La théorie des solides et les quanta

Léon Brillouin

▶ **To cite this version:**

Léon Brillouin. La théorie des solides et les quanta. Physique [physics]. Migration - université en cours d'affectation, 1921. Français. NNT : . tel-00006779

HAL Id: tel-00006779
https://theses.hal.science/tel-00006779

Submitted on 31 Aug 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SÉRIE A
N° 866.
N° D'ORDRE :
1668.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES,

PAR M. LÉON BRILLOUIN.

1re THÈSE. — LA THÉORIE DES SOLIDES ET LES QUANTA.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le mars 1921, devant la Commission d'examen.

Mme CURIE, *Président.*
MM. JEAN PERRIN, LANGEVIN, *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55
1921

SÉRIE A.
N° 866.
N° D'ORDRE :
1668.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

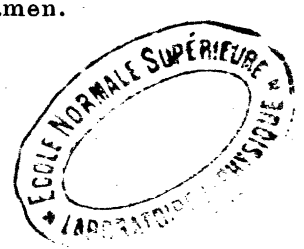
LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES,

PAR M. LÉON BRILLOUIN.

1re THÈSE. — LA THÉORIE DES SOLIDES ET LES QUANTA.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le mars 1921, devant la Commission d'examen.

Mme CURIE, *Président.*
MM JEAN PERRIN, LANGEVIN, *Examinateurs.*



PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55
—
1921

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
Doyen	F. HOUSSAY, profess.	Zoologie.
Professeurs honoraires	P. PUISEUX, VELAIN, BOUSSINESQ.	
Professeurs	LIPPMANN	Physique.
	BOUTY	Physique.
	E. PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	Y. DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	GASTON BONNIER	Botanique.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER	Chimie organique.
	JOANNIS	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET	Physique.
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie.
	PAINLEVÉ	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
	HAUG	Géologie.
	H. LE CHATELIER	Chimie.
	GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique générale.
	CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie.
	EMILE BOREL	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	MARCHIS	Aviation.
	JEAN PERRIN	Chimie physique.
	G. PRUVOT	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	MATRUCHOT	Botanique.
	ABRAHAM	Physique.
	CARTAN	Mécanique rationnelle.
	CL. GUICHARD	Géométrie supérieure.
	MOLLIARD	Physiologie végétale.
	LEBESGUE	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	LAPICQUE	Physiologie.
	GENTIL	Géographie physique.
	VESSIOT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	COTTON	Physique théorique et Physique céleste.
	N	Histologie.
	N	Mathématiques générales.
Professeurs adjoints	LEDUC	Physique.
	HÉROUARD	Zoologie.
	LÉON BERTRAND	Géologie.
	RÉMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	LESPIEAU	Chimie.
	SAGNAC	Physique (Enseignement P. C. N.).
	PEREZ	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	RABAUD	Biologie générale.
	PORTIER	Physiologie.
	BLAISE	Chimie organique.
	PÉCHARD	Chimie (Enseignement P. C. N.).
Secrétaire	D. TOMBECK.	

64719 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A MON PÈRE

A MES MAITRES

MM. LANGEVIN ET PERRIN

PREMIÈRE THÈSE.

LA THÉORIE DES SOLIDES ET LES QUANTA

PAR M. LÉON BRILLOUIN.

CHAPITRE PREMIER.

GÉNÉRALITÉS.

a. Exposé. — La théorie des solides a fait l'objet de très nombreuses recherches durant ces dernières années. La plupart des auteurs ont introduit des considérations de quanta. Une étude plus approfondie nous prouvera que cette notion est loin de jouer un rôle aussi primordial qu'on l'a supposé ; mais elle a mis sur la voie de modes de raisonnements particulièrement appropriés à l'étude des solides. Je montrerai que la plus grande partie des résultats obtenus peut se déduire, en toute généralité, de la mécanique et la thermodynamique classiques, appliquées à ces types de raisonnements. Les quanta permettent alors de préciser la forme des résultats généraux, et avec succès d'ailleurs, car l'expérience vérifie les formules ainsi établies.

La nouvelle théorie des solides et liquides se base sur les idées générales suivantes : Dans un solide (ou un liquide), l'élément fondamental simple, sur lequel il est commode de raisonner, c'est l'onde élastique en propagation à travers le milieu. Dans la théorie cinétique des gaz, on choisit comme élément primordial la molécule, en mouvement de translation uniforme, et l'on raisonne sur les vitesses, libre parcours, de ces molécules. Dans le solide, il est impossible de considérer une molécule indépendamment des voisines, par suite de leurs réactions mutuelles intenses. Il sera donc mal commode, pour analyser l'agitation thermique, de considérer les molécules isolément. Le mouvement

élémentaire simple, suivant lequel l'analyse est pratique, c'est l'onde élastique. Au point de vue des propriétés thermiques, un *corps solide est caractérisé par les deux vitesses de propagation* V_l *et* V_{tr} des ondes longitudinales et transversales. Ces ondes peuvent avoir toutes les fréquences inférieures à une certaine fréquence limite, celle de l'onde dont la demi-longueur d'onde est égale à la distance moyenne de deux molécules (nous donnerons plus loin des précisions sur cette définition). *Un liquide est caractérisé par une vitesse de propagation* V_l *des ondes longitudinales.*

Dans ces conditions, le problème se pose sous une forme tout à fait analogue à celui du corps noir : une enceinte vide est parcourue par des ondes électromagnétiques de vitesse V, l'étude d'une répartition isotherme des intensités entre les différentes fréquences est le problème classique du corps noir; aucune fréquence limite n'est à introduire. Au lieu de suivre la voie tracée par les auteurs précédents, je me propose, dans cet exposé, d'étudier *l'extension, aux ondes élastiques du corps solide, des propriétés thermiques classiques du rayonnement du corps noir.* La théorie des quanta n'interviendra, comme dans le cas du corps noir, qu'à la fin de l'exposé, pour préciser la forme de la fonction indéterminée de Wien. Enfin j'introduirai une notion nouvelle, celle du libre parcours moyen des ondes, qui permet d'étudier les problèmes de déséquilibre, tels que la conduction de la chaleur et la viscosité des corps. Ce dernier problème n'est d'ailleurs pas résolu encore de façon satisfaisante.

b. Formules d'élasticité. — J'utiliserai, en général (1), en élasticité, les formules écrites au moyen des deux coefficients λ et μ. Je résume ici les principales notations. Le déplacement $\vec{D}(D_x, D_y, D_z)$ définit la déformation. La dilatation cubique θ s'écrit

$$\theta = \operatorname{div} \vec{D}, \tag{1}$$

(1) LAMÉ, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*, 2e édition, Gauthier-Villars, 1866. — LOVE, *Treatise on the math. theory of elasticity*. Cambridge Univ. Press. — BOUASSE, *Traité de Physique*, vol. I, p. 120. Plusieurs auteurs prennent pour les glissements la moitié des expressions ci-dessus, on se méfiera des confusions possibles.

les glissements γ_x, γ_y, γ_z valent

$$\gamma_x = \frac{\partial D_z}{\partial y} + \frac{\partial D_y}{\partial z} \cdots, \tag{2}$$

la densité est ρ ; l'invariant du deuxième degré, I :

$$I = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial D_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\gamma_x^2 + \frac{1}{2}\gamma_y^2 + \frac{1}{2}\gamma_z^2. \tag{3}$$

L'énergie potentielle d'une déformation est U :

$$U = \frac{1}{2}\int\int\int (\lambda\theta^2 + 2\mu I)\, dx\, dy\, dz. \tag{4}$$

Les équations de propagation des ondes peuvent s'écrire de la façon suivante : séparons dans le déplacement D un terme D_1 irrotationnel et un terme D_2 sans divergence

$$\vec{D} = \vec{D_1} + \vec{D_2}.$$

Je peux écrire que D_1 dérive d'un potentiel P :

$$\text{rot } D_1 = 0, \qquad D_1 = \text{grad } P, \qquad (\lambda + 2\mu)\,\Delta P - \rho\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0. \tag{5}$$

L'équation en P est l'équation de propagation des ondes longitudinales avec une vitesse V_l :

$$V_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \tag{6}$$

Pour $\vec{D_2}$ et son rotationnel $\vec{R}$, je trouve les relations

$$\begin{cases} \text{div}\,\vec{R} = 0, & \text{rot}\,\vec{D_2} = \vec{R}, \\ \text{div}\,\vec{D_2} = 0, & \mu\,\text{rot}\,\vec{R} = -\rho\dfrac{\partial^2 \vec{D_2}}{\partial t^2}. \end{cases} \tag{7}$$

Ces équations, analogues à celles de Maxwell en électromagnétisme, indiquent une propagation des ondes transversales avec une vitesse

$$V_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Pour les déformations élémentaires, de très courtes longueurs d'onde,

qui formeront les ondes élastiques thermiques, il semble logique d'employer les coefficients λ et μ que l'on obtient en supposant les molécules immobiles, à leur position de repos; ces coefficients seront fonction seulement du volume spécifique du corps, ou de sa déformation d'ensemble, mais indépendants de la température T. Dans une déformation élastique lente, telle que nous savons en créer, on observe au contraire des coefficients moyens $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ obtenus en tenant compte de l'agitation thermique, et par conséquent fonctions de T.

c. Fréquences propres d'un volume solide. Vibrations longitudinales. — Le calcul des fréquences propres d'un volume a tenu une place toute particulière dans les premières études (1) sur la théorie thermique du corps solide. Je rappellerai brièvement les résultats, sur un cas très simple, analogue au calcul de Jeans (2). Considérons (3) un solide de forme parallélépipédique

$$0 < x < l_1, \qquad 0 < y < l_2, \qquad 0 < z < l_3$$

et choisissons des conditions, à la surface, qui impliquent l'isolement thermique du corps. Il faut que les forces superficielles ne travaillent pas; on y arrive, en particulier, en supposant les déplacements normaux nuls; les déplacements tangentiels quelconques; les forces tangentielles nulles; les forces normales quelconques.

Une vibration propre longitudinale se met sous la forme

$$\overrightarrow{D_1} = \operatorname{grad} P,$$

P étant le potentiel des déplacements

$$(8) \qquad P = \varphi_{mnp}(t) \cos\frac{\pi m x}{l_1} \cos\frac{\pi n y}{l_2} \cos\frac{\pi p z}{l_3} \qquad (m, n, p \text{ entiers}).$$

---

(1) P. Debye, *Ann. der Physik*, 4e série, t. XXXIX, 1912, p. 798.

(2) J.-H. Jeans, *Phil. Mag.*, t. X, 1905, p. 91. On pourra, pour le détail des calculs, se reporter au très bon exposé de la Thèse de E. Bauer, n° 1474, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

(3) Goldhammer, *Phys. Zeitschr.*, t. XIV, 1913, p. 1185 et 1188. — H. Weyl, *Math. Ann.*, t. LXXI, 1911, p. 1213.

On vérifie facilement que les conditions de surface sont remplies et l'équation de propagation (5) fournit

$$\varphi_{mnp} = \Phi_{mnp} \cos 2\pi\nu t \tag{9}$$

avec

$$\nu = \frac{V_l}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{p}{l_3}\right)^2}, \tag{10}$$

Φ étant un coefficient d'amplitude arbitraire.

Le mouvement étudié est celui des ondes stationnaires que produirait, après réflexions sur les plans limites, une onde plane de paramètres directeurs $\frac{m}{l_1}$, $\frac{n}{l_2}$, $\frac{p}{l_3}$.

Les énergies potentielle U et cinétique T de ce mouvement s'écrivent

$$U = V_l^2 \frac{M}{16}\left[\left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{l_3}\right)^2\right]^2 \varphi_{mnp}^2, \tag{11}$$

$$T = \frac{M}{16}\left[\left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{l_3}\right)^2\right] \dot{\varphi}_{mnp}^2, \tag{12}$$

le point désigne la dérivée en t.

Le coefficient $\frac{1}{16}$ se réduit à $\frac{1}{8}$ si l'un des nombres m, n, p est nul, ou à $\frac{1}{4}$ si deux des nombres m, n, p sont nuls. Tout mouvement irrotationnel, satisfaisant aux conditions limites imposées, peut, par une triple décomposition en série de Fourier suivant x, y et z, s'analyser comme une somme de termes de la forme indiquée ci-dessus; ce sont les vibrations longitudinales propres du volume.

d. Vibrations transversales. — Le déplacement $\vec{D_2}$ et le rotationnel $\vec{R}$ d'un tel mouvement se développeront de façon analogue au cas précédent :

$$\left\{\begin{array}{l} D_{2x} = d_x \sin\dfrac{\pi m x}{l_1}\cos\dfrac{\pi n y}{l_2}\cos\dfrac{\pi p z}{l_3} \qquad (m, n, p \text{ entiers}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_x = r_x \cos\dfrac{\pi m x}{l_1}\sin\dfrac{\pi n y}{l_2}\sin\dfrac{\pi p z}{l_3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{13}$$

Appliquant à ce cas les équations (7), on trouve

$$(14)\qquad d_x\frac{m}{l_1}+d_y\frac{n}{l_2}+d_z\frac{p}{l_3}=0,\qquad r_x\frac{m}{l_1}+r_y\frac{n}{l_2}+r_z\frac{p}{l_3}=0,$$

$$(15)\qquad \begin{cases} r_x=d_z\dfrac{\pi n}{l_2}-d_y\dfrac{\pi p}{l_3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Et la dernière équation fournit la fréquence ν des mouvements

$$(16)\qquad \nu=\frac{V_{tr}}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n}{l_2}\right)^2+\left(\frac{p}{l_3}\right)^2}.$$

Ces expressions correspondent à deux types de mouvements indépendants, tous deux de fréquence ν; si je prends en effet les d comme paramètres, la relation (14) montre que deux de ces trois paramètres sont indépendants. Ce sont les deux polarisations possibles. Les énergies cinétique T et potentielle U s'écrivent

$$(17)\qquad T=\frac{M}{16}(\dot d_x^2+\dot d_y^2+\dot d_z^2),$$

$$(18)\qquad U=V_{tr}^2\frac{M}{16}\pi^2\left[\left(\frac{m}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n}{l_2}\right)^2+\left(\frac{p}{l_3}\right)^2\right](d_x^2+d_y^2+d_z^2).$$

Ici encore le coefficient $\frac{1}{16}$ se réduit à $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{4}$ si un ou deux des m, n, p sont nuls.

e. Nombre des degrés de liberté de fréquence donnée. — A chaque groupe de valeurs entières m, n, p correspondent un degré de liberté de vibration transversale et deux de vibrations longitudinales. Cherchons les vibrations longitudinales dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu+d\nu$. D'après (10), la condition s'écrit

$$(19)\qquad 4\nu^2\leq V^2\left[\left(\frac{m}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n}{l_2}\right)^2+\left(\frac{p}{l_3}\right)^2\right]\leq 4(\nu+d\nu)^2.$$

Considérons un espace à trois dimensions $\xi=\frac{m}{l_1}$, $\eta=\frac{n}{l_2}$, $\zeta=\frac{p}{l_3}$. La

densité des points (m, n, p entiers) dans cet espace est $l_1 l_2 l_3$. Les inégalités ci-dessus nous définissent, dans l'espace $\xi\eta\zeta$, la portion de calotte sphérique comprise, dans le premier octant, entre les rayons

$$\rho = \frac{2\nu}{V}, \qquad \rho + d\rho = \frac{2\nu}{V} + 2\,d\frac{\nu}{V} = \frac{2\nu}{V} + \frac{2\,d\nu}{U}. \tag{20}$$

Je note U la vitesse de groupe

$$\frac{1}{U} = \frac{d\frac{\nu}{V}}{d\nu} = \frac{1}{V}\left(1 - \frac{\nu}{V}\frac{dV}{d\nu}\right) \tag{21}$$

dans le cas qui nous occupe, on a d'ailleurs U = V puisque V est indépendant de ν. Mais les calculs de fréquences propres, rappelés ci-dessus, s'appliqueraient aussi aisément à des problèmes plus complexes, pour lesquels V dépendrait de ν, et U différerait de V.

Le volume de la portion de calotte sphérique s'écrit donc

$$d\tau = \frac{1}{8} 4\pi\rho^2\, d\rho = \frac{4\pi\nu^2\, d\nu}{UV^2}. \tag{22}$$

Si ν est assez grand, on peut admettre, approximativement, que le nombre des points (m, n, p entiers) compris dans ce volume est donné par

$$d\mathfrak{N} = \frac{1}{l_1 l_2 l_3}\, d\tau = \frac{1}{l_1 l_2 l_3}\,\frac{4\pi\nu^2 d\nu}{UV^2}. \tag{23}$$

Rapportons-nous à l'unité de volume du solide, en posant $l_1 l_2 l_3 = 1$, et nous trouvons, pour le nombre des degrés de liberté de fréquence ν (à $d\nu$ près),

$$d\mathfrak{N}_l = \frac{4\pi\nu^2}{U_l V_l^2}\, d\nu, \qquad d\mathfrak{N}_{tr} = \frac{8\pi\nu^2}{U_{tr} V_{tr}^2}\, d\nu, \tag{24}$$

l'indice l se rapporte aux vibrations longitudinales et l'indice tr aux vibrations transversales. Le calcul est en tout point semblable, pour ces dernières, mais à chaque groupe m, n, p correspondent deux vibrations possibles, avec deux polarisations différentes, ainsi que nous l'avons remarqué plus haut.

CHAPITRE II.

PRINCIPE DE MOINDRE ACTION ET THERMODYNAMIQUE. FORMULE DE BOLTZMANN. — INVARIANT ADIABATIQUE.

Je rappellerai dans ce Chapitre quelques propriétés thermodynamiques très générales des systèmes périodiques.

Ces raisonnements sont très anciens, puisqu'ils remontent à Clausius et Szily (1) (1871-1872) et aux premières discussions théoriques sur le principe de Carnot. On connaît mal, en général, ces théories, le développement des interprétations statistiques de l'entropie les ayant fait un peu oublier. Je montrerai qu'on peut y retrouver les éléments de démonstrations importantes, telles que la loi de Wien, et l'invariance adiabatique de l'action (de Maupertuis).

a. Principe de moindre action de Hamilton. — Je suivrai l'exposé de Boltzmann (2) sur ce sujet. Considérons un système composé, par exemple, de n points matériels, chaque point étant défini par ses trois coordonnées x_i, y_i, z_i, ... Je suppose le mouvement assujetti à un certain nombre ν de liaisons, qui s'expriment par les relations suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi_1(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = k_1, \\ \xi_2(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_\nu(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = k_\nu. \end{cases}$$

Dans le mouvement considéré, les ξ_1, ξ_2, ..., ξ_ν gardent des valeurs constantes déterminées k_1, k_2, ..., k_ν.

---

(1) CLAUSIUS, *Ann. der Physik*, t. CXLII-CXLIV, 1871; t. CXLVI, 1872 (analysé *J. de Phys.*, t. I, p. 72); t. CI, 1873 (analysé *J. de Phys.*, t. II, 1873, p. 108). — SZILY, *Ibid.*, t. CXLV, 1872 (analysé *J. de Phys.*, t. I, p. 339).

(2) Je renvoie à BOLTZMANN. — *Prinzipe der Mechanik*, vol. II, J.-A. BARTH, Leipzig, 1897. Les passages principaux sont : *Sur le principe de moindre action*, p. 24, 115, 139 et 152, et *Sur les systèmes cycliques et analogies thermodynamiques*, p. 162 à 212. — BOLTZMANN note p les coordonnées et q les moments. J'ai cru devoir reprendre les notations inverses, qui sont les plus courantes actuellement.

Voir aussi P. EHRENFEST, *Ann. der Physik*, t. LI, 1916, p. 346.

Je rapporte le mouvement à s coordonnées généralisées q :

$$(2)\qquad \begin{cases} q_1(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = q_1, \\ q_2(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = q_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q_h(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = q_h, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q_s(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = q_s. \end{cases}$$

Je suppose que les ν valeurs des ξ et les s valeurs des q définissent entièrement une configuration du système, c'est-à-dire que les x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n peuvent s'exprimer, par inversion des relations ci-dessus, en fonction des q et des k.

Considérons donc un mouvement, assujetti aux liaisons ci-dessus, et défini par les coordonnées q. Soient Q_h la force correspondant à une coordonnée q_h et T l'expression de la force vive du système. J'appelle p_h le moment relatif à la coordonnée q_h :

$$p_h = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}.$$

Je veux étudier deux types de mouvements entre les instants t_0 et t_1.

Le premier est le *mouvement naturel* du système, sous l'influence des forces Q. Les valeurs initiales des coordonnées étant

$$q_1^0, q_2^0, \ldots, q_h^0, \ldots, q_s^0$$

et les valeurs finales

$$q_1^1, q_2^1, \ldots, q_h^1, \ldots, q_s^1;$$

le second mouvement, que j'appellerai *mouvement varié*, est un mouvement arbitraire, où je suppose que les coordonnées q et les moments p aient des valeurs un peu différentes de celles qu'elles prennent dans le mouvement normal. Soient à chaque instant δq_h, $\delta \dot{q}_h$, δp_h les écarts des valeurs entre le mouvement naturel et le mouvement varié.

La variation δT de la force vive s'écrit

$$(3)\qquad \delta T = \sum_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \delta \dot{q}_h + \sum_h \frac{\partial T}{\partial q_h} \delta q_h = \sum_h p_h \delta \dot{q}_h + \sum_h \frac{\partial T}{\partial q_h} \delta q_h.$$

Formons la variation de l'intégrale d'action de Hamilton :

$$(4)\qquad \delta A = \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_h Q_h \delta q_h \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_n \left[p_h \delta \dot{q}_h + \left(\frac{\partial T}{\partial q_h} + Q_h \right) \delta q_h \right],$$

une intégration par parties nous donne

$$\int_{t_0}^{t_1} p_h \delta \dot{q}_h \, dt = [p_h \delta q_h]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dp_h}{dt} \delta q_h \, dt,$$

portons cette valeur dans l'expression de δA

$$(5)\qquad \delta A = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_h \left(- \frac{dp_h}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q_h} + Q_h \right) \delta q_h + \sum_h [p_h \delta q_h]_{t_0}^{t_1}.$$

Mais, en vertu des équations de Lagrange

$$(6)\qquad - \frac{dp_h}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q_h} + Q_h = 0,$$

chacun des termes de l'intégrale est nul à chaque instant, puisque le mouvement initial est le mouvement naturel. La variation de l'intégrale d'action se réduit donc à

$$(5\ bis)\qquad \delta A = \sum_h [p_h \delta q_h]_{t_0}^{t_1}.$$

Si les états initial et final sont les mêmes pour le mouvement varié que pour le mouvement naturel, la variation δA s'annule. Le mouvement naturel correspond donc à une valeur stationnaire de l'intégrale d'action A.

Si les forces Q dérivent d'une énergie potentielle V,

$$Q_h = - \frac{\partial V}{\partial q_h},$$

l'intégrale d'action, au sens de Hamilton, prend la forme

$$(7)\qquad A = \int_{t_0}^{t_1} H \, dt$$

avec

$$(7\ bis)\qquad H = T - V = 2T - E,$$

E étant l'énergie totale

$$\mathrm{E} = \mathrm{T} + \mathrm{V}.$$

Notre relation s'écrit donc

$$\delta \mathrm{A} = \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathrm{H}\, dt = \sum_h [p_h \delta q_h]_{t_0}^{t_1}.$$

b. Action au sens de Maupertuis. — Si on limite les variations, en supposant que le mouvement varié et le mouvement normal correspondent à la même énergie totale E, on voit aussitôt que la variation d'action, entre les deux mouvements s'écrit

$$\delta \mathrm{A} = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{H}\, dt = 2\, \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{T}\, dt.$$

C'est cette dernière intégrale

$$2 \int \mathrm{T}\, dt$$

qui avait été, au début, appelée *action*, et à propos de laquelle avait été énoncé le principe de moindre action. La force vive étant une forme quadratique homogène, on a

$$\sum_h p_h \dot{q}_h = 2\,\mathrm{T},$$

d'où l'on tire

$$2 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{T}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \Sigma p_i dq_i.$$

Tant qu'il s'agit uniquement du principe de moindre action, il importe peu d'utiliser cette définition restreinte, pourvu qu'on n'oublie pas de considérer des mouvements variés pour lesquels l'énergie totale E reste invariable.

Mais s'il s'agit d'évaluer l'action elle-même, comme on le fait dans les nouvelles théories des quanta, l'équivalence ne se maintient plus et c'est, en fait, la définition de Maupertuis qui convient.

Je prends, par exemple, le cas d'un oscillateur linéaire ; soit un point matériel de masse m, se mouvant sur une droite, et rappelé

vers un point O par une force proportionnelle à la distance. Si τ est la période des oscillations, l'action sur une période est nulle, car on a

$$\int_0^\tau \mathrm{T}\,dt = \int_0^\tau \mathrm{V}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\tau \mathrm{E}\,dt.$$

Mais l'action, au sens de Maupertuis, n'est pas nulle :

$$2\int_0^\tau \mathrm{T}\,dt = \int_0^\tau \mathrm{E}\,dt.$$

Écrire que l'action est un multiple entier m d'un quantum h aura un sens dans le deuxième cas (action de Maupertuis) et donnera

$$\mathrm{E} = mh\nu$$

qui est la relation classique de Planck.

c. Généralisations. — On peut généraliser les variations du second mouvement et ceci de plusieurs façons. Nous avons supposé jusqu'ici que le mouvement varié obéissait aux mêmes liaisons que le mouvement initial. On peut aussi étudier le cas d'une *petite variation des liaisons*. Il faudra alors traiter les $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ comme des coordonnées généralisées ordinaires. On supposera que, dans le mouvement initial, on a appliqué à ces coordonnées des forces $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_\nu$ telles, à chaque instant, que les coordonnées ξ restent constantes durant tout le mouvement, avec les valeurs k imposées.

Les forces appliquées sur les ξ se composeront des forces dérivées de l'énergie potentielle V et des Ξ. Les équations de Lagrange s'écrivent donc

$$(8) \qquad -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\xi}_i}\right) + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \xi_i} + \Xi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Moyennant l'existence de ces forces Ξ, qui sont, au sens physique, nécessaires pour assurer les liaisons supposées, les coordonnées ξ peuvent jouer un rôle absolument analogue aux autres coordonnées q et nous pouvons leur imposer des variations arbitraires $\delta\xi$ dans le mouvement varié. Les termes aux limites disparaissent, pour ces coordonnées, puisque dans le mouvement normal les vitesses (et moments) relatifs à ces coordonnées ξ sont nulles.

Notre équation s'écrit alors

$$\delta A = \delta \int_{t_0}^{t_1} H\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu} \Xi_i \delta \xi_i\, dt = \sum_{h} [p_h \delta q_h]_{t_0}^{t_1}, \tag{9}$$

les limites de temps étant les mêmes, on a d'ailleurs ici

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} H\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta H\, dt.$$

J'appelle toujours H la quantité (7 *bis*)

$$H = T - V = 2T - E,$$

mais A n'a plus la valeur donnée par (7).

