Zéros réels et taille des fonctions L de Rankin-Selberg par rapport au niveau

Guillaume Ricotta

▶ **To cite this version:**

Guillaume Ricotta. Zéros réels et taille des fonctions L de Rankin-Selberg par rapport au niveau. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2004. Français. NNT : . tel-00006428

HAL Id: tel-00006428
https://theses.hal.science/tel-00006428

Submitted on 8 Jul 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE MONTPELLIER II

Discipline : **Théorie analytique des nombres**

Formation Doctorale : **Mathématiques**

Ecole Doctorale : **Information, Structures et Systèmes**

présentée et soutenue publiquement par

Guillaume RICOTTA

le 25 juin 2004

Zéros réels et taille des fonctions L de Rankin-Selberg par rapport au niveau

JURY

B. Conrey
E. Fouvry — Président du jury
E. Kowalski
P. Michel — Directeur de thèse
E. Royer
R. Silhol

RAPPORTEURS

E. Fouvry
H. Iwaniec

UNIVERSITE MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE MONTPELLIER II

Discipline : **Théorie analytique des nombres**

Formation Doctorale : **Mathématiques**

Ecole Doctorale : **Information, Structures et Systèmes**

présentée et soutenue publiquement par

Guillaume RICOTTA

le 25 juin 2004

Zéros réels et taille des fonctions L de Rankin-Selberg par rapport au niveau

JURY

B. Conrey
E. Fouvry — Président du jury
E. Kowalski
P. Michel — Directeur de thèse
E. Royer
R. Silhol

RAPPORTEURS

E. Fouvry
H. Iwaniec

À mon grand-père,
Secundo Taddei :
un homme d'exception.

À la mémoire de Jean-Marie Exbrayat.

Notations

Quelques ensembles

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels :

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \cdots\}$$

alors que $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs :

$$\mathbb{Z} := \{\cdots - 2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$

et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. L'ensemble des nombres premiers est noté $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} := \{3, 5, 7, \cdots\}.$$

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$ alors que l'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. Si z est un nombre complexe alors sa partie réelle est $\Re(z)$ et sa partie imaginaire est $\Im(z)$.
Pour chaque ensemble $\mathbb{E}$ précédemment décrit, $\mathbb{E}^*$ est l'ensemble des éléments non-nuls de $\mathbb{E}$:

$$\mathbb{E}^* := \{e \in \mathbb{E}, x \neq 0\}.$$

Enfin, si A est un ensemble fini, on notera $\#A$ ou $|A|$ son cardinal.

Fonctions spéciales

Si A et B sont des ensembles alors $\mathcal{F}(A, B)$ désigne l'ensemble des fonctions de A dans B. Pour tout ensemble A, χ_A est la fonction caractéristique de A définie par :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, si N est un entier naturel non-nul, $\chi_N^{\square}$ désigne la fonction caractéristique des carrés premiers avec N.
$\log_2$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui à tout nombre réel x strictement positif associe $\log(\log(x))$.
E est la fonction partie entière : c'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout nombre réel x associe l'unique entier relatif $E(x)$ vérifiant :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Si $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction qui admet un développement en produit Eulérien alors celui-ci sera automatiquement écrit de la façon suivante :

$$L(z) := \prod_{p \in \mathcal{P}} L_p(z).$$

En tout nombre premier p, L_p est le facteur local de L en p. Pour tout entier naturel non-nul N, $L^{(N)}$ est la fonction suivante :

$$L^{(N)}(z) := \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\nmid N}} L_p(z)$$

alors que $L_{(N)}$ est définie par :

$$L_{(N)}(z) := \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\mid N}} L_p(z).$$

Comparaison de fonctions

Soient $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions.
La notation $f = \mathcal{O}_{u,v,\ldots}(g)$ signifie qu'il existe une constante $C \geq 0$ dépendant de $u, v, \cdots$ telle que pour tout nombre complexe z dans un domaine précisé ou non,

$$|f(z)| \leq Cg(z).$$

On écrira aussi : $f \ll_{u,v,\ldots} g$.
La notation $f = o_{u,v,\ldots}(g)$ signifie que f est une fonction dépendant de $u, v, \cdots$ telle que pour tout nombre complexe z de module suffisamment grand,

$$f(z) = g(z)\varepsilon(z)$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 lorsque $|z| \to +\infty$.

Symbole de Kronecker

Soit $\mathcal{E}$ un énoncé Mathématique. Le symbole $\delta_{\mathcal{E}}$ associé à cet énoncé est défini de la façon suivante :

$$\delta_{\mathcal{E}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{E} \text{ est vrai ,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\mathcal{E}$ est un énoncé d'égalité, la notation simplificatrice suivante sera adoptée :

$$\delta_{x_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fonctions arithmétiques

Soit N un entier naturel non-nul et p un nombre premier. $p_1(N)$ désigne le plus petit diviseur premier de N. Les fonctions suivantes sont des fonctions multiplicatives. Le nombre de diviseurs d'un entier est donné par la fonction τ :

$$\tau(p) = 2.$$

Le nombre de diviseurs premiers d'un entier est donné par la fonction ω :

$$\omega(p) = 1.$$

La fonction μ de Möebius est définie par :

$$\mu(p) = -1.$$

La fonction φ d'Euler est donnée par :

$$\varphi(p) = p\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

alors que :

$$\nu(p) = p\left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Le caractère trivial de Dirichlet de module N est définie par :

$$\varepsilon_N(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \nmid N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin,

$$\tau_3(N) := \left|\{(i,j,k) \in \mathbb{N}^{*3}, ijk = N\}\right|.$$

Relations arithmétiques

Soient m et n deux entiers naturels non-nuls.
Si p est un nombre premier alors la notation $p \,||\, n$ signifie que p divise n mais que p^2 ne divise pas n. En d'autres termes, la valuation p-adique de n vaut 1.
La notation $m \mid n^\infty$ signifie que si p est un nombre premier divisant m alors p divise n. Autrement dit, pour tout nombre premier p, la valuation p-adique de m est inférieure à la valuation p-adique de n.
$m \wedge n$ désigne le plus grand commun diviseur de m et de n.

Algèbre linéaire

Si γ est une matrice carrée à coefficients complexes alors $\det(\gamma)$ est le déterminant de cette matrice et $\mathrm{tr}(\gamma)$ est sa trace.

Introduction

Présentation des résultats et des techniques utilisées

Ce travail a été motivé par un résultat très surprenant de J.B. Conrey et K. Soundararajan qui ont prouvé dans **[CoSo]** que :

Théorème (J.B. Conrey-K. Soundararajan (2002)). *Il existe une infinité (au moins* 20% *en un sens convenable) de caractères de Dirichlet primitifs* χ *dont la fonction* L *de Dirichlet* $L(\chi,s):=\sum_n \chi(n)n^{-s}$ *ne s'annule pas sur le segment critique* $[0,1]$.

La famille de fonctions L étudiée par les auteurs est :

$$\mathcal{G}:=\coprod_{X\in\{2^m,m\in\mathbb{N}^*\}}\mathcal{G}(X)$$

avec :

$$\mathcal{G}(X):=\left\{L\left(\chi_{-8d},.\right),2\nmid d,\mu^2(d)=1,X\leq d\leq 2X\right\}$$

où $\chi_{-8d}(n):=\left(\frac{-8d}{n}\right)$ $(n\in\mathbb{Z})$ est le symbole de Kronecker. Enumérons les propriétés de cette famille qui jouent un rôle crucial au cours de la preuve de ce résultat :

- les équations fonctionnelles de chaque fonction L de cette famille ont le même signe,
- ce signe vaut un ; par conséquent, l'ordre d'annulation au point critique $\frac{1}{2}$ de chaque fonction L de cette famille est un entier naturel pair,
- le type de symétrie de cette famille est le type symplectique ce qui entraîne une répulsion du premier zéro de chaque fonction L de cette famille loin de l'axe réel et motive la méthode utilisée par les auteurs.

K. Soundararajan a annoncé aux Journées Arithmétiques 2003 de Graz avoir prouvé un résultat similaire pour les familles :

$$\mathcal{H}_{\pm}:=\coprod_{K\in\{2^m,m\in\mathbb{N}^*\}}\mathcal{H}_{\pm}(K)$$

avec :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{+}(K) &:= \left\{L\left(f,.\right),f\in S_k^p(1),K\leq k\leq 2K,k\equiv 0\,[4]\right\},\\ \mathcal{H}_{-}(K) &:= \left\{L\left(f,.\right),f\in S_k^p(1),K\leq k\leq 2K,k\equiv 2\,[4]\right\}\end{aligned}$$

où $S_k^p(1)$ désigne l'ensemble des formes primitives cuspidales de niveau 1, de poids k et de caractère trivial. Il est alors naturel de tenter de généraliser de tels résultats à d'autres familles de fonctions L. Dans cette introduction, g est une forme primitive cuspidale **fixée** de niveau D sans facteurs carrés, de poids k_g et de caractère trivial. Notons $S_k^p(q)$ l'ensemble

des formes primitives (arithmétiquement normalisées) cuspidales de niveau q, de poids k et de caractère trivial et considérons la famille :

$$\mathcal{F} = \coprod_{\substack{q \in \mathcal{P} \\ q \nmid D}} \mathcal{F}(q)$$

avec :

$$\mathcal{F}(q) := \{L(f \times g, .), f \in S_k^p(q)\}$$

où $L(f \times g, .)$ désigne la fonction L de Rankin-Selberg associée à f et g et $\mathcal{P}$ représente l'ensemble des nombres premiers. La famille $\mathcal{F}$ partage les mêmes propriétés (au moins conjecturalement) que celles citées précédemment pour la famille $\mathcal{G}$. Le nouveau challenge repose dans le fait que le conducteur analytique noté $Q_{f\times g}(0)$ de toute $L(f \times g, .)$ appartenant à $\mathcal{F}(q)$ est grand en comparaison avec la taille de $|\mathcal{F}(q)|$; on a :

$$\frac{\log Q_{f\times g}(0)}{\log |\mathcal{F}(q)|} \to 2 \quad \text{lorsque} \quad q \to +\infty$$

alors que pour les familles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}_\pm$, on a :

$$\frac{\log Q_{\chi_{-8}d}(0)}{\log |\mathcal{G}(X)|} \to 1, \frac{\log Q_f(0)}{\log |\mathcal{H}_\pm(K)|} \to 1 \text{ lorsque respectivement } X, K \to +\infty.$$

En particulier, le second moment (dont l'évaluation est nécessaire pour appliquer la **méthode de ramollissement**) est déjà critique dans notre cas alors que pour les trois autres familles, le second moment n'est pas critique (le moment critique dans ces cas est le quatrième). De plus, les fonctions L de la famille $\mathcal{F}$ sont des produits Eulériens de degré 4 (au lieu de un ou deux dans les autres cas) ce qui accroît significativement l'analyse combinatoire.

Pour énoncer notre résultat, on introduit l'opérateur de moyenne harmonique :

$$A_q^h[\alpha] := \sum_{f \in S_k^p(q)}^{h} \alpha_f := \sum_{f \in S_k^p(q)} \omega_q(f)\alpha_f$$

pour toute suite de nombres complexes $\alpha_.$ indexée par $S_k^p(q)$ où le poids harmonique est défini par :

$$\omega_q(f) := \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}\langle f, f\rangle_q}$$

et $\langle ., . \rangle_q$ désigne le produit scalaire de Petersson. Afin de donner un sens à la notion de pourcentage, on introduit aussi la mesure de probabilité harmonique sur $S_k^p(q)$. Pour toute partie A de $S_k^p(q)$, on pose :

$$\mu_q^h(A) := \frac{1}{A_q^h[1]} A_q^h\left[\chi_A(.)\right]$$

où χ_A désigne la fonction caractéristique de A. Il est possible maintenant d'énoncer l'analogue du résultat obtenu par J.B. Conrey et K. Soundararajan :

Théorème A. *Soit g une forme primitive cuspidale de niveau D sans facteurs carrés, de poids $k_g \geq 22$ et de caractère trivial. Il existe une infinité (au moins 1.8% en un sens convenable) de fonctions L de Rankin-Selberg $L(f \times g, .)$, où f décrit l'ensemble des formes primitives cuspidales de niveau premier q suffisamment grand, de poids $k \geq k_g + 6$ et de caractère trivial qui admettent au plus huit zéros réels non-triviaux. Plus précisément, pour q un nombre premier et premier avec D, et $k \geq k_g + 6$, on a :*

$$\mu_q^h\left(\{f \in S_k^p(q), L(f \times g, .) \text{ admet au plus huit zéros dans } [0,1]\}\right) \geq 0.018 + o_g(1).$$

Remarque 0.0.1. En supposant la conjecture de Ramanujan-Petersson-Selberg (hypothèse $H_2(0)$ page suivante), on obtient 4% de fonctions L de Rankin-Selberg ayant au plus 6 zéros réels non-triviaux. Cependant, même cette conjecture puissante et profonde ne semble pas donner l'existence d'une infinité de fonctions L de Rankin-Selberg sans zéros dans $[0,1]$ par la méthode actuelle.

Remarque 0.0.2. On a aussi établi au cours de la preuve du théorème A que le rang analytique de la famille $\mathcal{F}$ défini par :

$$r(f \times g) := \mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}} L(f \times g, s)$$

est borné en moyenne et de façon plus précise satisfait :

$$\frac{1}{A_q^h[1]} A_q^h[r(. \times g)] \leq 9.82 + o_g(1).$$

On peut remplacer 9.82 par 7.66 en supposant la conjecture de Ramanujan-Petersson-Selberg. En fait, en appliquant la procédure décrite dans **[H-BMi]**, on obtient la décroissance exponentielle du rang analytique de la famille $\mathcal{F}$ à savoir il existe des constantes absolues $B, C > 0$ telles que :

$$\frac{1}{A_q^h[1]} A_q^h\left[\exp\left(Br(. \times g)\right)\right] \leq C.$$

La preuve du théorème A repose sur des formules asymptotiques robustes pour le second moment harmonique ramolli de la famille $\mathcal{F}$ défini par :

$$\mathcal{W}^h(g;\mu) := A_q^h\left[\left|\mathcal{L}\left(. \times g, \frac{1}{2} + \mu\right)\right|^2\right] \tag{0.0.1}$$

où :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{L}(f \times g, s) := L(f \times g, s) \sum_{1 \leq l \leq L} \frac{\lambda_f(l)}{l^s} x_l(g, s)$$

avec $L \geq 1$ aussi grand que possible. Ici, les $(x_l(g,s))_{1 \leq l \leq L}$ sont des coefficients bien choisis dépendant de s, g, $0 < \Upsilon < 1$ et d'un polynôme P satisfaisant $P(0) = P'(0) = P'(\Upsilon) = 0$ et $P(\Upsilon) = 1$. Nos résultats techniques principaux sont des formules asymptotiques pour $\mathcal{W}^h(g;\mu)$ lorsque μ est à une distance de l'ordre de $\frac{1}{\log q}$ du point critique :

$$\frac{\varepsilon_0}{\log q} \leq |\mu| \ll \frac{1}{\log q}$$

pour une constante absolue $\varepsilon_0 > 0$. Le résultat précis est le suivant. En posant pour tous nombres réels u et v :

$$\mathcal{V}^{\Upsilon}_{\Delta,P}(u,v) := 1 + \frac{\exp(-u)}{\Delta}\left(\frac{\sinh u}{u} - \frac{\sin v}{v}\right) \int_0^{\Upsilon} \exp(-2u\Delta(1-x))\left|P'(x) + \frac{P''(x)}{2(u+iv)\Delta}\right|^2 \mathrm{d}x$$

avec $\Delta := \frac{\log L}{2\log q}$ la longueur (logarithmique) relative du ramollisseur, on trouve que si $L < \sqrt{q}$ alors :

$$\mathcal{W}^h(g;\mu) = \mathcal{V}(2\log(q)\Re(\mu), 2\log(q)\Im(\mu)) + \mathrm{Errsec}(q,L;\mu) + \mathcal{O}_{k,g}\left(\frac{1}{q^{\delta}} + \frac{1}{\log q}\left(\chi_{\mathbb{R}_+}(\tau)\, L^{-2\tau(1-\Upsilon)} + \chi_{\mathbb{R}_-}(\tau)\, q^{-2\tau} L^{-4\tau}\right)\right) \tag{0.0.2}$$

où δ est une constante absolue strictement positive et une borne pour le terme d'erreur est donnée par :

$$\mathrm{Errsec}(q,L;\mu) = \mathcal{O}_{k,g}\left(\frac{1}{q^{\alpha}}\right) \tag{0.0.3}$$

pour une constante absolue $\alpha > 0$ lorsque L n'est pas trop grand par rapport à q.

Remarque 0.0.3. L'asymptotique du second moment harmonique ramolli de cette famille est la même que celle du second moment ramolli de la famille $\mathcal{G}$ étudié par J.B. Conrey et K. Soundararajan. Cela est en accord avec le modèle des matrices aléatoires étant donné que ces deux familles ont le même type de symétrie.

Le fait que (0.0.3) soit vrai pour L une petite puissance positive de q est une conséquence du travail de E. Kowalski, P. Michel et J. Vanderkam (**[KoMiVa]**) et leur résultat entraîne que :

Proposition D. *Soit g une forme primitive cuspidale de niveau D sans facteurs carrés et de caractère trivial. Supposons que q est un nombre premier, premier avec D et qu'il n'y a que des formes nouvelles dans $S_k(q)$. Si $|\mu| \ll \frac{1}{\log q}$ alors pour tout entier naturel non-nul L,*

$$Errsec(q,L;\mu) = \mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((qL)^{\varepsilon}\left(\frac{L^{\frac{5}{2}}}{q^{\frac{1}{12}}} + \frac{L^{\frac{21}{4}}}{q^{\frac{1}{4}}}\right)\right) \tag{0.0.4}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. En particulier, si $\Delta < \frac{1}{60} = 0.01666...$ alors :

$$Errsec(q,L;\mu) = \mathcal{O}_{k,g}\left(\frac{1}{q^{\alpha}}\right)$$

pour une constante absolue $\alpha > 0$.

C'est une conséquence de la formule asymptotique prouvée dans **[KoMiVa]** des seconds moments harmoniques tordus de la famille qui sont définis par :

$$\mathcal{M}_g^h(\mu;l) := A_q^h \left[L\left(.\times g, \frac{1}{2}+\mu\right) L\left(.\times g, \frac{1}{2}+\overline{\mu}\right) \lambda_.(l)\right] \tag{0.0.5}$$

où $\mu \in \mathbb{C}$, $l \geq 1$ et $\lambda_.(l)$ est une valeur propre de Hecke. Ils ont montré dans **[KoMiVa]** que :

Théorème (E. Kowalski-P. Michel- J. Vanderkam (2002)). *Soit g une forme primitive cuspidale de niveau D sans facteurs carrés et de caractère trivial. Supposons que q est premier, premier avec D et qu'il n'y a que des formes nouvelles dans $S_k(q)$. Si $|\Re(\mu)| \ll \frac{1}{\log q}$ alors pour tout entier naturel non-nul $l < q$,*

$$(qD)^{2\Re(\mu)}\, \mathcal{M}_g^h(\mu;l) = MT(\mu) + Errtwist(q,l;\mu) \tag{0.0.6}$$

où $MT(\mu)$ désigne le terme principal et une borne pour le terme d'erreur est donnée par :

$$Errtwist(q,l;\mu) = \mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((ql)^{\varepsilon} \left(1+|\Im(\mu)|\right)^{B} \left(\frac{l^{\frac{3}{4}}}{q^{\frac{1}{12}}} + \frac{l^{\frac{17}{8}}}{q^{\frac{1}{4}}} \right)\right) \tag{0.0.7}$$

pour une constante absolue $B > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$.

Ceci n'est cependant pas suffisant pour obtenir le théorème A car la longueur admissible (strictement inférieur à $1/60$) est trop courte pour ramollir efficacement. [1]

Notre principale contribution est une augmentation notable de la longueur de ramollisseur autorisée grâce à l'intervention de la théorie spectrale des formes automorphes. Pour pouvoir énoncer notre résultat, introduisons l'hypothèse suivante qui est une approximation de la conjecture de Ramanujan-Petersson-Selberg.

Hypothèse $\mathbf{H_2}(\theta)$. Soit π une forme automorphe cuspidale sur $GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ de paramètres de Hecke locaux $\alpha_\pi^{(1)}(p)$, $\alpha_\pi^{(2)}(p)$ en tout nombre premier p et $\mu_\pi^{(1)}(\infty)$, $\mu_\pi^{(2)}(\infty)$ en l'infini. Si π_p ($p \in \mathcal{P}$) et π_∞ ne sont pas ramifiées alors on dispose des bornes suivantes pour j dans $\{1,2\}$:

$$\begin{aligned} |\alpha_\pi^{(j)}(p)| &\leq p^{\theta}, \\ |\Re\left(\mu_\pi^{(j)}(\infty)\right)| &\leq \theta. \end{aligned}$$

On dit que θ est *admisible* si $H_2(\theta)$ est satisfaite. Pour l'instant, $\theta_0 = \frac{7}{64}$ est le plus petit réel admissible suite aux travaux de H. Kim, F. Shahidi et P. Sarnak (confer **[KiSh]** et **[KiSa]**).

Théorème B. *Soit α un nombre réel dans $]0,1[$. Soient g une forme primitive cuspidale de niveau D sans facteurs carrés, de poids $k_g > 1 + \frac{5}{2(1-\alpha)}$ et de caractère trivial et μ un*

[1] avec $\Delta < \frac{1}{60}$ nous obtenons une proportion positive de $L(f\times g,.)$ s'annulant au plus 22 fois sur $[0,1]$.

nombre complexe. Supposons que q est premier, premier avec D et que $k \geq k_g + 6$. Si θ est admissible et $|\Re(\mu)| \ll \frac{1}{\log q}$ alors pour tout entier naturel non-nul l,

$$Errtwist(q,l;\mu) = \mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((ql)^{\varepsilon}(1+|\Im(\mu)|)^{B}\left(\frac{l^{2+\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{l^{\frac{9}{4}+\frac{\theta}{2}-\alpha}}{q^{\alpha-\frac{1}{2}-\theta}}\right)\right) \tag{0.0.8}$$

et pour tout entier naturel non-nul L,

$$Errsec(q,L;\mu) = \mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((qL)^{\varepsilon}(1+|\Im(\mu)|)^{B}\left(\frac{L^{5+2\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{L^{\frac{11}{2}+\theta-2\alpha}}{q^{\alpha-\frac{1}{2}-\theta}}\right)\right). \tag{0.0.9}$$

pour une constante absolue $B > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$. Par conséquent, sous $H_2(\theta)$, si Δ est strictement inférieur à $\Delta_{max}(\theta) := \frac{1-2\theta}{4(5+2\theta)}$ alors :

$$Errsec(q,L;\mu) = \mathcal{O}_{k,g}\left(\frac{1}{q^{\alpha}}\right)$$

pour une constante absolue $\alpha > 0$.

Remarque 0.0.4. Nottons que :

$$\begin{aligned}\Delta_{max}(\theta_0) &= \frac{25}{668} = 0.03742...\\ \Delta_{max}(0) &= \frac{1}{20} = 0.05.\end{aligned}$$

La borne du terme d'erreur donnée en (0.0.7) provient de la résolution par les auteurs d'un problème de convolution avec décalage additif qui ont conjointement utilisé la méthode du δ-symbole de W. Duke, J.B. Friedlander et H. Iwaniec (**[DuFrIw]**). L'estimation du terme d'erreur est amélioré par une technique de P. Sarnak (confer **[Sa]**) qui systématise l'usage de la théorie des formes automorphes. Cependant, cette méthode seule nous autorise seulement à prendre un ramollisseur de longueur $\Delta < \frac{1-2\theta}{8(4+\theta)}$ sous $H_2(\theta)$ et nous devons la raffiner. En particulier, il s'agit de considérer le problème de convolution avec décalage additif en moyenne et de détecter des compensations grâce à des inégalités de grand crible. Il s'agit aussi d'utiliser un rafinement de B. Kroetz et R.J. Stanton sans lequel on ne pourrait prendre qu'un ramollisseur de longueur $\Delta < \frac{1-2\theta}{4(7+2\theta)}$ sous $H_2(\theta)$.

Une autre conséquence de ces améliorations est une nouvelle borne de sous-convexité pour les fonctions L de Rankin-Selberg par rapport au niveau obtenue par la **méthode d'amplification** :

Théorème C. *Soit g une forme primitive cuspidale de niveau sans facteurs carrés, de poids $k_g \geq 20$ et de caractère trivial. Supposons que q est un nombre premier suffisamment grand et $k \geq k_g + 6$. Si θ est admissible alors pour tout entier naturel j et pour toute forme f dans $S_k^p(q)$, on a :*

$$\left|L^{(j)}\left(f \times g, \frac{1}{2}+it\right)\right| \ll_{\varepsilon,k,j,g} (1+|t|)^{B} q^{\frac{1}{2}-\omega(\theta)+\varepsilon}, \tag{0.0.10}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ où t est un nombre réel, l'exposant $B > 0$ est une constante absolue et :

$$\omega(\theta) := \frac{1-2\theta}{4(9+4\theta)}.$$

Remarque 0.0.5. Dans **[KoMiVa]**, le même résultat mais avec $\omega = \frac{1}{80} = 0.0125$ au lieu de $\omega(\theta)$ a été prouvé. Nottons que :

$$\begin{aligned} \omega(\theta_0) &= \frac{25}{1208} = 0.020695..., \\ \omega(0) &= \frac{1}{36} = 0.027777... \end{aligned}$$

Plan du mémoire

Nous allons donner ici un plan succinct de ce mémoire.

