n\to\infty} [g_n, h_n] = 1$. □

Cela rend les questions de non finitude résiduelle et de simplicité virtuellement équivalentes, modulo la propriété d'être juste infini. On peut penser que certains groupes de Kac-Moody jouissent de cette propriété, par exemple ceux dont toutes les images linéaires sont finies, car pour eux on sait déjà traiter les sous-groupes normaux qui sont noyaux d'une représentation linéaire. En fait, en regardant la preuve du théorème du sous-groupe normal de G.A. Margulis ci-dessus, on voit que les groupes de Kac-Moody qui ont la propriété (T) sont de bons candidats pour être juste infinis. En outre, le fait que les chambres des immeubles soient des simplexes, qui est une condition suffisante pour être (T) quand q est assez grand, est aussi une condition suffisante pour être de présentation finie.

Parmi les arguments qui appuient cette approche, on a déjà signalé en introduction le travail de M. Burger et Sh. Mozes sur les réseaux de produits d'arbres. Ils prouvent le théorème du sous-groupe normal pour certains de ces réseaux, et d'autres propriétés qui les rendent proches de réseaux irréductibles de produits de groupes de Lie, mais la possibilité d'obtenir des réseaux non résiduellement finis permet de produire les premiers groupes simples de présentation finie sans torsion [BM97], [BM00a], [BM00b]. Répétons aussi que les travaux de Y. Shalom montrent que beaucoup peut être dit sur les réseaux irréductibles de produits de groupes localement compacts [Sha00].

6.2. **Groupes totalement discontinus.** En ce qui concerne les groupes topologiques, les questions de simplicité topologique sont elles aussi pertinentes. On peut chercher à savoir si les pro-p sous-groupes de Sylow sont linéaires, et on conjecture que les groupes de Kac-Moody géométriquement complétés, comme les groupes algébriques semi-simples, ne sont jamais moyennables. Enfin, sortant du cercle des problèmes évoqués dans ce mémoire, on peut chercher à comparer les groupes de

Kac-Moody géométriquement complétés aux groupes de Kac-Moody définis par les spécialistes de théorie des représentations et de variétés de Schubert.

6.2.1. *Pro-p groupes.* L'étude des groupes de Kac-Moody géométriquement complétés (section 3) a fait apparaître une classe intéressante de pro-p sous-groupes, les pro-p sous-groupes de Sylow des sous-groupes parahoriques. En termes de ces groupes, un autre moyen de réfuter certaines linéarités serait de répondre à la question suivante :

Question 32. *Quels groupes de Kac-Moody géométriquement complétés contiennent des pro-p sous-groupes non linéaires ?*

Même si on oublie les conséquences sur les groupes de Kac-Moody de type fini, la question est intéressante en soi. Rappelons qu'un groupe *profini* est un groupe compact K dont les sous-groupes ouverts forment une base de voisinages de l'identité [DdSMS99, définition 1.1], et qu'alors K est topologiquement isomorphe à $\varprojlim K/N$, où N parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts normaux de K [loc. cit., proposition 1.3]. Un *pro-p groupe* est un groupe profini dont tous les sous-groupes normaux ouverts sont d'indice une puissance du nombre premier p [loc. cit., definition 1.10]. Enfin, le pro-p groupe libre sur un ensemble fini de générateurs X est le complété pro-p du groupe libre (discret) sur X ([loc. cit., §1 exercice 20] et [Ser94, I.1.5]). Pour revenir aux questions de linéarité, celle des pro-p groupes libres est une question qui n'admet à ce jour que des réponses partielles (E. Zelmanov, Amitsur Algebra seminar (Jérusalem), exposé du 10 janvier 2002 : un pro-p groupe libre non abélien n'est pas un groupe de matrices $n \times n$ quand p est grand devant n).

6.2.2. *Simplicité abstraite.* Dans le cas affine, les groupes de Kac-Moody géométriquement complétés correspondent aux points rationnels des groupes semi-simples adjoints. On peut donc, par analogie, poser la question suivante :

Question 33. *Est-ce qu'un groupe de Kac-Moody géométriquement complété à diagramme de Dynkin connexe est un groupe abstraitement simple ?*

Bien entendu, sans hypothèse sur le diagramme de Dynkin, une décomposition en produit direct de facteurs abstraitement simples découlerait immédiatement d'une réponse positive à la question. Nous notons que le théorème 15 est seulement un résultat de simplicité topologique, et qu'au début des années 80, R.V. Moody avait déjà des résultats de simplicité abstraite pour des groupes de Kac-Moody géométriquement complétés en caractéristique 0 [Moo82]. F. Haglund et F. Paulin, en généralisant la preuve de J. Tits de la simplicité de groupes automorphismes d'arbres [Tit70], ont montré la simplicité abstraite de groupes fermés d'automorphismes d'immeubles hyperboliques vérifiant certaines propriété d'indépendance [HP98, théorèmes 1.1 and 1.2].