Je peux encore *généraliser le mouvement varié* et supposer qu'il s'effectue non plus entre les instants t_0, t_1, mais *entre deux instants un peu différents*

$$t_0 + \delta t_0 \quad \text{et} \quad t_1 + \delta t_1.$$

J'ai alors

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta \int_{t_0}^{t_1} H\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu} \Xi_i \delta \xi_i\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \delta H\, dt + H_1 \delta t_1 - H_0 \delta t_0 + \int_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1} \sum_{\nu} \Xi_i \delta \xi_i\, dt. \end{aligned} \tag{10}$$

Dans ce calcul, j'applique les règles de variation des limites des intégrales et je néglige, comme étant du second ordre, tous les doubles produits en

$$\delta H_0 \delta t_0, \quad \delta H_1 \delta t_1, \quad \delta \xi_i^0 \delta t_0, \quad \delta \xi_i^1 \delta t_1.$$

J'obtiens donc, en tenant compte des relations (9),

$$\delta A = \sum_{h} [p_h \delta q_h]_{t_0}^{t_1} + H_1 \delta t_1 - H_0 \delta t_0. \tag{11}$$

Dans le premier terme, il convient d'introduire aussi les limites $t_0 + \delta t_0$ et $t_1 + \delta t_1$. Ceci se fait aisément.

On a

$$[\delta q_h]_{t_0+\delta t_0} = [\delta q_h]_{t_0} + \dot{q}_h^0 \delta t_0.$$

D'autre part, T étant une forme quadratique homogène,

$$\sum_{h} p_h \dot{q}_h = 2T,$$

d'où

$$(12)\qquad \sum_h [p_h \delta q_h]_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1} = \sum_h [p_h \delta q_h]_{t_0}^{t_1} + 2[T_1 \delta t_1 - T_0 \delta t_0].$$

Portons ceci dans notre relation (11) et nous trouvons

$$(13)\qquad \delta A = -E_1 \delta t_1 + E_0 \delta t_0 + \sum_h [p_h \delta q_h]_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1}.$$

C'est la formule générale que nous donne le calcul de variation de l'action, en passant d'une trajectoire normale à une trajectoire voisine. Nous avons supposé des variations de l'intervalle de temps et des liaisons.

Ce résultat peut se mettre sous une forme un peu différente. La variation d'action s'écrit, en effet,

$$(10)\qquad \delta A = \delta \int_{t_0}^{t_1} H\, dt + \int_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1} \Sigma \Xi\, \delta\xi\, dt,$$

je suppose toujours que les liaisons et le potentiel V ne contiennent pas le temps explicitement; le mouvement normal se fait à énergie totale E constante, d'après l'intégrale des forces vives, et j'écris

$$(14)\qquad \begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} H\, dt &= \delta \int_{t_0}^{t_1} (2T - E)\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} 2T\, dt - \delta \int_{t_0}^{t_1} E\, dt \\ &= 2\,\delta \int_{t_0}^{t_1} T\, dt - \int_{t_0}^{t_1} \delta E\, dt - E_1 \delta t_1 + E_0 \delta t_0. \end{aligned}$$

Ceci ne fait intervenir que les formules classiques sur les accroissements des intégrales, quand argument et limites varient. Portons les relations (14) dans notre formule générale (13) écrite plus haut, et nous aboutissons à la condition suivante :

$$(15)\qquad 2\,\delta \int_{t_0}^{t_1} T\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta E\, dt - \int_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1} \sum_i \Xi_i \delta\xi_i\, dt + \sum_h [p_h \delta q_h]_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1}.$$

Cette formule est à peu près celle de Boltzmann (1). J'ai simplement

(1) BOLTZMANN, *loc. cit.*, p. 139 (éq. 223).

introduit explicitement la variation des liaisons — que Boltzmann négligeait — et ceci nous simplifiera beaucoup la suite de l'exposé.

d. Cas de réduction. — Les cas intéressants sont ceux où, par suite de circonstances particulières, le dernier terme de la formule disparaît. Boltzmann note les divers cas suivants :

1° *Cas* A. — L'état initial et l'état final sont les mêmes dans le mouvement normal et dans le mouvement varié. C'est le cas le plus ordinairement considéré pour l'application du principe de moindre action.

2° *Cas* B. — Le mouvement initial est un mouvement périodique de période τ, le mouvement varié est aussi un mouvement périodique de période $\tau + \delta\tau$. Les coordonnées q reviennent à leurs valeurs initiales, les moments p et les écarts δq aussi, pourvu qu'on prenne le mouvement initial pour une durée d'un nombre entier de périodes

$$t_1 - t_0 = N\tau \qquad (N, \text{entier})$$

et le mouvement varié sur un intervalle de temps

$$t_1 + \delta t_1 - t_0 = N(\tau + \delta\tau), \qquad \delta t_1 = -N\,\delta\tau.$$

Les termes limites disparaissent complètement.

3° *Cas* C. — Cas orthogonal. On suppose qu'aux deux limites $t = t_0$ et $t = t_1$, on ait

$$\Sigma p_h \delta q_h = 0.$$

C'est dire que, dans un espace à n dimensions, les deux vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{\delta q}$ soient rectangulaires (en t_0 et en t_1).

Par exemple, pour chaque molécule, si q_1, q_2, q_3 sont les coordonnées rectangulaires x, y, z, on prendra un déplacement initial $\vec{\delta D}$ perpendiculaire à la valeur initiale de la vitesse $\vec{v}$ et de même à l'instant final t_1.

4° *Cas* D. — Enfin, un autre cas est signalé plus loin par Boltzmann, le cas d'un mouvement cyclique, c'est-à-dire d'un mouvement dans lequel chaque molécule en mouvement est, dès qu'elle quitte

une position, remplacée aussitôt par une autre molécule ayant même vitesse. Ce sera, par exemple, le cas d'un liquide en mouvement, pour lequel la vitesse en chaque point géométrique est une donnée indépendante du temps. Si les écarts δq sont aussi donnés en chaque point, avec même valeur à l'instant initial et à l'instant final, les termes aux limites se compensent.

5° *Cas* E. — Nous exposerons plus loin le cas quasi périodique.

Dans tous ces cas, notre relation (15) s'écrit

$$2\,\delta\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{T}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathrm{E}\,dt - \int_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1} \sum_{\nu} \Xi_i\,\delta\xi_i\,dt; \tag{16}$$

et la variation de l'intégrale en H est, d'après (10) et (13),

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{H}\,dt = -\int_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1} \sum_{\nu} \Xi_i\,\delta\xi_i\,dt - \mathrm{E}_1\,\delta t_1 + \mathrm{E}_0\,\delta t_0. \tag{17}$$

e. Analogies thermodynamiques. — Boltzmann, commentant les résultats de Hertz et Helmholtz, s'attache à démontrer les analogies que présentent les propriétés des corps cycliques avec les lois thermodynamiques. Les raisonnements sont assez durs à suivre et peuvent se résumer de la façon suivante :

Nous considérerons le mouvement non varié du corps comme constituant un certain état thermodynamique, l'état n° 1. Les coordonnées q sont les coordonnées microscopiques du corps, coordonnées inaccessibles à nos moyens d'observation. Les paramètres ξ (ou liaisons) sont les grandeurs macroscopiques que nous sommes capables d'observer et mesurer. L'énergie totale E nous est aussi connue. Tant que ces grandeurs restent constantes, c'est-à-dire se comportent comme des liaisons, le système, en évolution libre, nous apparaît comme un corps au repos, à température constante.

L'état n° 2 est constitué par le mouvement varié, qui correspond à des valeurs un peu différentes des paramètres macroscopiques et de l'énergie totale.

Quels sont la quantité de chaleur à fournir et le travail recueilli,

lorsqu'on fait passer le corps de l'état [1] à l'état [2] ? Tel est le problème à résoudre.

A un instant déterminé t, je peux, en appliquant des forces convenables sur chaque molécule du système, faire passer brusquement le corps de l'état de mouvement 1 à l'état 2. A cet instant, l'écart entre les énergies totales des deux systèmes est δE. Le travail (grandeur macroscopique) que l'on recueillerait de cette transformation serait

$$\delta\mathfrak{T} = -\sum_{\nu} \Xi_i \delta\xi_i. \tag{18}$$

L'énergie que devraient fournir les forces spécialement appliquées sur les molécules serait donc

$$\delta Q = \delta E + \delta\mathfrak{T}. \tag{18 bis}$$

Je note comme *quantité de chaleur* cette énergie δQ, qui serait fournie par des forces appliquées à toutes les coordonnées microscopiques du système.

Une telle transformation brusque, à un instant t déterminé, est irréalisable pratiquement. Je vais supposer que la modification se fait progressivement et dure de $t = t_0$ à $t = t_1$.

Ceci se précisera de la manière suivante :

Je suppose que pendant un intervalle de temps dt, la transformation se fait, d'une fraction $\frac{dt}{t_1 - t_0}$. C'est-à-dire que les coordonnées macroscopiques ξ varient de

$$\delta\xi \frac{dt}{t_1 - t_0},$$

de telle sorte que le travail recueilli pendant ce temps dt soit

$$d\,\delta\mathfrak{T} = \delta\mathfrak{T} \frac{dt}{t_1 - t_0}. \tag{19}$$

De même les forces microscopiques (forces de chaleur) agissant sur les molécules seront telles que la chaleur fournie soit

$$d\,\delta Q = \delta Q \frac{dt}{t_1 - t_0}. \tag{19 bis}$$

Les quantités δE, $\delta \mathfrak{T}$, δQ sont des fonctions du temps t (elles ne sont pas constantes pendant l'intervalle $t_0 t_1$) ; il en est de même des quantités relatives à la transformation progressive ci-dessus. Au temps t_0, où commence cette transformation, le corps était dans l'état n° 1, et au temps $t_1 + \delta t_1$, le corps a atteint l'état de mouvement n° 2. Je supprime alors toutes les forces auxiliaires, et laisse les paramètres ξ au repos. Le travail recueilli pendant cette transformation est

$$\int d\,\delta\mathfrak{T} = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1+\delta t_1} \delta\mathfrak{T}\,dt. \tag{20}$$

La chaleur fournie est

$$\Delta Q = \int d\,\delta Q = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1+\delta t_1} [\delta E + \delta\mathfrak{T}]\,dt. \tag{20 bis}$$

On voit aussitôt que *les intégrales mises en évidence sont, à des infiniment petits près, celles même que le principe de moindre action nous a permis d'évaluer*. Et il vient, d'après (15),

$$(t_1 - t_0)\Delta Q = \int_{t_0}^{t_1+\delta t_1}\left[\delta E + \sum_\nu \Xi_i \delta\xi_i\right] dt = 2\,\delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt - \sum_h [p_h \delta q_h]_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1}. \tag{21}$$

Telle est la formule générale de Boltzmann pour le calcul de la chaleur fournie ΔQ pendant une transformation progressive (1).

J'ai beaucoup abrégé les raisonnements assez touffus de l'auteur.

Les cas intéressants, pour l'application de la formule, sont les divers cas de réduction A, B, C, D, E, cités plus haut. Boltzmann les discute en détail, surtout le cas périodique et le cas cyclique. Ce dernier cas montre des analogies frappantes avec les propriétés d'un corps thermodynamique, l'énergie cinétique T jouant le rôle de la température. Je n'insisterai pas sur ces discussions. Au point de vue des probabilités, le cas cyclique est un cas de dégénérescence ; toutes les configurations microscopiques internes du corps étant indiscernables entre elles, les calculs de probabilité sont inapplicables, cet état du corps représen-

(1) BOLTZMANN, *loc. cit.*, p. 181 (formule 247).

tant la certitude. On doit donc retrouver par des considérations de mécanique pure les lois macroscopiques du corps.

f. Cas périodiques. Loi de Wien. — Je reprendrai de près l'étude d'un système périodique. Je suppose que la durée $t_1 - t_0$ soit égale à N périodes τ du mouvement initial, et la variation de durée δt_1 égale à $N\delta\tau$, $\delta\tau$ étant la variation de la période τ.

Pour passer de l'état 1 à l'état 2, la chaleur fournie sera

$$\Delta Q = \frac{2}{N\tau}\Delta[N\tau\overline{T}].$$

L'énergie cinétique moyenne étant définie par la relation

$$\overline{T} = \frac{1}{\tau}\int^{\tau} T\,dt.$$

Ceci s'écrit donc

$$\Delta Q = \frac{2}{\tau}\Delta(\tau\overline{T}). \tag{22}$$

Cette relation très curieuse obtenue par Boltzmann contient, ainsi que l'a montré Försterling (1), la démonstration de la loi de Wien sous une forme d'une extraordinaire généralité.

Introduisons la température absolue Θ, par sa définition thermodynamique, c'est-à-dire comme facteur intégrant de ΔQ; Θ devra évidemment être de la forme

$$\Theta = \frac{1}{\tau}f(\tau\overline{T}), \tag{23}$$

f étant une fonction arbitraire quelconque. Si φ est la fonction inverse de f, nous en tirons

$$\overline{T} = \frac{1}{\tau}\varphi(\tau\Theta) = \nu F\left(\frac{\nu}{\Theta}\right). \tag{23 bis}$$

L'énergie cinétique moyenne d'un mouvement périodique de

(1) K. Försterling, *Ueber die thermodynamischen Gesetze periodischer Bewegungen welche dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgen* (*Ann. der Physik*, Bd 47, 1915, p. 1127.

période τ $\left[\text{fréquence } \nu = \frac{1}{\tau}\right]$ est, à température Θ donné, égale à ν fois une fonction arbitraire du rapport $\frac{\nu}{\Theta}$. Pouvons-nous conclure que la fonction arbitraire F est une fonction universelle? Ce serait un peu rapide. Tout ce que nous pouvons affirmer, c'est que, pour toute une classe de mouvements de même catégorie, capables de se transformer les uns dans les autres par une lente variation des paramètres, les mêmes fonctions f, φ ou F régiront les propriétés thermodynamiques de tous les systèmes.

Supposons en particulier que ces systèmes vibrants soient les degrés de liberté d'un volume d'éther électromagnétique. Le nombre $d\mathfrak{N}$ des degrés de liberté dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu + d\nu$ est, pour un volume de 1^{cm^3}, égal à [*cf.* Chap. I, formule (24)]

$$d\mathfrak{N} = \frac{8\pi\nu^2}{UV^2} d\nu,$$

V étant la vitesse de propagation des ondes et U la vitesse de groupe. La densité d'énergie cinétique de ces ondes s'écrira donc, à température Θ,

$$\rho_{cin}\, d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{UV^2} F\left(\frac{\nu}{\Theta}\right) d\nu. \tag{24}$$

La densité d'énergie totale ρ serait double de celle-ci puisque, pour les ondes électromagnétiques, l'énergie potentielle est en moyenne égale à l'énergie cinétique.

Cette formule représente l'expression de la loi de Wien pour le rayonnement.

Pour un corps liquide, capable de propager seulement des ondes longitudinales, on trouverait une formule analogue.

Pour un solide, il semble qu'il y ait lieu de prévoir deux fonctions F différentes, relatives, l'une aux ondes longitudinales, l'autre aux ondes transversales; une étude plus détaillée des conditions d'échange d'énergie entre ces deux types d'onde (*voir* Chapitre suivant) montre que l'on doit écrire

$$\rho_l\, d\nu = \frac{4\pi\nu^3}{U_l V_l^2} F\left(\frac{\nu}{\Theta}\right) d\nu \tag{24 bis}$$

pour les ondes longitudinales et

$$\rho_{lr}\,d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{U_{lr}V_{lr}^3}\,F\left(\frac{\nu}{\Theta}\right)d\nu$$

pour les ondes transversales.

La fonction F est la même dans les deux formules.

Cette démonstration très intéressante rapproche donc la loi de Wien du principe de moindre action, et montre la portée extrêmement générale de cette loi (¹).

g. Pressions de radiation. — La formule (22) mérite un examen plus approfondi. Elle se développe ainsi :

$$\Delta Q = 2\left(\Delta\overline{T} + \overline{T}\,\frac{\Delta\tau}{\tau}\right). \tag{22}$$

1° Pour augmenter l'énergie d'un système périodique, sans changer sa période, il faut fournir une énergie double de l'accroissement d'énergie cinétique. Ceci est un fait classique pour les vibrateurs à fréquence constante.

2° Pour modifier la période d'un système, sans changer sa force vive, il faut fournir une énergie (quantité de chaleur)

$$\Delta Q = 2\,\overline{T}\,\Delta\log\tau.$$

Cette chaleur peut servir, dans des systèmes périodiques quelconques, à une augmentation de l'énergie potentielle moyenne, en même temps qu'elle compense le travail recueilli sur les paramètres macroscopiques. Dans le cas particulier d'un système vibrant où l'on ait

$$\overline{T} = \overline{V} = \frac{1}{2}E,$$

(¹) La suite du travail de Försterling est moins intéressante. Elle donne une démonstration de la loi de Stefan, dont l'auteur affirme qu'elle est valable pour les ondes élastiques. C'est inexact, la démonstration exigeant que la vitesse V des ondes soit indépendante de la fréquence. Or à la fréquence limite ν_m de Debye ceci n'est plus vrai. Le calcul de Försterling pour les pressions de radiation, dans un cas très particulier, est exact. Mais les applications qu'il en tire sont incomplètes (*voir* plus loin les calculs exacts).

la chaleur ΔQ est entièrement récupérée en travail, et peut s'écrire

$$\Delta Q = \Delta \mathfrak{E} = E\,\Delta \log \tau. \qquad (22\ bis)$$

Cette formule donne immédiatement la valeur des forces telles que les pressions de radiation. C'est la formule la plus pratique pour ce genre de calculs. Nous aurons à la comparer plus loin avec les formules de Rayleigh (Chap. VIII); ces dernières obligent à reprendre entièrement le calcul sur chaque cas particulier, tandis que la formule (22 *bis*) fournit aussitôt la solution.

Pour des systèmes périodiques à période τ infiniment grande, le second terme du développement (22) peut se négliger, la période n'entrant plus dans la formule, on doit admettre que, dans ce cas limite, elle disparaît aussi des fonctions (23) f, φ et F qui se réduisent alors à la relation

$$\overline{T} = a\Theta$$

conformément à la thermodynamique statistique. Ce résultat n'est que le cas limite pour très grandes périodes.

h. Transformations adiabatiques de systèmes périodiques. — Pour un phénomène périodique, tel que celui que nous venons de considérer, on trouve facilement les lois d'une transformation adiabatique. Rappelons que, dans une telle transformation, la quantité de chaleur fournie ΔQ est nulle, et l'entropie reste constante. C'est donc, au point de vue où nous nous sommes placés, une variation lente des paramètres macroscopiques (liaisons) du mouvement, et l'énergie (travail) recueillie sur ces paramètres macroscopiques est empruntée à l'énergie calorifique du système.

L'entropie restant constante, on a

$$\tau\Theta = \text{const.}$$

La chaleur fournie ΔQ étant nulle,

$$\Delta Q = 0, \qquad \delta(\tau\overline{T}) = 0, \qquad \tau\overline{T} = \text{const.}$$

L'énergie cinétique moyenne $\overline{T}$, la fréquence $\nu = \frac{1}{\tau}$ et la température Θ varient donc proportionnellement.

Supposons que le système soit un vibrateur normal, c'est-à-dire assimilable à un point matériel se mouvant sur une droite et attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance (1). On pourra modifier la période en changeant lentement le coefficient de la force de rappel, ou la masse du point matériel. L'énergie totale du système vibrant est toujours égale au double de l'énergie cinétique moyenne. Cette énergie totale E, dans une modification adiabatique, variera donc proportionnellement à $\overline{T}$, c'est-à-dire à ν, ou à la température Θ. L'énergie perdue $-\Delta E$ pendant la transformation adiabatique se retrouvera comme travail fourni sur le paramètre lentement variable

$$-\Delta E = \Delta \mathfrak{T} = -E\frac{\Delta\Theta}{\Theta} = -E\frac{\Delta\nu}{\nu}.$$

La constance du rapport $\frac{E}{\nu}$ dans une transformation adiabatique a une particulière importance au point de vue de la théorie des quanta. Le nombre de quanta d'énergie $h\nu$ que contient un résonateur reste invariant dans une transformation adiabatique. L'entropie du résonnateur sera donc fonction seulement du nombre des quanta qu'il possède.

Ces remarques sont d'une extrême importance. Nous allons en donner une généralisation pour les systèmes quasi périodiques, et la théorie des quanta d'action.

i. Systèmes quasi périodiques. — Une classe de mouvements très importante est celle qui comporte une périodicité τ_1 par rapport à un certain nombre de variables et τ_2, τ_3, ..., τ_n par rapport à d'autres variables. Si les différentes périodes τ ne sont pas commensurables entre elles, le mouvement total n'est pas périodique, mais on peut trouver une infinité de périodes approchées, c'est-à-dire d'intervalles

(1) Un degré de liberté d'un corps solide parallélépipédique jouit de ce genre de propriétés. On peut modifier la période en changeant lentement les longueurs l_1, l_2, l_3 des arêtes du parallélépipède, c'est-à-dire en dilatant lentement l'ensemble du volume.

de temps τ_a tels que l'on ait

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= m_1 \tau_1 + \varepsilon_1, \\
\tau_2 &= m_2 \tau_2 + \varepsilon_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
\tau_n &= m_n \tau_n + \varepsilon_n.
\end{aligned}$$

Les m étant des nombres entiers quelconques, et les ε des quantités inférieures, en valeur absolue, à une quantité η donnée à l'avance, aussi petite que l'on voudra. Au bout d'une période approchée τ_a, le système revient donc à un état aussi peu différent que l'on voudra de l'état initial.

Si l'on prend τ_a comme durée d'intégration, les termes aux limites pourront être rendus aussi petits que l'on voudra, et négligeables. La durée d'intégration étant, à très peu près, un nombre entier de périodes, les résultats du paragraphe précédent s'appliqueront à chaque période séparément. La chaleur fournie dans une transformation infiniment lente s'écrira donc

$$\Delta Q = \sum_1^n \frac{2\Delta(\tau \overline{T})}{\tau}. \tag{23}$$

On sera donc justifié, par ces raisons théoriques, à raisonner séparément sur chacun des groupes de variables périodiques, sans s'inquiéter des autres périodes du système. Ceci paraissait certain au point de vue physique, mais méritait démonstration.

Les systèmes à multiples périodes sont en effet très fréquents. Le parallélépipède et ses différentes vibrations propres électromagnétiques en est un exemple. Le corps solide parallélépipédique nous a fourni un autre modèle. Les raisonnements de Sommerfeld et Epstein, sur les trajectoires d'électrons autour d'un atome, portent aussi sur des cas quasi périodiques. Tous les cas où les variables se séparent dans les expressions de la force vive T et de l'énergie potentielle V sont de ce type (1).

Dans la transformation adiabatique d'un système de ce genre, par variation lente des paramètres macroscopiques, l'intégrale (*action de*

(1) *Voir* APPELL, *Mécanique rationnelle*, t. II, p. 415 (théorème de Liouville); J. HADAMARD, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXXV, 1911, et les généralisations importantes de STOECKEL, *Comptes rendus Acad. Sc.*, 1893, et octobre 1895.

Maupertuis) prise sur une période approchée τ_a

$$2\int_0^{\tau_a} \mathrm{T}\,dt$$

est un invariant, cela résulte immédiatement de la formule générale (21). Cette intégrale est une somme de n intégrales relatives à chacune des périodes et prises chacune sur un nombre presque entier de périodes, on est donc fondé à étudier séparément chaque intégrale prise sur une période. L'intégrale d'action

$$\mathrm{A} = \int^{\tau_a} (\mathrm{T} - \mathrm{V})\,dt$$

n'est pas, en général, un invariant. Elle ne l'est que dans les cas particuliers où les intégrales portant sur T et sur V sont proportionnelles :

$$\int^{\tau_a} \mathrm{T}\,dt = \frac{1}{\mathrm{K}}\int^{\tau_a} \mathrm{V}\,dt = \frac{1}{1-\mathrm{K}}\,\mathrm{A}.$$

K étant une constante. Ceci a lieu par exemple pour les oscillateurs avec forces de rappel proportionnelles à la distance à un point fixe, et aussi pour le mouvement képlérien de gravitation. Quant à la variation de l'action A, elle est, dans le cas général, donnée par la formule (17).

Lors de la *transformation adiabatique*, le système perd de l'énergie et fournit un travail extérieur, mais *l'intégrale d'action de Maupertuis garde la même valeur*. Si cette intégrale valait, avant la transformation, un nombre entier de quanta d'action h, comme on le suppose dans les théories relatives à l'atome de Bohr, elle vaudra ce même nombre de quanta, après déformation adiabatique. Pour que l'intégrale de Maupertuis, prise sur toute période approchée τ_α, vaille un nombre entier de quanta h, il faut que chacune des intégrales, relative à chaque variable, et prise sur la période correspondante, soit égale à un nombre entier de quanta. C'est bien de cette façon que Sommerfeld écrit les conditions de quanta. On peut donc conclure que l'entropie est, dans tous ces cas, fonction seulement de la valeur de l'intégrale d'action de Maupertuis.

Des conclusions équivalentes pourraient s'appliquer aux autres cas de réduction que nous avons signalés, notamment au cas orthogonal,

cas qui pourrait, tout comme le cas cyclique, être un modèle utile pour l'interprétation des phénomènes physiques (1).

On aurait donc, dans ces cas, une interprétation de l'entropie par l'intégrale d'action de Maupertuis. Pour l'état naturel (mouvement normal) l'entropie est maxima, l'intégrale d'action est minima. En dehors des cas de réduction, la définition d'un invariant et l'application des quanta se heurte à de grosses difficultés. On trouvera dans Boltzmann l'étude plus complète de ces analogies pour les systèmes cycliques.

CHAPITRE III.

LOIS THERMODYNAMIQUES DES RAYONNEMENTS ÉLASTIQUES ISOTHERMES.

a. Définitions générales. — On peut retrouver, pour les rayonnements élastiques existant dans un corps matériel, presque toutes les lois classiques du rayonnement du corps noir (2). On définira la densité d'énergie des ondes de fréquence ν (à $d\nu$ près) dont les directions de propagation sont comprises dans un angle solide $d\omega$

$$d\mathcal{E} = \rho\, d\nu\, d\omega. \tag{1}$$

L'intensité d'un rayonnement est l'énergie transportée, en une seconde,

---

(1) Sur l'action (de Maupertuis) comme invariant adiabatique on se reportera aux articles suivants :

Action et quanta : K. SCHWARZCHILD, *Sitz. Ber. Berl. Akad.*, 1916, p. 548; P. EPSTEIN, *Ann. der Physik*, t. L, 1916, p. 490; t. LI, 1916, p. 168; P. DEBYE, *Gött. Nachr.*, 1916, p. 142; *Phys. Zeitschr.*, t. XVII, 1916, p. 507 et 512; A. SOMMERFELD, *Ann. der Physik*, t. LI, 1916, p. 1; *Phys. Zeitschr.*, t. XVII, 1916, p. 491; A. SOMMERFELD, *Atombau und Spektrallinien*, Vieweg, Leipzig, 1919; K. FÖRSTERLING, *Ann. der Physik*, t. LX, 1919, p. 673; A. EINSTEIN, *Verh. d. deutsch. phys. Ges.*, t. XVIII, 1916, p. 318.

Invariance adiabatique : P. EHRENFEST, *Proc. Amst.*, t. XIX, 1917, p. 576; J.-M. BURGERS, *Proc. Amst.*, t. XX, 1918, p. 149, 158, 168. et *Ann. der Physik*, t. LII, 1917, p. 195. — Les démonstrations de Burgers sont assez différentes des raisonnements que nous avons exposés; elles comportent en particulier une démonstration assez longue de la quasi-périodicité du système le plus général, démonstration sur laquelle nous avons jugé inutile d'insister, ces propriétés étant bien connues.

(2) *Voir* PLANCK, *Wärmestrahlung*. Leipzig, J.-A. Barth, 1909; 2e édition, 1913. Un très bon exposé en français se trouve dans la Thèse de Bauer (publiée aux *Annales de Physique*). Thèse n° 1471. Paris, Gauthier-Villars, 1912.