- Le chapitre 1 est une présentation générale de la notion de fonctions L agrémentée de tous les exemples de fonctions L qui interviendront dans la suite.
- Le chapitre 2 met l'accent sur la notion de familles de fonctions L et insiste sur la notion de moment critique d'une famille de fonctions L. Trois exemples de telles familles sont détaillées, notamment la famille $\mathcal{F}$ de fonctions L de Rankin-Selberg dont l'étude analytique est la raison de ce mémoire.
- Le chapitre 3 donne les énoncés précis et les preuves complètes de toutes les formules asymptotiques obtenues pour le second moment harmonique ramolli de la famille $\mathcal{F}$. La preuve de la proposition D est donnée dans ce chapitre.
- Le chapitre 4 est le chapitre le plus important de ce mémoire car il contient la résolution par une méthode spectrale considérée en moyenne du problème de convolution avec décalage additif responsable de la limitation de la longueur du ramollisseur. La preuve du théorème B est détaillée dans ce chapitre.
- Le chapitre 5 contient la preuve du théorème A et expose le modèle matriciel aléatoire des petits zéros d'une famille de fonctions L. Un des objectifs de ce chapitre est de donner de nouvelles preuves de la pertinence de ce modèle.
- Le chapitre 6 traîte de façon générale du problème de sous-convexité en théorie analytique des nombres et de ses applications arithmétiques. La preuve du théorème C y est présentée.

Remerciements

Je remercie très sincèrement :

- mon directeur de thèse, le Professeur Philippe Michel, sans qui ce travail n'aurait sûrement pas vu le jour. Ses convictions profondes, ses intuitions étonnantes et ses conseils éclairés ont eu raison de mes doutes. Je lui exprime aussi toute ma reconnaissance pour m'avoir permis de me déplacer à de nombreuses reprises et d'avoir été ainsi au coeur de l'action ;
- le Professeur Henryk Iwaniec pour avoir accepté de rapporté ma thèse ;
- le Professeur Etienne Fouvry, rapporteur de cette thèse, pour son invitation au séminaire de théorie analytique et élémentaire des nombres de l'université de Paris-Sud XI ;
- le Professeur Emmanuel Kowalski, membre du jury, pour ses nombreuses remarques Mathématiques et pour l'acceuil qui m'a été réservé à l'Université de Bordeaux I ;
- le Professeur Brian Conrey pour avoir interrompu son séjour à Cambridge afin d'être présent le jour de ma soutenance ;
- le Professeur Robert Silhol pour avoir accepté de faire partie du jury ;
- Emmanuel Royer pour non seulement sa disponibilité quotidienne et ses conseils techniques avisés (notamment dans la dernière ligne droite...) mais aussi pour sa gentillesse naturelle ;
- la jeune équipe de théorie des nombres de Montpellier pour le dynamisme qu'elle m'a insufflé ;
- mon professeur de Mathématiques Supérieures, Michel Alessandri, pour m'avoir initié aux Mathématiques et pour m'avoir enseigner les solides bases nécessaires ;
- mon professeur de Mathématiques de terminale, Philippe Granier, pour m'avoir, le premier, fait prendre conscience qu'il serait judicieux de poursuivre dans la voie royale des Mathématiques ;
- le Fields Institute de Toronto (Ontario, Canada) pour l'accueil exceptionnel qui m'a été réservé et pour les excellentes conditions de travail dont j'ai pu jouir pendant un mois. Une partie des résultats présentés dans ce mémoire a vu le jour durant ma visite ;
- les doctorants du département de Mathématiques pour nos discussions Mathématiques et autres, nos repas pris en commun, quelques soirées exceptionnelles partagées. Je pense notamment à Olivier Brahic, Florent Balacheff, Yves Guiraud, Daniel Maerten, Christophe Nègre, Jérôme Petit et Hassène Siby ;
- les biostatisticiennes Sandie Ferrigno et Marie-José Martinez pour leur touche de féminité dans ce monde d'hommes ;
- mon ami et Mathématicien Pierre Charollois à qui je souhaite toute la réussite qu'il mérite ;
- les secrétaires du département de Mathématiques pour leur disponibilité avec une mention spéciale pour Pierrette Arnaud, Nicole Grachet, Bernadette Lacan et Geneviève

Piard ;
- les bibliothécaires de la bibliothèque de recherche de Mathématiques avec une énorme pensée pour Sarah Dubaquier à qui je souhaite de trouver une «nouvelle» structure où elle pourra enfin s'épanouir professionnellement ;
- Baptiste Chapuisat pour la gestion de mes problèmes informatiques quotidiens ;
- mes parents pour m'avoir supporté (et pas seulement financièrement) pendant vingt-huit années et pour m'avoir donné tout leur amour ;
- ma petite soeur Aurélie à qui je souhaite beaucoup de courage pour la fin (?) de ses études ;
- ma grande famille pour sa sollicitude générale ;
- mes amis grand-mottois (David, Davy, Julia, Julien, Sylvain et Yann) qui ont facilité mon insertion dans ce petit village et grâce à qui mon séjour restera éternellement gravé dans ma mémoire ;
- mon ami Jean-Baptiste Quiot : te souviens-tu de toutes nos aventures, communes ou non, souvent nocturnes, au lycée Joffre ? ;
- tous mes ami(e)s que je ne peux pas tous citer sous peine d'en oublier. Chacun d'entre eux m'a enrichi de sa personnalité.

Table des matières

Notations **7**

Introduction **11**

Remerciements **21**

1 Fonctions L **33**
1.1 Présentation générale 33
1.2 Fonctions L de Dirichlet 35
1.3 Fonctions L de formes modulaires cuspidales 36
1.3.1 Formes modulaires cuspidales 36
1.3.2 Fonctions L associées 42
1.4 Fonctions L de courbes elliptiques 42
1.5 Fonctions L de carré symétrique 43
1.6 Fonctions L de Rankin-Selberg 44

2 Familles de fonctions L et moments **47**
2.1 Notion de familles et exemples 47
2.1.1 Exemple A : Famille de fonctions L de Dirichlet 48
2.1.2 Exemple B : Familles de fonctions L de formes modulaires 48
2.1.3 Exemple C : Famille de fonctions L de Rankin-Selberg 49
2.2 Méthode des moments 49
2.2.1 Description de la méthode 49
2.2.2 Formules de trace 53
2.2.3 Moments ramollis 56

3 Second moment harmonique ramolli des fonctions L de Rankin-Selberg **61**
3.1 Présentation des résultats 62
3.2 Fonction L de Rankin-Selberg ramollie 64
3.3 Le second moment harmonique ramolli autour du point critique 67
3.3.1 Les seconds moments harmoniques tordus selon E. Kowalski, P. Michel et J. Vanderkam 67
3.3.2 Application au second moment harmonique ramolli 69
3.3.3 Contribution des petits termes 73
3.3.4 Contribution des grands termes 81
3.4 Le second moment harmonique ramolli loin du point critique 86

4 Problème de convolution avec décalage additif **95**
4.1 Présentation des résultats et notations . . . 95
4.1.1 Vers la conjecture de Ramanujan-Petersson-Selberg . . . 95
4.1.2 Nos résultats . . . 98
4.1.3 Identification du problème . . . 100
4.2 Résolutions génériques d'un problème de convolution décalé . . . 106
4.2.1 Présentation . . . 106
4.2.2 La méthode du δ-symbole . . . 108
4.2.3 La méthode spectrale . . . 109
4.2.4 La méthode spectrale en moyenne . . . 112
4.2.5 Le raffinement de B. Kroetz et R.J. Stanton . . . 118
4.2.6 Spectre discret versus spectre continu . . . 119
4.3 Améliorations de la borne de Errtwist$(q, l; \mu)$ donnée en (3.3.3) . . . 119
4.3.1 Contribution des petits termes via la méthode du δ-symbole . . . 121
4.3.2 Contribution des termes médians . . . 123
4.3.3 Contribution des grands termes . . . 125
4.3.4 Preuve des théorèmes 4.1.1, 4.1.2 et 4.1.3 . . . 126

5 Zéros des fonctions L et méthode de ramollissement **129**
5.1 Zéros de grande hauteur . . . 129
5.2 Matrices aléatoires . . . 130
5.3 Zéros de grande hauteur et matrices aléatoires . . . 132
5.4 Zéros de petite hauteur et matrices aléatoires . . . 132
5.5 Méthode de ramollissement . . . 133
5.5.1 Description de la méthode sur un exemple . . . 133
5.5.2 Historique et motivation . . . 135
5.5.3 Zéros réels des fonctions L de Dirichlet . . . 136
5.6 Zéros réels des fonctions L de Rankin-Selberg . . . 137
5.6.1 Autour du lemme de comptage . . . 138
5.6.2 Les étapes successives et la méthode de ramollissement . . . 140
5.6.3 Fin de la preuve . . . 143
5.6.4 Justification via le modèle des matrices aléatoires . . . 146

6 Taille des fonctions L et méthode d'amplification **149**
6.1 Présentation du problème de sous-convexité et premiers exemples . . . 149
6.1.1 Généralités . . . 149
6.1.2 Premiers exemples . . . 151
6.2 Méthode d'amplification . . . 153
6.3 Cas des fonctions L de Rankin-Selberg . . . 154
6.4 Applications arithmétiques de la sous-convexité . . . 157
6.4.1 Généralités . . . 157
6.4.2 Exemple I : plus petit résidu non-quadratique modulo un nombre premier . . . 158
6.4.3 Exemple II : problème de différentiation des formes modulaires via leur coefficients de Fourier . . . 159

Conclusion 163

A Formes automorphes réelles analytiques 169
A.1 Description des opérateurs linéaires et différentiels en jeu . . . 169
A.2 Espaces fonctionnels en jeu . . . 170
A.3 Théorie spectrale du Laplacien de poids 0 . . . 171
A.3.1 Généralités . . . 171
A.3.2 Spectre continu : séries d'Eisenstein . . . 171
A.3.3 Spectre discret : formes de Maass cuspidales . . . 173
A.3.4 Formule de Parseval . . . 177

B Quelques sommes exponentielles arithmétiques 179
B.1 Sommes de Ramanujan . . . 179
B.2 Sommes de Gauss . . . 180
B.3 Sommes de Kloosterman . . . 181

C Boîte à outils analytique 183
C.1 Fonction Γ . . . 183
C.2 Fonctions de Bessel . . . 185
C.2.1 Fonctions de Bessel de première espèce . . . 185
C.2.2 Fonctions de Bessel de deuxième espèce . . . 185
C.3 Formule de Perron . . . 186
C.4 Transformée intégrale de Mellin . . . 186
C.5 Un calcul utile de résidu . . . 187

D Le problème purement technique des formes anciennes 189

Bibliographie 197

Liste des tableaux

2.1 Moment critique de chaque famille 52

4.1 Spectre discret versus spectre continu 119

5.1 Valeurs prises par $\widehat{W(G)}(x)$ 133
5.2 Quelques valeurs prises par $I_{\text{num}}(\Delta)$ 146

Table des figures

3.1 Schéma de preuve des résultats 61
3.2 Premier déplacement de contour 89
3.3 Deuxième déplacement de contour 89
3.4 Troisième déplacement de contour 90
5.1 Boîte $\mathcal{B}(q)$ 139
6.1 Graphe de $\sigma \mapsto \mu(\pi_0, \sigma)$ 152
A.1 Localisation du paramètre spectral r dans le plan complexe 175

Chapitre 1

Fonctions L

Ce chapitre contient une «définition» assez générale de la notion de fonctions L illustrée de nombreux exemples, tout en insistant sur le lien profond entre l'analyse et l'arithmétique. C'est aussi l'occasion de mettre en place tous les objets nécessaires à la lecture de ce mémoire.

1.1 Présentation générale

Soit π un objet théorique auquel on associe au moins formellement une série de Dirichlet notée :

$$L(\pi, s) := \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_\pi(n)}{n^s}$$

où $s \in \mathbb{C}$ et $(\lambda_\pi(n))_{n \geq 1}$ est une suite de nombres complexes associée à π. On dit que $L(\pi, .)$ est une *fonction L* si les hypothèses suivantes sont satisfaites :

1. La série de Dirichlet $L(\pi, .)$ est absolument convergente dans $\{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1\}$ et y admet un *produit Eulérien* absolument convergent donné par :

   $$L(\pi, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} L_p(\pi, s)$$

   sachant que l'inverse du facteur local en p est un polynôme en p^{-s} de degré inférieur ou égal à d_π (exactement égal à d_π sauf pour un nombre fini de nombres premiers) écrit sous la forme suivante :

   $$L_p(\pi, s)^{-1} := \prod_{i=1}^{d_\pi} \left(1 - \frac{\alpha_{\pi,i}(p)}{p^s}\right).$$

   Les paramètres $(\alpha_{\pi,i}(p))_{1 \leq i \leq d_\pi}$ sont appelés *paramètres locaux de π en p.*
2. $L(\pi, .)$ admet un prolongement méromorphe au plan complexe avec au plus un pôle simple en $s = 1$.
3. $L(\pi, .)$ satisfait une équation fonctionnelle de la forme :

   $$\forall s \in \mathbb{C}, \quad q_\pi^{\frac{s}{2}} L_\infty(\pi, s) L(\pi, s) = \varepsilon_\pi q_\pi^{\frac{1-s}{2}} L_\infty(\widetilde{\pi}, 1-s) L(\widetilde{\pi}, 1-s)$$

où q_π est un entier naturel non-nul appelé *conducteur arithmétique* de π, ε_π est un nombre complexe de module 1 appelé abusivement *signe* de l'équation fonctionnelle, $L_\infty(\pi, s)$ est un produit de d_π facteurs Gamma :

$$L_\infty(\pi, s) := \prod_{i=1}^{d_\pi} \Gamma_{\mathbb{R}}(s - \mu_{\pi,i})$$

avec :

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right).$$

Les coefficients $(\mu_{\pi,i})_{1 \leq i \leq d_\pi}$ sont appelés *paramètres locaux de π en ∞* et l'entier d_π est son *degré* (celui-ci quantifie la complexité combinatoire de la fonction L). $\tilde{\pi}$ est un autre objet théorique dit *objet dual* de π auquel on associe en toute place $p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$ de $\mathbb{Q}$:

$$L_p(\tilde{\pi}, s) := \overline{L_p(\pi, \overline{s})}$$

et la fonction :

$$L(\tilde{\pi}, s) := \prod_{p \in \mathcal{P}} L_p(\tilde{\pi}, s).$$

On suppose que les paramètres locaux de π en ∞ sont des nombres réels négatifs.

4. $\Lambda(\pi, s) := L_\infty(\pi, s) L(\pi, s)$ est uniformément bornée dans toute bande verticale. On l'appelle *fonction L complétée*.

Remarque 1.1.1. Si $L(\pi, .)$ est une fonction L alors $L(\tilde{\pi}, .)$ l'est aussi.

La bande $\{s \in \mathbb{C}, 0 \leq \Re(s) \leq 1\}$ est appelée *bande critique*, ses points réels constituent le *segment critique*, la droite $\left\{s \in \mathbb{C}, \Re(s) = \frac{1}{2}\right\}$ est la *droite critique* et $\frac{1}{2}$ est le *point critique*.

Insistons sur le fait que l'objet π n'est pas obligatoirement un objet purement arithmétique : il peut provenir autant de l'algèbre que de la géométrie. Les exemples divers et variés des sections suivantes illustreront ce fait. Mentionnons que l'objet le plus «général» auquel on pense est une représentation automorphe cuspidale d'un groupe de Lie réductif et principalement de $GL_d(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ (confer **[GoJa]**).

Une fonction L consiste donc comme l'indique son développement en produit Eulérien en un regroupement global de données locales ($\alpha_{\pi,.}$ et $\mu_{\pi,.}$) codées par les facteurs locaux $L_p(\pi, .)$ et $L_\infty(\pi, .)$. On va les considérer au cours de ce travail comme des objets analytiques fascinants et de plus en plus insaisissables au fur et à mesure que le degré augmente. Un des objectifs de la rédaction de cette thèse est de convaincre le lecteur qu'une meilleure connaissance analytique de ces objets augmenterait nos connaissances arithmétiques. Il s'agit plus exactement d'accroître nos connaissances analytiques des fonctions L de Rankin-Selberg et d'obtenir en retour des conséquences arithmétiques.

1.2 Fonctions L de Dirichlet

On choisit pour π un caractère de Dirichlet primitif de conducteur q noté χ et on lui associe la suite de ses valeurs :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda_\chi(n) := \chi(n).$$

On trouve dans **[Kn]** une preuve du fait que $L(\chi, .)$ est une fonction L de degré 1, de conducteur analytique q et d'objet dual $\overline{\chi}$. Son paramètre local en tout premier p est $\chi(p)$ alors que son paramètre local en ∞ est :

$$\mu_{\chi,1} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \chi(-1) = 1, \\ -1 & \text{si} \quad \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

Le signe de l'équation fonctionnelle vaut :

$$\varepsilon_\chi = \begin{cases} \frac{G_1(\chi)}{\sqrt{q}} & \text{si} \quad \chi(-1) = 1, \\ -i\frac{G_1(\chi)}{\sqrt{q}} & \text{si} \quad \chi(-1) = -1 \end{cases}$$

où $G_1(\chi)$ désigne une somme de Gauss du caractère χ (confer annexe B).

La fonction zéta de Riemann est trivialement une fonction L de Dirichlet : c'est la seule admettant un pôle simple en $s = 1$. La présence de ce pôle équivaut au fait qu'il existe une infinité de nombres premiers et de façon plus précise que $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

Un intérêt arithmétique profond de ces fonctions L de Dirichlet est l'étude du cardinal du groupe des classes d'idéaux d'un corps quadratique imaginaire $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-q})$ où $-q$ est un discriminant fondamental. On note $h(q)$ ce cardinal. Si $\chi_{-q} := \left(\frac{-q}{.}\right)$ est le symbole de Kronecker (de conducteur q), alors L. Dirichlet a établi la formule suivante :

$$h(q) = \frac{\sqrt{q}}{\pi} L(\chi_{-q}, 1).$$

L'analyse complexe permet de déduire des minorations de $|L(\chi_{-q}, 1)|$ à partir de régions sans zéros pour cette fonction L. Par exemple, l'hypothèse de Riemann généralisée (confer chapitre 5) pour $L(\chi_{-q}, .)$ implique que $h(q)$ varie très peu autour de $\sqrt{q}$. Suite aux travaux de J. Hadamard et C.J. de la Vallée-Poussin, on sait que pour presque tout caractère de Dirichlet primitif χ de module q, $L(\chi, .)$ ne s'annule pas dans la région suivante :

$$\Re(s) > 1 - \frac{c}{\log\left(q(2 + |\Im(s)|)\right)}$$

où $c > 0$ est une constante absolue. Le «presque tout» signifie pour tout caractère de Dirichlet primitif de module q sauf pour au plus un éventuel caractère de Dirichlet primitif de module q qui serait réel et dont la fonction L de Dirichlet admettrait un zéro réel simple

dans $\left]1-\frac{c}{\log q},1\right]$ appelé *zéro de Siegel*. E. Landau (**[La]**) et C.L. Siegel (**[Si]**) ont montré que pour tout $\varepsilon>0$, il existe une constante ineffective $c_\varepsilon>0$ telle que :

$$h(q)\geq c_\varepsilon q^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Le mot «ineffective» provient du fait que leur preuve repose sur l'existence ou non de cet hypothétique zéro de Siegel. Ainsi, ce qui précède constitue un premier exemple important du lien profond qui existe entre les propriétés analytiques des fonctions L et certains résultats arithmétiques.

1.3 Fonctions L de formes modulaires cuspidales

1.3.1 Formes modulaires cuspidales

Au sujet des formes modulaires, les références utilisées sont principalement **[Iw]** et **[Kn]**.

Le demi-plan de Poincaré

$\mathbb{H}$ désigne le *demi-plan de Poincaré* c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive que l'on munit de la *distance hyperbolique* donnée par :

$$\forall(z,w)\in\mathbb{H}^2,\quad u(z,w):=\frac{|z-w|^2}{4\Im(z)\Im(w)}.$$

La mesure associée dite de Poincaré et notée μ_0 est :

$$\mathrm{d}\mu_0=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}.$$

Le demi-plan de Poincaré muni de cette métrique est le modèle de Poincaré du plan hyperbolique. Pour $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ dans $GL_2^+(\mathbb{R})$ et z dans $\mathbb{H}$, on définit :

$$\gamma.z=\frac{az+b}{cz+d}.$$

On établit aisément que $(\gamma,z)\mapsto\gamma.z$ définit une action du groupe $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$ appelée *action par homographies* et que la mesure μ_0 est $GL_2^+(\mathbb{R})$-invariante. Cette action se prolonge par continuité en une action sur $\mathbb{H}^*:=\mathbb{H}\cup(\mathbb{Q}\cup\{\infty\})$.

Courbe modulaire de niveau N

Pour tout entier naturel non-nul N, on note $\Gamma_0(N)$ le sous-groupe de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$ suivant :

$$\Gamma_0(N):=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}),N\mid c\right\}.$$

On l'appelle *sous-groupe de congruence de Hecke* de niveau N. Il s'agit d'un sous-groupe normal de $\Gamma_0(1)$ d'indice fini multiplicatif donné par :

$$\nu(N) := N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = [\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)] .$$

On appelle *domaine fondamental* de $\Gamma_0(N)$ tout ouvert $\mathcal{D}_0(N)$ de $\mathbb{H}$ tel que :

1. toute orbite de l'action par homographies de $\Gamma_0(N)$ sur $\mathbb{H}$ «traverse» l'adhérence de cet ouvert :
$$\forall z \in \mathbb{H}, \exists \gamma \in \Gamma_0(N), \quad \gamma.z \in \overline{\mathcal{D}_0(N)},$$
2. si deux points de $\mathcal{D}_0(N)$ sont équivalents alors ils sont égaux.

Une *pointe* de $\Gamma_0(N)$ est une classe d'équivalence de $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ sous l'action de $\Gamma_0(N)$. Un système de représentants fini des pointes de $\Gamma_0(N)$ est donné par :

$$\mathrm{Cusp}\left(\Gamma_0(N)\right) := \left\{ \frac{u}{v}, v \mid N, u \wedge v = 1, 1 \leq u \leq v \wedge \frac{N}{v} \right\} .$$

Le nombre de pointes de $\Gamma_0(N)$ est donc :

$$\left|\mathrm{Cusp}\left(\Gamma_0(N)\right)\right| = \sum_{vw=N} \varphi\left(v \wedge w\right) \ll_\varepsilon N^{1+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Notons que $\Gamma_0(1)$ ne possède qu'une seule pointe : la classe d'équivalence de ∞. Si κ est une pointe de $\Gamma_0(N)$ alors son stabilisateur :

$$\left(\Gamma_0(N)\right)_\kappa := \{\gamma \in \Gamma_0(N), \gamma.\kappa = \kappa\}$$

est un groupe monogène (plus précisément, il s'agit de l'image de ce stabilisateur dans $PSL_2(\mathbb{R})$). Soit γ_κ un générateur de ce groupe. Il existe une matrice σ_κ dans $SL_2(\mathbb{R})$ dite *matrice de normalisation* associée à la pointe κ telle que :

$$\sigma_\kappa.\infty = \kappa \ \text{ et } \ \sigma_\kappa^{-1}\gamma_\kappa\sigma_\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

De plus, toute telle autre matrice de normalisation $\widetilde{\sigma_\kappa}$ est de la forme :

$$\widetilde{\sigma_\kappa} = \pm\sigma_\kappa \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où t est un nombre réel.

On note $Y_0(N)$ l'espace quotient $\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}$. On peut le munir d'une structure complexe induite par $\mathbb{H}$. $Y_0(N)$ est aussi une courbe algébrique affine lisse définie sur $\mathbb{Q}$. $X_0(N)$ est obtenu en compactifiant (au sens d'Alexandroff) $Y_0(N)$: on lui rajoute les pointes de $\Gamma_0(N)$. C'est une courbe algébrique projective lisse définie sur $\mathbb{Q}$. On l'appelle *courbe modulaire* de niveau N.

