Géométrie de quelques algèbres et théorèmes d'annulation

Pierre-Emmanuel Chaput

▶ **To cite this version:**

Pierre-Emmanuel Chaput. Géométrie de quelques algèbres et théorèmes d'annulation. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2003. Français. NNT : . tel-00007115

HAL Id: tel-00007115
https://theses.hal.science/tel-00007115

Submitted on 14 Oct 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Remerciements

D'une disponibilité totale, Laurent Manivel a toujours accueilli mes propositions parfois inattendues avec enthousiasme. Il m'a guidé et aidé avec la décontraction et le sérieux qui le caractérisent. Je lui suis particulièremenet reconnaissant de m'avoir encouragé à travailler sur les variétés de Scorza, alors que ce n'était pas le sujet initial de ma thèse. Par ailleurs, il a souvent partagé ses impressions personnelles concernant le monde de la recherche, instaurant d'emblée un climat de confiance propice au travail efficace. C'est aussi lui qui m'a initié à la géométrie algébrique et à la théorie des représentations. Il m'a transmis sa curiosité insatiable et son goût pour les mathématiques mêlant différents domaines. Pout tout cela, je lui adresse un immense merci.

Cette thèse doit aussi, d'un point de vue scientifique, énormément à Fyodor Zak. D'une part, sa classification des variétés de Scorza est le point de départ de la première partie de cette thèse, et, d'autre part, les trois semaines passées à Catane avec lui et les nombreuses discussions que nous avons eues à cette occasion en ont très largement influencé l'esprit.

Giorgio Ottaviani m'a invité un mois à Florence pendant ma deuxième année de thèse. Ce geste a représenté pour moi un encouragement très important, et m'a permis de discuter avec de nombreux mathématiciens italiens et d'apprendre beaucoup. Cela m'a fait très plaisir d'apprendre que lui qui avait pour ainsi dire vu naitre mes idées avait accepté de rapporter ma thèse. Je remercie aussi Joseph Le-Potier pour sa relecture précise et ses suggestions, notamment concernant la définition géométrique des algèbres. Merci aussi aux deux autres membres du jury, Jean-Pierre Demailly et Jean-Louis Clerc.

Laurent Bonavero et Michel Brion ont constamment montré leur intérêt pour mes recherches ; je les remercie ainsi que Stéphane Druel qui a plusieurs fois éclairé ma lanterne.

Plus généralement, je voudrais, sans grandiloquence, remercier l'ensemble de la communauté mathématique pour sa modestie. Il est particulièrement agréable, pour un jeune

thésard, d'être considéré comme un pair par les plus anciens, et de pouvoir discuter avec eux de questions mathématiques. Cette simplicité qui semble si naturelle dans ce milieu n'existe pourtant pas dans d'autres où les mandarins pullulent, et je souhaitais souligner ce point.

En terminale, j'ai eu à choisir entre la musique et les mathématiques. Mes parents m'ont alors vivement encouragé à faire le second choix. Vu l'extraordinaire plaisir que j'ai eu à travailler sur cette thèse, je crois pouvoir aujourd'hui les remercier de m'avoir fait faire un bon choix.

Je remercie aussi toute ma famille pour sa présence et son soutien.

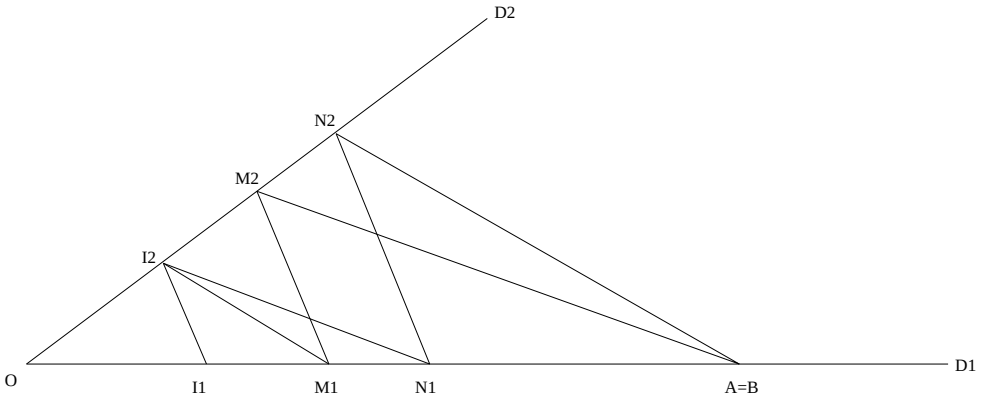
Je garderai un bon souvenir de tous les thésards et ex-thésards avec lesquels j'ai agréablement passé ces trois années à l'institut Fourier. Matthieu, Ion, Sophie, David, Kostia, Tony, Frank et Adrien auront été d'excellents compagnons de route. Je crois que dans mon esprit, le nom champs restera longtemps associé à celui de Matthieu ; les interminables discussions que j'ai eues avec Ion sur les groupes algébriques m'auront été bénéfiques ; merci aussi à David et Adrien pour nos discussions mathématiques.

La musique, bien qu'un peu délaissée, aura été un facteur essentiel de mon équilibre. Je profite de l'occasion pour remercier mes professeurs de piano successifs : Paule Gilbert, Alain Raes, Jacques Coulaud et Marie-Paule Siruguet. Ils ont, probablement sans le savoir, largement contribué au succès de cette thèse. François Luzignant, Sébastien Jaudon et Frank Vaudray, qui ont accepté de m'accompagner pendant ces trois années où mon temps était limité, méritent des remerciements particuliers. Merci aussi à Gérard pour les réveils en douceur avec les concertos pour piano de Beethoven.

Je remercie Claudine du fond du cœur et lui dédie ma thèse.

Introduction

Ma thèse en géométrie algébrique comporte deux parties indépendantes. Pour donner une idée de l'esprit de la première, considérons, dans le plan affine $\mathbb{R}^2$ usuel, la figure suivante :



Sur cette figure, D_1 et D_2 sont deux droites sécantes en O ; $I_1 \neq O$, M_1 et N_1 sont des points arbitraires de D_1 et $O \neq I_2 \in D_2$. Les points M_2, N_2, A, B sont alors construits de la façon suivante : M_2 et N_2 sont sur D_2 et les droites $(M_1M_2), (N_1N_2)$ et (I_1I_2) sont parallèles. Enfin, A et B sont sur D_1 et les droites (M_2A) et (I_2N_1), ainsi que (N_2B) et (I_2M_1), sont parallèles. On voit alors que $A = B$.

Face à cette constatation, le mathématicien peut, me semble-t-il, avoir au moins trois réactions. La première consiste à apporter une preuve de ce fait : si l'on choisit des coordonnées sur D_1 et D_2 telles que O soit l'origine et I_1 et I_2 les unités, et si x et y sont les coordonnées respectives de M_1 et N_1, alors le théorème de Thalès implique que x et y sont aussi les coordonnées de M_2 et N_2 ; on voit alors que la coordonnée de A égale xy et celle de B yx.

Après avoir fait ce raisonnement, j'imagine qu'un mathématicien intrigué tentera de généraliser ce résultat : et si l'on considérait le plan affine sur n'importe quel corps ? Il est clair que le résultat restera vrai si et seulement si le corps est commutatif. Remarquons, même si cela peut sembler artificiel pour notre exemple simpliste, qu'il est en théorie possible de montrer des propriétés algébriques (un corps est commutatif) en justifiant des propriétés géométriques ($A = B$).

Enfin, le point de vue d'Artin [Art 57] va plus loin encore que le renversement de l'hypothèse et de la conclusion que je proposais : il donne (pour simplifier sa démarche) des conditions pour qu'une géométrie (la donnée d'un ensemble, l'ensemble des points, et d'un sous-ensemble de l'ensemble de ses parties, l'ensemble des droites) soit telle que la figure géométrique précédente *définisse* correctement une multiplication, munissant toutes les droites d'une structure algébrique (structure de corps). Autrement dit, la beauté de ses idées tient, me semble-t-il, dans le fait qu'un problème de nature géométrique (caractériser les géométries vérifiant tels axiomes) trouve sa solution dans une définition *géométrique* de la structure algébrique (corps) sous-jacente.

Dans cette thèse, je transpose ce triple point de vue à l'étude de quatre types d'algèbres : les algèbres de Lie simples, les algèbres de matrices, les algèbres de composition et les algèbres de Jordan simples. Le cadre géométrique dans lequel je me place pour cela est celui de la géométrie algébrique complexe, et j'oscille entre les trois points de vue que j'ai illustrés. Parfois, j'utilise les propriétés de certaines algèbres pour montrer des propriétés géométriques de variétés définies en utilisant ces algèbres ; parfois, à l'inverse, ce sont des propriétés géométriques de ces variétés qui impliquent des propriétés des algèbres. Enfin, j'utilise aussi des propriétés géométriques de certaines variétés pour définir une algèbre. Nous verrons par exemple que je déduis la classification de certaines variétés (les variétés de Scorza) de la classification des algèbres de Lie simples, ou de celle des algèbres de Jordan simples.

Pour expliquer les tenants et les aboutissants de cet exemple, il me semble nécessaire de commencer par présenter mon travail concernant les algèbres de Jordan (chapitre 3).

Une algèbre de Jordan complexe est par définition une $\mathbb{C}$-algèbre unitaire commutative de dimension finie et satisfaisant l'identité $A*(B*A^2)=(A*B)*A^2$. Les algèbres de Jordan simples et de rang 3 (respectivement $n>3$) (cf le paragraphe 3.1 pour la définition de la simplicité et du rang) sont les algèbres des matrices hermitiennes d'ordre 3 (respectivement n) à coefficients une des quatre algèbres de composition complexe $\mathcal{A}:=\mathcal{B}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, où $\mathcal{B}$ est l'une des quatre algèbres de Hurwitz $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$ (respectivement $\mathcal{B}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$). Les matrices sont hermitiennes par rapport à la conjugaison sur $\mathcal{A}$ **$\mathbb{C}$-linéaire**. La multiplication est le produit symétrique $A*B=\frac{1}{2}(AB+BA)$. Je note ces algèbres $H_n(\mathcal{A})$. Pour alléger les notations, je note $\mathcal{B}\otimes\mathbb{C}$ les algèbres de composition, le produit tensoriel étant sous-entendu sur $\mathbb{R}$.

C'est un fait connu que $H_n(\mathbb{R}\otimes\mathbb{C})$ n'est rien d'autre que l'algèbre des matrices symétriques muni du produit $\frac{1}{2}(AB+BA)$, que $H_n(\mathbb{C}\otimes\mathbb{C})$ est isomorphe, comme algèbre, à l'algèbre de toutes les matrices d'ordre n (munie du même produit), et qu'il existe un isomorphisme entre $H_n(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})$ et l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre $2n$ muni d'une multiplication adéquate (cf paragraphe 3.1). Notons $V_n(\mathcal{A})$ l'espace de ces matrices. L'existence d'un isomorphisme $H_n(\mathcal{A})\simeq V_n(\mathcal{A})$ découle par exemple du théorème de classification des algèbres de Jordan.

Ils permettent, de façon détournée mais naturelle, de définir le rang de Jordan d'un élément d'une algèbre de Jordan simple de rang supérieur ou égal à 3 : c'est le rang de son image par un isomorphisme de cette algèbre avec $V_n(\mathcal{A})$, divisé par deux si $\mathcal{A}=\mathbb{H}$ (en effet, $V_n(\mathbb{H})$ est l'espace des matrices antisymétriques, donc de rang pair compris entre 0 et $2n$). Dans $H_3(\mathbb{O})$, les matrices de rang 1 sont par définition celles où la différentielle d'un certain polynôme, le déterminant, est nulle (cf chapitre 3).

Cette définition, dont on se convainc aisément qu'elle ne dépend pas de l'isomorphisme choisi, présente pourtant l'inconvénient majeur que pour calculer le rang de Jordan d'un élément dans une algèbre de Jordan précise, il faut produire un isomorphisme de cette algèbre avec $V_n(\mathcal{A})$. Les éléments de rang de Jordan 1 sont souvent définis par les spécialistes d'algèbres de Jordan comme les idempotents primitifs (primitif signifie qui n'est pas somme de deux idempotents non nuls). Mais premièrement, cette définition n'équivaut à la précédente que dans le cas des algèbres de Jordan *réelles*,

qui ne sont pas mon sujet d'intérêt, et deuxièmement elle ne fait pas apparaître le fait que l'ensemble des éléments de rang de Jordan 1 est une variété algébrique fermée. Bien que la notion de rang soit courante dans la littérature, je n'ai pas trouvé de définition qui donne explicitement les équations des éléments de rang 1.

Notons en outre que puisque $\mathcal{A}$ n'est pas un corps dès que $\mathcal{A} \neq \mathbb{R}\otimes\mathbb{C}$, on ne peut pas définir le rang de Jordan d'une matrice de la façon habituelle sur les algèbres $H_n(\mathcal{A})$. Par contre, une matrice $A \in H_n(\mathcal{A})$ définit naturellement une application $\mathbb{C}$-linéaire $\mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$, par la formule $L_A(z_j) = (\sum_k A_{i,k}z_k)_i$. On peut donc se demander s'il existe un lien entre le rang de cette application linéaire et le rang de Jordan de A. Enfin, F.L. Zak a remarqué que l'on peut définir une application rationnelle, dite "application de Veronese généralisée", car pour $\mathcal{A} = \mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$ on retrouve l'application de Veronese classique, par l'expression

$$\begin{array}{rccc} \nu_2 & : & \mathbb{P}(\mathcal{A}^n) & \dashrightarrow & \mathbb{P}H_n(\mathcal{A}) \\ & & (z_i) & \mapsto & (z_i\overline{z_j}). \end{array}$$

Il prétend aussi [Zak 93, th.5.11,p.153] que l'image de cette application est l'ensemble des éléments de rang de Jordan 1. Nous allons voir que c'est inexact pour l'algèbre de Jordan exceptionnelle.

Le résultat principal du paragraphe 3.2 relie ces différentes approches (si A est un élément d'une algèbre de Jordan, $R(A)$ est l'application linéaire de cette algèbre dans elle-même définie par $R(A).B = 2A*(A*B) - A^2*B$; $\langle .,. \rangle$ désigne un produit scalaire naturel sur une algèbre commutative, cf paragraphe 3.1) :

Théorème 3.3 : *Soit V une algèbre de Jordan simple de rang n supérieur ou égal à 3 et $A \in V$ non nul. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est de rang de Jordan 1, soit par définition $\forall B \in V, R(A).B = \langle A, B\rangle A$.*
2. *(dans le cas où on a réalisé V comme $H_n(\mathcal{A})$ avec $\mathcal{A}$ associative) A est l'image par l'application de Veronese généralisée d'un n-uplet d'éléments de $\mathcal{A}$.*
3. *(Si $V = \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) : A est de rang usuel 1.*
   (Si $V = \mathcal{AS}_{2n}(\mathbb{C})$) : A est de rang usuel 2.

Par ailleurs, si $V = H_n(\mathcal{A})$ avec $\mathcal{A}$ associative, alors ces conditions équivalent encore au fait que L_A soit de rang minimal (soit $\dim \mathcal{A}$*). Pour $V = H_3(\mathbb{O})$, ce résultat est faux.*

La proposition 3.11 relie aussi la variété des matrices de rang 1 dans l'algèbre de Jordan construite à partir des octaves à l'image de l'application de Veronese, de façon cependant plus subtile. Si $\mathcal{A}$ est non commutative, on peut munir $H_n(\mathcal{A})$ de deux structures d'algèbres de Jordan : l'une est celle que j'ai indiquée, l'autre est le produit $A *' B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ avec $AB = (\sum_k B_{k,j}A_{i,k})_{i,j}$. Ceci peut conduire à la définition du rang de Jordan à gauche, et on peut relier ce rang de Jordan au rang de de l'application linéaire $R_A : (z_i) \mapsto (\sum z_k A_{i,k})_i$ et à l'image de l'application $\tilde{\nu}_2(z_i) = (\overline{z}_j z_i)_{i,j}$. Remarquons qu'il y a donc deux déterminants naturels sur $H_n(\mathcal{A})$.

Par ailleurs, je donne des formules explicites et simples pour les isomorphismes $H_n(\mathcal{A}) \simeq V_n(\mathcal{A})$. Néanmoins, ces isomorphismes se comprennent mieux, à mon goût,

du point de vue géométrique. D'ailleurs, lorsque l'on étudie l'algèbre des matrices à coefficients réels ou complexes, le point de vue le plus efficace est probablement le point de vue de l'algèbre linéaire qui consiste à voir les éléments de ces algèbres comme des applications linéaires. Mais dès que l'on parle de matrices symétriques ou hermitiennes, autrement dit d'algèbres de Jordan, alors l'analogue de ce point de vue qui consiste à considérer ces éléments comme des formes quadratiques présente l'inconvénient que le produit symétrique $A * B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ ne s'interprète pas en ces termes ; l'étude du groupe d'automorphismes en est rendue plus ardue.

La géométrie de ces algèbres permet de donner un autre éclairage concernant certaines de ces questions. Tout d'abord, on je démontre la proposition suivante :

Proposition 3.13 : *Soient V_1 et V_2 deux algèbres de Jordan simples, I_1 et I_2 leurs unités et $X_1 \subset \mathbb{P}V_1$ et $X_2 \subset \mathbb{P}V_2$ les variétés algébriques projectives constituées des éléments de rang de Jordan 1. Soit enfin $f : V_1 \to V_2$ une application linéaire telle que $f(I_1) = I_2$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f induit un isomorphisme de variétés entre X_1 et X_2.*
2. *f est un isomorphisme d'algèbres entre V_1 et V_2.*

Celle-ci illustre le fait que l'étude des algèbres de Jordan simples et l'étude de la géométrie de la variété des éléments de rang de Jordan 1 sont un même problème à deux faces qu'il est plus aisé de résoudre comme tel. Mon opinion est d'ailleurs que cela vaut en général pour l'étude d'une algèbre et l'étude géométrique d'une variété décrite par des conditions algébriques appropriées.

En l'occurence, les propositions 3.14 et 3.15 décrivent de manière géométrique et simple un isomorphisme de variétés entre les variétés des éléments de rang de Jordan 1 dans $H_n(\mathcal{A})$ et dans $V_n(\mathcal{A})$, pour $\mathcal{A} = \mathbb{H}$ et $\mathbb{C}$. Par la proposition 3.13, ceux-ci sont aussi des isomorphismes des algèbres de Jordan. Par exemple, cet isomorphisme met en relation une matrice $A \in H_n(\mathbb{H})$ de rang de Jordan 1 avec l'intersection de l'image de L_A avec un certain sous-espace fixé de dimension $2n$ de $\mathbb{H}^n$. Cette intersection est de dimension 2 ; on obtient donc un isomorphisme entre l'ensemble des matrices de rang de Jordan 1 et la grassmannienne des 2-plans dans un espace vectoriel de dimension $2n$, soit, comme escompté, la variété des matrices de rang de Jordan 1 dans $V_n(\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}) = \Lambda^2\mathbb{C}^{2n}$.

En préliminaire à cette étude, le paragraphe 3.1 introduit deux groupes essentiels associés à une algèbre de Jordan V. Ce sont tous deux des sous-groupes de $GL(V)$. L'un est le groupe d'automorphismes de l'algèbre de Jordan, et l'autre le groupe de structure, qui peut être défini comme le sous-groupe préservant le déterminant. Ceux-ci jouent un rôle clé dans l'étude des variétés de Scorza où ils sont définis géométriquement. Ici, je rappelle certaines de leurs propriétés qui me seront utiles. Je rappelle une preuve du fait que ces groupes sont, dans le cas de l'algèbre de Jordan exceptionnelle, E_6 et F_4, en construisant explicitement les algèbres de Lie correspondantes.

Par ailleurs, j'explique aussi un phénomène qui est à la base de mon étude des variétés de Scorza : une algèbre de Jordan semi-simple peut se définir en utilisant seulement son élément neutre et le déterminant. Ce fait avait été remarqué dans les années 50 et joue aussi un rôle important dans l'étude des algèbres de Jordan entreprise ces années-là.

L'intérêt de comprendre la géométrie des variétés des éléments de rang de Jordan 1 dans une algèbre de Jordan n'est pas seulement d'améliorer notre compréhension de l'algèbre de Jordan elle-même, mais aussi que ces variétés possèdent des propriétés géométriques exceptionnelles. Commençons par une définition.

Définition [Zak 93] : *Une variété X, projective lisse irréductible non-dégénérée et de dimension n dans $\mathbb{P}^m$ est une variété de Severi si $Sec(X) \neq \mathbb{P}^m$ et $m = \frac{3}{2}n + 2$.*

Dans cette définition, on note $Sec(X)$ la fermeture de la réunion des droites sécantes de X. Elle est motivée par le fait que F.L. Zak a prouvé la conjecture de Hartshorne affirmant que si $m < \frac{3}{2}n + 2$, alors $Sec(X) = \mathbb{P}^m$. Il montre alors le théorème de classification des variétés de Severi :

Théorème [Zak 93] : *Il existe exactement 4 variétés de Severi, à savoir la surface de Veronese dans $\mathbb{P}^5$, $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$, la grassmannienne des 2-plans vectoriels dans $\mathbb{C}^6$ $G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}$ et la variété "$\mathcal{E}_6''$ $\subset \mathbb{P}^{26}$.*

Ce résultat très frappant est le point de départ de certaines recherches de Laurent Manivel et Joseph Landsberg sur le carré magique de Freudenthal [LM 99]. Quant à moi, ce qui m'a plus particulièrement intrigué dans ce résultat est le lien avec les algèbres de Jordan, que j'explique maintenant.

Un autre théorème de F.L. Zak classifie les variétés lisses de dimension maximale parmi celles qui ont la propriété que la $(n-2)$-ième variété sécante (à savoir la réunion, notée $S^{n-2}X$, des $(n-2)$-plans $(n-1)$-sécants) n'égale pas l'espace ambient tout entier. Il appelle ces variétés particulières des "n-variétés de Scorza" ; le lecteur trouvera une définition précise de celles-ci au paragraphe 4.1. On peut alors énoncer son théorème de la façon suivante :

Théorème [Zak 93] : *Les n-variétés de Scorza sont les variétés des matrices de rang de Jordan 1 dans les projectivisées des algèbres de Jordan simples de rang n.*

Pour $n = 3$, on retrouve le théorème précédent. Notons que F.L. Zak n'exprime pas ce résultat exactement sous cette forme, mais qu'il affirme, sans le justifier, que les images des applications de Veronese sont les variétés de Scorza. Remarquons enfin que toutes ces variétés sont homogènes (cela se voit bien si l'on réalise les algèbres de Jordan sous la forme $V_n(\mathcal{A})$).

Il m'a donc semblé que son travail soulevait deux problèmes intéressants :

- clarifier cette interprétation en termes d'applications de Veronese généralisées et définir correctement le rang de Jordan d'un élément d'une algèbre de Jordan.
- donner une preuve des théorèmes de Zak faisant intervenir les algèbres de Jordan et l'homogénéité. Le souhait d'avoir une preuve a priori de l'homogénéité a d'ailleurs été exprimé par Roberts, Lazarsfeld et Van de Ven ([Rob 88] et [LVV 84]).

Le premier point a déjà été discuté. Le second est traité dans la chapitre 4. A partir d'une variété de Scorza quelconque, je montre que son groupe d'automorphismes agit transitivement, et retrouve la structure d'algèbre de Jordan sous-jacente.

Le premier paragraphe 4.1 introduit les variétés de Scorza. Après avoir défini ces objets, je donne une liste de telles variétés (qui s'avérera exhaustive) et j'étudie certaines de leurs propriétés géométriques. Ces propriétés semblent naturelles si l'on interprète

les variétés de Scorza comme des espaces projectifs sur une algèbre de composition. En effet, pour $\mathcal{A} = \mathbb{R} \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$ et $n \geq 3$, nous avons vu que $\nu_2(\mathcal{A}^n)$ est une variété de Scorza. Or si $\lambda \in \mathcal{A}$ et $X \in \mathcal{A}^n$, on a $\nu_2(X.\lambda) = Q(\lambda).\nu_2(X)$ ($Q(\lambda)$ est un scalaire, la norme de λ) ; on voit donc que X et $X.\lambda$ représentent le même point dans la variété de Scorza. On peut donc imaginer que la variété de Scorza représente "$\mathcal{A}\mathbb{P}^{n-1}$". Ceci est avant tout moral car $\mathcal{A}$ n'est pas un corps.

Pourtant, ceci explique bien les propriétés observées : on remarque qu'une n-variété de Scorza contient une famille de $(n-1)$-variétés de Scorza paramétrées par une variété isomorphe à elle-même : en effet, il n'est pas choquant de se dire que $\mathcal{A}\mathbb{P}^{n-1}$ contient une famille de $\mathcal{A}\mathbb{P}^{n-2}$ paramétrés par $\mathcal{A}\mathbb{P}^{n-1*} \simeq \mathcal{A}\mathbb{P}^{n-1}$.

En fait, dans de nombreux contextes, il semble utile de généraliser les constructions géométriques classiques aux autres algèbres de composition : nous avons vu que les "applications de Veronese généralisées" en sont un exemple particulièrement riche géométriquement. De même, je définis les grassmanniennes sur une algèbre de composition associative, de telle sorte que les grassmanniennes sur $\mathbb{R}\otimes\mathbb{C}$ soient les grassmanniennes usuelles, et les grassmanniennes de 1-plans les variétés de Scorza (paragraphe 2.3).

Je définis et étudie aussi les sous-grassmanniennes d'espaces isotropes pour une forme hermitienne ou anti-hermitienne. Ceci montre en particulier que les grassmanniennes de 3-plans dans un espace de dimension 6, isotropes pour une forme anti-hermitienne, pour $\mathcal{A} = \mathbb{R} \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}, \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$, sont les trois premières variétés de la troisième ligne du carré magique de Freudenthal, ce qui confirme et précise l'intuition de Laurent Manivel et Joseph Landsberg que ces variétés sont des généralisations de la grassmannienne symplectique $G_\omega(3,6)$. Le résultat qui suit décrit les grassmanniennes ordinaires (notées $G_{\mathcal{B}}(r,n)$) et les grassmanniennes isotropes pour une forme hermitiennes (notées $G^Q_{\mathcal{B}}(r,n)$) ou anti-hermitiennes (notées $G^\Omega_{\mathcal{B}}(r,n)$), sur l'algèbre de composition $\mathcal{B}$. Pour les détails concernant ces définitions et les notations, le lecteur est renvoyé au paragraphe 2.3.

Théorème 2.2 :

- $G^Q_{\mathbb{R}}(r,n) = G_Q(r,n)$.
- $F(r,n-r,n) \simeq G^Q_{\mathbb{C}}(r,n) \subset G(r,n) \times G(r,n) = G_{\mathbb{C}}(r,n)$.
- $G_\omega(2r,2n) \simeq G^Q_{\mathbb{H}}(r,n) \subset G(2r,2n) = G_{\mathbb{H}}(r,n)$.

et

- $G^\Omega_{\mathbb{R}}(r,n) = G_\omega(r,n)$.
- $F(r,n-r,n) \simeq G^\Omega_{\mathbb{C}}(r,n) \subset G(r,n) \times G(r,n) = G_{\mathbb{C}}(r,n)$.
- $G_Q(2r,2n) \simeq G^\Omega_{\mathbb{H}}(r,n) \subset G(2r,2n) = G_{\mathbb{H}}(r,n)$.

Le paragraphe 4.2 étudie une variété de Scorza générale. Dans un premier temps, de façon à donner au lecteur une idée des arguments utilisés par F.L. Zak, j'établis des propriétés géométriques pour une variété de Severi quelconque. Pour cela, je suis approximativement le tout-début de la preuve esquissée dans [LVV 84]. Ensuite, j'admets qu'elles sont valables plus généralement pour une n-variété de Scorza $X \subset \mathbb{P}V$. Notons que j'ai prouvé lors de l'étude des algèbres de Jordan que la variété des matrices de rang de Jordan 1 est une variété de Scorza ; ces propriétés géométriques et les constructions qui suivent sont donc valables en particulier pour les algèbres de Jordan.

Pour X une n-variété de Scorza, la "dernière" sécante, c'est-à-dire $S^{n-1}X$, est une

hypersurface, dont je note $(S^{n-1}X)^*$ la variété duale. Le point clé est alors la définition et l'étude, pour tout $A \notin S^{n-1}X$, d'une application, notée τ_A, de X vers $(S^{n-1}X)^*$. Pour $x \in X$, $\tau_A(x)$ est l'hyperplan tangent à $S^{n-1}X$ en l'unique autre (que x) point d'intersection de la droite (Ax) avec $S^{n-1}X$. On a alors

Théorème 4.6 : *$\tau_A : X \xrightarrow{\sim} (S^{n-1}X)^*$ est induit par un isomorphisme entre $\mathbb{P}V$ et $\mathbb{P}V^*$.*

Corollaire 4.11 : *Toute variété de Scorza est homogène.*

La classification des variétés de Scorza peut alors être achevée, si on le souhaite, par une étude de l'algèbre de Lie de ce groupe d'automorphismes (en utilisant la classification des algèbres de Lie simples et en étudiant les différents cas possibles). Mais le théorème présente un autre intérêt : dans une algèbre de Jordan, pour I l'élément neutre, on a, pour tout $A \notin S^{n-1}X$, que $(\tau_A)^{-1} \circ \tau_I = R(A)$, la représentation quadratique. Cette remarque, et un résultat de McCrimmon, permettent de définir une structure d'algèbre de Jordan sur l'espace ambient d'une variété de Scorza. Ceci donne un argument conceptuel pour le théorème de Zak.

Par ailleurs, ceci donne une description géométrique du produit dans une algèbre de Jordan. En effet, une conséquence facile du théorème 4.6 est que le produit $A * B$ de deux éléments de rang de Jordan 1 est, génériquement, la projection orthogonale de I sur l'espace linéaire $T_AX \cap T_BX$. Cependant, cette description ne suffit pas en général pour définir de façon univoque le produit : deux contre-exemples sont fournis dans le chapitre 1. L'objet de ce chapitre est d'ailleurs de donner plusieurs outils qui assurent que le produit est bien défini à une homothétie près. Ceux-ci permettent par exemple de définir géométriquement les algèbres de Lie simples et les algèbres de matrices. J'en déduis aisément une classification des structures d'algèbre sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$ unitaires et telles que $\det(A * B) = \det(A)\det(B)$.

Dans le cas des algèbres de Jordan, il suffit de déterminer, pour tout A de rang de Jordan 1, l'ensemble des B tels que $A * B = 0$. Je montre que cet ensemble est engendré comme espace vectoriel par le lieu d'entrée de l'autre point d'intersection de la droite (AI) avec $S^{n-1}X$. Ceci achève de décrire géométriquement le produit de Jordan.

On peut aussi montrer, en utilisant ce théorème, que V et le groupe d'automorphismes de la variété forment un espace préhomogène symétrique, et prouver ainsi la classification par un résultat concernant ces espaces. Pour cela, l'argument essentiel est le suivant ($*_K$ est le produit de Koecher sur V défini au paragraphe 4.2.4 et le produit scalaire $\langle A, B\rangle$ est donné par $\langle A, B\rangle = \tau_I(A).B = \tau_I(B).A$) :

Proposition 4.16 : *Soit $X \subset \mathbb{P}V$ une variété de Scorza et $g \in GL(V)$ préservant une équation de l'hypersurface $S^{n-1}X$. Soit aussi $I \notin S^{n-1}X$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *g préserve le produit sur V à un signe près, c'est-à-dire*
$$(g.A) *_K (g.B) = \pm g.(A *_K B).$$
2. *g préserve I à un signe près, $g.I = \pm I$.*
3. *g préserve le produit scalaire, $\langle g.A, g.B\rangle = \langle A, B\rangle$.*

Si n est impair, les signes $-$ ne peuvent pas avoir lieu, car $S^{n-1}X$ est alors de degré impair. Dans le cas de l'algèbre de Jordan exceptionnelle, cette proposition identifie le sous-groupe du groupe exceptionnel E_6 préservant le produit scalaire naturel au groupe F_4 des automorphismes de l'algèbre.

Comme conséquence de cette proposition, le produit $*_K$ vérifie l'identité de Jordan, et on peut en déduire la classification. De plus, si l'on est parti de la variété des éléments de rang de Jordan 1 dans une algèbre de Jordan, alors ce produit est le produit dans cette algèbre de Jordan.

Cette proposition montre donc aussi des résultats concernant les algèbres de Jordan : par exemple, dans le cas de l'algèbre de Jordan exceptionnelle, elle implique que le sous-groupe du groupe E_6 préservant le déterminant, des éléments qui préservent de plus le produit scalaire $\mathrm{tr}(A * B)$ est exactement le groupe F_4 des automorphismes de cette algèbre de Jordan. La preuve de ce résultat est simple et purement géométrique. En effet, j'ai décrit géométriquement le produit de Jordan et le produit scalaire (celui-ci est défini par τ_I qui a déjà une définition géométrique). Le fait qu'un automorphisme g de X préserve le produit de Jordan ou le produit scalaire se traduit donc par des conditions géométriques, dont il est facile de montrer qu'elles équivalent au fait que $g.I$ et I sont proportionnels, en utilisant les propriétés géométriques connues des variétés de Scorza.

Enfin, un dernier paragraphe 4.3 complète l'étude des variétés de Severi. Je montre de façon très élémentaire que les dérivées de l'équation de la sécante, qui est une hypersurface cubique, déterminent un morphisme birationnel de l'espace projectif ambient. De même, je décris les orbites de $Aut(X)$ dans $\mathbb{P}V$. J'explique enfin comment ma construction géométrique permet de retrouver plus aisément un résultat de Etingof, Kazhdan et Polishchuk sur les polynômes homaloïdes [EKP 00]. Ils introduisent la définition suivante :

Définition : *Soit V un espace vecoriel et f un polynôme homogène sur V. Si df : $\mathbb{P}V \to \mathbb{P}V^*$ est birationnelle et s'il existe un polynôme homogène f^* sur V^* tel que $f^*(d_x f/f(x)) = 1/f(x)$ pour $f(x) \neq 0$, alors f est dit homaloïde.*

Leur résultat est alors une conséquence facile des constructions géométriques que j'ai expliquées :

Théorème 4.10 : *Un polynôme homaloïde de degré 3 est le déterminant d'une algèbre de Jordan semi-simple.*

Les techniques qui permettent de définir géométriquement une algèbre s'appliquent aussi dans d'autres contextes : par exemple, le paragraphe 2.1 donne une définition géométrique des algèbres de composition. L'isomorphisme classique entre $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$ et $M_2(\mathbb{C})$ prend ici une saveur plus géométrique. Ces techniques impliquent aussi une description, nouvelle à ma connaissance, des groupes spinoriels. Ceux-ci sont d'habitude définis comme sous-groupe du groupe des éléments inversibles de l'algèbre de Clifford engendré par certains éléments. Je propose quant à moi une description en termes d'équations (cf le paragraphe 2.2.3 pour la définition des représentations spinorielles $C_1^{\pm}$ et de l'application naturelle $\beta_1 : C_1^+ \times C_1^{\pm} \to \mathbb{C}^{2r}$) :

Théorème 2.1 : *Si r est pair, alors $Spin_{2r}$ est isomorphe au sous-groupe de $SO_{2r} \times SO(C_1^+) \times SO(C_1^-)$ constitué des triplets (g, g^+, g^-) vérifiant*

$$\forall u \in C_1^+, v \in C_1^-, \beta_1(g^+u, g^-v) = g.\beta_1(u, v). \quad (1)$$

Si r est impair, alors $Spin_{2r}$ est isomorphe au sous-groupe de $SO_{2r} \times SL(C_1^+)$ constitué des paires (g, g^+) vérifiant

$$\forall u \in C_1^+, \beta_1(g^+u, g^+v) = g.\beta_1(u, v). \quad (2)$$

En utilisant mes idées, ce théorème est une conséquence très directe de résultats classiques concernant les algèbres de Clifford. L'argument principal est le fait que par exemple (g, g^+) vérifie (2) si et seulement si pour tout espace isotrope L_α représenté par le spineur pur $\alpha \in C_1^+$, $g^+\alpha$ représente l'espace isotrope $g.L_\alpha$ des images par g de L_α.

Dans le cas de $Spin_8$, les trois représentations $\mathbb{C}^8, C_1^+$ et C_1^- de SO_8 sont de dimension 8 et β_1 s'identifie au produit des octaves de Cayley. Le théorème précédent s'énonce de façon un peu plus élégante en utilisant ces octaves :

Proposition 2.11 (Trialité algébrique) : *Le sous-groupe de SO_8^3 des triplets (g, g^+, g^-) tels que*

$$\forall x, y \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C},\ g(xy) = g^+(x)g^-(y) \quad (3)$$

est isomorphe au groupe $Spin(8)$, chacune des trois projections réalisant un revêtement topologique à deux feuilles.

Après avoir donné une description géométrique de l'algèbre $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$, je retrouve cette proposition par une preuve nouvelle et sans calculs. Ce que j'appelle la trialité géométrique, à savoir le fait que l'application qui, à un octave de norme nulle, associe l'ensemble de ses multiples à droite (respectivement à gauche), est un isomorphisme de la quadrique de dimension 6 vers une composante de la grassmannienne des espaces linéaires de dimension 3 isotropes (respectivement l'autre composante), admet lui aussi une preuve géométrique élémentaire.

Cette meilleure compréhension permet de décrire le quotient PSO_8/G_2, qui représente toutes les algèbres de composition de norme fixée :

Proposition 2.15 : *Soit Q une forme quadratique non-dégénérée sur un espace vectoriel V de dimension 8. Soit $(x, y) \mapsto xy$ une algèbre unitaire fixée de norme Q et $*$ une autre telle algèbre. Alors, il existe des uniques $\alpha, \beta \in \mathbb{P}V - \mathcal{Q}$ tels que $\forall x, y \in V, x * y = (x\alpha)(\beta y)$. L'application $* \mapsto (\alpha, \beta)$ est un isomorphisme entre PSO_8/G_2 et $(\mathbb{P}V - \mathcal{Q}) \times (\mathbb{P}V - \mathcal{Q})$, PSO_8-équivarient si l'on pose $g.(\alpha, \beta) = (\overline{g^-}\overline{\alpha}, \overline{g^+}\overline{\beta})$.*

Par ailleurs, je généralise un peu cette étude pour décrire, en termes d'octaves, ce que j'appelle les grassmanniennes quadratiques, qui paramètrent les espaces linéaires isotropes pour une forme quadratique non-dégénérée, en petite dimension. On obtient aussi des descriptions de $Spin_{10}$ et $Spin_{12}$ semblables à celle de $Spin_8$ donnée par la trialité algébrique.

Enfin, un autre résultat fait intervenir la géométrie des octaves, ou plus généralement des algèbres, que j'appelle de Cayley, obtenues en appliquant le procédé de Cayley-Dickson aux algèbres de composition (cf le paragraphe 3.2.5). Bien qu'on sache à l'avance

qu'il n'existe pas, pour $n \geq 3$, de variétés de Scorza analogues à la quatrième variété de Severi par le théorème de Zak, on peut envisager de compactifier un espace affine sur les octaves de dimension arbitraire pour définir une telle variété en dimension quelconque. La proposition qui suit explique pourquoi on n'obtient pas une variété de Scorza : la variété est singulière.

Proposition 3.23 : *Soit $n, p \geq 1$ deux entiers. Soit $H_{n,p}$ l'algèbre des matrices hermitiennes de taille $(n+1) \times (n+1)$ à coefficients dans la p-ième algèbre de Cayley, munie de la multiplication $A * B = \frac{1}{2}(AB + BA)$. Soit $X \subset \mathbb{P}H_{n,p}$ la variété adhérence de l'ensemble des matrices de la forme* $\begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_n \\ \overline{z_1} & Q(z_1) & \cdots & \overline{z_1} z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{z_n} & \overline{z_n} z_1 & \ldots & Q(z_n) \end{pmatrix}$*. Alors X est lisse si et seulement si $H_{n,p}$ est de Jordan.*

Dans cette proposition, le fait combinatoire qu'il n'existe pas d'espaces projectifs sur les octaves en dimension au moins 3 trouve deux échos : un écho algébrique ($H_n(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})$ n'est pas de Jordan pour $n > 3$) et un écho géométrique (X est singulière). Elle montre bien la profonde intrication des questions géométriques et des questions algébriques.

La deuxième partie de cette thèse concerne la cohomologie des fibrés vectoriels amples sur une variété projective complexe lisse. Lorsque $E \to X$ est un fibré de rang e muni d'une forme quadratique à valeurs dans un fibré en droites L, on définit habituellement pour $0 \leq k \leq e-1$ le k-ième lieu de dégénérescence $D_k(E)$ comme le lieu des points $x \in X$ tels que cette forme quadratique est au plus de rang k. Fulton et Lazarsfeld [Ful 81, Remark 2,p.50] font la conjecture suivante :

Conjecture : *Soit E un fibré vectoriel de rang e, sur une variété X lisse, connexe, projective et de dimension n. Supposons que E est muni d'une forme quadratique à valeurs dans un fibré en droites L. Soit k un entier et supposons que*

- $\dim D_k(E) = \rho := n - \frac{(e-k)(e-k+1)}{2} > 0$.
- *$S^2E^* \otimes L$ est ample.*

Alors, $D_k(E)$ est connexe.

Puisque le faisceau structural de $D_k(E)$ admet une résolution par des fibrés de la forme $S_\lambda E$ (S_λ désigne le foncteur de Schur associé à une partition λ), cette conjecture peut être prouvée si l'on est capable de démontrer l'annulation de certains groupes de cohomologie $H^{n,q}(X, S_\lambda E^* \otimes L^i)$ (ces groupes de cohomologie sont définis p. 129) : ce fait est démontré dans [Man 97] et [Lay 96] explicite une conjecture concernant l'annulation de groupes de cohomologie qui permettrait de démontrer la conjecture de Fulton et Lazarsfeld. On est donc amené à se poser la question suivante : étant donnés n, p, e trois entiers et une partition λ, quel est le plus petit entier $Q(n,p,e,\lambda)$ tel que pour toute variété X projective lisse complexe de dimension n et tout fibré ample E de rang e sur X, le groupe de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(X, S_\lambda E)$ s'annule si $q > Q(n,p,e,\lambda)$? Par exemple, le théorème de Kodaira dit que $Q(n,p,1,(l)) \leq n-p$.

Notre espoir est en effet que la connaissance des entiers $Q(n,p,e,\lambda)$, ou au moins d'une majoration efficace de ceux-ci, permettrait d'établir les propriétés topologiques attendues de ces lieux de dégénérescence. Notons que pour apporter une réponse à cette conjecture, nous n'avons besoin d'étudier que $Q(n,n,e,\lambda)$, mais que comme nous allons le voir, les techniques que nous utilisons nous obligent, pour majorer ces entiers, à majorer de façon plus générale tous les $Q(n,p,e,\lambda)$.

Historiquement, ce sont les puissances de Schur symétriques et extérieures qui ont été considérées les premières, notamment par Griffiths et Le Potier. Plus récemment, Demailly a considéré une puissance quelconque d'un fibré tensorisée par une puissance adéquate de son déterminant et Laurent Manivel a amélioré la borne de Le Potier pour une puissance extérieure. Enfin, W. Nahm [LN 02] a démontré un résultat concernant les partitions dont toutes les parts sauf éventuellement la première valent 1, couramment appelées *équerres* ou *crochets*. Ce résultat donne, en ce qui concerne les crochets, une borne suffisante pour démontrer la connexité des lieux de dégénérescence. Pour établir cette conjecture, il s'agit de généraliser ce résultat aux autres partitions.

La méthode générale pour démontrer de tels théorèmes est la suivante : les groupes de cohomologie dont on veut montrer l'annulation apparaissent dans les suites spectrales (dites "de Borel-Le Potier") qui calculent la cohomologie d'un fibré en droites ample adéquat sur une grassmannienne relative construite à partir de E. Or, dans certains cas,

le théorème de Kodaira assure l'annulation de la cohomologie de ce fibré. Si un groupe de cohomologie apparait dans une suite spectrale qui calcule un groupe nul, et si toutes les flêches de la suite spectrale qui arrivent sur notre groupe ou qui en partent sont nulles, alors on déduit que ce groupe est nul. Pour s'assurer que ces flêches sont nulles, on montre que les autres groupes que ces flêches connectent (par la suite, j'appellerai ces groupes les "voisins" de notre groupe) le sont, ce qui fait intervenir une récurrence. L'efficacité du théorème de W. Nahm est liée à un choix particulièrement astucieux de l'ordre de récurrence dans lequel il annule les groupes de cohomologie.

Si n, r et l sont des entiers fixés, notons $G(r, \mathbb{C}^n)$ la grassmannienne des r-plans dans $\mathbb{C}^n$, et $\mathcal{O}(l)$ la restriction sur cette grassmannienne du fibré en droites $\mathcal{O}(l)$ sur $\mathbb{P}\Lambda^r\mathbb{C}^n$. Si p est le plus grand entier tel qu'il existe q avec $H^{p,q}[G(r,\mathbb{C}^n), \mathcal{O}(l)] \neq 0$, et si $H^{p,q}[G(r,\mathbb{C}^n), \mathcal{O}(l)] \supset S_\lambda\mathbb{C}^n$, alors on obtient, au premier stade de la récurrence, un théorème d'annulation pour $S_\lambda E$. La récurrence permet d'obtenir aussi des résultats pour des partitions correspondant à des indices p plus petits. W. Nahm s'arrange pour que $n > rl$, ce qui simplifie considérablement la détermination du groupe $H^{p,q}[G(r,n), \mathcal{O}(l)]$ non nul avec p maximal, et assure que les partitions obtenues sont des crochets. On obtient ainsi au premier pas de la récurrence l'annulation de $H^{n,q}(X, S_\lambda E)$ pour λ une puissance extérieure ; la récurrence permet d'annuler $H^{p,q}(X, S_\lambda E)$, avec p qui diminue et la première part de λ qui augmente simultanément.

Pour généraliser ce résultat aux partitions qui ne sont pas des crochets, deux stratégies semblent envisageables. La première consiste à considérer $S_\lambda E$, pour λ une partition quelconque, comme un sous-fibré d'un fibré produit $\otimes_i S_{\mu_i} E$, pour μ_i des crochets adéquats. Pour annuler $H^{p,q}(X, \otimes_i S_{\mu_i} E)$, il suffit de considérer non pas une grassmannienne relative, mais un produit, au-dessus de X, de telles grassmanniennes. J'ai obtenu le résultat suivant par cette technique ($Z^{a,b}$ désigne le crochet de poids b et de longueur a et δ est une fonction introduite au paragraphe 7.1.1) :

Théorème 7.1 : *Soit E un fibré ample de rang e sur une variété X projective lisse de dimension n, $a \in \mathbb{N}$, $(k_i)_{1\leq i\leq a}$ et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq a}$ des entiers tels que $\alpha_i < k_i$; soit $\sigma = \sum \alpha_i$ et $k = \sum k_i$, alors*

$$H^{p,q}(X, \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i} E) = 0$$
$$si\ p+q-n > [\min[\delta(n-p), \delta(n-q)] + \sigma][ae - k + 2\sigma] - \sigma(\sigma+1).$$

De façon analogue à celle de W. Nahm, ma récurrence étudie en premier lieu les produits de puissances extérieures. Malheureusement, ce théorème ne donne pas une borne suffisamment efficace pour montrer les propriétés topologiques des lieux de dégénérescence.

L'autre stratégie consiste à se placer dans d'autres cas que celui où $n > rl$. On obtient ainsi sans récurrence et sans considérer de produits directement des résultats concernant des partitions plus compliquées que les crochets. L'obstacle majeur est de déterminer le(s) groupe(s) de cohomologie $H^{p,q}[G(r,\mathbb{C}^n), \mathcal{O}(l)]$ non nul avec p maximal. Pour calculer tous les groupes de cohomologie $H^{p,q}[G(r,\mathbb{C}^n), \mathcal{O}(l)]$, Snow a proposé une méthode diagrammatique commode. Les composantes non nulles de ces groupes de cohomologie

sont en bijection avec certaines partitions vérifiant des propriétés combinatoires. Pourtant, cette combinatoire est, sauf dans le cas particulier $n > rl$, à mon avis inextricable. Je pousse donc un peu plus loin l'étude de Snow en montrant que ces partitions spéciales sont naturellement en bijection avec un ensemble très simple combinatoirement (proposition 6.1). Ceci permet alors de déterminer plus facilement le(s) groupe(s) de cohomologie $H^{p,q}[G(r,\mathbb{C}^n),\mathcal{O}(l)]$ non nul(s) avec p maximal (proposition 6.1). Comme prévu, on peut en déduire de nombreux théorèmes d'annulation nouveaux. Mais, comme je l'explique au paragraphe 7.2.3, on obtient des résultats qui n'ont aucune chance de montrer la connexité des lieux de dégénérescence. Je n'ai donc pas plus approfondi cette piste.

Les résultats que j'ai décrits jusqu'à maintenant ne montrent pas la connexité. En effet, si le premier annule des groupes de cohomologie $H^{n,q}(X,S_\lambda E)$ pour λ quelconque, il le fait pour des valeurs de q trop grandes. Pour diminuer ces valeurs, il m'a semblé nécessaire de modifier un peu la méthode générale. Jusqu'à maintenant, pour annuler un certain groupe de cohomologie, on utilisait, comme je l'ai expliqué, des suites spectrales où ce groupe apparait mais où tous ses "voisins" sont nuls. Il y a relativement peu de telles suites spectrales. Je propose quant à moi d'utiliser d'autres suites spectrales, où ce groupe apparait avec exactement un "voisin" non nul. On obtient ainsi des isomorphismes entre certains groupes de cohomologie. En combinant plusieurs de ces isomorphismes, on obtient finalement l'annulation du groupe, et donc de son "voisin". Grâce à cette méthode, certes très technique, j'ai pu établir la connexité de $D_k(E)$ sous l'hypothèse supplémentaire que $e-k \leq 4$, et contrairement à la conjecture, en supposant que $\rho > 1$:

Corollaire 7.7 : *La conjecture précédente est vraie lorsque de plus*
- $\rho > 1$.
- $e - k \leq 4$.

Par d'autres méthodes, Tu a démontré cette conjecture lorsque k est pair [Tu 89] et, pour k impair, pour $\rho \geq e - k$ [Tu 88].

Enfin, j'initie une étude du problème de la détermination (ou au moins la majoration) des entiers $Q(n,p,e,\lambda)$ pour les fibrés E munis d'une forme symplectique ou quadratique. Dans ce cas, il est naturel de considérer un fibré en grassmanniennes isotropes. Je commence donc une étude de la cohomologie de ces grassmanniennes. Ce travail a été effectué par Snow dans le cas des grassmanniennes dites lagrangiennes, d'espaces de dimension exactement la moitié de la dimension de l'espace ambient ; ces grassmanniennes sont alors des espaces hermitiens symétriques, ce qui simplifie fondamentalement le problème. En effet, dans le cas général, le fibré tangent n'est pas complétement réductible comme fibré homogène, et donc le calcul de la cohomologie fait intervenir des suites spectrales difficilement contrôlables. Je n'ai en fait pu établir dans le cas général essentiellement que le résultat partiel suivant : les composantes de la cohomologie de $\mathcal{O}(1)$ sur une grassmannienne symplectique ou quadratique sont des représentations fondamentales. Par contre, on peut mener à bien le calcul de la cohomologie de $\mathcal{O}(1)$ et $\mathcal{O}(2)$ sur les grassmanniennes lagrangiennes. Ce calcul conduit à des théorèmes d'annulation pour la cohomologie de fibrés munis d'une forme symplectique ou d'une forme quadratique

(théorèmes 8.1 et 8.2).

Table des matières

I Géométrie de quelques algèbres **19**

1 Définition géométrique d'une algèbre en général **20**
1.1 Comment définir géométriquement une structure d'algèbre ? 20
1.1.1 Unicité 20
1.1.2 Existence 25
1.2 Exemples 26
1.2.1 Algèbres de Lie simples 26
1.2.2 Algèbres de matrices 30

2 Géométrie et algèbres de composition **36**
2.1 Géométrie des algèbres de composition 36
2.1.1 Algèbres de composition en général 36
2.1.2 Les quaternions 38
2.1.3 Les octaves 40
2.2 Conséquences pour les premières grassmanniennes quadratiques et pour les groupes spinoriels 49
2.2.1 En dimension 10 49
2.2.2 En dimension 12 53
2.2.3 Une description de tous les groupes spinoriels 60
2.3 Grassmanniennes sur une algèbre de composition associative 63
2.3.1 Grassmanniennes ordinaires 63
2.3.2 Grassmanniennes isotropes 65

3 Algèbres de Jordan **68**
3.1 Généralités sur les algèbres de Jordan 68
3.1.1 Premières définitions 68
3.1.2 Construction du produit à partir du déterminant 69
3.1.3 Algèbres de Jordan et groupes algébriques 73
3.2 Géométrie des algèbres de Jordan 77
3.2.1 Rang de Jordan 78
3.2.2 Rang de Jordan et applications de Veronese 79
3.2.3 Isomorphismes de variétés et d'algèbres de Jordan 83
3.2.4 Rang de Jordan et rang des applications linéaires associées 86
3.2.5 Espaces projectifs sur les algèbres de Cayley de dimension arbitraire 89

4 Variétés de Severi et de Scorza **93**
4.1 Définitions des variétés de Scorza et étude des exemples 93
4.1.1 Définition des variétés de Severi 93
4.1.2 Définition des variétés de Scorza 94
4.1.3 Stratégie pour la preuve du théorème de Zak 95
4.1.4 Etude des exemples 96
4.2 Etude des variétés de Scorza en général 100
4.2.1 Quadriques et degré de la variété sécante pour une variété de Severi 100
4.2.2 Homogénéité des variétés de Scorza 105
4.2.3 Classification des variétés de Scorza par leurs groupes d'automorphismes 108
4.2.4 Identification de l'algèbre de Jordan 111
4.2.5 Identification de V avec un espace préhomogène symétrique . . . 114
4.3 Le cas des variétés de Severi 116
4.3.1 Étude globale de G 117
4.3.2 Orbites dans $\mathbb{P}V$ 118
4.3.3 Autre preuve de l'identité de Jordan 119
4.3.4 Propriétés du cross-product 120
4.3.5 Polynômes homaloïdes de degré 3 122

II Théorèmes d'annulation **124**

5 Rappels et notations **125**
5.1 Théorie des représentations 125
5.1.1 Pléthysme 125
5.1.2 Notations concernant les systèmes de racines 127
5.2 Fibrés vectoriels homogènes 128
5.3 Suites spectrales 130
5.3.1 Suite spectrale de Borel-Le Potier 130
5.3.2 Suite spectrale de Leray 130

6 Cohomologie des fibrés $\mathcal{O}(l)$ sur une grassmannienne **132**
6.1 Grassmanniennes usuelles 132
6.1.1 Fibrés tautologiques et quotients ; fibré tangent 132
6.1.2 Partitions admissibles 133
6.1.3 Description explicite de toutes les partitions l-admissibles 133
6.1.4 Partitions admissibles de poids maximal 135
6.2 Grassmanniennes symplectiques 139
6.2.1 Etude du fibré tangent 139
6.2.2 Cohomologie de Dolbeault de $\mathcal{O}(1)$ 141
6.3 Grassmanniennes quadratiques 144
6.3.1 Etude du fibré tangent 144
6.3.2 Cohomologie de Dolbeault de $\mathcal{O}(1)$ 144

7 Deux résultats pour des fibrés amples généraux 146
7.1 Un théorème pour les puissances de Schur quelconques d'un fibré ample. 146
7.1.1 Etude d'une classe de fonctions 146
7.1.2 Un résultat sur les produits tensoriels de crochets 148
7.2 Résultats topologiques en petit co-rang 154
7.2.1 Propriétés topologiques des lieux de dégénérescence 155
7.2.2 Théorèmes d'annulation en petit co-rang 159
7.2.3 Une nouvelle piste possible 165

8 Théorèmes d'annulation pour les puissances extérieures d'un fibré ample muni d'une forme symplectique ou quadratique 167
8.1 Cas symplectique 167
8.1.1 Cadre géométrique, notations 167
8.1.2 Cohomologie de $\mathcal{O}(1)$ sur $G_\omega(e, \mathbb{C}^{2e})$ 169
8.1.3 Théorème d'annulation 169
8.2 Cas quadratique 173
8.2.1 Cadre géométrique, notations 173
8.2.2 Cohomologie de $\mathcal{O}(2)$ sur $G_Q(e, \mathbb{C}^{2e})$ 175
8.2.3 Théorème d'annulation 175

Première partie

Géométrie de quelques algèbres

Chapitre 1

Définition géométrique d'une algèbre en général

Dans ce chapitre, je donne des outils généraux pour définir géométriquement une algèbre, puis j'illustre l'emploi de ces outils avec la définition des algèbres de Lie simples et des algèbres de matrices.

1.1 Comment définir géométriquement une structure d'algèbre ?

J'appelle algèbre un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie muni d'une application bilinéaire $V \times V \to V$. Ainsi, je ne suppose ni la commutativité, ni l'associativité, ni l'existence d'un élément neutre. En général, il ne sera pas possible de définir géométriquement ce morphisme, mais seulement l'application rationnelle $\mathbb{P}V \times \mathbb{P}V \dashrightarrow \mathbb{P}V$, les constructions étant des constructions de géométrie projective. Plus exactement, ce type de constructions ne définira qu'une application rationnelle $X \times X \dashrightarrow \mathbb{P}V$, où X désigne une sous-variété de $\mathbb{P}V$. Je conçois ce paragraphe comme une boîte contenant des outils qui permettent d'établir que cette application rationnelle détermine la structure d'algèbre à homothéties près. A priori, deux questions se posent :

- Etant donnée une application rationnelle $X \times X \dashrightarrow \mathbb{P}V$, existe-t-il une algèbre sur V telle que pour tout x et y dans le cône affine sur X, le produit xy est donné, projectivement, par cette application rationnelle ?
- Existe-t-il au plus une telle algèbre ?

Je donne des éléments de réponse à ces deux questions dans les deux paragraphes qui suivent.

1.1.1 Unicité

Commençons par un exemple qui montre que la question n'est pas triviale : considérons deux applications rationnelles $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, définies, si X, Y, Z, T désignent les coordonnées de $\mathbb{P}^3$, par $f_1 = (X, Y, Z)$ et $f_2 = (Y, Z, T)$. Ces deux applications rationnelles coïncident sur une cubique gauche de $\mathbb{P}^3$, non-dégénérée, et pourtant les deux

applications linéaires ne sont pas proportionnelles. L'exemple 1.2 fournit de même un contre-exemple concernant des applications bilinéaires. On peut cependant remarquer que f_1 et f_2 n'ont pas le même noyau : ceci justifie l'hypothèse faite dans le lemme qui suit.

Lemme 1.1.1 *Soient V et W des espaces vectoriels, $\varphi, \psi : \mathbb{P}V \dashrightarrow \mathbb{P}W$ des applications linéaires et $X \subset \mathbb{P}V$ une variété irréductible non-dégénérée. Supposons que les applications rationnelles $\varphi, \psi : X \dashrightarrow \mathbb{P}W$ coïncident et que $Ker\ \widehat{\varphi} = Ker\ \widehat{\psi}$. Alors φ et ψ sont projectivement égales.*

$\widehat{\varphi}$ et $\widehat{\psi}$ sont des applications linéaires $V \to W$ définissant φ et ψ. Comme X est non-dégénérée, φ et ψ sont bien définies sur un ouvert de X.
Remarque : Attention, on fait l'hypothèse forte que $\widehat{\varphi}$ et $\widehat{\psi}$ ont même noyau dans V, non pas seulement sur le cône affine sur X, noté $\widehat{X}$.
Démonstration : Si $Y \subset V$ est un ensemble, notons $\langle Y \rangle \subset V$ le sous-espace vectoriel qu'il engendre. On a Im $\widehat{\varphi} = \langle \widehat{\varphi}(\widehat{X}) \rangle = \langle \widehat{\psi}(\widehat{X}) \rangle =$ Im $\widehat{\psi} =: I$ et par hypothèse Ker $\widehat{\varphi} =$ Ker $\widehat{\psi} =: K$. Il existe donc $A \in GL(I)$ telle que $\widehat{\psi} = A\widehat{\varphi}$. En effet, si V' est un supplémentaire de K dans V et φ', ψ' les isomorphismes de V' avec I tels que, sur $V = K \oplus V'$, on ait $\widehat{\varphi} = (0, \varphi')$ et $\widehat{\psi} = (0, \psi')$, il suffit de poser $A = \psi' \circ \varphi'^{-1}$. Alors, comme φ et ψ sont projectivement égales sur X, $\psi(X)$ ne contient que des vecteurs propres de A. Mais $\psi(X)$ est irréductible donc connexe ; de plus il est non-dégénéré dans I donc A n'a qu'un seul espace propre, I ; c'est donc un multiple de l'identité et φ et ψ sont projectivement égales. •
La démonstration montre que le résultat est encore vrai si φ et ψ sont définies sur tout X qui est seulement supposé connexe.

Dans le cas où on a accès aux schémas de zéros des applications linéaires, on pourra appliquer le lemme qui suit.

Lemme 1.1.2 *Soient f et $g : V \to W$ deux applications linéaires. Soit $X \subset \mathbb{P}V$ une sous-variété fermée irréductible et non dégénérée. On suppose que*

1. *Les schémas de zéros définis dans X par f et g coïncident. Soit Z ce sous-schéma.*
2. *Les applications régulières induites $[f]$ et $[g] : X \backslash Z \to \mathbb{P}W$ coïncident.*

Alors le noyau de f coïncide avec celui de g, et il existe un scalaire λ non nul tel que $f = \lambda g$.

Démonstration : L'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur Ker f égale l'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur le schéma $X \cap$ Ker $f = Z$, puisqu'aucune forme linéaire ne s'annule sur X. Ainsi, Ker $f =$ Ker g et le lemme 1.1.1 s'applique. •

Plaçons-nous maintenant dans la situation où l'on applique le lemme 1.1.1 pour une famille d'applications linéaires. Dans le lemme qui suit, $G(r, V)$ désigne la grassmannienne des r-plans dans V.

Lemme 1.1.3 *Soient V et W des espaces vectoriels, Λ une variété algébrique et $X \subset \mathbb{P}V$ une variété irréductible non-dégénérée. Soit $k : \Lambda \to G(r, V)$ une application algébrique. Soit enfin $\varphi : \Lambda \times X \dashrightarrow \mathbb{P}W$ une application rationnelle telle que $\forall \lambda \in \Lambda$, il*

existe un ouvert U_λ de X tel que $\varphi_\lambda := \varphi_{|\{\lambda\}\times X}$ est définie sur U_λ et est la restriction d'une application linéaire $\mathbb{P}V \dashrightarrow \mathbb{P}W$ de noyau $k(\lambda)$.

Alors l'application $\Lambda \to \mathbb{P}End(V,W)$ définie par le lemme 1.1.1 est algébrique.

Démonstration : Je remercie Stéphane Druel de m'avoir donné l'idée de cette preuve. Dans un premier temps, on se ramène au cas où φ est définie partout. Soit $\lambda_0 \in \Lambda$ et $K_0 = k(\lambda_0)$. Soit n la dimension de V et $(x_1, \ldots, x_{n-r})$ une famille de vecteurs de V indépendants dans le quotient V/K_0, et dont les projectivisés sont dans X. Soit L l'espace vectoriel engendré par $x_1, \ldots, x_{n-r}$, alors $X \cap L$ est non-dégénérée dans L. Elle est aussi connexe par une variante du théorème de Bertini. De plus, au voisinage de λ_0, L ne rencontre pas le noyau de l'application linéaire φ_λ. Pour démontrer que notre application est algébrique dans un voisinage $V(\lambda_0)$ de λ_0, grâce au lemme qui suit, il suffit de démontrer que l'application $V(\lambda_0) \subset \Lambda \to \mathbb{P}End(L,W)$ est algébrique.

Lemme 1.1.4 *Soit Λ une variété algébrique, V et W des espaces vectoriels, et $L \subset V$ un sous-espace vectoriel. Soit $\psi : \Lambda \to \mathbb{P}End(L,W)$ une application algébrique et $k : \Lambda \to G(r,V)$ telle que $\forall \lambda \in \Lambda, k(\lambda)$ et L sont supplémentaires. Alors l'application $\lambda \mapsto \varphi_\lambda \in \mathbb{P}End(V,W)$, définie par le fait que, d'une part, φ_λ et $\psi(\lambda)$ coïncident sur L, et que, d'autre part, le noyau de φ_λ est $k(\lambda)$, est algébrique.*

Démonstration : Soit $\lambda_0 \in \Lambda$ et $(x_1, \ldots, x_r)$ une base de $k(\lambda_0)$. Soit aussi $x_{r+1}, \ldots, x_n$ une base de L. Choisissons une application $\widehat{\psi} : \Lambda \to End(L,W)$ qui relève ψ. Soit aussi, pour λ dans un voisinage adéquat de λ_0, $y_i(\lambda) = x_i + l_i(\lambda)(1 \leq i \leq r)$ l'unique vecteur de $k(\lambda)$ dont l'image par la projection $L \oplus k(\lambda_0) \to k(\lambda_0)$ est x_i. Il est connu que l'application $l_i : \Lambda \to L$ est algébrique. Un relevé de l'application $\Lambda \to \mathbb{P}End(V,W)$ cherchée est l'application

$$\Lambda \to End(V,W), \lambda \mapsto \left(x_i \mapsto -\widehat{\psi}(\lambda)(l_i(\lambda)), l_i \mapsto \widehat{\psi}(\lambda)(l_i)\right). \qquad \bullet$$

La démonstration de la proposition 1.1.3 se ramène donc au cas d'une application partout définie $\varphi : \Lambda \times X \to \mathbb{P}W$. L'idée de la preuve est alors la suivante : pour tout $\lambda \in \Lambda$, la donnée d'une application linéaire qui coïncide sur X avec φ_λ équivaut à la donnée d'un isomorphisme $\mathcal{O}_X(1) \simeq \varphi_\lambda^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}W}(1)$. Il s'agit en fait de montrer que l'on peut faire cette identification "en famille". A cet effet, on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}(1) & & & & \\ \downarrow & & & & \\ \mathbb{P}W & \xleftarrow{\varphi} & \Lambda \times X & \xrightarrow{q} & X \\ & & \downarrow p & & \\ & & \Lambda & & \end{array}$$

Etudions alors le fibré vectoriel sur $\Lambda \times X$ égal à $\varphi^*\mathcal{O}(1)$. En restriction à une fibre $p^{-1}(\lambda)$, ce fibré vaut $\varphi_\lambda^*\mathcal{O}(1)$; il est donc isomorphe à $q^*\mathcal{O}(1)$, puisque par hypothèse φ_λ

est linéaire. Par un résultat classique [Hart 77, exercice 12.4,p.291], il existe un fibré en droites L sur Λ tel que $\varphi^*\mathcal{O}(1) \simeq q^*\mathcal{O}(1) \otimes p^*L$. En appliquant p_*, il vient $p_*\varphi^*\mathcal{O}(1) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \otimes L$. En effet, d'une part, si $U \subset X$ est un ouvert, alors une section de $q^*\mathcal{O}(1)$ sur $U \times X$ est une section sur U de $H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$. D'autre part, la formule de projection [Hart 77, exercice 5.1,p.124] assure que $p_*p^*L \simeq L$, car $p_*\mathcal{O}_{\Lambda\times X} \simeq \mathcal{O}_\Lambda$, puisque X est projective et connexe.

Or, on a un morphisme naturel de fibrés vectoriels sur Λ : $W^* \to p_*\varphi^*\mathcal{O}(1) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \otimes L$. L'hypothèse que $H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) = V^*$, soit que X est linéairement normale, n'est pas nécessaire, puisque le fait que φ_λ est linéaire pour tout $\lambda \in \Lambda$ montre que ce morphisme de fibrés est à valeurs dans le sous-fibré $V^* \otimes L$ de $H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \otimes L$. On obtient finalement un morphisme de fibrés $W^* \to V^* \otimes L$ sur Λ, soit une section du fibré $V^* \otimes W \otimes L$. Localement sur Λ, L est trivial, et on obtient l'application $\Lambda \to V^* \otimes W = End(V, W)$ souhaitée. L'application $\Lambda \to \mathbb{P}End(V, W)$, qui ne dépend pas des choix, est donc algébrique. •

On considère maintenant des applications bilinéaires :

Lemme 1.1.5 *Soit V et W des espaces vectoriels, $f, g : V \times V \to W$ des applications bilinéaires, $X \subset \mathbb{P}V$ une variété irréductible et non-dégénérée. Soit $Z(f), Z(g) \subset X \times X$ les schémas des zéros de f et g dans $X \times X$. Supposons que :*

1. *$Z(f) = Z(g) = Z$.*
2. *Les applications régulières $[f], [g] : X \times X \backslash Z \to \mathbb{P}W$ sont égales.*

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{C}^* : \forall x, y \in V, f(x, y) = \lambda g(x, y)$.

Démonstration : Soit $y_0 \in \widehat{X}$ tel que $f(., y_0)$ n'est pas identiquement nulle. Le lemme 1.1.2 montre que les applications linéaires $x \mapsto f(x, y_0)$ et $x \mapsto g(x, y_0)$ sont proportionnelles. Soit donc $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $f(x, y_0) = \lambda g(x, y_0)$. Soit maintenant $x \in \widehat{X}$ tel que $g(x, y_0) \neq 0$ (un tel x existe car X est non-dégénérée). Ce même lemme montre qu'il existe μ_x tel que $\forall y \in V, f(x, y) = \mu_x g(x, y)$. En appliquant cette égalité à y_0, on en déduit que $\mu_x = \lambda$ et que donc $\forall y \in V, f(x, y) = \lambda g(x, y)$. Cette égalité est vraie pour x générique de $\widehat{X}$, donc pour tout élément de $\widehat{X}$, et donc par linéarité pour tout $x \in V$. •

Remarque : Une conséquence de ce lemme est qu'étant donnnées deux algèbres vérifiant ces hypothèses sur un espace vectoriel V, si l'une a un élément neutre, alors elles en ont un toutes les deux et ces deux éléments neutres sont proportionnels.

On démontre maintenant un résultat valable plus généralement pour des applications homogènes entre espaces projectifs (plus nécessairement linéaires) :

Lemme 1.1.6 *Soient V et W des espaces vectoriels, et φ, ψ des applications $V \to W$ données par des polynômes homogènes de degré d. Soit $X \subset \mathbb{P}V$ une variété connexe normale n'annulant aucun polynôme de degré d. Supposons qu'en tous points du cône affine sur X, φ et ψ sont proportionnelles, et que l'intersection de X avec l'ensemble $\{\varphi = 0\}$ est un fermé de codimension au moins 2 dans X.*

Alors, φ et ψ sont proportionnelles.

Remarque : La démonstration va montrer plus généralement que, si l'on ne fait pas l'hypothèse que X n'annule aucun polynôme de degré d, alors il existe une constante c telle que $\psi - c\varphi$ appartienne à l'idéal homogène de X.
Démonstration : Soit $U \subset X$ un ouvert dont le complémentaire est de codimension au moins 2 sur lequel φ ne s'annule pas. Pour $u \in U \subset \mathbb{P}V$, il existe un nombre $\lambda(u)$ tel que pour tout $v \in V$ tel que $[v] = u$, $\psi(v) = \lambda(v).\varphi(v)$. Ceci définit une fonction $\lambda : U \to \mathbb{C}$. Mais comme U est un ouvert dont le complémentaire est de codimension au moins deux dans X qui est normale, λ se prolonge à X. Comme cette variété est connexe, λ est donc constant, et on a, sur le cône affine sur X, $\psi(x) - \lambda.\varphi(x) = 0$. Comme aucun polynôme de degré d ne s'annule sur X, cette application est identiquement nulle sur V. •

Enfin, revenant aux applications linéaires, nous allons voir que des hypothèses sur X permettent d'éviter toute hypothèse concernant les noyaux des applications linéaires :

Lemme 1.1.7 *Soient V et W des espaces vectoriels, φ et $\psi : V \to W$ des applications linéaires de rang au moins 2 et $X \subset \mathbb{P}V$ une variété connexe non-dégénérée normale. Supposons que la classe d'une section hyperplane, considérée comme élément de $Pic(X)$, n'est pas somme de deux diviseurs effectifs non triviaux.*

Alors, si de plus les applications rationnelles projectives $[\varphi]_{|X}, [\psi]_{|X} : X \dashrightarrow \mathbb{P}W$ coïncident, φ et ψ sont proportionnelles.

Remarque : La condition portant sur la classe d'une section hyperplane est vérifiée par exemple si le morphisme de restriction $Pic(\mathbb{P}V) \to Pic(X)$ est surjectif : en effet, on a alors $Pic(X) \simeq \mathbb{Z}$ et $[H] \simeq 1$. On sait que c'est par exemple le cas lorsque X est l'orbite fermée d'un groupe simple agissant dans une de ses représentations fondamentales.
Démonstration : L'hypothèse sur $[H]$ implique que la dimension de X est au moins 2. Ecrivons $\varphi = (h_1, \ldots, h_p)$, avec h_i des formes linéaires sur V et $m = \dim W$. Supposons par ailleurs que h_1 et h_2 sont non nulles et non proportionnelles (φ est au moins de rang 2), et notons H_1 et H_2 les hyperplans de $\mathbb{P}V$ qu'ils définissent. Pour appliquer le lemme 1.1.6, il suffit de vérifier que $\dim X \cap H_1 \cap H_2 = \dim X - 2$. L'hypothèse sur $[H]$ implique que $X \cap H_1$ est un shéma irréductible réduit. On aura donc $\dim X \cap H_1 \cap H_2 < \dim X \cap H_1$ si H_1 est le seul hyperplan contenant le schéma $X \cap H_1$. Or, on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(1) \to \mathcal{O}_{H_1 \cap X}(1) \to 0.$$

On en déduit une suite exacte

$$0 \to \mathbb{C} \to H^0(X, \mathcal{O}(1)) \to H^0(X \cap H_1, \mathcal{O}(1)),$$

qui montre que le noyau de la restriction d'une forme linéaire au schéma $X \cap H_1$ est exactement l'ensemble des multiples de h_1, achevant la preuve. •

Comme pour le lemme 1.1.5, le lemme 1.1.7 admet une version concernant les applications bilinéaires :

Lemme 1.1.8 *Soit V_1, V_2, W des espaces linéaires, $X_1 \subset \mathbb{P}V_1$ et $X_2 \subset \mathbb{P}V_2$ des variétés projectives connexes non dégénérées normales et telles que la classe d'une section hyperplane engendre le groupe de Picard. Si $f, g : V_1 \times V_2 \to W$ sont des applications bilinéaires telles que pour $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ génériques, $f(x_1, .)$, $g(x_1, .), f(., x_2), g(., x_2)$ sont de rang au moins deux, et si f et g induisent la même application rationelle $X_1 \times X_2 \dashrightarrow \mathbb{P}W$, alors elles sont proportionnelles.*

Lemme 1.1.9 *Soient V et W des espaces vectoriels, φ et $\psi : V \to W$ des applications linéaires de rang au moins 2 et $X \subset \mathbb{P}V$ une variété connexe non dégénérée. Supposons que X n'est incluse dans aucune quadrique de rang au plus 4.*

Alors, si de plus les applications rationnelles projectives $[\varphi]_{|X}, [\psi]_{|X} : X \dashrightarrow \mathbb{P}W$ coïncident, φ et ψ sont proportionnelles.

Le rang d'une quadrique est son rang en tant que forme bilinéaire.

Démonstration : Ecrivons $\varphi = (f_1, \ldots, f_n)$, où n est la dimension de W et les f_i sont des formes linéaires. Ecrivons de même $\psi = (g_1, \ldots, g_n)$. Alors, l'hypothèse que φ et ψ sont proportionnelles sur X montre que pour tous i, j, le mineur $f_i g_j - f_j g_i$ s'annulle sur X. Comme X n'annule aucune quadrique de rang au plus 4, cette quadrique est nulle sur V. Ainsi, $[\varphi]$ et $[\psi] : \mathbb{P}V \dashrightarrow \mathbb{P}W$ sont des applications rationelles égales, et le lemme 1.1.7 montre qu'elles sont proportionnelles. •

1.1.2 Existence

A ce sujet, je n'ai qu'un résultat concernant les isomorphismes ; il serait utile d'approfondir cette question.

Définition 1.1 *Une variété $X \subset \mathbb{P}V$ sera dite bien plongée dans $\mathbb{P}V$ si*

- *elle est linéairement normale.*
- *Il existe des fibrés en droite L_i sur X qui forment une base de $Pic(X)$ et tels que $\sum a_i L_i \in Pic(X)$ admet des sections non nulles si et seulement si $\forall i, a_i \geq 0$.*
- *Il existe un entier a tel que la classe de la section hyperplane soit $a(\sum_i L_i)$.*

Si X est bien plongée, une base de $Pic(X)$ sera dite adaptée si elle a les propriétés indiquées. Cette définition est bien entendu très peu naturelle, mais toutes les variétés que nous allons étudier dans cette thèse seront bien plongées, grâce au lemme suivant.

Lemme 1.1.10 *Soit G un groupe semi-simple simplement connexe et ω un poids qui est un multiple entier d'une somme de poids fondamentaux distincts de G. Soit V_ω la représentation de plus haut poids ω et $X \subset \mathbb{P}V_\omega$ l'orbite fermée. Alors X est bien plongée.*

Démonstration : Cette orbite est linéairement normale par le théorème de Bott (théorème 5.1). En effet, le fibré en droites $\mathcal{O}(1)$ correspond au poids ω, pour la correspondance entre fibrés homogènes et représentations du stabilisateur d'un point de X expliquée avant l'énoncé de ce théorème.

Ecrivons $\omega = a(\sum_i \omega_i)$, où les ω_i sont des poids fondamentaux distincts. A ω_i correspond un fibré en droites que je note L_i. Ces fibrés forment une base du groupe de Picard de X [Akh 95, p.122]. Enfin, toujours par le théorème de Bott, et puisque $\sum a_i \omega_i$ est un poids dominant si et seulement si tous les a_i sont positifs ou nuls, $\sum a_i L_i$ admet des sections globales si et seulement si $\forall i, a_i \geq 0$. •

L'intérêt de cette définition réside, pour ce qui nous intéresse, dans le fait que tout automorphisme d'une variété bien plongée est induit par un automorphisme de l'espace projectif ambient :

Lemme 1.1.11 *Soit $X \subset \mathbb{P}V$ une variété bien plongée. Alors tout automorphisme de X est induit par un automorphisme de $\mathbb{P}V$.*

Démonstration : Soit f un tel automorphisme et g son inverse. Soit L_i une base de $Pic(X)$ adaptée. Alors, puisque $\forall i, f^*L_i$ admet des sections non nulles, dans la base L_i, la matrice de l'application $f^* : Pic(X) \to Pic(X)$ n'a que des coefficients entiers positifs ou nuls. La même remarque vaut pour g^*, et comme $g^* \circ f^* = Id$, on en déduit que les matrices de f^* et de g^* sont des matrices de permutation. En effet, on peut écrire ces matrices comme $S_1 + R_1$ et $S_2 + R_2$, où S_i sont des matrices de permutation, et R_i sont à coefficients positifs ou nuls. Comme $I = (S_1 + R_1)(S_2 + R_2) = S_1S_2 + (S_1R_2 + R_1S_2 + R_1R_2)$, et qu'une matrice de permutation a la somme de ses coefficients égale à son ordre, on voit que $S_1R_2 + R_1S_2 + R_1R_2 = 0$; chacun de ces termes est donc nul, ce qui implique $R_1 = R_2 = 0$, puisque S_1 et S_2 sont inversibles.

La définition de base adaptée implique donc que, si $[H]$ désigne la classe d'un hyperplan, alors $f^*[H] \simeq [H]$. Puisque X est linéairement normale, en prenant les sections globales de cet isomorphisme, on en déduit que f est induite par un isomorphisme linéaire. •

Des conditions sur le fibré canonique permettent aussi de montrer le même résultat :

Lemme 1.1.12 *Soit $X \subset \mathbb{P}V$ une variété satisfaisant :*

1. *X est linéairement normale.*
2. *$Pic(X)$ est sans torsion.*
3. *K_X est un multiple rationel non nul de la section hyperplane : $\exists m \in \mathbb{Q}^* : K_X = m[H]$.*

Alors tout automorphisme de X est induit par un automorphisme de $\mathbb{P}V$.

Démonstration : Si f est un automorphisme de X, on a $f^*K_X = K_X$. Comme $Pic(X)$ est sans torsion, en multipliant par $1/m$, on en déduit que $f^*[H] = [H]$. On conclut comme précédemment en utilisant le fait que X est linéairement normale. •

1.2 Exemples

1.2.1 Algèbres de Lie simples

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. Je souhaite définir le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ en utilisant des constructions de géométrie projective. Cet exemple sera pour moi l'occasion de montrer l'efficacité des lemmes précédents, mais aussi d'exhiber un contre-exemple où la définition projective de $A * B$ pour A et B dans une sous-variété non-dégénérée ne suffit pas pour définir l'algèbre.

Tout d'abord, considérons le groupe $G = Aut(\mathfrak{g})$ (et non pas seulement $Aut(\mathfrak{g})^0$ come c'est souvent le cas), d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et son action naturelle sur $\mathfrak{g}$. L'orbite fermée pour l'action de G sur $\mathbb{P}\mathfrak{g}$ est souvent appelée "variété adjointe". Notons $X \subset \mathbb{P}\mathfrak{g}$ cette variété. Nous allons voir que dans presque tous les cas, la donnée de X suffit pour définir le crochet de Lie (à homothéties près).

Soit $A \in X$; puisque X est homogène, on a $X = G.A$. Par conséquent, $T_AX = \mathfrak{g}.A = \{[A, B], B \in \mathfrak{g}\}$, puisqu'il est bien connu que $\mathfrak{g}$ agit sur $\mathfrak{g}$ par l'action adjointe. On peut en déduire que pour tout $A, B \in X$, $[A, B] \in T_AX \cap T_BX$. J'affirme que l'espace vectoriel $T_AX \cap T_BX$, pour A et B génériques de X, est de dimension 1. Ceci fait en effet

partie de la proposition 4.12 ; la preuve en est très simple mais requiert des notations qu'il n'est pas utile d'introduire ici. Ceci définit donc $[A, B]$ projectivement. Puisque les représentations adjointes sont fondamentales pour toutes les algèbres de Lie simples sauf $\mathfrak{sl}_n$ et $\mathfrak{sp}_{2n}$, le lemme 1.1.7 et son commentaire montrent que cela suffit pour définir le crochet de Lie dans les cas $\mathfrak{so}_n$ et exceptionnels.