6.2.3. *Non moyennabilité.* Dans deux cas importants, les groupes de Kac-Moody géométriquement complétés $\overline{\Lambda}$ ne sont pas moyennables. Comme c'est aussi le cas des groupes de Lie simples non compacts, on pose le problème suivant.

Problème 34. *Montrer que les groupes de Kac-Moody géométriquement complétés ne sont jamais moyennables.*

Résoudre ce problème, même pour q assez grand, permettrait de faire disparaître l'hypothèse (NA) dans l'énoncé du théorème 20. On peut répondre quand le groupe de Weyl W de Λ est Gromov-hyperbolique, ou encore quand le groupe $\overline{\Lambda}$ est de Kazhdan. Ce dernier cas est clair car les groupes à la fois moyennables et (T) sont compacts [Zim84, corollaire 7.1.9], ce qui implique par courbure ≤ 0 d'avoir un point fixe dans les immeubles sur lesquels on opère [Bro89, VI.4] : contradiction avec la transivité sur les chambres de l'action de Λ sur X_+. Le cas des groupes de Weyl hyperboliques découle d'un lemme de Furstenberg pour les espaces CAT(-1) [BM96, lemme 2.3] – voir [Rem03c, introduction de §3] pour les détails.

6.2.4. *Comparaison de groupes de Kac-Moody.* Il existe un autre procédé de construction de groupes de Kac-Moody, qui conduit à des groupes utilisés par les spécialistes de variétés de Schubert et de théorie des représentations [Kum02], [Mat88]. Sur le corps des nombres complexes **C**, ces groupes jouissent de bonnes propriétés combinatoires, toutefois pas aussi riches que les combinatoires symétriques des données radicielles jumelées : la combinatoire dissymétrique de système de Tits raffiné est la plus intéressante [Kum02, théorème 6.2.8]. En quelque sorte, ce que l'on perd en combinatoire, on le gagne en structure de géométrie algébrique. En fait, on présente souvent ces nouveaux groupes de Kac-Moody comme des «complétions» : on peut dire qu'ils sont aux groupes de Kac-Moody jusqu'ici considérés ce que les groupes $\mathbf{G}\big(\mathbf{K}(\!(t)\!)\big)$ sont auxgroupes $\mathbf{G}(\mathbf{K}[t,t^{-1}])$. Plus précisément, dans le cas affine les groupes de Kac-Moody complétés sont les groupes $\mathbf{G}\big(\mathbf{K}(\!(t)\!)\big)$ à au plus deux extensions par $\mathbf{K}^\times$ près [Tit89a, §1.5], et par construction leurs sous-groupes de Borel sont des extensions de groupes pro-unipotents par des tores [Kum02, 6.1.1, p.175]. Nous appelerons ces groupes des groupes de Kac-Moody *algébriquement complétés*.

Il existe en fait plusieurs définitions des groupes de Kac-Moody algébriquement complétés et le problème de leur identification entre eux n'est, semble-t-il, pas complètement résolu [Kum02, 6.C pp. 196-197]. Nous nous intéressons au problème du lien entre les groupes de Kac-Moody de type fini et les groupes de Kac-Moody comme ci-dessus. Le point de départ est que les groupes de Kac-Moody algébriquement complétés définis par O. Mathieu possèdent une structure d'ind-schéma en groupes défini sur **Z** [Mat89].