Espace des formes cuspidales

Pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $GL_2^+(\mathbb{R})$ et z dans $\mathbb{H}$, on définit :

$$j(\gamma, z) := cz + d.$$

Soit k un entier naturel pair non-nul. Pour γ dans $GL_2^+(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, on pose :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \quad f|_\gamma^k(z) = \frac{(\det(\gamma))^{\frac{k}{2}}}{j(\gamma, z)^k} f(\gamma.z).$$

Cela définit clairement une action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur l'espace des fonctions complexes sur le demi-plan de Poincaré noté $\mathcal{F}(\mathbb{H}, \mathbb{C})$ dite de poids k. Une *fonction modulaire* de niveau N, de poids k et de caractère trivial est une fonction $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorphe satisfaisant :

$$\forall \gamma \in \Gamma_0(q), \quad f|_\gamma^k = f.$$

Soit $\gamma^{-1}.\infty$ une pointe de $\Gamma_0(N)$ avec γ dans $\Gamma_0(1)$. Si f est une fonction modulaire de niveau N, de poids k et de caractère trivial alors $f|_{\gamma^{-1}}^k$ est une fonction périodique de période N que l'on peut écrire comme :

$$f|_{\gamma^{-1}}^k(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e\left(\frac{nz}{N}\right)$$

où $e(z) := \exp(2i\pi z)$. On dit que f est *holomorphe* en la pointe $\gamma^{-1}.\infty$ si :

$$\forall n \in \mathbb{Z}_-^*, \quad c_n = 0$$

et f *s'annule* en la pointe $\gamma^{-1}.\infty$ si :

$$\forall n \in \mathbb{Z}_-, \quad c_n = 0.$$

Une *forme modulaire* de niveau N, de poids k et de caractère trivial est une fonction modulaire de niveau N, de poids k et de caractère trivial holomorphe en toutes les pointes de $\Gamma_0(N)$. Une *forme cuspidale* de niveau N, de poids k et de caractère trivial est une forme modulaire de niveau N, de poids k et de caractère trivial s'annulant en toutes les pointes de $\Gamma_0(N)$. Pour f et g deux formes modulaires de niveau N, de poids k et de caractère trivial dont l'une au moins est cuspidale, on définit le *produit scalaire de Petersson* de f et g par :

$$\langle f, g \rangle_N := \int_{\mathcal{D}_0(N)} y^k f\, \overline{g}\, \mathrm{d}\mu_0$$

où $\mathcal{D}_0(N)$ désigne un quelconque domaine fondamental de $\Gamma_0(N)$. Notons $S_k(N)$ l'espace de Hilbert pour $\langle .,. \rangle_N$ des formes cuspidales de niveau N, de poids k et de caractère trivial . Une telle forme admet un développement de Fourier en la pointe infinie de la forme suivante :

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \psi_f(n) n^{\frac{k-1}{2}} e(nz).$$

L'information arithmétique de f est portée par ses coefficients de Fourier $\psi_f(.)$.

Opérateurs de Hecke

On note ε_N le caractère de Dirichlet trivial de module N défini par :

$$\epsilon_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \wedge N = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout entier relatif n. On définit aussi :

$$\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}), \quad \varepsilon_N(\gamma) := \varepsilon_N(d).$$

Remarquons au passage que $\epsilon_N(\gamma) = 1$ si γ appartient à $\Gamma_0(N)$. Pour tout entier naturel non-nul l, on définit :

$$\begin{aligned} G_{0,l}(N) &= \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}), \det(\gamma) = l, a \wedge N = 1, N \mid c \right\}, \\ \Delta_{0,l}(N) &= \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}), ad = l, a \wedge N = 1, 0 \leq b < d \right\}. \end{aligned}$$

$\Gamma_0(N)$ agit par multiplication à droite sur $G_{0,l}(N)$ et on peut prouver que $\Delta_{0,l}(N)$ est un système de représentants fini pour cette action. On définit le l-ième *opérateur de Hecke* de poids k sur $S_k(N)$ par :

$$T_l f = l^{-\frac{k+1}{2}} \sum_{\rho \in \Gamma_0(N) \backslash G_{0,l}(N)} \varepsilon_N(\rho) f|_\rho^k.$$

Ainsi, T_l est un endomorphisme de $S_k(N)$. De plus, en se servant de $\Delta_{0,l}(N)$, on obtient :

$$T_l f(z) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{ad=l} \varepsilon_N(a) \sum_{0 \leq b < d} f\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

ce qui assure que cet opérateur est indépendant du poids k. On peut prouver que T_l est un opérateur hermitien si l est un entier naturel non-nul premier avec N et que l'algèbre engendrée par les opérateurs de Hecke est commutative. Plus précisément :

$$\forall (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad T_{l_1} \circ T_{l_2} = \sum_{d \mid l_1 \wedge l_2} \varepsilon_N(d) T_{\frac{l_1 l_2}{d^2}}. \tag{1.3.1}$$

Une forme cuspidale qui est un vecteur propre des opérateurs T_l pour tout entier naturel non-nul l premier avec N est appelée *forme cuspidale de Hecke* et une base orthonormée de $S_k(N)$ constituée de formes cuspidales de Hecke est appelée *base de Hecke*.

Théorie d'Atkin-Lehner

La référence principale de cette théorie est **[AtLe]**. On obtient une décomposition de $S_k(N)$ en $S_k^a(N) \oplus^\perp S_k^n(N)$ avec :

$$\begin{aligned} S_k^a(N) &= Vect\left\{ f(dz), N' \mid N, d \mid \frac{N}{N'}, d \neq 1, f \in S_k\left(\frac{N}{N'}\right) \right\} \text{ («a» pour ancienne)}, \\ S_k^n(N) &= (S_k^a(N))^\perp \text{ («n» pour nouvelle)}. \end{aligned}$$

Ces deux espaces sont invariants sous l'action des opérateurs de Hecke T_l pour lesquels l est premier avec N. Une forme *primitive* cuspidale est une forme cuspidale de Hecke qui est nouvelle et satisfait :

$$\psi_f(1) = 1.$$

Un tel élément f est automatiquement un vecteur propre des autres opérateurs de Hecke et aussi des opérateurs d'Atkin-Lehner qui seront définis ultérieurement et satisfait :

$$\psi_f(l) = \lambda_f(l)$$

pour tout entier naturel non-nul l où :

$$T_l(f) = \lambda_f(l) f$$

et $\lambda_f(l)$ s'appelle la l-ième *valeur propre de Hecke* de f. L'ensemble des formes primitives cuspidales est noté $S_k^p(N)$ («p» pour primitive).

Soit f une forme cuspidale de Hecke de valeurs propres de Hecke $(\lambda_f(l))_{l \wedge N=1}$. La propriété de composition (1.3.1) des opérateurs de Hecke entraîne que pour tout entier naturel non-nul l_1 et tout entier naturel non-nul l_2 premier avec N :

$$\psi_f(l_1)\lambda_f(l_2) = \sum_{d | l_1 \wedge l_2} \varepsilon_N(d) \psi_f\left(\frac{l_1 l_2}{d^2}\right), \tag{1.3.2}$$

$$\psi_f(l_1 l_2) = \sum_{d | l_1 \wedge l_2} \mu(d) \varepsilon_N(d) \psi_f\left(\frac{l_1}{d}\right) \lambda_f\left(\frac{l_2}{d}\right) \tag{1.3.3}$$

et cette relation est vraie pour tous entiers naturels non-nuls l_1 et l_2 si f est primitive. D'autre part, pour tout entier naturel non-nul l premier avec N,

$$\lambda_f(l) = \overline{\lambda_f(l)} \quad \text{et} \quad \psi_f(l) = \overline{\psi_f(l)} \tag{1.3.4}$$

et cela reste vrai pour tout entier naturel non-nul l si f est primitive.

Opérateurs d'Atkin-Lehner

Les résultats suivants ont été établis par A. Atkin et J. Lehner. Supposons que $N = N_1 N_2$ avec N_1 et N_2 premiers entre eux. Soient x, y, z et w quatre entiers relatifs satisfaisant :

$$\begin{aligned} y &\equiv 1 \quad [N_1], \\ x &\equiv 1 \quad [N_2], \\ N_1^2 xw - Nyz &= N_1. \end{aligned}$$

Si $\omega_{N_1} = \begin{pmatrix} xN_1 & y \\ zN & wN_1 \end{pmatrix}$ alors :

$$W_{N_1} = \left|\begin{smallmatrix} k \\ \omega_{N_1} \end{smallmatrix}\right.$$

est un endomorphisme linéaire de $S_k(N)$ indépendant du choix de x, y, z et w satisfaisant les propriétés citées ci-dessus appelé *opérateur d'Atkin-Lehner*. Si $N_1 = N$ alors W_{N_1} est l'*involution de Fricke* donnée par :

$$\omega_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -N & 0 \end{pmatrix}.$$

A. Atkin et W. Li ont prouvé que :

Proposition 1.3.1 (A. Atkin-W. Li (1970)). *Si $N_1 \mid N$ et $N_1 \wedge \frac{N}{N_1} = 1$ alors :*

$$\forall f \in S_k^n(N), W_{N_1} f = \eta_f(N_1) f$$

où $\eta_f(N_1) = \pm 1$.

Remarque 1.3.1. Avec les notations de cette proposition, $\eta_f(N_1)$ est une valeur propre d'Atkin-Lehner. Par exemple, on peut prouver que :

$$\eta_f(1) = 1.$$

Bornes pour les valeurs propres de Hecke de formes primitives cuspidales

Soit f une forme primitive cuspidale de niveau N, de poids k et de caractère trivial avec :

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \quad T_l f = \lambda_f(l) f.$$

Pour tout nombre premier p, soient $\alpha_{f,1}(p)$ et $\alpha_{f,2}(p)$ les racines complexes de l'équation quadratique suivante :

$$X^2 - \lambda_f(p) X + \varepsilon_N(p) = 0.$$

Suite aux efforts de M. Eichler-G. Shimura-J. Igusa et de P. Deligne, la borne de Ramanujan-Petersson-Selberg est vraie :

$$\forall p \in \mathcal{P}, \forall i \in \{1, 2\}, \quad |\alpha_{f,i}(p)| \leq 1 \tag{1.3.5}$$

de sorte que :

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \quad |\lambda_f(l)| \leq \tau(l). \tag{1.3.6}$$

En particulier, si $\sigma_f(n) := \sum_{d|n} |\lambda_f(d)|$ alors :

$$\forall X \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{n \leq X} \sigma_f(n)^2 \ll_{\varepsilon, f} X^{1+\varepsilon} \tag{1.3.7}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

1.3.2 Fonctions L associées

Dans ce cas, $\pi = f$ est une forme primitive cuspidale de niveau N, de poids k et de caractère trivial. Notons $(\lambda_f(l))_{l\geq 1}$ la suite de ses valeurs propres de Hecke. On pose alors :

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda_\pi(l) := \lambda_f(l).$$

$L(f,.)$ est une fonction L de degré 2 et de conducteur arithmétique N. Son objet dual est f : on dit que f est *auto-duale*. Ses paramètres locaux en tout nombre premier p valent $\alpha_{f,1}(p)$ et $\alpha_{f,2}(p)$ (confer (1.3.1)) alors que ses paramètres locaux en ∞ valent $\mu_{f,1} = \frac{1-k}{2}$ et $\mu_{f,2} = -\frac{1+k}{2}$. Le signe de l'équation fonctionnelle est :

$$\varepsilon_f = \eta_f(N) i^k = \eta_f(N) \times \begin{cases} +1 & \text{si} \quad k \equiv 0\,[4], \\ -1 & \text{si} \quad k \equiv 2\,[4]. \end{cases}$$

Cette fonction L n'admet pas de pôle en $s = 1$. En ce qui concerne ces fonctions L, on s'intéresse particulièrement à l'ordre d'annulation en $\frac{1}{2}$. La raison en est que, en notant $\operatorname{rg} J_0(N)$ le rang de la Jacobienne de la courbe modulaire de niveau N, et admettant la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, on montre suite aux travaux de M. Eichler-G. Shimura, J. Igusa et H. Carayol que :

$$\operatorname{rg} J_0(N) = \sum_{f \in S_2^p(N)} \operatorname{ord}_{s=\frac{1}{2}} L(f,s)$$

si N est un nombre premier. Remarquons que la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer tente de faire le lien entre le rang du groupe de Mordell-Weil d'une variété abélienne et l'ordre d'annulation au point critique d'une autre fonction L qui est la fonction L associée à cette variété abélienne. Nombreuses sont les personnes qui ont trouvé des résultats (conditionnels ou non) du type :

$$\sum_{f \in S_2^p(N)} \operatorname{ord}_{s=\frac{1}{2}} L(f,s) \leq (c + o(1)) \dim J_0(N)$$

où c est une constante absolue sachant que la constante optimale attendue est $\frac{1}{2}$. On peut notamment citer par ordre chronologique A. Brumer (**[Br]**), E. Kowalski et P. Michel (**[KoMi]**), W. Luo, H. Iwaniec et P. Sarnak (**[IwLuSa]**).

1.4 Fonctions L de courbes elliptiques

L'objet π est cette fois-ci une courbe elliptique E définie sur $\mathbb{Q}$ et on suppose que l'équation de Weierstrass de cette courbe est globalement minimale et de discriminant Δ. Pour tout nombre premier p, on pose :

$$a_p := p + 1 - |E_p(\mathbb{Z}_p)|$$

où E_p est la réduction de la courbe modulo p et :

$$L_p(u) := \begin{cases} \frac{1}{1-a_p u + p u^2} & \text{si} \quad p \nmid \Delta, \\ \frac{1}{1-a_p u} & \text{si} \quad p \mid \Delta. \end{cases}$$

Enfin, on regroupe toutes ces données locales par :

$$L(E,s) := \prod_{p \in \mathcal{P}} L_p(p^{-s}).$$

Le fait que $L(E,.)$ soit une fonction L résulte des travaux de A. Wiles et R. Taylor (**[Wi]**, **[TaWi]**) qui ont prouvé la conjecture de Y. Taniyama-G. Shimura-A. Weil :

Conjecture de Y. Taniyama-G. Shimura-A. Weil (A. Wiles-R. Taylor (1995)). Il existe un entier naturel non-nul N et une forme primitive cuspidale de niveau N, de poids 2 et de caractère trivial tels que :

$$L(E,.) = L(f,.).$$

Ainsi, $L(E,.)$ est une fonction L de degré 2. De telles fonctions ont joué un rôle important dans l'étude du cardinal du groupe des classes d'idéaux d'un corps quadratique imaginaire. En effet, D. Goldfeld (**[Go]**) a montré que s'il existe une fonction L de degré 2 s'annulant à l'ordre 3 au point critique alors il existe $c > 0$ telle que :

$$h(q) \geq c \prod_{p|q} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{p}}\right) \log q.$$

B. Gross et Don Zagier (**[GrZa]**) ont construit une courbe elliptique dont la fonction L possède cette propriété et ont donc prouvé que $h(q) \to +\infty$ lorsque $q \to +\infty$ (problème de J.C.F. Gauss). Notons que cette dernière estimation est malgré tout éloignée du résultat optimal attendu et que le produit sur les nombres premiers divisant q décroît très lentement (il est d'ordre $(\log_2 q)^{-1}$) ce qui pose des problèmes pratiques pour déterminer tous les corps quadratiques imaginaires de petit nombre de classes.

1.5 Fonctions L de carré symétrique

π est la donnée de g dans $S_{k_g}^p(D)$ où D est un entier sans facteurs carrés. On note : $\pi = Sym^2(g)$. On lui associe :

$$L(\mathrm{Sym}^2(g),s) := \zeta^{(D)}(2s) \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_g(n^2)}{n^s}.$$

Selon les travaux de G. Shimura (**[Sh]**), $L(\mathrm{Sym}^2(g),.)$ est une fonction L entière de degré 3, de conducteur analytique D^2 et de signe d'équation fonctionnelle $+1$. Ses paramètres locaux en tout nombre premier p sont :

$$\alpha_{\mathrm{Sym}^2(g),(i,j)}(p) = \alpha_{g,i}(p)\alpha_{g,j}(p)$$

pour $1 \leq i \leq j \leq 2$ et à l'infini sont :

$$\{-1, 1-k_g, -k_g\}.$$

Remarquons aussi que :

$$L(\mathrm{Sym}^2(g), s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\rho_g(n)}{n^s}$$

où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \rho_g(n) = \sum_{m^2 l = n} \varepsilon_D(m)\lambda_g(l^2). \tag{1.5.1}$$

1.6 Fonctions L de Rankin-Selberg

π est la donnée de f dans $S_k^p(q)$ et de g dans $S_{k_g}^p(D)$ où :
- D et q sont deux entiers sans facteurs carrés premiers entre eux,
- k et k_g sont deux entiers naturels non-nuls pairs.

On note $\pi = f \times g$ et on lui associe :

$$L(f \times g, s) := \zeta^{(qD)}(2s) \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_f(n)\lambda_g(n)}{n^s}.$$

En accord avec la théorie de Rankin-Selberg, $L(f \times g, .)$ est une fonction L entière de degré 4, de conducteur analytique $(qD)^2$. Cet objet est lui-aussi auto-dual. Il est remarquable de constater que le signe de l'équation fonctionnelle est indépendant des formes f et g et vaut $+1$. Ses paramètres locaux en tout nombre premier p sont :

$$\alpha_{f\times g,(i,j)}(p) = \alpha_{f,i}(p)\alpha_{g,j}(p)$$

pour $1 \leq i, j \leq 2$ et à l'infini sont :

$$\left\{k_g - k, k_g - k - 2, 2 - k - k_g, -k - k_g\right\}.$$

Remarque 1.6.1. Dans la suite apparaîtra la fonction L de Rankin-Selberg $L(g \times g, .)$ définie sur $\Re(s) > 1$ par :

$$L(g \times g, s) := \zeta^{(D)}(2s) \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_g(n)^2}{n^s}.$$

Cette fonction admet un prolongement méromorphe au plan complexe avec exactement deux pôles simples en $s = 0$ et $s = 1$. On note alors :

$$R_g := \mathrm{res}_{s=1}\ L(g \times g, s). \tag{1.6.1}$$

D'autre part, cette fonction L vérifie :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad L(g \times g, s) = \zeta^{(D)}(s) L(\mathrm{Sym}^2 g, s).$$

Chapitre 2

Familles de fonctions L et moments

Ce chapitre introduit des objets fondamentaux en théorie analytique des nombres : les familles de fonctions L. L'étude analytique d'une telle famille de fonctions L repose principalement sur l'analyse asymptotique de ses moments. En particulier, ce chapitre présente la notion de moment critique à la fois en théorie et en pratique à travers trois exemples importants pour ce mémoire de familles de fonctions L.

2.1 Notion de familles et exemples

H. Iwaniec et P. Sarnak ont été amenés à introduire une nouvelle quantité attachée à toute fonction L appelée *conducteur analytique*. C'est une fonction définie sur les nombres réels par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Q_\pi(t) := q_\pi \prod_{i=1}^{d_\pi} \left| \frac{1}{2} + it - \mu_{\pi,i} \right| := q_\pi Q_{\pi_\infty}(t).$$

Cette quantité jouera un rôle à plusieurs reprises et «mesure» la taille de la fonction L sur la droite critique (confer chapitre 6). Pour des raisons qui apparaîtront dans la section suivante, il est judicieux dans l'optique d'étudier une certaine fonction L de l'inclure dans une famille de fonctions L puis d'étudier simultanément tous les éléments de cette famille. Le choix de la famille englobante n'est pas toujours évident et est de toute façon dicté par certaines contraintes.

Cette nouvelle façon d'étudier une fonction L a montré tout son intérêt pour la première fois lorsqu'il a fallu étudier la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. La preuve du théorème de Dirichlet repose en effet sur l'étude de :

$$\sum_{\chi \in \widehat{\left(\frac{\mathbb{Z}}{q\mathbb{Z}}\right)^\times}} \left(\log L(\chi, .)\right)(s)$$

au voisinage de 1 afin de prouver que $L(\chi, 1) \neq 0$ lorsque χ n'est pas le caractère trivial. Ici, $\log L(\chi, .)$ désigne une détermination holomorphe du logarithme de $L(\chi, .)$ au voisinage de 1.

On considère des familles de fonctions L indexées par leur conducteur analytique évalué en 0 c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} := \coprod_{Q\geq 1} \mathcal{F}(Q)$$

avec :

$$\log Q_\pi(0) \backsimeq_{\substack{Q\to+\infty \\ \pi\in\mathcal{F}(Q)}} \log Q.$$

Nous allons donner quelques exemples qui reviendront en filigrane tout au long de ce mémoire.

2.1.1 Exemple A : Famille de fonctions L de Dirichlet

Il s'agit de $\mathcal{G} := \coprod_{X\in\{2^m, m\in\mathbb{N}\}} \mathcal{G}(X)$ où :

$$\mathcal{G}(X) := \left\{L\left(\chi_{-8d}, .\right), 2\nmid d, \mu^2(d) = 1, X \leq d \leq 2X\right\}$$

avec $\chi_{-8d}(n) := \left(\frac{-8d}{n}\right)$ pour tout entier relatif n. Ces caractères sont primitifs de module $8d$, vérifient $\chi_{-8d}(-1) = -1$ et ont pour conducteur analytique :

$$Q_{\chi_{-8d}}(t) = 4d\sqrt{4t^2+9}.$$

Ainsi,

$$\log Q_{\chi_{-8d}}(0) \backsimeq_{\substack{X\to+\infty \\ L(\chi_{-8d},.)\in\mathcal{G}(X)}} \log X.$$

D'autre part,

$$\log|\mathcal{G}(X)| \backsimeq_{X\to+\infty} \log X$$

car :

$$\sum_{d\leq x} \mu^2(d) \backsimeq_{x\to+\infty} \frac{6x}{\pi^2}.$$

2.1.2 Exemple B : Familles de fonctions L de formes modulaires

On considère les familles $\mathcal{H}_\pm := \coprod_{K\in\{2^m, m\in\mathbb{N}\}} \mathcal{H}_\pm(K)$ avec :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_+(K) &:= \left\{L\left(f, .\right), f \in S_k^p(1), K \leq k \leq 2K, k \equiv 0\,[4]\right\},\\ \mathcal{H}_-(K) &:= \left\{L\left(f, .\right), f \in S_k^p(1), K \leq k \leq 2K, k \equiv 2\,[4]\right\}.\end{aligned}$$

Les notations $\pm$ sont justifiées par le fait que le signe de l'équation fonctionnelle de f dans $\mathcal{H}_\pm(K)$ vaut ± 1. Le conducteur analytique de f dans $\mathcal{H}_\pm(K)$ vaut :

$$Q_f(t) = \left|\frac{k}{2} + it\right|\left|\frac{k+2}{2} + it\right|$$

de sorte que :

$$\log Q_f(0) \backsimeq_{\substack{K\to+\infty \\ L(f,.)\in\mathcal{H}_\pm(K)}} \log K^2.$$

De plus, selon (2.2.2), $|S_k^p(1)| \backsimeq_{k\to+\infty} \frac{k-1}{12}$ d'où :

$$\log|\mathcal{H}_\pm(K)| \backsimeq_{K\to+\infty} \log K^2.$$

2.1.3 Exemple C : Famille de fonctions L de Rankin-Selberg

Dans toute la suite de ce mémoire, g est une forme primitive cuspidale **fixée** de niveau D sans facteurs carrés, de poids $k_g \geq 2$ et de caractère trivial ε_D. Notre famille de fonctions L de Rankin-Selberg est $\mathcal{F} = \coprod_{\substack{q \in \mathcal{P} \\ q \nmid D}} \mathcal{F}(q)$ avec :

$$\mathcal{F}(q) := \{L(f \times g, .), f \in S_k^p(q)\}.$$

Le conducteur analytique de $L(f \times g, .)$ dans $\mathcal{F}(q)$ vaut :

$$Q_{f\times g}(t) = (qD)^2 \left|k - k_g + \frac{1}{2} + it\right| \left|k - k_g + \frac{5}{2} + it\right| \left|k + k_g - \frac{3}{2} + it\right| \left|k + k_g + \frac{1}{2} + it\right|$$

ce qui entraîne que :

$$\log Q_{f\times g}(0) \backsimeq_{\substack{q\to+\infty \\ f\times g \in \mathcal{F}(q)}} \log q^2.$$

D'autre part, comme $|S_k^p(q)| \backsimeq_{q\to+\infty} \frac{k-1}{12}(q-1)$:

$$\log |\mathcal{F}(q)| \backsimeq_{q\to+\infty} \log q.$$

2.2 Méthode des moments

2.2.1 Description de la méthode

Soit $\mathcal{F} := \coprod_{Q\geq 1} \mathcal{F}(Q)$ une famille de fonctions L. La suite prouvera qu'il est très intéressant d'étudier les *moments* de cette famille. Soient $Q \geq 1$, π dans $\mathcal{F}(Q)$ et $L = Q^\Delta$ un entier naturel non-nul avec $\Delta > 0$. Pour tout vecteur $\overrightarrow{x} = (x_l)_{1\leq l\leq L}$, on définit un polynôme de Dirichlet de *longueur* au plus L par :

$$M(\pi, \overrightarrow{x}, s) := \sum_{1\leq l\leq L} \frac{\widetilde{\lambda}_\pi(l)}{l^s} x_l.$$

où $\widetilde{\lambda}_\pi(l)$ est construit à partir de $\lambda_\pi(l)$. Δ est la *longueur relative logarithmique* du polynôme de Dirichlet. Le moment d'ordre 1 de $\mathcal{F}(Q)$ est la forme linéaire en $\overrightarrow{x}$ définie pour tout nombre complexe s par :

$$M_1(\mathcal{F}(Q), \overrightarrow{x}, s) := \sum_{\pi\in\mathcal{F}(Q)} L(\pi, s) M(\pi, \overrightarrow{x}, s)$$

et ses moments d'ordre un entier naturel non-nul pair κ sont les formes quadratiques en $\overrightarrow{x}$ suivantes :

$$M_\kappa(\mathcal{F}(Q), \overrightarrow{x}, s) := \sum_{\pi\in\mathcal{F}(Q)} |L(\pi, s)|^\kappa \left|M(\pi, \overrightarrow{x}, s)\right|^2$$

pour tout nombre complexe s. La *méthode des moments* est un plan d'attaque systématique qui permet d'évaluer ces moments dans la bande critique et souvent sur la droite critique

elle-même. Nous allons en donner une description.