Considérons alors le cas de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n$. La représentation adjointe est l'ensemble des matrices d'ordre n et de trace nulle. La variété adjointe, X, est l'ensemble des matrices de rang 1. Remarquons que si $A \in X$, ceci signifie que Im A est de dimension 1, il est donc constitué de vecteurs propres, et le fait que $\mathrm{tr}A = 0$ montre que Im $A \subset$ Ker A. On peut donc associer à A son noyau, qui est un hyperplan, et son image, qui est un point de $\mathbb{P}^{n-1}$ dans cet hyperplan. La variété X s'identifie ainsi à la variété des drapeaux $F(1, n-1)$, consitutée des couples (x, H), où $x \in \mathbb{P}^{n-1}, H \in \mathbb{P}^{n-1*}$, et $x \in H$. Enfin, $g \in SL_n$ agit par conjugaison sur $A \in \mathfrak{sl}_n$: $g.A = gAg^{-1}$, ce qui implique que $g.(x, H) = (g.x, g.H)$. Le lemme qui suit étudie les orbites pour l'action de SL_n dans $X \times X$ donnée par $g.(A, B) = (g.A, g.B)$. Comme je l'expliquerai ensuite, il permet de comprendre à quelle condition géométrique deux matrices de rang un commutent. Soit $e_1 \ldots, e_n$ une base de $\mathbb{C}^n$ et $e_1^* \ldots, e_n^*$ sa base duale.

Lemme 1.2.1 *Soient A et B des éléments de X. A une action de SL_n près, on peut supposer que $A = e_n^* \otimes e_1$ et que B est une des matrices suivantes :*

$$A, e_{n-1}^* \otimes e_1, e_n^* \otimes e_2, e_{n-1}^* \otimes e_2, e_1^* \otimes e_{n-1}, e_2^* \otimes e_n, e_1^* \otimes e_n.$$

Démonstration : Sous l'action de SL_n, il y a, dans $X \times X$, 7 orbites. Etant donnés deux drapeaux $(x_1 \in H_1), (x_2 \in H_2)$, on peut en effet avoir :

1. $x_1 = x_2$
   - $H_1 = H_2$: premier cas ;
   - $H_1 \neq H_2$. Alors $x_1 = x_2 \in H_1 \cap H_2$: deuxième cas ;
2. $x_1 \neq x_2$.
   - $H_1 = H_2$. Alors $x_1, x_2 \in H_1 = H_2$: troisième cas ;
   - $H_1 \neq H_2$.
     (a) $x_1 \in H_2$ et $x_2 \in H_1$: quatrième cas ;
     (b) $x_1 \notin H_2$ et $x_2 \in H_1$: cinquième cas ;
     (c) $x_1 \in H_2$ et $x_2 \notin H_1$: sixième cas ;
     (d) $x_1 \notin H_2$ et $x_2 \notin H_1$: septième cas ; •

Remarquons que les cas 2,3,5,6 ne se produisent que lorsque $n \geq 3$, et que le quatrième cas exige $n \geq 4$. Par ailleurs, A et B commutent si et seulement si pour $i = 1, 2, x_i \in H_{3-i}$, soit si et seulement si on est dans l'un des quatre premiers cas. Si $n > 2$ et A et B sont de rang un, A et B commutent donc si et seulement si $\dim T_A X \cap T_B X > 1$.

Si $n = 2$, X est une conique, et le noyau de l'action adjointe de A est l'ensemble des multiples de A lui-même. En vertu du lemme 1.1.5, ceci définit le produit. Remarquons, de façon assez amusante, que l'on peut définir un autre produit tel que $A*B$ appartienne à $T_AX \cap T_BX$:

Exemple 1.2 *Soit $C \subset \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}V$ une conique et $I \in \mathbb{P}V - C$. Il existe des algèbres $*_1$ et $*_2$ sur V telles que*

1. *$\forall A, B \in \widehat{C}, A *_1 B$ et $A *_2 B$ appartiennent à $T_AC \cap T_BC$.*
2. *– La droite de V des éléments B tels que $A *_1 B = 0$ est représentée par A.*
   – La droite de V des éléments B tels que $A *_2 B = 0$ est représentée par l'autre point d'intersection de la droite (AI) avec C.

En vertu du lemme 1.1.5, ces algèbres sont uniques ; $*_1$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2 \simeq \mathfrak{sp}_2$ et $*_2$ à l'algèbre des matrices d'ordre 2 symétriques, munies du produit $A *_2 B = \frac{1}{2}(AB + BA)$; I est l'unité pour cette dernière algèbre.

Démonstration : Nous venons de traiter le cas de $\mathfrak{sl}_2$. Les algèbres de matrices symétriques sont un cas particulier d'algèbres de Jordan, définies géométriquement au chapitre 3. •

Dans le cas $n \geq 3$, un analogue du lemme 1.1.6 pour les applications bilinéaires (semblable au lemme 1.1.5) montre que la structure d'algèbre est définie de façon univoque par le fait que $[A, B] \in T_AX \cap T_BX$.

Pour toutes les algèbres de Lie différentes de $\mathfrak{sp}_{2n}$, nous venons de voir que la variété adjointe, $X \subset \mathbb{P}\mathfrak{g}$, détermine l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Comme conséquence, on retrouve le fait que $Aut(X) = Aut(\mathfrak{g})$: en effet, on a par définition $Aut(\mathfrak{g}) \subset Aut(X)$, mais réciproquement, si $g \in Aut(X)$, alors le lemme 1.1.11 dit que l'on peut supposer que $g \in GL(\mathfrak{g})$ et g préserve X. Alors le lemme 1.1.5 montre que les applications bilinéaires $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ données par les formules $(A, B) \mapsto g.[A, B]$ et $(A, B) \mapsto [gA, gB]$ sont proportionnelles.

A l'inverse, puisque la variété adjointe de $\mathfrak{sp}_{2n}$, $X \subset \mathbb{P}\mathfrak{sp}_{2n}$, est isomorphe à $\nu_2(\mathbb{P}^{2n-1})$, on voit que $Aut(X) = PSL_{2n}$, et que donc, X ne détermine pas l'algèbre de Lie. En fait, c'est même un contre-exemple très intéressant : X s'identifie aux matrices de rang 1 dans l'ensemble des matrices symétriques d'ordre $2n$. Sur l'ensemble de ces matrices, on peut définir le produit $A * B = \frac{1}{2}(AB + BA)$. Il se trouve que pour $A, B \in X$, génériques, $A*B$ engendre aussi l'intersection de T_AX et de T_BX. Ceci est démontré au paragraphe 4.2.4. Ce qui différencie géométriquement ces deux algèbres (l'algèbre $\mathfrak{sp}_{2n}$ et l'algèbre des matrices symétriques), très différentes d'un point de vue algébrique, est donc "seulement" la condition d'annulation du produit.

La condition $A * B = 0$ est décrite géométriquement au paragraphe 4.2.4 ; donnons ici une description géométrique de la condition $[A, B] = 0$. Comme je l'ai déjà dit, la variété X ne peut pas suffire pour donner cette description. Soit $V = \mathbb{C}^{2n}$; $\mathfrak{g}$ s'identifie à S^2V. Je vais utiliser les notations de Bourbaki [Bou 68] pour le système de racines de cette algèbre de Lie ; ces notations sont d'ailleurs rappelées dans l'autre partie de cette thèse (paragraphe 5.1.2). La variété X est l'orbite du vecteur $e_1^2 \in S^2V$ de poids

la plus haute racine. Cette racine, $2\epsilon_1$, est longue. Considérons donc aussi la variété Y adhérence de l'orbite du vecteur e_1e_2 de poids la plus haute racine courte, $\epsilon_1+\epsilon_2$. C'est l'ensemble des produits $xy \in S^2V$, avec x et y des éléments de V orthogonaux pour la forme symplectique. Comme le crochet de Lie est donné, de ce point de vue, par $[x^2,y^2]=2\omega(x,y)xy$, deux éléments $A=x^2$ et $B=y^2$ de X commutent si et seulement si $\omega(x,y)=0$, soit si et seulement si la droite (A,B) est incluse dans Y. Cette condition définit l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_{2n}$.

On peut alors comme précédemment déduire $Aut(Y)$. Etudions d'abord quelques propriétés géométriques de Y :

Lemme 1.2.2 *Y est projectivement normale ; son groupe de Picard est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et est engendré par la classe d'une section hyperplane.*

Démonstration : Soit L un générateur de $Pic(X)$; $2L$ est la section hyperplane de X. Pour démontrer les affirmations concernant $Pic(Y)$, il suffit de montrer que le morphisme de restriction $Pic(Y)\to Pic(X)$ est injectif et que L n'est pas dans son image.

Pour le premier point, soit M un fibré en droites sur Y dont la restriction à X est triviale. Considérons la grassmannienne $\mathbb{G}_\omega(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}V)$ des droites projectives dans $\mathbb{P}V$ isotropes pour ω. Alors, une droite l de $\mathbb{G}_\omega(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}V)$ détermine un plan $\pi_l\subset Y$ engendré par $\nu_2(l)$ (rappelons que $\nu_2 : \mathbb{P}V\to\mathbb{P}S^2V$ désigne l'application de Veronese). Par ailleurs, $X\cap\pi_l=\nu_2(l)$. La restriction de M à π_l est un fibré en droites sur π_l qui se restreint au fibré trivial sur une conique. Ainsi, $M_{|\pi_l}$ est le fibré trivial. On va en déduire que M est trivial. Pour cela, considérons la variété d'incidence $I\subset Y\times\mathbb{G}_\omega(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}V)$ définie par $(y,l)\in I\Longleftrightarrow y\in\pi_l$, et les deux projections p_1,p_2 de I vers Y et $\mathbb{G}_\omega(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}V)$.

Remarquons que $p_1 : I\to Y$ est une résolution des singularités. En effet, I, espace total d'une fibration en $\mathbb{P}^2$ sur $\mathbb{G}_\omega(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}V)$, est lisse. Si $x,y\in V$ sont orthogonaux, alors on a vu que la droite passant par x^2 et y^2 est dans Y ; ainsi, $T_{x^2}Y\supset\{y^2:\omega(x,y)=0\}$. On en déduit aisément que $x^2\in Sing(Y)$, et donc que $Sing(Y)=X$. Enfin, la projection $p_1 : p_1^{-1}(Y-X)\to Y-X$ est un isomorphisme. Ceci montre que p_1 est une résolution des singularités. Notons $\widehat{I}$ l'espace total de la deuxième puissance symétrique du fibré tautologique sur $G_\omega(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}V)$: la projectivisation de ce fibré de rang 3 égale I ; notons $\widehat{p}_1$ la projection $\widehat{I}\to\widehat{Y}$. La proposition 1 de [Kem 76] montre alors que $p_1(\widehat{I})=\widehat{Y}$ est normale, de sorte que Y est projectivement normale.

Soit $\mathcal{M}$ le fibré p_1^*M sur I. Comme nous avons vu que $M_{|\pi_l}$ est trivial, $\mathcal{M}$ est trivial sur les fibres de p_2. Ceci implique [Hart 77, exercice 3.12.4,p. 291] l'existence de $M'\in Pic(\mathbb{G}_\omega(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}V))$ tel que $\mathcal{M}=p_2^*M'$. Or, par définition de $\mathcal{M}$, ce fibré est trivial sur une fibre de p_1 ; ceci montre que, pour $x^2\in X$, M' est trivial sur la restriction de $\mathbb{G}_\omega(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}V)$ aux droites passant par x ; M' est donc trivial, et $\mathcal{M}$ aussi. Comme Y est normale et p_1 est projective et birationnelle, $\mathcal{O}_Y=p_{1*}\mathcal{O}_I$, et la formule de projection montre que l'application $p_1^* : Pic(Y)\to Pic(I)$ est injective : on en déduit donc que M est trivial. Ceci montre l'injectivité de l'application de restriction $Pic(Y)\to Pic(X)$.

Pour le deuxième point, supposons qu'il existe un fibré en droites M sur Y tel que $M_{|X}=L$. Alors, soit M_l la restriction de M à $\pi_l\simeq\mathbb{P}^2$. Comme $M_{|X}$ est un générateur du groupe de Picard de X, $M_{l|\nu_2(l)}$ est un générateur du groupe de Picard de la conique $\nu_2(l)=X\cap\pi_l$. Ceci est contradictoire, car un élément du groupe de Picard de $\mathbb{P}^2$ ne se

restreint pas en un générateur du groupe de Picard d'une conique dans ce plan. •

On montre maintenant aisément que $Aut(Y) = PSp_{2n}$. Soit $g \in Aut(Y)$. Par le lemme précédent et le lemme 1.1.11, g est induit par un automorphisme de l'espace ambient. Puisque $Sing(Y) = X$, g préserve X. Par le lemme 1.1.5, $g \in PSp_{2n}$.

1.2.2 Algèbres de matrices

Lorsque A et B sont deux matrices, je ne sais pas déterminer géométriquement le rang de leur produit AB. A plus forte raison, je ne sais pas construire ce produit pour deux matrices quelconques.

Je propose alors la stratégie suivante pour éviter cette difficulté : je ne définis géométriquement ce produit que pour A et B de rang 1 et explique pour A de rang 1 quelles sont les matrices M telles que $AM = 0$. En vertu du lemme 1.1.5, ceci définit l'algèbre des matrices. Cette démarche, même si elle semble peu naturelle, va se révéler puissante dans le cas d'autres algèbres pour répondre à certaines questions comme l'étude du groupe d'automorphismes.

Dans ce cas précis, il est clair que le groupe d'automorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est le groupe PSL_n agissant par $g.A = gAg^{-1}$. Je vais cependant montrer ce résultat par un argument géométrique de façon à illustrer la méthode que je propose d'utiliser dans d'autres cas moins simples. Par ailleurs, ma démarche permet caractériser les algèbres de matrices comme celles pour lesquelles le déterminant est multiplicatif (proposition 1.4).

Proposition 1.1 *Soit W un espace vectoriel de dimension n^2. La donnée d'une structure d'algèbre isomorphe à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur W équivaut à la donnée d'une variété $X \subset \mathbb{P}W$ isomorphe à $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$, d'un choix d'une des deux familles d'espaces linéaires de dimension maximale inclus dans X et d'un élément $I \in W$ qui ne s'écrit pas comme somme de $n-1$ éléments du cône affine sur X.*

La proposition fait correspondre de façon canonique à une telle donnée une algèbre isomorphe à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $A \in X$ et tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, AM appartient à l'unique espace linéaire de la famille choisie passant par A.

Démonstration : Si $X \subset \mathbb{P}W$ est une variété et k un entier, notons $S^kX \subset \mathbb{P}W$ l'adhérence de l'ensemble des classes des sommes de $k+1$ éléments du cône affine sur X ; c'est aussi, en termes de géométrie projective, l'adhérence de la réunion des k-plans engendrés par $k+1$ points de X en position générale, si $k < \dim\langle\widehat{X}\rangle$. Etant donnée une telle structure d'algèbre, on sait que l'ensemble des matrices de rang 1 est isomorphe à $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ et I, de rang n, n'est pas somme de $n-1$ telles matrices. Enfin, choisissons par exemple la famille des espaces linéaires de la forme

$$L(A) := \{AM, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}. \tag{1.1}$$

Réciproquement, étant donné X, I et une famille d'espaces linéaires de dimension maximale X_1, reconstruisons géométriquement l'algèbre sur W telle que I soit l'identité de cette algèbre, X l'ensemble des matrices de rang 1 et X_1 la famille $\{L(A)\}$. Tout

d'abord, $PSL(W)$ agit transitivement sur l'ensemble des variétés isomorphes à $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ et le transporteur d'une telle variété, $PSL_n \times PSL_n$, agit encore transitivement sur $\mathbb{P}W - S^{n-2}X$. Enfin, la transposition sur W induit un isomorphisme de $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ qui échange les deux familles. Ainsi, il existe toujours une telle algèbre. Il suffit donc de montrer que cette algèbre est déterminée par X, I, et le choix d'une des deux composantes. Soit d'abord det l'équation de $S^{n-2}X$ qui vaut 1 en I. Posons $T = \{u \in W : D_I \det(u) = 0\} \in \mathbb{P}W^*$, où si f est une fonction $W \to \mathbb{C}$ et $A \in W$, $D_A f \in W^*$ désigne la différentielle de f en A ($w \in T$ si et seulement si $\mathrm{tr}(w) = 0$). Les deux familles d'espaces de dimension maximale de X sont $\{\{a\} \times \mathbb{P}^{n-1}\}$ et $\{\mathbb{P}^{n-1} \times \{b\}\}$. Ces deux familles X_1 et X_2 sont paramétrées par $\mathbb{P}^{n-1}$. Remarquons qu'un point $x \in X$ appartient à exactement deux espaces linéaires de dimension maximale, un de chaque famille ; je note $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ ces espaces. Notons aussi que ces deux espaces se rencontrent exactement en x ; on a donc un isomorphisme canonique entre X et $X_1 \times X_2$, et je noterai $x = (x_1, x_2)$. Par le lemme 1.1.5, l'algèbre est donc définie par les conditions suivantes :

1. Si $x, y \in X$, alors $x * y$ est colinéaire à (x_1, y_2) (si on a choisi la famille X_1, (x_2, y_1) sinon).
2. $xy = 0$ si et seulement si $(x_2, y_1) \in T$ (en supposant qu'on a choisi X_1).
3. I est l'identité de ce produit. •

Remarques :

- La preuve de la proposition montre que la variété X identifie canoniquement $\mathbb{P}W$ à $\mathbb{P}(V_1 \otimes V_2)$: en effet, si on note V_i des espaces vectoriels tels que $\mathbb{P}V_1$ et $\mathbb{P}V_2$ paramètrent les espaces linéaires maximaux dans X, on a vu qu'on a un isomorphisme naturel $X \simeq \mathbb{P}V_1 \times \mathbb{P}V_2$. Par le lemme 1.1.12, cet isomorphisme est induit par un isomorphisme $\mathbb{P}W \simeq \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2)$.
  En choisissant un élément I, on construit une dualité entre V_1 et V_2, en disant que $v_1 \in \mathbb{P}V_1$ et $v_2 \in \mathbb{P}V_2$ sont orthogonaux si l'intersection des espaces linéaires qu'ils représentent est dans T. Ceci identifie donc V_1 au dual de V_2, et on en déduit un isomorphisme $\mathbb{P}W \simeq \mathbb{P}(V^* \otimes V)$.
  Il y a encore deux contractions naturelles possibles sur $V^* \otimes V$ qui définissent deux algèbres. Le choix d'une des composantes permet de choisir une des deux algèbres.
- Pour que la construction précédente soit purement géométrique, il faut être capable de construire géométriquement l'hyperplan $D_I \det$ connaissant det et I.
  De façon générale, on peut se demander, étant donné un polynôme homogène Q quelconque, s'il existe une construction géométrique des hyperplans $D_A Q$ pour A n'annulant pas Q (si A est un point lisse de l'hypersurface définie par Q, alors cet hyperplan est l'espace tangent à cette hypersurface en A). Ce problème classique est connu sous le nom de polarité. Voici, classiquement, comment on décrit la polarité d'une quadrique :
  Soit $Q \subset \mathbb{P}W$ une quadrique lisse et $A \in \mathbb{P}W - Q$ un point. Alors l'hyperplan $D_A Q$ est l'hyperplan engendré par tous les points $x \in Q$ tels que $A \in T_x Q$.
  En effet, si $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire défini par Q, on cherche à définir $\langle A, . \rangle$. Le résultat découle de ce que pour $x \in \mathcal{Q}$, $A \in T_x X \iff \langle A, x \rangle = 0$.

•

Je propose quant à moi une description tout-à-fait similaire de la polarité du déterminant. Notons H l'hypersurface définie par le déterminant.

Remarque 1.3 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang n ; l'hyperplan où $D_A \det$ s'annule est l'hyperplan engendré par les $x \in X$ tels que la droite (xA) ne coupe H qu'en x.*

Démonstration : Si $x \in X$, det s'annule au moins à l'ordre $n-1$ en x (ceci est démontré dans la preuve de la proposition 4.6). Le fait que la droite (xA) s'annule à l'ordre n en x équivaut donc au fait que $D_A \det(x) = 0$. Enfin, l'hyperplan $\{D_A \det = 0\}$ est engendré comme espace vectoriel par son intersection avec X, puisqu'on peut supposer pour le montrer que $A = I$, et cet hyperplan est alors celui des matrices de trace nulle. •

Soit $V = \mathbb{C}^n$; on a $W = V^* \otimes V$; X_1 s'identifie à $\mathbb{P}V$ et X_2 à $\mathbb{P}V^*$. Il découle des théorèmes 1 et 2 de [Fla 62] que les espaces linéaires de dimension maximale inclus dans le cône affine $\widehat{H}$ sont de dimension $n(n-1)$. Si l est un hyperplan de V, l'ensemble des matrices dont l'image est dans l est un espace de H_1 ; si v est un vecteur non nul de V, l'ensemble des matrices annulant v est un élément de H_2. On obtient ainsi tous les éléments de H_1 et H_2. On voit donc que H_1 est naturellement paramétrée par $\mathbb{P}V^*$ et H_2 par $\mathbb{P}V$. La remarque qui suit montre que l'identification entre l'espace projectif dual de X_i et H_i ne dépend que de X :

Remarque 1.4 *Soit $i = 1$ ou 2. L'espace projectif dual de X_i est canoniquement identifié à l'espace projectif H_i : à un hyperplan de X_i on associe l'espace linéaire engendré par la réunion des espaces linéaires de cet hyperplan (rappelons que X_i paramètre des espaces linéaires inclus dans X).*

Dans la preuve de la proposition 1.1, j'ai construit, à partir de I, une description géométrique d'une dualité entre X_1 et X_2 (ce qui correspond donc à un isomorphisme entre H_1 et X_2) ; on peut généraliser cette description pour obtenir tous ces isomorphismes.

Proposition 1.2 *Soit $A \notin H$. Nous dirons que $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$ sont A-incidents si l'intersection x de x_1 et x_2 vérifie la propriété que la droite (xA) ne rencontre H qu'en x. Ceci définit une dualité sur les espaces projectifs X_1 et X_2 ; on obtient toutes ces dualités en faisant varier A dans $\mathbb{P}W - H$. L'algèbre définie par X, X_1, A et la proposition 1.1 est l'algèbre $(B, C) \mapsto BA^{-1}C$ d'unité A.*

Cette proposition décrit aussi géométriquement toutes les dualités entre deux espaces projectifs $\mathbb{P}V_1$ et $\mathbb{P}V_2$: il suffit de considérer la variété $X = \mathbb{P}V_1 \times \mathbb{P}V_2 \subset \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2)$, et de faire la même construction. Ces dualités sont alors, comme prévu, paramétrées par la variété quasi-projective des tenseurs de rang maximal.

Cette proposition et la remarque 1.4 montrent que tous les isomorphismes entre X_1 et H_2 sont donnés par le choix d'un élément $A \in \mathbb{P}W - H$ et l'application qui associe à x_1 l'espace linéaire engendré par la réunion des x_2 tels que la droite passant par $x = (x_1, x_2)$ et A ne recoupe pas H.

Démonstration : On sait que x_1 est l'ensemble des matrices d'image un vecteur v fixé, et que x_2 est l'ensemble des matrices de noyau une forme linéaire l fixée. L'intersection de ces espaces est donc $x = l \otimes v$. Comme on a $D_I \det(M) = \mathrm{tr}(M)$, on a $D_A \det(M) = \mathrm{tr}(A^{-1}M)$. Autrement dit, par la remarque 1.3, x vérifiera la propriété de la proposition

si et seulement si $\mathrm{tr}(A^{-1}(l \otimes v)) = 0$, soit $\mathrm{tr}(l \otimes (A^{-1}v)) = 0$, soit $\langle l, A^{-1}v\rangle = 0$, si $\langle .,. \rangle$ désigne la dualité habituelle entre les formes linéaires et les vecteurs. •

Récapitulons, pour la suite, des résultats concernant les familles d'espaces linéaires X_1, X_2, H_1, H_2 :

Fait 1.2.3 *Soit $i = 1$ ou 2.*
- *Si $x_i \neq y_i \in X_i$, alors $x_i \cap y_i = \emptyset$.*
- *Soit $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$, alors $x_1 \cap x_2$ est un point.*
- *Tout élément de H_i est engendré comme espace linéaire par la réunion de certains espaces linéaires de X_i, mais ne contient aucun X_{3-i}.*
- *L'intersection de tous les espaces linéaires de H_i est vide.*

Proposition 1.3 *Le groupe d'automorphismes de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est PSL_n, où $g \in PSL_n$ agit par $A \mapsto gAg^{-1}$.*

Démonstration : Soit $g \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. Alors par la proposition 1.1, g est un automorphisme si et seulement si il préserve X, X_1 et I. Si $g \in PSL_n$ agit comme dans la proposition, il est clair que g préserve X, X_1 et I. Si, réciproquement, g préserve X et X_1, il induit un automorphisme de X_1 et de X_2. Il existe donc $(g_1, g_2) \in \mathrm{Aut}(X_1) \times \mathrm{Aut}(X_2)$ tels que $\forall i \in \{1,2\}, \forall x_i \in X_i, g.x_i = g_i.x_i$. Ainsi, il existe $h_1, h_2 \in GL_n$ tels que $g.A = h_1^{-1}Ah_2$. Mais puisque $g.I = I$, $h_1 = h_2$ et la proposition en découle. •

La preuve de cette proposition annonce bien ce qui va se passer pendant l'étude d'autres algèbres : pour celles-ci, il ne sera possible de définir géométriquement le produit que pour des éléments particuliers, mais cette définition suffira pour démontrer les propriétés géométriques ou algébriques de ces algèbres.

On a enfin la caractérisation suivante des algèbres de matrices :

Proposition 1.4 *Soit, sur $M_n(\mathbb{C})$, une structure d'algèbre notée $*$, admettant I comme unité, et telle que $\det(A*B) = \det(A).\det(B)$. Alors, soit $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), A*B = AB$, soit $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), A*B = BA$.*

Autrement dit, il n'y a que les deux structures "évidentes" d'algèbre sur $M_n(\mathbb{C})$ telles que I soit l'unité et que le déterminant soit multiplicatif.
Schafer [Sch 63, th 2 et 4,p. 782 et 788] et Jacobson [Jac 63, corollaire p.33] montrent plus généralement que si f est un polynôme quelconque et V une algèbre telle que $\forall x, y \in V$, $f(xy) = f(x)f(y)$, alors soit V est somme d'idéaux qui sont soit associatifs, soit des algèbres de composition. Je propose, dans ce cas précis où $f = \det$, une preuve géométrique particulièrement simple.
Démonstration : Notons $V = \mathbb{C}^n$, $W = M_n(\mathbb{C})$ et $X \subset \mathbb{P}W$ la variété des matrices de rang 1. Soit comme précédemment X_1 et X_2 les deux familles d'espaces linéaires de dimension maximale dans X ; on a $X_1 \simeq \mathbb{P}V$ et $X_2 \simeq \mathbb{P}V^*$. Notons, pour $A \in W$, L_A et R_A les applications linéaires $x \mapsto A*x$ et $x \mapsto x*A$.

Tout d'abord, soit $A, x \in W$ non nuls et tels que $A*x = 0$. Alors, pour tout $B \in W$, $f(A)f(B) = f(A*B) = f[A*(B+x)] = f(A)f(B+x)$. Si $f(A) \neq 0$, on en déduit que $\forall B \in W, f(B+x) = f(B)$, et une contradiction (on peut supposer que $x = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

et prendre $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$). On a donc montré que $\det(L_A) = 0 \Longrightarrow \det(A) = 0$. Comme det est irréductible, que $\det(L_I) = 1$, et que $\det(L_A)$ est de degré n^2, on en déduit que

$$\det(L_A) = (\det A)^n = \det(R_A). \tag{1.2}$$

Si $A \in W$, alors, par hypothèse, L_A préserve H. Il préserve donc son lieu singulier, l'ensemble des matrices de rang au plus $n-2$, le lieu singulier de ce lieu singulier, et ainsi de suite. Il préserve donc X, et de même pour R_A. Si $B \in X$, a donc Im $L_B \subset X$ et, par (1.2), Ker $L_B \subset H$. Notons $L(B) = \text{Im } L_B \subset \mathbb{P}W, R(B) = \text{Im } R_B \subset \mathbb{P}W, KL(B) = \text{Ker } L_B \subset \mathbb{P}W$ et $KR(B) = \text{Ker } R_B \subset \mathbb{P}W$. Comme le sous-espace vectoriel $\widehat{L(B)} \subset \widehat{X}$ est de dimension au plus n et $\widehat{KL(B)} \subset \widehat{H}$ est de dimension au plus $n(n-1)$, on a :

$$\forall B \in X, \dim \widehat{L(B)} = \dim \widehat{R(B)} = n \text{ et } \dim \widehat{KL(B)} = \dim \widehat{KR(B)} = n(n-1). \tag{1.3}$$

Pour tout $A \in X$, on a donc $L(A) \in X_1 \cup X_2$. Comme L est une application algébrique, il existe i et j des entiers égaux à 1 ou 2 tels que tous les $L(A)$ soient dans X_i et tous les $R(A)$ dans X_j. Notons que si $B \in L(A)$, alors $L(A) \cap L(B) \neq \{0\}$, et donc $L(A) = L(B)$ (fait 1.2.3). Par ailleurs, soit $A \in X$. Comme L_A est non nulle, pour $B \in X$ générique, on a $A * B \neq 0$. Ainsi, $L(A) \cap R(B) \neq \emptyset$. Choisissant $B \notin L(A)$, on en déduit que $i \neq j$ (fait 1.2.3). Quitte à considérer l'algèbre $(A, B) \mapsto B * A$, on peut donc supposer que

$$\forall A \in X, L(A) \in X_1 \text{ et } R(A) \in X_2.$$

De même que précédemment, il existe un entier $i = 1$ ou 2 tel que $\forall A \in X, KL(A) \in H_i$. L'application $KL_{|L(A)} : L(A) \to H_i, B \mapsto KL(B)$ est un isomorphisme sur son image. En effet, nous avons vu que $C * D$, s'il est non nul, engendre $L(C) \cap R(D)$; par ailleurs, le noyau de L_C est par définition $KL(C)$. Pour $B \in L(A)$, on a $L(B) = L(A)$; si on a aussi $KL(B) = KL(A)$, alors le lemme 1.1.1 dit que L_A et L_B sont proportionnelles ; $A = L_A(I)$ et $B = L_B(I)$ aussi. L'application $KL_{|L(A)}$ est de plus un isomorphisme sur son image par le lemme 1.1.3. Puisque $L(A)$ et H_i sont isomorphes à $\mathbb{P}^{n-1}$, cette application est surjective. On peut proposer le même raisonnement pour R, à valeurs dans H_j. On obtient donc :

Fait 1.2.4 *Soit $A \in X$, les applications $KL_{|L(A)} : L(A) \to H_i$ et $KR_{|R(A)} : R(A) \to H_j$ sont des isomorphismes.*

Supposons maintenant que $\forall A \in X, KL(A) \in H_2$. Alors, par les faits 1.2.3 et 1.2.4, il existe $B \in X$ tel que $R(B) \subset KL(A)$. Ceci implique que $\forall C \in R(B), A * C = 0$, soit que $A \in KR(C)$. On voit que A est donc dans tous les $KR(C)$ pour $C \in R(B)$, donc dans tous les espaces linéaires de H_j par le fait 1.2.4. Comme ces espaces sont d'intersection vide (fait 1.2.3), on en déduit une contradiction. Ainsi, $\forall A \in X, KL(A) \in H_1$ et de façon similaire, $\forall A \in X, KR(A) \in H_2$.

On obtient ainsi, pour tout $A \in X$, un isomorphisme entre $L(A)$ et H_1. Ainsi, le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & X = \mathbb{P}V \times \mathbb{P}V^* & \to & H_1 \simeq \mathbb{P}V \\ & & (x_1, x_2) & \mapsto & KL(x_1, x_2) \end{array}$$

est tel que $\forall x_1 \in \mathbb{P}V, \varphi_{|x_1 \times \mathbb{P}V^*}$ est un isomorphisme entre $\mathbb{P}V^*$ et $\mathbb{P}V$. Comme la variété de tous ces isomorphismes est affine et $\mathbb{P}V$ est projective, l'application $x_1 \mapsto \varphi_{|x_1 \times \mathbb{P}V^*}$ est constante. Il existe donc un isomorphisme ψ entre X_2 et H_1 tel que $KL(x_1, x_2) = \psi(x_2)$. La remarque qui suit la proposition 1.2 décrit géométriquement tous ces isomorphismes ; il existe donc $J \in \mathbb{P}W - H$ tel que cet isomorphisme soit celui associé à J par cette remarque. Notre algèbre $*$ est donc donnée par les constructions géométriques de la proposition 1.1 à partir de X, X_1 et J ; la proposition 1.2 montre que $\forall A, B \in W, A*B = AJ^{-1}B$. Comme J est donc l'unité, $J = I$. •

Chapitre 2

Géométrie et algèbres de composition

2.1 Géométrie des algèbres de composition

2.1.1 Algèbres de composition en général

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de composition sur $\mathbb{C}$, de norme Q (cela signifie que Q est une forme quadratique non-dégénérée telle que $Q(ab) = Q(a)Q(b)$, et que $\mathcal{A}$ possède une unité notée 1).

Il s'agit ici d'étudier les espaces linéaires de dimension maximale inclus dans la quadrique affine $\mathcal{Q}$ définie par Q. Pour cela, je ferai souvent appel aux propriétés géométriques classiques de l'ensemble de c es espaces linéaires [Har 92, th.22.13,p.293] :

Proposition 2.1 *Soit V un espace vectoriel de dimension n muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Alors*

- *Si $n = 2p + 1$ est impair, les espaces isotropes de dimension maximale sont de dimension p ; ils forment une famille connexe de dimension $p(p + 1)/2$.*
- *Si $n = 2p$, les espaces isotropes de dimension maximale sont de dimension p ; ils forment deux familles disjointes de dimension $p(p - 1)/2$. Par ailleurs, deux tels espaces sont dans la même famille si et seulement si la dimension de leur intersection est congrue à p modulo 2.*

Notons, pour $z \in V$, L_z et R_z les endomorphismes de $\mathcal{A}$ égaux à la multiplication respectivement à gauche et à droite par z. Notons aussi $L(z)$ et $R(z)$ les espaces linéaires égaux aux images de ces applications. Notons $\mathrm{Re}(z)$ le produit scalaire de z par 1, $\mathrm{Im}(z)$ l'élément $z - \mathrm{Re}(z)$ et $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)$. Notons que $z \mapsto -\overline{z}$ est la symétrie orthogonale par rapport à 1 ; c'est donc une isométrie.

Si $z \in \mathcal{Q}$, alors $Q(zx) = Q(xz) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. Ainsi, $L(z)$ et $R(z)$ sont inclus dans $\mathcal{Q}$. Supposons $\dim \mathcal{A} > 1$. Alors, pour z tel que $Q(\mathrm{Im}(z)) \neq 0$, la droite $\{z - \lambda, \lambda \in \mathbb{C}\}$ coupe $\mathcal{Q}$ en deux points distincts $x = z - \lambda_1$ et $-\overline{x} = z - \lambda_2$; $\mathrm{Ker}(L_x)$ et $\mathrm{Ker}(L_{\overline{x}})$ sont alors des espaces propres pour L_z associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2, donc la somme de leurs dimensions est inférieure ou égale à la dimension de $\mathcal{A}$. Comme $\mathrm{Im}\ L_x$ est un espace vectoriel inclus dans la quadrique $\mathcal{Q}$, en utilisant la proposition 2.1, on en déduit que $\dim \mathcal{A} = 2\alpha$ et $\dim \mathrm{Ker}(L_x) = \dim L(x) = \dim \mathrm{Ker}(R_x) = \dim R(x) = \alpha$. De

plus, dans une base adaptée, on peut donc écrire :

$$L_z = \begin{pmatrix} \lambda_1 Id & 0 \\ 0 & \lambda_2 Id \end{pmatrix}$$

Comme λ_1 et λ_2 sont les solutions de l'équation $\lambda^2 - 2\mathrm{Re}(z)\lambda + Q(z) = 0$, on a $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\mathrm{Re}(z)$ et $\lambda_1\lambda_2 = Q(z)$. Comme $\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) - z$, la première égalité donne

$$L_{\overline{z}} = \begin{pmatrix} \lambda_2 Id & 0 \\ 0 & \lambda_1 Id \end{pmatrix}$$

et la deuxième donne donc

$$L_z L_{\overline{z}} = Q(z) Id. \tag{2.1}$$

Remarquons que si $Q(z) = 1$, L_z est une isométrie et donc $L_z\, {}^t L_z = Id$; ainsi en général on a $L_z\, {}^t L_z = Q(z) Id$ et donc

$${}^t L_z = L_{\overline{z}}. \tag{2.2}$$

On en déduit que $\langle \overline{xy}, z\rangle = \langle xy, \overline{z}\rangle = \langle x, \overline{z}\,\overline{y}\rangle = \langle zx, \overline{y}\rangle = \langle z, \overline{y}\,\overline{x}\rangle$, soit $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$.

L'équation (2.1) a une autre conséquence : L_z est inversible si et seulement si $Q(z) \neq 0$, et donc

$$\det(R_z) = \det(L_z) = Q(z)^\alpha. \tag{2.3}$$

On a donc pour tout $z \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Ker}(L_z) \subset \mathcal{Q}$ et $\mathrm{Ker}(R_z) \subset \mathcal{Q}$ (en effet si par exemple $x \in \mathrm{Ker}(L_z)$, alors R_x est non inversible). Récapitulons ces résultats :

Proposition 2.2 *Soit V une algèbre de composition et $\mathcal{Q}$ la quadrique affine des éléments de norme nulle. Si $\dim V > 1$, alors $\dim V = 2\alpha$ est paire et $\forall x \in \mathcal{Q}$, $\dim L(x) = \dim R(x) = \alpha$. De plus on a :*

- *$x \in L(y) \Leftrightarrow y \in L(x), x \in R(y) \Leftrightarrow y \in R(x)$, $Ker\ L_x = L(\overline{x})$ et $Ker\ R_x = R(\overline{x})$.*
- *$\overline{(xy)} = \overline{y}\,\overline{x}$.*

Enfin, les fibres de R et de L sont des espaces linéaires.

Ainsi, $L(x)$ et $R(x)$ sont des espaces isotropes maximaux.

Démonstration : La formule (2.1) montre que $\mathrm{Ker}\ L_x \supset L(\overline{x})$. Ainsi $L(\overline{x}) \subset \mathrm{Ker}\ L_x \subset \mathcal{Q}$ et $\mathrm{Im}\ L_x \subset \mathcal{Q}$. Il suffit alors d'utiliser la proposition 2.1 pour en déduire que $\mathrm{Ker}\ L_x = L(\overline{x})$.

On a donc $x \in L(y) \Leftrightarrow \overline{y}x = 0 \Leftrightarrow \overline{\overline{y}x} = \overline{x}y = 0 \Leftrightarrow y \in L(x)$.

Enfin, si z_i sont des éléments de $\mathcal{Q}$ tels que $L(z_i) = \Lambda$, et si λ_i sont des scalaires, alors $L(\sum \lambda_i z_i) \subset \Lambda$. En particulier $\sum \lambda_i z_i \in \mathcal{Q}$. De plus, si $\sum \lambda_i z_i \neq 0$, on a donc $L(\sum \lambda_i z_i) = \Lambda$. •

J'ai ainsi démontré les résultats dont j'ai besoin par la suite. J'aurais aussi pu les établir en utilisant la classification des algèbres de composition et en faisant une étude au cas par cas. Cependant, cette démarche n'aurait peut-être pas été plus rapide, et j'aimerais trouver une preuve géométrique de cette classification. Dans cette direction, je peux établir le résultat suivant :

Proposition 2.3 *Si $\dim \mathcal{A} \geq 4$, alors 4 divise $a = \dim \mathcal{A}$.*

Démonstration : On a déjà vu que cette dimension est paire, que l'on a notée 2α. Considérons le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & \{z \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}(z) = 0\} & \to & \mathcal{AS}_{2\alpha}(\mathbb{C}) \\ & & z & \mapsto & L_z \end{array}$$

Ici, $\mathcal{AS}_{2\alpha}(\mathbb{C})$ est l'espace des endomorphismes antisymétriques de $\mathcal{A}$. L'application L_z est bien antisymétrique car, par (2.2), $\langle L_z(x), y\rangle = \langle x, L_{\overline{z}}(y)\rangle = -\langle x, L_z(y)\rangle$ car $\overline{z} = -z$. Par ailleurs, le pfaffien de L_z est nul si et seulement si $Q(z) = 0$ par (2.1), et $\mathbb{P}\mathcal{Q} \cap \{\mathrm{Re}(z) = 0\}$ est une quadrique lisse, donc irréductible si $\alpha \geq 2$. Alors ce pfaffien est une puissance de Q et donc son degré, α, est un multiple de 2. •

2.1.2 Les quaternions

L'algèbre $\mathbb{H}$ des quaternions est l'espace vectoriel de base $1, I, J, K$ muni de la structure d'algèbre telle que 1 soit l'unité, $I^2 = J^2 = K^2 = -1$, $IJ = -IJ = K$, $JK = -KJ = I$ et $KI = -IK = J$. C'est une algèbre non commutative mais associative.

Il est bien connu (cf [Ros 97, p. 44]) que l'algèbre $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-isomorphe à l'algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Un tel isomorphisme est par exemple déterminé en envoyant 1 sur l'identité, I sur $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, J sur $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et K sur $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Je souhaite donner ici une interprétation géométrique de cet isomorphisme. En effet, les produits dans $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ peuvent être définis géométriquement, et on voit alors pourquoi cette application est un isomorphisme.

Géométriquement, on a deux espaces projectifs de dimension 3 : l'un est $\mathbb{P}(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})$ et l'autre $\mathbb{P}(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$. Dans chacun de ces espaces projectifs, on a une quadrique lisse, donnée par l'annulation respectivement de la norme et du déterminant. Par ailleurs le produit dans chacun de ces espaces projectifs est défini géométriquement. En effet, puisque $\langle z\rangle = L(z) \cap R(z)$, un point z de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$ de norme nulle est déterminé projectivement par $L(z)$ et $R(z)$. Sur cette quadrique, le produit peut donc être défini projectivement par les conditions $L(zz') = L(z)$ et $R(zz') = R(z')$. Par ailleurs, il est clair que $zz' = 0$ si et seulement si $z' \in \ker L_z = L(\overline{z})$, ce qui équivaut à $L(z') = \overline{R(z)} (= L(\overline{z}))$.

Le produit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ admet la description géométrique donnée par la proposition 1.1 et la ressemblance entre ces deux structures va nous permettre de construire l'isomorphisme annoncé.

Soit donc $z \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$ tel que $Q(z) = 0$. Celui-ci est déterminé projectivement par $L(z)$ et $R(z)$; comme $R(z) = \overline{L(\overline{z})}$, il est aussi déterminé par $L(z)$ et $L(\overline{z})$. Mais chacun de ces espaces est stable par R_J, et $R_J^2 = -Id$, grâce à l'associativité. On peut donc décomposer chacun de ces deux espaces en sous-espaces propres pour R_J et écrire donc $L(z) = L(z)_i \oplus L(z)_{-i}$ et $L(\overline{z}) = L(\overline{z})_i \oplus L(\overline{z})_{-i}$. Par ailleurs, si $xJ = ix$, alors $(xI)J = xIJ = -xJI = -i(xI)$ donc R_I réalise un isomorphisme entre $L(z)_i$ et $L(z)_{-i}$ d'une part, et entre $L(\overline{z})_i$ et $L(\overline{z})_{-i}$ d'autre part. Chacun de ces espaces a donc dimension

linéaire 1. Ainsi, si U désigne l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre i pour R_J, soit $U = R(1 - iJ)$, on a constaté que z est déterminé par les droites $L(z)_i$ et $L(\overline{z})_i$ de U, soit un élément de $\mathbb{P}U \times \mathbb{P}U$. On peut donc énoncer :

Proposition 2.4 *L'application*

$$\begin{array}{rccccc} M & : & Q \subset \mathbb{P}(\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}) & \to & \mathbb{P}U \times \mathbb{P}U \overset{1\times\omega}{\simeq} \mathbb{P}U \times \mathbb{P}U^* \subset \mathbb{P}\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ & & z & \mapsto & L(z)_i \times L(\overline{z})_i \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Ici ω désigne une forme symplectique non nulle sur $U = (\mathbb{H} \otimes \mathbb{C})_i$ (toutes ces formes sont proportionnelles, donc cette application ne dépend pas du choix de cette forme). Elle sert uniquement à garantir que le noyau de $M(z)$ soit $L(\overline{z})_i$.

Démonstration : Tout d'abord, M est la restriction d'une application définie sur tout $\mathbb{P}(\mathbb{H} \otimes \mathbb{C})$: si $z \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$, alors L_z préserve U et on peut poser $M(z) = L_{z|U}$; cette définition coïncide avec la précédente pour un élément de norme nulle. Par ailleurs, il est alors clair que M est linéaire et que c'est un morphisme d'algèbre. Elle est aussi inversible car connaissant $L_{z|V_i}$, on connait $L_{z|V_{-i}}$ grâce à l'isomorphisme $R_I : V_i \to V_{-i}$ qui commute avec L_z. On connait donc L_z et donc $z = L_z(1)$. •

Remarque : Puisque $M_1 = Id$, et que

$$\begin{array}{rclcrcl} I(1-iJ) & = & I - iK & \text{et} & I(I-iK) & = & -(1-iJ) \\ J(1-iJ) & = & i(1-iJ) & \text{et} & J(I-iK) & = & -i(I-iK) \\ K(1-iJ) & = & i(I-iK) & \text{et} & K(I-iK) & = & i(1-iJ), \end{array}$$

M envoie $1, I, J, K$ sur les éléments indiqués en début de paragraphe, si l'on considère la base $\{1 - iJ, I - iK\}$ de U.

Etant donné un espace vectoriel V de dimension 4, étudions maintenant quelles données géométriques équivalent à la donnée d'une structure d'algèbre de composition sur V :

Proposition 2.5 *La donnée d'une structure d'algèbre de composition sur un espace vectoriel V de dimension 4 est équivalente aux données d'une quadrique lisse sur $\mathbb{P}V$, d'un choix d'une des deux composantes irréductibles de la variété de Fano de cette quadrique et d'un élément hors de cette quadrique.*

Démonstration : Puisque l'algèbre des quaternions est isomorphe à $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$ est une quadrique lisse, cette proposition est le cas particulier de la proposition 1.1 obtenu pour $n = 2$. •

Soit $G(2, \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^5$ la grassmannienne des 2-plans vectoriels dans $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$; notons $F^+(\mathcal{Q})$ et $F^-(\mathcal{Q}) \subset G(2,4)$ les deux composantes de la variété de Fano de $\mathcal{Q}$ (proposition 2.1).

Proposition 2.6 *Soit $x \in \mathcal{Q}$. Alors les applications*

$$\begin{array}{rccccc} R_{|L(x)} & : & L(x) & \to & F^+(\mathcal{Q}) \\ & & y & \mapsto & R(y) \end{array} \quad et$$

$$\begin{array}{rccc} L_{|R(x)} & : & R(x) & \to & F^-(\mathcal{Q}) \\ & & y & \mapsto & L(y) \end{array}$$

sont des isomorphismes qui s'écrivent, dans une base convenable

$$\begin{array}{rccc} \nu_2 & : & \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^2 \\ & & [u,t] & \mapsto & [u^2, ut, t^2]. \end{array}$$

Autrement dit, ces applications sont des plongements de Veronese de degré 2 et la variété de Fano de $\mathcal{Q}$ est la réunion disjointe de deux sections planes lisses de la quadrique $G(2,4)$.

Démonstration : On peut supposer que $x = 1 + iI$ et il suffit d'étudier R. Elle envoie $y = u(1+I) + t(J+iK)$ $(u,t \in \mathbb{C})$ sur

$$\begin{array}{rcl} y \wedge Jy & = & [u(1+iI) + t(J+iK)] \wedge [u(J-iK) + t(-1+iI)] \\ & = & (-ut)(1+iI) \wedge (1-iI) + u^2(1+iI) \wedge (J-iK) \\ & & +ut(J+iK) \wedge (J-iK) + t^2(1-iI) \wedge (J+iK) \end{array}$$

Ceci montre que $R_{|L(x)}$ est un plongement de Veronese de degré deux. Comme $F^{\pm}(Q)$ est de dimension 1 (proposition 2.1), $R_{L(x)}$ est un isomorphisme. •

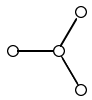
2.1.3 Les octaves

Ce paragraphe a un double but : la description géométrique de l'algèbre des octaves et une preuve originale du principe de trialité.

L'algèbre $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ des octaves est l'espace vectoriel complexe de base $1, e_1, \ldots, e_7$ muni de la structure d'algèbre telle que pour (i,j,k) l'un des triplets $(1,2,3), (3,4,5), (5,6,1), (1,7,4), (3,7,6), (5,7,2), (2,4,6)$, l'application linéaire $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ qui envoie 1 sur 1, I sur e_i, J sur e_j et K sur e_k est un morphisme d'algèbres. Cette définition par des formules ne me semble pas très parlante ; nous allons voir que la définition géométrique l'est beaucoup plus. Rappelons que cette algèbre est non commutative, non associative, mais alternative, c'est-à-dire que la sous-algèbre engendrée par deux éléments est associative.

Dans un premier temps, nous allons étudier la position relative des espaces linéaires $L(x)$ et $R(y)$. Nous savons déjà que pour tout $x \in \mathcal{Q}$, $L(x)$ et $R(x)$ sont des espaces isotropes de dimension maximale (proposition 2.2). Soit $x = 1 + ie_1$; un calcul immédiat montre que $L(x) \cap R(x) = \langle x \rangle$. Ainsi, par la proposition 2.1, $L(x)$ et $R(x)$ ne sont pas dans la même famille. Puisque $y \mapsto L(y)$ et $y \mapsto R(y)$ sont des applications algébriques, tous les $L(y)$ sont dans une même famille et de même pour tous les $R(y)$. Si maintenant x et y sont des éléments de $\mathcal{Q}$, $L(x)$ et $R(y)$ sont dans deux familles différentes et par cette même proposition 2.1, ces espaces linéaires se rencontrent en dimension 1 ou 3. Génériquement, ils se rencontrent en dimension 1 (c'est en effet le cas pour $x = y = 1 + ie_1$), et nous allons caractériser le fait que cette intersection soit de dimension 3.

Je me propose aussi de donner une preuve originale du principe de trialité. Je vais ainsi obtenir les mêmes résultats que [VS 60], mais en évitant les calculs et dans un ordre qui me semble plus naturel : [VS 60] utilise la trialité algébrique (proposition 2.11), démontrée par des formules, pour en déduire la trialité géométrique (proposition 2.7). Je vais quant à moi démontrer la trialité géométrique, puis la trialité algébrique, par des arguments géométriques.

Le diagramme de Dynkin de SO_8,  , présente une symétrie d'ordre 3. Ceci prouve que les variétés qui sont les projectivisées des orbites fermées des 2 représentations spinorielles et de la représentation naturelle sont isomorphes. En effet, à une permutation des racines qui est une symétrie du graphe de Dynkin correspond un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_8$, et donc à un automorphisme du groupe $Spin_8$ simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_8$. Cet automorphisme induit un automorphisme de PSO_8, car le centre de SO_8 est $\{\pm Id\}$, et donc un isomorphisme des trois orbites fermées considérées. La proposition suivante réalise explicitement ces isomorphismes.

Proposition 2.7 (Trialité géométrique) *Les applications L et R réalisent des isomorphismes entre $Q^6 \subset \mathbb{P}(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})$ et les deux composantes de sa variété de Fano.*

Remarque : Le plongement de Plücker de ces composantes n'est pas une quadrique dans $\mathbb{P}(\Lambda^4\mathbb{C}^8)$. En effet, de manière générale, si l est une droite incluse dans la grassmannienne $G(r,n)$ des r-plans dans $\mathbb{C}^n$, il est facile de voir que l représente le pinceau des espaces linéaires inclus dans un $(r+1)$-plan fixé et contenant un $(r-1)$-plan fixé. Or une quadrique de dimension 6 contient beaucoup de droites mais chaque composante de sa variété de Fano ne contient aucune paire d'espaces linéaires de dimension 4 se rencontrant en dimension 3 (proposition 2.1). En fait, il est bien connu que le plongement de Plücker envoie cette quadrique sur son image par l'application de Veronese de degré deux.

Démonstration : Commençons par voir que l'application L est injective. Pour x générique fixé, et y générique, $L(x)$ et $R(y)$ se rencontrent en dimension 1. Le lemme 1.1.9 montre alors que l'on peut définir la multiplication à gauche L_x par la condition $\langle L_x(y)\rangle = L(x) \cap R(y)$, pour y générique. Si x' vérifie $L(x') = L(x)$, L_x et $L_{x'}$ sont donc proportionnels, et x et x' aussi. Ainsi, L est génériquement injective, de même pour R. Comme les variétés spinorielles sont de dimension 6, ces applications sont aussi surjectives. Le raisonnement précédent s'applique donc à tout x, et L est injective.

Puisque les variété spinorielles sont aussi lisses puisqu'homogènes, le théorème principal de Zariski montre alors que L est un isomorphisme. Si on veut éviter cet argument, on peut aussi facilement décrire géométriquement l'inverse de L pour voir qu'il est algébrique (figure 2.1). En effet, si $y \in L(x)$ et $y \neq x$, alors $L(x) \cap L(y)$ est un espace projectif de dimension 1 qui contient x et y ; c'est donc la droite (x,y). Si W est un espace projectif isotrope de dimension 3 dans la famille d'espaces linéaires image de L, alors pour tout $w \in W$, $L(w)$ rencontre W selon une droite et quand w varie, toutes ces droites passent par un point x tel que $L(x) = W$. Ceci définit l'inverse de L, qui est donc un isomorphisme.

Le même raisonnement est valable pour R.

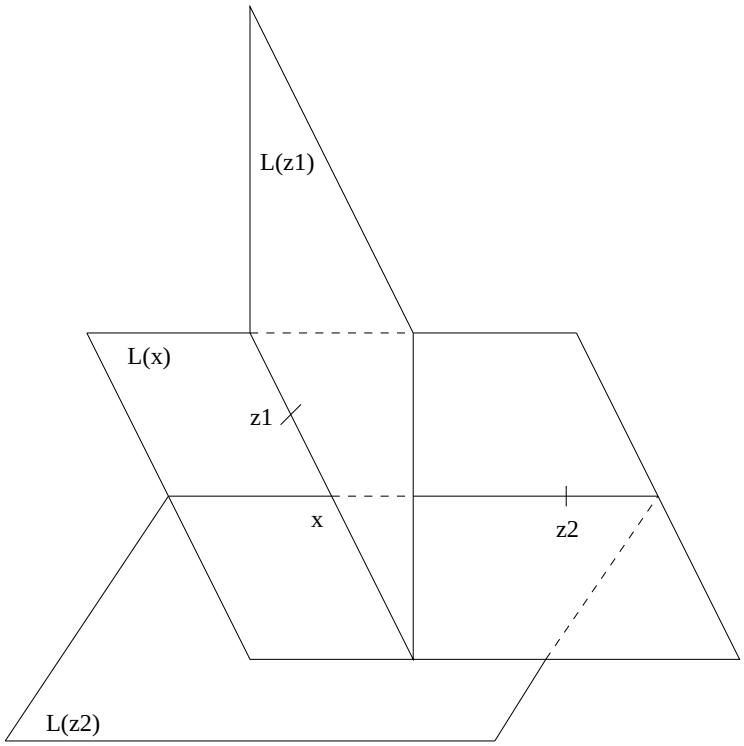


FIG. 2.1 – Description géométrique de l'inverse de L

•

Nous allons montrer maintenant que $xy = 0$ si et seulement si $L(x)$ et $R(y)$ se rencontrent en dimension 3. Commençons par établir des résultats qui seront nécessaires à cette caractérisation.

Lemme 2.1.1 $\forall a \in \mathcal{Q}, b \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}, aba = 2\langle \overline{a}, b\rangle a.$

Puisque $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ est alternative, ce qui signifie que la sous-algèbre engendrée par deux éléments est associative et découle par exemple du procédé de Cayley-Dickson [FK 94], l'écriture aba est univoque.

Démonstration : Comme $2\langle \overline{a}, b\rangle = ab + \overline{b}\overline{a}$, $\langle \overline{a}, b\rangle a = aba + \overline{b}\overline{a}a = aba$ puisque $\overline{a}a = Q(a) = 0$. •

Proposition 2.8 *Soit $a \in \mathcal{Q}, q \in L(\overline{a})$ et $t \in R(q) - L(a)$. Alors $L(a) \cap R(q) = L(a) \cap t^{\perp}$.*

Démonstration : Voyons que cette proposition est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 2.1.2 *Pour $a \in \mathcal{Q}$ et $q \in L(\overline{a})$, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & R(q) & \to & L(a)^* \\ & & x & \mapsto & \langle x, . \rangle_{|L(a)} \end{array}$$

est de rang 1.

En effet, comme $R(q) = R(q)^{\perp}$, $L(a) \cap R(q)$ est l'intersection de tous les hyperplans de $L(a)$ images de ϕ ; de plus l'hypothèse que $t \notin L(a)$ implique que $t \notin \text{Ker } \phi$.

Démonstration du lemme 2.1.2 : Il suffit de le démontrer pour a générique et donc on suppose que $\mathrm{Re}(a) \neq 0$. Considérons la composée

$$\begin{array}{ccccc} R(q) & \to & L(\overline{a}) & \to & L(a)^* \\ p & \mapsto & \overline{a}p & \mapsto & \langle \overline{a}p, . \rangle_{|L(a)} \end{array}$$

Alors, d'une part, $\langle \overline{a}p, . \rangle_{|L(a)}$ est multiple non nul de $\langle p, . \rangle_{|L(a)}$. En effet, puisque ${}^t L_{\overline{a}} = L_a$, on a $\langle \overline{a}p, at \rangle = \langle p, a^2 t \rangle = 2\mathrm{Re}(a)\langle p, at \rangle$. D'autre part, cette composée est de rang 1 car la première application l'est : si $\overline{a} = qx$ ($q \in L(\overline{a})$), alors $\overline{a}(yq) = (qx)(yq) = q(xy)q$ (identité de Moufang,[Sch 66, p.28]), et par le lemme 2.1.1, c'est un multiple de q. Ceci

$$\begin{array}{rcll} \langle \overline{t}a, (ua)y \rangle & = & \langle (\overline{t}a)\overline{y}, ua \rangle & \\ & = & \langle \overline{y}, (\overline{a}t)(ua) \rangle & \\ & = & 2\mathrm{Re}(a)\langle \overline{y}, t(ua) \rangle - \langle \overline{y}, (at)(ua) \rangle & (\overline{a} = 2\mathrm{Re}(a) - a) \\ & = & 2\mathrm{Re}(a)\langle \overline{y}, t(ua) \rangle - \langle \overline{y}, a(tu)a \rangle & (\text{identité de Moufang}) \\ & = & 2\mathrm{Re}(a)\langle \overline{y}, t(ua) \rangle - 2\mathrm{Re}(a(tu))\langle \overline{y}, a \rangle & (aba = 2\mathrm{Re}(ab)a : \text{lemme2.1.1}) \\ & = & 2\langle \overline{a}, 1 \rangle \langle (\overline{au})\overline{t}, y \rangle - 2\langle (\overline{au})\overline{t}, 1 \rangle \langle \overline{a}, y \rangle. & \end{array}$$

conclut le lemme et donc la proposition. •

Proposition 2.9 *Si $x \notin \mathcal{Q}$ ou $y \notin \mathcal{Q}$, alors $xy \neq 0$. Pour $x, y \in \mathcal{Q}$, alors*

- *Si $xy = 0$ alors* $\dim L(x) \cap R(y) = 3$.
- *Sinon, $L(x) \cap R(y) = \langle xy \rangle$.*

Ainsi, la définition géométrique du produit xy tombe en défaut exactement quand le produit n'est lui-même pas défini car il est nul.

Démonstration : Tout d'abord, grâce à la proposition 2.7, pour $x \in \mathcal{Q}$ fixé, l'ensemble des $y \in \mathcal{Q}$ tels que $\dim L(x) \cap R(y) = 3$ est isomorphe à l'ensemble des hyperplans de $L(x)$, et est donc de dimension projective 3. Par ailleurs, par la proposition 2.8, cet ensemble contient $\mathbb{P}L(\overline{x})$. Il lui est donc égal et, se souvenant que $xy = 0$ si et seulement si $y \in L(\overline{x})$, la proposition est démontrée. •

On étudie maintenant la position relative de deux espaces de la même famille.

Proposition 2.10 *Soient $a, b \in \mathcal{Q}$. Alors* $\dim L(a) \cap L(b) \geq 2$ *si et seulement si* $\dim R(a) \cap \dim R(b) \geq 2$ *si et seulement si $\langle a, b \rangle = 0$.*

Remarque : [VS 60] démontre ce résultat en montrant que si $\langle a, b \rangle = 0$, alors $L(a) \cap L(b) = L_a(L(\overline{b})) = L_b(L(\overline{a}))$ est de dimension 2. Je propose ici un autre argument.
Démonstration : Soit $a \in \mathbb{P}\mathcal{Q}$ fixé, $Q_1 = \{b : \dim L(a) \cap L(b) \geq 2\}$ et $Q_2 = \mathcal{Q} \cap T_a\mathcal{Q}$. Alors Q_2 est une quadrique irréductible de dimension 5. Par ailleurs, soit $I \subset G(2, L(a)) \times Q_1$ la variété d'incidence définie par $(\lambda, b) \in I$ si et seulement si $\lambda \subset L(b)$ et p_1 et p_2 les projections naturelles de I sur $G(2, L(a))$ et Q_1. Alors la fibre de p_1 au-dessus de λ est la grassmannienne isotrope $G^Q(2, \lambda^\perp/\lambda) \simeq \mathbb{P}^1$, donc $\dim I = 5$. Par ailleurs, p_2 est birationnelle par la proposition 2.7 ; ainsi $\dim Q_1 = 5 (= \dim Q_2)$.

De plus, si c est sur une droite (a, b) avec $L(a) \cap L(b)$ non trivial, soit $0 \neq x \in L(a) \cap L(b)$. Alors $\overline{a}x = \overline{b}x = 0$ et donc $\overline{c}x = 0$, ce qui implique que $c \in \mathcal{Q}$. Ainsi $(ab) \subset \mathcal{Q}$ et donc $\langle a, b \rangle = 0$. On a donc $Q_2 \subset Q_1$ et l'égalité de ces quadriques. •

Remarque : Le dernier argument montre que si $c \in (a,b)$ avec $L(a) \cap L(b)$ non trivial, alors $c \in \mathcal{Q}$ et $L(c) \supset L(a) \cap L(b)$. Si a', b' sont des points distincts de la droite projective (a,b), on aura donc $L(a) \cap L(b) = L(a') \cap L(b')$. Soit $a \in \mathcal{Q}$ fixé, et $\mathcal{Q}_a$ l'ensemble des droites incluses dans $\mathcal{Q}$ passant par a. On a donc un isomorphisme entre deux quadriques lisses

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & G(2, L(a)) & \to & \mathcal{Q}_a \\ & & (b_1, b_2) & \mapsto & L(b_1) \cap L(b_2) \end{array} .$$

L'inverse de cet isomorphisme est donné par $(x,a) \mapsto L(x) \cap L(a)$.

Proposition 2.11 (Trialité algébrique) *Le sous-groupe de SO_8^3 des triplets (g, g^+, g^-) tels que*

$$\forall x, y \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}, \ g(xy) = g^+(x) g^-(y) \tag{2.4}$$

est isomorphe au groupe $Spin(8)$, chacune des trois projections réalisant un revêtement topologique à deux feuilles.

Avant de passer à la preuve, faisons une remarque :

Remarque 2.1 *Les trois équations suivantes sont équivalentes :*

1. $g.(xy) = (g^+x)(g^-y)$ *($\Leftrightarrow (g, g^+, g^-) \in Spin_8$ par la proposition 2.11)*
2. $g^+.(x\overline{y}) = (g.x)\overline{(g^-.y)}$.
3. $g^-.(\overline{x}y) = \overline{(g^+.x)}(g.y)$.

Démonstration : Je ne démontre que l'implication $1 \Rightarrow 2$, les autres étant tout-à-fait similaires : l'identité $g.(xy) = (g^+.x)(g^-.y)$ implique $[g.(xy)]\overline{(g^-.y)} = g^+.x\,Q(g^-.y) = g^+.x\,Q(y) = g^+.(Q(y)x)$. En posant $u = xy$ et $v = y$, on en déduit que $(g.u)\overline{(g^-.v)} = g^+.(u\overline{v})$, soit 2. •

Démonstration de la proposition 2.11 : Soit $\mathcal{G}$ le groupe des triplets (g, g^+, g^-), avec $g \in SO_8$ et $g^\pm \in O_8$, vérifiant l'identité (2.4). Soit alors $(g, g^+, g^-) \in \mathcal{G}$. La relation (2.4) montre que si $x \in \mathbb{P}\mathcal{Q}$, alors $g.L(x) = L(g^+x)$ et $g.R(x) = R(g^-x)$ (si V est un sous-espace linéaire de $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$, je note $g.V$ l'espace linéaire $\{g.v, v \in V\}$). On a donc $\forall u \in \mathbb{P}\mathcal{Q}$,

$$g^+u = L^{-1}[g.L(u)] \text{ et } g^-u = R^{-1}[g.R(u)]. \tag{2.5}$$

Si on se donne maintenant $g \in SO_8$, comme celui-ci préserve chaque composante de $G_Q(4,8)$ (en effet, SO_8 est connexe et Id possède cette propriété), ces formules définissent, en vertu des lemmes 1.1.1 et 1.1.11, des endomorphismes linéaires de $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ à homothéties près. Soit donc g^+ et g^- des éléments de $GL(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})$ qui induisent $u \mapsto L^{-1}[g.L(u)]$ et $u \mapsto R^{-1}[g.R(u)]$. Puisqu'ils préservent la quadrique $\mathcal{Q}$, ils sont dans le groupe GO_8 des applications préservant Q à une constante près.

Ces deux applications linéaires $g^\pm$ sont donc définies à un scalaire près. Si on impose de plus que $g^+, g^- \in O_8$, alors il est clair que parmi les quatre couples possibles, au plus deux vérifieront (2.4).

Voyons qu'il y en a exactement deux, de sorte que la première projection $\mathcal{G} \to SO_8$ est un revêtement topologique à deux feuilles. Notons $f_1 : (x,y) \mapsto xy$ et $f_2 : (x,y) \mapsto g^{-1}.[(g^+x)(g^-y)]$. Par la proposition 2.9 et le lemme 1.1.5, ces applications sont

proportionnelles. Il existe donc $g^+, g^- \in GO_8$ telles que l'identité (2.4) ait lieu. Il existe donc un tel couple tel que de plus $Q(g^-.1) = 1$ (ce qui implique $g^- \in O_8$). Alors l'identité (2.4) donne $Q(g^+x) = Q(g^+x)Q(g^-1) = Q(g^+x.g^-1) = Q(g.(x.1)) = Q(x)$, soit que $g^+ \in O_8$. Il existe donc bien exactement deux couples dans $\mathcal{G}$ au-dessus de $g \in SO_8$. Nous allons voir que $\mathcal{G}$ est connexe, ce qui montrera que $g^+, g^- \in SO_8$, puisque la fibre de la projection $\mathcal{G} \to SO_8$ au-dessus de Id est $\{(Id, Id, Id), (Id, -Id, -Id)\}$.

J'ai montré que $\mathcal{G} \to SO_8$ est un revêtement topologique à deux feuilles. C'est donc soit un revêtement trivial, soit celui qui nous intéresse, $Spin(8) \to SO_8$. Je vais donner deux arguments pour voir que c'est $Spin(8) \to SO_8$.

- Pour le premier, on montre que (Id, Id, Id) et $(Id, -Id, -Id)$ sont dans une même composante connexe. Si $a \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ est tel que $Q(a) = 1$, alors l'application $g : x \mapsto axa$ est dans SO_8. Par ailleurs, l'identité de Moufang [Sch 66, p.28] $a(xy)a = (ax)(ya)$ montre que si $(g, g^+, g^-) \in \mathcal{G}$, alors $\forall x, y \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$, $(g^+(x), g^-(y)) = (ax, ya)$ ou $(g^+(x), g^-(y)) = (-ax, -ya)$. Si maintenant, pour $\theta \in [0, \pi]$, on pose $a(\theta) = \cos\theta + \sin\theta e_1$ et $g(\theta).x = a(\theta)xa(\theta)$, soit $f(\theta) = (g(\theta), g^+(\theta), g^-(\theta))$ un chemin qui relève le chemin $g(\theta)$ dans $\mathcal{G}$ et tel que $(g(0), g^+(0), g^-(0)) = (Id, Id, Id)$. Alors $f(\theta) = (x \mapsto a(\theta)xa(\theta), x \mapsto a(\theta)x, x \mapsto xa(\theta))$ et donc $f(\pi) = (Id, -Id, -Id)$.
- On peut aussi raisonner sur des fibrés vectoriels homogènes. Supposons que ce revêtement soit trivial. Alors, si $\mathcal{G}^0$ désigne la composante connexe de l'identité dans $\mathcal{G}$, on a $\mathcal{G}^0 \simeq SO_8$. Considérons le fibré $\mathcal{L}(x)$ (respectivement $\mathcal{L}(\overline{x})$) sur $\mathbb{PQ}$ dont la fibre au-dessus de $x \in \mathbb{PQ}$ est $L(x)$ (respectivement $L(\overline{x})$). On a alors sur $\mathbb{PQ}$ la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \to \mathcal{L}(\overline{x})(-1) \to (\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})(-1)_{|\mathbb{PQ}} \to \mathcal{L}(x) \to 0,$$

  où la deuxième application est donnée (si t est dans la droite vectorielle $x \in \mathbb{P}(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})$) par $t \otimes v \mapsto tv$. De plus, ces fibrés sont homogènes sous $\mathcal{G}^0$ et la suite est une suite de fibrés homogènes (autrement dit les flêches sont équivariantes) si on considère les actions que je vais décrire. Pour cela, il faut donner une action de ce groupe sur $\mathbb{PQ}$ et sur la variété totale de chaque fibré, telles que ces actions soient compatibles avec la projection. Je note donc un élément de la variété totale d'un fibré $\mathcal{E}$ sur une variété X comme $(e \mapsto x)$, ce qui signifie que e est un élément de la fibre au-dessus de x. Alors, on munit $\mathcal{L}(\overline{x})(-1)$, $(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})(-1)$ et $\mathcal{L}(x)$ des trois actions suivantes de $\mathcal{G}^0$:
  - $(g, g^+, g^-).((t \otimes u) \mapsto x) = (g^+t \otimes g^-u) \mapsto g^+x$ pour $\mathcal{L}(\overline{x})(-1)$.
  - $(g, g^+, g^-).((t \otimes u) \mapsto x) = (g^+t \otimes g^-u) \mapsto g^+x$ pour $(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})(-1)$.
  - $(g, g^+, g^-).(t \mapsto x) = gt \mapsto g^+x$ pour $\mathcal{L}(\overline{x})(-1)$.

  Puisque $\forall x, y \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}, g^-(\overline{x}y) = \overline{g^+x}g(y)$ (remarque 2.1), si $u \in L(\overline{x})$, on a bien $g^-u \in L(\overline{g^+x})$.
  Par ailleurs, la relation $g(xy) = (g^+x)(g^-y)$ montre que la flêche $(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})(-1)_{|\mathbb{PQ}} \to \mathcal{L}(x)$ est équivariante.

  On a alors une contradiction avec l'hypothèse que $\mathcal{G}^0 = SO_8$ puisqu'il y a une correspondance entre fibrés homogènes et représentations du stabilisateur d'un

point. En effet, le stabilisateur d'un point de la quadrique contient SO_6, dont la représentation correspondant à $(\mathbb{O} \otimes V)$ est la somme de la représentation naturelle et de deux représentations triviales. Or il n'existe pas de suites exactes de représentations de SO_6 de dimension 4 ayant cette représentation au milieu. •

Remarque : Le fibré $\mathcal{L}(x)$ homogène sous $Spin(8)$ est le fibré "spinoriel" décrit dans [Ott 88]. Le stabilisateur d'un point contient $Spin_6 \simeq SL_4$ qui a une représentaion irréductible de dimension 4.

On a une proposition analogue pour les éléments orthogonaux de déterminant -1 :

Corollaire 2.12 *Soit $g \in O_8$ tel que $\det g = -1$. Alors il existe exactement deux couples $(g^+, g^-) \in (O_8 \cap \{\det = -1\})^2$ tels que $g.(xy) = g^- y.g^+ x$.*

Démonstration : Si c désigne la conjugaison $(c(z) = \overline{z})$, il suffit d'appliquer la proposition précédente à $c \circ g \in SO_8$. En effet, $\overline{g.(xy)} = \overline{g^+ x}\,\overline{g^- y}$ si et seulement si $g.(xy) = g^- y.g^+ x$. •

Corollaire 2.13 (Trialité locale) *La sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{so}_8^3$ égale à l'ensemble des triplets (g, g^+, g^-) tels que $g(xy) = g^+(x)y + xg^-(y)$ est isomorphe à $\mathfrak{so}_8$.*

Il n'y a pas, à ma connaissance, d'isomorphisme de $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ avec une algèbre plus classique mais on a l'analogue de la proposition 2.5 :

Proposition 2.14 *La donnée d'une structure d'algèbre de composition modulo homothéties sur un espace vectoriel V de dimension 8 est équivalente à la donnée d'une quadrique $\mathbb{P}\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}V$ lisse et de deux isomorphismes f et g entre cette quadrique et les composantes de sa variété de Fano, tels que $\forall x \in \mathbb{P}\mathcal{Q}, x \in f(x)$ et $x \in g(x)$.*

Remarque : Si de tels f et g sont fixés, cette proposition décrit une unique structure d'algèbre isomorphe aux octaves sur V ; on doit donc pouvoir déterminer l'unité géométriquement. C'est possible de la façon suivante : si $z \in \mathcal{Q}$, on peut décrire $\overline{z}$. En effet $f(\overline{z}) = \{t : \dim(f(t) \cap g(z)) = 3\}$. On a ainsi déterminé géométriquement l'application $z \mapsto \overline{z}$. L'unité est alors l'intersection de toutes les droites projectives $(z, \overline{z})$, pour $z \neq \overline{z}$.
Démonstration : Quand on a une telle structure d'algèbre, les applications L et R définies précédemment conviennent (proposition 2.7).

Réciproquement, soit V un espace vectoriel de dimension 8, $\mathbb{P}\mathcal{Q}$ une quadrique lisse et f et g des isomorphismes vérifiant les hypothèses de la proposition. Alors mettons arbitrairement une structure d'algèbre de composition sur V telle que $\mathbb{P}\mathcal{Q}$ soit la quadrique des éléments non inversibles. Cette structure nous fournit les deux isomorphismes L et R que nous allons comparer avec f et g. Quitte à changer cette structure en posant $x *' y = y * x$, ce qui échange L et R, on peut supposer que $L(\mathbb{P}\mathcal{Q}) = f(\mathbb{P}\mathcal{Q})$ et $R(\mathbb{P}\mathcal{Q}) = g(\mathbb{P}\mathcal{Q})$; alors $L^{-1} \circ f$ et $R^{-1} \circ g$ sont des éléments de PO_8. Soient donc $l, r \in O_8$ tels que $f(x) = L[l(x)]$ et $g(x) = R[r(x)]$. L'hypothèse que $\forall x \in \mathbb{P}\mathcal{Q}, x \in f(x)$ et $x \in g(x)$ se traduit par $l(x) \in L(x)$ et $r(x) \in R(x)$ (proposition 2.2). Par le lemme 2.1.3 qui suit, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ inversibles et tels que $l(x) = x\alpha$ et $r(x) = \beta x$. On peut supposer que α et β sont de norme 1. Définissons alors le produit $x * y$ par le fait que $x * y$ est projectivement $f(x) \cap g(y)$ quand cette intersection est de dimension projective 0. Alors, ce produit vaut $x * y = (x\alpha)(\beta y)$. L'algèbre ainsi obtenue est normée

car $Q[(x\alpha)(\beta y)] = Q(x)Q(y)$. De plus $\beta^{-1}\alpha^{-1}$ est une unité de cette algèbre car l'alternativité implique que $[(\beta^{-1}\alpha^{-1})\alpha][\beta y] = \beta^{-1}(\beta y) = y$ et de même $x * (\beta^{-1}\alpha^{-1}) = x$. Cette algèbre est ainsi normée et unitaire, donc isomorphe à $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ [Jac 58, théorème 1, p.61]. Enfin, si $x \in \mathbb{P}\mathcal{Q}$, alors l'ensemble des xy est $f(x)$ et l'ensemble des yx est $g(x)$. On a donc décrit l'inverse de l'application qui associe à une algèbre les isomorphismes L et R. •

Lemme 2.1.3 *Soit m une application linéaire de $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ préservant $\mathcal{Q}$ et telle que $\forall x \in \mathcal{Q}, m(x) \in L(x)$ (respectivement $m(x) \in R(x)$). Alors il existe $\alpha \in \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ tel que $\forall x \in \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}, m(x) = x\alpha$ (respectivement $m(x) = \alpha x$).*

Démonstration : Traitons le cas où $m(x) \in L(x)$ et considérons m comme un endomorphisme d'espace vectoriel. Soit $x_1, x_2 \in \mathcal{Q}$ tels que $L(\overline{x_1}) \cap L(\overline{x_2}) = \{0\}$. Alors, les ensembles $L_1 = \{\alpha : m(x_1) = x_1\alpha\}$ et $L_2 = \{\alpha : m(x_2) = x_2\alpha\}$, qui sont non vides par l'hypothèse faite sur m, sont des espaces affines de dimension 4 qui se rencontrent en un point unique que je note α. En effet, cette intersection est un espace affine de direction l'intersection des directions de L_1 et L_2, et cette intersection est réduite à $\{0\}$ par l'hypothèse que $L(\overline{x_1}) \cap L(\overline{x_2}) = \{0\}$. Comme m est linéaire, on a, sur le plan engendré par x_1 et x_2, $m(t) = t\alpha$. Choisissons alors x_1 et x_2 tels que ce plan ne soit pas inclus dans $\mathcal{Q}$. Soit alors P un vecteur en-dehors de cette quadrique et $y_1, y_2 \in \mathcal{Q}$ deux vecteurs tels que $L(\overline{y_1}) \oplus L(\overline{y_2}) = \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ et $P \in (y_1, y_2)$. Alors, de même, il existe β tel que sur (y_1, y_2), $m(t) = t\beta$. Mais comme L_P est inversible, on a $\beta = \alpha$, et donc pour $y \in \mathcal{Q}$ générique, $m(y) = y\alpha$. •

Soit V un espace vectoriel de dimension 8 et Q une forme bilinéaire non-dégénérée sur V. Posons $\mathbb{P}W = \mathbb{P}(V^* \otimes V^* \otimes V)$; c'est l'espace des structures d'algèbre sur V à homothéties près. Notons comme précédemment $\mathbb{P}\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}V$ la quadrique lisse définie par Q et $\mathcal{O} \subset \mathbb{P}W$ la variété des structures d'algèbres de composition sur V de norme Q. Choisissons un point arbitraire T_1 de $\mathcal{O}$ dont le produit correspondant sera noté par la juxtaposition.

Proposition 2.15 *La variété $\mathcal{O}$ contient deux composantes irréductibles isomorphes notées $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$, avec $T_1 \in \mathcal{O}_1$. Un isomorphisme entre $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ envoie l'algèbre $(x, y) \mapsto x*y$ sur l'algèbre $(x, y) \mapsto y*x$. Soit $* \in \mathcal{O}_1$. Il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{P}V - \mathcal{Q})^2$ tel que $x*y = (x\alpha)(\beta y)$. L'application $* \in \mathcal{O}_1 \mapsto (\alpha, \beta)$ est un isomorphisme entre $\mathcal{O}_1 = PSO_8/G_2$ et $(\mathbb{P}V - \mathcal{Q}) \times (\mathbb{P}V - \mathcal{Q})$, PSO_8-équivariant si l'on pose $g.(\alpha, \beta) = (\overline{g^-\overline{\alpha}}, \overline{g^+\overline{\beta}})$.*

Démonstration : Puisque toutes les algèbres de composition de dimension 8 sont isomorphes aux octaves [Jac 58, th.1,p.61], PO_8 agit transitivement sur $\mathcal{O}$.

Pour $T \in \mathcal{O}$ et $x \in \mathbb{P}\mathcal{Q}$, soit $*_T$ le produit défini par T, et $L_T(x) := \{x *_T y, y \in V\}$: c'est un espace linéaire isotrope maximal. Notons $G_Q^+(4,8)$ la composante de $G_Q(4,8)$ qui est l'image de $\mathbb{P}\mathcal{Q}$ par L_{T_1}, et $G_Q^-(4,8)$ l'autre composante. L'application $(T, x) \mapsto L_T(x)$ est algébrique ; si $L_T(\mathbb{P}\mathcal{Q}) = G_Q^\epsilon(4,8)$, alors $L_{\overline{T}}(\mathbb{P}\mathcal{Q}) = G_Q^{-\epsilon}(4,8)$, si $\overline{T}$ désigne l'algèbre $(x, y) \mapsto y *_T x$ obtenue en faisant agir la conjugaison $c : x \mapsto \overline{x}$ sur le tenseur T.

Soit $\mathcal{O}_1$ la sous-variété de $\mathcal{O}$ des tenseurs T tels que $L_T(\mathbb{P}\mathcal{Q}) = G^+(4,8)$. Puisque $O_8 = SO_8 \amalg c \circ SO_8$, $\mathcal{O}_1$ est homogène sous PSO_8, et le stabilisateur d'un élément

est le groupe d'automorphismes des octaves, soit $G_2 : \mathcal{O}_1 = PSO_8/G_2$. Par la preuve de la proposition 2.14, pour $T \in \mathcal{O}_1$, il existe des octaves inversibles α, β tels que $x *_T y = (x\alpha)(\beta y)$.

Voyons que l'application $T \in \mathcal{O}_1 \mapsto (\alpha, \beta)$ est algébrique. L'application $\mathcal{O} \times \mathbb{P}\mathcal{Q} \to G_Q^+(4, V) \simeq \mathbb{P}\mathcal{Q}, (T, x) \mapsto L_T(x)$ est algébrique. En vertu du lemme 1.1.3, ceci définit une application algébrique $\lambda : \mathcal{O} \to PSO_8$, telle que $\forall x \in \mathbb{P}\mathcal{Q}, L(\lambda(T).x) = L_T(x)$. On a alors $\alpha(T) = \lambda(T).1$. De même, l'application $T \mapsto \beta$ est algébrique.

