



HAL
open science

Sur quelques paradoxes en théorie du choix social et en décision multicritère

Sylvain Durand

► **To cite this version:**

Sylvain Durand. Sur quelques paradoxes en théorie du choix social et en décision multicritère. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2000. Français. NNT: . tel-00006743

HAL Id: tel-00006743

<https://theses.hal.science/tel-00006743>

Submitted on 24 Aug 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE JOSEPH FOURIER-GRENOBLE 1
SCIENCES & GEOGRAPHIE**

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

Discipline : Informatique

Formation Doctorale : Recherche Opérationnelle, Combinatoire et Optimisation

Présentée et soutenue publiquement

par

DURAND Sylvain

Le 19 juin 2000

**SUR QUELQUES PARADOXES EN THEORIE DU CHOIX SOCIAL
ET EN DECISION MULTICRITERE**

Directeur de thèse : Hervé RAYNAUD

COMPOSITION DU JURY :

M. Denis BOUYSSOU,	Rapporteur
M. Dominique de WERRA,	Président
M. Gerd FINKE,	Examineur
M. Dominique LEPELLEY,	Rapporteur
M. Hervé RAYNAUD,	Directeur
M. Damien TRENTESAUX,	Examineur

À mes parents, avec affection.

À Mathilde, avec tendresse.

À la mémoire de mon grand-père.

Avant-propos

En remerciant Hervé Raynaud, professeur à l'Université Joseph Fourier et directeur de cette thèse, ce sont deux personnes que je tiens à saluer. Tout d'abord le professeur qui a su développer mon intérêt pour ces aspects des problèmes de décision, me guider vers des pistes de recherches fructueuses tout en me laissant une grande autonomie. Mais c'est surtout un ami que je veux remercier, un ami qui m'a soutenu et encouragé tout au long de ces années et dont les conseils me serviront sans doute autant dans ma vie privée que professionnelle.

Dominique de Werra, professeur à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne, m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse. Je l'en remercie vivement et j'espère pouvoir travailler avec lui et profiter de sa grande expérience.

Je souhaite aussi remercier sincèrement Denis Bouyssou, professeur à l'ESSEC, pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse et pour m'avoir, à plusieurs reprises donné l'occasion de présenter mon travail à la communauté scientifique.

Ma gratitude va également à Dominique Lepelley, professeur à l'université de Caen, qui a accepté d'être rapporteur de ce travail. Peut-être travaillerons-nous un jour ensemble sur l'un des nombreux sujets de la théorie du choix social pour lesquels nous avons un intérêt commun.

Gerd Finke, professeur à l'Université Joseph Fourier et directeur de la formation doctorale de recherche opérationnelle, m'a fait le plaisir de participer à mon jury. Je le remercie aussi pour les conseils avisés qu'il m'a donnés tout au long de ces années de troisième cycle.

Merci aussi à Damien Trentesaux, maître de conférences à l'université de Valenciennes, pour s'être intéressé à mon travail et m'avoir aidé dans la mise en œuvre de certains algorithmes. J'espère que les travaux que nous avons commencés ensemble continueront à porter leurs fruits.

C'est grâce à Éric Tannier qui a eu la patience de relire ce manuscrit que ce dernier est devenu plus agréable à lire. Je l'en remercie vivement.

Ces années de thèse auraient été sans doute moins agréables sans tous les (ex-)doctorants (en particulier ceux du Département de Mathématiques Discrètes du laboratoire LEIBNIZ) : Clarisse, Marie, Mouna, Nadia, Samia, Virginie, Ammar, Eckbel, Haris, Imed, Jiang, Lyes, Olivier, Sylvain, Yann... ainsi que les autres membres du département de Mathématiques Discrètes. Qu'ils reçoivent ici le témoignage de ma sincère amitié.

Enfin, à tous les autres, parents et amis qui m'ont soutenu lors de ces dernières années et sans qui ce manuscrit n'aurait sans doute pas vu le jour, j'adresse ma gratitude. Deux mention spéciale iront : l'une pour mes parents qui m'ont aidé dans les moments difficiles, l'autre pour Mathilde qui m'a toujours soutenu en dépit des aléas liés aux options que j'ai choisies.

Sommaire

Introduction générale.....	9
1. Le contexte : présentation et notation	13
2. Les paradoxes dans les théories du choix social et de la décision multicritère.....	29
3. Le paradoxe des conditions de Black et Arrow-Black.....	45
4. Des paradoxes liés au principe de prudence	77
5. Des paradoxes liés à la monotonie	101
6. Un paradoxe lié à la robustesse.....	117
Conclusion.....	143
Bibliographie.....	145
Table des Matières	153
Liste des figures	157
Liste des tableaux	159
Index	161

Introduction générale

Le 7 mai 1995, Jacques Chirac est élu président de la république. Il bat au second tour Lionel Jospin avec 15 551 412 voix contre 13 975 871. Pourtant, si Lionel Jospin n'avait pas réussi à convaincre certains des électeurs potentiels d'Édouard Balladur, il aurait peut-être gagné l'élection : Avec 689 828 voix de plus, récupérées dans l'électorat de Lionel Jospin au premier tour, Édouard Balladur aurait battu Jacques Chirac. Il aurait été opposé à Lionel Jospin au second tour. Si 787 771 (5%) des électeurs ayant voté pour Jacques Chirac au second tour avaient préféré Lionel Jospin à Édouard Balladur, ce dernier aurait perdu l'élection. Ainsi, s'il avait été un peu moins bon au premier tour, Lionel Jospin aurait pu être président de la république.

Un lecteur peu familier avec la théorie du choix social pourrait être surpris par cet exemple. Pourtant, ce type de paradoxes est très fréquent dans ce domaine. C'est à l'étude de quelques-uns d'entre eux qu'est consacré ce document.

Qu'est ce qu'un paradoxe ? Voici la définition du grand Robert 1997 :

Paradoxe n. m. *-paradoxe* **1485** ; gr. *Paradoxos* « contraire à l'opinion commune » **1.** Opinion, argument ou proposition qui va à l'encontre de l'opinion communément admise ou de la vraisemblance. **2.** Être, chose, fait extraordinaire, incompréhensible, qui heurte la raison, le bon sens, la logique. **3.** LOG. Se dit d'une proposition qui peut être démontrée à la fois vraie et fausse.

Cette définition du paradoxe est assez vague. Il n'est donc pas étonnant que ceux-ci soient très nombreux ! Falletta (1983) les classe en cinq catégories pour lesquelles nous donnerons les exemples les plus connus :

- *Paradoxes visuels*. Dans cette catégorie se trouvent entre autres les illusions d'optiques, les figures ambiguës ou encore les figures impossibles comme le célèbre triangle impossible de Penrose.

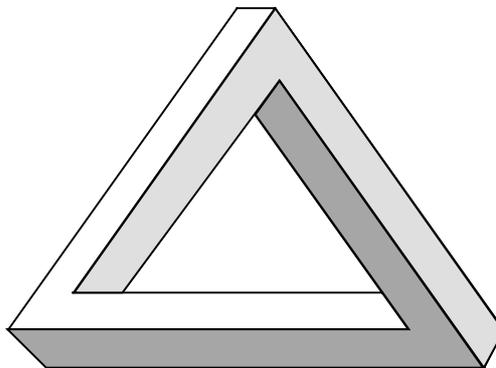


Figure 6.1 : Triangle impossible de Penrose

INTRODUCTION GÉNÉRALE

- *Paradoxe de l'infini*. Les plus connus d'entre eux sont aussi les plus anciens. Il s'agit des paradoxes de Zénon (v^{ème} siècle avant Jésus-Christ). L'un d'entre eux oppose Achille à une tortue dans une épreuve de marathon. Achille, athlète reconnu, court cent fois plus vite que la tortue. Fair-play, il laisse à la tortue dix mètres d'avance. Au bout d'un temps T_1 , Achille est arrivé au point de départ de la tortue. Mais celle-ci est pendant ce temps arrivée au point P_1 . Il faudra à nouveau un temps T_2 pour qu'Achille arrive en P_1 . Pendant ce temps, la tortue... Et ainsi de suite jusqu'à l'infini, Achille ne rattrapera donc jamais la tortue !
- *Paradoxes logiques*. Il s'agit ici des paradoxes correspondant à la troisième partie de la définition. Ces paradoxes comportent souvent des énoncés qui portent sur eux même. Citons parmi ceux-ci le paradoxe du barbier proposé par Russell (ce barbier rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là ; Mais alors qui rase le barbier ?), le classique paradoxe du menteur (« tous les Français sont des menteurs »), ou ce joli paradoxe dû à Jourdain :

La phrase écrite de l'autre
coté du trait est vraie

La phrase écrite de l'autre
coté du trait est fausse

- *Paradoxes scientifiques*. Outre les célèbres paradoxes temporels impliqués par la théorie de la relativité, Falletta classe aussi dans cette catégorie le paradoxe des corbeaux que nous traduirons ici en langage martien. La proposition A : « tous les martiens sont verts » est logiquement équivalente à la proposition B : « tout ce qui n'est pas vert n'est pas un martien ». Chaque fois que nous voyons un martien vert, cela confirme la proposition A . Ceci est assez rare. Par contre, il est très facile de confirmer B . Il existe autour de nous d'innombrables objets qui ne sont pas verts et qui ne sont pas des martiens. À chaque fois que nous en voyons un, cela confirme que les martiens sont verts !
- *Paradoxes du choix et de la prédiction*. Nous trouvons ici des paradoxes liés aux probabilités (paradoxe de Simpson^{1, 2}), le dilemme des accusés, bien connu en théorie des jeux et aussi quelques paradoxes du vote dont nous présenterons de nombreux exemples au chapitre 1.

L'engouement des scientifiques pour les paradoxes remonte à la civilisation grecque. Comment expliquer les efforts continuels de ceux-ci pour tenter de les résoudre ? Est-ce un simple attrait pour les phénomènes occultes, inexpliqués ? Les véritables raisons sont sans doute plus compliquées. Les paradoxes nous trompent doublement. Par définition, ils trompent notre bon sens. Mais la véritable erreur est sans doute de les trouver tellement simples que nous faisons seulement appel à notre bon sens pour les appréhender. Il est toujours frustrant de se tromper. Mais être trompé deux fois par le même objet, c'en est trop ! C'est sans doute pourquoi la rationalité refuse le paradoxe et cherche à l'expliquer.

Les paradoxes sont généralement simples à exposer. Ils sont souvent beaucoup plus ardues à expliquer.

¹ Cohen M. et Nagel E., Introduction to logic and scientific method, Routledge and Kegan Paul, Londres, 1934.

² Note sur les notes : Les références données dans la bibliographie sont celles qui ont été utilisées lors de la rédaction de cette thèse, celles données en notes de bas de page sont seulement des indications pour le lecteur intéressé et sont généralement plus difficiles à trouver.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Parfois, des déductions effectuées à partir de notions intuitives, et communément acceptées, conduisent à des contradictions insurmontables, dues non pas aux raisonnements mais aux prémisses admises. Résoudre le paradoxe consiste alors à comprendre quelles sont les prémisses que nous avons eu tort d'admettre et éventuellement pourquoi nous les avons admises.

D'autres résultats qui heurtent notre intuition nous forcent, pour pouvoir les expliquer à adopter des théories nouvelles. Ils sont souvent la preuve des lacunes des cadres théoriques dans lesquels ils sont censés s'inscrire. Ainsi, comme le remarque Rapoport (1967), de nombreux paradoxes sont à l'origine de développements importants dans le domaine scientifique dont ils sont issus. Les paradoxes de Zénon ont sans doute permis d'élaborer le concept des séries infinies convergentes. Les résultats paradoxaux de l'expérience de Michelson-Morley sont à l'origine de la théorie de la relativité. Plus proche de notre domaine, c'est certainement grâce aux résultats paradoxaux de Condorcet et Arrow que la théorie du choix social connaît un tel essor.

Des trois définitions proposées par le grand Robert, nous retiendrons principalement la deuxième. En effet, c'est celle qui est la plus adaptée aux paradoxes rencontrés en théorie du choix social et en décision multicritère. Le terme de paradoxe est en général utilisé dans un sens assez large, pour désigner des résultats étonnants. Les paradoxes que nous étudierons sont des résultats qui heurtent le « bon sens ». Remarquons ici une divergence par rapport à la première définition : notre bon sens n'est peut être pas celui « communément admis » ! Cependant, pour tous les résultats présentés, nous essayerons de montrer en quoi une réflexion un peu trop rapide pourrait aboutir à des conclusions contraires.

Nous présenterons tout d'abord les grandes lignes de la théorie du choix social et de la décision multicritère en montrant que ces deux domaines sont étroitement liés. Nous définirons à cette occasion le minimum de vocabulaire nécessaire à la compréhension de la suite du document.

Nous proposerons ensuite une visite guidée des principaux paradoxes de la théorie du choix social et de la décision multicritère. Nous essayerons aussi d'analyser les différentes approches utilisées pour tenter de les expliquer.

Nous nous attaquerons alors à notre tour à certains des paradoxes rencontrés. Le premier d'entre eux concerne les restrictions imposées par certaines conditions de transitivité de la méthode majoritaire. Nous verrons qu'en utilisant une nouvelle approche, il est possible de mieux comparer ces restrictions.

Ensuite, nous nous intéresserons à une procédure de vote particulière : la fonction de choix prudente. Nous étudierons de manière théorique et expérimentale certains des paradoxes dans lesquels elle est impliquée.

L'exemple présenté au début de cette introduction montre que le scrutin majoritaire uninominal à deux tours ne respecte pas l'axiome dit de monotonie. Nous verrons que ce problème était prévisible. Nous étudierons en détails cet axiome. Les résultats théoriques seront complétés par des valeurs expérimentales.

Nous terminerons en proposant un nouveau paradoxe lié à la robustesse de certaines procédures par rapport aux variations des poids des critères. Les indices permettant d'évaluer la robustesse pourront, de plus, être utilisés dans diverses applications.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1. Le contexte : présentation et notation

Ce chapitre contient le vocabulaire nécessaire à la compréhension du début de ce mémoire. Le reste de la terminologie (notations, définitions) sera introduit au fil des pages pour rendre la lecture plus conviviale. Nous éviterons ainsi un ennuyeux chapitre de définitions. En cas d'incertitude sur un terme, le lecteur trouvera, en fin de thèse, un index qui lui permettra d'en retrouver la définition.

Un des paris tentés dans cette thèse est sans doute ambitieux : trouver un vocabulaire compréhensible à la fois par les lecteurs familiers de la théorie du choix social et par ceux qui sont plus proches de la décision multicritère. Ces deux communautés de pensées, s'étant (trop) longtemps ignorées, ont développé, chacune de leur côté, un vocabulaire propre qui bien souvent désigne les mêmes concepts. Nous essayerons donc de montrer ici quels sont les points communs à ces deux théories, quelles sont les différences et comment interpréter le vocabulaire que nous utiliserons.

1.1 Choix social ou décision multicritère ?

Les deux domaines de recherche auxquels s'apparentent nos travaux étant bien distincts, nous en ferons tout d'abord une présentation séparée, puis, nous montrerons que leur intersection n'est pas vide. C'est dans cette intersection que se situent nos recherches.

1.1.1 Présentation du choix social et de la décision multicritère

Cette présentation du choix social et de la décision multicritère est avant tout un aperçu permettant au lecteur de situer plus précisément ces deux domaines de recherche et nos travaux à l'intérieur de ceux-ci. Pour une présentation complète, le lecteur peut consulter les ouvrages généraux cités en références.

1.1.1.1 Choix social

L'objectif principal de la théorie du choix social est de répondre à la question suivante : comment agréger des préférences individuelles en un choix collectif ? Cette question, posée initialement dans le cadre des sciences politiques (au XVIII^{ème} siècle avec les travaux de Condorcet et Borda sur lesquels nous reviendrons, voir [Mc Lean 1995]), conduit naturellement à l'étude des procédures de vote.

Ce sont des économistes qui, dans les années 1950, ont remis au goût du jour cette théorie. Pour comparer les états sociaux, leur but était de trouver une méthode permettant de choisir parmi les allocations optimales au sens de Pareto¹. Les fonctions d'utilité collective proposées par Arrow ont donc pour but d'agréger les préférences individuelles sur les différents optima de Pareto pour obtenir une préférence collective.

¹ Une solution est optimale au sens de Pareto si elle n'est pas moins bonne qu'une autre solution pour chacun des critères considérés et strictement moins bonne pour au moins un critère.

Le problème traité dépasse en fait largement ce cadre d'application puisque les options en présence peuvent aussi bien être des états sociaux que des candidats politiques, des projets d'investissement ou encore des objectifs de planification.

À cette époque, les chercheurs ont donc étudié de façon normative ces procédures de vote. Le résultat le plus célèbre est assez paradoxal et très décourageant : le théorème d'impossibilité d'Arrow¹ montre qu'il n'existe pas de fonction d'utilité collective vérifiant simultanément un ensemble de conditions qui semble pourtant raisonnable. D'autres auteurs se sont intéressés à la possibilité de manipuler ces procédures de vote en exprimant des opinions contraires à leurs préférences sincères (votes stratégiques). Ici encore, le résultat est décourageant. Gibbard (1973) et Satterthwaite (1975) ont en effet montré qu'il n'existait pas de procédure non-dictatoriale et non-manipulable. Nous reviendrons sur ces deux théorèmes dans le chapitre 2.1.1.1. De nombreuses variantes de ces deux théorèmes d'impossibilité ont été proposées en affaiblissant certains axiomes et en renforçant d'autres.

Heureusement, il existe aussi dans la théorie du choix social des résultats encourageants. Deux démarches ont principalement été explorées. La première consiste à affaiblir certains axiomes pour aboutir à des théorèmes d'existence. Dans le cas où une seule procédure (ou famille de procédures) vérifie l'ensemble d'axiomes, il s'agit des théorèmes de caractérisation. Les principaux théorèmes de caractérisation sont dus à May (1952) (méthode majoritaire), Young (1974) et Nitzan et Rubinstein (1981) (méthode de Borda), Smith (1973) (méthodes positionnelles), Young et Levenglick (1978) (méthode de Kemeny), Henriot (1985) (méthode de Copeland), Fishburn (1978) (vote par approbation) pour n'en citer que quelques uns. Nous verrons dans le chapitre 3 les conséquences de l'affaiblissement de l'universalité du domaine de définition de ces procédures en particulier pour la méthode majoritaire.

L'autre possibilité consiste à étudier les nombreuses procédures existantes et éventuellement à essayer de comparer leurs comportements par rapport à un certain nombre de propriétés que l'on considère comme souhaitables. Citons entre autres les travaux de Arrow et Raynaud (1986), Fishburn (1974b), Lepelley (1989) ou encore Saari (1994). C'est dans cette démarche que s'inscrivent les chapitres 3, 4 et 5 de cette thèse.

1.1.1.2 Décision multicritère

Ici encore, nous ne donnerons qu'un rapide coup d'œil sur l'ensemble des aspects de la décision multicritère pour aider le lecteur à situer nos travaux.

La décision multicritère, ou plus précisément l'aide à la décision multicritère s'est développée depuis la fin des années 60 pour faire face aux lacunes des méthodes monocritères classiques de recherche opérationnelle. Ces techniques ont pour but l'optimisation d'un critère unique suite à une modélisation du problème rencontré. Hélas, les modèles ne reflètent pas toujours la réalité des problèmes. Les décideurs se sont en effet rendu compte que les bonnes décisions résultaient plutôt de la prise en compte de critères multiples et contradictoires. Le but n'est pas de trouver une solution optimale, mais une solution satisfaisante ou adéquate.

Le processus

La résolution d'un problème multicritère peut être divisée en plusieurs phases. Suite à un désir de changement de la part du décideur, il s'agit tout d'abord de déterminer quelles sont les actions qui peuvent être considérées, les objectifs et les attributs permettant de comparer ces actions et le type de recommandation souhaité par le décideur. Cette phase de définition du

¹ Voir [Arrow et Raynaud 1986] pour une version simplifiée de la démonstration de ce théorème.

1 LE CONTEXTE : PRÉSENTATION ET NOTATION

problème et de collecte des données est sans doute la plus délicate. Le lecteur pourra consulter à ce sujet [Roy 1985].

Il s'agit ensuite d'élaborer une solution en essayant d'exploiter « au mieux » les données. C'est ici que se situe le choix de la méthode à utiliser.

Si la méthode de résolution apporte une solution au problème, une étude de robustesse est généralement effectuée pour en connaître la fiabilité.

Nous nous intéresserons à certaines propriétés de ces méthodes ainsi qu'à l'étude de la robustesse de certaines d'entre elles.

Les approches

Les problèmes pratiques rencontrés par les chercheurs du domaine les ont tout d'abord conduits à élaborer des méthodes essentiellement fondées sur le bon sens pour répondre aux attentes des entreprises. Suite à cette prolifération de méthodes plus ou moins intuitives ([Bernard et Besson 1971]), la question s'est alors posée de savoir ce qui pouvait justifier le choix d'une méthode pour répondre à un problème donné. C'est dans cette voie que s'est développée l'approche axiomatique en décision multicritère.

Pour aborder les problèmes de décision multicritère, différentes démarches sont envisageables. La classification donnée ici est issue de [Roy 95] et [Bell et al. 1988].

Descriptive

Dans cette démarche descriptive, l'expert suppose qu'il existe une vérité cachée dont il s'agit de faire prendre conscience au décideur. Outre l'existence de cette vérité, il faut aussi supposer qu'elle ne change pas au cours du temps et des observations.

Normative

L'approche normative consiste à faire exprimer par le décideur, sous forme d'axiomes, les règles qui modélisent le comportement qu'il souhaiterait avoir, en tant que décideur rationnel. Cette approche permet ainsi de choisir la méthode multicritère à utiliser ou éventuellement de construire une nouvelle méthode directement à partir d'une batterie d'axiomes désirés ([Pasquier-Dorthe et Raynaud 90]). Devant la diversité des méthodes proposées, Bouyssou et al. (1993) constatent que cette analyse axiomatique des procédures est nécessaire pour rendre crédible l'approche multicritère.

Nous verrons plus loin que cette démarche est fertile en paradoxes et c'est donc assez naturellement que nos travaux s'inscrivent dans cette voie.

Les liens entre les différentes démarches restent assez flous. Parmi les variantes de la démarche normative, citons la démarche constructive proposée dans [Pirlot 1994]. La principale nuance par rapport à l'approche purement normative est la recherche de résultats opérationnels, les axiomes étudiés ne décrivent plus seulement les règles d'un comportement rationnel mais aussi la façon dont la procédure fonctionne.

« Prescriptive »

Dans [Bell et al. 1988], les auteurs distinguent des deux démarches précédentes une démarche « prescriptive » dont le but est avant tout d'aider le décideur à améliorer ses décisions. L'intérêt est porté sur l'amélioration de la décision apportée par la méthode plus que sur la méthode elle-même. Une méthode est jugée bonne à partir du moment où elle permet au

1 LE CONTEXTE : PRÉSENTATION ET NOTATION

décideur d'améliorer ses décisions et non pas lorsqu'elle a de bonnes propriétés ou qu'elle reflète bien la réalité de la situation.

Les procédures

Face à un problème multicritère, le but du décideur est d'essayer de prendre en compte « au mieux » les préférences exprimées par les différents critères. Ceci conduit généralement à une phase d'agrégation des préférences. C'est à l'étude de certains comportements plus ou moins étonnants de ces méthodes que cette thèse est consacrée.

Il y a différentes façons d'aborder l'agrégation des préférences. Nous présentons ici les trois catégories principales bien que notre travail ne porte que sur la première.

Surclassement

Le but des méthodes de surclassement est de déterminer une (ou plusieurs) relation binaire sur l'ensemble des options. Cette relation binaire est un outil pour indiquer dans quelle mesure une option x est globalement meilleure ou préférée à une option y .

Utilité multiattribut

Toute la théorie de l'utilité est fondée sur le principe selon lequel, lors d'une prise de décision, nous cherchons toujours à maximiser une fonction qui représenterait l'utilité des options en présence. Le problème consiste donc à trouver cette fonction. Il faut trouver un modèle de fonction compatible avec la structure de préférences et ensuite déterminer les paramètres intervenant dans le modèle utilisé.

Méthodes interactives

Ces méthodes sont dans leur principe très différentes des deux catégories citées précédemment. Elles visent à élaborer une prescription à la suite d'un dialogue avec le(s) décideur(s). En raison de ce dialogue, ces méthodes sont dédiées aux problèmes de décision multicritère (et plus particulièrement d'optimisation multicritère) et elles ne sont pas adaptées au problème du choix social. Elles ne seront donc pas étudiées dans cette thèse, mais le lecteur intéressé pourra trouver dans [Roy et Bouyssou 1993] une description des structures générales des méthodes interactives ainsi que les principales références dans ce domaine.

1.1.2 Différences et similitudes

À la question posée dans le titre de ce chapitre « Choix social ou décision multicritère ? », nous tenterons ici de justifier la réponse suivante : choix social **et** décision multicritère.

Nous avons cherché, dans cette thèse, à nous inscrire dans la lignée des auteurs qui ont essayé de rapprocher les théories du choix social et de la décision multicritère. Notre principal guide a bien évidemment été l'ouvrage [Arrow et Raynaud 1986]. Les auteurs montrent que le fossé qui semble séparer les économistes travaillant sur la théorie du choix social et les chercheurs issus de la recherche opérationnelle travaillant en décision multicritère peut facilement être franchi.

En simplifiant les choses, le lien est le suivant : dans un problème multicritère, le ou les décideurs cherchent en général à sélectionner ou à classer des options en fonction des préférences exprimées par un certain nombre de critères. N'est-ce pas un problème similaire

pour l'état ou pour une assemblée de sélectionner ou de classer des candidats en fonction des préférences exprimées par un certain nombre de votants?

L'assimilation n'est cependant pas si évidente. Nous citons ici les principaux points sur lesquels les problèmes diffèrent (voir aussi [Roy et Bouyssou 1993] pp 177-180 ou [Marchant et al. 1999]).

– *Ensemble des votants*

L'ensemble des votants est généralement connu dans un contexte de choix social (par exemple tous les citoyens, tous les membres de l'assemblée ou tous les habitants d'une commune). La définition de cet ensemble n'est cependant pas toujours évidente (les femmes n'ont le droit de voter que depuis 1945, l'âge de la majorité n'a pas toujours été 18 ans...). Cet aspect est rarement pris en compte dans le processus de choix car il est généralement fixé indépendamment. Il n'en est pas de même dans un contexte multicritère. Trouver une famille cohérente de critères est déjà dans ce cas un problème à part entière (voir par exemple [Roy et Bouyssou 1993] sur la construction d'une famille cohérente de critères). Dans toute cette thèse, nous supposons que cet ensemble de votants-critères est donné.

– *Ensemble des candidats*

Dans un contexte de choix social, les candidats sont eux aussi connus. Ici encore, les règles permettant de déterminer qui peut être candidat peuvent différer selon les élections, selon les pays... En décision multicritère, le choix des différentes options en lice est déjà un problème à part entière¹. En effet, dans ce cas, les options envisageables ne sont pas forcément toutes connues. Dans le choix d'une stratégie d'investissement, il est fort peu probable que toutes les possibilités aient été envisagées. Quelles en sont les conséquences sur le classement des stratégies sélectionnées? Faut-il à tout prix essayer de déterminer toutes les stratégies possibles? L'étude de certains axiomes comme l'indépendance par rapport aux options non-pertinentes est là pour tenter de répondre à ces questions.

– *Importance relative des critères*

En général, en théorie du choix social, les votants sont tous traités de la même façon (c'est le cas dès que les procédures vérifient l'axiome d'anonymat que nous verrons plus loin). Ceci est en général faux en décision multicritère où les critères n'ont pas tous la même importance. La structure d'importance relative des critères peut être décrite de façons différentes allant de l'ensemble vide à une relation binaire sur l'ensemble des critères en passant par des indices de puissance des différentes coalitions de critères ou d'un vecteur de poids. C'est à cette dernière structure que nous nous intéresserons plus particulièrement dans le chapitre 6. Dans les autres chapitres, nous supposons que tous les votants ont la même importance, mais nous verrons que dans la plupart des cas, il est facile de passer d'une procédure pour laquelle tous les votants ont la même importance à une procédure où l'importance relative des votants est déterminée par un ensemble de poids.

– *Structure des préférences*

En théorie du choix social, les préférences des votants sont généralement limitées à des structures assez simples (le ou les candidats préférés, un classement avec ou sans ex aequo sur l'ensemble des candidats...). De plus, il est imposé aux votants d'exprimer leur opinion en utilisant tous la même structure de préférence. Le problème est très différent en décision

¹ Voir par exemple à ce sujet [Keeney 1992].

multicritère. Les critères sont de nature diverse et il n'y a donc aucune raison pour que les structures de préférences qui leur sont associées soient de même nature. Ainsi, prenons l'exemple de l'évaluation du tracé d'une ligne TGV. Nous pouvons imaginer des critères comme la perte de surfaces agricoles ou l'effet de nuisance sonore qui sont évalués sur des échelles numériques (mais avec des unités différentes). Mais il existe aussi des critères comme le charme du paysage dégradé ou la qualité résidentielle dégradée qu'il semble plus pertinent d'évaluer sur des échelles qualitatives. L'intérêt de certaines méthodes (Prométhée par exemple) est justement lié à la possibilité d'utiliser différents modèles de préférences des critères. Une grande partie du travail consiste alors à trouver comment prendre en compte correctement les différences entre ces structures de préférences.

Les hypothèses que nous ferons sur les structures de préférences, les ensembles de critères et d'options et l'importance relative des critères pourront donc paraître très réductrices pour un lecteur issu de la communauté multicritère. Cependant, plusieurs travaux récents montrent que la décision multicritère a encore beaucoup à apprendre des nombreux résultats issus de la théorie du choix social. Cette dernière a entre autres l'avantage de l'ancienneté. Son renouveau date des années 50 alors que le développement de la décision multicritère n'a commencé que dans les années 70. Le lecteur trouvera dans [Vincke 1982a] une revue assez complète des principaux articles théoriques sur l'agrégation des préférences. Le lien entre le choix social et la décision multicritère apparaît très clairement dans la classification des articles. Remarquons de plus que la plupart des résultats, bien qu'ils ne soient valables que pour un type particulier de décision multicritère (le choix social), ne sont pas dénués d'intérêt dans un cadre plus général.

1.2 Notation et définitions

Ce chapitre presque indispensable à la clarté et à la rigueur de toute thèse présente la notation et les définitions utilisées. Que le lecteur ne s'effraie pas trop de leur aspect mathématique, si les concepts utilisés peuvent être difficiles et abstraits, la terminologie employée reste quant à elle très naturelle et proche de l'intuition.

1.2.1 Fonctions de choix et d'agrégation

Précisons tout d'abord la définition mathématique des termes que nous avons employés.

1.2.1.1 Structures de préférences

Dans le contexte multicritère, le décideur désignera la personne, l'entreprise ou l'organisme qui doit prendre la décision. Il est bien évident que ce décideur n'est pas forcément une personne physique unique (il peut s'agir d'un conseil de direction, d'un comité de sélection). Dans le contexte du choix social, nous entendrons par décideur l'État, la société ou l'assemblée qui doit établir la préférence collective.

Nous avons vu que la détermination de l'ensemble des options n'était pas toujours une tâche facile. De plus, en décision multicritère, ces options peuvent être en nombre infini (quantité d'une ressource à allouer par exemple). Dans ce cas, nous avons affaire à un problème d'optimisation multicritère et, bien que certaines méthodes puissent être adaptées d'un problème

à l'autre [Othmani 1998], l'étude de cette classe de problèmes est très différente. De plus, un nombre infini de candidats n'est pas une hypothèse très réaliste en théorie du choix social. C'est pour ces deux raisons que dans tout ce qui suit, l'ensemble des options-candidats, noté $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, est un ensemble de cardinalité finie donné explicitement. Pour alléger la rédaction, les options seront parfois notées a, b, c, \dots

L'ensemble des votants-critères noté $V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ est lui aussi de cardinalité finie. Pour alléger la rédaction, nous utiliserons les termes de critère et d'option lorsque les résultats s'apparentent à ceux que l'on trouve en décision multicritère et les termes de votant et de candidat lorsqu'ils sont plus proches de la théorie du choix social.

Comme nous l'avons vu précédemment, les critères n'ont pas forcément tous la même importance. La manière la plus courante de modéliser l'importance relative de ces critères est d'associer un poids à chacun d'eux. Le vecteur-poids est donc un vecteur $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ de \mathbb{R}^n où la $i^{\text{ème}}$ coordonnée donne l'importance du $i^{\text{ème}}$ critère. Notons que dans le cas de procédures homogènes (nous verrons plus loin la définition de cette propriété), les poids sont souvent normés pour avoir une somme unitaire. Le problème de l'évaluation de l'importance relative des critères est crucial par exemple lorsque l'on essaye d'adapter la méthode majoritaire à la décision multicritère ([Vansnick 1986]). Il ne sera pas abordé dans cette thèse.

Les préférences associées aux critères dans un problème multicritère peuvent être de natures différentes. Ces structures de préférences sont fondées sur des relations binaires sur les options possédant des propriétés plus ou moins fortes. Les deux structures auxquelles nous nous intéresserons plus particulièrement sont les ordres stricts et les préordres complets car ce sont celles que l'on retrouve le plus fréquemment en théorie du choix social. Nous supposerons aussi que tous les votants-critères ont la même structure de préférence.

Définition 1.2.1 *Une relation binaire R sur un ensemble X est un sous-ensemble du produit cartésien $X \times X$. L'appartenance du couple (a, b) à la relation R est notée aRb .*

La non-appartenance du couple (a, b) à la relation R est notée $\neg(aRb)$; \vee désigne l'opérateur logique « ou » non exclusif, \wedge désigne l'opérateur logique « et ». La restriction d'une relation binaire R à un sous-ensemble $Y \subseteq X$ est notée $R(Y)$.

Définition 1.2.2 *Une relation binaire R est dite*
asymétrique si $\forall a, b \in X, aRb \Rightarrow \neg(bRa)$;
faiblement complète si $\forall a, b \in X, a \neq b \Rightarrow aRb \vee bRa$;
négativement transitive si $\forall a, b, c \in X, \neg(aRb) \wedge \neg(bRc) \Rightarrow \neg(aRc)$.
transitive si $\forall a, b, c \in X, aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

Les relations sur lesquelles nous travaillons ne sont pas réflexives (une relation binaire est réflexive si pour tout $a \in X, aRa$). En effet, ces relations modélisent des préférences, et dans ce contexte, la préférence d'un objet à lui-même n'a pas beaucoup de sens. C'est ce qui explique les propriétés un peu particulières utilisées. Que le lecteur peu familier avec ces propriétés ne s'inquiète pas, les définitions suivantes sont bien conformes à l'intuition qu'il peut en avoir. Une relation binaire R contient un cycle s'il existe un ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq X$ tel que $x_1Rx_2R\dots Rx_kRx_1$.

Définition 1.2.3 *Un ordre strict (ordre linéaire) est une relation binaire asymétrique faiblement complète et négativement transitive.*

Les ordres stricts présentent l'avantage majeur de conduire à des résultats relativement simples. Beaucoup de procédures sont naturelles pour les ordres stricts et deviennent compliquées lorsqu'on essaye de les généraliser aux préordres. De plus, les modèles probabilistes que nous utiliserons sont plus naturels dans ce cas. Pour simplifier la rédaction, l'ordre strict $R = (aRb, aRc, bRc)$ est noté $a > b > c$ ou abc .

Dans le cas d'un ordre strict R , la notion de rang (classement) $rg(R, x_i)$ d'une option x_i est naturelle : $rg(R, x_i) = 1 + \text{card}(\{x_j \in X \mid x_j R x_i\})$ où $\text{card}(A)$ désigne la cardinalité de l'ensemble A .

Il arrive parfois que deux options soient jugées parfaitement équivalentes. C'est par exemple le cas lorsque nous devons évaluer le critère coût d'une voiture et que deux d'entre elles ont exactement le même prix. Nous utilisons alors la structure de préordre complet.

Définition 1.2.4 *Un préordre complet est une relation binaire asymétrique et négativement transitive.*

Ici encore, pour simplifier la rédaction, le préordre complet $R' = (aR'b, aR'c)$ est noté $a > \{b, c\}$ ou $a\{b, c\}$.

Remarquons qu'il n'est pas non plus toujours possible de comparer deux candidats. Par exemple, lorsqu'un électeur ne connaît que les noms de deux candidats, celui-ci peut légitimement juger qu'ils ne sont pas équivalents mais bien incomparables (la structure utilisée dans ce cas est celle de préordre partiel). Il est aussi possible que la transitivité de la structure de préordre partiel soit une exigence trop forte. L'évaluation de plusieurs candidats par un électeur est un problème multicritère qui, comme nous allons le voir, peut conduire à une préférence cyclique. Nous nous limiterons cependant dans cette thèse aux préférences individuelles modélisées par des ordres stricts ou par des préordres complets.

Nous utiliserons aussi la notion de tournoi.

Définition 1.2.5 *Un tournoi est une relation binaire asymétrique et faiblement complète.*

Dans la suite, certains résultats seront valables pour des préordres complets, d'autres ne le seront que pour les ordres stricts (en particulier tous les résultats sur les conditions de transitivité de la méthode majoritaire et toutes les expérimentations). Nous mentionnerons explicitement les structures de préférences utilisées lorsqu'un doute sera possible.

Définition 1.2.6 *Un profil est un couple noté $\pi = (\mathbf{R}, \mathbf{W})$ où \mathbf{R} est un ensemble de n relations binaires R_1, R_2, \dots, R_n correspondant aux préférences des votants V_1, V_2, \dots, V_n sur l'ensemble X des options. Le vecteur $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ de \mathbb{R}^n est le vecteur-poids des critères.*

La restriction de π aux options de $Y \subseteq X$ est notée $\pi(Y)$ et nous parlerons alors de sous-profil. Lorsque l'ensemble des votants est restreint à $V' \subset V$, nous parlerons du sous-profil partiel $\pi(V')$. Le profil de $m + m'$ votants résultant de la concaténation de deux profils π (de m votants) et π' (de m' votants) sur le même ensemble d'options est noté $\pi \oplus \pi'$.

Nous utiliserons fréquemment dans la suite la notion de matrice de surclassement¹ (au sens d'Arrow-Raynaud) associée à un profil. Elle est définie comme suit.

Définition 1.2.7 *Les coefficients de la matrice de surclassement A associée à un profil π sont donnés par :*
$$a_{ij} = \sum_{k | x_i R_k x_j} w_k .$$

Remarquons que dans cette définition de la matrice de surclassement, les coefficients a_{ii} ne sont pas définis. Les coefficients de surclassement associés à l'option x_i sont les coefficients a_{ij} , $j \neq i$. Certains auteurs utilisent de façon similaire la matrice de Benjamin Franklin B d'un profil dont les coefficients sont $b_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$.

Dans sa thèse, Debord (1987) montre que le résultat des procédures respectant quelques axiomes faciles à légitimer ne dépend que de la matrice de surclassement (ou de la matrice de Benjamin Franklin) du profil. La plupart des fonctions que nous utiliserons vérifient ces axiomes. Ceci explique notre intérêt pour ces matrices.

1.2.1.2 Différents problèmes

Même s'il existe souvent des moyens simples pour passer d'une problématique à une autre, de nombreuses méthodes sont dédiées à l'une d'elle.

Problématique de sélection

Le but ici est de sélectionner une ou plusieurs options. Nous distinguerons deux types de sélections : la sélection par choix et la sélection par rejet. Dans le premier cas, le décideur souhaite connaître les options qui semblent les meilleures étant données les préférences exprimées. Dans le second cas, ce sont les options les pires qu'il faut déterminer. Si le passage d'un cas à l'autre est évident pour certaines procédures, nous verrons qu'il n'est pas sans poser quelques problèmes pour d'autres.

Les fonctions que nous utiliserons sélectionnent un ensemble non vide d'options. Les options de cet ensemble sont toutes jugées aussi bonnes. La définition des fonctions de choix est issue de [Fishburn 1973]. Pour n'utiliser qu'une seule notation dans tout le document, les fonctions de choix sont définies pour un sous-profil.

Définition 1.2.8 *Une fonction de choix F est une fonction qui associe à tout sous-profil $\pi(Y)$, $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$, un sous-ensemble non vide d'options $F(\pi(Y))$ inclus dans Y .*

Pour simplifier l'écriture, nous notons éventuellement $F(\pi)$ le résultat de F lorsque $Y = X$ et qu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Dans [Fishburn 1977], l'auteur remarque que, étant donné que les ensembles de choix ne dépendent que de préférences sur les options de Y , cette formulation est dans l'esprit de l'axiome d'indépendance d'Arrow. Cette indépendance est cependant beaucoup plus faible que la traditionnelle indépendance par rapport aux options non-pertinentes.

Dans certains cas (élection, poste à pourvoir, ...), le résultat souhaité par le décideur est l'unique option jugée la meilleure. Il est cependant assez facile de se rendre compte que pour ce

¹ Cette matrice est aussi appelée matrice électorale dans le contexte du choix social.

type de fonction (appelées règles de vote), il est trivialement impossible de traiter tous les candidats et tous les votants de manière égalitaire (quel est le candidat à choisir lorsque les $m!$ votants choisissent chacun un des $m!$ ordres stricts possibles ?). C'est pour cette raison que nous nous limiterons à l'étude des fonctions de choix.

Problématique de rangement

Dans d'autres cas, le décideur ne souhaite pas seulement connaître l'ensemble des meilleures options, mais un classement de l'ensemble de ces options (comme par exemple lors de l'attribution d'un poste lorsque les candidats sont susceptibles de se désister). Ici encore, les propriétés du résultat peuvent être différentes selon les problèmes traités. De même que les relations exprimant les préférences des critères peuvent être de nature différente (ordres stricts, préordres, ...), la relation exprimant la préférence globale peut avoir des propriétés plus ou moins fortes. La structure de préférences résultant de l'agrégation des opinions individuelles est en général plus faible que celle exprimant les opinions des votants. En effet, il semble peu pertinent d'exiger d'une fonction d'agrégation de donner un classement complet sur l'ensemble des options si les préférences des votants ne sont que des préordres partiels. Ou alors, il faut s'attendre dans ce cas à avoir des résultats parfois surprenants (qui sera classé premier si tous les votants estiment que tous les candidats sont indifférents ?).

De manière générale, les méthodes d'agrégation que nous étudierons associent un préordre complet à tout profil.

Définition 1.2.9 *Une méthode d'agrégation (appelée aussi méthode de rangement ou Fonction d'Utilité Collective) est une fonction G qui associe à tout sous-profil $\pi(Y)$, $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$, un préordre complet $G(\pi(Y))$ sur l'ensemble des options de Y .*

Les cas où le résultat doit être un ordre strict sur Y (fonction de décision multicritère utilisée dans la version simplifiée de la démonstration du théorème d'impossibilité d'Arrow [Arrow et Raynaud 1986]) ou un ensemble d'ordres stricts ou de préordres (procédures de préagrégation) ne seront abordés qu'à titre anecdotique.

Nous utiliserons le terme de procédure pour désigner à la fois les fonctions de choix et les fonctions d'agrégation.

Remarquons enfin que d'autres problématiques sont envisageables. Citons en particulier la problématique de tri dans laquelle le décideur doit affecter les options à différentes catégories. Ces problématiques ne représentent qu'une petite partie des problèmes multicritères et ne seront pas traitées dans cette thèse.

1.2.2 Quelques exemples de procédures étudiées

Les procédures étudiées trouvent pour la plupart leurs origines dans la théorie du choix social, mais nous les étudierons (en particulier dans le chapitre 6) dans un contexte multicritère.

1.2.2.1 La méthode majoritaire

La référence principale en terme de méthode de surclassement est la méthode majoritaire¹, élaborée à la fin du XVIII^{ème} siècle, qui est considérée par beaucoup comme l'origine de la théorie du choix social. Un candidat a est majoritairement préféré à un candidat b si la somme des poids des votants qui préfèrent a à b est supérieure à la somme des poids des votants qui préfèrent b à a .

Elle utilise donc la relation majoritaire définie comme suit.

Définition 1.2.10 *La relation majoritaire M est une relation binaire sur X définie par :*

$$x_i M x_j \Leftrightarrow \sum_{k|x_i R_k x_j} w_k > \sum_{k|x_j R_k x_i} w_k$$

Dans le cas où les w_k sont égaux, une option x_i est majoritairement préférée à x_j si le nombre de votants qui préfèrent x_i à x_j est strictement supérieur à $n/2$. Cette relation est la relation majoritaire stricte. Il est bien sûr possible de définir de même la relation majoritaire faible en remplaçant l'inégalité stricte par une inégalité large. Remarquons que pour des profils d'ordres stricts ayant un nombre impair de votants de poids unitaires (hypothèse courante en théorie du choix social), ces deux relations sont équivalentes.

Définition 1.2.11 *La méthode majoritaire sélectionne, lorsqu'elles existent, les options sans prédécesseurs dans la relation majoritaire.*

Les fonctions de choix qui donnent le même résultat que la méthode majoritaire lorsque celui-ci n'est pas vide sont dites Condorcet. Cette méthode a fait l'objet de nombreux travaux. May (1952) en a proposé une axiomatisation dans le cas de deux options. C'est en effet la seule fonction qui vérifie un ensemble d'axiomes dont beaucoup estiment qu'ils sont nécessaires à une démocratie.

Cependant, la méthode majoritaire n'est pas une fonction de choix, car la relation majoritaire n'admet pas toujours d'option sans prédécesseur. Nous verrons dans le chapitre suivant que lorsque trois options au moins sont en présence, cette méthode engendre un des principaux paradoxes de la théorie de choix social. Pour éviter ce paradoxe, de nombreux auteurs ont proposé des extensions de la méthode majoritaire qui présentent l'avantage de donner le même résultat lorsqu'il n'y a pas de problème de transitivité. C'est le cas de la méthode prudente sur laquelle nous nous attarderons. Fishburn (1977) présente quelques unes de ces extensions ainsi que plusieurs de leurs propriétés.

1.2.2.2 La méthode de Borda²

Elle fait aussi partie des références en théorie du choix social. Cette méthode s'est historiquement opposée à la méthode majoritaire [Mc Lean 1995]. L'idée de cette méthode est

¹ [Condorcet 1785] : Marquis de Condorcet, Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix, Imprimerie royale, Paris, 1785.

² [Borda 1781] : Borda J.C., Mémoire sur les élections au scrutin, Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, 1781.

1 LE CONTEXTE : PRÉSENTATION ET NOTATION

de prendre en compte l'intensité des préférences des votants. Elle est définie pour des profils d'ordres stricts. Nous verrons cependant qu'il est possible de la généraliser à des préordres ou à des relations valuées. Cette méthode est fondée sur le calcul d'un score pour chaque option.

Définition 1.2.12 *Le score de Borda $b(\pi(Y), x_i)$ d'une option $x_i \in Y$ dans un sous-profil $\pi(Y)$ est donné par la formule :*

$$b(\pi(Y), x_i) = \sum_{k \in [1..n]} w_k \cdot (|Y| - \text{rg}(R_k(Y), x_i))$$

Définition 1.2.13 *La fonction de choix de Borda sélectionne les options dont le score de Borda est le plus élevé :* $Borda(\pi(Y)) = \{x_i \in Y \mid \forall x_j \in Y, b(\pi(Y), x_i) \geq b(\pi(Y), x_j)\}$.

Nous avons donné ici la définition de la fonction de choix de Borda, la méthode de rangement de Borda consiste bien sûr à classer les options selon l'ordre décroissant de leurs scores de Borda. Il existe d'autres façons de trouver le classement donné par la méthode de Borda. Ainsi, en classant les options selon l'ordre croissant de la somme de leurs coefficients de surclassement, on obtient le même classement qu'avec la méthode de Borda. Plusieurs auteurs (Young (1974), Nitzan et Rubinstein (1981), Marchant (1996b)) ont aussi proposé des axiomatisations de la fonction de choix de Borda.

1.2.2.3 Les méthodes de scorage

La méthode de Borda peut facilement être généralisée aux méthodes de scorage. Leur principe est d'associer un score à chacune des places possibles. Les options sont classées en faisant la somme des scores obtenus pour les différents critères.

Définition 1.2.14 *Soit $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ un vecteur score de \mathbb{R}^m où s_i est le nombre de points qu'une option obtient toutes les fois qu'elle est classée au rang i . Une fonction de choix F_s (resp. une méthode d'agrégation G_s) est une méthode de scorage (resp. règle positionnelle simple) si et seulement si*

$$x_i \in F_s(\pi) \Leftrightarrow \forall x_j \in X, \sum_{k=1}^n w_k \cdot s_{\text{rg}(R_k, x_i)} \geq \sum_{k=1}^n w_k \cdot s_{\text{rg}(R_k, x_j)}$$

$$(resp. \forall x_i, x_j \in X, x_i G_s(\pi) x_j \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n w_k \cdot s_{\text{rg}(R_k, x_i)} \geq \sum_{k=1}^n w_k \cdot s_{\text{rg}(R_k, x_j)}).$$

Les méthodes de scorage les plus connues sont la pluralité ou vote à la majorité simple (vecteur score $(1, 0, \dots, 0)$), la méthode de Borda (vecteur score $(m-1, m-2, \dots, 1, 0)$) et l'antipluralité ou vote par opposition (vecteur score $(1, 1, \dots, 1, 0)$).

1.2.2.4 La méthode de Nanson¹

La méthode de Nanson fait partie des règles positionnelles itératives. Le principe de ces règles est de sélectionner les meilleures options en éliminant itérativement les options à l'aide

¹ [Nanson 1907] : Nanson E., Methods of election, British Government Blue Book Miscellaneous, n° 3, 1907.

d'une fonction de scorage. Dans le cas de la fonction de choix de Nanson, il s'agit d'éliminer successivement les options ayant le plus mauvais score de Borda (dans la version d'origine de cette fonction de choix, toutes les options ayant un score moins bon que la moyenne étaient éliminées, la version que nous utilisons est celle qui est restée d'usage). La (Les) option (s) éliminée(s) lors de la dernière itération est (sont) le(s) vainqueur(s) de Nanson. Ce mécanisme est équivalent à celui donné dans la définition suivante.

Définition 1.2.15 *Le résultat de la fonction de choix de Nanson est donné par $x_i \in \text{Nanson}(\pi) \Leftrightarrow x_i \in Y_m$, Y_m étant défini par la récurrence $Y_1 = X$ et $Y_{i+1} = Y_i - \{x_k \in Y_i \mid \forall x_j \in Y_i, b(\pi(Y_i), x_k) \leq b(\pi(Y_i), x_j) \text{ et } \exists x_j \in Y_i \mid b(\pi(Y_i), x_k) < b(\pi(Y_i), x_j)\}$.*

Curieusement, la fonction de choix de Nanson donne le même résultat que la méthode majoritaire lorsque la relation majoritaire est transitive. Nous verrons aussi que l'utilisation de mécanismes itérés comme celui-ci ne va pas sans créer quelques problèmes sur les propriétés de la procédure ainsi définie.

Il est bien sûr possible d'utiliser d'autres règles que la règle de Borda. Ainsi, l'élimination successive des options ayant le moins de premières places (itérations de la pluralité) est appelée règle de Hare¹. De même, en utilisant l'antipluralité (élimination de l'option ayant le plus de dernières places), on obtient la règle de Coombs².

Notons aussi les autres possibilités comme celles de faire du rejet en utilisant une fonction de choix itérée ou de construire un classement fondé sur les classes d'équivalences obtenues à chaque itération. Les différentes possibilités sont examinées en détails dans [Arrow et Raynaud 1986] et [Arrow et Raynaud à paraître].

¹ [Hare 1859]: Hare T., Treatise on the Election of Representatives, Parliamentary and Municipal, Longmans Green, London, 1859.

² [Coombs 1954], Coombs C., Theory of data, Wiley, New York, 1954.

1 LE CONTEXTE : PRÉSENTATION ET NOTATION

2. Les paradoxes dans les théories du choix social et de la décision multicritère

Comme dans la plupart des domaines scientifiques, la théorie du choix social et celle de la décision multicritère ont soulevé de nombreux paradoxes. Nous en présentons ici une liste non exhaustive et nous essayons d'analyser les moyens qui ont été utilisés pour tenter de les expliquer.

2.1 Les paradoxes : de Condorcet à Saari en passant par Arrow et Gibbard

La théorie du choix social est très fertile en résultats paradoxaux. Nurmi (1999) leurs a même consacré un livre. La raison principale tient sans doute à ce que les énoncés sont en général assez simples et compréhensibles par des personnes étrangères au domaine de recherche.