Étape 1 Équation Fonctionnelle Approchée

La référence principale utilisée est **[Mi1]**. Il s'agit de contrôler la fonction L dans la bande critique sachant que l'on n'est pas dans le domaine d'absolue convergence et que l'on n'a donc pas à notre disposition de formule explicite pour la fonction L dans la bande critique. La méthode qui suit a été appliquée pour la première fois pour la fonction zéta de Riemann par G.H. Hardy et J.E. Littlewood (**[HaLi]**) en 1921 qui ont obtenu ce que l'on a coutume d'appeler l'*équation fonctionnelle approchée* de la fonction zéta de Riemann :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = \sum_{n \ll \sqrt{Q_\zeta(t)}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}} + \frac{\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2}-it\right)} \sum_{n \ll \sqrt{Q_\zeta(t)}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-it}} + \mathcal{O}\left(|t|^{-\frac{1}{4}} \log|t|\right).$$

Ainsi, la fonction zéta de Riemann est la somme de deux séries de longueur la racine du conducteur analytique de la fonction zéta. Cette équation respecte la symétrie $t \mapsto -t$. On remarque aussi que le facteur devant la seconde somme est un nombre complexe de module 1. Il s'agit de généraliser cela. On suppose que la fonction $L(\pi, .)$ n'a pas de pôle en $s = 1$ et on va approximer $L(\pi, s)$ pour tout nombre complexe s sur la droite critique. On suppose aussi (juste par souci de simplification) que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, d_\pi\}, \quad \mu_{\pi,i} < -\frac{1}{2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ très petit. Soit G une fonction paire holomorphe dans un voisinage tubulaire de la bande critique satisfaisant $G(0) = 1$. On fixe $s = \frac{1}{2} + it$ sur la droite critique. Le point de départ est l'intégrale suivante :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(1+\varepsilon)} q_\pi^{\frac{s+z}{2}} L_\infty(\pi, s+z) L(\pi, s+z) G(z) \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

qui est égale à :

$$q_\pi^{\frac{s}{2}} \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_\pi(n)}{n^s} \frac{1}{2i\pi} \int_{(1+\varepsilon)} q_\pi^{\frac{z}{2}} L_\infty(\pi, s+z) n^{-z} G(z) \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

La décroissance exponentielle de $L_\infty(\pi, s+z)L(\pi, s+z)$ (confer annexe C) nous permet de décaler cette intégrale sur $(-1-\varepsilon)$ en ne heurtant qu'un pôle simple en $z = 0$ de résidu égal à :

$$q_\pi^{\frac{s}{2}} L_\infty(\pi, s) L(\pi, s)$$

Le changement de variable $z \mapsto -z$ dans l'intégrale résiduelle ainsi que l'équation fonctionnelle de la fonction $L(\pi, .)$ assurent que :

$$L(\pi, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_\pi(n)}{n^s} V_{\pi_\infty, s}\left(\frac{n}{\sqrt{Q_\pi(t)}}\right) + \omega(\pi, s) \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_{\tilde{\pi}}(n)}{n^{1-s}} V_{\tilde{\pi}_\infty, 1-s}\left(\frac{n}{\sqrt{Q_{\tilde{\pi}}(t)}}\right)$$

où $\omega(\pi,s) := \varepsilon_\pi q_\pi^{\frac{1-2s}{2}} \frac{L_\infty(\tilde{\pi},1-s)}{L_\infty(\pi,s)}$ est un nombre complexe de module 1 et :

$$\forall \tau \in \{\pi,\tilde{\pi}\}, V_{\tau_\infty,s}(y) := \frac{1}{2i\pi}\int_{(1+\varepsilon)} y^{-z}\frac{L(\tau_\infty,s+z)}{L(\tau_\infty,s)}Q_{\tau_\infty}(t)^{-\frac{z}{2}}G(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Comme la formule de Stirling (proposition C.1.1) assure que pour toute constante $c>0$ et pour τ égal à π ou $\tilde{\pi}$:

$$\frac{L_\infty(\tau,s+z)}{L_\infty(\tau,s)}Q_{\tau_\infty}(t)^{-c} \ll_{d_\tau,c} \exp\left(\frac{\pi}{4}d_\tau|z|\right),$$

il est possible de choisir la fonction holomorphe G de sorte que $V_{\tau_\infty,s}(y)$ soit très petite lorsque $y>1$. Ainsi, on a exprimé $L(\pi,s)$ comme la somme de deux séries de longueur $\sqrt{Q_\pi(t)}$. Par contre, la symétrie $s\mapsto 1-s$ n'est respectée que si π est auto-duale. Ce principe admet de nombreuses variantes et on pourra se reporter au cours de P. Michel présenté à Park City (**[Mi1]**) et à la thèse de G. Harcos (**[Ha]**) pour des précisions et de nombreux approfondissements.

Étape 2 Propriété de multiplicativité des coefficients de Dirichlet

On écrit :

$$|L(\pi,s)|^\kappa \left|M(\pi,\overrightarrow{x},s)\right|^2 = \left(L(\pi,s)^{\frac{\kappa}{2}}M(\pi,\overrightarrow{x},s)\right)\overline{\left(L(\pi,s)^{\frac{\kappa}{2}}M(\pi,\overrightarrow{x},s)\right)},$$

puis on remplace $L(\pi,s)$ par son équation fonctionnelle approchée et on développe l'expression obtenue. Des propriétés de multiplicativité des coefficients de Dirichlet $\lambda_\pi(l)$ et $\tilde{\lambda}_\pi(l)$ nous ramènent à l'étude de sommes du type :

$$\sum_{\pi\in\mathcal{F}(Q)} \lambda_\pi(m)\overline{\lambda_\pi(n)} \tag{2.2.1}$$

où m et n sont des variables de longueur au plus $Q^{\frac{\kappa}{2}+\Delta}$. Enonçons les propriétés de multiplicativité qui interviennent dans le cas des exemples A, B et C.

Cas des caractères de Dirichlet
Soit χ un caractère de Dirichlet primitif. Par définition d'un caractère, on a :

$$\forall (m,n)\in\mathbb{N}^{*^2}, \quad \lambda_\chi(m)\lambda_\chi(n)=\lambda_\chi(mn).$$

Les coefficients de Dirichlet d'une fonction L de Dirichlet sont donc totalement multiplicatifs.

Cas des formes modulaires
Soit f une forme cuspidale de Hecke de niveau N et de valeurs propres de Hecke $(\lambda_f(l))_{l\wedge N=1}$. La propriété de composition (1.3.1) des opérateurs de Hecke entraîne que pour tout entier naturel non-nul l_1 et tout entier naturel non nul l_2 premier avec N :

$$\psi_f(l_1)\lambda_f(l_2) = \sum_{d|l_1\wedge l_2} \varepsilon_N(d)\psi_f\left(\frac{l_1 l_2}{d^2}\right)$$

et cette relation est vraie pour tous entiers naturels non-nuls l_1 et l_2 si f est primitive.

Étape 3 Formules de traces

Il s'agit d'évaluer alors des sommes du type (2.2.1) ce qui se fait à l'aide de *formules de traces* qui révèlent des liens profonds entre les coefficients de Dirichlet des différentes fonctions L de la famille :

$$\sum_{\pi\in\mathcal{F}(Q)} \lambda_\pi(m)\overline{\lambda_\pi(n)} = \delta_{m,n} + \mathrm{TND}(m,n)$$

où TND désigne un terme non-diagonal. En réinjectant tout cela dans l'expression du moment, on constate que celui-ci est la somme d'un terme dit *diagonal* provenant des termes $m = n$ et d'un terme *non-diagonal*. Le terme diagonal est plus facile à contrôler car il comporte beaucoup moins de terme. Par contre, le terme non-diagonal est de moins en moins maîtrisé lorsque κ augmente car les variables sont alors de plus en plus grandes. On appelle *moment critique* le moment d'ordre κ_0 donné par :

$$\kappa_0 + 2\Delta = \underline{\lim}_{\substack{Q\to+\infty \\ \pi\in\mathcal{F}(Q)}} \quad 4\,\frac{\log|\mathcal{F}(Q)|}{\log Q_\pi(0)}.$$

En pratique, il s'agit du premier moment pour lequel le terme non-diagonal cesse d'être «trivialement» négligeable devant le terme diagonal : il faut alors tenir compte de termes non-diagonaux ! Le tableau 2.1 donne les moments critiques de nos exemples. Il faut retenir

Famille	Moment critique
$\mathcal{G}$	4
$\mathcal{H}_\pm$	4
$\mathcal{F}$	2

TAB. 2.1 – Moment critique de chaque famille

que évaluer le moment critique d'une famille de fonctions L sur la droite critique est très délicat. C'est un peu plus raisonnable et les résultats sont meilleurs lorsqu'on cherche à le

faire au bord de la bande critique car on est «presque» dans le domaine d'absolue convergence (confer **[Ro]**, **[RoWu]**, **[CoMi]**). Par contre, donner une asymptotique d'un moment surcritique sur la droite critique est beaucoup plus délicat. Le lecteur peut consulter l'exposé de P. Michel (**[Mi3]**) aux Journées Arithmétiques 2001 de Lille pour des précisions concernant la notion de moment critique.

2.2.2 Formules de trace

Revenons un instant à la problématique initiale. On cherche à étudier une fonction L particulière que l'on inclut dans une famille de fonctions L. Le choix de la famille de fonctions L englobante doit être fait de sorte qu'il existe une formule de traces pour cette famille : on dit que la famille doit être *spectralement complète*. En particulier, elle doit être suffisamment grosse. Nous allons maintenant donner les formules de traces utiles pour traiter les exemples A, B et C.

Cas des caractères d'un groupe

Soit G un groupe fini auquel on associe son groupe de caractères noté $\widehat{G}$. On dispose d'une *relation d'orthogonalité* des caractères de G donnée par :

$$\forall (g,g') \in G^2, \quad \frac{1}{|\widehat{G}|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g)\overline{\chi(g')} = \delta_{g,g'}.$$

Cette relation constitue l'exemple le plus simple de formule de trace puisqu'elle ne comporte pas de terme non-diagonal. Explicitons cette relation dans le cas de $G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$:

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*^2}, \quad \frac{1}{q} \sum_{l(q)} e\left(\frac{l(m-n)}{q}\right) = \delta_{m \equiv n\,[q]}$$

et dans le cas de $G = \left((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times, \times\right)$:

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*^2}, \quad \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \in \widehat{\left(\frac{\mathbb{Z}}{q\mathbb{Z}}\right)^*}} \chi(m)\overline{\chi(n)} = \delta_{\substack{m \equiv n\,[q] \\ mn \wedge q = 1}}.$$

Notons que cette formule d'orthogonalité est un cas particulier de la formule d'inversion de Fourier qui exprime toute fonction $F : G \to \mathbb{C}$ comme étant égale à sa série de Fourier :

$$\forall g \in G, \quad F(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \left(\sum_{h \in G} F(h)\overline{\chi(h)} \right) \chi(g).$$

Cette formule d'orthogonalité est donc de nature spectrale.

Cas des formes modulaires

Soit $N \geq 1$ et $\mathcal{B}_k(N)$ une base orthogonale de $S_k(N)$ pour le produit scalaire de Petersson $\langle .,. \rangle_N$.

Formule de Petersson

On définit pour toute forme cuspidale f un facteur de normalisation appelée *poids harmonique* par :

$$\omega_N(f) := \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1} \langle f, f \rangle_N}$$

qui vérifie selon **[GoHoLi]** :

$$\omega_N(f) \ll_k \frac{\log N}{N}$$

uniformément par rapport à f.On définit aussi le Δ-*symbole* par :

$$\Delta_N(m,n) := \delta_{m,n} + 2\pi i^k \sum_{\substack{c \in \mathbb{N}^* \\ N|c}} \frac{S(m,n;c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)$$

pour tous entiers naturels non-nuls m et n. Ici, $S(.,.;.)$ est une somme de Kloosterman définie dans l'appendice B et $J_{k-1}(.)$ est une fonction de Bessel de première espèce définie dans l'appendice C. La *formule de Petersson* est donnée par :

Théorème 2.2.1. *Soit N un entier naturel non-nul. Si m et n sont des entiers naturels non-nuls alors :*

$$\sum_{f \in \mathcal{B}_k(N)} \omega_N(f) \psi_f(m) \psi_f(n) = \Delta_N(m,n).$$

Cette formule de traces traduit une *relation de «presque-orthogonalité»* entre les coefficients de Fourier des formes modulaires d'une base orthogonale. Son principal inconvénient est qu'il s'agit d'une moyenne sur une base orthogonale et non sur l'ensemble des formes primitives. On peut toutefois remarquer que si N est premier et $k < 12$ alors $S_k(N) = S_k^n(N)$. La formule de Petersson est par essence de nature spectrale car elle s'obtient en décomposant une forme cuspidale sur une base adaptée de $S_k(N)$ fabriquée à l'aide des séries dites de Poincaré.

Formule d'Iwaniec-Luo-Sarnak

H. Iwaniec, W. Luo et P. Sarnak ont donné une autre formule de traces dans le cas où N est sans facteurs carrés (**[IwLuSa]**) qui consiste en une moyenne sur les formes primitives. On définit l'opérateur de *moyenne harmonique* par :

$$A_N^h[\alpha] := \sum_{f \in S_k^p(N)}^{h} \alpha_f := \sum_{f \in S_k^p(N)} \omega_N(f) \alpha_f$$

pour toute suite α de nombres complexes indexée par l'ensemble des formes primitives. L'opérateur de *moyenne naturelle* est donnée par :

$$A_N[\alpha] := \sum_{f \in S_k^p(N)} \alpha_f.$$

On pourrait penser que les poids harmoniques engendrent une différence entre le comportement asymptotique de l'opérateur de moyenne harmonique et l'opérateur de moyenne naturelle lorsque $N \to +\infty$. Cependant, E. Kowalski et P. Michel (**[KoMi]**) ont montré qu'il n'en est rien dans le cas où N est premier et $k < 12$. De façon plus précise, si les coefficients α_f ne croissent pas trop et n'oscillent pas trop lorsque N devient grand alors :

$$A_N[\alpha] \backsimeq_{N\to+\infty} A_N^h[\alpha].$$

E. Royer et J. Wu (**[RoWu]**) ont généralisé cela à un cadre qui apparaîtra naturellement dans la suite. Le résultat principal obtenu par H. Iwaniec, W. Luo et P. Sarnak est :

Théorème 2.2.2 (H. Iwaniec-W. Luo-P. Sarnak (2001)). *Soient N un entier naturel non-nul sans facteurs carrés et f dans $S_k^p(N)$. Si m et n sont des entiers naturels non-nuls satisfaisant $m \wedge N = 1$ et $n \wedge N^2 \mid N$ alors :*

$$\begin{aligned} A_N^h[\lambda_\cdot(m)\lambda_\cdot(n)] &= \frac{1}{N}\sum_{LM=N}\frac{\mu(L)M}{\nu(n\wedge L)}\sum_{l|L^\infty}\frac{1}{l}\Delta_M(ml^2,n), \\ &= \frac{\varphi(N)}{N}\delta_{m,n} + \mathcal{O}\left(\frac{(mn)^{\frac{1}{4}}\tau(N)^2\tau_3(m\wedge n)\log(2mnN)}{k^{\frac{5}{6}}N\sqrt{n\wedge N}}\right). \end{aligned}$$

En prenant $m = n = 1$ dans le théorème précédent, on obtient :

Corollaire 2.2.3 (H. Iwaniec-W. Luo-P. Sarnak (2001)). *Si N est un entier naturel non-nul sans facteurs carrés alors :*

$$A_N^h[1] = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{2^{\omega(N)}}{p_1(N)}\right)$$

où $p_1(N)$ désigne le plus petit diviseur premier de N.

Ainsi, si N est sans facteurs carrés et sans petits diviseurs premiers, l'opérateur de moyenne harmonique est bel et bien un opérateur de moyenne lorsque $N \to +\infty$. H. Iwaniec, W. Luo et P. Sarnak, reprenant la méthode mise au point par E. Kowalski et P. Michel, ont supprimé ces poids harmoniques pour obtenir :

Proposition 2.2.4 (H. Iwaniec-W. Luo-P. Sarnak (2001)). *Soit N un entier naturel non-nul sans facteurs carrés. Si n un entier naturel non-nul vérifiant $n \wedge N^2 \mid N$ alors :*

$$\begin{aligned} A_N[\lambda_\cdot(n)] &= \frac{k-1}{12}\sum_{LM=N}\frac{\nu(L)M}{\nu(n\wedge L)}\sum_{m\wedge M=1}\frac{\Delta_M(m^2,n)}{m}, \\ &= \frac{k-1}{12}\frac{\varphi(N)}{\sqrt{n}}\chi_N^{\square}(n) + \mathcal{O}\left(\frac{n^{\frac{1}{6}}(kN)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{n\wedge N}}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que, en prenant $n = 1$,

Corollaire 2.2.5 (H. Iwaniec-W. Luo-P. Sarnak (2001)). *Si N est un entier naturel non-nul sans facteurs carrés alors :*

$$\dim_{\mathbb{C}} S_k^n(N) = \frac{k-1}{12}\varphi(N) + \mathcal{O}\left((kN)^{\frac{2}{3}}\right). \tag{2.2.2}$$

2.2.3 Moments ramollis

Les *moments ramollis* d'une famille de fonctions L sont les moments de cette famille obtenus pour un choix spécifique du polynôme de Dirichlet $M(\pi, \overrightarrow{x}, s)$ de sorte que :

$$L(\pi, s)M(\pi, \overrightarrow{x}, s) \text{ soit très proche de } 1$$

au moins en moyenne sur la famille. Dans ce cas, $M(\pi, \overrightarrow{x}, s)$ s'appelle un *ramollisseur* et $\mathcal{L}(\pi, s) := L(\pi, s)M(\pi, \overrightarrow{x}, s)$ est la *fonction L ramollie*. Le lecteur peut se reporter au chapitre 5 pour comprendre les raisons pour lesquelles on s'intéresse à ces moments ramollis.

Construction typique d'un ramollisseur.

On rappelle que $L = Q^{\Delta}$ est une petite puissance du conducteur analytique en 0 de π. Soient Υ un réel dans $]0, 1[$ et P un polynôme satisfaisant $P(0) = 0$ et $P(\Upsilon) = 1$. On définit pour tout entier naturel non-nul l :

$$F_L^{\Upsilon}(l) := \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq l \leq L^{1-\Upsilon}, \\ P\left(\frac{\log\left(\frac{L}{l}\right)}{\log L}\right) & \text{si } L^{1-\Upsilon} \leq l \leq L, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On cherche à écrire le futur ramolliseur sous la forme suivante :

$$\sum_{l \geq 1} \frac{m_\pi(l) F_L^{\Upsilon}(l)}{l^s}.$$

On remarque que sur $\Re(s) > 1$:

$$\mathcal{L}(\pi, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_\pi(n)}{n^s}$$

où les coefficients de Dirichlet sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_\pi(n) := \sum_{lm=n} m_\pi(l) F_L^{\Upsilon}(l) \lambda_\pi(m).$$

En outre, si $1 \leq n \leq L^{1-\Upsilon}$ alors :

$$\alpha_\pi(n) = \sum_{lm=n} m_\pi(l) \lambda_\pi(m).$$

On suppose que pour tout entier naturel n compris entre 1 et $L^{1-\Upsilon}$, on a :

$$\sum_{lm=n} m_\pi(l) \lambda_\pi(m) = \delta_1(n). \tag{2.2.3}$$

Dans ce cas, il est clair que :

$$\mathcal{L}(\pi, s) = 1 + \sum_{n > L^{1-\Upsilon}} \frac{\alpha_\pi(n)}{n^s}$$

D'autre part, si on suppose que :

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_\pi(l) \ll_\varepsilon l^\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$ alors sur $\Re(s) > 1 + \varepsilon$:

$$\mathcal{L}(\pi, s) = 1 + \mathcal{O}_\varepsilon\left(\frac{1}{Q^{\Delta(1-\Upsilon)(\Re(s)-(1+\varepsilon))}}\right)$$

ce qui justifie bien le fait que $\mathcal{L}(\pi, s)$ est très proche de 1 (d'autant plus proche que Δ est grand). La façon la plus naturelle de choisir un ramollisseur satisfaisant (2.2.3) est de prendre la série de Dirichlet $L(\pi, s)^{-1}$ sur $\Re(s) > 1$ et de la tronquer. De façon explicite, si :

$$L(\pi, s)^{-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu_\pi(n)}{n^s}$$

alors on choisit :

$$M(\pi, \overrightarrow{x}, s) := \sum_{l \geq 1} \frac{\mu_\pi(l) F_L^\Upsilon(l)}{l^s}.$$

Revenons maintenant à l'exemple A. J.B. Conrey et K. Soundararajan (**[CoSo]**) ont obtenu l'asymptotique du second moment ramolli de la famille $\mathcal{G}$ autour du point critique. Les coefficients de Dirichlet du ramollisseur utilisé par les auteurs sont donnés par :

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \quad m_\pi(l) := \delta_{2\nmid l}\mu(l)\chi_{-8d}(l).$$

Il est tout à fait moral de retrouver la fonction de Moëbius dans ces coefficients car il s'agit plus ou moins des coefficients de Dirichlet de l'inverse d'une série de Dirichlet. L'hypothèse (2.2.3) est satisfaite sachant que :

$$\sum_{lm=n} \chi_{-8d}(m)\delta_{2\nmid l}\mu(l)\chi_{-8d}(l) = \chi_{-8d}(n) \sum_{2\nmid l \mid n} \mu(l) \tag{2.2.4}$$

Le résultat suit car $\chi_{-8d}(n) = 0$ si n est pair et $\sum_{l|n} \mu(l) = \delta_1(n)$. Le second moment ramolli étudié par les auteurs est donné par :

$$\mathcal{W}(\mu, \Phi) := \frac{1}{\sum_{2\nmid d} \mu^2(d)\Phi\left(\frac{d}{X}\right)} \sum_{2\nmid d} \mu^2(d) \left|\mathcal{L}\left(\chi_{-8d}, \frac{1}{2} + \mu\right)\right|^2 \Phi\left(\frac{d}{X}\right)$$

où μ est un nombre complexe et Φ est une fonction lisse positive bornée à support compact dans $[1, 2]$ satisfaisant $\int_1^2 \Phi(t)\mathrm{d}t \gg 1$. Pour $0 < \Upsilon < 1$, $\Delta > 0$ et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on définit une fonction sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\mathcal{V}_{\Delta,P}^\Upsilon(u, v) := 1 + \frac{\exp(-u)}{\Delta}\left(\frac{\sinh u}{u} - \frac{\sin v}{v}\right) \times \int_0^\Upsilon \exp(-2u\Delta(1-x))\left|P'(x) + \frac{P''(x)}{2(u+iv)\Delta}\right|^2 \mathrm{d}x.$$

Notons que cette fonction admet une fausse singularité en tout point (u_0, v_0) satisfaisant $u_0 v_0 = 0$ et s'y prolonge par continuité par $\mathcal{V}^{\Upsilon}_{\Delta,P}(u_0, v_0)$. D'autre part :

$$\exists \lim_{u \to +\infty} \mathcal{V}^{\Upsilon}_{\Delta,P}(u, v) = 1 \tag{2.2.5}$$

et :

$$\exists \lim_{v \to \pm\infty} \mathcal{V}^{\Upsilon}_{\Delta,P}(u, v) = 1 + \frac{\exp(-u)}{\Delta} \frac{\sinh u}{u} \int_0^{\Upsilon} \exp(-2u\Delta(1-x)) P'(x)^2 \mathrm{d}x. \tag{2.2.6}$$

Le résultat fondamental de J.B. Conrey et K. Soundararajan (**[CoSo]**) est le suivant :

Théorême 2.2.6 (J.B. Conrey-K. Soundararajan (2002)). *Soient Υ un réel dans $]0,1[$, P un polynôme satisfaisant $P(0) = P'(0) = P'(\Upsilon) = 0$ et $P(\Upsilon) = 1$ et μ un nombre complexe. Si $\frac{\varepsilon_0}{\log X} \leq |\mu| \ll \frac{1}{\log X}$ pour une constante absolue $\varepsilon_0 > 0$ et $0 < \Delta < \frac{1}{2}$ alors :*

$$\mathcal{W}(\mu, \Phi) = \mathcal{V}^{\Upsilon}_{\Delta,P}(\log(X)\Re(\mu), \log(X)\Im(\mu)) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{X^{\delta}} + \frac{L^{-2\tau(1-\Upsilon)}}{\log X}\right)$$

pour une constante δ strictement positive ne dépendant que de ε_0.

Remarque 2.2.1. K. Soundararajan a annoncé aux Journées Arithmétiques 2003 à Graz (Autriche) avoir établi une formule asymptotique pour les seconds moments ramollis des familles $\mathcal{H}_{\pm}$.

Chapitre 3

Second moment harmonique ramolli des fonctions L de Rankin-Selberg

Ce chapitre contient les énoncés et les preuves des formules asymptotiques précises établies pour le second moment harmonique ramolli des fonctions L de Rankin-Selberg noté $\mathcal{W}^h(g;\mu)$ où μ est un nombre complexe. La figure 3.1 décrit le lieu de validité de ces formules (c'est-à-dire les nombres complexes μ pour lesquels ces formules s'appliquent) et les techniques employées pour les prouver.