Pour finir la preuve de la proposition, voyons comment $g \in PSO_8$ agit sur le tenseur $T : (x, y) \mapsto x *_T y = (x\alpha)(\beta y)$. On a par définition $x *_{g.T} y = g.[((g^{-1}.x)\alpha)(\beta(g^{-1}.y))]$. Par la remarque 2.1, cette expression vaut

$$g.[(g^+)^{-1}.(x\overline{g^-.\overline{\alpha}})(g^-)^{-1}.(\overline{g^+\overline{\beta}}y)] = (x\overline{g^-\overline{\alpha}})(\overline{g^+\overline{\beta}}).$$

Autrement dit, l'isomorphisme $T \mapsto (\alpha, \beta)$ fait bien correspondre à $g.T$ le couple $(\overline{g^-\overline{\alpha}}, \overline{g^+\overline{\beta}})$. •

Remarque : Le fait que $\mathcal{O}$ est homogène sous PO_8 signifie exactement que sur $\mathbb{C}$, il n'existe qu'une algèbre de composition de dimension 8, les octaves. Ce résultat algébrique admet une preuve géométrique en utilisant mes idées : si on a une telle algèbre, alors on sait que $L(x)$ et $R(y)$ sont des espaces linéaires isotropes maximaux, et que $\overline{L(x)} = R(\overline{x})$ (proposition 2.2). En particulier, si $\mathrm{Re}(x) = 0$, alors $\overline{x} = -x$, et donc $R(x) = R(-x) = \overline{L(x)}$. On en déduit que $\dim L(x) \cap R(x) = 3$, et que donc pour tout $x, y \in \mathcal{Q}$, $L(x)$ et $R(y)$ ne sont pas dans la même famille d'espaces linéaires. Il est alors facile d'exclure l'hypothèse où pour tout x et tout y de $\mathcal{Q}$, $L(x)$ et $R(y)$ se rencontreraient en dimension 3. Ils se rencontrent donc génériquement en dimension 1, et le même raisonnement que pour la preuve de la proposition 2.7 s'applique, montrant que L et R réalisent des isomorphismes. La preuve de la proposition 2.9 donne alors que si $x, y \mapsto x * y$ et $x, y \mapsto x *' y$ sont des produits normés et unitaires, alors il existe α, β tels que $x *' y = (x * \alpha) * (\beta * y)$.

Pour montrer que $\mathcal{O}$ est homogène sous PSO_8, il suffit alors de constater que l'action de ce groupe sur $(\mathbb{P}V - \mathbb{P}\mathcal{Q}) \times (\mathbb{P}V - \mathbb{P}\mathcal{Q})$ donnée par $g.(\alpha, \beta) = (\overline{g^-\overline{\alpha}}, \overline{g^+\overline{\beta}})$ est transitive. Par la proposition 2.11 et la remarque 2.1, ceci équivaut au fait que l'action $g.(\alpha, \beta) = (g.\alpha, g^+.\beta)$ l'est, et admet la preuve directe suivante : il suffit de montrer que pour tout $\beta, \beta' \in \mathbb{P}V - \mathcal{Q}$, il existe g stabilisant 1 et tel que $g^+.\beta = \beta'$. Pour montrer cela, on peut supposer que $\mathrm{Re}(\beta') = 0$. Notons $Stab(1)$ le sous-groupe de PSO_8 stabilisant 1. Tout d'abord, si L_1, L_2, M_1, M_2 sont des espaces linéaires isotropes de la même famille tels que L_1 et L_2, M_1 et M_2 sont supplémentaires, alors il existe $g \in Stab(1)$ tel que $g.L_i = M_i$. En effet, soit $l_1 \in L_1, l_2 \in L_2, m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$ tels que $1 = l_1 + l_2 = m_1 + m_2$: il suffit de prolonger l'application qui envoie l_i sur m_i en une application orthogonale g telle que $g.L_i = M_i$ (un tel prolongement existe car $\langle l_1, l_2 \rangle = \langle m_1, m_2 \rangle = \frac{1}{2}Q(1)$).

Si $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{P}\mathcal{Q}$ sont tels que $L(x_i) = L_i$ et $L(y_i) = M_i$, alors un tel g préserve 1 et g^+ envoie x_i sur y_i. En particulier, il existe $g \in Stab(1)$ tel que g^+ envoie β sur une droite non incluse dans $\mathbb{P}\mathcal{Q}$ arbitraire. On peut donc l'envoyer sur une droite incluse dans $\{\mathrm{Re} = 0\}$, et supposer que $\mathrm{Re}(\beta) = 0$. On sait (cf par exemple le cas 25 de la table p.144 de [KS 77]) qu'il existe $g \in G_2$ qui envoie β sur β'. Comme pour $g \in G_2$, on a $g.1 = 1$ et $g^+ = g$, la remarque est démontrée. •

2.2 Conséquences pour les premières grassmanniennes quadratiques et pour les groupes spinoriels

2.2.1 En dimension 10

Si V est un espace linéaire et Q une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée dans V, je note $G_Q(m,V)$ la sous-variété de la grassmannienne $G(m,V)$ des espaces linéaires isotropes de dimension m. Je note aussi $G_Q(m,n)$ la variété $G_Q(m,\mathbb{C}^n)$. Enfin, $G_Q(m,2m)$ n'est pas connexe ; je note $G_Q^{\pm}(m,2m)$ ses deux composantes connexes (qui sont irréductibles). Dans le paragraphe précédent, j'ai donné une description de $G_Q^{\pm}(4,8)$ en utilisant les octaves. Ici, j'utilise les résultats de ce paragraphe pour décrire les grassmanniennes $G_Q(3,8)$, $G_Q(5,10)$ et $G_Q(4,10)$. Par ailleurs, je vais proposer un analogue de la proposition 2.11 pour $Spin_{10}$.

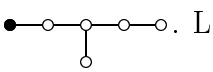
Proposition 2.16 *La grassmannienne quadratique $G_Q(3,8)$ est isomorphe à la sous-variété de $\mathbb{P}(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})\times\mathbb{P}(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})$ des couples $([a],[b])$ tels que $a\overline{b}=0$.*

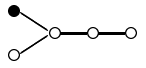
Démonstration : La proposition 2.1 implique que si Λ est un espace linéaire isotrope de dimension 3, alors il est dans exactement un espace linéaire isotrope de dimension 4 de chaque famille. Je note ces deux espaces linéaires Λ^+ et Λ^-. De plus, l'application $\Lambda\mapsto(\Lambda^+,\Lambda^-)$ est un isomorphisme sur son image. Composons cette application avec $(L^{-1},c\circ R^{-1})$, où c désigne la conjugaison des octaves. On obtient un isomorphisme de $G_Q(3,8)$ avec une sous-variété de $\mathbb{P}(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})\times\mathbb{P}(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})$. Cette sous-variété est l'ensemble des paires (a,b) telles que $\dim L(a)\cap R(\overline{b})=3$; c'est donc l'ensemble des couples d'octaves tels que $a\overline{b}=0$ par la proposition 2.9. •

Je démontre maintenant des résultats analogues concernant la quadrique dans $\mathbb{P}^9$. Notons $X(5,10)$ la sous-variété de $\mathbb{P}(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})$ des couples (a,b) d'octaves de norme nulle et tels que $a\overline{b}=0$.

Proposition 2.17 *Chaque composante de la grassmannienne quadratique $G_Q(5,10)$ est isomorphe à $X(5,10)$.*

Remarque :

- La projection naturelle $\mathbb{P}(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})$ ⇢ $\mathbb{P}(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})\times\mathbb{P}(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})$ induit, d'après cette proposition et la proposition 2.16, une application $G_Q^+(5,10)$ ⇢ $G_Q(3,8)$. Cette application peut se décrire comme suit : soit $\Lambda\subset\mathbb{C}^{10}$ un espace linéaire de dimension 8 sur lequel la forme quadratique définie sur $\mathbb{C}^{10}$ reste non-dégénérée. L'application envoie un espace linéaire L isotrope de dimension 5 dans $\mathbb{C}^{10}$ sur son intersection avec Λ. Elle est définie lorsque cette intersection est de dimension 3 (ce qui est la situation générique), ses fibres sont isomorphes à $G_Q^+(2,4)\simeq\mathbb{P}^1$.
- Anticipant un peu sur la suite de cette thèse, le corollaire 3.12 identifie la variété $X=$"$\mathcal{E}_6$" à la variété des matrices d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ hermitiennes annulant certains mineurs. En termes de diagrammes de Dynkin (cf p. 98), cette variété est représentée par  . La variété des droites dans X passant

par un point est donc la variété représentée par le diagramme  , soit la variété $G_5^+(5,10)$ qui nous intéresse [LM 02, p.13 et 14]. Or, puisque si par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T_A X = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, on voit que $T_A X \cap X$ est le cône de sommet A sur

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \overline{a} & \overline{b} \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}, Q(a) = Q(b) = 0, a\overline{b} = 0 \right\}.$$

On prouve ainsi de façon très détournée la proposition ; je donne ici un argument direct.

Démonstration : Si $a, b \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$, je note (a, b) l'élément de $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ qu'ils définissent et $[a, b]$ l'élément correspondant dans $\mathbb{P}(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{O} \otimes \mathbb{C})$ (si $(a, b) \neq (0, 0)$). Voyons que $X(5, 10)$ est lisse. Tout d'abord, on a une application rationnelle $X(5,10) \dashrightarrow \mathbb{P}\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})$, induite par la première projection $\mathbb{P}(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})$ (rappelons que $\mathbb{P}\mathcal{Q} \subset \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ est la quadrique définie par la norme). La fibre d'un point $[a]$ s'identifie à l'ensemble des $b \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ tels que $a\overline{b} = 0$; c'est donc $R(a)$. Ainsi, $X(5, 10)$ est de dimension 6+4=10. Au voisinage d'un point où a est non nul, nous venons de réaliser X comme l'espace total d'un fibré de rang 4 sur une quadrique lisse ; $X(5, 10)$ est donc lisse dans ce voisinage. Si b est non nul, on peut de même considérer la deuxième projection pour montrer que $X(5, 10)$ est lisse au voisinage de ce point. Ainsi $X(5, 10)$ est partout lisse.

Soit $H_2(\mathbb{O})$ l'espace vectoriel des matrices d'ordre 2 hermitiennes à coefficients dans $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$. Tout élément de $H_2(\mathbb{O})$ s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} x & z \\ \overline{z} & y \end{pmatrix}$, avec $x, y \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$. C'est donc un espace vectoriel de dimension 10, muni d'une quadrique naturelle, dont je note D l'équation :

$$D\left(\begin{pmatrix} x & z \\ \overline{z} & y \end{pmatrix} \right) = xy - Q(z). \tag{2.6}$$

Je note $\mathcal{D} \subset H_2(\mathbb{O})$ la quadrique définie par D. On a alors une application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_5 & : & \mathbb{O} \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{O} \otimes \mathbb{C} & \to & \mathcal{D} \subset H_2(\mathbb{O}) \\ & & (a, b) & \mapsto & \begin{pmatrix} Q(a) & a\overline{b} \\ b\overline{a} & Q(b) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Cette application est une généralisation naturelle de l'application de Veronese de degré 2 : $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \to \mathbb{P}(S^2\mathbb{C}^2)$; nous aurons l'occasion d'en étudier des variantes en détail au chapitre 3.2. Remarquons que $\mathbb{P}\varphi_5^{-1}(0) = X(5, 10)$. Une première étape pour démontrer la proposition est le fait que l'image de la différentielle de φ_5 en un point de $X(5, 10)$ est un espace isotrope de dimension maximale :

Lemme 2.2.1 *Soit $x \in X(5, 10)$, alors Im $d_x\varphi_5$ est un espace linéaire de dimension 5 dans la quadrique $\mathcal{D}$.*

Remarque : Notons $\varphi_5(.,.)$ la polarisation de $\varphi_5(.)$, c'est-à-dire l'unique application bilinéaire symétrique telle que $\varphi_5(v,v) = \varphi_5(v)$ pour tout $v \in \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$. Puisque

$$\varphi_5((a,b),(\alpha,\beta)) = \begin{pmatrix} 2\langle a,\alpha\rangle & a\overline{\beta}+\alpha\overline{b} \\ \beta\overline{a}+b\overline{\alpha} & 2\langle b,\beta\rangle \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

le fait $\varphi_5[(a,b),.]$ soit isotrope est équivalent au fait que

$$\forall(\alpha,\beta), \langle a\overline{\beta}, \alpha\overline{b}\rangle = 2\langle a,\alpha\rangle\langle b,\beta\rangle.$$

Ce fait peut aussi se montrer en polarisant l'identité $\langle u\overline{\beta}, u\overline{b}\rangle = Q(u)\langle b,\beta\rangle$.

Démonstration : Notons aussi $D(.,.)$ désigne la forme bilinéaire induite par D. Nous avons vu que $D(\varphi_5(u)) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$. En différentiant cette égalité en u dans la direction v, il vient $D(\varphi_5(u), \varphi_5(u,v)) = 0$. Une deuxième différentiation en u dans la direction w (v fixé) donne $2D(\varphi_5(u,w),\varphi_5(u,v)) + D(\varphi_5(u),\varphi_5(w,v)) = 0$. Si maintenant $u = x \in \widehat{X}(5,10)$, on a $\varphi_5(x) = 0$, donc $D(\varphi_5(x,w),\varphi_5(x,v)) = 0$, ce qui dit exactement que l'image de $d_x\varphi_5$ est isotrope.

Par ailleurs, le noyau de $d_x\varphi_5$ est l'espace tangent à $\widehat{X}(5,10) \subset \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ en x. Comme nous avons vu que $X(5,10)$ est lisse, ce noyau a pour dimension $\dim \widehat{X} = 11$. L'image de $d_x\varphi_5$ est donc bien de dimension 16-11=5. •

On a donc construit une application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_5^+ & : & X(5,10) & \to & G_D(5,10) \\ & & x & \mapsto & \text{Im } d_x\varphi_5 \end{array}.$$

La proposition sera une conséquence facile du lemme qui suit.

Lemme 2.2.2 *φ_5^+ est injective.*

Démonstration : Soient a_1, a_2 des octaves de norme nulle tels que $L(a_1)\cap L(a_2) = \{0\}$: on a d'après la formule (2.7) $\varphi_5^+(a_1,0)\cap\varphi_5^+(a_2,0) = \left\{\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$. Ainsi, pour $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in X(5,10)$ génériques, on a $\dim \varphi_5^+(a_1,b_1)\cap\varphi_5^+(a_2,b_2) = 1$. On peut donc, grâce au lemme 1.1.7, constater que $\varphi_5^+(a,b)$ détermine l'application linéaire $\varphi_5((a,b),.)$, ce qui prouve le lemme. Pour cela, il suffit de montrer que le groupe de Picard de $X(5,10)$ est engendré par la classe d'une section hyperplane. Or, soit h une forme linéaire sur $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$; elle détermine une forme linéaire H de $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ définie par $H(a,b) = h(a)$. Or, sur l'ouvert où a est non nul, nous avons vu que $X(5,10)$ est isomorphe à l'espace total d'un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}\mathcal{Q}$. C'est donc vrai sur le complémentaire de H, qui a donc comme groupe de Picard $Pic(\mathbb{P}\mathcal{Q} - h) = 0$. La section H étant irréductible et réduite, elle engendre donc le groupe de Picard de $X(5,10)$, et on peut appliquer le lemme 1.1.7. •

Finissons alors la preuve de la proposition 2.17. L'application φ_5^+ est injective ; son image est donc de dimension 10, soit la dimension de $G_Q^+(5,10)$. Ainsi, elle est bijective. Comme X est complète et $G_Q(5,10)^+$ lisse, φ_5^+ est un isomorphisme par le théorème principal de Zariski. •

Remarque : On a une proposition analogue concernant l'autre famille : si $G_Q^-(5,10)$ désigne l'autre famille, alors elle est isomorphe à $X(5,10)$ via l'isomorphisme $\tilde{\varphi}_5$ qui

envoie $[a,b]$ sur Im $d_{[a,b]}\tilde{\varphi}_5$, où $\tilde{\varphi}_5$ est défini par $\tilde{\varphi}_5(x,y) = \begin{pmatrix} Q(y) & x\overline{y} \\ y\overline{x} & Q(x) \end{pmatrix}$. En effet, pour les mêmes raisons, c'est un isomorphisme avec une composante de $G_Q(5,10)$, mais puisque $\varphi_5([a,0]) = \begin{pmatrix} * & L(a) \\ R(\overline{a}) & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi_5^-([a,0]) = \begin{pmatrix} 0 & L(a) \\ R(\overline{a}) & * \end{pmatrix}$, ces deux espaces linéaires se rencontrent en dimension 4 et ne font donc pas partie de la même famille.

Remarque 2.2 *On a* $\varphi_5^+(a,b) = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ \overline{z} & y \end{pmatrix} : xb - \overline{z}a = 0 \text{ et } ya - zb = 0 \right\}$ *et* $\varphi_5^-(a,b) = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ \overline{z} & y \end{pmatrix} : yb - \overline{z}a = 0 \text{ et } xa - zb = 0 \right\}$.

Démonstration : Puisqu'on passe de φ_5^+ à φ_5^- en échangeant les rôles de x et y, il suffit de montrer le premier résultat. Soit $[a,b] \in X(5,10)$ fixé. Notons f l'application linéaire $\varphi_5((a,b),.) : \mathbb{O}\otimes\mathbb{C} \oplus \mathbb{O}\otimes\mathbb{C} \to H_2(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})$. On a

$$ {}^t f \begin{pmatrix} x & z \\ \overline{z} & y \end{pmatrix} = (ya - zb, xb - \overline{z}a) $$

(j'identifie cette forme linéaire sur $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C} \oplus \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ avec un vecteur de $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C} \oplus \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ grâce à la forme quadratique $\langle (a,b),(\alpha,\beta)\rangle = 2\langle a,\alpha\rangle + 2\langle b,\beta\rangle$). En effet, $\left\langle {}^t f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (\alpha,\beta) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ * & 2\langle b,\beta\rangle \end{pmatrix} \right\rangle = 2\langle b,\beta\rangle$, et

$$ \begin{aligned} \left\langle {}^t f \begin{pmatrix} 0 & z \\ \overline{z} & 0 \end{pmatrix}, (\alpha,\beta) \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & z \\ \overline{z} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & a\overline{\beta} + \alpha\overline{b} \\ \beta\overline{a} + b\overline{\alpha} & * \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -2\langle z, a\overline{\beta} + \alpha\overline{b}\rangle \\ &= -2\langle \overline{z}a, \beta\rangle - 2\langle zb, \alpha\rangle. \end{aligned} $$

On a donc $\varphi_5^+(a,b) = (\varphi_5^+(a,b))^\perp = (\text{Im } f)^\perp = \text{Ker } {}^t f$, et la remarque est vérifiée. •

Proposition 2.18 *Le revêtement universel $Spin_{10}$ de SO_{10} est isomorphe à l'ensemble des couples (g^+, g), où $g^+ \in SL(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C} \oplus \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}), g \in SO_{10}$, et $\forall v \in \mathbb{O}\otimes\mathbb{C} \oplus \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}, \varphi_5(g^+ v) = g.\varphi_5(v)$.*

Remarque : Il est aussi isomorphe au sous-groupe de $GL(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C} \oplus \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}) \times SO_{10}$ des paires (g^-, g) telles que $\varphi_5^-(g^- x) = g.\varphi_5^-(x)$. Un isomorphisme entre ces deux réalisations est donné par $(g^+, g) \mapsto (g^+, \tau \circ g)$, où τ est l'involution de $H_2(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})$ $\begin{pmatrix} x & z \\ \overline{z} & y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y & z \\ \overline{z} & x \end{pmatrix}$.

Démonstration : On suit la démonstration de la proposition 2.11. Soit $\mathcal{G}$ le sous-groupe de $GL(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C} \oplus \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}) \times SO_{10}$ des paires (g^+, g) telles que $\varphi_5^+(g^+ x) = g\varphi_5^+(x)$ et $V := \mathbb{O}\otimes\mathbb{C} \oplus \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$. Si $(g^+, g) \in \mathcal{G}$, alors $\forall v, w \in V$, $\varphi_5(g^+ v, g^+ w) = g\varphi_5(v,w)$. Si $[v] \in X(5,10)$, on a vu que $\varphi_5(v,.)$ est de rang 5. Réciproquement, si $v = (a,b) \in \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ est tel que $\varphi_5(v,.)$ est de rang 5, alors $\dim\{a\overline{\alpha} + \beta\overline{b}\} = \dim L(a) + R(\overline{b}) \leq 5$, donc $[a,b] \in X(5,10)$.

On en déduit donc que si $[v] \in X(5,10)$, alors $[g^+.v] \in X(5,10)$ et $\varphi(g^+v) = g.\varphi(v)$. Si g est fixé, ceci définit l'action de g^+ sur la variété projective $X(5,10)$. Dans la fibre de la projection $(g^+, g) \mapsto g$, tous les éléments g^+ sont donc proportionnels. Si cette fibre est non vide, elle contient donc exactement deux éléments opposés. Montrons qu'elle est effectivement non vide, de sorte que $\mathcal{G} \to SO_{10}$ est un revêtement double.

Si $g \in SO_{10}$ est fixé, l'application $X(5,10) \to X(5,10), x \mapsto {\varphi_5^+}^{-1}(g.\varphi_5^+(x))$ est linéaire par le lemme 1.1.11. Ceci définit donc une application de $PGL(V)$ (lemme 1.1.1). Soit $g^+ \in GL(V)$ un représentant de cette application. En utilisant un analogue du lemme 1.1.7 pour les applications bilinéaires, on va montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*$: $\varphi_5(g^+x, g^+y) = \lambda g \varphi_5(x,y)$. Pour comparer ces deux membres, il suffit de remarquer qu'ils coïncident projectivement. Or, pour x et y générique, $\varphi_5(x,y)$ engendre l'intersection de $\varphi(x)$ et de $\varphi(y)$. La définition de g^+ implique donc que $\varphi_5(g^+x, g^+y)$ et $g.\varphi_5(x,y)$ sont proportionnels.

Montrons alors que $\mathcal{G}$ est connexe. Il suffit de trouver un lacet entre $(Id_V, Id_{H_2(\mathbb{O})})$ et $(-Id_V, Id_{H_2(\mathbb{O})})$. Le chemin

$$\theta \mapsto \left((a,b) \mapsto (e^{i\theta}a, e^{-i\theta}b), \begin{pmatrix} x & z \\ \overline{z} & y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{2i\theta}x & z \\ \overline{z} & e^{-2i\theta}y \end{pmatrix} \right),$$

pour $\theta \in [0, \pi]$, convient.

Finalement, on a $g^+ \in SL(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{O} \otimes \mathbb{C})$, puisque l'application $PSO_{10} \to \mathbb{C}, g \mapsto \det g^+$, définie sur une variété projective, est constante. •

2.2.2 En dimension 12

Pour décrire la grassmannienne quadratique $G_Q(5,10)$, nous avons été guidés par la description de la grassmannienne $G_Q(3,8)$: en effet, l'application rationnelle $G_Q(5,10) \dashrightarrow G_Q(3,8)$ décrite en remarque après la proposition 2.17 nous a permis de deviner une description de $G_Q(5,10)$, connaissant celle de $G_Q(3,8)$. En fait, il s'agit là d'un phénomène tout-à-fait général : si n est un entier, V un espace de dimension $2n$ muni d'une forme quadratique non-dégénérée, et Λ un sous-espace de dimension $2n-2$ sur lequel la forme quadratique reste non-dégénérée, alors on peut considérer l'application rationnelle

$$\begin{array}{rccc} i & : & G_Q^+(n,2n) & \dashrightarrow & G_Q(n-2, 2n-2) \\ & & L & \mapsto & L \cap \Lambda \end{array}.$$

La fibre de i au-dessus de M est l'ensemble des espaces linéaires isotropes qui contiennent M ; elle s'identifie donc à la grassmannienne des 2-plans dans le quotient $M^\perp/M$, isotropes pour la forme bilinéaire induite par celle définie sur V. Cette fibre est donc une variété de type $G_Q^+(2,4)$, donc isomorphe à $\mathbb{P}^1$.

On peut ainsi raisonnablement espérer que, connaissant $G_Q(n-2, 2n-2)$, l'on connaisse $G_Q^\pm(n,2n)$, qui serait définie par les mêmes équations, $G_Q(n-2,2n-2)$ étant une sous-variété de $\mathbb{P}W \times \mathbb{P}W$ et $G_Q^\pm(n,2n)$ de $\mathbb{P}(W \oplus W)$. En effet, $G_Q(n-2,2n-2)$ est naturellement, comme dans la preuve de la proposition 2.16, une sous-variété de

$G_Q^+(n-1,2(n-1)) \times G_Q^-(n-1,2(n-1))$: c'est donc naturellement une sous-variété d'un produit d'espaces projectifs.

En résumé, si l'on espère que les choses se passent en général comme dans le cas particulier de la dimension 10, connaissant les variétés $G_Q^\pm(n,2n) \subset \mathbb{P}W_\pm$, pour déterminer les variétés $G_Q^\pm(n+1,2(n+1))$, il "suffit" d'adopter la démarche suivante :

1. Déterminer à quelle condition un espace de $G_Q^+(n,2n)$ rencontre un espace de $G_Q^-(n,2n)$ en dimension $n-1$. Ceci décrit $G_Q(n-1,2n)$ comme une sous-variété de $\mathbb{P}W_+ \times \mathbb{P}W_-$.
2. Montrer que $G^\pm(n+1,2(n+1))$ est la sous-variété de $\mathbb{P}(W_+ \oplus W_-)$ définie par les mêmes équations.

Je vais maintenant répondre à ces deux questions pour obtenir une description de $G_Q^\pm(6,12)$. Je m'arrêterai à cette étape, bien que je sois convaincu qu'il est possible de continuer ce calcul indéfiniment, car je crains que les calculs ne deviennent trop compliqués et rendent le résultat final peu lisible. Par ailleurs, je vais donner au paragraphe suivant une description complète des grassmanniennes isotropes en termes de représentations spinorielles, en suivant [Che 97, p.134 à 175] ; il me semble que l'intérêt d'introduire les octaves diminue lorsque la dimension augmente.

Notre premier objectif est donc de déterminer à quelle condition deux espaces $\Lambda_\pm$ de $G_Q^\pm(5,10)$ se rencontrent en dimension 4. Rappelons que par la proposition 2.17, on sait qu'il existe des éléments $(a_\pm, b_\pm) \in X(5,10)$ tels que

$$\Lambda_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 2\langle a_+, \alpha\rangle & a_+\overline{\beta} + \alpha\overline{b}_+ \\ \beta\overline{a}_+ + b_+\overline{\alpha} & 2\langle b_+, \beta\rangle \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{O}\otimes\mathbb{C} \right\}, \qquad \text{et}$$

$$\Lambda_- = \left\{ \begin{pmatrix} 2\langle a_-, \alpha\rangle & a_-\overline{\beta} + \alpha\overline{b}_- \\ \beta\overline{a}_- + b_-\overline{\alpha} & 2\langle b_-, \beta\rangle \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{O}\otimes\mathbb{C} \right\}.$$

Il s'agit donc de déterminer des conditions sur $a_\pm, b_\pm$ pour que ces espaces se rencontrent en dimension 4. Mais, on sait que pour $(a_\pm, b_\pm)$ génériques dans $G_Q^\pm(5,10)$ (c'est-à-dire non nuls), les espaces $L(a_\pm)+R(\overline{b}_\pm)$ sont de dimension 5. La projection $p : H_2(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}) \to \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ se restreint donc, sur $\varphi_5^\pm(a_\pm, b_\pm)$, à un isomorphisme. Pour que $\dim \Lambda_+ \cap \Lambda_- = 4$, il faut donc que $\dim(L(a_+) + R(\overline{b}_+)) \cap (L(a_-) + R(\overline{b}_-)) = 4$. C'est pourquoi il est utile de décrire la dimension de ces intersections, ce que fait le lemme suivant :

Lemme 2.2.3 *Soit $a_\pm, b_\pm$ des octaves de norme nulle tels que* $\dim L(a_+) + R(b_+) = \dim L(a_-) + R(b_-) = 5$ *(ce qui équivaut au fait que ces octaves sont non nuls et $a_+b_+ = a_-b_- = 0$). Notons $d = \dim(L(a_+) + R(b_+)) \cap (L(a_-) + R(b_-))$. Alors :*

- *$d \geq 5 \iff a_+$ et a_-, b_+ et b_- sont colinéaires.*
- *$d \geq 4 \iff a_+b_- = a_-b_+ = 0$.*
- *$d \geq 3 \iff a_+b_-$ et a_-b_+ sont colinéaires.*

Démonstration : Tout d'abord, rappelons que $L(a)^\perp = L(a)$ et $R(a)^\perp = R(a)$ pour tout octave a de norme nulle. Ainsi,

$$[(L(a_+) + R(b_+)) \cap (L(a_-) + R(b_-))]^\perp = (L(a_+) \cap R(b_+)) + (L(a_-) \cap R(b_-)).$$

Comme $\dim L(a_+) \cap R(b_+) = \dim L(a_-) \cap R(b_-) = 3$, on a donc que $8 - d = 6 - \dim L(a_+) \cap R(b_+) \cap L(a_-) \cap R(b_-)$; ainsi

$$\dim L(a_+) \cap R(b_+) \cap L(a_-) \cap R(b_-) = d - 2.$$

Notons e la dimension de $L(a_+) \cap R(b_+) \cap L(a_-) \cap R(b_-)$. Si $d \geq 5$, alors $d = 5$ et $e = 3$, ce qui équivaut à $L(a^+) \cap R(b_+) = L(a_-) \cap R(b_-)$, et à $[a_+] = [a_-]$, $[b_+] = [b_-]$ (dans $\mathbb{P}(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})$), par la preuve de la proposition 2.16.

Si $d \geq 4$, alors $e \geq 2$, et donc $\dim L(a_+) \cap R(b_-) \geq 2$ et $\dim L(a_-) \cap R(b_+) \geq 2$, donc ces dimensions valent 3, et $a_+ b_- = a_- b_+ = 0$ (proposition 4.14). Réciproquement, ces égalités impliquent $\dim L(a_+) \cap R(b_-) = \dim L(a_-) \cap R(b_+) = 3$. Soit ces espaces sont égaux, et on est dans le premier cas du lemme, soit, comme $(L(a_+) + R(b_+)) \cap (L(a_-) + R(b_-)) \supset L(a_+) \cap R(b_-), L(a_-) \cap R(b_+)$, on a $d \geq 4$.

Supposons $d \geq 3$. Si $a_+ b_- = 0$ ou $a_- b_+ = 0$, alors la conclusion du lemme est vraie. Sinon, $L(a_+) \cap R(b_-) = \langle a_+ b_- \rangle$ et $L(a_-) \cap R(b_+) = \langle a_- b_+ \rangle$. Comme $e \geq 1$, ces deux espaces linéaires sont égaux, ce qui signifie que $a_+ b_-$ et $a_- b_+$ sont proportionnels. Réciproquement, si $a_+ b_-$ et $a_- b_+$ sont proportionnels et non nuls, alors $L(a_+) \cap R(b_+) \cap L(a_-) \cap R(b_-) \neq \{0\}$; ainsi $e \geq 1$. Si par exemple $a_+ b_- = 0$, alors $(L(a_+) + R(b_+)) \cap (L(a_-) + R(b_-)) \supset L(a_+) \cap R(b_-)$, de dimension 3. Ainsi $d \geq 3$. •

Nous allons caractériser le fait que deux espaces isotropes se rencontrent en dimension 4. Au cours de la preuve de cette caractérisation, nous utiliserons la formule suivante :

Fait 2.2.4 *Soient a, b, c des octaves. On a $a(\overline{b}c) + b(\overline{a}c) = 2\langle a, b \rangle c$.*

Démonstration : Il suffit de linéariser en a la formule $a(\overline{a}c) = Q(a)c$, qui découle de l'alternativité. •

Remarque : Cette formule donne une description de l'espace isotrope $R(xy)$, pour x un octave de norme nulle et $y \notin L(\overline{x})$. En effet, elle s'écrit $t(xy) = 2\langle t, \overline{x} \rangle y - \overline{x}(\overline{t}y)$. Elle implique donc que $R(xy) \subset L(\overline{x}) + \langle y \rangle$. Or, il existe exactement deux espaces linéaires isotropes de dimension 4 contenus dans $L(\overline{x}) + \langle y \rangle$, un de chaque famille. En effet, $L \subset L(\overline{x}) + \langle y \rangle$ si et seulement si $L^\perp = L \supset L(\overline{x}) \cap y^\perp$, et on sait qu'exactement deux espaces linéaires isotropes de dimension 4 contiennent cet espace de dimension 3. Ces deux espaces sont donc $L(\overline{x})$ et $R(xy)$. Comme pour la proposition 2.9, cette définition du produit xy tombe en défaut exactement quand ce produit est nul (soit quand $y \in L(\overline{x})$).

Lemme 2.2.5 *Soient $(a_+, b_+), (a_-, b_-) \in X(5, 10)$. Les espaces linéaires $\varphi_5^+(a_+, b_+)$ et $\varphi_5^-(a_-, b_-)$ se rencontrent en dimension 4 si et seulement si*

- *pour $b_+ = 0$: a_+ et a_- sont proportionnels et $a_+ \overline{b}_- = 0$.*
- *pour $a_+ \neq 0$ et $b_+ \neq 0$: $\exists t \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C} : (a_-, b_-) = (tb, -\overline{t}a)$.*

Démonstration : La variété des couples (a_-, b_-) tels que $\varphi^-(a_-, b_-)$ qui rencontrent $\varphi_5^+(a_+, b_+)$ en dimension 4 est isomorphe à la variété des hyperplans de $\varphi_5^+(a_+, b_+)$; elle est donc isomorphe à $\mathbb{P}^4$. Pour démontrer le lemme, il suffit donc de vérifier, dans chacun des cas, que si la condition indiquée est vérifiée, alors l'intersection est bien de dimension 4, puisque le noyau de $t \mapsto (tb, -\overline{t}a)$ est $R(\overline{b}) \cap L(a)$, de dimension 3.

Si a_- est un multiple scalaire de a_+, comme

$$\varphi_5^-(a_-,b_-)=\left\{\begin{pmatrix} 2\langle b_-,\beta\rangle & a_-\overline{\beta}+\alpha\overline{b}_- \\ \beta\overline{a}_-+b_-\overline{\alpha} & 2\langle a_-,\alpha\rangle \end{pmatrix}\right\},$$

alors, $\left\{\begin{pmatrix} 2\langle a_-,\beta\rangle & a_-\overline{\beta} \\ \beta\overline{a}_- & 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \varphi_5^+(a_+,0)\cap\varphi^-(a_-,b_-)$, et donc ces deux espaces se rencontrent en dimension 4.

Pour étudier le cas générique, on utilise la remarque 2.2. On suppose $a_+\neq 0$ et $b_+\neq 0$. Soit $t\in\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$. Rappelons que la restriction de la projection $p: H_2(\mathbb{O})\to\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ à $\varphi_5^+(a_+,b_+)$ est un isomorphisme ; il suffit donc de vérifier que :

- $\dim p(\varphi_5^+(a_+,b_+))\cap p(\varphi_5^-(tb_+,-\overline{t}a_+))=4$.
- Si $\begin{pmatrix} x & z \\ \overline{z} & y \end{pmatrix}\in\varphi_5^+(a_+,b_+)$ et $z\in p[\varphi_5^-(tb_+,-\overline{t}a_+)]$, alors on a
$$\begin{pmatrix} x & z \\ \overline{z} & y \end{pmatrix}\in\varphi_5^-(tb_+,-\overline{t}a_+).$$

Le premier point découle directement de la définition de $\varphi_5^\pm$ et du lemme 2.2.3. Pour le deuxième point, si $\begin{pmatrix} x & z \\ \overline{z} & y \end{pmatrix}\in\varphi_5^+(a_+,b_+)$ et $z\in p[\varphi_5^-(tb_+,-\overline{t}a_+)]$, alors, par la remarque 2.2, $\overline{z}(tb_+)$ est proportionnel à $\overline{t}a_+$. De plus, on a

$$\begin{array}{rcll} \overline{z}(tb_+) & = & -\overline{t}(zb_+)+2\langle z,t\rangle b_+ & (fait 2.2.4) \\ & = & -y(\overline{t}a_+)+2\langle z,t\rangle b_+ & (remarque 2.2)). \end{array}$$

Comme on peut supposer t générique, b_+ et $\overline{t}a_+$ ne sont pas proportionnels, et cette égalité implique $\overline{z}(tb_+)=-y(\overline{t}a_+)$. De même, on a $z(-\overline{t}a_+)=x(tb_+)$, et donc $\begin{pmatrix} x & z \\ \overline{z} & y \end{pmatrix}\in\varphi_5^-(tb,-\overline{t}a)$. •

Lemme 2.2.6 *Soit $(a_+,b_+),(a_-,b_-)\in X(5,10)$. Les espaces linéaires $\varphi_5^+(a_+,b_+)$ et $\varphi_5^-(a_-,b_-)$ se rencontrent en dimension 4 si et seulement si*

1. $a_+\overline{b}_-=b_+\overline{a}_-=0$.
2. $\langle a_+,a_-\rangle=\langle b_+,b_-\rangle=0$.
3. $\forall x_+,x_-\in\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}, \langle b_+x_+,b_-x_-\rangle=2(\langle a_+,\overline{x}_+\rangle\langle a_-,\overline{x}_-\rangle-\langle a_-,\overline{x}_+\rangle\langle a_+,\overline{a}_-\rangle)$.

Démonstration : Montrons d'abord que ces relations sont vérifiées si $\dim\varphi_5^+(a_+,b_+)\cap\varphi_5^-(a_-,b_-)=4$. Il suffit pour cela de se placer dans le cas générique du lemme 2.2.5 : on suppose que a_+ et b_+ sont non nuls et qu'il existe t tel que $(a_-,b_-)=(tb_+,-\overline{t}a_+)$. Dans ce cas, $\langle a_+,a_-\rangle=\langle a_+,\overline{t}b_+\rangle=\langle a_+\overline{b}_+,t\rangle=\langle 0,t\rangle=0$, et de même, $\langle b_+,b_-\rangle=0$. Par ailleurs, on sait déjà, par le lemme 2.2.3, que $a_+\overline{b}_-=b_+\overline{a}_-=0$. Puisque $a_+\overline{b}_+=0$, il existe $u\in\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ tel que $b_+=ua_+$. Posons $a=a_+, y=x_+, x=x_-$; l'identité (3) devient

$$\langle(ua)y,(-\overline{t}a)x\rangle=2(\langle a,\overline{y}\rangle\langle t(ua),\overline{x}\rangle-\langle\overline{a},y\rangle\langle(\overline{a}\,\overline{u})\overline{t},x\rangle).$$

Il suffit donc d'établir le lemme qui suit :

Lemme 2.2.7 *Soit a un octave de norme nulle, et t, u, x, y des octaves quelconques. Alors*

$$\langle(\overline{t}a)x, (ua)y\rangle = 2(\langle\overline{a}, x\rangle\langle(\overline{a}\,\overline{u})\overline{t}, y\rangle - \langle\overline{a}, y\rangle\langle(\overline{a}\,\overline{u})\overline{t}, x\rangle).$$

Démonstration : Considérons que a, u et t sont fixés et montrons une identité de fonctions en x et y. Soit $f(x,y) = \langle(\overline{t}a)x, (ua)y\rangle$. Alors, $f(x,x) = Q(x)\langle\overline{t}a, ua\rangle = Q(x)Q(a)\langle\overline{t}, u\rangle = 0$ car $Q(a) = 0$. L'application f est donc une forme bilinéaire antisymétrique. De plus, si $(\overline{t}a)x = 0$ ou $(ua)x = 0$, alors $f(x,y) = 0$. Ainsi, f est de rang 2, et si l'on considère l'application $\tilde{f} : \mathbb{O}\otimes\mathbb{C} \to (\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})^*$ induite par f, on a $\mathrm{Im}\,\tilde{f} = (\mathrm{Ker}\,\tilde{f})^\perp = [L(\overline{a}t) + L(\overline{a}\,\overline{u})]^\perp == L(\overline{a}t)\cap L(\overline{a}\,\overline{u})$. Ce dernier, pour u et t génériques, est le plan vectoriel engendré par $\overline{a}$ et $(\overline{a}\,\overline{u})\overline{t}$ (en effet, le fait 2.2.4 implique $(\overline{a}\,\overline{u})\overline{t} = 2\langle u, t\rangle\overline{a} - (\overline{a}t)u$; on a donc $(\overline{a}\,\overline{u})\overline{t} \in L(\overline{a}t)$). Ainsi, f est proportionnelle à $\langle\overline{a}, x\rangle\langle(\overline{a}\,\overline{u})\overline{t}, y\rangle - \langle\overline{a}, y\rangle\langle(\overline{a}\,\overline{u})\overline{t}, x\rangle$. Pour déterminer le coefficient de proportionnalité, on évalue $f(1, y)$:

$$\begin{array}{rcll}
\langle\overline{t}a, (ua)y\rangle & = & \langle(\overline{t}a)\overline{y}, ua\rangle & \\
& = & \langle\overline{y}, (\overline{a}t)(ua)\rangle & \\
& = & 2\mathrm{Re}(a)\langle\overline{y}, t(ua)\rangle - \langle\overline{y}, (at)(ua)\rangle & (\overline{a} = 2\mathrm{Re}(a) - a) \\
& = & 2\mathrm{Re}(a)\langle\overline{y}, t(ua)\rangle - \langle\overline{y}, a(tu)a\rangle & (\text{identité de Moufang}) \\
& = & 2\mathrm{Re}(a)\langle\overline{y}, t(ua)\rangle - 2\mathrm{Re}(a(tu))\langle\overline{y}, a\rangle & (aba = 2\mathrm{Re}(ab)a : \text{lemme2.1.1}) \\
& = & 2\langle\overline{a}, 1\rangle\langle(\overline{au})\overline{t}, y\rangle - 2\langle(\overline{au})\overline{t}, 1\rangle\langle\overline{a}, y\rangle. &
\end{array}$$

La dernière égalité découle par exemple de $\langle a(tu), 1\rangle = \langle\overline{a}, tu\rangle = \langle\overline{a}\,\overline{u}, t\rangle = \langle(\overline{a}\,\overline{u})\overline{t}, 1\rangle$, achevant la preuve du lemme. •

Réciproquement, notons, pour $[a_+, b_+] \in X(5,10)$, $\mathcal{L}_{[a_+,b_+]}$ l'ensemble des $[a_-, b_-] \in X(5,10)$ tels que les équations de la proposition soient vérifiées, et $\tilde{\mathcal{L}}_{[a_+,b_+]}$ l'ensemble des $[a_-, b_-] \in X(5,10)$ tels que $\dim\varphi_5^+(a_+, b_+)\cap\varphi_5^-(a_-, b_-) = 4$. Nous venons de voir que $\tilde{\mathcal{L}}_{[a_+,b_+]} \subset \mathcal{L}_{[a_+,b_+]}$. Or, comme nous avons vu que $\tilde{\mathcal{L}}_{[a_+,b_+]}$ est isomorphe à $\mathbb{P}^4$, il suffit de montrer que $\mathcal{L}_{[a_+,b_+]}$ est de dimension 4. Supposons d'abord que $b_+ = 0$. Alors les équations (3) donnent

$$\forall u, v \in \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}, \langle a_+, u\rangle\langle a_-, v\rangle = \langle a_-, u\rangle\langle a_+, v\rangle.$$

Ceci implique que $a_+^\perp = a_-^\perp$, et donc que a_+ et a_- sont proportionnels. Ainsi, $\mathcal{L}_{[a_+,0]} = \mathbb{P}(\mathbb{C}.a_+ \oplus R(a_+)) \simeq \mathbb{P}^4$.

On démontre maintenant que $\mathcal{L}_{[a_+,b_+]} \simeq \mathbb{P}^4$ pour tous $[a_+, b_+] \in X(5,10)$: soit $[a_+, b_+] \in X(5,10)$ tel que $a_+ \neq 0$ et $b_+ \neq 0$, et soit $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$. Alors, on a :

$$[a_-, b_-] \in \mathcal{L}_{[a_+,b_+]} \Longleftrightarrow [a_-, \frac{b_-}{\alpha}] \in \mathcal{L}_{[a_+,\alpha.b_+]}.$$

Ainsi, la dimension de $\mathcal{L}_{[a_+,\alpha.b_+]}$ ne dépend pas de α. Si elle était strictement supérieure à 4, alors celle de $\mathcal{L}_{[a_+,0]} = \mathcal{L}_{[a_+,0.b_+]}$ le serait aussi, et nous venons de voir que ce n'est pas le cas. •

Proposition 2.19 *Soit $X(6,12)$ la sous-variété de $\mathbb{P}(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})^{\oplus 4}$ constituée des quadruplets vérifiant :*

1. $Q(a)=Q(b)=Q(c)=Q(d)=\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle=0$.
2. $a\overline{b}=a\overline{d}=b\overline{c}=c\overline{d}=0$.
3. $\forall x,y\in\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}, \langle bx,dy\rangle=2(\langle a,\overline{x}\rangle\langle c,\overline{y}\rangle-\langle c,\overline{x}\rangle\langle a,\overline{y}\rangle)$.

Alors :

- *$X(6,12)$ est isomorphe à chaque composante de $G_Q(6,12)$.*
- *Sa projection dans $\mathbb{P}(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})\times\mathbb{P}(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})$ est isomorphe à $G_Q(4,10)$.*

Remarque : Il est connu que l'idéal de $G^{\pm}(6,12)$ est engendré par des quadriques, et que l'espace de ces quadriques est la représentation $\Lambda^2\mathbb{C}^{12}$ de $Spin_{12}$. Cette proposition décrit ces quadriques en utilisant une identification $\mathbb{C}^{12}\simeq\mathbb{C}^4\oplus\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$. On a ainsi $\Lambda^2\mathbb{C}^{12}\simeq\Lambda^2\mathbb{C}^4\oplus(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}^4\oplus\Lambda^2(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})$; ces trois composantes sont regroupées dans les trois points de la proposition.

Démonstration : L'énoncé concernant $G_Q(4,10)$ se démontre exactement comme la proposition 2.16 en utilisant le lemme 2.2.6.

Soit $V=\mathbb{C}^4\oplus\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$, et soit D la forme quadratique définie sur V par

$$D(t_1,t_2,t_3,t_4,z)=t_1t_2+t_3t_4-Q(z).$$

Posons aussi

$$\varphi_6[(a,b,c,d),(\alpha,\beta,\gamma,\delta)]=(2\langle a,\alpha\rangle+2\langle d,\delta\rangle,2\langle b,\beta\rangle+2\langle c,\gamma\rangle,\\ 2\langle a,\gamma\rangle-2\langle b,\delta\rangle,-2\langle c,\alpha\rangle+2\langle d,\beta\rangle,a\overline{\beta}+\alpha\overline{b}+c\overline{\delta}+\gamma\overline{d}).$$

Nous allons voir que l'application

$$\begin{array}{rccc}\varphi_6^+ & : & X(6,12) & \to & G^+(6,12)\\ & & (a,b,c,d) & \mapsto & \text{Im }\varphi_6[(a,b,c,d),.]\end{array}$$

est l'isomorphisme cherché.

Voyons que pour $(a,b,c,d)\in V$, Im $\varphi_6[(a,b,c,d),.]$ est de dimension au moins 6. C'est vrai lorsque $(a,b)=(0,0)$; supposons donc $(a,b)\neq(0,0)$ et $(c,d)\neq(0,0)$. Soit $p:\mathbb{C}^{12}=\mathbb{C}^4\oplus\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{10}=\mathbb{C}^2\oplus\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ la projection obtenue avec la projection $\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^2$ sur les deux premiers facteurs. On a $p[\{\varphi_6(a,b,c,d)(\alpha,\beta,0,0)\}]=\varphi_5^+(a,b)$ et $p[\{\varphi_6(a,b,c,d)(0,0,\gamma,\delta)\}]=\varphi_5^-(a,b)$, ce qui implique $\dim\text{Im }\varphi_6[(a,b,c,d),.]\geq 6$. De plus, on a $[a,b,c,d]\in X(6,12)$ si et seulement si cette dimension est 6.

Par ailleurs,

$$Q(a\overline{\beta}+\alpha\overline{b}+c\overline{\delta}+\gamma\overline{d})=2\langle a\overline{\beta},\alpha\overline{b}+\gamma\overline{d}\rangle+2\langle c\overline{\delta},\gamma\overline{d}+\alpha\overline{b}\rangle+2\langle a\overline{\beta},c\overline{\delta}\rangle+2\langle b\overline{\alpha},d\overline{\gamma}\rangle.$$

Or, la remarque qui suit le lemme 2.2.1 montre que, par exemple, $\langle a\overline{\beta},\alpha\overline{b}\rangle=2\langle a,\alpha\rangle\langle b,\beta\rangle$. On peut donc ainsi calculer les deux premiers produits scalaires de la formule précédante. Le produit scalaire $\langle b\overline{\alpha},d\overline{\gamma}\rangle$ se calcule en utilisant les équations (3) de l'hypothèse. Enfin, comme il est clair que la condition de la proposition 2.2.6 est invariante par la

symétrie ($a_\pm \leftrightarrow b_\pm$), les équations de l'hypothèse impliquent $\forall x, y \in \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}, \langle ax, cy\rangle = 2(\langle b, \overline{x}\rangle\langle d, \overline{y}\rangle - \langle d, \overline{x}\rangle\langle b, \overline{y}\rangle)$, ce qui permet de calculer $\langle a\overline{\beta}, c\overline{\delta}\rangle$. On trouve alors que

$$\begin{aligned} Q(a\overline{\beta} + \alpha\overline{b} + c\overline{\delta} + \gamma\overline{d}) &= 4\langle a,\alpha\rangle\langle b,\beta\rangle + 4\langle a,\gamma\rangle\langle d,\beta\rangle + 4\langle c,\gamma\rangle\langle d,\delta\rangle \\ &+ 4\langle c,\alpha\rangle\langle b,\delta\rangle + 4\langle b,\beta\rangle\langle d,\delta\rangle - 4\langle b,\delta\rangle\langle d,\beta\rangle \\ &+ 4\langle a,\alpha\rangle\langle c,\gamma\rangle - 4\langle a,\gamma\rangle\langle c,\alpha\rangle. \end{aligned}$$

De cette égalité, on déduit aisément que $\varphi_6^+(a,b,c,d)$ est isotrope.

Pour finir la preuve de la proposition, par les arguments habituels, il suffit de vérifier que φ_6^+ est injective. On peut proposer un argument similaire à celui de la proposition 2.17, mais voici un autre qui aurait aussi fonctionné pour cette proposition : supposons $\varphi_6^+(a,b,c,d) = \varphi_6^+(a',b',c',d')$. Notons p_i les quatre projections naturelles sur $\mathbb{C}$ et π la projection sur $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$. Rappelons que p désigne la projection sur $\mathbb{C}^{10}$. Alors, $(c,d) = (0,0) \Longleftrightarrow p_4[\varphi_6^+(a,b,c,d)] = \{0\}$. Ainsi, si $(c,d) = (0,0)$, on a aussi $(c',d') = (0,0)$. En projetant $\varphi_6^+(a,b,0,0)$ sur $\mathbb{C}^{10}$ par p, on remarque que $\varphi_5^+(a,b) = \varphi_5^+(a',b')$.

Supposons ainsi que $(a,b) \neq (0,0), (c,d) \neq 0, (a',b') \neq 0$ et $(c',d') \neq 0$. On a

$$p[\varphi_6^+(a,b,c,d)] = \varphi_5^+(a,b) + \varphi_5^-(c,d).$$

Ainsi, $\varphi_5^+(a,b) + \varphi_5^-(c,d) = \varphi_5^+(a',b') + \varphi_5^-(c',d')$. En prenant l'orthogonal de cette égalité, on en déduit que $\varphi_5^+(a,b) \cap \varphi_5^-(c,d) = \varphi_5^+(a',b') \cap \varphi_5^-(c',d')$, et donc que $\varphi_5^+(a,b) = \varphi_5^+(a',b')$ et $\varphi_5^-(c,d) = \varphi_5^-(c',d')$. Ainsi, (a,b) et (a',b'), (c,d) et (c',d'), sont proportionnels. Il est alors aisé d'en déduire que (a,b,c,d) et (a',b',c',d') sont proportionnels. •

Nous venons de voir que l'application $\varphi_6^+ : u \mapsto \text{Im } \varphi_6(u,.)$ réalise un isomorphisme entre $X(6,12)$ et une composante de $G_Q(6,12)$. La même preuve montre que l'application $\varphi_6^- : v \mapsto \text{Im } \varphi(.,v)$ fait de même. Or, soit a un octave de norme nulle ; $\varphi^+(a,0,0,0) = \mathbb{C}\times\{0\}\times\mathbb{C}\times\{0\}\times L(a)$ et $\varphi^-(a,0,0,0) = \mathbb{C}\times\{0\}\times\{0\}\times\mathbb{C}\times L(a)$. Ainsi, ces deux espaces se rencontrent en dimension 5 et ne font donc pas partie de la même famille. On a donc des isomorphismes $\varphi_6^\pm : X(6,12) \to G_Q^\pm(6,12)$. •

Comme dans les cas prédédants, on déduit de cette proposition une description du groupe spinoriel. Dans la proposition qui suit, j'utilise le fait qu'il existe une forme symplectique ω sur $(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})^4$ telle que pour $(u,v) \in X(6,12)$, on a $\dim \varphi_6^+(u)\cap\varphi_6^+(v) \geq 2$ si et seulement si $\dim \varphi_6^-(u) \cap \varphi_6^-(v) \geq 2$ si et seulement si $\omega(u,v) = 0$. Ce fait bien connu est par exemple conséquence des rappels que je fais dans le paragraphe suivant. Le groupe $Sp((\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})^4)$ désigne le groupe des endomorphismes linéaires préservant cette forme symplectique.

Proposition 2.20 *Le groupe $Spin_{12}$ est isomorphe à l'ensemble des triplets (g, g^+, g^-) avec $g \in SO_{12}$ et $g^\pm \in Sp((\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})^4)$ satisfaisant l'identité*

$$\forall u, v \in (\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})^4, \varphi_6(g^+u, g^-v) = g.\varphi_6(u,v). \tag{2.8}$$

Démonstration : L'équation (2.8) implique que pour tout $[u] \in X(6,12)$, $[g^\pm.u] \in X(6,12)$ et

$$\varphi_6^\pm(g^+u) = g.\varphi^\pm(u). \tag{2.9}$$

Si $g^{\pm}$ sont définis projectivement par l'équation (2.9), alors, pour $v \in \tilde{X}(6,12)$ générique, $\varphi(u,v)$ engendre la droite vectorielle $\varphi_6^+(u) \cap \varphi_6^-(v)$. Ainsi, grâce au lemme 1.1.7, on peut définir géométriquement les applications $\varphi(u,.)$, pour $u \in \tilde{X}(6,12)$. On en déduit par l'argument habituel que pour $g \in SO_{12}$, et (g^+, g^-) définis par (2.9), l'équation (2.8) est vraie à une constante près. Par ailleurs, vu la définition de g^+, il est clair que $\varphi_6^+(u)$ et $\varphi_6^+(v)$ se rencontrent en dimension au moins 2 si et seulement si $\varphi_6^+(g^+u)$ et $\varphi_6^+(g^+v)$ le font. Ainsi, g^+ préserve ω à une constante près, et de même pour g^-.

Je vais maintenant montrer qu'il existe exactement deux couples (g^+, g^-) d'éléments de $Sp((\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})^4)$ tels que l'identité 2.8 soit vraie. Soit $g \in SO_{12}$: nous avons vu qu'il existe $(g^+, g^-) \in GSp[(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})^4]$ vérifiant (2.8). De plus, il existe des scalaires $\nu(g^+), \nu(g^-)$ tels que $\forall u, v \in (\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})^4, \omega(g^{\pm}u, g^{\pm}v) = \nu(g^{\pm})\omega(u,v)$. Posons $\lambda(g) = \nu(g^+).\nu(g^-)$. Ce nombre ne dépend pas du choix de (g^+, g^-) (car tout autre choix serait de la forme $(tg^+, t^{-1}g^-)$, avec $t \in \mathbb{C}^*$). On en déduit donc un caractère de SO_{12}. Ce caractère est trivial car SO_{12} est simple. Ceci montre qu'il y a bien exactement deux couples (g^+, g^-) dans $Sp((\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})^4)$ satisfaisant (2.8). Enfin, en choisissant $g(\theta)$ défini par $g(\theta).(t_1,t_2,t_3,t_4,z) = (e^{i\theta}t_1, e^{-i\theta}t_2, t_3, t_4, z)$, on constate que ce revêtement double n'est pas trivial. •

2.2.3 Une description de tous les groupes spinoriels

Les résultats des deux paragraphes précédents se généralisent aisément pour les plus grandes dimensions en termes de *spineurs*. Je rappelle ici brièvement leur construction ; pour de plus amples détails, le lecteur peut se référer au livre [Che 97]. Je vais ainsi rappeler une description des grassmanniennes isotropes, et montrer que l'on peut en déduire une description, nouvelle à ma connaissance, des groupes spinoriels.

Soit V un espace vectoriel de dimension $2r$ sur $\mathbb{C}$ muni d'une forme quadratique Q non-dégénérée. L'algèbre de Clifford, que je note C, est par définition le quotient de l'algèbre tensorielle de V par l'idéal bilatère engendré par les relations $x \otimes x - Q(x)$. Comme algèbre, on a $C = C^+ \oplus C^-$, où C^+ (respectivement C^-) désigne l'ensemble des combinaisons linéaires de produits d'un nombre pair (respectivement impair) de vecteurs.

Soient Λ_1, Λ_2 des espaces isotropes de dimension r supplémentaires. La sous-algèbre engendrée par les vecteurs de Λ_i est isomorphe à l'algèbre extérieure $\wedge\Lambda_i$. Je noterai C_i cette sous-algèbre et $C_i^{\pm}$ son intersection avec $C^{\pm}$. L'antiautomorphisme principal, noté α, est l'application linéaire telle que $\forall v_1, \ldots, v_k, \alpha(v_1 \cdots v_k) = v_k \cdots v_1$. On définit alors le groupe spinoriel $Spin(V)$ comme le sous-groupe du groupe des éléments inversibles de C dont les éléments sont des produits d'un nombre pair d'éléments de V de norme 1. Si $x \in V$ est tel que $Q(x) = 1$, on définit la symétrie par rapport à x, notée s_x, par la formule $s_x(v) = v - 2\langle x, v\rangle x$; ceci définit une application $V \to O(V)$ à valeurs dans le groupe orthogonal. Les images de cette application sont de déterminant -1. Cette application permet d'en définir une de $Spin(V)$ vers $SO(V)$, le groupe spécial orthogonal. On montre que $Spin(V) \to SO(V)$ est le revêtement universel. Le but de ce paragraphe est de donner une description plus explicite de $Spin(V)$.

Commençons par rappeler la description des grassmaniennes quadratiques en termes de spineurs. Soit f_i le produit des éléments d'une base de Λ_i dans C ; un premier ré-

sultat est que l'application $C_i \to C, u \mapsto uf_{3-i}$ est un isomorphisme linéaire entre C_i et l'idéal à gauche Cf_{3-i} (le même résultat vaut pour l'idéal à droite f_iC) : [Che 97, preuve de la proposition 2.2.1,p.106]. Par conséquent, on peut définir une représentation $\rho : C \to End(C_1)$ de C (et donc une représentation de $Spin(V)$) grâce à la formule $\forall c \in C, \forall u \in C_1, (\rho(c).u)f_2 = cuf_2$. On peut aussi donner des formules explicites pour cette représentation [Che 97, proposition 2.2.2], et le fait 2.2.9 en donne une définition géométrique. Un élément de C_1 sera appelé un *spineur*.

Par ailleurs, si $\wedge V$ désigne l'algèbre extérieure de V, on a une identification naturelle $C \simeq \wedge V$ [Che 97, 2.1.6, p.105]. Décrivons cet isomorphisme : pour $x \in V$, notons $L_x \in End(\wedge V)$ l'application linéaire définie par $L_x(y) = x \wedge y + \delta_x(y)$, où δ_x est l'unique anti-dérivation de $\wedge V$ telle que $\forall y \in V, \delta_x(y) = Q(x,y).1$. Un calcul simple montre que ${L_x}^2 = Q(x).Id_{\wedge V}$. Par le lemme fondamental des algèbres de Clifford [Che 97, 2.1.1, p.103], l'application $x \mapsto L_x$ s'étend en un unique morphime d'algèbres $\phi : C \to End(\wedge V)$. L'isomorphisme $\theta : C \simeq \wedge V$ associe à c la forme $\phi(c).1$ et, pour tout $x \in V$ et tout $c \in C$, on a $\theta(x.c) = L_x(\theta(c))$. Introduisons une dernière notation : si u et v sont des éléments de C_1, alors $uf_2\alpha(v)$ est un élément de $C \simeq \wedge V$: pour $0 \leq h \leq 2r$, notons $\beta_h(u,v)$ la composante de cet élément dans $\wedge^h V$.

Nous avons alors une jolie description des composantes de la grassmannienne isotrope :

Proposition 2.21 (propositions 3.1.2, 3.1.4 et 3.4.4 de [Che 97]) *La grassmannienne des espaces isotropes de dimension maximale r est isomorphe à la variété projective des classes d'équivalence modulo projectivisation des spineurs dits purs. Ces spineurs sont les éléments $u \in C_1$ tels que $\forall k \neq r, \beta_u(c,c) = 0$. Si Z est un espace isotrope, alors la droite $[u] \in \mathbb{P}(C.f_2) \simeq \mathbb{P}C_1$ correspondante est l'intersection de Cf_2 avec f_ZC, f_Z étant le produit d'éléments d'une base de Z. Si u est un spineur pur, alors l'espace linéaire correspondant est l'ensemble des $x \in V$ tels que $\rho(x).u = 0$.*

Remarque : La preuve montre aussi que tout spineur pur est soit dans C_1^+, soit dans C_1^-. On retrouve donc les deux composantes de $G_Q(r,2r)$. Notons φ l'application qui à un spineur pur associe l'espace isotrope maximal correspondant.

Par ailleurs, les résultats de Chevalley impliquent que cette définition des spineurs purs est équivalente à celle de [LM 89, définition 9.3,p.336] (la définition de Chevalley présente l'intérêt de fournir la structure schématique) :

Fait 2.2.8 *Un spineur u est pur si et seulement si* $\dim \{x \in V : \rho(x).u = 0\} = r$.

Démonstration : Tout d'abord, pour tout spineur u, le sous-espace vectoriel des x tels que $\rho(x).u = 0$ est isotrope. En effet, si $x \in V$ est tel que $x.uf_2 = 0$, alors $x^2.uf_2 = Q(x).uf_2 = 0$, donc $Q(x) = 0$. Si ce sous-espace vectoriel est de dimension r, alors c'est un espace isotrope maximal, et le résultat 3.1.4 dans [Che 97] montre que u est un spineur pur représentant cet espace isotrope maximal. •

Enfin, on peut décrire géométriquement l'application bilinéaire $V \times C^+ \to C^-$: $(x,u) \mapsto \rho(x).u$:

Fait 2.2.9 *Soit x un vecteur isotrope et u un spineur pur. Alors, si $\rho(x).u$ est non nul, c'est un spineur pur qui représente le sous-espace vectoriel engendré par x et $x^\perp \cap \varphi(u)$.*

Le lemme 1.1.8 montre que ceci définit l'application bilinéaire $(x,u) \mapsto \rho(x).u$.
Démonstration : Soit $v = \rho(x).u$. On a par définition $xuf_2 = vf_2$. Ainsi, $xvf_2 = 0$, et donc $\rho(x).v = 0$. Par ailleurs, si $y \in V$ est orthogonal à x, on a $yvf_2 = yxuf_2 = -xyuf_2$. Si de plus $\rho(y).u = 0$, on a donc $\rho(y).v = 0$. Si L désigne l'espace isotrope engendré par x et $x^\perp \cap \varphi(u)$, cet espace est de dimension maximale r car l'hypothèse $\rho(x).u \neq 0$ implique $x \notin \varphi(u)$. On a donc $\rho(L).v = 0$. Par le fait précédent, v est un spineur pur représentant L. •

Nous allons déduire de ces résultats une description de $Spin(V)$. Si r est pair, rappelons qu'il existe sur C_1^+ et C_1^- des formes bilinéaires $\beta^\pm$ non dégénérées, définies p.142 de [Che 97] en utilisant [Che 97, 3.2.3], et telles que deux spineurs purs $u_\pm, v_\pm$ représentent des espaces isotropes qui se rencontrent si et seulement si $\beta^\pm(u_\pm, v_\pm) = 0$ [Che 97, 3.2.4]. Ces formes sont symétriques si $r \equiv 0[4]$ et antisymétriques si $r \equiv 2[4]$ [Che 97, p.143].

Si r est impair, il existe de même une forme bilinéaire non dégénérée $\beta : C_1^+ \times C_1^- \to \mathbb{C}$ telle que si u_+ et v_- sont des spineurs purs, alors $\beta(u_+, v_-) = 0$ si et seulement si u_+ et v_- représentent des espaces linéaires d'intersection non triviale.

Théorème 2.1 *Le groupe $Spin_{2r}$ est isomorphe au sous-groupe de $SO_{2r} \times SL(C_1^+) \times SL(C_1^-)$ constitué des triplets (g, g^+, g^-) vérifiant*

$$\forall u \in C_1^+, \forall x \in V, g^-.(\rho(x).u) = \rho(g.x).(g^+.u), \quad \textit{et} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} \textit{Si } r \textit{ est pair} & : \ \forall u,v \in C_1^+, \beta^+(g^+.u, g^+.v) = \beta^+(u,v) \textit{ et} \\ & \quad \forall u,v \in C_1^-, \beta^-(g^-.u, g^-.v) = \beta^-(u,v). \\ \textit{Si } r \textit{ est impair} & : \ \forall u \in C_1^+, \forall v \in C_1^-, \beta(g^+.u, g^-.v) = \beta(u,v). \end{cases}$$

Si $r \equiv 0[4]$, $g^\pm$ appartient donc à $SO(C_1^\pm)$, et si $r \equiv 2[4]$, alors $g^\pm$ est dans $Sp(C_1^\pm)$. Lorsque $r = 4$, on retrouve la proposition 2.11.
Démonstration : L'argument étant très similaire à celui des propositions 2.11, 2.18 et 2.20, je n'en donne ici que les grandes lignes.

Soit (g, g^+, g^-) vérifiant l'équation (2.10) et $u \in C_1^+$ un spineur pur. Cette équation implique que $\rho(x).u = 0$ si et seulement si $\rho(g.x).(g^+u) = 0$. Par le fait 2.2.8, $g^+.u$ est donc un spineur pur et il représente $g.\varphi(u)$. Comme tout spineur pur dans C_1^- peut s'écrire comme $\rho(x).u$ avec u un spineur pur de C_1^+ et $x \notin \varphi(u)$, cette équation implique que g^- préserve aussi les spineurs purs, et que $\varphi(g^-.v) = g.\varphi(v)$.

Ceci définit projectivement g^+ et g^- connaissant g. On obtient bien des applications linéaires car le groupe de Picard de $G_Q^\pm(r,2r)$ est engendré par la classe d'un hyperplan. Le lemme 1.1.8 et le fait 2.2.9 montrent que pour tout $g \in SO_{2r}$, si $g^\pm$ sont définis comme précédemment, alors l'équation (2.10) est vraie à une constante multiplicative près.

Si r est pair, la définition géométrique de $g^\pm$ implique de plus que ces isomorphismes préservent $\beta^\pm$ à une constante près. Pour montrer que $g^\pm$ peuvent être choisis préservant exactement $\beta^\pm$, de déterminant 1, et tels que l'équation 2.10 soit vraie, le même raisonnement que dans la proposition 2.20 fonctionne.

Dans le cas où r est impair, il existe une constante non nulle λ telle que $\forall u \in C_1^+, v \in C_1^-, \beta(g^+u, g^-v) = \lambda\beta(u,v)$. On conclut donc comme précédemment. •

2.3 Grassmanniennes sur une algèbre de composition associative

Dans la troisième partie de cette thèse, je vais présenter un résultat de F.L. Zak (théorème) qui généralise un résultat classique de Severi. Ce résultat de Severi affirme que la seule surface de $\mathbb{P}^5$ projetable isomorphiquement dans $\mathbb{P}^4$ est la surface de Veronese. Comme je vais largement l'expliquer dans cette deuxième partie, j'interprète le résultat de F.L. Zak comme une version dans les autres algèbres de composition de ce théorème classique, qui correspond à l'algèbre de composition $\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$.

Par ailleurs, récemment, E. Arrondo a montré qu'il existe une unique surface dans $G(2,6)$ projetable isomorphiquement par rapport à une droite de $G(2,6)$ dans $G(2,4)$. Il appelle d'ailleurs cette variété une variété de Veronese [Arr 97]. Mon espoir est que cette variété corresponde de même au cas réel, et qu'il existe d'autres versions de ce résultat correspondant aux autres algèbres de composition. Comme préliminaire à cette étude, je propose ici de décrire les grassmanniennes sur une algèbre de composition.

2.3.1 Grassmanniennes ordinaires

Par la suite, on suppose $\mathcal{A}$ associative. Un élément de la grassmannienne des r-plans sur $\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension r. Mais si $\dim \mathcal{A} \geq 2$, $\mathcal{A}$ n'est plus un corps et cette définition ne fait plus sens. On peut par contre considérer l'ensemble $G_{\mathcal{B}}(r,n)$ des sous-$\mathcal{A}$-modules à droite de $\mathcal{A}^n$, libres de rang r. C'est aussi l'ensemble des $\mathbb{C}$-espaces linéaires de la forme

$$\{\sum_{i=1}^{r} v_i \lambda_i, \lambda_i \in \mathcal{B} \otimes \mathbb{C}\}$$

et de dimension complexe ar ((v_i) est un r-uplet de vecteurs à coordonnées dans $\mathcal{B} \otimes \mathbb{C}$). Le fait d'imposer que ces modules doivent être libres est calqué sur le fait que pour $r = 1$, on imagine que les variétés de Severi représentent l'espace projectif sur $\mathcal{B} \otimes \mathbb{C}$, à savoir $G_{\mathcal{B}}(1,n)$, et que par exemple le vecteur $(1 + iI, 0, 0)$ ne représente aucun élément de cet espace projectif car $\nu_2(1 + iI, 0, 0) = 0$ (ces notations sont introduites au chapitre 3.2).

Une autre approche, qui donne une structure de variété, consiste à considérer les espaces linéaires stables par multiplication à droite. Considérons l'ensemble des sous-$\mathcal{A}$-modules à droite de $\mathcal{A}^n$ de dimension complexe ar :

$$\tilde{G}_{\mathcal{B}}(r,n) = \{E \subset (\mathcal{B} \otimes \mathbb{C})^n : \dim E = ar \text{ et } \forall x \in \mathcal{B} \otimes \mathbb{C}, E.x \subset E\}.$$

Nous allons maintenant étudier des propriétés de ces deux ensembles. Si x est un nombre réel, soit $[x]^+$ le plus petit entier supérieur ou égal à x.

Lemme 2.3.1 *Soit $E \subset (\mathbb{H} \otimes \mathbb{C})^n$ tel que $\forall x \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}, E.x \subset E$. Alors il existe $k = [\frac{\dim E}{4}]^+$ vecteurs $v_1, \ldots, v_k \in (\mathbb{H} \otimes \mathbb{C})^n$ tels que $E = \oplus\{v_i.\lambda, \lambda \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}\}$.*

Remarque : Soit i un entier fixé et $v_{i,j}$ les coordonnées du vecteur v_i. Le noyau de l'application $\mathbb{H}\otimes\mathbb{C} \to (\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})^n, t \mapsto v_i.t$ est nul si un des $v_{i,j}$ est inversible, et vaut $\cap_j L(\overline{v}_{i,j})$ sinon. Ce noyau est donc dans tous les cas de dimension paire (proposition 2.1), et par le théorème du rang $\{v_i\lambda : \lambda \in \mathbb{H}\otimes\mathbb{C}\}$ aussi. Ainsi, la proposition 2.3.1 montre que la dimension de E est paire.

Démonstration : Une grande partie de cette preuve est valable pour $\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}$; on va donc dans un premier temps raisonner pour $\mathcal{A} = \mathcal{B}\otimes\mathbb{C}$, $\mathcal{B} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, et je préciserai le moment précis où on a besoin que $\mathcal{B} = \mathbb{H}$. Je note $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} = 2\alpha$ ($\alpha = 1$ ou 2).

Soit p_i la restriction à E de la projection de $\mathcal{A}^n$ sur le i-ème facteur, et si I est un sous-ensemble de $\{1,\dots,n\}$, notons p_I la restriction à E de la projection sur les i-èmes composantes, $i \in I$.

S'il existe i tel que p_i est de rang maximal 2α, alors, en choisissant un vecteur v de E tel que $v_i = 1$, on a un isomorphisme

$$\begin{array}{rccc} s & : & \mathbb{H}\otimes\mathbb{C}\oplus(E\cap\{x_i=0\}) & \to & E \\ & & (t,x) & \mapsto & v.t+x, \end{array}$$

de sorte qu'on est ramené à la propriété de récurrence d'ordre $n-1$. On suppose donc qu'aucune projection n'est de rang maximal. Comme Im p_i est stable par multiplication à droite par $\mathcal{A}$, Im p_i est alors de rang α ou 0. Dans le deuxième cas, on peut aussi utiliser une récurrence ; on suppose donc que toutes les projections sont de rang α.

Ceci implique que pour tout couple (i,j), $F = p_{\{i,j\}}(E)$ est de dimension au plus 2α. Par ailleurs, F est stable par multiplication à droite, et j'affirme que cela implique que ce rang est α ou 2α. En effet, $p_{i|F}$ est de rang α et son noyau, stable par multiplication à droite, est de dimension divisible par α. Supposons que i et j sont des entiers tels que $p_{\{i,j\}}$ est de rang α. Alors $p_{i|p_{\{i,j\}}(E)}$ est bijective, de sorte que si ι désigne $\{1,\cdots,n\}-\{i\}$, p_ι est injective. Si donc il existe de tels entiers i et j, par récurrence sur n on montre que E est engendré par $[\frac{\dim E}{4}]^+$ vecteurs. Il ne reste plus qu'à considérer le cas où $p_{i,j}$ est de rang 2α pour tout i,j. Soient alors i et j quelconques. Comme $F = p_{\{i,j\}}(E)$ est un sous-espace stable de $(\mathcal{B}\otimes\mathbb{C})^2$, et que chaque projection est de rang α, il existe x et y tel que $F \subset L(x)\times L(y)$; comme $\dim F = 2\alpha$, on a l'égalité.

L'argument qui suit n'est valable que pour $\mathcal{B} = \mathbb{H}$. Quitte à remplacer y par un autre élément de $L(y)$, on peut supposer que $R(y) \neq R(x)$, ce qui implique par conjugaison $L(\overline{y}) \neq L(\overline{x})$. Ainsi ces espaces sont supplémentaires car $\dim L(\overline{y})\cap L(\overline{x}) \in \{0,2\}$. Alors l'application $\mathcal{A} \to F, \lambda \mapsto (x,y).\lambda$ est injective, ce qui prouve que (x,y) est un générateur de F. Il suffit donc de considérer un vecteur de E qui se projette par $p_{i,j}$ sur (x,y). •

Proposition 2.22 *$G_{\mathbb{H}}(r,n) = \tilde{G}_{\mathbb{H}}(r,n) \subset G(4r,4n)$ est une sous-variété lisse irréductible isomorphe à $G(2r,2n)$.*

Démonstration : Le lemme 2.3.1 dit que $G_{\mathbb{H}}(r,n) = \tilde{G}_{\mathbb{H}}(r,n)$. Soit E un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})^n$ de dimension $4r$ stable par multiplication à droite par $\mathbb{H}\otimes\mathbb{C}$. L'application R_I vérifie $R_I^2 = -Id$; sa restriction à E est donc diagonalisable, ses valeurs propres étant i et $-i$. Notons E_i et E_{-i} les deux sous-espaces propres. Remarquons que $E_{\pm i}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})^n_{\pm i}$, l'espace propre associé à la valeur propre i pour $R_I : (\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})^n \to (\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})^n$. En fait, $(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})^n_{\pm i} = R(1\mp iI)$. Par ailleurs, comme I et J anticommutent, R_J est un automorphisme de E qui échange E_i et E_{-i}. En particulier,

ces deux sous-espaces vectoriels sont isomorphes, donc de dimension $2r$, et la donnée de E équivaut à celle de E_i (notons que pour la même raison la dimension sur $\mathbb{C}$ de $(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})_i$ est $2n$). •

La démonstration montre que l'isomorphisme $G(2r,2n)\to G_{\mathbb{H}}(r,n)$ est la restriction de l'application de degré 2

$$\begin{array}{rccc} \nu_2 & : & \mathbb{P}\Lambda^{2r}\mathbb{C}^{2n} & \to & \mathbb{P}\Lambda^{4r}(\mathbb{C}^{2n}\oplus\mathbb{C}^{2n}) \\ & & \omega & \mapsto & (\omega\oplus 0)\wedge(0\oplus\omega) \end{array}$$

Etudions à présent $G_{\mathbb{C}}(r,n)$ et $\tilde{G}_{\mathbb{C}}(r,n)$:

Proposition 2.23 *$G_{\mathbb{C}}(r,n)$ est une sous-variété de $G(2r,2n)$ isomorphe à $G(r,n)\times G(r,n)$. De plus $\tilde{G}_{\mathbb{C}}(r,n)$ est réunion de $\min\{n+1-r,r+1\}$ composantes connexes qui sont irréductibles dont l'une est $G_{\mathbb{C}}(r,n)$.*

Démonstration : Tout d'abord, notons comme précédemment $(\mathbb{C}\otimes\mathbb{C})^n_{\pm i}$ l'espace $R(1\mp iI)^n$. Si r_+ et r_- sont des entiers compris entre 0 et n de somme $2r$, notons $\tilde{G}^{r_+}_{\mathbb{C}}(r,n)$ l'ensemble des espaces linéaires de la forme $E:=E_+\oplus E_-$ avec $E_+\subset V_i, E_-\subset V_{-i}$ et $\dim E_\pm = r_\pm$. Comme un tel E est stable par multiplication par 1 et I, $\tilde{G}^{r_+}_{\mathbb{C}}(r,n)\subset\tilde{G}_{\mathbb{C}}(r,n)$. D'autre part la variété $\tilde{G}^{r_+}_{\mathbb{C}}(r,n)$ est isomorphe à $G(r_+,n)\times G(r_-,n)$. Contrairement au cas $\mathcal{A}=\mathbb{H}\otimes\mathbb{C}$, on voit que $\tilde{G}^{r_+}_{\mathbb{C}}(r,n)$ n'est pas vide quand $r_+\neq r$.

Par ailleurs, comme dans la preuve de la proposition 2.22, un sous-espace linéaire E de $V=(\mathbb{C}\otimes\mathbb{C})^n$ stable par multiplication vérifie $E=E_i\oplus E_{-i}$, où $E_{\pm i}=E\cap V_{\pm i}$. On a donc $\tilde{G}_{\mathbb{C}}(r,n)=\cup\tilde{G}^{r_+}_{\mathbb{C}}(r,n)$. Il ne reste plus qu'à voir que les $\tilde{G}^{r_+}_{\mathbb{C}}(r,n)$ sont les composantes connexes de $\tilde{G}_{\mathbb{C}}(r,n)$. Cela découle de ce que $\forall d\in\mathbb{N},\{E:\dim(E\cap V_{\pm i})\geq d\}$ est un fermé.

Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que $\tilde{G}^r_{\mathbb{C}}(r,n)=G_{\mathbb{C}}(r,n)$. Mais si $(v_1^\pm,\ldots,v_r^\pm)$ est une base de $E_{\pm i}$, alors $(v_i^+ + v_i^-)_i$ est une famille qui engendre E. •

2.3.2 Grassmanniennes isotropes

On s'intéresse mainenant à certaines sous-variétés de ces grassmanniennes, à savoir les sous-variétés paramétrant les espaces linéaires isotropes pour une forme hermitienne ou anti-hermitienne. Pour cela, on définit, sur $\mathcal{A}^n$, la forme Q par

$$Q((x_i),(y_i))=\sum_i \overline{x_i}y_i.$$

On définit de même, pour $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in(\mathcal{A}^n)^2$,

$$\Omega[(x_1,x_2),(y_1,y_2)]=Q(x_1,y_2)-Q(x_2,y_1).$$

Définition 2.3 *Soit $f:\mathcal{A}^n\times\mathcal{A}^n\to\mathcal{A}$ une application.*

- *f est sesquilinéaire si $\forall v,w\in\mathcal{A}^n,\forall\lambda\in\mathcal{A}, f(v.\lambda,w)=\overline{\lambda}.f(v,w)$ et $f((v,w.\lambda)=f(v,w).\lambda$.*

- *f est hermitienne si* $\forall v, w \in \mathcal{A}^n, f(w,v) = \overline{f(v,w)}$.
- *f est anti-hermitienne si* $\forall v, w \in \mathcal{A}^n, f(w,v) = -\overline{f(v,w)}$.
- *f est non-dégénérée si* $(\forall w \in \mathcal{A}^n, f(v,w) = 0) \Rightarrow v = 0$.

Il est clair que Q et Ω sont sesquilinéaires non-dégénérées, et que Q est hermitienne et Ω anti-hermitienne.

Remarque : La définition de la sesquilinéarité peut sembler arbitraire. L'objet de cette remarque est de montrer que le choix d'une autre définition possible aurait conduit au même résultat (proposition 2.2). Tout d'abord, si l est une application $\mathbb{H}\otimes\mathbb{C} \to \mathbb{H}\otimes\mathbb{C}$, parmi les huit définitions de linéarité envisageables,

$$l(\lambda.x) = \lambda.l(x), l(\lambda.x) = \overline{\lambda}.l(x), l(\lambda.x) = l(x).\lambda, l(\lambda.x) = l(x).\overline{\lambda},$$
$$l(x.\lambda) = \lambda.l(x), l(x.\lambda) = \overline{\lambda}.l(x), l(x.\lambda) = l(x).\lambda, l(x.\lambda) = l(x).\overline{\lambda},$$

seules quatre $(l(\lambda.x) = \lambda.l(x), l(\lambda.x) = l(x).\overline{\lambda}, l(x.\lambda) = \overline{\lambda}.l(x), l(x.\lambda) = l(x).\lambda)$ sont possibles : en effet, si par exemple on a $l(\lambda.x) = l(x).\lambda$, alors $l(x) = l(x.1) = l(1).x$, et donc $l(\lambda.x) = (l(1).x).\lambda = l(1).(\lambda.x)$. Ceci n'est possible que pour $l(1) = 0$, soit $l = 0$.

De plus, si f est hermitienne et que par exemple $f(v.\lambda, w) = \overline{\lambda}.f(v,w)$, alors on a $f(v, w.\lambda) = \overline{f(w.\lambda, v)} = \overline{f(w,v)}.\lambda = f(v,w).\lambda$. Il y a donc quatre définitions possibles de sesquilinéarité pour les applications hermitiennes (ou anti-hermitiennes). Au vu de la preuve de la proposition 2.2, si on avait défini la sesquilinéarité par la relation $f(v.\lambda, w.\mu) = \overline{\mu}.f(v,w).\lambda$, cela aurait conduit au même résultat. Les définitions $f(\lambda.v, \mu.w) = \lambda.f(v,w).\overline{\mu}$ et $f(\lambda.v, \mu, w) = \mu.f(v,w).\overline{\lambda}$ auraient aussi conduit à cette proposition, à condition de décider que les grassmanniennes $G_{\mathbb{H}}(r,n)$ paramètrent des espaces linéaires stables par multiplication *à gauche*, et non à droite comme je l'ai fait.

Pour Q et Ω n'importe quelles applications vérifiant les propriétés de la définition, définissons les grassmanniennes isotropes $G^Q_{\mathcal{B}}(r,n)$ et $G^\Omega_{\mathcal{B}}(r,n)$ comme les sous-variétés de $G_{\mathcal{B}}(r,n)$ paramétrant les espaces linéaires sur lesquels la restriction de la forme Q ou Ω est identiquement nulle. Rappelons que $G_Q(r,n)$ et $G_\omega(r,n)$ désignent les grassmanniennes quadratiques et symplectiques habituelles.