Dans des domaines où la terminologie et les concepts utilisés sont plus pointus, les conjectures paradoxales sont sans doute plus difficiles à imaginer. En effet, si seuls les spécialistes sont capables d'en comprendre l'énoncé, ils ne seront sans doute pas étonnés par un résultat allant à l'encontre de ce que pourrait penser une personne extérieure au domaine. Prenons un exemple en biologie. « La réduction des ribonucléotides en désoxyribonucléotides (maillons de base des chaînes de l'ADN) correspond à la conversion d'un diol en alcool. Cette réaction est une réduction à deux électrons, se passe dans un premier temps par une oxydation à un électron ». Cette assertion ne provoquera pas une grande émotion chez les personnes n'ayant pas quelques connaissances en chimie. De même, une personne du domaine ne sera pas surprise de ce résultat car elle sait qu'il faut activer une liaison C-H pour initier le mécanisme et que ceci ne peut se faire que selon un mécanisme radicalaire (qui correspond à une oxydation à un électron). Une fois le radical formé il y a plusieurs réductions successives qui conduisent finalement au produit désiré. Ainsi, ce mécanisme ne semble pas paradoxal pour grand monde. Les énoncés des paradoxes auxquels nous avons affaire sont au contraire très intuitifs. Il n'est pas nécessaire d'avoir des connaissances approfondies en théorie du choix social où en décision multicritère pour comprendre la plupart d'entre eux.

De même, il existe des résultats paradoxaux auxquels nous sommes confrontés très jeunes et qui sont devenus naturels. L'existence de valeurs non rationnelles comme $\sqrt{2}$ s'enseigne dès la classe de seconde. Ce fait, loin d'être intuitif, n'étonne donc aucune des personnes qui ont un minimum de culture mathématique. Au contraire, peu de personnes savent qu'il existe une théorie du choix social et des manières plus ou moins rationnelles de faire des choix en présence de critères multiples. Elles sont encore moins nombreuses à connaître les résultats de ces disciplines. Il n'est donc pas étonnant qu'elles puissent avoir des intuitions erronées dans ces domaines.

Le plus connu et le plus ancien paradoxe de la théorie du choix social est certainement le paradoxe de Condorcet présenté au XVIII^{ème} siècle. Ce paradoxe appelé aussi paradoxe du vote, paradoxe d'Arrow ou encore « effet Condorcet » résulte de la possibilité d'intransitivité du résultat de la méthode majoritaire. Considérons un profil sur trois options $\{a, b, c\}$ dans lequel les préférences des trois votants sont $a > b > c$, $b > c > a$ et $c > a > b$. En appliquant la méthode

majoritaire, le lecteur s'apercevra que a est préféré à b , b est préféré à c ... et c est préféré à a ! Ainsi, la méthode majoritaire qui semblait pourtant avoir de bonnes vertus démocratiques ne permet pas de déterminer un vainqueur. En agrégeant des ordres stricts à l'aide de la méthode majoritaire, le résultat obtenu n'est pas un ordre strict. Nous ne ferons pas la liste des très nombreux travaux portant sur le paradoxe de Condorcet, mais le lecteur intéressé pourra consulter [Gehrlein 1983] pour un spicilège sur ce sujet.

2.1.1 Les paradoxes liés à l'approche axiomatique

De nombreux paradoxes sont nés de l'approche axiomatique. Comme nous l'avons vu, l'approche axiomatique consiste à examiner des propriétés (axiomes) dont le respect simultané modéliserait notre objectif en matière de technique de décision. Beaucoup d'axiomes nous paraissent être incontournables, parfaitement légitimes et peu contraignants. Il suffit dès lors de trouver une procédure ayant une brave allure (et ce n'est pas très difficile si l'on en juge par la multitude des procédures existantes¹) qui ne vérifie pas un de ces axiomes pour que l'assertion « la procédure P ne vérifie pas l'axiome A » nous paraisse paradoxale. Ce type de paradoxe est d'autant plus facile à trouver que ces axiomes légitimes sont souvent beaucoup plus contraignants qu'ils n'en ont l'air.

Le lecteur trouvera, dans [Fishburn 1977], un certain nombre de résultats de ce type sur les fonctions de choix « Condorcet » (leur résultat est identique à celui de la méthode majoritaire lorsque celui-ci est transitif). Le plus paradoxal est sans doute celui de la fonction de choix de Dodgson². Le score de Dodgson d'une option est le nombre minimum de transpositions d'options consécutives à effectuer dans les ordres stricts modélisant les préférences des votants pour que cette option devienne vainqueur majoritaire. La fonction de choix de Dodgson sélectionne les options qui minimisent ce score. Qui peut se douter, à première vue, que cette sympathique fonction de choix appliquée au profil $k\pi$ formé de k répliques d'un profil π puisse donner un résultat différent de celui obtenu en l'appliquant à π . Fishburn a pourtant montré que la fonction de choix de Dodgson ne vérifie pas toujours la propriété, dite d'homogénéité (les profils $k\pi$ et π doivent donner le même ensemble de choix).

2.1.1.1 Des théorèmes d'impossibilité

Dans certains cas, le paradoxe est encore plus fort. En imposant non plus un, mais plusieurs axiomes, il est alors possible qu'aucune procédure ne puisse les vérifier simultanément. Ce sont tous les paradoxes issus des théorèmes d'impossibilité. Nous présentons ici les deux principaux.

Théorème d'Arrow

Le plus célèbre de ces théorèmes d'impossibilité est très certainement le théorème d'Arrow. Nous n'essayerons pas ici de faire une liste exhaustive des articles essayant d'interpréter ou d'expliquer le théorème d'Arrow³ (une recherche bibliographique sur les

¹ Pour quelques exemples assez simples, consulter par exemple [Roy et Bouyssou 1993] (décision multicritère), [Marchant 1996a] (choix social adapté à la décision multicritère) ou encore [Laslier 1996] (tournois).

² [Dodgson 1876] : Dodgson C.L., A Method of taking Votes on More than Two Issues, Clarendon Press, Oxford, 1876.

³ [Arrow 1951] : Arrow K., Social Choice and Individual Values, New York, Cowles Foundation and Wiley, 1951.

publications dans la classification « Social Welfare » contenant « théorème d'Arrow » dans l'index global nous a fourni plus de 140 références !). Nous présenterons seulement les références qui nous ont semblé les plus intéressantes.

Les axiomes requis pour une fonction de décision multicritère P dans l'axiomatique d'Arrow sont les suivants :

- Souveraineté de l'opinion. Chaque votant peut voter n'importe lequel des $m!$ ordres stricts possibles. Si une préférence sur une paire d'option est identique pour tous votants, P doit respecter cette préférence.
- Indépendance binaire. Soit $\{x, y\}$ une paire d'options. Soit A l'ensemble des votants qui rangent x avant y dans π . Soit π' un autre profil sur les mêmes ensembles d'options et de votants pour lequel les votants de A continuent à placer x avant y et les autres y avant x . Alors la restriction de $P(\pi(X))$ à $\{x, y\}$ doit être égale à la restriction de $P(\pi'(X))$ à $\{x, y\}$.
- Non-dictature. Pour tout votant i , il existe un profil π et un couple d'options $\{x, y\}$ tel que la décision collective sur $\{x, y\}$ soit différente de la préférence de i sur $\{x, y\}$.

Arrow a montré qu'aucune fonction ne peut vérifier ces trois axiomes simultanément.

De nombreux autres théorèmes d'impossibilité ont suivi celui d'Arrow. Beaucoup résultent de la modification d'un ou plusieurs de ces axiomes aboutissant à la même conclusion. Ainsi, Sen (1970) propose plus d'une dizaine de théorèmes d'impossibilité plus ou moins proches de celui d'Arrow. La plupart de ces théorèmes peuvent sembler paradoxaux au même titre que le théorème d'Arrow.

Théorème de Gibbard et Satterthwaite

Le théorème de Gibbard (1973) prouve que toutes les règles de vote non dictatoriales peuvent être manipulées. Pour le démontrer, Gibbard montre un résultat similaire en utilisant les notations de théorie des jeux.

Le théorème de Gibbard a été démontré indépendamment par Satterthwaite (1975). Ce dernier démontre aussi le lien avec le théorème d'Arrow : l'axiome de non-manipulabilité pour les procédures de vote de Gibbard est équivalent à l'union des trois axiomes d'indépendance par rapport aux options non-pertinentes, de réponse positive (croissance) et de souveraineté de l'opinion pour les fonctions de bien-être social définies par Arrow. Satterthwaite généralise aussi ce théorème au cas des préordres.

Le théorème de Gibbard et Satterthwaite permet donc d'engendrer une multitude de paradoxes. En effet, nous savons que beaucoup de procédures sont manipulables. L'exemple des élections à deux tours telles qu'elles sont pratiquées en France est là pour nous en convaincre. Supposons par exemple que lors des élections présidentielles, les préférences des votants sur les quatre candidats a, b, c et d en lice soient les suivantes : 1 000 000 $b > a > c$, 500 001 $c > a > b$ et 500 000 $a > b > c$. Au deuxième tour de l'élection, seuls les deux candidats ayant le plus de voix restent en lice. Le candidat b est élu avec une écrasante majorité de 1 500 000 voix contre 500 001 pour le candidat c . Ayant fait un petit raisonnement, monsieur X qui avait comme préférence $c > a > b$ décide finalement de voter selon la préférence $a > b > c$. Ainsi au deuxième tour, c'est a qui est opposé à b et cette fois ci, a est finalement élu par 1 000 001 contre 1 000 000. En votant à l'encontre de sa préférence réelle, monsieur X obtient un résultat qu'il préfère à celui obtenu avec sa préférence réelle (monsieur X préfère a à b). Cet exemple, bien que caricatural, soulève de nombreuses interrogations quant aux vertus du système électoral français. Le lecteur trouvera dans [Marchant 1999] de nombreux exemples similaires.

2 LES PARADOXES

Malgré cet exemple, le bon sens nous incite à croire qu'il doit bien exister des procédures telles qu'un votant devrait toujours avoir intérêt à exprimer son opinion sincère. Le théorème de Gibbard montre au contraire que quelle que soit la méthode utilisée, il existe des profils pour lesquels un votant peut avoir intérêt à voter stratégiquement (de manière contraire à son opinion) pour voir ses préférences satisfaites.

2.1.2 Les comportements surprenants de certaines procédures et autres paradoxes.

Nous avons vu que, sous quelques conditions peu restrictives, toutes les règles de vote étaient soit dictatoriales soit manipulables. Que nous réserve encore l'étude de ces fonctions ? La réponse est claire : à peu près tout et n'importe quoi !

2.1.2.1 Comportements surprenants

Les paradoxes qui suivent sont dus au comportement surprenant de certaines procédures face à des variations sur l'ensemble des options, sur l'ensemble des votants ou sur la prise en compte des préférences des votants. La frontière entre ces catégories est bien sûr assez floue. Certains paradoxes peuvent être classés dans plusieurs catégories et d'autres sont difficiles à ranger dans une de ces trois catégories.

Variations sur l'ensemble des options

Il est possible que l'ajout ou le retrait d'une ou plusieurs options ait des conséquences surprenantes. Les trois exemples qui suivent sont issus de [Fishburn 1974b].

Paradoxe de l'ordre inversé : il est possible que, pour certains profils, le classement des candidats selon leur score de Borda soit $x_1 > x_2 > \dots > x_m$ et qu'un désistement de x_1 conduise au classement $x_m > x_{m-1} > \dots > x_2$.

Paradoxe des premiers-deviennent-les-derniers : les classements sont encore effectués à partir des scores de Borda. Il est alors possible de trouver des profils tels qu'une option x_1 est vainqueur lorsque toutes les autres options sont considérées. Par contre, x_1 a le plus petit score de Borda pour la restriction du profil de départ à n'importe lequel des sous-ensembles d'options contenant x_1 sauf un.

Pour certaines procédures de vote, comme par exemple l'élimination séquentielle à la majorité simple, l'ordre dans lequel les options sont présentées n'est pas indifférent comme le montre le paradoxe suivant, dit du vainqueur dominé.

Paradoxe du vainqueur dominé : il est possible qu'une option x classée derrière une autre option y dans chacune des préférences soit le vainqueur d'une élimination séquentielle à la majorité simple. Fishburn montre même que l'on peut trouver des profils composés de trois votants, et d'un nombre croissant d'options, tels que la probabilité d'occurrence de ce paradoxe puisse être rendue aussi grande que possible pour un tirage aléatoire de l'ordre des comparaisons par paires entre options.

Variations sur l'ensemble des votants

L'ajout ou le retrait de certains votants peut lui aussi avoir des conséquences étonnantes. Les deux paradoxes suivants sont tirés de [Moulin 1988].

Paradoxe de la non-représentation (no show paradox) : il existe des procédures et des profils pour lesquels un votant peut avoir intérêt à s'abstenir plutôt que voter. Comme le remarquent Moulin (1988) et Fishburn et Brams (1984), cet exemple de paradoxe se rapproche des problèmes de manipulabilité.

Paradoxe des jumeaux : il est possible que l'addition à un profil π de la préférence R_i d'un votant V_i identique à une des préférences de π conduise à faire élire une option b différente de a alors que a est classée avant b par V_i et que a était vainqueur pour le profil π . Le paradoxe des jumeaux est bien sûr un cas particulier du paradoxe de la non-représentation (pour le profil $\pi \oplus R_i$, V_i a intérêt à s'abstenir plutôt que voter). Moulin (1988) montre que pour plus de quatre options et pour un nombre suffisant de votants, toutes les règles vérifiant l'axiome de Condorcet sont susceptibles d'engendrer le paradoxe de la non représentation et le paradoxe des jumeaux.

Nous étudierons dans le chapitre 4.2.3 des paradoxes de ce type liés à l'axiome de cohérence.

Variations sur la prise en compte des préférences

Il est connu de longue date (et pas très étonnant) qu'en utilisant des procédures de vote différentes, les résultats obtenus peuvent être différents. Jusqu'où peut aller cette différence ? Nurmi (1988) répond en partie à cette question en étudiant la probabilité pour que plusieurs procédures classiques donnent des résultats différents. La divergence des résultats peut en fait être très grande comme le montrent les exemples suivants.

Second paradoxe de Condorcet : Condorcet avait déjà remarqué au XVIIIème siècle qu'il pouvait exister une option qui surclasse majoritairement toutes les autres alors qu'elle n'est pas vainqueur de Borda. Fishburn va plus loin en montrant qu'il est possible de trouver un profil tel qu'une option batte majoritairement toutes les autres alors qu'en utilisant une méthode de scorage quelconque (avec des scores strictement décroissants en fonction des rangs), cette option est battue par toutes les autres sauf une.

Saari (1989) remarque en étudiant l'ensemble des résultats qui peuvent être associés à un profil que la plupart des paradoxes évoqués dans [Fishburn 1974b] peuvent être généralisés. Plus le nombre de votants est grand, plus les paradoxes évoqués sont nombreux. Cependant, la création de profils vérifiant ces paradoxes est de plus en plus difficile et c'est pour cela que la plupart des exemples ne portent que sur trois ou quatre options.

Saari montre aussi que tout paradoxe pouvant être engendré par la méthode de Borda peut être engendré par n'importe quelle autre méthode de scorage. Il propose de nouveaux paradoxes comme le paradoxe suivant : Quel que soit l'ensemble de $m-1$ ordres choisis parmi les $m!$ ordres sur m options, il est possible de trouver un profil tel que le résultat obtenu en appliquant la pluralité à ce profil soit le premier ordre, le résultat obtenu en utilisant le vecteur score $(1, 1, 0, \dots, 0)$ soit le deuxième ordre, le résultat obtenu en utilisant le vecteur score $(1, 1, 1, 0, \dots, 0)$ soit le troisième ordre, et ainsi de suite. Ce résultat peut même être généralisé à n'importe quel ensemble de vecteurs scores linéairement indépendants.

2 LES PARADOXES

Remarquons que dans son article de 1989, Saari ne montre pas comment construire les profils qui illustrent ces paradoxes, mais seulement leur existence.

Pour certaines procédures, ces paradoxes peuvent être considérés comme liés à la prise en compte partielle des préférences des votants.

Paradoxe du scorage tronqué : la méthode utilisée, B_k , est une version tronquée de la fonction de choix de Borda. Les points ne sont attribués qu'aux k premières options (k pour le premier, $k - 1$ pour le deuxième, ...). Il est alors possible, dans le cas où le nombre d'options est supérieur à trois, de trouver un profil π tel que pour tout k dans $[1, m-1]$, $B_k(\pi)$ soit un unique vainqueur et que ces $m-1$ vainqueurs soient tous différents.

Il est naturel d'attendre de toute procédure de vote une certaine forme de monotonie. Lorsque la préférence d'un votant s'améliore en faveur d'un candidat, il semble légitime que le classement de ce candidat ne se détériore pas dans la préférence globale. Nous verrons pourtant au chapitre 4 que de nombreuses procédures de vote raisonnables ne sont pas monotones.

Si les paradoxes présentés ci-dessus sont plutôt issus de la théorie du choix social, il en existe aussi en décision multicritère. Beaucoup sont liés à la représentation des préférences. Ainsi, la structure de préordre complet semble être bien adaptée pour modéliser les préférences d'une personne. À la fin d'un repas, on propose à monsieur X un digestif, un café (éventuellement sucré) ou un thé. La relation binaire P représentant les préférences de monsieur X est : digestif $>$ café sucré $>$ {café, thé}. Cette préférence a bien les propriétés d'un préordre complet. Pourtant, pour monsieur X un café sans sucre et un café avec un grain de sucre sont indifférents. De même, un café avec un grain de sucre et un café avec deux grains de sucre sont indifférents. Un café avec deux cuillères de sucre moins un grain et un café avec deux cuillères de sucre sont encore indifférents. Mais alors, si la préférence de monsieur X est modélisée par un préordre complet, un café avec deux cuillères de sucre et un café sans sucre sont indifférents ! Cet exemple pose le problème de la transitivité de l'équivalence dans les préordres. Le lecteur trouvera dans [Marchant et al. 1999] d'autres exemples similaires.

2.1.2.2 Autres paradoxes

Une autre catégorie de paradoxes est liée la complexité de certains calculs ou de certaines démonstrations. Nous ne ferons pas de rappel de la théorie de la NP-complétude (ce n'est qu'un cas assez particulier des paradoxes que nous avons rencontré), et nous parlerons donc seulement de problèmes difficiles ou pas. Nous distinguons ici deux cas.

Celui des problèmes pour lesquels nous pensons intuitivement qu'il doit exister une démonstration simple et qui ne sont pourtant pas résolus ou avec beaucoup de peine.

L'exemple le plus connu est sans doute le théorème des quatre couleurs (montrer qu'il est possible de colorier les régions de n'importe quelle carte de géographie, sans que deux régions voisines aient la même couleur, avec seulement quatre couleurs différentes). La théorie du choix social propose, elle aussi, des conjectures de ce genre. Ainsi, le calcul de la diversité de la condition de Ward peut s'énoncer ainsi : quelle est la cardinalité maximale d'un ensemble d'ordres stricts distincts sur m options tel que la restriction de ces ordres à n'importe quel triplet

2 LES PARADOXES

$\{a, b, c\}$ d'options ne contient pas simultanément les trois ordres $a > b > c$, $b > c > a$ et $c > a > b$ ou bien les trois ordres $a > c > b$, $c > b > a$ et $b > a > c$. Présenté ainsi, ce problème ne semble pas forcément difficile à résoudre. Pourtant, malgré les nombreux efforts de chercheurs de renom (voir chapitre 3.2.1.3), ce problème est toujours ouvert.

Celui des problèmes pour lesquels le temps de calcul d'une solution est très long alors que le problème semble facile à résoudre.

La recherche opérationnelle est riche en exemples de ce genre. Citons par exemple le problème de bipartition (est-il possible de partitionner un ensemble d'entiers en deux sous-ensembles tels que les sommes de leurs éléments soient égales) ou du voyageur de commerce (trouver sur une carte le circuit passant par toutes les villes qui minimise la distance parcourue). À première vue, ces problèmes paraissent simples à résoudre et beaucoup de personnes affirmeront qu'il existe un algorithme rapide donnant la solution. Ce n'est en fait pas le cas puisque ces problèmes font partie de la classe des problèmes réputés pour être difficile. Un exemple plus proche de notre domaine est celui du calcul de l'indice de Slater¹ d'un tournoi : quel est le nombre minimum de préférences qu'il faut inverser pour qu'un tournoi devienne transitif ? Malgré les efforts de nombreux chercheurs et l'apparente simplicité de ce problème, nous ne savons toujours pas dire si sa résolution est difficile ou pas [Charon et al. 1996]. Un autre problème du même type est la reconnaissance d'une matrice de surclassement : pour une matrice donnée, existe-t-il un profil d'ordres totaux dont elle soit la matrice de surclassement ? Ici encore, bien que le problème semble assez simple, il n'est résolu que pour moins de quatre votants ou moins de sept options et dans les autres cas, nous ne connaissons même pas sa complexité (voir [Dridi 1980] ou [Fishburn 1987]).

Citons encore un des paradoxes classiques lié à la représentation proportionnelle. Le principe de la représentation proportionnelle et le célèbre paradoxe de l'Alabama que cette représentation peut créer peuvent être décrits à l'aide de l'exemple suivant (adapté de [Saari 1994]). Soient A , B , et C trois partis politiques devant se partager les 25 sièges du conseil municipal de la commune de Trucville. 4 520 des 10 000 Trucvillois ont voté pour A , 4 136 pour B , et 1 344 pour C . La répartition idéale des représentants est donc 11,30 sièges pour A , 10,34 pour B et 3,36 pour C . Mais à Trucville, il n'est pas question de partager un siège entre 0,30 représentants de A , 0,34 représentants de B et 0,36 représentants de C . La solution adoptée (méthode de Hamilton) est de donner à chaque parti un nombre de sièges correspondant à la partie entière du nombre de sièges dans la représentation idéale. Les sièges restants sont donnés dans l'ordre aux partis ayant les plus grands restes. Ainsi, après l'affectation de 11 sièges au parti A , 10 sièges au parti B et 3 sièges au parti C , le siège restant est donné à C (reste de 0,36 contre 0,30 pour A et 0,34 pour B).

Devant ce résultat, les partis A et B suggèrent qu'il y a de la place autour de la table du conseil et que les électeurs seraient mieux représentés par 26 membres que par 25. La représentation exacte est alors de 11,7520 sièges pour A , 10,7536 pour B et 3,4944 pour C . 11 sièges sont donc donnés à A , 10 à B et 3 à C . Le premier des deux sièges restants est donné à B (reste de 0,7536) et le deuxième à A (reste de 0,7520). Ainsi, la création d'une place supplémentaire a fait perdre un siège à C !

¹ [Slater 1961] : Slater P., Inconsistencies in a schedule of paired comparisons, *Biometrika*, vol. 48, pp 303-312, 1961.

Citons pour finir divers paradoxes amusants comme celui présentés dans [Arrow et Raynaud 1986] sous le nom du gâteau ou du parti des 51 dans lequel l'utilisation de la règle majoritaire conduit à la dictature de deux des votants. Ferejohn et Fiorina (1974) s'intéressent à un autre paradoxe de la non-représentation : comment se fait-il que la plupart des électeurs se rendent aux urnes lors des élections présidentielles alors que la probabilité pour que leur vote fasse pencher la balance en faveur de leur candidat favori est quasiment nulle ?

Cette liste de paradoxes est certes loin d'être exhaustive, mais elle contient les exemples les plus représentatifs des paradoxes que nous avons rencontrés.

2.2 D'où viennent ces paradoxes et comment les surmonter

Les paradoxes que nous avons évoqués sont issus de l'utilisation de procédures ou d'axiomes qui semblent simples à comprendre. Pourtant, le fait que les résultats obtenus soient aussi surprenants (voire choquants) nous incite à penser que nous n'avons sans doute pas saisi immédiatement toutes les subtilités des procédures et axiomes précités. Les scientifiques n'aiment pas avoir le sentiment d'une compréhension seulement superficielle des phénomènes. Il est donc bien naturel, face à un paradoxe, qu'ils cherchent à l'expliquer. Nous verrons dans ce chapitre différentes méthodes utilisées pour faire face aux paradoxes du choix social et de la décision multicritère. Une première approche consiste à s'attaquer directement aux hypothèses du paradoxe. Une autre approche, pour mieux comprendre ces paradoxes, est d'étudier leurs fréquences d'occurrences. Cette approche est complémentaire de la première et guidée par des préoccupations pratiques.

2.2.1 Analyser les implications liées aux hypothèses

Selon l'Alpha Encyclopédie (1971), « surmonter un paradoxe, c'est suspecter l'opinion reçue sur une notion et approfondir le sens de cette dernière ». C'est ce qu'ont fait la plupart des chercheurs qui ont expliqué les paradoxes que nous avons présentés. Nous avons classé les méthodes qui permettent de comprendre les paradoxes selon les hypothèses auxquelles s'attaquent les chercheurs. Les deux catégories que nous avons retenues sont les suivantes.

2.2.1.1 Hypothèses explicites

La première approche pour tenter de comprendre les paradoxes est de mieux analyser leurs énoncés. Pour cela, nous pouvons remettre en question certaines hypothèses ou essayer de les interpréter avec une approche différente.

Dans certains des paradoxes présentés, la légitimité d'hypothèses explicites n'est pas aussi évidente que ce que suppose l'auteur qui a décrit le paradoxe. Le paradoxe vient alors du fait que nous n'avons pas remis en question les hypothèses faites alors que certaines d'entre elles n'étaient pas forcément indispensables. Prenons par exemple l'axiome d'indépendance par rapport aux options non-pertinentes du théorème d'Arrow. Cet axiome est une hypothèse explicite énoncée dans le théorème. Or bien qu'il semble indispensable à Arrow, il est remis en question par de nombreux auteurs (voir par exemple [Saari 1994]). Il n'est en effet pas du tout

2 LES PARADOXES

évident que l'ajout d'options, même mal classées, ne doit pas avoir d'influence sur le classement des options de tête. De plus, cet axiome conduit à ne prendre en compte que les préférences des votants sur les paires d'options. Ainsi, le fait que ces préférences soient transitives est « oublié », ce qui pose problème car le résultat doit, lui, être transitif.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre d'introduction, les paradoxes sont souvent dus à la mauvaise intuition que nous avons des phénomènes. Cette intuition est souvent liée à notre façon d'interpréter les énoncés. Ainsi, en utilisant une nouvelle approche des paradoxes, il est parfois possible de lever certains d'entre eux. Chichilnisky¹ utilise par exemple une approche topologique pour expliquer le théorème d'Arrow. Dans [Saari 1989], l'auteur étudie les propriétés de l'ensemble des résultats qui peuvent être obtenus en utilisant une règle positionnelle. Il montre, grâce à cette nouvelle approche, qu'il est possible de construire à peu près n'importe quel paradoxe avec ces méthodes. Nous essayerons à notre tour, dans le chapitre 3 d'apporter un éclairage nouveau sur quelques paradoxes liés aux conditions de transitivité de la méthode majoritaire.

L'approche géométrique de Saari

Il est indéniable que l'approche géométrique développée dans [Saari 1994] a permis d'éclaircir de nombreux paradoxes. Cette approche donne généralement une bonne intuition des propriétés dans le cas où trois options seulement sont en présence. De plus, les résultats et démonstrations obtenus sont parfois généralisables au cas où plus d'options sont en présence.

Nous utiliserons tout au long de ce document un aspect de cette approche géométrique. Nous verrons que dans certains cas, il faut se méfier des intuitions qu'elle peut donner et que dans d'autres cas, elle permet au contraire de comprendre très facilement certaines propriétés.

La plupart des notations introduites ici sont celles utilisées dans la thèse de [Merlin 1996]. Les votants expriment leurs préférences sous forme d'ordres stricts. Numérotions les ordres stricts possibles sur m options de 1 à $m!$. Considérons une fonction de choix anonyme (les noms des votants n'ont pas d'importance). Il est naturel d'introduire les situations de vote.

Définition 2.2.1 *Une situation de vote ([Lepelley 1993]) est un profil anonyme, c'est-à-dire un profil dans lequel l'ordre des votants n'a pas d'importance. Elle peut être représentée par un vecteur $n(\pi)$ de dimension $m!$ où la $i^{\text{ème}}$ coordonnée indique le nombre de fois où l'ordre numéro i apparaît dans le profil π .*

Si n_i désigne le nombre de votants qui ont voté l'ordre i , une situation est donc un vecteur d'entiers de dimension $m!$ ($n_1, \dots, n_{m!}$) tel que :

$$\sum_{i=1}^{m!} n_i = n.$$

De plus, cette approche géométrique imposera que les fonctions de choix utilisées soient homogènes.

Définition 2.2.2 *Une fonction de choix F est homogène si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F(k\pi) = F(\pi)$ où \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels et $k\pi$ un profil composé de k répliques du profil π .*

¹ [Chichilnisky 1980] : Chichilnisky G., Social choice and the topology of spaces of preferences, Advances in Mathematics, vol. 37, pp 165-176, 1980.

2 LES PARADOXES

L'axiome d'homogénéité paraît bien naturel et peu contraignant comme le fait remarquer Smith (1973). Il existe cependant des fonctions de choix qui ne le vérifient pas comme par exemple les fonctions de choix de Dodgson ou de Young (voir [Fishburn 1977]).

Pour une fonction de choix homogène f , il est naturel d'introduire la notion de fraction de votes en utilisant le profil π/k tel que $f(\pi/k) = f(\pi)$ où k est un entier naturel et π un profil quelconque. Ainsi, nous pouvons normer la taille de la population en divisant toutes les composantes du vecteur $n(\pi)$ par le nombre de votants n .

Définition 2.2.3 *L'ensemble de définition des fonctions de choix peut être considéré comme le domaine de $\mathbb{R}^{m!}$ défini par :*

$$Si(m!) = \left\{ x \in \mathbf{Q}_+^{m!} \mid \sum_{t=1}^{m!} x_t = 1 \right\}$$

(\mathbb{R} est l'ensemble des réels et \mathbf{Q} l'ensemble des rationnels)

Lorsque la fonction de choix ne dépend que de la matrice de Benjamin Franklin, il suffit pour chaque paire d'options de connaître b_{ij} ou b_{ji} pour connaître le résultat du vote. En divisant ces coefficients de Benjamin Franklin par n , nous pouvons représenter les profils dans le cube $[-1, 1]^{n(n-1)/2}$. Tous les points de ce cube ne représentent pas forcément un profil. Cela dépend bien sûr des coefficients $n_{ij} = b_{ij}/n$ associés à chaque coordonnée. Dans le cas de trois options, pour des raisons de symétrie et de facilité d'interprétation, Saari représente n_{12} , n_{23} et n_{31} selon les axes Ox , Oy et Oz d'un repère orthonormé euclidien. Il montre que le cube majoritaire (ensemble des points représentant un profil) est l'ensemble des points rationnels (n_{12}, n_{23}, n_{31}) de $[-1, 1]^3$ tels que : $-1 \leq n_{12} + n_{23} + n_{31} \leq 1$. La Figure 2.1 donne une représentation du cube majoritaire pour $m = 3$.

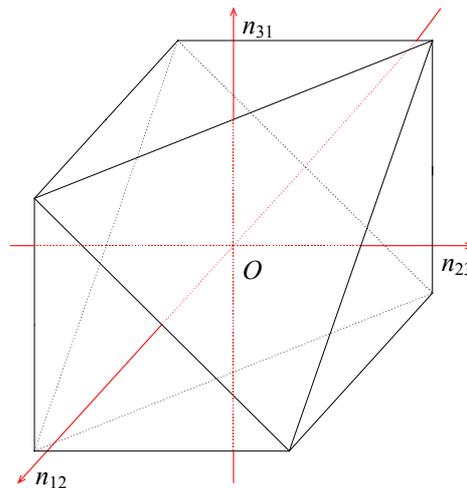


Figure 2.1 : Le cube majoritaire pour trois options

Ainsi, pour le profil $\pi = \{x_1 > x_2 > x_3, x_1 > x_2 > x_3, x_3 > x_1 > x_2, x_3 > x_2 > x_1, x_2 > x_3 > x_1\}$, $n = 5$ et $b_{12} = 3 - 2 = 1$, $b_{23} = 1$ et $b_{31} = 1$. Le profil π est donc représenté par le point de coordonnées

2 LES PARADOXES

$(1/5, 1/5, 1/5)$. Remarquons que ce point représente aussi le profil 2π ou encore le profil $\pi' = \{x_1 > x_2 > x_3, x_1 > x_3 > x_2, x_2 > x_3 > x_1, x_2 > x_3 > x_1, x_3 > x_1 > x_2\}$.

Pour faciliter la rédaction, nous assimilons parfois (lorsque cela ne prête pas à confusion) une classe de profils (ou un profil de cette classe) et le point du cube majoritaire qui la (le) représente.

Définition 2.2.4 Notons $D_f^m(A) = \{x \in Si(m!) \mid f(x) = A\}$ l'ensemble des points de $Si(m!)$ pour lesquels f sélectionne toutes les options de $A \subseteq X$ et uniquement celles-ci.

Définition 2.2.5 Notons $D_f^m(a) = \{x \in Si(m!) \mid a \in f(x)\}$ l'ensemble des points de $Si(m!)$ pour lesquels f sélectionne l'option a .

Cet ensemble peut donc être différent de $D_f^m(\{a\})$ où seule l'option a est sélectionnée.

Notons aussi (il n'y a généralement pas d'ambiguïté) $D_f^m(A)$ l'ensemble des points du cube majoritaire qui représentent un profil π tel que $f(\pi) = A$.

Dans la Figure 2.2, l'ensemble $D_{Borda}^3(x_1)$ est représenté en gris. Ce sont les points de $Si(6)$ tels que le score de Borda de x_1 d'un profil correspondant est plus grand que celui de x_2 et que celui de x_3 . Les options vainqueurs de Borda sont aussi celles dont la somme des coefficients de Benjamin Franklin est la plus grande. Ainsi, x_1 est vainqueur si $b_{12} + b_{13} \geq b_{21} + b_{23}$ et $b_{12} + b_{13} \geq b_{31} + b_{32}$. Soit après réduction $2n_{12} - n_{23} - n_{31} \geq 0$ et $n_{12} + n_{23} - 2n_{31} \geq 0$.

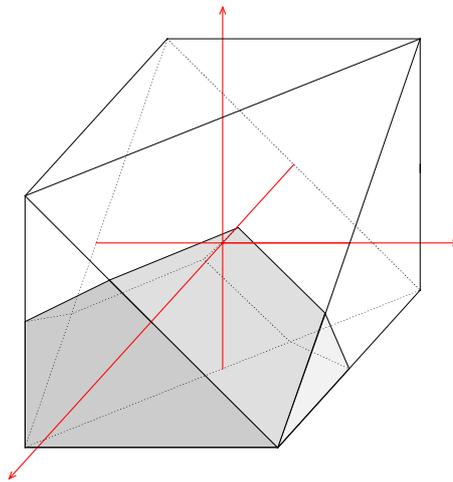


Figure 2.2 : En gris, ensemble des points représentant des profils pour lesquels x_1 est vainqueur de Borda

Prenons maintenant l'exemple de l'axiome de cohérence (sur lequel nous reviendrons au chapitre 4.2.3). Une des implications de la cohérence d'une procédure P est la suivante : si $P(\pi_1) = P(\pi_2)$, alors $P(\pi_1 \oplus \pi_2) = P(\pi_1)$. Le fait que certaines procédures ne vérifient pas cette propriété peut paraître étonnant a priori. Interprété en utilisant la représentation géométrique de

Saari, cet axiome est équivalent à la convexité des ensembles $D_p^m(A)$. En effet, supposons les deux profils π_1 et π_2 composés respectivement de N_1 et N_2 critères et représentés par les points $A_1 = (n_{ij1}, i < j)$ et $A_2 = (n_{ij2}, i < j)$. Alors, le profil $\pi_1 \oplus \pi_2$ compte $N_1 + N_2$ critères et il est représenté par le point A de coordonnées $((N_1 n_{ij1} + N_2 n_{ij2}) / (N_1 + N_2), i < j)$. Ce point n'est autre que le barycentre des points A_1 et A_2 auxquels sont affectés les poids N_1 et N_2 . La propriété énoncée est mise en défaut s'il existe deux points X_1 et X_2 de $D_p^m(A)$ tels que l'un de leurs barycentres possibles ne soit pas dans $D_p^m(A)$. Ceci implique la convexité de $D_p^m(A)$.

Il est donc très simple, en connaissant la représentation géométrique des ensembles $D_p^m(A)$, de savoir quelles sont les procédures qui ne respectent pas cet axiome, de construire des exemples qui le mettent en défaut, etc. Nous verrons un exemple de procédure non cohérente au chapitre 4.2.3.

2.2.1.2 Hypothèses implicites

Le théorème de Gibbard (1973) et Satterthwaite (1975) tel qu'il est généralement énoncé (toute règle de vote non dictatoriale est manipulable) peut paraître paradoxal. Cependant, comme le remarquent Fishburn et Brams (1984), la version utilisée de la manipulabilité est très forte. Il suffit en effet de trouver un seul profil tel qu'en modifiant sa préférence, un votant puisse obtenir un résultat plus « proche » de sa préférence initiale pour que la procédure soit manipulable¹. Ainsi, considérons la règle de vote suivante, fondée sur la pluralité. Choisissons parmi les options x_1, x_2, \dots, x_m ($m > 2$) celle qui occupe le plus souvent la première place en départageant les éventuels ex aequo en faveur de l'option x_j ayant l'indice j le plus petit. Supposons qu'il existe un profil tel que x_2 et x_1 sont classées autant de fois premières, et ce un nombre de fois supérieur à toutes les autres options. Un votant ayant la préférence $x_3 > x_2 > x_1 > \dots$ peut « manipuler » la procédure en rangeant x_2 en premier ce qui permet d'assurer l'élection de x_2 alors qu'avec son vote sincère, x_1 aurait été élu. Ce votant a ainsi manipulé la procédure puisqu'en ne votant pas sincèrement, il a fait élire une option (x_2) qu'il préférerait à l'option (x_1) élue lorsqu'il votait sincèrement. Grâce à ce petit exemple, il est aisé de se rendre compte à quel point l'axiome de non-manipulabilité est contraignant. Il n'est donc peut-être pas très choquant que toutes les procédures de vote soient manipulables. De plus, pour qu'en pratique un votant ait réellement intérêt à voter stratégiquement, il faut qu'il connaisse les préférences des autres votants. Dans le cas contraire, il n'est pas sûr qu'un changement de sa préférence « améliorera » le résultat.

Cependant, Fishburn et Brams (1984) montrent le même genre de résultat avec une version beaucoup plus faible de la manipulation (manipulation par troncation sincère) : pour un nombre d'options supérieur ou égal à trois et pour un nombre de votants suffisamment grand, toutes les procédures Condorcet sont manipulables.

Une des exigences faites sur les fonctions vérifiant l'axiomatique d'Arrow est que les procédures considérées fassent correspondre à chaque profil formé d'ordres stricts (ou de préordres) un unique ordre strict (ou préordre) sur les options (fonctions de bien être social). Si cette contrainte est affaiblie et que les procédures peuvent faire correspondre à chaque profil plusieurs préordres, Vincke (1982b) a montré que le théorème d'Arrow n'était plus un théorème d'impossibilité. Ainsi, le théorème d'Arrow n'est pas un paradoxe mais un résultat tout à fait

¹ Nous remarquons ici que la notion de manipulabilité est très proche de celle de monotonie.

prévisible étant donné la définition des fonctions de bien être social. Cette définition est en fait trop exigeante pour être compatible avec les autres axiomes. Bouyssou (1992) a cependant remarqué que les procédures de préagrégation vérifiant l'axiomatique d'Arrow conduisaient malgré tout à la présence d'oligarchies.

De la même façon, Fishburn (1970) considère que c'est la transitivité du résultat d'une fonction de choix social qui doit être remise en question. Cette propriété n'est pas directement visible lorsque l'on énonce le théorème d'Arrow sous la forme « il n'existe pas de fonction de bien être social vérifiant les trois axiomes ... ». Pourtant cette définition d'une fonction de bien être social est très contraignante et pas forcément très réaliste comme le montre l'auteur à l'aide de plusieurs exemples.

Fishburn (1974c) généralise le théorème d'Arrow et d'autres théorèmes d'impossibilité comme le théorème de Mas-Colell et Sonnenschein (1972) au cas où les axiomes ne portent plus sur des paires d'options mais sur des ensembles de k options. Il aboutit à la conclusion que la rationalité collective imposée par l'affaiblissement de l'axiome d'indépendance binaire au cas de k options n'est pas compatible avec l'universalité du domaine de définition des fonctions de choix.

2.2.2 Évaluer la fréquence des paradoxes

L'intérêt de l'étude de la fréquence d'occurrence des paradoxes est double. Il s'agit tout d'abord de mieux comprendre ces paradoxes. Il est en effet utile, pour essayer d'expliquer un paradoxe, de savoir dans quelles conditions il apparaît. En examinant « à la loupe » les profils qui engendrent certains paradoxes, nous verrons par exemple dans le chapitre 4.2.2 comment il est possible de mieux interpréter ces derniers.

Une fois qu'un paradoxe est trouvé et analysé, il est aussi intéressant de connaître sa fréquence. Ainsi, un paradoxe lié au viol d'un axiome n'a pas les mêmes implications selon que ce viol apparaît dans seulement 0.01% des cas d'application ou bien une fois sur deux. Comme le remarquent Niemi et Riker (1976), la fréquence de ces paradoxes peut être analysée de deux façons :

- D'un point de vue empirique grâce à des observations réelles. Malheureusement, ces observations sont généralement peu nombreuses et limitées par la pauvreté des données. Les votes utilisés avec la plupart des procédures courantes ne permettent pas de reconstruire les structures de préférences des votants.
- D'un point de vue mathématique en simulant le comportement des votants. Dans ce cas, les limitations sont dues à l'adéquation du modèle utilisé à la réalité et à la difficulté des calculs.

C'est sur ce deuxième type d'analyse que nous nous attarderons. Nous distinguerons les résultats théoriques donnant des probabilités exactes d'occurrence de certains paradoxes et les résultats obtenus à l'aide de simulations.

2.2.2.1 Point de vue théorique

Même si les probabilités exactes d'occurrence de certains paradoxes peuvent être obtenues en utilisant divers modèles probabilistes, elles ne sont pertinentes que dans la mesure où ces

2 LES PARADOXES

modèles correspondent à la réalité. Ainsi, la probabilité d'occurrence du paradoxe de Condorcet est loin d'être négligeable lorsque les préférences des votants sont tirées uniformément parmi les $m!$ ordres stricts possibles. Cependant, comme l'a remarqué Black (1948), en réalité, les préférences des votants ne sont généralement pas réparties uniformément mais s'avèrent souvent unimodales¹. La probabilité d'occurrence du paradoxe de Condorcet est alors nulle (nous verrons en effet que sous cette condition, la méthode majoritaire est transitive).

De nombreux chercheurs se sont intéressés à la probabilité d'occurrence du paradoxe de Condorcet. Nous citerons seulement ici les principaux résultats. Le lecteur trouvera dans [Gehrlein 1994] une excellente revue de la littérature sur ce sujet. La probabilité d'occurrence d'un paradoxe est fortement liée au modèle utilisé. Berg et Bjurulf (1983) calculent la probabilité d'occurrence du paradoxe de Condorcet sous deux hypothèses probabilistes différentes. La première, selon laquelle il est possible de différencier tous les votants, est issue du modèle de physique statisticienne de Maxwell-Boltzmann. Cette hypothèse est généralement appelée hypothèse de culture neutre ou « Impartial Culture » (IC). Dans la seconde, issue du modèle Bose-Einstein, les votants sont anonymes. Ainsi, les profils composés des deux votes $\{V_1 : abc, V_2 : acb\}$ et $\{V_1 : acb, V_2 : abc\}$ représentent alors la même situation de vote. Cette hypothèse est connue sous le nom de culture neutre et anonyme ou « Impartial Anonymous Culture » (IAC). Les auteurs montrent que pour trois options, les résultats sont légèrement différents en fonction du modèle choisi (91.226% de profils transitifs pour trois options et un nombre infini de votants en utilisant le premier modèle² contre 93.75% avec des situations de vote). Cependant, lorsque le nombre d'options augmente, bien qu'il ne soit rapidement plus possible de calculer explicitement les valeurs des probabilités, il est possible de montrer que les deux modèles conduisent à des probabilités identiques. Le lecteur trouvera dans [Merlin 1996] des éléments de comparaison de ces deux hypothèses.

Tanguiane (1996) montre que si les mérites de deux candidats quelconques ne sont pas exactement égaux et si les préférences de ces votants sont indépendantes, alors lorsque le nombre de votants augmente, le résultat obtenu avec la méthode majoritaire tend en probabilité à être le même que celui obtenu avec la méthode de Borda. Il prouve ainsi que sous ces hypothèses, la méthode majoritaire est transitive et considère les occurrences du paradoxe de Condorcet comme une « erreur » qui devient négligeable lorsque le nombre de votants augmente. Remarquons cependant que dans certains cas extrêmes (lorsque les mérites de certains candidats sont presque égaux), les deux méthodes appliquées à des profils de 100 000 votants donnent encore des résultats différents dans plus de 2% des cas.

La thèse de Dominique Lepelley ([Lepelley 1989]) donne aussi de bons indices sur les fréquences d'occurrence de certains paradoxes. L'auteur fait de nombreux calculs probabilistes ainsi que quelques simulations pour évaluer la fréquence de certains paradoxes. Les résultats portent pour la plupart sur des tirages équiprobables de situations (ce qui n'est pas le cas des simulations que nous effectuerons pour lesquelles les profils tirés ne sont pas anonymes). Les formules probabilistes obtenues en sont grandement simplifiées. Lepelley teste entre autres différentes versions de l'efficacité majoritaire de certaines règles classiques (pluralité, antipluralité, Borda, Hare, Coombs et Nanson). Il montre ainsi que le viol de différentes conditions (C1 si un vainqueur de Condorcet existe, il doit être élu ; C2 si un vainqueur de Condorcet strict existe, il doit être élu ; C3 si un vaincu de Condorcet existe, il ne doit pas être

¹ Voir le chapitre suivant pour plus de détails.

² [Guilbaud 1952] : Guilbaud G., Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation, Économie appliquée, vol. 5, pp 501-584, 1952.

élu ; C4 si un vaincu de Condorcet strict existe, il ne doit pas être élu) peut être assez fréquent (environ 38% des situations pour 3 options, 20 votants violent la condition C1 lorsque l'antipluralité est utilisée et au moins 3% des situations pour 3 options, plus de 15 votants et n'importe laquelle des autres règles sauf Nanson). Pour ces conditions, les résultats dépendent fortement de la règle utilisée, mais les résultats sont similaires pour des profils anonymes.

Dans les chapitres suivants, Lepelley se penche sur la fréquence du paradoxe de la manipulabilité démontré par [Gibbard 1973], et montre que par exemple pour 3 options, la proportion de profils pouvant engendrer une manipulation est loin d'être négligeable lorsque le nombre de votants n'est pas trop élevé (presque 30% de profils instables pour le vote à la majorité, 3 options et 15 votants). Dans le cas de situations équiprobables, les résultats sont sensiblement différents (seulement 11% des situations sont instables dans les mêmes conditions).

2.2.2.2 Expérimentations

Il n'est pas toujours possible de calculer de manière arithmétique les probabilités d'occurrence des paradoxes. C'est en particulier le cas lorsqu'il s'agit de calculs trop compliqués (les paradoxes portent sur des phénomènes trop difficiles à modéliser avec les modèles probabilistes courants) ou de calculs trop longs (les résultats pour les petites valeurs sont connus, mais la méthode de calcul, même si elle est utilisable pour des valeurs plus grandes n'est pas réalisable en pratique). Dans d'autres cas, même s'il est possible d'obtenir des résultats arithmétiques, ceux-ci sont trop compliqués par rapport à l'intérêt des résultats. Pour avoir malgré tout une idée de ces fréquences d'occurrence, de nombreux chercheurs ont alors recours à des tirages aléatoires qui permettent d'avoir une bonne intuition des résultats attendus. Nous possédons depuis quelques décennies un outil remarquable pour effectuer ce genre de simulations répétitives : l'ordinateur. De plus, la puissance de ces ordinateurs ne cesse d'augmenter ce qui nous permet d'effectuer de plus en plus de tirages et donc d'avoir des résultats de plus en plus fiables (sous réserve que les protocoles expérimentaux soient justes !). Ainsi, en 1974, les résultats de Fishburn (1974b) portaient sur 1 000 tirages pour chaque couple (m, n) alors qu'en 1999, T. Marchant (1999) estime que les 1 200 000 tirages qu'il effectue ne sont pas suffisants pour donner une idée précise des probabilités cherchées.

Dans [Nurmi 1988], l'auteur effectue de nombreux des tirages de profils aléatoires sous condition de culture impartiale. Ceci lui permet de savoir avec quelle fréquence les résultats de différentes fonctions de choix classiques (Borda, pluralité, prudence, Copeland) sont identiques. L'utilisation de simulations lui permet de comparer facilement toutes ces méthodes. De plus, il est très simple de faire des variations sur la condition de culture impartiale¹ (par exemple en imposant qu'un tiers des votants aient la même préférence).

Les résultats de [Fishburn 1974b] pour les paradoxes présentés précédemment sont les suivants :

Paradoxe du vainqueur dominé : ce paradoxe n'est apparu qu'une fois sur les 12 000 simulations effectuées (1 000 tirages pour chaque couple (m, n) , $m \in (4, 5, 6, 7)$ et $n \in (5, 11, 21)$).

Paradoxe de l'ordre inversé : ce paradoxe étant extrêmement rare lorsque m et n augmentent, les simulations ont porté sur le nombre de profils pour lesquels la suppression de

¹ Voir par exemple [Nurmi 1986] : Nurmi H., *Mathematical Models of Elections and their Relevance for Institutional Design*, Electoral Studies, vol. 5, pp 167-181, 1986.

2 LES PARADOXES

l'option classée première entraîne une dégradation du classement de l'option initialement classée deuxième (celle-ci n'est plus première dans le profil restant). Les résultats montrent que la fréquence de ce paradoxe semble augmenter lorsque, pour un nombre d'options fixé, le nombre de votants augmente (jusqu'à 7,1% dans le cas de 21 votants).

Paradoxe des premiers-deviennent-les-derniers : tel que nous l'avons énoncé, le paradoxe est très rare. Il est par contre assez fréquent que x_1 soit vaincu de Borda pour certains des sous-ensembles d'options.

Paradoxe du scorage tronqué : ici encore, les simulations montrent que ce paradoxe est très rare (3 profils sur 12 000), mais il est par contre assez fréquent que les fonctions B_k ne donnent pas toutes le même résultat.

Les paradoxes présentés sont donc des cas extrêmes qui sont en fait très rares (sous l'hypothèse de culture anonyme). Il est par conséquent instructif, comme l'a fait Fishburn, d'étudier la fréquence de résultats un peu moins forts, mais dont la probabilité d'occurrence n'est plus forcément négligeable.

3. Le paradoxe des conditions de Black et Arrow-Black

Dans tout ce chapitre, les n votants ont le même poids. Ils expriment leurs préférences sous forme d'ordres stricts.

Une des façons de contourner le paradoxe de Condorcet est de restreindre les domaines de définition de la fonction de choix majoritaire de manière à ce que, sur un domaine restreint, la relation majoritaire soit toujours transitive. De nombreux auteurs ont ainsi cherché des limitations de domaines à l'intérieur desquelles la relation majoritaire est transitive. Parmi les plus connues, les conditions d'unimodalité de Black et d'unimaximalité de Arrow-Black posent un problème. En effet, pour mesurer les restrictions imposées par ces conditions, une des solutions consiste à compter le nombre maximum d'ordres stricts différents que l'on peut trouver dans un profil vérifiant une de ces conditions. Cet indicateur utilisé par Arrow et Raynaud (1986) est appelé diversité. Curieusement, les conditions de Black et de Arrow-Black ont la même diversité alors que la seconde est une généralisation stricte de la première.

Nous avons donc cherché un autre critère de comparaison : le nombre de profils différents vérifiant une de ces conditions, pour un nombre d'options et un nombre de votants fixés. Nous nous proposons de l'appeler polydiversité. Après avoir introduit la notation et les définitions utilisées dans ce chapitre, nous présenterons le paradoxe des conditions de Black et d'Arrow-Black et nous verrons comment il peut être résolu. Nous essayerons alors, en utilisant la même démarche, de mieux comprendre les restrictions imposées par les autres conditions, et en particulier les autres résultats paradoxaux liés à la diversité. Pour terminer, nous verrons comment l'approche géométrique présentée au chapitre précédent peut donner de mauvaises intuitions dans ce contexte.