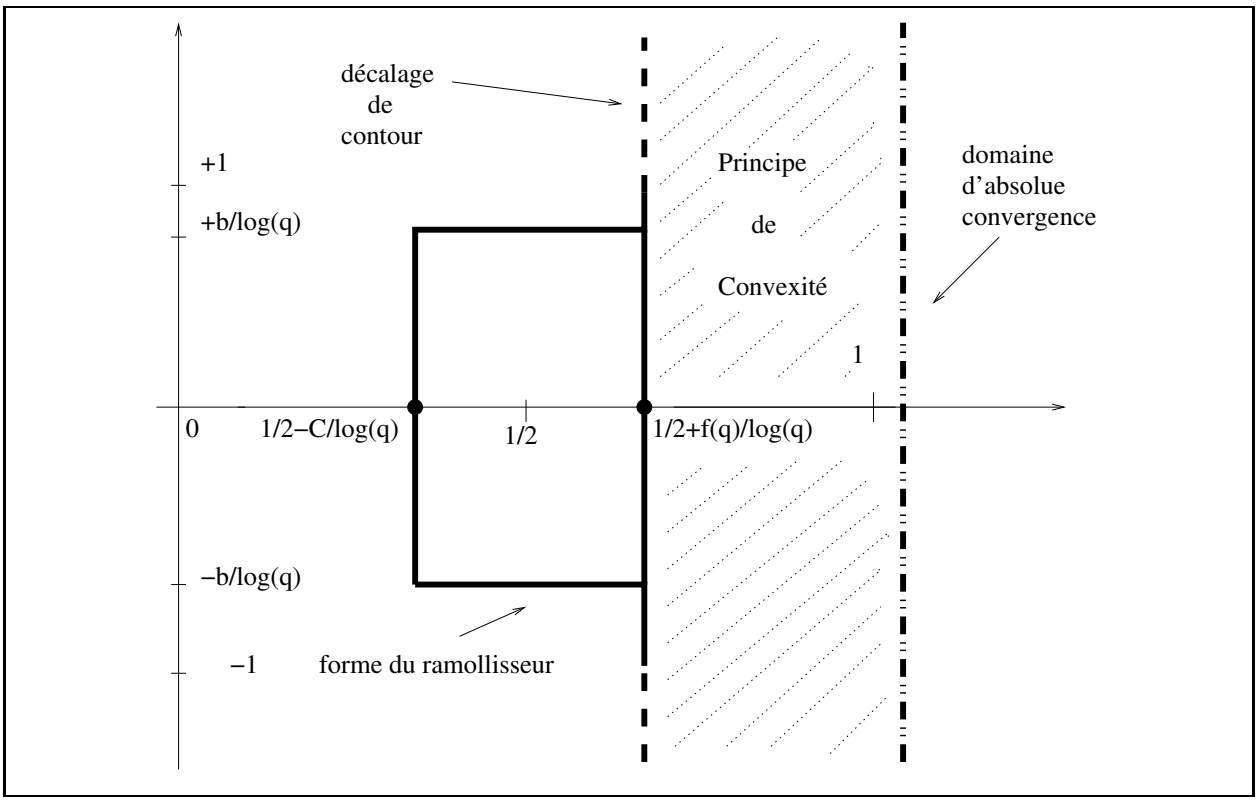

Fig 3.1: Schéma de preuve des résultats

Tout au long de ce chapitre, μ désigne un nombre complexe, τ sa partie réelle, t sa partie imaginaire et $\delta := it$.

3.1 Présentation des résultats

Les résultats fondamentaux de ce travail consistent en des formules asymptotiques du second moment harmonique ramolli $\mathcal{W}^h(g;\mu)$ de la famille $\mathcal{F}$ de l'exemple C. Celui-ci est donné pour tout nombre complexe μ par :

$$\mathcal{W}^h(g;\mu) := A^h \left[\left| \mathcal{L}\left(. \times g, \frac{1}{2} + \mu \right) \right|^2 \right] \tag{3.1.1}$$

où $\mathcal{L}(f \times g, .)$ désigne la fonction L de Rankin-Selberg ramollie construite de façon précise dans la section suivante.

Comparons brièvement ce travail avec celui de J.B. Conrey et K. Soundararajan. Le nouveau challenge réside dans le fait que le conducteur analytique $Q_{f\times g}(0)$ de toute $L(f \times g, .)$ dans $\mathcal{F}(q)$ est grand par rapport à la taille de $\mathcal{F}(q)$ lorsque q devient grand :

$$\frac{\log Q_{f\times g}(0)}{\log |\mathcal{F}(q)|} \to 2 \quad \text{lorsque} \quad q \to +\infty$$

alors que pour la famille $\mathcal{G}$, $Q_{\chi_{-8d}}(0)$ et $|\mathcal{G}(X)|$ sont du même ordre de grandeur lorsque X devient grand :

$$\frac{\log Q_{\chi_{-8d}}(0)}{\log |\mathcal{G}(X)|} \to 1 \quad \text{lorsque} \quad X \to +\infty.$$

Il en est de même pour les familles $\mathcal{H}_\pm$ à savoir :

$$\frac{\log Q_f(0)}{\log |\mathcal{H}_\pm(K)|} \to 1 \quad \text{lorsque} \quad K \to +\infty.$$

En particulier, dans notre cas, le second moment est déjà critique alors que pour les familles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}_\pm$, le moment critique est le moment d'ordre 4. De plus, les fonctions L de la famille $\mathcal{G}$ (respectivement $\mathcal{H}_\pm$) sont de degré 1 (respectivement 2) alors que les fonctions L de la famille $\mathcal{F}$ sont de degré 4 : cela accroît considérablement l'analyse combinatoire de ces moments.

La difficulté est d'estimer ce second moment harmonique ramolli autour du point critique. On prouve que :

Théorème 3.1.1. *Soient Υ un réel dans $]0,1[$, P un polynôme satisfaisant $P(0) = P'(0) = P'(\Upsilon) = 0$ et $P(\Upsilon) = 1$ et μ un nombre complexe. Soit g une forme primitive cuspidale de niveau D sans facteurs carrés et de caractère trivial. Supposons que q est un nombre premier, premier avec D et qu'il n'y a que des formes nouvelles dans $S_k(q)$. Si :*

$$\frac{\varepsilon_0}{\log q} \leq |\mu| \ll \frac{1}{\log q}$$

pour une constante absolue $\varepsilon_0 > 0$ et $L = q^{2\Delta} < \sqrt{q}$ alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^h(g;\mu) = \mathcal{V}^\Upsilon_{\Delta,P}(2\log(q)\Re(\mu), 2\log(q)\Im(\mu)) + Errsec(q,L;\mu) \\ + \mathcal{O}_{k,g}\left(\frac{1}{q^\delta} + \frac{1}{\log q}\left(\chi_{\mathbb{R}_+}(\tau)\, L^{-2\tau(1-\Upsilon)} + \chi_{\mathbb{R}_-}(\tau)\, q^{-2\tau} L^{-4\tau} \right) \right) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

où δ est une constante absolue strictement positive et une borne pour le terme d'erreur est donnée par :

$$Errsec(q,L;\mu)=\mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((qL)^{\varepsilon}\left(\frac{L^{\frac{5}{2}}}{q^{\frac{1}{12}}}+\frac{L^{\frac{21}{4}}}{q^{\frac{1}{4}}}\right)\right) \tag{3.1.3}$$

pour tout $\varepsilon>0$.

Remarque 3.1.1. Le lecteur peut vérifier que le même résultat reste valide avec des conditions légèrement moins restreignantes sur le nombre complexe μ à savoir :

$$\begin{aligned} \tfrac{\varepsilon_0}{\log q} &\leq |\mu|,\\ -\frac{c}{\log q}\leq \Re(\mu) &\leq \frac{f_1(q)}{\log q},\\ |\Im(\mu)| &\leq \frac{f_2(q)}{\log q} \end{aligned}$$

où ε_0 et c sont des constantes absolues strictement positives et f_1, f_2 sont des fonctions strictement positives vérifiant :

$$\begin{aligned} \exists \lim_{q\to+\infty} f_1(q) &= +\infty,\\ f_1(q) &= o(\log q),\\ f_2(q) &= \mathcal{O}(\log q). \end{aligned}$$

Sous les autres hypothèses du théorème précédent,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^h(g;\mu)=\mathcal{V}^{\Upsilon}_{\Delta,P}(2\log(q)\Re(\mu),2\log(q)\Im(\mu))+\mathrm{Errsec}(q,L;\mu)\\ +\mathcal{O}_{k,g}\left(\frac{1}{q^{\delta}}+\left(\frac{f_1(q)}{\log q}+\frac{f_2(q)}{\log q}\right)\left(\chi_{\mathbb{R}_+}(\tau)\,L^{-2\tau(1-\Upsilon)}+\chi_{\mathbb{R}_-}(\tau)\,q^{-2\tau}L^{-4\tau}\right)\right) \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

où δ est une constante absolue strictement positive. Cette variante nous permettra, au cours de l'estimation du second moment harmonique ramolli loin du point critique, de nous décaler vers la droite du point critique d'une distance légèrement plus grande que l'inverse du logarithme du conducteur analytique évalué en 0.

Dans toute la suite, on dira que $\Delta=\frac{\log L}{2\log q}$ est *effectif* si :

$$\mathrm{Errsec}(q,L=q^{2\Delta};\mu)=\mathcal{O}_{k,g}\left((1+|\Im(\mu)|)^{B}\frac{1}{q^{\alpha}}\right) \tag{3.1.5}$$

pour une constante absolue α strictement positive. Le théorème précédent assure que tout $\Delta<\frac{1}{60}=0.016666...$ est effectif. Ainsi, la borne obtenue pour le terme d'erreur est loin d'être suffisante car elle nous empêche de pouvoir prendre un ramollisseur de longueur logarithmique relative suffisamment grande pour ramollir efficacement les fonctions L de

Rankin-Selberg alors que J.B. Conrey et K. Soundararajan avaient réussi à prendre un ramollisseur de longueur relative $\frac{1}{2}$ ce qui est excellent. Améliorer cette borne sera fait dans le chapitre suivant et constitue le résultat essentiel de ce mémoire.

Loin de $\frac{1}{2}$, on trouve par des principes généraux de convexité de type Phragmen-Lindelöf que :

Théorème 3.1.2. *Soit g une forme primitive cuspidale de niveau D sans facteurs carrés et de caractère trivial. Supposons que q est un nombre premier, premier avec D et qu'il n'y a que des formes nouvelles dans $S_k(q)$. Si μ est un nombre complexe vérifiant :*

$$\Re(\mu) \geq \frac{f(q)}{\log q}$$

où f est une fonction strictement positive satisfaisant :

$$\begin{aligned} \exists \lim_{q\to+\infty} f(q) &= +\infty, \\ f(q) &= o(\log q) \end{aligned}$$

et Δ est effectif alors pour tout $0 < a < 4\Delta(1-\Upsilon)$, on a :

$$\mathcal{W}^h(g;\mu) = A_q^h[1] + \mathcal{O}\left((1+|\Im(\mu)|)^B q^{-a\Re(\mu)}\right) \tag{3.1.6}$$

pour une constante absolue $B > 0$.

Remarque 3.1.2. Dans les deux théorèmes précédents, l'hypothèse "il n'y a que des formes nouvelles dans $S_k(q)$" est purement technique et provient du théorème 3.3.1. On supprimera cette hypothèse dans l'annexe D.

3.2 Fonction L de Rankin-Selberg ramollie

Il s'agit d'expliciter ici le choix du ramollisseur pour la famille $\mathcal{F}$ de l'exemple C. Sur $\Re(s) > 1$, on a :

$$L(f\times g, s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_{f\times g}(n)}{n^s}$$

avec :

$$\forall n \geq 1, \quad a_{f\times g}(n) = \sum_{n=n_1^2 n_2} \varepsilon_q(n_1)\varepsilon_D(n_1)\lambda_f(n_2)\lambda_g(n_2).$$

Remarquons que $|a_{f\times g}(n)| \leq \tau(n)^2 \sum_{n=n_1^2n_2} 1 \ll_\varepsilon n^\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. La série de Dirichlet de $L(f\times g, s)^{-1}$ est donnée par :

Proposition 3.2.1. *Sur $\Re(s) > 1$,*

$$L(f\times g, s)^{-1} = K(g, 2s) \sum_{l\geq 1} \frac{\widetilde{c_{f\times g}}(l,s)}{l^s}$$

où pour tout nombre premier p et tout entier naturel non-nul l :

$$K_p(g,s) := 1 + \varepsilon_q(p)\lambda_g(p^2)p^{-s} + \varepsilon_{qD}(p)p^{-2s},$$

$$\widetilde{c_{f\times g}}(l,s) := \sum_{l=l_1l_2^2l_3^3} \mu^2(l_1l_2l_3)\mu(l_1l_3)\varepsilon_q(l_3)\varepsilon_D(l_2l_3)\lambda_g(l_1l_3)K_{(l)}(g,s)^{-1}\lambda_f(l_1l_2^2l_3).$$

Preuve de la proposition 3.2.1. On ne donne que les grandes lignes. Si on pose :

$$L(f\times g,s)^{-1} := \sum_{l\geq 1}\frac{u_l}{l^s}$$

alors on montre que $u_l = 0$ sauf si $l = l_1l_2^2l_3^3l_4^4$ avec l_1, l_2, l_3, l_4 des entiers naturels non-nuls sans facteurs carrés et deux à deux premiers entre eux auquel cas :

$$u_l = \mu(l_1l_3)\varepsilon_{qD}(l_3l_4)\lambda_f(l_1l_3)\lambda_g(l_1l_3)\sum_{l_2=l_2'l_2''}\varepsilon_q(l_2'')\varepsilon_D(l_2')\lambda_f(l_2'^2)\lambda_g(l_2''^2)$$

En fait, on peut se limiter à calculer u_{p^k} pour tout nombre premier p et tout entier naturel k par multiplicativité. Ceci achève la preuve

■

On remarque que la fonction $K(g,s)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$K(g,s) = k(g,s)\frac{L^{(q)}(g\times g,s)}{\zeta^{(qD)}(s)}$$

où $k(g,s)$ est une fonction holomorphe sur $\Re(s) > \frac{1}{2}$. Ainsi, $K(g,s)$ s'étend en une fonction holomorphe sur $\Re(s) > \frac{1}{2}$.

Redonnons une dernière fois les notations. Soient $0 < \Upsilon < 1$ un nombre réel, P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ satisfaisant $P(\Upsilon) = 1$, $P(0) = P'(0) = P'(\Upsilon) = 0$ et $L = q^{2\Delta} \geq 1$ un entier naturel non-nul avec $\Delta > 0$. On pose :

$$F_L^{\Upsilon}(l) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq l \leq L^{1-\Upsilon} \\ P\left(\frac{\log\frac{l}{L}}{\log L}\right) & \text{si } L^{1-\Upsilon} \leq l \leq L \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On choisit le ramollisseur suivant :

$$M(f\times g,s) = K(g,2s)\sum_{l\geq 1}\frac{c_{f\times g}(l,s)}{l^s}$$

avec :

$$c_{f\times g}(l,s) = \sum_{l=l_1l_2^2l_3^3}\mu^2(l_1l_2l_3)\mu(l_1l_3)\varepsilon_q(l_3)\varepsilon_D(l_2l_3)\lambda_f(l_1l_2^2l_3)\lambda_g(l_1l_3)K_{(l)}(g,2s)^{-1}F_L^{\Upsilon}(l_1l_2^2l_3)$$

pour tout entier naturel non-nul l, tout nombre complexe s et on remarque que :

$$M(f\times g,s)=\sum_{l\geq 1}\frac{\lambda_f(l)}{l^s}x_l(g,s)$$

où :

$$x_l(g,s)=K(g,2s)\sum_{l=l_1l_2^2l_3}\frac{1}{l_3^{2s}}\mu^2(l_1l_2l_3)\mu(l_1l_3)\varepsilon_q(l_3)\varepsilon_D(l_2l_3)\lambda_g(l_1l_3)K_{(l)}(g,2s)^{-1}F_L^{\Upsilon}(l)$$

pour tout entier naturel non-nul l et tout nombre complexe s de sorte que $M(f\times g,.)$ est bien un polynôme de Dirichlet de longueur au plus $L=q^{2\Delta}$. Δ est la longueur relative logarithmique du ramollisseur. La forme du ramollisseur assure que :

$$\mathcal{L}(f\times g,s)=1+\mathcal{O}_\varepsilon\left(L^{(1-\Upsilon)(1+\varepsilon-\sigma)}\right) \tag{3.2.1}$$

pour tout $\varepsilon>0$ et sur $\Re(s):=\sigma>1+\varepsilon$. Par conséquent, $\mathcal{L}(f\times g,.)$ ne s'annule pas à droite de $1+\frac{\log_2 q}{\log q}$ (au moins pour q suffisamment grand). De plus, pour q suffisamment grand, $|\mathcal{L}(f\times g,s)-1|<1$ sur $\Re(s)>1+\varepsilon$ et il est alors légitime de poser :

$$\left(\log\mathcal{L}(f\times g,.)\right)(s):=L\left(\mathcal{L}(f\times g,s)\right)$$

sur $\Re(s)>1+\varepsilon$ avec $L(z):=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n$.

On cherche à donner une expression intégrale des coefficients du ramollisseur qui sera utile pour la suite. Premièrement, à tout polynôme $A(X)=\sum_{k\geq 0}a_kX^k$ et pour tout nombre réel M, on associe la fonction suivante :

$$\widehat{A_M}(s)=\sum_{k\geq 0}a_k\frac{k!}{(s\log M)^k}.$$

pour tout nombre complexe s. On obtient le résultat suivant :

Lemme 3.2.2. *Soit m un entier naturel non-nul.*

$$\frac{1}{2i\pi\log M}\int_{(3)}\left(\frac{M}{m}\right)^s\widehat{A_M}(s)\frac{\mathrm{d}s}{s^2}=\delta_{m<M}\left(\int^{(1)}A\right)\left(\frac{\log\left(\frac{M}{m}\right)}{\log M}\right)$$

où $\int^{(1)}A$ désigne le polynôme obtenu en intégrant 1 fois A sans aucune constante d'intégration.

Preuve du lemme 3.2.2. Par linéarité, on se rend compte qu'il est suffisant de prouver ce lemme pour $A(X)=X^k$ avec $k\in\mathbb{N}$. En posant $y=\frac{M}{m}$, cela revient à prouver que :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(3)}y^s\frac{\mathrm{d}s}{s^{k+2}}=\delta_{y>1}\frac{\log^{k+1}(y)}{(k+1)!}$$

ce qui est un résultat classique bien connu qui s'obtient par un décalage judicieux des contours.

■

Au polynôme P déjà défini, on associe le polynôme suivant :

$$R(X) := P((1-\Upsilon)X + \Upsilon) - 1$$

et l'on donne l'expression intégrale du ramollisseur qui est une conséquence directe du lemme précédent :

Proposition 3.2.3. *Soit l un entier naturel non-nul.*

$$F_L^{\Upsilon}(l) = \frac{1}{2i\pi \log L} \int_{(3)} \left(\frac{L^{1-\Upsilon}}{l}\right)^s \left(\widehat{P_L'}(s) L^{\Upsilon s} - \frac{1}{1-\Upsilon} \widehat{R'_{L^{1-\Upsilon}}}(s)\right) \frac{\mathrm{d}s}{s^2}.$$

3.3 Le second moment harmonique ramolli autour du point critique

3.3.1 Les seconds moments harmoniques tordus selon E. Kowalski, P. Michel et J. Vanderkam

Les seconds moments harmoniques tordus de la famille $\mathcal{F}$ sont donnés par :

$$\mathcal{M}_g^h(\mu; l) := A_q^h \left[L\left(. \times g, \frac{1}{2} + \mu\right) L\left(. \times g, \frac{1}{2} + \overline{\mu}\right) \lambda_.(l) \right] \tag{3.3.1}$$

où μ est un nombre complexe, l est un entier naturel non-nul et $\lambda_.(l)$ est la l-ème valeur propre de Hecke. E. Kowalski, P. Michel et J. Vanderkam ont donné dans **[KoMiVa]** une formule asymptotique pour ces quantités sous certaines conditions très raisonnables portant sur D et k, q.

Certaines de leurs notations

On redonne ici des notations utilisés dans leur article. Pour z et s des nombres complexes, on pose :

$$\begin{aligned} \Gamma_g(s) &:= \Gamma\left(s + \frac{|k-k_g|}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{|k+k_g|}{2} - 1\right), \\ G_{g,z}(s) &:= \frac{(4\pi^2)^z}{\Gamma_g\left(\frac{1}{2}+z\right)} \left(\frac{\xi\left(\frac{1}{2}+s-z\right)}{\xi\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^5 \frac{P_g(s)}{P_g(z)} \end{aligned}$$

où $\xi(s) = s(1-s)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(s)\zeta(s)$ et $P_g(s)$ est un polynôme pair dont les coefficients sont réels, ne dépendent que de k, k_g et sont choisis de sorte que $P_g(s)\Gamma_g\left(\frac{1}{2}+s\right)$ soit holomorphe sur $\Re(s) > -A$ avec $A > \frac{1}{2}$. On remarque que :

$$\forall (z,s) \in \mathbb{C}^2, \quad G_{g,z}(-s) = \frac{(4\pi^2)^z \Gamma_g\left(\frac{1}{2}-z\right)}{(4\pi^2)^{-z} \Gamma_g\left(\frac{1}{2}+z\right)} G_{g,-z}(s). \tag{3.3.2}$$

On pose pour tous nombres complexes z et s :

$$H_{g,z}(s) := \left(4\pi^2\right)^{-s} \Gamma_g\left(\frac{1}{2}+s\right) G_{g,z}(s).$$

Ainsi,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad H_{g,z}(z) = 1.$$

Finalement :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \varepsilon_z(f\times g) := \frac{\left(4\pi^2\right)^{z} \Gamma_g\left(\frac{1}{2}-z\right)}{\left(4\pi^2\right)^{-z} \Gamma_g\left(\frac{1}{2}+z\right)} \varepsilon(f\times g)$$

Souvenons-nous que $\varepsilon(f\times g) = 1$.

Nouvelles notations

Soit $\mathcal{S}$ l'involution sur $\{\pm\mu, \pm\overline{\mu}\}$ donnée par $\mathcal{S}(z) = -z$. On définit :

$$\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu}) := \{(\mu,\overline{\mu}), (\mathcal{S}(\mu),\overline{\mu}), (\mu,\mathcal{S}(\overline{\mu})), (\mathcal{S}(\mu),\mathcal{S}(\overline{\mu}))\}$$

et $\pi_1(a,b) := a, \pi_2(a,b) := b$ pour tous objets a et b. Soit $\varepsilon\left(g;\mu\right)$ la matrice suivante :

$$\varepsilon\left(g;\mu\right) := \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_\mu(f\times g) & \varepsilon_{\overline{\mu}}(f\times g) & \varepsilon_\mu(f\times g)\varepsilon_{\overline{\mu}}(f\times g) \end{pmatrix}.$$

On définit aussi :

$$\mathsf{M}(g;\mu;l) := \begin{pmatrix} \mathsf{M}_g((\mu,\overline{\mu}));l) \\ \mathsf{M}_g((\mathcal{S}(\mu),\overline{\mu});l) \\ \mathsf{M}_g((\mu,\mathcal{S}(\overline{\mu}));l) \\ \mathsf{M}_g((\mathcal{S}(\mu),\mathcal{S}(\overline{\mu}));l) \end{pmatrix}$$

où pour tout $U \in \mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$ on a posé :

$$\mathsf{M}_g(U;l) := \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{l}} \operatorname{res}_{u=\pi_1(U)} \frac{1}{2i\pi} \int_{(3)} J_g(u,v;U;l)(qD)^{u+v} \frac{\mathrm{d}v}{(u-\pi_1(U))(v-\pi_2(U))}$$

avec :

$$J_g(u,v;U;l) := H_{g,\pi_1(U)}(u)\zeta^{(D)}(1+2u)H_{g,\pi_2(U)}(v)\zeta^{(qD)}(1+2v) \\ \nu_g(l;u,v)\frac{L(g\times g, 1+u+v)}{\zeta^D(2(1+u+v))}$$

où :

$$\nu_g(l;u,v) := \sum_{\delta\varepsilon=l} \frac{1}{\delta^u\varepsilon^v} \prod_{p\mid\delta\varepsilon} \left(\sum_{k\geq 0} \frac{\lambda_g(p^{k+v_p(\delta)})\lambda_g(p^{k+v_p(\varepsilon)})}{p^{k(1+u+v)}}\right)\left(\sum_{k\geq 0} \frac{\lambda_g(p^k)\lambda_g(p^k)}{p^{k(1+u+v)}}\right)^{-1}.$$

Le résultat de leur travail

Théorème 3.3.1 (E. Kowalski-P. Michel-J. Vanderkam (2002)). *Soit g une forme primitive cuspidale de niveau D sans facteurs carrés et de caractère trivial. Supposons que q est premier, premier avec D et qu'il n'y a que des formes nouvelles dans $S_k(q)$. Si $|\tau| \ll \frac{1}{\log q}$ alors pour tout entier naturel non-nul $l < q$,*

$$(qD)^{2\tau}\,\mathcal{M}_g^h(\mu;l) = \varepsilon\,(g;\mu)\,\mathsf{M}(g,\mu;l) + \mathit{Errtwist}(q,l;\mu)$$

où une borne pour le terme d'erreur est donnée par :

$$\mathit{Errtwist}(q,l;\mu) = \mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((ql)^{\varepsilon}\,(1+|\Im(\mu)|)^{B}\left(\frac{l^{a_1}}{q^{b_1}}+\frac{l^{a_2}}{q^{b_2}}\right)\right) \tag{3.3.3}$$

avec $a_1 = \frac{3}{4}, b_1 = \frac{1}{12}$, $a_2 = \frac{17}{8}, b_2 = \frac{1}{4}$ et pour tout $\varepsilon > 0$.