à travers une surface unité normale au rayon

$$dI = J_\nu d\nu\, d\omega = U\rho\, d\nu\, d\omega, \tag{2}$$

U étant la vitesse du groupe. On sait, en effet, que, dans un milieu dispersif, la vitesse de transport de l'énergie diffère de la vitesse de phase V, et se confond pratiquement avec la vitesse de groupe U (1). Dans un milieu non dispersif on a U = V. Si le milieu est capable d'émettre et d'absorber le rayonnement (2), ε étant le coefficient d'émission, α celui d'absorption, on a

$$\varepsilon = \alpha U \rho. \tag{3}$$

La *loi de Lambert* s'applique toujours : à chaque température le rayonnement de fréquence ν est complètement diffusé; ρ est indépendant de l'orientation de l'angle solide $d\omega$.

Les définitions et formules ci-dessus sont valables séparément pour les ondes longitudinales et pour les ondes transversales. On notera avec l'indice *l* les quantités relatives aux premières, avec l'indice *tr* celles qui se rapportent aux secondes.

b. Les lois de Kirchhoff. — Dans un certain milieu, où les vitesses de propagation sont, en un point, V (vitesse de phase) et U (vitesse de groupe), la densité des ondes d'un type donné (soit transversal, soit longitudinal) peut s'écrire

$$\rho(\nu, T) = \frac{1}{UV^2}\psi(\nu, T), \tag{4}$$

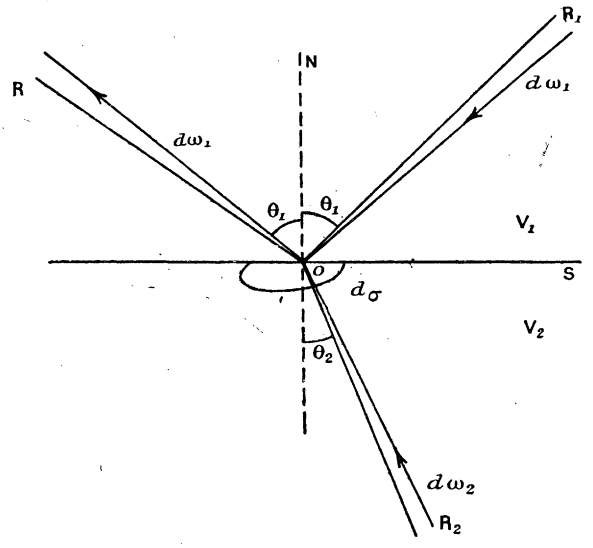
ψ étant, pour les ondes du type étudié, une fonction universelle, indépendante des propriétés du milieu. Je vais rappeler la démonstration, que je devrai généraliser plus loin. Il suffit de montrer que la loi se vérifie pour les réflexions et réfractions par un petit élément de surface SS qui sépare deux milieux 1 et 2. Un rayon R_1O tombe en O sous l'incidence Θ_1; il est en partie réfléchi suivant OR, et en partie réfracté. Soit r_1 le coefficient de réflexion; j'appellerai r_2 le coefficient

(1) A. Sommerfeld, *Ann. der Phys.*, t. XLIV, 1914, p. 177 à 202. — L. Brillouin, *Ibid.*, p. 203 à 240.

(2) Je rappelle les définitions classiques. Un volume $d\tau$ traversé par une onde d'intensité I absorbe en un temps dt l'énergie $\alpha I\, d\tau\, dt$; l'émission de ce volume, pour un angle solide $d\omega$ et une fréquence ν (à $d\nu$ près), s'écrit $\varepsilon\, d\tau\, d\nu\, d\omega\, dt$. La relation ci-dessus s'obtient en écrivant qu'à température T le volume $d\tau$ émet autant qu'il absorbe.

de réflexion d'un rayon R_2O tombant sur SS, dans le deuxième milieu, sous l'angle d'incidence correspondant Θ_2. Le rayon réfléchi provenant de R_1O et le rayon réfracté provenant de R_2O se superposent sur OR. Dans l'équilibre isotherme les deux rayons R_1O et OR doivent

Fig. 1.



avoir tous deux même densité d'énergie $\rho_1(\nu, T)$. L'énergie apportée en un temps dt par le rayon R_1O sur la surface $d\sigma$ s'écrit

$$dQ_1 = U_1 \rho_1(\nu, T)\, d\nu \cos\Theta_1 d\sigma\, dt\, d\omega_1. \tag{5}$$

De cette énergie, la fraction r_1 seulement est réfléchie suivant OR. L'énergie provenant de R_2O et réfractée suivant OR, est $(1 - r_2)$ fois l'énergie dQ_2 apportée par R_2O. La condition d'équilibre s'écrit

$$r_1\, dQ_1 + (1 - r_2)\, dQ_2 = dQ_1 ;$$

d'où l'on tire, en exprimant dQ_1 au moyen de (5) et dQ_2 par l'expression correspondante,

$$\frac{U_1 \rho_1(\nu, T)}{U_2 \rho_2(\nu, T)} = \frac{(1 - r_2)\cos\Theta_2 d\omega_2}{(1 - r_1)\cos\Theta_1 d\omega_1}, \tag{6}$$

Le rapport figurant au second membre se calcule aisément. On définit $d\omega_1$ par une petite variation $d\Theta_1$, et une rotation $d\varphi_1$ de toute la

figure autour de ON. Les lois de réfraction donnent

$$V_2 \sin\Theta_1 = V_1 \sin\Theta_2, \qquad \varphi_1 = \varphi_2; \tag{7}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\cos\Theta_2 d\omega_2}{\cos\Theta_1 d\omega_1} = \frac{\cos\Theta_2 \sin\Theta_2 d\Theta_2 d\varphi_2}{\cos\Theta_1 \sin\Theta_1 d\Theta_1 d\varphi_1} = \frac{\sin\Theta_2 d(\sin\Theta_2)}{\sin\Theta_1 d(\sin\Theta_1)} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2. \tag{8}$$

De sorte que nous trouvons finalement

$$\frac{\rho_1(\nu, T) U_1 V_1^2}{\rho_2(\nu, T) U_2 V_2^2} = \frac{1 - r_2}{1 - r_1}. \tag{9}$$

Le premier membre est fonction de ν et T, mais indépendant de l'angle d'incidence, le second membre doit donc être constant et, pour l'incidence normale, il est égal à 1. Cette relation justifie la loi de Kirchhoff telle que nous l'avons écrite à la formule (4).

c. Première généralisation de la loi de Kirchhoff. — La loi ci-dessus est valable séparément soit pour les ondes longitudinales, soit pour les ondes transversales. Elle peut aussi se généraliser et fournir une relation entre les intensités de ces deux types d'ondes. Les deux catégories d'ondes peuvent échanger de l'énergie par réflexion et réfraction. Lorsqu'une onde d'un type tombe sur la surface de séparation de deux milieux, elle peut, en général, exciter dans chaque milieu deux ondes transversales et une longitudinale, soit six ondes au total.

Un cas particulier précisera les idées.

Supposons un corps solide, dont la paroi, plane, est assujettie à ne subir aucun déplacement ni tangentiel ni normal. Si une onde transversale, dont les vibrations sont perpendiculaires au plan d'incidence, tombe sur cette paroi, elle n'engendre qu'une onde réfléchie transversale, vibrant aussi perpendiculairement au plan d'incidence. Si, au contraire, l'onde transversale incidente vibre dans le plan d'incidence, elle engendrera, en tombant sur la paroi plane, deux types d'onde :

1° Une onde transversale réfléchie vibrant dans le plan d'incidence;
2° Une onde longitudinale.

Cette seconde onde, que nous pouvons appeler *réfractée*, est émise par la paroi sous un angle Θ_2 qui est relié à l'angle d'incidence Θ_1 de la première onde par la loi des sinus

$$\frac{\sin\Theta_1}{V_1} = \frac{\sin\Theta_2}{V_2}.$$

Une onde longitudinale créerait aussi une onde réfractée transversale.

On calculerait sans aucune difficulté ce cas particulier et on lui appliquerait le raisonnement qui nous a fourni la loi de Kirchhoff. La conclusion est la suivante :

Les ondes élastiques, longitudinales ou transversales, d'une certaine polarisation, qui possèdent dans un certain milieu, pour une fréquence $\nu(d\nu)$, une vitesse de propagation V (vitesse de groupe U) ont, à une température T donnée, une densité d'énergie

$$\rho\, d\nu\, d\omega = \frac{1}{UV^2}\psi(\nu, T)\, d\nu\, d\omega. \tag{10}$$

La fonction ψ est une fonction universelle, valable pour tous les corps matériels et tous les types d'ondes élastiques.

Si l'on cherche, pour les ondes transversales, la densité d'énergie des *ondes de toutes polarisations, il faut doubler la formule;* on trouve facilement ce résultat, la formule étant valable pour deux polarisations à angle droit, suivant lesquelles toutes les autres peuvent se décomposer.

Lois de Wien et Stefan. — La loi de Wien s'étend aux ondes élastiques, grâce à la démonstration générale que nous en avons donnée au Chapitre précédent. Elle nous permet de préciser la forme de la fonction ψ de la formule (10) et d'écrire

$$\psi(\nu, T) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right). \tag{11}$$

La densité d'énergie des ondes de toutes directions et de fréquence ν (à $d\nu$ près) s'obtient en intégrant en $d\omega$, c'est-à-dire en remplaçant dans (10) $d\omega$ par 4π, puisque ρ, ψ ou F sont indépendants de la direction.

La loi de Stefan (rayonnement isotherme total, de toutes fréquences, proportionnel à T^4) ne se généralise pas immédiatement pour les ondes élastiques. Nous l'étudierons plus loin et verrons qu'elle est remplacée par une loi des états correspondants.

d. Détermination de la fonction F. — Les premiers auteurs qui ont abordé la question se sont contentés de transposer, pour les rayonnements élastiques, les formules de quanta de Planck. Ils traitent chaque degré de liberté de fréquence ν comme un résonateur de Planck avec quanta, ce qui conduit à lui assigner une énergie moyenne

$$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}.$$

Ce résultat, joint à la numération des degrés de liberté, rappelée au Chapitre I [formules (24)], permet d'écrire pour la densité d'énergie des rayonnements de fréquence ν (à $d\nu$ près) et de toutes directions

$$4\pi\rho\, d\nu = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\, d\mathfrak{N} = \frac{4\pi h\nu^3 d\nu}{UV^2\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)},$$

ce qui précise notre fonction F sous la forme

$$F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{h}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}. \tag{12}$$

Je préfère procéder autrement et, sans aucune hypothèse spéciale, établir une relation entre la fonction arbitraire F, relative aux ondes élastiques, et la fonction analogue relative aux ondes électromagnétiques (corps noir). J'évite ainsi d'introduire explicitement les quanta, car il semble difficile d'admettre qu'ils jouent un rôle prépondérant dans les forces élastiques.

Le second mode de raisonnement, que nous voulons développer maintenant, a été introduit par M. M. Brillouin (1); il constitue la généralisation naturelle des lois de Kirchhoff pour le rayonnement noir.

Supposons que les ondes électromagnétiques soient capables d'engendrer, par un mécanisme quelconque, des ondes élastiques de même fréquence; il faut pour cela admettre une liaison linéaire, même très faible, entre ces deux types de phénomènes. Il n'y aura

(1) Marcel Brillouin, *Rayonnement et chaleurs spécifiques* (*Ann. de Chim. et de Phys.*, février et mai 1914); *Théorie thermodynamique des solides peu déformés* (*Journ. de Phys.*, octobre-novembre 1914).

plus, à vrai dire, d'ondes purement électromagnétiques ou purement élastiques. Chaque type d'onde comprendra des termes électromagnétiques (champs électriques et magnétiques) et des termes élastiques (déplacements) en proportions déterminées.

Il y aura donc, non pas deux équations distinctes aux vitesses de propagation, l'une électromagnétique, du deuxième degré; l'autre, élastique, du troisième degré, mais une seule équation du cinquième degré, avec une racine double (ondes principalement électromagnétiques; deux ondes transversales); une racine simple (ondes principalement élastiques longitudinales); une racine double (ondes principalement élastiques transversales).

Du fait de la liaison entre les phénomènes élastiques et électromagnétiques découlent plusieurs faits curieux : une onde incidente d'un type quelconque donne naissance, à chaque réflexion ou réfraction, à des ondes de tous les types. Les conditions imposées sur la surface de réfraction règlent les intensités relatives des diverses ondes. Ainsi, par exemple, une onde tombant sur la surface de séparation de deux milieux différents donnera dix ondes nouvelles : cinq ondes réfléchies, des types élastiques et électromagnétiques, se propageant dans le premier milieu et cinq autres ondes de tous types se propageant dans le second milieu.

Les lois de réflexion et réfraction des ondes électromagnétiques ont pour conséquence les lois de Kirchhoff, d'après lesquelles, dans l'état d'équilibre thermique, la densité du rayonnement ρ dans une enceinte est

$$\rho_\nu d\nu = \frac{4\pi}{UV^2}\Psi(\nu, T)\, d\nu$$

pour les ondes de polarisation donnée, et de toutes directions de propagation, V étant la vitesse de propagation, U la vitesse de groupe et $\Psi(\nu, T)$ une fonction universelle de la fréquence ν et de la température T. Les lois de réfraction et réflexion des ondes électromagnétiques et élastiques, que l'on pourra déduire de l'hypothèse d'une liaison linéaire faible, auront pour conséquence l'extension des lois de Kirchhoff aux ondes de tous types.

Ce résultat sera d'ailleurs indépendant de la grandeur de la liaison supposée. Il suffira que cette liaison soit linéaire pour que l'équilibre

final ne puisse être que celui régi par la formule ci-dessus. La grandeur de la liaison influera seulement sur la durée d'établissement de l'état d'équilibre final. On peut donc, en pure logique, passer à la limite et dire que, la liaison devenant infiniment petite, l'état d'équilibre sera toujours le même.

e. Hypothèses de liaison. — Mais, en outre, on est forcé, par la théorie optique des milieux réfringents, d'introduire une liaison de ce genre, à cause de l'inertie des noyaux atomiques et des électrons. Supposons, par exemple, une onde électromagnétique se propageant dans un milieu transparent. Cette onde met en mouvement tous les électrons et noyaux atomiques, puisque ceux-ci sont chargés. Et la réaction de ces mouvements matériels détermine la vitesse de propagation dans le milieu, vitesse toujours inférieure à la vitesse dans le vide. Les noyaux atomiques, dont la masse, quoique considérable, n'est pas infinie, subiront donc des déplacements dans la direction du champ électrique; ces déplacements constituent une onde élastique forcée qui accompagne l'onde électromagnétique.

De même, une onde élastique se propageant dans ce milieu, communique aux noyaux atomiques des accélérations. La liaison entre le noyau et les électrons qui l'entourent n'est pas rigoureusement rigide, et l'électron a une masse finie. Il suivra donc les mouvements du noyau atomique avec un certain retard, ce qui produira une polarisation électrique ayant même direction que les déplacements de l'atome.

On devra donc prévoir, pour les ondes électriques transversales, une induction électrique $\vec{b}$ forcée, ayant même direction que le déplacement. Il y aura aussi une induction magnétique perpendiculaire $\vec{B}$ causée tant par les variations de $\vec{b}$ que par les accélérations de rotation imprimées aux atomes par l'onde élastique.

Une onde élastique longitudinale sera accompagnée d'une induction électrique longitudinale forcée $\vec{b}$, mais il n'y aura aucune induction magnétique sensible.

La grandeur des ondes forcées, qui accompagnent l'onde principale, dépend essentiellement de la fréquence, puisque nous faisons jouer

aux accélérations un rôle primordial. Nous n'expliciterons pas davantage la nature de cette dépendance, car cela nous obligerait à préciser les hypothèses sur la liaison entre noyau atomique et électron. Nous écrirons seulement que l'onde forcée, qui accompagne l'onde principale, a une amplitude proportionnelle à celle de l'onde principale et un déphasage constant. Le coefficient de proportionnalité et la phase seront, dans chaque milieu isotrope, fonction de la fréquence seulement (1).

Notons immédiatement le rôle perturbateur joué par la pression de radiation. La pression de radiation d'une onde de type quelconque produit des forces d'une fréquence double de celle de l'onde incidente; elle engendre donc des ondes élastiques de fréquence double, d'où une fuite d'énergie vers les courtes longueurs d'onde. Nous négligerons, dans ce Chapitre, les forces qui entrent ainsi en jeu, car ce sont des effets du deuxième ordre (force proportionnelle à l'énergie, donc au carré de l'amplitude de l'onde), tandis que les liaisons linéaires que nous considérons donnent un effet du premier ordre (force proportionnelle à l'amplitude).

Ces considérations générales ont été introduites par M. M. Brillouin dans les articles déjà cités. Mais la généralisation de la loi de Kirchhoff y était admise, sans démonstration, comme une hypothèse très vraisemblable. Nous allons montrer, par la suite, comment on peut démontrer rigoureusement la validité de la loi de Kirchhoff généralisée.

f. Loi des sinus. — Il serait intéressant d'étudier les lois de réfraction et réflexion des ondes des divers types, sur des surfaces variées. Le problème, sans être difficile, devient rapidement assez compliqué. Nous n'entrerons pas dans les détails de cette discussion, mais nous nous contenterons de noter les lois générales que l'on peut dégager, et nous aboutirons à la loi de Kirchhoff.

---

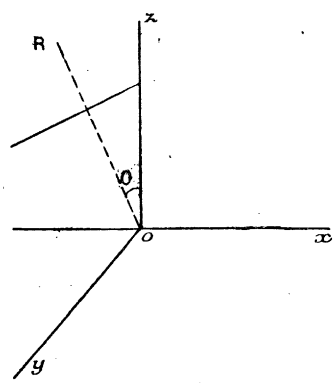
(1) On sait que l'étude des cristaux du type NaCl a conduit à se représenter leur structure sous la forme suivante : Les ions Na + et Cl — sont répartis alternativement sur un réseau cubique. Il est impossible, dans un tel modèle, de séparer les ondes électromagnétiques des ondes élastiques; la liaison supposée ci-dessus joue alors un rôle prépondérant.

1° La première loi qui apparaît comme presque évidente, c'est la *loi classique des sinus*.

Considérons une onde incidente plane, d'un type quelconque auquel j'affecte l'indice n; elle tombe sous un angle θ_n sur la surface plane de séparation de deux milieux. Nous supposons connues les conditions limites imposées sur toute cette surface plane. Ce seront les conditions électrostatiques, électromagnétiques et élastiques, qui représentent les propriétés des deux milieux en contact. Ces conditions devront être satisfaites identiquement tout le long de la surface.

Prenons comme plan d'incidence le plan xOz, le plan xOy étant la surface de séparation des deux milieux. Soit RO le rayon incident,

Fig. 2.



au point O. Diverses grandeurs (champ électrique h, champ magnétique H et déplacement D) figurent dans l'onde incidente. Toutes ces grandeurs sont des fonctions de x, y, z, t ayant le même aspect; soit f_n l'une de ces deux quantités, on aura

$$(13) \qquad f_n(x,y,z,t) = \mathrm{F}_n \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\theta_n + z\cos\theta_n}{\mathrm{V}_n} + \varphi_n\right),$$

si V_n est la vitesse de propagation de l'onde incidente, φ_n un coefficient de phase et F_n un coefficient constant d'amplitude. Considérons l'une des multiples ondes réfractées dans l'un quelconque des deux

milieux et affectons l'indice m à ce qui se rapporte à cette onde (vitesse V_m, angle θ_m, phase φ_m).

La grandeur étudiée (h, H ou D) figure dans l'onde réfractée sous la forme

$$f_m(x, y, z, t) = F_m \cos\omega\left(t - \frac{x\sin\theta_m + z\cos\theta_m}{V_m} + \varphi_m\right). \tag{14}$$

Sans avoir besoin de connaître exactement les conditions imposées sur la surface de réfraction xOy, nous savons que ces conditions doivent être identiquement satisfaites en tous les points de cette surface.

Ceci ne pourra se produire que si, sur tout le plan xOy, les grandeurs correspondantes f_n, f_m des deux ondes dépendent de la même façon des x et de t. Il faut donc qu'en faisant $z = 0$ dans l'expression de f_n et f_m, on trouve pour ces deux grandeurs des fonctions de x, t exactement semblables.

Ceci impose la condition

$$\frac{\sin\theta_n}{V_n} = \frac{\sin\theta_m}{V_m}. \tag{15}$$

Nous retrouvons donc nécessairement la loi de réfraction classique (loi des sinus) comme absolument générale.

g. Pouvoir transmetteur. — Nous définirons le pouvoir transmetteur de la surface de réfraction, tout à fait analogue au pouvoir réflecteur. Ce sera la mesure de la proportion d'énergie transmise par une onde incidente de type donné, à une onde réfractée d'un type déterminé.

Soit une onde incidente d'intensité J_n (densité d'énergie ρ_n, vitesse de groupe U_n, angle d'incidence θ_n),

$$J_n = \rho_n U_n.$$

La quantité d'énergie qui est apportée par l'onde n, en un temps dt sur un élément $d\sigma$ de surface du plan xOy (surface de réfraction) a pour expression

$$dQ_n = J_n\, d\sigma \cos\theta_n\, dt. \tag{16}$$

Soit dQ_{nm} la quantité d'énergie qui est transformée en onde réfractée du type m

$$dQ_{nm} = j_{nm}\, d\sigma \cos\theta_m\, dt \tag{17}$$

(j_{nm}, intensité de l'onde réfractée sous l'angle θ_m).

J'appelle « pouvoir transmetteur τ_{nm} » la proportion d'énergie transmise par l'onde n à l'onde m pendant le temps dt

$$\tau_{nm} = \frac{dQ_{nm}}{dQ_n} = \frac{j_{nm}\cos\theta_m}{J_n \cos\vartheta_n}. \tag{18}$$

Nous définirons de même le pouvoir transmetteur inverse τ_{mn}. Celui-ci se rapportera au cas d'une onde incidente de type m (J_m, Q_m, U_m, θ_m) tombant sur la surface de séparation sous l'angle θ_m; c'est une onde suivant le même rayon que l'onde réfractée du cas précédent, mais avec un sens de propagation exactement opposé.

La quantité d'énergie tombant sur la surface est

$$dQ_m = J_m\, d\sigma \cos\theta_m\, dt.$$

La quantité d'énergie transmise en onde du type n est

$$dQ_{mn} = j_{mn}\, d\sigma \cos\theta_n\, dt.$$

Et le pouvoir transmetteur τ_{mn} se définit par la relation

$$\tau_{mn} = \frac{dQ_{mn}}{dQ_m} = \frac{j_{mn}\cos\theta_n}{J_m \cos\vartheta_m}. \tag{18 bis}$$

h. Égalité des pouvoirs transmetteurs inverses. Loi de Kirchhoff généralisée. — Étudions maintenant les échanges d'énergie entre les ondes de différents types, dans l'état d'équilibre isotherme. Les ondes d'un type donné, par exemple type n, sont alors complètement diffusées, et la densité d'énergie des ondes de fréquence ν (à $d\nu$ près) dont les rayons sont compris dans un petit angle solide $d\omega_n$, est donnée par la formule

$$\rho_n\, d\nu\, d\omega_n = f_n(\nu, T)\, d\nu\, d\omega_n; \tag{19}$$

$f_n(\nu, T)$ est la fonction de répartition de l'énergie entre les fréquences ν, à température T, pour les ondes de type n. Pour des ondes d'un autre

type, m, nous définirons de même la densité d'énergie

$$\rho_m d\nu\, d\omega_m = f_m(\nu, T)\, d\nu\, d\omega_m. \tag{19 bis}$$

Nous supposons que ces deux types d'onde m et n sont capables d'échanger de l'énergie, par suite de réfractions. Étudions les échanges d'énergie dus aux ondes tombant sur la surface de réfraction sous des angles correspondants θ_n et θ_m.

Avec les notations du paragraphe précédent, nous trouvons

$$\begin{cases} J_n = \rho_n U_n\, d\nu\, d\omega_n = U_n f_n(\nu, T)\, d\nu\, d\omega_n, \\ J_m = \rho_m U_m d\nu\, d\omega_m = U_m f_m(\nu, T)\, d\nu\, d\omega_m. \end{cases} \tag{20}$$

S'il y a équilibre entre les ondes de type n et de type m, c'est que l'énergie transformée dans le sens $m \to n$ est égale à l'énergie transformée dans le sens $n \to m$:

$$dQ_{nm} = dQ_{mn}$$

ou

$$\tau_{nm} dQ_n = \tau_{mn} dQ_m.$$

Ceci s'écrit, en tenant compte des relations (18, 19, 20) établies plus haut,

$$\tau_{nm} f_n(\nu, T)\, d\omega_n \cos\theta_n d\nu\, d\sigma\, dt = \tau_{mn} f_m(\nu, T)\, d\omega_m \cos\theta_m d\nu\, d\sigma\, dt; \tag{21}$$

mais les angles $d\omega_n$ et $d\omega_m$ doivent se correspondre par réfraction. La loi des sinus permet de démontrer très aisément, comme nous l'avons indiqué à propos de la loi de Kirchhoff [formule (8)], la relation suivante :

$$\frac{d\omega_n \cos\theta_n}{V_n^2} = \frac{d\omega_m \cos\theta_m}{V_m^2}. \tag{22}$$

La condition d'équilibre devient alors

$$\tau_{nm} U_n V_n^2 f_n(\nu, T) = \tau_{mn} U_m V_m^2 f_m(\nu, T) \tag{23}$$

ou

$$\frac{\tau_{mn}}{\tau_{nm}} = \frac{U_n V_n^2 f_n(\nu, T)}{U_n V_m^2 f_m(\nu, T)}.$$

Dans cette égalité, le second membre est une constante, indépendante des valeurs θ_n, θ_m des angles de réfraction. Donc le premier membre

doit être aussi une constante. Et de fait, dans tous les cas particuliers que l'on calcule, on trouve toujours que l'on a rigoureusement

$$\tau_{mn} = \tau_{nm}.$$

i. Énoncé général. — Ceci se rattache à la loi très générale d'Helmholtz. Si, en un point, un rayon de nature donnée subit une certaine perte d'énergie pour une certaine cause, un rayon, de sens de propagation opposé et de nature inverse, etc., subira au même point une perte d'énergie exactement égale. Cette loi se généralise même pour le cas où les ondes changent de type au point étudié, et se transforment en ondes d'une autre catégorie.

Ceci entraîne la loi de Kirchhoff généralisée, que nous voulions démontrer et que M. M. Brillouin avait admise à titre d'hypothèse mais sans démonstration. On a donc, d'une façon absolument générale, pour les ondes de tous types, la relation

$$U_n V_n^2 f_n(\nu, T) = U_m V_m^2 f_m(\nu, T) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right),$$

F étant une fonction universelle de la fréquence et de la température. Donc, qu'il s'agisse d'ondes électromagnétiques ou élastiques, la densité d'énergie des ondes de type et polarisation donnés, de fréquence $\nu\,(d\nu)$ et de directions comprises dans un angle solide $d\omega$, est donnée par la formule générale

$$\rho_n\, d\nu\, d\omega = \frac{\nu^3}{U_n V_n^2} F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu\, d\omega. \tag{24}$$

J'ai tenu compte dans cette formule de la loi de Wien, déjà établie plus haut.

Il est bien entendu que ceci s'applique, si les oscillations sont transversales, à des ondes de polarisation donnée. Si l'on veut tenir compte des deux polarisations possibles, il faut doubler le résultat, et l'on a alors

$$\rho_n\, d\nu\, d\omega = \frac{2\nu^3}{U_n V_n^2} F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu\, d\omega. \tag{24 bis}$$

Si l'on cherche, en un point donné, la densité des ondes de toutes directions, il n'y a qu'à remplacer $d\omega$ par 4π.