3.1 Le paradoxe et sa résolution

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la relation majoritaire pouvait dans certains cas comporter des cycles. Pour pallier ce problème, de très nombreux chercheurs (Black (1948), Coombs¹, Ward², Sen (1966), Inada (1964), Romero (1978), Arrow et Raynaud (1986), etc.) ont proposé des conditions sur les ordres stricts telles que si les votants respectent ces conditions, la relation majoritaire est transitive.

Pour comparer ces Conditions de Transitivité de la Méthode Majoritaire (CTMM) ou simplement pour avoir une idée plus précise des restrictions liées à ces conditions, beaucoup d'auteurs (Romero (1978), Arrow et Raynaud (à paraître), Abello (1991), Fishburn (1997) etc.) ont utilisé la notion de diversité définie de la façon suivante : soit C une CTMM et m le nombre d'options, la diversité de C notée $F(m)$ est le nombre maximum d'ordres différents qui peuvent être observés dans un profil qui suit la condition C .

¹ [Coombs 1964] : Coombs C. H., A Theory of Data, Wiley, New-York, 1964.

² [Ward 1965] : Ward B., Majority voting and options forms of public enterprise, Public economy of urban communities, Margolis, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1965.

Malheureusement, cette valeur n'est pas toujours facile à calculer (Cf. les travaux d'Abello (1991) et de Fishburn (1997) sur la condition de Ward) et même lorsqu'on peut la calculer, les résultats sont parfois peu significatifs (par exemple pour les conditions d'unimodalité et d'unimaximalité).

Nous chercherons donc dans ce chapitre à lever ce paradoxe des conditions de Black et d'Arrow-Black en utilisant la notion de polydiversité. Au lieu de compter le nombre maximum d'ordres différents dans un profil respectant la CTMM C , nous compterons le nombre de profils différents respectant C . Nous considérerons que les profils ne sont pas anonymes, mais de nombreuses démonstrations sont adaptables au cas des situations (profils anonymes) de Lepelley (1993).

Nous exposerons tout d'abord la notation et les définitions utilisées dans ce chapitre. Après avoir présenté le paradoxe des conditions de Black et Arrow-Black, nous verrons comment la polydiversité permet de lever ce paradoxe dans le cas de quatre options, puis dans le cas d'un nombre quelconque d'options et d'un grand nombre de votants.

3.1.1 Présentation

Nous présenterons ici la notation utilisée dans ce chapitre ainsi que la description formelle du paradoxe des conditions de Black et Arrow-Black.

3.1.1.1 Notation générale

Définition 3.1.1 *La diversité ([Arrow et Raynaud 1986]) d'une CTMM, notée $F(m)$, est le nombre maximum d'ordres stricts différents que l'on peut trouver dans un profil¹ sur m options qui suit cette CTMM.*

Dans le cas où les profils ne sont pas anonymes, le nombre de profils de k votants lorsque l ordres stricts différents sont permis est tout simplement l^k . Si les profils sont anonymes, le nombre de situations $A_{k,l}$ de k votants lorsque l ordres stricts différents sont autorisés pour chacun d'eux et qu'il n'y a pas d'autres contraintes est aussi le nombre de solutions de l'équation $\sum_{i=1}^l n_i = k$, où (n_1, \dots, n_l) est un vecteur d'entiers de dimension l . Feller (1957) montre que c'est aussi le nombre de façons différentes de ranger k boules dans l boîtes soit :

$$A_{k,l} = C_k^{l+k-1} = \frac{(l+k-1)!}{(l-1)! k!}.$$

Définition 3.1.2 *La polydiversité d'une CTMM K pour m options et n votants, notée $P(K, m, n)$, est le nombre de profils différents de n votants sur m options respectant la CTMM K .*

Définition 3.1.3 *La polydiversité anonyme d'une CTMM K pour m options et n votants, notée $P^*(K, m, n)$, est le nombre de situations différentes de n votants sur m options respectant la CTMM K .*

¹ Les ordres stricts dans ce profil ne doivent pas être répétés (cette remarque n'a d'importance que pour la condition d'étoilement).

3 LE PARADOXE CONDITIONS DE BLACK ET ARROW-BLACK

Soit N^* le nombre de situations différentes de n votants et avec m options. Avec m options, il est possible de former $m!$ ordres stricts différents, d'où :

$$N^* = A_{n,m!} = C_n^{m!+n-1} = \frac{(m!+n-1)!}{n!(m!-1)!}.$$

Dans le cas de profils non anonymes, le nombre de profils différents de n votants et avec m options est bien sûr $N = (m!)^k$.

Un profil transitif est un profil pour lequel la relation majoritaire est transitive. Une situation est dite transitive à la même condition.

3.1.1.2 Définitions des conditions

La plupart des définitions des CTMM sont inspirées de celles de l'ouvrage [Arrow et Raynaud à paraître].

Condition de Black (1948) (unimodalité)

Supposons connu un ordre de référence R . Chaque votant commence par placer en tête l'option x qu'il préfère. Il ne peut placer en deuxième position que l'une des options (ou l'option s'il n'y en a qu'une) les (la) plus proche(s) de x dans R . L'option rangée en troisième est l'une des deux plus proches (ou la plus proche) des options non rangées et ainsi de suite.

Remarque : il est facile de se rendre compte que deux ordres de référence inverses conduisent aux mêmes ensembles d'ordres stricts autorisés et donc aux mêmes profils.

Kreweras (1963) a montré que la diversité de la condition d'unimodalité est $F(m) = 2^{m-1}$. En effet, l'option classée dernière ne peut être que la première ou la dernière de l'ordre de référence. Une fois cette option classée, l'option classée avant dernière ne peut être à nouveau que la première ou la dernière dans l'ordre de référence restreint aux alternatives non classées... En construisant les votes en partant de la fin, il y a donc deux choix possibles pour chaque place sauf pour la première.

Condition d'unimaximalité (single-peakedness ou pseudo-unimodalité)

Cette condition appelée aussi condition d'Arrow-Black généralise la condition précédente et peut s'énoncer de la façon suivante : un profil π suit la condition d'unimaximalité si et seulement si pour chaque triplet d'options $\{x, y, z\}$, au moins une des options n'est jamais rangée en troisième position dans $\pi(\{x, y, z\})$.

Paradoxalement, Köhler (1978) a montré que cette condition n'offre pas plus de diversité que la condition d'unimodalité alors que l'unimaximalité est trivialement une généralisation de la condition de Black. En effet, tous les profils unimodaux sont unimaximaux (l'option qui est classée deuxième dans la restriction de l'ordre de référence à un triplet ne peut pas être classée troisième dans la restriction des ordres stricts à ce triplet). Romero (1978) a cependant montré que la réciproque est fautive. En effet, le profil $\{adbc, bdca, cdba\}$ est unimaximal mais pas unimodal.

3.1.2 Résolution

Comme la condition d'Arrow-Black est une généralisation de la condition de Black, la conséquence en termes de polydiversité est immédiate : $P(\text{Black}, m, n) \leq P(\text{Unimaximalité}, m, n)$ et, $P^*(\text{Black}, m, n) \leq P^*(\text{Unimaximalité}, m, n)$.

3.1.2.1 Peu d'options ou de votants

Lorsque le nombre d'options ou de votants n 'est pas trop élevé, il est possible de calculer la valeur exacte de la polydiversité des deux conditions. Nous pouvons en déduire la restriction imposée par la condition de Black par rapport à celle d'Arrow-Black. Les résultats numériques et leurs commentaires seront présentés au chapitre 3.2.3 afin de pouvoir les comparer aux valeurs trouvées pour les autres conditions.

Dans la suite, les raisonnements sont expliqués pour la polydiversité anonyme en comptant le nombre de situations de vote satisfaisantes. Les résultats pour la polydiversité non anonyme se calculent de manière analogue en comptant les profils.

Condition de Black (unimodalité)

Trois options

Lepelley (1993) a obtenu le résultat suivant dans le cas des situations en utilisant un raisonnement similaire au nôtre.

Dans le cas de trois options, il existe six ordres de référence possibles différents. Nous pouvons nous contenter d'examiner trois ordres de référence tels qu'aucun d'eux ne soit l'inverse d'un autre, par exemple abc , acb et bac .

- Avec l'ordre de référence abc , les préférences des votants peuvent être abc , bac , bca ou cba . Nous pouvons alors construire $A_{n,4}$ situations différentes à partir des quatre ordres stricts autorisés.
- Avec l'ordre de référence acb , les préférences des votants peuvent être acb , cab , cba ou bca . En procédant de la même façon, $A_{n,4}$ situations peuvent être construites. Cependant, les $A_{n,2}$ situations formées uniquement à partir des ordres stricts bca et cba ont déjà été comptées.
- Avec l'ordre de référence bac , les préférences des votants peuvent être bac , acb , abc ou cab . En utilisant encore le même principe, il faudra soustraire les situations formées à partir des ordres stricts acb et cab d'une part et bca et cba d'autre part, soit deux fois $A_{n,2}$ situations.

Au total, le nombre de situations différentes vérifiant la condition d'unimodalité est :

$$P^*(\text{Black}, 3, n) = 3 \cdot A_{n,4} - 3 \cdot A_{n,2} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+5)}{2}.$$

Dans le cas de profils non anonymes, nous obtenons de la même façon en remplaçant $A_{n,k}$ par k^n .

$$P(\text{Black}, 3, n) = 3 \cdot 4^n - 3 \cdot 2^n.$$

3 LE PARADOXE CONDITIONS DE BLACK ET ARROW-BLACK

Les valeurs de la polydiversité pour les différentes conditions et les différents nombres d'options sont présentées dans le bilan.

Quatre options

La polydiversité pour quatre options a été calculée en utilisant un raisonnement similaire à celui utilisé pour trois options. Le Tableau 3.1 donne pour chaque ordre de référence (première ligne) les ordres stricts autorisés par la condition de Black. Les ordres de référence sont choisis de telle sorte qu'aucun ne soit l'inverse d'un autre. Pour plus de clarté par la suite, un numéro est attribué à chacun des 24 ordres stricts.

Ordre de référence	<i>abcd</i>	<i>abdc</i>	<i>acbd</i>	<i>adbc</i>	<i>acdb</i>	<i>adcb</i>	<i>bacd</i>	<i>badc</i>	<i>cabd</i>	<i>cadb</i>	<i>dacb</i>	<i>dabc</i>
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
<i>ordres stricts possibles</i>	<i>1 abcd</i>	<i>9 abdc</i>	<i>15 acbd</i>	<i>17 adbc</i>	<i>19 acdb</i>	<i>23 adcb</i>	<i>2 bacd</i>	<i>10 badc</i>	<i>16 cabd</i>	<i>20 cadb</i>	<i>24 dacb</i>	<i>18 dabc</i>
	<i>2 bacd</i>	<i>10 badc</i>	<i>16 cabd</i>	<i>18 dabc</i>	<i>20 cadb</i>	<i>24 dacb</i>	<i>1 abcd</i>	<i>9 abdc</i>	<i>15 acbd</i>	<i>19 acdb</i>	<i>23 adcb</i>	<i>17 adbc</i>
	<i>3 bcad</i>	<i>11 bdac</i>	<i>7 cbad</i>	<i>14 dbac</i>	<i>21 cdab</i>	<i>22 dcab</i>	<i>15 acbd</i>	<i>17 adbc</i>	<i>1 abcd</i>	<i>23 adcb</i>	<i>19 acdb</i>	<i>9 abdc</i>
	<i>4 bcda</i>	<i>12 bdca</i>	<i>6 cbda</i>	<i>13 dbca</i>	<i>5 cdba</i>	<i>8 dcba</i>	<i>19 acdb</i>	<i>23 adcb</i>	<i>9 abdc</i>	<i>17 adbc</i>	<i>15 acbd</i>	<i>1 abcd</i>
	<i>5 cdba</i>	<i>8 dcba</i>	<i>12 bdca</i>	<i>4 bcda</i>	<i>13 dbca</i>	<i>6 cbda</i>	<i>21 cdab</i>	<i>22 dcab</i>	<i>11 bdac</i>	<i>14 dbac</i>	<i>7 cbad</i>	<i>3 bcad</i>
	<i>6 cbda</i>	<i>13 dbca</i>	<i>4 bcda</i>	<i>12 bdca</i>	<i>8 dcba</i>	<i>5 cdba</i>	<i>20 cadb</i>	<i>24 dacb</i>	<i>10 badc</i>	<i>18 dabc</i>	<i>16 cabd</i>	<i>2 bacd</i>
	<i>7 cbad</i>	<i>14 dbac</i>	<i>3 bcad</i>	<i>11 bdac</i>	<i>22 dcab</i>	<i>21 cdab</i>	<i>16 cabd</i>	<i>18 dabc</i>	<i>2 bacd</i>	<i>24 dacb</i>	<i>20 cadb</i>	<i>10 badc</i>
	<i>8 dcba</i>	<i>5 cdba</i>	<i>13 dbca</i>	<i>6 cbda</i>	<i>12 bdca</i>	<i>4 bcda</i>	<i>22 dcab</i>	<i>21 cdab</i>	<i>14 dbac</i>	<i>11 bdac</i>	<i>3 bcad</i>	<i>7 cbad</i>

Tableau 3.1 : Ordres stricts possibles construits à partir d'un ordre de référence donné dans une situation suivant la condition de Black

Pour chaque ordre de référence, il est possible de construire $A_{n,8}$ situations différentes. Il suffit maintenant de compter le nombre de profils répétés. Le Tableau 3.2 indique, pour chaque ordre de référence (colonnes), les ordres stricts qui avaient déjà été autorisés par un des ordres de référence précédents (lignes).

3 LE PARADOXE CONDITIONS DE BLACK ET ARROW-BLACK

Ordres de référence précédent	Ordre de référence dans la séquence donnée										
	<i>abcd</i>	<i>acbd</i>	<i>adbc</i>	<i>acdb</i>	<i>adcb</i>	<i>bacd</i>	<i>badc</i>	<i>cabd</i>	<i>cadb</i>	<i>dacb</i>	<i>dabc</i>
<i>abcd</i>	5, 8	3, 4, 6, 7	4, 6	5, 8	4, 5, 6, 8	1, 2	*	1, 2	*	3, 7	1, 2, 3, 7
<i>abdc</i>	\	12, 13	11, 12, 13, 14	5, 8, 12, 13	5, 8	*	9, 10	9, 10, 11, 14	11, 14	*	9, 10
<i>acbd</i>	\	\	4, 6, 12, 13	12, 13	4, 6	15, 16	*	15, 16	*	3, 7, 15, 16	3, 7
<i>adbc</i>	\	\	\	12, 13	4, 6	*	17, 18	11, 14	11, 14, 17, 18	*	17, 18
<i>acdb</i>	\	\	\	\	5, 8, 21, 22	19, 20, 21, 22	21, 22	*	19, 20	19, 20	*
<i>adcb</i>	\	\	\	\	\	21, 22	21, 22, 23, 24	*	23, 24	23, 24	*
<i>bacd</i>	\	\	\	\	\	\	21, 22	1, 2, 15, 16	19, 20	15, 16, 19, 20	1, 2
<i>badc</i>	\	\	\	\	\	\	\	9, 10	17, 18, 23, 23	23, 24	9, 10, 17, 18
<i>cabd</i>	\	\	\	\	\	\	\	\	11, 14	15, 16	1, 2, 9, 10
<i>cadb</i>	\	\	\	\	\	\	\	\	\	19, 20, 23, 24	17, 18
<i>dacb</i>	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	3, 7

Tableau 3.2 : Ordres stricts répétés

Prenons l'exemple de l'ordre de référence *dabc* pour expliquer comment compter le nombre de situations répétées (les autres calculs se font de manière analogue).

Trois des ordres de référence précédents (*abcd*, *badc* et *cabd*) peuvent permettre de construire quatre ordres stricts pouvant être aussi construits à partir de l'ordre de référence *dabc*. De la même façon, six des ordres de référence précédents ont deux ordres stricts autorisés en commun (*abdc*, *acbd*, *adbc*, *bacd*, *cadb* et *dacb*). Les situations répétées sont :

- celles formées à partir des ordres stricts 1, 2, 3 et 7 ($A_{n,4}$ situations) ;
- celles formées à partir des ordres stricts 9, 10, 17 et 18 ($A_{n,4}$ situations) ;
- celles formées à partir des ordres stricts 1, 2, 9 et 10 moins celles formées seulement à partir des ordres stricts 1 et 2 ou 9 et 10 qui ont déjà été enlevés dans les catégories précédentes (soit $A_{n,4} - 2.A_{n,2}$ situations).

Toutes les situations répétées appartiennent à une de ces trois catégories. Nous avons finalement $3.A_{n,4} - 2.A_{n,2}$ situations répétées avec l'ordre de référence *dabc*.

On compte au total $18.A_{n,4}$ situations répétées. Nous obtenons donc

$$P^*(Black, 4, n) = 12.A_{n,8} - 18.A_{n,4} \text{ soit } ^1 :$$

$$P^*(Black, 4, n) = \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)}{420} \cdot (n^4 + 22 \cdot n^3 + 179 \cdot n^2 + 638 \cdot n - 420).$$

Pour des profils non anonymes, nous aurions obtenu avec un raisonnement similaire

$$P(Black, 4, n) = 12.8^n - 18.4^n.$$

¹ Cette relation et les relations similaires ont été vérifiées par énumération sur ordinateur pour les petites valeurs de n .

Condition d'unimaximalité

Deux votants

Tout profil formé de deux ordres stricts est unimaximal. En effet, dans ce cas, pour chaque triplet d'options, une des options n'est jamais dernière. Ainsi, la polydiversité de la condition d'Arrow-Black pour deux votants est :

$$P(\text{Unimaximalité}, m, 2) = (m!)^2 \text{ et } P^*(\text{Unimaximalité}, m, 2) = A_{2, m!} = \frac{m! \cdot (m! + 1)}{2}.$$

Remarquons qu'il existe par contre des profils unimaximaux qui ne sont pas unimodaux. C'est le cas, par exemple, du profil $\pi = \{abcd, dbca\}$. Les deux extrémités d'un ordre de référence par rapport auquel π pourrait vérifier la condition de Black sont donc a et d . Le lecteur pourra vérifier que ni $abcd$ ni $acbd$ ne permettent de construire les deux ordres stricts de π .

Trois options

Six ordres stricts sont possibles : $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Une des trois options n'est jamais dernière.

- Si c'est a , chaque votant doit choisir parmi les quatre ordres stricts abc, acb, bac, cab . Le nombre de situations différentes que nous pouvons construire ainsi est $A_{n, 4}$.
- Si c'est b , nous pouvons construire $A_{n, 4}$ profils en procédant de la même façon. Cependant, les $A_{n, 2}$ situations formées seulement à partir des ordres stricts abc et bac ont déjà été comptées.
- Si c'est c , en utilisant encore le même principe, il faut soustraire les situations formées seulement à partir des ordres stricts acb et cab ainsi que celles formées seulement à partir des ordres stricts bca et cba .

Le calcul est le même que pour la condition d'unimodalité. Au total, avec trois options, le nombre de situations différentes vérifiant la condition d'unimaximalité est

$$P^*(\text{Unimaximalité}, 3, n) = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 5)}{2}.$$

Le nombre de profils différents vérifiant cette condition est aussi le même :

$$P(\text{Unimaximalité}, 3, n) = P(\text{Black}, 3, n) = 3 \cdot 4^n - 3 \cdot 2^n.$$

Nous remarquons donc que pour trois options, la polydiversité de la condition d'unimaximalité est la même que celle de la condition d'unimodalité.

Quatre options

La polydiversité de la condition d'unimaximalité pour quatre options a été calculée de manière énumérative. Soit U_{4n} l'ensemble des situations avec quatre options et n votants qui vérifient la condition d'unimaximalité. Il y a quatre triplets d'options : $T_1 = \{a, b, c\}$, $T_2 = \{a, b, d\}$, $T_3 = \{a, c, d\}$ et $T_4 = \{b, c, d\}$. Soit V l'ensemble des $m! = 24$ ordres stricts possibles. Notons $D(T_i, x)$ l'ensemble des ordres stricts de V tels que l'option x soit dernière si l'on restreint les ordres stricts au triplet T_i . Les situations vérifiant la condition d'unimaximalité sont celles pour lesquelles :

- l'intersection avec au moins un des trois ensembles $A_1 = D(T_1, a)$, $A_2 = D(T_1, b)$, $A_3 = D(T_1, c)$ est vide ;
- l'intersection avec au moins un des trois ensembles $A_4 = D(T_2, a)$, $A_5 = D(T_2, b)$, $A_6 = D(T_2, d)$ est vide ;

3 LE PARADOXE CONDITIONS DE BLACK ET ARROW-BLACK

- l'intersection avec au moins un des trois ensembles $A_7 = D(T_3, a)$, $A_8 = D(T_3, c)$, $A_9 = D(T_3, d)$ est vide ;
- l'intersection avec au moins un des trois ensembles $A_{10} = D(T_4, b)$, $A_{11} = D(T_4, c)$, $A_{12} = D(T_4, d)$ est vide.

Pour calculer la cardinalité de $U4n$ sans faire de répétition, nous allons le partitionner et sommer les cardinaux des différents sous-ensembles. Les 81 sous-ensembles de la partition correspondent aux 3^4 façons de choisir, pour chaque triplet, l'option qui ne doit pas être rangée dernière dans ce triplet. Ces différents sous-ensembles sont ceux qui ne contiennent pas d'ordre strict dans les ensembles A_i, A_j, A_k et A_l ($i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{4, 5, 6\}, k \in \{7, 8, 9\}$ et $l \in \{10, 11, 12\}$), et au moins un ordre strict dans chaque ensemble A_p tel que $1 \leq p \leq i$ ou $4 \leq p \leq j$ ou $7 \leq p \leq k$ ou $10 \leq p \leq l$. Par construction, ces sous-ensembles sont disjoints. En fait, beaucoup d'entre eux sont vides. En effet, considérons par exemple l'ensemble des situations n'ayant d'ordres stricts ni dans A_1 ni dans A_4 ni dans A_8 ni dans A_{12} mais ayant au moins un ordre strict dans A_7 , un ordre strict dans A_{10} et un ordre strict dans A_{11} . Les seuls ordres stricts vérifiant les premières conditions sont $dcab, cadb, cdab$ et $acdb$ et aucun d'entre eux n'appartient à A_{11} .

Comptons maintenant, comme exemple, le nombre de situations du sous-ensemble C n'ayant d'ordres stricts ni dans A_1 ni dans A_6 ni dans A_9 ni dans A_{12} mais ayant au moins un ordre strict dans chacun des sous-ensembles $A_i, i \in S$ avec $S = \{4, 5, 7, 8, 10, 11\}$.

Soit $E(A_i A_k \dots A_p)$ l'ensemble des situations dont les ordres stricts n'appartiennent à aucun des sous-ensembles $A_1, A_6, A_9, A_{12}, A_i, A_k, \dots, A_p$. Alors, $\text{card}\left(\prod_{i \in S} A_i\right) = \text{card}(E(\)) - \text{card}(C)$.

$\text{card}\left(\prod_{i \in S} A_i\right)$ peut être calculé facilement en utilisant la formule de Poincaré :

$$\text{card}\left(\prod_{i \in S} A_i\right) = \sum_{k=1}^6 (-1)^{k-1} S_k \text{ avec } S_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k \in S_k} \text{card}(E(A_{i_1} \dots A_{i_k})).$$

La cardinalité de chaque ensemble $E(A_i A_k \dots A_p)$ est facile à évaluer. Il suffit de compter le nombre x d'ordres stricts restant pour les votants de la situation (les ordres stricts de $V-A_1-A_6-A_9-A_{12}-A_i-A_k-\dots-A_p$). La cardinalité de chaque ensemble est alors $A_{n,x}$. En fait, beaucoup d'entre eux sont vides. Par exemple, tous les ensembles $E(\dots A_6 \dots A_4 \dots A_5 \dots)$ sont vides puisqu'aucune option ne peut être classée dernière dans le triplet T_2 . Nous obtenons ainsi après réduction $\text{card}(C) = A_{n,8} - 2 \cdot A_{n,6} + A_{n,4}$. Les autres calculs peuvent être faits en utilisant le même principe. En sommant les cardinaux de tous ces sous-ensembles, nous obtenons :

$$P^*(\text{Unimaximalité}, 4, n) = 24 \cdot A_{n,8} - 24 \cdot A_{n,6} - 6 \cdot A_{n,4}.$$

Soit après simplification :

$$P^*(\text{Unimaximalité}, 4, n) = \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot (n^4 + 22 \cdot n^3 + 137 \cdot n^2 + 260 \cdot n - 210)}{210}.$$

Dans le cas de profils anonymes, la démonstration peut encore être adaptée et nous obtenons :

$$P(\text{Unimaximalité}, 4, n) = 24 \cdot 8^n - 24 \cdot 6^n - 6 \cdot 4^n.$$

3.1.2.2 Plus de 5 options

Les méthodes de dénombrement que nous avons utilisées pour quatre options peuvent être utilisées lorsque le nombre d'options est plus grand. La polydiversité anonyme des conditions de Black et Arrow-Black pour m options et n votants sont donc, lorsque m est fixé, des polynômes en n . Nous avons calculé leurs termes de plus grand degré afin d'obtenir un équivalent lorsque n est grand.

Condition de Black (unimodalité)

Au lieu de 12 ordres de référence, nous en utilisons $m!/2$. À partir de chaque ordre de référence, nous pouvons construire 2^{m-1} ordres stricts. Ainsi nous obtenons (avec d'éventuelles répétitions) $(m!/2) \cdot A_{n, 2^{m-1}}$ situations. Rappelons que $A_{y, x}$ est, pour x fixé un polynôme en y dont le terme de plus grand degré est

$$\frac{1}{(x-1)!} \cdot y^{x-1}.$$

Deux ordres de référence non inverses l'un de l'autre donnent des ensembles d'ordres stricts autorisés distincts. En effet, supposons que deux ordres de référence non inverses l'un de l'autre donnent un même ensemble d'ordres stricts autorisés, cela signifie qu'il existe un ensemble de 2^{m-1} ordres stricts différents qui conduit à deux ordres de référence possibles. Il reste donc au moins un pivot dans l'algorithme des pyramides de [Romero 1978] (voir aussi [Arrow et Raynaud 1986] pour une version plus simple de cet algorithme qui permet de reconnaître, s'il en existe, les ordres de référence par rapport auxquels un profil donné est blackien). Nous pouvons ajouter un nouvel ordre strict pour fixer ce pivot. Ainsi nous obtenons un ensemble unimodal de $2^{m-1} + 1$ ordres stricts différents ce qui est en contradiction avec la valeur de la diversité. Le nombre d'ordres stricts communs aux ensembles des ordres stricts autorisés par deux ordres de référence différents (et non inversés) est donc strictement inférieur à 2^{m-1} . Le nombre de situations répétées est inférieur à un polynôme de degré strictement inférieur à $2^{m-1} - 1$. Le terme de plus grand degré de $P(\text{Black}, m, n)$ est donc $(m!/2) \cdot n^{2^{m-1} - 1} / (2^{m-1} - 1)!$. Nous obtenons pour m fixé et lorsque n est grand l'équivalent suivant :

$$P^*(\text{Black}, m, n) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \frac{m!}{2 \cdot (2^{m-1} - 1)!} \cdot n^{2^{m-1} - 1}.$$

Quelques valeurs numériques pour cet équivalent et pour l'équivalent de la condition d'unimaximalité sont données dans le bilan.

Lorsque les profils ne sont pas anonymes, le nombre de profils que nous pouvons construire à partir d'un ordre de référence est $(2^{m-1})^n$. Les profils répétés sont, pour n assez grand, en nombre négligeable par rapport aux $(2^{m-1})^n$ profils que nous pouvons construire. Nous obtenons alors l'équivalent suivant :

$$P(\text{Black}, m, n) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \frac{m!}{2} \cdot (2^{m-1})^n.$$

Condition d'unimaximalité

Rappelons tout d'abord la définition des treillis utilisés dans [Köhler 1978].

Définition 3.1.4 Soit π un profil donné sur X . On appellera « treillis associé au profil π » le graphe $T(\pi) = (Y, U)$ simple orienté défini de la manière suivante :

3 LE PARADOXE CONDITIONS DE BLACK ET ARROW-BLACK

- chaque partie de X désigne au plus un sommet de T . Les ensembles X et $\{\emptyset\}$ sont des sommets de T ;
- l'ensemble des successeurs d'un sommet S s'obtient en ôtant à S , de toutes les façons possibles, un des objets qui, dans $\pi(S)$ se trouve classé en queue ;
- le sommet S est joint à ses successeurs par des arcs dirigés vers le bas.

Köhler (1978) a montré de nombreuses propriétés de ces treillis dans le cas des profils qui suivent la condition d'unimaximalité. Ces propriétés restent vraies lorsque les treillis sont associés à des situations.

- Tout sommet a au plus deux successeurs.
- À chaque arc d'un chemin correspond une option éliminée, ainsi nous pouvons associer un ordre strict à chaque chemin de $\{\emptyset\}$ vers X . L'ensemble des chemins de T remontant de $\{\emptyset\}$ vers X correspond à un profil vérifiant la condition d'unimaximalité.
- Si le treillis est maximal, c'est-à-dire que chaque sommet (excepté $\{\emptyset\}$ bien sûr) a exactement deux successeurs, ces chemins sont au nombre de 2^{m-1} (c'est ainsi que la diversité de la condition d'unimaximalité a été calculée).

Pour qu'un profil π respecte la condition d'unimaximalité il faut que, pour chaque triplet d'options, au moins une de ces options ne soit jamais dernière dans les ordres stricts de π restreints au triplet. Nous pouvons donc faire correspondre à un profil vérifiant la condition d'unimaximalité une fonction f de l'ensemble T des triplets de X vers X qui à tout triplet t associe la (ou les) option (s) de ce triplet qui ne doi(ven)t pas être dernière(s) dans les ordres stricts de $\pi(t)$. Réciproquement, à toute fonction f définie précédemment, nous pouvons faire correspondre une situation constituée de tous les ordres stricts sans répétition vérifiant les conditions imposées par les associations des options aux triplets. Soit F l'ensemble des fonctions ainsi définies.

Proposition 3.1.1. *Si la situation correspondant à une fonction f est unimaximale, alors l'image de T par f est de cardinalité $m-1$ ou $m-2$.*

Preuve.

- Si $f(T)$ est de cardinalité inférieure ou égale à $m-3$.
Nous pouvons choisir trois options n'appartenant pas à $f(T)$. Par définition de $f(T)$, aucune de ces trois options n'est associée au triplet formé de ces trois options. Dans la restriction des ordres stricts à ce triplet, chaque option est donc au moins une fois dernière et la condition d'unimaximalité est mise en défaut.
- Si $f(T)$ est de cardinalité m .
Toutes les options sont affectées à au moins un triplet. Dans ce cas, aucune option ne peut être dernière dans les ordres stricts de la situation et il n'y a aucun ordre strict vérifiant les conditions d'affectation. \square

Proposition 3.1.2. *L'ensemble situations sans répétition d'ordres stricts de diversité maximale est en bijection avec les applications f de F telles que $\text{card}(f(T)) = m-2$.*

Preuve Supposons que la situation S soit de diversité maximale. Si $f(T)$ est de cardinalité $m-1$, une seule option peut être dernière dans les ordres stricts de S . En effet, si deux options étaient dernières, l'une des deux devrait appartenir à $f(T)$ et donc ne pas être dernière dans la restriction des ordres stricts de S à un des triplets de T , ce qui est en contradiction avec le fait

qu'elle soit dernière dans les ordres stricts de S . Dans le treillis associé à S , un seul arc part de X , la diversité n'est donc pas maximale. La cardinalité de $f(T)$ est donc $m-2$.

Montrons maintenant que f est une application, c'est-à-dire que tout triplet t a une seule image par f . Si deux options (par exemple b et c) sont associées au même triplet $\{a, b, c\}$, la troisième option a est toujours dernière dans les ordres stricts de $S(\{a, b, c\})$. Montrons que dans le treillis T associé à la situation S , un arc est manquant.

Soit V le sommet de T le plus éloigné de X (au sens de la distance habituelle) qui contient le triplet $\{a, b, c\}$. Supposons que V contienne des options autres que a, b et c . Alors, comme V a deux successeurs (la situation S est maximale), deux options différentes occupent les derniers rangs des ordres stricts de $S(V)$. Ces deux options ne sont ni b ni c car a est toujours derrière. Il existe donc une option x autre que a qui occupe au moins une fois le dernier rang. Le sommet $V-\{x\}$ suit V , contient a, b et c et est plus éloigné de X que V . Ceci met en défaut l'hypothèse de départ. Le sommet V ne contient donc pas d'autre option que a, b et c . Dans $S(\{a, b, c\})$, l'option a est toujours dernière. Le sommet V n'a qu'un successeur : le sommet $\{b, c\}$. Le treillis n'est donc pas maximal et par suite le nombre d'ordres stricts différents dans le profil non plus.

Réciproquement, si à une application f de F telle que $\text{card}(f(T)) = m-2$ correspond une situation S non maximale, il manque un arc dans le treillis associé à S . Une option a est donc toujours dernière lorsque les ordres stricts de S sont restreints à un sous-ensemble A d'options. Si le cardinal de A est supérieur ou égal à trois, il existe au moins deux options b et c telles que l'option a est toujours dernière dans $S(\{a, b, c\})$. Ceci revient à dire que les deux options b et c sont associées au triplet, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse. Si le cardinal de A est égal à deux, $A = \{a, b\}$ et a est toujours derrière b dans les ordres stricts de S . Il n'y a dans le treillis associé à S qu'un seul chemin passant par A . À ce chemin correspond un ordre strict v commençant par ba . L'ordre strict v' obtenu en permutant dans v les options a et b vérifie les mêmes conditions que v . Nous pouvons donc ajouter v' à S sans enfreindre ces conditions. La situation S n'était donc pas constituée de tous les ordres stricts différents vérifiant les conditions d'affectations des options aux triplets.

À chaque application f de F telle que $\text{card}(f(T)) = m-2$ correspond une situation sans répétition maximale et toutes ces situations sont différentes. En effet, supposons que deux applications différentes f et g de F telles que $\text{card}(f(T)) = \text{card}(g(T)) = m-2$ conduisent à la même situation S maximale, c'est-à-dire aux mêmes ordres stricts autorisés parmi les $m!$ ordres stricts possibles. Alors, il existe un triplet auquel deux options différentes ont été associées. En utilisant la démonstration précédente, nous pouvons montrer qu'alors la situation S n'est pas maximale ce qui est contradictoire. \square

Pour compter le nombre de situations sans répétition de diversité maximale, il suffit de compter le nombre d'applications f telles que $\text{card}(f(T)) = m-2$, c'est-à-dire le nombre de façons de choisir $m-2$ options et l'association des triplets à ces options. Le nombre de façons de choisir ces ensembles de $m-2$ options parmi les m options est

$$C_{m-2}^m = \frac{m \cdot (m-1)}{2}$$

Comptons pour chacun de ces ensembles de $m-2$ options le nombre d'applications de F compatibles. Trois cas sont envisageables :

- Si le triplet t contient les deux options qui ne font pas partie des $m-2$ options de l'ensemble (appelons-les a et b pour plus de clarté, ce sont les deux options « manquantes »). Il n'y a alors qu'un choix possible : la troisième option x du triplet ne doit jamais être dernière et $f(t) = x$.

3 LE PARADOXE CONDITIONS DE BLACK ET ARROW-BLACK

- Si le triplet t contient une seule des deux options « manquantes ». L'option qui ne doit pas être dernière peut être choisie parmi les deux autres options du triplet. Le nombre de triplets qui contiennent l'option a mais pas b est

$$C_2^{m-2} = \frac{(m-2) \cdot (m-3)}{2}$$

(choisir les deux options qui complètent le triplet parmi les $m-2$ options autres que a ou b). Il y en a autant qui contiennent b mais pas a , soit en tout $(m-2) \cdot (m-3)$ triplets qui ont deux images possibles.

- Si le triplet t ne contient ni a ni b , t a trois images possibles par f (les trois options du triplet). Le nombre de triplets ne contenant ni a ni b est

$$C_3^{m-2} = \frac{(m-2) \cdot (m-3) \cdot (m-4)}{6}$$

(choisir trois options parmi les $m-2$ de l'ensemble).

Pour chaque choix des $m-2$ options, nous obtenons F façons de choisir les options non dernières dans les différents triplets avec

$$F = 2^{(m-2) \cdot (m-3)} \cdot 3^{\frac{(m-2) \cdot (m-3) \cdot (m-4)}{6}}$$

Le nombre de situations sans répétition de diversité maximale est donc de

$$F \cdot C_{m-2}^m = \frac{m \cdot (m-1)}{2} \cdot 2^{(m-2) \cdot (m-3)} \cdot 3^{\frac{(m-2) \cdot (m-3) \cdot (m-4)}{6}}$$

À partir de chaque situation sans répétition de diversité maximale, nous pouvons construire $A_{n, 2^{m-1}}$ situations. Ici encore, le nombre de profils comptés plusieurs fois est négligeable par rapport au nombre de profils construits. Nous avons vu dans la démonstration du 3.3. que

$$A_{n, 2^{m-1}} \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{(2^{m-1} - 1)!} \cdot n^{2^{m-1} - 1}$$

Pour m fixé, nous obtenons l'équivalent suivant lorsque n est grand :

$$P^*(Unimaxalité, m, n) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \frac{m \cdot (m-1)}{2} \cdot 2^{(m-2) \cdot (m-3)} \cdot 3^{\frac{(m-2) \cdot (m-3) \cdot (m-4)}{6}} \cdot \frac{1}{(2^{m-1} - 1)!} \cdot n^{2^{m-1} - 1}$$

Remarquons que nous retrouvons bien avec cette formule les équivalents des fonctions calculées pour 3 et 4 options.

Pour des profils non anonymes, à partir de chaque situation sans répétition de diversité maximale, nous pouvons construire $(2^{m-1})^n$ profils. L'équivalent devient dans ce cas :

$$P(Unimaxalité, m, n) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \frac{m \cdot (m-1)}{2} \cdot 2^{(m-2) \cdot (m-3)} \cdot 3^{\frac{(m-2) \cdot (m-3) \cdot (m-4)}{6}} \cdot (2^{m-1})^n$$

Bilan sur les conditions de Black et Arrow-Black

Pour les petits nombres d'options, le bilan est présenté au paragraphe 3.2.3 pour pouvoir comparer les valeurs de la polydiversité à celles obtenues pour les autres conditions.

Les équivalents obtenus pour les conditions de Black et d'unimaxalité mettent en évidence les restrictions imposées par la condition de Black. Des valeurs numériques sont données dans le Tableau 3.3 pour les petites valeurs de m .

m	$P^*(Black, m, n)$	$P^*(Unimaximalité, m, n)$
2	n	n
3	$0,5.n^3$	$0,5.n^3$
4	$2,38.10^{-3}.n^7$	$4,76.10^{-3}.n^7$
5	$4,59.10^{-11}.n^{15}$	$1,47.10^{-9}.n^{15}$
6	$4,38.10^{-32}.n^{31}$	$6,05.10^{-28}.n^{31}$
7	$1,27.10^{-84}.n^{63}$	$6,56.10^{-76}.n^{63}$
8	$6,70.10^{-210}.n^{127}$	$3,48.10^{-194}.n^{127}$

Tableau 3.3 : Équivalents lorsque n est grand¹

Bien que les diversités de ces deux conditions soient égales, le rapport entre le nombre de situations blackiennes et le nombre de situations unimaximales différentes tend vers 0 lorsque les nombres d'options et de votants sont grands.

3.2 La polydiversité des autres CTMM : espoirs et déceptions

La polydiversité nous a permis de mieux comprendre les restrictions liées aux conditions d'unimodalité et d'unimaximalité. Aussi avons nous essayé de l'utiliser dans les autres cas où la diversité ne donnait pas une représentation satisfaisante de ces restrictions. Si l'approche a été très fertile pour les deux conditions précitées, cela n'a été le cas pour aucune des autres conditions auxquelles nous nous sommes intéressés.

Après avoir présenté les autres conditions étudiées, nous évaluerons leurs polydiversités lorsque ce calcul est pertinent. Nous dresserons alors un bilan des résultats obtenus (ou non obtenus) qui permettra de se rendre compte des apports de la polydiversité ainsi que de ses lacunes.

3.2.1 D'autres conditions, d'autres paradoxes

Nous présentons ici les autres conditions qui ont retenu notre attention ainsi que les résultats paradoxaux qui en ont été la cause.

3.2.1.1 Condition de Coombs

La condition de Coombs² ressemble à celle de Black à la différence près que nous n'avons plus affaire à un ordre de référence, mais à un continuum de référence. De manière plus formelle :

Soit P une fonction numérique sur X qui assigne à chaque option x un nombre $P(x)$. Supposons que pour tout i , la préférence du votant O_i se déduise à partir d'une valeur idéale p_i propre à O_i : l'option x_i^1 , classée en tête par O_i minimisera, sur X , $|P(x) - p_i|$ (où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue). La seconde option de O_i minimisera la même fonction mais cette fois sur $\{X - x_i^1\}$, etc.

¹ Les valeurs comportant deux décimales sont des valeurs approchées.

² [Coombs 1964] : Coombs C. H., A Theory of Data, Wiley, New-York, 1964.

3 LE PARADOXE CONDITIONS DE BLACK ET ARROW-BLACK

Un profil suit la condition de Coombs si tous les ordres stricts sont obtenus par ce procédé, à partir de la même fonction P et d'un ensemble de p_i , chaque p_i correspondant à un des votants.

Tous les profils qui vérifient la condition de Coombs vérifient aussi la condition de Black. Remarquons aussi que comme pour la condition de Black, deux ordres de référence inverses l'un de l'autre conduisent aux mêmes ensembles d'ordres stricts autorisés et par suite aux mêmes profils.

Coombs a montré que la diversité de cette condition était $F(m) = 1 + [m.(m-1)/2]$. Remarquons que contrairement à notre intuition, dans le cas de trois options, la diversité de la condition de Coombs est donc la même ($F(3) = 4$) que celle de la condition de Black.

3.2.1.2 Condition extrême (not-in-the-middle)

Un profil π suit la condition extrême si pour chaque triplet d'options $\{x, y, z\}$, l'une des trois options n'est jamais classée deuxième dans $\pi(\{x, y, z\})$.

Cette condition est une généralisation de la condition de bipartition proposée dans [Inada 1964] dont Inada avait remarqué qu'elle suffisait à assurer la transitivité de la méthode majoritaire. Le calcul de la diversité de la condition extrême s'avère plus délicat : soit P la propriété pour un profil de contenir sur quatre options $\{a, b, c, d\}$ les classements $abcd$ et $bdca$. Raynaud (1981) a montré que la diversité de cette condition était de 2^{m-1} , mais que si un profil avait la propriété P , il ne pouvait pas y avoir plus de 2^{m-2} ordres stricts différents dans ce profil. Ainsi, bien que la diversité de cette condition soit la même que celle de la condition d'unimaximalité, elle paraît en fait plus restrictive. C'est ce que nous essayerons de montrer en utilisant la polydiversité.

3.2.1.3 Condition de Ward

La condition de Ward s'énonce aussi de façon purement algébrique : un profil suit la condition de Ward s'il ne contient pas de triplet cyclique, c'est-à-dire si l'on ne peut trouver un ensemble de trois options $\{a, b, c\}$ et un ensemble de trois votants $\{V_1, V_2, V_3\}$ ayant voté les ordres $\{O_1, O_2, O_3\}$ tels que :

- $O_1(\{a, b, c\}) = a > b > c$;
- $O_2(\{a, b, c\}) = b > c > a$;
- $O_3(\{a, b, c\}) = c > a > b$.

Pour la condition de Ward, le calcul de la diversité est une tâche ardue. Abello (1991), Fishburn (1997) et Arrow et Raynaud (1986) ont montré les résultats les plus intéressants pour nous : $F(3) = 4$, $F(4) = 9$, $F(5) = 20$ et $2.(m-1)! \geq F(m) \geq (2.1708)^m$. Ici encore, pour trois options, la diversité est la même que pour les autres conditions. De plus, lorsque le nombre d'options augmente, elle devient très rapidement difficile à calculer. La polydiversité nous permettra-t-elle de résoudre ces problèmes ?

3.2.1.4 Condition d'étoilement

Cette condition est une extension que l'on doit à Terrier (1980) de la condition de consistance multidimensionnelle de Blin (1973). Rappelons tout d'abord quelques définitions.

Définition 3.2.1 *Un permutoèdre est le graphe dont les sommets sont toutes les permutations sur m objets. Deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les permutations correspondantes diffèrent l'une de l'autre par une simple transposition de deux éléments consécutifs.*

Définition 3.2.2 *Une chaîne tendue sur ce permutoèdre est un plus court chemin entre deux sommets, plus court au sens où il emprunte le plus petit nombre possible d'arêtes.*

Définition 3.2.3 *Un profil suit la condition de consistance multidimensionnelle si et seulement si les ordres qui le composent peuvent tous être inscrits le long d'une chaîne tendue du permutoèdre.*

Définition 3.2.4 *Un ordre médian est défini de la façon suivante : en lisant la suite des $2k+1$ ordres d'une même chaîne tendue (certains pouvant être répétés plusieurs fois), on doit pouvoir progresser le long de cette chaîne sans jamais revenir sur ses pas. L'ordre médian est alors l'ordre situé au milieu de cette promenade, de telle sorte que k ordres ont été déjà rencontrés avant lui, k ordres devant être rencontrés après lui.*

Un profil suit la condition d'étoilement ([Romero 1978]) s'il peut être décomposé en sous-ensembles d'options tels que :

- le premier sous-ensemble suit une condition de consistance multidimensionnelle d'ordre médian μ ;
- les autres sous-ensembles, à condition de leur ajouter un ordre égal à μ , suivent séparément une condition de consistance multidimensionnelle d'ordre médian μ .

La diversité de la condition d'étoilement est maximale. Terrier (1980) a en effet montré que le profil constitué de tous les ordres stricts possibles sauf un vérifiait cette condition, ce qui correspond à une diversité $F(m) = m! - 1$. Cette valeur est difficile à interpréter car si le premier votant a effectivement tous les choix possibles, les préférences des autres votants sont de plus en plus contraintes. Il est donc peu pertinent de comparer la condition d'étoilement aux autres conditions en calculant leurs diversités. Nous avons donc essayé de le faire en utilisant la polydiversité.

3.2.2 Résolution

Nous donnerons tout d'abord quelques bornes et quelques résultats immédiats pour ces conditions. Puis, nous nous intéresserons à chacune d'elles plus en détails et nous essayerons de calculer leurs polydiversité lorsque ce calcul est pertinent (c'est-à-dire lorsque la difficulté du calcul est en rapport avec l'intérêt de la condition).

3.2.2.1 Des bornes importantes

La polydiversité n'a pas été, à notre connaissance, directement étudiée pour comparer les CTMM. Cependant, certains travaux se rapprochent fortement de cette notion. Dans la thèse de Romero (1978) par exemple, une étude approfondie des CTMM nous apporte quelques éclaircissements sur les ensembles de profils vérifiant certaines CTMM. Les résultats qui nous intéressent peuvent être synthétisés par le schéma de la Figure 3.1.

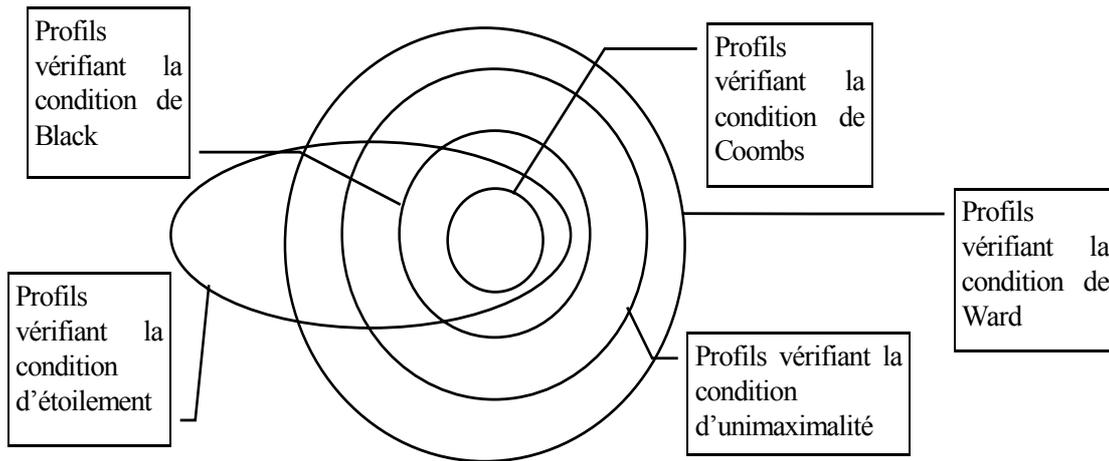


Figure 3.1 : Répartition des profils

Remarque : ce schéma n'est bien sûr valable que pour un nombre impair de critères. Nous pouvons immédiatement en déduire que pour tout m et tout n :

$$P(\text{Coombs}, m, n) \leq P(\text{Black}, m, n) \leq P(\text{Unimaximalité}, m, n) \leq P(\text{Ward}, m, n).$$

De même, la condition extrême est un cas particulier de la condition de Ward, donc :

$$P(\text{Extrême}, m, n) \leq P(\text{Ward}, m, n).$$

Ces relations sont aussi vraies dans le cas de situations. Certaines valeurs ont déjà été calculées pour des petits nombres d'options, nous le signalerons au moment voulu. Le calcul de la diversité est évident pour certains cas particuliers énumérés ci-dessous.

Dans le cas des conditions de Black, Coombs, Ward, unimaximalité et extrême, la diversité $F(m)$, pour m options, est souvent connue. Il est alors possible d'exhiber un ensemble de $F(m)$ ordres stricts différents tels que le profil constitué de chacun de ces $F(m)$ ordres stricts vérifie la condition. De plus, les $F(m)^n$ profils (ou $A_{n, F(m)}$ situations) que l'on peut construire à partir de ces $F(m)$ ordres stricts en effectuant d'éventuelles répétitions vérifient aussi la condition. Cette propriété n'est pas sans rappeler une certaine forme de robustesse par rapport aux critères utilisée dans Arrow K. J. et Raynaud Ceci nous donne la borne inférieure suivante :

$$\forall K \in \{\text{Black}, \text{Coombs}, \text{Ward}, \text{Unimaximalité}, \text{Extrême}\}, \forall n, \forall m, F(m)^n \leq P(K, n, m) \text{ et } A_{n, F(m)} \leq P^*(K, n, m)$$

où $F(m)$ est la diversité de la condition K pour m options.

3 LE PARADOXE CONDITIONS DE BLACK ET ARROW-BLACK

Considérons maintenant le nombre maximum de choix pour les $F(m)$ ordres stricts, nous obtenons ainsi la borne supérieure suivante :

$$\forall K \in \{Black, Ward, unimaximalité, Coombs...\}, \forall n, \forall m, P(K, n, m) \leq \binom{m!}{F(m)} \cdot F(m)^n \text{ et}$$

$$P^*(K, n, m) \leq \binom{m!}{F(m)} \cdot A_{n, F(m)}.$$

Nous pouvons ainsi énoncer la proposition suivante.

Proposition 3.2.1 *Si deux CTMM, C_1 et C_2 , sans contraintes sur les répétitions des ordres stricts sont telles que la diversité de C_1 est plus petite que la diversité de C_2 , alors pour un nombre de votants suffisamment grand, la polydiversité (anonyme ou non) de C_1 est plus petite que celle de C_2 .*

Preuve Soit $F_1(m)$ la diversité de la condition C_1 et $F_2(m)$ la diversité de la condition C_2 . Supposons que pour n assez grand, $F_1(m) < F_2(m)$. Dans ce cas,

$$P(C_1, n, m) \leq \binom{m!}{F_1(m)} \cdot F_1(m)^n < F_2(m)^n \leq P(C_2, n, m)$$

et pour la même raison, $P^*(C_1, n, m) \leq P^*(C_2, m, n)$. \square

Cette remarque nous a incité à concentrer notre intérêt sur les paires de CTMM ayant la même diversité.

3.2.2.2 Condition de Ward

Il est facile de voir que la condition de Ward est une généralisation des conditions de Coombs, de Black et d'Arrow-Black. Pourtant, dans le cas où trois options sont en lice, ces conditions ont la même diversité. C'est ce qui nous a motivés pour calculer la polydiversité de la condition de Ward pour trois options. Nous avons aussi vu que, malgré l'apparente simplicité du calcul de la diversité de la condition de Ward, celle-ci n'est connue que pour des petits nombres d'options. Nous avons donc essayé de généraliser le calcul fait pour trois options.