Théorème 2.2 *Avec les notations précédentes, on a :*
- $G^Q_{\mathbb{R}}(r,n) = G_Q(r,n)$.
- $F(r, n-r, n) \simeq G^Q_{\mathbb{C}}(r,n) \subset G(r,n) \times G(r,n) = G_{\mathbb{C}}(r,n)$.
- $G_\omega(2r, 2n) \simeq G^Q_{\mathbb{H}}(r,n) \subset G(2r, 2n) = G_{\mathbb{H}}(r,n)$.

et
- $G^\Omega_{\mathbb{R}}(r,n) = G_\omega(r,n)$.
- $F(r, n-r, n) \simeq G^\Omega_{\mathbb{C}}(r,n) \subset G(r,n) \times G(r,n) = G_{\mathbb{C}}(r,n)$.
- $G_Q(2r, 2n) \simeq G^\Omega_{\mathbb{H}}(r,n) \subset G(2r, 2n) = G_{\mathbb{H}}(r,n)$.

Dans ce théorème, pour $a \leq b \leq c$, $F(a,b,c)$ désigne la variété des drapeaux de la forme $V_a \subset V_b \subset \mathbb{C}^c$, avec $\dim V_a = a$ et $\dim V_b = b$. Si $a > b$, cette variété est vide par convention.

Remarque : Ce théorème permet d'interpréter le carré magique de Freudenthal défini en toutes dimensions de façon uniforme selon les lignes. En effet, en suivant la définition

proposée dans [Man 97, p.6], on a pour tout $n \geq 3$ le carré "magique" suivant (Q^d désigne la quadrique projective de dimension d) :

$$\begin{array}{ccc} \nu_2(Q^{n-2}) & F(1,n-1,n) & G_\omega(2,2n) \\ \nu_2(\mathbb{P}^{n-1}) & \mathbb{P}^{n-1}\times\mathbb{P}^{n-1} & G(2,2n) \\ G_\omega(n,2n) & G(n,2n) & G_Q(2n,4n) \end{array}$$

On voit donc que la première ligne est constituée de variétés isomorphes à $G^Q_{\mathcal{B}}(1,n)$, pour $\mathcal{B}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ (ce sont les "quadriques hermitiennes"), la deuxième à $G_{\mathcal{B}}(1,n)$ ("espaces projectifs"), et la troisième à $G^\Omega_{\mathcal{B}}(n,2n)$ ("grassmanniennes lagrangiennes"). En ce qui concerne la troisième ligne, ceci donne à mon avis un argument plus convaincant pour la proposition 3.8 de [Man 97]. Par contre, cela n'apporte pas de réponse au problème qui consiste à interpréter la quatrième ligne (et la quatrième colonne) de ce carré lorsque $n=3$.

Démonstration : Le cas $\mathcal{B}=\mathbb{R}$ est tautologique.

Notons $u=1+iI$ et f une forme sesquilinéaire non-dégénérée, hermitienne ou anti-hermitienne. Supposons d'abord $\mathcal{B}=\mathbb{C}$. Nous avons vu que l'application $G_{\mathbb{C}}(r,n)\to G(r,R(u)^n)\times G(r,R(\overline{u})^n)$, qui associe à Λ ses intersections $\Lambda_\pm$ avec $R(1\mp iI)$ est un isomorphisme. Il s'agit donc de comprendre les conditions sur $\Lambda_\pm$ pour que Λ soit isotrope. Si $v,w\in R(u)^n$, alors $f(v,w)=0$. En effet, la sesquilinéarité implique que pour de tels v,w, on a $f(v,w)\in R(u)\cap R(\overline{u})=\{0\}$ ($\mathbb{C}$ est commutatif !). Par ailleurs, si $v\in R(u)^n$ est tel que pour tout $w\in R(\overline{u})^n$, $f(v,w)=0$, alors, comme c'est aussi vrai pour $w\in R(u)^n$, on a $v=0$, car f est non-dégénérée. Comme de plus, pour $v\in R(u)^n$ et $w\in R(\overline{u})^n$, $f(v,w)\in\mathbb{C}.u\simeq\mathbb{C}$, f induit une dualité entre $R(u)^n$ et $R(\overline{u})^n$, et les remarques précédentes montrent que $\Lambda\in G^Q_{\mathbb{C}}(r,n)\Longleftrightarrow\Lambda_+\perp\Lambda_-$. Ceci montre que $G^Q_{\mathbb{C}}(r,n)$ et $G^\Omega_{\mathbb{C}}(r,n)$ s'identifient à la variété de drapeaux $F(r,n-r,n)$.

Considérons maintenant le cas $\mathcal{B}=\mathbb{H}$. Soit donc $\Lambda\in G_{\mathbb{H}}(r,n)$ et Λ_+ son intersection avec $R(u)^n$. On sait (proposition 2.22) que l'application $\Lambda\mapsto\Lambda_+$ est un isomorphisme. Pour démontrer le théorème 2.2, il suffit donc de déterminer la condition sur Λ_+ pour que Λ soit isotrope.

Le premier point est que Λ est isotrope pour f si et seulement si Λ_+ l'est pour la restriction de f à $R(u)^n$. En effet, ceci découle du fait que $\Lambda=\Lambda_+\oplus\Lambda_+.J$ et de la sesquilinéarité de f. Par ailleurs, si $v,w\in R(u)^n$, alors cette même propriété implique que $f(v,w)$ est à valeurs dans $L(\overline{u})\cap R(u)$. Cet espace vectoriel de dimension 1 s'identifie à $\mathbb{C}$, et la restriction de f à $R(u)^n$, considérée comme une forme bilinéaire, est non-dégénérée. En effet, si $v\in\mathcal{A}^n$ est tel que $\forall w\in R(u)^n, f(v,w)=0$, alors on a aussi $f(v,w.J)=0$ et donc $\forall w\in\mathcal{A}^n$, $f(v,w)=0$; ainsi $v=0$.

Enfin, cette droite vectorielle est incluse dans $\{\mathrm{Re}=0\}$ (puisqu'elle contient par exemple $K+iJ$). On a donc $\forall v,w\in R(u)^n$, $\overline{f(v,w)}=-f(v,w)$. Pour finir de montrer la proposition, il suffit donc de remarquer que pour f hermitienne (respectivement anti-hermitienne), f induit une forme bilinéaire antisymétrique (respectivement symétrique). Soit $\epsilon=\pm1$ tel que $f(w,v)=\epsilon\overline{f(v,w)}$. Comme $\forall v,w\in R(u)^n, \overline{f(v,w)}=-f(v,w)$, on a $f(w,v)=-\epsilon f(v,w)$, achevant la preuve la proposition. •

Chapitre 3

Algèbres de Jordan

3.1 Généralités sur les algèbres de Jordan

3.1.1 Premières définitions

Rappelons que dans cette thèse ne sont considérées que des algèbres sur le corps $\mathbb{C}$. Les algèbres de Jordan sont les algèbres unitaires commutatives non nécessairement associatives mais dans lesquelles la relation $A*(B*A^2) = (A*B)*A^2$ est vérifiée. Cette relation signifie $[M_A, M_{A^2}] = 0$, où M_A désigne la multiplication par A ; j'explicite aussi une autre relation équivalente. Soit R la représentation quadratique, définie par $R(A) = 2M_A^2 - M_{A^2}$. Nous verrons dans les exemples que R s'exprime le plus souvent très simplement. Alors notre algèbre est de Jordan si et seulement si $R(A^2) = R(A)^2$ [Koe 62, th.4,p.57].

Dans une algèbre commutative, on peut définir la trace d'un élément comme la trace de la multiplication par cet élément. On a alors une forme bilinéaire $(A, B) \mapsto \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A*B)$. On dit alors que l'algèbre est semi-simple si cette forme est non-dégénérée. Elle est dite simple si elle ne contient pas d'idéaux non triviaux. D'après [Jac 68, th.5,p.240], une algèbre de Jordan semi-simple est somme d'algèbres de Jordan simples.

Le rang d'une algèbre est la dimension générique de la sous-algèbre engendrée par un élément. Examinons, en fonction de ce rang, la classification des algèbres de Jordan.

Une algèbre V est une algèbre de Jordan simple de rang 2 si et seulement si [Jac 68, th.8,p.203] il existe un sous-espace vectoriel W de V muni d'une forme bilinéaire symmétrique non-dégénérée, notée $\langle ., .\rangle$, et telle que $V = \mathbb{C} \oplus W$ et

$$(\lambda_1, w_1) * (\lambda_2, w_2) = (\lambda_1\lambda_2 + \langle w_1, w_2\rangle, \lambda_1 w_2 + \lambda_2 w_1).$$

Le même résultat donne aussi que les algèbres de Jordan simples de rang 3 (respectivement de rang $r > 3$) sont les algèbres des matrices hermitiennes d'ordre 3 (respectivement r) à coefficients dans une des quatre algèbres de composition (respectivement $\mathbb{R}\otimes\mathbb{C}, \mathbb{C}\otimes\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}\otimes\mathbb{C}$), munies de la loi $A*B = 1/2(AB + BA)$, où AB désigne la matrice $(\sum_k a_{i,k}b_{k,j})_{i,j}$ pour $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. Si $\mathcal{A}$ est une algèbre normée et n un entier, je note $H_n(\mathcal{A})$ l'algèbre des matrices hermitiennes $n \times n$ à coefficients dans $\mathcal{A}$. Il y a donc trois séries infinies d'algèbres de Jordan dites classiques, $H_n(\mathcal{A})$, pour $\mathcal{A} = \mathbb{R}\otimes\mathbb{C}, \mathbb{C}\otimes\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}\otimes\mathbb{C}$, et une autre algèbre de Jordan, dite exceptionnelle,

$H_3(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})$. On vérifie directement que dans ces algèbres, la trace d'une matrice est, à une constante multiplicative près, la trace usuelle et que

$$\langle A,B\rangle = \sum_{i,j} a_{i,j}b_{j,i},\ \text{soit}\ \langle A,A\rangle = 2\sum_{i<j} Q(a_{i,j}) + \sum_i a_{i,i}^2.$$

Notons que les algèbres de Jordan classiques sont isomorphes à des algèbres de Jordan que l'on peut décrire sans faire intervenir les algèbres de composition : soit V_n^a l'espace vectoriel défini par

$$V_n^a = \begin{cases} \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) & \text{si } a=1 \\ \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \text{si } a=2 \\ \mathcal{AS}_{2n}(\mathbb{C}) & \text{si } a=4 \end{cases}$$

où $\mathcal{S},\mathcal{M},\mathcal{AS}$ désignent respectivement l'ensemble des matrices symétriques, quelconques et antisymétriques. Si I est *n'importe quel* élément inversible de V_n^a, alors on peut munir V_n^a d'une structure d'algèbre de Jordan où I est l'unité en posant $A*B := \frac{1}{2}(AI^{-1}B + BI^{-1}A)$. Lorsqu'on applique le théorème 3.1 du paragraphe suivant avec le déterminant (pour $a=1$ ou 2) ou le pfaffien (pour $a=4$) comme polynôme, on trouve ces algèbres. On se convainc que dans les trois cas ce produit est interne et l'identité de Jordan découle de ce que l'algèbre définie par $A*B = AI^{-1}B$ est associative (elle n'est bien sûr définie que sur un espace plus grand dans les cas $a=1$ et $a=4$). En fait, on a $H_n(\mathcal{A}) \simeq V_n^a$ si $a = \dim \mathcal{A}$. Par ailleurs, un calcul direct montre que

$$R(A).B = AI^{-1}BI^{-1}A \tag{3.1}$$

Dans ce chapitre, je définis des isomorphismes d'algèbres entre ces deux réalisations et j'en explique le sens géométrique.

3.1.2 Construction du produit à partir du déterminant

J'entreprends maintenant la description géométrique du produit de Jordan. Je vais donner une version des propositions 2.5 et 2.14 concernant les algèbres de Jordan. On se dirige donc lentement vers le théorème 3.2.

En attendant, je vais expliquer qu'il existe, sur une algèbre de Jordan quelconque, un polynôme particulier qui joue le rôle du déterminant d'une matrice : dans les algèbres $H_n(\mathcal{A})$, avec $\mathcal{A} = \mathbb{R}\otimes\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}$, ce polynôme est le déterminant usuel ; si $\mathcal{A} = \mathbb{C}\otimes\mathbb{C}$, il est à valeurs dans $\mathbb{R}\otimes\mathbb{C}$ sur les matrices hermitiennes. Dans le cas des matrices à coefficients quaternioniques, il n'existe pas de fonctions ayant les propriétés usuelles des déterminants [Dys 72, th.1]. En revanche, Moore [Moo 22] a défini un tel déterminant pour des matrices hermitiennes. En fait, puisque l'algèbre de Jordan $H_n(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})$ est isomorphe à V_n^4, je définirai ce déterminant dans $\mathcal{AS}_{2n}(\mathbb{C})$, où c'est tout simplement le pfaffien. Ce polynôme est la forme cubique invariante par E_6 dans le cas de l'algèbre de Jordan exceptionnelle. Par ailleurs, je vais aussi expliquer que ce polynôme permet de reconstituer le produit de Jordan.

Tout d'abord, étant donnée une algèbre de Jordan de rang r, il existe un unique $(r+1)$-uplet de polynômes $(p_i)_{0\leq i\leq r}$ homogènes de degré i tels que $\forall A\in V, \sum p_i(A)A^{r-i}=0$ et $p_r(I)=1$ [FK 94, prop 2.2.1,p.28]. On note $\det := p_r$; on a $\det(\lambda - A)=\sum p_i(A)$, par le théorème 4, p.535 de [Mcc 67] qui généralise le théorème de Cayley-Hamilton.

Si $V=\mathbb{C}\oplus W$ est une algèbre de Jordan de rang 2, alors $(\lambda,v)^2=(\lambda^2+\langle v,v\rangle, 2\lambda v)$, donc $(\lambda,v)^2-2\lambda(\lambda,v)+(\lambda^2-\langle v,v\rangle)1=0$. Ainsi, $\det(\lambda,v)=\lambda^2-\langle v,v\rangle$.

Dans les cas où $V=H_n(\mathcal{A})$ avec $\mathcal{A}=\mathbb{R}\otimes\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}$, le théorème de Cayley-Hamilton montre que ce déterminant est bien le déterminant usuel. Ce polynôme peut aussi être défini en utilisant la proposition [FK 94, prop.2.3.1,p.32] :

Proposition 3.1 *Pour $A\in V$, $\det(A)=0$ si et seulement si $\det[R(A)]=0$.*

Ceci et la formule (3.1) montrent que pour les algèbres des matrices antisymétriques, ce déterminant est le Pfaffien.

Dans le cas de l'algèbre de Jordan exceptionnelle, ce déterminant vérifie [Jac 63, (18), p.37] :

$$\det\begin{pmatrix} r_1 & \overline{x}_3 & \overline{x}_2 \\ x_3 & r_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & r_3 \end{pmatrix} = r_1r_2r_3+2\langle x_1x_2,x_3\rangle - r_1Q(x_1)-r_2Q(x_2)-r_3Q(x_3) \qquad (3.2)$$

Inversement, connaissant le déterminant noté F et l'unité d'une algèbre de Jordan, on peut reconstituer cette algèbre. Cette construction est expliquée dans [Mcc 65]. Rappelons que $F(A_1,\ldots,A_q)$ désigne la polarisation de F. Soit alors G l'application rationnelle

$$\begin{array}{rccc} G & : & V & \to & V^* \\ & & M & \mapsto & F(M,\ldots,M,.)/F(M). \end{array}$$

Je note cette application G car, considérée comme une application projective $\mathbb{P}V \dashrightarrow \mathbb{P}V^*$, elle se prolonge au lieu lisse de $\{F=0\}$ en l'application de Gauss de cette hypersurface. Rappelons que si $Y\supset \mathbb{P}V$ est une variété, alors son application de Gauss est l'application

$$\begin{array}{rccc} Gauss & : & Y^{lisse} & \to & G(\dim Y+1,V) \\ & & y & \mapsto & T_yY, \end{array}$$

où $G(\dim Y+1,V)$ désigne la grassmannienne des espaces linéaires de dimension $\dim Y+1$ dans V. Si Y est une hypersurface d'équation $f=0$, l'hyperplan tangent à Y en $y\in Y$ a pour équation $D_yf=(\deg f)f(y,\ldots,y,.)=0$.

Notons aussi, pour $M\in V$, τ_M l'application linéaire $-D_MG : V\to V^*$. Pour I l'unité, τ_I induit une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur V, et nous noterons

$$\begin{array}{rcl} \langle A,B\rangle & = & -D_IG(A).B=-D_IG(B).A \\ & = & qF(I,\ldots,I,A)F(I,\ldots,I,B)-(q-1)F(I,\ldots,I,A,B) \end{array}$$

On peut aussi voir que l'expression $D_IG(A).B$ est symétrique en A et B en constatant que c'est la différentielle seconde, calculée en I sur A et B, de $\frac{-1}{q}\log[F(M)]$. Définissons aussi pour tout A l'application linéaire H_A par la relation

$$\tau_A(B,C)=\tau_I(H_AB,C).$$

Un résultat connu pour les algèbres de Jordan classiques et facile à établir pour l'algèbre exceptionnelle une fois que l'on connaît le déterminant est que $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A*B)$. Ce produit scalaire identifie V et V^* et envoie A^{-1} sur $G(A)$ [FK 94, prop.3.4.3,p.53]. Ainsi, connaissant le déterminant et l'unité, on connait la forme quadratique, puis l'inverse. Notons i l'application rationnelle définie par $i(A) = A^{-1}$. En différentiant i, on détermine la représentation quadratique, grâce à la formule $R(A)^{-1}.B = -D_A i(B)$ [FK 94, prop.2.3.3,p.33]. Avec nos notations, on a donc $R(A)^{-1} = H_A$. Convenons qu'un élément A sera dit inversible si $\det A \neq 0$. Remarquons que $F[H_A(B)] = \frac{F(B)}{F(A)^2}$. En effet, si A est un élément inversible fixé, alors $H_A = R(A)^{-1}$ est une transformation qui préserve les inversibles [FK 94, prop.2.3.3], donc il existe une constante $h(A) \neq 0$ telle que $\forall B \in V, D[H_A(B)] = h(A)F(B)$. La fonction rationnelle $A \mapsto h(A)$ est donc définie si $F(A) \neq 0$, ne s'annule jamais, vaut 1 en I et est de degré $-2\deg F$. Ainsi $h(A) = F(A)^{-2}$. On a donc bien $D[H_A(B)] = \frac{F(B)}{F(A)^2}$.

Réciproquement, un théorème de K. McCrimmon [Mcc 65, th.1.2,p.937] affirme que si F est n'importe quel polynôme vérifiant cette identité, alors la construction précédente définit une algèbre de Jordan. Je démontre alors de plus que F est le déterminant pour cette algèbre de Jordan :

Théorème 3.1 *Soit V un espace vectoriel, F une forme homogène irréductible sur V et $I \in V$. Supposons qu'avec les notations précédentes, on a $F(I) = 1$ et $F[H_A(B)] = \frac{F(B)}{F(A)^2}$. Alors on peut munir V d'une structure d'algèbre de Jordan simple en posant*

$$A * B := \frac{-1}{2} D_I[H_M(B)](A).$$

Par ailleurs, I est l'unité, $D_I^2 \log F(A, B) = tr(A * B)$, et F est le déterminant pour cette structure, et $F[R_A(B)] = F(A)^2 F(B)$.

Lorsque B est fixé, on a une application $M \mapsto H_M(B)$. Le produit est défini en différentiant cette fonction en I dans la direction A.

Démonstration : Notons n la dimension de V et q le degré de F. Par le théorème de McCrimmon que j'ai cité, on sait que la structure d'algèbre obtenue est de Jordan et que $F[H_A(B)] = F(A)^2 F(B)$.

Si $F(A) \neq 0$, alors $F[H_A(B)] = \frac{F(B)}{F(A)^2}$. S'il existait $0 \neq u \in V$ tel que $H_A(u) = 0$, alors

$$\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C}, F(x + \lambda u) = F(A)^2 F[H_A(x + \lambda u)] = F(A)^2 F[H_A(x)] = F(x),$$

et donc $D_x F(u) = 0$. Ainsi, la forme linéaire $D_x F$ appartiendrait à un hyperplan de V^*, et donc $i(x)$ serait dans un hyperplan fixé de V, ce qui est contradictoire. On a donc que H_A est injective et comme précédemment, puisque F est irréductible, on en déduit aisément $\det(H_M) = F(M)^{2n/q}$ (en particulier q divise $2n$). En dérivant cette égalité en I dans la direction M, on obtient :

Lemme 3.1.1 *$tr(M) = nF(I, \ldots, I, M)$.*

Par ailleurs, on peut expliciter le produit : l'identité

$$-D_I G(A) = A = qF(I, \ldots, I, A)I - (q-1)F(I, \ldots, I, A, .) \tag{3.3}$$

donne $F(I,\dots,I,A,.) = \frac{1}{q-1}[qF(I,\dots,I,A)I - A]$, et en particulier $F(I,\cdots,I,.) = I$. Puisque $D_A G(B) = \frac{(q-1)F(A,\dots,A,B,.)}{F(A)} - \frac{qF(A,\dots,A,B)}{F(A)^2}F(A,\dots,A,.)$, on exprime alors que

$$\begin{aligned} A*B &= \tfrac{(q-1)(q-2)}{2}F(I,\dots,I,A,B,.) \\ &\quad -\tfrac{q(q-1)}{2}[F(I,\dots,I,A)F(I,\dots,I,B,.) + F(I,\dots,I,B)F(I,\dots,I,A,.)] \\ &\quad +[q^2F(I,\dots,I,A)F(I,\dots,I,B) - \tfrac{q(q-1)}{2}F(I,\dots,I,A,B)]I \\ &= \tfrac{(q-1)(q-2)}{2}F(I,\dots,I,A,B,.) - \tfrac{q}{2}F(I,\dots,I,A)[qF(I,\dots,I,B)I - B] \\ &\quad -\tfrac{q}{2}F(I,\dots,I,B)[qF(I,\dots,I,A)I - A] \\ &\quad +[q^2F(I,\dots,I,A)F(I,\dots,I,B) - \tfrac{q(q-1)}{2}F(I,\dots,I,A,B)]I \\ &= \tfrac{(q-1)(q-2)}{2}F(I,\dots,I,A,B,.) + \tfrac{q}{2}[F(I,\dots,I,A)B + F(I,\dots,I,B)A] \\ &\quad -\tfrac{q(q-1)}{2}F(I,\dots,I,A,B)I \end{aligned}$$

En particulier, on retrouve le fait que I est bien unité pour ce produit :

Lemme 3.1.2 $I * A = A$.

Montrons maintenant que $\mathrm{tr}(A*B)$ et $\langle A,B\rangle$ sont proportionnelles car proportionnelles à $F(I,\dots,I,A*B)$ (ce résultat est cité dans [FK 94, exercice 5,p.59] pour des cônes symétriques) :

Lemme 3.1.3 $\langle A,B\rangle = F(I,\dots,I,A*B) = \frac{1}{n}tr(A*B)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} F(I,\dots,I,A*B) &= \tfrac{(q-1)(q-2)}{2}F[I,\dots,I,F(I,\dots,I,A,B,.)] \\ &\quad +\tfrac{q}{2}F(I,\dots,I,A)F(I,\dots,I,B) \\ &\quad +\tfrac{q}{2}F(I,\dots,I,B)F(I,\dots,I,A) - \tfrac{q(q-1)}{2}F(I,\dots,I,A,B) \\ &= qF(I,\dots,I,A)F(I,\dots,I,B) - (q-1)F(I,\dots,I,A,B) \end{aligned}$$

L'identité $F[I,\dots,I,F(I,\dots,I,A,B,.)] = F(I,\dots,I,A,B)$ découle de la relation $F(I,\dots,I,.) = -D_I G(I) = I$. •

L'application qui à un polynôme et un élément vérifiant les hypothèses du théorème 3.1 associe l'algèbre de Jordan est injective. En effet, soient (P_1,I_1) et (P_2,I_2) de telles paires qui définissent une même algèbre. Je noterai $\langle .,.\rangle_{1,2}$ les produits scalaires qu'elles définissent, et de même $G_{1,2}(A)$, etc. Comme dans une algèbre, il ne peut y avoir qu'une unité, on a $I_1 = I_2$. Par le calcul précédent $D_I^2 \log P_1(A,B) = D_I^2 \log P_2(A,B) = \mathrm{tr}(A*B)$. Or, McCrimmon [Mcc 65, (1.11),p.934] a montré que $P_i(A,\cdots,A,.)$ s'identifie par $\langle .,.\rangle_i$ à A^{-1} $(i=1,2)$. Comme $\langle .,.\rangle_1 = \langle .,.\rangle_2$, on a donc $G_1(A) = G_2(A)$. Comme $G_i(A) = D_A \log P_i$, P_1 et P_2 sont proportionnels. Comme $P(I) = F(I) = 1$, ils sont égaux.

Si maintenant P est un polynôme satisfaisant les hypothèses du théorème 3.1, alors il définit une structure d'algèbre de Jordan sur V ; soit det le déterminant de cette algèbre de Jordan. On a déjà vu que det définit la même structure ; par ce qui précède, on a donc $P = \det$ et le théorème est démontré. •

3.1.3 Algèbres de Jordan et groupes algébriques

L'étude des algèbres de Jordan et de leurs propriétés géométriques ou algébriques se simplifie beaucoup si l'on considère l'action de certains groupes liés à ces algèbres. Par ailleurs, ils vont jouer un rôle essentiel dans l'étude des variétés de Scorza au chapitre 4. La définition et l'étude de ces groupes est classique ; je compile ici les résultats qui me seront utiles plus tard.

Proposition-définition 3.1 *Soit V une algèbre de Jordan simple et $g \in GL(V)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $\forall A \in V, R(g.A) = gR(A)^t g$.
- $\forall A$ *inversible,* $g.A$ *est inversible et* $(g.A)^{-1} = {}^t g^{-1} A^{-1}$.
- $\forall A$ *inversible,* $g.A$ *est inversible.*
- $\exists \lambda \in \mathbb{C} : \det(gA) = \lambda \det A$.

L'ensemble des éléments $g \in GL(V)$ satisfaisant ces conditions est un groupe algébrique noté $Str(V)$.

La transposition est définie par le produit scalaire $\langle A, B\rangle = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A * B)$.
Démonstration : L'équivalence entre les deux premiers points est montrée dans [FK 94, prop.8.2.5,p.148]. Si $g.A$ est inversible pour tout A inversible, alors

$$\{A : \det(g.A) = 0\} \subset \{A : \det A = 0\}.$$

Comme V est simple, det est irréductible (il suffit d'utiliser la classification des algèbres de Jordan simples et le calcul du déterminant que j'ai rappelé au paragraphe précédent pour s'en convaincre). On a donc $\{A : \det(g.A) = 0\} = \{A : \det A = 0\}$ et $\exists \lambda : \det(g.A) = \lambda \det A$.

Si $\det(g.A) = \det(A)$, soit F la polarisation de ce polynôme. Soient $A, B \in V$, on a $\frac{F(g.A,\dots,g.A,B)}{F(g.A)} = \frac{F(A,\dots,A,g^{-1}B)}{F(A)}$ et donc $(g.A)^{-1} = {}^t g^{-1} A$. •
Remarque : Comme on a vu que $\forall A$ inversible, $R(A)$ préserve les inversibles, on a $\forall A$ inversible, $R(A) \in Str(V)$.

Le groupe des automorphismes $Aut(V)$ de V est le groupe des éléments $g \in GL(V)$ tels que $\forall A, B \in V, (g.A) * (g.B) = g.(A * B)$. Si $\mathcal{G}$ est un groupe algébrique, je note $\mathcal{G}^0$ la composante connexe de $\mathcal{G}$ qui contient l'identité. La proposition qui suit décrit ce groupe comme sous-groupe de $Str(V)$:

Proposition 3.2 *Soit V une algèbre de Jordan simple. Alors*

$$\begin{aligned} Aut(V) &= \{g \in Str(V) : g.I = I\} \\ Aut(V)^0 &= \{g \in Str(V) : {}^t gg = Id_V\}^0 \end{aligned}$$

Démonstration :

- Si $g \in Aut(V)$, alors $M_{g.A} = g \circ M_A \circ g^{-1}$, donc $R(g.A) = g \circ R(A) \circ g^{-1}$. Ainsi, $R(g.A)$ est inversible si et seulement si A est inversible. Par la proposition 3.1, g préserve le déterminant à une constante près, donc $g \in Str(V)$. De plus, on a dans ce cas ${}^t g = g^{-1}$, par la définition 3.1.

- Si $g \in Aut(V)$, alors $\forall A \in V, (g.A) * (g.I) = g.A$, de sorte que $g.I$ est une unité. Mais dans une algèbre, il ne peut y avoir qu'une unité car si I et I' sont des unités, alors $I * I' = I = I'$. Ainsi $g.I = I$ et g préserve en fait exactement det.
- Si à l'inverse, g préserve det et I, comme le produit de Jordan peut être défini en n'utilisant que le déterminant et I (cf la discussion précédant le théorème 3.1), c'st un automorphisme de l'algèbre.
- Il ne reste donc plus qu'à voir que tout g dans la composante de l'identité dans $\{g \in Str(V) : {}^t gg = Id_V\}$ vérifie $g.I = I$. Un élément $g \in Str(V)$ vérifie $(g.M)^{-1} = {}^t g^{-1} M^{-1}$. L'hypothèse donne alors $(g.M)^{-1} = g.M^{-1}$. Pour $M = I$, cela donne $(g.I)^{-1} = g.I$. Si $g_0 \in Str(V)$ est tel que $g_0.I = I$, et si g est proche de g_0, comme $A \mapsto A^{-1}$ n'a localement que I comme point fixe (en effet la différentielle en I de l'application $A \mapsto A^{-1} - A$ est $-2Id_V$), alors $g.I = I$. On a donc montré que l'ensemble des g tels que $gI = I$ est ouvert dans l'ensemble des g vérifiant ${}^t gg = Id_V$, ce qui achève la preuve de la proposition. •

A l'inverse, on sait aussi ce qu'il faut "ajouter" à $Aut(V)$ pour obtenir $Str(V)$ [FK 94, prop.8.3.5] :

Proposition 3.3 *Tout élément $g \in Str(V)$ peut s'écrire $g = R(A).h$ avec $A \in V$ et $h \in Aut(V)$.*

Si G est un groupe, notons $Z(G)$ son centre.

Proposition 3.4 *Si V est une algèbre de Jordan simple, alors $Z[Str(V)] = \mathbb{C}^*.Id_V$.*

Démonstration : Soit $V' \subset V$ un espace linéaire préservé par $Str(V)$. Puisqu'on a vu que pour tout $A \in V$, $R(A) \in Str(V)$, on a donc $R(A).V' \subset V'$. Par dérivation par rapport à A, V' est un idéal. La simplicité de V implique alors que V' est trivial. Ainsi, $Str(V)$ agit irréductiblement sur V. Si $g \in Z[Str(G)]$, alors les espaces propres de g sont stables par $Str(V)$, donc il ne peut y avoir qu'un tel espace et g est un multiple de l'identité. •

Etudions maintenant les algèbres de Lie associées à ces groupes. Puisque $Str(V)$ admet la représentation fidèle irréductible V, $Str(V)$ est réductif. Son algèbre de Lie $\mathfrak{str}(V)$ est donc réductive ; donc $\mathfrak{str}(V) = \mathfrak{str}(V)_s \oplus \mathbb{C}.Id_V$ (le centre de $\mathfrak{str}(V)$ est l'ensemble des homothéties), avec $\mathfrak{str}(V)_s = [\mathfrak{str}(V), \mathfrak{str}(V)]$. Comme les éléments de $\mathfrak{str}(V)_s$ ont trace nulle et que $\mathfrak{str}(V)_s$ est un hyperplan, $\mathfrak{str}(V)_s = \mathfrak{str}(V) \cap \{\mathrm{tr} = 0\}$. Notons $\mathfrak{der}(V)$ l'algèbre de Lie de $Aut(V)$; c'est l'algèbre des dérivations. Soit V_0 l'ensemble des matrices de trace nulle.

Proposition 3.5 *Soit V une algèbre de Jordan simple. Alors*
- $\mathfrak{der}(V) = \{x \in \mathfrak{str}(V) : x.I = 0\}$.
- $\mathfrak{str}(V)_s = \mathfrak{der}(V) \oplus M(V_0)$.

Rappelons que M désigne l'application $V \to End(V), A \mapsto M_A$.

Démonstration : Le premier point découle directement de la proposition 3.2 par dérivation.

Montrons d'abord que $\mathfrak{str}(V) = \mathfrak{der}(V) \oplus M(V)$. On a vu que $Aut(V) \subset Str(V)$ et $\forall A \in V, R(A) \in Str(V)$. Par dérivation, $\mathfrak{str}(V) \supset \mathfrak{der}(V), M(V)$. Par le premier point, cette somme est directe. La proposition 3.3 montre que $\mathfrak{str}(V)$ et $\mathfrak{der}(V) \oplus M(V)$ ont même dimension ; ils sont donc égaux.

Pour identifier $\mathfrak{str}(V)_s$, remarquons que puisque si $d \in \mathfrak{der}(V)$ et $A \in V$, alors $\langle A, d.A\rangle = 0$, et puisque $\mathrm{tr}\, d = \sum_i \langle A_i, d.A_i\rangle$ où (A_i) forme une base orthonormée de V, la trace d'une dérivation est nulle. On conclut en remarquant que si $A \in V_0$, alors par définition $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(M_A) = 0$. •

Il est aisé de décrire la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{str}(V)_s$ suivant cette décomposition. En effet le premier point indique que le commutateur de deux éléments de $M(V_0)$ est dans $\mathfrak{der}(V)$. Par ailleurs, pour $h \in Aut(V)$, puisque ${}^t h^{-1} = h$ (proposition 3.5), on a par la définition 3.1 $R(h.A) = hR(A)h^{-1}$; ainsi par dérivation $\forall h \in \mathfrak{der}(V), [h, M(A)] = M(h.A)$.

Etudions maintenant les groupes $Aut(V)$ et $Str(V)$ pour chacune des algèbres de Jordan simples. Commençons avec les algèbres de Jordan classiques. Si V, de dimension n, est de rang 2, alors $V = W \oplus \mathbb{C}.1$, avec W un espace vectoriel de dimension $n-1$ muni d'une forme quadratique F non-dégénérée. On sait aussi que $\det(t, w) = t^2 - F(w)$. Ainsi, le troisième point de la définition 3.1 implique que $Str(V)$ est le groupe GO_n préservant la forme quadratique det à une constante près, et la proposition 3.2 que $Aut(V)$ est le stabilisateur de 1, soit O_{n-1}.

Si $V = \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$, alors $Str(V)$ est le groupe qui préserve le déterminant à une constante près. Mais dans $\mathbb{P}V$, le lieu des matrices annulant le déterminant est le lieu des matrices de rang au plus $n-1$. Si $g \in PGL(V)$ préserve cette hypersurface, il préserve son lieu singulier qui est le lieu des matrices de rang au plus $n-2$. Par récurrence, il préserve donc le lieu des matrices de rang 1, soit $\nu_2(\mathbb{P}^{n-1})$. Rappelons que le deuxième plongement de Veronese est défini par

$$\begin{array}{rccc} \nu_2 & : & \mathbb{P}^{n-1} & \to & \mathbb{P}(S^2\mathbb{C}^n) \\ & & [v] & \mapsto & [v^2]. \end{array}$$

C'est donc un automorphisme de cette variété et donc $P\,Str(V) \subset Aut(\mathbb{P}^{n-1}) = PGL_n$. Ainsi, $Str(V) \subset GL_n$ et réciproquement il est clair que GL_n préserve le déterminant à une constante près. Ainsi, $Str(V) = GL_n$. Un élément $g \in GL_n$ agit par $A \mapsto {}^t g A g$. Enfin, $Aut(V)$, le stabilisateur de I, est donc O_n.

Si $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors le même raisonnement conduit à $Str(V) = (GL_n \times GL_n)/\mathbb{C}^*$, où $(g, h) \in GL_n \times GL_n$ agit par $(g, h).A = g^{-1}Ah$ et $\mathbb{C}^*$ est injecté diagonalement dans $GL_n \times GL_n$. Le stabilisateur de l'identité est alors la diagonale et $Aut(V) = PGL_n$.

Si $V = \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{C})$, alors de même $P\,Str(V) = Aut[G(2, 2n)] = PGL_{2n}$. Ainsi $Str(V) = GL_{2n}$ et $Aut(V)$, le stabilisateur d'une matrice antisymétrique non-dégénérée, s'identifie à Sp_{2n}.

Le cas de l'algèbre exceptionnelle, quoique bien connu, va nous donner plus de difficultés. Pour le confort du lecteur, j'inclus ici certains détails. Je m'inspire pour cela

de [KS 77] ; néanmoins, pour reconnaître plus rapidement l'algèbre de Lie, j'adopte la stratégie suivante :

1. Je donne une description explicite des deux algèbres en suivant la démarche de [KS 77].
2. Je démontre que ces algèbres sont simples.
3. Connaissant la classification des algèbres de Lie simples, on voit qu'il n'y a qu'une possibilité.

Pour montrer que nos algèbres de Lie sont simples on utilisera le

Lemme 3.1.4 *Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ une algèbre de Lie, avec*

1. *$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0$ et la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ est simple.*
2. *$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_1$.*
3. *Pour tout sous-$\mathfrak{g}_0$-module $\mathfrak{h}$ non nul de $\mathfrak{g}_1$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cap \mathfrak{g}_0 \neq \{0\}$.*
4. *$\dim \mathfrak{g}_0 > \dim \mathfrak{g}_1$.*

Alors $\mathfrak{g}$ est simple.

Démonstration : Soit p_i les projections $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_i$ et $\mathfrak{i}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Si $(x_0, x_1) \in \mathfrak{i}$ et $y_0 \in \mathfrak{g}_0$, alors $[(x_0, x_1), (y_0, 0)] = ([x_0, y_0], [x_1, y_0]) \in \mathfrak{i}$ de sorte que $p_0(\mathfrak{i})$ est un idéal de $\mathfrak{g}_0$. Si cet idéal est nul, alors $\mathfrak{i}$ est un sous-$\mathfrak{g}_0$-module non nul de $\mathfrak{g}_1$, et par (3), $\{0\} \neq [\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] \cap \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_0$, ce qui est contradictoire avec le fait que $p_0(\mathfrak{i}) = \{0\}$. On a ainsi, comme $\mathfrak{g}_0$ est simple, $p_0(\mathfrak{i}) = \mathfrak{g}_0$, et donc $\dim(\mathfrak{i}) \geq \dim \mathfrak{g}_0$. Puisque par hypothèse $\dim \mathfrak{g}_0 > \dim \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{g}_0$ est non trivial. Ainsi, toujours par simplicité de $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{i} \supset \mathfrak{g}_0$. Ainsi, $\mathfrak{i} \supset [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1]$, et comme $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{i} \supset \mathfrak{g}_1$ et donc $\mathfrak{i} = \mathfrak{g}$. •

Contrairement aux cas classiques, je commence par l'étude de $Aut(V)$. Soit $E_i, i \in \{1, 2, 3\}$ la matrice diagonale dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position (i, i) qui vaut 1. Notons aussi, pour $a \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$,

$$F_1(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & \overline{a} & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overline{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F_3(a) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ \overline{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On décrit alors une partie de $\mathfrak{der}(V)$:

Lemme 3.1.5 $\{g \in \mathfrak{der}(V) : \forall i, g.E_i = 0\} \simeq \mathfrak{so}_8$.

Démonstration : [KS 77] Les notations sont choisies pour que $E_i * E_i = E_i$, $E_i * F_i(a) = 0$ et $E_i * F_j(a) = \frac{1}{2} F_j(a)$ si $i \neq j$. La multiplication par E_i admet donc comme espaces propres $Vect(E_i)$ (valeur propre 1), $Vect(\{E_j, j \neq i\} \cup \{F_i(a), a \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}\})$ (valeur propre 0) et $Vect(\{F_j(a), a \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}, j \neq i\})$ (valeur propre $\frac{1}{2}$). Si $g \in \mathfrak{der}(V)$ et $g.E_i = 0$, alors $g.(E_i * x) = E_i * g.x$, de sorte que g préserve ces espaces propres, et donc g préserve les 3 espaces $Vect(\{F_i(a), a \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}\})$. Il existe donc des applications linéaires g_1, g_2, g_3 telles que

$$g. \begin{pmatrix} r_1 & \overline{x}_3 & \overline{x}_2 \\ x_3 & r_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{g_3.x_3} & \overline{g_2.x_2} \\ g_3.x_3 & 0 & g_1.x_1 \\ g_2.x_2 & \overline{g_1.x_1} & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $a \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ et $i \in \{1,2,3\}$; comme

$$0 = g.(\sum_{j \neq i} Q(a)E_j) = g.[F_i(a)^2] = 2F_i(a)[g.F_i(a)] = 2F_i(a)F_i(g_i.a) = 2\langle a, g_i a\rangle \sum_{j \neq i} E_j,$$

on a $g_i \in \mathfrak{so}_8$. Enfin, un calcul facile montre que $g = (g_1, g_2, g_3) \in \mathfrak{der}(V)$ si et seulement si $\forall x, y \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}, g_3(xy) = g_1(x)y + xg_2(y)$. L'ensemble de ces g est donc isomorphe à $\mathfrak{so}_8$ (corollaire 2.13). •

Notons V_8^3 la représentation naturelle $(\mathbb{C}^8)^3$ de $\mathfrak{so}_8 \simeq \mathfrak{spin}_8 \subset \mathfrak{so}_8^3$.

Proposition 3.6 *Si V est l'algèbre de Jordan exceptionnelle, alors* $\mathfrak{der}(V) = \mathfrak{f}_4 = \mathfrak{spin}_8 \oplus V_8^3$.

Démonstration : [KS 77] Posons, pour tout $a \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$, $d_1(a) = [M_{E_2}, M_{F_1(a)}], d_2(a) = [M_{E_3}, M_{F_2(a)}]$ et $d_3(a) = [M_{E_1}, M_{F_3(a)}]$. La proposition 3.5 montre que ce sont des dérivations. Elles vérifient $d_i(a)E_i = 0, d_1(a)E_2 = \frac{-1}{4}F_1(a) = -d_1(a)E_3, d_2(a).E_3 = \frac{-1}{4}F_2(a) = -d_2(a).E_1$, et $d_3(a).E_1 = \frac{-1}{4}F_3(a) = -d_3(a).E_2$. De plus, on a

$$\forall g \in \mathfrak{spin}_8, \forall (a,b,c) \in V_8^3, [g, d_1(a) + d_2(b) + d_3(c)] = d_1(a') + d_2(b') + d_3(c'),$$

en notant $(a', b', c') = g.(a, b, c)$.

Soit alors $d \in \mathfrak{der}(V)$. De même que dans la preuve du lemme précédent, on a $E_i * d.E_i = \frac{1}{2}d.E_i$ et $d.E_i * E_j + E_i * d.E_j = 0$ si $i \neq 0$. Il existe donc $a, b, c \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ tels que $d.E_1 = F_3(a) - F_2(b), d.E_2 = F_1(c) - F_3(a)$ et $d.E_3 = F_2(b) - F_1(c)$. On a donc $d = d_0 - 4d_3(a) - 4d_2(b) - 4d_1(c)$, avec $d_0.E_i = 0$.

Enfin, il est facile de calculer que $\forall a, b \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}, d_1(a).F_1(b) = \frac{\langle a,b\rangle}{2}(E_2 - E_3)$, et d'en déduire que $\forall a, b \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}, [d_1(a), d_1(b)].E_2 = [d_1(a), d_1(b)].E_3 = 0$. Ainsi, $\forall a, b \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}, [d_1(a), d_1(b)] \in \mathfrak{so}_8$, et les conditions du lemme 3.1.4 sont vérifiées. Ainsi, $\mathfrak{der}(V)$ est simple et comme sa dimension est 52, $\mathfrak{der}(V) = \mathfrak{f}_4$. •

Etudions à présent $\mathfrak{str}(V)$.

Proposition 3.7 *Si V est l'algèbre de Jordan exceptionnelle, alors* $\mathfrak{str}(V)_s = \mathfrak{e}_6 = \mathfrak{f}_4 \oplus M(V_0)$.

Rappelons que V_0 désigne l'espace vectoriel des matrices de trace nulle.

Démonstration : La proposition 3.5 montre que $\mathfrak{str}(V)_s = \mathfrak{f}_4 \oplus M(V_0)$. De plus, on a vu que le commutateur de deux éléments de $M(V_0)$ est dans $\mathfrak{der}(V)$ et que $\forall h \in \mathfrak{der}(V), [h, M(A)] = M(h.A)$.

Puisque V_0 est une représentation irréductible de $\mathfrak{f}_4$, il est clair que les hypothèses du lemme 3.1.4 sont vérifiées. Ainsi $\mathfrak{str}(V)_s$ est une algèbre de Lie simple de dimension 78 et dont la représentation minimale est de dimension 27. C'est donc $\mathfrak{e}_6$. •

3.2 Géométrie des algèbres de Jordan

Dans ce paragraphe, je définis et étudie, sur une algèbre de Jodan V, la variété des éléments de rang 1. On pourrait définir ceux-ci de façon ad hoc dans chaque réalisation

V_n^a, mais je vais plutôt les définir pour une algèbre de Jordan "abstraite". Comme ils ne sont définis qu'à partir du produit de Jordan, les isomorphismes $H_n(\mathcal{A}) \simeq V_n^a$ d'algèbres de Jordan induisent des isomorphismes des variétés d'éléments de rang 1, que l'on peut décrire et comprendre aisément.

3.2.1 Rang de Jordan

Définition 3.2 *Soit V une algèbre de Jordan semi-simple et $A \in V$. On dira que A est de rang de Jordan 1 si $A \neq 0$ et $\forall B \in V, R(A)B = \langle A, B\rangle A$.*

En choisissant une base de V, ceci donne $(\dim V)^2$ équations de degré 2 qui doivent être vérifiées par les éléments de rang de Jordan 1. Nous allons voir que l'espace vectoriel qu'elles engendrent est la partie homogène de degré 2 de l'idéal de la variété qu'elles définissent. Par ailleurs, je vais aussi montrer que ces équations définissent, dans V_n^a, la variété des matrices de rang usuel 1 si $a = 1$ ou 2, et la variété des matrices de rang usuel 2 si $a = 4$. On retrouve ainsi les mineurs 2×2 dans les cas $a = 1, 2$ et les relations de Plücker dans le cas $a = 4$.

Fait 3.2.1 *La variété algébrique des éléments de rang de Jordan 1 est stable sous $Str(V)$, ainsi que l'espace vectoriel des quadriques considérées dans la définition 3.2.*

Ainsi, dans les cas $a = 1, 2, 4$, on reconnait bien que cette variété est l'orbite fermée de $Str(V)$, et que les quadriques considérées sont toutes les quadriques qui s'annulent sur cette variété (car la représentation correspondant aux quadriques qui s'annulent sur cette orbite est irréductible).

Démonstration : Si f est une des équations données par la définition 3.2, alors par définition, il existe B et C tels que $f(A) = \langle R(A).B - \langle A, B\rangle A, C\rangle$. Pour $g \in Str(V)$, on a donc

$$\begin{aligned}(g^{-1}.f)(A) &= \langle R(g.A).B - \langle gA, B\rangle gA, C\rangle \\ &= \langle g[R(A).({}^t gB)] - \langle A, {}^t gB\rangle gA, C\rangle \\ &= \langle R(A).({}^t gB) - \langle A, {}^t gB\rangle A, {}^t gC\rangle;\end{aligned}$$

c'est donc encore une quadrique de l'espace vectoriel considéré.
Ainsi cet espace vectoriel, et donc la variété qu'il définit, sont stables par $Str(V)$. •

Définition 3.3 *Soit V une algèbre de Jordan et $A \in V$. Le rang de Jordan de A est le nombre minimal r tel que A s'écrive comme somme de r éléments de rang de Jordan 1.*

Dans le cas des algèbres de Jordan V_n^a, qui sont des sous-espaces vectoriels d'espaces de matrices, la proposition suivante relie le rang d'un élément à son rang de Jordan.

Proposition 3.8 *Si $a = 1$ ou 2, le rang d'un élément est son rang de Jordan. Si $a = 4$, le rang d'un élément est toujours pair ; il égale le double de son rang de Jordan.*

Démonstration : Il suffit de considérer le cas de rang minimal. On pourrait faire un calcul direct ; je donne plutôt un argument en termes de théorie des représentations. Tout d'abord, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = (B_{i,j}) \in H_n(\mathcal{A})$. Il est clair que $ABA = b_{1,1}A = \langle A, B\rangle A$; ainsi, il existe des éléments de rang de Jordan 1. Notons Q l'espace des quadriques décrites dans la définition 3.2. C'est une sous-représentation de la représentation $S^2 V_n^{a*}$ de $Str(V_n^a)$.

Or, dans chacun des cas, $S^2V_n^{a*}$ est la somme de deux représentations irréductibles de $Str(V_n^a)$, que je note Q_1 et Q_2. Le système linéaire des quadriques s'annulant sur l'orbite fermée X de $Str(V_n^a)$ dans $\mathbb{P}V_n^a$ est Q_1, et Q_2 s'identifie aux sections globales de $\mathcal{O}(2)$ sur X. Ces décompositions sont en effet respectivement, pour $a = 1, 2, 4$, $S^2(S^2V^*) = S_{(2,2)}V^* \oplus S^4V^*$, $S^2(V_1^* \otimes V_2^* = \Lambda^2V_1^* \otimes \Lambda^2V_2^* \oplus S^2V_1^* \otimes S^2V_1^*$, et $S^2\Lambda^2V^* = \Lambda^4V^* \oplus S_{(2,2)}V^*$ (ces notations sont expliquées au paragraphe 5.1.1). L'ensemble des élémnts annulant les quadriques de Q_2 est stables par $Str(V_n^a)$ et fermé ; s'il est non vide, il contient donc une orbite fermée, donc X, ce qui est contradictoire. Ainsi, aucun point n'annule les quadriques de Q_2 ; on a donc $Q = Q_1$, et l'ensemble des éléments de rang de Jordan 1 est X. •

3.2.2 Rang de Jordan et applications de Veronese

Dans la version $V = H_n(\mathcal{A})$, une notion naturelle de rang consiste à dire qu'une matrice est de rang 1 si elle est dans l'image de "l'application de Veronese" introduite par F.L. Zak [Zak 93] :

$$\begin{array}{rccc} \nu_2 : & \mathcal{A}^n & \dashrightarrow & H_n(\mathcal{A}) \\ & (z_i) & \mapsto & (z_i\overline{z_j}) \end{array}$$

Remarquons que sa projectivisation n'est qu'une application rationnelle car par exemple $\nu_2[(1+iI, 0, 0)] = 0$. Néanmoins, comme pour le plongement de Veronese classique, dans le cas où $\mathcal{A}$ est associative, c'est une application définie à homothéties près, c'est-à-dire que

Proposition 3.9 *Supposons $\mathcal{A}$ associative. Si $\lambda \in \mathcal{A}$, alors $\nu_2(z_i.\lambda) = Q(\lambda)\nu_2(z_i)$.*

Démonstration : En effet, $(z_i\lambda).(\overline{\lambda z_j}) = Q(\lambda)z_i\overline{z_j}$. •

Proposition 3.10 *Soit $\mathcal{A} = \mathbb{R}\otimes\mathbb{C}, \mathbb{C}\otimes\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}\otimes\mathbb{C}$. Alors l'image de $\nu_2 : \mathcal{A}^n \to H_n(\mathcal{A})$ est l'ensemble des éléments A tels que $\forall B \in H_n(\mathcal{A}), ABA = \langle A, B\rangle A$.*

Démonstration : Tout d'abord, un calcul immédiat montre que

$$A = (a_{i,j}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow ABA = (a_{i,1}a_{1,j})_{i,j}. \tag{3.4}$$

Si $A = (z_i\overline{z_j})$ est dans l'image de ν_2, alors pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $ABA = Q(z_1)A = \langle A, B\rangle A$ (3.4). Par ailleurs, les permutations assurent que cette égalité a lieu pour B diagonale. On peut aussi faire un calcul similaire pour $B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \overline{x} \\ x & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En effet, si $A = (z_i\overline{z_j})$, alors
$ABA = ([z_i\overline{z_1}][\overline{x}(z_2\overline{z_j})] + [z_i\overline{z_2}][x(z_1\overline{z_j})])_{i,j}$. Mais l'associativité assure alors que ceci égale $2\mathrm{Re}(\overline{z_1}\,\overline{x}z_2)(z_i\overline{z_j})_{i,j} = 2\mathrm{Re}(\overline{x}z_2\overline{z_1})(z_i\overline{z_j})_{i,j} = \langle A, B\rangle(z_i\overline{z_j})_{i,j}$.

Réciproquement, si il existe B diagonal tel que $\langle A, B\rangle \neq 0$, alors si par exemple $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on en déduit que A est proportionnelle à $\nu_2(\overline{a_{1,i}})$. Si un tel B n'existe pas, alors pour tous B diagonaux, $ABA = 0$. Ainsi $\forall i, j, k$, $\overline{a_{k,i}}a_{k,j} = 0$ (3.4). On peut

alors supposer qu'il existe B de la forme $B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \overline{x} \\ x & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tel que $\langle A, B\rangle \neq 0$ et en déduire que A est proportionnelle à $\nu_2(\overline{a_{1,i}} + \overline{a_{2,i}}x)$. •

Remarque : Si $\mathcal{A}$ n'est pas commutative, c'est-à-dire $\mathcal{A} = \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$, on aurait pu définir une autre application de Veronese par la formule $\widetilde{\nu_2}(z_i) = (\overline{z_j} z_i)_{i,j}$ et celle-ci aurait vérifié $\widetilde{\nu_2}(\lambda.z_i) = Q(\lambda)\widetilde{\nu_2}(z_i)$. Si $n \geq 3$, l'image de ν_2 n'égale pas celle de $\widetilde{\nu_2}$ car par exemple

$$\nu_2(1, I, J) = \begin{pmatrix} 1 & -I & -J \\ I & 1 & -K \\ J & K & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \widetilde{\nu_2}(1, I, J) = \begin{pmatrix} 1 & -I & -J \\ I & 1 & K \\ J & -K & 1 \end{pmatrix}$$

Chacun de ces éléments n'est évidemment pas dans l'image de l'autre application de Veronese. En fait l'image de $\widetilde{\nu_2}$ est l'ensemble des éléments A qui vérifient pour tous B la relation $\tilde{R}(A)B = \langle A, B\rangle A$, où $\tilde{R}$ est définie par $\tilde{R}(A) = 2\tilde{M}(A)^2 - \tilde{M}(A^2)$ et $\tilde{M}(A)B = (\sum_k b_{k,j}a_{i,k})_{i,j}$. Néanmoins, ces deux variétés sont projectivement équivalentes, car par la suite je vais montrer qu'elles sont équivalentes à $G(2, 2n)$. Je dirai que A est de rang 1 à droite si $A \in \mathbb{P}\text{Im } \nu_2$ et de rang 1 à gauche si $A \in \mathbb{P}\text{Im } \tilde{\nu}_2$. L'expression "être de rang 1" signifiera implicitement être de rang 1 à droite.

Nous allons voir (proposition 3.16) que l'hypersurface déterminée par le déterminant d'une algèbre de Jordan est $S^{n-2}X$, si X désigne l'ensemble des éléments de rang de Jordan 1. On a donc dans ce cas deux déterminants naturels, dont les équations définissent les hypersurfaces $S^{n-2}(\text{Im } (\nu_2))$ et $S^{n-2}(\text{Im } (\tilde{\nu_2}))$.

Traitons à présent le cas de l'algèbre de Jordan exceptionnelle. Les choses sont alors plus subtiles que dans les cas classiques, pour deux raisons :

- L'image par ν_2 d'un triplet d'octaves n'est en général *pas* une matrice de rang de Jordan 1.
- Il existe des matrices de rang de Jordan 1 qui ne sont pas dans cette image.

Introduisons quelques notations : soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des droites projectives dans l'espace $\mathbb{P}\{\text{Re} = 0\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})$, telles que la restriction du produit des octaves soit identiquement nul (cette variété est isomorphe à la variété adjointe de G_2, mais nous n'aurons pas besoin de ce fait). Si a et b sont des octaves de norme, de partie réelle et de produit nuls, alors ils engendrent une droite de $\mathcal{L}$. Soit alors X_0 l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \overline{a} & \overline{b} \\ a & 0 & \overline{c} \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$, avec a, b, c des octaves qui engendrent une droite de $\mathcal{L}$. Nous verrons que X_0 est incluse dans la variété des matrices de rang 1 mais n'est pas dans l'image de l'application de Veronese.

Soit $X \subset \mathbb{P}H_3(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}) = \mathbb{P}V$ la variété des éléments de rang de Jordan 1 et X_1 l'image par ν_2 de l'ensemble des triplets de $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ qui engendrent une sous-algèbre associative.

Proposition 3.11 *Soit $X \subset \mathbb{P}H_3(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})$ la variété des matrices de rang 1 dans l'algèbre de Jordan exceptionnelle. Alors*

- $X = X_0 \amalg X_1$.
- *X est l'orbite fermée de E_6.*

– *X est le lieu singulier de l'hypersurface* $\{\det = 0\}$.

Cette proposition permet de mesurer la taille des guillemets qu'il convient de mettre lorsque l'on parle de "$\mathbb{OP}^2$".

Remarque : La variété X n'est pas, comme l'affirme F.L. Zak [Zak 93, th.4.9,p.90] l'image de tous les triplets d'octaves. En effet, les coefficients d'une matrice de cette variété doivent appartenir à une sous-algèbre associative de $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$; ce n'est pas le cas, par exemple, de $\nu_2(1+e_1,e_2,e_4)=\begin{pmatrix} 2 & -e_2-e_3 & -e_4+e_7 \\ e_2+e_3 & 1 & -e_6 \\ e_4-e_7 & e_6 & 1 \end{pmatrix}$, puisque $[(-e_2-e_3)*(-e_4+e_7)]*(-e_6)=-2e_1$ et $(-e_2-e_3)*[(-e_4+e_7)*(-e_6)]=2e_1$. Notons enfin que si $x,y,z,t\in\mathcal{A}$, alors on n'a pas en général $\nu_2(xt,yt,zt)=Q(t)\nu_2(x,y,z)$ car la relation $(xt)\overline{(yt)}=Q(t)x\overline{y}$ n'est pas vraie sur les octaves : prendre par exemple $x=e_1, y=e_2$ et $t=e_4$; alors $(xt)\overline{(yt)}=e_3$ alors que $x\overline{y}=-e_3$.

Roberts [Rob 88] a montré que le lieu singulier de l'hypersurface $\{\det = 0\}$ est une variété de Severi.

Démonstration : Nous allons utiliser les résultats concernant les variétés de Severi (cf chapitre suivant) pour déterminer les matrices de rang de Jordan 1 et l'image de l'application de Veronese.

Soit $V=H_3(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})$ et det le déterminant de cette algèbre de Jordan. La formule explicite (3.2) permet de montrer que le lieu singulier de l'hypersurface $\{\det = 0\}$ est donné par les quadriques

$$\begin{aligned} &a_{1,1}a_{2,2}=Q(a_{1,2}),\ a_{1,1}a_{3,3}=Q(a_{1,3}),\ a_{2,2}a_{3,3}=Q(a_{2,3}) \\ &a_{1,1}a_{2,3}=a_{2,1}a_{1,3},\ a_{3,2}a_{2,1}=a_{3,1}a_{2,2},\ a_{2,1}a_{3,3}=a_{2,3}a_{3,1}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ce sont donc tous les mineurs 2×2 mais il faut prendre garde au fait que $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ n'est pas commutatif. Notons X' l'intersection de ces quadriques. Il est clair que X' est non vide et stable par E_6. Par ailleurs, la formule des caractères de Weyl implique que S^2V^* est somme de deux représentations irréductibles : l'une est le système linéaire engendré par ces quadriques, isomorphe à V, et l'autre la représentation $V_{2\omega_1}$ de plus haut poids $2\omega_1$, si $V_{\omega_1}=V$; c'est aussi par le théorème de Borel-Weil l'espace vectoriel des fonctions de degré deux sur l'orbite fermée. Ainsi, l'ensemble des quadriques qui s'annulent sur cette orbite est donc ce système linéaire lui-même et X' est cette orbite. Par conséquent, $X'=X$ est lisse, irréductible et non-dégénérée. De plus, un calcul direct montre que $X_0\subset X$.

Si $x,y\in X$, alors la droite (xy) annule det à l'ordre au moins 2 en x et y. Elle est donc incluse dans $\{\det = 0\}$; ainsi $Sec(X)\subset\{\det = 0\}$. Le théorème 4.1 montre alors que $\dim X\leq 16$.

Si Z_1 est l'image par ν_2 des vecteurs de la forme $(1,z_2,z_3)$, alors on voit que les quadriques précédentes s'annulent sur Z_1; donc $\overline{Z_1}\subset X$. Par ailleurs, $\dim Z_1=16$; ainsi $\dim X=16$ et $X=\overline{Z_1}$. Ainsi, X est bien une variété de Severi, donc $Sec(X)$ est une hypersurface, donc $Sec(X)=\{\det = 0\}$.

Nous avons déjà vu que $\overline{Z_1}=X$. Comme il découle du fait que $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ est une algèbre alternée que si $(a_{i,j})$ est une matrice de Z_1, alors tous les coefficients $a_{i,j}$ de cette matrice appartiennent à une sous-algèbre associative de $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$, toute matrice de X vérifie cette

propriété. Ceci explique que l'on considère l'image X_1 des triplets d'octaves appartenant à une sous-algèbre associative par ν_2.

Pour finir de démontrer la proposition, il faut comprendre l'image X_1 de ν_2. Soit $A \in X$. Si A a son premier coefficient diagonal non nul, alors $A = \nu_2(1, a_{2,1}, a_{3,1})$ est dans Z_1 et donc dans X_1. On peut raisonner de même pour tout élément dont un élément diagonal est non nul. Si $\mathrm{Re}(a_{2,1}) \neq 0$, on peut raisonner comme pour la proposition 3.10 avec la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pour montrer que A est l'image par ν_2 d'un triplet d'octaves engendrant une sous-algèbre associative. On se ramène donc finalement à l'étude des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \overline{a} & \overline{b} \\ a & 0 & \overline{c} \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{Re}(a) = \mathrm{Re}(b) = \mathrm{Re}(c) = 0$. Dans ce cas, les quadriques (3.5) montrent que $Q(a) = Q(b) = Q(c) = 0$. Par ailleurs, comme $\overline{a} = -a, \overline{b} = -b$ et $\overline{c} = -c$, ces mêmes quadriques donnent $ab = ba = ac = ca = bc = cb = 0$. Les octaves a, b, c sont donc dans un sous-espace vectoriel où le produit est identiquement nul. Ce sous-espace vectoriel est donc de dimension au plus 2 (en effet, si par exemple a et b ne sont pas colinéaires, alors comme $\overline{a}c = \overline{b}c = 0$, $c \in L(a) \cap L(b) = (a, b)$). S'il est de dimension 2, alors A est dans X_0. S'il est de dimension 1, alors tous les coefficients de A sont multiples scalaires d'un certain octave de norme nulle ; comme on peut mettre cet octave dans une sous-algèbre de $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ isomorphe à $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$, la proposition 3.10 montre que $A \in X_1$.

Pour finir de montrer la proposition, il ne reste plus qu'à vérifier que X_0 et X_1 sont disjoints. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \overline{a} & \overline{b} \\ a & 0 & \overline{c} \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \in X_0$, avec a, b, c des octaves comme précédemment, et supposons qu'il existe z_1, z_2, z_3 tels que $\nu_2(z_1, z_2, z_3) = A$, soit :

$$\begin{cases} Q(z_1) = Q(z_2) = Q(z_3) = 0. \\ z_1\overline{z}_2 = a \\ z_1\overline{z}_3 = b \\ z_2\overline{z}_3 = c. \end{cases}$$

Supposons d'abord que a, b, c sont tous non nuls.
Si a et b, b et c, et c et a ne sont pas proportionnels, on déduit du système que $z_1 \in L(a) \cap L(b) = (a, b)$, et que de même $z_2, z_3 \in (a, b)$. On a donc une contradiction, car cela implique que $z_1\overline{z}_2 = 0$.
Si par exemple a et b sont proportionnels mais pas a et c, alors, les égalité précédentes impliquent que $z_2, z_3 \in L(a) \cap L(c) = (a, c)$. On a donc $z_2\overline{z}_3 = 0$, soit $c = 0$, et une contradiction.

Si par exemple $c = 0$ et $a, b \neq 0$, alors on a toujours $z_1 \in (a, b)$, mais seulement $z_2 \in L(a)$ et $z_3 \in L(b)$. Si on avait $z_2 \in L(b)$, écrivons $z_2 = bu$; comme il existe t tel que $a = bt$, on en déduit que $a = z_1\overline{z}_2 = (bt)(\overline{u}\,\overline{b}) = -b(t\overline{u})b$ par l'identité de Moufang, et donc cet octave serait proportionnel à b par le lemme 2.1.1. Ainsi, $z_2 \notin L(b)$ et donc $bz_2 \neq 0$. Ceci montre que $L(b) \cap R(z_2) = \langle bz_2 \rangle$. Comme $z_3 \in L(b) \cap R(z_2)$, il est

donc proportionnel à bz_2. Mais dans ce cas, puisque $z_2 \in L(a)$, $\overline{z}_3$ est dans $R_b[R(a)] = R(a) \cap R(b)$ par le fait 2.2.4. Cela impliquerait qu'il soit dans (a, b) et on aurait $z_1\overline{z}_3 = 0$ et une contradiction. •

Bien entendu, on a une proposition similaire concernant l'application $\tilde{\nu_2}$.

Corollaire 3.12 *Si $\mathcal{A} \in \{\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}, \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}, \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}\}$, alors une matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ d'ordre 3, hermitienne, et à coefficients dans $\mathcal{A}$ est de rang 1 si et seulement si on a*

$$a_{1,1}a_{2,2} - Q(a_{1,2}) = a_{1,1}a_{3,3} - Q(a_{1,3}) = 0 \text{ et}$$
$$a_{1,1}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,3} = a_{3,2}a_{2,1} - a_{3,1}a_{2,2} = a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1} = 0.$$

Démonstration : On a vu ce résultat pour $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ dans la preuve de la proposition précédente. Si $(a_{i,j})$ est de rang 1, elle égale $\nu_2(z_i)$ pour certains z_i et il est clair que ces mineurs sont nuls. Si ces mineurs sont nuls, alors, considérant cette matrice comme à coefficients dans $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$, on voit qu'elle est de rang 1 dans $H_3(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})$, ce qui signifie que pour tout $B \in H_3(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})$, $Q(A).B = \langle A, B \rangle A$. Mais cette égalité a donc lieu pour tout $B \in H_3(\mathcal{A})$, et A est de rang 1. •

Cette proposition n'est valable que dans le cas très particulier des matrices d'ordre 3. En effet, seules celles-ci ont la particularité que tout mineur contient au moins un élément diagonal. Il n'est en fait pas vrai qu'une matrice générale de rang de Jordan 1 annule tous ses mineurs : un calcul que j'ai fait à l'aide du logiciel "singular" m'a convaincu que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 \\ x_2y_1 & x_2y_2 \end{pmatrix}$, avec $x_i, y_i \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$ n'annule aucune quadrique mais 16 cubiques indépendantes (l'adhérence de cet ensemble est une variété de codimension 4 dans $\mathbb{P}^{15}$ et de degré 20). Il est d'ailleurs aisé de décrire ces cubiques : si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est dans cette adhérence, alors $c\overline{a}b = Q(a)d, d\overline{b}a = Q(b)c, a\overline{c}d = Q(c)b$ et $b\overline{d}c = Q(d)a$.

3.2.3 Isomorphismes de variétés et d'algèbres de Jordan

Comme annoncé, je souhaite produire un isomorphisme entre $H_n(\mathbb{H} \otimes \mathbb{C})$ et $\mathcal{AS}_{2n}(\mathbb{C})$, deux réalisations de la même algèbre de Jordan. Tout d'abord, voici une proposition que je démontre à la fin du paragraphe et qui explique ce que j'entends par isomorphisme :

Proposition 3.13 *Soient V_1 et V_2 deux algèbres de Jordan simples, I_1 et I_2 leurs unités et X_1 et X_2 les variétés algébriques projectives constituées des éléments de rang de Jordan 1. Soit enfin $f : V_1 \to V_2$ une application linéaire telle que $f(I_1) = I_2$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f induit un isomorphisme de variétés entre X_1 et X_2.*
2. *f est un isomorphisme d'algèbres entre V_1 et V_2.*

Un élément $A \in H_n(\mathcal{A})$ définit deux applications $\mathcal{A}$-linéaires de $\mathcal{A}^n$ dans lui-même par les formules $L_A(x_i) = (\sum_j a_{i,j}x_j)_i$ et $R_A(x_i) = (\sum_j x_j a_{i,j})_i$ (si $\mathcal{A}$ est commutative ces

deux applications sont les mêmes). L'algèbre $\mathcal{A}$ n'est pas un corps, mais rien n'interdit de considérer les applications $\mathbb{C}$-linéaires définies par les mêmes formules. Notons $X \subset \mathbb{P}H_n(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})$ la variété des matrices de rang de Jordan 1 (on étudiera ensuite le cas de $H_n(\mathbb{C}\otimes\mathbb{C})$ à l'aide de l'inclusion naturelle $H_n(\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}) \subset H_n(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})$).

Lemme 3.2.2 *Supposons que $\mathcal{A} = \mathbb{H}\otimes\mathbb{C}$. Soit A de rang 1 à droite (respectivement à gauche), alors L_A (respectivement R_A) est de rang 4.*

Remarque : Si $A = \begin{pmatrix} 1+iI & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors les rangs de L_A et R_A sont 2 (A n'est pas hermitienne).

Démonstration : Tout d'abord, pour une matrice hermitienne quelconque, ce rang est au moins 4. En effet si $A = (a_{i,j})$ est hermitienne, et si par exemple $a_{1,1}$ est non nul, alors $L_{A|(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})\times\{0\}\times\ldots\times\{0\}}$ est injective. Si toute la diagonale est nulle, mais que par exemple $a_{1,2} \neq 0$, alors $L_{A|(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})\times(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})\times\{0\}\times\ldots\times\{0\}}$ est de rang au moins 4. Les mêmes remarques valent pour R_A.

Par ailleurs, si A est de rang 1 à droite (respectivement à gauche), alors soit (x_i) tels que $A = \nu_2(x_i)$ (respectivement $A = \tilde{\nu}_2(x_i)$; il est clair que tout vecteur de l'image de L_A (respectivement R_A) est multiple à droite (respectivement à gauche) de (x_i), et donc que l'image est au plus de dimension 4. •

Soit donc $A \in \widehat{X}$. L'image $E(A)$ de L_A est un sous-espace vectoriel de $E := (\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})^n$ de dimension 4 stable par multiplication à droite par un nombre. Comme dans la preuve de la proposition 2.22, on peut écrire $E(A) = E(A)_i \oplus E(A)_{-i}$.

Proposition 3.14 *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \phi \ : & X \subset \mathbb{P}(H_n(\mathbb{H})\otimes\mathbb{C}) & \to & G(2,E_i) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 E_i) \\ & A & \mapsto & E(A)_i \end{array}$$

est un isomorphisme linéaire.

Démonstration : Donnons une formule pour cette application. Tout d'abord, si $z = a+bI+cJ+dK \in \mathbb{H}\otimes\mathbb{C}$, alors

$$z(1-iJ) = (a+ic)(1-iJ) + (b+id)(I-iK)$$

et

$$z(I-iK) = (-b+id)(1-iJ) + (a-ic)(I-iK)$$

Choisissons comme base de $(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})_i$ les éléments $1-iJ$ et $I(1-iJ) = I-iK$. Soit une matrice $A = (z_k\overline{z_l})$ de X, où $z_k = a_k + b_kI + c_kJ + d_kK$. Alors $E(A)_i$ est engendré par les vecteurs $(z_k)(1-iJ)$ et $(z_k)(I-iK)$, qui s'expriment dans notre base $\begin{pmatrix} a_k+ic_k \\ b_k+id_k \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -b_k+id_k \\ a_k-ic_k \end{pmatrix}$. La matrice antisymétrique qui représente ce plan vectoriel est alors formée de $n\times n$ blocs 2×2 qui peuvent se calculer comme suit : le k-ième bloc diagonal égale $\begin{pmatrix} 0 & -(a_k^2+b_k^2+c_k^2+d_k^2) \\ a_k^2+b_k^2+c_k^2+d_k^2 & 0 \end{pmatrix}$ et le bloc en position (k,l) $(k\neq l)$ vaut $\begin{pmatrix} \alpha_{k,l} & \beta_{k,l} \\ \gamma_{k,l} & \delta_{k,l} \end{pmatrix}$, avec

$$\alpha_{k,l} := -a_k b_l + a_l b_k - c_k d_l + c_l d_k) + i(a_k d_l - a_l d_k - c_k b_l + c_l d_k)$$
$$\beta_{k,l} := -(a_k a_l + b_k b_l + c_k c_l + d_k d_l) + i(-a_k c_l + a_l c_k + b_k d_l - b_l d_k)$$
$$\gamma_{k,l} := (a_k a_l + b_k b_l + c_k c_l + d_k d_l) + i(-a_k c_l + a_l c_k + b_k d_l - b_l d_k)$$
$$\delta_{k,l} := (-a_k b_l + a_l b_k - c_k d_l + c_l d_k) - i(a_k d_l - a_l d_k - c_k b_l + c_l d_k)$$

Cette dernière expression ainsi que celle donnant les blocs diagonaux se simplifient considérablement si l'on considère que le (k,l)-ième coefficient de A égale

$$x_{k,l} + y_{k,l} I + z_{k,l} J + t_{k,l} K := (a_k + b_k I + c_k J + d_k K)(a_l - b_l I - c_l J - d_l K)$$
$$= (a_k a_l + b_k b_l + c_k c_l + d_k d_l) + (-a_k b_l + a_l b_k - c_k d_l + c_l d_k) I$$
$$+(-a_k c_l + a_l c_k + b_k d_l - b_l d_k) J + (-a_k d_l + a_l d_k - b_k c_l + b_l c_k) K$$

En effet, on peut alors écrire que le bloc 2×2 en position (k,l) avec $k \neq l$ vaut

$$y_{k,l} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t_{k,l} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + x_{k,l} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z_{k,l} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Le bloc diagonal en position (k,k) vaut $x_{k,k} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Autrement dit, l'application ϕ est l'application linéaire qui envoie $1, I, J, K$ respectivement sur $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. Il est alors clair que c'est un isomorphisme linéaire, qui envoie bien X sur la grassmannienne. •

Remarque : On peut alors constater que cette application envoie $z \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$ sur $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * M(z)$, où M est l'isomorphisme de la proposition 2.4.

Notons, pour une matrice A de rang de Jordan 1, $C^{\pm}(A)$ la droite de $[\mathcal{A}(1 \pm iI)]^n =: E^{\pm}$ égale à l'image de l'application associée à A restreinte à $E^{\pm}$. Alors en ce qui concerne $H_n(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})$, les inclusions naturelles $H_n(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}) \subset H_n(\mathbb{H} \otimes \mathbb{C})$ et $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \subset G(2, 2n)$ et la proposition précédente impliquent, si l'on note, pour une matrice A de rang de Jordan 1, $C^{\pm}(A)$ la droite de $[\mathcal{A}(1 \pm iI)]^n =: E^{\pm}$ égale à l'image de l'application associée à A restreinte à $E^{\pm}$:

Proposition 3.15 *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \phi' & : & X \subset \mathbb{P}H_n(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}) & \to & \mathbb{P}E^+ \times \mathbb{P}E^- \subset \mathbb{P}(E^+ \otimes E^-) \\ & & A & \mapsto & (C^+(A), C^-(A)) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Cette application est donnée par la formule

$$[\phi'(a_{k,l} + b_{k,l} I)]_{k,l} = (a_{k,l} + i b_{k,l})_{k,l}$$

On peut maintenant donner une autre définition du déterminant :

Proposition 3.16 *L'hypersurface qui annule le déterminant dans une algèbre de rang r est l'ensemble des éléments de rang au plus $r-1$, ou encore, géométriquement, $S^{r-2}X$, si X désigne l'ensemble des éléments de rang 1.*

Démonstration : Dans le cas de l'algèbre de Jordan exceptionnelle, on a vu que $Sec(X) = \{\det = 0\}$.

Par ailleurs, vu les isomorphismes donnés par les propositions 3.15 et 3.14, on peut supposer que X est la variété des matrices de rang usuel 1 dans l'ensemble des matrices symétriques et quelconques et de rang usuel 2 dans l'ensemble des matrices antisymétriques. On sait que det est le déterminant usuel ou le pfaffien. Mais dans chacun des deux premiers cas, comme une matrice est de rang s si et seulement si elle s'écrit comme somme de s matrices de rang 1, la proposition est bien connue. Les matrices antisymétriques se comportent de façon analogue. •

Démonstration de la proposition 3.13 : (2) implique évidemment (1) puisque les variétés X_i ne sont définies que par des conditions faisant intervenir les structures d'algèbres et les unités. Si (1) est vrai, soient F_1 et F_2 les équations de $S^{r-2}X_1$ et $S^{r-2}X_2$ telles que $F_1(I_1) = F_2(I_2) = 1$. Comme f envoie X_1 sur X_2 donc $f^*(F_2) = \lambda F_1$, et on voit que $\lambda = 1$ en évaluant ces polynômes en I_1. Alors, comme $f(I_1) = I_2$, f préserve les produits scalaires. Comme on a vu (théorème 3.1) que dans une algèbre de Jordan V d'unité I et munie du produit scalaire $\langle .,. \rangle$, $D_I^3 \log\det(A, B, .) = -2\langle A * B, . \rangle$, on en déduit que f préserve les produits de Jordan. •

On peut enfin, après cette longue digression, obtenir l'analogue des propositions 2.5 et 2.9 pour les algèbres de Jordan (cf chapitre 4.1 pour la définition des variétés de Scorza) :

Théorème 3.2 *Soit V un espace vectoriel. La donnée d'une structure d'algèbre de Jordan simple de rang $r \geq 3$ sur V équivaut à la donnée d'une $(r-1)$-variété de Scorza $X \subset \mathbb{P}V$ et d'un point $I \in V - \widehat{S^{r-2}X}$.*

Démonstration : Ce théorème est essentiellement une reformulation du théorème 4.3 : étant donnée une structure d'algèbre de Jordan sur V, la proposition 3.16 dit que la variété des matrices de rang 1 est une variété de Scorza.

Réciproquement, c'est l'objet du chapitre 4.3 de montrer qu'une variété de Scorza $X \subset \mathbb{P}V$ et un élément $I \in V - \widehat{S^{r-2}X}$ définissent une algèbre de Jordan sur V. Je donne aussi une description géométrique de ce produit et de la représentation quadratique (propositions 4.13,4.14 et 4.6). •

3.2.4 Rang de Jordan et rang des applications linéaires associées

Soit $\mathcal{B} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Si l'on avait considéré des matrices à coefficients dans $\mathcal{B}$, alors il serait clair que l'image de L_A (et de R_A) serait un $\mathcal{B}$-espace vectoriel et que donc $\dim \mathcal{B}$ diviserait $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\, L_A$. Pour une matrice quelconque à coefficients dans $\mathcal{A} = \mathcal{B} \otimes \mathbb{C}$, le fait que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} | \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}\, L_A$ devient bien entendu faux comme le montre l'exemple $\begin{pmatrix} 1+iI & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En revanche, la proposition qui suit établit ce résultat pour les matrices hermitiennes :

Proposition 3.17 *Soit $A \in H_n(\mathcal{A})$, avec $\mathcal{A}$ associative. Alors* $\dim \mathcal{A}$ *divise* $\dim Im\ L_A$ *et* $\dim Im\ R_A$.

Démonstration : Commençons par le cas $\mathcal{A} = \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$: on utilise alors les propositions 3.14 et 2.4 : la matrice $\phi(A)$, pour $A \in H_n(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{C}$, n'est autre que $D.\varphi(A)$, où D égale la matrice diagonale par blocs ayant des $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur la diagonale, et où $\varphi(A)$ est la matrice par blocs $(M(a_{i,j}))_{i,j}$, M désignant l'isomorphisme de la proposition 2.4. Comme nous l'avons vu, $M(z)$ est la matrice de la restriction de L_z à $(\mathbb{H} \otimes \mathbb{C})_i$. Ainsi, $\varphi(A)$ est la matrice de la restriction de l'application linéaire L_A à $(\mathbb{H} \otimes \mathbb{C})_i^n$. Le rang de L_A est donc le double du rang de cette restriction, or celle-ci est donnée (à D près) par une matrice antisymétrique ; le rang de L_A est donc divisible par 4. Il en va de même pour R_A.

Dans le cas $a = 2$, étant donné une matrice A à coefficients dans $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$, on peut considérer cette matrice comme à coefficients dans $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$; soit V (respectivement V') le sous-espace vectoriel de $(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})^n$ (respectivement $(\mathbb{H} \otimes \mathbb{C})^n$) image de L_A, considérée comme endomorphisme de $(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})^n$ (respectivement $(\mathbb{H} \otimes \mathbb{C})^n$). On a alors $V' = V \oplus V.J$, R_J réalisant un isomorphisme entre V et $V.J$. Ainsi, puisque 4 divise $\dim V'$, 2 divise $\dim V$. •

Proposition 3.18 *Si $\mathcal{A}$ est associative, alors A est de rang de Jordan à gauche (respectivement à droite) 1 si et seulement si L_A (respectivement R_A) est de rang* $\dim \mathcal{A}$.

Démonstration : Je remercie Laurent Manivel pour la simplification de l'argument qu'il m'a proposée. On démontre la partie concernant le rang à gauche. On a déjà vu que le rang des applications linéaires associées à une matrice de rang de Jordan 1 est $\dim \mathcal{A}$.