La forme de la fonction $F\left(\frac{\nu}{T}\right)$ est jusqu'ici restée arbitraire. Mais nous savons que pour les ondes électromagnétiques, la formule de Planck est la seule qui concorde bien avec l'expérience

$$\nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{25}$$

Cette formule se justifie par les considérations de quanta appliquées seulement aux échanges d'énergie électromagnétique entre atomes et éther.

L'expression de Planck pour la fonction universelle $F\left(\frac{\nu}{T}\right)$ s'étend maintenant, automatiquement, aux ondes de tous les types. Il n'est pas nécessaire, pour cela, de supposer pour ces autres types d'onde (ondes élastiques) des échanges d'énergie par quanta. Même si les échanges d'énergie sont continus, les ondes élastiques ne pourront être en équilibre avec des ondes électromagnétiques de même fréquence que si elles suivent la même loi de répartition, celle de Planck. C'est ce qui se déduit immédiatement de notre généralisation des lois de Kirchhoff.

En général, j'utiliserai les formules en négligeant la dispersion, c'est-à-dire en supposant V indépendant de ν et $U = V$.

On pourrait pourtant, et ce ne serait pas sans intérêt, essayer de développer toute la théorie sans cette restriction.

CHAPITRE IV.

RÉFRACTION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES ET ÉLASTIQUES AVEC UNE LIAISON LINÉAIRE ENTRE PHÉNOMÈNES ÉLECTROMAGNÉTIQUES ET ÉLASTIQUES. CALCUL COMPLET D'UN PROBLÈME PARTICULIER.

a. Notations. — Dans le Chapitre précédent nous avons étudié, d'une façon très générale, l'influence d'une petite liaison linéaire entre les phénomènes électriques et élastiques. Cette liaison peut, par exemple, être due à l'inertie des électrons et des noyaux atomiques. Dans l'état actuel de nos conceptions de la matière, il paraît

tout à fait logique de tenir compte de cette liaison. Le résultat général sera l'existence d'ondes forcées accompagnant les ondes principales.

Pour *une onde électromagnétique plane* se propageant dans un milieu transparent de pouvoir inducteur spécifique k, le champ électrique aura l'expression suivante :

$$\vec{h} = \vec{h}_0 \cos\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right), \tag{1}$$

α, β, γ, cosinus directeurs du rayon lumineux;

$\vec{h}_0$, vecteur amplitude, perpendiculaire au rayon lumineux.

Ce champ électrique agit sur toutes les charges électriques présentes et leur transmet des accélérations. En particulier, les noyaux atomiques chargés subiront de ce fait des déplacements. Les déplacement forcés, qui accompagnent l'onde électromagnétique, s'écriront

$$\vec{d}_2 = \vec{d}_{20} \cos\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V} - \varphi\right) \tag{2}$$

avec un certain déphasage φ constant.

L'amplitude d_{20} du déplacement sera proportionnelle à l'amplitude, h_0 du champ électrique, et le déplacement aura même direction que ce champ. Soit p le coefficient de proportionnalité

$$\vec{d}_{20} = p\,\vec{h}_0. \tag{3}$$

L'onde ainsi constituée a une densité d'énergie égale à

$$\frac{k' h_0^2}{8\pi} \tag{4}$$

avec un coefficient k' différent du pouvoir inducteur spécifique k, car dans l'énergie il faut tenir compte de l'énergie d'agitation des noyaux atomiques. Les quantités φ, p, k' sont, pour chaque milieu transparent, dans des conditions données, des fonctions de la fréquence.

Dans *une onde élastique transversale*, le déplacement des atomes du corps solide s'écrit sous la forme

$$\vec{D}_2 = \vec{D}_{20} \cos\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V_{tr}}\right), \tag{5}$$

les vecteurs $\vec{D}_2$, $\vec{D}_{20}$ sont perpendiculaires au rayon (α, β, γ). Sous

l'influence de cette onde, le noyau atomique subit des accélérations, et entraîne avec lui, avec un certain retard, les électrons qui lui sont liés. Il s'ensuit une polarisation électrique forcée, de même fréquence que l'onde élastique, et qui accompagne celle-ci. Nous noterons l'induction électrique ainsi créée

$$\vec{b_2} = \vec{b_{20}} \cos\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V_{tr}} - \chi\right), \tag{6}$$

χ, déphasage constant.

On aura

$$\vec{b_{20}} = q\vec{D_{20}}. \tag{7}$$

La densité d'énergie de cette onde est

$$\frac{1}{2}\rho'\omega^2 D_{20}^2. \tag{8}$$

La quantité ρ', densité fictive, diffère de la densité réelle ρ du milieu solide.

En effet, dans le calcul de l'énergie, il faudrait tenir compte de l'énergie des termes électriques forcés, qui accompagnent l'onde élastique. Les grandeurs q, χ et ρ' sont, pour chaque milieu donné, des fonctions de la fréquence et au besoin de la température, du volume spécifique du milieu.

Pour *une onde élastique longitudinale*, le déplacement D_1 s'écrit

$$\vec{D_1} = \vec{D_{10}} \cos\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V_l}\right); \tag{9}$$

les vecteurs $\vec{D_1}$, $\vec{D_{10}}$ sont orientés suivant le rayon (α, β, γ).

Cette onde élastique entraîne une onde électrique longitudinale forcée, dont l'induction s'écrira

$$\vec{b_1} = \vec{b_{10}} \cos\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V_l} - \psi\right) \tag{10}$$

avec

$$\vec{b_{10}} = r\vec{D_{10}}. \tag{11}$$

La densité d'énergie aura une valeur

$$\frac{1}{2}\rho''\omega^2 D_{10}^2 \qquad \text{avec} \qquad \rho'' \neq \rho' \neq \rho. \tag{12}$$

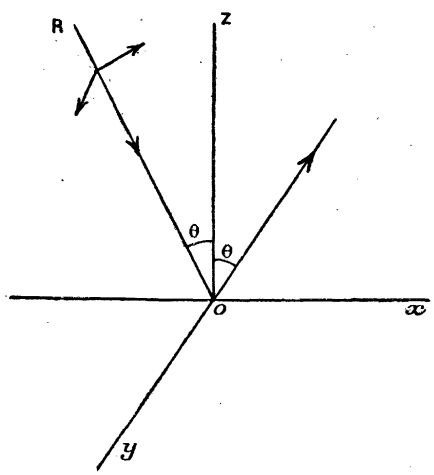
Les grandeurs r et ρ'' et l'angle de déphasage ψ sont, pour chaque milieu, dans des conditions de volume spécifique et température données, des fonctions de la fréquence.

Nous pourrons, dans ces hypothèses très générales, montrer comment se traitent différents problèmes de réfraction et réflexion, et vérifier chaque fois l'égalité des pouvoirs transmetteurs réciproques, dont nous nous sommes servis au Chapitre précédent pour démontrer la loi de Kirchhoff généralisée.

b. Problème. — *Un milieu liquide transparent, limité par une paroi plane absolument rigide et parfaitement conductrice pour l'électricité.*

Cette paroi est le type du miroir parfait pour ondes lumineuses. Nous allons étudier les divers genres de réflexions auxquels elle peut donner lieu. Dans le milieu liquide transparent, il ne peut exister que des ondes électromagnétiques (avec deux polarisations à angle droit) et des ondes élastiques longitudinales.

Fig. 3.



Soient xOy la surface du plan réflecteur rigide et conducteur, Oz la normale au point d'incidence O. Étudions les réflexions des divers rayon sur ce plan.

c. Onde électromagnétique, vecteur électrique parallèle au plan réflec-

teur. — Le champ électrique de cette onde incidente s'écrit

$$h_y = h_0 e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin\theta - z\cos\theta}{V}\right)}; \tag{13}$$

le déplacement forcé qui accompagne cette onde est

$$d_y = p h_0 e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin\theta - z\cos\theta}{V} - \varphi\right)}.$$

L'onde réfléchie s'écrit

$$\begin{cases} h'_y = h'_0 e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin\theta + z\cos\theta}{V}\right)}, \\ d'_y = p h'_0 e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin\theta + z\cos\theta}{V} - \varphi\right)}. \end{cases} \tag{14}$$

Le champ électrique résultant sera bien, comme il le faut, nul sur le plan réflecteur $z = 0$, et le déplacement de même, si l'on fait $h_0 = h'_0$. Les conditions à la surface sont alors satisfaites, sans qu'il y ait lieu d'introduire aucune onde supplémentaire. Dans ce premier cas, il ne se produit donc qu'une réflexion absolument normale.

d. Onde électromagnétique, vecteur électrique dans le plan d'incidence. — L'onde incidente s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Champ électrique} & \left\{ \begin{array}{l} h_x = h_0 \cos\theta\, e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin\theta - z\cos\theta}{V}\right)}, \\ h_z = h_0 \sin\theta\, e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin\theta - z\cos\theta}{V}\right)}; \end{array} \right. \\ \text{Déplacement forcé} & \left\{ \begin{array}{l} d_x = p h_0 \cos\theta\, e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin\theta - z\cos\theta}{V} - \varphi\right)}, \\ d_z = p h_0 \sin\theta\, e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin\theta - z\cos\theta}{V} - \varphi\right)} \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{15}$$

L'onde réfléchie s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Champ électrique} & \left\{ \begin{array}{l} h'_x = -h'_0 \cos\theta\, e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin\theta + z\cos\theta}{V} - \alpha\right)}, \\ h'_z = \quad h'_0 \sin\theta\, e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin\theta + z\cos\theta}{V} - \alpha\right)}; \end{array} \right. \\ \text{Déplacement forcé} & \left\{ \begin{array}{l} d'_x = -p h'_0 \cos\theta\, e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin\theta + z\cos\theta}{V} - \alpha - \varphi\right)}, \\ d'_z = \quad p h'_0 \sin\theta\, e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin\theta + z\cos\theta}{V} - \alpha - \varphi\right)}. \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{16}$$

S'il n'y avait pas à tenir compte des déplacements d, on écrirait simplement $h'_0 = h_0$ et $\alpha = 0$, ce qui annule le champ électrique tan-

gent. Mais on ne satisferait pas ainsi à la condition que le déplacement normal au plan réflecteur soit nul.

Pour satisfaire à cette condition élastique, nous devons introduire une onde élastique longitudinale. Soient η son angle de réfraction et β' le déphasage :

$$(17)\quad \begin{cases} \text{Déplacement} & \begin{cases} D_{1x} = D_{10}\sin\eta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\eta_l + z\cos\eta_l}{V_l}-\beta\right)}, \\ D_{1z} = D_{10}\cos\eta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\eta_l + z\cos\eta_l}{V_l}-\beta\right)}; \end{cases} \\ \text{Induction forcée} & \begin{cases} b_{1x} = r D_{10}\sin\eta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\eta_l + z\cos\eta_l}{V_l}-\beta-\psi\right)}, \\ b_{1z} = r D_{10}\cos\eta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\eta_l + z\cos\eta_l}{V_l}-\beta-\psi\right)}. \end{cases} \end{cases}$$

Pour que les conditions de surface soient satisfaites sur le plan $z=0$, il faut que, dans les diverses ondes, le facteur de x ait la même expression; ceci donne la loi des sinus

$$\frac{\sin\eta_l}{V_l} = \frac{\sin\theta}{V}.$$

Écrivons maintenant les conditions de surface; tout d'abord, l'induction électrique tangente doit être nulle :

$$0 = k h_0 \cos\theta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\theta}{V}\right)} - k h'_0 \cos\theta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\theta}{V}-\alpha\right)} + r D_{10}\sin\eta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\eta_l}{V_l}-\beta-\psi\right)}.$$

Cette relation s'écrit, en supprimant le facteur commun,

$$e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\theta}{V}\right)} = e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\eta_l}{V_l}\right)},$$

$$(18)\quad h_0 - h'_0 e^{-i\omega\alpha} + a D_{10} e^{-i\omega(\beta+\psi)} = 0$$

avec la notation

$$a = \frac{r}{k}\frac{\sin\eta_l}{\cos\theta}.$$

En faisant les mêmes simplifications, on écrira la condition de déplacement nul

$$(19)\quad h_0 + h'_0 e^{-i\omega\alpha} + b D_{10} e^{-i\omega(\beta-\gamma)} = 0$$

avec

$$b = \frac{1}{p}\frac{\cos\eta_l}{\sin\theta}.$$

En ajoutant les deux relations pour éliminer h'_0, on obtient

$$\frac{-2h_0}{D_{10}} = \frac{a\cos\omega\psi + b\cos\omega\varphi + i(-a\sin\omega\psi + b\sin\omega\varphi)}{\cos\omega\beta + i\sin\omega\beta}$$
$$= \frac{a\cos\omega\psi + b\cos\omega\varphi}{\cos\omega\beta} = \frac{-a\sin\omega\psi + b\sin\omega\varphi}{\sin\omega\beta}.$$

On tirera aisément de ces relations la valeur du carré D^2_{10}, sous la forme

$$\frac{h_0^2}{D^2_{10}} = \frac{1}{4}[a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega(\varphi + \psi)]. \tag{20}$$

Nous pouvons aussi bien chercher maintenant la valeur de h'_0 en fonction de h_0. Nous éliminerons D_{10} entre les deux équations écrites plus haut, en multipliant la première par $be^{i\omega\varphi}$, la deuxième par $-ae^{-i\omega\psi}$ et ajoutant

$$h_0(be^{i\omega\varphi} - ae^{-i\omega\psi}) - h'_0 e^{-i\omega\alpha}(be^{i\omega\varphi} + ae^{-i\omega\psi}) = 0.$$

Cette équation se développe et s'écrit

$$h_0(b\cos\omega\varphi - a\cos\omega\psi) - h'_0\cos\omega\alpha(b\cos\omega\varphi + a\cos\omega\psi) - h'_0\sin\omega\alpha(b\sin\omega\varphi - a\sin\omega\psi) = 0,$$
$$h_0(b\sin\omega\varphi + a\sin\omega\psi) - h'_0\cos\omega\alpha(b\sin\omega\varphi - a\sin\omega\psi) + h'_0\sin\omega\alpha(b\cos\omega\varphi + a\cos\omega\psi) = 0.$$

En combinant ces deux équations, on en tire aisément les deux suivantes :

$$h'_0\sin\omega\alpha[a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega(\varphi + \psi)] = -2abh_0\sin\omega(\varphi + \psi),$$
$$h'_0\cos\omega\alpha[a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega(\varphi + \psi)] = h_0(b^2 - a^2).$$

En élevant au carré et ajoutant, on aura h'^2 en fonction de h^2. Et l'on trouve, comme résultat final,

$$\frac{h_0^2 - h_0'^2}{h_0^2} = \frac{4ab\cos\omega(\varphi + \psi)}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega(\varphi + \psi)}. \tag{21}$$

e. Conservation de l'énergie. — Nous voulons maintenant écrire la conservation de l'énergie.

L'énergie électromagnétique tombant, en une seconde, sur un élément $d\sigma$ de la surface réfléchissante, a pour valeur

$$dQ = k' V \frac{h_0^2}{8\pi}\cos\theta\, d\sigma.$$

L'énergie électromagnétique de l'onde réfléchie est

$$dQ' = k' \mathrm{V} \frac{h_0'^2}{8\pi} \cos\theta \, d\sigma.$$

L'énergie de l'onde élastique réfléchie est

$$dq' = \mathrm{V}_l \frac{\rho'' \omega^2 \mathrm{D}_{10}^2}{2} \cos\eta \, d\sigma.$$

La conservation de l'énergie exige que l'on ait

$$dQ - dQ' = dq',$$

ce qui donne

$$\frac{h^2 - h'^2}{h^2} = \frac{8\pi}{k'} \frac{\mathrm{V}_l}{\mathrm{V}} \frac{\rho'' \omega^2}{2} \frac{\mathrm{D}^2}{h^2} \frac{\cos\eta}{\cos\theta}.$$

En tenant compte des valeurs de $\frac{h^2 - h'^2}{h^2}$ et de $\frac{\mathrm{D}^2}{h^2}$ calculées plus haut, cette relation nous donne

$$ab \cos\omega(\varphi + \psi) = \frac{4\pi\rho''}{k'} \omega^2 \frac{\mathrm{V}_l}{\mathrm{V}} \frac{\cos\eta}{\cos\theta}.$$

Or

$$ab = \frac{r}{kp} \frac{\mathrm{V}_l}{\mathrm{V}} \frac{\cos\eta}{\cos\theta}$$

d'après (17) et (18).

D'où finalement la relation suivante :

$$\frac{r}{kp} \cos\omega(\varphi + \psi) = \frac{4\pi\rho''}{k'} \omega^2. \tag{22}$$

Cette relation doit nécessairement exister entre les divers coefficients arbitraires r, p, ρ'', k' que nous avions introduits arbitrairement. En écrivant le détail des équations on aurait aussi trouvé une relation liant les angles φ et ψ. En tenant compte de ceci, nous trouverons l'expression du pouvoir transmetteur τ_{23}, l'indice 2 étant affecté à l'onde électromagnétique incidente (vecteur électrique dans le plan d'incidence) et l'indice 3 se rapportant à l'onde élastique longitudinale

$$\tau_{23} = \frac{h^2 - h'^2}{h^2} = \frac{4ab \cos\omega(\varphi + \psi)}{a^2 + b^2 + 2ab \cos\omega(\varphi + \psi)}. \tag{23}$$

f. Le problème inverse se traitera par les mêmes procédés. Nous

étudierons une onde longitudinale plane qui tombe sur la surface de réfraction, suivant l'angle η. Cette onde engendrera, outre l'onde élastique réfléchie, une onde électromagnétique ayant son vecteur électrique dans le plan d'incidence.

L'onde incidente s'écrit :

$$(24)\qquad \text{Déplacement}\begin{cases} D_{1x} = D_{10}\sin\eta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\eta - z\cos\eta}{V_t}\right)}, \\ D_{1z} = D_{10}\cos\eta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\eta - z\cos\eta}{V_t}\right)}. \end{cases}$$

L'induction forcée a une amplitude rD_{10} et un déphasage $-\omega\psi$:

$$\begin{cases} b_{1x} = rD_{10}\sin\eta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\eta - z\cos\eta}{V_t}-\psi\right)}, \\ b_{1z} = rD_{10}\cos\eta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\eta - z\cos\eta}{V_t}-\psi\right)}. \end{cases}$$

L'onde élastique réfléchie prend la forme :

$$(25)\qquad \text{Déplacement}\begin{cases} D_{1x} = \quad D'_{10}\sin\eta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\eta + z\cos\eta}{V_t}-\gamma\right)}, \\ D_{1z} = -D'_{10}\cos\eta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\eta + z\cos\eta}{V_t}-\gamma\right)}, \end{cases}$$

D'_{10} étant l'amplitude et $-\omega\gamma$ le déphasage.

L'induction forcée a une amplitude rD'_{10} et un déphasage total $-\omega(\gamma+\psi)$.

L'onde électromagnétique qui prend naissance sur la surface aura un angle de réfraction θ donné par la loi des sinus, tout comme dans le cas précédent. Son champ électrique a la forme suivante :

$$(26)\qquad \begin{cases} h_{1x} = -h_0\cos\theta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\theta + z\cos\theta}{V}-\delta\right)}, \\ h_{1z} = \quad h_0\sin\theta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\theta + z\cos\theta}{V}-\delta\right)}, \end{cases}$$

h_0 étant l'amplitude et $-\omega\delta$ le déphasage.

Le déplacement forcé qui l'accompagnera sera

$$\begin{aligned} d_x &= -ph_0\cos\theta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\theta + z\cos\theta}{V}-\delta-\varphi\right)}, \\ d_z &= \quad ph_0\sin\theta\, e^{i\omega\left(t-\frac{x\sin\theta + z\cos\theta}{V}-\delta-\varphi\right)}. \end{aligned}$$

La loi des sinus étant satisfaite, nous pourrons écrire les deux

conditions de surface, c'est-à-dire l'induction électrique tangente nulle et le déplacement normal nul.

Ceci donne

$$\mathbf{D}_{10} + \mathbf{D}'_{10} e^{-i\omega\gamma} - \frac{k}{r} h_0 \frac{\cos\theta}{\sin\eta} e^{-i\omega(\delta-\psi)} = 0,$$

$$\mathbf{D}_{10} - \mathbf{D}'_{10} e^{-i\omega\gamma} - p h_0 \frac{\sin\theta}{\cos\eta} e^{-i\omega(\delta+\varphi)} = 0;$$

ceci s'écrit, avec les notations déjà introduites,

$$a = \frac{r}{k}\frac{\sin\eta}{\cos\theta}, \qquad b = \frac{1}{p}\frac{\cos\eta}{\sin\theta};$$

$$(27) \quad \begin{cases} \mathbf{D}_{10} + \mathbf{D}'_{10} e^{-i\omega\gamma} - \dfrac{1}{a} h_0 e^{-i\omega(\delta-\psi)} = 0, \\ \mathbf{D}_{10} + \mathbf{D}'_{10} e^{-i\omega\gamma} - \dfrac{1}{b} h_0 e^{-i\omega(\delta+\varphi)} = 0. \end{cases}$$

On en tire, exactement comme dans le problème précédent, les résultats suivants :

$$(28) \quad \frac{\mathbf{D}^2}{h^2} = \frac{1}{4a^2b^2}\left[a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega(\varphi+\psi)\right]$$

et

$$(29) \quad \frac{\mathbf{D}^2 - \mathbf{D}'^2}{\mathbf{D}^2} = \frac{4ab\cos\omega(\varphi+\psi)}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega(\varphi+\psi)}.$$

En écrivant la conservation de l'énergie, on se trouvera amené à la condition suivante :

$$\mathrm{V}_l \frac{\rho''\omega^2}{2}\cos\eta\frac{\mathbf{D}^2 - \mathbf{D}'^2}{\mathbf{D}^2} = \mathrm{V}\frac{k'}{8\pi}\cos\theta\frac{h^2}{\mathbf{D}^2}$$

qui, en tenant compte des deux relations précédentes (28) et (29), et des valeurs des coefficients a, b (27), se réduit à

$$(30) \quad \frac{4\pi\rho''\omega^2}{k'}\cos\omega(\varphi+\psi) = \frac{r}{kp}.$$

Or, dans le problème précédent, nous avions trouvé, par la même voie, un résultat un peu différent :

$$(22) \quad \frac{4\pi\rho''\omega^2}{k'} = \frac{r}{kp}\cos\omega(\varphi+\psi).$$

D'où la conclusion assez curieuse que voici :

Pour que nous puissions écrire les réflexions et réfractions, il faut qu'il existe une relation entre les déphasages des diverses ondes forcées. Cette relation est la suivante :

$$\cos^2\omega(\varphi+\psi)=1. \tag{31}$$

Les coefficients de déphasage φ et ψ ne sont donc pas indépendants. Les coefficients d'amplitude ne le sont pas non plus et doivent satisfaire à la relation

$$\frac{4\pi\rho''}{k^2}\omega^2=\frac{r}{kp}. \tag{32}$$

Toute théorie qui voudrait donner une explication plus intime du phénomène devra nous fournir des coefficients qui satisfassent aux relations (31) et (32) que nous venons d'écrire.

g. Égalité des pouvoirs transmetteurs. — Nous terminerons en montrant sur l'exemple que nous venons d'étudier la vérification de la loi de réciprocité des pouvoirs transmetteurs.

Affectons l'indice 1 à une onde électromagnétique polarisée ayant son vecteur électrique perpendiculaire au plan d'incidence, l'indice 2 à une onde électromagnétique dont le vecteur électrique est dans le plan d'incidence, et l'indice 3 aux ondes élastiques longitudinales. Pour des valeurs 0 et η correspondantes (loi des sinus) des angles d'incidence et de réfraction, nous pourrons résumer nos résultats en donnant le tableau des valeurs des différents pouvoirs transmetteurs [*voir* équations (21), (23) et (29)] :

$$\tau_{12}=\tau_{13}=\tau_{21}=\tau_{31}=0,$$

$$\tau_{23}=\frac{h^2-h'^2}{h^2}=\frac{4ab\cos\omega(\varphi+\psi)}{a^2+b^2+2ab\cos\omega(\varphi+\psi)},$$

$$\tau_{32}=\frac{D^2-D'^2}{D^2}=\frac{4ab\cos\omega(\varphi+\psi)}{a^2+b^2+2ab\cos\omega(\varphi+\psi)}.$$

On trouve bien, pour tous les indices, $\tau_{mn}=\tau_{nm}$.

C'est la loi de réciprocité dont nous nous sommes servis au Chapitre précédent, pour démontrer la loi de Kirchhoff généralisée.

i. Conclusions générales. — Nous pourrions traiter d'autres problèmes, par exemple, des réflexions ou réfractions sur une surface séparant deux milieux. Si les milieux sont solides et transparents, ils pourront être le siège d'ondes de tous les types : ondes électromagnétiques (deux polarisations), ondes élastiques transversales (deux polarisations) et ondes élastiques longitudinales.

Ce problème des réfractions deviendra alors assez compliqué, puisque chaque onde donnera naissance à des ondes de tous les types. Il ne semble pas utile d'entrer dans le détail de ces calculs, qui deviendraient rapidement fastidieux.

L'exemple unique que nous venons de traiter montre pourtant qu'il y aurait quelques conséquences à en tirer, sous formes de relations nécessaires entre les différents coefficients arbitraires que nous avons introduits au début de ce Chapitre, coefficients d'amplitude et de phase des ondes forcées.

Nous voulions seulement indiquer ce point, et nous terminerons en montrant que l'exemple traité plus haut suffit à démontrer la validité absolue de la loi de Kirchhoff généralisée.

En effet, les lois de Kirchhoff et Wien sont démontrées pour toutes les ondes électromagnétiques. Elles permettent d'affirmer que, dans l'état d'équilibre isotherme, la densité d'énergie des ondes électromagnétiques, de polarisation donnée, dans un milieu où leur vitesse de propagation est V, est donnée par une formule de la forme

$$\rho\, d\nu\, d\omega = \frac{\nu^3}{V^3}\, \mathrm{F}\left(\frac{\nu}{\mathrm{T}}\right) d\nu\, d\omega,$$

ν étant la fréquence, T la température, F une fonction universelle.

De même, les lois de Kirchhoff et Wien se démontrent pour toutes les ondes élastiques, tant longitudinales que transversales, car une onde élastique d'un type quelconque, tombant sur une surface de réflexion, donne naissance à des ondes élastiques de tous les types, suivant les conditions imposées sur la surface.

On écrira donc, pour la densité des ondes élastiques existant dans l'état d'équilibre isotherme, une formule générale

$$\rho\, d\nu\, d\omega = \frac{\nu^3}{V^3}\, \mathrm{F}'\left(\frac{\nu}{\mathrm{T}}\right) d\nu\, d\omega,$$

F′ étant une autre fonction universelle de la fréquence ν et de la température T.

Nous venons de traiter un exemple dans lequel des ondes élastiques et électromagnétiques échangent de l'énergie, en satisfaisant encore à la loi de Kirchhoff. Cet exemple unique nous oblige donc à réunir nos deux formules générales en une seule, et à écrire

$$F\left(\frac{\nu}{T}\right) = F'\left(\frac{\nu}{T}\right).$$

Tous les autres exemples que nous pourrions traiter devront aussi, sous peine de contradiction, vérifier cette loi générale, et c'est là le point important pour les théories dont nous nous occupons.