Trois options

Il n'y a que deux triplets cycliques différents sur trois options : $\{abc, bca, cab\}$ et $\{acb, cba, bac\}$. Nous allons soustraire aux $A_{n, 6}$ situations possibles celles contenant au moins un de ces deux triplets cycliques. C'est en fait le nombre de situations contenant le premier plus le nombre de situations contenant le second moins le nombre de situations contenant les deux. Lorsque la situation contient un triplet cyclique, trois ordres stricts sont imposés. Les $n-3$ votants restants peuvent choisir parmi les six ordres stricts différents, soit $A_{n-3, 6}$ situations possibles. Lorsque la situation contient les deux triplets cycliques, six ordres stricts sont imposés, le choix ne se fait plus que pour les $n-6$ votants restants qui peuvent choisir parmi les six ordres stricts possibles, soit $A_{n-6, 6}$ situations possibles. Remarquons que pour $n < 3$, aucune situation ne contient de triplet cyclique et pour $n < 6$, aucune situation ne contient les deux triplets cycliques. Nous obtenons pour $n > 5$:

$$P^*(Ward, 3, n) = BA_{n,6} - 2 \cdot A_{n-3,6} + A_{n-6,6} = \frac{3 \cdot n \cdot (n^2 + 3)}{2}.$$

Dans le cas de profils non anonymes, la démonstration ressemble à celle utilisée pour la condition d'unimaximalité avec quatre options. Pour une rédaction plus concise, numérotons les ordres stricts ainsi : $abc = 1$, $bca = 2$, $cab = 3$, $acb = 4$, $cba = 5$, $bac = 6$. Nous allons construire une partition de l'ensemble $W3n$ des profils vérifiant la condition de Ward. Nous n'aurons plus qu'à sommer les cardinaux des différents ensembles pour obtenir le résultat voulu. Notons $E(i...j ; k...l)$ l'ensemble des profils ne contenant aucun des ordres stricts $i...j$ et au moins une fois chacun des ordres stricts $k...l$. Comme $U4n$, l'ensemble $W3n$ peut être décomposé de la manière suivante :

$$W = E(14 ;) + E(15 ; 4) + E(16 ; 45) + E(24 ; 1) + E(25 ; 14) + E(26 ; 145) + E(34 ; 12) + E(35 ; 124) + E(36 ; 1245).$$

Les cardinaux de chacun des ensembles sont faciles à calculer en utilisant encore la formule de Poincaré. Prenons l'exemple de $E(35 ; 124)$:

$$\begin{aligned} \text{card}(E(35 ; 124)) = & \text{card}(E(35 ;)) - \text{card}(E(351 ;)) - \text{card}(E(352 ;)) - \\ & \text{card}(E(354 ;)) + \text{card}(E(3512 ;)) + \text{card}(E(3514 ;)) + \text{card}(E(3524 ;)) - \text{card}(E(35124 ;)) \end{aligned}$$

et $\text{card}(E(i...j ;)) = (6-v)^n$ où v est le nombre d'ordres stricts interdits dans les profils de l'ensemble.

Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \text{card}(E(14 ;)) &= 4^n ; \\ \text{card}(E(15 ; 4)) &= 4^n - 3^n ; \\ \text{card}(E(16 ; 45)) &= 4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n ; \\ \text{card}(E(24 ; 1)) &= 4^n - 3^n ; \\ \text{card}(E(25 ; 14)) &= 4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n ; \\ \text{card}(E(26 ; 145)) &= 4^n - 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n - 1 ; \\ \text{card}(E(34 ; 12)) &= 4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n ; \\ \text{card}(E(35 ; 124)) &= 4^n - 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n - 1 ; \\ \text{card}(E(36 ; 1245)) &= 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4 ; \end{aligned}$$

soit $P(Ward, 3, n) = 9 \cdot 4^n - 18 \cdot 3^n + 15 \cdot 2^n - 6$.

Remarquons que ce raisonnement aurait pu être utilisé dans le cas de profils anonymes. Nous aurions obtenu $P^*(Ward, 3, n) = 9 \cdot A_{n,4} - 18 \cdot A_{n,3} + 15 \cdot A_{n,2} - 6 \cdot A_{n,1}$ ce qui correspond bien, après simplification, au résultat précédent.

Plus d'options

Nous avons bien sûr essayé de généraliser la formule obtenue pour trois options, mais ceci pose de nombreux problèmes. La cardinalité des sous-ensembles est facile à obtenir : en utilisant le triangle de Pascal, nous obtenons la formule suivante dans le cas général

$$\text{card}\left(E(x_1 \dots x_p ; y_1 \dots y_q)\right) = \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i \cdot \binom{m!-p}{i} \cdot (m!-p-i)^n \text{ avec } \{x_1 \dots x_p\} \cap \{y_1 \dots y_q\} = \emptyset.$$

Malheureusement, le nombre p d'ordres à interdire de sorte que dans chaque triplet, au moins un des trois ordres sur les trois options n'apparaisse jamais, n'est pas toujours le même. Par exemple, avec quatre options, si dans les huit triplets fondés sur abc , acb , abd , adb , acd , adc , bcd , et bdc , les ordres abc , acb , abd , adb , acd , adc , bcd , et bdc sont interdits, il reste alors huit ordres possibles (un ordre interdit, par exemple abc , conduit à interdire quatre classements des options, ici $dabc$, $adbc$, $abdc$, et $abcd$). Mais si les ordres abc , cba , abd , dba , acd , dca , bcd , et cbd sont interdits, il ne reste plus que six ordres pour les ordres stricts autorisés. Ce nombre

d'ordres stricts non autorisés pour les votants semble difficile à connaître dans le cas général puisque sa connaissance donnerait la valeur de la diversité de la condition de Ward. Ainsi, en essayant d'utiliser la polydiversité pour contourner le problème du calcul de la diversité, nous retombons sur ce même problème.

3.2.2.3 Condition de Coombs, Condition extrême

Pour ces deux conditions, nous avons calculé les polydiversités dans le cas de trois et quatre options pour les comparer à celles des conditions de Black et d'unimaximalité.

Trois options

Pour la condition de Coombs, les différents ordres de référence possibles conduisent aux mêmes ensembles d'ordres stricts autorisés que pour la condition de Black. La polydiversité est donc la même :

$$\begin{aligned} P(\text{Coombs}, 3, n) &= P(\text{Black}, 3, n) ; \\ P^*(\text{Coombs}, 3, n) &= P^*(\text{Black}, 3, n). \end{aligned}$$

Pour la condition extrême, l'utilisation du principe de la démonstration faite pour la condition d'unimaximalité conduit à des ordres stricts différents, mais en nombres identiques. Au total, le nombre de profils différents sur trois options vérifiant la condition extrême est donc aussi :

$$P^*(\text{Extrême}, 3, n) = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 5)}{2}.$$

Quatre options

Il est possible d'utiliser le même type de démonstration que pour la condition de Black en considérant les 24 ensembles d'ordres stricts qui peuvent être construits à partir des 12 ordres de référence non inverses l'un de l'autre. Cependant, à partir de quelques observations, nous pouvons facilement déduire la polydiversité de la condition de Coombs de celle de la condition de Black.

Toutes les situations vérifiant la condition de Coombs vérifient aussi la condition de Black. La réciproque est fautive. Comptons le nombre de situations vérifiant la condition de Black et pas celle de Coombs.

Remarquons tout d'abord que l'ensemble des ordres stricts autorisés pour un ordre de référence donné est différent de celui donné par la condition de Black. Par exemple, l'ordre de référence $abcd$ permet de choisir des ordres stricts dans les ensembles $\{abcd, bacd, bcad, cbda, cdab, dcba, cbad\}$ ou $\{abcd, bacd, bcad, cbda, cdab, dcba, bcda\}$ selon les places des milieux de $[a d]$ et de $[b c]$ (les cas où plusieurs points médians sont confondus ne nous intéressent pas car ils conduisent à des ensembles de profils inclus dans ceux que nous allons étudier). Par rapport aux ordres stricts autorisés par la condition de Black avec le même ordre de référence, les ordres stricts $cbad$ et $bcda$ ne sont pas autorisés simultanément (avec cet ordre de référence). Nous les appellerons par la suite des « ordres stricts interdits simultanément » avec l'ordre de référence $abcd$. Ces ordres stricts sont soulignés dans le Tableau 3.1.

Comptons tout d'abord le nombre de situations contenant deux ordres stricts interdits simultanément. Il y en a $A_{n-2, 8}$ par ordre de référence (les deux ordres stricts interdits simultanément sont fixés et le choix pour les autres ordres stricts se fait parmi les 8 ordres stricts autorisés). Les situations qui peuvent être créées à partir de deux ordres de référence différents sont comptées exactement deux fois car il n'existe pas de situation contenant deux ordres stricts

interdits simultanément qui puisse être créée à partir de trois ordres de référence différents. Les situations répétées contiennent les deux paires d'ordres stricts interdits simultanément par les deux ordres de référence différents. Nous remarquons qu'elles ne peuvent être formées qu'à partir de ces quatre ordres stricts (ce sont les seuls ordres stricts communs aux deux ordres de référence). Il y en a donc $A_{n-4, 4}$ par paire d'ordres de référence (pour $n < 4$, il n'y a pas de répétition). Soit en tout $12 \cdot A_{n-2, 8} - 6 \cdot A_{n-4, 4}$ situations blackiennes contenant deux ordres stricts interdits simultanément.

Parmi ces situations, certaines vérifient la condition de Coombs. Il s'agit de celles qui peuvent être formées à partir d'un autre continuum. Soit S une situation qui contient deux ordres stricts interdits simultanément (par exemple une situation construite à partir de l'ordre de référence $abcd$ contenant les ordres stricts 4 et 7) et qui peut être construite à partir d'un autre continuum (obligatoirement fondé sur l'ordre $adbc$ dans notre cas). Il n'y a alors qu'un seul ordre strict autre que les deux ordres stricts interdits simultanément qui est autorisé à la fois par le continuum fondé sur l'ordre de départ ($abcd$) et l'autre continuum (fondé sur l'ordre de référence $adcb$). Il s'agit en l'occurrence d'un des deux ordres stricts interdits simultanément par le deuxième ordre de référence (6 ou 3). Pour chaque ordre de référence, nous pouvons donc partitionner l'ensemble de ces situations en deux ensembles disjoints :

- les situations contenant au moins une fois chacun des deux ordres stricts interdits simultanément (par exemple 4 et 7) et le premier des deux autres ordres stricts autorisés par l'autre continuum (dans notre exemple, l'autre continuum est fondé sur l'ordre $adbc$ et le premier ordre strict est 6) ;
- celles contenant les deux ordres stricts interdits simultanément (4 et 7), le second des deux autres ordres stricts autorisés par l'autre continuum (3), chacun de ces trois ordres stricts étant répété au moins une fois.

Dans le premier cas, deux ordres stricts sont imposés (4 et 7) et il y a trois choix (4, 7 et 6) pour les $n-2$ ordres stricts restants, soit $A_{n-2, 3}$ situations différentes. Dans le deuxième cas, trois ordres stricts sont imposés (4, 7, et 3) et il y a trois choix (4, 7 et 3) pour les $n-3$ ordres stricts restants, soit $A_{n-3, 3}$ situations différentes.

Nous déduisons de ces calculs que

$$P^*(Coombs, 4, n) = P^*(Black, 4, n) - 12 \cdot A_{n-2, 8} + 6 \cdot A_{n-4, 4} + 12 \cdot A_{n-2, 3} + 12 \cdot A_{n-3, 3}$$

$$P^*(Coombs, 4, n) = \frac{n}{30} \cdot (n^5 + 18 \cdot n^4 + 130 \cdot n^3 + 420 \cdot n^2 + 589 \cdot n - 438).$$

Cette formule reste valable pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$ car $A_{y, x} = 0$ pour y négatif ou nul. Malheureusement, ce raisonnement utilise les particularités du cas de quatre options et il est difficile à utiliser pour des valeurs de m plus grandes.

Pour m fixé, des remarques similaires à celles faites sur la condition de Black permettent de prouver que $P^*(Coombs, m, n)$ est un polynôme de degré $m \cdot (m-1)/2$.

Le calcul de la polydiversité de la condition extrême pour quatre options peut se faire en utilisant le même principe que pour la condition d'unimaximalité. Il suffit de considérer à présent les ensembles $M(T_i, x)$ dans lesquels l'option x est placée au milieu si l'on restreint les ordres stricts au triplet T_i .

Nous avons vu que le résultat était une fonction de n polynomiale. Nous avons seulement calculé son terme de plus grand degré pour avoir un équivalent lorsque n est grand. Il y a 15 ensembles d'ordres stricts de cardinalité égale à 8, tous les autres sont plus petits. La polydiversité de la condition extrême est donc équivalente à $15 \cdot A_{n, 8}$ lorsque n est grand soit

$$P^*(\text{Extrême}, 4, n) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \frac{n^7}{336} \text{ et } P(\text{Extrême}, 4, n) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} 15 \cdot 8^n.$$

3.2.2.4 Condition d'étoilement

Trois options

Le cas de trois options est simple en raison de la proposition suivante :

Proposition 3.2.2 *Pour trois options, tout profil formé d'un nombre impair de votants pour lequel l'application de la méthode majoritaire donne un résultat transitif suit la condition d'étoilement.*

Preuve Soit P un profil pour lequel l'application de la méthode majoritaire donne un résultat transitif. Supposons (sans perte de généralité) que ce résultat soit abc . Montrons que P suit une condition d'étoilement.

Soit x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , et x_6 les nombres de votants ayant voté respectivement abc, bac, bca, cba, cab , et acb (voir Figure 3.2).

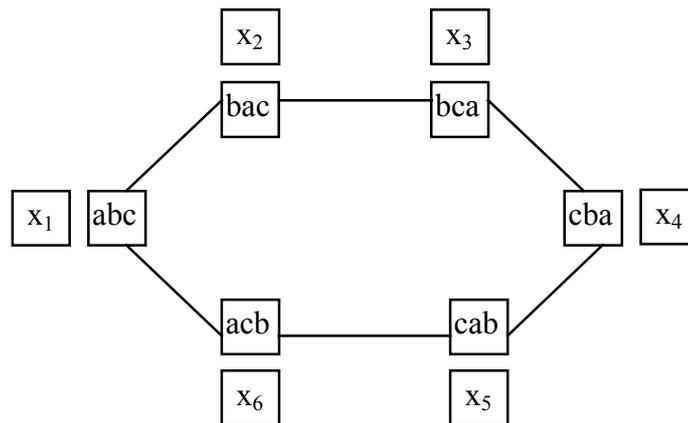


Figure 3.2 : Permutoèdre sur trois éléments

Comme le profil résultant de l'application de la méthode majoritaire est abc , les votants ont en majorité préféré a à c . Les ordres stricts pour lesquels a est préférée à c sont abc, bac et acb . Nous obtenons l'inégalité : $x_1 + x_2 + x_6 > x_3 + x_4 + x_5$ (1).

En comparant a à b et b à c , on obtient de même : $x_1 + x_2 + x_3 > x_6 + x_4 + x_5$ (2) et

$x_1 + x_5 + x_6 > x_3 + x_4 + x_2$ (3).

Remarquons immédiatement que (2) + (3) $\Rightarrow x_1 > x_4$. Donc $x_1 > 0$ et au moins un votant a voté abc .

Soit V' l'ensemble des votants privé d'un votant ayant voté abc . Nous allons partitionner les éléments de V' en $(n-1)/2$ paires d'éléments telles qu'en ajoutant un votant votant abc à n'importe laquelle de ces paires, le profil formé suit une condition de consistance multidimensionnelle d'ordre médian abc .

3 LE PARADOXE CONDITIONS DE BLACK ET ARROW-BLACK

Formons des paires contenant chacune deux votants ayant voté des ordres opposés tant que cela est possible.

Comme $x_1 > x_4$, il ne reste plus de votants ayant voté *cba*.

- Si $x_2 \geq x_5$,
il ne reste plus de votants ayant voté *cab*.
- Si $x_6 \geq x_3$,
il ne reste plus de votant ayant voté *bca*. Formons alors le plus grand nombre possible de paires de votants ayant voté *bac* et *acb*.
Si $(x_6 - x_3) \geq (x_2 - x_5)$, alors, il ne reste plus de votants ayant voté *bac* et (2) $\Rightarrow (x_1 - x_4) > [(x_6 - x_3) - (x_2 - x_5)]$. Il ne reste donc plus qu'à former des paires de votants dont l'un a voté *abc*.
Le cas $(x_6 - x_3) < (x_2 - x_5)$ se résout de la même façon en utilisant l'équation (3).
- Sinon, $x_6 < x_3$,
il ne reste plus de votant ayant voté *acb*. (3) $\Rightarrow (x_1 - x_4) > (x_3 - x_6) + (x_2 - x_5)$. Il reste donc au moins autant de votants ayant voté *abc* que de votants ayant voté *bca* ou *bac* réunis. Il suffit donc de former des paires de votants contenant au moins un votant ayant voté *abc*.
Le cas où $x_6 > x_3$ et $x_2 < x_5$ se résout de la même façon par symétrie.
- Sinon, $x_2 < x_5$ et $x_6 < x_3$,
il ne reste plus de votants ayant voté *bac* ou *acb*. Or (1) $\Rightarrow x_1 - x_4 > (x_3 - x_6) + (x_5 - x_2)$.
Il reste donc au moins autant de critères ayant voté *abc* que de votants ayant voté *bca* ou *cab* réunis. Il suffit donc de former des paires de votants contenant au moins un votant ayant voté *abc*.

Toutes les paires d'éléments ainsi formées sont telles qu'en leur ajoutant un ordre strict *abc* le profil formé suit la condition de consistance multidimensionnelle d'ordre médian *abc*. Le profil de départ suit donc la condition d'étoilement d'ordre médian *abc*. \square

Compter le nombre de profils vérifiant la condition d'étoilement revient donc dans ce cas à compter le nombre de profils pour lesquels la méthode majoritaire donne un résultat transitif.

Ce calcul a été fait par Gehrlein et Fishburn (1976). Le calcul qui nous intéresse est celui de la probabilité pour que le résultat de l'application de la méthode majoritaire à une situation de m options et n votants soit transitive. Gehrlein et Fishburn notent cette valeur $P^t(m, n, IAC)$. Le résultat pour 3 options et n impair est :

$$P^t(3, n, IAC) = \frac{15}{16} \cdot \frac{(n+3)^2}{(n+2) \cdot (n+4)}$$

La polydiversité anonyme de la condition d'étoilement est donc :

$$P^*(\text{étoilement}, 3, n) = P^t(3, n, IAC). A_{n,6} = \frac{(n+3)^3 \cdot (n+5) \cdot (n+1)}{128}$$

La polydiversité anonyme de la condition d'étoilement avec trois options et n votants est de l'ordre de n^5 .

Le calcul est beaucoup plus compliqué pour des nombres plus grands d'options. Le calcul a seulement été fait de manière énumérative et à titre anecdotique pour le cas de 4 options et 3 votants. Le résultat est présenté dans le bilan. Cette fois encore, le calcul de la polydiversité

semble plus compliqué que celui de la diversité. Nous n'avons pas jugé utile de poursuivre la recherche du résultat exact étant donné l'intérêt restreint de la condition d'étoilement.

3.2.3 Bilan sur la polydiversité

Alors que la diversité compare la liberté individuelle liée à chaque condition, la polydiversité donne une idée des restrictions sur la liberté collective. Nous dressons ici un bilan des résultats obtenus pour les différents nombres d'options.

3.2.3.1 Trois options

Il paraît plus significatif de comparer le nombre de profils vérifiant une des CTMM au nombre de profils pour lesquels l'application de la méthode majoritaire donne un résultat transitif plutôt qu'au nombre de profils total. Malheureusement, le nombre de profils pour lesquels l'application de la méthode majoritaire donne un résultat transitif n'est pas connu en général. Le lecteur pourra pour plus de renseignements se référer à [Gehrlein 1994].

Nous avons pu, dans le cas où il n'y a que trois options, calculer les polydiversités de toutes les conditions étudiées. Nous constatons à partir de ces résultats que les polydiversités (anonymes ou non) des conditions de Coombs, d'unimodalité, d'unimaximalité et extrême sont les mêmes bien que certaines de ces conditions semblent être moins restrictives que d'autres.

Lorsque le nombre de votants est assez grand, il existe environ trois fois plus de profils vérifiant la condition de Ward que de profils vérifiant une des conditions précédentes. Nous observons donc ici un premier apport de la polydiversité, ces conditions ayant toutes la même diversité alors que la condition de Ward est une généralisation des précédentes. Remarquons cependant que toutes ces conditions ont une polydiversité anonyme polynomiale de degré trois alors que le nombre de situations transitives est un polynôme de degré cinq et que le nombre de situations différentes est aussi un polynôme de degré cinq. Nous avons en effet vu ([Gehrlein et Fishburn 1976]) que pour n impair, le nombre T de situations pour lesquelles la méthode majoritaire donnait un résultat transitif était :

$$T = \frac{(n+3)^3 \cdot (n+5) \cdot (n+1)}{128}.$$

Berg S. et Bjurulf B. (1983) ont fait le calcul pour n pair :

$$T = \frac{(n+4) \cdot (n+2) \cdot (15 \cdot n^3 + 120 \cdot n^2 + 180 \cdot n + 16)}{1920}.$$

Une condition K étant choisie parmi les conditions de Coombs, Black, unimaximalité, extrême ou Ward, la probabilité pour qu'une situation suive la condition K tend donc vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ceci reste vrai même si le choix de la situation est restreint aux situations pour lesquelles le résultat de la méthode majoritaire est transitif.

La condition d'étoilement quant à elle n'est qu'une autre formulation de la transitivité puisque tous les profils transitifs vérifient cette condition. Les résultats pour trois options et un nombre impair de votants sont présentés dans le Tableau 3.4.

3 LE PARADOXE CONDITIONS DE BLACK ET ARROW-BLACK

n	$P^*(K, 3, n)$ $K \in \{\text{Black, Coombs, Extrême, Unimaximalité}\}$	$P^*(\text{Ward}, 3, n)$	$P^*(\text{Étoilement}, 3, n)$
1	6	6	6
3	48	54	54
5	150	210	240
7	336	546	750
9	630	1 134	1 890
11	1 056	2 046	4 116
13	1 638	3 354	8 064
15	2 400	5 130	14 580
17	3 366	7 446	24 750
19	4 560	10 374	39 930
101	546 006	1 545 906	95 015 856

Tableau 3.4 : Résultats pour trois options

3.2.3.2 Quatre options

Dans ce cas, les résultats, bien que partiels, mettent en évidence les différences de liberté collective liée à chaque condition. Les résultats sur la condition de Coombs par rapport aux autres conditions sont en accord avec les valeurs de la diversité. Par contre, la polydiversité permet de mesurer la différence entre les conditions de Black, d'unimaximalité et condition extrême. Pour n assez grand, il y a environ deux fois plus de profils unimaximaux que de profils blackiens, le nombre de profils vérifiant la condition extrême étant compris entre ces deux valeurs. Le Tableau 3.5 présente des valeurs numériques pour les conditions de Coombs, Black et unimaximalité.

n	$P^*(\text{Coombs}, 4, n)$	$P^*(\text{Black}, 4, n)$	$P^*(\text{Unimaximalité}, 4, n)$
1	24	24	24
3	1 032	1 080	1 416
5	7 272	8 496	12 624
7	30 072	39 024	62 640
9	93 240	133 320	225 192
11	239 976	375 336	656 760
13	541 320	920 160	1 651 488
15	1 106 136	2 031 840	3 716 064
17	2 092 632	4 132 728	7 667 640
19	3 721 416	7 865 880	14 757 864
101	42 155 616 744	334 595 340 143	666 763 962 386

Tableau 3.5 : Résultats pour quatre options

Les limitations dues à ces conditions sont encore plus mises en évidence qu'avec la notion de diversité puisque le rapport entre le nombre de situations vérifiant une de ces conditions (Black, Extrême, Unimaximalité) et le nombre de situations possibles tend vers zéro aussi rapidement que $1/n^{16}$ lorsque n augmente.

Nous avons aussi calculé de manière énumérative les polydiversités des conditions d'étoilement et de Ward pour trois votants. Les résultats sont $P^*(\text{étoilement}, 3, 4) = 1920$ alors que $P^*(\text{Ward}, 3, 4) \geq 4688$. Ainsi, malgré la plus grande diversité de la condition d'étoilement, nous voyons bien que les restrictions imposées par cette condition sont plus fortes.

Malheureusement, le calcul semble très difficile à généraliser et nous n'avons pas pu obtenir d'expression ou de borne satisfaisante pour un nombre quelconque d'options ou de votants. Ces calculs laborieux nuancent fortement l'intérêt de la polydiversité pour comparer les CTMM : si le résultat est en général pertinent et conforme à notre intuition, il est cependant souvent très difficile d'obtenir une expression analytique donnant la polydiversité pour un nombre quelconque d'options ou de votants.

3.3 Interprétation géométrique des conditions de transitivité de la méthode majoritaire

L'utilisation de l'approche géométrique que nous avons présentée suppose que les fonctions de choix soient neutres et homogènes. C'est le cas de la méthode majoritaire. Nous avons donc naturellement cherché à visualiser les ensembles de profils vérifiant les CTMM étudiées. Dans tout ce chapitre, nous nous limiterons au cas de trois options, car la géométrie en dimension supérieure à trois est beaucoup plus difficile à visualiser...

3.3.1 Résultats

Nous cherchons ici à voir à quels points du cube majoritaire correspondent les profils vérifiant les CTMM étudiées.

3.3.1.1 Les conditions de Black et Arrow-Black

Dans le cas où seules trois options sont en présence, les conditions de Black et d'unimodalité sont équivalentes. Il est alors assez simple d'énumérer tous les profils vérifiant ces conditions. Nous pouvons en effet nous contenter de considérer les trois ordres de référence abc , acb et bac (deux ordres de référence opposés conduisent aux mêmes profils). Avec l'ordre de référence abc , les seuls ordres stricts autorisés sont abc , bac , bca et cba . Les points correspondant aux profils que l'on peut former avec ces quatre ordres stricts sont toutes les combinaisons convexes rationnelles des points ABC (1, 1, -1), BAC (-1, 1, -1), BCA (-1, 1, 1) et CBA (-1, -1, 1). Les points ABC , BAC , BCA et CBA correspondent aux profils unanimes formés de l'ordre strict abc , bac , bca ou cba . On obtient de même les profils pouvant être formés à partir des autres ordres de référence. La Figure 3.3 représente en gris l'ensemble des points qui ne correspondent pas à un profil unimodal. Ce sont les deux tétraèdres (O, ABC, CAB, BCA) et (O, CBA, BAC, ACB) .

3 LE PARADOXE CONDITIONS DE BLACK ET ARROW-BLACK

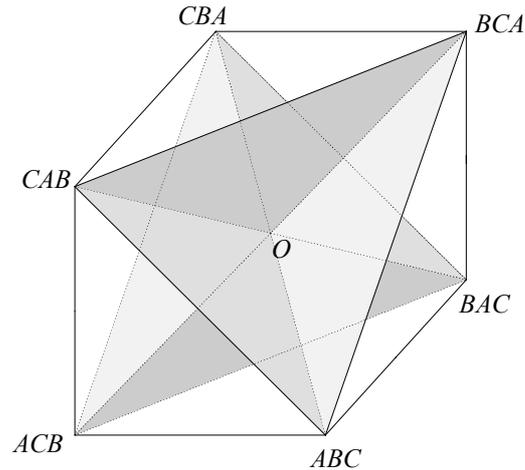


Figure 3.3 : Ensemble des points ne correspondant pas à un profil unimodal

3.3.1.2 La condition de Ward

Un profil suivant la condition de Ward ne doit pas contenir de triplet cyclique. Les deux triplets cycliques sont $\{abc, bca, cab\}$ et $\{acb, cba, bac\}$. Un ordre strict de chaque triplet est donc interdit dans ce profil. Ainsi, les profils suivant la condition de Ward sont représentés par les combinaisons convexes rationnelles des $3 \times 3 = 9$ ensembles de quatre points tels que l'un des points représentant un ordre strict de chaque cycle est absent de cet ensemble. Cependant, contrairement à ce que laisse supposer le calcul de la diversité, l'union de ces 9 tétraèdres est la même que l'union des trois tétraèdres permettant de visualiser la condition de Black.

3.3.1.3 La condition extrême

Cette fois-ci, une des trois options ne doit pas être classée deuxième dans les ordres stricts composant le profil. Si c'est a , les seuls ordres stricts autorisés sont abc, acb, bca, cba . Les points représentant ces profils sont les combinaisons convexes rationnelles des points ABC, ACB, BCA, CBA . Nous obtenons de même, lorsque b ou c ne doit pas être deuxième, les combinaisons convexes rationnelles de BAC, BCA, CAB et ACB ainsi que de CAB, CBA, BAC et ABC . Remarquons une différence importante entre la condition extrême et les autres conditions : les tétraèdres sont ici réduits à des plans comme on peut le voir sur la Figure 3.4.

3 LE PARADOXE CONDITIONS DE BLACK ET ARROW-BLACK

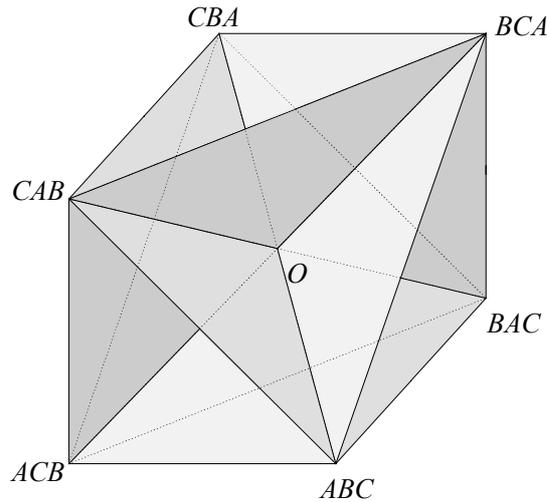


Figure 3.4 : Profils suivant la condition extrême

3.3.1.4 La condition de consistance multidimensionnelle

Nous avons vu que le permutoèdre sur trois options est un cycle de longueur 6. Une chaîne tendue le long de ce permutoèdre a donc une longueur d'au plus 4. Il y a 6 chaînes tendues de longueur 4 sur le permutoèdre. Pour chacune de ces 6 chaînes, tous les profils composés d'un nombre quelconque des quatre ordres stricts composant cette chaîne suit la condition de consistance multidimensionnelle. Les points représentant ces 6 ensembles de quatre ordres stricts forment 6 tétraèdres. L'union de ces 6 tétraèdres est encore une fois la même que pour les conditions de Black, d'unimodalité ou de Ward.

3.3.1.5 La condition d'étoilement

Comme nous l'avons vu précédemment, tous les profils transitifs sur trois options vérifient la condition d'étoilement. La Figure 3.5 représente en gris les profils pour lesquels la méthode majoritaire ne donne pas un résultat transitif.

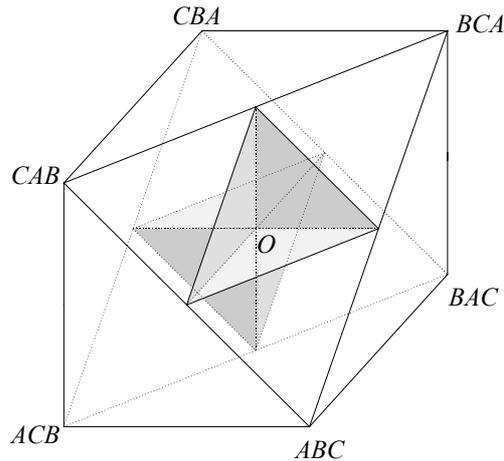


Figure 3.5 : Ensemble des profils ne vérifiant pas la condition d'étoilement

3.3.2 Limitations de l'approche géométrique

En examinant les résultats obtenus au paragraphe précédent, il semble clair que l'utilisation de cet aspect de l'approche géométrique n'est pas adaptée dans le contexte présent. Il nous a cependant paru intéressant de signaler les problèmes rencontrés pour que le lecteur se rende compte des implications faites en utilisant ce modèle.

Nous avons essayé dans ce chapitre de représenter, à l'aide du cube majoritaire, l'ensemble des profils vérifiant certaines CTMM. Les résultats obtenus sont souvent en contradiction avec les valeurs de la polydiversité calculées précédemment. La première objection à faire à l'utilisation de ce modèle est la suivante. Dans le cube majoritaire, un point peut correspondre à plusieurs profils qui n'ont même pas forcément les mêmes propriétés. Ainsi, le profil $\{abc, bca, acb\}$ vérifie la condition de Ward et pas celle de Black. Le point du cube majoritaire qui lui correspond a pour coordonnées $(1/3, 1/3, -1/3)$. Ce point correspond aussi au profil $\{cab, abc, bac\}$ unimodal par rapport à l'ordre de référence bac . Ainsi, ce n'est pas parce qu'un point correspond à un profil vérifiant une CTMM que tous les profils auxquels correspond ce point vérifient aussi cette CTMM. Pourquoi ne pas s'intéresser alors aux points pour lesquels tous les profils auxquels il correspond vérifient une CTMM donnée ? La réponse est simple : parce qu'il n'y en a pratiquement aucun. C'est ce que signifie la proposition suivante :

Proposition 3.3.1 *Pour tout point P à l'intérieur du cube majoritaire, il existe un profil π auquel P correspond tel que π ne vérifie aucune des CTMM étudiées (hormis éventuellement la condition d'étoilement).*

Preuve Soit P un point donné à l'intérieur du cube majoritaire. Soient (x, y, z) les coordonnées de P . Comme P est à l'intérieur du cube majoritaire, il existe un point P' de coordonnées $((1 + \varepsilon)x, (1 + \varepsilon)y, (1 + \varepsilon)z)$ qui est aussi à l'intérieur du cube majoritaire avec $\varepsilon = p/q$ un rationnel strictement positif. Soit π' un profil de taille minimale représenté par le point P' (P' est composé des préférences de n' votants). Soit $I = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$. Alors,

3 LE PARADOXE CONDITIONS DE BLACK ET ARROW-BLACK

le profil $\pi = 6q\pi' \oplus n'pI$ est représenté par le point P . En effet, dans ce profil, le nombre de votants préférant l'option x_1 à x_2 moins le nombre de votants préférant x_2 à x_1 est le même que dans $6q\pi'$, c'est-à-dire $6qn'(1 + \varepsilon)x$. Le nombre de votants de π est $6qn' + 6n'p$. Ainsi, pour le profil π , le coefficient de Benjamin-Franklin normé n_{12} est bien x . Nous avons trouvé un profil π , contenant tous les ordres possibles, représenté par le point P . En raison des valeurs de la diversité des différentes CTMM autres que l'étoilement, π ne vérifie aucune de ces CTMM. \square

De plus, examiner des volumes du cube majoritaire suppose que le nombre de votants est infini. En effet, si le nombre de votants est fini, il existe alors des points du cube majoritaire qui ne représentent pas de profil (il est clair que le point de coordonnées $(0.12345, 0.12345, 0.12345)$ appartient au cube majoritaire mais qu'il ne représente aucun profil de trois votants). Une tentative similaire à celle que nous avons faite pour trouver tous les points représentant un profil qui vérifie une CTMM donnée conduirait à compter pour, n donné, le nombre de barycentres de quatre points extrêmes (correspondant aux quatre votes autorisés) avec des poids entiers dont la somme est égale à n . Ce nombre de barycentres semble difficile à déterminer.

La caractérisation (ou le dénombrement) des profils qui correspondent à un point donné du cube majoritaire est importante pour l'utilisation que nous voulions en faire. Malheureusement, ce problème est proche de la caractérisation des matrices de surclassement ou de la recherche du plus petit profil ayant une matrice de Benjamin-Franklin donnée dont nous savons ([Fishburn 1987]) que ce sont des problèmes difficiles.

3 LE PARADOXE CONDITIONS DE BLACK ET ARROW-BLACK

4. Des paradoxes liés au principe de prudence

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la fonction de choix prudente. Après en avoir donné la définition et quelques propriétés, nous verrons comment cette règle peut poser problèmes en sélectionnant des options qu'il aurait été normal de rejeter en utilisant le même principe. En utilisant des simulations, nous essayerons de savoir si ce paradoxe est fréquent et nous tenterons de connaître un peu mieux la structure des profils qui engendrent ce « scandale ».

La prudence ne respecte pas non plus l'axiome pourtant naturel de cohérence. Ce résultat peut paraître étonnant car l'axiome de cohérence, en particulier dans ses versions les plus faibles, semble assez légitime. Il est donc surprenant qu'une fonction de choix ayant une aussi « bonne tête » que la fonction de choix prudente ne le respecte pas. Nous chercherons de la même façon la fréquence de ce paradoxe, pour les différentes versions de cet axiome.

Nous illustrerons nos propos en utilisant l'approche géométrique développée par Saari. Nous verrons comment il est possible d'interpréter géométriquement les ensembles de choix prudents. Cette approche nous donnera de très bonnes intuitions des propriétés étudiées.

4.1 Qu'est-ce qu'une solution prudente ?

Nous introduisons ici le principe de prudence. Ce principe peut être appliqué aux fonctions de choix comme aux fonctions de rejet.

4.1.1 Qui sont les vainqueurs ?

Le principe de prudence est historiquement attribué à Kramer (1977). Ce principe a ensuite été étudié de manière plus exhaustive par Köhler (1978) et Arrow et Raynaud (1986) lorsque le nombre d'options est fini.

En choix social, le principe de prudence peut être interprété comme une minimisation des contestations possibles. Il s'agit de choisir les options telles que tout autre choix soit susceptible d'entraîner une contestation plus importante. Le lecteur trouvera dans [Arrow et Raynaud à paraître] d'autres interprétations du principe de prudence.

Définition 4.1.1 *La fonction de choix prudente consiste à sélectionner les options x_i pour lesquelles le plus petit coefficient de surclassement a_{ij} de la ligne i est le plus grand possible.*

Ceci revient, dans le cas où la matrice de surclassement est à somme constante (pour tout $i \neq j$, $a_{ij} + a_{ji} = \sum w_k$), à sélectionner les options x_i pour lesquelles le plus grand coefficient de surclassement a_{ji} de la colonne i est le plus petit possible. Il s'agit donc de minimiser le coefficient maximum des colonnes. C'est pour cette raison que cette fonction de choix est souvent appelée règle du minimax. On trouve aussi le terme de règle maximin car lorsque la somme des deux coefficients de surclassement a_{ij} et a_{ji} est constante (matrice à somme constante), trouver le minimum des maxima des colonnes est équivalent à trouver le maximum des minima des lignes.

Définition 4.1.2 Nous appellerons maximin de la matrice le maximum des minima des lignes. Sa valeur est notée Mm . De même, Le minimum des maxima des colonnes est appelé le minimax de la matrice et sa valeur est notée mM .

Lorsque la matrice de surclassement est à somme constante, il est facile de montrer que $Mm + mM = n$. La fonction de choix prudente sera notée P et associée à tout profil π un ensemble $P(\pi)$ non vide d'options. L'utilisation de la même règle dans le cas de relations valuées ou floues s'appelle la règle du « min in favour » largement étudiée dans [Bouyssou et Pirlot 1995]. Remarquons que nous pouvons utiliser pour ce calcul de manière équivalente la matrice de Benjamin Franklin et la matrice de surclassement.

Prenons l'exemple d'un projet d'aménagement pour lequel trois options a , b et c sont envisageables. Les préférences des 20 représentants consultés sont les suivantes : 7 abc , 6 bca , 6 cab et 1 bac . La matrice de surclassement du profil correspondant est donc

	a	b	c
a	/	13	8
b	7	/	14
c	12	6	/

L'option a est la seule dans l'ensemble de choix prudent, $Mm = 8$ et $mM = 12$. Si b avait été choisie, un opposant à cette solution aurait pu objecter que 13 personnes préfèrent a à b . De même, si c avait été choisie, un opposant à cette solution aurait pu objecter que 14 personnes préfèrent b à c . Ainsi, en choisissant a , dans le pire des cas, 12 personnes seulement préfèrent une autre option (ici c). C'est en ce sens que la méthode est dite prudente.

4.1.2 Qui sont les vaincus ?

Les principes utilisés dans les fonctions de choix peuvent souvent être adaptés pour des fonctions de rejet. Attention, il ne s'agit pas ici de rejeter les options qui ne sont pas dans l'ensemble de choix, mais d'appliquer le principe de la fonction de choix pour éliminer les options les moins bonnes. Par exemple, la fonction de choix de Borda sélectionne les options dont le score de Borda est le plus grand. La fonction de rejet fondée sur le même principe élimine les options dont le score de Borda est le plus petit.

Pour le principe de prudence, la définition d'une fonction de rejet est moins évidente. Il est possible de considérer que l'option la moins bonne au sens de la prudence est celle pour laquelle le plus petit coefficient de surclassement est le plus petit possible. C'est l'option qui serait classée dernière en utilisant la méthode de rangement prudente qui consiste à classer les options par ordre décroissant de leur coefficient de surclassement minimum. Ce principe est appelé principe de rejet violent dans [Arrow et Raynaud à paraître].

Cependant, une définition plus naturelle du rejet prudent est d'éliminer les options telles que le rejet de toute autre option entraînerait une contestation plus importante. Ici encore, nous pouvons proposer une définition permettant le calcul de l'ensemble de rejet prudent.

Définition 4.1.3 La fonction de rejet prudente consiste à éliminer les options x_i pour lesquelles le plus grand coefficient de surclassement a_{ij} de la ligne i est le plus petit possible.

En reprenant l'exemple précédent, l'option c est la seule dans l'ensemble de rejet prudent. Le rejet de b aurait entraîné l'éventuelle contestation de 14 personnes (objectant que c est pire).

Le rejet de a aurait entraîné l'éventuelle contestation de 13 personnes (objectant que b est pire). En rejetant c , seules 12 personnes peuvent objecter que a est pire.

4.2 Des paradoxes

Pour la plupart des fonctions de choix qui peuvent être étendues à des fonctions de rejet, les ensembles de choix et les ensembles de rejets sont généralement distincts, sauf dans le cas de profils indifférents pour la fonction considérée. Par exemple, si une option est à la fois dans l'ensemble de choix et dans l'ensemble de rejet de Borda, c'est que toutes les options ont le même score de Borda et que le profil est indifférent pour cette fonction de choix. Il n'en va pas de même pour le principe de prudence. Il est en effet possible qu'un vainqueur prudent soit aussi vaincu prudent, alors que toutes les options ne sont pas dans les ensembles de choix et de rejet. L'exemple suivant est dû à P.C. Fishburn :

La matrice de surclassement du profil $\pi = \{abcdex, bcdeax, cdeabx, xdeabc, xeabcd\}$ est

	a	b	c	d	e	x
a	/	4	3	2	1	3
b	1	/	4	3	2	3
c	2	1	/	4	3	3
d	3	2	1	/	4	3
e	4	3	2	1	/	3
x	2	2	2	2	2	/

Il est facile de se rendre compte que x est à la fois dans l'ensemble de choix prudent et dans l'ensemble de rejet prudent et que c'est la seule option dans ce cas. Nous chercherons donc à en savoir un peu plus sur les profils qui engendrent ce type de paradoxe.

La fonction de choix prudente jouit de nombreuses propriétés fort sympathiques. Elle donne par exemple le même résultat que la méthode majoritaire lorsque cette dernière est transitive. Moulin (1988) montre aussi que pour trois options ou moins, la prudence vérifie l'axiome de participation, i. e. qu'un votant a toujours intérêt à exprimer son opinion. Le lecteur trouvera dans [Arrow et Raynaud 1986] ou [Bouyssou et Pirlot 1995] de nombreuses autres propriétés de la règle de prudence et de ses dérivées.

Pourtant, il est possible de trouver des profils π_1 et π_2 tels que la fonction de choix prudente appliquée à chacun des deux profils donne un résultat identique, mais différent de celui obtenu pour l'union de π_1 et π_2 . Nous verrons en effet que la fonction de choix prudente ne respecte pas l'axiome de cohérence même lorsque l'on utilise des versions affaiblies de cet axiome. Ce résultat négatif est étonnant car les versions faibles de la cohérence ne semblent pas très exigeantes et difficiles à contourner dans certains contextes.

4.2.1 Remarques générales sur les simulations

Un des buts de ces simulations est de savoir si les paradoxes évoqués sont fréquents ou pas. Pour répondre à cette question, nous n'avons pas utilisé la lourde panoplie des calculs probabilistes que l'on peut trouver dans les travaux de Gehrlein, Lepelley ou Merlin et qui

4 DES PARADOXES LIÉS AU PRINCIPE DE PRUDENCE

permettent d'obtenir les valeurs exactes des probabilités d'occurrences des paradoxes. Nos résultats ne seront donc pas validés par des calculs probabilistes, mais ils nous ont paru cohérents et suffisamment intéressants pour être mentionnés dans cette thèse. Le chemin est tracé pour le lecteur courageux qui voudra prouver mathématiquement la validité des valeurs obtenues.

Pour la plupart des simulations, les préférences sont des ordres stricts. En effet, le tirage uniforme de préordres totaux est plus difficile et ne paraît pas plus pertinent. Les principaux résultats obtenus à l'aide de simulations peuvent être classés en deux catégories.

- Ceux réalisés sous la condition de culture anonyme impartiale avec un nombre « infini » de votants ([Berg et Bjurulf 1983], [Lepelley 1989]). Pour choisir une situation uniformément parmi toutes les situations possibles sur m options, les auteurs tirent au hasard uniforme $m!$ valeurs entre 0 et 1. Ces valeurs sont rangées de la plus petite à la plus grande. Ainsi, l'intervalle $[0, 1]$ est découpé en $m!$ intervalles de tailles aléatoires dont la somme est égale à 1. La taille du $i^{\text{ème}}$ intervalle correspond à la proportion de critères dont la préférence est le $i^{\text{ème}}$ ordre strict parmi les $m!$ ordres stricts possibles.
- Les autres résultats issus de simulations sont réalisés sous la condition de culture impartiale. Sous cette condition, il suffit de tirer au hasard uniforme la préférence de chaque critère parmi les $m!$ ordres stricts possibles. Pour cela, nous tirons uniformément m valeurs entre 0 et 1. Le classement de ces m valeurs détermine l'ordre strict sur les m options. Pour tirer uniformément les valeurs entre 0 et 1, nous avons utilisé le générateur aléatoire présenté dans [Park et Miller 1988].

Le nombre m d'options prend ses valeurs dans $\{3, 4, 5, 6, 10, 20, 50, 100\}$. Le nombre n de critères prend ses valeurs dans $\{5, 7, 11, 21, 51, 101, 251, 501, 1001, 1501\}$. Dans la plupart des simulations, nous avons tiré 10 000 profils aléatoires pour chaque valeur du couple (m, n) . Lorsque les profils ayant la propriété désirée étaient trop peu nombreux, nous avons effectué 100 000 tirages. Ces cas sont signalés. Les nombres d'options et de critères ont souvent été limités par le temps de calcul ainsi que par l'intérêt des résultats obtenus. Dans certains cas (par exemple lorsque la convergence vers 0 semble évidente), il ne nous a pas semblé utile d'effectuer de nombreux tirages pour confirmer nos intuitions. Les résultats obtenus n'auront en effet jamais plus de pertinence que celle que l'on peut attribuer à des valeurs issues de simulations. C'est pour cette raison que certains résultats manquent pour les grands nombres d'options et/ou de critères.

Comme le remarque Merlin [1996], sous la condition de culture impartiale, les situations n'ont pas toutes la même probabilité d'être tirées. La probabilité d'apparition d'une situation est d'autant plus élevée que celle-ci est proche de la répartition $(1/m!, \dots, 1/m!)$. Ainsi, en raison du tirage aléatoire uniforme des préférences, la variance des coefficients de surclassement est faible.

Pour les résultats présentés, le nombre de votants est impair comme c'est le cas dans la plupart des simulations. Nous avons cependant mentionné quelques cas où les résultats obtenus étaient très différents avec un nombre pair de votants.

Notons enfin qu'il est possible de faire des variations sur ce modèle de simulations en imposant par exemple qu'un tiers des votes soient identiques (voir [Nurmi 1988]).

4.2.2 Vainqueurs et vaincus

Nous étudions dans ce chapitre les profils tels qu'une option soit à la fois vainqueur prudente et vaincue prudente. Pour alléger la rédaction, nous qualifierons les options qui sont à la fois dans l'ensemble de choix et dans l'ensemble de rejet prudent, d'options « pathologiques » pour ce profil.

4.2.2.1 Moins de trois options

Commençons naturellement par examiner les cas où les options sont peu nombreuses. Le cas où $m = 2$ est trivial car la plupart des fonctions de choix sont alors équivalentes. Dans ce cas, il n'existe une option pathologique que si le nombre de critères est pair. Les deux options sont alors dans les ensembles de choix et de rejet.

Pour $m = 3$, les problèmes commencent. Il est en effet possible de trouver des profils tels qu'une option soit pathologique alors que ce profil n'est pas indifférent pour la prudence. C'est le cas par exemple du profil $\{x_1x_2x_3, x_2x_3x_1\}$. L'option x_1 est à la fois dans l'ensemble de choix et dans l'ensemble de rejet prudent alors que toutes les options ne sont pas prudentes. Cependant, dans le cas où seulement trois options sont en présence, la probabilité pour que ce paradoxe apparaisse tend vers 0 lorsque le nombre de critères augmente. C'est ce que montre le théorème qui suit.

Théorème 4.2.1 *Dans le cas où trois options sont en lice, la probabilité pour qu'il existe une option pathologique tend vers 0 lorsque le nombre de critères augmente. Les profils engendrant ce paradoxe ont toujours au moins deux options prudentes.*

Preuve Les vaincues prudentes sont les options dont les coefficients maximaux sur les lignes sont les plus petits possibles.

Les préférences étant des ordres stricts, nous avons alors $n-a_{12} = a_{21}$, $n-a_{13} = a_{31}$ et $n-a_{23} = a_{32}$.

Supposons que x_1 soit une option pathologique. Alors, $\min(a_{12}, a_{13}) \leq n/2$ (1). Dans le cas contraire, $n-a_{12} < n/2$, et $n-a_{13} < n/2$, donc $\min(n-a_{12}, n-a_{13}) < n/2$ et alors,

- si $a_{23} > n/2$ alors, $\min(a_{13}, a_{23}) > n/2$ et x_1 n'est pas vaincue prudente (x_3 est pire) ;
- si $a_{23} \leq n/2$, $n-a_{23} \geq n/2$ donc $\min(n-a_{23}, a_{12}) \geq n/2$ et x_1 n'est pas vaincue prudente (x_2 est pire).

Supposons sans perte de généralité que $a_{12} \leq a_{13}$.

D'après (1), $a_{12} \leq n/2$.

L'option x_1 est vainqueur prudente, donc $\min(a_{12}, a_{13}) = a_{12} \geq \min(n-a_{12}, a_{23})$ (2).

Si n est impair, (1) implique que $a_{12} < n-a_{12}$. Donc d'après (2), $a_{12} \geq a_{23}$.

L'option x_1 est vaincue prudente, donc $\max(a_{12}, a_{13}) = a_{13} \leq \max(n-a_{12}, a_{23}) = n-a_{12}$ (3).

D'autre part $a_{13} \geq a_{12} \geq a_{23}$ donc $\min(n-a_{13}, n-a_{23}) = n-a_{13}$. Or $a_{12} \geq \min(n-a_{13}, n-a_{23}) = n-a_{13}$ (4) car l'option x_1 est vainqueur prudente. De (3) et (4) nous déduisons que $a_{13} = n-a_{12}$.

4 DES PARADOXES LIÉS AU PRINCIPE DE PRUDENCE

Si n est pair, si $a_{12} < n - a_{12}$, nous pouvons faire le même raisonnement que précédemment et conclure à la même égalité. Sinon, $a_{12} \geq n - a_{12}$, or $a_{12} \leq n/2$, donc $a_{12} = n - a_{12} = n/2$.

L'option x_1 est vaincue prudente, donc $\max(a_{12}, a_{13}) = a_{13} \leq \max(n - a_{12}, a_{23})$.

Si $a_{13} > n/2$, $n - a_{13} < n/2$. Alors, si $a_{23} > n/2$, $n - a_{23} < n/2$ et $\max(n - a_{13}, n - a_{23}) < n/2$ ce qui est contraire avec le fait que x_1 est vaincue prudente.

Si $a_{23} \leq n/2$, $\max(n - a_{12}, a_{23}) = n/2$ ce qui est aussi contraire avec le fait que x_1 est vaincue prudente.

Donc, $a_{13} \leq n/2$ et puisque $a_{12} \leq a_{13}$, $a_{12} = n - a_{12} = n/2 = a_{13}$.