Pour la réciproque, considérons d'abord le cas d'une matrice d'ordre 3 quelconque. Si l'image est de dimension $\dim \mathcal{A}$, et si $\mathcal{A} = \mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$, A est évidemment de rang 1. Supposons $2 \leq \dim \mathcal{A} \leq 4$. Si $a_{1,1} \neq 0$, l'hypothèse assure que les colonnes sont toutes multiples de la première. Sinon, on peut supposer que tous les éléments diagonaux sont nuls et j'affirme que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des $C_j.\lambda, \lambda \in \mathcal{A}$ est de dimension $\frac{\dim \mathcal{A}}{2}$ pour toute colonne C_j de A. En effet, si un de ces $\mathbb{C}$-espace vectoriel était de dimension $\dim \mathcal{A}$, alors toutes les autres colonnes seraient multiples de cette colonne, et comme $a_{j,j} = 0$, alors $\forall k, a_{j,k} = 0$. Comme A est hermitienne, $C_j = 0$, ce qui est contradictoire (rappelons qu'un sous-espace vectoriel de la forme $\{C_j.\lambda\}$ ne peut avoir comme dimension que $\dim \mathcal{A}$, $\frac{\dim \mathcal{A}}{2}$ ou 0 dans le cas d'une algèbre associative, car pour $x, y \in \mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$, on a soit $L(x) = L(y)$, soit $L(x) \cap L(y) = \{0\}$: la dimension du noyau de l'application $\lambda \mapsto C_j.\lambda$ est donc paire). Soit alors j fixé. Il existe un espace vectoriel K_j de dimension $\frac{\dim \mathcal{A}}{2}$ tel que pour tout i, $\mathrm{Ker}\ L_{a_{i,j}} \supset K_j$. Mais ce noyau commun est un certain $L(x_j)$, et donc $\forall i, a_{i,j} \in R(\overline{x_j})$. Comme A est hermitienne, on a aussi $a_{i,j} \in L(x_i)$. Ainsi $a_{i,j}$ est de la forme $x_i t_{i,j} \overline{x_j}$. Le corollaire 3.12 montre alors que A est de rang 1.

On conclut la proposition par récurrence sur n : si elle vraie jusqu'au rang n, alors soit A une matrice $(n+1) \times (n+1)$ telle que le rang de l'application linéaire associée soit $\dim \mathcal{A}$. Alors on peut supposer que $a_{1,2} \neq 0$. Soit alors B la matrice extraite composée des n premières lignes et des n premières colonnes de A. Par hypothèse de récurrence, il existe $z_1, \ldots, z_n$ tels que $B = \nu_2(z_i)$. Soit p la projection naturelle $\mathcal{A}^{n+1} \to \mathcal{A}^n$. J'affirme que

$p(\text{Im } L_A) = \text{Im } L_B = \{(z_i).\lambda, \lambda \in \mathcal{A}\}$. En effet, on a évidemment l'inclusion $\text{Im } L_B \subset \{(z_i).\lambda, \lambda \in \mathcal{A}\}$, mais ces deux espaces linéaires sont de dimension $\dim \mathcal{A}$ (si on avait $\text{Ker } (L_{z_1}) = \text{Ker } (L_{z_2})$, alors on aurait $\overline{z}_1 \in \text{Ker } L_{z_2}$, soit $z_2\overline{z_1} = 0$, contredisant $a_{1,2} \neq 0$). Par conséquent, il existe λ tel que $\forall i \leq n, a_{i,n+1} = z_i.\lambda$; comme A est hermitienne, on a $\forall i \leq n, a_{n+1,i} = \overline{\lambda}\overline{z}_i$, et no en déduit aisément que $a_{n+1,n+1} = Q(\lambda)$. Si on pose $z_{n+1} = \lambda$, on obtient $A = \nu_2(z_i)$. •

Cette proposition est fausse pour les octaves :

Exemple 3.4 *Soit*

$$A = \nu_2(1, e_1, e_2) = \begin{pmatrix} 1 & -e_1 & -e_2 \\ e_1 & 1 & -e_3 \\ e_2 & e_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors l'image de l'application linéaire associée à A est de dimension 16.

Démonstration : Cette image contient $\{(\lambda, e_1.\lambda, e_2.\lambda)\}$, de dimension 8. Modulo cet espace vectoriel, les vecteurs $A(0, e_i, 0)$ et $A(0, 0, e_i)$ pour $i \in \{4, 5, 6, 7\}$ valent respectivement $(0, 0, 2e_5), (0, 0, -2e_4), (0, 0, 2e_7), (0, 0, -2e_6)$ et $(0, -2e_5, 0), (0, 2e_4, 0), (0, -2e_7, 0), (0, 2e_6, 0)$; ils sont indépendants dans ce quotient et l'image est de dimension 16. •

On trouve dans la littérature une définition plus simple des éléments de rang de Jordan 1 dans le cas des algèbres de Jordan *euclidiennes* : cf par exemple [Harv 90] : dans ce cas ces éléments sont les multiples des éléments A tels que $\text{tr}A = 1$ et $A^2 = A$. On peut alors imaginer d'homogénéiser ces équations pour définir les éléments de rang de Jordan 1 comme ceux tels que $A^2 = (\text{tr}A)A$. Dans le cas des algèbres de Jordan *réelles* cette définition est valable car si $A^2 = (\text{tr}A)A$ et $\text{tr}A \neq 0$, alors on se ramène au cas $\text{tr}A = 1$, et si $\text{tr}A = 0$, on a alors $A^2 = 0$ et donc $A = 0$ (sur les réels). Cette dernière propriété est bien sûr fausse sur une algèbre de Jordan complexe, et d'ailleurs la définition n'est pas valable comme le montre l'exemple qui suit d'une matrice 4×4 de trace et de carré nuls.

Exemple 3.5 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1+iI \\ 1-iI & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1+iI \\ 1-iI & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Alors A et de rang de Jordan 2.

Démonstration : Il est clair que A est au plus de rang de Jordan 2. Par ailleurs, L_A est de rang $2 \dim \mathcal{A}$. •

Néanmoins, le résultat reste valable pour les matrices 3×3 :

Proposition 3.19 *Soit $A \in H_3(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} \in \{\mathbb{R}\otimes\mathbb{C}, \mathbb{C}\otimes\mathbb{C}, \mathbb{H}\otimes\mathbb{C}\}$ telle que $A^2 = (trA).A$. Alors A est de rang de Jordan 1.*

Démonstration : Supposons que $\mathcal{A} = \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$. Supposons d'abord $\mathrm{tr}A = 0$. Alors $A^2 = 0$, donc $L_A^2 = 0$ et son rang est inférieur ou égal à 6. Mais ce rang est un multiple de 4 (proposition 3.17), donc c'est 4 et A est de rang de Jordan 1 (proposition 3.18).

Si maintenant $\mathrm{tr}A = 1$, alors comme $A^2 = A$, $L_A^2 = L_A$ et L_A est diagonalisable, ses valeurs propres étant 0 ou 1. Comme la trace de A est 1, celle de L_A est 4 et donc 1 est valeur propre quadruple de L_A qui est donc de rang 4 ; A est donc bien de rang de Jordan 1 (proposition 3.18). •

On peut maintenant résumer certains résultats concernant les éléments de rang 1 dans une algèbre de Jordan :

Théorème 3.3 *Soit V une algèbre de Jordan simple de rang n supérieur ou égal à 3 et $A \in V$ non nul. Alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est de rang de Jordan 1, soit $\forall B \in V, R(A).B = \langle A, B\rangle A$.*
2. *La classe de A dans $\mathbb{P}V$ est dans l'orbite fermée de $Str(V)$.*
3. *(dans le cas où on a réalisé V comme $H_n(\mathcal{A})$ avec $\mathcal{A}$ associative) A est l'image par l'application de Veronese généralisée d'un n-uplet d'éléments de $\mathcal{A}$.*
4. *(Si $V = \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) : A est de rang usuel 1.*
   (Si $V = \mathcal{AS}_{2n}(\mathbb{C})$) : A est de rang usuel 2.

Par ailleurs, si $V = H_n(\mathcal{A})$ avec $\mathcal{A}$ associative, alors ces conditions équivalent encore au fait que L_A soit de rang minimal (soit $\dim \mathcal{A}$*). Pour $V = H_3(\mathbb{O})$, ce résultat est faux.*

3.2.5 Espaces projectifs sur les algèbres de Cayley de dimension arbitraire

Dans ce paragraphe, je réponds à une question que m'a posée Ciro Ciliberto. Nous avons vu que l'adhérence du "plan affine" sur les octaves, c'est-à-dire l'ensemble des classes des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_2 \\ \overline{z_1} & Q(z_1) & \overline{z_1}z_2 \\ \overline{z_2} & \overline{z_2}z_1 & Q(z_2) \end{pmatrix} \text{ avec } z_1, z_2 \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C},$$

dans l'espace projectif $\mathbb{P}H_3(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})$, est lisse.

On peut se demander ce qu'il en est de l'analogue en dimension 3, à savoir l'adhérence dans $\mathbb{P}H_4(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})$ de l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & Q(z_1) & \overline{z_1}z_2 & \overline{z_1}z_3 \\ \overline{z_2} & \overline{z_2}z_1 & Q(z_2) & \overline{z_2}z_3 \\ \overline{z_3} & \overline{z_3}z_1 & \overline{z_3}z_2 & Q(z_3), \end{pmatrix} \text{ avec } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$$

Appelons $\mathbb{P}^3_{\mathbb{O}}$ cette variété et plus généralement $\mathbb{P}^n_{\mathbb{O}}$ l'analogue n-dimensionnel. C'est un candidat pour une quatrième n-variété de Scorza (cf paragraphe 4.1).

Proposition 3.20 *Pour $n \geq 3$, la variété $\mathbb{P}^n_{\mathbb{O}}$ est singulière.*

Démonstration : Pour simplifier les notations, supposons que $n = 3$, les autres cas étant similaires. Cette variété est de dimension 24. Par ailleurs, son intersection avec $\begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la variété $\mathbb{P}^2_{\mathbb{O}}$ déjà étudiée. La même remarque vaut pour $\begin{pmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathbb{P}^3_{\mathbb{O}}$ contient le point $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. De plus, en considérant les deux variétés $\mathbb{P}^2_{\mathbb{O}}$ précédentes qui passent par ce point, on voit que $T_A X$ contient les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cet espace projectif est de dimension 24 ; si A était lisse ce serait exactement $T_A X$. Nous allons voir que ce n'est pas le cas.

Considérons une autre variété $Y \subset \mathbb{P}M_2(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})$, définie comme l'adhérence de l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} Q(z_1) & \overline{z_1} z_2 \\ \overline{z_3} z_1 & \overline{z_3} z_2 \end{pmatrix}$. Cet ensemble contient l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ \overline{z_3} & \overline{z_3} z_2 \end{pmatrix}$, soit la variété des $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a réel et $ad = cb$. Mais Y n'est *pas* cette variété car les octaves n'étant pas associatifs, on n'a pas la relation $(\overline{z_3} z_1)(\overline{z_1} z_2) = Q(z_1)\overline{z_3} z_2$. On a donc $\dim Y > 16$ et si $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T_{M_0} Y \neq \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$.

Une conséquence de ce fait est que $T_A X \not\subset \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & 0 \\ * & * & 0 & * \end{pmatrix}$, et que donc A est un point singulier de X. •

Afin d'énoncer la proposition suivante, j'ai besoin d'introduire les algèbres que j'appelle "de Cayley-Dickson".

Définition 3.6 *Une conjugaison sur une algèbre unitaire $\mathcal{A}$ est une involution notée $z \mapsto \overline{z}$ telle que $\forall z \in \mathcal{A}, z + \overline{z}$ et $z\overline{z} = \overline{z}z$ sont des multiples scalaires de 1, et telle que de plus $\overline{(xy)} = \overline{y}\,\overline{x}$.*

Par exemple, toute algèbre de composition est munie d'une conjugaison.

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre munie d'une conjugaison, alors on peut fabriquer son "extension de Cayley-Dickson" qui est l'espace vectoriel $\mathcal{A}^2$ muni du produit

$$(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - \overline{y}_2 x_2, x_2 \overline{y}_1 + y_2 x_1)$$

et de l'involution $\overline{(x, y)} = (\overline{x}, -y)$.

Proposition 3.21 *L'extension de Cayley-Dickson d'une algèbre munie d'une conjugaison est une algèbre munie d'une conjugaison.*

Démonstration [FK 94, p.84] : L'unité de cette algèbre est $(1,0)$; $(x,y)+\overline{(x,y)} = (x+\overline{x},0)$ est un multiple de $(1,0)$. Enfin, $(x,y)(\overline{x},-y) = (x\overline{x}-\overline{(-y)}y, yx+(-y)x) = (x\overline{x}+\overline{y}y,0)$ est un multiple de 1 et de même pour $(\overline{x},-y)(x,y)$. •

Si $\mathcal{A} = \mathbb{R}\otimes\mathbb{C}$, alors les extensions de Cayley-Dickson successives de $\mathcal{A}$ sont $\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}$, $\mathbb{H}\otimes\mathbb{C}$ et $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$. Notons $Q(x)$ le nombre complexe tel que $x\overline{x} = Q(x).1$. On a alors [FK 94, prop 5.1.3 p.84] :

Proposition 3.22 *Munie de la forme Q précédente, les algèbres de Hurwitz sont des algèbres normées mais l'extension de Cayley-Dickson de $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$ n'est pas une algèbre normée.*

J'appelle "algèbre de Cayley-Dickson" une algèbre obtenue en itérant un nombre de fois arbitraire ce processus à partir de $\mathbb{R}\otimes\mathbb{C}$. Les 4 premières de ces algèbres sont donc $\mathbb{R}\otimes\mathbb{C}, \mathbb{C}\otimes\mathbb{C}, \mathbb{H}\otimes\mathbb{C}$ et $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$; les autres ne sont pas normées. Je note CD_n la n-ième algèbre de Cyley-Dickson, de dimension 2^{n-1}.

Proposition 3.23 *Soit $n,p \geq 1$ deux entiers. Soit $H_{n,p}$ l'algèbre des matrices hermitiennes de taille $(n+1)\times(n+1)$ à coefficients dans CD_p. Munissons-la de la multiplication $A*B = \frac{1}{2}(AB+BA)$. Soit $X \subset \mathbb{P}H_{n,p}$ la variété adhérence de l'ensemble des matrices de la forme*

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_n \\ \overline{z_1} & Q(z_1) & \cdots & \overline{z_1}z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{z_n} & \overline{z_n}z_1 & \ldots & Q(z_n) \end{pmatrix}.$$

Alors X est lisse si et seulement si $H_{n,p}$ est de Jordan.

Remarque : Cette proposition est facile à démontrer mais elle illustre assez bien, je crois, la correspondance entre géométrie et algèbre. Par ailleurs, il ne me semble pas très naturel d'imposer à X d'être l'adhérence indiquée ; j'espère à l'avenir prouver un résultat faisant intervenir toutes les algèbres de Jordan (aussi celles de rang 2) et un autre concernant ces "variétés de Scorza singulières" (cf chapitre 4.1 pour la définition des variétés de Scorza qui sont des variétés lisses).

Démonstration : Si $n=1$, X est la quadrique lisse

$$\left\{\det\begin{pmatrix} t & x \\ \overline{x} & u \end{pmatrix} := tu - Q(x) = 0\right\}.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{pmatrix} t & \overline{x} \\ x & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t' & \overline{x}' \\ x' & u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tt'+\langle x,x'\rangle & \frac{1}{2}(t'\overline{x}+u\overline{x}'+t\overline{x}'+u'\overline{x}) \\ \frac{1}{2}(t'x+ux'+tx'+u'x) & uu'+\langle x,x'\rangle \end{pmatrix}.$$

Soit alors

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & H_{1,p} & \to & \mathbb{C}\oplus(\mathbb{C}\oplus CD_p) \\ & & \begin{pmatrix} t & \overline{x} \\ x & u \end{pmatrix} & \mapsto & [\frac{t+u}{2}, (\frac{t-u}{2}, x)] \end{array}$$

et munissons $\mathbb{C} \oplus (\mathbb{C} \oplus CD_p)$ de la structure d'algèbre de Jordan de rang 2 déterminée par la forme quadratique sur $\mathbb{C} \oplus CD_p$ donnée par $B(\alpha, x) = \alpha^2 + Q(x)$. Puisque

$$\begin{aligned} \phi\left(\begin{pmatrix} t & \overline{x} \\ x & u \end{pmatrix}\right).\phi\left(\begin{pmatrix} t' & \overline{x}' \\ x' & u' \end{pmatrix}\right) &= \phi\left(\begin{pmatrix} t & \overline{x} \\ x & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t' & \overline{x}' \\ x' & u' \end{pmatrix}\right) \\ &= \left[\tfrac{tt'+uu'}{2} + \langle x, x' \rangle, \left(\tfrac{tt'-uu'}{2}, \tfrac{t+u}{2}x' + \tfrac{t'+u'}{2}x\right)\right], \end{aligned}$$

ϕ est un isomorphisme d'algèbres et donc $H_{1,p}$ est de Jordan.

Remarquons que CD_p contient beaucoup d'algèbres isomorphes à $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$; en effet, une récurrence immédiate sur p montre que $\overline{1} = 1$ et que si $\langle 1, x \rangle = 0$, alors $\overline{x} = -x$. En particulier, si $\langle 1, x \rangle = 0$, alors puisque $x(-x)$ est un multiple de 1, l'algèbre engendrée par x est isomorphe à $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$. Supposons $n = 2$. Alors le point $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est dans X et $T_A X$ contient $\begin{pmatrix} 0 & * & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}$. Mais si $p > 4$, comme on n'a pas la relation $Q(xy) = Q(x)Q(y)$, $T_A X$ n'est pas inclus dans $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$, comme dans la démonstration de la proposition 3.20, et A est un point singulier. Par contre, on sait que si $p \leq 3$, $H_{n,p}$ est une algèbre de Jordan et X est lisse.

Pour $n \geq 3$, la proposition 3.20 dit que si $p > 3$, la variété X est singulière. Par ailleurs, $H_{n,p}$ n'est pas de Jordan. Si $p \leq 3$, X est lisse et $H_{n,p}$ est de Jordan. •

Chapitre 4

Variétés de Severi et de Scorza

On prend maintenant le point de vue inverse de celui du chapitre prédédent. Etant donnée une variété, on cherche des conditions géométriques qui impliquent que cette variété est la variété des éléments de rang de Jordan 1 dans une algèbre de Jordan. En fait, F.L. Zak a fourni la réponse à cette question puisqu'il a défini et classifié les variétés de Scorza et il s'avère que celles-ci sont celles que nous avons rencontrées dans le chapitre précédent. Les arguments de F.L. Zak sont purement géométriques ; je souhaite ici proposer plusieurs autres démonstrations de cette classification, faisant intervenir l'homogénéité de ces variétés et les algèbres de Jordan.

4.1 Définitions des variétés de Scorza et étude des exemples

4.1.1 Définition des variétés de Severi

Etant donnée une variété algébrique complexe X sous-variété d'un espace projectif, une variété naturelle objet de nombreuses études est la variété sécante de X, notée $Sec(X)$, à savoir l'adhérence de la réunion des droites passant par deux points distincts de X. Dans le cas où X est lisse c'est la réunion des sécantes et des tangentes de X. Comme cette variété sécante est au coeur de cette étude, je donne quelques exemples.

Si X est "dégénérée", c'est-à-dire incluse dans un hyperplan, alors $Sec(X)$ est incluse dans le même hyperplan et l'étude de sa sécante se ramène à celle X considérée comme sous-variété de cet hyperplan. Par la suite, on supposera toutes les variétés non-dégénérées. Si $X \subset \mathbb{P}^m$ est une hypersurface, alors une droite générique coupe cette hypersurface en plusieurs points, c'est donc une droite sécante et elle est incluse dans $Sec(X)$. Puisque $Sec(X)$ est fermée, $Sec(X) = \mathbb{P}^m$. Si X est la variété des matrices de rang (usuel) 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $Sec(X)$ est la variété des matrices de rang au plus 2. En effet une matrice s'écrit comme somme de deux matrices de rang 1 si et seulement si elle est de rang au plus 2.

Un théorème de F. Zak conjecturé par R. Hartshorne [LVV 84, p.9] affirme

Théorème 4.1 *Une variété lisse non-dégénérée $X^n \subset \mathbb{P}^m$ avec $m < \frac{3}{2}n + 2$ vérifie $Sec(X) = \mathbb{P}^m$.*

F.L. Zak définit alors les variétés de Severi comme les cas limite de ce théorème :

Définition 4.1 *On appelle variété de Severi une variété $X^n \subset \mathbb{P}^m$ lisse non dégénérée et telle que $Sec(X) \neq \mathbb{P}^m$ et $m = \frac{3}{2}n + 2$.*

Exemple 4.2 *On peut exhiber quatre variétés de Severi, de dimension 2,4,8 et 16 :*

- *n=2 : $X = \mathcal{V} \subset \mathbb{P}^5$, la surface de Veronese, soit l'image de*

$$\begin{array}{rccc} \nu_2 & : & \mathbb{P}^2 & \rightarrow & \mathbb{P}^5 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz) \end{array}$$

- *n=4 : $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$*
- *n=8 : $X = G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}$*
- *n=16 : $X = \mathcal{E}_6 \subset \mathbb{P}^{26}$*

La variété $\mathcal{E}_6$ est la variété, homogène sous E_6, des matrices de rang de Jordan 1 dans l'algèbre de Jordan exceptionnelle. Le lecteur pourra trouver une autre présentation de cette variété dans [LVV 84, p.13].

Proposition 4.1 *Les quatre variétés précédentes sont des variétés de Severi.*

Démonstration : Le seul point qui nécessite une démonstration est de vérifier que $Sec(X)$ est une hypersurface. Mais cela découle de considérations de rang : par exemple si on réalise $\mathbb{P}^5$ comme l'ensemble des matrices symétriques, alors $\mathcal{V}$ s'identifie aux matrices de rang 1. Les matrices de $Sec(\mathcal{V})$ sont donc au plus de rang 2. Le cas des deux autres variétés s'étudie de façon analogue. Le cas de la variété $\mathcal{E}_6$ a déjà été étudié (proposition 3.11). •

Remarque : Dans tous les cas, on constate que $Sec(X)$ est une cubique et que X est homogène.

4.1.2 Définition des variétés de Scorza

Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective complexe. Notons $S^k X$ l'adhérence de la réunion des k-plans projectifs passant par $k+1$ points de X (de sorte que $S^0 X = X$ et $S^1 X = Sec(X)$, la variété des sécantes). Par exemple, si X est la variété des matrices de rang 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $S^k X$ est la variété des matrices de rang au plus $k+1$.

Puisque X est non-dégénérée, $S^N X = \mathbb{P}^N$; notons $k_0(X)$ le plus petit entier k tel que $S^k X = \mathbb{P}^N$.

Lorsque X et Y sont deux variétés de dimension respectives n et p, la dimension maximale du joint entre ces deux variétés (l'adhérence de la réunion des droites passant par un point de X et un point de Y), noté $S(X,Y)$, est $n+p+1$. Notons $\delta(X,Y)$ et appelons "*défaut de X et de Y*" la différence entre cette dimension maximale et la dimension effective : $\delta(X,Y) := n+p+1-\dim S(X,Y)$. F.L. Zak introduit pour une variété X quelconque les défauts de X et de ses sécantes successives $\delta_i := \delta(X, S^{i-1}X) = \dim X + \dim S^{i-1}X + 1 - \dim S^i X$ et note $\delta := \delta_1$. Un résultat essentiel sur ces défauts est le théorème 1.8 du cinquième chapitre [Zak 93, p.109] :

Théorème 4.2 (Zak) *Si $1 \leq i \leq k_0$, alors $\delta_i \geq \delta_{i-1} + \delta$.*

Corollaire 4.2 (Zak) $k_0 \leq \frac{n}{\delta}$.

F.L. Zak définit alors les variétés de Scorza comme les cas limites de ces théorèmes :

Définition 4.3 (Variété de Scorza) *Une variété $X^n \subset \mathbb{P}^N$ est de Scorza si elle est lisse et non-dégénérée et que :*
- $k_0 = \left[\frac{n}{\delta}\right]$.
- $\delta_i = i\delta$.

J'appelle k-variété de Scorza une variété de Scorza telle que $k_0 = k$.
Remarque : Cette définition présente l'inconvénient de faire intervenir les nombres δ_i qui sont peu habituels. Mais F.L. Zak montre que si n est un multiple de δ, alors les conditions $\delta_i = i\delta$ sont automatiquement vérifiées dès que la première condition, équivalente au fait que $S^{\left[\frac{n}{\delta}\right]-1}X \neq \mathbb{P}^N$, l'est. Par ailleurs, il explique que la classification des variétés de Scorza pour lesquelles δ divise n implique que pour toutes les variétés de Scorza δ divise effectivement n. Dans cette thèse, je supposerai que δ divise n.

Fait 4.1.1 *Les 2-variétés de Scorza sont les variétés de Severi.*

Démonstration : [Zak 93] Si $X \subset \mathbb{P}^N$ est une variété de Severi, alors on a $N = \frac{3}{2}n + 2$. Notons $\eta = \frac{n}{2}$. On a par définition $Sec(X) \neq \mathbb{P}^N$, donc $k_0 > 1$, donc $\frac{n}{\delta} \geq 2$. Ainsi, $\eta \geq \delta$. Comme $Sec(X) \neq \mathbb{P}^N$, $N \geq \dim Sec(X) + 1 = 4\eta - \delta + 2 \geq 3\eta + 2 = N$. On en déduit que $\eta = \delta$, et que $\delta_2 = 3\delta + 1 + 2\delta + 1 - (3\delta + 2) = 2\delta$, de sorte que X est une 2-variété de Scorza.

Si $X \subset \mathbb{P}^N$ est une 2-variété de Scorza, en utilisant le fait que δ divise n, on a $2 = \frac{n}{\delta}$, et donc $2\delta = n$. On a aussi $\delta_2 = 2\delta$ et donc $N = 2n + 1 - \delta + n + 1 - \delta_2 = \frac{3}{2}n + 2$, et X est une variété de Severi. •

Je propose la convention suivante :

Définition 4.4 *Une 1-variété de Scorza est une quadrique lisse.*

4.1.3 Stratégie pour la preuve du théorème de Zak

Je vais maintenant apporter plusieurs preuves du théorème de classification des variétés de Scorza, en faisant intervenir l'homogénéité et les algèbres de Jordan. Nous avons vu que les variétés des éléments de rang de Jordan 1 dans les projectivisées ds algèbres de Jordan simples de rang supérieur ou égal à 3 sont des variétés de Scorza. Réciproquement, notre objectif est le résultat suivant [Zak 93, th.5.6,p.151] :

Théorème 4.3 *Les k-variétés de Scorza sont les variétés projectives des matrices de rang 1 dans les algèbres de Jordan simples de rang $k+1$.*

Remarque : Ce théorème justifie en partie la définition 4.4, puisque les variétés des matrices de rang 1 dans une algèbre de Jordan de rang 2 sont les quadriques lisses. Nous verrons que cette définition est cohérente aussi avec une propriété géométrique des algèbres de Jordan (proposition 4.5). Notons que le théorème 4.3 ne distingue pas l'algèbre de Jordan exceptionnelle des autres algèbres.

Pour démontrer ce théorème, je propose d'étudier quelques propriétés géométriques des exemples 4.2. Dans le paragraphe suivant, j'établierai, en suivant approximativement la démarche de F.L. Zak, les premières de ces propriétés géométriques pour une variété de Severi quelconque $X \subset \mathbb{P}V$. Cela permettra de construire géométriquement deux groupes qui s'avèreront être $Str(V)$ et $Aut(V)$ lorsque V sera muni d'une structure d'algèbre de Jordan. Il sera facile de montrer alors que X est homogène. Puisque les groupes construits sont semi-simples, il est alors aisé de classifier les variétés de Scorza. En effet, en utilisant la classification des algèbres de Lie simples, on sélectionne celles qui peuvent être l'algèbre de Lie de notre groupe. Néanmoins, cet argument me laisse insatisfait, puisqu'il n'explique pas où apparaissent les algèbres de Jordan. Je donne alors deux autres preuves du théorème 4.3 en donnant une construction géométrique d'une algèbre et en prouvant que c'est une algèbre de Jordan, puis en utilisant les espaces préhomogènes symétriques [Ber 00].

Dans un dernier paragraphe consacré plus particulièrement aux variétés de Severi, je donne une démonstration très brève du fait que les dérivées de l'équation de la sécante d'une variété de Severi, qui est une hypersurface de degré 3, déterminent un morphisme birationnel de l'espace projectif : les détails de la démonstration de cette propriété sont laissés au lecteur dans [Zak 93, p.79] et rédigés par L. Ein et N. Shepherd-Barron [Ein 89, p.778]. Ceux-ci proposent deux démonstrations de ce résultat mais ces deux démonstrations utilisent le fait que X est homogène ; par ailleurs les arguments que je vais présenter sont nettement moins sophistiqués. J'expliquerai aussi que ma construction géométrique démontre un résultat de P. Etingof, D. Kazhdan, A. Polishchuk, sur une classe de polynômes qu'ils appellent homaloïdes, résultat qui fait intervenir les variétés de Severi.

4.1.4 Etude des exemples

Avant de commencer l'étude géométrique des exemples proprement dite, j'introduis ici une construction classique qui va intervenir de façon récurrente dans toute la suite de cette thèse. Si $X \subset \mathbb{P}V$ est une variété projective, notons $X^* \subset \mathbb{P}V^*$ la variété duale de X, c'est-à-dire l'adhérence pour la topologie de Zariski de l'ensemble des hyperplans tangents à X en un point lisse. Notons aussi I_X la variété d'incidence

$$I_X = \overline{\{(x,h) \in \mathbb{P}V \times \mathbb{P}V^* : x \in X \text{ et } h \supset T_x X\}}.$$

Notant p_1 et p_2 les projections naturelles $\mathbb{P}V \times \mathbb{P}V^* \to \mathbb{P}V, \mathbb{P}V^*$, on a par définition $p_1(I_X) = X$ et $p_2(I_X) = X^*$.

Théorème 4.4 (bidualité) *On a*

$$\begin{array}{ccccccc} & & I_X & & & & I_{X^*} & & \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & \\ X & & & & X^* & \simeq & X^{**} & & X^*. \end{array}$$

L'isomorphisme $\simeq$ est donné par l'identification naturelle $V \simeq V^{**}$, il identifie les variétés et les applications.

Démonstration : On peut lire dans [GKZ 94] la démonstration élégante suivante : tout d'abord, le correspondant affine de I_X, que je note A_X, défini par

$$A_X = \overline{\{(x,h) \in V \oplus V^*, x \in \widehat{X} \text{ et } h_{|\widehat{T_x X}} = 0\}},$$

vérifie les propriétés :

- Il existe une forme symplectique sur $V \oplus V^*$ telle que pour tout $(x,h) \in A_X$, $T_{(x,h)}A_X$ soit isotrope.
- Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*, (\lambda x, \mu h) \in A_X$ si et seulement si $(x,h) \in A_X$.

Les auteurs de [GKZ 94] démontrent alors qu'une telle variété est déterminée par une de ses projections (sur V ou sur V^*). •

Corollaire 4.3 *Si X est une variété et h un point lisse de X^*, alors $\overline{\{x \in X : T_x X \subset h\}}$ est un espace linéaire.*

Démonstration : Il suffit de montrer que la fibre de $p_2 : I_X \to X^*$ au-dessus d'un tel point est un espace linéaire. Mais p_1 a cette propriété car la fibre au-dessus de x s'identifie aux hyperplans qui contiennent $T_x X$. Le même raisonnement vaut pour $p_1^* : I_{X^*} \to X^*$. Mais par le théorème 4.4, l'application p_1^* est $p_2 : I_X \to X^*$. •

Dans le tableau qui suit j'explicite pour tout entier k et toute algèbre réelle de composition $\mathcal{B}$ la variété de Scorza des matrices de rang 1 dans $H_{k+1}(\mathcal{B} \otimes \mathbb{C})$, les groupes sous lesquels ces variétés sont homogènes ainsi que le sous-groupe stabilisateur d'un point p hors de $S^{k-1}X$. Les variétés de Severi sont obtenues pour $k = 2$.

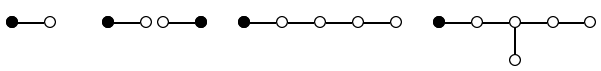
algèbre	variété X	$\mathrm{Aut}(X)$	$\mathrm{Stab}(p)$
$\mathbb{R}$	$\nu_2(\mathbb{P}^k)$	PSL_{k+1}	PO_{k+1}
$\mathbb{C}$	$\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^k$	$PSL_{k+1} \times SL_{k+1}$	PSL_{k+1}
$\mathbb{H}$	$G(2, 2(k+1))$	$PSL_{2(k+1)}$	$PSp_{2(k+1)}$
$\mathbb{O}(k=2)$	$\mathcal{E}_6$	PE_6	F_4

Ces groupes sont ceux qui intervenaient comme $Str(V)_s$ et $Aut(V)$ pour les algèbres de Jordan V.

La théorie des représentations va nous permettre d'étudier les quadriques sur ces variétés de Scorza. Pour cela je commence par quelques rappels. Si G est un groupe algébrique semi-simple, T un tore maximal, Δ une base des racines et B le groupe de Borel dont l'algèbre de Lie contient les espaces propres des racines positives, on peut représenter ce groupe par son diagramme de Dynkin (non nécessairement connexe s'il n'est pas simple), chaque sommet de ce diagramme représentant une racine de Δ. On adopte alors la convention suivante : à tout diagramme obtenu en noircissant certaines cases de ce diagramme on associe le groupe parabolique P qui contient B et dont l'algèbre de Lie contient les espaces propres des racines $-\alpha$ pour tous les α correspondant à des cases noircies. On peut aussi, de manière équivalente, considérer la variété homogène G/P. Dans le cas où on a noirci une seule case, cette variété est l'unique orbite fermée de G dans sa représentation fondamentale correspondant à cette racine.

Par exemple, les quatre variétés de Severi correspondent aux diagrammes

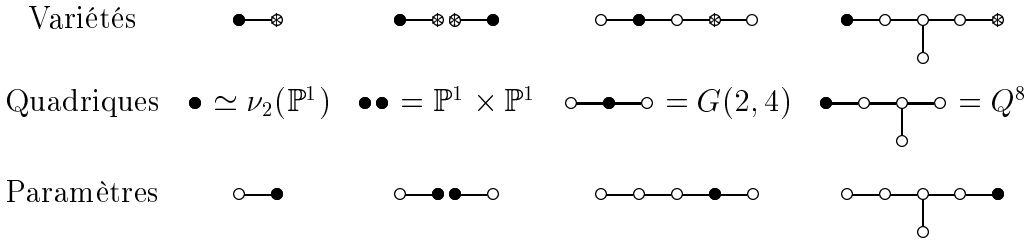
$\nu_2(\mathbb{P}^2)$ $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ $G(2,6)$ $\mathcal{E}_6$



Si $P \subset P_1, P_2$ sont des groupes paraboliques, alors on a deux projections naturelles $p_i : G/P \to G/P_i$. Tits [Tit 95] a alors introduit la correspondance suivante : si $x \in G/P_2$, considérons la variété $p_1[p_2^{-1}(x)]$. Quand x varie dans G/P_2, on obtient ainsi une famille de variétés homogènes sous le sous-groupe P_2 de G stabilisateur de x dans G/P_2, et qui recouvre G/P_1.

En termes de diagrammes de Dynkin, cette correspondance se traduit comme suit : à chaque fois que l'on efface une case du diagramme de Dynkin correspondant à une variété, on sépare ce diagramme en plusieurs parties ; ces parties décrivent des variétés homogènes qui sont contenues dans X. On a plus précisément une famille de telles sous-variétés, paramétrée par la variété qui correspond à la case effacée dans le diagramme initial. Par exemple, le diagramme qui suit exprime que dans $\mathbb{C}^9$, à chaque fois qu'on fixe un 7-plan, on peut considérer la grassmannienne $G(3,7)$ des 3-plans de ce 7-plan. Ainsi, $G(3,9)$ contient une famille de $G(3,7)$ paramétrée par $G(7,9)$:

Cette méthode permet de voir que chaque exemple X de variété de Severi contient une famille de quadriques paramétrée par une variété isomorphe à X (on pourrait de même exhiber une famille de quadriques sur les variétés de Scorza) :



Je vais maintenant, en suivant les idées de [Zak 93], donner une description géométrique de ces quadriques. Soit d'abord X une variété quelconque. Posons, pour $P \in Sec(X) - X$, $Q_P := \{x \in X : (xP)$ sécante ou tangente à X$\}$ et $\Sigma_P := \bigcup_{x \in Q_P}(xP)$, la réunion des tangentes et des sécantes passant par P. C'est aussi le cône de sommet P et de base Q_P. La variété Q_P est souvent appelée "lieu d'entrée de P". Les variétés de Scorza étant celles qui ont de "grands" défauts, ce sont aussi celles qui de "grands" lieux d'entrée.

Etudions donc ces lieux pour les variétés de Scorza. Pour cela commençons par $X = G(2,V)$. Si $P = v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$ est un point générique de $Sec(X)$, alors l'espace

vectoriel π engendré par les v_i est de dimension 4. Remarquons que π est déterminé par P, puisque $\pi = \{v \in V : P \wedge v \text{ est indécomposable. }\}$. On en déduit donc que si w_1, w_2, w_3, w_4 sont tels que $P = w_1 \wedge w_2 + w_3 \wedge w_4$, alors $\forall i, w_i \in \pi$. Par conséquent, $Q_P \subset G(2,\pi) \subset \mathbb{P}\wedge^2 \pi \ni P$. Mais comme $G(2,\pi)$ est une quadrique dans $\mathbb{P}\wedge^2 \pi$, il est clair que $Q_P = G(2,\pi)$, et on en déduit que $\Sigma_P = \mathbb{P}\wedge^2 \pi$.

Par ailleurs, il est clair que si X sont des variétés avec $X \subset Y$, et si $P \in Sec(X) - Y$, alors le lieu d'entrée de P pour X est inclus dans celui pour Y. En utilisant les injections naturelles de $\mathbb{P}V \times \mathbb{P}V$ dans $G(2, V \oplus V)$ et de $\nu_2(\mathbb{P}V)$ dans $\mathbb{P}V \times \mathbb{P}V$, on en déduit que pour $X = \mathbb{P}V \times \mathbb{P}V$, et $P = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2, Q_P$ est la quadrique de dimension 2 $\mathbb{P}^1_{(x_1,x_2)} \times \mathbb{P}^1_{(y_1,y_2)}$ et $\Sigma_P = \mathbb{P}[(x_1,x_2)\otimes(y_1,y_2)] \subset \mathbb{P}(V \otimes V)$. De même, pour $X = \nu_2(\mathbb{P}V)$ et $P = \nu_2(x) + \nu_2(y), Q_P = \nu_2(\mathbb{P}^1_{(x,y)})$ et $\Sigma_P = \mathbb{P}S^2(x,y) \subset \mathbb{P}S^2V$.

Affirmation 4.1.2 *Soit X la variété des éléments de rang un dans une algèbre de Jordan simple de rang au moins trois, et δ son premier défaut. Pour tout $P \in Sec(X) - X$, Σ_P est un $(\delta+1)$-plan et Q_P une quadrique lisse de Σ_P.*

Démonstration : Si l'algèbre de Jordan est classique, ceci découle de l'étude précédente. Dans le cas exceptionnel, si l'on admet que $Sec(X) - X$ est homogène (ce fait est démontré dans le paragraphe 4.3 : corollaire 4.19), alors on peut montrer l'affirmation en faisant un calcul explicite pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en utilisant le corollaire 3.12. •

Considérons maintenant $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$; nous avons vu que la forme bilinéaire symétrique canonique $(A,B) \mapsto \langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^tB)$ identifie $G(A)$ à A^{-1}. Si F désigne la polarisation du déterminant, on a donc que $F(A,A,.)$ s'identifie à la comatrice de A.

Comme la comatrice d'une matrice de déterminant nul est de rang 1, on en déduit que $(Sec(X))^*$, la variété duale de l'hypersurface $Sec(X)$ donnée par le déterminant, s'identifie à l'ensemble de *toutes* (par un argument d'homogénéité) les matrices de rang 1, donc à X.

Ceci donne une autre définition de Σ_P. En effet, si $P = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, alors $Com(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\overline{Com^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)} = \left\{\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \Sigma_P$. Par homogénéité, pour tout $P \in Sec(X) - X$, Σ_P est donc l'adhérence du lieu de tangence de l'hyperplan $T_P Sec(X)$ à $Sec(X)$. Notons, pour $h \in Sec(X)^*$, Σ_h l'adhérence du lieu de tangence de h et Q_h la quadrique $\Sigma_h \cap X$. On comprend alors la famille de quadriques révélée par les diagrammes de Dynkin : à un point h de $Sec(X)^* \simeq X$ correspond la quadrique Q_h de Σ_h. Cette construction est identique pour les autres variétés.

4.2 Etude des variétés de Scorza en général

4.2.1 Quadriques et degré de la variété sécante pour une variété de Severi

Soit X une variété de Severi quelconque, on définit Q_P et Σ_P comme précédemment. Le but de ce paragraphe est de retrouver, au moins pour P générique, les propriétés de ces variétés constatées sur les exemples.

Si $P \notin Sec(X)$, $\pi_P : X \to \mathbb{P}^{m-1}$ est un isomorphisme et le théorème 4.1 montre que $\pi_P(Sec(X)) = \mathbb{P}^{m-1}$, de sorte que $Sec(X)$ est une hypersurface.
On commence par montrer un résultat très général valable pour toute variété sauf les hypersurfaces :

Lemme 4.2.1 *Une sécante générale de X n'est pas une trisécante.*

Démonstration : Le cas des courbes, [Mum 95, pages 134 et suivantes] est classique et on s'y ramène : comme il existe un plan $\mathcal{P}$ de codimension $n-1$ tel que $\mathcal{P} \cap X$ soit une courbe et ne soit pas inclus dans un 2-plan, il existe une sécante de X qui ne soit pas une trisécante. •

Pour étudier Q_P et Σ_P, F.L. Zak rappelle les constructions standard suivantes : soit $\tilde{X}$ l'éclatement de $X \times X$ selon la diagonale ; en d'autres termes, $\tilde{X}$ est l'adhérence des $(x, y, d) \in X \times X \times G(2, m)$ tels que $x \neq y$ et $d = (xy)$. Soit aussi
$S_X = \{(x, y, d, z) : (x, y, d) \in \tilde{X} \text{ et } z \in d\}$

Il définit alors les projections :

$$\begin{array}{rccc} p_4 & : & S_X & \to & Sec(X) \\ & & (x,y,d,z) & \mapsto & z \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} p_1 & : & S_X & \to & X \\ & & (x,y,d,z) & \mapsto & x \end{array}$$

Ainsi, la projection $S_X \to \tilde{X}$ est un fibré localement trivial de fibre type $\mathbb{P}^1$. Cela permet de voir que S_X est lisse de dimension $\dim \tilde{X} + 1 = 2n + 1$. En outre, p_1 permet de calculer la dimension de $Q_P = p_1[p_4^{-1}(P)]$ pour P générique. En effet, $\dim Sec(X) = \frac{3}{2}n + 1$ et donc $\dim[p_4^{-1}(P)] = \frac{n}{2}$ pour P générique ; pour P quelconque cette dimension est éventuellement supérieure. Soit par ailleurs $P \in Sec(X) - X$ quelconque. $p^{-1}_{1|p_4^{-1}(P)}(y)$ est finie car sinon $(yP) \cap X$ serait infini et donc $P \in X$. On a donc $\dim p_1[p_4^{-1}(P)] = \frac{n}{2}$ pour P générique, soit
$\dim Q_P = \frac{n}{2}$ pour P générique. À P fixé, en étudiant de même $S_X(U) := S_X \cap p_1^{-1}(U)$ où U est un ouvert de Zariski de X contenant $x \in Q_P$, on voit que Q_P est de dimension pure $\frac{n}{2}$ pour P générique.

Notons $H = T_P Sec(X)$ et $L_P = \{P' : T_{P'} Sec(X) = H\}$. Nous avons vu (corollaire 4.3) que L_P est linéaire. On démontre maintenant les propriétés géométriques de Q_P et Σ_P pour P général :

Proposition 4.4 *Pour P général dans $Sec(X) - X$, $Q_P = \Sigma_P \cap X$ est une quadrique lisse de dimension $\frac{n}{2}$ et $\Sigma_P = L_P$ un espace linéaire de dimension $\frac{n}{2} + 1$.*

Démonstration : Soit $R \in L_P$; soit $a, b \in X$ tels que $R \in (ab)$, alors par le lemme de Terracini [Zak 93, prop 1.10, p.40] $T_a X \subset H$ et $T_b X \subset H$; notant $Z_H = \{x \in X : T_x X \subset H\}$ on a ainsi $Q_R \subset Z_H$.Or soit $c \notin H \cup Sec(X)$ et π une projection de centre c. Comme π est un isomorphisme sur X, $\dim \pi(X) = n$. Par ailleurs, $\dim \pi(H) = \frac{3}{2}n$. Soit aussi $Z'_H = \{y \in \pi(X) : T_y \pi(X) \subset \pi(H)\}$. Par le théorème des tangences, $dim\ Z'_H \leq \frac{n}{2}$. Mais π est un isomorphisme de Z_H sur Z'_H, donc $dim\ Z_H \leq \frac{n}{2}$. Comme toutes les composantes de Q_R sont de dimension au moins $\frac{n}{2}$, Q_R est donc de dimension pure $\frac{n}{2}$ et Q_R est une réunion de certaines des composantes de Z_H. Comme l'ensemble des R tels que Q_R contienne une composante de Z_H fixée est fermé ($z \in Q_R \Leftrightarrow (zR) \in \mathcal{S}$, si $\mathcal{S} \subset G(2, m)$ désigne l'ensemble des droites sécantes ou tangentes à X), il existe Q fixé tel que pour R générique de L_P, $Q_R = Q$. Par ailleurs, pour un tel R, $R \in Sec(Q_R) = Sec(Q)$. Ainsi $Sec(Q) = L_P$. Pour voir qu'aussi $\Sigma_P = L_P$, il suffit de constater que $\dim L_P = \dim Q + 1$. Cela découle du fait que pour R générique de $Sec(Q)$ donc de L_P, $Q_R = Q$.

On finit maintenant de démontrer la proposition. Si Q_P n'était pas une quadrique de Σ_P, pour P général, alors pour x et y généraux de X et P général sur (xy), Q_P serait de degré au moins trois et donc (xy) serait une trisécante, contredisant le lemme 4.2.1.

Il ne reste plus qu'à montrer que pour P générique la quadrique Q_P est lisse. Tout d'abord, p_1 est injective et de différentielle injective en restriction à $p_4^{-1}(P)$: en effet si (x, y, d, P) et (x, y', d, P) sont des éléments de S_X avec $y \neq y'$ alors x, y, y' sont des éléments de la quadrique Q_P donc $d \subset Q_P$, contredisant $P \notin X$. Comme $p_4^{-1}(P)$ est lisse, $Q_P = p_1[p_4^{-1}(P)]$ est donc lisse également. •

Corollaire 4.5 *Pour P générique de $Sec(X) - X$, $\Sigma_P \cap X = Q_P$.*

On va maintenant montrer en plusieurs étapes que $Sec(X)$ est une cubique. Cela va découler d'une étude de son groupe de monodromie.

* La première étape est la

Proposition 4.6 *Pour P et R généraux de $Sec(X) - X$, $Q_P \cap Q_R$ est un singleton.*

Démonstration : On commence par établir les outils pour démontrer cette proposition. Si $V_1 \subset V_2$ sont des variétés, on note $T(V_1, V_2)$ l'adhérence de la réunion des $T_v V_2$, pour v les points de V_1 où V_2 est lisse.

Lemme 4.2.2 *Soit P un point lisse de $Sec(X)$. Alors $Sec(X) = S(Q_P, X)$ et $dim\ T(Q_P, X) = \frac{3}{2}n$.*

Démonstration : Par le théorème de Fulton et Hansen [Ful 81], on sait qu'on a l'alternative suivante : soit $S(Q_P, X)$ et $T(Q_P, X)$ ont les dimensions attendues $\frac{3}{2}n + 1$ et $\frac{3}{2}n$, soit $S(Q_P, X) = T(Q_P, X)$. Comme $\dim Sec(X) = \frac{3}{2}n + 1$, il suffit donc d'exhiber $x \in X - T(Q_P, X)$. Il suffit pour cela de choisir un élément en dehors de l'hyperplan $T_P Sec(X)$ car le lemme de Terracini montre que $T(Q_P, X) \subset T_P Sec(X)$. •

Corollaire 4.7 *Soit P générique de $Sec(X) - X$ fixé. Pour $P' \in Sec(X) - X$, on a $Q_P \cap Q_{P'} \neq \emptyset$.*

Lemme 4.2.3 *Soit P un point lisse de $Sec(X)$ fixé. Soit M un $(\frac{n}{2}+2)$-plan contenant Σ_P et non inclus dans $T_P Sec(X)$. Alors il existe $r > 0, (x_1, \cdots, x_r) \in (X - \Sigma_P)^r$ tels que*

- *(i) $M \cap X = Q_P \cup \{x_1, \cdots, x_r\}$*
- *(ii) $M \cap Sec(X) = \Sigma_P \bigcup C(x_i, Q_P)$*

Démonstration : D'après le lemme 4.2.2, $Sec(X) \cap M = S(M \cap X, Q_P)$. Reste donc à montrer que $M \cap X - Q_P$ est de dimension 0. Mais $Sec(X) \cap M$ est une sous-variété de M de dimension $\frac{n}{2} + 1$. Soit $\mathcal{C}(Sec(X) \cap M)$ l'ensemble des composantes irréductibles de $Sec(X) \cap M$, on a une application :

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & (M - L_P) \cap X & \to & \mathcal{C}(S^{k-1}X \cap M) \\ & & x & \mapsto & S(x, Q_P) \end{array}$$

Rappelons que $S(x, B)$ est le cône de sommet x et de base B. Cette application est injective car x est le lieu singulier de $S(x, Q_P)$, ce qui montre que $M \cap X - Q_P$ est fini. On ne peut avoir $r = 0$ car sinon $Sec(X)$ serait de degré 1. •

On peut maintenant montrer la proposition 4.6 : il suffit de démontrer que pour P général fixé et M fixé, alors $Q_P \cap Q_R$ est un singleton pour R sur un et un seul des cônes du lemme précédent. Mais en effet si $R \in C(x_i, Q_P)$, soit $a \in Q_P \cap Q_R$; on a $(aR) \subset Sec(X)$, donc $(aR) = (ax_i)$, et donc a appartient au singleton $(x_i R) \cap \Sigma_P$. •

* La deuxième étape concerne le groupe de monodromie de $Sec(X)$.
Je rappelle ici le résultat standart affirmant que le groupe de monodromie d'une hypersurface irréductible est tout le groupe des permutations.

Affirmation 4.2.4 *Soit $Y \subset \mathbb{C}^m$ une variété affine et $y \in Y$ un point lisse. Soit aussi N un supplémentaire de $T_y Y$ dans $\mathbb{C}^m$ et $P = N \oplus T$ un espace linéaire contenant N, avec $T \subset T_y Y$. Alors il existe un voisinage U de y dans $\mathbb{C}^m$ et une fonction holomorphe f de $T \cap U$ dans N tels que $(t, n) \in P \cap Y \cap U \iff n = f(t)$.*

En particulier,

Affirmation 4.2.5 *Avec les notations précédentes, $Y \cap P$ est lisse en tout point de $U \cap P \cap Y$ et si $(t_0, f(t_0)) \in U \cap P \cap Y$, alors*
$T_{(t_0, f(t_0))}(Y \cap P) = P \cap T_{(t_0, f(t_0))} Y = \{(t, n) : t \in T \text{ et } n = f(t_0) + df_{t_0}(t - t_0)\}$.

Bien que cela ne sera pas utile immédiatement, on en déduit dès à présent le

Corollaire 4.8 *Si $Y \subset \mathbb{P}^m$ est une variété et $y_0 \in Y$ est tel que pour tout $y \in Y$, $y_0 \in T_y Y$, alors Y est un cône de sommet y_0.*

Démonstration : On peut proposer deux preuves. Pour la première, on se ramène au cas affine et on fait un calcul local : supposons $Y \subset \mathbb{C}^m$. Soit alors $y \in Y$ un point lisse. Soit $u \in \mathbb{C}^m - T_y Y$. Alors par l'affirmation 4.2.4, $Y \cap (yy_0u)$ a pour équation locale en y : $t = f(x)$. Supposons que $y_0 = (0, 0)$ et $y = (1, 0)$. Comme par 4.2.5, $y_0 \in T_{x, f(x)}(Y \cap (cc_0u))$, $xf'(x) = f(x)$. Ainsi $f(x) = \lambda x$; $\lambda = 0$ car $y = (1, 0) \in Y$. La droite (yy_0) est donc localement incluse dans Y.

On peut aussi proposer une démonstration dans le cadre de la géométrie algébrique projective : en général, si une variété est incluse dans un hyperplan h, alors sa variété duale est un cône sur h. Mais l'hypothèse implique que Y^* est incluse dans l'hyperplan des formes linéaires passant par y_0. On a donc que Y^{**} est un cône sur y_0. Le corollaire découle alors du théorème 4.4, puisque $Y = Y^{**}$. •

Soit $Y \subset \mathbb{C}^m$ une hypersurface affine d'équation $F = 0$, de degré d avec $d \geq 3$ et Δ une droite paramétrée par $t \mapsto \Delta(t)$ et $y_0 = \Delta(0) \in \Delta \cap Y$. J'appelle degré de tangence de Δ à Y en y_0 l'ordre de la fonction $t \mapsto P[\Delta(t)]$ en 0. Ainsi le degré d'une sécante est supérieur ou égal à 1, d'une tangente à 2, etc. Nous allons montrer le

Lemme 4.2.6 *Il existe une droite Δ rencontrant Y en exactement $d-1$ points.*

Démonstration : Tout d'abord,

Affirmation 4.2.7 *Il existe des tangentes de degré exactement 2 en un point.*

Démonstration : Soit Δ une tangente en x_0. Dans un plan contenant Δ, Y s'écrit $y = f(x)$. Si f est d'ordre plus que 2 il suffit de choisir la tangente en un point x proche de x_0. •

Soit donc Δ une tangente de degré 2 en x_1. Soit $(x_i)_{2 \leq i \leq l}$ tels que $Y \cap \Delta = \{x_i : 1 \leq i \leq l\}$. Si $l = d-1$, Δ convient ; sinon il existe i tel que Δ soit tangente en x_i. Dans chacun des deux cas suivants, on exhibe une droite ayant un point de tangence de degré 2 et au moins $l+1$ points d'intersection avec Y :

- $T_{x_i}Y = T_{x_1}Y$. Soit alors $u \in \mathbb{C}^m - T_{x_i}Y$. Par l'affirmation 4.2.4, si P est engendré par Δ et u, alors $P \cap Y$ est localement en x_1 et en x_i un graphe. Il suffit alors de considérer une tangente en un point proche de x_1.
- $T_{x_i}Y \not\subset T_{x_1}Y$. Soit alors $u \in T_{x_i}Y - T_{x_1}Y$. On considère la droite $(x_1 x_i')$ avec x_i' proche de x_i et dans le plan engendré par Δ et u. •

On peut donc maintenant montrer la

Proposition 4.9 *Le groupe de monodromie d'une hypersurface $Y \subset \mathbb{P}^m$ irréductible de degré d ($d \geq 2$) égale le groupe des permutations de d éléments.*

Démonstration : Soit d_0 une sécante transverse. Soit $x_1, \cdots, x_d \in d_0 \cap Y$. On veut voir que la monodromie peut échanger x_1 et x_2 en préservant les autres points. Soit donc une droite d tangente en y et transverse en y_i ($1 \leq i \leq d-2$). Dans un voisinage affine de y, et dans un plan convenable, Y a pour équation $z = x^2 + o(x^2)$. Par souci de clarté, je ne tiendrai pas compte du terme négligeable. L'intersection de Y avec la droite d_θ d'équation $z = \rho^2 e^{2i\theta}$ est donc l'ensemble

$$\{(\rho e^{i\theta}, \rho^2 e^{2i\theta}) := M^+(\theta), (\rho e^{i(\theta+\pi)}, \rho^2 e^{2i\theta}) := M^-(\theta), T_i(\theta)\},$$

où $T_i(\theta)$ ($1 \leq i \leq d-2$) désigne l'intersection d'un voisinage dans Y de y_i avec d_θ. En particulier, $T_i(\theta + \pi) = T_i(\theta)$.

Soit maintenant, comme Y est irréductible, un chemin dans $Y \times Y$ de (x_1, x_2) à $(M^+(0), M^-(0))$, tel que les droites $(x_1(t)x_2(t))$ évitent les tangentes. Soit ensuite le chemin $(M^+(\theta), M^-(\theta))$, $\theta \in [0, \pi]$ qui inverse $M^+(0)$ et $M^-(0)$ et préserve les autres points. Soit enfin le premier chemin parcouru en sens inverse : on voit que le chemin total a inversé x_1 et x_2 en préservant les autres points. •

* La dernière étape est enfin la démonstration de la

Proposition 4.10 *$Sec(X)$ est une hypersurface cubique.*

Démonstration : Soient P et R des points généraux de $Sec(X) - X$ tels que de plus $P \notin T_R Sec(X)$ et $R \notin T_P Sec(X)$. On va voir qu'ils définissent canoniquement un troisième point $A(P,R)$ sur (PR), contredisant la transitivité de la monodromie si le degré de $Sec(X)$ est strictement supérieur à 3 (figure 4.1).

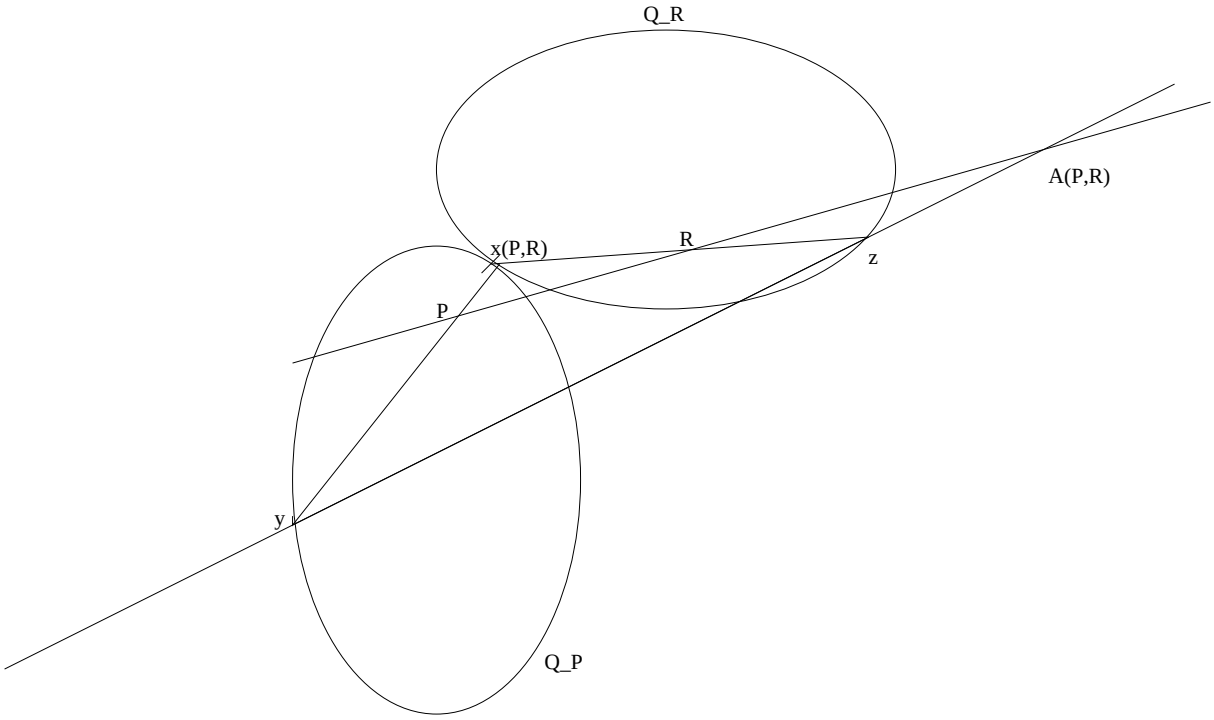


FIG. 4.1 – Description géométrique de A(P,R)

Soit $x = x(P,R) = Q_P \cap Q_R$ (proposition 4.6). On va voir que ni (xP) ni (xR) ne sont tangentes à X en x. Si elles l'étaient toutes les deux, on aurait $(xPR) \subset T_x X \subset Sec(X)$ et par conséquent $P \in T_R Sec(X)$ et $R \in T_P Sec(X)$. Si, par exemple, (xR) est une tangente mais pas (xP), alors $(xR) \subset T_x X$. Le lemme de Terracini montre que $T_P Sec(X) \supset T_x X \ni R$.

Soit donc $y \in (xP) \cap X$ et $z \in (xR) \cap X$ des éléments distincts de x. Pour P générique, Q_P est une quadrique donc le point y est unique et de même pour z. Il suffit de poser $A(P,Q) = (PR) \cap (yz)$. •

En particulier dans le lemme 4.2.3 on doit avoir $r = 1$ car $Sec(X) \cap M$ est au plus de degré trois dans M. On a donc :

Lemme 4.2.8 *Soit P un point lisse de $Sec(X)$ fixé. Soit M un $(\frac{n}{2}+2)$-plan contenant Σ_P et non inclus dans $T_P Sec(X)$. Alors il existe $x \in X - \Sigma_P$ tels que*

- *(i) $M \cap X = Q_P \cup \{x\}$*
- *(ii) $M \cap Sec(X) = \Sigma_P \cup C(x, Q_P)$*

4.2.2 Homogénéité des variétés de Scorza

Dans ce paragraphe, j'introduis une construction qui sera essentielle pour le reste de l'étude des variétés de Scorza. Si $X \subset \mathbb{P}V$ est une variété de Scorza, nous allons voir que l'on peut munir naturellement V d'une structure d'algèbre de Jordan ; je donne ici une construction géométrique de la représentation quadratique de cette future algèbre de Jordan et montre qu'elle fabrique des automorphismes de X. Cette construction implique facilement l'homogénéité des variétés de Scorza.

Pour décrire ces automorphismes, j'ai besoin de l'analogue des propositions précédentes pour des variétés de Scorza, que j'introduis maintenant.

Posons $\delta = \delta_1(X)$. Pour $P \in S^l X - S^{l-1}X$, notons L_P l'adhérence de l'ensemble des points Q de $S^l X$ tels que $T_Q S^l X = T_P S^l X$. La première étape de la démonstration du théorème de classification est le fait qu'une k-variété de Scorza se dévisse en $(k-1)$-variétés de Scorza :

Théorème 4.5 (Zak) *Soit $X^n \subset \mathbb{P}^N$ une k-variété de Scorza. Soit aussi l un entier entre 1 et k et P un point générique de $S^l X$. Alors L_P est linéaire et $L_P \cap X$ est une l-variété de Scorza dans L_P. Enfin,* $\dim L_P = l(1 + \frac{\delta(l+1)}{2})$.

Ce théorème a un sens et est valable pour $l = 1$ si on se souvient de la convention 4.4. Pour $k = 2$, on retrouve une partie de la proposition 4.4.

Remarque : Nous allons expliquer pourquoi les variétés de Scorza vivent dans une algèbre de Jordan. Dans ces algèbres, les nombres k et δ s'interprètent facilement, ainsi que le théorème précédent. En effet, $\mathbb{P}^N$ est le projectivisé de l'algèbre des matrices $(k+1)\times(k+1)$ hermitiennes à coefficients dans une algèbre de composition. La dimension de cette algèbre de composition est δ (donc δ égale 1,2,4 ou 8). Si P est la matrice usuelle de rang $l+1$ ($P = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$), L_P est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec un bloc quelconque de taille $(l+1)\times(l+1)$, et Q_P l'ensemble des matrices de rang 1 dans L_P. On constate donc que $L_P \cap X$ est bien une l-variété de Scorza.

Enfin, par la suite, j'aurai besoin des 2 lemmes suivants valables pour des k-variétés de Scorza :

Lemme 4.2.9 ([Zak 93],p.127) *$S^{k-1}X$ n'est pas un cône.*

Lemme 4.2.10 ([Zak 93],p.136) *$S^{k-1}X$ est une hypersurface de degré $k+1$.*

Soit donc F une équation de $S^{k-1}X$ et fixons I tel que $F(I) = 1$. Dans le cas où X est la variété des éléments de rang un dans une algèbre de Jordan, on sait que F est le déterminant. Rappelons qu'en introduisant le théorème 3.1, j'avais défini

$$\begin{array}{rccc} \tau_A & : & V & \to & V^* \\ & & B & \mapsto & (C \mapsto D_A^2 \log F(B,C)) \end{array}$$

et la fonction "inverse" $V \to V, A \mapsto G(A) = \tau_I^{-1}(D_A \log F)$.

Théorème 4.6 *Si τ sont définis comme précédemment, alors pour $A \notin S^{k-1}X$, τ_A est un isomorphisme linéaire entre $\mathbb{P}V$ et $\mathbb{P}V^*$ qui envoie X sur $Y := (S^{k-1}X)^*$.*

Rappelons que je note, pour $M \subset \mathbb{P}V$ une variété projective, $M^* \subset \mathbb{P}V^*$ sa variété duale introduite au paragraphe 4.1.4.

Remarque : Une conséquence de ce théorème est que $Y \simeq X$ est une k-variété de Scorza dans $\mathbb{P}V^*$. On peut d'ores et déjà constater que X et Y ont même dimension : en effet, l'adhérence de la préimage de $T_P S^{k-1}X$, pour P générique de $S^{k-1}X$, par l'application $Q \mapsto T_Q S^{k-1}X$ est L_P, de dimension $(k-1)(1+\frac{\delta k}{2})$ par le théorème 4.5. On a donc que l'image de cette application, Y, est de dimension $k(1+\frac{\delta(k+1)}{2}) - 1 - (k-1)(1+\frac{\delta k}{2}) = k\delta = n$.

Démonstration : Cette démonstration n'est qu'une généralisation de la preuve que j'ai donnée dans [Cha 02] dans le cas des variétés de Severi. La démonstration est en trois étapes : d'abord je donne une description géométrique de $\tau_A(B)$ pour $B \in X$, ensuite je démontre ce théorème pour certains A ; enfin, je prouve que X et Y sont homogènes, ce qui implique que le théorème est vrai pour tout A. Pour la deuxième étape, j'utilise la classification des $(k-1)$-variétés de Scorza. Cette classification se démontre donc par récurrence, le cas $k = 1$ étant déjà traité par notre convention que les 1-variétés de Scorza sont les quadriques lisses.

Soient tout d'abord k éléments $A_1, \ldots, A_k$ de $\widehat{X}$. Alors $A_1 + \cdots + A_k$ est un élément de $\widehat{S^{k-1}X}$, donc $F(A_1 + \cdots + A_k) = 0$. En développant ce polynôme, on en déduit que $F(A_1, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k) = 0$ (cf lemme 4.2.10). Mais cette formule est linéaire en $A_2, \ldots, A_k$ et elle reste donc valable si les $A_i, i \geq 2$ sont des éléments quelconques de V puisque X est non-dégénérée. Cette remarque va nous permettre de donner une interprétation géométrique de $\tau_A(x)$, pour $x \in X$ et $A \notin S^{k-1}X$ tels que $F(x, A, \ldots, A) \neq 0$. On a $F(A+\lambda x) = (k+1).\lambda.F(x, A, \ldots, A) + F(A)$. Ainsi la droite (xA) recoupe $S^{k-1}X$ en exactement un point $x' = A - \frac{F(A)}{(k+1)F(x,A,\ldots,A)}x$. L'équation du plan tangent en x' à $S^{k-1}X$ est donc :

$$F(A, \ldots, A, *) - \frac{kF(A)}{(k+1)F(x, A, \ldots, A)} F(x, A, \ldots, A, *) = 0$$

soit $\tau_A(x)$ à une constante près (figure 4.2).

On a donc montré que $\tau_A(X) \subset Y$. Rappelons que par définition τ_A est linéaire ; puisque Y est non-dégénérée (sinon $S^{k-1}X$ serait un cône (corollaire 4.8), contredisant le lemme 4.2.9), τ_A sera un isomorphisme si $\tau_A(X) = Y$. Mais ces deux variétés X et Y ont même dimension ; comme de plus Y est irréductible, pour voir que $\tau_A : X \dashrightarrow Y$ est dominante, il suffit donc de constater qu'elle est génériquement finie sur son image. Supposons provisoirement que A est sur une droite (xP) avec $x \in X$ et $P \in S^{k-1}X$ tel que L_P soit linéaire de dimension $(k-1)(1+\frac{\delta k}{2})$ et $L_P \cap X$ soit une $(k-1)$-variété de Scorza dans L_P (il suffit pour cela que P soit générique par le théorème 4.5). Alors par le lemme suivant, la fibre de $\tau_{A|X}$ en $\tau_A(x)$ est finie :

Lemme 4.2.11 *Soit $A \in V$ et P comme précédemment. Alors $X \cap (L_P + A) - L_P$ est fini.*

Démonstration : Elle est similaire à celle du lemme 4.2.3. Soit $M = L_P + A$ et $Q_P = L_P \cap X$. Désignant par $B = S^{k-2}Q_P$ l'hypersurface de L_P égale à $S^{k-2}X \cap L_P$ (théorème 4.5) et par $\mathcal{C}(S^{k-1}X \cap M)$ l'ensemble des composantes irréductibles de $S^{k-1}X \cap M$, on

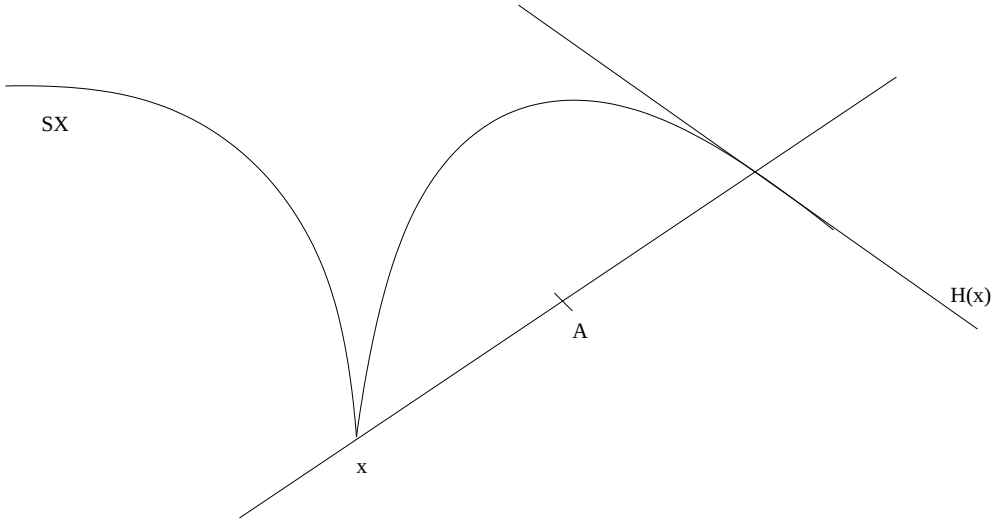


FIG. 4.2 – Description géométrique de $\tau_A(x)$ (noté $H(x)$)

a une application :

$$\begin{array}{rcccc} \phi & : & (M - L_P) \cap X & \to & \mathcal{C}(S^{k-1}X \cap M) \\ & & x & \mapsto & S(x, B) \end{array}$$

Rappelons que $S(x, B)$ est le cône de sommet x et de base B. Par hypothèse de récurrence, Q_P s'identifie alors à la variété des matrices de rang 1 et B à celle des matrices de rang au plus $k-1$. Notons alors $Sing^i B$ l'ensemble des matrices de rang au plus $k-1-i$, de sorte que le lieu singulier de $Sing^i B$ est $Sing^{i+1} B$ et que $Sing^0 B = B$. L'application ϕ est injective car le lieu singulier de $S(x, B)$ est $S(x, Sing^1 B)$, de sorte que si $S(x, B) = S(x', B)$, alors $S(x, Sing^i B) = S(x', Sing^i B)$ pour tout i ; pour $i = k - 1$ on obtient $x = x'$. •

Le théorème est donc démontrée pour de tels A.

Proposition 4.11 *X est homogène.*

Démonstration : Soient $A, B \in V - \widehat{S^{k-1}X}$ vérifiant les conditions qui assurent que le théorème est vrai. Puisque τ_A et τ_B sont des isomorphismes entre X et Y, $\tau_A^{-1} \circ \tau_B$ est un automorphisme de X. Il suffit donc de constater que si x_1 et x_2 sont des éléments de X, alors il existe de tels $A, B \in V - \widehat{S^{k-1}X}$ avec $\tau_A(x_1) = \tau_B(x_2)$. Or d'après l'interprétation géométrique précédente, si P est générique et tel que x_1 et x_2 n'appartiennent pas à $T_P S^{k-1}X$, $A \in (L_P + x_1) - L_P - S^{k-1}X$ et $B \in (L_P + x_2) - L_P - S^{k-1}X$ conviennent (on ne peut pas avoir $L_P + x_1 \subset S^{k-1}X$ car sinon $x_1 \in T_P S^{k-1}X$). •

On démontre maintenant le théorème pour tout $A \notin \widehat{S}^{k-1}X$. Soit $\widetilde{Aut}(X) \subset SL(V)$ le sous-groupe qui préserve X et $g \in \widetilde{Aut}(X)$. Alors g induit ${}^t g \in SL(V^*)$. Par ailleurs, puisque g est linéaire et préserve X, il préserve $S^{k-1}X$ et donc ${}^t g$ préserve Y. Ainsi ${}^t g \in \widetilde{Aut}(Y)$. Mais X et Y sont isomorphes, donc $\widetilde{Aut}(X)$ et $\widetilde{Aut}(Y)$ aussi ; comme la transposition est un isomorphisme de $SL(V)$ dans $SL(V^*)$, on a ${}^t\widetilde{Aut}(X) = \widetilde{Aut}(Y)$. Mais puisque Y est une variété de Scorza, ce groupe agit transitivement sur Y et on a

donc que pour *tout* P point lisse de $S^{k-1}X$, $X \cap L_P$ est une $(k-1)$-variété de Scorza dans L_P. Si $A \notin S^{k-1}X$ est quelconque, alors $F(A,\dots,A,.) \neq 0$ donc il existe $x \in X$: $F(A,\dots,A,x) \neq 0$. Ainsi la droite (xA) recoupe $S^{k-1}X$ en un point lisse de $S^{k-1}X$, car sinon elle serait incluse dans $S^{k-1}X$ par le lemme 4.2.10. On en déduit alors comme précédemment que τ_A est un isomorphisme. •

4.2.3 Classification des variétés de Scorza par leurs groupes d'automorphismes

Une fois l'homogénéité des variétés de Scorza établie, il est relativement aisé de les classifier. Je vais donner au moins trois preuves de cette classification. Dans ce paragraphe, je les classifie en étudiant leurs groupes d'automorphismes.

Le groupe $\widetilde{Aut}(X)$ agit sur X. Son radical unipotent admet un point fixe dans X par le théorème du point fixe de Borel. Mais comme ce radical est distingué dans $\widetilde{Aut}(X)$ qui agit transitivement sur X, tout point de X est fixé par ce radical. Comme X est non-dégénérée, ce radical est trivial et donc $\widetilde{Aut}(X)$ est semi-simple.

Les variétés de Scorza sont donc l'orbite fermée dans une représentation irréductible d'un groupe semi-simple. J'appelle "variété homogène plongée de façon équivariante" une telle variété.

Sachant cela, le théorème de classification des variétés de Scorza 4.3 est facile. En effet, on peut même aisément classifier les variétés homogènes plongées de façon équivariante dont la variété sécante n'est pas de dimension maximale :

Définition 4.5 *Une variété X est défective si $\delta(X) := 2\dim X + 1 - \dim Sec(X) > 0$.*

Rappelons que l'on appelle défaut de X l'entier $\delta(X)$ et que pour $p \in Sec(X)$, le lieu d'entrée de p est l'adhérence des points de X tels que la droite (xp) recoupe X en un autre point que x. Le défaut de X est la dimension du lieu d'entrée d'un point générique de $Sec(X)$. H. Kaji a décrit toutes les variétés homogènes plongées de façon équivariante défectives [Kaj 99] ; je donne ici une preuve similaire, quoiqu'à mon avis plus simple, de ce résultat :

Proposition 4.12 *Les variétés qui suivent sont toutes les variétés homogènes plongées de façon équivariante défectives :*

- *Les variétés "adjointes", c'est-à-dire les orbites fermées des actions adjointes des groupes simples sur le projectivisé de leurs algèbre de Lie. Elles sont de défaut 1.*
- $X = \nu_2(\mathbb{P}^n), \delta(X) = 1$.
- $X = G_Q(2,n), n \geq 5, \delta(X) = 1$ *: la grassmannienne des 2-plans isotropes pour une forme quadratique Q.*
- $X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, \delta(X) = 2$, *où m et n sont des entiers positifs quelconques.*
- $G_\omega(2,2n), n \geq 2, \delta(X) = 3$ *: la grassmannienne des 2-plans isotropes pour une forme symplectique non-dégénérée ω.*
- $X = G(2,n), n \geq 4, \delta(X) = 4$ *: la grassmannienne des 2-plans dans $\mathbb{C}^n$.*
- *L'orbite fermée de l'action de F_4 et E_6 dans leurs représentations minimales. Ces variétés sont de défaut respectivement 7 et 8.*
- $X = Q \subset \mathbb{P}^{n+1}, n \geq 1, \delta(X) = n$ *: une quadrique.*

– $X = \mathbb{P}^n, \delta(X) = n+1$.

Démonstration : Montrons d'abord que les défauts sont ceux indiqués. Le cas des variétés adjointes sera traité au cours de la preuve. Les cas $\nu_2(\mathbb{P}^n)$, $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ et $G(2,n)$ ont été étudiés au chapitre 4.1. Le cas de $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ est similaire. La grassmannienne symplectique $G_\omega(2,4)$ est une quadrique de dimension 3, donc de défaut 3. Si $X = G_\omega(2,2n), n$ quelconque, soit $\alpha = v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$ un point générique de $Sec(X)$. Alors v_1, v_2, v_3, v_4 définissent un espace vectoriel de dimension 4 et un point du lieu d'entrée de p est un 2-plan inclus dans cet espace. Par ailleurs la restriction de ω à cet espace est non-dégénérée, de sorte que le lieu d'entrée de p est comme précédemment une quadrique de dimension 3 ; $\delta(X) = 3$.

Pour $X = G_Q(2,n)$, $l_1, l_2 \in X, p \in (l_1 l_2)$ génériques, on a $l_1 \cap l_2 = \{0\}$. Ainsi, si L désigne l'espace vectoriel de dimension 4 engendré par l_1 et l_2, par la proposition 2.1, l_1 et l_2 appartiennent à une même composante de $G_Q(2,L)$, et donc ils sont sur une conique dans un $\mathbb{P}^2$ qui contient p (proposition 2.6). Le lieu d'entrée de p est donc cette conique et $\delta(X) = 1$. Le cas de la représentaion minimale de E_6 a déjà été traité, on sait que le défaut de l'orbite fermée est 8. Comme la représentation minimale de F_4 est une section hyperplane générique de celle de E_6, le défaut de son orbite fermée est 7. Le cas des quadriques et des espaces projectifs est facile.

Soit $\mathcal{G} \to GL(V)$ une représentation irréductible et $X \subset \mathbb{P}V$ son orbite fermée. Si $\mathcal{G}$ n'est pas simple, alors il existe $\mathcal{G}_1 \to SL(V_1)$, $\mathcal{G}_2 \to SL(V_2)$ des représentations non triviales de deux groupes telles que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ et $V = V_1 \otimes V_2$. Si X_1 et X_2 sont les orbites fermées de $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$, alors $X = X_1 \times X_2 \subset \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2)$. Le lemme qui suit traite ce cas (il a aussi été considéré par F.L. Zak [Zak 93, th.1.6,p.54]).

Lemme 4.2.12 *Soit $X \subset \mathbb{P}V$ et $Y \subset \mathbb{P}W$ deux variétés non dégénérées. Alors $X \times Y \subset \mathbb{P}(V \otimes W)$ est défective si et seulement si $X = \mathbb{P}V$ et $Y = \mathbb{P}W$.*

Démonstration : Dans $X = \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W$, nous avons vu (p. 99 que le lieu d'entrée du point $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2$ est l'ensemble des points $v \otimes w$ avec v et w des éléments des plans vectoriels $V_0 := \langle v_1, v_2 \rangle$ et $W_0 := \langle w_1 w_2 \rangle$.

Réciproquement, supposons dans un premier temps que $\dim V = \dim W = 2$. Alors, si $X = \cup_{i \in I} \mathbb{P}(x_i \otimes W)$, alors, dans la quadrique $\mathbb{P}V \times \mathbb{P}W$, X est la réunion de $|I|$ espaces linéaires inclus dans cette quadrique. Si $|I| > 1$, deux de ces espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{P}(V \otimes W)$ donc $Sec(X) = \mathbb{P}(V \otimes W)$ et $\delta(X) = 0$.

Retournant au cas général, si $X \subset \mathbb{P}V$ et $Y \subset \mathbb{P}W$ et si $X \neq \mathbb{P}V$ et $Y \neq W$, alors on peut trouver deux droites $\mathbb{P}V_0$ et $\mathbb{P}W_0$ de $\mathbb{P}V$ et $\mathbb{P}W$ rencontrant X et Y en un nombre de points fini plus grand que 1. Si $x_1, x_2 \in X \cap V_0$ et $y_1, y_2 \in Y \cap W_0$, alors le lieu d'entrée de $x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2$ pour $X \times Y$ est bien sûr inclus dans celui de $\mathbb{P}V \times \mathbb{P}W$, soit $\mathbb{P}V_0 \times \mathbb{P}W_0$. Par ailleurs il est dans $X \times Y$; donc il est fini. De même si $Y = \mathbb{P}W$ et $X \neq \mathbb{P}V$, on se ramène à l'étude précédente de $\cup_{i \in I} \mathbb{P}(x_i \otimes W)$ et on voit que $\delta(X \times Y) = 0$. •

Dans le cas $\mathcal{G}$ simple on prouve cette proposition en étudiant une propriété du plus haut poids de sa représentation.

Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ un sous-groupe de Borel et $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}$ un tore maximal ; soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ et $\mathfrak{h}$ sous-algèbre de Cartan associée à $\mathcal{T}$. Soit alors Δ le système de racines,

Δ^+ l'ensemble des racines positives, qui par définition correspondent à $\mathcal{B}$. Soit λ le plus haut poids de V, $\mu = w_0(\lambda)$ le plus bas poids, l_λ et l_μ les droites de vecteurs propres associées. Soient $e_\lambda \in l_\lambda$ et $e_\mu \in l_\mu$ différents de 0 et $s = e_\lambda + e_\mu$.