Problème 35. *Montrer que sur un corps, un groupe de Kac-Moody défini par O. Mathieu possède un système de Tits raffiné.*

Ce problème résolu, on obtiendrait naturellement pour un corps de base fini une action d'un tel groupe sur un immeuble localement fini [Ron89, chap. 5]. Notre question principale est alors :

Question 36. *Étant donnés une matrice de Cartan généralisée et un corps fini, on note Λ un groupe de Kac-Moody associé, défini par J. Tits au moyen d'une présentation à la Steinberg* [Tit87]*. Est-ce que le groupe de Kac-Moody géométriquement complété $\overline{\Lambda}$ et l'image du groupe d'O. Mathieu par l'action sur son immeuble sont isomorphes ?*

Ces questions ont un sens sur un corps de base quelconque (notons que du côté des groupes géométriquement complétés, la topologie dans laquelle une base de voisinages de l'identité est donnée par les fixateurs de parties bornées, n'est pas localement compacte). Une réponse affirmative donnerait un sens plus précis à l'affirmation selon laquelle les groupes de Kac-Moody des géomètres algébristes sont des complétions des groupes de Kac-Moody définis par générateurs et relations. Réciproquement, on peut essayer d'exploiter des résultats provenant de la structure combinatoire de donnée radicielle jumelée (par exemple, la décomposition des fixateurs de partie équilibrées [Rem02b, 6.4]) en théorie des représentations, des variétés de Schubert et de leurs généralisations.

6.3. **Compactifications d'immeubles.** Nous allons citer les principaux résultats d'un travail commun avec Y. Guivarc'h portant sur les compactifications d'immeubles de Bruhat-Tits [GR03] et fondé sur une analogie avec le cas des espaces symétriques [GJT98]. Nous avons en vue d'appliquer ces résultats aux problèmes de linéarité évoqués ci-dessus.

6.3.1. *Les compactifications pour elles-mêmes.* Pour les espaces symétriques, beaucoup de procédés de compactification sont disponibles : la *compactification géodésique*, dont le bord est défini en termes de classes d'équivalence de rayons géodésiques par un procédé valable pour tout espace métrique propre à courbure négative ou nulle ; les *compactifications de Furstenberg*, définies à partir d'un plongement de l'espace symétrique dans l'espace compact des probabilités sur une variété de drapeaux du groupe des isométries ; les *compactifications de Satake*, définies à partir de projectivisations de représentations de plus haut poids ; la *compactification par les sous-groupes fermés*, définie en voyant l'espace symétrique comme l'ensemble des sous-groupes compacts maximaux du groupe d'isométries, c'est-à-dire comme une partie de l'espace des sous-groupes fermés (qui est compact pour la topologie de Chabauty) ; les *compactifications de Martin*, qui par la théorie du potentiel plongent l'espace symétrique dans un espace de fonctions propres pour le laplacien.

Nous donnons un sens aux compactifications de Furstenberg et par les sous-groupes fermés des immeubles de Bruhat-Tits. Une difficulté technique est de contourner la non-transitivité de certains sous-groupes parahoriques (c'est-à-dire compacts) maximaux sur les variétés de drapeaux maximales. Nous identifions de façon équivariante ces compactifications avec la compactification polyédrique définie par E. Landvogt par des moyens très combinatoires [Lan96]. Ce dernier procédé utilise des recollements de compactifictions d'appartements et pour ce faire est plutôt «consommateur» de résultats de structure, alors qu'à notre sens les compactifications devraient être des moyens de formuler et de prouver de tels résultats. Nous utilisons en effet les compactifications pour paramétrer des classes intéressantes de sous-groupes fermés des groupes semi-simples sur les corps locaux. D'abord, nous caractérisons les groupes qui apparaissent lors du passage à l'adhérence de l'ensemble des sous-groupes compacts maximaux dans les sous-groupes fermés (munis de la topologie de Chabauty) : ce sont les sous-groupes jouissant de la propriété de *distalité* dans toutes les représentations du groupe algébrique ambiant. La distalité est une notion de dynamique topologique qui dit que l'action du groupe ne contracte ni ne dilate les distances le long d'aucune orbite de paire de points distincts – c'est en quelque sorte l'opposé de la proximalité. Ensuite, nous caractérisons les stabilisateurs de points pour l'action du groupe semi-simple sur la compactification : ce sont les sous-groupes moyennables d'adhérence de Zariski connexe maximaux pour ces deux propriétés. Ce résultat est une extension d'un théorème de base de théorie de Bruhat-Tits établissant par un lemme de point fixe un dictionnaire équivariant entre sous-groupes compacts maximaux et sommets de l'immeuble euclidien associé. C'est aussi la réponse à une question de H. Furstenberg sur la caractérisation en termes de moyennabilité et le paramétrage géométrique d'une classe fermée de sous-groupes fermés contenant à la fois les sous-groupes paraboliques minimaux et les sous-groupes compacts maximaux (dans le cas archimédien, qui est notre fil conducteur, la réponse est due à C.C. Moore [Moo79, introduction]).