Remarque 3.3.1. Encore une fois, la condition "il n'y a que des formes nouvelles dans $S_k(q)$" est simplement technique et sera supprimé dans l'annexe D.

3.3.2 Application au second moment harmonique ramolli

On borne $\mathcal{W}^h(g;\mu)$ lorsque μ est à une distance de l'ordre de $\frac{1}{\log q}$ du point critique et on prouve dans cette partie le théorème 3.1.2. En fait, on ne le prouve que pour μ vérifiant $\tau \neq 0$ et $t \neq 0$ afin de simplifier la présentation de la preuve mais le théorème reste valide sans ces hypothèses sur μ. Posons $\mu_1 := \mu$, $\mu_2 := \overline{\mu}$. On a pour tout complexe μ :

$$\mathcal{W}^h(g;\mu) = (qD)^{-2\tau}\sum_{l_1,l_2\geq 1}\frac{1}{l_1^{\frac{1}{2}+\mu_1}l_2^{\frac{1}{2}+\mu_2}}\sum_{d\geq 1}\frac{\varepsilon_q(d)}{d^{1+\mu_1+\mu_2}}x_{dl_1}(g,\mu)x_{dl_2}(g,\overline{\mu})(qD)^{2\tau}\mathcal{M}_g^h(\mu;l_1l_2).$$

Définissons :

$$\mathsf{W}(g;\mu) := \begin{pmatrix} \mathsf{W}_g((\mu,\overline{\mu})) \\ \mathsf{W}_g((\mathcal{S}(\mu),\overline{\mu})) \\ \mathsf{W}_g((\mu,\mathcal{S}(\overline{\mu}))) \\ \mathsf{W}_g((\mathcal{S}(\mu),\mathcal{S}(\overline{\mu}))) \end{pmatrix}$$

avec pour U dans $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$:

$$\mathsf{W}_g(U) := (qD)^{-2\tau}\sum_{l_1,l_2\geq 1}\frac{1}{l_1^{\frac{1}{2}+\mu_1}l_2^{\frac{1}{2}+\mu_2}}\sum_{d\geq 1}\frac{\varepsilon_q(d)}{d^{1+\mu_1+\mu_2}}x_{dl_1}(g,\mu_1)x_{dl_2}(g,\mu_2)\mathsf{M}_g(U;l_1l_2). \tag{3.3.4}$$

Le théorème 3.3.1 entraîne que :

Proposition 3.3.2. *Soit g une forme primitive cuspidale de niveau D sans facteurs carrés et de caractère trivial. Supposons que q est premier, premier avec D et qu'il n'y a que des formes nouvelles dans $S_k(q)$. Si $|\tau| \ll \frac{1}{\log q}$ alors pour tout entier naturel non-nul $L < \sqrt{q}$,*

$$\mathcal{W}^h(g;\mu) = \varepsilon\,(g;\mu)\,\mathsf{W}(g;\mu) + \mathit{Errsec}(q,L;\mu) \tag{3.3.5}$$

où

$$\mathit{Errsec}(q,L;\mu) := (qD)^{-2\tau}\sum_{\substack{1\leq l_1,l_2,d,\\ dl_1\leq L,\\ dl_2\leq L}}\frac{x_{dl_1}(g,\mu_1)x_{dl_2}(g,\mu_2)}{l_1^{\frac{1}{2}+\mu_1}l_2^{\frac{1}{2}+\mu_2}d^{1+\mu_1+\mu_2}}\mathit{Errtwist}(q,l_1l_2;\mu)$$

satisfait :

$$Errsec(q,L;\mu)=\mathcal{O}_{\epsilon,k,g}\left((qL)^{\varepsilon}(1+|t|)^{B}\left(\frac{L^{2a_1+1}}{q^{b_1}}+\frac{L^{2a_2+1}}{q^{b_2}}\right)\right) \tag{3.3.6}$$

pour tout $\varepsilon>0$. Par conséquent, si

$$\Delta<\inf\left(\frac{b_1}{2\,(2a_1+1)},\frac{b_2}{2\,(2a_2+1)}\right)=\frac{1}{60}=0.01666... \tag{3.3.7}$$

alors Δ est effectif.

Preuve de la proposition 3.3.2. Il s'agit simplement de vérifier la borne du terme d'erreur. On a :

$$|\mathrm{Errsec}(q,L;\mu)|\leq(qD)^{-2\tau}\sum_{d\geq1}\frac{1}{d^{1+2\tau}}\sum_{l_1,l_2\geq1}\frac{|x_{dl_1}(g,\mu_1)|}{l_1^{\frac12+\tau}}\frac{|x_{dl_2}(g,\mu_2)|}{l_2^{\frac12+\tau}}\left(l^{a_1}q^{-b_1}+l^{a_2}q^{-b_2}\right).$$

Comme $|x_{dl_i}(g,\mu_i)|\ll_\varepsilon L^{\varepsilon}\sum_{dl_i=l_1l_2^2l_3}1$, $(dl_i)^{-\tau}=\mathcal{O}(1)$ et $a_i-\frac12\geq0$, on remarque que :

$$|\mathrm{Errsec}(q,L;\mu)|\ll_\varepsilon(qL)^{\varepsilon}\sum_{d\geq1}\frac{1}{d}\sum_{1\leq l_1,l_2\leq\frac{L}{d}}\left(L^{2(a_1-\frac12)}q^{-b_1}+L^{2(a_2-\frac12)}q^{-b_2}\right)$$

ce qui entraîne le résultat

■

Etudions maintenant le terme principal du second moment harmonique ramolli qui est donné par $(qD)^{-2\tau}\varepsilon\,(g;\mu)\,\mathsf{W}(g;\mu)$. On pose :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{f\times g}(\mu,\overline{\mu})&=1,\\ \varepsilon_{f\times g}(-\mu,\overline{\mu})&=\varepsilon_\mu(f\times g),\\ \varepsilon_{f\times g}(\mu,-\overline{\mu})&=\varepsilon_{\overline{\mu}}(f\times g),\\ \varepsilon_{f\times g}(-\mu,-\overline{\mu})&=\varepsilon_\mu(f\times g)\varepsilon_{\overline{\mu}}(f\times g).\end{aligned}$$

On montre que :

Proposition 3.3.3. *Soit g une forme primitive cuspidale de niveau D sans facteurs carrés et de caractère trivial. Si $|\tau|\ll\frac{1}{\log q}$ alors il existe $\delta>0$ tel que :*

$$\varepsilon\,(g;\mu)\,\mathsf{W}(g;\mu)=\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})}\mathcal{W}^h_{(\alpha,\beta)}(\mu)+\mathcal{O}_g(q^{-\delta})$$

où $\delta>0$ est une constante absolue et $\mathcal{W}^h_{(\alpha,\beta)}(\mu)=f(\alpha,\beta)\mathcal{V}_{(\alpha,\beta)}(\mu)$ avec :

$$\mathcal{V}_{(\alpha,\beta)}(\mu):=\sum_{l\geq1}\nu_g(l;\alpha,\beta)\sum_{l_1\,l_2=l}\sum_{d\geq1}\frac{1}{d^{1+\mu_1+\mu_2}}\frac{x_{dl_1}(g,\mu_1)}{l_1^{1+\mu_1}}\frac{x_{dl_2}(g,\mu_2)}{l_2^{1+\mu_2}}$$

et :

$$f(\alpha,\beta):=\frac{\varphi(q)}{q}(qD)^{-2\tau+\alpha+\beta}\varepsilon_{f\times g}(\alpha,\beta)L(g\times g,1+\alpha+\beta)\frac{\zeta^{(D)}(1+2\alpha)\zeta^{(qD)}(1+2\beta)}{\zeta^{(D)}(2(1+\alpha+\beta))}.$$

Preuve de la proposition 3.3.3. Selon (3.3.4) et l'expression intégrale des coefficients du ramollisseur (confer proposition 3.2.3), on obtient pour $U = (\alpha, \beta) \in \mathcal{S}(\mu, \overline{\mu})$:

$$\mathsf{W}_g(U) = (qD)^{-2\tau} \frac{\phi(q)}{q\,(logL)^2} \operatorname{res}_{u=\alpha} \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{(3)} \int_{(3)} \int_{(3)} m_g(u, v, s_1, s_2) \frac{\mathrm{d}s_1}{s_1^2} \frac{\mathrm{d}s_2}{s_2^2} \frac{\mathrm{d}v}{(u-\alpha)(v-\beta)}$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} m_g(u, v, s_1, s_2) &:= (qD)^{u+v} H_{g,\alpha}(u) H_{g,\beta}(v) h_g(u, v, s_1, s_2) \\ & L^{(1-\Upsilon)s_1} \left(\widehat{P'_L}(s_1) L^{\Upsilon s_1} - \frac{1}{1-\Upsilon} \widehat{R'_{L^{1-\Upsilon}}}(s_1) \right) L^{(1-\Upsilon)s_2} \left(\widehat{P'_L}(s_2) L^{\Upsilon s_2} - \frac{1}{1-\Upsilon} \widehat{R'_{L^{1-\Upsilon}}}(s_2) \right) \\ & \frac{\zeta^{(D)}(1+2u)\zeta^{(qD)}(1+2v)}{\zeta^{(D)}(1+s_1+2\mu_1)\zeta^{(D)}(1+s_2+2\mu_2)\zeta^{(D)}(2(1+u+v))} \\ & \frac{L(g\times g, 1+u+v) L(g\times g, 1+s_1+s_2+\mu_1+\mu_2)}{L(g\times g, 1+u+s_2+\mu_2) L(g\times g, 1+v+s_2+\mu_2)} \\ & \frac{L(g\times g, 1+s_1+2\mu_1) L(g\times g, 1+s_2+2\mu_2)}{L(g\times g, 1+u+s_1+\mu_1) L(g\times g, 1+v+s_1+\mu_1)}. \end{aligned}$$

Ici, h_g est une fonction holomorphe quand toutes les variables ont une partie réelle légèrement négative qui satisfait $h_g(u, v, s_1, s_2) = h_g(v, u, s_1, s_2)$. Ainsi, le pôle en $u = \alpha$ est simple d'où :

$$\mathsf{W}_g(U) = (qD)^{-2\tau} \frac{\phi(q)}{q\,(logL)^2} \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{(3)} \int_{(3)} \int_{(3)} m_g(\alpha, v, s_1, s_2) \frac{\mathrm{d}s_1}{s_1^2} \frac{\mathrm{d}s_2}{s_2^2} \frac{\mathrm{d}v}{v-\beta}.$$

En tant que fonction de v, l'intégrande admet trois pôles simples en $v = \beta$, $-\alpha$ et 0. On bouge le v-contour jusqu'à $\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\right)$ heurtant ces trois pôles et on remarque que l'intégrale résiduelle est bornée par $q^{-\delta}$ pour une constante absolue $\delta > 0$. Ainsi, à un coût admissible près, on a :

$$\varepsilon\,(g; \mu)\, \mathsf{W}(g; \mu) = \sum_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{S}(\mu, \overline{\mu})} \varepsilon_{f\times g}(\alpha, \beta) \left(r_1(\alpha, \beta) + r_2(\alpha, \beta) + r_3(\alpha, \beta) \right)$$

où $r_1(\alpha, \beta)$ (respectivement $r_2(\alpha, \beta)$, $r_3(\alpha, \beta)$) est la contribution du résidu en $v = \beta$ (respectivement $-\alpha$, 0) provenant de $\mathsf{W}_g((\alpha, \beta))$. On remarque que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{f\times g}(\alpha, \beta) r_2(\alpha, \beta) &= -\varepsilon_{f\times g}(-\alpha, -\beta) r_2(-\alpha, -\beta), \\ \varepsilon_{f\times g}(\alpha, \beta) r_3(\alpha, \beta) &= -\varepsilon_{f\times g}(\alpha, -\beta) r_3(\alpha, -\beta) \end{aligned}$$

car :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{f\times g}(\alpha, \beta) H_{g,\beta}(-\alpha) &= \varepsilon_{f\times g}(-\alpha, -\beta) H_{g,-\beta}(\alpha), \\ \varepsilon_{f\times g}(\alpha, \beta) H_{g,\beta}(0) &= \varepsilon_{f\times g}(\alpha, -\beta) H_{g,-\beta}(0) \end{aligned}$$

selon (3.3.2). Ainsi, la contribution du pôle en $v = -\alpha$ provenant de $\mathsf{W}_g((\alpha, \beta))$ se compense exactement avec la contribution du pôle en $v = -(-\alpha)$ provenant de $\mathsf{W}_g((-\alpha, -\beta))$ et la

contribution du pôle en $v=0$ provenant de $\mathsf{W}_g((\alpha,\beta))$ se compense exactement avec la contribution du pôle en $v=0$ provenant de $\mathsf{W}_g((\alpha,-\beta))$. Ainsi, à un coût admissible près, on a :

$$\varepsilon\,(g;\mu)\,\mathsf{W}(g;\mu) = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})} \varepsilon_{f\times g}(\alpha,\beta) r_1(\alpha,\beta)$$

ce qui est exactement le terme principal de la proposition 3.3.3

■

On pose pour tous entiers naturels non-nuls m,n et pour tout (α,β) dans $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$:

$$\begin{aligned} V_g(m,n;\alpha,\beta) &:= \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\|m\\ p\|n}} \frac{\nu_g(p^3;\alpha,\beta)}{\nu_g(p;\alpha,\beta)\nu_g(p^2;\alpha,\beta)}, \\ W_g(m,n;\alpha,\beta) &:= \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\|m\\ p\|n}} \frac{\nu_g(p^2;\alpha,\beta)}{\nu_g(p;\alpha,\beta)^2}. \end{aligned}$$

Lemme 3.3.4. *Soient μ un nombre complexe et (α,β) dans $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$. On a :*

$$\mathcal{V}_{(\alpha,\beta)}(\mu) = \sum_{w\geq 1} \frac{1}{w^{1+\mu_1+\mu_2}} \sum_{uv|w} \tau_{(\alpha,\beta)}(u,v) S_{u,v,w}(\alpha,\beta;\mu_1) S_{u,v,w}(\alpha,\beta;\mu_2)$$

où pour z dans $\{\mu_1,\mu_2\}$:

$$\begin{aligned} \tau_{(\alpha,\beta)}(u,v) &= \frac{\mu(u)\nu_g(u^2;\alpha,\beta)\nu_g(v^2;\alpha,\beta)V_g(u,v;\alpha,\beta)^2}{uv}, \\ S_{u,v,w}(\alpha,\beta;z) &= \sum_{l\geq 1} \frac{\nu_g(l;\alpha,\beta)V_g(l,v;\alpha,\beta)W_g(l,u;\alpha,\beta)}{l^{1+z}} x_{wl}(g,z). \end{aligned}$$

Preuve du lemme 3.3.4. On a en posant $l_1=ka$ et $l_2=kb$ avec $a\wedge b=1$:

$$\mathcal{V}_{(\alpha,\beta)}(\mu) = \sum_{k\geq 1}\sum_{a\wedge b=1} \frac{\nu_g(k^2ab;\alpha,\beta)}{k^{1+\mu_1+\mu_2}a^{1+\mu_1}b^{1+\mu_2}} \sum_{d\geq 1} \frac{x_{dka}(g,\mu_1)x_{dkb}(g,\mu_2)}{d^{1+\mu_1+\mu_2}}.$$

Par la multiplicativité de ν_g et le fait que ka et kb sont deux entiers naturels sans facteurs cubiques avec $a\wedge b=1$, on a :

$$\nu_g(k^2ab;\alpha,\beta) = \nu_g(k^2;\alpha,\beta)\nu_g(a;\alpha,\beta)\nu_g(b;\alpha,\beta)V_g(a,k;\alpha,\beta)V_g(b,k;\alpha,\beta)$$

d'où,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{(\alpha,\beta)}(\mu) = &\sum_{k,c,d\geq 1} \frac{\nu_g(k^2;\alpha,\beta)\mu(c)}{(kcd)^{1+\mu_1+\mu_2}kc} \\ &\left(\sum_{a\geq 1} \frac{\nu_g(ac;\alpha,\beta)V_g(ac,k;\alpha,\beta)}{a^{1+\mu_1}} x_{dka}(g,\mu_1)\right)\left(\sum_{b\geq 1} \frac{\nu_g(bc;\alpha,\beta)V_g(bc,k;\alpha,\beta)}{b^{1+\mu_2}} x_{dkb}(g,\mu_2)\right). \end{aligned}$$

De nouveau, on remarque que :

$$\nu_g(ac;\alpha,\beta)=\nu_g(a;\alpha,\beta)\nu_g(c;\alpha,\beta)W_g(a,c;\alpha,\beta)$$

ce qui nous amène à l'expression correcte énoncée dans le lemme

■

Définissons pour (α,β) dans $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{\leq}_{(\alpha,\beta)}(\mu) &= \sum_{1\leq w\leq L^{1-\Upsilon}}\frac{1}{w^{1+\mu_1+\mu_2}}\sum_{uv|w}\tau_{(\alpha,\beta)}(u,v)S_{u,v,w}(\alpha,\beta;\mu_1)S_{u,v,w}(\alpha,\beta;\mu_2),\\ \mathcal{V}^{>}_{(\alpha,\beta)}(\mu) &= \sum_{L^{1-\Upsilon}<w\leq L}\frac{1}{w^{1+\mu_1+\mu_2}}\sum_{uv|w}\tau_{(\alpha,\beta)}(u,v)S_{u,v,w}(\alpha,\beta;\mu_1)S_{u,v,w}(\alpha,\beta;\mu_2)\end{aligned}$$

et appelons-les somme des respectivement petits et grands termes. On prend aussi les notations correspondantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{h,\leq}_{(\alpha,\beta)}(\mu) &= f(\alpha,\beta)\ \mathcal{V}^{\leq}_{(\alpha,\beta)}(\mu),\\ \mathcal{W}^{h,>}_{(\alpha,\beta)}(\mu) &= f(\alpha,\beta)\ \mathcal{V}^{>}_{(\alpha,\beta)}(\mu),\\ \mathcal{W}^{h}_{\leq}(\mu) &= \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})}\mathcal{W}^{h,\leq}_{(\alpha,\beta)}(\mu),\\ \mathcal{W}^{h}_{>}(\mu) &= \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})}\mathcal{W}^{h,>}_{(\alpha,\beta)}(\mu).\end{aligned}$$

Enfin, associons à tout couple (α,β) de $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$ le réel suivant :

$$m(\alpha,\beta):=\inf\left(\Re(\alpha),\Re(\beta)\right). \tag{3.3.8}$$

3.3.3 Contribution des petits termes

Etude de $\mathrm{S_{u,v,w}}(\alpha,\beta;\mathrm{z})$ quand $1\leq \mathrm{w}\leq \mathrm{L}^{1-\Upsilon}$.

On pose pour tout nombre complexe z et tous entiers naturels non-nuls l_1, l_2, l_3, l :

$$\begin{aligned}\phi_z(l_1,l_2,l_3) &= \frac{\mu^2(l_1l_2l_3)\mu(l_1l_3)\varepsilon_D(l_2l_3)}{l_3^{1+2z}}\lambda_g(l_1l_3)\\ \phi_z(l) &= \sum_{l=l_1l_2^2l_3}\phi_z(l_1,l_2,l_3)\end{aligned}$$

de sorte que :

$$x_l(g,z)=K(g,1+2z)\sum_{l=l_1l_2^2l_3}\phi_z(l_1,l_2,l_3)F_L^{\Upsilon}(l)K_{(l)}(g,1+2z)^{-1}.$$

On définit aussi pour tous entiers naturels non-nuls u,v,w vérifiant $uv\mid w$, tout nombre réel $y>0$, tout nombre complexe s et tout polynôme R :

$$(3.3.9)\quad T_{u,v,w}(s;\alpha,\beta,z)=K(g,1+2z)\sum_{l\geq 1}\frac{\nu_g(l;\alpha,\beta)V_g(l,v;\alpha,\beta)W_g(l,u;\alpha,\beta)}{l^{1+s+z}}$$
$$\sum_{wl=l_1l_2^2l_3}\phi_z(l_1,l_2,l_3)K_{(wl)}(g,1+2z)^{-1},$$

$$(3.3.10)\quad T_{u,v,w,y,R}(\alpha,\beta,z)=K(g,1+2z)\sum_{1\leq l\leq\frac{y}{w}}\frac{\nu_g(l;\alpha,\beta)V_g(l,v;\alpha,\beta)W_g(l,u;\alpha,\beta)}{l^{1+z}}$$
$$\sum_{wl=l_1l_2^2l_3}\phi_z(l_1,l_2,l_3)K_{(wl)}(g,1+2z)^{-1}R\left(\frac{\log\left(\frac{y}{wl}\right)}{\log y}\right).$$

Finalement, on définit pour tout nombre premier p et tout nombre complexe s :

$$L_p^0(s,\alpha,\beta,z)=K_p(g,1+2z)+\frac{\nu_g(p;\alpha,\beta)\phi_z(p)}{p^{1+s+z}}+\frac{\nu_g(p^2;\alpha,\beta)\phi_z(p^2)}{p^{2(1+s+z)}}$$

et :

$$L_p^1(u,v,w;s,\alpha,\beta,z)=K_p(g,1+2z)\left(1+\frac{\nu_g(p,u;\alpha,\beta)V_g(p,v;\alpha,\beta)W_g(p,u;\alpha,\beta)\phi_z(wp)}{p^{1+s+z}\phi_z(w)}\right).$$

Rappelons la forme de la région sans zéros de Hadamard-de la Vallée-Poussin pour $L(g\times g,1+.)$ dans le lemme suivant :

Lemme 3.3.5. *Etant donné g comme ci-dessus, il existe $c_g>0$ aussi petit que nécessaire tel que $L(g\times g,1+.)$ ne s'annule pas dans le domaine :*

$$\left\{s\in\mathbb{C},\Re(s)\geq\frac{-c_g}{\log\left(2+|\Im(s)|\right)}\right\}.$$

De plus, cette fonction, son inverse et leurs dérivées jusqu'à l'ordre α sont bornées sur la frontière de ce domaine par $C_{g,\alpha,\delta}\left(1+|\Im(s)|\right)^{\delta}$ pour tout $\delta>0$.

Cela sera utile dans le lemme suivant :

Lemme 3.3.6. *Soient z dans $\{\mu_1,\mu_2\}$ et (α,β) dans $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$. Soient u, v et w des entiers naturels non-nuls. Soit y un nombre réel satisfaisant $y>w$.*

$$(3.3.11)\quad T_{u,v,w}(s;\alpha,\beta,z)=\phi_z(w)K_{(w)}(g,1+2z)^{-1}h_1(u,v,w;s,\alpha,\beta,z)$$
$$\frac{L^{(q)}(Sym^2(g),1+2z)}{L(g\times g,1+s+z+\alpha)L(g\times g,1+s+z+\beta)}$$

où h_1 est holomorphe quand toutes les variables ont une partie réelle légèrement négative et est définie par :

$$(3.3.12)\quad h_{1,p}(u,v,w;s,\alpha,\beta,z)=\frac{L_p(g\times g,1+s+z+\alpha)L_p(g\times g,1+s+z+\beta)}{L_p^{(q)}(Sym^2(g),1+2z)}$$
$$\times\begin{cases}L_p^0(s,\alpha,\beta,z) & si\quad p\nmid w,\\ L_p^1(u,v,w;s,\alpha,\beta,z) & si\quad p\,||\,w,\\ K_p(g,1+2z) & si\quad p^2\,||\,w.\end{cases}$$

Par conséquent, si μ est un nombre complexe borné satisfaisant $|\tau| \ll \frac{1}{\log q}$ et R est un polynôme satisfaisant $R(0) = R'(0) = 0$ alors :

$$(3.3.13)\quad T_{u,v,w,y,R}(\alpha,\beta,z) = \Bigg\{ res_{s=0}\, \phi_z(w) K_{(w)}(g, 1+2z)^{-1} h_1(u,v,w;s,\alpha,\beta,z)$$
$$\frac{L^{(q)}(Sym^2(g), 1+2z)}{sL(g\times g, 1+s+z+\alpha)L(g\times g, 1+s+z+\beta)} \sum_{l\geq 0} \frac{1}{(s\log y)^l} R^{(l)}\left(\frac{\log\left(\frac{y}{w}\right)}{\log y}\right)\Bigg\}$$
$$+ \mathcal{O}_g\left(\frac{|\phi_z(w)|}{\log^2 y}\left(\frac{y}{w}\right)^{-(\tau+m(\alpha,\beta))} \exp\left(-A_0\sqrt{\log\left(\frac{y}{w}\right)}\right)\right)$$

pour une constante absolue $A_0 > 0$.