Lemme 4.2.13 *$Sec(X)$ a un nombre fini de $\mathcal{G}$-orbites, et s est dans l'orbite ouverte.*

Démonstration : Par le théorème de décomposition de Bruhat, $X \subset \mathbb{P}^m$ a un nombre fini de $\mathcal{B}$-orbites et donc $X \times X$ a un nombre fini de $\mathcal{G}$-orbites, $Sec(X)$ aussi. Soit $\mathcal{B}_\lambda = \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_\mu$ les stabilisateurs de l_λ et l_μ. Pour toute racine α, soit $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ l'espace propre associé. Soit $\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$, on sait que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-$ et que les algèbres de Lie associées à $\mathcal{B}_\lambda$ et $\mathcal{B}_\mu$ sont $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ et $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$, de sorte que $\mathcal{B}_\mu\mathcal{B}_\lambda$ est dense dans $\mathcal{G}$. Ainsi $\mathcal{B}_\mu.l_\lambda = \mathcal{B}_\mu\mathcal{B}_\lambda.l_\lambda$ contient un ouvert dense U de $X = \mathcal{G}.l_\lambda$. Donc la $\mathcal{G}$-orbite de $l_\lambda \times l_\mu$ dans $X \times X$ contient $U \times l_\mu$, et donc $\mathcal{G}.(U \times l_\mu)$, qui est dense dans $X \times X$. •

Par le lemme de Terracini [Zak 93, prop.1.10,p.40], on montre donc que

$$T_s Sec(X) = \langle T_{e_\lambda} X, T_{e_\mu} X \rangle.$$

Puisque $X = \mathcal{G}.l_\lambda$, si l'on note $V_\alpha \subset V$ sous-espace propre associé au poids α,

$$T_{e_\lambda} X = Ad(\mathfrak{g})l_\lambda = l_\lambda \oplus (\oplus_{\alpha\in\Delta^+} Ad(\mathfrak{g}_{-\alpha})l_\lambda) \subset l_\lambda \oplus (\oplus_{\alpha\in\Delta^+} V_{\lambda-\alpha})$$

De même,

$$T_{e_\mu} X \subset l_\mu \oplus (\oplus_{\alpha\in\Delta^+} V_{\mu+\alpha})$$

Mais comme $\delta(X) > 0$, il existe $\alpha, \beta \in \Delta^+$ tels que $\lambda - \alpha = \mu + \beta$, soit $\lambda - w_0(\lambda) = \alpha + \beta$. Remarquons que si λ est la plus grande racine, cette équation n'a qu'une solution : $\alpha = \lambda$ et $\beta = -w_0(\lambda) = \lambda$. La variété est alors une variété adjointe et son défaut vaut 1. Pour λ quelconque, l'existence de deux racines positives de somme $\lambda - w_0(\lambda)$ est une condition très restrictive qui nous permet de démontrer la proposition.

Je donne deux exemples, un classique et l'autre exceptionnel, de résolution de l'équation $\lambda - w_0(\lambda) = \alpha + \beta$. J'utilise les notations et résultats de [Bou 68].

- **système de racines de type A_n**
  Ici les racines sont dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et les racines positives sont $\epsilon_i - \epsilon_j, 1 \leq i < j \leq n+1$. Les poids fondamentaux sont

$$\omega_i = (\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_i) - \frac{i}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_i$$

  et $w_0(\epsilon_i) = -\epsilon_{n+2-i}$. Ainsi $\omega_i - w_0(\omega_i) = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_i - \epsilon_{n+2-i} - \cdots - \epsilon_{n+1}$ si $i < \frac{n+1}{2}$ et $\omega_{n+1-i} - w_0(\omega_{n+1-i}) = \omega_i - w_0(\omega_i)$. Par ailleurs, si, α et β sont des racines positives, et si $\alpha + \beta = \sum s_i\epsilon_i$, alors $\sum |s_i| \leq 4$. Puisque λ est une somme de poids fondamentaux, on peut en déduire que seulement quatre cas peuvent se produire :
  – $\lambda = \omega_1$ ou $\lambda = \omega_n$. Alors $X = \mathbb{P}^n$.

– $\lambda = 2\omega_1$ ou $\lambda = 2\omega_n$. Alors $X = \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}S^2\mathbb{C}^{n+1}$.
– $\lambda = \omega_2$ ou $\lambda = \omega_{n-1}$. Alors $X = G(2, n+1) \subset \mathbb{P}\Lambda^2\mathbb{C}^{n+1}$.
– $\lambda = \omega_1 + \omega_n$: représentation adjointe.

– **système de racines de type** E_6
Dans ce cas, les racines vivent dans $\mathbb{C}^8$ et dans la base canonique (ϵ_i), les racines positives sont $\pm\epsilon_i + \epsilon_j$ $(1 \leq i < j \leq 5)$ et les $\frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \sum_{i=1}^5 (-1)^{\nu_i}\epsilon_i)$ avec $\sum_{i=1}^5 \nu_i$ pair.
Considérons l'application qui envoie i sur la suite $(\lambda_j^i)_j$ telle que si (ω_i) sont les poids fondamentaux, alors $\omega_i + w_0(\omega_i) = \sum_j \lambda_j^i \epsilon_j$. Cette application est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} 1 & \mapsto & (0,0,0,0,1,-1,-1,1) \\ 2 & \mapsto & (1,1,1,1,1,-1,-1,1) \\ 3 & \mapsto & \frac{1}{2}(-1,1,1,3,3,-3,-3,3) \\ 4 & \mapsto & (0,0,2,2,2,-2,-2,2) \\ 5 & \mapsto & \frac{1}{2}(-1,1,1,3,3,-3,-3,3) \\ 6 & \mapsto & (0,0,0,0,1,-1,-1,1) \end{array}$$

Etant donné la formule pour les racines positives, $(\alpha+\beta)_8$ ne peut valoir que $0, \frac{1}{2}$ ou 1 et puisque $\forall i, (\omega_i + w_0(\omega_i))_8 > 0$, on en déduit que si $\lambda = \sum \lambda_i \omega_i$, un seul λ_i peut être différent de 0 et vaut alors 1. On a donc la liste :
– $\lambda = \omega_1$ ou $\lambda = \omega_6$: variété $\mathcal{E}_6$.
– $\lambda = \omega_2$: variété adjointe. •

Il s'agit alors, pour démontrer le théorème de classification des variétés de Scorza, de sélectionner celles-ci parmi les variétés de la proposition 4.12. Ceci est aisé dans tous les cas, sauf pour les variétés adjointes. Concernant celles-ci, on peut remarquer que, comme elles ont défaut 1, si elles étaient des variétés de Scorza, elles vérifieraient $\delta_k(X) = k$. Soit n la dimension de X ; comme $\mathbb{P}\mathfrak{g} = S^n X$, on aurait $\dim \mathfrak{g} = \frac{n(n+1)}{2}$. On a $\dim \mathfrak{sl}_n = n^2 - 1$ et $\dim SL_n^{ad} = 2n - 3$: ainsi SL_n^{ad} n'est pas une variété de Scorza. De même, $\dim \mathfrak{so}_n = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\dim SO_{2n+1}^{ad} = 2n - 7$ (en effet, c'est la grassmannienne des 2-plans vectoriels isotropes). Ainsi, ce ne sont pas des variétés de Scorza. Il est clair que $Sp_{2n}^{ad} \simeq \nu_2(\mathbb{P}^{n-1})$; c'est donc une variété de Scorza. Il ne reste donc plus qu'à considérer les algèbres de Lie exceptionnelles. Seule E_6 a comme dimension un nombre triangulaire : 78. Mais comme $\dim E_6^{ad} = 21$, ce n'est pas une variété de Scorza.

4.2.4 Identification de l'algèbre de Jordan

On peut aussi apporter une autre preuve de la classification des variétés de Scorza en utilisant les algèbres de Jordan : soit $A \in V - \widehat{S^{k-1}X}$. Puisque τ_I et τ_A sont des isomorphismes entre $S^{k-1}X$ et $S^{k-1}Y$, $H_A = \tau_I^{-1} \circ \tau_A$ est un automorphisme de $S^{k-1}X$, et on en déduit l'existence d'une fonction rationnelle h telle que $F(H_A B) = h(A)F(B)$. On peut expliciter h : en effet, elle est définie en dehors de $\{F = 0\}$, et, quand elle est définie, ne s'annule pas. En comptant les degrés et comme $h(I) = 1$, on en déduit

que $h(A) = F(A)^{-2}$. Le théorème 3.1 implique que V peut être munie d'une structure d'algèbre de Jordan simple où I est l'identité et F le déterminant. On a donc redémontré le théorème 4.3.

Je vais maintenant donner une construction géométrique du produit de Jordan ainsi défini. Notons, pour $A, B \in \widehat{X}$, $f(A,B)$ le nombre $[(k+1)^2 F(I,\dots,I,A)F(I,\dots,I,B) - \frac{k(k+1)}{2}F(I,\dots,I,A,B)]$. La proposition 4.6 permet aussi de donner une interprétation géométrique du produit $A * B$ de deux éléments de X :

Proposition 4.13 *Soient A et B des éléments de $\widehat{X}$. Alors $A * B$ est le projeté orthogonal de $f(A,B)I$ sur $T_A X \cap T_B X$.*

Remarque : Pour A et B génériques, et P générique de la droite (AB), on a, par le lemme de Terracini, $T_A X + T_B X = T_P S^1 X$, de sorte que l'espace vectoriel $T_A X \cap T_B X$ est de dimension δ.

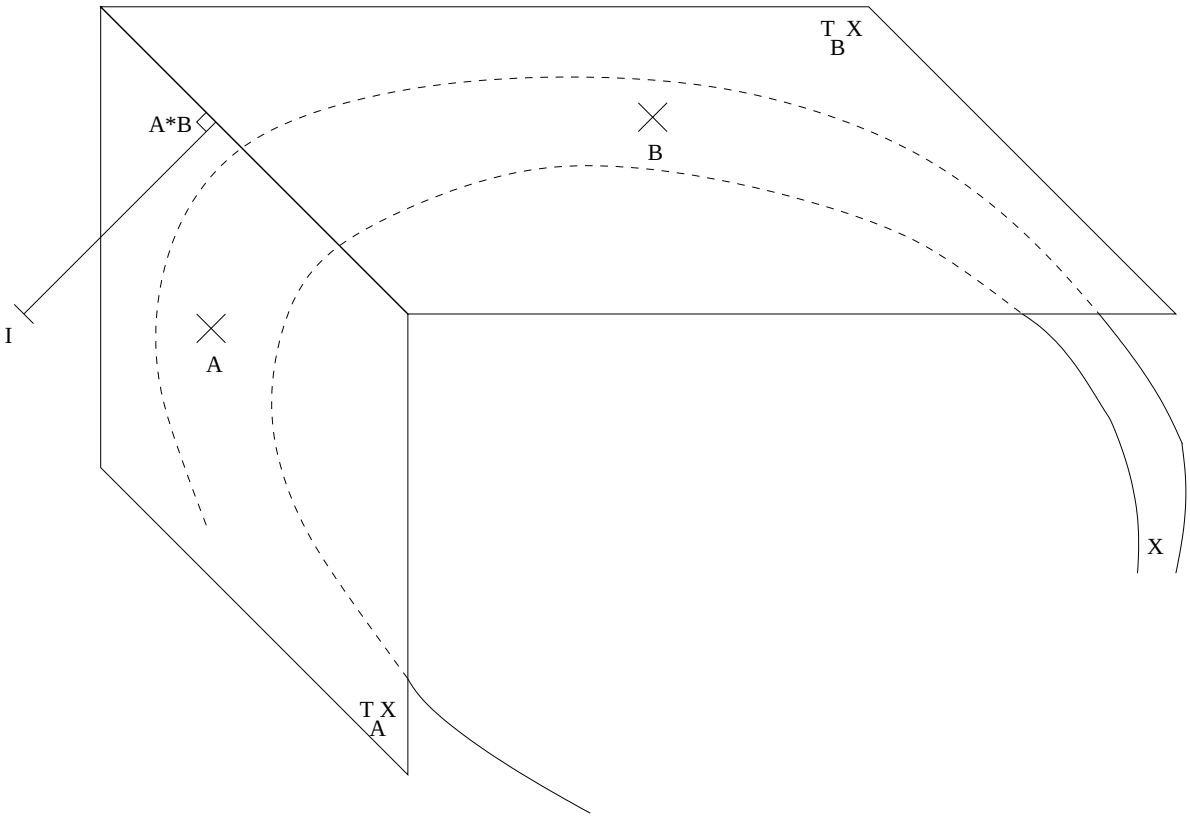


FIG. 4.3 – Description géométrique du produit $A * B$

Démonstration : Ce produit $A * B$ est par définition proportionnel à la dérivée en I dans la direction A de l'élément $\tau_I^{-1} \circ \tau_A(B)$. Or lorsque A vaut I, cet élément est B, et c'est de toute façon un élément de X, de sorte que $A * B$ est dans l'espace tangent $T_B X$. Par symétrie, il appartient aussi à $T_A X$.

Pour $U \in T_A X \cap T_B X$, calculons le produit scalaire $\langle U, A * B \rangle$. Nous avons vu que les éléments A de X vérifient $F(A, A, ., \dots, .) = 0$; comme $U \in T_A X \cap T_B X$, on a donc

$F(A,U,.,\dots,.) = F(B,U,.,\dots,.) = 0$.
Ainsi, $\langle A,U\rangle = (k+1)F(I,\dots,I,A)F(I,\dots,I,U)$ et
$\langle B,U\rangle = (k+1)F(I,\dots,I,B)F(I,\dots,I,U)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\langle U, A*B\rangle &= \langle U, \tfrac{k(k-1)}{2}F(I,\dots,I,A,B,.)\\ &\quad +\tfrac{k+1}{2}[F(I,\dots,I,A)B + F(I,\dots,I,B)A] - \tfrac{k(k+1)}{2}F(I,\dots,I,A,B)I\rangle\\ &= (k+1)^2F(I,\dots,I,A)F(I,\dots,I,B)F(I,\dots,I,U)\\ &\quad -\langle U, \tfrac{k(k+1)}{2}F(I,\dots,I,A,B)I\rangle\\ &= \langle U, [(k+1)^2F(I,\dots,I,A)F(I,\dots,I,B) - \tfrac{k(k+1)}{2}F(I,\dots,I,A,B)]I\rangle \bullet\end{aligned}$$

Proposition 4.14 *Soient $A \in X, B \in \mathbb{P}V$. Alors $A*B = 0$ si et seulement si $B \in \Sigma_{A'}$.*

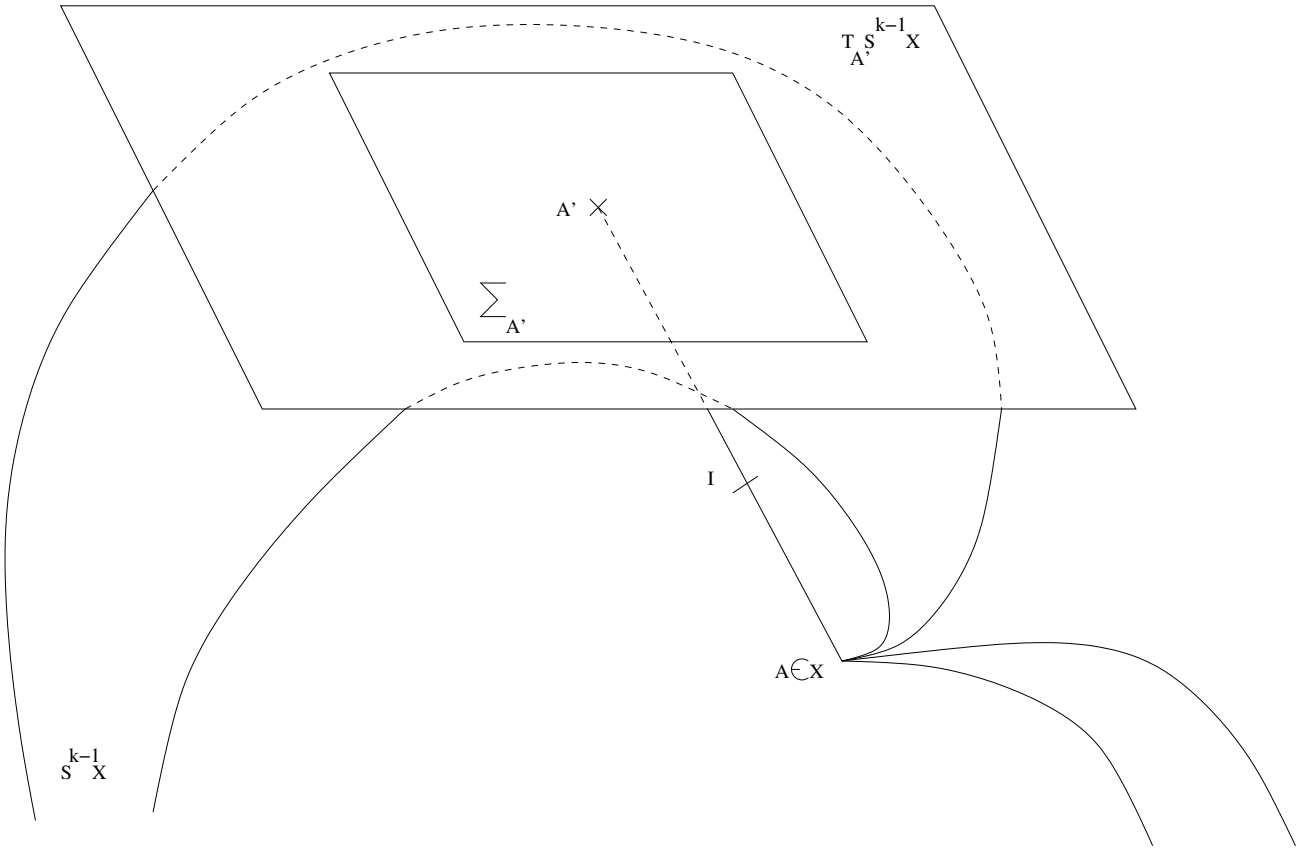


FIG. 4.4 – Description géométrique de $\Sigma_{A'} = \{B : A*B = 0\}$

Démonstration : Par la proposition 4.6, pour $A \in X$ et $B \notin S^{k-1}X$, pour construire $\tau_B(A)$, il faut construire le point A'' intersection de la droite (AB) avec $S^{k-1}X$, puis dire que $\tau_B(A)$ est l'hyperplan $T_{A''}S^{k-1}X$. De même, $\tau_I(A)$ est l'hyperplan $T_{A'}S^{k-1}X$, où A' est le point d'intersection de la droite (AI) avec $S^{k-1}X$.

Ainsi, on aura $\tau_B(A) \parallel A$ si et seulement si ces deux hyperplans sont les mêmes, ce qui revient à dire que $\Sigma_{A''} = \Sigma_{A'}$ ou encore que $A'' \in \Sigma_{A'}$, ou donc que $B \in \langle \Sigma_{A'}, I\rangle$. On a donc établi

$$\tau_B(A) \parallel A \iff B \in \langle \Sigma_{A'}, I\rangle$$

En prenant les espaces tangents de ces variétés en I, on en déduit que

$$A * B \parallel A \Longleftrightarrow B \in \langle \Sigma_{A'}, I \rangle$$

Supposons maintenant que $\langle A, I \rangle \neq 0$. Alors on a $\langle \Sigma_{A'}, I \rangle \cap A^{\perp} = \Sigma_{A'}$. En effet, ces deux ensembles sont des hyperplans de $\langle \Sigma_{A'}, I \rangle$ et on a toujours $\Sigma_{A'} \subset A^{\perp}$, puisque $A^{\perp} = T_{A'} S^{k-1} X \supset \Sigma_{A'}$. Par ailleurs, comme il est clair que si $A * B = 0$, alors $\langle A, B \rangle = \langle A * B, I \rangle = 0$ (lemme 3.1.3), on a donc pour A générique que $\{B : A * B = 0\} = \Sigma_{A'}$. Pour A tel que $\langle A, I \rangle = 0$, $\{B : A * B = 0\}$ est encore un hyperplan de $\{B : A * B \parallel A\} = \langle \Sigma_{A'}, I \rangle$; par continuité, c'est donc encore $\Sigma_{A'}$. •

Les propositions 4.13 et 4.14 définissent l'algèbre de Jordan, en vertu du lemme 1.1.1.

4.2.5 Identification de V avec un espace préhomogène symétrique

Dans les algèbres de matrices que nous avons rencontrées dans la partie précédente, l'ouvert des matrices inversibles est homogène sous l'action du groupe préservant le déterminant à une constante près. Un tel espace vectoriel V muni d'une action d'un groupe $\mathcal{G}$ telle qu'il existe une orbite dense est dit préhomogène. Si par ailleurs il existe une involution sur $\mathcal{G}$ telle que le stabilisateur d'un point de l'orbite ouverte soit inclus dans l'ensemble des points fixes de cette involution et contienne la composante connexe de l'identité de cet ensemble, alors cet espace est dit symétrique.

Le but de ce paragraphe est de montrer que si $X \subset \mathbb{P}V$ est une k-variété de Scorza, alors V est un espace préhomogène symétrique (sans utiliser le théorème de classification), ce qui par un résultat de W. Bertram sur les espaces préhomogènes symétriques permet de donner une preuve alternative de la classification des variétés de Scorza. Enfin, en ce qui concerne la quatrième variété de Severi, qui correspond à l'algèbre de Jordan exceptionnelle $H_3(\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})$, on retrouve facilement que la variété quasi-projective des matrices inversibles s'identifie à E_6/F_4, où F_4 est le sous-groupe du groupe adjoint E_6 préservant une forme quadratique non-dégénérée.

Soit donc $X \subset \mathbb{P}V$ une variété de Scorza, et comme dans le paragraphe précédent F une équation de $S^{k-1}X$, G défini par $G(M) = \frac{F(M,\ldots,M,.)}{F(M)}$ et I tel que $F(I) = 1$. Identifions V et V^* par $D_I G$; soit $*$ défini par $A * B = \frac{\partial}{2\partial A}_{|I}[D_A G(B)]$. Soit enfin $\mathcal{G}$ le groupe des éléments de $GL(V)$ qui préservent $\widehat{S^{k-1}X}$. Ce groupe est aussi celui qui préserve $\widehat{X}$, puisque $(S^{k-1}X)^*$ s'identifie par $D_I G$ à X.

Lemme 4.2.14 *$V - \widehat{S^{k-1}X}$ est homogène sous l'action de $\mathcal{G}$.*

Démonstration : Pour démontrer ce résultat, on considère les éléments de $\mathcal{G}$ égaux à $\tau_B^{-1} \circ \tau_A$. Ainsi étant donnés deux éléments $v_1, v_2 \in V - \widehat{S^{k-1}X}$, si il existe $A, B \in V - \widehat{S^{k-1}X}$ tels que $\tau_A(v_1) = \tau_B(v_2)$, alors v_1 et v_2 sont dans une même $\mathcal{G}$-orbite. Or,

l'ensemble des $\tau_I^{-1} \circ \tau_A(I)$ contient un ouvert de V car la différentielle de l'application $A \mapsto \tau_A(I)$ est l'application $A \mapsto -2A * I$, donc est $-2Id$ par le lemme 3.1.2, donc est inversible. Ainsi la $\mathcal{G}$-orbite de I est dense ; comme I peut être n'importe quel élément tel que $F(I) = 1$, ce résultat est valable pour tout élément v tel que $F(v) \neq 0$, et le lemme en découle. •

Proposition 4.15 *V est un espace préhomogène symétrique sous l'action de $\mathcal{G}$.*

Démonstration : Nous venons de voir qu'il est préhomogène. Par ailleurs, dans la preuve du théorème 4.6, on a vu que si $g \in \mathcal{G}$, alors son adjointe par rapport à la forme quadratique $-D_I G$, que je note ${}^t g$, appartient aussi à $\mathcal{G}$. Soit donc sur $\mathcal{G}$ l'involution $\sigma : g \mapsto {}^t g^{-1}$. Alors g est un point fixe de cette involution si et seulement si g préserve la forme quadratique $\langle A, B \rangle = -D_I G(A)(B)$.
La preuve de la proposition 4.15 est achevée par la

Proposition 4.16 *Soit $g \in \mathcal{G}$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *g préserve le produit sur V à un signe près, c'est-à-dire*
$$(g.A) *_K (g.B) = \pm g.(A *_K B).$$
2. *g préserve I à un signe près, $g.I = \pm I$.*
3. *g préserve le produit scalaire, $\langle g.A, g.B \rangle = \langle A, B \rangle$.*

Si k est impair, les signes $-$ ne peuvent pas avoir lieu, puisque F est alors de degré impair. Le corollaire p.49 de [Jac 63] donne ce résultat pour l'algèbre de Jordan exceptionnelle au niveau infinitésimal (c'est-à-dire au niveau des algèbres de Lie), prouvant ma proposition à un sous-groupe fini près. Je ne sais pas si mon résultat précis est connu.
Démonstration : La preuve de la proposition 3.2 s'adapte ici, montrant que (1) et (2) sont équivalents, que (1) implique (3), et que la composante connexe des éléments vérifiant (3) passant par Id vérifie (1). Ceci suffit pour montrer que l'on a un espace préhomogène symétrique. Par un argument géométrique, j'obtiens le résultat plus précis annoncé :

- Redémontrons (2) $\Rightarrow$ (1) par un argument géométrique :
  Considérons g tel que $g.I = I$ et $A \in \widehat{X}$ fixé. Alors g préserve le produit scalaire puisque celui-ci est défini à partir de X et I. Soient sur V les deux algèbres $A \times_1 B = (g.A) * (g.B)$ et $A \times_2 B = g.(A * B)$. Elles coïncident projectivement sur X puisque génériquement ce sont la projection orthogonale de I sur $T_{g.A}X \cap T_{g.B}X = g.(T_A X \cap T_B X)$. Par ailleurs $A \times_1 B = 0$ et $A \times_2 B = 0$ respectivement quand $g.B \in \Sigma_{(g.A)'}$ et quand $B \in \Sigma_{A'}$ (si $x \in X$, x' désigne le point d'intersection de (xI) avec $S^{k-1}X$ différent de x), ces deux conditions étant équivalentes puisque comme g préserve I par hypothèse, $g.A' = (g.A)'$. Par le lemme 1.1.5, ces deux algèbres sont égales.
- (3) $\Rightarrow$ (2) :
  Soit g préservant le produit scalaire, cela signifie que pour tout $A \in \mathbb{P}V$, $(g.A)^\perp = g.(A^\perp)$. Soit $A \in X$. Alors ce premier (respectivement dernier) hyperplan est par définition du produit scalaire l'hyperplan tangent à $S^{k-1}X$ au point $(g.A)'$ (respectivement $g.A'$) d'intersection de la droite $(g.A, I)$ (respectivement $(g.A, g.I)$) avec $S^{k-1}X$. S'ils sont égaux, c'est que $(g.A)' \in \Sigma_{g.A'}$, et que donc $g.I \in \langle \Sigma_{(g.A)'}, I \rangle$.

Supposons maintenant que $g.I \neq I$ (projectivement) et soit $A \in X$. Alors la droite $(I, g.I)$ de $\langle \Sigma_{(g.A)'}, I \rangle$ coupe $\Sigma_{(g.A)'}$. Il existe donc un point de $(I, g.I) \cap \Sigma_{(g.A)'}$, donc de $(I, g.I) \cap T_{(g.A)'} S^{k-1}X \cap S^{k-1}X$. Puisque $(I, g.I) \cap S^{k-1}X$ est fini et que pour M fixé le fait que $M \in T_{(g.A)'} S^{k-1}X$ est une condition fermée sur A, il existe M fixe qui est dans tous les $T_{(g.A)'} S^{k-1}X = \tau_I(g.A)$, donc dans tous les $T_P S^{k-1}X$ (proposition 4.6), ce qui est contradictoire. •

Sur un tel espace préhomogène symétrique, il est possible de définir naturellement une structure d'algèbre, expliquons cette structure en suivant les notations de W. Bertram [Ber 00] et voyons que cette structure n'est autre que celle que nous avons déjà définie. Pour éviter les confusions, nous noterons provisoirement $*_K$ le produit défini précédemment, parce qu'il a été découvert par Koecher, et $*_B$ le nouveau. Notons Id l'identité de $\mathcal{G}$, alors $d\sigma_{Id}$ est une involution de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathcal{G}$; notons $\mathfrak{g}^+$ et $\mathfrak{g}^-$ les sous-espaces propres associés aux valeurs 1 et -1. Notons E l'évaluation $g \mapsto g.I$ et e sa différentielle. Comme le stabilisateur de I dans $\mathcal{G}$ est l'ensemble des points fixes de σ à un sous-groupe fini près, e s'annule sur $\mathfrak{g}^+$. Elle réalise un isomorphisme entre $\mathfrak{g}^-$ et V puisque l'orbite de I est ouverte. Le produit sur V est alors donné par $A *_B B = e^{-1}(A).B$. Un résultat classique énonce que muni de ce produit V est une algèbre de Lie triple, c'est-à-dire que si A et B sont des éléments de V, alors le commutateur $[M_A, M_B]$ est une dérivation de $*_B$, M_U désignant l'endomorphisme $T \mapsto U *_B T$ [Ber 00, p.44].

Voyons que ce produit n'est autre que celui défini par McCrimmon. Les éléments $D_A G$ de $\mathcal{G}$ sont symétriques au sens où $\langle D_A G(B), C \rangle = \langle D_A G(C), B \rangle$, comme nous l'avons constaté au paragraphe précédent. Ainsi ils vérifient ${}^t g = g$, soit $\sigma(g) = g^{-1}$. La dérivée $T \mapsto A *_K T$ de $\frac{-1}{2} D_A G$ en I dans la direction de A est donc un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ qui vérifie $d\sigma_{Id}(g) = -g$, soit un élément de $\mathfrak{g}^-$. Comme $A *_K I = A$, $e^{-1}(A) = (T \mapsto A *_K T)$ et $A *_B B = A *_K B$.

Pour conclure que cette structure d'algèbre est une structure d'algèbre de Jordan, on utilise le résultat suivant [Ber 00, p.108] :

Théorème 4.7 *Une algèbre de Lie triple semi-simple est une algèbre de Jordan.*

4.3 Le cas des variétés de Severi

Dans ce chapitre, je démontre par des arguments plus élémentaires la classification des variétés de Severi, ainsi que des propriétés connues de celles-ci. Ayant fixé $I \notin Sec(X)$, rappelons que l'on note G l'application $x \mapsto \tau_I^{-1}[F(x, x, .)/F(x)]$ (notations de la proposition 4.6).

4.3.1 Étude globale de G

On a déjà vu que $Y = Sec(X)^*$ est une variété de Severi isomorphe à X. Soit donc F^* la forme trilinéaire symétrique telle que $l \in Sec(Y) \Leftrightarrow F^*(l,l,l) = 0$, $l \in Y \Leftrightarrow F^*(l,l,.) = 0$ et $F^*[D_IG(I), D_IG(I), D_IG(I)] = 1$. Posons $G^*(l) = \frac{F^*(l,l,.)}{F^*(l,l,l)}$. Soit aussi, pour $x \in V$, $x^* = F(x,x,.) \in V^*$.

Proposition 4.17 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m+1} - \widehat{Sec(X)}$. Alors $G^* \circ G(A) = A$.*

En particulier G définit une application birationnelle de $\mathbb{P}V$ d'inverse G^* (cf [Zak 93] et [Ein 89]).

Démonstration : On sait que

$$F^*[D_AG(u), D_AG(v), D_AG(w)] = \frac{F(u,v,w)}{F(A)^2} \tag{4.1}$$

Soit alors $A \in \mathbb{C}^{m+1} - \widehat{Sec(X)}$ et $l \in (\mathbb{C}^{m+1})^*$, on veut voir que

$$\frac{l(A)}{F(A)} = \frac{F^*(A^*, A^*, l)}{F^*(A^*)}.$$

Comme $D_AG(A) = -A^*/F(A)$, en appliquant (4.1) à $u = v = A$ et w tel que $D_AG(w) = l/F(A)$, il vient

$$\frac{F^*(A^*, A^*, l)}{F(A)^3} = \frac{-l(A)}{F(A)^2}.$$

En effet, $l(A)/F(A) = D_AG(w).A = D_AG(A).w = -F(A,A,w)/F(A)$. De même, si on pose $u = v = w = A$, il vient : $\frac{F^*(A^*,A^*,A^*)}{F^3(A)} = -\frac{1}{F(A)}$. En quotientant ces deux dernières égalités, on obtient l'égalité souhaitée. •

De toute évidence, G, considérée comme une application rationnelle de $\mathbb{P}V$, se prolonge à $Sec(X) - X$ par $G(p) = p^*$ et on a $G(Sec(X) - X) = Y$. On note maintenant $G(X)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence des $G(x_n)$ pour (x_n) parcourant toutes les suites tendant vers un élément de X. On a alors la proposition suivante qui est un résultat annoncé sans démonstration dans [Zak 93, p.79] :

Proposition 4.18 *$G(X) = Sec(Y) = X^*$.*

Démonstration : On a évidemment $G(X) \subset Sec(Y)$ car en dehors de $Sec(Y)$, G est inversible. Réciproquement, si $y_n \to y$ avec $y \in Sec(Y)$ mais $y_n \notin Sec(Y)$, alors en notant $x_n = G^*(y_n)$, on a par la proposition 4.17 $G(x_n) = y_n$ donc $G(x_n) \to y$ et par ailleurs $x_n \to G(y) \in X$; ainsi $y \in G(X)$ et $G(X) = Sec(Y)$.

En ce qui concerne la deuxième égalité, soit $w \in \mathbb{P}^m - Sec(X)$ et $w' = G(w)$. On a les isomorphismes D_wG et $D_{w'}G$ respectivement entre X et Y, et entre Y et $(Sec(Y))^*$. On a donc un isomorphisme composé $X \simeq (Sec(Y))^*$. Mais par le choix de w et w' et la proposition 4.17, cette composée est l'identité, de sorte que $X = (Sec(Y))^*$ et $X^* = Sec(Y)$. •

4.3.2 Orbites dans $\mathbb{P}V$

Dans ce paragraphe, je montre que $Sec(X) - X$ est homogène. Soit $p \notin \widehat{X}$; posons $P(A) = 2F(A)p - 6A^*(p)A$. On commence par deux lemmes techniques :

Lemme 4.3.1 *Il existe $A \in V$ tel que $P(A) \notin \widehat{Sec(X)}$.*

Démonstration : Si on avait $F[P(w)] = 0$ pour tout $w \in V$, alors en développant cette égalité, on trouve $F(w)^2 F(w,w,p)F(w,p,p) = 0$ pour tout w et donc soit $F(w,w,p) = 0$ pour tout w, soit $F(w,p,p) = 0$ pour tout w. Dans le premier cas, par polarisation on a aussi $F(w,p,p) = 0$; ainsi dans les deux cas, $p \in X$, contredisant le choix de p. •

Lemme 4.3.2 *Soit $\omega \notin Sec(X)$. La matrice $F(\omega,.,.)$ est inversible.*

Démonstration : Cette matrice est la différentielle en ω de $H : w \to F(w,w,.)$. Or comme $F(\omega) \neq 0$, on peut au voisinage de ω définir une racine holomorphe $\sqrt{F(w)}$, qui est non nulle, et par la proposition 4.17, la composée

$$w \mapsto A := \frac{w}{\sqrt{F(w)}} \overset{H}{\mapsto} F(A,A,.) \overset{G^*}{\mapsto} G^*[F(A,A,.)]$$

est l'identité, de sorte que $F(\omega,.,.)$ est inversible. •

Lemme 4.3.3 *L'adhérence d'une orbite différente de X est au moins une hypersurface.*

Démonstration : Soit $p \in Sec(X) - X$ et A tel que $P(A) \notin Sec(X)$. Notons $L(w)$ la dérivée de $L_\omega(p)$ quand ω tend vers A dans la direction w, soit :

$$\begin{aligned} L(w) &= 6F(A,A,w)F(A,p,.) + 2F(A,A,A)F(w,p,.) \\ &\quad -6F(A,w,p)F(A,A,.) - 6F(A,A,p)F(A,w,.) \end{aligned}$$

On va voir que $\mathrm{Ker}(L) \cap \mathrm{Ker}(A^*) = \{0\}$, de sorte que L est au moins de rang $\dim V - 1$. Soit donc w tel que $L(w) = 0$ et $F(A,A,w) = 0$. En appliquant $L(w) = 0$ à A, il vient $F(A,w,p) = 0$; tenant compte de $F(A,A,w) = 0$, on en déduit $F[P(A),w,.] = 0$. Comme par définition de A, $P(A) \notin Sec(X)$, on déduit alors du lemme 4.3.2 que $w = 0$. •

Corollaire 4.19 *Les variétés $Sec(X) - X$ et $\mathbb{P}^m - Sec(X)$ sont homogènes.*

Démonstration : Soit $p \in Sec(X) - X$. L'orbite de p est contenue dans $Sec(X)$ et son adhérence est une hypersurface. Cette orbite contient donc un ouvert de $Sec(X)$. Si maintenant q est un autre point de $Sec(X) - X$, alors son orbite rencontre celle de p ; ils font donc partie de la même orbite. Ainsi $Sec(X) - X$ est homogène.

Nous avons déjà vu que $\mathbb{P}V - Sec(X)$ est homogène (proposition 4.15). Voici un autre argument : soit B une orbite différente de X et $Sec(X) - X$. Comme $\overline{B} \cap Sec(X)$ est stable, on a soit $\overline{B} \cap Sec(X) = X$, soit $\overline{B} \cap Sec(X) = Sec(X)$. La première possibilité est absurde car $\overline{B}$ est au moins une hypersurface ; on a donc $\overline{B} = \mathbb{P}V$. Le corollaire en découle. •

Remarquons que ce corollaire fournit une autre preuve de la classification des variétés de Severi. En effet, si P est un polynôme invariant par $\widetilde{Aut}(X)$, alors il définit une hypersurface invariante par $\widetilde{Aut}(X)$; or nous avons vu que seule $Sec(X)$ était une telle hypersurface. Ainsi l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[V]^{\widetilde{Aut}(X)}$ égale $\mathbb{C}[F]$. En particulier, $\widetilde{Aut}(X)$ agit dans V de façon colibre au sens où l'algèbre des invariants est libre. Les groupes colibres simples ont été classifiés par [KPV 76] (si $\widetilde{Aut}(X)$ n'est pas simple, on sait par le lemme 4.2.12 que $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$) :

Théorème 4.8 *Toute représentation irréductible d'un groupe linéaire simple connexe qui est colibre et a exactement un invariant fait partie de la liste suivante :*
$(SO_n, \mathbb{C}^n)$ *(*$n \neq 4$*)* ; $(SL_n, \Lambda^2\mathbb{C}^n$ *(n pair)* ; $(SL_n, S^2\mathbb{C}^n)$; $(SL_n, \Lambda^3\mathbb{C}^n)$ *(*$n = 6, 7, 8$*)* ; $(Sp_6, \Lambda^3_0\mathbb{C}^6)$; $(SL_2, S^3\mathbb{C}^2)$; $(Spin_n, \Delta)$ *(*$n = 7, 9, 11, 12, 14$*)* ; E_6 ; E_7 ; G_2.

Δ désigne une représentation spinorielle et E_6,E_7 et G_2 agissent dans leurs représentations minimales.

4.3.3 Autre preuve de l'identité de Jordan

On peut montrer "à la main" la relation de Cayley-Hamilton, ce qui entraîne que notre algèbre est associative selon les puissances, c'est-à-dire que la sous-algèbre engendrée par un élément quelconque est associative. Identifions V et V^* par τ_I.

On démontre d'abord que la matrice $A^* = F(A, A, .)$ est la comatrice de A :

Lemme 4.3.4 $A * A^* = F(A)I$.

Démonstration : On vient de voir (proposition 4.17) que l'application birationnelle G est une involution qui envoie $Sec(X)$ sur X. Ainsi $x \in Sec(X)$ si et seulement si $F(x, x, .) \in Sec(X)$. Donc $F[A^*] = F(A)^2$. Par deux dérivations successives, nous allons déduire de cette relation des relations qui prouveront le lemme. Une première dérivation donne
$F[F(A, A, .), F(A, A, .), F(A, B, .)] = F(A)F(A, A, B)$. Si U est la forme linéaire $F(A, B, .)$, cette égalité s'exprime comme $F[F(A, A, .), F(A, A, .), U] = F(A)\langle A, U\rangle$. Or pour A générique, l'application $B \mapsto F(A, B, .)$ est un isomorphisme (proposition 4.3.2) ; on en déduit donc que pour A générique, la relation précédente est vraie pour tout U, donc que

$$F[F(A, A, .), F(A, A, .), .] = F(A)A. \tag{4.2}$$

Cette relation est donc vraie pour tout A. Une nouvelle dérivation prouve que

$$4F[F(A, A, .), F(A, B, .), .] = 3F(A, A, B)A + F(A)B. \tag{4.3}$$

En remplaçant B par I et en tenant compte de (3.3) on en déduit

$$2F[F(A, A, .), A, .] = 6F(I, I, A)F[F(A, A, .), I, .] - F(A)I - 3F(A, A, I)A. \tag{4.4}$$

Enfin, en évaluant cette dernière forme linéaire en I, on obtient

$$2F[F(A, A, .), A, I] = 3F(I, I, A)F(A, A, I) - F(A). \tag{4.5}$$

Maintenant, par définition,

$$\begin{aligned}\langle A * F(A, A, .), U\rangle &= F[F(A, A, .), A, U] + \tfrac{3}{2}F(A, A, I)\langle A, U\rangle \\ &\quad + \tfrac{3}{2}F(I, I, A)F(A, A, U) - 3F[F(A, A, .), A, I]\langle I, U\rangle\end{aligned}$$

En tenant compte des relations (4.4) et (4.5), on obtient alors

$$\begin{aligned}\langle A * F(A, A, .), U\rangle &= 3F[F(A, A, .), I, U)F(I, I, A) + F(A)\langle I, U\rangle \\ &\quad + \tfrac{3}{2}F(I, I, A)F(A, A, U) - \tfrac{9}{2}F(A, A, I)F(I, I, A)\langle U, I\rangle\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} F[F(A,A,.),I,U] &= F[F(A,A,.),I,3F(I,I,U)I-2F(I,U,.)] \\ &= \tfrac{3}{2}F(A,A,I)F(I,I,U)-\tfrac{1}{2}F(A,A,U) \end{aligned}$$

en appliquant la relation (4.3) avec $A=I$ et $B=U$.

Ainsi, $\langle A*F(A,A,.),U\rangle = F(A)\langle I,U\rangle$. •

Maintenant, comme $F(A-\lambda I)=F(A)-3F(A,A,I)\lambda+3F(A,I,I)\lambda^2-\lambda^3$ est le polynôme caractéristique de A, on se doute que :

Lemme 4.3.5 (Cayley-Hamilton) $A*A*A=3F(A,I,I)A^2-3F(A,A,I)A+F(A)I$

Démonstration : Comme $A*A=F(A,A,.)+3F(I,I,A)A-3F(I,A,A)I$, cela résulte du lemme précédent. •

Une conséquence de cette expression est :

Proposition 4.20 *Le produit est associatif selon les puissances.*

Démonstration : Si I,A,A^2 sont des vecteurs indépendants soit M_A la matrice, exprimée dans cette base, de la multiplication par A dans l'algèbre engendrée par A :

$$M_A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & F(A) \\ 1 & 0 & -3F(A,A,I) \\ 0 & 1 & 3F(A,I,I) \end{pmatrix}$$

Si I,A et A^2 sont liés on définit M_A par la même formule. Soit aussi A_i le vecteur qui s'exprime en fonction de I,A et A^2 comme le premier vecteur colonne de la matrice M_A^i. Alors il suffit de se convaincre que toute expression écrite seulement avec A, le signe $*$ et des parenthèses, égale A_i, i étant le nombre de fois que l'on a écrit A. Si $i\leq 2$, c'est trivial ; pour $i=3$, cela résulte du lemme précédent ; pour $i=4$, il faut vérifier que

$$\begin{aligned} A^2*A^2=A*A^3 &= [9F(A,I,I)^2-3F(A,A,I)]A^2 \\ &\quad +[F(A)-9F(A,I,I)F(A,A,I)]A+3F(A,I,I)F(A)I \end{aligned}$$

et c'est une conséquence facile des relations déjà établies. On peut alors raisonner par récurrence : supposant que cela est vrai pour $j<i$, il suffit de montrer, pour tous entiers p,q tels que $p+q=i$ et $p>2$, que $(A_p)*(A_q)=(A_{p-1})*A_{q+1}$. Mais A_{p-1} et A_q sont des combinaisons linéaires de I,A et A^2, et nous avons montré la relation $(A*A)*A^2=A*(A*A^2)$ et la commutativité implique $(A^2*A)*A^2=A^2*(A*A^2)$. On obtient donc $(A_{p-1}*A)*A_q=A_{p-1}*(A*A_q)$, et $A_p*A_q=A*A_{i-1}=A_i$. •

Une conséquence de cette proposition et du théorème 2.15 p.52 de [Ber 00], qui énonce qu'une algèbre de Lie triple unitaire est de Jordan si et seulement si elle est associative selon les puissances, est que notre algèbre est une algèbre de Jordan. Par ailleurs, le lemme 4.3.5 montre que cette algèbre est de rang au plus 3.

4.3.4 Propriétés du cross-product

Concernant les algèbres de Jordan simples de rang 3, et plus spécifiquement l'algèbre de Jordan exceptionnelle, on rencontre fréquemment dans la littérature un produit appelé "cross-product", différent du produit de Jordan. Ce produit vérifie par exemple

$(A \times A) \times (A \times A) = \det(A)A$, et une matrice A est de rang de Jordan 1 si et seulement si $A \times A = 0$. Il permet aussi de définir les variétés de la troisième ligne du carré magique de Freudenthal : on considère, pour $\mathcal{A}$ une algèbre de composition, l'ensemble des matrices dites "de Zorn", de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & A \\ B & \beta \end{pmatrix}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $A, B \in H_3(\mathcal{A})$.

On obtient alors les quatre variétés de la troisième ligne en considérant, pour les quatre algèbres de composition $\mathcal{A}$, dans l'espace projectif constitué de ces matrices, l'adhérence de l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} t^3 & t^2 A \\ tA \times A & \det A \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{C}, A \in H_3(\mathcal{A})$ et $A \times B$ désigne le cross-produit de A et de B) [LM 99]. Les trois premières variétés sont respectivement isomorphes, pour $\mathcal{A} = \mathbb{R}\otimes\mathbb{C}, \mathbb{O}\otimes\mathbb{C}, \mathbb{H}\otimes\mathbb{C}$, à $G_\omega(3,6), G(3,6)$ et $G_Q(6,12)$. La quatrième est homogène sous E_7.

L'espace vectoriel des matrices de Zorn peut être muni d'une structure d'algèbre particulièrement intéressante, en utilisant ce cross-produit [All 90].

Le cross-produit est naturellement une application bilinéaire de $V \times V$ dans V^*, définie par l'équation $A \times B = F(A, B, .)$. Lorsqu'on choisit un produit scalaire, celui-ci identifie V et V^*, munissant alors V d'une structure d'algèbre. Puisque, pour $A, B \in X$, $F(A, B, .) = \frac{1}{2}F(A + B, A + B, .)$ est la forme linéaire de $Sec(X)^*$ qui représente la $\mathcal{A}$-droite (AB), ce produit peut être interprété, moralement, en termes de géométrie projective, comme l'application qui associe à A et B des points de $\mathcal{A}\mathbb{P}^2$, la droite passant par ces points : cette droite est un élément de $\mathcal{A}\mathbb{P}^{2^*}$. On a aussi un cross-produit sur V^*, défini de façon similaire en utilisant l'équation de $Sec[Sec(X)^*]$, et celui-ci s'interprète dualement comme l'application qui associe à deux droites leur intersection.

Le but de ce petit paragraphe est de définir géométriquement le cross-product, et d'en examiner certaines propriétés géométriques.

Tout d'abord, rappelons que cette application est préservée par $Str(V)$ (pour $g \in Str(V)$, on a $(g.A) \times (g.B) = g.(A \times B)$, où je rappelle que si H est un hyperplan de V, $g.H$ est l'ensemble des $g.x$ pour $x \in H$).

Si A et B sont de rang 1, alors $F(A, A, .) = F(B, B, .) = 0$, et donc $2F(A, B, .) = F(A + B, A + B, .)$. Ainsi, $F(A, B, .)$ est l'équation de l'hyperplan tangent à $Sec(X)$ en un point de la droite passant par A et B, si cette droite n'est pas incluse dans X (c'est aussi la somme des espaces tangents $T_A X$ et $T_B X$ par le lemme de Terracini). Cette droite est incluse dans X si et seulement si $B \in T_A X$, soit $F(A, B, .) = 0$. Ceci définit géométriquement le produit.

Proposition 4.21 *Si P est de rang 2, alors $\{B : F(P, B, .) = 0\}$ est l'hyperplan polaire de P, dans Σ_P, pour la quadrique Q_P.*

Démonstration : Si $g \in Str(V)$, alors il est clair que $\{B : F(g.P, B, .) = 0\} = g.\{B : F(P, B, .) = 0\}$. Puisque l'on sait que $Sec(X) - X$ est homogène sous $Str(V)$, on pourrait se contenter de faire le calcul pour un P particulier. Je préfère donner ici un argument plus géométrique. Si $A \in Q_P$ est tel que $P \in T_A Q_P$, alors en particulier $P \in T_A X$, et nous avons vu qu'alors $F(A, P, .) = 0$. L'hyperplan polaire annule donc $F(P, ., .)$. Un argument de dimension conclut alors la preuve. •

4.3.5 Polynômes homaloïdes de degré 3

Pour un polynôme f sur V, je note df l'application $V \to V^*, x \mapsto d_x f$. P. Etingof, D. Kazhdan et A. Polishchuk ont introduit la définition suivante [EKP 00] :

Définition 4.6 *Soit V un espace vectoriel et f un polynôme homogène sur V. Si df : $\mathbb{P}V$ --> $\mathbb{P}V^*$ est birationnelle et s'il existe un polynôme homogène f^* sur V^* tel que $f^*(d_x f/f(x)) = 1/f(x)$ pour $f(x) \neq 0$, alors f est dit homaloïde.*

Remarque : Si f est homaloïde, le polynôme f^* dont il est question est unique et de même degré que f.

Remarquons que l'on peut construire de nombreux polynômes homaloïdes, en connection avec les espaces préhomogènes [EKP 00, proposition 3.9,p.10] :

Proposition 4.22 *Soit (V, G) un espace préhomogène régulier avec G réductif ; par définition, il existe donc un polynôme f sur V et un caractère χ de G tels que $\forall g \in G, \forall v \in V, f(g.v) = \chi(g)f(v)$. Si df est dominante, alors f est homaloïde.*

Par exemple, le déterminant d'une algèbre de Jordan simple est homaloïde. Les auteurs posent alors la question suivante :

Question 4.9 *Un polynôme homaloïde est-il toujours l'invariant relatif d'un espace préhomogène pour un groupe réductif ?*

Leur théorème 3.5 répond à cette question pour les polynômes de degré 3 ; on peut le traduire, comme le théorème de Zak, en termes d'algèbres de Jordan :

Théorème 4.10 *Un polynôme homaloïde de degré 3 est le déterminant d'une algèbre de Jordan semi-simple.*

Démonstration : Je propose ici, en utilisant la construction géométrique du théorème 4.6, une preuve très simple de ce théorème.

Soit $X \subset \mathbb{P}V$ (respectivement $Y \subset \mathbb{P}V^*$) la variété duale de l'hypersurface $f^* = 0$ (respectivement $f = 0$). Ainsi, par le théorème de bidualité 4.4, $X^* = \{f^* = 0\}$ et $Y^* = \{f = 0\}$.

Leur proposition 3.5, qui est l'analogue de ma proposition 4.17, affirme que

$$d_{d_x f} f^* = f(x)x. \tag{4.6}$$

Ainsi, X est dans le lieu singulier de Y^*. Le même calcul que celui effectué pour la preuve de mon théorème 4.6 donne alors que pour $A \notin Y^*$ et $x \in X$, $d_A(\frac{df}{f})(x)$ est l'hyperplan tangent $T_p Y^*$, si p est l'autre point d'intersection de (xA) avec Y^*. Ainsi $d_A(\frac{df}{f})$ envoie X sur Y. Sa transposée envoie donc Y^* sur X^*. Par ailleurs, elle est inversible par (4.6). C'est donc un isomorphisme entre $\{f^* = 0\}$ et une ou plusieurs composantes iréductibles de $\{f = 0\}$. Mais pour des raisons de degré, son image est $\{f = 0\}$, et donc $f = f^*$.

Si f est irréductible, ceci implique $d_A(\frac{df}{f})(B) = \frac{f(B)}{f(A)^2}$, et le théorème 3.1 dit que f est le déterminant d'une algèbre de Jordan. Si f n'est pas irréductible, il se factorise par une forme linéaire, et il est facile de traiter ce cas. Si on veut éviter d'utiliser cet argument, on peut remarquer que le raisonnement du paragraphe 4.3.2 reste valable et en

conclure que V est un espace préhomogène symétrique. La classification des polynômes homaloïdes de degré 3 correspondant à un espace préhomogène est facile : en effet, dans la classification des espaces préhomogènes réguliers que l'on peut trouver dans [KS 77, p.144], les seuls cas 1,2,3,27 ont un invariant relatif de degré 3 ; ils correspondent aux quatre variétés de Severi. •

En ce qui concerne les polynômes homaloïdes de degré 4, on sait que le déterminant d'une algèbre de Jordan de rang 4 et une équation de la variété tangente des variétés situées sur la troisième ligne du carré magique de Freudenthal constituent des exemples de tels polynômes ; il me semble donc utile de décrire la géométrie des algèbres structurables, en espérant que la démonstration simple que j'ai proposée de la classification des polynômes homaloïdes de degré 3 se transpose à celle des polynômes de degré 4.

Deuxième partie

Théorèmes d'annulation

Chapitre 5

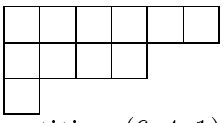
Rappels et notations

5.1 Théorie des représentations

5.1.1 Pléthysme

Il s'agit dans ce paragraphe de présenter quelques notations et formules concernant les représentations des groupes de Lie classiques.

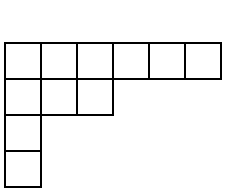
Une partition λ est par définition une suite finie décroissante d'entiers. Je note λ_i le i-ième entier de λ ; c'est par convention la i-ième part de λ. Le poids de λ, noté $|\lambda|$, est la somme de ses parts. Sa longueur, $l(\lambda)$, est le nombre de parts non nulles. Dans de nombreuses circonstances, il est pratique de représenter les partitions par un diagramme comme le suggère l'exemple qui suit :



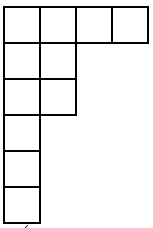
partition $(6, 4, 1)$.

A chaque partition λ correspond un foncteur de la catégorie des espaces vectoriels dans elle-même que j'appelle "de Schur" et que je note S_λ [FH 91]. Si V est un espace vectoriel, l'application $\lambda \mapsto S_\lambda V$ réalise une bijection entre l'ensemble des partitions de longueur strictement inférieure à $\dim V$ et l'ensemble des représentations irréductibles de $SL(V)$. Rappelons aussi que $S_{(k)}V = S^k V$, la k-ième puissance symétrique et $S_{(1,\dots,1)}V = \Lambda^k V$, la k-ième puissance extérieure, si k désigne le poids de cette partition.

Cette bijection et la façon dont nous avons choisi de représenter les partitions vont apparaître très pratiques. Par exemple, si λ est une partition, notons λ^* la partition dont le diagramme est le symétrique par rapport à une droite dirigée vers le "sud-est" :



$\lambda = (6, 3, 1, 1)$

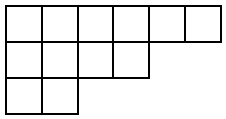


$\lambda^* = (4, 2, 2, 1, 1, 1)$

Autrement dit, la i-ième part de λ^* est la hauteur de la i-ième colonne du diagramme de λ. Alors, on a pour tous espaces vectoriels V et W l'identité des représentations de $SL(V) \times SL(W)$:

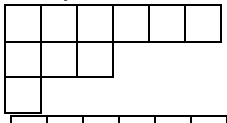
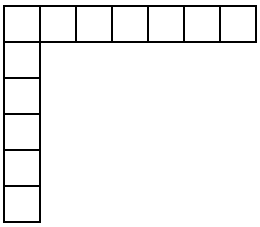
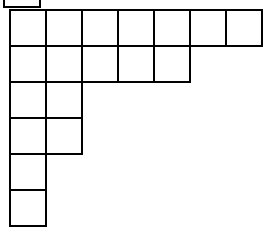
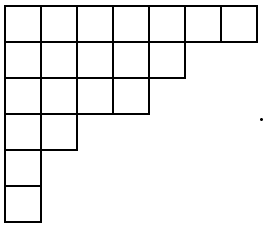
$$\Lambda^j(V \otimes W) = \bigoplus_{|\lambda|=j} S_\lambda V \otimes S_{\lambda^*} W. \tag{5.1}$$

On note $r(\lambda)$ le rang d'une partition λ, soit le plus grand entier i tel que $\lambda_i \geq i$. C'est aussi, visuellement, la longueur de la diagonale sud-est incluse dans la partition :

$r\Bigg($  $\Bigg) = 2.$

On peut coder une partition λ par deux partitions λ^d et λ^b de longueur r telles que λ^d_i (respectivement λ^b_i) soit le nombre de cases à droite de (respectivement en-dessous de) ou sur la i-ième case de cette diagonale. Remarquons que $\lambda \mapsto (\lambda^d, \lambda^b)$ est une bijection de l'ensemble des partitions dans l'ensemble des couples de partitions strictement décroissantes. Notons (μ, ν) la partition λ telle que $\lambda^d = \mu$ et $\lambda^b = \nu$. Par exemple, $(6, 4, 2) = ((6, 3), (3, 2))$.

Si λ est une partition strictement décroissante, notons λ^+ la partition $(\lambda + 1, \lambda)$ ($\lambda + 1$ désigne la partition de même longueur que λ dont la i-ième part vaut $\lambda_i + 1$). Visuellement, cette partition de rang $l(\lambda)$ est obtenue en emboitant $l(\lambda)$ crochets dont le i-ième est de longueur $\lambda_i + 1$ et de hauteur λ_i.

Par exemple si $\lambda =$  , alors ce procédé visuel donne successivement  ,  et $\lambda^+ =$  .

Alors, on a :

$$\Lambda^i S^2 V = \bigoplus_{|\lambda|=i} S_{\lambda^+} V. \tag{5.2}$$

De même, soit $\lambda^- = (\lambda, \lambda + 1) = (\lambda^+)^*$, on a

$$\Lambda^i \Lambda^2 V = \bigoplus_{|\lambda|=i} S_{\lambda^-} V. \tag{5.3}$$

Enfin, j'utiliserai la formule de Littlewood-Richardson pour calculer le produit tensoriel de deux représentations irréductibles de $SL(V)$:

$$S_\lambda V \otimes S_\mu V = \bigoplus_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} S_\nu V. \tag{5.4}$$

Dans cette formule, les coefficients $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ sont ceux de Littlewood-Richardson. Ils ne peuvent être non nuls que si $\nu \supset \lambda$, et sont alors égaux au nombre de façons de numéroter les cases de $\nu - \lambda$ avec μ_i chiffres égaux à i, de telle sorte que d'une part ces numéros soient croissants sur les lignes de gauche à droite et strictement croissants sur les colonnes de haut en bas, et que d'autre part le mot écrit en lisant les chiffres de droite à gauche et de haut en bas soit de Yamanouchi. Un mot est par définition de Yanamouchi si chaque mot obtenu en prenant les k premiers chiffres de ce mot contient au moins autant de chiffres i que de chiffres j pour $i \leq j$. Par exemple, si $\lambda = (3,3,2)$, $\mu = (4,2)$ et $\nu = (4,4,3,3)$, alors $c^{\nu}_{\lambda,\mu} = 1$:

			1
			2
		1	
1	1	2	

Si V est muni d'une forme quadratique (respectivement symplectique), alors $SL(V)$ contient le sous-groupe $SO(V)$ (respectivement $Sp(V)$). Les représentations irréductibles de $SL(V)$ sont des représentations de ce sous-groupe, par contre elles ne restent pas toujours irréductibles. Pour l'un des groupes $SL(V), SO(V)$ et $Sp(V)$, choisissons comme tore maximal le sous-groupe des matrices diagonales ; un poids (c'est-à-dire un caractère de ce tore) de $SL(V)$ se restreint donc en un poids de $SO(V)$ ou un poids de $Sp(V)$. Je note alors $S_{\langle\lambda\rangle}V$ la représentation de ce sous-groupe qui a comme plus haut poids la restriction du plus haut poids de la représentation $S_\lambda V$. De même, je note $S^{\langle k\rangle}V$ et $\Lambda^{\langle k\rangle}V$ les représentations $S_{\langle(k)\rangle}V$ et $S_{\langle(1,\cdots,1)\rangle}V$.

5.1.2 Notations concernant les systèmes de racines

Dans ce paragraphe, je rappelle les notations de [Bou 68, p.185 et suivantes] concernant les systèmes de racines de $SL(n), Sp(2n)$ et $SO(n)$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n$ est l'algèbre des matrices d'ordre n et de trace nulle. Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est constituée des matrices diagonales. Soit $\epsilon_i, 1 \leq i \leq n$, la forme linéaire qui associe à une matrice son i-ième élément diagonal. Alors les racines sont les $\epsilon_i - \epsilon_j$ $(i \neq j)$. Nous choisirons la base constituée des $\epsilon_i - \epsilon_{i+1}, i \leq n-1$. Les racines positives sont les $\epsilon_i - \epsilon_j, i < j$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_{2n+1}$ est l'algèbre des matrices d'ordre $2n+1$ orthogonales pour la forme donnée par la matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & J \\ 0 & -2 & 0 \\ J & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où J est la matrice d'ordre n ayant des 1 sur la deuxième diagonale $(J_{i,n+1-i} = 1)$ et des 0 partout ailleurs. Ceci signifie que $A \in \mathfrak{so}_{2n+1} \Leftrightarrow AS + SA = 0$.

Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre des éléments diagonaux ; c'est une sous-algèbre de Cartan. Soit $\epsilon_i, 1 \leq i \leq n$, la forme linéaire qui associe à une matrice son i-ième élément diagonal ;

les racines sont les $\pm\epsilon_i$ et $\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j$ $(i \neq j)$. Choisissons la base contenant $\epsilon_i - \epsilon_{i+1}(1 \leq i \leq n-1)$ et ϵ_n. Les racines positives sont les ϵ_i et les $\epsilon_i \pm \epsilon_j, i < j$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_{2n}$ est l'algèbre des matrices d'ordre $2n$ qui préservent la forme antisymétrique $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$. Ceci signifie que $A \in \mathfrak{sp}_{2n} \Leftrightarrow A\Omega + \Omega A = 0$.

Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre des éléments diagonaux ; c'est une sous-algèbre de Cartan. Soit $\epsilon_i, 1 \leq i \leq n$ la forme linéaire qui associe à une matrice son i-ième élément diagonal ; les racines sont les $\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j$. Choisissons la base contenant $\epsilon_i - \epsilon_{i+1}(1 \leq i \leq n-1)$ et $2\epsilon_n$. Les racines positives sont les $2\epsilon_i$ et les $\epsilon_i \pm \epsilon_j, i < j$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_{2n}$ est l'algèbre des matrices d'ordre $2n$ orthogonales pour la forme donnée par la matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$. Ceci signifie que $A \in \mathfrak{so}_{2n} \Leftrightarrow AS + SA = 0$.

Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre des éléments diagonaux ; c'est une sous-algèbre de Cartan. Soit $\epsilon_i, 1 \leq i \leq n$ la forme linéaire qui associe à une matrice son i-ième élément diagonal ; les racines sont les $\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j (i < j)$. Choisissons la base contenant $\epsilon_i - \epsilon_{i+1}(1 \leq i \leq n-1)$ et $\epsilon_{n-1} + \epsilon_n$. Les racines positives sont les $\epsilon_i \pm \epsilon_j, i < j$.

5.2 Fibrés vectoriels homogènes

Soit X une variété projective. Une *fibration* sur X est par définition un morphisme surjectif localement trivial $p : Y \to X$, où Y est une variété. Le fait que p est localement trivial signifie que pour tout point x de X il existe un voisinage V de x et une variété F tels que $p^{-1}(V) \simeq V \times F$, et tels que cet isomorphisme identifie p à la première projection. Si X est connexe, F ne dépend pas (à isomorphismes près) de $x \in X$.

Rappelons que la donnée d'un fibré (sous-entendu vectoriel) de rang r sur X est la donnée d'un des trois objets suivants équivalents :

- Un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules localement libre de rang r.
- Un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de X et pour tous $i, j \in I$ des morphismes $t_{i,j}$ de $U_i \cap U_j$ dans $GL(r)$ satisfaisant la "relation de cocycle" $\forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k, t_{i,k}(x) = t_{i,j}(x)t_{j,k}(x)$ pour tous triplets $i, j, k \in I$.
- Une fibration de fibre l'espace affine de dimension r. La source de cette fibration est appelée *espace total* du fibré.

Dans [Akh 95], on peut aussi lire la notion de morphismes de fibrés, d'injectivité, de surjectivité d'un tel morphisme, ainsi que la définition d'un fibré irréductible ou indécomposable. La deuxième description d'un fibré montre que toutes les constructions fonctorielles sur les espaces vectoriels se prolongent aux fibrés : on peut ainsi définir le dual et n'importe quelle puissance de Schur d'un fibré vectoriel, la somme directe et le produit tensoriel de deux fibrés. De plus, il est tautologique que les formules du paragraphe précédent sont encore valables pour des fibrés.

Si X est homogène sous un groupe algébrique G, alors un *G-fibré*, ou encore, s'il n'y a pas de confusion possible sur le choix de G, un *fibré homogène*, est un fibré dont l'espace total est muni d'une action de G telle que la projection sur X soit G-équivariante. Un morphisme de G-fibrés est un morphisme de fibrés qui est G-équivariant.

Pour un tel fibré, si P désigne le stabilisateur d'un point de X (c'est un sous-groupe parabolique puisque X est projective), alors par définition P agit sur la fibre au-dessus de ce point. Cette fibre est donc une représentation de P. Notons ϕ le foncteur qui à un G-fibré associe cette représentation. Il est alors connu [Akh 95] que le foncteur ϕ est une équivalence entre les fibrés vectoriels sur X à isomorphismes près et et les représentations de P à isomorphismes près. Cette équivalence commute aux foncteurs de Schur S_λ. De plus, $\phi(E \otimes F) = \phi(E) \otimes \phi(F)$ et $\phi(E \oplus F) = \phi(E) \oplus \phi(F)$ pour tous fibrés vectoriels E et F.

Notons que cette correspondance met en relation les fibrés irréductibles ou indécomposables avec les représentations ayant cette propriété si l'on considère les G-morphismes de fibrés. Voici un exemple qui met en avant cette petite subtilité. Soit V un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 2 et $\mathcal{V}$ le fibré trivial sur $\mathbb{P}V$ donné par la projection $\mathbb{P}V \times V \to \mathbb{P}V$. Comme $\mathbb{P}V$ est homogène sous $SL(V)$, $\mathcal{V}$ est un $SL(V)$-fibré si par exemple on munit $\mathcal{V}$ de l'action triviale $g.(x,v) = (g.x, v)$ pour $g \in SL(V)$. Notons $\mathcal{V}_1$ ce $SL(V)$-fibré et $\mathcal{V}_2$ un autre fibré obtenu en considérant l'action $g.(x,v) = (g.x, g.v)$. Alors, bien que $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ soient des fibrés isomorphes, ce ne sont pas des $SL(V)$-fibrés isomorphes, et en particulier $\mathcal{V}_1$ n'est pas irréductible alors que $\mathcal{V}_2$ l'est.

Par ailleurs, on a un foncteur de la catégorie des fibrés dans celle des espaces vectoriels qui associe à un fibré ses sections globales, soit les sections de la fibration qui définit ce fibré. On note $H^0(X,.)$ ce foncteur et $H^q(X,.)$ ses foncteurs dérivés. Comme X est projective, $H^q(X,E)$ est de dimension finie pour tout entier q et tout fibré E. Supposons X lisse. Alors X admet un fibré naturel, le fibré tangent noté TX. On note aussi $\Omega X = TX^*$ et $\Omega^p X = \Lambda^p \Omega X$, pour p un entier. Si E est un fibré, soit $H^{p,q}(X,E) := H^q(X, \Omega^p X \otimes E)$. C'est aussi le groupe de cohomologie de Dolbeault de E en bidegré (p,q).

Remarquons que si E est un fibré homogène sous G, alors G agit sur $H^0(X,E)$ par $g.s = g \circ s \circ g^{-1}$, et donc les groupes de cohomologie $H^q(X,E)$ sont des représentations de ce groupe. Puisqu'un tel fibré est entièrement déterminé par la représentation du stabilisateur correspondant, on peut espérer trouver une description de ces groupes de cohomologie en fonction de cette représentation. C'est en effet le cas si le G-fibré E est irréductible (le lecteur peut trouver plus de détails dans [Akh 95]) :

Théorème 5.1 (Bott) *Soit $X = G/P$ une variété projective homogène, T un tore maximal de G et Δ une base du système de racines, tels que $P \supset B_-$, le sous-groupe de Borel dont l'algèbre de Lie contient les espaces propres des racines négatives. Soit aussi λ le plus haut poids d'une représentation irréductible de P et $E \to X$ le fibré vectoriel associé à cette représentation. Soit enfin ρ la demi-somme des racines positives. S'il existe une racine orthogonale à $\lambda + \rho$ pour la forme de Killing, alors $H^q(X,E) = 0$ pour tout q. Sinon, soit w l'élément du groupe de Weyl qui envoie $\lambda + \rho$ sur un poids dominant et q_0 sa longueur. Alors $H^{q_0}(X,E)$ est la représentation de G de plus haut*

poids $w(\lambda+\rho)-\rho$, *et* $H^q(X,E)=0$ *si* $q\neq q_0$.

5.3 Suites spectrales

Soit $\pi : Y \to X$ une fibration et E un fibré vectoriel sur Y. Dans ce paragraphe, je rappelle comment deux suites spectrales mettent en relation la cohomologie de Dolbeault de Y à valeurs dans E et la cohomologie de Dolbeault de X à valeurs dans un fibré qui dépend de la cohomologie de E dans une fibre de la fibration. Le lecteur pourra consulter [GH 94] pour plus de détails et les démonstrations.

5.3.1 Suite spectrale de Borel-Le Potier

Considérons la filtration suivante de Ω^p_Y par les t-formes sur X :

$$F^{0,p}=\Omega^p_Y \supset \cdots \supset F^{t,p}=\Omega^{p-t}_Y \wedge \pi^*\Omega^t_X \supset \cdots \supset F^{p,p}=\pi^*\Omega^p_X.$$

Soit $\Omega^i_{Y/X}$ le fibré des i-formes sur Y relatives à π, défini par $\Omega^i_{Y/X}=\Lambda^i\Omega_{Y/X}$ et la suite exacte de fibrés sur Y suivante :

$$0 \to \pi^*\Omega X \stackrel{\pi^*}{\to} \Omega Y \to \Omega_{Y/X} \to 0$$

Comme π est une fibration, la restriction à une fibre de π du fibré des i-formes relatives s'identifie au fibré des i-formes sur cette fibre :

$$\Omega^i_{Y/X\,|\pi^{-1}(x)}=\Omega^i_{\pi^{-1}(x)}. \tag{5.5}$$

Les quotients associés à la fibration précédente s'expriment à l'aide du fibré des formes relatives :

$$G^{t,p}=F^{t,p}/F^{t+1,p}=\Omega^{p-t}_{Y/X}\otimes\pi^*\Omega^t_X. \tag{5.6}$$

Pour chaque p, on a alors [LP 77] une suite spectrale aboutissant sur $H^{p,q}(Y,E)$ et dont les termes d'ordre 1 sont :

$${}^pE_1^{t,q-t}=H^q(Y,G^{t,p}\otimes E)$$

5.3.2 Suite spectrale de Leray

Pour calculer les groupes de cohomologie $H^q(Y,G^{t,p}\otimes E)$, on utilise une suite spectrale de Leray. La suite spectrale de termes d'ordre 2

$${}^{p,t}E_2^{k,j-k}=H^k(X,R^{j-k}\pi_*G^{t,p})=H^{t,k}[X,R^{j-k}\pi_*(E\otimes\Omega^{p-t}_{Y/X})] \tag{5.7}$$

aboutit sur ${}^pE_1^{t,j}$.

Comme π est une fibration, par définition, il existe un recouvrement de X par des ouverts U_i et des isomorphismes au-dessus de X $f_i : \pi^{-1}(U_i) \stackrel{\sim}{\to} U_i \times F$. Introduisons une notation :

Notation 5.1 *Si $\pi : Y \to X$ est une fibration et E un fibré vectoriel sur Y, notons $R^{p,q}\pi_* E$ le faisceau $R^q\pi_*(E \otimes \Omega^p_{Y/X})$.*

Je vais finir ce paragraphe par quelques remarques qui nous permettrons de calculer les faisceaux $R^{p,q}\pi_* E$. Dans les exemples que nous rencontrerons, il existera un fibré vectoriel E_0 sur F (rappelons que F désigne une fibre type de π) et, pour chaque i, des isomorphismes de fibrés g_i sur $Y_i := \pi^{-1}(U_i)$ entre $E_{|Y_i}$ et $f_i^* p_2^* E_0$, où p_2 désigne la projection de $U_i \times F$ sur F. Notons dès à présent que ceci implique que le faisceau $R^q\pi_*(E \otimes \Omega^p_{Y/X})$ est localement libre, puisque si $U \subset U_i$ est un ouvert affine alors

$$R^q\pi_*(E \otimes \Omega^p_{Y/X})(U) \simeq H^0[U, H^{p,q}(F, E_0)].$$

Pour comprendre le fibré vectoriel $R^{p,q}\pi_* E$, on étudie ses changements de cartes : si $U_i, U_j \subset X$ sont deux ouverts trivialisant π, alors on a, pour tout $x \in U_i \cap U_j$, un automorphisme $f_{i,j}(x)$ de F et un isomorphisme $g_{i,j}(x)$ de fibrés vectoriels sur F entre E_0 et $f_{i,j}(x)^* E_0$. Il découle alors de la fonctorialité des constructions que $R^{p,q}\pi_* E$ est un fibré vectoriel de fibre type $H^{p,q}(F, E_0)$ et de changements de cartes les applications induites en cohomologie par les $g_{i,j}(x)$.

Chapitre 6

Cohomologie des fibrés $\mathcal{O}(l)$ sur une grassmannienne

Dans ce chapitre, je rappelle comment, en utilisant essentiellement le théorème de Bott, on peut obtenir des informations sur la cohomologie de Dolbeault des fibrés $\mathcal{O}(l)$ sur différentes grassmanniennes. Je considérerai d'abord les grassmanniennes usuelles, puis les grassmanniennes des plans isotropes pour une forme symplectique non-dégénérée, enfin les grassmanniennes des plans isotropes pour une forme quadratique non-dégénérée. J'appellerai plus simplement ces deux dernières grassmanniennes les grassmanniennes symplectiques et quadratiques.

Je donne aussi une description explicite de toutes les composantes irréductibles des groupes de cohomologie de $\mathcal{O}(l)$ sur une grassmannienne usuelle ; celle-ci prolonge celle donnée par Snow en termes de diagrammes admissibles et permet d'obtenir des informations plus précises sur le(s) groupe(s) de cohomologie $H^{p,q}[G(r,V),\mathcal{O}(l)]$ non nul(s) avec p maximal, à r, V et L fixés.

Je montre enfin que toute composante irréductible d'un groupe de cohomologie de $\mathcal{O}(1)$ sur une grassmannienne symplectique ou quadratique est une représentation fondamentale.

6.1 Grassmanniennes usuelles

6.1.1 Fibrés tautologiques et quotients ; fibré tangent

Si V est un espace vectoriel, je note $G(r,V)$ la grassmannienne des r-plans vectoriels dans V. Je note aussi T le fibré tautologique, dont la fibre au-dessus de l'espace vectoriel L s'identifie à L lui-même, et Q le fibré quotient, dont la fibre au-dessus de L s'identifie à V/L.

Notons que $G(r,V)$ est une variété homogène sous $GL(V)$, et que T et Q sont des fibrés homogènes sous ce groupe. Par ailleurs, le fibré tangent est lui aussi homogène ; en fait on a un isomorphisme de $GL(V)$-fibrés

$$TG(r,V) = T^* \otimes Q.$$

Cet isomorphisme est expliqué dans [Har 92, p.200] ; il a la description géométrique suivante : $v : \mathbb{C} \to G(r, V)$ est un chemin avec $v(0) = L, v'(0) = A \in End(L, V/L)$ si et seulement si pour toute fonction $s : \mathbb{C} \to V$ telle que $s(t) \in v(t)$, on a $[s'(0)] = As(0)$ dans V/L.

6.1.2 Partitions admissibles

Lorsque λ est une partition, on peut attribuer à chaque case de cette partition son nombre de crochet qui est le nombre de cases de λ situées en-dessous ou à droite de cette case, cette case comprise. Par exemple, les cases de la partition suivante ont été numérotées par leurs nombres de crochets :

6	4	2	1
3	1		
1			

.

Convenons alors, si l est un entier, que λ sera appelée l-admissible si toutes les cases reçoivent un numéro différent de l.

Snow [Sno 86] a montré qu'il existe une bijection, à $r < e$ et l fixés, entre les composantes des groupes de cohomologie $H^{p,q}[G(r, \mathbb{C}^e), \mathcal{O}(l)]$ et les partitions de longueur inférieure ou égale à r dont toutes les parts sont inférieures ou égales à $e - r$ (par la suite je les appellerai simplement partitions de taille $(e - r, r)$) qui sont l-admissibles.

Par ailleurs, il est aisé de lire sur ces partitions l-admissibles les données qui nous intéressent, à savoir les entiers p et q et la partition μ telle que $H^{p,q}[G(r, \mathbb{C}^e), \mathcal{O}(l)] \supset S_\mu \mathbb{C}^e$, où S_μ désigne le foncteur de Schur associé à μ. En effet, $p = |\lambda|$, q est le nombre de cases dont le nombre de crochet est strictement supérieur à l et μ est obtenue de la façon suivante : soit ${}^h\lambda^-$ (respectivement ${}^v\lambda^-$) la suite d'entiers telle que ${}^h\lambda^-_i$ (respectivement ${}^v\lambda^-_j$) est le nombre de cases situées sur la i-ième ligne (respectivement sur la j-ème colonne) dont le nombre de crochet est strictement inférieur à l (nous verrons par la suite que ${}^h\lambda^-$ et ${}^v\lambda^-$ sont en fait des partitions). Alors μ est obtenue en réordonnant toutes les parts $(l - {}^h\lambda^-_i)$ et ${}^v\lambda^-_j$.

6.1.3 Description explicite de toutes les partitions l-admissibles

Le seul inconvénient de la méthode précédente est que l'ensemble des partitions l-admissibles n'est pas aisé à décrire. Je propose dans ce paragraphe de montrer qu'il est en bijection avec l'ensemble de toutes les partitions de taille $(l - 1, r)$, et d'étudier des propriétés de cette bijection :

Proposition 6.1 *L'application $\lambda \mapsto {}^h\lambda^-$ est une bijection de l'ensemble des partitions l-admissibles dans l'ensemble des partitions de taille $(l - 1, r)$.*

Remarque : Cette proposition permet d'expliciter facilement tous les groupes de cohomologie non nuls ; par contre on a perdu, par rapport à la description de Snow, la facile lecture des entiers p et q et de la partition μ.

Démonstration : Tout d'abord si λ est l-admissible, alors $\forall i, {}^h\lambda^-_i < l$ puisque les nombres de crochet sont strictement décroissants sur une ligne.

Définition 6.1

- *Soit $h_{i,j}$ le nombre de crochet de la case située sur la i-ième ligne et la j-ème colonne. Convenons que $h_{i,0} = +\infty$.*
- *Pout tout i, soit $(g_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ la suite strictement croissante d'entiers dont l'image est le complémentaire dans $\mathbb{N}$ de l'ensemble des $h_{i,j}$.*
- *Notons δ_i l'entier $l - {}^h\lambda_i^-$, tel que $g_{i,\delta_i} = l$. Notons enfin $x_{i,j}$ le numéro de colonne de la dernière case sur la i-ième ligne de nombre de crochet supérieur à $g_{i,j}$.*

Ainsi, on a par exemple $g_{i,0} = 0$ et $g_{i,l-{}^h\lambda_i^-} = l$. On a aussi $x_{i,0} = \lambda_i$ et pour $j >> 1$, $x_{i,j} = 0$, par nos conventions.

Alors, par la définition des nombres de crochet, on a $h_{i-1,j} = h_{i,j} + \lambda_{i-1} - \lambda_i + 1$. Les nombres de crochet qui apparaissent sur la $(i-1)$-ième ligne sont donc $(1, \cdots, \lambda_{i-1} - \lambda_i$ et les $h_{i,j} + \lambda_{i-1} - \lambda_i + 1$. Ainsi, $g_{i-1,j+1} = g_{i,j} + \lambda_{i-1} - \lambda_i + 1$. En particulier, $g_{i-1,\delta_i+1} > l$, donc $\delta_{i-1} \leq \delta_i$ et donc ${}^h\lambda^-$ est une partition. On démontre maintenant un résultat plus précis que la proposition 6.1 :

Lemme 6.1.1 *Pout toute partition ν de taille $(l-1, r)$, il existe une unique partition l-admissible λ telle que ${}^h\lambda^- = \nu$; pour celle-ci, on a :*

- $\lambda_i = \lambda_{i+l-\nu_i} + \nu_i$.
- $x_{i,j} = \lambda_{i+j}$.

Démonstration : On démontre par récurrence descendante sur i_0 qu'une partition a ses nombres de crochet différents de l à partir de la ligne i_0 et vérifie ${}^h\lambda_i^- = \nu_i$ pour $i \geq i_0$ si et seulement si elle vérifie les deux points du lemme pour $i \geq i_0$.

On a $\lambda_r = \nu_r, x_{r,0} = \lambda_r$ et $x_{r,j} = 0$ pour $j > 0$, de sorte que la propriété de récurrence est vraie pour $i_0 = r$. Soit maintenant i_0 fixé tel que cette hypothèse est vérifiée pour $i_0 + 1$. Alors posons $\delta = \delta_{i_0} (= l - \nu_{i_0})$ et $d = \lambda_{i_0} - \lambda_{i_0+1}$ (d dépend de λ_{i_0} qui est pour l'instant inconnu). On a vu que $g_{i_0,0} = 0$ et $g_{i_0,j+1} = g_{i_0,j} + d + 1$ pour $j \geq 0$. Les nombres de crochet de λ en-dessous et sur la i_0-ième ligne sont différents de l si et seulement si $g_{i_0,\delta} = l$, ce qui équivaut donc à $d = l - 1 - g_{i_0+1,\delta_{i_0}-1}$. Il existe donc exactement une possibilité pour λ_{i_0}. De plus, on a toujours $x_{i_0,j+1} = x_{i_0+1,j} = \lambda_{i_0+j+1}$ et le fait qu'effectivement ${}^h\lambda_{i_0}^- = \nu_{i_0}$ implique que $\lambda_{i_0} = x_{i_0,\delta} + \nu_{i_0} = \lambda_{i_0+\delta} + \nu_{i_0}$. •

Notation 6.2 *Si ν est une partition de taille $(l-1, r)$, je noterai $\widehat{\nu}$ la partition λ telle que ${}^h\lambda^- = \nu$. Par aileurs je noterai $p(\nu)$ et $q(\nu)$ le poids et le nombre de cases de nombre de crochet supérieur à l de λ.*

Ce lemme montre que pour des "grosses" partitions ν, qui ont donc tendance à être constantes puisque toutes les parts sont proches de $l-1$, $\widehat{\nu}$ a tendance à être "périodique".