Un projet est de donner un sens aux compactifications de Martin évoquées ci-dessus pour les espaces symétriques. Cela devrait déboucher sur des résultats très intéressants au vu de ce qui est connu dans ce dernier cas. En effet, quand le groupe de Lie est de rang ≥ 2, les compactifications géodésique et de Furstenberg-Satake des espaces symétriques ne coïncident pas. Les comportements des suites fuyantes dans une chambre de Weyl qui convergent après compactification ne sont pas du tout les mêmes : dans la première compactification, on a un paramétrage radial des points au bord, alors que dans la seconde ce sont les distances aux murs qui paramètrent les points-limites. Dès que l'on travaille avec une valeur propre du laplacien strictement supérieure au bas du spectre, la compactification de Martin obtenue est la plus petite compactification qui domine à la fois les deux compactifications classiques : géodésique et de Furstenberg-Satake. Nous nous attendons au même résultat pour les immeubles ; les preuves utiliseront de l'analyse sphérique p-adique à la Macdonald [Mac71]. Nous avons déjà commencé à réfléchir dans le cas de $\mathrm{GL}(n)$. C'est un cas particulier très favorable car tous les sommets de l'immeuble sont spéciaux (les sous-groupes compacts maximaux correspondants sont transitifs sur la frontière de Furstenberg maximale). Dans le cas général, l'existence de sous-groupes compacts maximaux non transitifs est une obstruction à l'existence d'une paire de Gelfand (la preuve de la commutativité de l'algèbre de Hecke pour les bons sous-groupes compacts maximaux est déjà plus détournée que dans le cas réel [Mac71]). Une question intéressante est de comprendre le lien avec le laplacien combinatoire de Garland, car c'est un outil géométrique redevenu très populaire pour mettre en évidence des annulations de cohomologie (et donc la propriété (T) de Kazhdan) pour des groupes opérant sur des complexes simpliciaux généraux.

6.3.2. *Lien avec les groupes de Kac-Moody.* Voici maintenant le lien espéré entre les deux problèmes. Après avoir obtenu par super-rigidité un plongement de groupe de Kac-Moody géométriquement complété dans un groupe de Lie simple sur un corps local, on peut espérer obtenir une contradiction au niveau géométrique, c'est-à-dire grâce au plongement équivariant des sommets d'un immeuble (choisi exotique) dans les sommets d'un immeuble de Bruhat-Tits. En effet, en voyant l'immeuble de Bruhat-Tits dans sa compactification de Furstenberg-Satake, on peut obtenir une compactification d'un immeuble hyperbolique par prise d'adhérence de l'image du plongement des sommets. Cela devrait poser problème au moins dans les cas où du côté hyperbolique les sommets s'accumulent au bord (par exemple quand le groupe de Weyl est un groupe fuchsien cocompact) : l'intersection de l'adhérence des sommets avec le bord de la compactification est connexe dans le cas hyperbolique alors qu'elle est disconnexe dans le cas Furstenberg-Satake. On peut espérer que cette approche géométrique devrait permettre de montrer que les groupes de Kac-Moody à groupe de Weyl hyperbolique sont non-linéaires.

References

[AB94] N. A'Campo and M. Burger, *Réseaux arithmétiques et commensurateur d'après G.A. Margulis*, Inventiones Mathematicæ **116** (1994), 1–25.

[Abr97] P. Abramenko, *Twin buildings and applications to S-arithmetic groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1641, Springer Verlag, 1997.

[Abr03] P. Abramenko, *Finiteness properties for groups acting on twin buildings*, Groups: Topological, Combinatorial and Arithmetic Aspects (Bielefeld, 1999) (T.W. Müller, ed.), LMS Lecture Notes Series, London Mathematical Society, Cambridge University Press, 2003, pp. 17–21.

[Alp87] R. Alperin, *An elementary account of Selberg's lemma*, l'Enseignement Mathématique **33** (1987), 269–273.

[AM97] P. Abramenko and B. Muehlherr, *Présentations de certaines BN-paires jumelées comme sommes amalgamées*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **325** (1997), 701–706.

[AR03] P. Abramenko and B. Remy, *Commensurators of some nonuniform tree lattices and Moufang twin trees*, Prépublication de l'Institut Fourier **627**, 2003.

[Bar00] S. Barré, *Immeubles de Tits triangulaires exotiques*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **9** (2000), no. 4, 575–603.