Dans les deux cas, deux des coefficients de la matrice de surclassement a priori indépendants ($n - a_{12}$ et a_{13}) doivent être égaux. Cette probabilité tend vers 0 lorsque le nombre de critères augmente ce qui prouve la première partie du théorème.

Nous avons vu que $a_{13} = n - a_{12}$ donc $a_{12} = n - a_{13}$. De plus, x_1 est vaincue prudente, donc $\max(a_{12}, a_{13}) = a_{13} \leq \max(n - a_{13}, n - a_{23}) = \max(a_{12}, n - a_{23})$. Or $a_{12} \leq a_{13}$ donc l'inégalité précédente implique que $\max(n - a_{13}, n - a_{23}) = n - a_{23}$. Alors $\min(n - a_{13}, n - a_{23}) = n - a_{13} = a_{12}$ et x_3 est aussi vainqueur prudente. \square

Remarquons que même dans ce cas très simple où seules trois options sont en présence, la preuve n'est pas si simple. Des valeurs numériques, issues de simulations, de la fréquence d'occurrence de ce paradoxe sont données dans le chapitre 4.2.2.2.

Nous avons bien sûr cherché à visualiser les ensembles de choix prudents à l'aide du cube majoritaire. Cette fois-ci, tous les profils correspondant à un point du cube majoritaire ont le même ensemble de choix (ou de rejet) prudent. Cette propriété est due à l'homogénéité de la prudence et au fait que l'ensemble de choix prudent ne dépend que de la matrice de Benjamin Franklin du profil considéré.

Les points correspondant aux profils pour lesquels x_1 est vainqueur prudente sont

- ceux pour lesquels x_1 est vainqueur majoritaire (voir Figure 4.1)

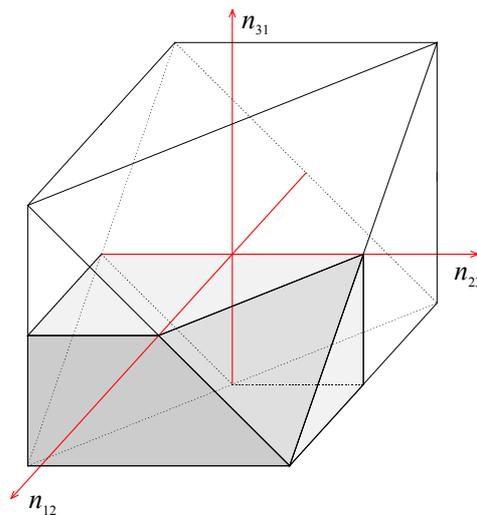


Figure 4.1 : Cube majoritaire ; en gris, ensemble des profils pour lesquels x_1 est vainqueur de Condorcet (tiré de [Saari 1994])

4 DES PARADOXES LIÉS AU PRINCIPE DE PRUDENCE

- ceux pour lesquels la méthode majoritaire ne donne pas un résultat transitif (Figure 3.5) tels que x_1 est vainqueur prudent. Ce sont les points tels que $\min(n_{12}, n_{13}) \geq \min(n_{21}, n_{23})$ et $\min(n_{12}, n_{13}) \geq \min(n_{31}, n_{32})$. Dans l'orthant où toutes les coordonnées sont positives, ces deux inéquations se réduisent à $n_{13} \geq n_{21}$ et $n_{13} \geq n_{32}$. Soit $n_{12} \geq n_{31}$ et $n_{23} \geq n_{31}$. Dans l'orthant où toutes les coordonnées sont négatives, ces deux inéquations se réduisent à $n_{12} \geq n_{23}$ et $n_{12} \geq n_{31}$. Les ensembles $D_{prudence}^3(\{x_1\})$ et $D_{prudence}^3(\{x_2\})$ sont représentés en gris sur la Figure 4.2.

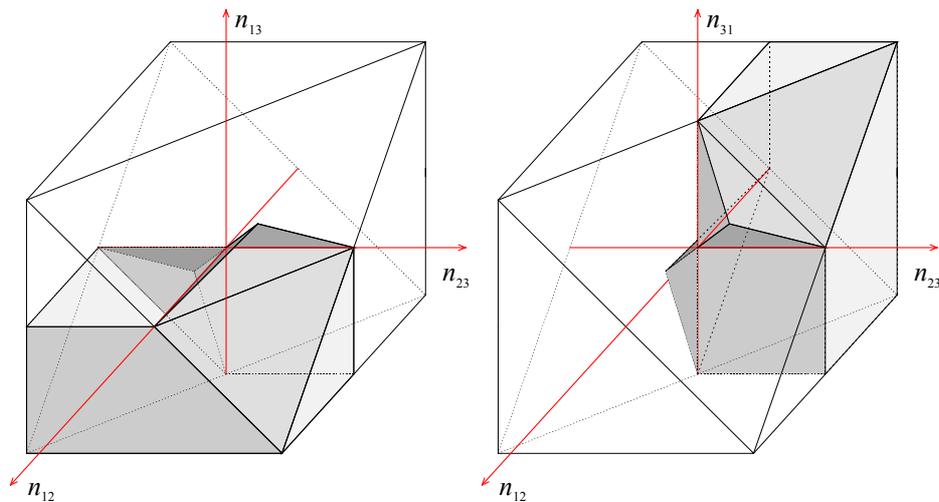


Figure 4.2 : À gauche, ensemble des profils pour lesquels x_1 est vainqueur prudente, à droite, ensemble des profils pour lesquels x_2 est vainqueur prudente

L'ensemble des points représentant des profils pour lesquels x_1 est vaincue prudente est le symétrique de $D_{prudence}^3(\{x_1\})$ par rapport à l'origine. L'intersection de ces deux ensembles (hachurée en gris dans la Figure 4.3) est l'ensemble des points représentant un profil tel que x_1 est pathologique.

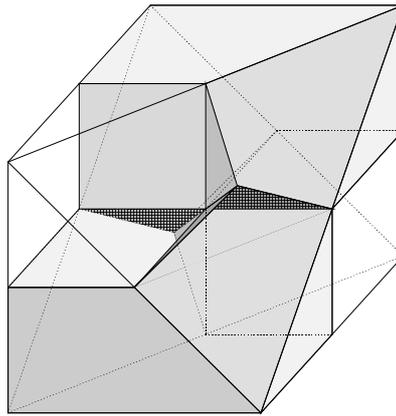


Figure 4.3 : Profils pour lesquels x_1 est vainqueur prudente et vaincue prudente

Cette fois-ci, l'intuition que nous donne la représentation géométrique est conforme au résultat obtenu dans le Théorème 4.2.1. En effet, l'intersection de l'ensemble des profils pour lesquels x_1 est vainqueur prudente (en bas) et de l'ensemble des profils pour lesquels x_1 est vaincue prudente (en haut) est constituée des deux facettes hachurées. La probabilité pour qu'un point appartienne à une de ces deux facettes hachurées est donc très faible.

Remarquons aussi que la facette de droite appartient aussi à l'ensemble des profils tels que x_2 est vainqueur prudente et que la facette de gauche appartient à l'ensemble des profils tels que x_3 est vainqueur prudente. Cette représentation graphique illustre donc aussi le fait qu'il y a au moins deux options dans l'ensemble de choix prudent.

La remarque suivante a seulement pour but d'essayer de mieux comprendre les résultats étonnants que l'on peut obtenir lorsque le nombre d'options et le nombre de critères sont petits.

Remarque 4.1 Si $m = 3$ et $n = 3$ et qu'une option est pathologique, les trois options le sont.

Preuve Soit π un profil tel qu'une option, par exemple x_1 , est pathologique. Alors, le coefficient de surclassement minimum de x_1 ne peut être ni 3 ni 2, sinon une des deux autres options aurait tous ses coefficients de surclassement strictement inférieurs à 2 et x_1 ne serait pas dans l'ensemble de rejet prudent. Si ce coefficient de surclassement minimum est égal à 0, les trois options ont un coefficient de surclassement égal à 3 et un coefficient de surclassement égal à 0 ce qui est impossible par transitivité des préférences des critères. Le minimax de la matrice de surclassement est donc égal à 1 et on montre de manière analogue que le maximin est égal à 2.

La seule matrice de surclassement possible (à une permutation sur les options près) est la suivante.

	x_1	x_2	x_3
x_1	\	2	1
x_2	1	\	2
x_3	2	1	\

Les ensembles de choix et de rejet prudents des profils qui ont cette matrice de surclassement contiennent toutes les options. \square

Pour évaluer la fréquence d'existence d'options pathologiques, il est intéressant de trouver un critère de comparaison. Nous avons choisi de comparer cette fréquence à celle pour laquelle il existe des options qui sont à la fois dans l'ensemble de choix et dans l'ensemble de rejet de Borda (pour la règle de Borda, l'existence d'options à la fois vainqueurs et vaincues implique que le profil est indifférent). Malheureusement, pour trois options, ce critère de comparaison n'est pas très pertinent en raison de la proposition suivante.

Proposition 4.2.1 *Pour trois options, un profil est indifférent pour la fonction de choix de Borda si et seulement si il est indifférent pour la fonction de choix prudente.*

Preuve Soit π un profil indifférent pour la prudence. Par hypothèse, $\min(a_{12}, a_{13}) = \min(n - a_{12}, a_{23}) = \min(n - a_{13}, n - a_{23})$. Supposons sans perdre de généralité que $a_{12} \geq a_{13}$, c'est à dire que $\min(a_{12}, a_{13}) = a_{13}$. Alors, $a_{13} \leq n/2$ (sinon, x_3 ne peut pas être vainqueur prudente). De même, $a_{12} \geq n/2$ (sinon, soit $a_{23} \geq n/2$ et x_2 est le seul vainqueur prudent, soit $n - a_{23} \geq n/2$ et x_3 est le seul vainqueur prudent). Nous en déduisons que $n - a_{12} \leq n/2$ et donc que $a_{23} \geq n/2$ (sinon, x_3 est le seul vainqueur prudent). les minima des lignes sont donc $a_{13} = n - a_{12} = n - a_{23}$, donc $n - a_{13} = n - a_{12} = a_{23}$ et $a_{12} + a_{13} = n - a_{12} + a_{23} = n - a_{13} + n - a_{23}$.

Soit π un profil indifférent pour la fonction de choix de Borda. Alors, $a_{12} + a_{13} = n - a_{12} + a_{23} = n - a_{13} + n - a_{23}$ soit $a_{13} = n - 2a_{12} + a_{23} = (2n - a_{12} - a_{23})/2$. Donc $a_{12} = a_{23}$. Par suite, $a_{13} = n - a_{12}$ et $n - a_{13} = a_{12} = a_{23}$. Il n'y a donc que deux valeurs différentes dans la matrice de surclassement, chacune d'elle étant présente sur chacune des trois lignes. Les minima des lignes sont donc les mêmes pour les trois lignes et par conséquent, les trois options sont prudentes. \square

Ce résultat était prévisible en utilisant le cube majoritaire. Les profils indifférents pour la fonction de choix de Borda correspondent à l'ensemble $D_{Borda}^3(\{X\})$. Cet ensemble est l'intersection des ensembles $D_{Borda}^3(\{x_1\})$, $D_{Borda}^3(\{x_2\})$ et $D_{Borda}^3(\{x_3\})$ ($D_{Borda}^3(\{x_1\})$ est présenté à la Figure 2.2). Cette intersection est le segment P^+P^- où P^+ a pour coordonnées $(1/3, 1/3, 1/3)$ et P^- a pour coordonnées $(-1/3, -1/3, -1/3)$. De la même façon, l'intersection des ensembles $D_{prudence}^3(\{x_1\})$, $D_{prudence}^3(\{x_2\})$ et $D_{prudence}^3(\{x_3\})$ est aussi le segment P^+P^- .

L'approche géométrique nous a donc donné de bonnes intuitions. Nous remarquons cependant que de nombreuses propriétés sont sans doute impliquées par le nombre restreint d'options.

4.2.2.2 Plus de quatre options

Nous essayons ici de mieux connaître le paradoxe des options pathologiques quantitativement et qualitativement. Du point de vue quantitatif, nous évaluons par simulations la fréquence d'occurrence de ce paradoxe. Nous faisons, pour comparaison, les mêmes simulations avec la règle de Borda. Du point de vue qualitatif, nous essayons de mieux identifier l'allure des profils qui engendrent ce paradoxe.

Point de vue quantitatif

L'existence d'options pathologiques est-elle un fait rarissime ou bien les profils qui engendrent ce paradoxe sont-ils nombreux ? Pour tenter de répondre à cette question, nous avons effectué des tirages aléatoires de profils et examiné la proportion des cas qui présentent des options pathologiques. La Figure 4.4 indique donc le pourcentage de profils pour lesquels on rencontre une option pathologique. Nous indiquons aussi, pour les comparer, le pourcentage de profils indifférents pour la fonction de choix de Borda et pour la fonction de choix prudente.

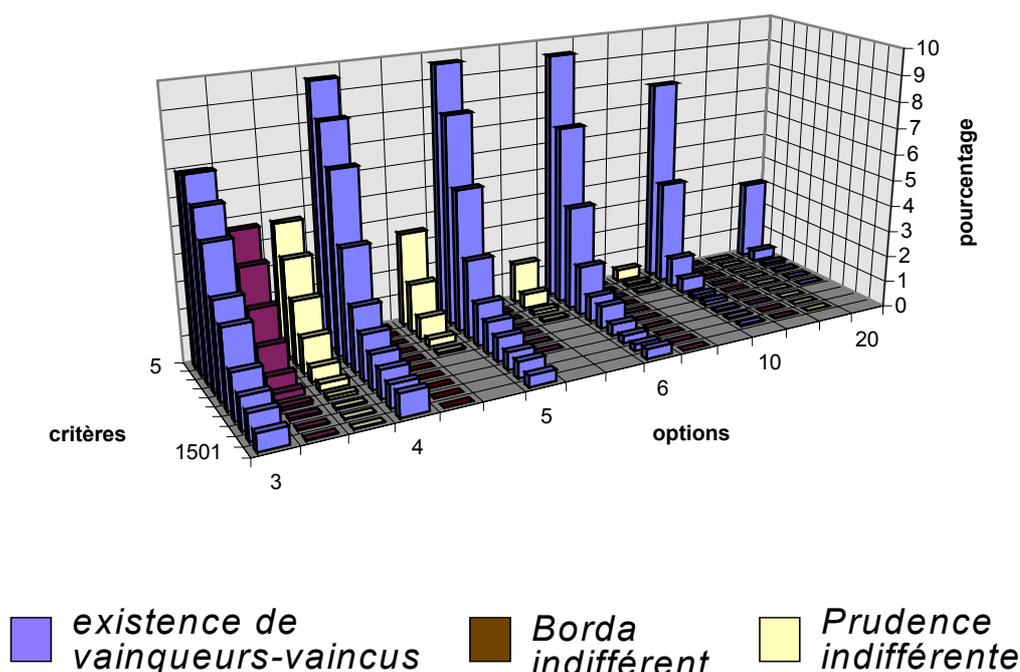


Figure 4.4 : Pourcentages de profils dans les différentes catégories.

Les valeurs obtenues pour la fonction de choix de Borda ont été récemment confirmées par les résultats théoriques de Marchant (1999). Pour la fonction de choix de Borda, les valeurs obtenues lorsque le nombre d'options est pair s'explique grâce à la proposition suivante.

Proposition 4.2.2 *Si le nombre de critères est impair, et le nombre d'options est pair, il n'existe pas de profil pour lequel toutes les options ont le même score de Borda.*

4 DES PARADOXES LIÉS AU PRINCIPE DE PRUDENCE

Preuve Considérons un profil dont toutes les options ont le même score de Borda. Alors, la somme des coefficients de surclassement sur chaque ligne est égale à une constante K . La somme de toutes ces constantes est aussi la somme des coefficients de surclassement, soit $mK = n(m+1)m/2$. Nous obtenons après simplification $K = n(m+1)/2$. Or si n et $m+1$ étaient impairs, K ne serait pas entier. Ceci est absurde puisque K est une somme d'entiers. \square

Remarquons que même pour m impair, le pourcentage de profils indifférents pour la méthode de Borda est extrêmement faible dès que m est supérieur ou égal à 5. Ce n'est pas le cas pour la fonction de choix prudente. Cependant, les profils pour lesquels les ensembles de choix et de rejet ont une intersection non vide deviennent de plus en plus rares lorsque le nombre d'options augmente. Ce pourcentage semble tendre vers une valeur limite lorsque le nombre de critères augmente et que le nombre d'options est supérieur ou égal à 4. Les profils ayant cette propriété, ont toujours été, quel que soit le nombre de critères et d'options, en proportion inférieure à 10%.

Comme nous pouvions nous en douter, la Proposition 4.2.1 devient fautive pour quatre options ou plus. Il existe en effet des profils indifférents pour la prudence mais pas pour Borda comme $(x_4 > x_1 > x_2 > x_3, x_3 > x_4 > x_1 > x_2, x_2 > x_3 > x_1 > x_4)$ et des profils indifférents pour Borda mais pas pour la prudence comme $(x_4 > x_1 > x_2 > x_3, x_4 > x_2 > x_3 > x_1, x_4 > x_3 > x_1 > x_2, x_1 > x_2 > x_3 > x_4, x_2 > x_3 > x_1 > x_4, x_3 > x_1 > x_2 > x_4)$.

Du point de vue du décideur, le problème des options pathologiques n'est sans doute vraiment grave que lorsqu'il est obligé de choisir une de ces options. Si toutes les options prudentes ne sont pas pathologiques, le décideur peut naturellement se tourner vers les options prudentes qui ne sont pas dans l'ensemble de rejet prudent. Nous avons donc cherché le pourcentage de profils ambigus pour lesquels toutes les options prudentes sont pathologiques. Les résultats sont présentés dans le Tableau 4.1.

critères\options	3	4	5	6	10	20
5	4.5	3.9	2.4	1.4	0.1	0.0
7	3.3	2.6	1.4	0.7	0.0	0.0
11	2.4	1.5	0.6	0.3	0.1	0.0
21	1.3	0.7	0.6	0.4	0.1	0.0
51	0.5	0.6	0.5	0.3	0.0	0.0
101	0.3	0.7	0.3	0.2	0.0	0.0
251	0.1	0.7	0.5	0.3	0.0	0.0
501	0.1	0.6	0.5	0.3	0.0	0.0
1001	0.0	0.6	0.4	0.2	0.0	0.0

Tableau 4.1 : Pourcentage de profils ambigus

Nous constatons ainsi, que sauf pour des petits nombres d'options et de critères, les pourcentages de profils ambigus sont très faibles.

Point de vue qualitatif

Essayons maintenant, toujours à l'aide de simulations, de savoir à quoi ressemblent les profils pour lesquels les ensembles de choix et de rejet prudents ont une intersection non vide.

4 DES PARADOXES LIÉS AU PRINCIPE DE PRUDENCE

Pour cela, intéressons-nous d'une part au nombre d'options dans les ensembles de choix prudents de ces profils et d'autre part à l'allure de ces profils.

Intuitivement, si l'ensemble de choix prudent d'un profil comporte beaucoup d'options, il est plus probable que certaines d'entre elles soient aussi dans l'ensemble de rejet prudent. Nous avons donc cherché à savoir si inversement, les profils ayant des options pathologiques avaient en moyenne plus d'options dans leurs ensembles de choix que les autres. La Figure 4.5 présente le nombre moyen d'options dans les ensembles de choix prudents des profils ayant des options pathologiques et le nombre moyen d'options dans les ensembles de choix prudents de profils aléatoires.

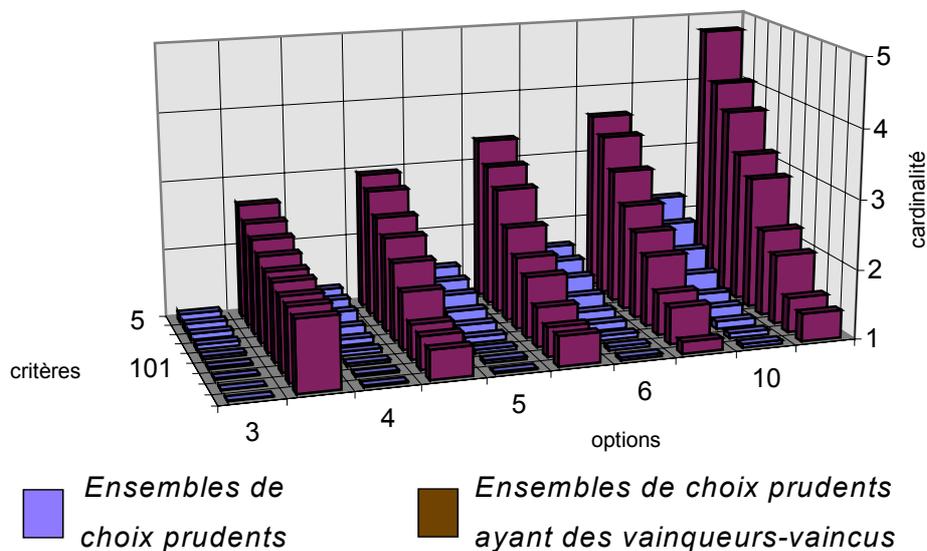


Figure 4.5 : Nombre d'options dans les ensembles de choix prudents

Le résultat particulier dans le cas où $m = 3$ est simple à expliquer en raison du Théorème 4.2.1. Nous avons vu en effet que dans ce cas, s'il existe une option pathologique, il y a au moins deux options prudentes.

Nous constatons que les ensembles de choix prudents de profils ayant des options pathologiques comptent nettement plus d'options que les autres. Profitons-en pour essayer de savoir si ces ensembles de choix prudents de profils aléatoires contiennent de nombreuses options ou pas. Les valeurs trouvées mesurent le pouvoir discriminant de cette fonction de choix. Nous comparons ces valeurs à celles obtenues pour les fonctions de choix de Borda et de Nanson.

La fonction de choix de Borda est réputée pour être très discriminante en raison de sa propriété de monotonie stricte. Ce sera donc un bon terme de comparaison.

Nous nous intéresserons aussi à la fonction de choix de Nanson sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre 5.2.1.

Debord (1987) a montré à l'aide de simulations que le nombre d'ordres prudents (voir [Debord 1987] ou [Arrow et Raynaud 1986] pour la définition d'un ordre prudent) augmentait en

4 DES PARADOXES LIÉS AU PRINCIPE DE PRUDENCE

fonction du nombre d'options pour un nombre de critères fixé. Il est donc probable qu'il en soit de même pour le nombre d'options dans les ensembles de choix prudents.

La Figure 4.6 présente le nombre moyen d'options dans les ensembles de choix prudents, de Borda et de Nanson.

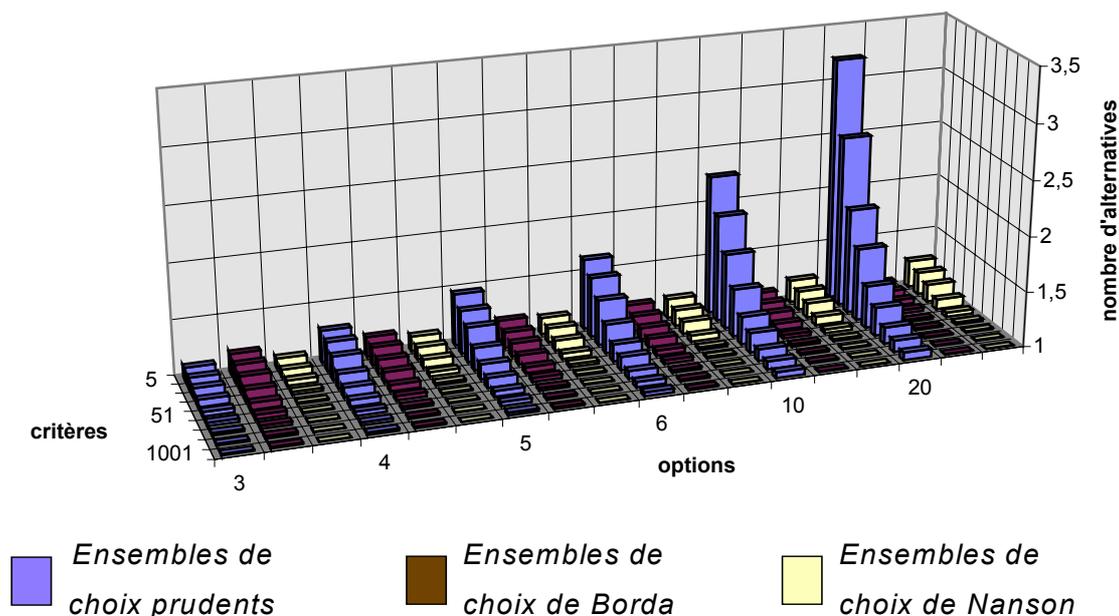


Figure 4.6 : Nombre moyen d'options dans les ensembles de choix

Les intuitions que nous avons semblent donc être justifiées. Les valeurs obtenues montrent bien que la prudence est beaucoup moins discriminante que Borda ou Nanson, en particulier lorsque le nombre d'options augmente. Toutefois, pour un nombre d'options fixé, le nombre moyen d'options dans les ensembles de choix des différentes fonctions semble tendre vers 1.

Pour caractériser l'allure des profils rencontrés, nous avons choisi de considérer le rang des options dans la préférence des différents critères. Nous nous intéressons bien sûr aux options pathologiques. Pour simplifier la classification, lorsque plusieurs options sont pathologiques, nous ne considérons que la première d'entre elles dans l'ordre lexicographique.

Pour qu'une option soit à la fois dans l'ensemble de choix prudent et dans l'ensemble de rejet prudent, elle doit avoir tous ses coefficients de surclassement ni trop petits (sinon l'option n'est pas vainqueur prudente) ni trop grands (sinon, l'option n'est pas vaincue prudente). Ces options pathologiques ont donc toutes leurs coefficients de surclassements proches de $n/2$. Dans un profil aléatoire, les trois possibilités que nous avons envisagées sont :

- l'option est première dans la moitié des critères et dernière dans l'autre moitié ;
- l'option occupe le même nombre de fois chaque rang ;
- l'option occupe toujours le rang médian.

4 DES PARADOXES LIÉS AU PRINCIPE DE PRUDENCE

Nous utilisons la terminologie proposée par [Tangian 1996] dans un contexte similaire. Les définitions proposées pour affecter les profils aux différentes classes sont les suivantes.

Définition 4.2.1 *Un profil est « contrasté » (extreme), si dans plus de 80% des critères, la première option (au sens lexicographique) qui est à la fois dans l'ensemble de choix prudent et dans l'ensemble de rejet prudent occupe un rang éloigné d'au plus 20% d'un des deux rangs extrêmes.*

Qualitativement, on peut dire que dans ce profil, les critères classent l'option pathologique considérée soit très bien, soit très mal.

Définition 4.2.2 *Un profil est « réparti » (mixed), si la première option (au sens lexicographique) qui est à la fois dans l'ensemble de choix prudent et dans l'ensemble de rejet prudent occupe au plus 1.05 fois chaque rang.*

L'option pathologique considérée occupe tous les rangs de manière uniforme.

Définition 4.2.3 *Un profil est « indifférent » (indifferent), si dans plus de 80% des critères, la première option (au sens lexicographique) qui est à la fois dans l'ensemble de choix prudent et dans l'ensemble de rejet prudent occupe un rang éloigné d'au plus 20% du rang médian.*

Ici, l'option pathologique considérée occupe toujours un rang médian.

La Figure 4.7 donne le pourcentage de profils dans chacune des catégories. À gauche figurent les résultats pour les profils ayant des options pathologiques. À droite figurent, pour comparaison, les résultats pour des profils aléatoires.

4 DES PARADOXES LIÉS AU PRINCIPE DE PRUDENCE

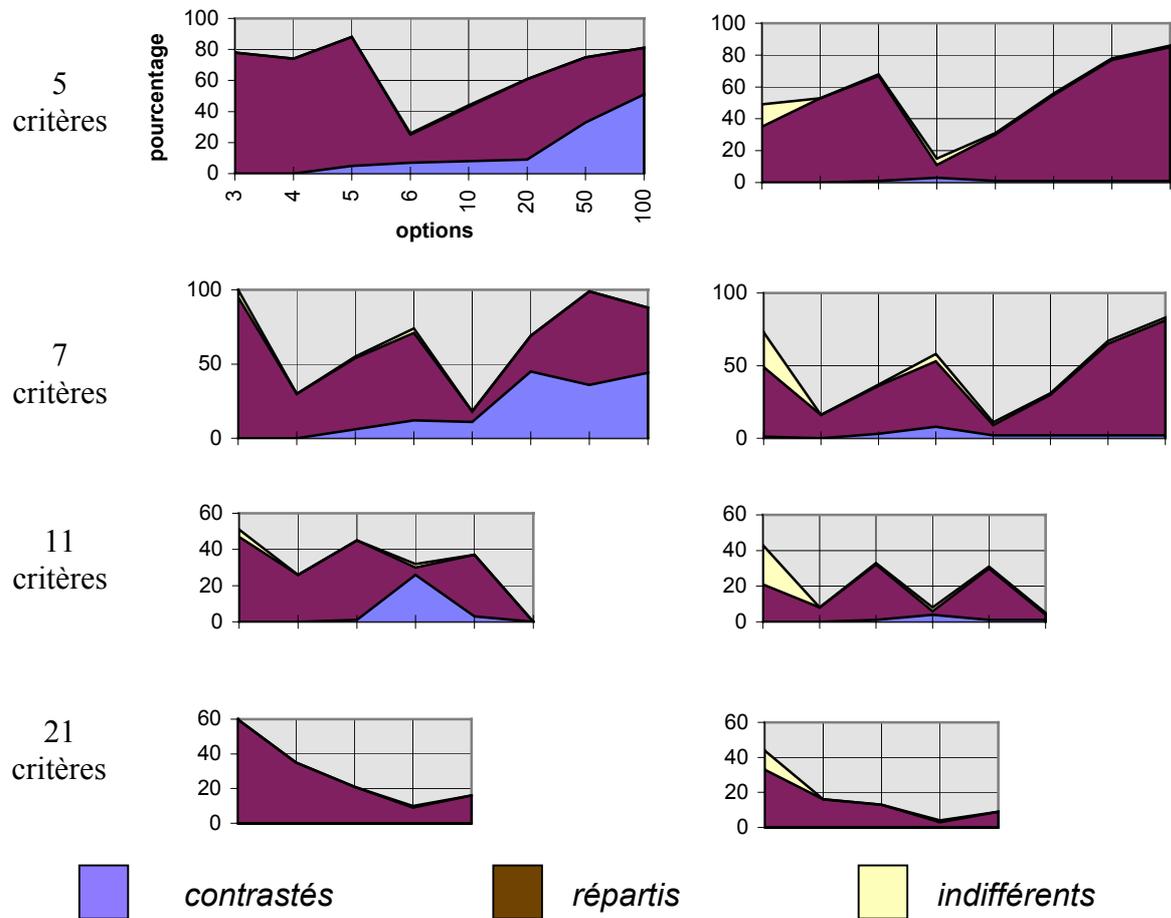


Figure 4.7 : répartition des profils

à gauche des profils ayant des options pathologiques
à droite des profils aléatoires

Remarques :

Nous avons vu que le nombre de profils ayant des options pathologiques diminue lorsque le nombre de critères ou d'options augmente. Nous avons donc jugé préférable de ne mentionner les résultats que lorsque le nombre de profils ayant des options pathologiques était suffisant. Nous avons donc effectué 100 000 tirages au lieu de 10 000 lorsque les nombres d'options et de critères sont grands. De plus, le nombre d'options a été limité à 20 pour 11 critères et 10 pour 21 critères.

Pour les valeurs de n plus grandes, il n'y a plus de profils contrastés ou indifférents. Les profils répartis sont plus nombreux lorsque ces profils contiennent des options pathologiques.

Nous constatons que lorsque le nombre d'options est grand par rapport au nombre de critères, il semble qu'il y ait beaucoup de profils contrastés parmi les profils ayant des options pathologiques. Remarquons aussi le caractère chaotique pour les petits nombres de critères.

4.2.3 Prudence et cohérence

4.2.3.1 L'axiome de cohérence

Il existe différentes versions de l'axiome de cohérence. Cette version a initialement été proposée par Young (1974). Dans toutes ces définitions, π et π' sont des profils sur les mêmes ensembles d'options :

Définition 4.2.4 *Une fonction de choix F est cohérente si et seulement si, $F(\pi) \cap F(\pi') \neq \emptyset$ implique $F(\pi \oplus \pi') = F(\pi) \cap F(\pi')$.*

Cet axiome étant assez contraignant, nous en proposons deux versions affaiblies.

Définition 4.2.5 *Une fonction de choix F est faiblement cohérente si et seulement si, $F(\pi) \cap F(\pi') \neq \emptyset$ implique $F(\pi \oplus \pi') \supseteq F(\pi) \cap F(\pi')$.*

Définition 4.2.6 *Une fonction de choix F est très faiblement cohérente si et seulement si, $F(\pi) \cap F(\pi') \neq \emptyset$ implique $F(\pi \oplus \pi') \cap (F(\pi) \cap F(\pi')) \neq \emptyset$.*

Comme beaucoup d'axiomes, la cohérence a une interprétation assez claire. Supposons qu'un décideur dispose, pour prendre sa décision, de deux types de critères : les critères économiques et les critères sociaux. Ce décideur trouvera légitime de demander à ce que la fonction de choix qu'il utilise ait la propriété suivante. S'il existe des options qui sont les meilleures séparément par rapport au sous-ensemble des critères économiques et par rapport au sous-ensemble des critères sociaux, ces options sont celles qui doivent être choisies lorsque l'on considérera l'ensemble des critères. Il s'agit de la cohérence. Lorsque le décideur exige seulement que les options choisies globalement fassent partie des options désignées par les critères économiques et par les critères sociaux, il souhaite la cohérence faible. Lorsque le décideur demande seulement que parmi les options désignées par les deux sous-ensembles de critères, il y en ait au moins une dans l'ensemble de choix final, c'est la cohérence très faible qui est nécessaire.

Cet axiome, bien qu'il puisse paraître « aller de soi », est très contraignant pour les fonctions de choix. Plusieurs caractérisations de fonctions de choix utilisent cet axiome. Citons en particulier les axiomatisations de la fonction de choix de Borda faites par Young (1974), puis Marchant (1996b) ou encore celle de la fonction de choix de Kemeny de [Young et Levenglick 1978].

Il est clair que la cohérence implique la cohérence faible qui implique elle-même la cohérence très faible.

Signalons d'autres versions affaiblies de la cohérence comme par exemple l'indifférente-stabilité [Debord 1987]. Dans ce cas, ce n'est que lorsque le profil que l'on ajoute est indifférent que le résultat doit rester le même.

Définition 4.2.7 *Une fonction de choix F est « indifférente-stable » si et seulement si, $F(I) = X$ implique $F(\pi \oplus I) = F(\pi)$.*

4 DES PARADOXES LIÉS AU PRINCIPE DE PRUDENCE

Richelson [1980] propose une autre version affaiblie de la cohérence dans laquelle il ne considère l'ajout que d'un critère.

Définition 4.2.8 Une fonction de choix F est « critère-stable » si et seulement si, $F(\pi) = \{x\}$ et le critère C range x en première position implique $F(\pi \oplus C) = \{x\}$.

La cohérence faible de Saari (1994), définie en utilisant son approche géométrique, impose que si les résultats correspondant à deux profils sont identiques, alors le résultat pour leur concaténation est encore le même. Cet axiome se redéfinit de la manière suivante.

Définition 4.2.9 Une fonction de choix F est faiblement cohérente pour Saari si et seulement si, $F(\pi) = F(\pi')$ implique $F(\pi \oplus \pi') = F(\pi)$.

4.2.3.2 Résultats

L'axiome de prudence, même s'il semble très naturel, n'est pas partout compatible avec celui de cohérence. Le non-respect de la cohérence peut même être très fort. Il est en effet possible de trouver des profils π et π' tels que $P(\pi \oplus \pi')$ et $P(\pi) \cap P(\pi')$ soient disjoints.

Considérons les profils π et π' suivants :

$\pi = 7$ fois abc , 6 fois bca , 7 fois cab et une fois bac . Sa matrice de surclassement est la suivante :

	a	b	c
a	/	14	8
b	7	/	14
c	13	7	/

L'ensemble de choix prudent est $P(\pi) = \{a\}$. Le point correspondant du cube majoritaire P a pour coordonnées $(1/3, 1/3, 5/21)$.

$\pi' = 11$ fois acb , 10 fois cba . Sa matrice de surclassement est la suivante :

	a	b	c
a	/	11	11
b	10	/	0
c	10	21	/

L'ensemble de choix prudent est $P(\pi') = \{a\}$. Le point correspondant du cube majoritaire P' a pour coordonnées $(1/21, -1, -1/21)$.

La matrice de surclassement de $\pi \oplus \pi'$ est alors la somme des deux matrices précédentes soit :

	a	b	c
a	/	25	19
b	17	/	14
c	23	28	/

4 DES PARADOXES LIÉS AU PRINCIPE DE PRUDENCE

L'ensemble de choix prudent est $P(\pi \oplus \pi') = \{c\}$. Il est clair que le point Σ de coordonnées $(4/21, -1/3, 2/21)$ correspondant n'est pas dans $D_{prudence}^3(\{a\})$.

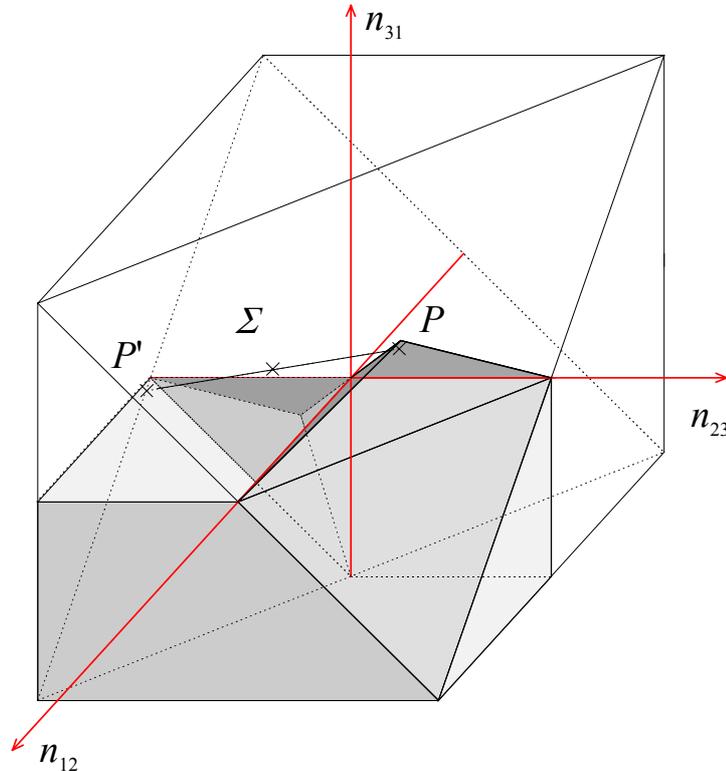


Figure 4.8 : Non-respect de la cohérence

Remarquons que pour trois options, les profils ayant cette propriété sont faciles à trouver en utilisant l'approche géométrique de Saari. Nous avons vu que l'ensemble des points pour lesquels a était vainqueur prudent n'est pas convexe. Il est donc possible de trouver deux profils tels que leur ensemble de choix prudent soit a et que la réunion de ces deux profils donne un autre ensemble de choix. Interprété en utilisant la représentation géométrique de Saari, l'axiome de cohérence est donc équivalent à la convexité des ensembles $D_{prudence}^3(\{A\})$, $A \subseteq X$ et $A \neq \emptyset$. Il est alors très simple de comprendre quelles sont les procédures qui ne respectent pas cet axiome, de construire des exemples qui le mettent en défaut, etc.

Signalons au lecteur que la recherche des profils donnant lieu à ce paradoxe peut être assez laborieuse. C'est un des intérêts de l'approche géométrique de Saari : il n'est pas nécessaire de trouver les profils (ici mettant en défaut la cohérence), il suffit de montrer que certains points du cube majoritaire mettent en défaut la propriété géométrique correspondante (ici la non-convexité).

Lorsque le nombre de critères est limité, le cube majoritaire n'est plus plein. Il n'y a par exemple que 6 points correspondant aux 6 ordres totaux dans le cas d'un seul critère. Dans le cas de deux critères, il n'y a que 21 situations de votes possibles. À ces 21 situations correspondent 19 points du cube majoritaire (les situations $\{abc, cba\}$, $\{acb, bca\}$ et $\{bac, cab\}$ sont toutes les

4 DES PARADOXES LIÉS AU PRINCIPE DE PRUDENCE

trois représentées par l'origine). Parmi ces points, 10 sont dans $D_{prudence}^3(\{a\})$. Le lecteur pourra vérifier que le milieu de n'importe quelle paire de deux de ces 10 points est aussi dans $D_{prudence}^3(\{a\})$. Il en est de même pour tous les ensembles $A \subseteq X$ et $A \neq \emptyset$. Ainsi, lorsque les profils de départ sont limités à deux critères et trois options, la prudence est cohérente.

Travailler sur le sous-ensemble des points du cube majoritaire qui correspondent à des profils un nombre de critères n fixé semble difficile. Ce sont tous les barycentres des 6 sommets du cube majoritaire tels que leurs poids sont entiers et leur somme égale à m . Leur répartition dans le cube majoritaire est complexe. C'est pour cette raison que l'approche géométrique ne nous a pas été très utile lorsque le nombre des critères est limité.

Le paradoxe de la non-cohérence est généralisable à des nombres quelconques d'options et de critères grâce au théorème suivant :

Théorème 4.2.2 *S'il existe deux profils π et π' avec m_1 options, n_1 et n'_1 critères tels que $P(\pi) \cap P(\pi') \neq \emptyset$ et $P(\pi \oplus \pi') \cap (P(\pi) \cup P(\pi')) = \emptyset$, alors pour tout $m_2 \geq m_1$, tout $n_2 = n_1 + 2k$ et tout $n'_2 = n'_1 + 2k'$ (k et k' entier), il existe des profils Π et Π' avec m_2 options, n_2 et n'_2 critères ayant la même propriété.*

Preuve Montrons tout d'abord qu'à partir des deux profils π et π' avec m options, il est possible de construire deux autres profils Π et Π' avec $m + k$ ($k \geq 0$) ayant les mêmes propriétés. Les profils Π et Π' sont construits de la manière suivante : ajoutons en queue de tous les ordres stricts des profils π et π' les options $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+k}$ dans cet ordre. Les matrices de surclassement des profils Π, Π' et $\Pi \oplus \Pi'$ sont les suivantes.

	x_1		...		x_m	x_{m+1}	...	x_{m+k}	
x_1	/					n	n	n	
		matrice de					n	n	n
...		surclassement du profil					n	n	n
		de départ					n	n	n
x_m					/	n	n	n	
x_{m+1}	0	0	0	0	0	/	n	n	
...	0	0	0	0	0	0	/	n	
x_{m+k}	0	0	0	0	0	0	0	/	

Pour tout $i > m$ et tout $j \leq m$, nous avons $a_{ij} = 0$. Si une des options $x_{m+1} \dots x_{m+k}$ est dans un des ensemble de choix prudent, c'est donc que le maximin de la matrice de surclassement est égal à 0. Or dans ce cas, toutes les options sont dans l'ensemble de choix prudent. Mais ceci devait aussi être vrai dans le profil initial qui ne pouvait alors pas satisfaire les conditions du théorème.

Pour augmenter le nombre de critères, il suffit d'ajouter à π et π' k et k' fois un profil constitué de deux ordres inversés. La matrice de surclassement d'un profil constitué de deux ordres inversés est constante et par constante indifférence de la prudence, les ensembles de choix prudents ne changent pas. \square

La propriété utilisée dans ce théorème est une version affaiblie de celle utilisée dans la cohérence faible. Le théorème implique qu'il est possible, à partir de n'importe quels profils qui la mettent en défaut, de construire d'autres profils avec plus d'options et/ou de critères qui la

4 DES PARADOXES LIÉS AU PRINCIPE DE PRUDENCE

mettent aussi en défaut. Il semble donc intéressant de chercher quels sont les plus « petits » profils tels que $P(\pi) \cap P(\pi') \neq \emptyset$ et $P(\pi \oplus \pi') \cap (P(\pi) \cup P(\pi')) = \emptyset$. Le terme « petits » doit s'appliquer au nombre d'options, au nombre de critères de π et au nombre de critères de π' . Nous sommes donc face à un problème multicritère dont il faudrait trouver tous les optima de Pareto. De plus, le théorème indique seulement comment ajouter un nombre pair de critères, Il faut donc distinguer ces optima en fonction de la parité du nombre de critères. À titre anecdotique, voici un des plus « petits » exemples trouvés :

$$\pi = 4 \text{ fois } acb, 3 \text{ fois } bac \text{ et } 3 \text{ fois } cba ; \pi' = 4 \text{ fois } bca \text{ et } 5 \text{ fois } abc.$$

Nous avons, ici encore, cherché à connaître la fréquence des viols des diverses versions de la cohérence. Nous savons, en raison des implications des diverses versions que la fréquence du viol de la cohérence est plus grande que celle de la cohérence faible, elle-même plus grande que celle de la cohérence très faible. De plus, nous avons vu que, pour un nombre d'options fixé, le nombre d'options dans les ensembles de choix prudents diminue lorsque le nombre de critères augmente. Si tous les ensembles de choix ne contiennent qu'une seule option, la cohérence et la cohérence très faible sont équivalentes. Nous pouvons donc nous attendre, pour un nombre d'options fixé, à voir les fréquences des viols des différentes versions de la cohérence converger lorsque le nombre de critère augmente.

Les simulations permettant de savoir si l'axiome de cohérence est souvent violé par la règle de prudence ont été réalisées de la manière suivante :

- tirer un profil aléatoire π ;
- tirer des profils aléatoires avec le même nombre de critères et d'options jusqu'à en trouver un, π' , pour lequel l'intersection avec $P(\pi)$ est non vide ;
- comparer $P(\pi) \cap P(\pi')$ et $P(\pi \oplus \pi')$.

Pour cette comparaison, les pourcentages donnés sont : le pourcentage de profils π pour lesquels la cohérence n'est pas respectée ; le pourcentage de profils π pour lesquels la cohérence faible n'est pas respectée ; le pourcentage de profils π pour lesquels la cohérence très faible n'est pas respectée. Remarquons que nous aurions pu tirer aléatoirement le profil π' et considérer que si l'intersection avec $P(\pi)$ est non vide la cohérence n'est pas mise en défaut. Les résultats obtenus auraient bien sûr été beaucoup plus faibles.

Les résultats présentés concernent 100 000 tirages du profil initial π pour chaque valeur de (m, n) pour être plus sûrs des valeurs obtenues (les pourcentages sont parfois faibles).

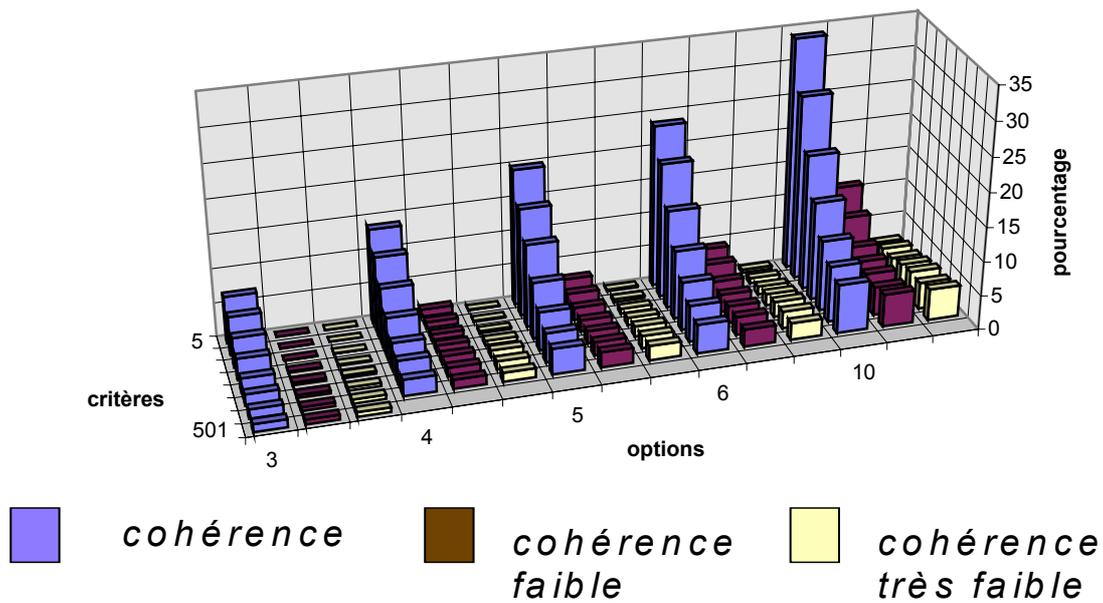


Figure 4.9 : Pourcentages de profils ne respectant pas les différentes versions de la cohérence

Curieusement, les fréquences des viols des différentes versions de la cohérence ont des comportements différents. Pour un nombre d'options fixé, alors que le viol de la cohérence et de la cohérence faible diminue lorsque le nombre de critères augmente, celui de la cohérence très faible augmente.

La fonction de choix prudente ne vérifie pas non plus la propriété d'indifférente-stabilité. Pour s'en convaincre, le lecteur pourra examiner la concaténation des deux profils $I = \{abc, cab, bca\}$ et $\pi = \{acb, cab\}$. Géométriquement, nous avons vu que les profils indifférents pour la prudence sont représentés par les points du segment P^+P^- avec $P^+ : (1/3, 1/3, 1/3)$ et $P^- : (-1/3, -1/3, -1/3)$. La propriété géométrique correspondant à l'indifférente-stabilité est la suivante. Si P est un point de $D^3_{prudence}(\{A\})$ où $A \subseteq X$ et $A \neq \emptyset$ et si I est un point du segment P^+P^- , tous les points du segment AI privé de I doivent appartenir à $D^3_{prudence}(\{A\})$.

Il serait intéressant de savoir si l'indifférente-stabilité est souvent mise en défaut par la fonction de choix prudente. Le protocole des simulations est plus délicat à définir dans ce cas. En effet, nous devons, pour bien faire, tirer au hasard un profil indifférent pour la prudence. Ce profil aura une grande influence sur le respect ou non de l'indifférente-stabilité¹. Nous devons donc effectuer des tirages au hasard uniforme dans l'espace des profils indifférents pour la prudence. Nous n'avons malheureusement pas trouvé de moyen efficace pour faire ces tirages. Nous touchons ici une des limites de l'approche expérimentale que nous avons développée.

Le lecteur pourra par contre facilement se convaincre que la fonction de choix prudente respecte l'axiome de critère-stabilité proposé par Richelson. L'ajout à un profil π pour lequel x

¹ Un profil dont la matrice de surclassement est constante est indifférent pour la fonction de choix prudente. C'est aussi le cas pour un permutant (voir définition 5.2.7). Pourtant, la concaténation du premier à un autre profil ne changera pas l'ensemble de choix prudent alors que ce changement est probable en ajoutant un permutant.

4 DES PARADOXES LIÉS AU PRINCIPE DE PRUDENCE

est le seul vainqueur prudent d'un critère rangeant x premier ajoute 1 à tous les coefficients de surclassement de x . Le maximin de la matrice de surclassement augmente donc de 1 et ne peut être que dans la ligne de x .

5. Des paradoxes liés à la monotonie

L'axiome de monotonie est à lui seul susceptible d'engendrer de nombreux paradoxes. Nous verrons tout d'abord différentes versions plus ou moins fortes de l'axiome de monotonie. Nous montrerons qu'aucune méthode d'agrégation construite par itération d'une fonction de choix symétrique et strictement monotone n'est strictement monotone. Nous essayerons ensuite de savoir si l'axiome de monotonie est souvent violé, tout d'abord par la fonction de choix de Nanson, puis, pour la monotonie stricte, par la fonction de choix prudente.

5.1 Qu'est ce que la monotonie ?

L'axiome de monotonie connaît, encore plus que l'axiome de cohérence, de nombreuses versions plus ou moins fortes et qui varient selon les auteurs. Nous présentons dans un premier temps les principales définitions utilisées. Nous montrons ensuite comment interpréter la monotonie à l'aide de l'approche géométrique de Saari.

5.1.1 Les différentes monotonies

Nous avons vu au chapitre précédent que l'axiome de cohérence impose aux fonctions de choix un comportement « correct » lors de l'ajout d'un ensemble de critères donnant le même résultat (propriété inter-critères). La monotonie est, elle, une propriété intra-critères. Intuitivement, la monotonie exige d'une fonction de choix ou de rangement de ne pas détériorer le classement global d'une option lorsque le classement de celle-ci s'améliore dans une préférence. Il n'est pas question ici de l'ajout de nouveaux critères mais du changement dans les préférences de certains d'entre eux. Nitzan et Rubinstein (1981) définissent la monotonie de la façon suivante : « The monotonicity axiom implies an explicit strengthening of the social preference relationship between two options due to the improvement in the status of the preferred option vis-à-vis some third option ».