Preuve du lemme 3.3.6. L'égalité (3.3.11) se prouve en calculant le développement en produit Eulérien de chaque membre de l'égalité et en vérifiant leur égalité. Contentons-nous de prouver l'égalité (3.3.13). En réinjectant le développement de Taylor de R dans l'expression de $T_{u,v,w,y,R}(\alpha,\beta,z)$ et en tenant compte du fait que comme $y > w$,

$$\frac{1}{j!}\left(\log\left(\frac{y}{w}\right)\right)^j = \frac{1}{2i\pi}\int_{(3)}\left(\frac{y}{w}\right)^s \frac{\mathrm{d}s}{s^{j+1}}$$

pour tout entier naturel $j \geq 2$, on obtient :

$$T_{u,v,w,y,R}(\alpha,\beta,z) = \sum_{j\geq 2}\frac{R^{(j)}(0)}{(\log y)^j}\frac{1}{2i\pi}\int_{(3)}\phi_z(w)K_{(w)}(g,1+2z)^{-1}$$
$$\frac{L^{(q)}(Sym^2(g),1+2z)}{L(g\times g,1+s+z+\alpha)L(g\times g,1+s+z+\beta)}\left(\frac{y}{w}\right)^s h_1(u,v,w;s,\alpha,\beta,z)\frac{\mathrm{d}s}{s^{j+1}}.$$

Les hypothèses portant sur le nombre complexe μ entraînent qu'il est possible de trouver une constante absolue $F_1 > 0$ telle que :

$$\Re(z+\alpha), \Re(z+\beta) \geq \frac{-F_1}{\log y}.$$

On bouge le contour jusqu'à la droite $\Re(s) = \frac{F_1+1}{\log\left(\frac{y}{w}\right)}$ sans croiser de pôles et on coupe l'intégrale au segment :

$$\left[\frac{F_1+1}{\log\left(\frac{y}{w}\right)} - iT, \frac{F_1+1}{\log\left(\frac{y}{w}\right)} + iT\right]$$

à un coût admissible de $\mathcal{O}\left(|\phi_z(w)|\log\left(\frac{y}{w}\right)^2 T^{-2}\right)$ où $T := \exp\left(\sqrt{\log\left(\frac{y}{w}\right)}\right)$. On bouge le segment précédent jusqu'au segment :

$$\left[-\inf\left(\Re(z+\alpha),\Re(z+\beta)\right) - \frac{F_2}{\log T} - iT, -\inf\left(\Re(z+\alpha),\Re(z+\beta)\right) - \frac{F_2}{\log T} + iT\right]$$

où F_2 est une constante absolue choisie de sorte que ce segment soit inclus dans une région sans zéros pour $L(g\times g, 1+.+z+\alpha)L(g\times g, 1+.+z+\beta)$ donnée par le lemme 3.3.5. On croise un pôle multiple en $s=0$ dont le résidu est précisément le terme principal de (3.3.13). En effet, pour le calcul de résidu, il est possible de remplacer :

$$\sum_{j\geq 2}\frac{R^{(j)}(0)}{s^j\log^j(y)}\left(\frac{y}{w}\right)^s$$

par :

$$\sum_{j\geq 2}\frac{R^{(j)}(0)}{s^j(\log y)^j}\left(\sum_{0\leq i\leq j}\frac{s^i}{i!}\left(\log\frac{y}{w}\right)^i\right)$$

qui vaut sachant que $R(0)=R'(0)=0$:

$$\sum_{h\geq 0}\frac{s^{-h}}{\log^h(y)}\sum_{i\geq 0}\frac{R^{(h+i)}(0)}{i!}\left(\frac{\log\frac{y}{w}}{\log y}\right)^i.$$

Les intégrales résiduelles contribuent comme :

$$\mathcal{O}_g\left(|\phi_z(w)|\left(\log\left(\frac{Ty}{w}\right)\right)^2\left(T^{-2}+\left(\frac{y}{w}\right)^{-\inf(\Re(z+\alpha),\Re(z+\beta))-\frac{F_2}{\log T}}\right)\right).$$

Ainsi, il existe une constante absolue $A_0>0$ telle que tous les termes d'erreur soient bornés par :

$$\frac{|\phi_z(w)|}{\log^2 y}\left(\frac{y}{w}\right)^{-\inf(\Re(z+\alpha),\Re(z+\beta))}\exp\left(-A_0\sqrt{\log\left(\frac{y}{w}\right)}\right)$$

■

Cela nous amène directement à :

Proposition 3.3.7. *Soient z dans $\{\mu_1,\mu_2\}$, (α,β) dans $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$ et u, v des entiers naturels non-nuls. Si μ est un nombre complexe borné satisfaisant $|\tau|\ll\frac{1}{\log q}$ et w est un entier naturel satisfaisant $1\leq w\leq L^{1-\Upsilon}$ alors :*

$$S_{u,v,w}(\alpha,\beta,z)=TP^{\leq}_{u,v,w}(\alpha,\beta,z)+Err^{\leq}_{u,v,w}(\alpha,\beta,z) \tag{3.3.14}$$

où le terme principal $TP^{\leq}_{u,v,w}(\alpha,\beta,z)$ est donné par :

$$\delta_{(z+\alpha)(z+\beta)\neq 0}\ \phi_z(w)\frac{h_1(u,v,w;0,\alpha,\beta,z)}{K_{(w)}(g,1+2z)}\frac{L^{(q)}(Sym^2(g),1+2z)}{L(g\times g,1+z+\alpha)L(g\times g,1+z+\beta)}$$

et une borne pour le terme d'erreur est donnée par :

$$Err^{\leq}_{u,v,w}(\alpha,\beta,z)=\mathcal{O}_g\left(\frac{|\phi_z(w)|}{\log^2 q}\left(\frac{L^{1-\Upsilon}}{w}\right)^{-(\tau+m(\alpha,\beta))}\exp\left(-A_0\sqrt{\log\left(\frac{L^{1-\Upsilon}}{w}\right)}\right)\right).$$

Preuve de la proposition 3.3.7. Soit $Q(X) = 1 - P(\Upsilon + (1-\Upsilon)X)$. Il satisfait $Q(0) = Q'(0) = 0$ et :

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\log\left(\frac{L}{w}\right)}{\log L}\right) &= 1 - Q\left(\frac{\log\left(\frac{L^{1-\Upsilon}}{w}\right)}{\log\left(L^{1-\Upsilon}\right)}\right), \\ \frac{1}{\log^l(L)} P^{(l)}\left(\frac{\log\left(\frac{L}{w}\right)}{\log L}\right) &= -\frac{1}{\log^l\left(L^{1-\Upsilon}\right)} Q^{(l)}\left(\frac{\log\left(\frac{L^{1-\Upsilon}}{w}\right)}{\log L^{1-\Upsilon}}\right). \end{aligned}$$

pour tout entier naturel non-nul l. Remarquons que :

$$S_{u,v,w}(\alpha,\beta,z) = T_{u,v,w,L,P}(\alpha,\beta,z) + T_{u,v,w,L^{1-\Upsilon},Q}(\alpha,\beta,z)$$

En appliquant le lemme 3.3.6 à deux reprises, on remarque que le terme principal (c'est-à-dire la somme des deux résidus) vaut :

$$\mathrm{res}_{s=0} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \sum_{l\geq 0} \frac{1}{s^l}\left(\frac{1}{\log^l(L)} P^{(l)}\left(\frac{\log\left(\frac{L}{w}\right)}{\log L}\right) + \frac{1}{\log^l\left(L^{1-\Upsilon}\right)} Q^{(l)}\left(\frac{\log\left(\frac{\left(L^{1-\Upsilon}\right)}{w}\right)}{\log\left(L^{1-\Upsilon}\right)}\right)\right)$$

où les pointillés sont mis pour la fonction de la variable complexe s convenable (confer lemme 3.3.6). Le lecteur peut noter que la seule contribution provient de $l = 0$ et que les autres termes principaux provenant de $l \geq 1$ se compensent exactement ce qui achève la preuve

■

Remarque 3.3.2. La proposition précédente révèle que le seul terme qui contribue vraiment au terme principal de $\mathcal{W}^h_{\leq}(\mu)$ est $\mathcal{W}^{h,\leq}_{(\mu,\overline{\mu})}(\mu)$.

Etude de $\mathcal{V}^{\leq}_{(\alpha,\beta)}(\mu)$.

Posons :

(3.3.15)

$$L_p(s,\alpha,\beta) = \left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}} L_p^0(0,\alpha,\beta,z)\right) + p^{-(1+s)}\left\{\left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}} \frac{\phi_z(p)L_p^1(1,1,p;0,\alpha,\beta,z)}{K_p(g,1+2z)}\right)\right.$$
$$+ \nu_g(p^2;\alpha,\beta)p^{-1}\left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}} \frac{\phi_z(p)L_p^1(1,p,p;0,\alpha,\beta,z)}{K_p(g,1+2z)}\right)$$
$$\left. - \nu_g(p;\alpha,\beta)^2 p^{-1}\left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}} \frac{\phi_z(p)L_p^1(p,1,p;0,\alpha,\beta,z)}{K_p(g,1+2z)}\right)\right\}$$
$$+ \left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}} \phi_z(p^2)\right) p^{-2(1+s)}\left\{1 + \nu_g(p^2;\alpha,\beta)p^{-1} - \nu_g(p;\alpha,\beta)^2 p^{-1}\right.$$
$$\left. - \nu_g(p;\alpha,\beta)^2\nu_g(p^2;\alpha,\beta)V_g(p,p;\alpha,\beta)^2 p^{-2} + \nu_g(p^4;\alpha,\beta)p^{-2}\right\}.$$

L'évaluation de $\mathcal{V}^{\leq}_{(\alpha,\beta)}(\mu)$ nécessite le lemme suivant :

Lemme 3.3.8. *Soient μ un nombre complexe, (α,β) dans $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$ et z dans $\{\mu_1,\mu_2\}$.*

$$(3.3.16)\quad \sum_{w\geq 1}\frac{1}{w^{1+s}}\sum_{uv|w}\tau_{(\alpha,\beta)}(u,v)\left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}}\frac{\phi_z(w)}{K_{(w)}(g,1+2z)}h_1(u,v,w;0,\alpha,\beta,z)\right) = L(g\times g,1+s)h_2(s,\alpha,\beta)$$

où h_2 est une fonction holomorphe quand toutes les variables ont une partie réelle légèrement négative qui est définie par :

$$(3.3.17)\quad h_{2,p}(s,\alpha,\beta) = \left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}}\frac{L_p(g\times g,1+z+\alpha)L_p(g\times g,1+z+\beta)}{L_p^{(q)}(Sym^2(g),1+2z)}\right) L_p(g\times g,1+s)L_p(s,\alpha,\beta).$$

Par conséquent, si $|\tau| \ll \frac{1}{\log q}$ alors :

$$(3.3.18)\quad \sum_{1\leq w\leq x}\frac{1}{w^{1+\mu_1+\mu_2}}\sum_{uv|w}\tau_{(\alpha,\beta)}(u,v)\left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}}\frac{\phi_z(w)}{K_{(w)}(g,1+2z)}h_1(u,v,w;0,\alpha,\beta,z)\right)$$
$$= L(g\times g,1+\mu_1+\mu_2)h_2(\mu_1+\mu_2,\alpha,\beta)\left(1-x^{-2\tau}\right)+\mathcal{O}_g\left(x^{-2\tau}\right).$$

Preuve du lemme 3.3.8. L'égalité (3.3.16) se prouve en calculant le développement en produit Eulérien de chaque membre et en remarquant qu'ils coincident. Contentons-nous

de détailler la preuve de l'égalité (3.3.18). La formule de Perron (confer proposition C.3.1) assure que le membre de gauche de cette égalité vaut :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{A-iT}^{A+iT} L(g\times g,1+s+2\tau)h_2(s+2\tau,\alpha,\beta)x^s\frac{\mathrm{d}s}{s}+\mathcal{O}\left(\frac{x^{A-2\tau}}{T}\right).$$

où $A>-2\tau$ et $T>0$ seront choisis ultérieurement. On bouge le contour jusqu'à $\Re(s)=-A$ heurtant des pôles en $s=0$ et $s=-2\tau$. L'intégrale résiduelle contribue comme :

$$\mathcal{O}_g\left(\frac{x^{A-2\tau}}{T}+x^{-A-2\tau}T\right).$$

On choisit $T=x^A$ afin de retrouver le terme d'erreur de (3.3.18). Les résidus des pôles rencontrés sont :

$$L(g\times g,1+2\tau)h_2(2\tau,\alpha,\beta)-\frac{R_g}{2\tau}h_2(0,\alpha,\beta)x^{-2\tau}= L(g\times g,1+2\tau)h_2(2\tau,\alpha,\beta)\left(1-x^{-2\tau}\right)+\mathcal{O}_g\left(x^{-2\tau}\right)$$

■

Enonçons dans la proposition suivante l'estimation de $\mathcal{V}^{\leq}_{(\alpha,\beta)}(\mu)$.

Proposition 3.3.9. *Soient μ un nombre complexe et (α,β) dans $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$. Si $|\mu|\ll\frac{1}{\log q}$ alors :*

$$\mathcal{V}^{\leq}_{(\alpha,\beta)}(\mu)=\delta_{(\mu,\overline{\mu})}(\alpha,\beta)\ h_2(\mu_1+\mu_2,\mu,\overline{\mu})L(g\times g,1+2\tau)\left(1-L^{-2\tau(1-\Upsilon)}\right)\left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}}\frac{L^{(q)}(Sym^2(g),1+2z)}{L(g\times g,1+\mu+z)L(g\times g,1+\overline{\mu}+z)}\right)+\mathcal{O}_g\left(\frac{1}{\log^4(q)}\left(\delta_{(\mu,\overline{\mu})}(\alpha,\beta)L^{-2\tau(1-\Upsilon)}+L^{-(1-\Upsilon)(\tau+m(\alpha,\beta))}+L^{-2(1-\Upsilon)(\tau+m(\alpha,\beta))}\right)\right).$$

Preuve de la proposition 3.3.9. Grâce à la proposition 3.3.7 et au lemme 3.3.4, on remarque que :

$$\mathcal{V}^{\leq}_{(\alpha,\beta)}(\mu)=\sum_{1\leq w\leq L^{1-\Upsilon}}\frac{1}{w^{1+\mu_1+\mu_2}}\sum_{uv|w}\tau_{(\alpha,\beta)}(u,v)\Bigg(\mathrm{TP}^{\leq}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_1)\mathrm{TP}^{\leq}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_2)+\mathrm{TP}^{\leq}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_1)\mathrm{Err}^{\leq}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_2)+\mathrm{Err}^{\leq}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_1)\mathrm{TP}^{\leq}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_2)+\mathrm{Err}^{\leq}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_1)\mathrm{Err}^{\leq}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_2)\Bigg). \tag{3.3.19}$$

Commençons par observer que si $(z+\alpha)(z+\beta)\neq 0$ alors :

$$\frac{1}{L(g\times g,1+z+\alpha)L(g\times g,1+z+\beta)}\ll_g\frac{1}{\log^2(q)}.$$

Ainsi, le terme d'erreur dans l'égalité (3.3.19) est borné par :

$$\frac{1}{\log^4(q)}\left(L^{-(1-\Upsilon)(\tau+m(\alpha,\beta))}+L^{-2(1-\Upsilon)(\tau+m(\alpha,\beta))}\right).$$

D'autre part, comme :

$$\mathrm{TP}^{\leq}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_1)\ \mathrm{TP}^{\leq}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_2)\neq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (\alpha,\beta)=(\mu,\overline{\mu}),$$

le terme principal dans l'égalité (3.3.19) vaut selon le lemme 3.3.8 :

$$\delta_{(\mu,\overline{\mu})}(\alpha,\beta)\ h_2(\mu_1+\mu_2,\mu,\overline{\mu})L(g\times g,1+2\tau)\left(1-L^{-2\tau(1-\Upsilon)}\right)$$
$$\left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}}\frac{L^{(q)}(\mathrm{Sym}^2(g),1+2z)}{L(g\times g,1+\mu+z)L(g\times g,1+\overline{\mu}+z)}\right)+\mathcal{O}_g\left(\delta_{(\mu,\overline{\mu})}(\alpha,\beta)\frac{1}{\log^4(q)}L^{-2\tau(1-\Upsilon)}\right)$$

ce qui achève la preuve

■

Etude de $\mathcal{W}^{\mathrm{h}}_{\leq}(\mu)$.

L'estimation des petits termes est résumée dans le théorème suivant :

Théorème 3.3.10. *Soit μ un nombre complexe. Si $\frac{\varepsilon_0}{\log q}\leq|\mu|\ll\frac{1}{\log q}$ pour une constante absolue $\varepsilon_0>0$ alors :*
(3.3.20)

$$\mathcal{W}^{h}_{\leq}(\mu)=\left(1-L^{-2\tau(1-\Upsilon)}\right)+\mathcal{O}_g\left(\frac{1}{q^{\delta}}+\frac{1}{\log q}\left(\chi_{\mathbb{R}_+}(\tau)\ L^{-2\tau(1-\Upsilon)}+\chi_{\mathbb{R}_-}(\tau)\ q^{-2\tau}L^{-4\tau(1-\Upsilon)}\right)\right)$$

pour une constante absolue $\delta>0$.

Preuve du théorème 3.3.10. Rappelons que :

$$\mathcal{W}^{h}_{\leq}(\mu)=\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})}\mathcal{W}^{h,\leq}_{(\alpha,\beta)}(\mu)$$

avec $\mathcal{W}^{h,\leq}_{(\alpha,\beta)}(\mu)=f(\alpha,\beta)\mathcal{V}^{\leq}_{(\alpha,\beta)}(\mu)$. Comme,

$$f(\alpha,\beta)\ll\log^3(q)\ q^{-2\tau+\alpha+\beta}$$

pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$ (la borne la plus grande étant obtenue en $(\alpha,\beta)=(\mu,\overline{\mu})$), la proposition 3.3.9 implique que :

$$\mathcal{W}^{h}_{\leq}(\mu)=f(\mu,\overline{\mu})h_2(\mu_1+\mu_2,\mu,\overline{\mu})L(g\times g,1+\mu_1+\mu_2)\left(1-L^{-2\tau(1-\Upsilon)}\right)$$
$$\left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}}\frac{L^{(q)}(Sym^2(g),1+2z)}{L(g\times g,1+\mu+z)L(g\times g,1+\overline{\mu}+z)}\right)$$
$$+\mathcal{O}_g\left(\frac{1}{\log q}\left(\chi_{\mathbb{R}_+}(\tau)\ L^{-2\tau(1-\Upsilon)}+\chi_{\mathbb{R}_-}(\tau)\ q^{-2\tau}L^{-4\tau(1-\Upsilon)}\right)\right).$$

Le terme principal de l'égalité précédente est égal à :

$$\frac{\varphi(q)}{q}\frac{\zeta_q(1+2\overline{\mu})}{L_q(\mathrm{Sym}^2 g,1+2\mu)L_q(\mathrm{Sym}^2 g,1+2\overline{\mu})}\frac{h_2(2\tau,\mu,\overline{\mu})}{\zeta^{(D)}(2(1+2\tau))}\left(1-L^{-2\tau(1-\Upsilon)}\right).$$

Le logiciel de calcul formel MapleV[1] nous permet alors de vérifier que :

$$\frac{h_2(2\tau,\mu,\overline{\mu})}{\zeta^{(D)}(2(1+2\tau))}=1+\mathcal{O}_g\left(\frac{1}{q^\delta}\right)$$

pour une constante absolue $\delta>0$. Plus précisément, le terme précédent admet un développement en produit Eulérien et il s'agit de constater formellement que le facteur local en tout nombre premier différent de q vaut 1. Le terme d'erreur présent dans l'égalité précédente provient donc du facteur local au nombre premier q.

■

3.3.4 Contribution des grands termes

Etude de $\mathrm{S_{u,v,w}}(\alpha,\beta;\mathrm{z})$ quand $\mathrm{L^{1-\Upsilon}<w\leq L}$.

Proposition 3.3.11. *Soient z dans $\{\mu_1,\mu_2\}$, (α,β) dans $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$ et u, v des entiers naturels non-nuls. Si μ est un nombre complexe borné satisfaisant $|\tau|\ll\frac{1}{\log q}$ et w est un entier naturel satisfaisant $L^{1-\Upsilon}<w\leq L$ alors :*

$$S_{u,v,w}(\alpha,\beta,z)=TP^{>}_{u,v,w}(\alpha,\beta,z)+Err^{>}_{u,v,w}(\alpha,\beta,z)$$

où le terme principal $TP^{>}_{u,v,w}(\alpha,\beta,z)$ est donné par :

$$\phi_z(w)K_{(w)}(g,1+2z)^{-1}h_1(u,v,w;0,\alpha,\beta,z)\frac{L^{(q)}(Sym^2(g),1+2z)}{R_g^2}$$
$$\left\{(z+\alpha)(z+\beta)P\left(\frac{\log\left(\frac{L}{w}\right)}{logL}\right)+\frac{2z+\alpha+\beta}{\log L}P'\left(\frac{\log\left(\frac{L}{w}\right)}{logL}\right)+\frac{1}{\log^2(L)}P''\left(\frac{\log\left(\frac{L}{w}\right)}{logL}\right)\right\}$$

et une borne pour le terme d'erreur est donnée par :

$$Err^{>}_{u,v,w}(\alpha,\beta,z)\ll_g\frac{|\phi_z(w)|}{\log^2(q)}\left(\frac{L}{w}\right)^{-(\tau+m(\alpha,\beta))}\exp\left(-A_0\sqrt{\log\left(\frac{L}{w}\right)}\right)+\frac{1}{\log^3(q)}.$$

Preuve de la proposition 3.3.11. On remarque que :

$$S_{u,v,w}(\alpha,\beta,z)=T_{u,v,w,L,P}(\alpha,\beta,z).$$

Le lemme 3.3.6 implique que :

[1]les lignes de code (vg.mws et ctemumubar.mws) sont disponibles à l'adresse suivante : http ://guillaume.ricotta.free.fr

$$S_{u,v,w}(\alpha,\beta,z) = \mathrm{res}_{s=0}\phi_z(w)K_{(w)}(g,1+2z)^{-1}$$
$$h_1(u,v,w;s,\alpha,\beta,z)\frac{L^{(q)}(Sym^2(g),1+2z)}{sL(g\times g,1+s+z+\alpha)L(g\times g,1+s+z+\beta)}\times$$
$$\sum_{l\geq 0}\frac{1}{(s\log L)^l}P^{(l)}\left(\frac{\log\left(\frac{L}{w}\right)}{\log L}\right)$$
$$+\mathcal{O}_g\left(\frac{|\phi_z(w)|}{\log^2(L)}\left(\frac{L}{w}\right)^{-(\tau+m(\alpha,\beta))}\exp\left(-A_0\sqrt{\log\left(\frac{L}{w}\right)}\right)\right).$$

Afin de calculer ce résidu, observons que :

$$\frac{h_1(u,v,w;s,\alpha,\beta,z)}{L(g\times g,1+s+z+\alpha)L(g\times g,1+s+z+\beta)} =$$
$$\left(\frac{(z+\alpha)(z+\beta)}{R_g^2}h_1(u,v,w;0,\alpha,\beta,z)+\mathcal{O}_g\left(\frac{1}{\log^3(q)}\right)\right)$$
$$+\left(\frac{2z+\alpha+\beta}{R_g^2}h_1(u,v,w;0,\alpha,\beta,z)+\mathcal{O}_g\left(\frac{1}{\log^2(q)}\right)\right)s$$
$$+\left(R_g^{-2}L_{(w)}(0;\alpha,\beta,z)^{-1}h_1(u,v,w;0,\alpha,\beta,z)+\mathcal{O}_g\left(\frac{1}{\log q}\right)\right)s^2$$
$$+\sum_{n\geq 3}\mathcal{O}_g(1)s^n$$

ce qui conduit à (3.3.11)

■

Etude de $\mathcal{V}^{>}_{(\alpha,\beta)}(\mu)$.

Lemme 3.3.12. *Soient μ un nombre complexe, (α,β) dans $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$ et z dans $\{\mu_1,\mu_2\}$. Si $1\leq y\leq x$, $|\tau|\ll\frac{1}{\log q}$ et R est une fonction lisse sur $[0,1]$ alors :*

(3.3.21)
$$\sum_{y\leq w\leq x}\frac{1}{w^{1+\mu_1+\mu_2}}\sum_{uv|w}\tau_{(\alpha,\beta)}(u,v)$$
$$\left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}}\frac{\phi_z(w)}{K_{(w)}(g,1+2z)}h_1(u,v,w;0,\alpha,\beta,z)\right)R\left(\frac{\log w}{\log x}\right) =$$
$$(\mu_1+\mu_2)L(g\times g,1+\mu_1+\mu_2)h_2(\mu_1+\mu_2,\alpha,\beta)\int_y^x R\left(\frac{\log\theta}{\log x}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta^{1+\mu_1+\mu_2}}$$
$$+\mathcal{O}_g\left(x^{-2\tau}+y^{-2\tau}\right).$$

Remarque 3.3.3. Pour prouver ce lemme, on se ramène grâce à une formule de sommation par parties au lemme 3.3.8 puis on conclut par une intégration par parties.