L'étude plus approfondie de la liaison entre ondes électromagnétiques et élastiques serait d'ailleurs intéressante, et fournirait des renseignements nouveaux sur la structure de l'atome, et sur la nature des forces qui maintiennent les électrons autour du noyau atomique. En l'absence de tout renseignement expérimental sur ce point, on ne saurait d'ailleurs faire actuellement que des hypothèses; aussi avons-nous voulu n'entamer ces raisonnements que sous une forme aussi générale que possible.

Les termes secondaires (ondes forcées) étant certainement très petits, puisque l'expérience courante ne les révèle pas, nous les négligerons dans la suite.

CHAPITRE V.

PRESSIONS DE RADIATION.

a. Calculs de Lord Rayleigh. — On connaît depuis Maxwell l'existence des pressions exercées par les radiations lumineuses et électromagnétiques. Pour les ondes acoustiques, c'est Lord Rayleigh qui signala le premier l'existence de ces pressions (1). On trouve dans les

(1) Lord RAYLEIGH, *Phil. Mag.*, t. III, 1902, p. 338 (reproduit dans *Scientific Papers*, vol. V, p. 41); *Phil. Mag.*, t. X, 1905, p. 364 (reproduit dans *Scientific Papers,* vol. V, p. 262).

Voir aussi POYNTING, *Phil. Mag.*, t. IX, 1905, p. 393.

deux articles de Lord Rayleigh à ce sujet l'indication de plusieurs modes de raisonnement très généraux et le calcul de quelques cas particuliers. Mais certaines erreurs nous obligeront à reprendre en détail l'exposé de cette question.

Soit un milieu traversé par des ondes élastiques, qui sont émises, absorbées, ou réfléchies par les parois, suivant des lois données. On formera l'expression de l'énergie potentielle de vibration U et celle de l'énergie cinétique T. Si l est une des coordonnées du système, il sera facile de trouver l'expression de la force L correspondante par la méthode de Lagrange [*Cf.* Chap. II, formule (8)].

$$\mathrm{L} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{l}}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial l} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial l}.$$

Si nous prenons les moyennes sur un temps τ suffisamment grand, le premier terme disparaîtra, car T reste fini, et l'on aura

$$\overline{\mathrm{L}} = \overline{\frac{\partial(\mathrm{U}-\mathrm{T})}{\partial l}}. \tag{1}$$

Cette formule générale a été appliquée par Lord Rayleigh au calcul de plusieurs cas spéciaux. H.-A. Lorentz (¹), dans un travail récent sur la dilatation des solides, a repris de son côté le calcul des pressions de radiation exercées par des ondes longitudinales et transversales. Il a retrouvé, en employant la méthode ci-dessus, des résultats généraux en concordance avec ceux de Lord Rayleigh, résultats que nous étudierons et généraliserons à la fin de ce Chapitre.

Dans le premier article, Lord Rayleigh calcule, en particulier, la pression exercée par une onde, se propageant dans un gaz parfait, lorsque cette onde se réfléchit normalement sur une paroi rigide. Cette pression s'écrit

$$\Delta p = \mathrm{E} = 2\mathcal{E}, \tag{2}$$

E étant la densité totale d'énergie des deux ondes élastiques incidente et réfléchie, chacune de ces ondes ayant une densité d'énergie $\mathcal{E}$.

(¹) H.-A. Lorentz, *The dilatation of solid bodies by heat* (*Proceedings Amsterdam*, vol. XIX, 1917, p. 1324).

Dans le second article, Lord Rayleigh reprend ce calcul pour le cas où le fluide aurait une loi de compressibilité quelconque

$$p = f(\rho).$$

Toujours pour l'incidence normale, il trouve alors que les ondes se réfléchissant sur une paroi exercent une pression supplémentaire

$$\Delta p = \mathrm{E}\left(1 + \frac{\rho f''}{2f'}\right), \tag{3}$$

la vitesse de propagation des ondes étant $\mathrm{V} = \sqrt{f'}$.

Lord Rayleigh calcule ensuite la quantité de mouvement liée à une onde; nous reviendrons plus loin sur ce calcul, qui prête à la critique.

Le résultat de l'auteur est le suivant : une onde se propageant dans une direction Ox avec une vitesse V transporte une quantité de mouvement dont la valeur, par unité de volume, est

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\rho f''}{2f'}\right)\frac{\mathcal{E}}{\mathrm{V}}. \tag{4}$$

Un autre mode de raisonnement très ingénieux, basé sur l'emploi du viriel, permet de retrouver la pression de radiation sous l'incidence normale, puis de calculer le cas plus général où des ondes de toutes directions, également réparties en tous sens, se réfléchissent sur un miroir. Si l'on appelle E la densité totale d'énergie de ces ondes, la pression sur le miroir s'écrit

$$\Delta p = \mathrm{E}\left(\frac{1}{3} + \frac{\rho f''}{2f'}\right). \tag{5}$$

b. Discussion. — En comparant les formules (3) (incidence normale) et (5) (toutes incidences), on ne peut manquer d'être frappé par le fait que, dans la formule (5), le facteur $\frac{1}{3}$ ne porte pas sur le coefficient $\frac{\rho f''}{2f'}$. Or, si la pression de radiation était due seulement à la variation de la quantité de mouvement de l'onde [d'après formule (4)] au moment de la réflexion, on devrait trouver un résultat différent; sous une incidence η, la pression serait réduite comme $\cos^2\eta$, et la

moyenne des pressions d'*ondes* de toutes directions s'obtiendrait en prenant $\overline{\cos^2\eta} = \frac{1}{3}$, ce qui donnerait

$$\Delta p = \frac{1}{3}\,\mathrm{E}\left(1 + \frac{\rho f''}{2f'}\right) \qquad \text{au lieu de} \qquad \mathrm{E}\left(\frac{1}{3} + \frac{\rho f''}{2f'}\right).$$

Il y a là une anomalie, qui n'a pas été remarquée par Lord Rayleigh. La cause en est facile à trouver. En reprenant pour le cas d'une incidence η le raisonnement qui a fourni à Rayleigh la formule (3), on trouve facilement

$$\overline{\Delta p} = 2\,\mathcal{E}\left(\cos^2\eta + \frac{\rho f''}{2f'}\right). \tag{6}$$

Cette formule concorde bien, pour l'incidence normale, avec la formule (3) et, pour la moyenne d'ondes de toutes directions, avec la formule (5).

Mais alors, il doit y avoir une erreur dans le calcul de la quantité de mouvement (4) transportée par une onde. Le raisonnement en est très critiquable. *La forme d'onde établie par Rayleigh est très particulière.* Les diverses parties de l'onde se propagent avec des vitesses différentes; l'onde se déforme en se propageant, tout à fait comme une vague qui déferle. On vérifiera enfin que l'ensemble du fluide est animé d'une vitesse moyenne non nulle :

$$\overline{u} = \frac{\mathrm{V}}{\rho_0}\left(\frac{f''_0}{2f'_0} - \frac{1}{\rho_0}\right)\overline{\theta^2} \neq 0,$$

θ étant la dilatation cubique; il est donc hors de doute que l'évaluation de la quantité de mouvement transportée par l'onde de Rayleigh est inexacte. On peut, très simplement, reprendre ce calcul. Pour une onde plane en propagation normale suivant Ox, sans déformation, on doit avoir, si u est la vitesse suivant Ox,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\mathrm{V}}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Or, on a toujours

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div} u = \frac{\partial u}{\partial x};$$

d'où finalement

$$\theta = -\frac{u}{\mathrm{V}}. \tag{7}$$

La quantité de mouvement d'un cylindre de base 1^{cm^2} et de hauteur x_1 s'écrit

$$(8) \qquad \mathbf{M}_x = \int_0^{x_1} \rho\, u\, dx = \rho_0 \int_0^{x_1} (1-\theta)\, u\, dx = \frac{\rho_0}{V} \int_0^{x_1} u^2\, dx = \frac{\mathcal{E} x_1}{V},$$

$\mathcal{E}$ étant la densité d'énergie de l'onde. La quantité de mouvement transportée par une onde est donc donnée par sa densité d'énergie divisée par la vitesse de propagation.

Dans cette onde, les vitesses et dilatations varient proportionnellement, mais la pression suit sa loi propre

$$p = f(\rho) = f(\rho_0 - \rho_0\theta) = f_0 - f'_0\rho_0\theta + \frac{1}{2} f''_0 \rho_0^2 \theta^2 \ldots.$$

L'onde provoquera donc une augmentation de pression moyenne dans le liquide traversé

$$(9) \qquad \overline{p - p_0} = \frac{\rho_0^2}{2} f''_0 \overline{\theta^2} = \frac{\rho_0 f''_0}{2 f'_0}\, \mathcal{E}.$$

Ce qu'on observera, lors de la réflexion sur *une paroi plane*, sera la superposition des deux effets, l'augmentation (9) de la pression moyenne et la pression due à la variation de la quantité de mouvement (8), soit, au total :

$$(10) \qquad \Delta p = \mathrm{E}\cos^2\eta + \mathrm{E}\frac{\rho_0 f''_0}{2 f'_0}$$

($\mathrm{E} = 2\mathcal{E}$ = densité totale d'énergie des deux ondes).

Si le miroir réfléchissant est une palette immergée dans le liquide, l'effet observé sera différent. L'équilibre hydrostatique entre les diverses régions du liquide exigera que les pressions isotropes soient les mêmes en tous points. La densité moyenne ρ_0 dans le volume τ_0 traversé par les ondes sera différente de la densité ρ_1 dans le volume τ_1 au *repos* et de telle sorte que l'on ait l'égalité entre p_1 et $\bar{p}$, c'est-à-dire $p_0 + \frac{\rho f''}{2 f'}\,\mathcal{E}$. Sur la *palette réfléchissante immergée dans le liquide*, les pressions isotropes de part et d'autre étant égales, on observera seulement l'effet dû à la variation de quantité de mouvement, c'est-à-dire

$$(11) \qquad \Delta p = \mathrm{E}\cos^2\eta.$$

c. Ondes transversales ou longitudinales complètement diffusées (H.-A. Lorentz) (1). — Le calcul des pressions de radiations se trouve repris, implicitement, par Lorentz, à propos de la dilatation calorifique des solides. Le mode de calcul de l'auteur est basé sur la formule (1) de Rayleigh et les résultats peuvent s'écrire, tant pour les ondes longitudinales, que pour les ondes transversales *complètement diffusées :*

$$p = \mathrm{E}\left(\frac{1}{3} + \frac{d\log \mathrm{V}}{d\log \rho}\right), \tag{12}$$

E, densité d'énergie des ondes considérées; V, leur vitesse de propagation; ρ, densité du milieu.

Nous allons montrer comment on peut calculer la pression de radiation d'une onde isolée, tombant sur un miroir sous une incidence η. Nous retrouverons le résultat ci-dessus en prenant les moyennes.

d. Ondes élastiques réfléchies suivant une incidence donnée. — Considérons un volume solide parallélépipédique

$$0 < x < l_1, \qquad 0 < y < l_2, \qquad 0 < z < l_3;$$

nous supposerons comme conditions de surface celles que nous avons déjà introduites au Chapitre I (§ *c* et *d*) : déplacements perpendiculaires à la surface nuls, forces perpendiculaires non nulles, forces tangentes nulles, déplacements tangents non nuls.

Ce sont des conditions de réflexion qui permettent, comme nous l'avons déjà vu, de traiter séparément les ondes longitudinales et transversales. Nous avons calculé tous les modes de vibration propre d'un tel volume. Choisissons-en de particulièrement simples, qui correspondent à des ondes se propageant parallèlement au plan xOz et se réfléchissant sur les plans $z = 0$, $z = l_3$ sous des angles $\pm \eta$.

I. Un mode de vibrations de condensation, de ce genre, sera repré-

(1) H.-A. Lorentz, *Proc. Amst.*, t. XIX, 1917, p. 1324. — *Voir* aussi Försterling, *Ann. der Phys.*, t. XLVII, 1915, p. 1127.

senté par

$$\overrightarrow{D_1} = \operatorname{grad} P, \qquad P = \varphi_{mp}(t) \cos\frac{\pi m x}{l_1} \cos\frac{\pi p z}{l_3}, \tag{13}$$

avec les notations du Chapitre I [formule (8)]; l'angle η est donné par

$$\operatorname{tang}\eta = \frac{\frac{m}{l_1}}{\frac{p}{l_3}},$$

m et p entiers [Chap. I, p. 361, ligne 8].

II. Les vibrations transversales propres de ce genre seront de deux types; l'un vibre parallèlement à l'axe Oy, c'est-à-dire perpendiculairement au plan d'incidence (*cf.* I, 13)

$$D_{2y} = q(t) \cos\frac{\pi m x}{l_1} \cos\frac{\pi p z}{l_3}, \qquad D_x = D_z = 0. \tag{14}$$

III. L'autre vibre dans le plan d'incidence

$$\left\{\begin{aligned} D_{2x} &= \quad r(t)\,\frac{l_1}{\pi m} \sin\frac{\pi m x}{l_1} \cos\frac{\pi p z}{l_3}, \\ D_{2y} &= 0, \\ D_{2z} &= -\,r(t)\,\frac{l_3}{\pi p} \cos\frac{\pi m x}{l_1} \sin\frac{\pi p z}{l_3}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

On vérifie aisément que la condition de divergence nulle est satisfaite par ce mode de vibration.

Pour chercher la pression exercée par un de ces modes de vibration sur le plan $r = l_3$, nous calculerons les énergies potentielle U et cinétique T correspondant à cette vibration, dans tout le volume $v = l_1 l_2 l_3$.

Puis nous ferons subir au système une petite déformation q qui ne sera plus isotrope comme dans le cas de Lorentz, mais qui représentera un allongement de 1 à $1 + q$ de toutes les coordonnées et composantes *suivant* z. La tension Q correspondante sera donnée par la formule de Rayleigh

$$\overline{Q} = \overline{\frac{\partial(U - T)}{\partial q}}. \tag{1}$$

Cette tension Q est immédiatement reliée à la pression de radiation p sur la face $z = l_3$, car le travail élémentaire s'écrit

$$Q\,dq = -\bar{p}\,l_1 l_2\,dz = -\bar{p}\,l_1 l_2 l_3\,dq,$$

$$\bar{p} = -\frac{Q}{l_1 l_2 l_3}. \tag{16}$$

Examinons par exemple le cas de la vibration longitudinale I. Les formules (11) et (12) du Chapitre I nous donnent pour les énergies cinétique T et potentielle U du mouvement

$$U = V_l^2 \frac{M}{8}\left[\left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{l_3}\right)^2\right]^2 \varphi^2,$$

$$T = \frac{M}{8}\left[\left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{l_3}\right)^2\right] \dot{\varphi}^2.$$

Pour prendre les dérivées par rapport à q, nous supposerons φ et $\dot{\varphi}$ invariables, ainsi que M, masse du corps solide,

$$dq = d\log l_3 = d\log v = -d\log\rho,$$

v, volume spécifique; ρ, densité :

$$\frac{\partial}{\partial \log l_3}\log\left(\frac{\pi^2 m^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2 p^2}{l_3^2}\right) = \frac{-2\dfrac{\pi^2 p^2}{l_3^2}}{\dfrac{\pi^2 m^2}{l_1^2} + \dfrac{\pi^2 p^2}{l_3^2}} = -2\cos^2\eta. \tag{17}$$

Ceci nous donne aussitôt

$$\frac{\partial T}{\partial \log l_3} = -2T\cos^2\eta, \qquad \frac{\partial U}{\partial \log l_3} = U\left(\frac{\partial \log V_l^2}{\partial \log v} - 4\cos^2\eta\right). \tag{18}$$

Tenons compte de ce que T et U s'expriment en fonction de la densité d'énergie E_l des ondes longitudinales par

$$2T = 2U = E_l l_1 l_2 l_3$$

et les relations (1), (16) et (18) nous donnent

$$\bar{p} = E_l\left(\cos^2\eta + \frac{\partial \log V_l}{\partial \log\rho}\right). \tag{19}$$

Nous retrouvons les formules (6) ou (10) déjà établies plus haut. Le calcul se poursuivrait suivant une voie tout à fait analogue pour les

ondes transversales des deux types II et III. Le résultat est le même, la vitesse V_{tr} et la densité d'énergie E_{tr} pour ondes transversales remplaçant V_l et E_l de la formule (19).

e. Ondes électromagnétiques. — Nous allons voir que cette formule est d'une plus grande généralité encore, et s'applique aux ondes électromagnétiques. On sait que les formules générales de Mécanique s'appliquent à l'Électromagnétisme, à condition de considérer l'énergie électrique comme potentielle, et l'énergie magnétique comme cinétique. Prenons un volume $l_1 l_2 l_3$ limité par une surface réfléchissante, et cherchons les modes de vibration analogues à II et III; ils s'écrivent :

II *bis*. Champ électrique suivant Oy :

$$h_y = a(t) \sin \frac{\pi m x}{l_1} \sin \frac{\pi p z}{l_3}.$$

Le coefficient a nous servira de coordonnée.

Le champ magnétique devra apparaître comme proportionnel à $\dot{a}$, de telle sorte que l'énergie magnétique, proportionnelle à $\dot{a}^2$, ait l'aspect d'une force vive.

C'est donc par les deux relations suivantes que nous formerons $\vec{H}$:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = k \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \vec{H} = 0;$$

ceci donne

$$(20) \quad \begin{cases} H_x = -k \dfrac{\dfrac{l_1}{\pi m}}{\dfrac{l_1}{\pi m}\dfrac{\pi p}{l_3} + \dfrac{l_3}{\pi p}\dfrac{\pi m}{l_1}} \sin \dfrac{\pi m x}{l_1} \cos \dfrac{\pi p z}{l_3} \dot{a}(t), \\ H_y = 0, \\ H_z = +k \dfrac{\dfrac{l_3}{\pi p}}{\dfrac{l_1}{\pi m}\dfrac{\pi p}{l_3} + \dfrac{l_3}{\pi p}\dfrac{\pi m}{l_1}} \cos \dfrac{\pi m x}{l_1} \sin \dfrac{\pi p z}{l_3} \dot{a}(t). \end{cases}$$

L'énergie potentielle U (énergie électrique) s'écrira donc

$$U = \iiint \frac{kh^2}{8\pi}\, dx\, dy\, dz = \frac{l_1 l_2 l_3}{8\pi}\,\frac{k}{4}\,a^2. \tag{21}$$

L'énergie cinétique T (énergie magnétique) aura la forme

$$T = \iiint \frac{\mu H^2}{8\pi}\, dx\, dy\, dz = \frac{l_1 l_2 l_3}{8\pi}\,\frac{\mu k^2}{4}\,\frac{\left(\frac{l_1}{\pi m}\right)^2 + \left(\frac{l_3}{\pi p}\right)^2}{\left(\frac{l_1}{\pi m}\,\frac{\pi p}{l_3} + \frac{l_3}{\pi p}\,\frac{\pi m}{l_1}\right)^2}\,\dot{a}^2,$$

$$T = \frac{l_1 l_2 l_3}{8\pi}\,\frac{\mu k^2}{4}\,\frac{1}{\left(\frac{\pi p}{l_3}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2}\,\dot{a}^2.$$

Les dérivées se calculent aisément :

$$\frac{\partial U}{\partial \log l_3} = U\left(1 + \frac{d\log k}{d\log \rho}\right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \log l_3} = T\left[1 + \frac{d\log \mu k^2}{d\log \rho} + 2\,\frac{\left(\frac{\pi p}{l_3}\right)^2}{\left(\frac{\pi p}{l_3}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2}\right]$$

$$= T\left(1 + \frac{d\log \mu k^2}{d\log \rho} + 2\cos^2\eta\right).$$

On en tire la valeur de $\overline{Q}$, en tenant compte des relations

$$\overline{T} = \overline{U} = \frac{1}{2} E l_1 l_2 l_3.$$

Si E est la densité d'énergie totale moyenne des vibrations

$$Q = E l_1 l_2 l_3\left(-\cos^2\eta - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log \mu k}{\partial \log \rho}\right) = -E l_1 l_2 l_3\left(\cos^2\eta + \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log V^2}{\partial \log \rho}\right), \tag{22}$$

car

$$\log \mu k = -\log V^2, \qquad \log \rho = -\log \rho,$$

V, vitesse de propagation. Et nous retrouvons bien pour p la formule générale donnée par (19).

III *bis*. Le calcul se ferait sans plus de difficulté pour l'autre polarisation possible, c'est-à-dire le vecteur électrique dirigé parallèlement

au plan zOx. Ce mode de vibration s'écrit :

$$\begin{aligned}
h_x &= a(t)\frac{l_1}{\pi m}\cos\frac{\pi m x}{l_1}\sin\frac{p\pi z}{l_3},\\
h_y &= 0,\\
h_z &= -a(t)\frac{l_3}{\pi p}\sin\frac{\pi m x}{l_1}\cos\frac{\pi p z}{l_3};\\
\mathbf{H}_x &= 0,\\
\mathbf{H}_y &= k\frac{l_1}{\pi m}\frac{l_3}{\pi p}\cos\frac{\pi m x}{l_1}\cos\frac{\pi p z}{l_3}\dot{a}(t),\\
\mathbf{H}_z &= 0.
\end{aligned}$$

Nous ne reprendrons pas ce calcul qui ramène encore à la formule (19), tout comme dans le cas précédent.

f. Pression de radiation déduite de la formule de Boltzmann. — La formule (19) est valable pour tous les types d'onde. Le résultat s'explique, et je veux donner une démonstration unique, valable dans tous les cas, en m'appuyant sur la formule de Boltzmann [Chap. II, formules (22) et (22 *bis*)].

Je profiterai de la souplesse du raisonnement pour étendre encore un peu la généralité du problème. Dans tous les cas traités précédemment, je supposais la vitesse de propagation des ondes indépendante de la fréquence ν; je vais désormais supposer que la vitesse est fonction de cette fréquence ν.

Dans la dilatation d'un système vibrant, le travail recueilli (1) s'écrit

$$\Delta\mathfrak{C} = \mathrm{E}\,l_1 l_2 l_3\,\Delta\log\tau = -\,\mathrm{E}\,l_1 l_2 l_3\,\Delta\log\nu. \tag{23}$$

Ceci n'est autre que notre formule de Boltzmann.

En introduisant la pression de radiation p, on aura

$$\Delta\mathfrak{C} = -\,p\,dv = -\,pv\,d\log l_3 \qquad (v = l_1 l_2 l_3),$$

puisque v et l_3 varient proportionnellement. Portons cette valeur

(1) Je récris cette formule avec les notations adoptées dans ce Chapitre où E signifie la densité d'énergie, et $\mathrm{E}\,l_1 l_2 l_3$ est l'énergie totale, que j'appelais E au Chapitre II.

dans (23) et nous obtenons

$$p = -\,\mathrm{E}\,\frac{d\log\nu}{d\log l_3}. \tag{24}$$

Il nous faut évaluer cette dérivée.

Or, dans tous les cas examinés précédemment (§ *d* et *e*), la fréquence ν est donnée par la formule [Chap. I, formules (10) et (16)]

$$\nu = \frac{\mathrm{V}}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n}{l_2}\right)^2+\left(\frac{p}{l_3}\right)^2}.$$

Pour une dilatation de l'arête l_3 nous trouvons [*voir* ce Chapitre, formule (17)]

$$\frac{d\log\frac{\nu}{\mathrm{V}}}{d\log l_3} = -\,\frac{\left(\frac{p}{l_3}\right)^2}{\left(\frac{m}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n}{l_2}\right)^2+\left(\frac{p}{l_3}\right)^2} = -\cos^2\alpha. \tag{25}$$

La différentiation ci-dessus est maintenant à développer, en tenant compte de ce que *la vitesse* V *dépend de* l_3 *directement et aussi de la fréquence* ν.

Nous avons, en prenant deux variables indépendantes ν et l_3,

$$d\log\frac{\nu}{\mathrm{V}} = \frac{\partial\log\frac{\nu}{\mathrm{V}}}{\partial\log\nu}\,d\log\nu + \frac{\partial\log\frac{\nu}{\mathrm{V}}}{\partial\log l_3}\,d\log l_3.$$

La première dérivée s'écrit, en introduisant la vitesse de groupe U,

$$\frac{\partial\log\frac{\nu}{\mathrm{V}}}{\partial\log\nu} = \mathrm{V}\,\frac{\partial\frac{\nu}{\mathrm{V}}}{\partial\nu} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}}.$$

Dans la seconde dérivée, ν est à considérer comme constant, puisque ν et l_3 sont supposés indépendants :

$$\frac{\partial\log\frac{\nu}{\mathrm{V}}}{\partial\log l_3} = -\,\frac{\partial\log\mathrm{V}}{\partial\log l_3}.$$

Introduisons maintenant la liaison entre ν et l_3 et nous trouvons

$$\frac{d\log\frac{\nu}{V}}{d\log l_3} = \frac{V}{U}\frac{d\log\nu}{d\log l_3} - \frac{\partial\log V}{\partial\log l_3}. \tag{26}$$

Cette expression est, d'après (25), égale à $-\cos^2\eta$. Nous en tirons donc

$$\frac{d\log\nu}{d\log l_3} = \frac{U}{V}\left(\frac{\partial\log V}{\partial\log l_3} - \cos^2\eta\right).$$

Portons cette valeur dans (24), et nous obtenons la formule absolument générale

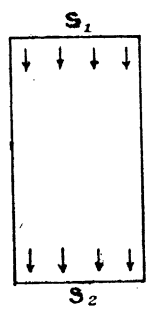
$$p = \frac{U}{V}E\left(\cos^2\eta + \frac{\partial\log V}{\partial\log\rho}\right) \tag{27}$$

(en tenant compte de ce que $d\log\rho = -d\log l_3$).

Cette formule (27) se réduit bien à la formule (19) dans tous les cas où la vitesse V est indépendante de la fréquence ν, car on a alors $V = U$.

g. Émission et absorption. — Il nous reste à trouver la pression sur des plans émetteurs ou absorbants; c'est ce que des raisonnements tout à fait élémentaires permettent d'obtenir immédiatement.

Fig. 5.



Considérons un volume cylindrique terminé par deux sections normales S_1, S_2. Ce volume est rempli d'un corps capable de propager des ondes d'un type quelconque.

Nous aurons à écrire que, lorsque le corps est traversé par des ondes, la résultante des pressions sur les différentes faces est nulle; le volume reste, au total, au repos.

1° La paroi S_2 est un miroir parfait.

La paroi S_1 émet des ondes normalement à la surface et absorbe complètement les ondes réfléchies qui lui reviennent.

Soit ε la densité d'énergie du rayonnement émis par S_1, la pression à l'émission étant p_e^n et à l'absorption p_a^n sous incidence normale. L'équilibre exige

$$p_a^n + p_e^n = p_r^n,$$

p_r^n étant la pression à la réflexion normale.

2° S_1 est émetteur et S_2 absorbant.

L'équilibre exige

$$p_a^n - p_e^n = 0;$$

d'où finalement

$$p_a^n = p_e^n = \frac{1}{2} p_r^n = \varepsilon\left(1 + \frac{\partial \log V}{\partial \log \rho}\right). \tag{28}$$

Le calcul de la pression lors de l'émission ou l'absorption d'une onde oblique n'est guère plus compliqué.

Considérons une portion de cylindre ayant ses génératrices parallèles à Oz. La base du cylindre est le rectangle

$$0 < x < a, \qquad 0 < y < b.$$

La portion de cylindre est limitée supérieurement par un plan parallèle à Oy et faisant avec Ox un angle η.

Les parois verticales du cylindre sont réfléchissantes.