[BCC+70] A. Borel, R. Carter, C.W. Curtis, N. Iwahori, T.A. Springer, and R. Steinberg, *Seminar on algebraic groups and related finite groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 131, Springer, 1970.

[Beh69] H. Behr, *Endliche Erzeugbarkeit arithmetischer Gruppen über Funktionenkörpern*, Inventiones Mathematicæ **7** (1969), 1–32.

[Beh03] H. Behr, *Higher finiteness properties for S-arithmetic groups in the function field case I*, Groups: Topological, Combinatorial and Arithmetic Aspects (Bielefeld, 1999) (T.W. Müller, ed.), LMS Lecture Notes Series, London Mathematical Society, Cambridge University Press, 2003, pp. 761–769.

[BH99] M. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundleheren der mathematischen Wissenschaften, vol. 319, Springer, 1999.

[BL01] H. Bass and A. Lubotzky, *Tree lattices*, Progress in Mathematics, vol. 176, Birkhäuser, 2001.

[BM96] M. Burger and Sh. Mozes, CAT(-1)*-spaces, divergence groups and their commensurators*, Journal of the American Mathematical Society **9** (1996), 57–93.

[BM97] M. Burger and Sh. Mozes, *Finitely presented simple groups and products of trees*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **324** (1997), 747–752.

[BM00a] M. Burger and Sh. Mozes, *Groups acting on trees: from local to global structure*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **92** (2000), 113–150.

[BM00b] M. Burger and Sh. Mozes, *Lattices in product of trees*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **92** (2000), 151–194.

[BM02] M. Burger and N. Monod, *Continuous bounded cohomology and applications to rigidity theory*, Geometric and Functional Analysis **12** (2002), no. 2, 219–280.

[Bon03] P. Bonvin, *Strong boundaries and commensurator super-rigidity*, appendix to [Rem03c], prépublication de l'Institut Fourier **590**, 2003.

[Bor91] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer, 1991.

[Bou81] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie IV-VI*, Éléments de mathématique, Masson, 1981.

[Bou97] M. Bourdon, *Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow*, Geometric and Functional Analysis **7** (1997), 245–268.

[BP00] M. Bourdon and Hervé Pajot, *Rigidity of quasi-isometries for some hyperbolic buildings*, Commentarii Mathematici Helvetici **75** (2000), 701–736.

[Bro87] K.S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 82, Springer, 1987.

[Bro89] K.S. Brown, *Buildings*, Springer, 1989.

[BT72] F. Bruhat and J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local I. Données radicielles valuées*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **41** (1972), 5–251.

[BT84] F. Bruhat and J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **60** (1984), 5–184.

[Bur95] M. Burger, *Rigidity properties of group actions on* CAT(0)*-spaces*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, August 1994) (S.D. Chatterji, ed.), Birkhäuser Verlag, Basel, 1995, pp. 761–769.

[Cap03] P.-E. Caprace, *Isomorphisms of Kac-Moody groups*, Mémoire, Université libre de Bruxelles, 2003.

[Car72] R.W. Carter, *Simple groups of lie type*, Wiley InterSciences, 1972.