Les multiples versions de l'axiome de monotonie diffèrent par l'indépendance plus ou moins grande par rapport aux autres options et par l'importance de l'amélioration répercutée dans la préférence globale. Ainsi, l'axiome de réponse positive d'Arrow peut être considéré comme une forme particulière de monotonie.

La monotonie que nous utilisons se décline en plusieurs versions. Elle utilise la notion de transformation élémentaire définie comme suit.

Définition 5.1.1 *Un profil π' est déduit d'un profil π au moyen d'une transformation élémentaire favorable à $b \in X$ s'il existe $a \in X$ et un critère \forall_j tels que : pour tout $\forall_i \in V$, $R_i' = R_i$, pour tous $y, z \in X$, $\{y, z\} \neq \{a, b\}$, yR_jz si et seulement si $yR_j'z$ et $((aR_jb \text{ et } \neg aR_j'b) \text{ ou } (\neg bR_j'a \text{ et } bR_j'a))$. Dans ce cas, nous dirons aussi que π' est déduit de π au moyen d'une transformation élémentaire défavorable à a .*

Cette définition est valable pour un profil de préordres ou d'ordres stricts. Pour des ordres stricts, une transformation élémentaire favorable à b et défavorable à a signifie que l'un des critères, qui rangeait a juste avant b , échange ces deux options dans sa préférence. Pour un

5 DES PARADOXES LIÉS À LA MONOTONIE

préordre, elle signifie que l'un critère améliore le classement de b par rapport à a de l'une des deux manières suivantes : soit a était préférée à b et ne l'est plus, soit b n'était pas préférée à a et le devient (ces deux cas peuvent être simultanés) ; Les préférences par rapport aux autres options sont inchangées.

La monotonie peut alors être définie ainsi :

Définition 5.1.2 ([Smith 1973]) *Une fonction de choix F est monotone si lorsque $a \in F(\pi)$ et π' est déduit de π par une transformation élémentaire favorable à a , alors $a \in F(\pi')$.*

La monotonie stricte, quant à elle, exige que l'option a reste seule dans l'ensemble de choix :

Définition 5.1.3 *Une fonction de choix F est strictement monotone si lorsque $a \in F(\pi)$ et π' est déduit de π par une transformation élémentaire favorable à a , alors $F(\pi') = \{a\}$.*

De nombreuses fonctions de choix vérifient l'axiome de monotonie stricte. Les principales sont bien sûr les règles positionnelles pour lesquelles le nombre de points accordé pour une première place est strictement plus grand que celui accordé pour une seconde place et ainsi de suite. Considérons plus généralement, toutes les méthodes qui déterminent l'ensemble de choix en maximisant une fonction d'utilité, cette dernière étant strictement croissante en fonction des utilités partielles (comme les méthodes additives). Si ces utilités partielles sont strictement croissantes en fonction des rangs des options la méthode est alors strictement monotone. Mentionnons aussi par exemple les méthodes fondées sur le calcul du vecteur propre de la matrice de surclassement (voir [Laslier 1996]). Grivko et Levchenkov (1994) donnent un exemple concret d'une telle méthode. Le principal avantage de l'axiome de monotonie stricte est qu'il diminue généralement le nombre d'ex aequo et donc le nombre d'options dans l'ensemble de choix.

Dans le cas de deux options, la monotonie stricte correspond à l'axiome de réponse positive utilisé par May (1952) dans sa caractérisation de la méthode majoritaire.

La version de la monotonie que nous proposons ne demande que très peu d'indépendance par rapport aux autres options. À l'opposé, l'axiome de réponse positive utilisée dans la démonstration simplifiée du théorème d'Arrow [Arrow et Raynaud 1986] contient beaucoup d'indépendance. Cet axiome peut être considéré comme une forme de monotonie, mais cette fois-ci, la non-détérioration du classement global de x doit avoir lieu quels que soient les classements des autres options. Dans le contexte du théorème d'impossibilité, cet axiome de réponse positive est associé à un axiome d'indépendance explicite. Il n'y a donc pas de risque de méprise sur l'indépendance de la méthode utilisée. Mais lorsque l'axiome de réponse positive (ou une autre forme de monotonie) est utilisé seul, cette notion d'indépendance doit toujours rester à l'esprit.

La version stricte de la monotonie telle qu'elle est énoncée n'est pas sans poser quelques problèmes. En effet, elle impose que si un seul des votants (même parmi un million) inverse sa préférence entre x et y , alors, la préférence globale est peut-être changée. Pour affaiblir cet axiome et le rendre un peu plus acceptable, [Mas-Colell et Sonnenschein 1972] ont proposé une version (légèrement transformée dans [Deb 1981]) dans laquelle la préférence globale ne s'inverse que si une proportion suffisante des votants change sa préférence.

Moulin (1983) propose lui aussi différentes versions de la monotonie.

Définition 5.1.4 Une fonction de choix F est strictement monotone selon Moulin si lorsque π' est obtenu à partir de π par amélioration de a (toutes les options autres que a gardent le même classement relatif et le classement de a est au moins aussi bon pour chacun des votants de π' que dans π) et si $a \in F(\pi)$, alors $a \in F(\pi')$ et $F(\pi') \subset F(\pi)$.

Dans sa version forte, la définition est la suivante :

Définition 5.1.5 Une fonction de choix F est fortement monotone selon Moulin si lorsque π' est obtenu à partir de π par amélioration de a , $F(\pi') \subset \{a\} \cup F(\pi)$.

Remarquons que pour la monotonie forte, a n'appartient plus forcément à l'ensemble de choix de départ.

Cette version est très contraignante. En effet, pour plus de trois options, toute règle de vote vérifiant la monotonie forte et l'axiome de souveraineté de l'opinion d'Arrow est dictatoriale.

La monotonie peut aussi être définie pour les méthodes d'agrégation.

Définition 5.1.6 Une méthode d'agrégation G est monotone si lorsque π' est déduit de π par une transformation élémentaire favorable à a , alors pour tout $x \neq a$, $\neg xG(\pi)a$ implique $\neg xG(\pi')a$.

Ainsi, une transformation élémentaire favorable à a ne détériore pas son classement dans l'ordre collectif.

Définition 5.1.7 Une méthode d'agrégation G est strictement monotone si lorsque π' est déduit de π par une transformation élémentaire favorable à a , alors pour tout $x \neq a$, $aG(\pi)x$ implique $aG(\pi')x$ et $\neg xG(\pi')a$.

Si une option a est préférée à x dans l'ordre collectif, alors après une transformation élémentaire en sa faveur, a reste strictement préférée à x .

5.1.2 Interprétation géométrique

Les remarques suivantes ne sont ici que pour donner au lecteur une intuition géométrique de la monotonie. Que le lecteur pointilleux ne s'alarme donc pas devant l'absence de formalisme rigoureux de ces remarques.

Pour interpréter la monotonie à l'aide de l'approche géométrique de Saari, nous devons nous limiter à des fonctions de choix qui vérifient l'axiome d'homogénéité.

Faire une transformation élémentaire dans un profil π favorable à une option x_i et défavorable à x_j augmente la valeur de n_{ij} (ou diminue celle de n_{ji}). Ainsi, le point Π représentant π se « déplace » selon l'axe correspondant. Supposons que Π appartienne à $D_f^m(A)$ (avec $x_i \in A$). La monotonie simple impose qu'après le déplacement de Π , x_i soit toujours dans l'ensemble de choix. Ainsi, certains points dont la coordonnée n_{ij} est strictement supérieure à celle de Π (les autres coordonnées étant inchangées), doivent appartenir à $D_f^m(x_i)$.

5 DES PARADOXES LIÉS À LA MONOTONIE

Quant à elle, la monotonie stricte implique que dans les mêmes conditions, certains points ayant une coordonnée n_{ij} strictement supérieure à celle de Π , doivent appartenir à $D_f^m(\{x_i\})$.

Prenons l'exemple de la fonction de choix prudente. Considérons le profil composé des deux ordres stricts $a > b > c$ et $c > b > a$. Ce profil est représenté par le point O de coordonnées $(0, 0, 0)$. Ce point appartient à $D_{prudence}^3(b)$. Le profil obtenu en effectuant une transformation élémentaire favorable à b dans la deuxième préférence est représenté par le point P de coordonnées $(0, 1, 0)$. Il est clair que ce point n'est pas dans $D_{prudence}^3(\{b\})$ (ce point appartient aussi à $D_{prudence}^3(a)$). La fonction de choix prudente n'est donc pas strictement monotone.

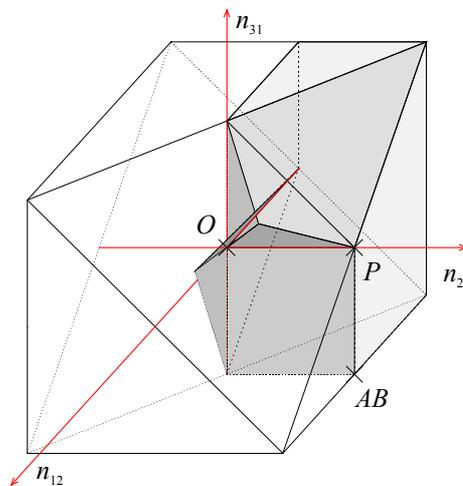


Figure 5.1 : Ensemble des points où b est vainqueur prudente

Dans l'interprétation que nous avons faite, il est question de « certains points » ayant une coordonnée n_{ij} strictement supérieure à celle de Π . Il s'agit concrètement de tous les points correspondant à des profils qui peuvent être obtenus par des transformations élémentaires favorables à x_i et défavorables à x_j . En fait, tous les points ayant une coordonnée n_{ij} strictement supérieure à celle de Π doivent appartenir à l'ensemble $D_f^m(x_i)$ (ou $D_f^m(\{x_i\})$). Dans le cas contraire, il est possible de trouver des profils mettant la monotonie (ou la monotonie stricte) en défaut.

Ici encore, nous sommes confrontés à la difficulté d'interpréter un axiome défini pour un nombre de critères fixé avec une représentation pour laquelle le nombre de critères est variable.

Nous constatons que, du point de vue de l'interprétation géométrique, la différence entre la monotonie et la monotonie stricte ne semble a priori pas très grande. Les contraintes ajoutées par la version stricte de la monotonie à la monotonie n'interviennent que pour les points tels que l'ensemble de choix des profils correspondants comporte plusieurs éléments.

Une conséquence de la monotonie stricte est par exemple que les ensembles $D_f^m(A)$ tels que $\text{card}(A) > 1$ sont de volume $m(m-1)/2$ -dimensionnel nul. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas. Si A est un sous-ensemble de X non réduit à un singleton, il est possible de trouver un point Π intérieur à A . Supposons sans perte de généralité que a_1 appartient à A . Alors, $\Pi = \Pi + (\varepsilon, 0, \dots, 0)$ est un point de $D_f^m(A)$ pour ε assez petit. Il est alors possible de trouver des profils π et π' (représentés par Π et Π'), tels que pour passer de π à π' , nous avons effectué uniquement des transformations favorables à x_1 . L'option x_1 aurait donc dû rester seule dans l'ensemble de choix de π' .

Il est cependant bien connu que la monotonie stricte est beaucoup plus contraignante que la monotonie. En effet, dès que la monotonie est associée à d'autres axiomes comme la neutralité (ce qui est le cas pour la plupart des fonctions de choix), les contraintes sur les ensembles $D_f^m(A)$ tels que $\text{card}(A) > 1$ deviennent plus nombreuses.

Examinons plus en détail l'axiome de neutralité. Cet axiome sur lequel nous reviendrons impose que toutes les options soient traitées de la même manière. D'un point de vue géométrique, la neutralité implique certaines symétries des ensembles $D_f^m(A)$. Par exemple, si f est neutre, l'ensemble $D_f^m(\{x_1, x_2\})$ est invariant par permutation de x_1 et x_2 , c'est-à-dire dans le cas de trois options par symétrie par rapport à la droite (O, AB) où AB est le point de coordonnées $(1/2, 1, -1)$ (voir la Figure 5.1). C'est l'ajout de ce type de contraintes à celles induites par la monotonie stricte qui rend rares les fonctions de choix vérifiant à la fois les axiomes de monotonie stricte, d'homogénéité et de neutralité.

5.2 Des paradoxes

L'axiome de monotonie est une propriété bien naturelle. Pourtant il est connu que de nombreuses fonctions de choix ne sont pas monotones. Nous étudions ici le viol de cet axiome dans deux contextes. D'une part nous étudions les méthodes d'agrégation ou fonctions de choix construites par itérations d'une fonction de choix. Nous nous intéressons plus particulièrement à la fonction de choix de Nanson. D'autre part, nous examinons la fonction de choix prudente qui vérifie la monotonie mais pas la monotonie stricte. Nous cherchons à savoir si la version stricte de cet axiome est souvent mise en défaut par la fonction de choix prudente.

5.2.1 Pour les fonctions de choix itérées

Après avoir présenté les principaux travaux traitant de la monotonie dans les fonctions de choix itérées, nous montrerons que les méthodes d'agrégation construites à partir de fonctions de choix strictement monotones ne sont pas strictement monotones. Nous montrerons ensuite d'autres propriétés liées à la monotonie pour la fonction de choix de Nanson. Nous terminerons par la présentation de quelques résultats expérimentaux.

5.2.1.1 Résultats théoriques

De nombreux auteurs se sont intéressés à l'axiome de monotonie dans les méthodes d'agrégation obtenues par itérations d'une fonction de choix. Ces méthodes d'agrégation sont souvent utilisées en pratique parce qu'elles sont intuitives et ont une longue histoire. En 1882, Nanson (1882) proposait déjà une procédure éliminant à chaque itération l'option ayant le score de Borda le plus faible. L'utilisation itérative d'une fonction de choix est aussi une façon assez simple d'obtenir un résultat plus pertinent lorsqu'il y a par exemple trop ou pas assez d'options sélectionnées à la première itération. De plus, les méthodes d'agrégation améliorent souvent certaines performances des fonctions de choix utilisées (voir par exemple [Lepelley et Merlin 1996] à propos des propriétés d'efficacité majoritaire). Plusieurs études ([Fishburn 1982], [Smith 1973], [Merlin 1996]) traitent du rapport entre ces méthodes d'agrégation et l'axiome de monotonie. Dans [Fishburn 1982], l'auteur montre que différentes méthodes d'agrégation ne sont pas monotones partout. Il s'intéresse en particulier à certaines procédures utilisant des éliminations successives. Les principaux exemples sont l'élimination séquentielle majoritaire, les méthodes d'agrégation fondées sur des fonctions de choix qui éliminent les options ayant le plus mauvais score face à une autre option, ou encore qui éliminent les options dont le meilleur score face à une autre option est le plus mauvais possible. [Smith 1973] étudie le cas des règles positionnelles itératives et montre que toute procédure de ce type utilisant au moins deux itérations n'est jamais monotone. Dans [Richelson 1980], l'auteur étudie trois méthodes d'agrégation (pluralité itérée, procédure de Nanson et de Coombs) par rapport à cinq conditions dont l'une rappelle fortement la monotonie et qu'il appelle l'adaptabilité des votants. Les résultats sur les méthodes de scorage simples et itératives sont résumés dans la thèse de Merlin (1996).

Tous les travaux cités au paragraphe précédent traitent des fonctions de choix particulières et utilisent une version faible de la monotonie. Nous nous focaliserons ici sur une version plus forte de la monotonie et nous prouverons le même type de résultat pour toute fonction de choix symétrique et fortement monotone. Nous montrons ainsi le résultat conjecturé par D. Bouyssou : Soit C une fonction de choix symétrique et strictement monotone. La méthode d'agrégation G construite par itérations de C n'est pas strictement monotone. Ce résultat est présenté dans [Durand à paraître].

Nous montrerons aussi que notre résultat est, d'une certaine façon, aussi fort que possible en donnant des exemples de méthodes d'agrégation faiblement monotones construites par itérations de fonctions de choix vérifiant des axiomes affaiblis.

Définitions complémentaires

Dans ce chapitre, les profils sont des ensembles de préordres.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre de présentation, il est assez simple de construire une méthode d'agrégation par itérations d'une fonction de choix. Les options classées en tête du préordre résultat sont celles de l'ensemble de choix du profil de départ. Les options suivantes sont celles de l'ensemble de choix du sous-profil restreint aux options qui n'ont pas encore été sélectionnées. Le processus continue jusqu'à ce que toutes les options soient classées.

Dans le but de rendre les définitions utilisées aussi naturelles que possible, les méthodes d'agrégation que nous venons de définir déterminent la première place en premier. Fishburn (1982) et Smith (1973) utilisent des procédures qui déterminent la dernière place en premier. Néanmoins, les résultats présentés peuvent être adaptés aux méthodes d'agrégation qui déterminent la dernière place en premier. Il suffit pour cela de modifier les définitions pour les

5 DES PARADOXES LIÉS À LA MONOTONIE

adapter aux fonctions de rejet et de renverser les préférences du profil qui nous sert de contre-exemple.

Nous aurons besoin pour énoncer le principal théorème et en faire la démonstration des définitions de quelques axiomes supplémentaires. Ces axiomes sont très souvent le « minimum requis » pour toute fonction de choix.

Définition 5.2.1 *Une fonction de choix C est Pareto si et seulement si, pour tout $V_i \in V$, $aR_i b$ dans π implique $b \notin C(\pi)$.*

Lorsque chaque critère préfère une option a à une autre option b , alors b ne doit pas appartenir à l'ensemble de choix.

Définition 5.2.2 *Une fonction de choix est unanime si lorsqu'il existe $a \in X$ telle que pour tout $y \in X$ et tout $V_i \in V$, $aR_i y$ dans π , alors $C(\pi) = \{a\}$.*

Lorsque tous les critères rangent l'option a en première position, elle doit être seule dans l'ensemble de choix.

Définition 5.2.3 *Une fonction de choix est neutre si et seulement si, pour toute permutation p sur l'ensemble X des options, $C(\pi(p(X))) = p(C(\pi))$.*

En d'autres termes, une permutation sur l'ensemble des options se retrouve dans le résultat.

Définition 5.2.4 *Une fonction de choix est anonyme si et seulement si, pour toute permutation p' sur l'ensemble des préférences de π , le résultat de C ne change pas ($C(p'(\pi)) = C(\pi)$).*

Une permutation sur l'ensemble des critères ne change pas le résultat.

Définition 5.2.5 *Une fonction de choix est symétrique si et seulement si elle est neutre et anonyme.*

En d'autres termes, la symétrie signifie que tous les votants et toutes les options sont traités de la même manière.

Tous ces axiomes peuvent être très facilement adaptés pour des méthodes d'agrégation.

Le résultat

Lemme 5.2.1 *Si C est une fonction de choix monotone, π un profil et a une option telle que a n'est pas dans $C(\pi)$ et si π' est un profil obtenu grâce à une transformation élémentaire défavorable à a , alors a n'est pas dans $C(\pi')$.*

5 DES PARADOXES LIÉS À LA MONOTONIE

Preuve Si a est dans $C(\pi')$, alors, nous pouvons faire la transformation élémentaire opposée favorable à a . En raison de la monotonie faible, a est dans $C(\pi)$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. \square

Proposition 5.2.1 *Toute fonction de choix neutre et strictement monotone est Pareto.*

Preuve Soit π un profil dans lequel les votants rangent unanimement a avant b , et soit C une fonction de choix neutre et strictement monotone. Supposons que b soit dans $C(\pi)$. Grâce à une série d'au moins une transformation élémentaire favorable à b , nous pouvons atteindre un profil dans lequel b est classée juste avant a dans chaque préférence. Soit π' le profil ainsi obtenu. D'après l'axiome de monotonie stricte, $C(\pi') = \{b\}$. Alors, par une série de transformations élémentaires défavorables à a , nous pouvons atteindre un profil dans lequel a est rangée aux mêmes places que b l'était dans π . Soit π'' le profil ainsi obtenu. L'option a n'est pas dans $C(\pi'')$ puisque π'' est obtenu à partir de π' grâce à des transformations élémentaires défavorables à a et que a n'était pas dans $C(\pi')$. Mais le profil π'' est obtenu à partir de π par une permutation entre a et b , et ainsi, a est dans $C(\pi'')$ par neutralité. Ceci est une contradiction. \square

Corollaire 5.2.1 *Toute fonction de choix neutre et strictement monotone respecte l'unanimité.*

Preuve Évidente puisque la propriété de Pareto implique le respect de l'unanimité. \square

Théorème 5.2.1 *Soit C une fonction de choix symétrique et strictement monotone. La méthode d'agrégation G construite par itérations de C n'est pas strictement monotone.*

Preuve Soit π le profil (abc, acb) . D'après le Corollaire 5.2.1, C respecte l'unanimité, donc $C(\pi) = \{a\}$. De plus, C est neutre, donc $C(bc, cb) = \{b, c\}$. Par conséquent, $G(\pi) = a > \{b, c\}$.

Soit π' le profil (bac, acb) . Le profil π' est obtenu à partir de π par une transformation favorable à b dans la préférence du premier votant. L'option a est unanimement classée avant c , donc c n'est pas dans $C(\pi')$ en raison de la proposition précédente. Supposons que b soit dans $C(\pi')$. Alors $C(bac, abc) = \{b\}$ en raison de la monotonie stricte (transformation élémentaire favorable à b dans la préférence du second votant). L'option a n'est pas dans $C(bca, abc)$ (transformation élémentaire défavorable à a dans la préférence du premier votant). Ceci est en contradiction avec le fait que C vérifie l'axiome de symétrie puisque le profil (bca, abc) se déduit de π' par une permutation entre a et b et d'une permutation entre le premier et le second votant.

Nous pouvons donc en conclure que $C(\pi') = \{a\}$ et donc $G(\pi') = a > \{b, c\}$, ce qui prouve que G ne vérifie pas la monotonie stricte sur π . \square

Discussion

Le principal intérêt de ce théorème est qu'il est valable pour une classe générale de fonctions de choix (toutes les fonctions de choix symétriques et strictement monotones). Essayer d'améliorer le théorème nous conduit aux questions suivantes :

- Est-ce que ce théorème peut concerner une classe plus large de fonctions de choix (essayer d'affaiblir l'axiome de symétrie et/ou de monotonie stricte) ?
- Est-ce que la propriété résultante (pas de monotonie stricte) peut être affaiblie ?

L'exemple de la règle de Schwartz (présentée ci-dessous), qui est faiblement monotone, montre que la version stricte de la monotonie est nécessaire pour notre théorème. Le lecteur pourra facilement se convaincre que la procédure d'agrégation obtenue en itérant la règle de Schwartz est faiblement monotone. Ainsi, notre théorème serait faux si l'on remplaçait la monotonie stricte par la monotonie faible. La symétrie est aussi nécessaire comme le prouvent les deux exemples suivants. La règle lexicographique est strictement monotone, neutre mais n'est pas anonyme. La méthode d'agrégation itérée qui lui est associée est strictement monotone. La fonction de choix constante qui sélectionne les options d'après l'ordre lexicographique de leur nom est strictement monotone et anonyme si les noms des options sont tous différents. La méthode d'agrégation itérée qui lui est associée est aussi strictement monotone.

Pour répondre à la seconde question, nous savons déjà, au vu des résultats de [Smith 1973] qu'il existe des fonctions de choix symétriques et strictement monotones dont la procédure d'agrégation associée n'est même pas monotone. Mais le premier exemple cité précédemment nous montre que cette propriété n'est pas vraie en général. À partir de ces considérations, il nous semble difficile d'obtenir un résultat aussi général en utilisant la monotonie faible.

Pour étudier la fréquence avec laquelle les règles positionnelles itératives ne respectent pas la monotonie, nous nous focaliserons sur l'une des plus connues d'entre elles : la fonction de choix de Nanson. Contrairement aux autres règles positionnelles itératives classiques comme la règle de Hare ou la règle de Coombs, la fonction de choix de Nanson possède la propriété intéressante d'être Condorcet. En effet, lorsque la méthode majoritaire est transitive, l'ensemble de choix de Nanson est le même que celui de la méthode majoritaire. Cette propriété est due au lien qui existe entre l'ensemble de choix de Nanson et celui d'une autre fonction de choix classique : la fonction de choix de Schwartz.

La définition de la fonction de choix de Schwartz nécessite un peu de vocabulaire supplémentaire. La partie antisymétrique d'une relation binaire R est l'ensemble des couples (a, b) appartenant à R tels que (b, a) n'appartient pas à R . Une option a est dominée dans R s'il existe $x \in X \setminus \{a\}$ tel que xRa ($A \setminus B$ est l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B). Enfin, la fermeture transitive d'une relation binaire R est une relation binaire F_R telle que $aF_R b$ si et seulement si, il existe $x_1 = a, x_2, \dots, x_k = b$ dans X tels que $x_1Rx_2, x_2Rx_3, \dots, x_{k-1}Rx_k$.

Définition 5.2.6 *La fonction de choix de Schwartz sélectionne les options qui sont non dominées dans la partie antisymétrique de la fermeture transitive de la relation majoritaire.*

Nous pouvons alors énoncer le théorème qui lie les vainqueurs de Nanson à ceux de Schwartz.

Théorème 5.2.2 *L'ensemble de choix de Nanson est inclus dans l'ensemble de choix de Schwartz.*

Preuve Si toutes les options de X sont dans l'ensemble de choix de Schwartz, le théorème est vérifié. Sinon, soit π un profil tel que $S(\pi) \neq X$. Les coefficients de surclassement des options de $S(\pi)$ par rapport aux options de $X \setminus S(\pi)$ sont supérieurs ou égaux à $n/2$. La somme des coefficients de surclassement de toute option de $S(\pi)$ par rapport aux autres options de $S(\pi)$ est égale à $n(|S(\pi)|-1)|S(\pi)|/2$. Ainsi, la somme des coefficients de surclassement d'une des options

de $S(\pi)$ à par rapport aux autres options de $S(\pi)$ est supérieure ou égale à $n(|S(\pi)|-1)/2$. La somme des coefficients de surclassement de cette option est donc supérieure ou égale à $(m-1)n/2$.

Inversement, les coefficients de surclassement des options de $X \setminus S(\pi)$ par rapport aux options de $S(\pi)$ sont inférieurs à $n/2$. Il est de la même manière possible de trouver une option de $X \setminus S(\pi)$ dont la somme des coefficients de surclassement par rapport aux autres options de $X \setminus S(\pi)$ soit inférieure ou égale à $n(|X \setminus S(\pi)|-1)/2$. La somme des coefficients de surclassement de cette option est alors inférieure à $(m-1)n/2$. Ainsi, si toutes les options ne sont pas dans $S(\pi)$, il existe une option de $S(\pi)$ qui a un score de Borda supérieur à une option de $X \setminus S(\pi)$. Les options de $X \setminus S(\pi)$ sont donc éliminées itérativement jusqu'à ce que toutes les options restantes soient dans $S(\pi)$. À la dernière itération, les vainqueurs de Nanson sont donc aussi des vainqueurs de Schwartz. \square

Le lecteur intéressé par d'autres résultats liant les ensembles de choix de différentes fonctions de choix classiques pourra consulter [De Donder et al. à paraître] pour des résultats théoriques ou [Nurmi 1988] pour des résultats expérimentaux.

La fréquence avec laquelle un profil met en défaut l'axiome de monotonie dépend bien sûr du profil considéré. Il existe une catégorie de profils avec laquelle la fonction de choix de Nanson (et plus généralement les fonctions de scorages itérées) ne fait pas bon ménage avec la monotonie : les permutants.

Définition 5.2.7 *Un permutant sur l'ordre strict $x_1x_2\dots x_m$ est un profil formé des m ordres stricts $x_1x_2\dots x_m, x_mx_1\dots x_{m-1}, \dots, x_2x_3\dots x_1$. Chacun des ordres suivant le premier est obtenu à partir de son prédécesseur en rangeant l'option classée dernière à la première place.*

Dans [Fishburn 1981], l'auteur montre à l'aide de ces profils qu'il est possible que le désistement d'une option quelconque renverse complètement l'ordre dans lequel les options sont éliminées par la fonction de choix de Nanson.

Nous montrons un autre résultat surprenant. Il est possible de trouver des profils pour lesquels la plupart des transformations élémentaires favorables à une option quelconque x_i la font sortir de l'ensemble de choix de Nanson.

Définition 5.2.8 *Une fonction de choix D est constante-stable, si pour tout profil C de matrice de surclassement constante et pour tout profil π , $D(\pi \oplus C) = D(\pi)$.*

Lemme 5.2.1 *La fonction de choix de Nanson est constante-stable.*

Preuve Le vainqueur de Nanson est calculé à partir des différences entre les scores de Borda, et donc à partir des différences entre les sommes des coefficients de surclassement des options. Ajouter une constante à tous les coefficients de surclassement ne change pas ces différences. Le résultat de la fonction de choix de Nanson ne change donc pas non plus. \square

Lemme 5.2.2 *Pour un profil ayant une matrice de surclassement égale (à une constante additive près) à celle du permutant sur l'ordre $x_1x_2\dots x_m$, une transformation élémentaire favorable à une option quelconque x_i et défavorable à une option autre que x_{i-1} , si elle est possible, fait sortir x_i de l'ensemble de choix de Nanson.*

5 DES PARADOXES LIÉS À LA MONOTONIE

Preuve Pour un permutant, chaque option occupe une fois et une seule chaque rang. Elles ont donc toutes le même score de Borda et sont par conséquent toutes dans l'ensemble de choix de Nanson. La fonction de choix de Nanson est constante stable, donc l'ensemble de choix est le même pour un profil ayant une matrice de surclassement égale à une constante près. Le raisonnement est fait pour la matrice de surclassement du permutant sur l'ordre $x_1x_2\dots x_{i-1}x_i\dots x_m$.

	x_1	x_2	...	x_k	...	x_{i-1}	x_i	...	x_m
x_1	\	$m-1$...	$m+1-k$...	$m+2-i$	$m+1-i$...	1
x_2	1	\	...	$m+2-k$...	$m+3-i$	$m+2-i$...	2
...	\
x_k	$k-1$	$k-2$...	\	...	$m-i+k+1$	$m-i+k(-1)$...	k
...	\
x_{i-1}	$i-2$	$i-3$...	$i-k-1$...	\	$m-1$...	$i-1$
x_i	$i-1$	$i-2$...	$i-k(+1)$...	1	\	...	i
...	\	...
x_m	$m-1$	$m-2$...	$m-k$...	$m-i+1$	$m-i$...	\

Une transformation élémentaire favorable à x_i et défavorable à une option x_k autre que x_{i-1} , si elle est possible, augmente le coefficient de surclassement a_{ik} d'une unité, diminue a_{ki} de 1 et ne change pas les autres coefficients. Ainsi, la somme des coefficients de surclassement de x_i est $(m(m-1)/2)+1$, celle de x_k est $(m(m-1)/2)-1$ et celle des autres options est $m(m-1)/2$. L'option x_k est donc éliminée à la première itération. Cette élimination fait diminuer la somme des coefficients de surclassement de x_i de $a_{ik}+1$. La somme des coefficients de surclassement de x_{k-1} diminue de $a_{ik}-1$. Cette somme est alors plus grande pour x_{i-1} que pour x_i . Remarquons d'autre part que pour tout $k' \notin \{k, i-1, i\}$, tous les coefficients de surclassement $a_{i-1k'}$ de x_{i-1} sont plus petits que les coefficients correspondants $a_{ik'}$ de x_i . De plus, $a_{i-1i} > a_{ii-1}$. Ainsi, quelles que soient les options éliminées, la somme des coefficients de surclassement de x_{i-1} reste strictement supérieure à celle de x_i . L'option x_{i-1} est donc forcément éliminée après x_i et x_i ne peut pas être dans l'ensemble de choix de Nanson. \square

Théorème 5.2.1 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un profil sur $m > 4$ options tel que pour tout x de X , une transformation élémentaire favorable à x dans la préférence d'un critère choisi au hasard uniforme ait une probabilité $1-\varepsilon$ de la faire sortir de l'ensemble de choix de Nanson.*

Preuve Supposons que m soit pair et strictement supérieur à deux (le raisonnement est le même avec m impair strictement supérieur à trois). Considérons le profil π composé du permutant P sur l'ordre $x_1x_2\dots x_m$ et de $k = \left\lceil \frac{m(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} \right\rceil$ profils I formés des deux votes $x_1x_3\dots x_kx_{k+2}\dots x_{m-1}x_2x_4\dots x_m$ et $x_m\dots x_4x_2x_{m-1}\dots x_{k+2}x_k\dots x_3x_1$ ($\lceil \rceil$ désigne la partie entière supérieure). La matrice de surclassement d'un profil formé de deux ordres inverses est constante. Ainsi, la matrice de surclassement des k profils I est constante. Par constante-stabilité, l'ensemble de choix de Nanson de π est le même que celui de P . En tirant au hasard uniforme un ordre strict dans le profil π , la probabilité pour qu'il n'appartienne pas à P est supérieure à $1-\varepsilon$. Dans ce cas, quelle que soit l'option x_i choisie, une transformation élémentaire favorable à x_i se

5 DES PARADOXES LIÉS À LA MONOTONIE

fait en défaveur d'une option autre que x_{i-1} . D'après le Lemme 5.2.2, l'option x_i sort alors de l'ensemble de choix. \square

Remarquons que, ici encore, pour un nombre d'options limité, le résultat est un peu particulier en raison de la proposition suivante.

Proposition 5.2.2 *Lorsque le nombre d'options est limité à 3 et que le nombre de critères est impair, la monotonie et la monotonie stricte sont équivalentes pour la fonction de choix de Nanson.*

Preuve S'il n'y a qu'une seule option dans l'ensemble de choix, la monotonie stricte est infirmée si et seulement si la monotonie l'est. Pour n impair, il ne peut pas y avoir deux options dans l'ensemble de choix de Nanson. En effet, ces options devraient avoir le même score de Borda dans le sous-profil restreint à elles seules, ce qui est impossible. Lorsque les trois options a , b et c sont dans l'ensemble de choix de Nanson, elles ont toutes le même score de Borda. Une transformation élémentaire, par exemple favorable à a et défavorable à b , augmente le score de Borda de a , diminue celui de b et ne change pas celui de c . Ainsi, à la première itération, b est éliminée. Alors si a est plus souvent avant c que l'inverse, a reste seule dans l'ensemble de choix de Nanson et la monotonie et la monotonie stricte sont respectées. Si a est moins souvent avant c que l'inverse, a sort de l'ensemble de choix de Nanson et les deux monotonies sont infirmées. \square

5.2.1.2 Résultats expérimentaux

Le protocole expérimental est le suivant :

- tirer un profil selon la méthode expliquée au paragraphe 4.2.1 ;
- choisir aléatoirement un des vainqueurs de Nanson;
- s'il était premier pour tous les critères, on dira que, pour ce cas, la monotonie n'est pas infirmée ;
sinon, on le fait avancer d'une place dans la préférence d'un critère parmi ceux qui ne le classaient pas premier ;
 - si ce vainqueur n'est plus dans l'ensemble de choix du nouveau profil, la monotonie est infirmée ;
 - si ce vainqueur n'est pas l'unique vainqueur de Nanson du nouveau profil, la monotonie stricte est infirmée.

Quels que soient les nombres de critères (3, 5, 7, 11, 21, 51, 101, ou 251), et d'options (3, 4, 5, 6, 10, ou 20), nous n'avons jamais trouvé plus de 1,3% de profils ne vérifiant pas la monotonie faible. Ainsi, bien que la fonction de choix de Nanson ne soit pas monotone, les profils mettant en défaut cette propriété sont rares.

La Figure 5.2 (à la section 5.2.2.2) présente les valeurs numériques concernant la monotonie stricte pour un nombre de critères impair. Nous avons effectué des tirages dans des conditions similaires avec un nombre pair de critères (4, 6, 10, 20, 50, 100 et 250). Les résultats sont dans ce cas très différents. La monotonie est infirmée encore moins souvent (pour moins de 0.6% des profils). Par contre, les profils mettant en défaut la monotonie stricte sont très fréquents

lorsque le nombre de critères est petit par rapport au nombre d'options. Jusqu'à 69% des profils (pour 20 options et 4 critères) ont mis en défaut la monotonie stricte. Il semble cependant que lorsque le nombre de votants augmente, cette différence tend à s'estomper.

5.2.2 Pour la prudence

Il est assez facile de voir que la fonction de choix prudente respecte l'axiome de monotonie, mais qu'elle ne respecte pas l'axiome de monotonie stricte. Une transformation élémentaire favorable à une option x et défavorable à y a pour effet d'augmenter a_{xy} d'une unité et de diminuer a_{yx} d'une unité. Si x était une option prudente, son plus petit coefficient de surclassement ne pouvant qu'augmenter et les autres coefficients que diminuer, elle restera prudente. Nous avons vu cependant grâce au profil composé des deux ordres stricts $a > b > c$ et $c > b > a$, que la prudence ne respecte pas la monotonie stricte.

Nous avons donc cherché si la monotonie stricte était souvent violée par la prudence. Ces résultats sont comparés à ceux obtenus pour la fonction de choix de Nanson.

5.2.2.1 Résultat théorique

Comme souvent, la limitation du nombre d'options et/ou de critères conduit à des résultats particuliers. Ainsi nous pouvons faire la remarque suivante dans le cas particulier de trois options et trois critères.

Remarque 5.1 *Dans le cas où seuls trois options et trois critères sont en présence, la fonction de choix prudente est strictement monotone.*

Preuve Nous savons que la fonction de choix prudente est monotone. Pour mettre en défaut l'axiome de monotonie stricte, il faut donc trouver un profil π tel que plusieurs options sont dans l'ensemble de choix et qu'une transformation élémentaire favorable à l'une d'entre elles ne la laisse pas seule dans l'ensemble de choix.

Soit a une des options de l'ensemble de choix prudent. Remarquons tout d'abord que dans la matrice de surclassement de π , le maximin est égal à 1. En effet, ce maximin ne peut être égal à 0 sans quoi, une option, par exemple b est unanimement préférée à a . Or si le maximin est égal à 0, c est unanimement préférée à b et a est unanimement préférée à c ce qui est impossible pour un profil composé de trois ordres totaux. Si le maximin est supérieur ou égal à 2, alors, $a_{ba} \leq 1$ et $a_{ca} \leq 1$, donc b et c ne peuvent pas être dans l'ensemble de choix prudent.

Supposons donc que ce maximin égal à 1 correspond à a_{ab} . L'option b n'est pas seule vainqueur prudente, donc $a_{bc} \leq 1$. Ainsi, $a_{cb} \geq 2$, mais comme c n'est pas seule vainqueur prudente, $a_{ca} \leq 1$. Si $a_{ca} = 0$, a est unanimement préférée à c , et b qui est préférée deux fois à a ($a_{ab} = 1$) est aussi préférée deux fois à c ce qui est en contradiction avec $a_{bc} \leq 1$. Donc $a_{ca} = 1$. De la même façon, il est impossible que $a_{bc} = 0$ sans quoi c est préférée unanimement à b et donc au moins deux fois à a .

Le profil π a donc obligatoirement la matrice de surclassement suivante (à une permutation sur les options près) :

5 DES PARADOXES LIÉS À LA MONOTONIE

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	/	1	2
<i>b</i>	2	/	1
<i>c</i>	1	2	/

Cette matrice de surclassement correspond au profil $\{acb, bac, cba\}$ à une permutation sur les critères près. Une transformation élémentaire favorable à *a* laisse alors *a* seule dans l'ensemble de choix prudent. La monotonie stricte ne peut donc pas être mise en défaut. \square

5.2.2.2 Résultats expérimentaux

La figure suivante donne les pourcentages de profils tels qu'une transformation élémentaire favorable à une des options de l'ensemble de choix (choisie au hasard) ne l'a pas laissée seule dans l'ensemble de choix. Les deux fonctions étudiées sont la fonction de choix prudente et la fonction de choix de Nanson.

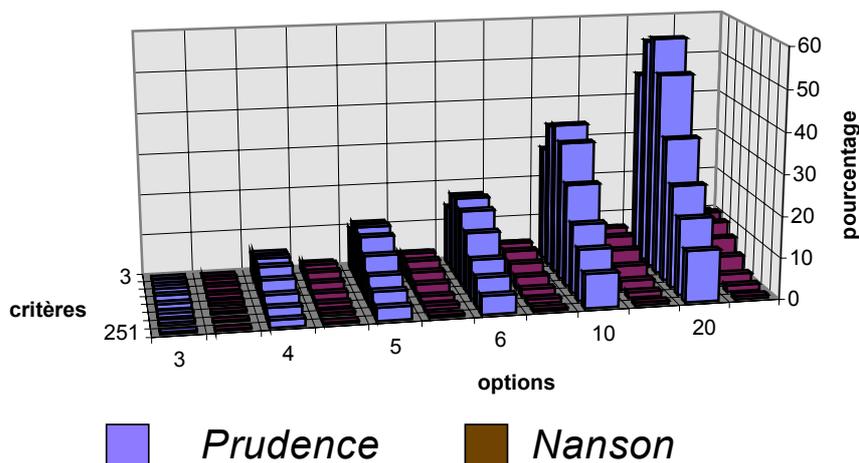


Figure 5.2 : Pourcentages de profils infirmant la monotonie stricte

Ces résultats numériques mettent à jour un nouveau paradoxe lié à la monotonie. Contrairement à la fonction de choix prudente, la fonction de choix de Nanson ne respecte pas l'axiome de monotonie. Il était donc naturel de s'attendre à ce que la monotonie stricte soit plus souvent infirmée par la fonction de choix de Nanson que par la fonction de choix prudente. Les observations que nous avons faites sur des profils aléatoires indiquent le contraire. La monotonie stricte est beaucoup plus souvent infirmée par la fonction de choix prudente que par la fonction de choix de Nanson.

Nous avons complété ces expérimentations en examinant le pourcentage de profils ayant plusieurs vainqueurs prudents. En effet, une condition pour que la fonction de choix prudente infirme la monotonie stricte est qu'il y ait plusieurs options dans l'ensemble de choix prudent. La différence entre le pourcentage de profils ayant plusieurs options prudentes et le pourcentage de profils infirmant la monotonie est toujours inférieur à 7%.

5 DES PARADOXES LIÉS À LA MONOTONIE

Ainsi, examinons par exemple le cas de 10 options et 21 critères. Pour 25% des profils, la monotonie stricte est infirmée. Il y a alors 28% des profils qui ont plusieurs options prudentes. Ainsi, dans 89% des profils ayant plusieurs options prudentes, une transformation élémentaire favorable à l'une d'entre elles ne la laisse pas seule dans l'ensemble de choix prudent.

Remarquons, pour relativiser ces résultats, que le nombre de profils ayant plusieurs options prudentes est assez important. La condition de culture impartiale sous laquelle nous travaillons n'est sans doute pas indifférente à cela. Nous avons vu en effet que sous cette condition, les profils correspondant à des situations dans lesquelles tous les ordres stricts apparaissent le même nombre de fois sont plus fréquents. Il est donc plus probable, dans ce cas, qu'il y ait plusieurs options prudentes. Les résultats numériques auraient sans doute été différents sous une hypothèse probabiliste différente.

L'axiome de monotonie stricte est généralement jugé comme un axiome d'instabilité. Nous avons vu en effet que si plusieurs options dont a sont dans l'ensemble de choix d'une fonction strictement monotone, il suffit qu'un seul des critères (même parmi un million) fasse une transformation élémentaire favorable à a pour que toutes les autres options sortent de l'ensemble de choix. Nous avons donc cherché à mesurer la fréquence de cette instabilité, toujours à l'aide de simulation. Le protocole expérimental était le suivant : tirer un profil aléatoire selon le protocole usuel. Choisir une option au hasard uniforme et faire une transformation élémentaire favorable à celle-ci (sauf si elle est toujours classée première). La Figure 5.3 indique le pourcentage de profils pour lesquels l'ensemble de choix a changé, avec la fonction de choix prudente et avec la fonction de choix de Borda.

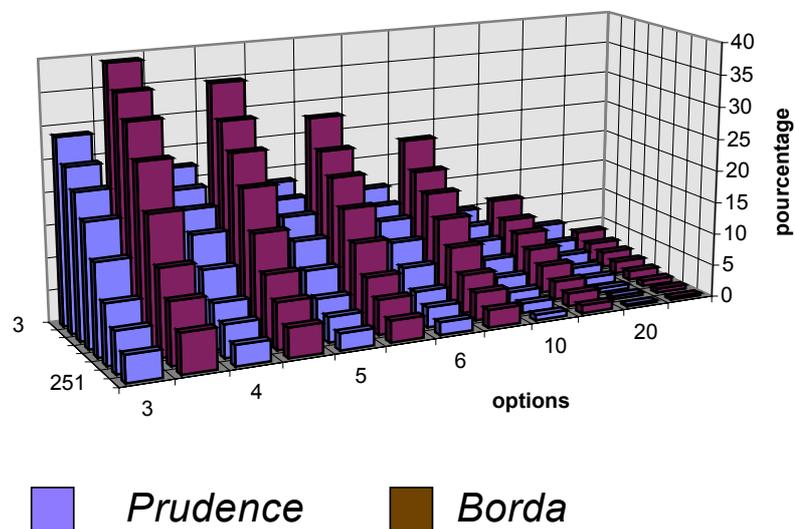


Figure 5.3 : Pourcentages de profils instables

L'instabilité de la fonction de choix par rapport à l'inversion de la préférence d'un critère sur un couple d'options est donc un peu plus grande pour la fonction de choix de Borda que pour la fonction de choix prudente. Cependant, cette instabilité devient très faible lorsque le nombre de critères augmente.

5 DES PARADOXES LIÉS À LA MONOTONIE

L'axiome de monotonie stricte, même s'il peut entraîner des comportements surprenants pour certains profils ne doit donc pas irrémédiablement être mis au placard. Les profils entraînant une instabilité ne sont en effet pas forcément très nombreux.

6. Un paradoxe lié à la robustesse

Il est souvent admis qu'en raison de ses propriétés cardinales, la fonction de choix de Borda est moins robuste par rapport à une variation du poids des critères que la fonction de choix prudente. Pour le vérifier, il est nécessaire de définir plus précisément ce qui est entendu par le mot « robuste ».

Pour la fonction de choix de Borda, puis pour la fonction de choix prudente, nous décrirons tout d'abord les modifications possibles de leurs ensembles de choix à la suite de la variation du poids d'un seul critère. Nous calculerons les bornes de l'intervalle à l'intérieur duquel une telle variation laisse l'ensemble de choix inchangé. Nous en profiterons pour examiner le cas où plusieurs poids varient simultanément.

Nous proposerons alors une évaluation de la stabilité locale sous forme d'indices inspirés par ces considérations. Ces indices permettront la comparaison, pour chaque fonction de choix, de la stabilité des résultats pour deux profils différents. Nous nous attaquerons ensuite au problème plus difficile de la robustesse globale. Nous utiliserons les valeurs des indices pour des classes de profils aléatoires, afin de comparer globalement la robustesse des deux fonctions de choix. Nous verrons que les résultats obtenus peuvent être surprenants.

6.1 Généralités sur la robustesse

Un des souhaits souvent formulés par les décideurs vis-à-vis de la méthode multicritère qu'ils utilisent est d'avoir une idée de la robustesse du résultat. C'est la raison pour laquelle l'étude de la sensibilité des méthodes multicritères fait partie des grands axes de recherche du domaine [Dyer et al. 1992], [Roy et Vanderpooten 1996], [Roy 1997]. Cette demande traduit la volonté de savoir dans quelle mesure une petite variation des données (due par exemple à une erreur de mesure ou d'estimation) risque d'affecter le résultat donné par la méthode.

Parmi les variations possibles des données, notons entre autres l'ajout ou le retrait d'une option ou d'un critère, les changements des préférences des critères, de l'intensité de ces préférences, ou encore des poids attribués aux critères. C'est sur ce dernier type de variation que nous avons choisi de focaliser notre attention dans ce chapitre. Plusieurs auteurs [Arrow et Raynaud 1986] ont en effet remarqué que les évaluations des poids faites par les décideurs sont souvent très fluctuantes et contiennent une large part d'arbitraire.

De nombreux auteurs ont étudié l'impact de la variation d'un profil sur l'ensemble de choix associé. Le lecteur peut se référer par exemple à [Stewart 1996] (variations sur les intensités de préférences, omission de critères dans le cas de méthodes additives), [Bana e Costa 1988] (variations des poids dans le cas de trois critères), [Mareschal 1988] (sensibilité par rapport au poids d'un critère ou d'un ensemble de critères dans le cas de méthodes additives), ou encore [Gal et Wolf 1986] (revue de la littérature concernant les différentes variations possibles dans le cas d'une maximisation de vecteur).

L'objectif de ce travail sur la robustesse est double. Il s'agit tout d'abord de vérifier si, comme cela est souvent admis, la robustesse de la fonction de choix prudente par rapport à une variation du poids des critères est globalement plus grande que celle de la fonction de choix de Borda (dans l'esprit de l'article de Pérez et Barba-Romero (1995)). Nous en profiterons d'autre

part pour fournir au décideur une mesure de la stabilité locale relative à une méthode et un profil donné. Nous distinguerons donc la stabilité partielle (variation du poids d'un seul critère), la stabilité locale (variation du poids, un profil particulier étant donné, d'un ensemble de critères) et la robustesse globale (mesure de robustesse indépendante des profils). Une partie de ce travail est présentée dans [Durand et Trentesaux à paraître].

À chaque critère V_k est associé un poids w_k appartenant à l'ensemble \mathbb{R}^+ des réels positifs. Les bornes inférieures et supérieures pour ce poids sont notées $W_{k\text{inf}}$ et $W_{k\text{sup}}$. Ces critères expriment les préférences sur les options sous forme d'ordres stricts. Un profil π est composé de n ordres totaux sur l'ensemble des options et de l'ensemble des poids associés à chaque critère, les bornes sur ces poids étant connues.

Notons que pour les fonctions de choix que nous étudions, il est possible de transformer tout profil où les préférences des critères sont des préordres en un profil de mêmes ensembles de choix uniquement composé d'ordres totaux. Il suffit pour cela de remplacer chaque critère V_k dont la préférence est un préordre PO par deux critères V_{k1} et V_{k2} de poids $w_{k1} = w_{k2} = w_k/2$ dont les préférences sont les ordres stricts suivants : la préférence de V_{k1} est un ordre strict O_1 construit aléatoirement en respectant les préférences strictes du préordre de départ. La préférence de V_{k2} est l'ordre strict obtenu à partir de O_1 en inversant toutes les préférences entre les options qui étaient équivalentes dans PO . Remarquons cependant qu'en effectuant cette transformation, une variation du poids w_k correspond à une variation simultanée des poids w_{k1} et w_{k2} .

6.2 Des intervalles de stabilité...

L'indice de robustesse global que nous avons choisi nécessite le calcul d'intervalles de stabilité. Nous donnerons donc les valeurs des bornes supérieures et inférieures pour la variation du poids d'un, puis de plusieurs critères, telle que l'ensemble de choix ne change pas. Ces calculs seront faits tout d'abord pour les méthodes de scorage (en considérant le cas de la fonction de choix de Borda), puis pour la fonction de choix prudente.

6.2.1 Pour les méthodes de scorage

Les calculs qui suivent sont réalisés pour la fonction de choix de Borda. Il est très facile de les généraliser à n'importe quelle autre méthode de scorage. Nous calculons la borne supérieure à la variation du poids d'un critère pour que l'ensemble de choix ne change pas. La borne inférieure est obtenue de la même façon. En raison de sa fréquente utilisation, nous donnons aussi les valeurs de ces bornes pour la fonction de choix obtenue en utilisant la méthode Prométhée II [Brans et Vinke 1985]. Nous examinons enfin le cas où les poids de plusieurs critères peuvent varier simultanément.

6.2.1.1 Lorsqu'un seul poids varie

Nous calculons dans ce chapitre les bornes de l'intervalle de stabilité par rapport à la variation du poids d'un critère.

Notons B_p le score de Borda de l'option x_p dans le profil de départ π . Notons b_{pk} le score de Borda de l'option x_{pk} dans le profil constitué du seul critère V_k affecté d'un poids unitaire. Remarquons tout d'abord que le score de Borda de chaque option augmente linéairement en fonction du poids du critère V_k . Si δ est la variation de poids du critère V_k , le score de Borda de l'option x_p après cette variation est $B_p + \delta b_{pk}$. L'étude faite ici est très proche de celle réalisée par Mareschal (1988).

Borne supérieure (w_k augmente)

Soit x_i une des options qui est dans l'ensemble de choix de départ. Il y a deux possibilités pour que l'ensemble de choix change.