Je suppose qu'une onde plane, de densité d'énergie ε, est émise normalement par le plan xOy. Elle est absorbée complètement par le plan supérieur, sur lequel elle tombe sous l'incidence η. Il se développera sur le plan absorbant une pression normale p_n et une force tangentielle par unité de surface p_t dirigée dans le sens de la propagation. Ces deux pressions p_n, p_t sont à calculer. Les forces résultantes X, Y, Z sur le volume total doivent s'annuler; ceci donne :

$$Z = -ab\varepsilon\left(1 + \frac{\partial \log V}{\partial \log \rho}\right) + \frac{ab}{\cos\eta}(p_n \cos\eta + p_t \sin\eta) = 0,$$

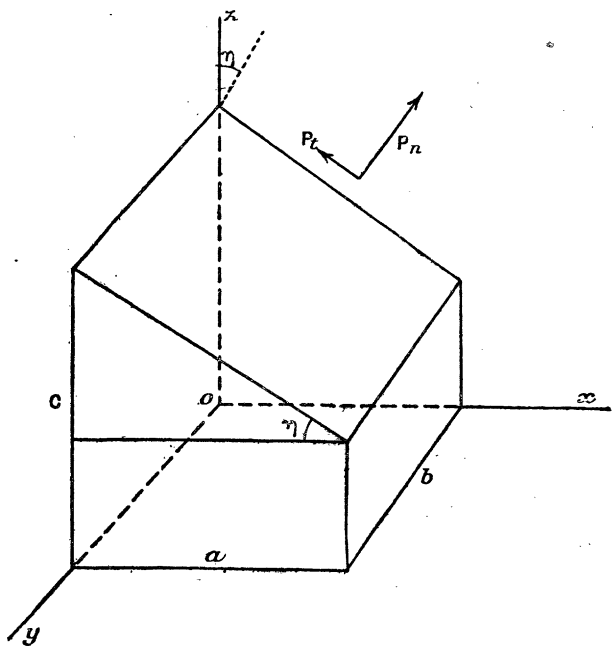
$$Y = 0 \quad \text{par symétrie},$$

$$X = -bc\varepsilon \frac{\partial \log V}{\partial \log \rho} + b(c - a \operatorname{tang}\eta)\varepsilon \frac{\partial \log V}{\partial \log \rho} + \frac{ab}{\cos\eta}(p_n \sin\eta - p_t \cos\eta) = 0.$$

On tire aisément de ces relations

$$(29)\qquad \begin{cases} p_n = \mathcal{E}\left(\cos^2\eta + \dfrac{\partial \log V}{\partial \log \rho}\right), \\ p_t = \mathcal{E}\cos\eta\sin\eta. \end{cases}$$

Fig. 5.



Tous nos résultats peuvent finalement se grouper en un seul énoncé, valable pour ondes élastiques, longitudinales ou transversales, et pour ondes électromagnétiques se propageant dans un milieu isotrope.

1° Lorsqu'une onde se propage avec une vitesse V dans un milieu de densité ρ, elle produit une augmentation de la pression moyenne isotrope donnée par la formule

$$(30)\qquad \Delta p = \mathcal{E}\frac{\partial \log V}{\partial \log \rho},$$

$\mathcal{E}$ étant la densité d'énergie de l'onde.

2° Cette onde transporte une quantité de mouvement; la quantité de

mouvement présente à un instant donné dans un volume $d\tau$ est

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \mathcal{E}\overrightarrow{V^{-1}}d\tau. \tag{31}$$

Ces résultats sont intéressants par leur généralité. De nombreuses inexactitudes ont d'ailleurs été dites sur ce sujet :

A propos de la pression des ondes électromagnétiques, on ne tient compte, en général, que de la quantité de mouvement transportée par l'onde, et l'on oublie le terme fixe.

A propos de la quantité de mouvement d'ondes élastiques, on trouve dans Lord Rayleigh une évaluation inexacte.

Dans leurs calculs au sujet de la dilatation des corps solides ou liquides, en fonction de la température, P. Debye, van Everdingen, Ornstein (1), Zernike, ont évalué incorrectement la pression de radiation, en tenant compte seulement de l'augmentation de pression moyenne, et oubliant l'effet des quantités de mouvement des ondes. Une erreur s'est aussi glissée dans les calculs de M. M. Brillouin à ce sujet. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point en exposant la théorie de la dilatation calorifique.

La seule valeur correcte est celle donnée par H.-A. Lorentz (*loc. cit.*).

CHAPITRE VI.

LOI DES ÉTATS CORRESPONDANTS. — CHALEURS SPÉCIFIQUES. — DILATATION.

A partir de ce Chapitre, je suppose toujours que les milieux étudiés sont sans dispersion, c'est-à-dire que la vitesse V est indépendante de la fréquence ν et la vitesse de groupe U égale à V.

a. Une remarque de Rayleigh (2), dans son premier article sur la pression de radiation, mérite d'être notée. Il rappelle que la démonstration de la loi de Stefan est basée sur la valeur de la pression de radiation.

---

(1) *Proceedings Amsterdam*, vol. IX et X, 1917.

(2) FÖRSTERLING (*Ann. der Physik*, 1915, *loc. cit.*) a noté l'intérêt que présente cette remarque de Rayleigh, mais l'extension qu'il en donne est incomplète et inexacte.

En effet, soit

$$p = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{E}}{v} = \frac{1}{n}\mathcal{E},$$

E, l'énergie totale de radiation; v, le volume; $\mathcal{E}$, la densité d'énergie.

Pour une petite déformation dv et une variation de température $d\mathrm{T}$, le travail et la variation d'énergie interne sont

$$d\mathcal{C} = p\,dv, \qquad d\mathrm{E} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{T}}d\mathrm{T} + \mathrm{E}\frac{dv}{v},$$

en supposant la densité d'énergie $\mathcal{E}$ fonction seulement de la température et indépendante du volume.

La variation d'entropie s'écrit alors

$$d\mathrm{S} = \frac{1}{\mathrm{T}}(p+\mathcal{E})\,dv + \frac{v}{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathrm{T}}d\mathrm{T}.$$

Écrivant que $d\mathrm{S}$ est une différentielle exacte et remplaçant p par son expression, on trouve

$$d\log\mathcal{E} = (n+1)\,d\log\mathrm{T},$$

d'où

$$\mathcal{E} = a\,\mathrm{T}^{n+1}.$$

Pour les radiations électromagnétiques dans le vide, on a $n = 3$, ce qui donne la loi de Stefan. Mais il semble que ce même raisonnement, appliqué aux corps pour lesquels nous avons trouvé n différent de 3, doive donner, d'une façon absolument générale, la loi de variation de l'énergie interne en fonction de la température. J'ai donc repris ce raisonnement, qui m'a permis de retrouver, par une voie purement thermodynamique, une grande partie des résultats de Debye sur les chaleurs spécifiques et la théorie générale des solides et liquides.

Tout d'abord, dans les corps solides ou liquides, l'énergie interne (rapportée à la molécule-gramme, par exemple) d'agitation thermique E ne peut plus être considérée comme fonction uniquement de la température. C'est une fonction de T, du volume spécifique, et des déformations élémentaires.

Il y a, en outre, à tenir compte de l'énergie potentielle interne, qui représente le travail effectué pour comprimer le corps depuis un volume de référence jusqu'à son volume actuel et sa déformation actuelle; tout ceci complique notablement les calculs.

Enfin le coefficient n, que nous avons calculé, dépend de la loi de compressibilité du corps; il est donc lui-même fonction du volume spécifique.

Nous allons voir comment peut se traiter un cas simple, celui d'un corps capable de propager un seul type d'ondes. Ce sera, par exemple, le cas d'un liquide compressible, conducteur de l'électricité; ce liquide ne peut propager que des ondes du type élastique de compression.

b. Liquide. — Soient v le volume de la molécule-gramme et $F(v)$ l'énergie potentielle interne par molécule-gramme en supposant les molécules au repos, c'est-à-dire le corps au zéro absolu. La loi de compressibilité élémentaire, en l'absence d'agitation thermique est

$$p = -\frac{\partial F}{\partial v} = -F'(v). \tag{1}$$

La vitesse de propagation des ondes longitudinales est V_l donnée par la formule

$$V_l^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = -v^2 \frac{\partial p}{\partial v} = v^2 F''(v). \tag{2}$$

Si, à une température T, l'énergie d'agitation est $E(v, T)$ par molécule-gramme, la pression totale exercée sur le milieu extérieur par le corps est

$$p = -F'(v) + \frac{E}{v}\left(\frac{1}{3} - \frac{\partial \log V^2}{2\,\partial \log v}\right); \tag{3}$$

c'est la superposition de la pression statique et de la pression de radiation. La formule que nous obtenons ainsi immédiatement n'est autre que « l'équation d'état du corps liquide » (ou solide) trouvée par Debye et Ratnowsky (1), qui l'ont obtenue par une voie très détournée, comme conséquence de leur théorie des chaleurs spécifiques. Ratnowsky l'écrit

$$[p + F'(v)]v = -E\frac{d \log \nu_m}{d \log v}, \tag{3 bis}$$

(1) P. Debye, *Göttinger Wolfskehl Vortrag*, 1913. — S. Ratnowsky, *Ann. der Phys.*, t. XXXVIII, p. 637; *Verh. d. D. Phys. Ges.*, t. XV, 1913, p. 75.

où ν_m a la valeur suivante :

$$\nu_m = \mathrm{V}\left(\frac{9\mathrm{N}}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}},$$

N étant le nombre d'Avogadro. Ceci donne

$$-\frac{d\log\nu_m}{d\log\rho} = \frac{1}{3} - \frac{\partial\log\mathrm{V}}{\partial\log\rho}$$

en concordance avec notre formule.

Le calcul de Ratnowsky se réduit donc à une simple évaluation correcte de la pression de radiation moyenne.

Dans l'application de cette formule, il semble que les différents auteurs aient souvent oublié le coefficient fixe $\frac{1}{3}$ pour ne tenir compte que du terme en $\frac{\partial\log\mathrm{V}}{\partial\log\rho}$, qui dépend des écarts à la loi de Hooke.

c. Mon raisonnement consiste à partir de cette formule, et, par voie thermodynamique, à en tirer des résultats tout à fait généraux sur la théorie des solides.

La formule s'écrit, en introduisant F″ au lieu de V,

$$p = -\mathrm{F}'(\rho) - \frac{\mathrm{E}}{\rho}\left(\frac{2}{3} + \frac{\partial\log\mathrm{F}''}{2\,\partial\log\rho}\right). \tag{4}$$

L'énergie interne totale du corps est

$$\mathrm{U}(\rho, \mathrm{T}) = \mathrm{E}(\rho, \mathrm{T}) + \mathrm{F}(\rho). \tag{5}$$

J'effectue maintenant une petite transformation $d\rho$, $d\mathrm{T}$; le travail élémentaire et la variation d'énergie interne valent

$$d\mathfrak{T} = p\,d\rho = -\mathrm{F}'d\rho - \mathrm{E}\frac{d\rho}{\rho}\left(\frac{2}{3} + \frac{\partial\log\mathrm{F}''}{2\,\partial\log\rho}\right),$$

$$d\mathrm{U} = \frac{\partial\mathrm{E}}{\partial\rho}d\rho + \mathrm{F}'d\rho + \frac{\partial\mathrm{E}}{\partial\mathrm{T}}d\mathrm{T}.$$

Je trouve pour la variation d'entropie l'expression

$$d\mathrm{S} = \frac{d\mathrm{U} + d\mathfrak{T}}{\mathrm{T}} = \frac{d\rho}{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial\rho} - \frac{\mathrm{E}}{\rho}\left(\frac{2}{3} + \frac{\partial\log\mathrm{F}''}{2\,\partial\log\rho}\right)\right] + \frac{\partial\mathrm{E}}{\partial\mathrm{T}}\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}}.$$

Je dois écrire que dS est une différentielle exacte, ceci me donne la relation

$$(6) \qquad v\frac{\partial E}{\partial v} - E\left(\frac{2}{3} + \frac{\partial \log F''}{2\,\partial \log v}\right) + T\frac{\partial E}{\partial T}\left(\frac{2}{3} + \frac{\partial \log F''}{2\,\partial \log v}\right) = 0.$$

Cette équation se met sous une forme plus simple, en introduisant une variable Θ

$$(7) \qquad \Theta = A v^{\frac{2}{3}} F''^{\frac{1}{2}},$$

$$\log\Theta = \frac{2}{3}\log v + \frac{1}{2}\log F'' + \log A.$$

L'équation devient alors

$$(8) \qquad \frac{\partial \log E}{\partial \log \Theta} + \frac{\partial \log E}{\partial \log T} - 1 = 0.$$

Par le changement de fonctions et variables

$$f = \log E, \qquad x = \log\Theta, \qquad y = \log T,$$

j'écris l'équation sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 1.$$

Pour cette équation linéaire avec second membre, la solution générale s'obtient en ajoutant une solution particulière ($f = x$) à la solution générale de l'équation sans second membre

$$f = F(x - y).$$

Ceci me donne

$$f = x + F(x - y),$$

où F est une fonction arbitraire quelconque. En repassant aux variables primitives, je trouve

$$\log E = \log\Theta + F(\log\Theta - \log T),$$

ce qui donne

$$(9) \qquad E = \Theta\Phi\left(\frac{\Theta}{T}\right).$$

La fonction Φ est une fonction arbitraire, c'est-à-dire que les propriétés spéciales du corps étudié cessent d'intervenir pour la déter-

mination de cette fonction Φ; seules des lois plus générales peuvent permettre de la préciser. Il est donc légitime d'affirmer que, pour tous les corps de même nature, la fonction Φ sera la même, et nous arrivons à la loi suivante :

d. Loi des températures correspondantes. Cas du liquide. — Soient E l'énergie interne d'agitation moléculaire, rapportée à la molécule-gramme, et Θ une température de référence déterminée pour chaque corps par la relation générale

$$\Theta = A\rho^{\frac{2}{3}} F'^{\frac{1}{2}} = A\rho^{-\frac{1}{3}} V,$$

A, coefficient universel;
V, vitesse de propagation des ondes.

L'énergie d'agitation moléculaire E doit être de la forme

$$\frac{E}{\Theta} = \text{fonction universelle de } \left(\frac{\Theta}{T}\right). \tag{9}$$

Je trouve cette loi comme absolument générale, nécessitée simplement par l'application de la Thermodynamique classique et la formule de pression de radiation.

C'est la loi des températures correspondantes que P. Debye (1) avait indiquée sur un cas particulier, au moyen de raisonnements par quanta.

Nous pouvons aussi bien donner maintenant l'expression de la *densité d'énergie :*

$$\mathcal{E} = \frac{E}{\rho} = \frac{\Theta^4}{A^3 V^3}\Phi\left(\frac{\Theta}{T}\right) = \frac{T^4}{A^3 V^3}\left(\frac{\Theta}{T}\right)^4 \Phi\left(\frac{\Theta}{T}\right). \tag{10}$$

Cette formule constitue la généralisation de la loi de Stefan.

Je justifierai plus loin l'affirmation, qui peut paraître un peu rapide, du caractère universel de la fonction Φ, et déterminerai cette fonction par les lois générales du rayonnement.

Il est remarquable de noter que, par ce raisonnement tout à fait

(1) P. DEBYE, *Ann. der Physik*, 4e série, t. XXXIX, 1912, p. 798.

général, je fais apparaître nécessairement, en facteur de la densité d'énergie, le coefficient $\frac{1}{V^3}$ qui est prévu par la loi de Kirchhoff.

La *chaleur moléculaire du corps, à volume constant*, est (par molécule-gramme)

$$\frac{\partial E}{\partial T} = -\left(\frac{\Theta}{T}\right)^2 \Phi'\left(\frac{\Theta}{T}\right) = M c_v \tag{11}$$

(M, masse moléculaire; c_v, chaleur spécifique pour 1^g du corps), c'est une fonction universelle du rapport $\frac{\Theta}{T}$.

Sous l'influence de la pression de radiation, le corps échauffé sous pression constante se dilatera. Nous obtiendrons facilement *la variation de volume en fonction de la température*, en écrivant que la pression extérieure totale reste constante :

$$p = p_0 = \text{const.}$$

Considérons le cas où la pression extérieure est nulle, et nous trouvons [formule (4)] le résultat général

$$F'(v) + \frac{E}{v}\left(\frac{2}{3} + \frac{\partial \log F''}{2\,\partial \log v}\right) = 0. \tag{12}$$

La parenthèse s'écrit

$$\frac{\partial \log \Theta}{\partial \log v}.$$

Développons F′ en mettant en évidence la dilatation cubique δ :

$$F' = F'_0 + (v - v_0) F''_0 = F'_0 + \delta v_0 F''_0;$$

mais F'_0 est nul, puisque, au zéro absolu, nous supposons la pression extérieure nulle. Et nous obtenons la dilatation δ, à partir du zéro absolu, par la formule approchée, à basse température,

$$\delta = -\frac{E}{v_0^2 F''_0}\frac{\partial \log \Theta}{\partial \log v_0}. \tag{12 bis}$$

La dilatation (¹) n'est pas proportionnelle à la température, mais

(¹) Dans de récents articles, Grüneisen développe, à partir du résultat général (12), une formule de dilatation approchée qui serait applicable dans un intervalle étendu de

proportionnelle à l'énergie d'agitation E. Cette formule n'est valable qu'aux très basses températures. Rappelons encore que le facteur $\frac{\partial \log \Theta}{\partial \log v}$ contient un terme constant $\frac{1}{3}$, même en l'absence d'écarts à la loi de Hooke.

On calculerait aussi sans peine la chaleur spécifique à pression constante, en tenant compte de la dilatation dans l'expression de l'énergie interne.

Nous terminerons en donnant l'expression de *l'entropie* (par molécule-gramme) :

$$(13) \qquad S = \int_0^{\frac{\Theta}{T}} x\Phi'(x)\,dx + \text{const.} = \frac{\Theta}{T}\Phi\left(\frac{\Theta}{T}\right) - \int_0^{\frac{\Theta}{T}} \Phi(x)\,dx + \text{const.}$$

Les résultats précédents ont été établis pour un liquide conducteur de l'électricité, capable de propager des ondes élastiques seulement. Si le liquide est transparent, il pourra être aussi le siège d'ondes électromagnétiques. On pourra néanmoins continuer à lui appliquer les formules précédentes, car la densité d'énergie des ondes électromagnétiques est tout à fait négligeable devant la densité d'énergie des ondes élastiques, par suite du facteur $\frac{1}{V^3}$ qui y intervient.

e. Corps solide. — Pour le corps solide, il y aurait à tenir compte séparément des deux types d'ondes élastiques et introduire dans l'expression de l'énergie potentielle les diverses déformations. Je n'aborderai pas ici ce sujet sous son aspect le plus général, mais je me contenterai d'examiner le cas où le corps solide ne subit que des déformations isotropes.

L'énergie potentielle du corps sous un volume v pourra s'écrire, comme dans le cas précédent, comme fonction de ce volume seul; soit $F(v)$ la valeur de cette énergie potentielle, calculée en supposant les molécules au repos dans leur position d'équilibre, c'est-à-dire l'absence de toute agitation thermique.

---

température. Cette formule est justifiée pour des liquides; l'appliquer aux solides ne peut constituer qu'une approximation assez grossière. Il faudrait tenir compte des ondes transversales et longitudinales séparément (*cf.* E. GRÜNEISEN, *Ann. der Physik*, t. XXXIX, 1912, p. 257; t. LV, 1918, p. 371, et t. LVIII, 1919, p. 753).

Le corps est capable de propager des ondes élastiques de deux types, longitudinal et transversal. Soient E_l et E_{tr} les énergies de ces ondes par molécule-gramme; V_l et V_{tr} leurs vitesses de propagation. La pression totale exercée par le corps sur l'extérieur s'écrira

$$(14) \qquad p = -F'(v) + \frac{E_l}{v}\left(\frac{1}{3} - \frac{\partial \log V_l}{\partial \log v}\right) + \frac{E_{tr}}{v}\left(\frac{1}{3} - \frac{\partial \log V_{tr}}{\partial \log v}\right).$$

Je pose

$$\Theta_{tr} = a V_{tr} v^{-\frac{1}{3}},$$
$$\Theta_l = a V_l v^{-\frac{1}{3}},$$

a étant une constante universelle.

La pression s'écrit

$$(14\,bis) \qquad p = -F'(v) - \frac{E_l}{v}\frac{\partial \log \Theta_l}{\partial \log v} - \frac{E_{tr}}{v}\frac{\partial \log \Theta_{tr}}{\partial \log v}.$$

Cette formule remplacera la formule de Ratnowsky, qui cesse d'être complète lorsqu'on l'applique au cas d'un corps solide, capable de propager deux types d'ondes différentes. L'énergie interne totale du corps, pour une molécule-gramme, prend la forme

$$(15) \qquad U = E_{tr} + E_l + F(v).$$

J'obtiens sans peine, comme dans le cas du liquide, l'expression de la variation d'entropie pour une petite transformation dT, dv :

$$dS = \frac{dv}{T}\left(\frac{\partial E_l}{\partial v} - \frac{E_l}{v}\frac{\partial \log \Theta_l}{\partial \log v}\right) + \frac{\partial E_l}{\partial T}\frac{dT}{T},$$
$$+ \frac{dv}{T}\left(\frac{\partial E_{tr}}{\partial v} - \frac{E_{tr}}{v}\frac{\partial \log \Theta_{tr}}{\partial \log v}\right) + \frac{\partial E_{tr}}{\partial T}\frac{dT}{T}.$$

Les termes relatifs aux ondes transversales et ceux relatifs aux ondes longitudinales se séparent. Pour écrire que dS est une différentielle exacte, je trouve alors deux équations séparées :

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \log E_l}{\partial \log \Theta_l} + \dfrac{\partial \log E_l}{\partial \log T} - 1 = 0, \\ \dfrac{\partial \log E_{tr}}{\partial \log \Theta_{tr}} + \dfrac{\partial \log E_{tr}}{\partial \log T} - 1 = 0; \end{cases}$$

Ce qui me donne finalement, en appliquant la méthode de résolution

indiquée pour l'équation (8),

$$(17)\qquad \begin{cases} E_l = \Theta_l \Phi_l\left(\dfrac{\Theta_l}{T}\right), \\ E_{tr} = \Theta_{tr} \Phi_{tr}\left(\dfrac{\Theta_{tr}}{T}\right). \end{cases}$$

f. Loi des états correspondants. Corps solide. — Les propriétés particulières du milieu et du type d'ondes apparaissant uniquement dans l'expression des Θ, il semble naturel, tout comme dans le cas de l'équation (8), de considérer les deux fonctions Φ_{tr} et Φ_l comme des fonctions universelles, analogues à la fonction Φ introduite dans le cas du liquide. Je justifierai cette affirmation à la fin du Chapitre et donnerai l'expression des fonctions Φ.

Nous trouvons l'*énergie d'agitation thermique* par molécule-gramme sous la forme

$$(17\ bis)\qquad E = \Theta_{tr} \Phi_{tr}\left(\frac{\Theta_{tr}}{T}\right) + \Theta_l \Phi_l\left(\frac{\Theta_l}{T}\right)$$

et la *densité d'énergie*

$$(18)\qquad \mathcal{E} = \frac{T^4}{a^3 V_{tr}^3}\left(\frac{\Theta_{tr}}{T}\right)^4 \Phi_{tr}\left(\frac{\Theta_{tr}}{T}\right) + \frac{T^4}{a^3 V_l^3}\left(\frac{\Theta_l}{T}\right)^4 \Phi_l\left(\frac{\Theta_l}{T}\right).$$

Les deux termes relatifs aux ondes longitudinales et transversales sont séparés. Chaque terme a, en facteur d'une fonction universelle de $\frac{\Theta}{T}$, le coefficient T^4 (loi de Stefan généralisée) et le coefficient V^{-3} (loi de Kirchhoff généralisée). Nous pourrons rapprocher cette expression des formules établies aux Chapitres III et IV par la loi de Kirchhoff. Ces formules montrent que, à vitesse de propagation et fréquence égales, les ondes transversales ont une densité d'énergie double de celle des ondes longitudinales. Ceci nous donnera

$$(19)\qquad \Phi_{tr} = 2\Phi_l,$$

ce qui a pour conséquence

$$(17\ ter)\qquad E = \Theta_l \Phi_l\left(\frac{\Theta_l}{T}\right) + 2\,\Theta_{tr} \Phi_l\left(\frac{\Theta_{tr}}{T}\right),$$

$$(18\ bis)\qquad \mathcal{E} = \frac{T^4}{a^3 V_l^3}\left(\frac{\Theta_l}{T}\right)^4 \Phi_l\left(\frac{\Theta_l}{T}\right) + 2\,\frac{T^4}{a^3 V_{tr}^3}\left(\frac{\Theta_{tr}}{T}\right)^4 \Phi_l\left(\frac{\Theta_{tr}}{T}\right).$$

L'entropie par molécule-gramme s'écrit

$$S = \int_0^{\frac{\Theta_l}{T}} x\Phi_l'(x)\,dx + 2\int_0^{\frac{\Theta_{tr}}{T}} x\Phi_l'(x)\,dx. \tag{20}$$

La chaleur spécifique à volume constant c_v a pour valeur

$$Mc_v = -\left(\frac{\Theta_l}{T}\right)^2\Phi_l'\left(\frac{\Theta_l}{T}\right) - 2\left(\frac{\Theta_{tr}}{T}\right)^2\Phi_l'\left(\frac{\Theta_{tr}}{T}\right), \tag{21}$$

M, masse moléculaire.

Ce facteur intervient, car on représente en général par c_v la chaleur spécifique, c'est-à-dire la chaleur rapportée à 1^g du corps.

La dilatation, à partir du zéro absolu, sous pression extérieure nulle, aura pour expression approchée à basse température

$$\frac{dv}{v} = \delta = -\frac{1}{v_0^2 F_0''}\left(E_{tr}\frac{\partial \log \Theta_{tr}}{\partial \log v_0} + E_l\frac{\partial \log \Theta_l}{\partial \log v}\right). \tag{22}$$

J'ai obtenu ces résultats par voie uniquement thermodynamique classique. Ils sont donc valables en toute généralité, quelle que soit la forme adoptée pour la fonction universelle Φ.

g. Résumé. — J'ai trouvé, et c'est là un point à noter, que pour le corps solide, les termes relatifs aux ondes longitudinales et aux ondes transversales, doivent se séparer dans toutes les formules. Les deux températures de référence sont définies par

$$\Theta_l = aV_l v^{-\frac{1}{3}}, \qquad \Theta_{tr} = aV_{tr} v^{-\frac{1}{3}},$$

a, coefficient universel;

V_l, V_{tr}, vitesses de propagation des ondes longitudinales et transversales;

v, volume de la molécule-gramme.

Rappelons que le point de départ de notre raisonnement est l'expression de la pression de radiation moyenne des ondes, expression obtenue par un raisonnement purement mécanique.

La seule hypothèse introduite est celle, très logique, qui consiste à admettre que l'agitation thermique d'un corps peut se décomposer

suivant toutes les vibrations propres du corps. Nous pouvons dire, ce qui revient au même, que nous avons admis que l'agitation thermique était analysable en ondes élastiques se propageant en tous sens dans le milieu, ondes auxquelles sont applicables les lois générales d'élasticité.

Une hypothèse restrictive a consisté à ne pas tenir compte de la fréquence de ces ondes et à admettre que toutes les ondes ont une vitesse uniforme de propagation, quelles que soient leurs fréquences.

Le raisonnement pourrait d'ailleurs se généraliser, si l'on voulait tenir compte d'une dispersion, c'est-à-dire d'une variation de la vitesse V en fonction de la fréquence; mais, jusqu'à présent, il n'a pas été nécessaire d'introduire une telle hypothèse.

h. Interprétation. Fréquences limites. — La théorie de P. Debye (1) pour les chaleurs spécifiques va maintenant nous apparaître comme cas particulier de nos résultats généraux et nous permettre de fixer la forme des fonctions universelles $\Phi\left(\frac{\Theta}{T}\right)$, $\Phi_l\left(\frac{\Theta}{T}\right)$.