[Dav97] M. Davis, *Buildings are* CAT(0), Geometry and cohomology in group theory (P.H. Kropholler, G.A. Niblo, and R. Stöhr, eds.), LMS Lecture Notes Series 252, London Mathematical Society, Cambridge University Press, 1997, pp. 108–123.
[DdSMS99] J.D. Dixon, M.P.F. du Sautoy, A. Mann, and D. Segal, *Analytic pro-p groups*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 61, Cambridge University Press, 1999.
[DJ02] J. Dymara and T. Januszkiewicz, *Equivariant cohomology of buildings and of their automorphism groups*, Inventiones Mathematicæ **150** (2002), no. 3, 579–627.
[dlHV89] P. de la Harpe and A. Valette, *La propriété* (T) *de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque, vol. 175, Société Mathématique de France, 1989.
[Fur72] H. Furstenberg, *Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces*, Proc. Symp. Pure Math., no. 26, American Mathematical Society, 1972, pp. 193–229.
[GdlH90] É. Ghys and P. de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, vol. 83, Birkhäuser, 1990.
[GJT98] Y. Guivarc'h, L. Ji, and J.C. Taylor, *Compactifications of symmetric spaces*, Progress in Mathematics, vol. 156, Birkhäuser, 1998.
[GR03] Y. Guivarc'h and B. Remy, *Compactifications of Bruhat-Tits buildings*, en préparation, 2003.
[Hag03] F. Haglund, *Linearity and commensurability of uniform lattices of right-angled hyperbolic buildings*, prépublication Université d'Orsay (Paris 11), 2003.
[Har69] G. Harder, *Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern*, Inventiones Mathematicæ **7** (1969), 33–54.
[HP98] F. Haglund and F. Paulin, *Simplicité de groupes d'automorphismes d'espaces à courbure négative*, Geom. Topol. Monogr. (The Epstein birthday schrift, Coventry, 1998) **1** (1998), 181–248.
[Hum70] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer Verlag, 1970.
[Jac89] N. Jacobson, *Basic Algebra II (2nd edition)*, Freeman and Co, 1989.
[Kai02] V.A. Kaimanovich, *Double ergodicity of the Poisson boundary and applications to bounded cohomology*, to appear in Geometric and Functional Analysis, 2002.
[KP85] V. Kac and D. Peterson, *Defining relations for certain infinite-dimensional groups*, Élie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui. The mathematical heritage of Élie Cartan. Lyon, 25-29 juin 1984 (Société mathématique de France, ed.), Astérisque Hors-Série, 1985, pp. 165–208.
[Kum02] Sh. Kumar, *Kac-Moody groups, their flag varieties and representation theory*, Progress in Mathematics, vol. 204, Birkhäuser, 2002.
[Lan96] E. Landvogt, *A compactification of the Bruhat-Tits building*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1619, Springer Verlag, 1996.
[Liu94] Y. Liu, *Density of the commensurability group of uniform tree lattices*, Journal of Algebra **165** (1994), 346–359.
[LMZ94] A. Lubotzky, Sh. Mozes, and R.J. Zimmer, *Superrigidity for the commensurability group of tree lattices*, Commentarii Mathematici Helvetici **69** (1994), 523–548.
[Mac71] I.G. Macdonald, *Spherical functions on a group of p-adic type*, Université de Madras, Inde, 1971.
[Mar91] G.A. Margulis, *Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 17, Springer, 1991.
[Mar94] G.A. Margulis, *Superrigidity of commensurability subgroups and generalized harmonic maps*, unpublished, 1994.
[Mas88] B. Maskit, *Kleinian groups*, Grundlehren der matematischen Wissenschaften, vol. 287, Springer, 1988.
[Mat88] O. Mathieu, *Formule des caractères pour les algèbres de Kac-Moody générales*, Astérisque, vol. 159-160, Société Mathématique de France, 1988.
[Mat89] O. Mathieu, *Construction d'un groupe de Kac-Moody et applications*, Comp. Math. **69** (1989), 37–60.
[Moo79] C.C. Moore, *Amenable subgroups of semisimple groups and proximal flows*, Israel Journal of Mathematics **34** (1979), no. 1-2, 121–138.
[Moo82] R.V. Moody, *A simplicity theorem for Chevalley groups defined by generalized Cartan matrices*, prépublication non publiée, 22 pages, 1982.
[Mou88] G. Moussong, *Hyperbolic Coxeter groups*, PhD thesis, Ohio State University, 1988.
[Moz99] Sh. Mozes, *Trees, lattices and commensurators*, Algebra, K-Theory, Groups, and Education: On the Occasion of Hyman Bass's 65th Birthday (T.Y. Lam and A.R. Magid, eds.), American Mathematical Society, 1999, pp. 145–151.
[MR95] B. Muehlherr and M.A. Ronan, *Local to global structure in twin buildings*, Inventiones Mathematicæ **122** (1995), 71–81.

[Mue99] B. Muehlherr, *Locally split and locally finite buildings of 2-spherical type*, J. Reine angew. Math. **511** (1999), 119–143.

[PR94] V. Platonov and A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Academic press, 1994.

[Pra77] G. Prasad, *Strong approximation for semi-simple groups over function fields*, Annals of Mathematics **105** (1977), 553–572.

[Rem99] B. Remy, *Construction de réseaux en théorie de Kac-Moody*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **329** (1999), 475–478.

[Rem02a] B. Remy, *Classical and non-linearity properties of Kac-Moody groups*, Rigidity in Dynamics and Geometry (Newton Institute, 2000) (M. Burger and A. Iozzi, eds.), Springer Verlag, 2002, pp. 391–406.