- Soit une option x_p qui n'était pas vainqueur de Borda le devient. Dans ce cas, b_{pk} doit être strictement supérieur à b_{ik} . Les scores de x_p et x_i sont alors égaux pour $\delta = (B_p - B_i) / (b_{ik} - b_{pk})$. Il suffit donc de calculer pour quelle option x_p cette valeur positive de δ est minimale et de vérifier que le poids de V_k reste bien inférieur à W_{ksup} .
- Soit il y avait plusieurs options dans l'ensemble de choix de départ et une d'entre elles en sort. Il existe alors une option x_i' telle que $B_i = B_i'$ et $b_{ik}' \neq b_{ik}$. Alors, dès que le poids de V_k augmente, une des deux options sort de l'ensemble de choix. Pour simplifier les formules, dans toute la suite, ε désignera un réel positif arbitrairement petit, $+\infty$ un réel arbitrairement grand. Nous poserons $\min\{\emptyset\} = +\infty$. En pratique, il est possible de considérer que ε est inférieur à la précision machine.

Théorème 6.2.1 : *La valeur maximale $w_{k-B-max}$ du poids du critère V_k pour laquelle la valeur de la fonction de choix de Borda ne change pas est donnée par la formule suivante :*

$$w_{k-B-max} = \begin{cases} w_k + \min \left(W_{ksup} - w_k, \left(\min_{\{p \mid b_{pk} > b_{ik} \text{ et } B_p < B_i\}} \frac{B_p - B_i}{b_{ik} - b_{pk}} \right) - \varepsilon \right) & \text{si } \{p \mid b_{pk} > b_{ik} \text{ et } B_p < B_i\} \neq \emptyset \\ w_k & \text{si } \exists p \mid B_p = B_i \text{ et } b_{pk} \neq b_{ik} \\ W_{ksup} & \text{sinon} \end{cases}$$

Borne inférieure (w_k diminue)

Nous obtenons la borne inférieure de façon analogue :

Théorème 6.2.2 : *La valeur minimale $w_{k-B-min}$ du poids du critère V_k pour laquelle la valeur de la fonction de choix de Borda ne change pas est donnée par la formule suivante :*

$$w_{k-B-min} = \begin{cases} w_k + \max \left(W_{kinf} - w_k, \left(\max_{\{p \mid b_{pk} < b_{ik} \text{ et } B_p < B_i\}} \frac{B_p - B_i}{b_{ik} - b_{pk}} \right) + \varepsilon \right) & \text{si } \{p \mid b_{pk} < b_{ik} \text{ et } B_p < B_i\} \neq \emptyset \\ w_k & \text{si } \exists p \mid B_p = B_i \text{ et } b_{pk} \neq b_{ik} \\ W_{kinf} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour Prométhée II

La méthode Prométhée présentée dans [Brans et Vincke 1985] est très utilisée en pratique. Marchant (1996b) a de plus montré qu'elle généralise la méthode de Borda aux relations valuées (pour ces relations, les intensités de préférences entre paires d'options ne sont plus 0 ou 1 mais comprises entre 0 et 1). C'est pour ces deux raisons que nous présentons ici les valeurs des bornes de l'intervalle de stabilité pour cette fonction de choix.

Pour la fonction de choix obtenue en utilisant la méthode Prométhée II, la « matrice de surclassement » n'est plus obtenue à partir d'ordres stricts, mais à partir de critères ayant des préférences linéaires (critères de type III dans la classification de Brans et Vinke (1985)). Nous nous sommes limités à ce type de critères, mais l'extension des formules aux autres types de critères est très simple. L'intensité de la préférence du critère V_k entre les options x_i et x_j peut être, par exemple, donnée par la formule suivante :

$$P_k(x_i, x_j) = \begin{cases} \frac{f_k(x_i) - f_k(x_j)}{\max_{\{(s,t) \in [1..m]^2\}} (f_k(x_s) - f_k(x_t))} & \text{si } f_k(x_i) > f_k(x_j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction f_k est à valeurs réelles et donne l'évaluation des différentes options par rapport au critère V_k . La Figure 6.1 donne l'interprétation graphique de cette intensité de préférence.

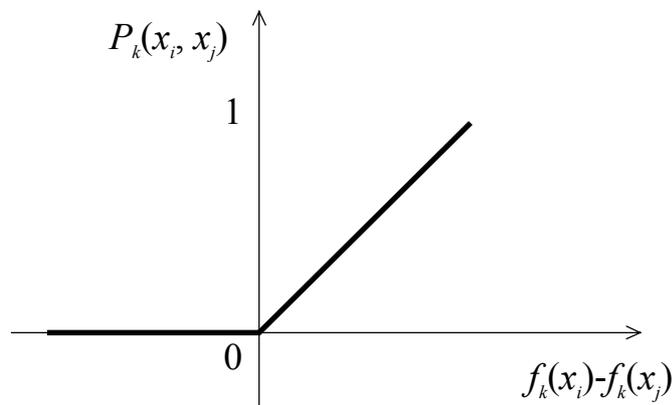


Figure 6.1 : Modélisation de l'intensité de préférence

6 UN PARADOXE LIÉ À LA ROBUSTESSE

Les coefficients de la matrice de surclassement sont alors les sommes pondérées des intensités des préférences de chaque critère. Le flot entrant d'une option x_i est dans ce cas la somme des coefficients de surclassement a_{ij} de x_i par rapport aux autres options. Le flot sortant est la somme des coefficients de surclassement a_{ji} des autres options par rapport à x_i . Les options de l'ensemble de choix sont celles pour lesquelles le flot entrant moins le flot sortant est maximum. Les formules donnant les bornes des intervalles de stabilité sont analogues à celles obtenues pour la fonction de choix de Borda. Soit ϕ_p le flot net (flot entrant moins flot sortant) de l'option x_p dans le profil de départ et φ_{pk} le flot net de l'option x_p dans le profil constitué du seul critère V_k affecté d'un poids unitaire. Nous avons alors

$$w_{k-Prométhée-max} = \begin{cases} w_k + \min \left(W_{ks} - w_k, \min_{\{p \mid \varphi_{pk} > \varphi_{ik} \text{ et } \Phi_p < \Phi_i\}} \frac{\Phi_p - \Phi_i}{\varphi_{ik} - \varphi_{pk}} \right) & \text{si } \{p \mid \varphi_{pk} > \varphi_{ik} \text{ et } \Phi_p < \Phi_i\} \neq \emptyset \\ w_k & \text{si } \exists p \mid \Phi_p = \Phi_i \text{ et } \varphi_{pk} \neq \varphi_{ik} \\ W_{ks} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$w_{k-Prométhée-min} = \begin{cases} w_k + \max \left(W_{ki} - w_k, \max_{\{p \mid \varphi_{pk} < \varphi_{ik} \text{ et } \Phi_p < \Phi_i\}} \frac{\Phi_p - \Phi_i}{\varphi_{ik} - \varphi_{pk}} \right) & \text{si } \{p \mid \varphi_{pk} < \varphi_{ik} \text{ et } \Phi_p < \Phi_i\} \neq \emptyset \\ w_k & \text{si } \exists p \mid \Phi_p = \Phi_i \text{ et } \varphi_{pk} \neq \varphi_{ik} \\ W_{ki} & \text{sinon} \end{cases}$$

6.2.1.2 Lorsque plusieurs poids varient

Le cas où les poids de plusieurs critères varient indépendamment est assez difficile à étudier comme c'est généralement le cas dans les études de sensibilité (voir par exemple les remarques de French (1992), Roy et Vanderpooten (1996) ou de Roy (1997)). Ceci revient, par rapport au cas où un seul poids varie, à étudier la stabilité non plus parallèlement à un des axes, mais selon un vecteur $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ quelconque dans l'espace des poids. La Figure 6.2 présente quelques exemples de directions dans le cas de deux critères.

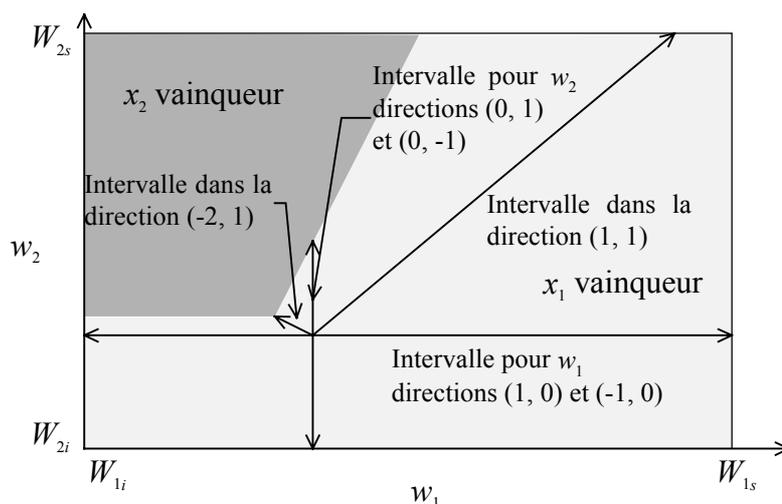


Figure 6.2 : Étude de stabilité dans différentes directions

Ce cas est proche de celui étudié en détails par Mareschal (1988) pour les fonctions additives et donc en particulier pour la fonction de choix de Borda. Mareschal fait varier le poids d'un sous-ensemble S de critères, les rapports entre les poids des critères de S devant rester constants. Ceci revient, dans notre contexte, à étudier la stabilité selon le vecteur V tel que $v_i = w_i$ si C_i appartient à S et $v_i = 0$ sinon. Les bornes des intervalles de stabilité ressemblent alors beaucoup à celles trouvées dans le cas où un seul poids varie. Il suffit en effet d'ajouter ou d'ôter au score de chaque option non plus la portion due au seul critère V_k mais la portion due au sous-ensemble de critères. Nous obtenons ainsi des bornes sur la somme des poids du sous-ensemble de critères qui se traduisent facilement par des bornes sur chacun des poids (ceux-ci devant rester proportionnels). Nous verrons dans la suite que les bornes obtenues ainsi ne sont pas très intéressantes par rapport à l'utilisation que nous voulons en faire (rappelons que notre but initial est de les comparer avec celles obtenues pour la fonction de choix prudente).

Une autre possibilité est de faire varier plusieurs poids indépendamment. Dans ce cas, l'analyse de robustesse devient beaucoup plus ardue. L'approche que nous proposons ici n'est pertinente pour le décideur que lorsqu'un petit nombre (deux ou trois) de poids peuvent varier simultanément. Tous les calculs restent valables lorsque le nombre de poids variables est plus grand. Cependant, dans ce cas, l'interprétation est beaucoup moins claire pour le décideur. La méthode proposée (utilisant un polyèdre dans l'espace des poids) ressemble à celle utilisée dans [Wolters et Mareschal 1995].

Supposons donc que le décideur veuille étudier l'influence sur sa décision de la variation simultanée du poids de deux critères V_1 et V_2 . Soient w_1 et w_2 les poids de ces critères. Le score de Borda de l'option x_i est alors en gardant les notations précédentes : $B_i + b_{i1}w_1 + b_{i2}w_2$. Considérons le polyèdre $P = \{X = (B, w_1, w_2) \mid \forall i, B \geq B_i + b_{i1}w_1 + b_{i2}w_2\}$. La première coordonnée donne pour chaque valeur de (w_1, w_2) le score de Borda du profil correspondant. Chaque facette correspond à un ensemble de profils pour lesquels une option x_i est vainqueur. Il suffit donc de déterminer les sommets et éventuellement les rayons extrêmes correspondant à cette facette et de les projeter dans l'hyperplan des variables w_1 et w_2 pour obtenir une représentation graphique du domaine de stabilité du profil de départ. En considérant par exemple le profil suivant : $V_1 : x_3 > x_1 > x_2 > x_4$; $V_2 : x_3 > x_2 > x_4 > x_1$; $V_3 : x_1 > x_3 > x_4 > x_2$; $V_4 : x_1 > x_2 > x_3 >$

6 UN PARADOXE LIÉ À LA ROBUSTESSE

x_4 ; $V_5 : x_2 > x_1 > x_3 > x_4$; $V_6 : x_4 > x_2 > x_1 > x_3$; $V_7 : x_4 > x_2 > x_3 > x_1$ dans lequel les poids (20, 10, 10, 10, 10) sont respectivement affectés aux critères V_3, V_4, V_5, V_6 et V_7 et dans lequel nous faisons varier les poids de V_1 et V_2 entre 0 et 40. Nous obtenons les ensembles de choix de la Figure 6.3.

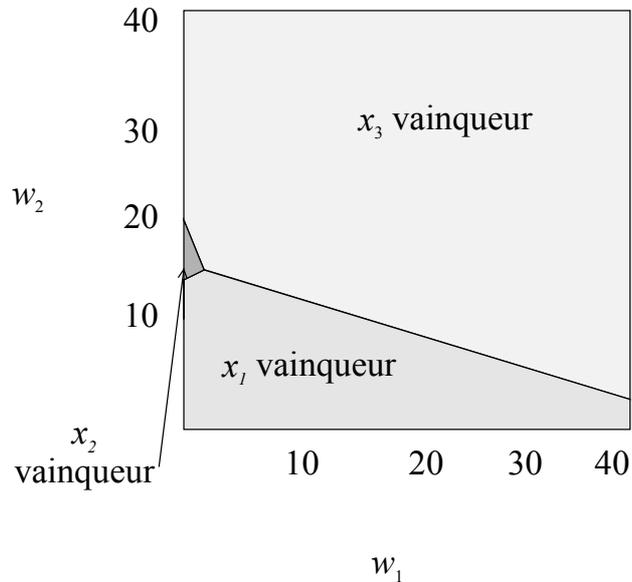


Figure 6.3 : Ensembles de choix pour Borda

C'est pour visualiser ce domaine que la restriction sur le nombre de poids variables intervient. En effet, la visualisation d'un volume de dimension supérieure ou égale à quatre semble peu utile au décideur. Remarquons que dans le cas d'un problème à trois critères, il est possible de représenter la sensibilité d'une méthode homogène de façon élégante dans le plan [Bana e Costa 1988]. Cette représentation n'est cependant plus possible même lorsque les poids de seulement trois critères parmi les n ($n > 3$) varient.

Les considérations techniques qui suivent sont destinées au lecteur intéressé par la mise en œuvre pratique des remarques précédentes. Pour visualiser les différents ensembles de choix, il est nécessaire de disposer d'un programme permettant de trouver les sommets et les rayons d'un polyèdre à partir de ses facettes¹. Disposant des sommets et rayons du polyèdre P décrit plus haut, nous devons alors savoir lesquels correspondent à une facette donnée (l'énumération directe d'un ensemble de sommets et de rayons n'est pas d'une grande utilité pour le décideur). À partir d'un vecteur de poids donné, nous calculons tout d'abord l'option x_i vainqueur de Borda. Nous en déduisons les sommets et les rayons extrêmes qui appartiennent à la facette correspondante. Il ne reste plus qu'à déterminer l'enveloppe convexe de ces sommets et à faire correspondre les éventuels rayons extrêmes à un des sommets. Nous obtenons alors une représentation graphique des ensembles de choix recherchés semblable à celle présentée à la Figure 6.3.

¹ Nous avons utilisé le programme « Irs » développé par Avis (<ftp://mutt.cs.mcgill.ca/pub/C/Irs.html>)

6.2.2 Pour la prudence

L'ensemble de choix prudent est composé des options x_i pour lesquelles le plus petit coefficient de surclassement a_{ij} de la ligne i est le plus grand possible. Rappelons que ce coefficient est appelé le maximin de la matrice et sa valeur est notée Mm .

L'analyse de stabilité que nous allons faire maintenant détermine l'influence d'une variation du poids d'un critère sur le résultat. Nous calculerons donc dans quel intervalle de stabilité le poids d'un critère peut varier sans que le résultat de la fonction de choix prudente change. Ceci revient, à partir d'un profil donné, à augmenter ou diminuer le poids d'un critère sans que le(s) maximin(s) ne change(nt) de ligne.

Le but des démonstrations qui suivent est d'aboutir à des formules faciles à programmer. Il est sans doute possible de trouver des démonstrations plus élégantes d'un point de vue mathématique, mais la mise en œuvre informatique est alors plus délicate. C'est donc dans l'optique de faciliter la tâche aux personnes désirant programmer les indices de robustesse que les démonstrations suivantes ont été rédigées.

6.2.2.1 Lorsqu'un seul poids varie

Nous avons défini la règle de prudence à partir des positions des maximins de la matrice de surclassement. Il est donc naturel d'étudier comment ces positions évoluent lorsque le poids d'un critère varie.

Supposons que l'on fasse varier le poids du critère V_k . Soit $C = (c_{ij})$ la matrice de surclassement associée au seul critère V_k affecté d'un poids unitaire ($c_{ij} = 1$ si V_k range l'option x_i avant x_j et 0 sinon). Supposons alors que, pour le profil de départ π dans lequel le poids du critère V_k est w_k , le maximin de la matrice de surclassement se trouve atteint sur les lignes de l'ensemble $I = \{i_1, i_2, \dots, i_h\}$. Les options $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_h}$ sont donc dans l'ensemble de choix prudent. Pour $i \in I$, $MM(i)$ désigne l'ensemble des colonnes j telles que $a_{ij} = Mm$.

Remarquons tout d'abord que nous pouvons classer les éventuels changements de places des maximins dans la matrice de surclassement en cinq catégories :

- Cas 0 : les maximins ne changent pas de place. Dans ce cas, c'est la borne sur le poids qui limitera la variation.
- Cas 1 : un nouveau maximin apparaît sur une ligne $j \notin I$. Alors, l'ensemble de choix prudent change.
- Cas 1' : tous les maximins d'une ligne $i \in I$ disparaissent. Ici encore, l'ensemble de choix prudent change.
- Cas 2 : un ou plusieurs maximins apparaissent sur des lignes de I et nous ne sommes pas dans le Cas 1 (l'ensemble de choix prudent ne change pas).
- Cas 2' : un ou plusieurs maximins disparaissent sur des lignes de I et nous ne sommes pas dans le Cas 1' (l'ensemble de choix prudent ne change pas).

La plus grande variation de w_k telle que l'ensemble de choix ne change pas est donc le minimum de :

- La plus grande variation (0) telle que le poids soit encore admissible.
- La plus grande variation (1) telle qu'il n'y ait pas eu de changement de types Cas 1 ou Cas 1' et sans qu'il y ait eu d'autre changement de maximins (de types Cas 2 ou Cas 2').

- La plus grande variation (2) telle qu'il n'y ait pas eu de changement de types Cas 1 ou Cas 1' après un ou plusieurs changements (Cas 2 ou Cas 2') de maximins sans modification de l'ensemble de choix.

Borne supérieure

La valeur de la variation (0) est bien sûr $W_{ksup} - w_k$.

Calcul de la valeur de la variation (1)

Si aucun des maximins de départ ne correspond à un coefficient d'indice (i, j) tel que $c_{ij} = 0$, tous les maximins augmentent en même temps que w_k et restent les plus grands des minima. Dans ce cas, il n'y a pas de changement de l'ensemble de choix sans changement préalable des maximins.

Sinon, il y a deux possibilités : soit une option sort de l'ensemble de choix, soit une nouvelle option entre dans l'ensemble de choix.

Pour la première possibilité, il y a plusieurs maximins au départ et une option sort de l'ensemble de choix (Cas 1'). Le maximin qui va disparaître doit correspondre à un coefficient d'indice (i_1, j) tel que $c_{i_1j} = 0$ (sinon, nous pouvons considérer que nous sommes dans le Cas 2). Pour que a_{i_1j} devienne plus petit que l'un des coefficients a_{i_2k} correspondant à un autre maximin, nous devons avoir $c_{i_2k} = 1$ pour toutes les colonnes k correspondant aux maximins d'une option i_2 . Alors, le poids ne peut pas augmenter sans qu'il y ait de changement de l'ensemble de choix. La variation maximum de poids sans changement de l'ensemble de choix est donc 0.

Pour la deuxième possibilité, tous les coefficients a_{pq} qui sont sur la ligne du coefficient a_{pr} qui va devenir un maximin et qui sont strictement inférieurs à Mm doivent correspondre à un coefficient d'indice (p, q) tel que $c_{pq} = 1$. En effet, dans le cas contraire, un des coefficients de la ligne restera inférieur au maximin. Pour devenir un maximin, le coefficient a_{pr} doit devenir le minimum sur sa ligne. Comme sa valeur augmente en même temps que w_k , et que les autres coefficients de la ligne inférieurs à Mm dans la matrice de surclassement de π augmentent à la même vitesse, a_{pr} doit être le minimum sur sa ligne au départ. Pour que l'option x_p entre dans l'ensemble de choix, il faut donc que le plus petit des coefficients a_{pq} inférieurs à Mm dans la matrice de surclassement de π devienne aussi grand que ce maximin. Cette égalité est réalisée pour une variation de poids égale à $Mm - \min a_{pq}$.

Nous obtenons une formule regroupant les différents cas. Il suffit en effet de faire le calcul pour chacun des maximins et de prendre la plus petite valeur obtenue. La variation (1) maximum de poids $\delta_1^+(\pi, k)$ sans qu'il y ait eu d'autre changement de maximin est donc de :

$$\delta_1^+(\pi, k) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \forall i \in I, \forall j \in MM(i), c_{ij} = 1 \\ 0 & \text{si } \exists i, i' \in I \left\{ \begin{array}{l} \forall j \in MM(i), c_{ij} = 1 \\ \exists j' \in MM(i') \mid c_{i'j'} = 0 \end{array} \right. \\ \left(\min_{\left\{ p \in I \mid \left(\forall q \mid a_{pq} < Mm \text{ et } c_{pq} = 1 \right) \right\}} \left(Mm - \min_{\left\{ q \mid a_{pq} < Mm \text{ et } c_{pq} = 1 \right\}} a_{pq} \right) \right) - \varepsilon & \text{sinon} \end{cases} \quad [1]$$

Calcul de la valeur de la variation (2)

Pour calculer la valeur de la variation (2), il est nécessaire de savoir comment vont évoluer les maximins avant qu'il n'y ait de changement de l'ensemble de choix. Cette évolution est en fait assez simple. Elle est présentée dans le schéma général de la Figure 6.4.

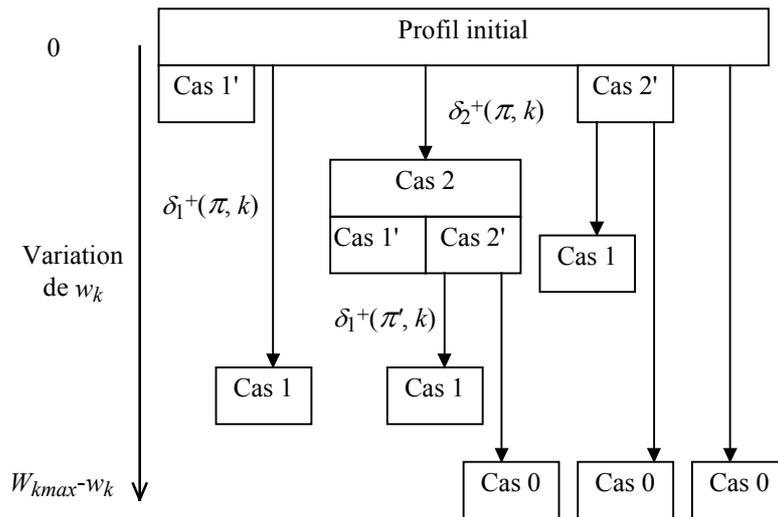


Figure 6.4 : Évolutions possibles du maximin

Nous ne justifierons que certains points de ce schéma. Le lecteur pourra facilement démontrer les autres en utilisant les mêmes principes.

Le point le plus important est le fait que les Cas 2 et Cas 2' se produisent au plus une fois lorsque w_k augmente et qu'il n'y a pas de changement de l'ensemble de choix.

Propriété 1 : *Le Cas 2 se produit au plus une fois lorsque le poids d'un critère varie dans un sens donné et que l'ensemble de choix ne change pas.*

Preuve Pour qu'un maximin apparaisse sur une ligne $i_1 \in I$, il faut que :

- tous les maximins initiaux correspondent à des coefficients d'indice (i_k, j) de la matrice de surclassement de π , tels que $c_{ikj} = 1$;
- le nouveau maximin corresponde à un coefficient d'indice (i_1, l) de la matrice de surclassement de π , tel que $c_{i_1l} = 0$.

En effet, si ces conditions ne sont pas vérifiées, a_{i_1l} ne peut pas devenir égal à a_{i_kj} lorsque w_k augmente. Ainsi, comme le nouveau maximin correspond à un coefficient d'indice (i_1, l) tel que $c_{i_1l} = 0$, il est impossible d'après la remarque précédente que ce type de changement se produise à nouveau pour cette option sans que ce nouveau maximin ne disparaisse. Or ce nouveau maximin ne peut pas disparaître sans que l'option x_{i_1} ne sorte de l'ensemble de choix (ce maximin reste le minimum de la ligne i_1 puisque $c_{i_1l} = 0$, s'il disparaît, c'est donc qu'il n'est plus maximin). Donc le Cas 2 se produit une fois au plus. \square

Propriété 2 : *Le Cas 2' se produit soit au départ, soit juste après le Cas 2.*

Preuve Supposons qu'un maximin disparaisse d'une cellule d'indice (i, l) sans que l'option x_i sorte de l'ensemble de choix. Après cette disparition, la ligne i contient encore des maximins correspondant à des cellules d'indice (i, j) . Pour que a_{il} ne reste pas le minimum de la ligne i , il faut que c_{il} soit égal à 1 et que les c_{ij} soient égaux à 0. Si le profil n'est pas le profil de départ, pour une variation arbitrairement petite, a_i n'est pas le minimum de la ligne i . Ce maximin vient donc d'apparaître ce qui correspond au Cas 2. En effet, si l'option x_i n'était pas dans l'ensemble de choix de départ et qu'un nouveau maximin apparaît sur la ligne i (Cas 1), nous arrêtons la variation de w_k . \square

Calculons la variation nécessaire pour qu'un ou plusieurs maximins apparaissent sur une ligne sans qu'il y ait de changement de l'ensemble de choix.

Comme nous l'avons vu dans la justification de la Figure 6.4, les maximins de départ doivent correspondre à des coefficients d'indice (i, j) tels que $c_{ij} = 1$ (pour tout i dans I). De plus, le coefficient qui va devenir le nouveau maximin doit correspondre à un coefficient d'indice (i, q) tel que $c_{iq} = 0$. La cellule (i, q) qui va contenir le nouveau maximin est donc celle qui contient le plus petit a_{iq} parmi toutes celles qui vérifient $c_{iq} = 0$. Nous en déduisons la valeur maximale de la variation de poids $\delta_2^+(\pi, k)$ sans qu'il y ait de changement de position des maximin :

$$\delta_2^+(\pi, k) = \min_{\{i \in I \mid \exists j \in MM(i) \mid c_{ij} = 1\}} \left(\min_{\{q \mid c_{iq} = 0\}} (a_{iq} - Mm) \right) \quad [2]$$

En raison des évolutions présentées sur la Figure 6.4, nous savons que si le maximin change à nouveau de position, c'est dans le cas 1. Il suffit donc dans ce cas d'ajouter la variation $\delta_1^+(\pi', k)$ autorisée à partir du profil π' où π' est obtenu à partir de π en augmentant w_k de $\delta_2^+(\pi, k)$. Si $\delta_2^+(\pi, k) = +\infty$, seules les variations (0) et (1) nous intéressent.

Théorème 6.2.3 : *La valeur maximale $w_{k-P-max}$ du poids du critère V_k telle que la valeur de la fonction de choix prudente ne change pas est donnée par la formule suivante :*

$$w_{k-P-max} = w_k + \min(\delta_1^+(\pi, k), \delta_2^+(\pi, k) + \delta_1^+(\pi', k), W_{k-sup} - w_k)$$

où $\delta_1^+(\pi, k)$ et $\delta_2^+(\pi, k)$ sont calculés à partir des expressions [1] et [2] et où π' est obtenu à partir du profil π en augmentant le poids du critère V_k de $\delta_2^+(\pi, k)$ si $\delta_2^+(\pi, k) \neq +\infty$ et de 0 sinon.

Un exemple de calcul est donné au paragraphe 6.3.1.2.

Nous utiliserons la propriété suivante dans le calcul de l'indice de stabilité locale, mais elle est énoncée ici en raison de son rapport direct avec le calcul précédent.

Propriété 3 : Si $w_{k-P-max} \neq W_{k-sup}$, lorsque le poids w_k continue à augmenter après avoir dépassé $w_{k-P-max}$, l(es) option (s) qui est (sont) sortie(s) de l'ensemble de choix ne peu(ven)t plus y entrer à nouveau.

Preuve Nous avons vu en effet que si une option x_i sort de l'ensemble de choix, c'est que le coefficient c_{imin} qui correspondait au minimax est égal à 0 et qu'il existe une option x_j dont tous les coefficients de surclassement sont plus grands. Les coefficients ne pouvant qu'augmenter, a_{imin} ne peut plus devenir supérieur ou égal aux coefficients correspondant à l'option x_j , et x_i ne peut plus appartenir à l'ensemble de choix prudent. \square

Borne inférieure

La valeur minimale de w_k telle que l'ensemble de choix prudent ne change pas se calcule en utilisant le même type de raisonnement. Nous obtenons ainsi :

Théorème 6.2.4 : La valeur minimale $w_{k-P-min}$ du poids du critère V_k telle que la valeur de la fonction de choix prudente ne change pas est donnée par la formule suivante :

$$w_{k-P-min} = w_k - \min(\delta_1^-(\pi, k), \delta_2^-(\pi, k) + \delta_1^-(\pi', k), w_k - W_{kin})$$

où $\delta_1^-(\pi, k)$ et $\delta_2^-(\pi, k)$ sont calculés à partir des expressions [3] et [4] et où π' est obtenu à partir du profil π en diminuant le poids du critère V_k de $\delta_2^-(\pi, k)$ si $\delta_2^-(\pi, k) \neq +\infty$ et de 0 sinon.

$$\delta_1^-(\pi, k) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \forall i \in I, \forall j \in MM(i), c_{ij} = 0 \\ \varepsilon > 0 & \text{si } \exists i, i' \left\{ \begin{array}{l} \forall j \in MM(i), c_{ij} = 0 \\ \exists j' \in MM(i') \mid c_{ij'} = 1 \end{array} \right. \\ \left(\min_{\left\{ p \in I \mid \left(\forall q \mid a_{pq} < Mm, c_{pq} = 0 \right) \right\}} \left(Mm - \min_{\left\{ q \mid a_{pq} < Mm \text{ et } c_{pq} = 0 \right\}} a_{pq} \right) \right) - \varepsilon & \text{sinon} \end{cases} \quad [3]$$

$$\delta_2^-(\pi, k) = \min_{\left\{ i \in I \mid \exists j \in MM(i) \mid c_{ij} = 0 \right\}} \left(\min_{\left\{ q \mid c_{iq} = 1 \right\}} (a_{iq} - Mm) \right) \quad [4]$$

La propriété concernant la possibilité d'entrer à nouveau dans l'ensemble de choix prudent reste valable.

Pour le min-in-favour

L'utilisation de la règle du minimax dans le cas de relations valuées ou floues s'appelle la règle du « min in favour » largement étudiée dans [Bouyssou et Pirlot 1996]. Comme pour Prométhée, l'intensité de la préférence d'un critère n'est plus forcément 0 ou 1. Le calcul des bornes de l'intervalle de stabilité est alors beaucoup plus délicat. Il est en fait identique à celui réalisé lorsque le poids d'un sous-ensemble de critères varie. Ce calcul est présenté au paragraphe suivant.

6.2.2.2 Lorsque plusieurs poids varient

Nous nous sommes restreints, dans ce chapitre, à étudier la variation linéaire simultanée du poids d'un sous-ensemble de critères. Ces calculs peuvent aussi servir lorsque l'intensité de la préférence d'un critère entre deux options peut prendre des valeurs autres que 0 ou 1.

Notons e_{ij} le coefficient de la matrice de surclassement du profil E formé à partir des critères V_1, V_2, \dots, V_n affectés des poids (v_1, v_2, \dots, v_n) . Rappelons que a_{ij} est le coefficient de surclassement de l'option x_i par rapport à l'option x_j dans le profil π de départ. Nous utilisons ici une généralisation de la notion de profil et de matrice de surclassement car les poids des critères de E peuvent être négatifs (lorsqu'un poids diminue) ou nuls (lorsqu'un poids est fixe). Ainsi, pour obtenir la borne inférieure à la variation du poids total de E , il suffit d'utiliser les mêmes formules en inversant les signes des v_i . Soit a'_{ij} le coefficient de surclassement de x_i par rapport à x_j dans le profil π' obtenu à partir de π en lui ajoutant le profil généralisé E d'un poids total w_E positif. La variation des poids se fait linéairement dans l'espace des poids selon le vecteur V et nous avons alors $a'_{ij} = a_{ij} + e_{ij}w_E$. Si le vecteur V est normé (par rapport à la distance $L_1 : d(x, y) = \sum |x_i - y_i|$), le coefficient w_E représente la distance L_1 entre le point correspondant à π' et le point correspondant à π .

Les différents cas impliquant un éventuel changement de l'ensemble de choix sont encore valables. Par contre, le calcul des bornes correspondantes change.

Proposition 6.2.1 : *Supposons que l'ensemble de choix prudent change sans qu'il y ait eu de changement dans les places des maximins lors de la variation du poids d'un sous-ensemble de critères. Alors, il existe une cellule (p, k) correspondant au (à un des) nouveau(x) maximin(s) telle que $a_{pk} \leq Mm$ et $e_{pk} > e_{Mm}$, où e_{Mm} est le coefficient dans la matrice de surclassement de E d'une cellule correspondant à un des maximins de départ.*

Preuve Par définition de l'ensemble de choix prudent, pour chaque option x_p , il existe un k tel que $a_{pk} \leq Mm$. Pour que x_p soit dans l'ensemble de choix de π' , il faut que pour tout k , a'_{pk} soit supérieur ou égal à Mm' . Pour qu'une option x_q qui était au départ dans l'ensemble de choix en sorte, il faut qu'il existe une option x_p telle que pour tout k , a'_{pk} soit strictement supérieur à Mm' . Alors :

- soit x_p était dans l'ensemble de choix de départ et pour que x_q sorte de l'ensemble de choix, il faut que $e_{pkMm} > e_{Mm}$ pour tout k_{Mm} tel que $a_{pkMm} = Mm$;
- soit x_p n'était pas dans l'ensemble de choix de départ et pour que tous les a_{pk} qui étaient plus petits que Mm deviennent plus grands que Mm' , il faut que tous les e_{pk} correspondants soient plus grands que e_{Mm} . Dans les deux cas, la Proposition 6.2.1 est vérifiée. \square

6 UN PARADOXE LIÉ À LA ROBUSTESSE

Cette propriété va nous permettre de restreindre les options à prendre en compte pour trouver la borne supérieure à la variation du poids total des critères.

La principale complication par rapport aux calculs du 6.2.2.1 vient du fait que le Cas 2 (un maximin apparaît sur une ligne de I) peut se produire plusieurs fois de suite. La Figure 6.5 représente l'évolution du maximin pour un exemple théorique. Nous ne considérons que trois des coefficients de surclassement de deux options x_i et x_p . L'option x_i est dans l'ensemble de choix prudent. La valeur de ses coefficients est une fonction affine de w_E . Sur cet exemple, deux coefficients de surclassement de x_i deviennent successivement maximin.

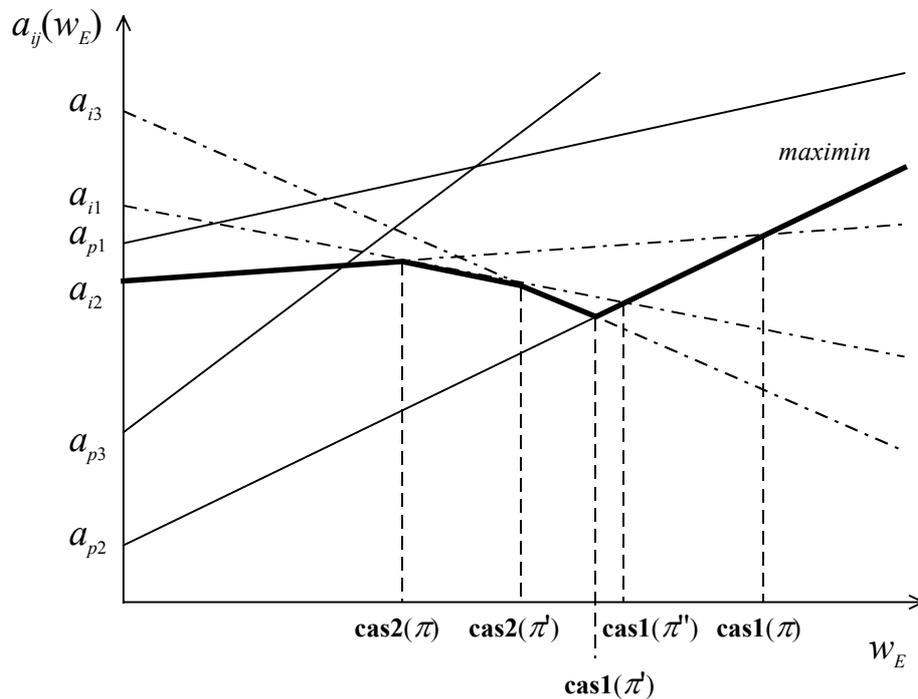


Figure 6.5 : Changements de maximin

Ce type de changements de maximin arrive au plus $m-1$ fois par option de l'ensemble de choix. La complexité du calcul que nous allons proposer reste donc polynomiale.

Supposons toujours que les maximins sont sur les lignes $i \in I$. Posons

$$Poids_adm(\pi) = \min \left(\min_{\{k | v_k < 0\}} \left(\frac{-w_k - W_{ki}}{v_k} \right), \min_{\{k | v_k > 0\}} \left(\frac{W_{ks} - w_k}{v_k} \right) \right).$$

La variable $Poids_adm(\pi)$ représente la variation maximale du poids de E telle que tous les poids w_k restent dans leurs domaines admissibles. Posons alors pour $i \in I$

$$M(i, p) = \max_{\{k \mid a_{pk} \leq Mm \text{ et } e_{pk} > e_{iMm}\}} \left(\begin{cases} \varepsilon & \text{si } a_{pk} = Mm \\ \frac{a_{pk} - Mm}{e_{iMm} - e_{pk}} - \varepsilon & \text{sinon} \end{cases} \right).$$

La variable $M(i, p)$ est la valeur maximale de w_E pour laquelle

- si l'option x_p n'était pas dans l'ensemble de choix, elle n'y est toujours pas (tous les coefficients de la ligne p qui étaient inférieurs ou égaux à Mm au départ le sont toujours) ;
- si l'option x_p était dans l'ensemble de choix, x_i n'est pas sortie de celui-ci (le coefficient correspondant au minimax pour x_p n'est pas devenu plus grand que celui de x_i).

En fait, x_p n'est susceptible de rentrer dans l'ensemble de choix que si les coefficients qui étaient plus grands que le minimax au départ ne sont pas devenus plus petits. De même, si x_p était dans l'ensemble de choix, x_i n'est susceptible d'en sortir que si les coefficients correspondant au minimax pour x_p ne sont pas devenus plus petits que celui de x_i . La valeur de $M(i, p)$ n'est donc à prendre en compte que si

$$M(i, p) \leq \min_{\{k \mid a_{pk} \geq Mm \text{ et } e_{pk} < e_{iMm}\}} \left(\begin{cases} \varepsilon & \text{si } a_{pk} = Mm \\ \frac{a_{pk} - Mm}{e_{iMm} - e_{pk}} - \varepsilon & \text{sinon} \end{cases} \right) \quad [5].$$

Il faut alors calculer cette valeur pour chaque option x_p susceptible de rentrer dans l'ensemble de choix. Grâce à la Proposition 6.2.1, il n'est pas nécessaire de considérer toutes les options. Nous devons alors trouver quelle est l'option de l'ensemble de choix pour laquelle cette valeur est la plus petite et enfin vérifier que les poids sont toujours admissibles. Nous obtenons ainsi la formule suivante :

$$\mathbf{cas1}(\pi) = \min(Poids_adm(\pi), \min_{\{i \in I\}} \left(\max_{\{p \neq i \mid \left(\begin{cases} \forall k \mid a_{pk} < Mm, \\ e_{pk} > e_{iMm} \end{cases} \right)\}} \left(\begin{cases} M(i, p) & \text{si [5]} \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases} \right) \right)$$

La fonction **cas1** calcule la plus petite valeur de w_E pour laquelle l'ensemble de choix est susceptible de changer. Il faut cependant vérifier que les coefficients correspondant aux maximins n'ont pas changé. Nous définissons donc, en utilisant le même genre de raisonnement, la fonction **cas2** qui calcule la valeur de w_E pour laquelle un maximin est susceptible d'apparaître sur une ligne de I . Si pour cette valeur, certains poids ne sont plus admissibles, c'est la valeur de **cas1** qui sera prise en compte.

$$\mathbf{cas2}(\pi) = \min_{\{i \in I\}} \left(\min_{\{k \mid e_{ik} < e_{iMm}\}} \frac{a_{ik} - Mm}{e_{iMm} - e_{ik}} \right)$$

La Figure 6.5 donne les différentes valeurs de **cas1** et **cas2** lorsque w_E augmente. Le profil π' est obtenu en ajoutant au profil π de départ **cas2**(π) fois le profil E . Le profil π'' est obtenu en ajoutant à π' **cas2**(π') fois le profil E .

Il nous a paru plus clair de donner un algorithme permettant de calculer la borne supérieure de l'intervalle de stabilité plutôt qu'une formule explicite. Cette présentation a aussi pour but de faciliter la programmation de ce calcul.

Théorème 6.2.5 : *La valeur maximale de la variation linéaire des critères dans une direction V donnée telle que l'ensemble de choix prudent reste le même que celui du profil de départ π est donnée par l'algorithme suivant.*

```

Bornesup( $\pi, E$ )
   $w_{max} := 0$ ;
  faire
     $w_1 := \mathbf{cas1}(\pi)$ ;
     $w_2 := \mathbf{cas2}(\pi)$ ;
    sortir quand  $w_2 \geq w_1$ ;
     $\pi := \pi \oplus w_2.E$ ;
     $w_{max} := w_{max} + w_2$ ;
  fin faire ;
  retourner  $w_{max} + w_1$ ;
fin Bornesup.

```

6.3 ... à un indice global de robustesse

Maintenant que nous savons calculer les bornes des intervalles de stabilité des fonctions de choix étudiées, nous pouvons proposer un indice de stabilité local. En utilisant cet indice local pour des profils aléatoires, nous tentons de définir un indice global de robustesse d'une méthode par rapport aux poids des critères. Les valeurs obtenues pour la méthode de Borda et pour la méthode prudente sont comparées. Nous montrons ainsi que la méthode de Borda n'est pas forcément plus robuste que la méthode prudente.

6.3.1 Un indice local

La méthode présentée au paragraphe 6.2.1.2 n'est pas facile à mettre en application et le nombre de poids variables est alors limité. Heureusement, la visualisation des ensembles de choix correspondant aux différents poids n'est pas indispensable pour le décideur. Généralement, celui-ci veut seulement savoir si la méthode proposée est robuste ou pas par rapport à un ensemble de poids donné. De plus, pour pouvoir comparer la robustesse de différentes méthodes, nous devons avoir des indices de robustesse comparables. La pertinence de l'indice de robustesse que nous allons proposer est donc limitée par la méthode pour laquelle l'étude de stabilité est la plus difficile. Rien ne sert d'avoir un indice très performant pour une méthode si l'on ne peut pas le comparer à celui d'une méthode concurrente parce que le calcul d'un indice similaire pour cette méthode concurrente est trop difficile. C'est pour cette raison que nous nous limiterons à l'étude de stabilité de la méthode de Borda. L'intérêt de cette étude est en fait limité par celle de la prudence qui est beaucoup plus difficile.

Dans cette partie, nous définissons donc un indice de stabilité locale qui sera le même quelle que soit la méthode utilisée. Soit $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ le point correspondant au profil de départ dans l'espace des poids. Pour alléger la rédaction, nous assimilerons un profil au point qui lui correspond dans l'espace des poids. Nous parlerons donc de l'ensemble de choix du point W pour l'ensemble de choix du profil auquel correspond le point W . Nous supposerons aussi que les poids des n critères sont susceptibles de varier (si certains poids sont fixés, il suffit de ne pas les prendre en compte). Notons S_i l'ensemble des points de l'espace des poids tels que x_i soit dans l'ensemble de choix du profil correspondant.

Nous illustrerons nos propos sur l'exemple suivant dans lequel seuls deux poids varient (l'espace des poids est donc de dimension 2). Le profil π est composé des sept critères : $V_1 : x_3 > x_1 > x_2 > x_4$; $V_2 : x_3 > x_2 > x_4 > x_1$; $V_3 : x_1 > x_3 > x_4 > x_2$; $V_4 : x_1 > x_2 > x_3 > x_4$; $V_5 : x_2 > x_1 > x_3 > x_4$; $V_6 : x_4 > x_2 > x_1 > x_3$; $V_7 : x_4 > x_2 > x_3 > x_1$. Les poids des critères V_3, V_4, V_5, V_6 et V_7 sont fixés à 20, 10, 10, 10 et 10. Nous faisons varier les poids de V_1 et V_2 entre $W_{1inf} = W_{2inf} = 0$ et $W_{1sup} = W_{2sup} = 40$ autour du point $W = (11, 9)$.

6.3.1.1 Pour la fonction de choix de Borda

Pour définir un indice de stabilité locale, nous utilisons le rayon $r_B(W)$ de la plus grande boule pour la distance L_1 ($d(x, y) = \sum |x_i - y_i|$) centrée en W telle que tous les points de cette boule ont le même ensemble de choix de Borda que W .

Ce type d'indice est étudié dans [Rios Insua et French 1991] ainsi que les possibilités liées à l'utilisation de différentes distances. Deux raisons principales nous ont conduits à utiliser la distance L_1 plutôt que la distance euclidienne L_2 ($d(x, y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$) ou la distance L_∞ ($d(x, y) = \max(|x_i - y_i|)$) :

- Les ensembles S_i peuvent être interprétés comme des polyèdres dans l'espace des poids. L'option x_i est dans l'ensemble de choix de Borda si la somme pondérée de ses rangs est plus petite que celle de toutes les autres options.

$$S_i = \left\{ W \in R^n \left| \forall j \neq i, \sum_{k \in [1..n]} rg(R_k, x_i) \cdot w_k \leq \sum_{k \in [1..n]} rg(R_k, x_j) \cdot w_k \text{ et } \forall k, W_{kinf} \leq w_k \leq W_{ksup} \right. \right\}$$

Ces ensembles sont donc convexes. Alors, pour qu'une boule soit incluse dans un ensemble S_i , il suffit que tous les points à distance maximale du centre (quelle que soit la distance utilisée) le soient. Lorsque plusieurs options sont dans l'ensemble de choix de départ, l'ensemble des points tels que les vainqueurs de Borda ne changent pas est encore convexe. Il s'agit en effet d'une intersection d'ensembles convexes (les S_i tels que $x_i \in B(\pi)$). Une boule pour la distance L_1 a $2n$ sommets (où n est le nombre de critères dont le poids varie) alors qu'une boule pour la distance L_∞ en a 2^n et qu'une boule pour la distance euclidienne en a une infinité.

- Pour la distance L_1 , les calculs sont ceux que nous avons faits dans le chapitre précédent. En effet, $r_B(W)$ est égal à la plus petite variation de poids sur un des critères telle que l'ensemble de choix change. Pour les sommets de la boule obtenue avec la distance L_∞ , les calculs correspondraient à des analyses de stabilité selon tous les vecteurs $V = (v_i)$ avec $v_i = \pm 1$ pour tout i dans $[1..n]$ et ces calculs sont plus compliqués.

Nous pouvons normaliser le rayon trouvé en le divisant par le rayon de la plus grande boule incluse dans l'ensemble des poids admissibles ($\min_k (W_{ksup} - W_{kinf})/2$). L'indice de stabilité locale proposé est le suivant :

$$I_B(W) = \frac{2 \cdot r_B(W)}{\min_{k \in [1..n]} (W_{ksup} - W_{kinf})}$$

La Figure 6.6 donne pour l'exemple proposé les différents ensembles S_i (à gauche) et les valeurs de l'indice de stabilité (en hauteur) en fonction de w_1 et w_2 (à droite). Il est facile de se

rendre compte que plus le point correspondant au poids de départ est proche d'une frontière, plus la valeur de l'indice est petite.

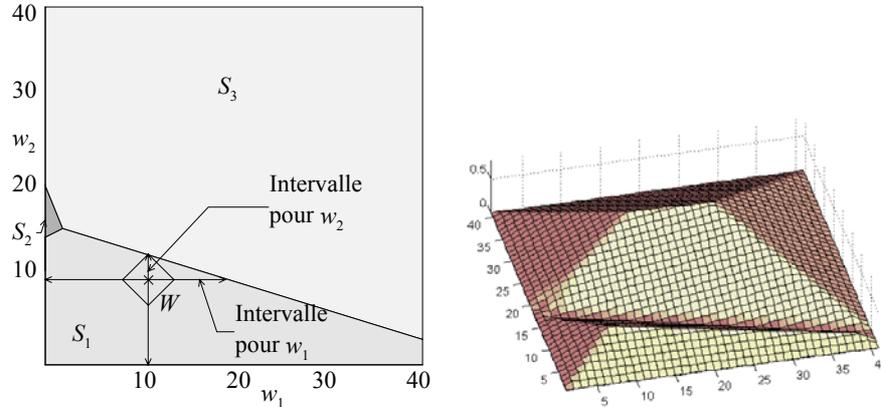


Figure 6.6 : À gauche, les choix de Borda dans l'espace des poids ; à droite les valeurs de l'indice (en hauteur)

Le nombre de poids variables n'a été restreint que pour pouvoir visualiser les ensembles S_i .

Remarquons que, dans le cas d'un problème à trois critères, il est possible de représenter la robustesse d'une méthode homogène de façon élégante dans le plan [Bana e Costa 1988]. Cette représentation n'est cependant plus possible même lorsque ce sont les poids de seulement trois critères parmi les n ($n > 3$) qui varient.

L'indice que nous avons proposé est bien sûr à interpréter avec précaution. Pour l'exemple proposé (Figure 6.6), si le point W se situe juste à coté d'une frontière, par exemple si $W = (21, 10)$, l'indice est alors petit. Cependant, si pour des raisons inhérentes au problème, les poids de ces critères ne peuvent qu'augmenter, la robustesse du résultat est en fait très grande.

Pour la méthode Prométhée, les ensembles S_i sont convexes pour les mêmes raisons que dans le cas de la fonction de choix de Borda. Par conséquent leurs intersections aussi. Nous pouvons donc garder le même indice.

6.3.1.2 Pour la fonction de choix prudente

Pour la prudence, les ensembles S_i ne sont malheureusement pas toujours convexes. L'indice de stabilité ne peut plus être calculé de manière aussi simple que pour la fonction de choix de Borda. Il suffit pour s'en convaincre d'étudier les ensembles S_i de l'exemple que nous avons utilisé. Le maximin dans la matrice de surclassement de π est 41, obtenu pour le coefficient a_{12} . Le calcul de la borne supérieure pour w_1 donne les résultats suivants : $\delta_1^+(\pi, 1) = +\infty$; $\delta_2^+(\pi, 1) = a_{13} - Mm = 50 - 41 = 9$; $\delta_1^+(\pi', 1) = Mm - \min(a'_{31}, a'_{32}) = 50 - 39 = 11$ d'où $w_{1-P-max} = 11 + \min(+\infty, 9 + 11, 29) = 31$; et pour la borne inférieure : $\delta_1^-(\pi, 1) = Mm - \min(a_{41}, a_{42}, a_{43}) = 41 - 20 = 21$; $\delta_2^-(\pi, 1) = +\infty$ d'où $w_{1-P-min} = 11 - \min(21, +\infty, 11) = 0$. Pour w_2 nous obtenons : $\delta_1^+(\pi, 2) = Mm - \min(a_{31}, a_{32}) = 41 - 30 = 11$; $\delta_2^+(\pi, 2) = +\infty$; d'où $w_{2-P-max} = 9 + 11 = 20$; et pour la borne inférieure : $\delta_1^-(\pi, 2) = +\infty$; $\delta_2^-(\pi, 2) = \min(\min(\emptyset)) = +\infty$;

6 UN PARADOXE LIÉ À LA ROBUSTESSE

d'où $w_{2-P-min} = 0$. Le lecteur trouvera sur la Figure 6.7, à gauche, les différents ensembles de choix.