J'ai affirmé qu'aussi ${}^v\lambda^-$ est une partition, cela découle du fait que λ^* est l-admissible et ${}^v\lambda^- = {}^h(\lambda^*)^-$.

On étudie maintenant des propriétés de croissance de la bijecton $\nu \mapsto \widehat{\nu}$. Si λ_1, λ_2 sont des partitions, on note $\lambda_1 \subset \lambda_2$ le fait que $\forall i, \lambda_{1,i} \leq \lambda_{2,i}$.

Par une récurrence immédiate, le lemme 6.1.1 implique :

Proposition 6.2 *Si $\nu_1 \subset \nu_2$, alors $\widehat{\nu}_1 \subset \widehat{\nu}_2$.*

La réciproque de cette proposition est fausse car si $l = 3$, $\lambda_1 = (1,1,1)$ et $\lambda_2 = (2)$, alors $\widehat{\lambda}_1 = (3,1,1) \supset \widehat{\lambda}_2 = (2)$.

Par ailleurs, la fonction $\nu \mapsto \widehat{\nu}$ ne se comporte pas bien par rapport à l'ordre donné par la domination : rappelons que lorsque $|\lambda| = |\mu|$, on dit que λ domine μ si $\forall k, \sum_{i \leq k} \lambda_i \geq \sum_{i \leq k} \mu_i$. Si λ et μ sont quelconques, alors, par définition, λ domine μ si et seulement si $|\mu|.\lambda$ domine $|\lambda|\mu$. Nous noterons cet ordre $\lambda \geq \mu$. Posons $l = 4$. Alors la partition $(3,3,2,1)$ domine la partition $(3,2,2,2)$ et les partitions correspondantes, $(8,5,2,1)$ et $(7,4,2,2)$ sont de poids 16 et 15. Si maintenant on prend les partitions $(3,1,1,1) \geq (2,2,1,1)$, alors les partitions correspondantes sont $(4,1,1,1)$ et $(3,3,1,1)$, de poids 7 et 8. On voit donc que ni le poids ni l'ordre de domination n'obéissent à une règle de croissance ou à une règle de décroissance.

Proposition 6.3 *Soient k et l deux entiers et λ une partition. Si λ est l-admissible, alors elle est (kl)-admissible.*

Démonstration : En effet, si G_i désigne l'ensemble des entiers naturels qui n'apparaissent pas parmi les nombres de crochet sur la i-ième ligne, on sait que pour tout i, $l \in G_i$ et il existe d_i tel que $G_{i-1} = (d_i + 1 + G_i) \cup \{0\}$. Une récurrence immédiate prouve alors que pour tout i, G_i vérifie la propriété $x \in G_i \Rightarrow x + l \in G_i$. La proposition en découle. •

La contraposée de cette proposition me semble particulièrement frappante puisqu'elle implique que pour toute partition λ exactement inscrite dans un rectangle $r \times (e - r)$ (c'est-à-dire que $\lambda_1 = e - r$ et $l(\lambda) = r$), il existe une case dont le nombre de crochet est d pour tout d diviseur de $e - 1$. Une telle partition n'est donc pas d-admissible. Si λ correspond à une composante non nulle de $H^{*,*}[G(r, \mathbb{C}^e), \mathcal{O}(d)]$, on a donc soit $\lambda_1 < e - r$ soit $l(\lambda) < r$. Ainsi, si $S_\mu \mathbb{C}^e \subset H^{*,*}[G(r, \mathbb{C}^e), \mathcal{O}(d)]$, on a soit $\mu_e = 0$, soit $\mu_1 = d$.

6.1.4 Partitions admissibles de poids maximal

Comme nous le verrons largement au chapitre 7, pour démontrer des théorèmes d'annulation pour la cohomologie de fibrés vectoriels amples, il est utile de bien comprendre la cohomologie des fibrés homogènes sur une grassmannienne, et plus précisément quelle est, pour l, n et r des entiers quelconques, la valeur maximale de p telle qu'il existe un entier q avec $H^{p,q}(G(r,n), \mathcal{O}(l))$ non nul. Si $n > rl$, cet entier a été déterminé par Laurent Manivel [Man 92, proposition 1.2.1, p.111] et cela a permis de démontrer de nombreux théorèmes d'annulation, dont celui de F. Laytimi et W. Nahm concernant les partitions en forme de crochets [LN 02]. Lorsque n, r et l ne satisfont plus cette inégalité, la combinatoire des partitions l-admissibles devient nettement plus compliquée, et aucun résultat ne donne, à ma connaissance, cet entier p.

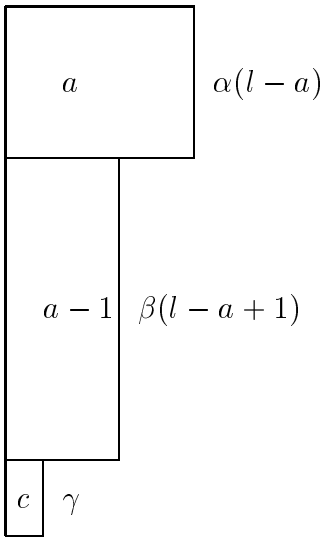
Grâce à la description explicite de toutes les partitions l-admissibles que j'ai donnée, il est possible d'obtenir des informations très précises sur la forme d'une partition l-admissible de poids maximal ; le théorème 6.1 ramène ce problème combinatoire à celui de déterminer, parmi un nombre fini de couples d'entiers, quels sont ceux qui maximisent un certain polynôme de degré deux. Comme nous le verrons au paragraphe 7.2.3, il est

très facile de déterminer ces couples pour des valeurs de n, r et l déterminées, alors qu'il me semble inenvisageable de donner une formule générale.

Soit n, r, l des entiers fixés. Si $a, \alpha, \beta, c, \gamma$ sont des entiers, notons $\mu(a, \alpha, \beta, c, \gamma)$ la partition μ définie par :

$$\begin{cases} \forall\ i \leq \alpha(l-a), & \mu_i = a \\ \forall\ \alpha(l-a) < i \leq \alpha(l-a) + \beta(l-a+1), & \mu_i = a-1 \\ \forall\ \alpha(l-a) + \beta(l-a+1) < i \leq \alpha(l-a) + \beta(l-a+1) + \gamma, & \mu_i = c \end{cases}$$

Elle a l'allure suivante :



Cette partition est de longueur $(\alpha+\beta)(l-a)+\beta+\gamma$ et un calcul direct utilisant le lemme 6.1.1 montre que $\widehat{\mu}_1(a, \alpha, \beta, c, \gamma) = (\alpha+\beta)a - \beta + c$.

Notons $\delta(\alpha, \beta) = \min\{\alpha, \beta\}$ si $\beta \neq 0$, et $\delta(\alpha, 0) = \alpha$. Rappelons que si μ est une partition, $\widehat{\mu}$ a été définie comme l'unique partition telle que ${}^h\widehat{\mu}^- = \mu$ (cf lemme 6.1.1).

Théorème 6.1 *Soient n, r et l des entiers, et λ une partition l-admissible de longueur r et telle que $\lambda_1 \leq n - r$.*
Alors, soit λ est de la forme $\widehat{\mu}(a, \alpha, \beta, c, \gamma)$ avec $\gamma \leq l - a$, soit il existe des entiers $a, \alpha, \beta, c, \gamma$ avec $\gamma \leq l-a$ et tels que $\widehat{\mu}(a, \alpha, \beta, c, \gamma)$ soit aussi l-admissible de longueur r et de première part inférieure ou égale à $n-r$, et que de plus $|\widehat{\mu}(a, \alpha, \beta, c, \gamma)| \geq |\lambda| + \delta(\alpha, \beta)$. De plus, ces entiers sont tels que $\alpha+\beta$ et $\gamma+c$ sont le quotient et le reste de la division euclidienne de n par l.

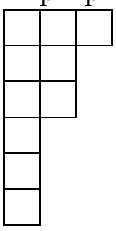
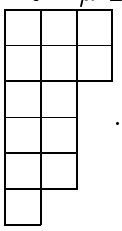
Démonstration : Considérons $n > r$ et l trois entiers, et soit λ une partition l-admissible de longueur au plus r et telle que $\lambda_1 \leq n-r$. On va raisonner sur la partition ${}^h\lambda^-$: nous allons voir que dans trois cas, on peut modifier cette partition pour en obtenir une de poids supérieur et encore de longueur au plus r et de même première part. Définissons une suite a_i par

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{i+1} = \min\{a_i + l - {}^h\lambda^-_{a_i}, r+1\}. \end{cases}$$

Soit A le plus grand entier i tel que $a_i \leq r$. Le lemme 6.1.1 montre que pour $i \leq A$,

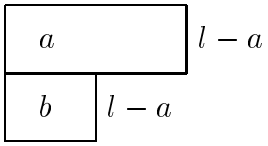
$$\lambda_{a_i} = \sum_{i \leq j \leq A} {}^h\lambda^-_{a_j}.$$

En particulier, si μ est une partition telle que $\forall i \leq A, \mu_{a_i} = {}^h\lambda^-_{a_i}$, alors on a $\widehat{\mu}_1 = \lambda_1$. Par exemple, si μ la partition définie par $\forall i \leq A, \forall j \in [a_i, a_{i+1} - 1]$, $\mu_j = {}^h\lambda^-_{a_i}$, on a par la proposition 6.2 $\widehat{\mu} \supset \lambda$, et $\widehat{\mu}_1 = \lambda_1$. Par exemple, pour $l = 5$, on remplace la partition


par

.

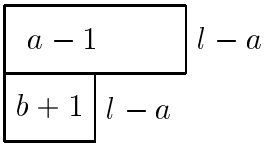
Supposons qu'il existe des entiers i, a et b avec $b \leq a - 2$ et tels que

$$\begin{cases} \forall j \in [i+1, i+l-a], & {}^h\lambda^-_j = a \\ \forall j \in [i+l-a+1, i+2(l-a)+1], & {}^h\lambda^-_j = b. \end{cases}$$



Alors, considérons la partition μ définie par

$$\begin{cases} \forall j \in [i+1, i+l-a], & \mu_j = a - 1 \\ \forall j \in [i+l-a+1, i+2(l-a)+1], & \mu_j = b + 1 \\ \forall j \notin [i+1, i+2(l-a)+1], & \mu_j = {}^h\lambda^-_j. \end{cases}$$



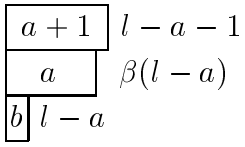
Le lemme 6.1.1 implique que

$$\begin{cases} \forall j \in [i+1, i+l-a], & \widehat{\mu}_j = \lambda_j \\ \forall j \in [i+l-a+1, i+2(l-a)+1], & \widehat{\mu}_j \geq \lambda_j + 1 \\ \forall j \notin [i+1, i+2(l-a)+1], & \widehat{\mu}_j = \lambda_j. \end{cases}$$

Par conséquent, on a $|\widehat{\mu}| \geq |\lambda| + l - a + 1$. Appelons "transformation A" le fait de remplacer ${}^h\lambda^-$ par μ.

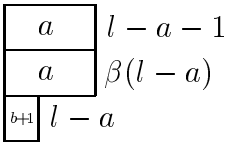
Supposons enfin l'existence d'entiers $i, a, b, \beta \geq 1$ tels que

$$\begin{cases} \forall j \in [i+1, i+l-a-1], & {}^h\lambda^-_j = a + 1 \\ \forall j \in [i+l-a, i+(1+\beta)(l-a)-1], & {}^h\lambda^-_j = a \\ \forall j \in [i+(1+\beta)(l-a), i+(2+\beta)(l-a)-1], & {}^h\lambda^-_j = b. \end{cases}$$



Alors, considérons la partition μ définie par

$$\begin{cases} \forall j \in [i+1, i+(1+\beta)(l-a)-1], & \mu_j = a \\ \forall j \in [i+(1+\beta)(l-a), i+(2+\beta)(l-a)-1], & \mu_j = b+1 \\ \forall j \notin [i+1, i+(2+\beta)(l-a)-1], & \mu_j = {}^h\lambda^-_j. \end{cases}$$



Le lemme 6.1.1 implique que

$$\begin{cases} \forall j \in [i, i+l-a-1], & \widehat{\mu}_j = \lambda_j \\ \forall j \in [i+l-a, i+(2+\beta)(l-a)-2], & \widehat{\mu}_j = \lambda_j + 1 \\ \forall j \notin [i+1, i+(2+\beta)(l-a)-1], & \widehat{\mu}_j = \lambda_j. \end{cases}$$

En particulier, on a donc $|\widehat{\mu}| \geq |\lambda| + 2(l-a)$. Appelons "transformation B" le fait de remplacer ${}^h\lambda^-$ par μ.

On peut donc construire une suite finie de partitions μ^i par récurrence : tout d'abord, on pose $\mu^0 = {}^h\lambda^-$. Ensuite, on impose que pour passer de μ^i à μ^{i+1}, soit on ajoute une case, soit on fait l'une des deux transformations A ou B, lorsque cela est possible de façon à ce que $\widehat{\mu}^{i+1}$ reste dans un rectangle de taille $r \times (n-r)$. A un certain indice N, on ne peut plus faire aucune de ces trois opérations. Soit (b_i) les nombres définis comme a_i pour la partition μ^N :

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{i+1} = \inf\{b_i + l - \mu^N_{b_i}, r+1\}. \end{cases}$$

Comme on ne peut plus ajouter de cases, on a $\mu^N_j = \mu^N_{b_i}$ pour $b_i \leq j \leq b_{i+1} - 1$, et comme aucune des deux configurations étudiées ne peut avoir lieu, μ^N est de type $\mu(a, \alpha, \beta, c, \gamma)$ avec $\gamma \leq l - a$. De plus, puisque l'on ne peut pas ajouter une case, on a soit $l[\mu(a, \alpha, \beta, c, \gamma)] = r$, soit $c = 0$. Si $c = 0$, $\mu(a, \alpha, \beta, c, \gamma)$ ne dépend pas de γ ; on peut donc dans tous les cas supposer que

$$\alpha(l-a) + \beta(l-a+1) + \gamma = r.$$

Pour montrer que $|\mu^N| \geq |\lambda| + \delta(\alpha, \beta)$, il suffit de montrer que $|\mu^N| \geq |\mu^{N-1}| + \delta(\alpha, \beta)$. Or, quand on applique l'opération A, on obtient une partition qui a exactement $l - a$ parts égales à $a - 1$, et quand on applique l'opération B, on obtient une partition qui a exactement $2(l-a) - 1$ parts égales à a : ce ne sont donc pas des partitions de type $\mu(a, \alpha, \beta, c, \gamma)$. On en déduit donc que pour passer de μ^{N-1} à $\mu^N = \mu(a, \alpha, \beta, c, \gamma)$, on a ajouté une case. Soit cette case se trouvait sur la r-ième ligne, et on a $|\mu^N| - |\mu^{N-1}| = \alpha + \beta + 1$; soit, si $\beta > 0$, elle se trouvait sur la $\alpha(l-a) + \beta(l-a+1)$-ième ligne, et on a $|\mu^N| - |\mu^{N-1}| = \beta$; soit, enfin, elle se trouvait sur la $\alpha(l-a)$-ième ligne, et dans ce cas $|\mu^N| - |\mu^{N-1}| = \alpha$; on voit que dans tous les cas, $|\mu^N| - |\mu^{N-1}| \geq \delta(\alpha, \beta)$.

Pour achever la preuve du théorème, il ne reste plus qu'à calculer $\alpha + \beta$ et $\gamma + c$. Or, on a vu que $\widehat{\mu}_1(a, \alpha, \beta, c, \gamma) = (\alpha + \beta)a - \beta + c$; comme les transformations effectuées ne changent pas la première part, on en déduit $\lambda_1 = (\alpha + \beta)a - \beta + c$. Par ailleurs, on a $r = (\alpha + \beta)(l - a) + \beta + \gamma$. On en déduit donc que

$$n = r + \lambda_1 = (\alpha + \beta)\ l + (\gamma + c). \tag{6.1}$$

Or, on a vu que $\gamma \leq l-a$ et $c \leq a$. Par convention, on exclut les égalités $\gamma = l-a$ et $c = a$, car $\mu(a,\alpha,0,a,l-a) = \mu(a,\alpha+1,0,0,0)$; on a donc $\gamma + c < l$. La formule 6.1 exprime donc la division euclidienne de n par l, concluant la preuve du théorème. •

6.2 Grassmanniennes symplectiques

6.2.1 Etude du fibré tangent

Si V est un espace vectoriel de dimension $2v$ muni d'une forme symplectique non-dégénérée ω, la grassmannienne symplectique $G_\omega(r,V)$ est par définition la sous-variété de $G(r,V)$ constituée des r-plans isotropes pour ω. C'est aussi, dans le plongement de Plücker $\mathbb{P}\Lambda^r V$, l'intersection de la grassmannienne usuelle avec la représentation irréductible $\mathbb{P}\Lambda^{\langle r\rangle} V$.

Une première méthode pour identifier l'espace tangent de $G_\omega(r,V)$ consiste à remarquer que c'est un sous-fibré de la restriction du fibré tangent à $G(r,V)$. Celui-ci est $T^* \otimes Q$; comme l'inclusion des fibrés est $Sp(V)$-équivariante, le fibré tangent de $G_\omega(r,V)$ correspond à une sous-représentation de la représentation de $\mathcal{P}$ correspondant à $T^* \otimes Q$. Un calcul de dimension montre que cette sous-représentation est l'ensemble des applications $L \to V/L$ telles que la composée $L \to V/L \to L^*$ soit une application symétrique. Autrement dit, on a une suite exacte de fibrés

$$0 \to T^* \otimes U \to TG_\omega(r,V) \to S^2 T^* \to 0. \tag{6.2}$$

Rappelons que T et Q désignent les fibrés tautologique et quotient. Le fibré Q n'est en général pas irréductible. En effet il contient le sous-fibré U dont la fibre au-dessus de L s'identifie à $L^\perp/L$ (l'orthogonalité est donnée par ω). On a donc la suite exacte

$$0 \to U \to Q \to T^* \to 0,$$

où la deuxième flèche est donnée par $v \mapsto \omega(v,.)$.

Une autre méthode consiste à calculer cette représentation en utilisant le fait qu'elle est donnée par l'action adjointe de l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{P}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$.

Supposons que ω est donnée par la matrice $\Omega := \begin{pmatrix} 0 & -J \\ J & 0 \end{pmatrix}$, où J est la matrice ayant des 1 sur la deuxième diagonale ($J_{i,v+1-i} = 1$) et des 0 partout ailleurs. Les matrices A de $Sp(V)$ sont par définition celles qui vérifient ${}^tA\Omega A = Q$ donc celles de l'espace tangent en l'identité vérifient ${}^tA\Omega + \Omega A = 0$. Maintenant, pour appliquer le théorème de Bott, il faut réaliser la grassmannienne comme une variété homogène sous l'action de $Sp(V)$. Ce groupe agit sur la grassmannienne par

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & Sp(V) \times G_\omega(r,\mathbb{C}^{2e}) & \to & G_\omega(r,\mathbb{C}^{2e}) \\ & & (A,L) & \mapsto & AL. \end{array}$$

Soit L un espace isotrope, $T_0 = L$, U_0 un supplémentaire de L dans $L^\perp$ et M_0 un supplémentaire de $L^\perp$ dans V ; si l'on représente une matrice de $Sp(V)$ par une matrice

de 9 blocs selon les sous-espaces T_0, U_0 et M_0, la grassmanienne s'identifie au quotient de $Sp(V)$ par le sous-groupe parabolique stabilisateur de L_0, qui n'est autre que

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\} \cap Sp(V).$$

Or, si $g \in Sp(V)$ préserve L_0, il préserve aussi $L_0^\perp$, et est donc de la forme $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$. Si $\mu = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in T_{Id}Sp(V)$, on a

$$Q \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -JC & -JD \\ JA & JB \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} Q = - \begin{pmatrix} {}^tCJ & -{}^tAJ \\ {}^tDJ & -{}^tBJ \end{pmatrix}$$

et donc JC et JB sont symétriques et $JD = -{}^tAJ$.

Par ailleurs $\mathfrak{p}$ est l'intersection de l'espace tangent à $Sp(V)$ avec l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$, de sorte que l'espace tangent au point base à $G_\omega(r, V)$ s'identifie à l'ensemble des couples $(S, M) \in L^* \otimes L \oplus L^* \otimes U$ avec JS symétrique selon

$$t : (S, M) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 \\ S & -J^t(MJ) & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $P = \begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$, notons que les représentations $P \mapsto a, b, c$ correspondent respectivement aux fibrés T, U et T^*. Comme P^{-1} est de la forme $\begin{pmatrix} a^{-1} & * & * \\ 0 & b^{-1} & * \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$,

$$P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ bMa^{-1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ S & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 0 & 0 \\ cSa^{-1} & * & * \end{pmatrix}.$$

On retrouve ainsi la suite exacte (6.2). Notons que la duale de cette suite exacte donne

$$0 \to S^2T \to \Omega G_\omega(r, V) \to T \otimes U^* \to 0. \tag{6.3}$$

6.2.2 Cohomologie de Dolbeault de $\mathcal{O}(1)$

Le fibré des p-formes peut donc être filtré par les $\Lambda^i S^2 T \wedge \Omega^{p-i} G_\omega(r,V)$, $0 \leq i \leq p$, filtration dont les quotients associés sont

$$\Lambda^i S^2 T \otimes \Lambda^{p-i}(T \otimes U^*).$$

Combinant les trois formules (5.1,5.2,5.4), il vient que $\Omega^p G(r,V)$ admet une filtration dont les quotients valent

$$\bigoplus_{|u|=i,|v|=p-i,w} c^w_{u^+,v} S_w T \otimes S_{v^*} U.$$

Soit $v_1, \cdots, v_{2e}$ une base de V, dans laquelle la forme symplectique ω s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$. Pour $1 \leq i \leq e$, v_i est de poids ϵ_i et v_{e+i} de poids $-\epsilon_{e+1-i}$.

On considère maintenant le sous-groupe parabolique

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \cap Sp(V) \right\},$$

stabilisant l'espace isotrope engendré par les vecteurs $v_{2e-r+1}, \cdots, v_{2e}$. Celui-ci présente en effet l'avantage de contenir le sous-groupe de Borel $\mathcal{B}_-$ correspondant à notre choix de racines positives (paragraphe 5.1.2), ce qui est nécessaire pour appliquer le théorème de Bott (théorème 5.1).

Remarquons que la représentation de $\mathcal{P}$ correspondant à T factorise par la projection $\mathcal{P} \to GL(r)$. Ainsi, chaque fibré $S_w T$ correspond à une représentation irréductible de $GL(r)$, donc de $\mathcal{P}$; c'est donc un fibré irréductible. Par contre, puisque si L est un espace linéaire isotrope, alors la forme ω induit une forme symplectique sur $L^\perp/L = U$, on a $\mathcal{P} \cap GL(U) \simeq Sp(U)$. Ainsi, la $\mathcal{P}$-représentation correspondant au fibré $S_{v^*}U$ n'est en général pas irréductible. Ecrivons donc $S_{v^*}U$ comme somme de fibrés irréductibles (I_v désigne un ensemble de partitions adéquat) :

$$S_{v^*}U = \bigoplus_{v^{sp} \in I_v} S_{\langle v^{sp} U \rangle}.$$

Finalement,

$$\mathcal{P} \supset \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \supset SL(r) \times Sp(\dim V - 2r),$$

et $S_w T \otimes S_{\langle v^{sp} \rangle} U$, corespondant à un produit tensoriel de représentations irréductibles de $SL(r)$ et de $Sp(\dim V - 2r)$, correspond à une représentation irréductible de $\mathcal{P}$; une telle composante est donc un $Sp(V)$-fibré irréductible.

Je fais alors la remarque suivante :

Lemme 6.2.1 *Soit $S_wT \otimes S_{\langle v^{sp}\rangle}U$ une composante du gradué associé à $\Omega^p G_\omega(r,V)$. Soit l la longueur de w. Alors*

- *Soit $\forall q \in \mathbb{N}, H^q[G_\omega(r,V), S_wE \otimes S_{\langle v^{sp}\rangle}U \otimes \mathcal{O}(1)] = 0$.*
- *Soit $\exists! q = q(v,w) : H^q[G_\omega(r,V), S_wE \otimes S_{\langle v^{sp}\rangle}U \otimes \mathcal{O}(1)] \neq 0$ et de plus $H^{q(v,w)}(S_wE \otimes S_{\langle v^{sp}\rangle}U \otimes \mathcal{O}(1)) = \Lambda^{\langle r-l\rangle}V$.*

Démonstration : Comme ce fibré est irréductible, on peut appliquer le théorème de Bott. Si le poids associé à ce fibré est singulier, on est dans le premier cas ; s'il est régulier, il y a un et un seul degré où la cohomologie ne s'annule pas. L'intérêt de ce lemme est d'expliciter dans ce cas le groupe de cohomologie.

Soit $k = e - r$ et $l = l(w)$. Les poids de la représentation associée au fibré T sont ceux des vecteurs $v_{2e-r+1}, \cdots, v_{2e}$, soit $-\epsilon_r \geq \cdots \geq -\epsilon_1$. Une base de la fibre de U au point base de $Sp(V)/\mathcal{P}$ est $(v_{r+1}, \cdots, v_{2e-r+1})$; les poids de la représentation associée à ce fibré sont donc $\epsilon_{r+1} \geq \cdots \geq \epsilon_e \geq -\epsilon_e \geq \cdots - \epsilon_{r+1}$.

Ecrivons alors les plus hauts poids correspondant aux fibrés $S_wT, S_{v^{sp}}U$ et $\mathcal{O}(1)$, dans la base (ϵ_i) :

$$\begin{array}{lcccccc}
\text{coordonnées} & : & (& \epsilon_1 \cdots \epsilon_{r-l}, & \epsilon_{r-l+1}, \cdots \epsilon_r & , & \epsilon_{r+1} \cdots, \epsilon_e &) \\
S_wT & : & (& 0 \cdots 0 & -w_l, \cdots, -w_1 & , & 0 \cdots 0 &) \\
S_{v^{sp}}U & : & (& 0 \cdots 0 & 0, \cdots, 0 & , & v_1^{sp} - v_{2k}^{sp}, \cdots, v_k^{sp} - v_{k+1}^{sp} &) \\
\mathcal{O}(1) & : & (& 1 \cdots & \cdots 1 & , & 0 \cdots 0 &) \\
\text{Par ailleurs,} & & & & & & & \\
\rho & = & (& e, e-1, & \cdots & , & \cdots 1 &)
\end{array}$$

Il s'agit donc d'étudier le poids

$$(e+1, e, \cdots, k+l+1-w_l, \cdots, k+2-w_1, k+v_1^{sp} - v_{2k}^{sp}, \cdots, 1+v_k^{sp} - v_{k+1}^{sp}). \quad (6.4)$$

Remarquons que ce poids, outre une suite d'entiers consécutifs écrits dans un ordre décroissant, est constitué de deux suites strictement décroissantes, la première quelconque et la deuxième positive. Comme les racines de l'algèbre de Lie sp_{2e} sont $\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j$ pour tous les couples (i,j) d'entiers distincts entre 1 et e, et $\pm 2\epsilon_i$ pour tout i, ce poids est régulier si et seulement si toutes les valeurs absolues de ses coordonnées sont distinctes et non nulles.

Etudions les $k+l$ dernières coordonnées. Nous savons qu'une base de la fibre de U au-dessus du point base est $(v_{r+1}, \cdots, v_{2e-r})$. Une base de vecteurs propres de $S_{v^*}U$ est en bijection avec l'ensemble des tableaux semi-standard de forme v^* contenant les lettres $r+1, \ldots, 2e-r$ [FH 91, prop 15.55]. Si $\mathcal{C}(v^*)$ désigne l'ensemble des cases du diagramme correspondant à v^*, un tel tableau peut être vu comme une application $\mathcal{C}(v^*) \to \{r+1, \ldots, 2e-r\}$; cette bijection associe à un tableau f l'image de $\otimes_{c \in \mathcal{C}(v^*)} x_{f(c)}$ par la projection naturelle $\phi(U)^{\otimes |v^*|} \to S_{v^*}\phi(U)$. Le poids de ce vecteur est $\sum_{r+1 \leq i \leq e}(k_i - k_{2e+1-i})\epsilon_i$, où k_i désigne le nombre de lettres i dans le tableau. Sur un tableau semi-standard, il ne peut y avoir des lettres 1 que sur la première ligne, il y en donc au plus v_1^*, et donc $v_1^{sp} \leq v_1^*$. Comme v^{sp} est une partition, $v_i^{sp} \leq v_1^*$.

Or, comme S_wT est une composante de $S_{u^+}T \otimes S_vT$, par la règle de Littlewood-Richardson, on voit que les cases sur la i-ième ligne de $w - u^+$ sont numérotées d'un entier inférieur ou égal à i. Ainsi, $v_1^* \leq l$ et $k + v_1^{sp} - v_{2k}^{sp} \leq l + k$.

Par ailleurs, pour une partition de type u^+, on a toujours $u_1^+ = l(u^+)+1$. Toujours en tenant compte de la règle de Littlewood-Richardson, quand on perturbe une telle partition en la multipliant par une partition v, on ajoute à chaque ligne au plus v_1 cases. Comme $S_{v^{sp}}U$ est une composante de $S_{v^*}U$, pour qu'il soit non nul, il faut que $l(v^*) \leq rg(U) = 2k$; on a donc $v_1 \leq 2k$.

Ainsi, $w_1 \leq l(u^+)+1+2k \leq l+1+2k$. Cette inégalité donne $k+2-w_1 \geq -l-k+1$; par ailleurs, il est clair que $k+l+1-w_l \leq k+l$. Puisque les l entiers $k+i+1-w_i$ sont ordonnés de façon croissante (par rapport à i), tous ces entiers sont donc compris entre $-l-k+1$ et $k+l$, donc de valeur absolue inférieure ou égale à $k+l$.

Ainsi, les valeurs absolues des $k+l$ dernières coordonnées sont donc des entiers distincts entre 1 et $k+l$; ce sont donc tous ces entiers. Le poids du groupe de cohomologie non nul de cette composante est donc :

$$(e+1, e, \cdots, l+k+2, l+k, l+k-1, \cdots, 1) - (e, e-1, \cdots, 1)$$

soit :

$$(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$$

avec $l+k$ lettres 0 et donc $e-(l+k)$ lettres 1, ce qui conduit au résultat annoncé. •

Par ailleurs, on peut calculer ce degré $q(v,w)$. Pour cela notons $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_i$ les entiers positifs de la suite $k+1+t-w_t$, $\beta_1 \leq \ldots \leq \beta_j$ les valeurs absolues de ces entiers négatifs et $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_k$ les entiers $k+v_1^*-v_{2k}^*, \cdots, 1+v_k^*-v_{k+1}^*$, de sorte que le poids considéré en (6.4) est $(e+1, e, \cdots, \alpha_1, \cdots, \alpha_i, -\beta_1, \cdots, -\beta_j, \gamma_1, \cdots, \gamma_k)$. On a alors avec ces notations

Lemme 6.2.2 $q(v,w) = q(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{u=1}^{j} \beta_u + jk + \#\{(u,v) : \alpha_u < \gamma_v\}$.

Démonstration : $q(\alpha,\beta,\gamma)$ est égal au nombre de racines simples qui ont un produit scalaire négatif avec $(e+1, e, \cdots, \alpha_1, \cdots, \alpha_i, -\beta_1, \cdots, -\beta_j, \gamma_1, \cdots, \gamma_k)$. Notons p_t le t-ième entier de cette liste. Ces racines peuvent être soit $\epsilon_a + \epsilon_b$, soit $\epsilon_a - \epsilon_b$ avec $a \neq b$. Dans le premier cas, on a $p_a < 0$ ou $p_b < 0$; supposons que $p_a < 0$: il existe alors u tel que $p_a = -\beta_u$. Pour chaque u les indices b doivent être tels que $-\beta_u + p_b < 0$ et, pour ne pas compter deux fois une même paire, on peut demander de plus que $\beta_u \geq |p_b|$. D'après le fait que les $|p_b|$ sont tous les entiers entre 1 et $i+j+k$, il y a exactement β_u tels indices.

Dans le deuxième cas des racines de la forme $\epsilon_a - \epsilon_b$, les jk combinaisons avec a correspondant à β_u et b à γ_v conviennent, par ailleurs les couples où a correspond à α_u et b à γ_v avec $\alpha_u < \gamma_v$ conviennent également.

En combinant ces remarques, on obtient le résultat annoncé. •

Une conséquence du lemme 6.2.1 est

Proposition 6.4 *Soit p et q des entiers. Alors $H^{p,q}[G_\omega(r,V), \mathcal{O}(1)]$ est somme de représentations fondamentales.*

Le cas où $r = e$, hermitien symétrique, a été considéré par Snow [Sno 88].

Démonstration : Il suffit d'appliquer le lemme 6.2.1 et la suite spectrale de Borel-Le Potier. •

6.3 Grassmanniennes quadratiques

6.3.1 Etude du fibré tangent

Soit V un espace vectoriel muni d'une forme quadratique non-dégénérée Q ; alors la grassmannienne quadratique $G_Q(r,V)$ est par définition la sous-variété de $G(r,V)$ constituée des r-plans isotropes pour Q. Notons que, contrairement au cas des grassmanniennes symplectiques, ce n'est pas une section linéaire de $G(r,V) \subset \mathbb{P}\Lambda^r V$: en effet, ce n'est déjà pas le cas pour $G_Q(1,V)$, qui est une quadrique dans $\mathbb{P}V$.

En termes de groupes algébriques, cette variété est un quotient de $SO(V)$, mais nous la verrons plutôt comme quotient de son revêtement universel, $Spin(V)$. En effet, ce groupe simplement connexe présente l'avantage que toute représentation de son algèbre de Lie est la différentielle d'une représentation. Par exemple, si $n = 2m$, ou si $n = 2m+1$, nous réaliserons $G_Q(m,V)$ dans la représentation spinorielle de plus haut poids $\frac{1}{2}(1,\ldots,1)$, dans la base (ϵ_i) : il n'existe une telle représentation que pour $Spin_n$. La sous-variété de la grassmannienne $G(m,V) \subset \mathbb{P}\Lambda^m V$ constituée des espaces isotropes est donc l'image par l'application de Veronese de degré deux de ma grassmannienne $G_Q(m,V)$.

Avant d'étudier le fibré tangent, je souhaite faire une remarque sur le fibré $\mathcal{O}(1)$. Celui-ci est par définition la restriction du fibré $\mathcal{O}(1)$ sur l'espace projectif ambiant ; son poids est donc le plus haut poids de la représentation dans laquelle est plongée $G_Q(r,V)$. Ce poids égale donc $\frac{1}{2}(1,\ldots,1)$ pour les grassmanniennes d'espaces de dimension maximale et $(1,\ldots,1,0,\ldots,0)$ pour les autres.

Pour décrire le fibré tangent, les deux méthodes présentées pour les grassmanniennes symplectiques sont encore valables : on démontre qu'il existe une suite exacte

$$0 \to \Lambda^2 T \to \Omega G_Q(r,V) \to T \otimes U^* \to 0, \tag{6.5}$$

avec les mêmes notations pour T et U.

6.3.2 Cohomologie de Dolbeault de $\mathcal{O}(1)$

Comme dans le cas des grassmanniennes symplectiques, la cohomologie de $\mathcal{O}(1)$ ne fait apparaître que des représentations fondamentales :

Proposition 6.5 *Soit p et q des entiers. Alors $H^{p,q}[G_Q(r,V),\mathcal{O}(1)]$ est somme de représentations fondamentales. De plus, si $\dim V = 2r$ ou $\dim V = 2r+1$, alors $H^{p,q}[G_\omega(r,V),\mathcal{O}(1)] = 0$.*

Le cas des espaces de dimension maximale a déjà été démontré par Snow [Sno 88].

Démonstration : Il suffit de démontrer ce résultat pour une composante du gradué associé au fibré des p-formes. On considère donc des partitions u, v, w, v^o telles que $S_w T$ est une composante de $S_{u^-}T \otimes S_v T$ et $S_{\langle v^o \rangle}U$ est une composante de $S_{v^*}U$. Soit $n = \dim V$ et l la longueur de w.

Le résultat va alors découler d'inégalités concernant ces partitions. Tout d'abord, on a $v_1 = l(v^*) \leq n - 2r$, car sinon $S_{v^*}U = 0$. Puisque $S_w T$ est une composante de

$T_{u^-}T \otimes S_vT$, on a $w_1 \leq u_1^- + v_1 \leq (l-1) + (n-2r)$. On remarque alors que la règle de Littlewood-Richardson implique que $l(v) \leq l$, soit $v_1^* \leq l$, et donc $v_1^o \leq l$, car comme dans le cas symplectique, il est facile de voir que $v_1^o \leq v_1^*$.

Il y a quatre cas, selon la parité de n et le fait que l'on considère ou non des espaces de dimension maximale. Commençons par le cas $n = 2m$ et $r < m$. Notons encore $k = m - r$.

Les plus hauts poids correspondant aux fibrés sont alors

$$\begin{array}{lcllll}
S_wT & : & (\quad 0\cdots 0 & -w_l, \cdots, -w_1 & , & 0\cdots 0 \quad) \\
S_{v^o}U & : & (\quad 0\cdots 0 & 0, \cdots, 0 & , & v_1^o - v_{2k}^o, \cdots, v_k^o - v_{k+1}^o \quad) \\
\mathcal{O}(1) & : & (\quad 1\cdots & \cdots 1 & , & 0\cdots 0 \quad)
\end{array}$$

Par ailleurs,

$$\rho \quad = \quad (\quad e-1, e-2, \quad \cdots \quad , \quad \cdots 0 \quad)$$

Il s'agit donc d'étudier le poids
$(e, e-1, \cdots, k+l-w_l, \cdots, k+1-w_1, k-1+v_1^o - v_{2k}^o, \cdots, v_k^o - v_{k+1}^o)$. Ce poids est de nouveau constitué de deux suites décroissantes, et il suffit de majorer les valeurs absolues qui interviennent. Comme on a vu que $w_1 \leq l-1+2k$, on a $k+1-w_1 \geq -k-l+2$. Par ailleurs, $k+l-w_l \leq k+l-1$ et $k-1+v_1^o \leq k+l-1$. Ainsi, toutes ces valeurs absolues sont comprises entre 0 et $k+l-1$; ce sont donc tous ces nombres et le groupe de cohomologie correspondant est une puissance extérieure. Notons que ce poids peut avoir une composante égale à 0 sans être singulier puisqu'aucune racine du système de racines D_m n'est de la forme $c\epsilon_i, c \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}$.

Dans le cas $n = 2m+1, r < m$, on note $k = m - r$ et on étudie de même le poids
$(e+\frac{1}{2}, \ldots, k+l+\frac{1}{2}-w_l, \cdots, k+1+\frac{1}{2}-w_1, k-\frac{1}{2}+v_1^o - v_{2k+1}^o, \cdots, \frac{1}{2}+v_k^o - v_{k+2}^o)$. On a $k+1+\frac{1}{2}-w_1 \geq -k-l+2+\frac{1}{2}$, $k+l+\frac{1}{2}-w_l \leq k+l-\frac{1}{2}$ et $k-\frac{1}{2}+v_1^o \leq k+l-\frac{1}{2}$. Ainsi, ces nombres sont tous les entiers entre $\frac{1}{2}$ et $k+l-\frac{1}{2}$, et on peut conclure.

Si $n = 2m$ et $r = m$, on étudie le poids $(e-\frac{1}{2}, \ldots, l-\frac{1}{2}-u_l^-, \cdots, \frac{1}{2}-u_1^-)$. Comme $l-\frac{1}{2}-u_l^- \leq l-1-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}-u_1^- = \frac{3}{2}-l$, ce poids est singulier.

Enfin, si $n = 2m+1$ et $r = m$, on considère le poids $(e, \ldots, l-w_l, \ldots, 1-w_1)$. Comme $w_1 \leq u_1^- + 1 \leq l$, les valeurs de ces entiers sont entre 0 et $l-1$, ils ne peuvent donc pas être distincts et non nuls et ce poids est de nouveau singulier. •

Chapitre 7

Deux résultats pour des fibrés amples généraux

7.1 Un théorème pour les puissances de Schur quelconques d'un fibré ample.

7.1.1 Etude d'une classe de fonctions

Dans le paragraphe suivant, on aura besoin d'une fonction $\epsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant la condition

$$(*) \quad \forall \mu \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{N}, x + \mu\epsilon(x) \in \mathbb{N} \Longrightarrow \epsilon[x + \mu\epsilon(x)] \leq \epsilon(x) + \mu$$

Soit $C_2^k = \frac{k(k-1)}{2}$; nous vérifierons aisément par la suite que la fonction δ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, C_2^{\delta(n)} \leq n < C_2^{\delta(n)+1}$ satisfait $(*)$. Le but de ce paragraphe est de décrire l'ensemble de toutes ces fonctions et de prouver que δ en est le plus petit élément. Les premières valeurs de δ sont : $\delta(0) = 1, \delta(1) = \delta(2) = 2, \delta(3) = \delta(4) = \delta(5) = 3$.

On s'intéresse tout d'abord à un ensemble a priori plus grand, celui des fonctions vérifiant :

$$(**) \quad \forall \mu \in \{-1, 1\}, \forall x \in \mathbb{N}, x + \mu\epsilon(x) \in \mathbb{N} \Longrightarrow \epsilon[x + \mu\epsilon(x)] \leq \epsilon(x) + \mu$$

Soit x tel que $\epsilon(x) = 0$; la condition $(**)$ avec $\mu = -1$ donne $\epsilon(x) \leq \epsilon(x) - 1$, et donc une contradiction. Ainsi, ϵ est en fait à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Lemme 7.1.1 *Une fonction ϵ vérifiant $(**)$ est croissante et vérifie $\epsilon[x+\epsilon(x)] = \epsilon(x)+1$.*

Démonstration : Soit ϵ vérifiant $(**)$, $x \in \mathbb{N}$ et $r := \epsilon(x)$. On montre alors par récurrence sur r que :

- $\forall x' > x, \epsilon(x') \geq r$.
- $\epsilon(x + r) = \epsilon(x) + 1$.

Si $r = 1$, le premier point a déjà été constaté ; pour ce qui concerne $\epsilon(x+1)$, c'est un entier compris entre 1 et 2. Mais si $\epsilon(x+1) = \epsilon(x) = 1$, on a $\epsilon(x+1-1) \leq \epsilon(x+1) - 1$ et une contradiction.

Supposons maintenant l'hypothèse de récurrence vraie jusqu'au rang r_0 et supposons que $\epsilon(x) = r_0 + 1$. Montrons le premier point par récurrence sur x' : si $\epsilon(x') \geq r_0 + 1$ mais $\epsilon(x'+1) = r \leq r_0$, alors l'hypothèse de récurrence au niveau r montre que $\epsilon[(x'+1)+r] = r+1$ et donc par $(**)$ on a $\epsilon(x') = \epsilon[(x'+r+1) - (r+1)] \leq (r+1) - 1 = r$, donc une contradiction.

Ainsi, $\epsilon(x + r_0 + 1) \in \{r_0 + 1, r_0 + 2\}$. Le même raisonnement que précédemment donne $\epsilon(x + r_0 + 1) = r_0 + 2$. •

Lemme 7.1.2 *Les conditions* $(*)$ *et* $(**)$ *sont équivalentes.*

Démonstration : En effet, une fonction vérifiant $(**)$ est croissante et une récurrence immédiate sur $|\mu|$ prouve qu'elle vérifie $(*)$. •

On peut grâce au lemme 7.1.1 paramétrer toutes les fonctions vérifiant $(*)$ par un nombre, $\epsilon(0)$, et une suite $(l_i := \min\{x : \epsilon(x) \geq i\})_{i \geq \epsilon(0)}$ strictement croissante et vérifiant, pour tout $i > \epsilon(0)$, $l_{i+1} \in \{l_i + i - 1, l_i + i\}$. En effet, soit $i > \epsilon(0)$; si ϵ vérifie $(*)$, $\epsilon(l_i + i) = \epsilon(l_i) + 1$ par le lemme 7.1.1. Par ailleurs, ce même lemme asssure que l'image de ϵ est $[\epsilon(0), +\infty[\cap\mathbb{N}$, et donc que $\epsilon(l_i - 1) = i - 1$. Ainsi $\epsilon(l_i + i - 2) = \epsilon(l_i - 1 + i - 1) \leq \epsilon(l_i - 1) + 1 \leq i$ par $(*)$. Réciproquement, il est immédiat de constater qu'une telle suite fournit une fonction vérifiant $(**)$. Dans le cas de δ, on a $l_i = C_2^i$, donc $l_{i+1} = l_i + i$ et δ est bien une fonction vérifiant $(*)$.

Enfin, si ϵ et ϵ' sont deux fonctions vérifiant $(*)$, alors évidemment $\epsilon \leq \epsilon'$ si et seulement si $\epsilon(0) \leq \epsilon'(0)$ et $l_i \geq l'_i$ pour tous les i tels que ces nombres soient définis. Puisque $(C_2^i)_i$ est la plus grande suite vérifiant $l_{i+1} \in \{l_i + i - 1, l_i + i\}$, on en déduit comme annoncé :

Proposition 7.1 *La fonction* δ *est la plus petite fonction de l'ensemble des fonctions vérifiant* $(*)$.

Ce résultat a ceci de rassurant qu'il montre que l'on ne peut pas améliorer le résultat du paragraphe suivant en remplaçant δ par une autre fonction vérifiant $(*)$, et qui prendrait une valeur plus petite ne serait-ce qu'en un point.

On peut, grâce à la fonction δ, définir un ordre sur $\mathbb{N}^2$. Celui-ci est donné par l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^3$ et l'injection $(x, \sigma) \mapsto (\delta(x)+\sigma, x - C_2^{\delta(x)}, \sigma)$. Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble $\mathbb{N}^2$ muni de cet ordre. L'intérêt principal de $\mathcal{N}$ est qu'il vérifie :

Lemme 7.1.3 *Pour tous* $(x, \sigma) \in \mathcal{N}, \mu \in \mathbb{Z} - \{0\}$, *si* $r = \delta(x)$ *et si* $x + \mu r \in \mathbb{N}$, *alors* $(x + \mu r, \sigma - \mu) < (x, \sigma)$.

Démonstration : Par le lemme 7.1, $\delta(x+\mu r) \leq \delta(x)+\mu$, de sorte que $\delta(x+\mu r)+\sigma-\mu \leq \delta(x)+\sigma$. Comme $x + \mu r - C_2^{r+\mu} = x + \mu r - \frac{(r+\mu)(r+\mu-1)}{2} = x - C_2^r - C_2^\mu$, le cas d'égalité implique $x + \mu r - C_2^{\delta(x+\mu r)} = x - C_2^r - C_2^\mu$ donc $x + \mu r - C_2^{\delta(x+\mu r)} \leq x - C_2^r$, le cas d'égalité donnant $C_2^\mu = 0$ soit $\mu = 0$ ou 1 ; 0 étant exclus, on a donc $\sigma - \mu < \sigma$. •

7.1.2 Un résultat sur les produits tensoriels de crochets

W. Nahm et F. Laytimi ont montré un théorème d'annulation pour la cohomologie d'une puissance de Schur correspondant à un crochet d'un fibré ample [LN 02, th 2.1]. Dans ce paragraphe, je généralise leur résultat à un produit de crochets.

Proposition 7.2 *Soit E un fibré ample de rang e sur une variété X projective et lisse de dimension n. Soit $a \in \mathbb{N}$, $(k_i)_{1\leq i\leq a}$ et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq a}$ des entiers tels que $\alpha_i < k_i$; soit $\sigma = \sum \alpha_i$ et $k = \sum k_i$; alors,*

$$H^{p,q}(X, \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E) = 0 \text{ si } q > n-p+[\delta(n-p)+\sigma][ae-k+2\sigma]-\sigma(\sigma+1).$$

Posons $Q(p,\sigma) = n-p+[\delta(n-p)+\sigma][ae-k+2\sigma]-\sigma(\sigma+1)$.
Démonstration : On démontre ce résultat par récurrence sur les couples $(n-p,\sigma) \in \mathcal{N}$. Cette récurrence peut sembler peu naturelle et troubler le lecteur ; aussi, je donne les 10 premiers éléments de $\mathcal{N}$ pour qu'il puisse suivre plus aisément les premiers pas de la récurrence.

	$n-p$	σ	$\delta(n-p)+\sigma$	$n-p-C_2^{\delta(n-p)}$	σ
1	0	0	1	0	0
2	1	0	2	0	0
3	0	1	2	0	1
4	2	0	2	1	0
5	3	0	3	0	0
6	1	1	3	0	1
7	0	2	3	0	2
8	4	0	3	1	0
9	2	1	3	1	1
10	5	0	3	2	0

Si on place ces numéros d'apparition sur un plan repéré par $n-p$ selon l'axe des abscisses et σ selon l'axe des ordonnées, on obtient le schéma suivant :

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & & & & & & \sigma & \\ & & & & & & & & \uparrow & \\ & & & & & & & & 7 & \\ & & & & & & & 9 & 6 & 3 \\ n-p & \leftarrow & 10 & 8 & 5 & 4 & 2 & 1 & & \end{array}$$

La méthode employée est celle maintenant classique qui consiste à constater que les groupes de cohomologie que l'on cherche à annuler apparaissent dans une suite spectrale qui calcule la cohomologie d'un fibré en droites ample sur une variété adéquate $\mathcal{Y}$ elle-même fibrée au-dessus de X. Ce dernier groupe est nul par le théorème de Kodaira si q est suffisant ; il suffit donc de s'assurer que ces groupes "passent à travers" la suite spectrale, ce qui fait intervenir une récurrence.

Soit donc $X^n, E^e, p, q, (k_i)$ et σ_0 vérifiant les hypothèses de la proposition fixés. On va montrer l'annulation de $H^{p,q}(X, \oplus_{\alpha_i:\sum\alpha_i=\sigma_0} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E)$ en supposant la proposition

vraie pour tous les couples (p', σ) tels que $(n-p', \sigma) < (n-p, \sigma_0)$. Supposons la suite (k_i) croissante. Soit $r = \delta(n-p)$; soit aussi l_i et s_i les quotients et restes de la division de k_i par r : $k_i = rl_i + s_i$. Un premier lemme assure que l'on peut supposer que $e > r$ tous les l_i sont supérieurs ou égaux à

$$l_0 = \begin{cases} \frac{r\sigma_0 + (n-p)}{r-1} & si \quad r > 2 \\ \sigma + 1 & si \quad r = 1 \end{cases}$$

Lemme 7.1.4 *Soit l un entier tel que la proposition 7.2 soit vraie pour une certaine valeur de $n-p$ et de σ, et pour toutes les variétés et tous les fibrés vectoriels amples, à la condition que tous les l_i soient supérieurs ou égaux à l et que $e > \delta(n-p)$. Alors cette proposition est vraie sans restrictions pour ces valeurs de e et de σ.*

Démonstration : Soit E un fibré sur une variété X et L un fibré en droites ample sur X. On peut supposer $l > \delta(n-p)$. La proposition est vraie pour $l_i' = l_i + l$ (c'est-à-dire, puisque $k_i' = rl_i' + s_i$, pour $k_i' = k_i + rl$) et les fibrés amples E' de rang supérieur à $\delta(n-p)$. Pour le fibré ample $E' = E \oplus L^{\oplus rl}$ de rang $e + rl$, et pour $k_i' = k_i + rl$, on a donc l'annulation de $H^{p,q}(X, \otimes_i Z^{k_i'-\alpha_i-1,k_i'}E') = 0$ si

$$\begin{aligned} q &> [\delta(n-p)+\sigma][a(e+rl) - k' + 2\sigma] - \sigma(\sigma+1) \\ &= [\delta(n-p)+\sigma][ae - k + 2\sigma] - \sigma(\sigma+1). \end{aligned}$$

Mais comme $Z^{k_i'-\alpha_i-1,k_i'}E' \supset Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E \otimes L^{\otimes arl}$, on en déduit que pour toute variété X, tous fibrés E et L, $H^{p,q}(X, \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E \otimes L^{\otimes arl}) = 0$ si $q > [\delta(n-p)+\sigma][ae-k+2\sigma] - \sigma(\sigma+1)$. En vertu du lemme 1.5.1 p.128 de [Man 92] qui n'a besoin de l'hypothèse que pour les fibré vectoriels E amples, ce résultat reste vrai si L est trivial, et le lemme est donc prouvé. •

On suppose donc dorénavant que $l_1 \geq l_0$ et $e > r$. Si $0 < s < r < e$ sont des entiers et V un espace vctoriel de dimension e, on notera $M_{s,r}(V)$ la variété de drapeaux absolue constituée de l'ensemble des couples (V_r, V_s) de sous-espaces vectoriels de V avec

$$0 \subset V_r \subset V_s \subset V, \quad codim(V_r) = r, \quad codim(V_s) = s.$$

Soit alors $\mathcal{M}_{s,r}(E)$ la variété de drapeaux relative à E, c'est-à-dire la variété fibrée au-dessus de X dont la fibre au-dessus du point x s'identifie à la variété $M_{s,r}(E_x)$ des drapeaux de la forme

$$(0 \subset E_r \subset E_s \subset E_x), \quad codim(V_r) = r, \quad codim(V_s) = s.$$

Soit aussi $\mathcal{Q}^{l+1,l}$ le fibré en droites sur $\mathcal{M}_{s,r}(V)$ dont la fibre au-dessus du drapeau précédent s'identifie à $(\det(E_x/E_s))^{l+1} \otimes (\det(E_s/E_r))^l = \det(E/E_s) \otimes (\det(E/E_r))^l$. Considérons alors le produit au-dessus de X défini par $\mathcal{Y} := \times M_{s_i,r}(E)$ et le fibré en droites $\mathcal{L}$ au-dessus de $\mathcal{Y}$ égal au produit $\otimes \pi_i^* \mathcal{Q}_i$, si π_i désigne la projection de $\mathcal{Y}$ sur $\mathcal{M}_{s_i,r_i}(E)$ et $\mathcal{Q}_i$ le fibré $\mathcal{Q}^{l_i+1,l_i}$ sur cette variété de drapeaux relative. Comme $e > r > s_i$ pour tout i, cette variété a bien un sens.

Laurent Manivel a étudié une partie de la cohomologie des fibrés en droites $Q^{l+1,l}$ sur une variété de drapeaux absolue, partie suffisante pour établir notre proposition. Néanmoins, j'ai besoin de généraliser ses résultats à un produit de variétés de drapeaux. Cette généralisation sera une conséquence facile de la formule de Kunneth.

Soit donc $M_{s,r}(V)$ une variété de drapeaux absolue et $Q^{l+1,l}$ comme précédemment. Notons $\lambda = l-1, t(r) = \frac{r(r+1)}{2}$ et $k = rl+s$. Notons $\pi_{r,s} = \frac{s(2r-s+1)}{2}$ et pour π un entier,

$$n_s(\pi) = \#\{c \in \{0,1\}^r, |c| = s \text{ et } \sum ic_i = \pi\}$$

Ainsi $n_s(\pi) = 0$ si $\pi < 0$ ou $\pi > \pi_{r,s}$.

Alors, on a [Man 92, proposition 1.2.1, p.111 et lemme 1.3.1, p.114] :

Proposition 7.3 *Supposons $p = \lambda.t(r) + \pi$ avec $\pi \geq \pi_{r,s} - k + l$. Alors*

$$H^{p,q}(M_{s,r}(V), Q^{l+1,l}) = \bigoplus_{\alpha=0}^{l} n_s(\pi + r\alpha)\delta_{q,p-r\lambda-s+\alpha} Z^{k-\alpha-1,k}V.$$

Considérons maintenant un produit $Y = \times M_{s_i,r}(V)$ de variétés de drapeaux et le fibré en droites $L = \otimes \pi_i^* Q_i$, avec Q_i le fibré Q^{l_i+1,l_i} sur $M_{s_i,r}(V)$ et π_i la projection naturelle de Y sur $M_{s_i,r}$. Je propose alors la généralisation suivante de la proposition 7.3, si λ_i désigne $l_i - 1$, $\lambda = \sum \lambda_i$, $l = \sum l_i$, $s = \sum s_i$, et $k = \sum k_i$:

Proposition 7.4 *Supposons que $p = \lambda.t(r) + \pi$ avec $\pi \geq \sum \pi_{r,s_i} - k + l$.*
Soit $\sigma = q + r\lambda + s - p$. Alors

$$H^{p,q}(Y, L) = n_s(\pi + r\sigma) \bigoplus_{\alpha_i : \sum \alpha_i = \sigma} \otimes_i Z^{k_i - \alpha_i - 1, k_i} V.$$

Dans cette proposition, $n_s(\pi)$ désigne le nombre

$$n_s(\pi) := \sum_{\sum \pi_i = \pi} n_{s_i}(\pi_i) = \#\{c_{i,j} \in \{0,1\}^{r^2} : \forall i \ |c_i| = s_i \text{ et } \sum_{i,j} jc_{i,j} = \pi\}.$$

Cette proposition montre que le fait qu'un groupe $\otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}V$ soit ou non dans $H^{p,q}(Y,L)$ ne dépend que de la somme σ des α_i, et non des valeurs de tous les α_i ; c'est ce qui fait que l'on obtient un théorème d'annulation où la borne ne dépend aussi que de σ.

Démonstration : On applique tout d'abord la formule de Kunneth :

$$H^{p,q}(Y, L) = \bigoplus_{\sum p_i = p, \sum q_i = q} \otimes H^{p_i,q_i}(M_{s_i,r}, Q^{l_i,l_i+1})$$

Ecrivons chaque p_i comme $\lambda_i t(r) + \pi_i$. Si une telle suite d'entiers p_i fournit un groupe non nul, alors par la proposition 7.3, on a pour tout i la relation $\pi_i \leq \pi_{r,s_i}$. Si donc il existe

i tel que $\pi_i < \pi_{r,i} - k_i + l_i$, comme $\pi = \sum \pi_i$, on en déduit que $\pi < \sum \pi_{r,_i} - k + l$, ce qui contredit l'hypothèse de la proposition. Ainsi, pour tout i on a $\pi_{r,s_i} - k_i + l_i \leq \pi_i \leq \pi_{r,s_i}$, et donc on peut en déduire par la proposition 7.3 que

$$H^{p_i,q_i}(M_{s_i,r}, Q^{l_i,l_i+1}) = \oplus_{\alpha_i} n_s(\pi_i + r\alpha_i)\delta_{q_i,p_i-r\lambda_i-s_i+\alpha_i} Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}V.$$

Si donc $\otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}V$ apparaît dans notre groupe de cohomologie, cela implique que $q_i = p_i - r\lambda_i - s_i + \alpha_i$, et par sommation que $q = p - r\lambda - s + \sigma$. Enfin, la multiplicité de ce groupe est bien la somme sur les π_i des produits des multiplicités de $Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}V$ dans $H^{p_i,q_i}(M_{s_i,r}, Q^{l_i,l_i+1})$, soit $n_s(\pi)$. •

Notons $P_{\max} = \lambda.t(r) + \sum \pi_{r,s_i}$ et $Q_{\max} = \lambda.t(r-1) + \sum \pi_{r,s_i} - S$. Une conséquence de la proposition 7.4 est :

Proposition 7.5 *Soit p et q deux entiers. Alors :*
- *Si $p > P_{max}$ ou $q > Q_{max}$, alors $H^{p,q}(Y, L) = 0$.*
- *Si $p \geq P_{max} - r\sigma$ ou $q \geq Q_{max} - (r-1)\sigma$, alors*

$$H^{p,q}(Y, L) \subset \bigoplus_{\sum \alpha_i \leq \sigma} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}V$$

On considère maintenant la fibration en variétés de drapeaux $\pi : \mathcal{Y} \to X$ introduite précédemment. Soit ${}^P E_m^{i,j}$ la suite spectrale de Borel-Le Potier, avec $P = p + P_{\max} - r\sigma_0$. Le résultat souhaité va être conséquence de propriétés de cette suite spectrale. La première exhibe un terme de la suite spectrale de Borel-Le Potier qui contient le groupe que l'on veut annuler :

Lemme 7.1.5 *Soit $q_0 = Q_{max} - (r-1)\sigma_0$. Alors*

$${}^P E_1^{p,q+q_0-p} \supset H^{p,q}(X, \oplus_{\alpha_i : \sum \alpha_i = \sigma_0} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E)$$

Démonstration : Comme on a supposé que $l_1(r-1) \geq r\sigma_0 + (n-p)$, on a

$$\begin{aligned} n + P_{\max} - k_1 + l_1 &= n + P_{\max} - l_1(r-1) - s_1 \\ &\leq n + P_{\max} - r\sigma_0 - (n-p) \\ &= P_{\max} + p - r\sigma_0 = P \end{aligned}$$

Ainsi, si $p \leq n$, alors $P - p \geq P - n \geq P_{\max} - k_1 + l_1$. Si $p > n$, il est clair que ${}^P E_1^{p,q+q_0-p} = 0$. On peut donc utiliser les propositions 7.4 et 7.5 pour obtenir des renseignements sur les $H^{P-p,q'}(Y, L)$ pour tous q'. Pour tous les entiers q_1 et q_2, on a (cf notation 5.1)

$${}^{P,p}E_2^{q_1,q_2} = H^{p,q_1}[X, R^{P-p,q_2}\pi_*\mathcal{L}].$$

Si $f_{i,j}$ sont les applications de changement de cartes de E, on a vu que $R^{P-p,q_2}\pi_*\mathcal{L}$ est un fibré vectoriel de fibre type $H^{P-p,q_2}(Y, L)$ (soit $x \in X$; $Y = \pi^{-1}(x)$ et L est la restriction du fibré en droites $\mathcal{L}$ à Y), et dont les changements de carte sont induits

par $f_{i,j}$. Supposons que $H^{P-p,q_2}(Y,L) = S_\lambda E_x$. Nous savons que $|\lambda| = \sum rl_i + s_i$. On en déduit donc que pour $g \in GL(E_x)$, l'application induite par g sur $H^{P-p,q_2}(Y,L)$ est $S_\lambda g$. En effet, c'est vrai $g \in SL(E_x)$ par le théorème de Bott et pour g une homothétie, puisque l'application induite par $\lambda.Id$ est $\lambda^{\sum rl_i+s_i}$ (l'action de $\lambda.Id$ sur le fibré tangent est triviale).

Les applications de changement de cartes de $R^{P-p,q_2}\pi_*\mathcal{L}$ sont donc les applications $S_\lambda f_{i,j}$, si $f_{i,j}$ est une application de changement de cartes de E. On a donc que $R^{P-p,q_2}\pi_*\mathcal{L} = S_\lambda E$.

Or $H^{P-p,q_0}(Y,L) = \oplus_{\alpha_i:\sum \alpha_i=\sigma_0} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}V$. En effet, si un terme de la forme $\oplus_{\alpha_i:\sum \alpha_i=\sigma} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}V$ est une composante de ce groupe, alors on doit avoir $\sigma = q_0 + rL + S - (P-p) = \sigma_0$. Par ailleurs, il est clair que $n_s(\sum \pi_{r,s_i}) = 1$. On en déduit donc que ${}^{P,p}E_2^{q,q_0} = H^{p,q}(X, \oplus_{\alpha_i:\sum \alpha_i=\sigma_0} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E)$.

Par ailleurs, si $q_2 > q_0$ et q_1 est quelconque, ${}^{P,p_1}E_2^{q_1,q_2} = 0$, toujours par la proposition 7.5. Enfin, si $q_1 > q$ et $q_2 < q_0$, et que $H^{p,q_1}(X, \oplus_{\alpha_i:\sum \alpha_i=\sigma} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E) \subset {}^{P,p_1}E_2^{q_1,q_2}$, on a $\sigma < \sigma_0$ et $H^{p,q_1}(X, \oplus_{\alpha_i:\sum \alpha_i=\sigma} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E) = 0$ par l'hypothèse de récurrence. Toutes les différentielles d_m issus de ou aboutissant sur ${}^{P,p}E_m^{q_0,q}$ sont donc nulles, et ${}^{P,p}E_\infty^{q_0,q} = H^{p_1,q_1}(X, \oplus_{\alpha_i:\sum \alpha_i=\sigma_0} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E)$, ce qui implique notre lemme. •

Pour voir que notre groupe précédent passe à travers la suite spectrale de Borel-Le Potier, il suffit de montrer l'annulation des groupes ${}^{P}E_1^{p+m,q-p-m+\mathrm{sgn}(m)+q_0}$, pour tous les entiers m non nuls. Soit donc m un tel entier et p_1, q_1 et q_2 des entiers tels que ${}^{P,p_1}E_\infty^{q_1,q_2}$ soit un élément d'une filtration de ${}^{P}E_1^{p+m,q-p-m+\mathrm{sgn}(m)+q_0}$, c'est-à-dire des entiers tels que :
$p_1 = p + m$ et $q_1 + q_2 - p_1 = q - p - m + \mathrm{sgn}(m) + q_0$. Remarquons que de manière équivalente, on a $p_1 = p + m$ et $q_1 + q_2 = q + q_0 + \mathrm{sgn}(m)$.

De nouveau, il suffit de montrer que tous les groupes ${}^{P,p_1}E_2^{q_1,q_2}$ sont nuls. Or ceux-ci valent $H^{p_1,q_1}[X, H^{P-p_1,q_2}(\mathcal{Y},\mathcal{L})]$. Supposons que

$$\oplus_{\alpha_i:\sum \alpha_i=\sigma} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}V \subset H^{P-p_1,q_2}(Y,L).$$

Alors par la proposition 7.5, $P - p_1 \leq P_{\max} - r\sigma = (P-p) - r(\sigma - \sigma_0)$, donc $p_1 \geq p + r(\sigma - \sigma_0)$, soit $m \geq r(\sigma - \sigma_0)$. Par ailleurs cette même proposition assure que $q_2 \leq Q_{\max} - (r-1)\sigma = q_0 - (r-1)(\sigma - \sigma_0)$.

L'égalité $q_1 + q_2 = q + q_0 + \mathrm{sgn}(m)$ donne alors $q_1 \geq q + \mathrm{sgn}(m) + (r-1)(\sigma - \sigma_0)$. Notons $\mu = \sigma - \sigma_0$, comme nous avons vu que $m \geq r\mu$, $\mathrm{sgn}(m) \geq \mathrm{sgn}(\mu)$ et nous avons donc établi :

$$\sigma = \sigma_0 + \mu$$
$$p_1 \geq p + \mu r$$
$$q_1 \geq q + \mathrm{sgn}(\mu) + (r-1)\mu$$

Sous ces hypothèses, il ne nous reste plus, en utilisant l'hypothèse de récurrence, qu'à prouver l'annulation de $H^{p_1,q_1}(X, \oplus_{\alpha_i:\sum \alpha_i=\sigma} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E)$. Remarquons tout d'abord que l'on peut supposer que $ae - k + \sigma \leq 0$, car sinon $\oplus_{\alpha_i:\sum \alpha_i=\sigma} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E = 0$.

Lemme 7.1.6 *Dans l'ensemble ordonné $\mathcal{N}$, on a :* $(n - p_1, \sigma) < (n - p, \sigma_0)$

Démonstration : Cet ordre étant croissant selon les deux coordonnées (c'est-à-dire que si $x \leq x', y \in \mathbb{N}$, alors $(x,y) \leq (x',y)$ et $(y,x) \leq (y,x')$), cela découle du lemme 7.1.3. •

Lemme 7.1.7 *Si $q > Q(p,\sigma_0)$ alors $q_1 > Q(p_1,\sigma)$.*

Démonstration : On peut supposer que $p_1 = p + \mu r$ et $q_1 = q + \mu(r-1) + \mathrm{sgn}(\mu)$. Calculons alors $Q(p,\sigma_0) - Q(p+\mu r, \sigma_0+\mu) + \mathrm{sgn}(\mu) + (r-1)\mu$. Cette quantité vaut : $2\mu r + 2\mu\sigma_0 + \mu^2 + \mathrm{sgn}(\mu) + (r+\sigma_0)(ae-k+2\sigma_0) - [\delta(n-p-\mu r)+\sigma_0+\mu][ae-k+2\sigma_0+2\mu]$. En remarquant que $2\mu r + 2\mu\sigma_0 = 2\mu(r+\sigma_0)$ et en factorisant par $r+\sigma_0$, on en déduit que cette quantité égale
$(ae-k+2\sigma_0+2\mu)(r+\sigma_0) - (ae-k+2\sigma_0-2\mu)[\delta(n-p+\mu r)+\sigma_0-\mu] + \mu^2 + \mathrm{sgn}(\mu)$, soit $(ae-k+2\sigma)[r+\mu-\delta(r+\mu r)] + \mu^2 + \mathrm{sgn}(\mu)$.

Comme $ae - k + \sigma \geq 0$, le lemme 7.1 prouve alors que ce nombre est positif. •

Enfin, on a l'inégalité suffisante pour assurer que ${}^P E_\infty^{p,q-p+q_0} = 0$:

Lemme 7.1.8 *On a $P + q + q_0 - \dim \mathcal{Y} > 0$.*

Démonstration : Tout d'abord,

$$2\sum \pi_{r,s_i} - S = 2rS + S - \sum s_i^2 - S \geq rS \text{ et } k = (L+a)r + S.$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rl} & P + q + q_0 - \dim \mathcal{Y} \\ = & p + q + Lt(r) + Lt(r-1) + 2\sum \pi_{r,s_i} - S - (2r-1)\sigma_0 - n - ar(e-r) \\ \geq & \sigma_0(ae - k + \sigma_0) \end{array}$$ •

Nous avons ainsi (péniblement) achevé la preuve de la proposition 7.2. Nous allons maintenant montrer une autre proposition qui rétablit la symétrie entre p et q :

Proposition 7.6 *Soit E un fibré ample de rang e sur une variété X projective lisse et de dimension n. Soit $a \in \mathbb{N}$, $(k_i)_{1\leq i\leq a}$ et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq a}$ des entiers tels que $\alpha_i < k_i$; soit $\sigma = \sum \alpha_i$ et $k = \sum k_i$, alors*

$$H^{p,q}(X, \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E) = 0 \text{ si } p > n - q + [\delta(n-q)+\sigma][ae-k+2\sigma] - \sigma(\sigma+1).$$

Posons $P(q,\sigma) = n - q + [\delta(n-q)+\sigma][ae-k+2\sigma] - \sigma(\sigma+1)$.

Démonstration : La démonstration est très similaire à celle de la proposition 7.2. En effet, soit $r = \delta(n-q)$ et comme précédemment $\mathcal{Y} := \times M_{s_i,r}(E)$ et le fibré en droites $\mathcal{L}$ au-dessus de $\mathcal{Y}$ égal au produit $\otimes \pi_i^* \mathcal{Q}_i$, où l_i et s_i sont le quotient et le reste de la division euclidienne de k_i par r et $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}^{l_i,l_i+1}$. Soit aussi $p + P_{max} - r\sigma_0$, le lemme 7.1.5 reste vrai et pour voir que ce groupe passe à travers la suite spectrale, il suffit comme précédemment de montrer en utilisant l'hypothèse de récurrence que si

$$\begin{array}{c} \sigma = \sigma_0 + \mu \\ p_1 \geq p + \mu r \\ q_1 \geq q + \mathrm{sgn}(\mu) + (r-1)\mu \end{array}$$

alors $H^{p_1,q_1}(X, \oplus_{\alpha_i:\sum\alpha_i=\sigma} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E) = 0$.

Ceci découle du fait que le lemme 7.1.8 reste vrai et que l'on a l'analogue des lemmes 7.1.6 et 7.1.7 :

Lemme 7.1.9 *Dans l'ensemble ordonné $\mathcal{N}$, on a :* $(n-q_1,\sigma)<(n-q,\sigma_0)$.

Démonstration : On peut aussi supposer que $q_1=q+\mathrm{sgn}(\mu)+(r-1)\mu$ et $\sigma=\sigma_0+\mu$. Alors si $\mu<0$, $q_1\geq q+r\mu$ et le lemme 7.1.3 s'applique. Si $\mu=1$, ce même lemme fonctionne car $q_1=q+r$. Pour $\mu>1$, en posant $x=n-(q+r)$, ce lemme donne $(n-(q+r)-(\mu-1)\delta(n-(q+r)),\sigma+\mu)<(n-(q+r),\sigma+1)$. Comme $\delta(n-(q+r))\leq\delta(n-q)-1$, on a $(n-(q+r)-(\mu-1)(r-1),\sigma+\mu)<(n-(q+r),\sigma+1)$.L'égalité $n-q_1=n-q-1-\mu(r-1)=n-(q+r)-(\mu-1)(r-1)$ donne alors $(n-q_1,\sigma)<(n-q,\sigma_0)$, et le lemme est démontré. •

Lemme 7.1.10 *Si $p>P(q,\sigma_0)$ alors $p_1>P(q_1,\sigma)$.*

Démonstration : On peut supposer que $p_1=p+\mu r$ et $q_1=q+\mu(r-1)+\mathrm{sgn}(\mu)$. Calculons alors $P(q,\sigma_0)-P(q+\mu(r-1)+\mathrm{sgn}(\mu),\sigma_0+\mu)+\mu r$. Cette quantité vaut :

$$\begin{array}{c}2\mu r+2\mu\sigma_0+\mu^2+\mathrm{sgn}(\mu)+(r+\sigma_0)(ae-k+2\sigma_0)\\ -[\delta(n-q-\mathrm{sgn}(\mu)-\mu(r-1))+\sigma_0+\mu][ae-k+2\sigma_0+2\mu].\end{array}$$

En remarquant que $2\mu r+2\mu\sigma_0=2\mu(r+\sigma_0)$ et en factorisant par $r+\sigma_0$, on voit que cette quantité égale

$$\begin{array}{c}\mu^2+\mathrm{sgn}(\mu)+(ae-k+2\sigma_0+2\mu)(r+\sigma_0)\\ -(ae-k+2\sigma_0+2\mu)[\delta(n-q-\mathrm{sgn}(\mu)-\mu(r-1))+\sigma_0+\mu],\end{array}$$

soit $(ae-k+2\sigma)[r-\mu-\delta(n-q-\mathrm{sgn}(\mu)-\mu(r-1))]+\mu^2-\mathrm{sgn}(\mu)$.

Comme $ae-k+\sigma\geq 0$ et que le lemme 7.1.9 implique
$\delta(n-q-\mathrm{sgn}(\mu)-\mu(r-1))+\mu\leq\delta(n-q)=r$, ce dernier nombre est donc positif. •

On peut maintenant regrouper les propositions 7.2 et 7.6 sous la forme du

Théorème 7.1 *Soit E un fibré ample de rang e sur une variété X de dimension n, $a\in\mathbb{N}$, $(k_i)_{1\leq i\leq a}$ et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq a}$ des entiers tels que $\alpha_i<k_i$; soit $\sigma=\sum\alpha_i$ et $k=\sum k_i$, alors*

$$H^{p,q}(X,\otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E)=0$$
$$si$$
$$p+q>n+[\min[\delta(n-p),\delta(n-q)]+\sigma][ae-k+2\sigma]-\sigma(\sigma+1).$$

7.2 Résultats topologiques en petit co-rang

Dans ce paragraphe, je démontre certaines propriétés topologiques attendues pour les fibrés vectoriels amples. Plus précisément, si X est une variété projective lisse, E un fibré ample sur X de rang e et muni d'une forme quadratique à valeurs dans L, je démontre des propriétés topologiques pour le lieu $D_k(E)\subset X$ des points x où cette forme quadratique est au plus de rang k, sous la condition $e-k\leq 4$. J'appelle co-rang l'entier $e-k$ (c'est le co-rang de la forme quadratique). Lorsque k est pair, la connexité de ce lieu a déjà été montrée [Tu 89] ; ma méthode ne distingue pas ce cas des autres et

montre d'autres propriétés topologiques. Par contre, elle présente le sérieux inconvénient de se limiter aux cas où $e-k \leq 4$ et de supposer que ce lieu est au moins de dimension 2, alors que [Tu 89] montre la connexité si cette dimension est supérieure ou égale à 1 (pour k pair). Si k est impair, [Tu 88] montre aussi la connexité, mais à condition que cette dimension soit au moins $e-k$. Si $e-k=4$, ma borne, 2, est donc meilleure. Mentionnons enfin que [Lay 96, prop 2.3] donne aussi la connexité d'un lieu de dimension strictement positive, mais pour $e-k \leq 2$, ce qui, comme le lecteur pourra le mesurer, simplifie considérablement le problème.

En fait, la démonstration de ce résultat sera le prétexte à expliquer des techniques un peu nouvelles permettant d'établir des théorèmes d'annulation. Ces techniques ne donnant pas précisément les résultats attendus, je n'ai pas essayé de les généraliser aux plus grands co-rangs.

7.2.1 Propriétés topologiques des lieux de dégénérescence

Dans le théorème qui suit, je note $t(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Théorème 7.2 *Soit E un fibré vectoriel de rang e, sur une variété X lisse, projective et de dimension n. Supposons que E est muni d'une forme quadratique à valeurs dans un fibré en droites L. Soit k un entier et supposons que*

- $\dim D_k(E) = \rho := n - t(e-k)$
- *$S^2E^* \otimes L$ est ample.*
- $e-k \leq 4$

Alors, l'application de restriction $H^q(X, \mathcal{O}_X) \to H^q(D_k(E), \mathcal{O}_{D_k(E)})$ est un isomorphisme pour $0 \leq q < \rho - 1$, et est injective pour $q = \rho - 1$.

La dimension ρ est celle attendue, la dimension effective étant toujours supérieure ou égale à cette dimension. En effet, on s'est donné une section de $S^2E^* \otimes L$, soit un morphisme $\sigma : X \to S^2E^* \otimes L$. Puisque $D_k(E)$ est l'image réciproque par σ de la variété, de codimension $t(e-k)$ dans $S^2E^* \otimes L$, des formes quadratiques de rang au plus k, $D_k(E)$ est au plus de codimension $t(e-k)$.

Avant de passer à la démonstration, énonçons le

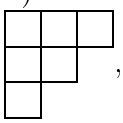
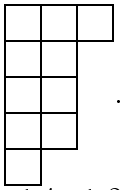
Corollaire 7.7 *Sous les mêmes hypothèses, et si de plus $\rho \geq 2$ et X est connexe, alors $D_k(E)$ est connexe.*

Une conjecture de Fulton et Lazarsfeld [Ful 81, Remark 2,p.50] prédit cette connexité si $\rho \geq 1$.

Démonstration : En effet, par le théorème 7.2, l'application de restriction $H^0(X, \mathcal{O}_X) \to H^0(D_k(E), \mathcal{O}_{D_k(E)})$ est un isomorphisme. •

Démonstration du théorème 7.2 : Il est connu que ce résultat découle de théorèmes d'annulation adéquats [Man 97]. Pour le confort du lecteur, j'explique comment. Notons $D := D_k(E)$. Tout d'abord, il existe une résolution du faisceau $\mathcal{O}_D$ sur $\mathcal{O}_X$ par des fibrés vectoriels [JPW 81, théorème 3.19,p.139] : le i-ième terme R^i d'une telle résolution est donné par

$$R^i := \bigoplus_{\substack{\lambda = (2l, \mu, \mu^*) \\ |\mu| + l(2l-1) = i}} S_{\lambda(k-1)}E \otimes L^{-l(2l+k-1)}.$$

Dans cette formule, l'expression $\lambda = (2l, \mu, \mu^*)$ signifie que la partition λ est de rang $2l$, que $\lambda_i = 2l + \mu_i$ si $1 \leq i \leq 2l$ et $\lambda_{i+2l} = \mu_i^*$. Si λ est une partition, $\lambda(k-1)$ est obtenue en intercalant $k-1$ parts égales au rang de λ à λ : si par exemple $\lambda =$  , alors $\lambda(2) =$  . Si $k = 0$, alors $(2l, \mu, \mu^*)(-1)$ est la partition ν telle que $\nu_i = 2l + \mu_i$ pour $1 \leq i \leq 2l-1$, $\nu_{2l} = \mu_1^* + \mu_{2l}$, et $\nu_{2l-1+i} = \mu_i^*$ pour $i \geq 2$. Convenons qu'une partition λ de la forme $(2l, \mu, \mu^*)(k-1)$ sera dite $(k-1)$-*symétrique* (si $k-1 = 0$, ceci signifie que $\lambda^* = \lambda$). Si λ est $(k-1)$-symétrique, notons $i(\lambda, k)$ l'entier tel que $S_\lambda E^* \otimes L^{-l(2l+k-1)} \subset R^{i(\lambda,k)}$.

Notons K^i le faisceau noyau de la i-ième flèche de cette résolution ($K^i \subset R^i$). On a ainsi par exemple une suite exacte courte $0 \to R^1/K^1 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0$. Pour montrer que $H^q(X, \mathcal{O}_X) \to H^q(D, \mathcal{O}_D)$ est injective (respectivement surjective), il suffit donc d'annuler $H^q(X, R^1/K^1)$ (respectivement $H^{q+1}(X, R^1/K^1)$). Pour cela, il suffit d'annuler $H^q(X, R^1)$ et $H^{q+1}(X, K^1)$ (respectivement $H^{q+1}(X, R_1)$ et $H^{q+2}(X, K_1)$). Or, on a une suite exacte $0 \to R^3/K^3 \to R^2 \to K^1 \to 0$. Pour annuler $H^j(X, K^1)$, il suffit donc d'annuler $H^j(X, R^2)$ et $H^{j+1}(X, R^3/K^3)$. Par récurrence, l'application $H^q(X, \mathcal{O}_X) \to H^q(D, \mathcal{O}_D)$ est donc injective (respectivement surjective) si $H^{q+i-1}(X, R^i) = 0$ (respectivement $H^{q+i}(X, R^i) = 0$). Par la dualité de Serre, ces groupes valent $H^{n,n-q-i+1}(X, R^{i^*})$ et $H^{n,n-q-i}(X, R^{i^*})$. Pour démontrer le théorème, il suffit d'annuler $H^{n,n-q-i+1}(X, R^{i^*})$ pour $q \leq \rho - 1$, soit de montrer que

$$H^{n,q}(X, R^{i^*}) = 0 \text{ si } q > t(e-k) - i + 1.$$

C'est l'objet du paragraphe suivant, mais auparavant, je vais mettre cette condition directement sous la forme de théorèmes d'annulation. Je prétends qu'il suffit de montrer le résultat suivant :

Proposition 7.8 *Soit F un fibré vectoriel ample de rang e sur une variété X projective lisse de dimension n. Soit k un entier tel que $0 < e - k \leq 4$ et λ une partition $(k-1)$-symétrique. Alors, $H^{n,q}(X, S_\lambda F) = 0$ si $q > t(e-k) + 1 - i(\lambda, k)$.*

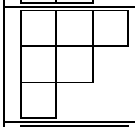
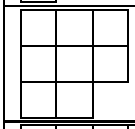
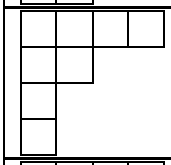
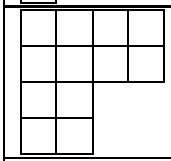
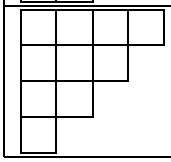
Je démontre que cette proposition implique le théorème 7.2 : nous avons vu qu'il suffisait d'annuler $H^{n,q}(X, R^{i^*})$ pour $q > t(e-k) - i + 1$. Ainsi, il suffit d'annuler, pour toutes les partitions λ $(k-1)$-symétriques, $H^{n,q}(X, S_\lambda E^* \otimes R^{|\lambda|/2})$, pour $q > t(e-k) + 1 - i(\lambda, k)$. Pour cela, moralement, on applique la proposition à $F = E^* \otimes L^{1/2}$.