[Rem02b] B. Remy, *Groupes de Kac-Moody déployés et presque déployés*, Astérisque, vol. 277, Société Mathématique de France, 2002.

[Rem02c] B. Remy, *Immeubles de Kac-Moody hyperboliques, groupes non isomorphes de même immeuble*, Geometriæ Dedicata **90** (2002), 29–44.

[Rem03a] B. Remy, *Just infinite non-linear Kac-Moody groups*, en préparation, 2003.

[Rem03b] B. Remy, *Kac-Moody groups: split and relative theories. Lattices*, à paraître dans Groups: Topological, Combinatorial and Arithmetic Aspects (Bielefeld, 1999) (T.W. Müller, ed.), LMS Lecture Notes Series, London Mathematical Society, Cambridge University Press, 2003, pp. 401–445.

[Rem03c] B. Remy, *Topological simplicity, commensurator super-rigidity and non-linearities of Kac-Moody groups*, Prépublication de l'Institut Fourier **590**, 2003.

[Ron86] M.A. Ronan, *A construction of buildings with no rank 3 residues of spherical type*, Buildings and the geometry of diagrams (Lectures given at the third 1984 session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held in Como, August 26-September 4, 1984) (L.A. Rosati, ed.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1181, Springer Verlag, Berlin, 1986, pp. 242–248.

[Ron89] M.A. Ronan, *Lectures on Buildings*, Perspectives in Mathematics, vol. 7, Academic Press, 1989.

[RR02] B. Remy and M. Ronan, *Topological groups of Kac-Moody type, Fuchsian twinnings and their lattices*, Prépublication de l'Institut Fourier **563**, 2002.

[RT94] M. Ronan and J. Tits, *Twin trees I*, Inventiones Mathematicæ **116** (1994), 463–479.

[RT99] M. Ronan and J. Tits, *Twin trees II. Local structure and a universal construction*, Israel Journal of Mathematics **109** (1999), 349–377.

[Ser77] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames,* SL_2, Astérisque, vol. 46, Société Mathématique de France, 1977.

[Ser94] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer, 1994.

[Sha00] Y. Shalom, *Rigidity of commensurators and irreducible lattices*, Inventiones Mathematicæ **141** (2000), 1–54.

[Spr98] T.A. Springer, *Linear algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 9, Birkhäuser, 1998.

[Tit70] J. Tits, *Sur le groupe des automorphismes d'un arbre*, Essays on topology and related topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham (A. Hæfliger and R. Narasimhan, eds.), Springer Verlag, 1970, pp. 188–211.

[Tit72] J. Tits, *Free subgroups in linear groups*, Journal of Algebra **20** (1972), 250–270.

[Tit74] J. Tits, *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 386, Springer, 1974.

[Tit87] J. Tits, *Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields*, Journal of Algebra **105** (1987), 542–573.

[Tit89a] J. Tits, *Groupes associés aux algèbres de Kac-Moody*, Séminaire Bourbaki 700, Astérisque, vol. 177-178, Société Mathématique de France, 1989, pp. 7–31.

[Tit89b] J. Tits, *Théorie des groupes*, Annuaire Collège de France (Résumé de cours, année 88-89), 1989, pp. 81–95.

[Tit90] J. Tits, *Théorie des groupes*, Annuaire Collège de France (Résumé de cours, année 89-90), 1990, pp. 87–103.

[Tit92] J. Tits, *Twin buildings and groups of Kac-Moody type*, Groups, Combinatorics & Geometry (LMS Symposium on Groups and Combinatorics, Durham, July 1990) (M. Liebeck and J. Saxl, eds.), LMS Lecture Notes Series, vol. 165, Cambridge University Press, 1992, pp. 249–286.

[Ven88] T.N. Venkataramana, *On superrigidity and arithmeticity of lattices in semisimple groups over local fields of arbitrary characteristic*, Inventiones Mathematicæ **92** (1988), no. 2, 255–302.

[Wil71] J.S. Wilson, *Groups with every proper quotient finite*, Proc. Camb. Phil. Soc. **69** (1971), 373–391.

[Zim84] R.J. Zimmer, *Ergodic Theory and Semisimple Groups*, Monographs in Mathematics, vol. 81, Birkhäuser, 1984.

Institut Fourier – UMR 5582 du CNRS
Université de Grenoble 1 – Joseph Fourier
100, rue des maths – BP 74
38402 St Martin d'Hères Cedex – France
bremy@ujf-grenoble.fr