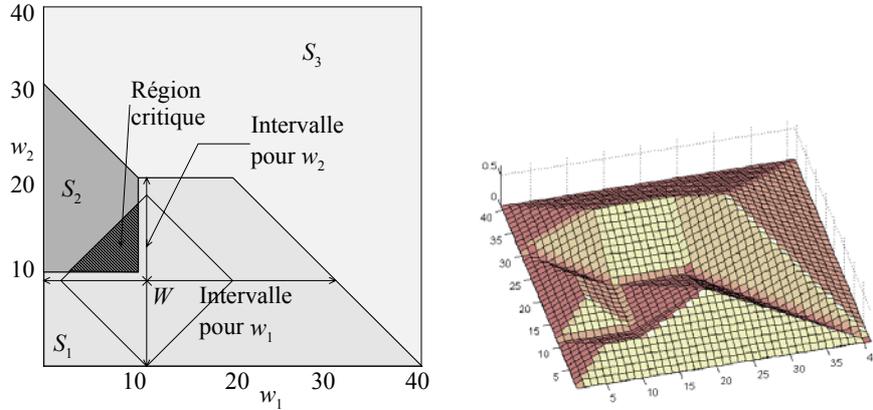


Figure 6.7 : À gauche, les choix prudents dans l'espace des poids ; à droite les valeurs de l'indice (en hauteur)

Soit W un point de l'espace des poids. Supposons que les variations des poids ne se fassent que sur un critère à la fois, le profil de départ correspondant au point W . Calculons pour chacun de ces poids la plus grande variation (positive ou négative) telle que l'ensemble de choix prudent ne change pas. Notons $V_p(W)$ la plus petite des valeurs obtenues (en valeur absolue). Soit d un pas de discrétisation fixé. Notons W^+_{ij} le point de coordonnées $(w_1, w_2, \dots, w_{j-1}, w_j + iV_p(W)/d, w_{j+1}, \dots, w_n)$ et W^-_{ij} le point de coordonnées $(w_1, w_2, \dots, w_{j-1}, w_j - iV_p(W)/d, w_{j+1}, \dots, w_n)$ pour tout i appartenant à $[1..d-1]$ et tout j appartenant à $[1..n]$.

Si

$$\forall (i, j, *) \in [1..d-1] \times [1..n] \times \{+, -\}, V_p(W^*_{ij}) \geq \frac{d-i}{d} V_p(W) \quad [5]$$

alors, nous sommes dans le cas de la Figure 6.8.

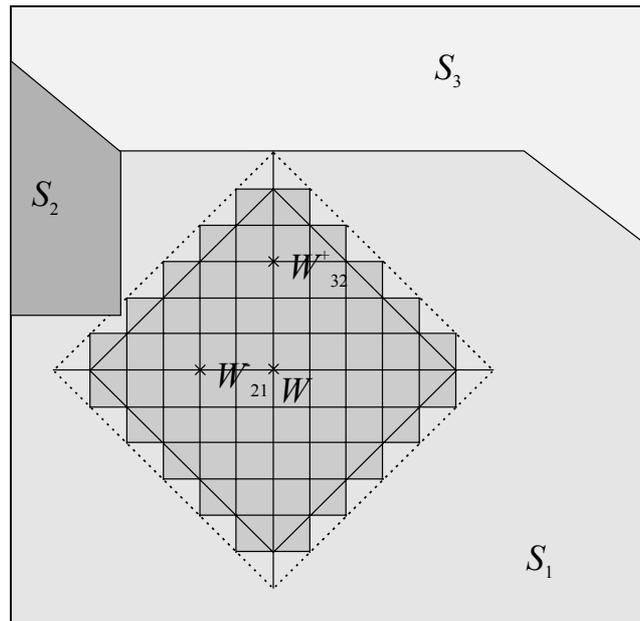


Figure 6.8 : Toutes les inégalités de type [5] sont valides

Nous savons d'après la Propriété 3 que tous les points qui sont dans la région plus foncée sont dans S_1 . En effet, soit B^* un point de coordonnées $(w_1, w_2, \dots, w_{i-1}, w_i^*(i/d)V_p(W), w_{i+1}, \dots, w_{j-1}, w_j^*((d-i)/d)V_p(W), w_{j+1}, \dots, w_n)$, où $*$ $\in \{+, -\}$, qui appartient à S_1 . D'après l'analyse de stabilité partielle, le point W_{ij}^* appartient aussi à S_1 , et donc tous les points du segment $[B^*, W_{ij}^*]$ aussi. De même le point $W_{(d-i)i}^*$ appartient à S_1 , et tous les points du segment $[B^*, W_{(d-i)i}^*]$ aussi. Alors tous les points du rectangle $(B^*, W_{ij}^*, W, W_{(d-i)i}^*)$ appartiennent à S_1 et par suite tous les points de la zone plus foncée. Nous pouvons donc affirmer que $r_p(W)$ est compris entre $V_p(W)$ (losange en pointillé) et $(d-1/d)V_p(W)$ (losange en traits pleins).

Si une ou plusieurs des inégalités de type [5] n'est pas vérifiée, nous sommes dans le cas de la Figure 6.9.

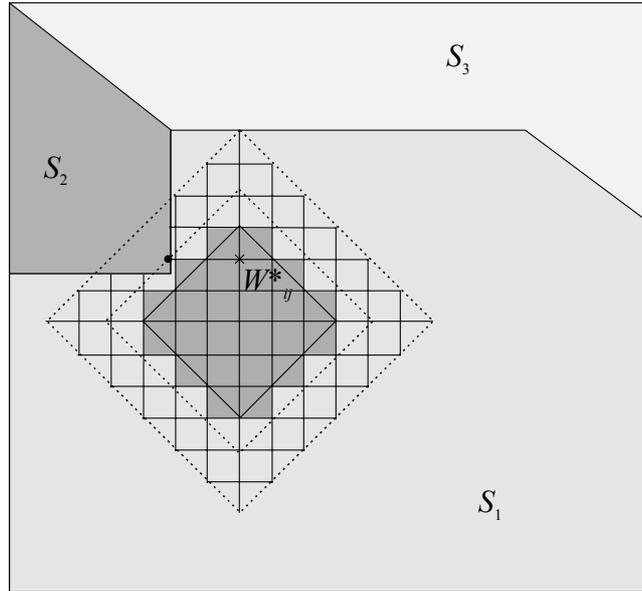


Figure 6.9 : Certaines inégalités de type [5] ne sont pas valides

Soit W^*_{ij} le point tel que $((d-i)/d)V_p(W) - V_p(W^*_{ij})$ est maximum. Alors, $r_p(W)$ est inférieur à $V_p(W^*_{ij}) + (i/d)V_p(W)$ (losange intérieur pointillé). D'autre part, ici encore, d'après la Propriété 3, tous les points qui sont dans la région plus foncée sont dans S_1 . Ainsi, si

$$k = \left\lfloor \frac{V_p(W^*_{ij})}{\frac{V_p(W)}{d}} \right\rfloor \quad [6]$$

($\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière inférieure), tous les points qui appartiennent à la boule de rayon $((k+i-1)/d)V_p(W)$ (losange en traits pleins) sont dans S_1 . L'indice de stabilité locale de la méthode prudente est donc

$$I_p(W) = \frac{2 \cdot \frac{k+i-1}{d} V_p(W)}{\min_{k \in [1..n]} (W_{ksup} - W_{kinf})}$$

où k est déterminé par la relation [6] et W^*_{ij} est le point qui maximise $((d-i)/d)V_p(W) - V_p(W^*_{ij})$.

Le lecteur trouvera sur la Figure 6.7, à droite, les valeurs de l'indice de stabilité (en hauteur) en fonction de w_1 et w_2 pour l'exemple proposé.

Remarquons que, contrairement à l'indice proposé pour la méthode de Borda, nous n'avons ici qu'une borne inférieure de $r_p(W)$. Cependant, l'erreur commise est inférieure à $((2/d)V_p(W))/\min(W_{ksup}-W_{kinf})$ où d est le pas de discrétisation choisi.

Il semble cependant que ce problème lié à la non-convexité ne soit pas très fréquent. Reprenons l'exemple précédent. Le triangle hachuré de la Figure 6.10 représente les points $W = (w_1, w_2)$ pour lesquels il ne suffit pas de calculer les intervalles de stabilité pour chaque

critère. Pour ces points, la boule (pour la distance L_1) centrée en W et ayant comme rayon la plus petite borne des intervalles de stabilité, contient des points ayant un ensemble de choix différent de celui de W .

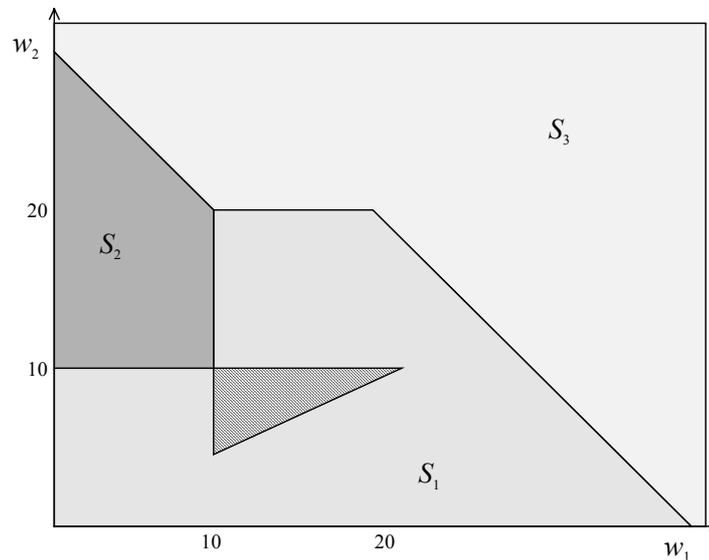


Figure 6.10 : Poids pour lesquels la signification de l'indice est fausse

La surface du triangle hachuré ne représente que 2.78 % de la surface totale si les poids w_1 et w_2 varient entre 0 et 30 et seulement 1.56 % si les poids sont susceptibles de varier entre 0 et 40. Cette intuition a été confirmée par les résultats des simulations (voir le paragraphe suivant).

Remarquons enfin qu'il existe d'autres solutions pour définir un indice de stabilité locale. Il est par exemple possible de calculer les intervalles de stabilité non seulement dans des directions parallèles aux axes (en faisant varier le poids d'un seul critère à la fois), mais aussi dans d'autres directions en faisant varier le poids de certains sous-ensembles de critères. En choisissant comme indice de stabilité la valeur absolue r_{prud} de la plus petite borne trouvée, nous pouvons alors considérer (si le nombre de directions choisies est assez grand) que la « plupart » des jeux de poids qui sont à l'intérieur de la boule (pour la distance L_2) de rayon r_{prud} ne remettent pas en cause le résultat de la fonction de choix prudente. Le problème est alors de déterminer ces directions et leur nombre pour que le terme « plupart » soit justifié. Malheureusement, pour avoir un certain degré d'exploration de l'espace des poids, le nombre de directions à examiner est exponentiel en fonction du nombre de critères dont le poids varie. De plus, il est difficile de déterminer, en fonction de leur nombre, les directions dans lesquelles faire l'analyse de stabilité pour qu'elles soient réparties de manière uniforme.

6.3.2 Un indice global donnant des résultats étonnants

Les résultats présentés ci-dessous concernent des tirages aléatoires de profils. Pour chaque couple (m, n) ($m \in \{10, 20, 30\}$, $n \in \{10, 20, 30\}$), nous avons tiré au hasard uniforme les

6 UN PARADOXE LIÉ À LA ROBUSTESSE

préférences de chaque critère parmi les $m!$ ordres stricts possibles. Nous faisons varier le poids de 2 critères ou de 5 critères entre 0 et 4. Les autres poids sont tirés au hasard uniforme entre 0 et 4 et gardés fixes pendant la simulation. Nous avons effectué 1000 tirages lorsque les poids de 2 critères varient et 500 tirages lorsque les poids de 5 critères varient. Pour l'indice de stabilité de la prudence, la valeur du pas de discrétisation est fixée de manière à ce que l'erreur portant sur la précision soit inférieure à 0.01. Le Tableau 6.2 synthétise les résultats obtenus.

Nb options	2 poids variables		5 poids variables	
	Moy. Borda	Moy. prudence	Moy. Borda	Moy. prudence
10 critères				
10	0.25	0.26	0.13	0.14
20	0.21	0.26	0.12	0.14
30	0.17	0.23	0.10	0.13
20 critères				
10	0.28	0.28	0.15	0.15
20	0.23	0.26	0.13	0.15
30	0.20	0.26	0.11	0.14
30 critères				
10	0.28	0.29	0.14	0.14
20	0.24	0.28	0.13	0.14
30	0.20	0.26	0.11	0.13
Moyenne	0.23	0.27	0.13	0.14
Ratio Prudence/Borda	1.138		1.102	

Tableau 6.2 : Résultats sur des profils aléatoires

La valeur obtenue (moyenne des indices locaux de stabilité) peut être considérée comme un indice global de robustesse par rapport au poids des critères. Comme nous pouvions nous y attendre, pour chacune des deux méthodes, la valeur moyenne de l'indice diminue lorsque le nombre d'options augmente (il y a alors plus de choix possibles, donc plus d'options susceptibles d'entrer dans l'ensemble de choix). De même, conformément à notre intuition, la valeur moyenne de l'indice augmente lorsque le nombre de critères augmente (les variations de deux critères parmi les n sont de moins en moins significatives). Cependant, pour la prudence, l'influence du nombre d'options comme de critères est assez faible.

Pour un nombre de poids variables fixé, nous avons constaté un écart type « important » sur les 9 moyennes obtenues pour chacune des deux fonctions de choix. Cet écart type est toujours situé autour de 0.2 lorsque les poids de deux critères varient et autour de 0.12 lorsque les poids de cinq critères varient. Ceci peut s'expliquer par le tirage aléatoire des vecteurs poids.

Pour la plupart des couples (m, n) , la moyenne des valeurs obtenues pour la prudence est plus grande que celle obtenue pour Borda. Si l'on néglige le risque d'erreur sur la valeur de l'indice de la prudence (ce qui revient à ajouter le pas de discrétisation aux valeurs obtenues

pour la prudence), le ratio indice prudent / indice de Borda est le même lorsque deux poids varient et lorsque cinq poids varient (environ 1.181).

Le problème lié à la non-convexité des ensembles dans le cas de la prudence complique quelque peu les calculs. Cependant, il n'est apparu que dans moins de 1% des tirages.

L'indice global de robustesse doit lui aussi être interprété avec précautions. Deux principales objections peuvent être faites à son utilisation :

- Un grand indice de robustesse globale peut être dû à un petit nombre de résultats possibles pour la fonction de choix. Ainsi, la fonction de choix constante qui sélectionne toutes les options quel que soit le profil a une robustesse maximale au détriment d'un pouvoir de résolution minimal.
- Pour pouvoir comparer les robustesses globales de deux fonctions de choix, il faut supposer que les poids des critères ont la même signification. Ce n'est généralement pas le cas pour les procédures utilisées en décision multicritère. Toutefois, la comparaison des fonctions de choix de Borda et prudente peut être légitimée par son contexte historique. Le poids des critères représente alors la taille des différents partis politiques.

Par contre, lorsque tous les poids peuvent varier, les deux indices ont en moyenne des valeurs quasiment égales (à peu près 0.14 pour des tirages sur 5 options et où les poids des 5 critères en présence varient, 0.08 pour 10 options et 10 critères). Nous n'avons pas d'explication pour ce résultat paradoxal. Toutefois, il met en évidence le fait que la robustesse est une notion plus difficile à cerner que la monotonie ou la cohérence. Sans même essayer de savoir si une méthode est robuste ou pas, il nous est déjà difficile de comparer la robustesse de deux méthodes.

L'étude de la robustesse globale peut permettre à un décideur, dans une situation concrète, de savoir s'il est dans un contexte où la méthode qu'il souhaite utiliser est plutôt robuste ou pas. Il nous semble plus pertinent de dire au décideur « Vous êtes dans une situation où la robustesse locale est de 0.1 alors qu'elle est globalement de 0.2 » plutôt que de lui dire seulement qu'il est dans une situation où la robustesse est de 0.1. Ceci peut, de plus, l'orienter dans le choix de la méthode à utiliser. C'est en effet l'intérêt principal de cet indice qui permet de comparer directement et légitimement la robustesse de différentes méthodes. Le décideur peut aussi, comme avec toute étude de sensibilité, évaluer la robustesse de décisions prises avec différents paramètres.

L'extension à des techniques plus « opérationnelles » est très facile pour la fonction de choix de Borda. Comme nous l'avons vu, il est très simple de déduire les bornes de l'intervalle de stabilité pour Prométhée. Dans le cas du min-in-favour, l'étude de la stabilité partielle est plus délicate car certaines propriétés utilisées ne sont plus vérifiées. Comme nous l'avons signalé précédemment, la comparaison des indicateurs globaux de robustesse pour différentes méthodes n'est plus forcément pertinente, les poids ayant alors des significations différentes.

L'indice proposé est, de plus, utilisable avec beaucoup d'autres méthodes multicritères, mais son calcul risque d'être plus compliqué que pour les méthodes citées précédemment.

Signalons, pour terminer, que cette étude peut paraître assez complexe par rapport au petit paradoxe qu'elle met en évidence. Cependant, elle a été aussi guidée par une application industrielle. L'indice de robustesse locale est en effet utilisé dans la maquette d'un système de

6 UN PARADOXE LIÉ À LA ROBUSTESSE

pilotage automatisé de la production réalisée par Trentesaux. Nous n'en dirons pas plus sur ce sujet, ces travaux étant encore en cours.

6 UN PARADOXE LIÉ À LA ROBUSTESSE

Conclusion

Il est toujours difficile de mettre un terme à un travail de recherche. Quand il s'agit d'une thèse et quelque passionnant qu'ait été le travail, il faut particulièrement respecter cette règle du jeu. C'est donc bien contraint que j'écris ces dernières pages pour conclure. Quel est donc, à mes yeux, le bilan de ma thèse ? Pour chacun des paradoxes étudiés, j'ai essayé d'apporter quelques éclaircissements. J'ai utilisé plusieurs principes d'études :

- aborder ces paradoxes sous un angle nouveau, en trouvant des concepts mieux adaptés, en m'appuyant sur des intuitions étrangères au domaine (comme la géométrie des polyèdres de \mathbb{R}^3) ;
- étudier ces paradoxes d'un point de vue empirique à l'aide d'expérimentations probabilistes.

Il reste à mon goût beaucoup de zones d'ombre pour certains paradoxes. Bien que ce manuscrit doive se terminer, l'envie est grande de chercher à répondre à quelques questions ouvertes à l'occasion de cette thèse et surtout, de manière plus générale aux très nombreuses et très belles questions suscitées par l'agrégation des préférences.

La responsabilité de notre inefficacité à lever les paradoxes m'a semblé tenir tout d'abord à la « mauvaise » intuition que nous avons des objets mis en jeu. Une des possibilités pour résoudre ces paradoxes est donc de changer, d'améliorer cette intuition. Pour cela, il est nécessaire d'introduire des concepts nouveaux ou non utilisés dans le domaine.

Ainsi, la représentation géométrique des fonctions de choix développée par Saari fournit des intuitions efficaces pour mieux comprendre la cohérence et assimiler ses conséquences et incompatibilités.

De même, l'utilisation de la diversité pour évaluer les restrictions imposées par les conditions de transitivité de la méthode majoritaire engendre de nombreux paradoxes. Grâce à la polydiversité, nous avons pu lever la plupart d'entre eux. Cette notion est mieux adaptée à l'idée intuitive que nous avons d'une restriction.

Le défrichage de ce champ de recherche a été grandement accéléré par l'utilisation de l'outil informatique afin d'identifier les problèmes les plus intéressants et leurs solutions probabilistes. L'approche probabiliste en mathématiques expérimentales a bien sûr ses limites. Les résultats obtenus sont issus de tirages aléatoires qui dépendent fortement du modèle utilisé. Les valeurs obtenues ne sont que des observations pour un ensemble de tirages donné. Elles ne seront jamais des valeurs exactes et ne pourront se substituer à un raisonnement bien articulé.

Cette approche expérimentale est de plus limitée aujourd'hui par la complexité des procédures étudiées. Pour certaines fonctions de choix (Kemmeny, Dodgson), il ne sera jamais possible d'obtenir des résultats pour des grands nombres d'alternatives et/ou de votants.

Cependant, les avantages de cette façon d'approcher les paradoxes ne manquent pas. Nous avons vu qu'il est possible d'exploiter les résultats obtenus. Dans le cas des alternatives pathologiques obtenues avec la fonction de choix prudente, nous avons pu non seulement connaître la fréquence de ce paradoxe, mais aussi l'allure des profils qui étaient impliqués.

Il est extrêmement simple et rapide de changer la méthode d'agrégation utilisée et de comparer ainsi différentes méthodes même si elles sont totalement différentes (pour les résultats

CONCLUSION

théoriques, tous les calculs sont en général à refaire). Il est de même très simple de changer les propriétés pour en tester différentes versions. C'est ce que nous avons fait pour la monotonie et la cohérence.

Les calculs exacts sont souvent restreints à des petits nombres d'alternatives et/ou de votants et nous avons pu voir que certains paradoxes ne surviennent qu'à partir de seuils que nous avons identifiés.

Dans d'autres cas, la rareté de certains résultats ne justifie peut-être pas des heures de labeur pour trouver des formules analytiques lorsqu'un ordinateur peut donner des valeurs (certes, approchés) en quelques minutes.

Parmi les questions ouvertes auxquelles nous aimerions répondre, mentionnons principalement les suivantes :

- Est-il possible de trouver des formules générales donnant la polydiversité de chacune des conditions de transitivité étudiées ?
- Nous avons prouvé que toutes les méthodes d'agrégation construites par itérations d'une fonction de choix strictement monotone pouvaient violer la monotonie stricte. Quelle condition faut-il ajouter sur les fonctions de choix pour que la méthode d'agrégation ne respecte pas la monotonie simple ? Cet axiome de monotonie stricte est assez contraignant ; quelles conditions minimales doit-on lui ajouter pour qu'il caractérise les méthodes de scorages à scores strictement croissants ?
- Un indicateur de robustesse globale par rapport à la variation du poids des critères a été proposé. Il a fait surgir un nouveau paradoxe : contrairement à ce qui est couramment admis, la fonction de choix prudente n'est guère plus robuste que la fonction de choix de Borda. Qu'en est-il des autres fonctions de choix classiques ?

Bien évidemment, des questions plus globales et moins techniques ne manquent pas d'apparaître en toile de fond.

Les relations utilisées (en particulier en choix social) pour modéliser les préférences ne sont visiblement pas adaptées. De nombreux chercheurs essaient d'affiner les structures existantes. La représentation des préférences exprimées par les décideurs, ne devrait-elle pas utiliser des structures mathématiques intermédiaires entre l'ordinal et le cardinal (si les préférences ordinales des individus sont à peu près fiables, il n'en est pas de même pour l'intensité de ces préférences qui peut parfois être très fluctuante). Cette quête, à notre avis, devrait conduire à la création d'une nouvelle théorie, comme c'est souvent le cas lors de l'explication de paradoxes, fondée sur une structure intermédiaire entre le cardinal et l'ordinal.

La science cherche des théories générales, puissantes et parcimonieuses (la pertinence d'une axiomatisation est en général inversement proportionnelle au nombre d'axiomes utilisés). Est-il réellement possible de modéliser les préférences humaines avec une structure parcimonieuse ? Il y a sans doute beaucoup de paradoxes dus à l'excessive simplicité des structures utilisées pour modéliser les préférences. Dans les sciences humaines, il n'y a pas de lois universelles connues comme en sciences physiques. Par conséquent, les modèles sont souvent faillibles et donc susceptibles de conduire à des résultats contraires aux observations.

Il ne reste plus qu'à espérer que le lecteur courageux, qui a lu cette thèse jusqu'au bout, a pris autant de plaisir lors de cette lecture que l'auteur lors de son élaboration.

Bibliographie

- [Abello 1991] : Abello J., The weak Bruhat order of S_{Σ} , consistent sets, and Catalan number, SIAM J. Discrete Math, vol. 4 n° 1, pp 1-16, 1991.
- [Antunes et Climaco 1992] : Antunes C. et Climaco J., Sensitivity analysis in MCDM using the weight space, Operations Research Letters, vol. 12 n° 3, pp 187-196, 1992.
- [Arrow 1963] : Arrow K., Social Choice and Individual Values, Second edition, Cowles Foundation and John Wiley Sons, New-York, 1963.
- [Arrow et Raynaud 1986] : Arrow K. et Raynaud H., Social choice and multicriterion decision-making, MIT Press, Cambridge, 1986.
- [Arrow et Raynaud à paraître] : Arrow K. et Raynaud H., Masson, à paraître.
- [Bana e Costa 1988] : Bana e Costa C., A methodology for sensitivity analysis in three-criteria problems: A case study in municipal management, European Journal of Operational Research, vol. 33, pp 159-173, 1988.
- [Bell et al. 1988] : Bell D., Raiffa H. et Tversky A., Decision making: descriptive, normative and prescriptive interaction, Cambridge University press, Cambridge, 1988.
- [Berg et Bjurulf 1983] : Berg S. et Bjurulf B., A note on the paradox of voting : Anonymous preference profiles and May's formula, Public Choice, vol. 40, 1983.
- [Black 1948] : Black D., On the Rationale of Group Decision-Making, Journal of Political Economy, vol. 56, pp 23-34, 1948.
- [Blin 1973] : Blin J. M., The general concept of multidimensional consistency : some algebraic aspects of the aggregation problem, Multiple Criteria Decision-making, University of South-Carolina Press, 1973.
- [Bouyssou 1992] : Bouyssou D., Democracy and efficiency: A note on "Arrow's theorem is not a surprising result", European Journal of Operational Research, vol. 58, pp 427-430, 1992.
- [Bouyssou et al. 1993] : Bouyssou D., Perny P., Pirlot M., Tsoukiàs A. et Vincke P., A Manifesto for the New MCDA Era, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol. 2, pp 125-127, 1993.
- [Bouyssou et Pirlot 1995] : Bouyssou D. et Pirlot M., Choosing and ranking on the basis of fuzzy preference relations with the "min in favor". Fandel, Guenter (ed.) et al., Multiple criteria decision making. Proceedings of the 12th international conference, Hagen, Germany, June 19-23, 1995.

BIBLIOGRAPHIE

- [Brans et Vinke 1985] : Brans J.-P. et Vinke P., A preference ranking organization method: the PROMETHEE method, *Management Science*, vol. 31, pp 647-656, 1985.
- [Charon et al. 1996] : Charon I., Hudry O. et Woirgnard F., Ordres médians et ordres de Slater des tournois, *Mathématiques Informatique et Sciences Humaines*, vol. 133, pp 23-56, 1996.
- [Deb 1981] : Deb R., k -monotone social decision functions and the veto, *Econometrica*, vol. 49 n° 4, pp 899-909, 1981.
- [Debord 1987] : Debord B., Axiomatisation de procédures d'agrégation de préférences, Thèse de troisième cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1987.
- [De Donder et al. à paraître] : De Donder P., Le Breton M. et Truchon M., Choosing from Weighted Tournaments, *Mathematical Social Sciences*, à paraître.
- [Dridi 1980] : Dridi T., Sur les distributions binaires associées à des distributions ordinales, *Mathématiques et Sciences Humaines*, vol. 69, pp15-31, 1980.
- [Durand à paraître] : Durand S., A note on monotonicity in iterated choice functions, *Social Choice and Welfare*, à paraître.
- [Durand et Trentesaux à paraître] : Durand S. et Trentesaux D., Robustesse comparées de la méthode prudente et de la fonction de choix de Borda, *Journal of Decision Systems*, à paraître.
- [Dyer et al. 1992] : Dyer J., Fishburn P., Steuer R., Wallenius J. et Zionts S., Multiple Criteria Decision Making, MultiAttribute Utility Theory: The next ten years, *Management Science*, vol. 38 n° 5, pp 645-654, 1992.
- [Falletta 83] : Falletta N., *The paradoxicon*, Doubleday&Co, New York, 1983, traduction sous le titre *Le livre des paradoxes*, 1998.
- [Feller 1957] : Feller W., *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, New York, 1957.
- [Ferejohn et Fiorina 1974] : Ferejohn J. et Fiorina M., The Paradoxes of Not Voting: A Decision Theoric Analysis, *The American Political Science Review*, vol. 68, pp 525-536, 1974.
- [Fishburn 1970] : Fishburn P., The irrationality of transitivity in social choice, *Behavioral Science*, vol. 15, pp 119-123, 1970.
- [Fishburn 1974a] : Fishburn P., Aspects of one-stage voting rules, *Management Science*, vol. 21 n° 4, pp 422-427, 1974.
- [Fishburn 1974b] : Fishburn P., Paradoxes of Voting, *The American Political Science Review*, vol. 68, pp 537-546, 1974.
- [Fishburn 1974c] : Fishburn P., On collective rationality and a generalized impossibility theorem, *Review of Economic Studies*, vol. 41, pp 445-457, 1974.

BIBLIOGRAPHIE

- [Fishburn 1977] : Fishburn P., Condorcet Social Choice Functions, S.I.A.M. Journal on applied Mathematics, vol. 38, pp 469-489, 1977.
- [Fishburn 1978] : Fishburn P., Axioms for Approval Voting: Direct Proof, Journal of Economic Theory, vol. 19, pp 180-185, 1978.
- [Fishburn 1981] : Fishburn P., Inverted orders for monotone scoring rules, Discrete Applied Mathematics, vol. 3, pp 27-36, 1981.
- [Fishburn 1982] : Fishburn P., Monotonicity paradoxes in the theory of elections, Discrete Applied Mathematics, vol. 4, pp 119-134, 1982.
- [Fishburn 1987] : Fishburn P., Decomposing weighted digraphs into sums of chains, Discrete Applied Mathematics, vol. 16, pp 223-238, 1987.
- [Fishburn 1997] : Fishburn P., Acyclic Sets of Linear Orders, Social choice and Welfare, vol. 14 n° 1, pp 113-124, 1997.
- [Fishburn et Brams 1984] : Fishburn P. et Brams S., Manipulability of voting by sincere truncation of preferences, public choice, vol. 44, pp 397-410, 1984.
- [French 1992] : French S., Mathematical Programming Approaches to Sensitivity Calculations in Decision Analysis, Journal of Operational Research Society, vol. 43 n° 8, pp 813-819, 1992.
- [Gal et Wolf 1986] : Gal T. et Wolf K., Stability in vector maximization—A survey, European Journal of Operational Research, vol. 25, pp 169-182, 1986.
- [Gehrlein 1983] : Gehrlein W., Condorcet's paradox, Theory and Decision, vol. 15, pp 161-197, 1983.
- [Gehrlein 1994] : Gehrlein W., The expected likelihood of transitivity: A survey, Theory and Decision, vol. 37, pp 175-209, 1994.
- [Gehrlein et Fishburn 1976] : Gehrlein W. et Fishburn P., Condorcet's paradox and anonymous preference profiles, Public Choice, vol. 26, 1976.
- [Gibbard 1973] : Gibbard A., Manipulation of voting schemes: a general result, Econometrica, vol. 41, pp 587-601, 1973.
- [Grivko et Levchenkov 1994] : Grivko I. et Levchenkov V., Intrinsic properties of the self-consistent choice rule, Automation and Remote Control, vol. 55 n° 5, pp 689-697, 1994.
- [Henriet 1985] : Henriët D., The Copeland Choice Function, An Axiomatic Characterization, Social Choice and Welfare, vol. 2, pp 49-63, 1985.
- [Inada 1964] : Inada K., A note on the simple majority decision rule, Econometrica, vol. 32 n° 4, pp 525-531, 1964.
- [Keeney 1992] : Keeney R., Value-Focused Thinking, Harvard University Press, 1992.

BIBLIOGRAPHIE

- [Köhler 1978] : Köhler G., Choix multicritère et analyse algébrique des données ordinales, Thèse de troisième cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1978.
- [Kramer 1977] : Kramer G., A Dynamical Model of Political Equilibrium, *Journal of Economic Theory*, *Journal of Economic Theory*, vol. 16, pp 310-334, 1977.
- [Kreweras 1963] : Kreweras G., Les décisions collectives, *Mathématiques et Sciences Humaines*, vol. 2, pp 25-35, 1963.
- [Laslier 1996] : Laslier J.-F., Solutions de Tournois : un spicilège, *Mathématiques Informatique et Sciences Humaines*, vol. 133, pp 7-22, 1996.
- [Lepelley 1989] : Lepelley D., Contribution à l'analyse des procédures de décision collective, Thèse de troisième cycle, Université de Caen, 1989.
- [Lepelley 1993] : Lepelley D., On the probability of electing the Condorcet loser, *Mathematical Social Sciences*, vol. 25, pp 105-116, 1993.
- [Lepelley et Merlin 1996] : Lepelley D. et Merlin V., Choix social positionnel et principe majoritaire, *Cahier de Recherche du C.R.E.M.E.*, vol. 96 n° 3, 1996.
- [Mac Lean 1995] : Mac Lean I., The first golden age of social choice, 1784-1803, dans *Social choice, Welfare, and Ethics*, Cambridge University Press, 1995.
- [Marchant 1996a] : Marchant T., Agrégation de relations valuées par la méthode de Borda, en vue d'un rangement. Considérations axiomatiques, Thèse de troisième cycle, Université Libre de Bruxelles, 1996.
- [Marchant 1996b] : Marchant T., Valued Relations Aggregation with the Borda Method, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, vol. 5, pp 127-132, 1996.
- [Marchant 1999] : Marchant T., The probability of ties with scoring methods: some results, preprint Service de Mathématiques de la Gestion, U.L.B., vol. 99 n° 22, 1999.
- [Marchant et al. 1999] : Marchant T., Bouyssou D, Perny P., Pirlot M., Tsoukias A. et Vincke P., Choosing on the basis of several viewpoints: the example of voting, preprint Service de Mathématiques de la Gestion, U.L.B., vol. 99 n° 03, 1999.
- [Mareschal 1988] : Mareschal B., Weight stability intervals in multicriteria decision aid, *European Journal of Operational Research*, vol. 33, pp 54-64, 1988.
- [Mas-Colell et Sonnenschein 1972] : Mas-Colell A. et Sonnenschein H., General Possibility Theorems for Group Decisions, *Review of Economic Studies*, vol. 39, pp 185-192, 1972.
- [May 1952] : May K., A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision, *Econometrica*, vol. 20, pp 680-684, 1952.
- [Merlin 1996] : Merlin V., L'agrégation des préférences individuelles : les règles positionnelles itératives et la méthode de Copeland. Thèse de troisième cycle. Université de Caen, 1996.

BIBLIOGRAPHIE

- [Moulin 1983] : Moulin H., The strategy of social choice, North Holland publishing compagny, 1983.
- [Moulin 1988] : Moulin H., Condorcet's Principle Implies the no Show Paradox, Journal of Economic Theory, vol. 45, pp 53-64, 1988.
- [Nanson 1882] : Nanson E., Methods of Election, Transaction of the Royal Society of Victoria, vol. 18, pp 197-240, 1882.
- [Niemi et Riker 1976] : Niemi R. et Riker W, The Choice of Voting Systems, Scientific American, vol. 234, n° 6, pp 21-27, 1976.
- [Nitzan et Rubinstein 1981] : Nitzan S. et Rubinstein A., A further characterization of Borda ranking method, Public Choice, vol. 36, pp 153-158, 1981.
- [Nurmi 1988] : Nurmi H., Discrepancies in the outcomes resulting from different voting schemes, Theory and Decision, vol. 25, pp 193-208, 1988.
- [Nurmi 1999] : Nurmi H., Voting Paradoxes and How to Deal with Them, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Othmani 1998] : Othmani I., Optimisation Multicritère : Fondements et Concepts, Thèse de troisième cycle, Université Joseph Fourier Grenoble 1, 1998.
- [Park et Miller 1988] : Park S. et Miller K., Random number generators: good ones are hard to find, Communication of the A.C.M., vol. 31 n° 10, pp 1192-1201, 1988.
- [Pasquier-Dorthe et Raynaud 1990] : Pasquier-Dorthe J. et Raynaud H., Un outil d'aide à la décision multicritère, Rapport technique, Université Joseph Fourier, 1990.
- [Pérez et Barba-Romero 1995] : Pérez J. et Barba-Romero S., Three practical criteria of comparison among ordinal preference aggregating rules, European Journal of Operational Research, vol. 85, pp 473-487, 1995.
- [Pirlot 1994] : Pirlot M., Why trying to characterize the procedures used in Multi-Criteria Decision Aid, Cahiers du C.E.R.O., vol. 36, pp 283-292, 1994.
- [Rapoport A. 1967] : Rapoport A., Escape from paradox, Scientific American, vol. 217 n° 1, pp 50-56, 1967.
- [Raynaud 1981] : Raynaud H., Paradoxical results from Inada's conditions for majority rule, Rapport technique 331, Center for Research on Organizational Efficiency, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Encina Hall, Stanford University, 1981.
- [Richelson 1980] : Richelson J., Running off empty: Run-off point system, Public Choice, vol. 35, pp 457-468, 1980.
- [Rios Insua et French 1991] : Rios Insua D., French S., A framework for sensitivity analysis in discrete multi-objective decision-making, European Journal of Operational Research, vol. 54, pp 176-190, 1991.

BIBLIOGRAPHIE

- [Romero 1978] : Romero D., Variation sur l'effet Condorcet, Thèse de troisième cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1978.
- [Roy 1985] : Roy B., Méthodologie multicritère d'aide à la décision, Economica, Paris, 1985.
- [Roy 1997] : Roy B., Un chaînon manquant en RO-AD : Les conclusions robustes, Cahiers du LAMSADE, vol. 144, 1997.
- [Roy et Bouyssou 1993] : Roy B. et Bouyssou D., Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas, Economica, Paris, 1993.
- [Roy et Vanderpooten 1996] : Roy B. et Vanderpooten D., The European School of MCDA: Emergence, Basic Feature and current Work, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol. 5, pp 22-38, 1996.
- [Saari 1989] : Saari D., A Dictionary for Voting Paradoxes, Journal of Economic Theory, vol. 48, pp 443-475, 1989.
- [Saari 1994] : Saari D., Geometry of Voting, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Satterthwaite 1975] : Satterthwaite M., Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions, Journal of Economic Theory, vol. 10, pp 187-217, 1975.
- [Sen 1966] : Sen A., A possibility theorem on majority decisions, Econometrica, vol. 34 n° 2, pp 491-499, 1966.
- [Sen 1970] : Sen A., Collective Choice and Social Welfare, San Fransisco, Holden Day 1970.
- [Smith 1973] : Smith J., Aggregation of preferences with variable electorate, Econometrica, vol. 41, pp 1027-1041, 1973.
- [Stewart 1996] : Stewart T., Robustness of Additive Value Function Methods in MCDM, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol. 5, pp 301-309, 1996.
- [Tangiane 1996] : Tanguiane A., Solution to Condorcet's paradox for a large number of voters, FernUniversität Hagen, Discussion paper n° 232, 1996.
- [Terrier 1980] : Terrier E., Permutoèdre, visualisation et agrégation des préférences, Thèse de troisième cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1980.
- [Vincke 1982a] : Vincke P., Aggregation of preferences: a review, European Journal of Operational Research, vol. 9, pp 17-22, 1982.
- [Vincke 1982b] : Vincke P., Arrow's theorem is not a surprising result, European Journal of Operational Research, vol. 10, pp 22-25, 1982.
- [Wolters et Mareschal 1995] : Wolters W. et Mareschal B., Novel types of sensitivity analysis for additive MCDM methods, European Journal of Operational Research, vol. 81, pp 281-290, 1995.

BIBLIOGRAPHIE

[Young 1974] : Young H., An axiomatization of Borda's Rule, *Journal of Economic Theory*, vol. 9, pp 43-52, 1974.

[Young 1977] : Young H., Extending Condorcet's rule, *Journal of Economic Theory*, vol. 16, pp 335-353, 1977.

[Young et Levenlick 1978] : Young H. et Levenlick A., A consistent extension of Condorcet's election principle, *S.I.A.M. Journal on applied Mathematics*, vol. 35 n° 2, pp 285-300, 1978.

BIBLIOGRAPHIE

Table des Matières

Introduction générale.....	9
1. Le contexte : présentation et notation	13
1.1 Choix social ou décision multicritère ?	13
1.1.1 Présentation du choix social et de la décision multicritère.....	13
1.1.1.1 Choix social.....	13
1.1.1.2 Décision multicritère.....	14
1.1.2 Différences et similitudes	16
1.2 Notation et définitions	18
1.2.1 Fonctions de choix et d'agrégation.....	18
1.2.1.1 Structures de préférences	18
1.2.1.2 Différents problèmes.....	21
1.2.2 Quelques exemples de procédures étudiées.....	23
1.2.2.1 La méthode majoritaire	23
1.2.2.2 La méthode de Borda	24
1.2.2.3 Les méthodes de scorage.....	24
1.2.2.4 La méthode de Nanson.....	25
2. Les paradoxes dans les théories du choix social et de la décision multicritère.....	29
2.1 Les paradoxes : de Condorcet à Saari en passant par Arrow et Gibbard	29
2.1.1 Les paradoxes liés à l'approche axiomatique	30
2.1.1.1 Des théorèmes d'impossibilité.....	30
2.1.2 Les comportements surprenants de certaines procédures et autres paradoxes.	32
2.1.2.1 Comportements surprenants.....	32
2.1.2.2 Autres paradoxes.....	34
2.2 D'où viennent ces paradoxes et comment les surmonter	36
2.2.1 Analyser les implications liées aux hypothèses.....	36
2.2.1.1 Hypothèses explicites.....	37
2.2.1.2 Hypothèses implicites	40
2.2.2 Évaluer la fréquence des paradoxes.....	41
2.2.2.1 Point de vue théorique.....	42
2.2.2.2 Expérimentations	43
3. Le paradoxe des conditions de Black et Arrow-Black.....	45
3.1 Le paradoxe et sa résolution	45
3.1.1 Présentation.....	46
3.1.1.1 Notation générale	46
3.1.1.2 Définitions des conditions.....	47
3.1.2 Résolution	48
3.1.2.1 Peu d'options ou de votants	48
3.1.2.2 Plus de 5 options	53
3.2 La polydiversité des autres CTMM : espoirs et déceptions	57
3.2.1 D'autres conditions, d'autres paradoxes.....	57

TABLE DES MATIÈRES

3.2.1.1	Condition de Coombs.....	57
3.2.1.2	Condition extrême (not-in-the-middle).....	58
3.2.1.3	Condition de Ward.....	58
3.2.1.4	Condition d'étoilement.....	59
3.2.2	Résolution.....	60
3.2.2.1	Des bornes importantes.....	60
3.2.2.2	Condition de Ward.....	62
3.2.2.3	Condition de Coombs, Condition extrême.....	63
3.2.2.4	Condition d'étoilement.....	65
3.2.3	Bilan sur la polydiversité.....	67
3.2.3.1	Trois options.....	68
3.2.3.2	Quatre options.....	69
3.3	Interprétation géométrique des conditions de transitivité de la méthode majoritaire.....	70
3.3.1	Résultats.....	70
3.3.1.1	Les conditions de Black et Arrow-Black.....	70
3.3.1.2	La condition de Ward.....	71
3.3.1.3	La condition extrême.....	71
3.3.1.4	La condition de consistance multidimensionnelle.....	72
3.3.1.5	La condition d'étoilement.....	72
3.3.2	Limitations de l'approche géométrique.....	73
4.	Des paradoxes liés au principe de prudence.....	77
4.1	Qu'est-ce qu'une solution prudente ?.....	77
4.1.1	Qui sont les vainqueurs ?.....	77
4.1.2	Qui sont les vaincus ?.....	78
4.2	Des paradoxes.....	79
4.2.1	Remarques générales sur les simulations.....	80
4.2.2	Vainqueurs et vaincus.....	81
4.2.2.1	Moins de trois options.....	81
4.2.2.2	Plus de quatre options.....	86
4.2.3	Prudence et cohérence.....	93
4.2.3.1	L'axiome de cohérence.....	93
4.2.3.2	Résultats.....	94
5.	Des paradoxes liés à la monotonie.....	101
5.1	Qu'est ce que la monotonie ?.....	101
5.1.1	Les différentes monotonies.....	101
5.1.2	Interprétation géométrique.....	103
5.2	Des paradoxes.....	105
5.2.1	Pour les fonctions de choix itérées.....	106
5.2.1.1	Résultats théoriques.....	106
5.2.1.2	Résultats expérimentaux.....	113
5.2.2	Pour la prudence.....	113
5.2.2.1	Résultat théorique.....	114
5.2.2.2	Résultats expérimentaux.....	114
6.	Un paradoxe lié à la robustesse.....	117
6.1	Généralités sur la robustesse.....	117

TABLE DES MATIÈRES

6.2 Des intervalles de stabilité	118
6.2.1 Pour les méthodes de scorage	118
6.2.1.1 Lorsqu'un seul poids varie	119
6.2.1.2 Lorsque plusieurs poids varient	121
6.2.2 Pour la prudence	124
6.2.2.1 Lorsqu'un seul poids varie	124
6.2.2.2 Lorsque plusieurs poids varient	129
6.3 ... à un indice global de robustesse	132
6.3.1 Un indice local	132
6.3.1.1 Pour la fonction de choix de Borda	133
6.3.1.2 Pour la fonction de choix prudente	134
6.3.2 Un indice global donnant des résultats étonnants	138
Conclusion	143
Bibliographie	145
Table des Matières	153
Liste des figures	157
Liste des tableaux	159
Index	161

TABLE DES MATIÈRES

Liste des figures

Figure 1.1 : Triangle impossible de Penrose	9
Figure 2.1 : Le cube majoritaire pour trois options.....	39
Figure 2.2 : En gris, ensemble des points représentant des profils pour lesquels x_1 est vainqueur de Borda.....	40
Figure 3.1 : Répartition des profils	60
Figure 3.2 : Permutoèdre sur trois éléments.....	66
Figure 3.3 : Ensemble des points ne correspondant pas à un profil unimodal.....	71
Figure 3.4 : Profils suivant la condition extrême	72
Figure 3.5 : Ensemble des profils ne vérifiant pas la condition d'étoilement.....	73
Figure 4.1 : Cube majoritaire ; en gris, ensemble des profils pour lesquels x_1 est vainqueur de Condorcet (tiré de [Saari 1994]).....	83
Figure 4.2 : À gauche, ensemble des profils pour lesquels x_1 est vainqueur prudente, à droite, ensemble des profils pour lesquels x_2 est vainqueur prudente.....	83
Figure 4.3 : Profils pour lesquels x_1 est vainqueur prudente et vaincue prudente.....	84
Figure 4.4 : Pourcentages de profils dans les différentes catégories.....	86
Figure 4.5 : Nombre d'options dans les ensembles de choix prudents	89
Figure 4.6 : Nombre moyen d'options dans les ensembles de choix	90
Figure 4.7 : répartition des profils à gauche des profils ayant des options pathologiques à droite des profils aléatoires	92
Figure 4.8 : Non-respect de la cohérence.....	95
Figure 4.9 : Pourcentages de profils ne respectant pas les différentes versions de la cohérence	98
Figure 5.1 : Ensemble des points où b est vainqueur prudente.....	104
Figure 5.2 : Pourcentages de profils infirmant la monotonie stricte	115
Figure 5.3 : Pourcentages de profils instables.....	116
Figure 6.1 : Modélisation de l'intensité de préférence.....	120
Figure 6.2 : Étude de stabilité dans différentes directions	122
Figure 6.3 : Ensembles de choix pour Borda	123
Figure 6.4 : Évolutions possibles du maximin	126
Figure 6.5 : Changements de maximin.....	130
Figure 6.6 : À gauche, les choix de Borda dans l'espace des poids ; à droite les valeurs de l'indice (en hauteur)	134
Figure 6.7 : À gauche, les choix prudents dans l'espace des poids ; à droite les valeurs de l'indice (en hauteur)	135
Figure 6.8 : Toutes les inégalités de type [5] sont valides	136
Figure 6.9 : Certaines inégalités de type [5] ne sont pas valides	137
Figure 6.10 : Poids pour lesquels la signification de l'indice est fausse.....	138

LISTE DES FIGURES

Liste des tableaux

Tableau 3.1 : Ordres stricts possibles construits à partir d'un ordre de référence donné dans une situation suivant la condition de Black.....	49
Tableau 3.2 : Ordres stricts répétés	50
Tableau 3.3 : Équivalents lorsque n est grand.....	57
Tableau 3.4 : Résultats pour trois options	69
Tableau 3.5 : Résultats pour quatre options	69
Tableau 4.1 : Pourcentage de profils ambigus	88
Tableau 6.2 : Résultats sur des profils aléatoires	139

LISTE DES TABLEAUX

Index

- anonymat 17
 antipluralité 24; 25; 41
 axiome de Condorcet 23; 28; 31; 38; 41; 79; 103
 axiome de Pareto 92; 101; 102
 Borda 14; 24; 25; 30; 31; 32; 37; 40; 41; 42; 74; 75; 81; 82; 83; 84; 85; 88; 100; 104; 106; 109; 111; 112; 113; 114; 115; 116; 117; 126; 127; 128; 131; 133; 134
 candidat 17; 19
 cohérence 38; 75; 88; 89; 90; 91; 92; 93; 95
 condition d'étoilement 57; 63; 64; 65; 66; 69
 condition d'unimaximalité 43; 44; 45; 49; 51; 52; 54; 55; 56; 58; 60; 61; 62; 65; 66
 condition de Black 40; 43; 44; 45; 46; 47; 49; 51; 54; 55; 56; 58; 59; 61; 62; 65; 66; 67; 68; 69; 70
 condition de consistance multidimensionnelle 57; 69
 condition de Coombs 55; 56; 58; 59; 61; 62; 65; 66
 condition de Ward 32; 44; 56; 58; 59; 60; 61; 65; 66; 68; 69; 70
 condition extrême 56; 58; 61; 62; 65; 66; 68; 69
 critère 19; 76; 90; 101; 111; 112; 115; 123; 133
 cube majoritaire 36; 37; 67; 70; 71; 78; 81; 89; 90; 91
 cycle 20; 68; 69
 diversité 32; 43; 44; 45; 51; 52; 53; 54; 55; 56; 57; 58; 59; 61; 65; 66; 68; 71
 Dodgson 28; 36
 fonction de choix 21; 23; 36; 73; 93; 111
 Hare 25; 41; 103
 homogénéité 28; 36; 78; 97; 99
 indice local de stabilité 122; 126; 127; 128; 131; 132; 133
 intervalle de stabilité 112; 115; 118; 123; 125; 131; 134
 matrice de surclassement 21; 33; 73; 74; 78; 80; 81; 91; 104; 105; 107; 114; 115; 118; 119; 121; 123; 128
 méthode de Schwartz 103; 104
 méthode majoritaire 14; 19; 20; 23; 24; 25; 27; 40; 43; 56; 63; 64; 65; 67; 75; 79; 96; 103
 monotonie 32; 95; 96; 97; 99; 100; 102; 103; 104; 106; 107; 108
 monotonie stricte 84; 96; 98; 99; 102; 103; 106; 107; 108; 109; 110
 Nanson 25; 41; 84; 85; 99; 100; 103; 104; 105; 106; 107; 108
 neutralité 99; 102
 option 19; 29; 101; 111
 ordre médian 57; 63; 64
 ordre strict 20; 22; 28; 39; 76; 104; 112
 permutant 104; 105
 permutoèdre 57; 69
 pluralité 24; 25; 31; 38; 41; 100
 polydiversité 43; 44; 46; 47; 49; 51; 54; 55; 57; 58; 59; 61; 62; 64; 65; 66; 67; 70
 préordre partiel 20
 profil 20; 21; 22; 33; 35; 37; 91; 94; 112; 113
 Prométhée 112; 114; 123; 128; 134

INDEX

prudence 41; 73; 74; 75; 77; 78; 81; 83; 85;
89; 91; 92; 93; 107; 118; 126; 128; 133;
134

rang 20; 24; 85; 86; 105

règle de Coombs 25; 41; 100; 103

relation binaire 16; 19; 20; 32; 103

relation majoritaire 23; 43; 103

robustesse 15; 111; 112; 126; 128; 133; 134

scorage 24; 25; 31; 32; 42; 100; 112

situation 35; 40; 62; 76

symétrie 99; 101; 102; 103

théorème d'Arrow 14; 22; 28; 29; 34; 35;
39; 96

tournoi 20; 33

transformation élémentaire 95; 96; 97; 98;
101; 102; 104; 105; 106; 107; 108; 109

unanimité 102

votant 19; 45; 55; 57; 75