Plus rigoureusement, soit λ une partition $(k-1)$-symétrique et $q > t(e-k) + 1 - i(\lambda, k)$; il existe une variété projective lisse Y, un morphisme fini $p : Y \to X$ surjectif, et un fibré en droites M sur Y, tels que $M^2 \simeq p^*L$. Considérons de tels objets. Par [Man 92, lemme 1.5.2,p.129], l'application naturelle $H^{n,q}(X, S_\lambda E^* \otimes L^{|\lambda|/2}) \to H^{n,q}(Y, S_\lambda p^* E^* \otimes p^* L^{|\lambda|/2})$ est injective ; il suffit donc d'annuler $H^{n,q}(Y, S_\lambda p^* E^* \otimes p^* L^{|\lambda|/2})$. Or, puisque $L^{|\lambda|/2} \simeq M^{|\lambda|}$, ce groupe égale $H^{n,q}(Y, S_\lambda(p^* E^* \otimes M))$. Comme $S^2(p^* E^* \otimes M) \simeq p^*(S^2 E^* \otimes L)$ est ample, $p^* E^* \otimes M$ est ample, et on a bien $H^{n,q}(Y, S_\lambda(p^* E^* \otimes M)) = 0$ si la proposition est vraie.

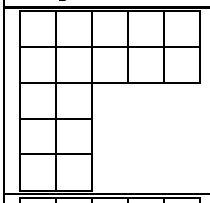
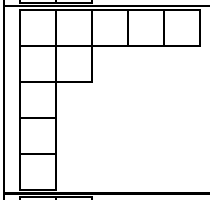
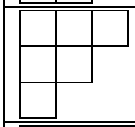
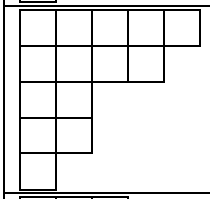
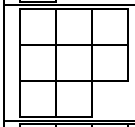
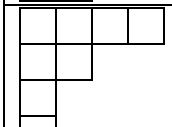
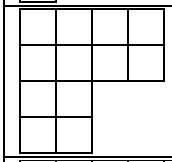
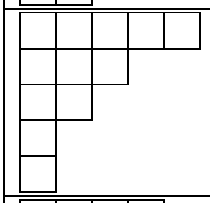
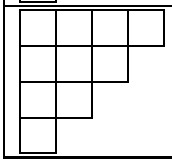
Démonstration de la proposition 7.8 : Puisque $e-k \leq 4$, le rang $2l$ d'une partition $(k-1)$-symétrique et de longueur inférieure ou égale à e est nécessairement inférieur ou égal à 4 ; on a donc $l = 1$ ou $l = 2$. Les partitions obtenues avec $l = 2$ ne nous posent pas de problème, car le théorème A' de [Man 97] donne la borne $10 - i$. Il suffit donc de traiter le cas $l = 1$.

Pour simplifier les notations, j'ai supposé, dans le tableau suivant, que de plus $k = 1$, et l'ai listé toutes les partitions λ à considérer, et indiqué, en face, l'entier q_0 tel que si $q > q_0$, alors $H^{n,q}(X, S_\lambda E) = 0$ pour tout fibré E ample de rangs 4 et 5. La dernière colonne indique le numéro du lemme qui montre l'annulation du groupe de cohomologie pour la borne indiquée. L'indication A' renvoie au théorème A' de [Man 97]. La colonne intermédiaire indique la valeur de q_0 maximale pour montrer le théorème 7.2, qui vaut, comme nous venons de l'établir, $t(e-k)+1-i$. Remarquons que lorsque k prend d'autres valeurs que 1 mais que $e - k$ reste égal à 3 ou 4, puisque les lemmes indiqués donnent une borne qui ne dépend que de $e - k$, on obtient encore le résultat de la proposition 7.8.

$rang(E) = 4$

partition	q_0	7-i	lemme
	4	6	A’
	5 4	5	7.2.1 7.2.2
	4	4	7.2.5
	2	4	A’
	0	2	A’
	2	3	7.2.7

$rang(E) = 5$

partition	q_0	11-i	lemme
	0	4	A’
	3	7	A’
	6	10	A’
	8	9	7.2.1
	4 3	5	7.2.3 7.2.4
	8	8	7.2.5
	8	8	7.2.5
	6	6	7.2.6
	4	6	7.2.7
	7 6	7	7.2.9 7.2.10

7.2.2 Théorèmes d'annulation en petit co-rang

Dans ce paragraphe, X est une variété projective lisse de dimension n, et E désigne un fibré ample de rang e sur X, et L un fibré en droites nef. Pour des raisons qui sont expliquées après le lemme 7.2.3, je note $\lambda = [a,b,c,d]$ la partition de rang 2 telle que $\lambda_1 = a+2, \lambda_2 = b+2, \lambda_1^* = e-c, \lambda_2^* = e-d$. Par exemple, $S_{[0,0,0,0]}E = (\det E)^2$. De même, je note $\lambda = [a,b]$ la partition de rang 1 telle que $\lambda_1 = a+1$ et $\lambda_1^* = e-b$. Par la suite, $a \leq b, c \leq d, t, q$ sont des entiers positifs ou nuls.

Lemme 7.2.1 $H^{n,q}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) = 0$ *si* $q > 2c+d+2$, *et*
$H^{n-1,q}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) = 0$ *si* $q > 2c+d+1$.

Remarque : Le théorème 7.1 donne la borne $2c+2d+2$ au lieu de $2c+d+2$ et les autres résultats que je connais ont une borne qui dépend de k (par exemple, [Man 97, théorème A] donne la borne $k+c+d$) ; il est clair que pour démontrer le théorème 7.2 par cette méthode, il faut une borne indépendante de k.

Démonstration : Pour montrer ce lemme, je vais appliquer la technique, nouvelle à ma connaissance, de "comparaison de suites spectrales".

Tout d'abord, on peut supposer que $e-c$ est pair. En effet, supposons que ce lemme est vrai pour $e-c$ pair. Si $e-c$ est impair et M est un fibré en droites ample sur X, alors on peut considérer le fibré vectoriel $E \oplus M$ de rang $e+1$; comme $e+1-c$ est alors pair, on peut appliquer le lemme, et comme pour le lemme 7.1.4, on en déduit que $H^{n,q}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) = 0$ si $q > 2c+d+2$ et $H^{n-1,q}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) = 0$ si $q > 2c+d+1$.

Soit alors un entier l tel que $e-c = 2l$. Considérons d'abord la variété $Y = \mathbb{P}E^* \times_X \mathbb{P}E^*$, notons $\pi : Y \to X$ la projection naturelle, et considérons le fibré en droites $\mathcal{L} = \mathcal{O}(2l, e-d) \otimes \pi^* L^t$ sur Y. Comme $\mathcal{O}(2l, e-d)$ est ample (en effet, E est ample) et $\pi^* L$ nef, $\mathcal{L}$ est ample. Soit aussi $P = n + (2l-1) + (e-d-1) - 1$.

Déterminons les groupes ${}^{P,t}E_2^{i,j}$ de la suite spectrale de Leray introduite au paragraphe 5.3.2. Ceux-ci valent, par la formule (5.7), $H^{t,i}[X, R^{P-t,j}\pi_* \mathcal{O}(2l, e-d) \otimes L^t]$. Ces groupes sont donc nuls si $t > n$ ou $P - t > (2l-1) + (e-d-1)$. En effet, si V est un espace vectoriel fixé et l et m sont des entiers positifs, alors $H^{i,j}(\mathbb{P}V, \mathcal{O}(l)) = 0$ si $i \geq l$ (conséquence directe de la proposition 6.1), et donc $H^{i,j}(\mathbb{P}V \times \mathbb{P}V, \mathcal{O}(l,m)) = 0$ si $i \geq l+m$ (formule de Künneth). Les seules valeurs possibles sont donc $t = n$ ou $t = n-1$, et on a

$$\begin{aligned}
{}^{P,n-1}E_2^{i,0} &= H^{n-1,i}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) \quad \text{et} \\
{}^{P,n}E_2^{i,0} &= H^{n,i}(X, L^t \otimes R^{(2l-1)+(e-d-1)-1,0}\pi_* \mathcal{O}(2l, e-d)) \\
&= H^{n,i}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) \oplus H^{n,i}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[1,d+1]}E \otimes L^t).
\end{aligned}$$

Ces suites spectrales sont donc dégénérées, et on en déduit que

$$\begin{aligned}
{}^{P}E_1^{n-1,q-n+1} &= H^{n-1,q}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t), \\
{}^{P}E_1^{n,q-n} &= H^{n,q}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) \\
&\oplus H^{n,q}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[1,d+1]}E \otimes L^t),
\end{aligned}$$

et les autres termes sont nuls. Par ailleurs, ${}^{P}E_\infty^{p,q-p}$ est une composante de $H^{P,q}(X, \mathcal{L})$; il est donc nul par le théorème de Kodaira si

$$P + q > n + 2(e-1), \text{ soit } q > n + 2(e-1) - P = c + d + 1.$$

On en déduit donc que dans ce cas, la flêche connectant ${}^PE_1^{n-1,q-n+1}$ et ${}^PE_1^{n,q-n+1}$ est un isomorphisme, ce qui conduit à :

$$\begin{array}{ll} & H^{n-1,q}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) \\ = & H^{n,q+1}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) \\ \oplus & H^{n,q+1}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[1,d+1]}E \otimes L^t) \text{ si } q > c+d+1. \end{array}$$

En considérant une autre suite spectrale, on va obtenir une autre égalité faisant intervenir ces termes ; en comparant ces égalités, on prouvera qu'ils sont nuls. Soit donc maintenant $Y = G_2(E^*) \times_X \mathbb{P}E^*$ et $\mathcal{L} = \mathcal{O}(l, e-d)$ sur Y, et posons $P = n+3(l-1)+(e-d-1)-1$. On a alors de façon similaire ${}^PE_1^{n-1,q-n+l} = H^{n-1,q}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t)$, mais par contre, ${}^PE_1^{n,q-n+l-1} = H^{n,q}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[1,d+1]}E \otimes L^t)$. Ceci conduit à l'égalité

$$H^{n-1,q}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) = H^{n,q+1}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[1,d+1]}E \otimes L^t) \text{ si } q > 2c+d+1.$$

En comparant ces égalités, on obtient

$$H^{n,q}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) = 0,$$

soit la première affirmation du lemme. En utilisant la règle de Littlewood-Richardson, on va montrer l'autre résultat du lemme. En effet, rappelons que $c \leq d$; si $c = d$, on peut conclure ; supposons donc $c < d$. Cette règle implique que

$$\begin{array}{lll} S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[0,d]}E & = & \bigoplus_{0 \leq x \leq c+1} S_{[1,0,x,d+c+1-x]}E \bigoplus R_1 \\ S_{[0,c]}E \otimes S_{[1,d+1]}E & = & \bigoplus_{0 \leq x \leq c} S_{[1,0,x,c+d+1-x]}E \bigoplus R_2, \end{array}$$

où R_1 et R_2 sont des sommes de composantes de type $S_{[0,0,x,y]}$, que l'on sait déjà annuler. L'annulation de la cohomologie de $S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t$ entraine donc celle de $S_{[0,c]}E \otimes S_{[1,d+1]}E \otimes L^t$, et le lemme est alors conséquence d'une des égalités démontrées. •

Notons que ce lemme montre par exemple $H^{n,q}(X, S_{[1,0,c,c+1]}E) = 0$ si $q > 3c+2$, car $S_{[1,0,c,c+1]}E \subset S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[0,c]}E$. Ce n'est pas la borne indiquée dans le tableau p. 158. En effet, pour cette partition particulière, on peut un peu raffiner le raisonnement précédent. Auparavant, je souhaite faire une remarque d'ordre général qui allègera les calculs.

En généralisant le raisonnement utilisé pour le lemme précédent, on voit que l'on obtient simultanément l'annulation de $H^{p_1,q}(X, S_{\lambda_1}E)$ et celle de $H^{p_2,q}(X, S_{\lambda_2}E)$; supposons que $p_1 < p_2$: la borne q_1 obtenue pour le groupe $H^{p_1,q}(X, S_{\lambda_1}E)$ est la différence entre la dimension de Y et la somme $i+j+p_1$, où i et j sont les entiers tels que si V est un espace vectoriel fixé, Y_V la variété isomorphe aux fibres de la projection $Y \to X$, et $\mathcal{L}_V$ la restriction du fibré en droites $\mathcal{L}$ sur une telle fibre, alors $H^{i,j}(Y_V, \mathcal{L}_V) = S_\lambda V$. La borne q_2 pour $H^{p_2,q}(X, S_{\lambda_2}E)$ vaut $q_1 + t$, où t est l'entier tel que les flêches de la suite spectrale connectent $H^{p_1,q}(X, S_{\lambda_1}E)$ et $H^{p_2,q+t}(X, S_{\lambda_2}E)$. Attention, cette recette n'est bien sûr valable que si aucun autre terme de la suite spectrale ne vient compenser les termes que l'on veut annuler. Par ailleurs, on peut facilement exprimer cette différence :

Remarque 7.1 *Une suite spectrale donnée par un fibré en droites sur $G_r(E^*)\times_X G_s(E^*)$ peut montrer l'annulation de $H^{p,q}(X, S_{[a,b]}E\otimes S_{[c,d]}E\otimes L^t)$ pour $q>(r-1)a+rb+(s-1)c+sd$.*

Démonstration : En effet, comme je l'ai expliqué, il s'agit d'évaluer la différence entre $\dim G_r(V)$ et $i+j$, où i et j sont les entiers tels que $H^{i,j}(G_r(V),\mathcal{O}(l))=S_{[a,b]}V$. Cette différence vaut $ra+(r-1)b$, car $i=(l-1)t(r)-ar, j=(l-1)t(r-1)-a(r-1)$, et $\dim V=rl-a+b$. •

Dans le lemme qui suit, je traite des partitions qui sont un cas particulier de celles traitées par le lemme 7.2.1 ; pour ces partitions particulières, je peux réduire de 1 la borne donnée par le lemme 7.2.1.

Lemme 7.2.2 *Supposons $c>0$.*

$$\begin{array}{ll} H^{n,q}(X,S_{[1,0,c+1,c]}E\otimes L^t) & =0 \quad si\ q>3c+1,\ et\\ H^{n-1,q}(X,S_{[0,0,c,c]}E\otimes L^t) & =0 \quad si\ q>3c.\end{array}$$

Démonstration : Tout d'abord, on peut supposer que $e-c$ est impair et $e-c>>0$. Dans la démonstration du lemme 7.2.1, j'ai montré comment tenir compte de L^t ; pour alléger les notations, je suppose dorénavant que $t=0$.

Soit alors l un entier tel que $e-c=2l+1$. Considérons d'abord la variété $Y=\mathbb{P}E^*\times_X\mathbb{P}E^*$, et le fibré $\mathcal{O}(2l+1,2l+1)$ sur Y. Comme dans la démonstration du lemme précédent, on montre que

$$2H^{n,q+1}(X,S_{[1,c+1]}E\otimes S_{[0,c]})=H^{n-1,q}(X,S_{[0,c]}E\otimes S_{[0,c]}E) \text{ si } q>2c+1.$$

Soit maintenant $\mathcal{O}(2l,l+1)\to\mathbb{P}E^*\times_X G_2(E^*)$. On a alors de façon similaire

$$H^{n,q+1}(X,S_{[1,c+2]}E\otimes S_{[0,c-1]}E)=H^{n-1,q}(X,S_{[0,c+1]}E\otimes S_{[0,c-1]}E) \text{ si } q>3c.$$

Par la règle de Littlewood-Richardson, $S_{[1,c+1]}E\otimes S_{[0,c]}E = S_{[1,c+2]}E\otimes S_{[0,c-1]}E\oplus S_{[1,0,c,c+1]}E$ (à des termes de type $S_{[0,0,x,y]}E$ près), et $S_{[0,c]}E\otimes S_{[0,c]}E = S_{[0,c-1]}E\otimes S_{[0,c+1]}E\oplus S_{[0,0,c,c]}E$.

Je donne maintenant une dernière égalité faisant intervenir $H^{n,q+1}(X,S_{[1,0,c,c+1]}E)$ et $H^{n-1,q}(S_{[0,0,c,c]}E)$, qui permettra de conclure. Considérons $\mathcal{O}(e-c)\to G_2(E^*)$. Par la proposition 6.1, une partition λ, de taille au plus $(e-2)\times 2$, $(e-c)$-admissible, vérifie soit $\lambda_1,\lambda_2\le e-c-2$, soit $\lambda_1=\lambda_2+e-c-1$. Dans le deuxième cas, $|\lambda|=\lambda_1+\lambda_2\le [e-2-(e-c-1)]+[e-2]=e+c-3$. Par contre, la partition $(e-c-2,e-c-2)$ est de poids $2(e-c-2)$. Il est clair qu'à c fixé, si e est grand, le poids de cette partition est strictement supérieur à toute constante plus le poids d'une partition du deuxième type. Quitte à augmenter e, on peut donc faire comme si seules les partitions du premier type intervenaient. En posant $P=n+2(e-c-2)-1$, on montre alors que

$$H^{n,q+1}(X,S_{[1,0,c,c+1]}E)=H^{n-1,q}(X,S_{[0,0,c,c]}E) \text{ si } q>2c+1.$$

Les trois égalités montrent que si $q>3c$, alors $H^{n,q+1}(X,S_{[1,c+1]}E\otimes S_{[0,c]}E)=0$. La première implique alors le reste du lemme. •

Lemme 7.2.3
$$\begin{array}{rcll} H^{n,q}(X,S_{[a,0]}E\otimes S_{[b+1,1]}E\otimes L^t) & = & 0 & si\ q>a+2,\ et\\ H^{n-1,q}(X,S_{[a,0]}\otimes S_{[b,0]}E\otimes L^t) & = & 0 & si\ q>a+1.\end{array}$$

Remarque : Ce lemme me donne l'occasion de justifier mes notations. Les partitions les plus faciles à traiter sont celles qui correspondent à une puissance du déterminant : en effet, puisque $(\det E)^l$ est ample pour tout l, le théorème de Kodaira donne directement que $H^{p,q}(X,(\det E)^l)=0$ si $p+q>n$. Lorsqu'on s'écarte de cette partition, je vais expliquer qu'il existe une symétrie entre le fait d'allonger les premières parts et le fait de creuser le bas de la partition. Autrement dit, dans la notation $\lambda=[a,b,c,d]$, a et c, et b et d, jouent des rôles symétriques. On peut d'ailleurs remarquer que le théorème 7.1 n'échappe pas à ce principe : si l'on note $r=\min\{\delta(n-p),\delta(n-q)\}$, alors la borne vaut $q_0=n-p+(r+\sigma)(ae-k+2\sigma)-\sigma(\sigma+1)$. Or, avec mes notations, on a $Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}=[\alpha_i,e-k_i+\alpha_i]$. Notons $\beta_i=e-k_i+\alpha_i$; on a $ae-k+\sigma=\sum_i(e-k_i+\alpha_i)=\sum_i\beta_i=:\tau$. Ainsi, on a donc

$$q_0=n-p+(r+\sigma)(\tau+\sigma)-\sigma(\sigma+1)=n-p+r(\sigma+\tau)+\sigma(\tau-1). \qquad (7.1)$$

On voit bien que cette formule est symétrique en σ et τ (-1). Le lecteur intrigué (comme moi) pourra s'amuser de constater que la démonstration du théorème 7.1 fonctionne de façon tout-à-fait similaire si l'on fait jouer par τ le rôle joué par σ, et donne le même résultat. Il est vraisemblable que le démonstration de théorèmes d'annulation efficaces pour des partitions de rang strictement supérieur à 1 utilise une récurrence qui fasse intervenir de façon combinée σ et τ.

Le lemme 7.2.3, pour cette symétrie, est le symétrique du lemme 7.2.1 ; il se démontre de façon tout-à-fait similaire.

Démonstration : On se ramène comme précédemment au cas $e+a$ pair, puis on considère le fibré en droites $\mathcal{O}(e+a,e+b)$ sur $\mathbb{P}E^*\times_X\mathbb{P}E^*$, et le fibré en droites $\mathcal{O}(e+b,\frac{e+a}{2})$ sur $\mathbb{P}E^*\times_X G_2(E^*)$. On utilise aussi, comme pour démontrer le lemme 7.2.1, la règle de Littlewood-Richardson. En tenant compte de la remarque 7.1, on trouve ainsi $H^{n-1,q}(X,S_{[a,0]}\otimes S_{[a+1,1]}E)=0$ si $q>a+1$. Dans la suite spectrale, il y a une flèche entre $H^{n,q+1}(X,S_{[a,0]}E\otimes S_{[a+1,1]}E)$ et $H^{n-1,q}(X,S_{[a,0]}\otimes S_{[a+1,1]}E)$; $H^{n,q}(X,S_{[a,0]}E\otimes S_{[a+1,1]}E)$ s'annule donc si $q>a+2$. •

Par ailleurs, on peut, comme le fait le lemme 7.2.2, raffiner un peu le lemme précédent pour traiter certains cas particuliers :

Lemme 7.2.4 *Supposons $a>0$.*

$$\begin{aligned} H^{n,q}(X,S_{[a+1,a,0,1]}E\otimes L^t) &= 0 \quad si\ q>a+1,\ et\\ H^{n-1,q}(X,S_{[a,a,0,0]}E\otimes L^t) &= 0 \quad si\ q>a. \end{aligned}$$

Démonstration : Similaire à celle du lemme 7.2.2. •

Lemme 7.2.5 $H^{n,q}(X,S_{[1,c+1]}E\otimes S_{[1,c+1]}E\otimes L^t)=H^{n,q}(X,S_{[0,c+2]}E\otimes S_{[0,c]}E\otimes L^t)=0$ *si $q>4c+4$, et $H^{n-1,q}(X,S_{[1,c+1]}\otimes S_{[0,c]}E\otimes L^t)=0$ si $q>4c+3$.*

Démonstration : Comme précédemment, on peut supposer que $e-c$ est pair et $t=0$; soit donc l tel que $e-c=2l$. Considérons le fibré en droites $\mathcal{O}(2l,2l)$ sur $\mathbb{P}E^*\times_X\mathbb{P}E^*$, et la suite spectrale correspondante pour $P=n+2(2l-1)-2$. Les termes ${}^PE_1^{i,j}$ ne peuvent

être non nuls que si i vaut $n, n-1$, ou $n-2$. Or ${}^{P}E_1^{n-2,q-n+2} = H^{n-2,q}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[0,c]}E)$, qui est nul si $q > 4c+2$ par le théorème 7.1. On en déduit donc que si $q > 4c+2$, alors

$$\begin{aligned} & H^{n,q+2}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[1,c+1]}E) \oplus 2H^{n,q+2}(X, S_{[2,c+2]}E \otimes S_{[0,c]}E) \\ = \; & 2H^{n-1,q+1}(X, S_{[1,c+1]} \otimes S_{[0,c]}E). \end{aligned}$$

De même, en considérant $\mathcal{O}(2l, l) \to \mathbb{P}E^* \times_X G_2(E^*)$, on montre que

$$H^{n,q+2}(X, S_{[2,c+2]}E \otimes S_{[0,c]}E) = H^{n-1,q+1}(X, S_{[1,c+1]} \otimes S_{[0,c]}E) \text{ si } q > 4c+2.$$

Ce système donne $H^{n,q+2}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[1,c+1]}E) = 0$. Mais comme

$$S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[1,c+1]}E \supset S_{[2,c+2]}E \otimes S_{[0,c]}E,$$

on en déduit qu'aussi $H^{n,q+2}(X, S_{[2,c+2]}E \otimes S_{[0,c]}E) = 0$, et donc $H^{n-1,q+1}(X, S_{[1,c+1]} \otimes S_{[0,c]}E) = 0$. •

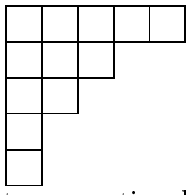
Le symétrique du lemme précédent est :

Lemme 7.2.6 *$H^{n,q}(X, S_{[a+1,1]}E \otimes S_{[a+1,1]}E \otimes L^t) = H^{n,q}(X, S_{[a+2,2]}E \otimes S_{[a,0]}E \otimes L^t) = 0$ si $q > 2a+4$ et $H^{n-1,q}(X, S_{[a+1,1]} \otimes S_{[a,0]}E \otimes L^t) = 0$ si $q > 2a+3$.*

Démonstration : Comme pour le lemme précédent, on pose $2l = a+e$ et $t = 0$, et on compare les suites spectrales correspondant à $\mathcal{O}(2l, 2l) \to \mathbb{P}E^* \times_X \mathbb{P}E^*$ et $\mathcal{O}(2l, l) \to \mathbb{P}E^* \times_X G_2(E^*)$. •

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré des partitions de type $[a, \epsilon] \otimes [b, \epsilon']$ ($\epsilon, \epsilon' = 0$ ou 1), ou de type $[\epsilon, a] \otimes [\epsilon', b]$. Etudions finalement des partitions "panachées", c'est-à-dire de type $[a, \epsilon, b, \epsilon']$.

Lemme 7.2.7 *Si a et c ont même parité, alors $H^{n,q}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[1,c+1]}E \otimes L^t) = 0$ si $q > 2c+2$, et $H^{n,q}(X, S_{[a+1,1]}E \otimes S_{[0,c]}E \otimes L^t) = 0$ si $q > a+2$. Si $q > \max(a, 2c)+1$, alors $H^{n-1,q}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[0,c]}E \otimes L^t) = 0$.*

Remarque : Ce lemme illustre la difficulté du problème qui consiste à obtenir des théorèmes d'annulation optimaux : le lemme 7.2.6 avec $a = 1$ donne la borne 6 pour la partition  (si $e = 5$) ; cette borne convient pour démontrer le théorème 7.2 mais n'est pas optimale, puisque le lemme 7.2.7 donne la borne 4 ($a = 3, c = 1$). Par contre, j'aurai besoin de cette bonne borne pour montrer le lemme 7.2.9. Pour démontrer un analogue du théorème 7.2 en tous rangs, il faut probablement prendre en compte ce genre de subtilités.

Démonstration : On suppose que $a+e = 2l, e-c = 2m$ et $t = 0$. Si l'on considère $\mathcal{O}(2l, 2m) \to \mathbb{P}E^* \times_X \mathbb{P}E^*$, alors on obtient

$$H^{n-1,q}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[0,c]}E) = H^{n,q+1}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[1,c+1]}E) \oplus H^{n,q+1}(X, S_{[a+1,1]}E \otimes S_{[0,c]}E)$$
$$\text{si } q > c+1.$$

Avec $\mathcal{O}(2l, m) \to \mathbb{P}E^* \times_X G_2(E^*)$, on a

$$H^{n-1,q}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[0,c]}E) = H^{n,q+1}(X, S_{[a+1,1]}E \otimes S_{[0,c]}E) \text{ si } q > 2c+2.$$

Enfin, $\mathcal{O}(l, 2m) \to G_2(E^*) \times_X \mathbb{P}E^*$, donne

$$H^{n-1,q}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[0,c]}E) = H^{n,q+1}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[1,c+1]}E) \text{ si } q > a+2.$$

Le lemme découle de ces trois remarques. •

Lemme 7.2.8 *Si a et c ont même parité, alors*
$$H^{n-2,q}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[0,c]}E \otimes L^t) = 0 \text{ si } q > a+2c+2.$$

Démonstration : Si $t = 0, 2l = e+a$ et $2m = e-c$, on regarde la suite spectrale associée à $\mathcal{O}(l,m) \to G_2(E^*) \times_X G_2(E^*)$, pour $P = n + (2e-l-3) + (3(m-1)) - 2$. Par la remarque 7.1, pour $q > a+2c+2$, celle-ci compare $H^{n-2,q}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[0,c]}E)$ et $H^{n,q+2}(X, S_{[a+1,1]}E \otimes S_{[0,c]}E) \oplus H^{n,q+2}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[1,c+1]}E)$. Or, ces deux derniers groupes sont nuls, grâce au lemme 7.2.7, si $q > \max\{a, 2c\}$. •

Lemme 7.2.9 *Si a et c ont même parité, alors*
$$H^{n,q}(X, S_{[a+1,1]}E \otimes S_{[1,c+1]}E \otimes L^t) = 0 \text{ si } q > a+2c+4.$$

Démonstration : Si $t = 0$, $2l = e+a$ et $2m = e-c$, alors $\mathcal{O}(2l, 2m) \to \mathbb{P}E^* \times_X \mathbb{P}E^*$ donne, pour $q > a+2c+2$,

$$\begin{array}{rl} & H^{n,q+2}(X, S_{[a+1,1]}E \otimes S_{[1,c+1]}E) \oplus H^{n,q+2}(X, S_{[a+2,2]}E \otimes S_{[0,c]}E) \\ \oplus & H^{n,q+2}(X, S_{[0,a]}E \otimes S_{[2,c+2]}E) \\ = & H^{n-1,q+1}(X, S_{[1,a+1]}E \otimes S_{[0,c]}E) \oplus H^{n-1,q}(X, S_{[0,a]}E \otimes S_{[1,c+1]}E). \end{array}$$

En effet, $H^{n-2,q}(X, S_{[a,0]} \otimes S_{[0,c]}E) = 0$ si $q > a+2c+2$ par le lemme 7.2.8. De même, $\mathcal{O}(l, 2m) \to G_2(E^*) \times_X \mathbb{P}E^*$ et $\mathcal{O}(2l, m) \to \mathbb{P}E^* \times_X G_2(E^*)$ donnent respectivement, pour $q > 2a+c+2$,

$$\begin{array}{rcl} H^{n,q+2}(X, S_{[a+2,2]}E \otimes S_{[0,c]}E) & = & H^{n-1,q+1}(X, S_{[1,a+1]}E \otimes S_{[0,c]}E) \text{ et} \\ H^{n,q+2}(X, S_{[0,a]}E \otimes S_{[2,c+2]}E) & = & H^{n-1,q}(X, S_{[0,a]}E \otimes S_{[1,c+1]}E). \end{array}$$ •

Remarquons enfin que l'on peut améliorer la borne pour $S_{[2,1]}E \otimes S_{[1,2]}E$. En effet, en généralisant la démonstration du lemme précédent, on voit que l'annulation $H^{n-2,q}(X, S_{[1,0]}E \otimes S_{[0,1]}E) = 0$ si $q > q_0$ implique $H^{n,q}(X, S_{[2,1]}E \otimes S_{[1,2]}E) = 0$ si $q > q_0 + 2$. Le lemme précédent utilisait la borne $q_0 = 5$ montrée dans le lemme 7.2.8 ; je vais montrer que $H^{n-2,q}(X, S_{[1,0]}E \otimes S_{[0,1]}E) = 0$ si $q > 4$ par un argument qui ne fonctionne que pour $S_{[1,0]}E \otimes S_{[0,1]}E$. La remarque spécifique est que, par la règle de Littlewood-Richardson,

$$S_{[1,0]}E \otimes S_{[0,1]}E = (\det E)^2 \oplus \det E \otimes S_{[1,1]}E.$$

Puisque $H^{n-2,q}(X, (\det E)^2) = 0$ si $q > 2$, il suffit de montrer que $H^{n-2,q}(X, \det E \otimes S_{[1,1]}E) = 0$ si $q > 4$. Pour cela, on peut supposer que le rang de E est multiple de 4, $e = 4f$, et on regarde la suite spectrale correspondant à $\mathcal{O}(f, 4f) \to G_4(E) \times_X \mathbb{P}E$. Dans cette suite spectrale, notre groupe, $H^{n-2,q}(X, \det E \otimes S_{[1,1]}E) = 0$, est connecté à $H^{n-3,q-1}(X, (\det E)^2)$ (qui s'annule si $q-1 > 3$), $H^{n-1,q+1}(X, \det E \otimes S_{[2,2]}E)$ (nul pour $q+1 > 5$: lemme 7.2.7), et enfin $H^{n,q+1}(X, \det E \otimes S_{[3,3]}E) = 0$ (nul pour $q+1 > 3$ par le théorème A' de [Man 97]). On a donc démontré

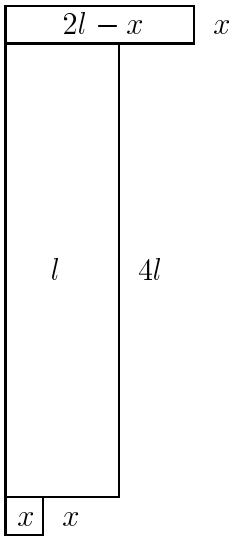
Lemme 7.2.10 $H^{n,q}(X, S_{[2,1]}E \otimes S_{[1,2]}E) = 0$ *si* $q > 6$.

Ceci illustre à nouveau la complexité du sujet : on obtient de meilleures bornes pour des partitions spécifiques que celles obtenues par la méthode générale. Par ailleurs, comme nous utilisons une récurrence, le fait de ne pas obtenir le théorème d'annulation optimal pour une partition précise se répercute sur de nombreuses autres partitions, entrainant progressivement la "catastrophe".

7.2.3 Une nouvelle piste possible

Dans ce paragraphe, je montre comment l'étude des partitions de poids maximal du paragraphe 6.1.4 permet d'obtenir de nouveaux théorèmes d'annulation.

Soit l et $x < l$ des entiers, et notons $\lambda(x,l)$ la partition λ telle que $\forall i \in [1,x], \lambda_i = 2l-x$, $\forall i \in [x+1, 4l+x], \lambda_i = l$, et $\forall i \in [4l+x+1, 4l+2x], \lambda_i = x$. Cette partition est décrite sur le dessin qui suit :



On obtient sans récurrence un théorème qui annule $H^{n-1,q}(X, S_{\lambda(x,l)}E)$, pour E de même rang que la longueur de λ :

Proposition 7.9 *Soit $x < l$ des entiers, et soit E un fibré ample de rang $4l+2x$ sur une variété X projective lisse et de dimension n. Alors,*

$$H^{n-1,q}(X, S_{\lambda(x,l)}E) = 0 \text{ si } q > 4x(l-x)+1.$$

Puisque $S_{\lambda(x,l)}E$ se factorise x fois par le $\det E$, on a, par le théorème A' de [Man 97], $H^{n,q}(X, S_{\lambda(x,l)}E) = 0$ si $q > x(l-x)$, mais $H^{n-1,q}(X, S_{\lambda(x,l)}E) = 0$ seulement pour $q > (l-x)(4l+2x)+1$. Par ailleurs, le théorème 7.1 donne la borne $1 + 2.2x(l-x) + [x(l-x)][x(l-x)-1]$ (cf la formule (7.1) p. 162).

Démonstration : Soit $r = 2l+x$ et $e = 4l+2x$. Etudions la cohomologie du fibré en droites $\mathcal{O}(2l)$ sur la grassmannienne $G(r, \mathbb{C}^e)$. Pour cela, considérons d'abord les partitions de type $\widehat{\mu}(a, \alpha, \beta, c, \gamma)$, avec $\alpha + \beta = 2$ et $\gamma + c = 2x$ (le théorème 6.1 permettra de se ramener à l'étude de ces partitions). Notons $p(a, \alpha, \beta, c, \gamma)$ le poids de $\widehat{\mu}(a, \alpha, \beta, c, \gamma)$. Puisqu'on suppose $\alpha + \beta = 2$, il y a deux cas possibles : soit $\alpha = 2$ et $\beta = 0$, soit $\alpha = \beta = 1$.

On a $p(a, 2, 0, c, \gamma) = 3a(2l-a) + 3\gamma c$. Comme $\lambda_1 = 2l + x = 2a + c$, on en déduit que $p = -15a^2 + 30la - 12l^2 + 3x^2$. Le poids maximal est donc obtenu pour $a = l$, et on a alors $p = 3l^2 + 3x^2$.

D'autre part, $p(a, 1, 1, c, \gamma) = 3a(2l-a) + 2(2a-2l) + 3\gamma c$. Comme $\lambda_1 = 2a - 1 + c = 2l + x$, on en déduit que $p = -15a^2 + (30l+16)a - 16l - 12l^2 + 3(x+1)(x-1)$. La valeur maximale est obtenue pour $a = l+1$, et on a alors $p = 3l^2 + 3x^2 - 2$.

En utilisant le théorème 6.1, on en déduit donc que le groupe de cohomologie non nul de $\mathcal{O}(2l)$ sur $G(r,\mathbb{C}^e)$ d'indice p maximal est $H^{3l^2+3x^2,l^2+2x^2}(G(r,\mathbb{C}^n),\mathcal{O}(2l)) = S_{\lambda(x,l)}\mathbb{C}^n$, et que les autres groupes de cohomologie non nuls vérifient $p \leq 3l^2+3x^2-2$. Par l'argument habituel, on obtient l'annulation de $H^{n-1,q}(X, S_{\lambda(x,l)}E)$ pour $q > 1+\dim G(r,\mathbb{C}^e)-(3l^2+3x^2)-(l^2+2x^2) = 1+(2l+x)^2-4l^2-5x^2 = 4xl-4x^2+1$. •

L'inconvénient de cette proposition et d'éventuelles autres versions que l'on pourrait imaginer est qu'elle ne permet pas d'annuler sous les mêmes conditions, pour E un fibré ample de rang e, la cohomogie de $S_\lambda E$ et celle de $S_{\lambda(t)}F$ pour F ample de rang $e+t$. Rappelons que pour passer d'une partition λ à la partition $\lambda(t)$, on intercale t parts égales au rang de λ, et que nous avons vu dans le paragraphe précédent que, pour obtenir les propriétés attendues des lieux de dégénérescence, nous cherchons des résultats ayant cette propriété.

Chapitre 8

Théorèmes d'annulation pour les puissances extérieures d'un fibré ample muni d'une forme symplectique ou quadratique

8.1 Cas symplectique

8.1.1 Cadre géométrique, notations

Soit X une variété projective lisse et E un fibré vectoriel ample sur X de rang $2e$ muni d'une forme symplectique non-dégénérée. Ceci signifie qu'on se donne un fibré en droites L sur X et une section globale ω de $E^* \otimes E^* \otimes L$ telle que pour tout $x \in X$, ω_x est non-dégénérée et symplectique.

Soit U_i un ouvert trivialisant E et L, f_i et g_i des isomorphismes entre $E_{|U_i}$ et $V \times U_i$, et entre $L_{|U_i}$ et $\mathbb{C} \times U_i$. Pour tout $x \in U_i$, on a une forme symplectique Ω_x sur V, donnée par $\Omega_x(v_1, v_2) = g_i\{\omega_x[f_i^{-1}(x, v_1), f_i^{-1}(x, v_2)]\}$. Soit Ω' la matrice ayant les blocs 2×2 diagonaux égaux à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, et des 0 partout ailleurs.

Lemme 8.1.1 *Soit E un fibré symplectique à valeurs dans L. Alors, il existe des trivialisations de E et L telles que dans toutes les cartes, on ait avec les notations précédentes $\Omega_x \equiv \Omega'$.*

Démonstration : Soit U_i un ouvert trivialisant E et L, et $v \in V$: je note s_v la section de E donnée par $s_v(x) = f_i^{-1}(v, x)$. Soit $u \in U_i$ fixé, $0 \neq v_1 \in V$ et s_1 la section s_{v_1}. Soit alors $v_2 \in V$ tel que

$$\Omega_u(s_1(u), s_{v_2}(u)) \neq 0.$$

Pour x appartenant à un ouvert de U_i, on aura toujours $\Omega_x(s_1(x), s_{v_2}(x)) \neq 0$. On pose,

sur cet ouvert,

$$s_2(x) = \frac{s_{v_2}(x)}{\Omega_x(s_1(x), s_{v_2}(x))} \quad .$$

On a ainsi $\Omega_x(s_1(x), s_2(x)) = 1$. Si $v_3 \in V$ n'est pas dans le plan engendré par v_1 et v_2, on considère de façon analogue la section

$$s_3(x) = s_{v_3}(x) - \Omega_x(s_1(x), s_{v_3}(x))s_2(x) + \Omega_x(s_2(x), s_{v_3}(x))s_1(x).$$

On obtient ainsi une section constamment orthogonale à s_1 et s_2 et non nulle sur un ouvert contenant u.

En continuant ce procédé, on obtient pour tout x d'un ouvert adéquat contenant u une base $s_i(x)$ de E_x, telle que Ω_x soit repésentée, dans cette base, par Ω'. On peut donc, quitte à changer les isomorphismes f_i, supposer que Ω_x est constamment égale à Ω'. •

Soit $x \in U_i \cap U_j$ et $e_1, e_2 \in E_x$, comme

$$\omega(e_1, e_2) = g_i^{-1}[\Omega'(f_i(e_1), f_i(e_2))] = g_j^{-1}[\Omega'(f_j(e_1), f_j(e_2))],$$

on a, pour tout $v_1, v_2 \in V$,

$$g_j \circ g_i^{-1}[\Omega'(v_1, v_2)] = \Omega'(f_j \circ f_i^{-1}(v_1), f_j \circ f_i^{-1}(v_2)).$$

On a donc établi le lemme suivant :

Lemme 8.1.2 *Soit E un fibré muni d'une forme symplectique à valeurs dans L, V un espace vectoriel de dimension* $\dim E$ *fixé et Ω une forme symplectique sur V. On peut supposer que les fonctions de transition $f_{i,j}$ de E et $g_{i,j}$ de L vérifient $f_{i,j}^*\Omega = g_{i,j}\Omega$. Par ailleurs, si r est un entier, la projection $G_\omega(r, E) \to X$ est une fibration localement triviale.*

Ce lemme permet de définir, pour une partition μ, les fibrés $S_{\langle\mu\rangle}E$: ce sont les fibrés définis par les changements de carte $(S_\mu f_{i,j})_{|S_{\langle\mu\rangle}V}$, si $f_{i,j}$ sont des changements de cartes comme dans le lemme précédent (ces applications préservent $S_{\langle\mu\rangle}V$). Ainsi, $S_{\langle\mu\rangle}E$ est un sous-fibré de $S_\mu E$ (c'est le sous-fibré qui annule une certaine contraction). Par la suite, si $f^*\Omega' = \lambda\Omega'$, je noterai $S_{\langle\mu\rangle}f$ la restriction de $S_\mu f$ à $S_{\langle\mu\rangle}V$.

Une autre propriété géométrique est que le fibré en droites L est automatiquement ample.

Lemme 8.1.3 $L^e \simeq \det E := \Lambda^{2e}E$.

L^e est alors ample comme puissance extérieure d'un fibré ample [Hart 66], et L est ample.

Démonstration : La forme $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ est une section globale de $\Lambda^{2e}(E^*) \otimes L^e$ qui ne s'annule jamais. Ainsi $\det(E^*) \otimes L^e = (\det E)^* \otimes L^e$ est un fibré trivial.

On peut aussi observer que, comme $f_{i,j}(x)^*\Omega' = g_{i,j}(x)\Omega'$, $\det f_{i,j} = g_{i,j}^e$. •

8.1.2 Cohomologie de $\mathcal{O}(1)$ sur $G_\omega(e, \mathbb{C}^{2e})$

Je n'ai pas pu obtenir de résultats précis sur la cohomologie des grassmaniennes symplectiques générales $G_\omega(r, \mathbb{C}^{2e})$. Dans le cas des grassmaniennes dites lagrangiennes, d'espaces linéaires isotropes de dimension maximale, qui sont des espaces hermitiens symétriques, le fibré tangent est irréductible, ce qui simplifie considérablement le calcul de la cohomologie.

Proposition 8.1 *$H^{m(m+1),m^2}(G_\omega(e, 2e), \mathcal{O}(1)) = \Lambda^{\langle e-2m\rangle}\mathbb{C}^{2e}$ pour $0 \leq m \leq [e/2]$ et les autres termes sont nuls.*

Dans cette proposition, pour x réel, j'ai noté $[x]$ le plus grand entier inférieur ou égal à x ; notons $[x]^+$ le plus petit entier supérieur ou égal à x.

Démonstration : Snow [Sno 88, theorem,p.6] a déterminé les couples d'entiers (p, q) tels que $H^{p,q}(G_\omega(e, 2e), \mathcal{O}(1)) \neq 0$, en utilisant la décomposition du fibré des p-formes établie par Kostant. Il ne décrit pas ces groupes de cohomologie, mais c'est une conséquence facile de son étude. Je propose ici, pour éviter d'introduire ses notations, de montrer que cette proposition est une conséquence facile de mon lemme 6.2.1.

Puisque le fibré U est nul, une composante du fibré des p-formes s'écrit $S_{u^+}T$. Reprenant les notations du lemme 6.2.1, il s'agit d'étudier le poids

$$(e+1, \ldots, l+3, l+1-u_l^+, \ldots, 2-u_1^+),$$

où l désigne la longueur de u^+, soit u_1. Notons $\alpha_i = i+1-u_i^+$. La suite (α_i) est une suite strictement décroissante. La démonstration du lemme 6.2.1 montre qu'il existe i tel que $|\alpha_i| = 1$. Soit m la longueur de u ; $u_{m+1}^+ \leq m$, donc $\alpha_{m+1} \geq 2$. De plus, $u_m^+ \geq m+1$, donc $\alpha_m \leq 0$. Comme $\forall i, \alpha_i \neq 0$ et $\exists i, |\alpha_i| = 1$, on a donc $\alpha_m = -1$, soit $u_m^+ = m+2$, ou $u_m = 2$. On a donc $u_{m+1}^+ = m$ et $\alpha_{m+1} = 2$. De même, en raisonnant sur l'entier i tel que $|\alpha_i| = 3$, on voit que $u_{m-1} = 4$, et on peut alors démontrer par récurrence que $u = (2m, 2(m-1), \cdots, 2)$.

Alors un calcul immédiat montre que le poids considéré est

$$(e+1, \cdots, 2m+2, 2m, 2m-2, \cdots, 2, -1, -3, \cdots, -(2m-1)).$$

On en déduit que les entiers p et q correspondant sont $m(m+1)$ et m^2 (lemme 6.2.2), et que la représentation irréductible est de plus haut poids $(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$. •

8.1.3 Théorème d'annulation

Utilisant ce résultat, on peut déduire un théorème d'annulation pour les puissances extérieures de fibrés amples munis d'une forme symplectique ; ce résultat se démontre en séparant deux cas, selon la parité de la puissance extérieure considérée.

Proposition 8.2 *Soit E un fibré vectoriel ample de rang $4e$ sur X, variété projective lisse de dimension n, muni d'une forme symplectique à valeurs dans un fibré en droites ample L. Soient p, q, t, l des entiers avec $1 \leq t \leq e$. Alors*

$$H^{p,q}(X, \Lambda^{\langle 2t\rangle}E \otimes L^l) = 0$$

dès que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

$$\begin{cases} p+q > n+t(4e-2t+1) \\ et\ l \geq (t-1)[\frac{n-p}{2}]^+ + e - t \\ et\ n-p \leq 2(e-t) \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} p+q > n+t[2(t+n-p+1)+1] \\ et\ l \geq t[\frac{n-p}{2}]^+ \\ et\ n-p > 2(e-t) \end{cases}$$

Le théorème de Le Potier [LP 75] affirme que la cohomologie d'un tel fibré s'annule pour $p+q > n+4t(2e-t)$. Par rapport à ce théorème qui ne tient pas compte de la forme symplectique, la borne a donc presque été divisée par 2. W. Nahm [LN 02] obtient cette annulation pour $p+q > n+2\delta(n-p)(2e-t)$. La borne de la proposition 8.2 est donc meilleure pour $t < \delta(n-p)\frac{4e-2t}{4e-2t+1}$.

Démonstration : A t fixé, l'annulation sous la deuxième condition est une conséquence de l'annulation sous la première. En effet, si la proposition est vraie sous la première condition pour t, soient p, q, l tels que $p+q > n+t[2(t+n-p+1)+1]$ et $l \geq t[\frac{n-p}{2}]^+$.

Soit alors $\varphi : X' \to X$ un morphisme fini et $M' \to X'$ un fibré en droites tel que $M'^{\otimes 2} = \varphi^* L$. Les fibrés $E' := \varphi^* E, M'$ et $L' := \varphi^* L$ sont alors amples [Hart 66], et on peut considérer sur X' le fibré $F' := E' \oplus (M' \oplus M')^{2(f-e)}$ avec

$$f = \left[\frac{n-p}{2}\right]^+ + t. \tag{8.1}$$

Alors F' est ample de rang $4f$. Pour $x' \in X'$, la forme symplectique $\omega_{\varphi(x')}$ est une forme symplectique sur $E'_{x'}$ à valeurs dans $L'_{x'}$. On va l'étendre à une forme $\omega_{x'}$ sur F'. Il suffit pour cela de poser, sur une composante de $F'_{x'}$ de la forme $M' \oplus M'$, $\omega_{x'}[(m_1 \oplus m_2), (n_1 \oplus n_2)] = m_1 \otimes n_2 - m_2 \otimes n_1 \in L'$, et de décider que ces espaces sont orthogonaux deux à deux et orthogonaux à E'.

Comme $n-p+1 \geq 2(f-t)$ par (8.1), l'hypothèse $p+q > n+t[2(t+n-p+1)+1]$ donne $p+q > n+t(4f-2t+1)$. De plus, $l \geq t[\frac{n-p}{2}]^+ = (t-1)[\frac{n-p}{2}]^+ + f - t$; on a donc, par la première partie de la proposition, $H^{p,q}(X', \Lambda^{\langle 2t \rangle} F' \otimes L'^l) = 0$. Maintenant, $\Lambda^{\langle 2t \rangle} F' \supset \Lambda^{\langle 2t \rangle} E'$, donc $H^{p,q}(X', \Lambda^{\langle 2t \rangle} E' \otimes L^l) = 0$. Comme φ est finie, l'application $\varphi^* : H^{p,q}(X, \Lambda^{\langle 2t \rangle} E \otimes L^l) \to H^{p,q}(X', \Lambda^{\langle 2t \rangle} E' \otimes L'^l)$ est injective, donc $H^{p,q}(X, \Lambda^{\langle 2t \rangle} E \otimes L^l) = 0$.

Montrons donc la première partie. Soient p, q, l, t tels que $p+q > n+t(4e-2t+1)$ et $n-p \leq 2(e-t)$ et supposons vraie par récurrence la proposition pour tout p, q et $t' < t$. Soit $\pi : G_\omega(2e, E) \to X$ la fibration en grassmanniennes lagrangiennes. Posons $\tilde{l} = l - (e-t)$ et

$$P = p + (e-t)(e-t+1), \tag{8.2}$$

et considérons la suite spectrale de Borel-Le Potier calculant la cohomologie de $\mathcal{O}(1) \otimes (\pi^* L)^{\tilde{l}}$ sur $G_\omega(2e, E)$ introduite au paragraphe 5.3.1. Comme

$H^{p,q}[G_\omega(2e,\mathbb{C}^{4e}),\mathcal{O}(1)]$ ne peut être non nul que si (p,q) est de la forme $(m(m+1),m^2)$, on a

$$^{P,i}E_2^{j,k} \neq 0 \Longrightarrow \exists t' : P-i=(e-t')(e-t'+1), k=(e-t')^2.$$

Si ces égalités sont vraies, on a

$$^{P,i}E_2^{j,k} = H^{P-(e-t)'(e-t'+1),j}(X,\Lambda^{\langle 2t'\rangle}E\otimes L^{l+t-'t}).$$

En effet, par la méthode expliquée au paragraphe 5.3.2, pour calculer les fibrés $R^{(e-t')(e-t'+1),(e-t')^2}\pi_*(\mathcal{O}(1)\otimes(\pi^*L))$, il suffit de comprendre les applications induites en cohomologie par les applications de changement de cartes $f_{i,j}$ et $g_{i,j}$. Soit $x\in U_i\cap U_j$ et γ un nombre tel que $\gamma^2=g_{i,j}(x)$. Par le lemme 8.1.2, $f_{i,j}(x)/\gamma$ est une application symplectique ; son action induite en cohomologie est donc donnée par le théorème de Bott ; il s'agit de :

$$\Lambda^{\langle 2t'\rangle}\frac{f_{i,j}}{\gamma}=\frac{\Lambda^{\langle 2t'\rangle}f_{i,j}(x)}{\gamma^{2t'}}.$$

Comme les homothéties agissent trivialement sur le fibré tangent d'une grassmannienne symplectique, l'action de $\gamma.Id$ en cohomologie est $\gamma^{2e}=g_{i,j}(x)^e$. Ainsi, l'action induite en cohomologie par $f_{i,j}(x)$ vaut $g_{i,j}(x)^{e-t'}.\Lambda^{\langle 2t'\rangle}f_{i,j}(x)$. Le fibré $R^{(e-t')(e-t'+1),(e-t')^2}\pi_*(\mathcal{O}(1))$ correspondant est $\Lambda^{\langle 2t'\rangle}E\otimes L^{e-t'}$ et on trouve le résultat annoncé.

La suite spectrale $^{P,i}E_2^{j,k}$ est donc dégénérée. Ainsi,

$$^{P}E_1^{P-(e-t')(e-t'+1),j+(e-t')(2e-2t'+1)-P} = H^{P-(e-t')(e-t'+1),j}(X,\Lambda^{\langle 2t'\rangle}E\otimes L^{l+t-t'}), \quad (8.3)$$

et les autres termes sont nuls.
En particulier,

$$^{P}E_1^{p,q+(e-t)(2e-2t+1)-P} = {}^{P}E_1^{p,q-p+(e-t)^2} = H^{p,q}(X,\Lambda^{\langle 2t\rangle}E\otimes L^l).$$

On cherche maintenant à montrer que ce terme n'est compensé par aucun autre de la suite spectrale.

Soit donc t', et considérons les termes $^{P}E_1^{P-(e-t')(e-t'+1),u}$.
Si $t'>t$, alors $P-(e-t')(e-t'+1)\geq P-(e-t-1)(e-t)=p+2(e-t)\geq n$ par (8.2). Pour que $\Omega_X^{P-(e-t')(e-t'+1)}$ soit non nul, il faut donc que $t'=t+1$ et $n=p+2(e-t)$. Dans ce cas, la différentielle qui pourrait compenser $^{P}E_1^{p,q+(e-t)(2e-2t+1)-P}$ serait l'application

$$d_{2e-2t}:\ {}^{P}E_{2e-2t}^{p,q+(e-t)(2e-2t+1)-P}\to {}^{P}E_{2e-2t}^{n,q+(e-t)(2e-2t+1)-P-(2e-2t-1)}.$$

Or, par (8.3), ce dernier groupe est inclus dans

$$^{P}E_1^{n,q+2(e-t)+(e-t-1)(2e-2t-1)-P} = H^{n,q+2(e-t)}(X,\Lambda^{\langle 2t+2\rangle}E\otimes L^{l-1}).$$

Ce dernier groupe est nul par le théorème de Le Potier si $q+2(e-t)>4e-2t-2$, soit $q>2e-2$, ce qui est le cas.

Si $t' < t$, on utilise l'hypothèse de récurrence. Le terme qui pourrait compenser ${}^PE_1^{p,q+(e-t)(2e-2t+1)-P}$ est alors

$$\begin{aligned} & {}^PE^{P-(e-t')(e-t'+1),q+(e-t)^2+(e-t')(e-t'+1)-1-P}_{(e-t')(e-t'+1)-(e-t)(e-t+1)} \\ \subset \quad & H^{P-(e-t')(e-t'+1),q+(e-t)^2-(e-t')^2-1}(X, \Lambda^{\langle 2t' \rangle} E \otimes L^{l+t-t'}). \end{aligned}$$

Comme $P-(e-t')(e-t'+1) = p-(t-t')(2e-t-t'+1) \leq p-(2e-t-t')-(t-t') = p-2e+2t' < n-2(e-t')$ (en effet on peut supposer $p<n$), on est dans le deuxième cas de la proposition, et $q+(e-t)^2-(e-t')^2-1 = q-(t-t')(2e-t-t')-1$. Ce dernier groupe est nul par hypothèse de récurrence si

$$p+q > t'[2(t'+n-p+1)+1]+(t-t')(4e-2t-2t'+1)+1. \tag{8.4}$$

Comme $t'<t$ et $n-p \leq 2(e-t)$, on a $t'+n-p < 2e-t$, et comme on peut supposer $t'>0$, le terme de droite de l'inéquation (8.4) est inférieur à

$$t'[2(2e-t)+1]+(t-t')(4e-2t+1) = t'(4e-2t+1) < p+q.$$

Ainsi, aucun terme ne peut compenser ${}^PE_1^{p,q+(e-t)(2e-2t+1)-P} = H^{p,q}(X, \Lambda^{\langle 2t \rangle} E \otimes L^l)$ et donc ${}^PE_1^{p,q-p+(e-t)^2} = {}^PE_\infty^{p,q-p+(e-t)^2}$.
Ce dernier est un terme du gradué associé à $H^{P,q+(e-t)^2}[G_\omega(2e,E), \mathcal{O}(1)]$, qui est nul par Kodaira dès que $P+q+(e-t)^2 > n+e(2e+1)$, soit par (8.2) dès que $p+q > e(2e+1)-(e-t)(2e-2t+1) = t(4e-2t+1)$. •

Le cas des puissances extérieures impaires est très similaire :

Proposition 8.3 *Soit E un fibré vectoriel ample de rang $4e+2$ sur X, variété projective lisse de dimension n, muni d'une forme symplectique à valeurs dans un fibré en droites ample L. Soient p,q,t,l des entiers avec $0 \leq t \leq e$. Alors*

$$H^{p,q}(X, \Lambda^{\langle 2t+1 \rangle} E \otimes L^l) = 0$$

dès que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

$$\begin{cases} p+q > n+2e+1+t(4e-2t+1) \\ et\ l \geq t[\frac{n-p}{2}]^+ + e - t \\ et\ n-p \leq 2(e-t) \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} p+q > n+2e+1+t[2(t+n-p+1)+1] \\ et\ l \geq (t+1)[\frac{n-p}{2}]^+ \\ et\ n-p > 2(e-t) \end{cases}$$

Démonstration : Pour les mêmes raisons que précédemment, il suffit de démontrer cette proposition sous les premières conditions. La récurrence commence à $t = 0$, c'est pourquoi on trouve la borne sur l que j'ai indiquée. On étudie alors la suite spectrale qui calcule la cohomologie de $\mathcal{O}(1)\otimes(\pi^*L)^{l-(e-t)}$ sur la grassmannienne lagrangienne $G_\omega(2e+1, E)$. On pose aussi $P = p + (e-t)(e-t+1)$. Comme la proposition 8.1 reste valable, le calcul des termes de cette suite spectrale est identique. La récurrence fonctionne donc de manière similaire ; le seul changement concerne la dimension de $G_\omega(2e+1, \mathbb{C}^{4e+2})$ qui est $(e+1)(2e+1)$. Ainsi on aura comme précédemment ${}^PE_\infty^{p,q-p+(e-t)^2} = 0$ si $P + q + (e-t)^2 > n + (e+1)(2e+1)$, soit $p + q > t(4e-2t+1) + 2e + 1$. On trouve ainsi la borne pour $p + q$ que j'ai indiquée. •

Je propose maintenant une version "compacte" des deux propositions précédantes. Ce résultat ne résume que les premiers cas de ces propositions ; on pourrait établir un résultat similaire pour les grandes valeurs de $n - p$. Si e et t sont des entiers, notons $r(e,t)$ l'entier $t/2$ si t est pair, et e si t est impair.

Théorème 8.1 *Soit E un fibré vectoriel ample de rang $2e$ sur X, variété projective lisse de dimension n, muni d'une forme symplectique. Soient p, q, t, k des entiers avec $0 \leq t \leq e$. Alors*

$$H^{p,q}[X, \Lambda^{\langle t\rangle}E \otimes (\det E)^k] = 0 \text{ si :}$$

$$\begin{cases} p + q > n + [\frac{t}{2}](4[\frac{e}{2}]^+ - t) + r(e,t) \\ \text{et } k \geq ([\frac{t-1}{2}][\frac{n-p}{2}]^+ + e - [\frac{t}{2}])/e \\ \text{et } n - p \leq 2[\frac{e-t}{2}] \end{cases}$$

Démonstration : Le lemme 8.1.3 implique que $(\det E)^k \simeq L^{ke}$. Alors, les propositions 8.2 et 8.3 montrent ce théorème pour t et e de même parité. Il suffit, pour l'établir pour t pair et e impair par exemple, d'appliquer, comme dans la preuve de la proposition 8.2, le cas t et e pairs à $F' = E' \oplus (M' \oplus M')$, qui est un fibré de rang multiple de 4. •

8.2 Cas quadratique

Ce paragraphe est très semblable au paragraphe précédent ; aussi, je ne mentionnerai dans les preuves que les points différents du cas symplectique.

8.2.1 Cadre géométrique, notations

On se donne maintenant un fibré quadratique E, c'est-à-dire un fibré E, un fibré en droites L et une section globale Q de $E^* \otimes E^* \otimes L$ telle qu'en tous points $x \in X$, Q_x est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée.

Supposons par exemple que E est de rang 2. Alors la fibration naturelle $\mathbb{P}\{Q = 0\} \subset \mathbb{P}E \to X$ est un revêtement double étale qui n'a aucune raison d'être trivial, même localement. On ne peut donc pas espérer démontrer un analogue du lemme 8.1.1. Nous allons voir, cependant, que c'est le cas à un morphisme fini près.

Soit U_i un ouvert trivialisant E et L, f_i et g_i des isomorphismes entre $E_{|U_i}$ et $V \times U_i$, et entre $L_{|U_i}$ et $\mathbb{C} \times U_i$. Pour tout $x \in U_i$, on a une forme quadratique Q_x sur V, donnée par $Q_x(v_1, v_2) = g_i\{Q[f_i^{-1}(x, v_1), f_i^{-1}(x, v_2)]\}$. Soit Q' la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ si le rang de E est pair et $\begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sinon.

Lemme 8.2.1 *Il existe un revêtement fini $f : Y \to X$ et des trivialisations de f^*E et f^*L telles que la forme Q_x définie pour ces trivialisations soit constamment égale à Q'.*

Démonstration : Par un résultat de W. Graham [Gra 03, corollary 2.11,p.10], il existe un revêtement fini $f : Y \to X$ tel que f^*E admette un sous-fibré isotrope maximal (en fait, Y est construit comme un sous-schéma de la grassmannienne relative des espaces isotropes de dimension maximale sur E). Supposons d'abord que le rang de E est pair ; notons $rg(E) = 2e$. Soit comme dans la démonstration du lemme 8.1.1 des sections $s_1, \ldots, s_{2e}$ de E définies sur un ouvert U telles que le sous-espace engendré par $s_1(x), \ldots, s_e(x)$ soit le sous-fibré isotrope maximal F_x donné par le résultat de Graham, et qui engendrent E_x sur l'ouvert U. On va "orthonormaliser" cette base. Notons $\langle ., . \rangle_x$ le produit scalaire induit par Q sur la fibre au-dessus de x ; par récurrence sur i, montrons qu'il existe des sections $s_1, \ldots, s_{2e}$ de E telles que $\forall x \in U$:

- $s_1(x), \ldots, s_{2e}(x)$ engendre E_x et $s_1(x), \ldots, s_e(x)$ engendre F_x.
- $\forall 1 \leq j \leq e, \forall 1 \leq k \leq i, \langle s_j(x), s_{e+k}(x) \rangle_x = \delta_{j,k}$.
- $\forall 1 \leq j, k \leq i, \langle s_{e+j}, s_{e+k} \rangle_x = 0$.

Le cas $i = 0$ initie trivialement la récurrence. Supposons que l'on ait des sections vérifiant les hypothèses au rang $i-1$. Nous allons produire des sections t_j vérifiant ces hypothèses au rang i. Posons donc $t_j = s_j$ pour $1 \leq j \leq i, e+1 \leq j < e+i$ et $e+i < j \leq 2e$. Soit alors

$$s'_{e+i} = s_{e+i} - \sum_{j<i} (\langle s_{e+i}, s_j \rangle_x s_{e+j} + \langle s_{e+i}, s_{e+j} \rangle_x e_j).$$

On a donc $\langle s'_{e+i}, s_j \rangle_x = \langle s'_{e+i}, s_{e+j} \rangle_x = 0$ pour $j < i$. On pose alors $s''_{e+i} = s'_{e+i} - \frac{\langle s'_{e+i}, s'_{e+i} \rangle_x}{2\langle s'_{e+i}, s_i \rangle}{}_x \, s_i$, de telle sorte que $\langle s''_{e+i}, s''_{e+i} \rangle_x = 0$, et $t_{e+i} = \frac{s''_{e+i}}{\langle s''_{e+i}, s_i \rangle_x}$, pour que $\langle t_{e+i}, s_i \rangle = 1$. On pose enfin, pour $e \geq j > i$, $t_j = s_j - \langle t_{e+i}, s_j \rangle s_i$.

Les sections t_j conviennent pour le rang i. On obtient, pour $i = e$, des sections telles que Q_x s'écrive Q' dans cette base. Dans le cas où le fibré est de rang impair, on met de même Q_x sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(x) \end{pmatrix}$, avec $\lambda(x) \in \mathbb{C} - \{0\}$. En changeant la trivialisation de L, cette matrice devient $\begin{pmatrix} 0 & I/\lambda(x) & 0 \\ I/\lambda(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En posant $s'_j = \lambda(x).s_j$, pour $1 \leq j \leq e$, on met Q_x sous la forme désirée. •

On en déduit comme dans le cas symplectique :

Lemme 8.2.2 *Soit E un fibré muni d'une forme quadratique à valeurs dans L, V un espace vectoriel de dimension $rg(E)$ fixé et Q une forme quadratique sur V. Il existe un*

morphisme fini $\varphi : Y \to X$ tel que les fonctions de transition $f_{i,j}$ et $g_{i,j}$ de φ^*E et φ^*L vérifient $f_{i,j}^* Q = g_{i,j} Q$. Par ailleurs, si r est un entier, la projection $G_Q(r, \varphi^*E) \to Y$ est une fibration localement triviale.

Enfin, comme dans le cas symplectique, L est ample si E l'est :

Lemme 8.2.3 $(\det E)^2 \simeq L^e$.

Démonstration : En effet, la forme Q induit un isomorphisme $E \simeq E^* \otimes L$. En prenant le déterminant de cet isomorphisme, on obtient un isomorphisme $\det E \simeq \det(E^*) \otimes L^e$. Or, $\det E^* \simeq (\det E)^*$; on obtient donc $(\det E)^2 \simeq L^e$. •

Comme je l'ai déjà rappelé plusieurs fois, pour démontrer un théorème d'annulation en cohomologie, on peut passer à un revêtement fini. Dans la suite, je supposerai donc que E et L vérifient les hypothèses du lemme 8.2.2.

On aurait aussi pu remarquer que notre forme quadratique est, dans le cadre holomorphe, localement triviale, et montrer nos théorèmes d'annulation dans ce cadre.

8.2.2 Cohomologie de $\mathcal{O}(2)$ sur $G_Q(e, \mathbb{C}^{2e})$

Comme nous l'avons vu, la cohomologie de $\mathcal{O}(1)$ est triviale sur $G_Q(e, \mathbb{C}^{2e})$ ou sur $G_Q(e, \mathbb{C}^{2e+1})$. Ce qui va nous permettre de démontrer des théorèmes d'annulation est plutôt la cohomologie de $\mathcal{O}(2)$ sur $G_Q(e, \mathbb{C}^{2e})$, qui présente de fortes analogies avec celle de $\mathcal{O}(1)$ sur $G_\omega(e, \mathbb{C}^{2e})$:

Proposition 8.4 *$H^{m^2, m(m-1)}[G_Q(e, \mathbb{C}^{2e}), \mathcal{O}(2)] = \Lambda^{e-2m}\mathbb{C}^{2e}$ pour $0 \leq m \leq [e/2]$ et les autres termes sont nuls.*

Démonstration : Comme le poids de $\mathcal{O}(2)$ est $(1, \ldots, 1)$, le poids à considérer est $(e, e-1, \ldots, l-u_l^-, \ldots, 1-u_1^-)$. Notons $\alpha_i = i - u_i^-$. Par l'argument habituel, $\{|\alpha_i|\}$ est l'ensemble de tous les entiers entre 0 et $l-1$. Soit m la longueur de u ; $u_{m+1}^- = m$ donc $\alpha_{m+1} = 1$. Ainsi $\alpha_m \leq 0$, et comme $\exists i : |\alpha_i| = 1$, on a donc $\alpha_m = 0$, et $u_m = 1$. Si $l(u^-)u_1 + 1 = m+1$, alors $u = (m, m-1, \ldots, 1)$, ce qui est absurde. Alors $u_{m+2}^- = m-1$, $\alpha_{m+2} = 3$ et donc $\alpha_{m-1} = -2$, soit $u_{m-1} = 3$. En raisonnant par récurrence, on en déduit que $u = (2m-1, 2m-3, \ldots, 1)$. On montre alors que $p = m^2, q = m(m-1)$ et que le groupe de cohomologie correspondant est $\Lambda^{e-2m}\mathbb{C}^{2e}$. •

8.2.3 Théorème d'annulation

Proposition 8.5 *Soit E un fibré vectoriel ample de rang $4e$ sur X, variété projective lisse de dimension n, muni d'une forme quadratique à valeurs dans un fibré en droites ample L. Soient p, q, t, l des entiers avec $1 \leq t \leq e$. Alors*

$$H^{p,q}(X, \Lambda^{2t}E \otimes L^l) = 0$$

dès que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

$$\begin{cases} p + q > n + t(4e - 2t - 1) \\ \text{et } l \geq (t-1)[\frac{n-p+1}{2}]^+ + e - t \\ \text{et } n - p \leq 2(e-t) - 1 \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} p+q > n+t[2(t+n-p+2)-1] \\ et\ l \geq t[\frac{n-p+1}{2}]^+ \\ et\ n-p > 2(e-t)-1 \end{cases}$$

Démonstration : Supposons d'abord que la première partie de cette proposition est vraie pour un entier t. Alors soit $\varphi : X' \to X$ un morphisme fini, $E' = \varphi^* E$, $L' = \varphi^* L$ et M' un fibré en droites tel que $M'^2 = L'$. Soit $F' = E' \oplus M'^{4(f-e)}$ avec $f = [\frac{n-p+1}{2}]^+ + t$, et définissons une forme quadratique sur F' de façon similaire au cas symplectique.

Alors, la définition de f montre que $n-p+1 \leq 2(f-t) \leq n-p+2$; ainsi nous pouvons appliquer la première partie à F'. L'hypothèse $l \geq t[\frac{n-p+1}{2}]^+$ signifie exactement $l \geq (t-1)[\frac{n-p+1}{2}]^+ + f - t$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} p+q &> n+t[2(t+n-p+2)-1] \\ &\geq n+t[2(t+2f-2t)-1] = n+t(4f-2t-1). \end{aligned}$$

Ainsi, $H^{p,q}(X', \Lambda^{2t})E' \otimes L'^l) = 0$ et $H^{p,q}(X, \Lambda^{2t} E \otimes L^l) = 0$.

Pour démontrer le premier point, on regarde la suite spectrale calculant la cohomologie de $\mathcal{O}(2) \otimes (\pi^* L)^{l-(e-t)}$ sur $G_Q(2e, E)$, où je note π la projection $G_Q(2e, E) \to X$. On pose $P = p + (e-t)^2$. Alors on montre de même que

$${}^P E_1^{P-(e-t')^2, j+(e-t')(2e-2t'-1)-P} = H^{P-(e-t')^2, j}(X, \Lambda^{2t'} E \otimes L^{l+t-t'}).$$

Il s'agit donc de même d'annuler ces termes pour $t \neq t'$. Mais si $t' > t$, cela résulte facilement du théorème de Le Potier. Pour $t' < t$, il suffit d'annuler $H^{p',q'}(X, \Lambda^{2t'} E \otimes L^{l+t-t'})$ avec

$$\begin{cases} p' = p-(t-t')(2e-t-t') \\ q' = q-(t-t')(2e-t-t'-1)-1. \end{cases}$$

Mais, d'une part, $p' \leq p-(2e-2t'+1) < n-2(e-t')-1$, car on peut supposer que $p < n$; on est donc dans le deuxième cas. D'autre part, il suffit de montrer que

$$p+q > n+t'[2(t'+n-p+2)-1]+(t-t')(4e-2t-2t'-1)+1.$$

Or puisque $t'+n-p \leq t'+2(e-t)-1 < 2e-t-1$, le membre de droite de l'inéquation est inférieur à

$$n+t'[2(2e-t)-1]+(t-t')(4e-2-1) = n+t(4e-2t-1),$$

et il est donc bien plus petit que $p+q$.

Enfin, il reste à montrer que $H^{P,q+(e-t)(e-t-1)}[G_Q(2e, E), \mathcal{O}(2)]$ est nul par le théorème de Kodaira. En effet,

$$\begin{aligned} & \dim G(2e, E) - P - q - (e-t)(e-t-1) \\ = \ & n+e(2e-1)-(e-t)^2-(e-t)(e-t-1) \\ = \ & n+e(2e-1)-(e-t)(2e-2t-1) \\ = \ & n+t(4e-2t-1). \end{aligned}$$

•

De façon tout-à-fait similaire, on démontre :

Proposition 8.6 *Soit E un fibré vectoriel ample de rang $4e+2$ sur X, variété projective lisse de dimension n, muni d'une forme quadratique à valeurs dans un fibré en droites ample L. Soient p, q, t, l des entiers avec $0 \leq t \leq e$. Alors*

$$H^{p,q}(X, \Lambda^{2t+1}E \otimes L^l) = 0$$

dès que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

$$\begin{cases} p+q > n + t(4e-2t-1) + 2e \\ et\ l \geq t[\frac{n-p+1}{2}]^+ + e - t \\ et\ n-p \leq 2(e-t)-1 \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} p+q > n + t[2(t+n-p+2)-1] + 2e \\ et\ l \geq (t+1)[\frac{n-p+1}{2}]^+ \\ et\ n-p > 2(e-t)-1 \end{cases}$$

Pour x réel, notons $\{x\}$ sa partie décimale, c'est-à-dire $x - [x]$. Ces deux propositions peuvent se rassembler en

Théorème 8.2 *Soit E un fibré vectoriel ample de rang e sur X, variété projective lisse de dimension n, muni d'une forme quadratique. Soient p, q, t, k des entiers avec $0 \leq t \leq [e/2]$. Alors*

$$H^{p,q}[X, \Lambda^t E \otimes (\det E)^{2k}] = 0 \ \textit{si :}$$

$$\begin{cases} p+q > n + [\frac{t}{2}](4[\frac{e}{4} - \{\frac{t}{2}\}]^+ + 2\{\frac{t}{2}\} - t - 1) + 4\{\frac{t}{2}\}[\frac{e-2}{4}]^+ \\ et\ k \geq ([\frac{t-1}{2}][\frac{n-p+1}{2}]^+ + 2\{\frac{t}{2}\}([\frac{e-2}{4}]^+ - [\frac{t}{2}]))/e \\ et\ n-p \leq 2[\frac{e}{4} - \{\frac{t}{2}\}]^+ + 2\{\frac{t}{2}\} - t - 1 \end{cases}$$

Bibliographie

[Akh 95] D. Akhiezer
Lie group actions in complex analysis.
Aspects of Mathematics, E27. Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1995.

[All 90] B.N. Allison
Simple structurable algebras of skew-dimension one.
Comm. Algebra **18** (1990), 1245–1279.

[Arr 97] E. Arrondo
projections of grassmannians of lines and characterization of Veronese varieties.
J. Algebraic Geom. **8** (1999), no. 1, 85–101.

[Art 57] E. Artin
Algèbre géométrique.
Dunod, Paris, 1983.

[Ber 00] W. Bertram
The geometry of Jordan and Lie structures.
Lecture Notes in Mathematics, 1754
Springer-Verlag, Berlin (2000).

[Bou 68] N. Bourbaki
Groupes et algèbres de Lie, chapitre 6,
Hermann, 1968.

[Che 97] C. Chevalley
The algebraic theory of spinors and Clifford algebras Collected works. Vol. 2.
Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[Dys 72] F.J. Dyson
quaternion determinants.
Helvetica Physica Acta **45** (1972), 289–301.

[Cha 02] P.E. Chaput
Severi varieties.
Math. Z. **240** (2002), 451–459.

[Ein 89] L. Ein et N. Shepherd-Barron
Some special Cremona transformations.
Amer. J. Math. **111** (1989), no. 5, 783–800.

[EKP 00] P. Etingof,D. Kazhdan, A. Polishchuk
When is the Fourier transform of an elementary function elementary ?
math arXiv AG/0003009.

[FK 94] J. Faraut and A. Koranyi
Analysis on symmetric cones.
Oxford mathematical monographs, Oxford science publications (1994).

[Fla 62] H. Flanders
On spaces of linear transformations with bounded rank.
J. London Math. Soc. **37** (1962), pp.10–16.

[Ful 81] W. Fulton et R. Lazarsfeld
Connectivity and its applications in algebraic geometry.
Algebraic geometry (Chicago, Ill., 1980), pp. 26–92, Lecture Notes in Math., 862,
Springer, Berlin-New York, 1981.

[FH 91] W. Fulton, J. Harris
Representation theory. A first course.
Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics,
Springer-Verlag, New York, 1991.

[Gra 03] W. Graham
Nonemptiness of symmetric degeneracy loci.
math.AG/0305159.

[GKZ 94] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov,A.V. Zelevinsky
Discriminants, resultants, and multidimensional determinants.
Mathematics : Theory and Applications,
Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.

[GH 94] P. Griffiths, J. Harris
Principles of algebraic geometry. Reprint of the original.
Wiley Classics Library, 1994.

[Har 92] J. Harris
Algebraic Geometry. A first course. Corrected reprint of the 1992 original.
Graduate Texts in Mathematics, 133,
Springer-Verlag, New York, 1995.

[Hart 77] R. Hartshorne
Algebraic geometry.
Graduate Texts in Mathematics, 52,
Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Hart 66] R. Hartshorne
Ample vector bundles.
Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **29** (1966) 63–94.

[Harv 90] F.R. Harvey
Spinors and calibrations.
Perspectives in Mathematics, 9,
Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.

[Jac 58] N. Jacobson
Composition algebras and their automorphisms.
Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **7** (1958), pp.55–80.

[Jac 63] N. Jacobson
Generic norm of an algebra.
Osaka Math. J. 15 1963 25–50.

[Jac 68] N. Jacobson
Structure and representations of Jordan algebras.
Am. Math. Soc. Coll. Publ. vol XXXIX (1968).

[Kem 76] G.R. Kempf
On the collapsing of homogeneous bundles.
Invent. Math. **37** (1976), no. 3, 229–239.

[JPW 81] T. Józefiak, P. Pragacz, J. Weyman
Resolutions of determinantal varieties and tensor complexes associated with symmetric and antisymmetric matrices.
Young tableaux and Schur functors in algebra and geometry (Toruń, 1980),
Astérisque, pp. 109–189, 87-88,
Soc. Math. France, Paris, 1981.

[KPV 76] V. G. Kac, V.L. Popov et E. B. Vinberg
Sur les groupes linéaires algébriques dont l'algèbre des invariants est libre.
C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **283** (1976), no. 12.

[Kaj 99] H. Kaji
Homogeneous projective varieties with degenerate secants.
Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), no. 2, 533–545.

[KS 77] T.A. Kimura, M. Sato
A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants.
Nagoya Math. J. 65 (1977), 1–155.

[Koe 62] M. Koecher
The Minnesota notes on Jordan algebras and their applications.
Lecture Notes in Mathematics, 1710,
Springer-Verlag, Berlin (1962).

[LM 99] J.M. Landsberg, L. Manivel
The projective geometry of Freudenthal's magic square.
math arXiv AG/9908039.

[LM 02] J.M. Landsberg, L. Manivel
Representation theory and projective geometry.
math.AG/0203260.

[LM 89] H.B. Lawson, M.L. Michelsohn
Spin geometry.
Princeton Mathematical Series, 38. Princeton University Press, Princeton, 1989.

[Lay 96] F. Laytimi
On degeneracy loci.
Internat. J. Math. **7** (1996), no. 6, 745–754

[LN 02] F. Laytimi, W. Nahm
A generalization of Le Potier's vanishing theorem.
math.AG/0210010.

[LVV 84] R. Lazarsfeld et A. Van de Ven
Topics in the geometry of projective space.
Recent work of F.L. Zak,
Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, Mass., 1984.

[LP 75] J. Le Potier
Annulation de la cohomolgie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe positif de rang quelconque.
Math. Ann. **218** (1975), no. 1, 35–53.

[LP 77] J. le Potier
Cohomologie de la grassmannienne à valeurs dans les puissances extérieures et symétriques du fibré universel.
Math. Ann. **226** (1977), no. 3, 257–270.

[Man 92] L. Manivel
Théorèmes d'annulation pour la cohomologie des fibrés vectoriels amples, thèse.

[Man 97] L. Manivel
Vanishing theorems for ample vector bundles.
Invent. Math. 127 (1997), no. 2, 401–416.

[Mcc 65] K. McCrimmon
Norms and non-commutative Jordan algebras.
Pacific J. Math **15**(1965) 925-956.

[Mcc 67] K. McCrimmon
Generically algebraic algebras.
Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967) 527–551.

[Moo 22] E.H. Moore
On the determinant of an hermitian matrix of quaternionic elements.
Bull. Amer. Math. Soc. **28** (1922) p.161,162.

[Mum 95] D. Mumford
Algebraic geometry
I. Complex projective varieties.
Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Ott 88] G. Ottaviani
Spinor bundles on quadrics.
Trans. Amer. Math. Soc. 307 (1988), no. 1, 301–316.

[Rob 88] J. Roberts
Projective embeddings of algebraic varieties.
Monografías del Instituto de Matemáticas, 19.
Universidad Nacional Autónoma de México, México, 1988.

[Ros 97] B. Rosenfeld
Geometry of Lie groups.

Mathematics and its Applications, 393.
Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

[Sch 63] R. D. Schafer
On forms of degree n permitting composition.
J. Math. Mech. 12 1963 777–792.

[Sch 66] R.D. Schafer
An introduction to nonassociative algebras. Corrected reprint of the 1966 original.
Dover Publications, Inc., New York, 1995.

[Sno 86] D.M. Snow
Cohomology of twisted holomorphic forms on Grassmann manifolds and quadric hypersurfaces.
Math. Ann. **276** (1986), no. 1, 159–176.

[Sno 88] D.M. Snow
Vanishing theorems on compact Hermitian symmetric spaces.
Math. Z. **198** (1988), 1–20.

[Tit 95] J. Tits
Groupes semi-simples complexes et géométrie projective.
Séminaire Bourbaki, Vol. 3, Exp. No. 112, 115–125,
Soc. Math. France, Paris, 1995.

[Tu 89] L.W. Tu
The connectedness of symmetric and skew-symmetric degeneracy loci : even ranks.
Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 381–392.

[Tu 88] L.W. Tu,J. Harris
The connectedness of symmetric degeneracy loci : odd ranks.
Banach Center of publications, **26** : Topics in algebra, Part 2 (1988), 249–256.

[VS 60] F. van der Blij, T.A. Springer
Octaves and triality.
Nieuw Arch. Wisk. **8** 1960 158–169.

[Zak 93] F. L. Zak
Tangents and Secants of Algebraic Varieties.
American Mathematical Society, Providence, RI (1993).