Nous avons étudié au Chapitre III l'énergie que prennent, dans un corps à température T, les ondes élastiques de fréquence ν (à $d\nu$ près).

Nous avons démontré la loi de Kirchhoff généralisée et trouvé que la densité d'énergie des ondes élastiques longitudinales doit s'écrire

$$\mathcal{E}_l d\nu = \frac{4\pi\nu^3}{V_l^3} F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu. \tag{23}$$

la densité des ondes élastiques transversales étant

$$\mathcal{E}_{tr} d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{V_{tr}^3} F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu,$$

V_{tr}, vitesse des ondes transversales;
V_l, vitesse des ondes longitudinales.

---

(1) P. DEBYE, *Ann. der Physik*, 4e série, t. XXXIX, 1912, p. 789. — Autres références antérieures : A. EINSTEIN, *Ann. der Physik*, t. XXII, 1907, p. 180; t. XXXV, 1911, p. 679. — NERNST et LINDEMANN, *Berl. Ber.*, 1910, p. 26, et *Zeitschr. f. Elektrochemie*, 1911, p. 817.

La fonction $F\left(\frac{\nu}{T}\right)$ est une fonction universelle, pour laquelle les raisonnements de Planck conduisent à l'expression

$$F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{h}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{24}$$

Nous avions, en outre, établi, par le calcul des fréquences propres, que le nombre de degrés de liberté de fréquence ν (à $d\nu$ près) est, pour un volume unité, de

$$\begin{cases} d\mathfrak{N}_l = \dfrac{4\pi\nu^2}{V_l^3}\, d\nu, & \text{pour les vibrations de condensation;} \\ d\mathfrak{N}_{tr} = \dfrac{8\pi\nu^2}{V_{tr}^3}\, d\nu, & \text{pour les vibrations transversales.} \end{cases} \tag{25}$$

Ces résultats ont été obtenus en toute généralité et sont valables quelles que soient les valeurs des vitesses de propagation V_l, V_{tr}.

Pour pousser plus loin, il nous faut maintenant tenir compte de la structure du milieu solide, et de sa constitution granulaire.

Une méthode consiste à introduire des hypothèses de structure et des forces intermoléculaires convenablement choisies. C'est la voie suivie par Born et Karman (1). Une autre méthode, indiquée par Debye, consiste à admettre une vitesse constante de propagation pour les ondes de toutes fréquences, mais à tenir compte de ce que le milieu ne peut propager des fréquences trop élevées.

Dans un milieu à structure granulaire, dont les grains (molécules) sont à une distance moyenne d, cela n'aurait plus aucun sens de parler d'ondes élastiques ayant une longueur d'onde inférieure à $2d$.

Cette demi-longueur d'onde minima, d, est de l'ordre de grandeur de

$$\left(\frac{v}{N}\right)^{\frac{1}{3}},$$

v, volume de la molécule-gramme;
N, nombre d'Avogadro (nombre de molécules par molécule-gramme).

(1) Born et Karman, *Phys. Zeitschr.*, t. XIII, 1912, p. 297. — Born, *Dynamik der Kristallgittern*, Teubner, 1915.

Pour la calculer exactement, nous tiendrons compte de ce qu'il faut retrouver 3N comme nombre des degrés de liberté de la molécule-gramme. Le nombre des degrés de liberté ayant une fréquence égale ou inférieure à une valeur ν donnée est

$$\mathfrak{N} = \left(\frac{4\pi}{V_l^3} + \frac{8\pi}{V_{tr}^3}\right)\frac{\nu^3}{3}\varphi.$$

Posons $\mathfrak{N} = 3N$ et nous obtenons la fréquence limite ν_m :

$$\nu_m = \left(\frac{9N}{4\pi\varphi}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\frac{1}{V_l^3} + \frac{2}{V_{tr}^3}\right]^{-\frac{1}{3}}.$$

C'est la formule employée par Debye, qui suppose que les ondes élastiques longitudinales et transversales ont une même fréquence limite ν_m. Il semble plus logique de supposer que c'est la longueur d'onde limite qui est égale pour les deux types d'onde. On aura alors deux fréquences limites distinctes :

$$(26)\qquad \begin{cases} \text{pour les ondes longitudinales,} & \nu_{lm} = V_l\left(\dfrac{3N}{4\pi\varphi}\right)^{\frac{1}{3}}; \\ \text{pour les ondes transversales,} & \nu_{trm} = V_{tr}\left(\dfrac{3N}{4\pi\varphi}\right)^{\frac{1}{3}}; \end{cases}$$

le nombre des degrés de liberté est toujours de 3N au total.

Dans un liquide, capable de propager seulement des ondes longitudinales, on posera

$$(27)\qquad \nu_{lm} = V_l\left(\frac{9N}{4\pi\varphi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

pour retrouver encore 3N comme total.

Les résultats seront tout à fait voisins, pour le cas des solides, si l'on emploie l'une ou l'autre des formules pour déterminer les fréquences limites, mais la seconde méthode est certainement plus logique.

Elle est en outre justifiée par les raisonnements généraux qui nous ont montré que, dans le corps solide, les termes relatifs aux ondes longitudinales et aux ondes transversales doivent se séparer entièrement.

g. Expression des fonctions Φ. — Nous trouvons dès lors la densité totale d'énergie des ondes élastiques en intégrant de o à ν_{lm} pour les ondes longitudinales, et de o à ν_{trm} pour les ondes transversales

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi}{V_l^3}\int_0^{\nu_{lm}} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu + \frac{8\pi}{V_{tr}^3}\int_0^{\nu_{trm}} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu. \tag{28}$$

De sorte que nous retrouvons les mêmes formules générales, auxquelles nous avait conduit notre raisonnement primitif, en posant :

Pour le solide,

$$\begin{cases} \Theta_{tr} = \beta\nu_{trm} = \beta V_{tr}\left(\dfrac{3N}{4\pi v}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ \Theta_l = \beta\nu_{lm} = \beta V_l\left(\dfrac{3N}{4\pi v}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{cases} \tag{29}$$

Par rapport aux notations des formules (14), ceci s'écrit

$$a = \beta\left(\frac{3N}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{30}$$

La fonction universelle Φ_l s'exprime en fonction de F par la relation

$$\frac{1}{3N\beta^3} x^4 \Phi_l(x) = \int_0^{\frac{x}{\beta}} \xi^3 F(\xi)\, d\xi, \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{\Theta}{T}, \quad \xi = \frac{\nu}{T}. \tag{31}$$

Cette relation s'obtient aisément par la comparaison des formules (18 *bis*) et (28) pour la densité d'énergie des rayonnements élastiques.

Pour le liquide, on posera

$$\Theta = \beta\nu_m = \beta V\left(\frac{9N}{4\pi v}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad A = \beta\left(\frac{9N}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{32}$$

Et la fonction universelle relative au liquide a pour valeur

$$\Phi = 3\,\Phi_l. \tag{33}$$

J'étais donc bien fondé d'affirmer, au début de ce Chapitre, que les fonctions Φ, Φ_l étaient universelles. Mon raisonnement général les laissait indéterminées, mais les lois thermodynamiques du rayonnement, telles que nous les avons généralisées aux Chapitres III et IV, permettent d'établir une relation simple entre les fonctions Φ, Φ_l et la fonction de Wien pour le rayonnement du corps noir. Les formules générales établies sont tout à fait indépendantes de la théorie des quanta. Voyons maintenant la forme que prennent ces résultats quand on y remplace la fonction arbitraire F par celle qu'indique la formule de Planck

$$\nu^3 \mathrm{F}\left(\frac{\nu}{\mathrm{T}}\right) = \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k\mathrm{T}}} - 1}.$$

Le coefficient β dans les formules (29) et (32) sera posé égal à

$$\beta = \frac{h}{k}, \qquad \eta = \beta\xi = \frac{h}{k}\xi.$$

Et nous obtenons finalement

$$\frac{x^4}{3}\Phi(x) = x^4\Phi_l(x) = 3\,\mathrm{R}\int_0^x \frac{\eta^3\,d\eta}{e^\eta - 1}. \tag{31 \textit{bis}), (33 \textit{bis}}$$

i. Comparaison avec les résultats expérimentaux. — Les formules sont susceptibles de vérifications expérimentales. Les mesures ont surtout porté sur les chaleurs spécifiques. Dans son article de 1912, P. Debye donne plusieurs exemples, pour lesquels les concordances sont très bonnes. La forme de la courbe des chaleurs spécifiques est très exactement représentée par une formule du type Debye pour les corps suivants : aluminium, diamant, cuivre, argent, plomb. D'après les courbes, on peut calculer les températures de référence pour ces différents corps.

Le calcul a été fait par Debye en utilisant la formule à une fréquence limite unique. Les résultats ne seraient pas très différents avec deux fréquences distinctes. Le Tableau ci-après donne, à côté des Θ

observés, les valeurs de Θ calculées par la formule de Debye :

$$\Theta_m = \frac{h}{k}\left(\frac{3N}{VF}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad F = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{V_l^3} + \frac{2}{V_{tr}^3}\right).$$

On a pris pour bases du calcul les vitesses de propagation V_l, V_{tr} observées sur des ondes à très grande longueur d'onde (ondes acoustiques). Néanmoins, les Θ calculés et observés sont en assez bonne concordance, sauf pour le plomb :

	Al.	Cu.	Ag.	Pb.
Θ observé.....	396	309	215	95
Θ calculé.....	399	329	212	72

Le plomb étant un des corps pour lesquels la vitesse de propagation des ondes transversales est très variable avec la température, l'écart n'a rien de trop surprenant. Une théorie plus complète serait nécessaire, pour tenir compte de la variation de la vitesse de propagation avec la fréquence, et de l'influence de l'agitation thermique générale sur la vitesse de propagation d'une onde de fréquence donnée.

Les formules relatives à la dilatation du corps en fonction de la température sont plus difficiles à vérifier, car elles font intervenir les écarts à la loi de Hooke, et les mesures font en général défaut sur ce point.

La théorie de la dilatation a été indiquée tout d'abord par P. Debye (1) qui indiquait nettement le rôle joué par les écarts à la loi de Hooke, mais ne semblait pas avoir vu le terme constant qui existe dans tous les cas. Nous avons noté, dans le Chapitre V consacré aux pressions de radiations, les erreurs de calcul nombreuses qui existent, à ce sujet, chez divers auteurs.

Un exposé intéressant de la question parut dans les rapports (2) au deuxième Congrès Solvay à Bruxelles. M. M. Brillouin (3) donnait une

(1) DEBYE, *Vorträge über kinetische Theorie*.... B.-G. Teubner, 1914.

(2) *Deuxième Congrès de Physique Solvay*, 1913 (Hayez, Bruxelles); GRÜNEISEN, *Molekulartheorie der festen Körper*.

(3) M. BRILLOUIN, *Journal de Physique*, novembre 1914; *Annales de Physique*, 1914, p. 13-433.

théorie complète non seulement de la dilatation, mais des propriétés générales du solide. Cet article contient d'ailleurs une erreur dans le calcul de la pression, de sorte que seul le terme dépendant des écarts à la loi de Hooke y apparaît; la question de la dilatation a fait l'objet d'une thèse de van Everdingen (1) et de plusieurs travaux de Ornstein (2) et Zernike (3). La théorie la plus satisfaisante est celle indiquée par H.-A. Lorentz (4) qui a calculé une valeur exacte pour la pression de radiation; nous avons rappelé cette théorie au Chapitre V; une théorie analogue a été développée par Försterling (5).

La théorie complète de la dilatation est difficile à vérifier, à cause des écarts de la loi de Hooke qui y interviennent et sur lesquels nous manquons de mesures. Un fait en revanche est contrôlable, c'est que la dilatation d'un corps est proportionnelle, aux basses températures, au contenu d'énergie du corps. Des mesures à ce sujet ont été faites par Röntgen (6) et Dembowska sur le diamant, et donnent une bonne concordance. Les résultats de mesures faites sur le cuivre par Dittenberger, Henning et Lindemann (7) sont aussi très satisfaisants.

Le calcul du coefficient de dilatation, à partir des données élastiques du corps, a été tenté par Lorentz, dans l'article déjà cité. Malheureusement, sur aucun corps, on ne possède les mesures des écarts de la loi de Hooke pour les deux coefficients λ et μ. Un seul des deux coefficients, ou une combinaison d'entre eux, a été étudié, et l'on en est réduit à admettre que les deux coefficients λ et μ varient proportionnellement, ce qui est très hypothétique.

---

(1) Van Everdingen, *Proefschrift*, Utrecht, 1914.

(2) Ornstein, *Proceedings Amsterdam*, 1912, p. 983.

(3) Ornstein et Zernike, *Proceedings Amsterdam*, nos 9-10, 1917, p. 1289, 1304 et 1312.

(4) Lorentz, *Proceedings Amsterdam*, nos 9-10, 1917, p. 1324.

(5) Försterling, *Ann. der Physik*, t. XLVII, 1915, p. 1127.

(6) W.-C. Röntgen, *Sitz. ber. München*, 1912, p. 381.

(7) *Ann. der Phys.*, t. XXXIX, 1913, p. 287.

Sur la théorie générale des solides, on consultera aussi : A. Eucken, *Verh. d. D. Phys. Ges.*, t. XV, 1913, p. 571; Grüneisen, *Verh. d. D. Phys. Ges.*, t. VIII, 1906, p. 469; t. XIII, 1911, p. 386; *Ann. der Physik*, t. XXII, 1907, p. 844; t. XXXIX, 1912, p. 257; Schulze, *Sitz. ber. Marburg Ges.*, 1909, p. 224. L'exposé de Grüneisen au deuxième Congrès Solvay, 1913, contient de nombreuses références sur ces sujets.

D'après des mesures de Lussana (1) et Poynting (2), Lorentz calcule le coefficient de dilatation pour les corps suivants :

		Calculé.	Observé.
Lussana	: Plomb.....	0,00022	0,00008
»	: Étain.....	0,00027	0,00006
Poynting	: Acier 1.....	0,000032	0,000033
»	: Acier 2.....	0,000036	0,000033
»	: Cuivre.....	0,000028	0,000051

La concordance n'est bonne que pour l'acier, mais les mesures qui servent de base au calcul étant tout à fait incomplètes, il n'y a pas lieu de s'étonner de trouver des écarts considérables.

Grüneisen (références p. 430) compare de récentes données expérimentales avec une formule de dilatation; la démonstration corrigée qu'il donne dans son article de 1918 est rigoureuse pour un liquide, mais la formule est incomplète pour les solides; elle n'a plus qu'une valeur empirique.

Une théorie très satisfaisante, en concordance avec cet exposé, a été tout récemment donnée par Försterling (3).

La théorie complète des cristaux exige la connaissance de leurs différents modes de vibration; déjà la courbe des chaleurs spécifiques est difficile à obtenir avec précision. Les calculs complets des vibrations de réseaux cristallins ont été donnés par Born et Karman (4); un essai particulièrement intéressant est celui tenté récemment par Born (5) : partant de la structure du réseau cristallin du diamant, telle que la donne Bragg d'après l'étude aux rayons X, il calcule les vibrations et la chaleur spécifique du diamant. Malheureusement, les résultats finaux ne sont donnés que sous forme de développements un peu pénibles.

---

(1) Lussana, *Mesures prises dans* W. Schut, *Proefschrift.* Utrecht, 1912.

(2) Poynting, *Proceedings Royal Society*, t. LXXXVI, 1912, p. 534.

(3) K. Försterling, *Ann. der Physik*, t. LXI, 1920, p. 577.

(4) M. Born et Karman, *Phys. Zeitschr.*, t. XIII, 1912, p. 297; t. XIV, 1913, p. 15 et 65. *Voir* aussi le livre d'exposé d'ensemble de Born.

(5) M. Born, *Ann. der Physik*, t. XLIV, 1914, p. 605.

L'étude des corps solides polyatomiques a aussi été tentée (¹); il faut alors tenir compte, dans l'énergie interne du corps, de l'énergie des ondes élastiques représentée par une formule du type Debye, et de l'énergie de vibration interne ou rotation des molécules, énergie qui se représente par une ou plusieurs formules du type de Planck

$$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}.$$

Nous n'insisterons pas sur ces résultats, qui nous écartent trop de notre sujet principal.

CHAPITRE VII.

CONDUCTIBILITÉ CALORIFIQUE.

a. Nous avons, dans les Chapitres précédents, étudié les lois du rayonnement élastique thermique dans un corps matériel solide ou liquide. Nous pouvons résumer nos résultats par la formule suivante : La densité d'énergie $d\mathcal{E}$ des rayonnements de fréquence ν (à $d\nu$ près) dont les directions de propagation sont comprises dans un angle solide $d\Omega$ est, dans l'état d'équilibre isotherme,

$$(1) \qquad d\mathcal{E} = \frac{\Delta\nu^3}{V^3}\,F\left(\frac{\nu}{T}\right)d\nu\,d\Omega = \frac{\Delta(\nu, T)}{V^3}\,\frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\,d\nu\,d\Omega.$$

Lorsque l'on considère des ondes transversales, cette formule donne la densité des ondes ayant une polarisation donnée. Il faut la doubler si l'on veut tenir compte de toutes les polarisations possibles; V est la vitesse de propagation des ondes.

Nous avons, dans le Chapitre précédent, considéré cette vitesse de propagation comme une constante, indépendante de la fréquence, pour toutes les fréquences inférieures à la fréquence limite ν_m. Et

(¹) NERNST et LINDEMANN, *Sitzungs .ber. Berlin*, 1912, p. 1160. — EUCKEN et SCHWERS, *Verhand. d. D. phys. Ges.*, t. XV, 1913, p. 578. — NERNST, *Congrès de Physique Solvay; Vorträge über kinetische Theorie*, Göttingen, 1913. — LINDEMANN, *Phys. Zeitsch.*, 1912, p. 737. — R. EWALD, *Ann. der Phys.*, t. XLIV, 1904, p. 1213, donne de nombreuses mesures de chaleurs spécifiques.

nous avons admis qu'au delà de cette fréquence limite, aucune onde ne pouvait se propager. Cette séparation brusque, à la fréquence limite ν_m, a quelque chose de trop arbitraire, et pour certains raisonnements, ce serait une définition mal commode. Aussi avons-nous préféré introduire dans notre formule ci-dessus, un coefficient de dispersion $\Delta(\nu, T)$, comme l'a fait aussi M. M. Brillouin dans ses articles sur la théorie des solides.

Ce coefficient permettra de tenir compte de la fréquence limite ν_m et de la dispersion.

Si $V(\nu, T)$ est la vitesse de propagation réelle d'une onde de fréquence ν à une température T et V la vitesse moyenne introduite dans notre formule, on définira le coefficient $\Delta(\nu, T)$ par la relation

$$\Delta(\nu, T) = \frac{V^3}{U(\nu) V^2(\nu)}, \tag{2}$$

U, vitesse de groupe.

On retrouvera les résultats de la théorie simplifiée de P. Debye en posant, à chaque température T,

$$\begin{cases} \Delta = 1 & \text{pour} \quad 0 < \nu < \nu_m, \\ \Delta = 0 & \text{pour} \quad \nu_m < \nu. \end{cases} \tag{2 bis}$$

Pour certains problèmes, cette définition brutale sera mal commode, car elle introduit une variation discontinue pour $\nu = \nu_m$. Nous la remplacerons par celle-ci :

$$\int_0^\infty \Delta(\nu, T)\, d\nu = \nu_m. \tag{3}$$

Dans ces conditions, et grâce à l'introduction du coefficient Δ, la formule générale que nous avons écrite nous donnera la densité d'énergie d'une onde de fréquence quelconque, et nous écrirons nos intégrales par rapport à ν de 0 à $+\infty$.

La densité d'énergie totale des ondes de toutes fréquences et toutes directions, dans l'état d'équilibre isotherme, s'écrira

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi}{V^3} \int_0^\infty \Delta(\nu, T) \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\, d\nu.$$

Lorsque le corps change de température à un volume constant, la fréquence limite ν_m est indépendante de la température. Mais lorsque

le corps se dilate en même temps qu'il s'échauffe, ou en général subit une variation de volume pour une raison quelconque, la fréquence limite ν_m varie, et $\Delta(\nu)$ aussi. Il faudra pouvoir tenir compte de ces variations.

Nous voulons montrer comment il est possible d'étudier les corps écartés légèrement de l'équilibre isotherme. Nous envisagerons d'abord le cas où les différentes parties du corps n'ont pas la même température. En traitant le cas où il existe un gradient de température, pas trop rapide, nous arriverons à définir *la conductibilité calorifique du corps*. L'étude d'un corps, dont certaines portions présentent de petites vitesses d'ensemble par rapport aux autres, nous permettrait de trouver un terme de *viscosité*. Dans tous ces problèmes, nous supposerons en première approximation que chaque élément de volume pris isolément est dans l'état d'équilibre thermique, et que la formule (1) représente toujours la distribution du rayonnement. C'est une hypothèse analogue que l'on introduit, dans la théorie cinétique des gaz, pour l'étude de ces mêmes problèmes : conductibilité calorifique et viscosité. On suppose, qu'en chaque point du gaz, la loi de répartition des vitesses de Maxwell est satisfaite.

Ici nous aurons à parler, non de vitesses des molécules, mais de densité d'énergie des rayonnements. Le rayonnement transporte de *l'énergie;* il possède aussi une *quantité de mouvement*. Ce sont ces deux propriétés qui lui permettent de jouer un rôle important dans la *conductibilité calorifique* et la *viscosité*.

Il peut naturellement y avoir d'autres effets qui coopèrent à la conductibilité, et il peut exister des forces visqueuses indépendantes de celles dues au rayonnement. Nous n'examinerons pas dans ce Chapitre ces autres points de vue, nous ne prétendons donc pas donner des formules qui représentent la valeur réelle de la conductibilité et de la viscosité, c'est simplement la contribution du rayonnement à ces deux propriétés qui nous intéressera.

C'est du printemps de 1914 que datent mes résultats à ce sujet; une Note aux *Comptes rendus* (1), parue à cette époque, contenait un

(1) L. BRILLOUIN, *Conductibilité calorifique et viscosité des liquides monoatomiques* (*Comptes rendus Acad. Sc.*, juillet 1914).

résumé des modes de raisonnement et les formules finales obtenues. La guerre est venue interrompre complètement cette étude. L'exposé que j'en donnerai ici diffère assez notablement des indications de la Note aux *Comptes rendus*.

Une étude un peu antérieure de P. Debye sur la conductibilité calorifique avait fait l'objet d'une conférence à Göttingue en 1913, conférence publiée seulement en 1914 (1) et dont j'ai eu connaissance après avoir moi-même obtenu des résultats sur ce sujet. Le calcul de P. Debye est d'ailleurs un peu grossier. Il assimile le rayonnement thermique à un rayonnement ayant une fréquence donnée, la fréquence limite ν_m; il y a en outre une erreur de calcul que nous signalerons plus loin. Debye a voulu dans cet article évaluer le libre parcours moyen des ondes en tenant compte du rôle des fluctuations; cette partie de la théorie est très douteuse, et a été l'objet de critiques justifiées de la part de Ornstein et Zernike (2) et de Schrödinger (3).

c. Absorption et émission. Libre parcours moyen. — Nous étudierons donc ces questions en introduisant un libre parcours moyen des ondes ou, ce qui revient au même, un coefficient d'absorption. Nous ferons la théorie de la conductibilité calorifique sans nous occuper de l'origine de cette absorption et réserverons pour plus tard la discussion des origines de l'absorption et des différentes causes qui peuvent la produire.

Nous traiterons d'abord le cas d'un corps capable de propager un seul type d'onde. Ce sera par exemple un liquide, où peuvent exister des ondes longitudinales. Il sera ensuite facile de généraliser les formules finales pour le corps solide, le rôle des ondes transversales s'ajoutant simplement à celui des ondes longitudinales.

Soit $\alpha(\nu, T)$ le coefficient d'absorption des ondes de fréquence ν à une température T. Une onde plane d'intensité I traversant une

(1) *Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität*, B.-G. Teubner, 1914.

(2) L.-S. ORNSTEIN et ZERNIKE, *Proceedings Amsterdam*, nos 9 et 10, 1917, p. 1295.

(3) SCHRÖDINGER, *Ann. der Physik*, t. XLII, 1914, p. 916.

couche d'épaisseur dl subit un affaiblissement

$$\frac{dI}{I} = -\alpha\, dl. \tag{4}$$

Si le corps est absorbant, il doit en même temps émettre des ondes de toutes fréquences, de telle sorte que, dans l'état d'équilibre isotherme, la densité d'énergie moyenne des ondes reste invariable.

Un volume $d\tau = dS\, dl$ du corps est traversé, en une seconde, dans une direction définie à $d\Omega$ près, par un rayonnement de fréquence $\nu(d\nu)$ ayant une intensité

$$V \frac{\Delta \nu^3}{V^3} F\left(\frac{\nu}{T}\right) dS\, d\nu\, d\Omega,$$

la portion d'énergie absorbée en une seconde par le volume est

$$dE_{abs} = \alpha V^{-2} \Delta \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) dS\, dl\, d\nu\, d\Omega. \tag{5}$$

Il faudra que ce volume $d\tau$ émette, à la température T, un rayonnement égal. Ceci permet de définir le coefficient ε d'émission par centimètre cube du corps.

L'énergie dE_{em} émise par un volume $d\tau$ dans les directions comprises dans un angle solide $d\Omega$, et pour une fréquence $\nu(d\nu)$ est

$$dE_{em} = \varepsilon(\nu, T)\, d\tau\, d\nu\, d\Omega. \tag{6}$$

Et l'on a la relation suivante entre ε, α et F :

$$\varepsilon = \alpha V^{-2} \Delta \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right). \tag{7}$$

L'hypothèse que nous ferons pour les états peu troublés sera alors la suivante :

Le pouvoir émissif ε et le coefficient d'absorption α de chaque volume élémentaire $d\tau$ sont les mêmes que dans l'état isotherme.

L'émission de rayonnement se fait également dans toutes les directions. Mais le rayonnement qui traverse l'élément de volume n'est pas isotrope, sa répartition dépendant de l'état des éléments de volumes qui entourent le volume considéré.

Une remarque s'impose au sujet de la variation des coefficients α et ε pour des fréquences de l'ordre de la fréquence limite ν_m. Le coef-

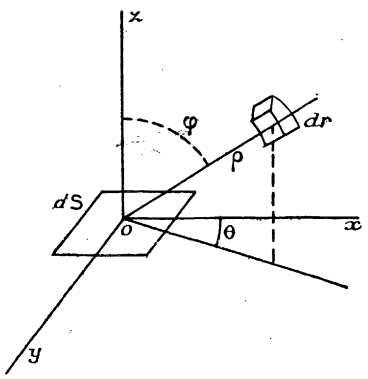
ficient d'émission ε s'annule pour des fréquences supérieures à ν_m, car Δ s'annule dans ces conditions. Il y aura donc une variation très rapide du coefficient ε au voisinage de ν_m. Le coefficient α au contraire peut varier de façon continue. Une onde de fréquence supérieure à ν_m pourra pénétrer dans le liquide et y effectuer un certain parcours avant d'être absorbée et de disparaître. Mais il est à croire que le coefficient d'absorption α augmente très rapidement lorsque la fréquence ν devient notablement supérieure à ν_m, de sorte que des ondes à très haute fréquence ne pourront quasiment point pénétrer dans le liquide et seront absorbées très rapidement.

d. Conductibilité calorifique d'un liquide. — Considérons un corps dans lequel la température varie linéairement suivant une coordonnée, z par exemple,

$$T = T_0 + b\,z.$$

Nous voulons calculer le flux d'énergie qui traversera un élément de surface dS perpendiculaire à la direction Oz. Prenons des coor-

Fig. 6.



données polaires ρ, θ, φ autour du point O. Tous les éléments de volume $d\tau$, situés à une même distance ρ dans des directions faisant des angles égaux avec Oz, envoient des énergies égales dans la surface dS. Groupons donc ensemble tout le volume toroïdal ainsi défini

$$d\tau = 2\pi \sin\varphi \rho^2 d\rho\, d\varphi,$$
$$z = \rho \cos\varphi.$$

L'angle solide $d\Omega$, sous lequel on voit dS d'un point quelconque du volume $d\tau$, est

$$d\Omega = \frac{d\mathrm{S}\cos\varphi}{\rho^2}.$$

Le volume $d\tau$ émet par seconde, dans cet angle solide $d\Omega$, une énergie rayonnante de fréquence $\nu(d\nu)$ donnée par l'expression

$$(8) \qquad d\mathrm{E}_{em} = \alpha \mathrm{V}^{-2}\Delta\nu^3 \mathrm{F}\left(\frac{\nu}{\mathrm{T}}\right) d\tau\, d\nu\, d\Omega,$$

ce qui se développe, en tenant compte du gradient de température

$$(8\,bis) \quad d\mathrm{E}_{em} = \left[\alpha_0 \mathrm{V}_0^{-2}\Delta_0\nu^3\mathrm{F}_0 + b\rho\cos\varphi\,\frac{\partial(\alpha\mathrm{V}^{-2}\Delta\nu^3\mathrm{F})}{\partial\mathrm{T}}\right] d\tau\, d\nu\, d\Omega$$

$$= \left[\alpha_0 \mathrm{V}_0^{-2}\Delta_0\nu^3\mathrm{F}_0 + b\rho\cos\varphi\,\frac{\partial(\alpha\mathrm{V}^{-2}\Delta\nu^3\mathrm{F})}{\partial\mathrm{T}}\right] d\nu\, d\mathrm{S}\, 2\pi\sin\varphi\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi.$$

Nous obtiendrons l'énergie émise (1) par tous les éléments de volume en faisant varier ρ de o à $+\infty$ et φ de o à π.

Nous devons maintenant compter quelle proportion de ce rayonnement atteindra la surface dS après avoir traversé l'épaisseur ρ de milieu absorbant. Comme la température n'est pas uniforme, il faut tenir compte de la variation du coefficient d'absorption avec la tem-

---

(1) Une erreur se trouve dans Debye (Göttingen, 1914, *loc. cit.*, p. 48). Debye assimile la quantité dE à un « courant de chaleur », qu'il multiplie de nouveau par $\cos\varphi$ « pour en prendre la composante suivant Ox ». Ceci n'a pas de sens, et aurait amené cet auteur à un résultat nul, s'il n'avait compensé cette erreur par une faute de signe dans le calcul des intégrales. Par la formule $d\Omega = \frac{d\mathrm{S}\cos\varphi}{\rho^2}$, nous avons déjà attribué un signe à l'angle solide $d\Omega$, puisque tous les angles solides correspondant à $o < \varphi < \frac{\pi}{2}$ sont comptés avec le signe + et tous ceux qui correspondent à $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ ont le signe —.

On vérifiera d'ailleurs aussitôt que le flux total d'énergie à travers la surface dS s'annule bien quand tout le corps est à la température T_0, tandis que si l'on multiplie par $\cos\varphi$ comme l'a fait Debye, cette compensation n'a plus lieu. Debye l'a rétablie par une erreur de signe dans le calcul des intégrales relatives à l'hémisphère supérieur $\left(o < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ et à l'hémisphère inférieur $\frac{\pi}{2} < \varphi > \pi$. La formule finale de cet auteur est donc inexacte, même dans les hypothèses dans lesquelles il s'est placé, au lieu de [*loc. cit.*, formule (54)] $\lambda = \frac{\rho q}{4} lc$, il faut mettre $\lambda = \frac{\rho q}{3} lc$.

pérature

$$\alpha(\nu, T) = \alpha_0(\nu, T_0) + \alpha'_0(\nu, T_0)(T - T_0). \tag{9}$$

L'absorption d'énergie dI pour un rayon d'intensité I sur le trajet $d\rho$ est alors

$$-\frac{dI}{I} = (\alpha_0 + \alpha'_0 b\rho\cos\varphi)\, d\rho,$$

de sorte qu'après un parcours ρ l'intensité du rayonnement a diminué comme l'exponentielle

$$e^{-\alpha_0\rho - \frac{\alpha'_0}{2} b\rho^2\cos\varphi}, \tag{10}$$

ce que nous pouvons écrire, si le gradient b de température est assez faible,

$$e^{-\alpha_0\rho}\left[1 - \frac{\alpha'_0}{2} b\rho^2\cos\varphi\right]. \tag{10 bis}$$

Il faut multiplier par cette expression le développement (8 *bis*) pour obtenir l'énergie qui, émise par le volume $d\tau$ (ρ, φ, $d\rho$, $d\varphi$), traverse la surface dS.

Nous ne garderons, dans cette expression, que l'excès d'énergie sur l'énergie qui, dans le corps à température uniforme T_0, atteindrait la surface dS. C'est dire que nous ne conservons que les termes proportionnels à b, les autres termes (termes indépendants, termes en b^2) s'annulant lorsque l'on fait l'intégrale pour toutes valeurs de φ de o à π. Nous obtenons ainsi

$$\Delta\, dE = \left[\frac{\partial}{\partial T}(\alpha\,\Delta V^{-2}\nu^3 F) - \frac{\alpha'_0}{2}\rho\,\alpha_0\,\Delta_0 V_0^{-2}\nu^3 F_0\right] \times e^{-\alpha_0\rho}\, b\, 2\pi\, dS\, d\nu\cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi\,\rho\, d\rho. \tag{11}$$

Pour intégrer en ρ de o à $+\infty$, nous avons les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-\alpha_0\rho}\rho\, d\rho = \frac{1}{\alpha_0^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha_0\rho}\rho^2\, d\rho = \frac{2}{\alpha_0^3}.$$

Par rapport à φ, nous avons

$$\int_0^\pi \cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi = -\int_1^{-1} x^2\, dx = \frac{2}{3}.$$

Ceci nous donne finalement la quantité d'énergie qui traverse la surface dS (pour la fréquence ν)

$$(12)\qquad \begin{cases} \Delta E = \dfrac{4\pi b}{3} dS\, d\nu \dfrac{1}{\alpha^2}\left[\dfrac{\partial}{\partial T}(\alpha \Delta V^{-2}\nu^3 F) - \alpha' \Delta V^{-2}\nu^3 F\right], \\ \Delta E = \dfrac{4\pi b}{3} dS\, d\nu \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial T}(\Delta V^{-2}\nu^3 F). \end{cases}$$

Pour obtenir le courant de chaleur total, il faut intégrer par rapport à ν, de o à $+\infty$.

Nous donnerons la conductibilité calorifique λ, qui représente le courant total d'énergie divisé par le gradient b de température et par la surface dS

$$(13)\qquad \lambda = \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial T}\left[\Delta(\nu, T) V^{-2}\nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)\right] d\nu.$$

e. Discussion. — Cette formule diffère un peu de celle qui figure dans la Note aux *Comptes rendus* de juillet 1914; car, dans cette Note, j'avais supposé qu'il n'y avait pas de variation possible de la vitesse V avec la température, et surtout j'avais négligé de tenir compte de la variation de l'absorption avec la température, de sorte que la compensation des deux termes en α' ne se faisait pas et que je trouvais

$$\lambda = \frac{4\pi V}{3}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial T}\left[\alpha \Delta \nu^3 \frac{F\left(\frac{\nu}{T}\right)}{V^3}\right] d\nu.$$

Il faut, pour le calcul de l'intégrale, tenir compte de la façon dont varient les diverses quantités en fonction de la température. Lorsque le liquide est en équilibre, la pression est la même en tous points, de sorte que, dans la dérivée par rapport à T, il faut garder la pression constante et tenir compte des variations de volume, proportionnelles aux écarts de température. Ces variations de volume entraînent des variations de la vitesse de propagation V, de la fréquence limite ν_m et de l'absorption α.

La variation de α ne joue pas de rôle, mais les autres quantités, ν_m et V entrent dans la dérivée par rapport à la température.

Si nous appelons c_p la chaleur spécifique à pression constante,

nous avons pour la variation de la densité totale d'énergie (à pression constante)

$$\rho c_p = 4\pi \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial T}\left[\Delta V^{-3}\nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)\right] d\nu, \tag{14}$$

où ρ désigne la densité du liquide.

Le coefficient ρ provient de ce que la chaleur spécifique est rapportée à l'unité de masse et la densité d'énergie à l'unité de volume.

Nous pouvons alors retrouver une formule analogue à celle de Debye (corrigée du coefficient numérique inexact de cet auteur) et écrire

$$\lambda = \frac{1}{3} V l_T c_p \rho; \tag{15}$$

le coefficient l_T, libre parcours moyen des ondes ayant la définition précise suivante :

$$V l_T \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial T}(\Delta V^{-3}\nu^3 F)_{p=\text{const.}} d\nu = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial T}(\Delta V^{-2}\nu^3 F)_{p=\text{const.}} d\nu, \tag{16}$$

l'indice $p = \text{const.}$ rappelant que les dérivées sont prises à pression constante.

f. Développement de la formule. — Le libre parcours moyen ainsi défini est d'ailleurs une fonction assez complexe. Nous pouvons transformer un peu cette expression pour faire apparaître les différents termes qui y figurent.

Nous avons

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\Delta\nu^3 F}{V^2}\right) d\nu \\ &= \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \frac{\Delta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\nu^3 F}{V^2}\right) d\nu + \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \frac{\nu^3 F}{\alpha V^2}\frac{\partial \Delta}{\partial T} d\nu.\end{aligned} \tag{13 bis}$$

Nous pouvons essayer d'introduire ici les différentes hypothèses simplificatrices qui ont réussi à Debye dans la théorie des chaleurs spécifiques. Nous supposerons donc la vitesse de propagation des ondes, V, indépendante de la fréquence et de la température, et fonction seulement du volume spécifique. De même, nous prendrons pour Δ les

valeurs

$$\Delta = 1, \qquad 0 < \nu < \nu_m,$$
$$\Delta = 0, \qquad \nu < \nu_m, \qquad \int_0^\infty \Delta \, d\nu = \nu_m.$$

Soit $\frac{d\delta}{dT}$ le coefficient de dilatation thermique du corps à pression constante; δ représentant la dilatation du corps entre le zéro absolu et la température T, nous avons

$$\frac{\partial \log v}{\partial T} = \frac{d\delta}{dT}.$$

D'autre part, d'après la définition de Δ, nous voyons que $\frac{\partial \Delta}{\partial T}$ est nul pour $\nu \neq \nu_m$ et infini pour $\nu = \nu_m$. Les dérivées de Δ et ν_m sont reliées par

$$\int_0^\infty \frac{\partial \Delta}{\partial T} d\nu = \frac{\partial \nu_m}{\partial T},$$

de sorte que le dernier terme du développement s'écrit

$$(17) \qquad \frac{4\pi}{3} \int \frac{\nu^3 F}{\alpha V^2} \frac{\partial \Delta}{\partial T} d\nu = \frac{4\pi}{3} \frac{\nu_m^3 F\left(\frac{\nu_m}{T}\right)}{\alpha(\nu_m T) V^2} \frac{\partial \nu_m}{\partial T}.$$

La fréquence limite ν_m étant fonction de la température seulement par l'intermédiaire du volume, nous avons

$$\frac{\partial \nu_m}{\partial T} = \frac{\partial \nu_m}{\partial \log v} \frac{d\delta}{dT}.$$

Or ν_m est proportionnel à $v^{-\frac{1}{3}} V$, ce qui donne

$$\frac{\partial \nu_m}{\partial T} = \nu_m \frac{\partial \log \nu_m}{\partial \log v} \frac{d\delta}{dT} = -\nu_m \left(\frac{1}{3} - \frac{\partial \log V}{\partial \log v}\right) \frac{d\delta}{dT},$$

et nous trouvons en conséquence

$$(17\,bis) \qquad \frac{4\pi}{3} \int \frac{\nu^3 F}{\alpha V^2} \frac{\partial \Delta}{\partial T} d\nu = -\frac{4\pi}{3} \frac{\nu_m^4 F\left(\frac{\nu_m}{T}\right)}{\alpha(\nu_m) V^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{\partial \log V}{\partial \log v}\right) \frac{d\delta}{dT}.$$

Le premier terme du développement (13 *bis*) s'écrit lui-même

$$\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \frac{\Delta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial T}\frac{\nu^3 F}{V^2}\,d\nu = \frac{4\pi}{3}\int_0^{\nu_m}\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial T}\frac{\nu^3 F}{V^2}\,d\nu$$
$$= \frac{4\pi}{3V^2}\int_0^{\nu_m}\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \nu^3 F}{\partial T}\,d\nu - \frac{4\pi}{3V^2}\,2\,\frac{\partial \log V}{\partial \log v}\,\frac{d\delta}{dT}\int_0^{\nu_m}\frac{\nu^3 F}{\alpha}\,d\nu.$$

De sorte que nous obtenons finalement

$$(18)\quad \lambda = \frac{4\pi}{3V^2}\left[\int_0^{\nu_m}\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)}{\partial T}\,d\nu - \frac{2\,d\delta}{dT}\frac{\partial \log V}{\partial \log v}\int_0^{\nu_m}\frac{\nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)}{\alpha}\,d\nu - \frac{d\delta}{dT}\frac{\nu_m^3 F\left(\frac{\nu_m}{T}\right)}{\alpha(\nu_m)}\nu_m\left(\frac{1}{3}-\frac{\partial \log V}{\partial \log v}\right)\right].$$

Nous pouvons définir raisonnablement le libre parcours moyen L à la température T par la relation

$$(19)\qquad VL\mathcal{E} = \frac{4\pi}{V^2}\int_0^{\nu_m}\frac{\nu^3}{\alpha}F\left(\frac{\nu}{T}\right)d\nu,$$

$\mathcal{E}$ étant la densité totale d'énergie thermique du corps, nous définirons un second coefficient L_T par la relation

$$(20)\qquad VL_T\rho c_v = \frac{4\pi}{V^2}\int_0^{\nu_m}\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)}{\partial T}\,d\nu,$$

ρ, densité;

c_v, chaleur spécifique à volume constant.

nous noterons enfin L_m le libre parcours moyen $\frac{1}{\alpha(\nu_m)}$ des ondes ayant la fréquence limite ν_m

La formule (18) prend alors la forme

$$(21)\quad \lambda = \frac{1}{3}V\left[L_T\rho c_v - \frac{d\delta}{dT}\left(2\,\frac{\partial \log V}{\partial \log v}\right)L\mathcal{E} + L_m\frac{h\nu_m^4}{e^{\frac{h\nu_m}{kT}}-1}\left(\frac{1}{3}-\frac{\partial \log V}{\partial \log v}\right)\right],$$

V, vitesse de propagation des ondes;

$v = \frac{1}{\rho}$, volume spécifique;

c_v, chaleur spécifique à volume constant;

L_T, L et L_m, les libres parcours moyens définis ci-dessus (19) et (20);
ν_m, fréquence limite;
$\mathcal{E}$, densité d'énergie du rayonnement thermique;
$\frac{d\delta}{dT}$, coefficient de dilatation cubique du corps.

Nous avons traité le cas d'un liquide, capable de propager un seul type d'ondes, des ondes longitudinales.

g. Conductibilité calorifique d'un corps solide. — Dans un solide, il y aurait à considérer l'effet des ondes longitudinales et celui des ondes transversales qui s'ajouteraient l'un à l'autre. Si j'appelle λ_l le terme λ représenté par la formule ci-dessus pour les ondes longitudinales et λ_{tr} le terme identique, calculé pour les ondes transversales seules, on aurait la conductibilité calorifique du solide par la somme

$$\lambda = \lambda_l + \lambda_{tr},$$

les expressions intégrales de λ_l et λ_{tr} étant

$$(13\ bis) \qquad \lambda_l = \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha_l(\nu, T)}\frac{\partial}{\partial T}\left[\Delta_l(\nu, T)\, V_l^{-2}\nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)\right] d\nu,$$

$$(13\ ter) \qquad \lambda_{tr} = \frac{8\pi}{3}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha_{tr}(\nu, T)}\frac{\partial}{\partial T}\left[\Delta_{tr}(\nu, T)\, V_{tr}^{-2}\nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)\right] d\nu,$$

où $F\left(\frac{\nu}{T}\right)$ représente toujours la fonction

$$F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{h}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Il faudrait tenir compte que, dans toutes les formules (1), (5), (7), (8), (11), (12), (13), (14), (15), (16), (18), (19), (20), relatives aux ondes transversales, il faut multiplier par 2 la fonction $F\left(\frac{\nu}{T}\right)$, car la densité d'énergie d'ondes transversales est, toutes choses égales d'ailleurs, double de celle d'ondes longitudinales, à cause des deux polarisations possibles.

Notons enfin que, dans le cas du solide, on ne peut parler d'une proportionnalité entre λ et la densité totale d'énergie $\mathcal{E}$ ou la chaleur spécifique totale c, car les termes relatifs aux ondes transversales et

longitudinales étant séparés, c'est séparément la densité d'énergie ε_l et la chaleur spécifique c_l relatives aux ondes longitudinales qui interviendront dans le terme λ_l, tandis que la densité d'énergie ε_{tr} et la chaleur spécifique c_{tr} relatives aux ondes transversales entreront, avec des coefficients différents, dans le terme λ_{tr}.

h. Note annexe. Chaleur spécifique à pression constante. — Nous avons donné au Chapitre précédent l'expression de la chaleur spécifique à volume constant. Nous allons montrer comment on peut, au moyen des hypothèses qui viennent de nous servir, trouver le développement de la chaleur spécifique c_p à pression constante. Dans le cas du liquide, on aura

$$(21)\qquad \rho c_p = 4\pi \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\Delta \nu^3 F}{V^3}\right) d\nu$$
$$= 4\pi \int_0^{\nu_m} \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\nu^3 F}{V^3}\right) d\nu + \frac{4\pi \nu_m^3 F\left(\frac{\nu_m}{T}\right)}{V_m^3} \nu_m \frac{\partial \log \nu_m}{\partial \log v} \frac{d\delta}{dT},$$

les notations étant les mêmes qu'aux formules (17).

La chaleur spécifique à pression constante est caractérisée par le fait que le volume moléculaire v est fonction de la température, ce qui modifie ν_m et V. J'exprime ces variations en fonction du coefficient de dilatation cubique

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d \log v}{dT},$$

ρ est toujours la densité du corps.

Ceci s'écrit donc

$$\rho c_p = \frac{4\pi}{V^3} \int_0^{\nu_m} \frac{d\nu^3 F}{\partial T} d\nu - 3 \frac{\partial \log V}{\partial \log v} \frac{d\delta}{dt} \frac{4\pi}{V^3} \int_0^{\nu_m} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu$$
$$+ \frac{4\pi \nu_m^4}{V_m^3} F\left(\frac{\nu_m}{T}\right) \frac{\partial \log \nu_m}{\partial \log v} \frac{d\delta}{dt}.$$

Remplaçons F par son expression tirée de la formule de Planck, et tout ce développement s'écrit

$$(22)\qquad c_p = c_v - 3 \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{d\delta}{dt} \frac{\partial \log V}{\partial \log v} + \frac{4\pi h \nu_m^4}{\rho V_m^3 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)} \frac{\partial \log \nu_m}{\partial \log v} \frac{d\delta}{dt},$$

ε, densité d'énergie de toutes les ondes longitudinales;
$\nu_m = \frac{k}{h}\Theta$, fréquence limite;
Θ, température de référence du liquide.

Je rappelle que l'on a

$$\frac{\partial \log \Theta}{\partial \log v} = \frac{\partial \log \nu_m}{\partial \log v} = -\left(\frac{1}{3} - \frac{\partial \log V}{\partial \log v}\right).$$

Cette formule (22) permet donc de passer de la chaleur spécifique c_v à volume constant, définie au Chapitre précédent, à la chaleur spécifique c_p à pression constante.

Pour le solide on trouverait une formule semblable à la formule (22), mais avec des termes supplémentaires relatifs aux ondes transversales

$$(22\,bis) \qquad c_p = c_v - \frac{3}{\rho}\frac{d\delta}{dt}\left(\varepsilon_l \frac{\partial \log V_l}{\partial \log v} + \varepsilon_{tr}\frac{\partial \log V_{tr}}{\partial \log v}\right) + \frac{4\pi}{\rho}\frac{d\delta}{dt}\left[\frac{h\nu_{lm}^4}{V_l^3\left(e^{\frac{h\nu_{lm}}{kT}}-1\right)}\frac{\partial \log \nu_{lm}}{\partial \log v} + \frac{2h\nu_{trm}^4}{V_{tr}^3\left(e^{\frac{h\nu_{trm}}{kT}}-1\right)}\frac{\partial \log \nu_{trm}}{\partial \log v}\right].$$

Les notations sont les mêmes que dans la formule (22), les termes affectés de l'indice l étant relatifs aux ondes longitudinales, l'indice tr se rapporte aux ondes transversales.

RÉSUMÉ.

Chapitre premier.

Une idée domine les théories modernes sur les solides : l'agitation thermique du corps peut se décomposer en ondes élastiques se propageant librement en tous sens. Tous les auteurs ont, depuis Einstein et Debye, basé leurs raisonnements sur cette idée, mais en la liant intimement aux hypothèses de quanta. J'ai voulu montrer que, sur ce point, le rôle des quanta est loin d'être aussi important qu'il apparaît au premier abord. Des raisonnements mécaniques et thermodynamiques classiques permettent de retrouver tous les résultats généraux de la théorie des solides, en s'appuyant uniquement sur l'hypothèse initiale.

La voie suivie consiste à généraliser, pour le rayonnement élas-

tique thermique, les lois classiques relatives aux radiations du corps noir.

Je rappelle d'abord, d'après Debye et Sommerfeld, le calcul des fréquences propres d'un corps solide, et l'étude des différents modes de vibration qui peuvent y exister.

Chapitre II.

Boltzmann a donné un raisonnement très général, qui lui permet de tirer du principe de moindre action la formule suivante : dans une transformation infiniment lente, la chaleur fournie à un système périodique de période τ s'écrit

$$\Delta Q = \frac{\Delta(\tau \overline{T})}{\tau},$$

$\overline{T}$ étant l'énergie cinétique moyenne du système. De cette formule, on peut tirer une démonstration très générale de la loi de Wien et définir les conditions d'invariance adiabatique.

Chapitres III et IV.

L'extension aux rayonnements élastiques des lois de Kirchhoff et de Wien se fait sans difficulté. Ces lois laissent, dans l'expression du rayonnement thermique, une fonction indéterminée du rapport $\frac{\nu}{T}$ (ν, fréquence; T, température). J'ai voulu montrer que cette fonction doit nécessairement être identique à la fonction analogue, relative aux radiations électromagnétiques. L'hypothèse d'une liaison, même très petite, entre les phénomènes élastiques et électromagnétiques, permet d'établir la loi de Kirchhoff sous une forme très générale et d'étudier les conditions dans lesquelles les ondes élastiques et électromagnétiques thermiques peuvent être en équilibre réciproque. Ces conditions se résument dans l'identité des deux fonctions arbitraires de Wien.

Chapitre V.

Les pressions de radiation des ondes élastiques ont été étudiées par lord Rayleigh, mais les formules données par cet auteur sont incom-

plètes et renferment des contradictions. Or ces pressions de radiation jouent un rôle très important dans toutes les théories du solide. J'ai repris le calcul et trouvé qu'une seule formule donne, pour toutes les ondes, la valeur de la pression exercée sur un miroir plan

$$p = \mathrm{E}\left(\cos^2\eta + \frac{\partial \log \mathrm{V}}{\partial \log \rho}\right),$$

E, densité d'énergie totale des deux ondes incidente et réfléchie;
V, vitesse des ondes;
ρ, densité du milieu;
η, angle d'incidence.

Un raisonnement très général, basé sur la formule de Boltzmann (Chap. II), explique ce résultat.

Chapitre VI.

Cette loi des pressions de radiation une fois établie, il est possible de reprendre, pour les liquides ou les solides, le raisonnement qui fournit la loi de Stefan-Boltzmann dans le cas de l'électromagnétisme. Cette loi de Stefan se trouve profondément modifiée; je démontre ainsi une loi des états correspondants, sous une forme très générale, et je calcule les chaleurs spécifiques, l'énergie, l'entropie, la dilatation du corps. Toutes ces formules se précisent, si l'on admet pour la loi universelle du rayonnement (Chap. III et IV) l'expression de Planck, introduite comme loi expérimentale du corps noir. Les formules ainsi démontrées sont très voisines de celles de Debye et ont reçu d'excellentes vérifications expérimentales.

Chapitre VII.

En introduisant les conditions d'émission et d'absorption des ondes, on peut définir leur libre parcours moyen; l'étude des échanges d'énergie entre les différentes parties d'un liquide ou d'un solide, lorsqu'il existe un gradient de température, m'a permis de donner l'expression de la *conductibilité calorifique*. J'avais, dans une Note aux *Comptes rendus* de 1914, indiqué aussi une valeur pour la *viscosité*. Mais ce calcul, basé sur des hypothèses trop simples (effet Döppler, aberration), était incomplet et devra être remanié. Les évaluations de Debye,

au sujet du libre parcours moyen des ondes, sont aussi très critiquables. Je remets à plus tard l'étude de ces deux points.

L'agitation thermique du corps solide ou liquide étant analysée sous forme d'ondes élastiques, il est intéressant de rechercher comment se trouve troublée la propagation d'un rayon lumineux à travers un tel milieu. J'ai repris cette étude par deux méthodes différentes (1). Dans la première, je généralise un raisonnement d'Einstein sur cette question. Dans la seconde, j'étudie d'abord l'influence d'une onde élastique unique (traversant le milieu) sur un rayon lumineux, puis je fais la somme des effets de toutes les ondes élastiques thermiques de toutes directions et toutes fréquences. La formule finale obtenue est susceptible de vérifications expérimentales et se trouve déjà confirmée, qualitativement, par diverses observations, dans le domaine des rayons X. Des expériences précises seraient très souhaitables; elles permettraient de vérifier directement si la loi de Planck, jointe à l'hypothèse d'une fréquence limite des ondes élastiques (Debye) constitue une approximation convenable; sinon, elle donnerait directement une loi expérimentale des rayonnements élastiques thermiques. Le second raisonnement permettra, dans tous les cas, une discussion simple et rapide des résultats.

---

(1) Cette partie de l'exposé, n'ayant pas trouvé sa place ici, sera publiée ultérieurement. Une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 157, 1914, p. 1331, en a donné l'essentiel.

Vu et approuvé :

Paris, le 28 juillet 1920.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

F. HOUSSAY.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 28 juillet 1920.

P. LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L'inspecteur de l'Académie,

G. DE BÉVOTTE.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Théories récentes sur la structure des atomes.

Vu et approuvé :

Paris. le 28 juillet 1920.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

F. HOUSSAY.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 28 juillet 1920.

P. LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L'inspecteur de l'Académie,

G. DE BÉVOTTE.

64719 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
64719 Quai des Grands-Augustins, 55.