Ce lemme nous permet d'estimer $\mathcal{V}^{>}_{(\alpha,\beta)}(\mu)$:

Proposition 3.3.13. *Soient μ un nombre complexe et (α,β) dans $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$. Si $|\mu| \ll \frac{1}{\log q}$ alors :*

$$\begin{aligned}(3.3.22)\quad \mathcal{V}^{>}_{(\alpha,\beta)}(\mu) &= h_2(\mu_1+\mu_2,\alpha,\beta)(\mu_1+\mu_2)L(g\times g,1+\mu_1+\mu_2)\\ &\frac{1}{R_g^4}\left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}} L^{(q)}(Sym^2(g),1+2z)\right) I_{\alpha,\beta}(L,\Upsilon,P;\mu)\\ &+\mathcal{O}_g\left(\frac{1}{\log^4(q)}\left(L^{-2(\tau+m(\alpha,\beta))}+L^{-(\tau+m(\alpha,\beta))}+L^{-2\tau}+L^{-2\tau(1-\Upsilon)}\right)\right)\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}(3.3.23)\quad I_{\alpha,\beta}(L,\Upsilon,P;\mu) &:= \log L\int_0^{\Upsilon} L^{-2\tau(1-x)}\\ &\left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}}\left((z+\alpha)(z+\beta)P(x)+\frac{(2z+\alpha+\beta)}{\log L}P'(x)+\frac{1}{\log^2(L)}P''(x)\right)\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Preuve de la proposition 3.3.13. Selon la proposition 3.3.11 et le lemme 3.3.4, on montre que :

$$\begin{aligned}(3.3.24)\quad \mathcal{V}^{>}_{(\alpha,\beta)}(\mu) &= \sum_{L^{1-\Upsilon}<w\le L}\frac{1}{w^{1+\mu_1+\mu_2}}\sum_{uv|w}\tau_{(\alpha,\beta)}(u,v)\Big(\mathrm{TP}^{>}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_1)\mathrm{TP}^{>}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_2)\\ &+\mathrm{TP}^{>}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_1)\mathrm{Err}^{>}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_2)+\mathrm{Err}^{>}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_1)\mathrm{TP}^{>}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_2)\\ &+\mathrm{Err}^{>}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_1)\mathrm{Err}^{>}_{u,v,w}(\alpha,\beta,\mu_2)\Big).\end{aligned}$$

Sachant que pour (α,β) dans $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$ et z dans $\{\mu_1,\mu_2\}$,

$$\mathrm{TP}^{>}_{u,v,w}(\alpha,\beta,z)\ll_g \frac{1}{\log^2(q)}$$

les termes d'erreur dans l'égalité (3.3.24) provenant de la multiplication d'un terme principal $\mathrm{TP}^{>}_{u,v,w}(\alpha,\beta,.)$ par un terme d'erreur $\mathrm{Err}^{>}_{u,v,w}(\alpha,\beta,.)$ sont bornés par :

$$\frac{L^{-(\tau+m(\alpha,\beta))}}{\log^4(q)}+\frac{L^{-2\tau(1-\Upsilon)}}{\log^2(q)}.$$

D'autre part, le terme d'erreur dans l'égalité (3.3.24) provenant de la multiplication des deux termes d'erreur $\mathrm{Err}^{>}_{u,v,w}(\alpha,\beta,.)$ est borné par :

$$\frac{L^{-2(\tau+m(\alpha,\beta))}}{\log^4(q)}+\frac{L^{-(\tau+m(\alpha,\beta))}}{\log^5(q)}+\frac{L^{-2\tau(1-\Upsilon)}}{\log^6(q)}.$$

Le terme principal dans l'égalite (3.3.24) vaut :

$$(3.3.25)\quad \frac{1}{R_g^4}\sum_{L^{1-\Upsilon}<w\leq L}\frac{1}{w^{1+\mu_1+\mu_2}}\sum_{uv|w}\tau_{(\alpha,\beta)}(u,v)$$
$$\left\{\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}}\frac{\phi_z(w)}{K_w(g,1+2z)}h_1(u,v,w;0,\alpha,\beta,z)L^{(q)}(Sym^2(g),1+2z)\right.$$
$$\left.\left((z+\alpha)(z+\beta)P\left(\frac{\log\left(\frac{L}{w}\right)}{logL}\right)+\frac{2z+\alpha+\beta}{\log L}P'\left(\frac{\log\left(\frac{L}{w}\right)}{logL}\right)+\frac{1}{\log^2(L)}P''\left(\frac{\log\left(\frac{L}{w}\right)}{logL}\right)\right)\right\}.$$

Le lemme 3.3.12 appliqué avec $y=L^{1-\Upsilon}$, $x=L$ assure que pour tout couple (i,j) d'entiers naturels compris entre 0 et 2 :

$$\sum_{L^{1-\Upsilon}<w\leq L}\frac{1}{w^{1+2\tau}}\sum_{uv|w}\tau_{(\alpha,\beta)}(u,v)\left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}}\frac{\phi_z(w)}{K_w(g,1+2z)}h_1(u,v,w;0,\alpha,\beta,z)\right)$$
$$P^{(i)}\left(1-\frac{\log w}{logL}\right)P^{(j)}\left(1-\frac{\log w}{logL}\right)=$$
$$2\tau L(g\times g,1+2\tau)h_2(2\tau,\alpha,\beta)\int_{L^{1-\Upsilon}}^{L}P^{(i)}\left(1-\frac{\log\theta}{logL}\right)P^{(j)}\left(1-\frac{\log\theta}{logL}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta^{1+2\tau}}$$
$$+\mathcal{O}_g\left(L^{-2\tau}+L^{-2\tau(1-\Upsilon)}\right).$$

L'intégrale présente dans le membre de droite de l'égalité précédente est égale à :

$$\log L\int_0^{\Upsilon}L^{-2\tau(1-\Upsilon)}P^{(i)}(x)P^{(j)}(x)\mathrm{d}x$$

comme le montre le changement de variable :

$$x=1-\frac{\log\theta}{\log x}.$$

Ainsi, le terme écrit en (3.3.25) est précisément le terme principal apparaissant dans la proposition 3.3.13 modulo une erreur qui est bornée par :

$$\ll_g\left(L^{-2\tau}+L^{-2\tau(1-\Upsilon)}\right)\left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}}\left((z+\alpha)(z+\beta)+\frac{2z+\alpha+\beta}{\log L}+\frac{1}{\log^2(L)}\right)\right)$$

■

Etude de $\mathcal{W}_{>}^{\mathrm{h}}(\mu)$.

Simplifions l'expression des intégrales $I_{\alpha,\beta}(L,\Upsilon,P;\mu)$ qui est obtenue par de multiples intégrations par partie sachant que $P(0)=P'(0)=P'(\Upsilon)=0$ et $P(\Upsilon)=1$. Pour cela, posons :

$$I(L,\Upsilon,P;\mu)=\int_0^{\Upsilon}L^{-2\tau(1-x)}\left|P'(x)+\frac{P''(x)}{2\mu\log L}\right|^2\mathrm{d}x.$$

On se contente de résumer les résultats obtenus dans le lemme suivant :

Lemme 3.3.14. *Soit (α,β) dans $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$.*

$$\mathcal{I}_{\alpha,\beta}(L,\Upsilon,P;\mu)=\begin{cases}\frac{4\mu\overline{\mu}}{\log L}I(L,\Upsilon,P;\mu)+8\mu\overline{\mu}\tau L^{-2\tau(1-\Upsilon)} & \text{si } (\alpha,\beta)=(\mu,\overline{\mu}),\\ \frac{4\mu\overline{\mu}}{\log L}I(L,\Upsilon,P;\mu) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Le théorème suivant donne l'estimation des grands termes :

Théorème 3.3.15. *Soit μ un nombre complexe. Si $\frac{\varepsilon_0}{\log q}\leq|\mu|\ll\frac{1}{\log q}$ pour une constante absolue $\varepsilon_0>0$ alors :*

(3.3.26)

$$\mathcal{W}_{>}^{h}(\mu)=L^{-2\tau(1-\Upsilon)}+\left(\frac{q^{2\tau}-q^{-2\tau}}{2\tau\log L}-\frac{q^{2\delta}-q^{-2\delta}}{2\delta\log L}\right)\int_0^{\Upsilon}L^{-2\tau(1-x)}\left|P'(x)+\frac{P''(x)}{2\mu\log L}\right|^2\mathrm{d}x\Bigg\}$$
$$+\mathcal{O}_g\left(\frac{1}{q^{\delta}}+\frac{1}{\log q}\left(\chi_{\mathbb{R}_+}(\tau)\,L^{-2\tau(1-\Upsilon)}+\chi_{\mathbb{R}_-}(\tau)\,q^{-4\tau}L^{-4\tau}\right)\right)$$

pour une constante absolue $\delta>0$.

Preuve du théorème 3.3.15. Rappelons que :

$$\mathcal{W}_{>}^{h}(\mu)=\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})}\mathcal{W}_{(\alpha,\beta)}^{h,>}(\mu)$$

avec $\mathcal{W}_{(\alpha,\beta)}^{h,>}(\mu)=f(\alpha,\beta)\mathcal{V}_{(\alpha,\beta)}^{>}(\mu)$. Comme,

$$f(\alpha,\beta)\ll\log^3(q)\;q^{-2\tau+\alpha+\beta}$$

pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$ (la borne la plus grande étant obtenue en $(\alpha,\beta)=(\mu,\overline{\mu})$), la proposition 3.3.13 implique que :

$$\mathcal{W}_{>}^{h}(\mu)=\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})}g_{(\alpha,\beta)}(\mu)q^{-2\tau+\alpha+\beta}I_{\alpha,\beta}(L,\Upsilon,P;\mu)$$
$$+\mathcal{O}_g\left(\frac{1}{\log q}\left(\chi_{\mathbb{R}_+}(\tau)\,L^{-2\tau(1-\Upsilon)}+\chi_{\mathbb{R}_-}(\tau)\,q^{-4\tau}L^{-4\tau}\right)\right).$$

où :

$$g_{(\alpha,\beta)}(\mu):=\frac{1}{R_g^4}q^{2\tau-(\alpha+\beta)}f(\alpha,\beta)2\tau L(g\times g,1+2\tau)h_2(2\tau,\alpha,\beta)$$
$$\left(\prod_{z\in\{\mu_1,\mu_2\}}L^{(q)}(\mathrm{Sym}^2(g),1+2z)\right)$$

pour tout (α,β) dans $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$. On remarque que :

$$g_{(\alpha,\beta)}(\mu)=\frac{1}{4\alpha\beta(\alpha+\beta)}\frac{h_2(0,0,0)}{\zeta^{(D)}(2)}+\mathcal{O}_g\left(\log^3(q)\right)$$

et que :

$$I_{\alpha,\beta}(L,\Upsilon,P;\mu)\ll\frac{L^{-2\tau(1-\Upsilon)}}{\log^4(q)}$$

pour tout (α,β) dans $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$. D'autre part, le logiciel de calcul formel MapleV[2] nous permet de nouveau de constater que :

$$\frac{h_2(0,0,0)}{\zeta^{(D)}(2)}=1+\mathcal{O}_g\left(\frac{1}{q^\delta}\right)$$

pour une constante absolue $\delta>0$. Ainsi, le terme principal de $\mathcal{W}^h_>(\mu)$ vaut :

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})}\frac{q^{-2\tau+\alpha+\beta}}{4\alpha\beta(\alpha+\beta)}I_{\alpha,\beta}(L,\Upsilon,P;\mu)$$

ce qui est précisément le terme principal de (3.3.26) selon le lemme 3.3.14

■

3.4 Le second moment harmonique ramolli loin du point critique

On donne en détail la preuve du théorème 3.1.2 basée sur deux lemmes et un argument de convexité. D'une part, juste à droite du point critique, on a :

Lemme 3.4.1. *Si $\tau=\frac{f(q)}{\log q}$ où f est une fonction strictement positive vérifiant :*

$$\begin{aligned}\exists\lim_{q\to+\infty}f(q)&=+\infty,\\ f(q)&=o(\log q),\end{aligned}$$

et Δ est effectif alors :

$$\mathcal{W}^h(g;\mu)\ll_g(1+|t|)^B. \tag{3.4.1}$$

Preuve du lemme 3.4.1. La remarque 3.1.1 entraîne que :

$$\mathcal{W}^h_g(\mu)=\mathcal{V}^\Upsilon_{\Delta,P}(2\log(q)\Re(\mu),2\log(q)\Im(\mu))+\mathcal{O}_{k,g}\left(1+\frac{f(q)}{\log q}\right)$$

si $\tau=\frac{f(q)}{\log q}$, $|t|\ll 1$ et Δ est effectif d'où, selon (2.2.5) et (2.2.6) :

$$\mathcal{W}^h_g(\mu)\ll_{k,g}1$$

[2]les lignes de code (vg.mws et cte.mws) sont disponibles à l'adresse suivante : http ://guillaume.ricotta.free.fr

si $\tau = \frac{f(g)}{\log q}$, $|t| \ll 1$ et Δ est effectif. Ainsi, on peut supposer pour la suite de la preuve que $|t| \gg 1$. Selon la proposition 3.3.3 et sa preuve, nous savons que à une erreur admissible près :

$$\varepsilon(g;\mu)\mathsf{W}(g;\mu) = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})} f(\alpha,\beta)\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{(3)}\int_{(3)} h_g(\alpha,\beta,s_1,s_2)$$
$$n_g(s_1,\mu_1,\alpha,\beta)n_g(s_2,\mu_2,\alpha,\beta)L(g\times g, 1+s_1+s_2+2\tau)\frac{\mathrm{d}s_1}{s_1^2}\frac{\mathrm{d}s_2}{s_2^2}$$

avec pour $z \in \{\mu_1,\mu_2\}$,

$$n_g(s,z,\alpha,\beta) := \frac{1}{\log L}L^{(1-\Upsilon)s}\left(\widehat{P_L'}(s)L^{\Upsilon s} - \frac{1}{1-\Upsilon}\widehat{R'_{L^{1-\Upsilon}}}(s)\right)$$
$$\frac{L(g\times g, 1+s+2z)}{\zeta^{(D)}(1+s+2z)L(g\times g,1+\alpha+s+z)L(g\times g,1+\beta+s+z)}.$$

Estimons la contribution de chaque terme de la somme individuellement. Le principe de la preuve repose sur des déplacements successifs de contour vers la gauche de l'axe imaginaire pur tout en restant dans des régions sans zéros (de type Hamadard-de la Vallée-Poussin) des fonctions L de Rankin-Selberg apparaissant au dénominateur de l'intégrande. De telles régions existent car ces fonctions L de Rankin-Selberg sont du type :

$$L(g\times g, 1+a\tau+ib+.)$$

où a est une constante absolue positive et b est une constante absolue réelle. On remarque que $L(g\times g, 1+a\tau+ib+.)$ ne s'annule pas sur :

$$\Re(s) \geq \frac{-c_g}{\log(2+|\Im(s)+b|)} - a\tau,$$

cette dernière région étant (au moins) un translaté vers la gauche de la région sans zéros de type Hadamard-de la Vallée-Poussin pour $L(g\times g,.)$. L'hypothèse $\tau > 0$ intervient ici. On remarque aussi qu'il n'y a pas de "mélange" entre les variables complexes s_1 et s_2 dans les fonctions L apparaissant au dénominateur de l'intégrande ce qui va nous permettre de bouger les s_1 et s_2-contours un après l'autre sans problèmes. Avant de rentrer dans le détail, nous allons énumérer les règles à respecter qui nous guideront dans les déplacements de contour à venir.

– Les fonctions L de Rankin-Selberg seront estimées de la façon suivante (a et b sont des constantes absolues réelles) :

$$L(g\times g, 1+a\tau+ib)^{-1} \ll_{g,\varepsilon} \chi_{\mathbb{R}^*}(b)\sup(1,|b|)^{\varepsilon} + |a|\tau$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et :

$$L(g\times g, 1+a\tau+ib) \ll_{g,\varepsilon} \begin{cases} |a|\tau + |b|^{\varepsilon} & \text{si} \quad |b| \gg 1, \\ \frac{|a|}{\tau}+1 & \text{si} \quad |b| \ll 1. \end{cases}$$

si $(a,b) \neq (0,0)$ et pour tout $\varepsilon > 0$.

– Le module des puissances de L apparaissant dans les intégrales résiduelles doivent être des puissances négatives de L qui compenseront les puissances de $\log q$ provenant notamment des estimations des fonctions L précédentes. Ainsi, ces intégrales résiduelles seront des termes d'erreur. Ceci est la raison pour laquelle on estime le second moment harmonique ramolli à une distance à peine plus grande que $\frac{1}{\log q}$ de la droite critique. En effet, lorsque l'on bouge le s_1-contour vers la gauche de l'axe imaginaire pur, on croise le pôle simple $-s_2 - 2\tau$ et la puissance de L apparaissant dans l'intégrale résiduelle est $L^{-2\tau}$. Si $\tau = \frac{\mathcal{O}(1)}{\log q}$ alors cette puissance n'est que bornée alors que si $\tau = \frac{f(q)}{\log q}$, cette puissance devient une exponentielle négative :

$$L^{-2\tau} = \exp(-4\Delta f(q)).$$

Les détails sont donnés sous la forme de deux cas. Ces cas apparaissent naturellement car :

$$f(\alpha,\beta) \ll (1+|t|)^B \log^A(q)(qD)^{-2\tau+\alpha+\beta}$$

pour deux constantes absolues A et B et on remarque que :

$$(qD)^{-2\tau+\alpha+\beta} \ll \begin{cases} 1 & \text{si } (\alpha,\beta) = (\mu,\overline{\mu}), \\ \exp(-2f(q)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Seul le premier cas sera entièrement développé car il s'agit du cas le moins favorable.

Premier cas : $(\alpha,\beta) = (\mu,\overline{\mu})$

Les fonctions L apparaissant au dénominateur de l'intégrande sont :

$$L(g\times g, 1+2\mu+s_1)L(g\times g, 1+2\tau+s_1)$$

et :

$$L(g\times g, 1+2\tau+s_2)L(g\times g, 1+2\overline{\mu}+s_2).$$

On bouge le s_1-contour et le s_2-contour jusqu'à $\left(+c_1\frac{f(q)}{\log q}\right)$ sans rencontrer de pôles pour $c_1 > 0$. Ces déplacements de contour sont résumés dans la figure 3.2.
On peut déplacer le s_1-contour jusqu'à $\left(-c_2\frac{f(q)}{\log q}\right)$ avec $0 < c_2 < 2$ en croisant des pôles en $s_1 = 0$ et $s_1 = s_2 - 2\tau$. La figure 3.3 résume ce déplacement de contour.

Contribution de l'intégrale résiduelle

Les puissances de L intervenant dans l'intégrale résiduelle sont :

$$L^{s_1+s_2},\quad L^{s_1+(1-\Upsilon)s_2},\quad L^{(1-\Upsilon)s_1+s_2},\quad L^{(1-\Upsilon)(s_1+s_2)}.$$

On impose $c_1 < (1-\Upsilon)c_2$ de sorte que toutes les puissances précédentes sont bornées par :

$$\exp(-\delta f(q))$$

avec $\delta := 2\Delta((1-\Upsilon)c_2 - c_1) > 0$. L'intégrale résiduelle est bornée par :

$$\log^A(q)\exp(-2\delta f(q))$$

pour un certain réel A ce qui est admissible.

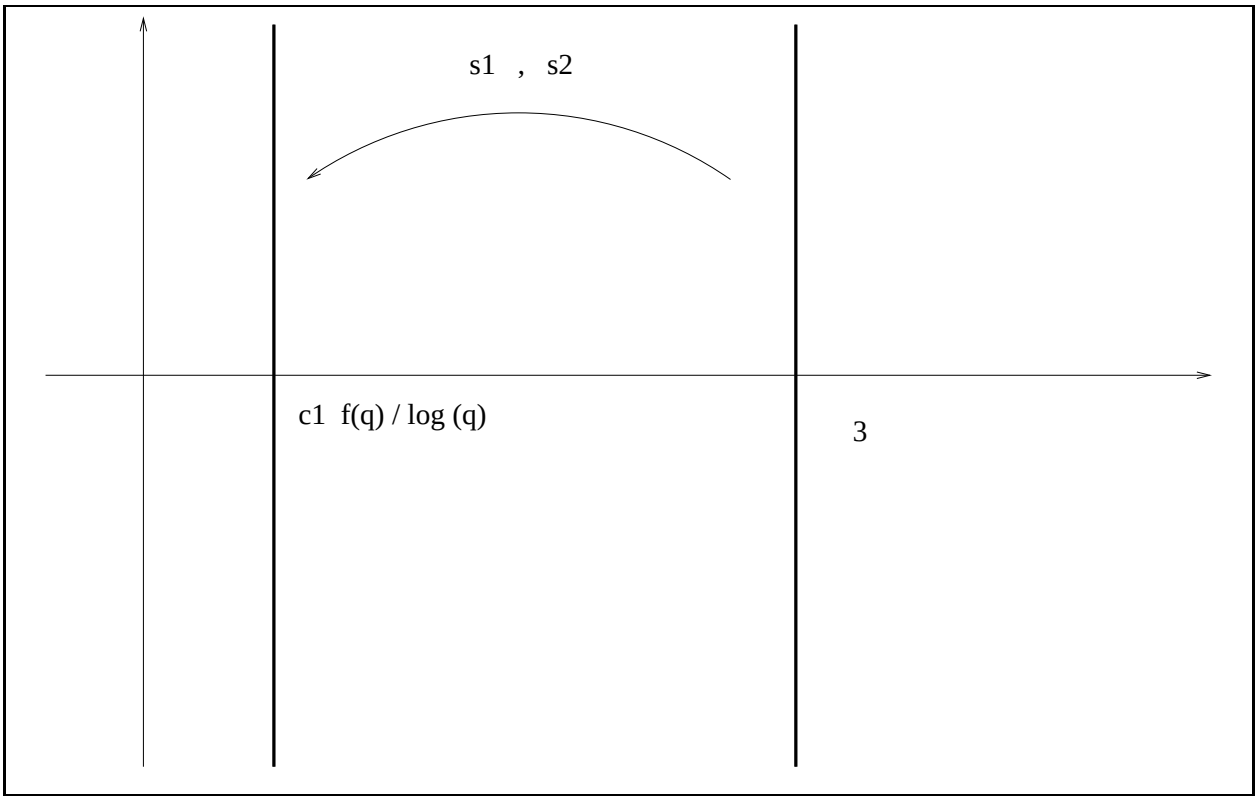

Fig 3.2: Premier déplacement de contour

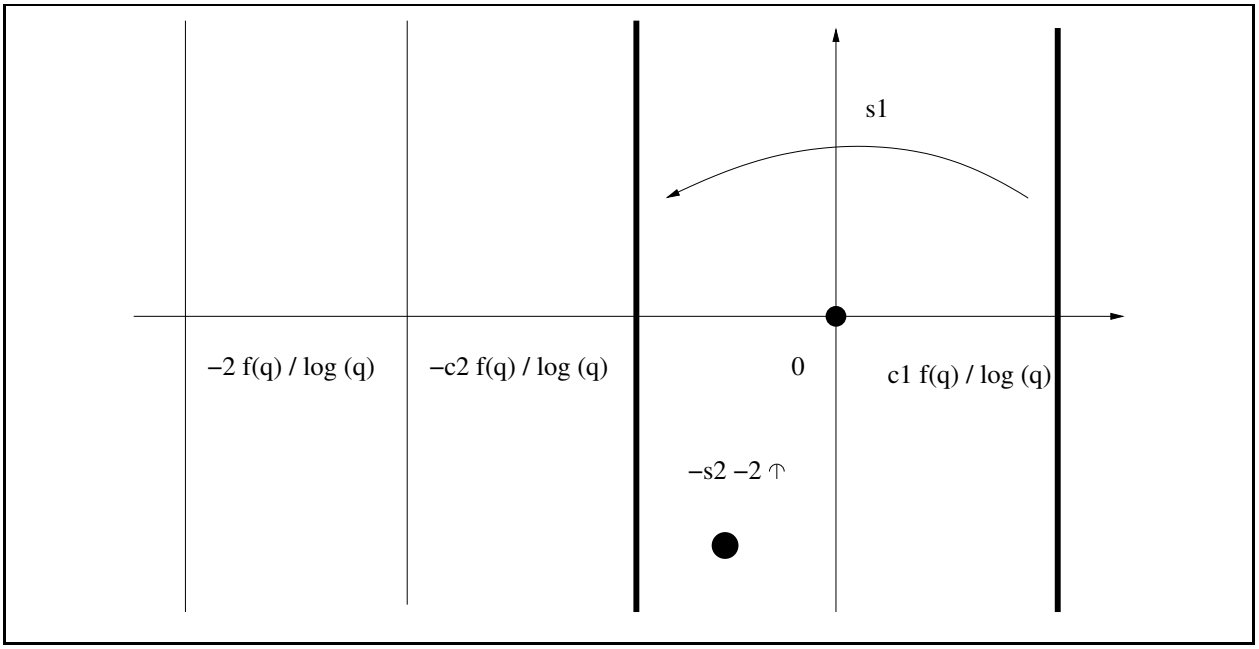

Fig 3.3: Deuxième déplacement de contour

Contribution du résidu en $s_1 = 0$

La proposition C.5.1 assure que :

$$\mathrm{res}_{s_1=0}\, h_g(\mu,\overline{\mu},s_1,s_2)n_g(s_1,\mu_1,\mu,\overline{\mu})L(g\times g,1+s_1+s_2+2\tau)s_1^{-2} = L(g\times g,1+s_2+2\tau)\frac{h_g(\mu,\overline{\mu},0,s_2)}{\zeta^{(D)}(1+2\mu)L(g\times g,1+2\tau)}.$$

Ainsi, la contribution de ce résidu vaut :

$$\frac{f(\mu,\overline{\mu})}{\zeta^{(D)}(1+2\mu)L(g\times g,1+2\tau)}\frac{1}{2i\pi\log L}\int_{\left(+c_1\frac{f(q)}{\log q}\right)} h_g(\mu,\overline{\mu},0,s_2)\frac{L(g\times g,1+s_2+2\overline{\mu})}{\zeta^{(D)}(1+s_2+2\overline{\mu})L(g\times g,1+2\overline{\mu}+s_2)} L^{(1-\Upsilon)s_2}\left(\widehat{P_L^I}(s_2)L^{\Upsilon s_2}-\frac{1}{1-\Upsilon}\widehat{R^I_{L^{1-\Upsilon}}}(s_2)\right)\frac{\mathrm{d}s_2}{s_2^2}.$$

On bouge le s_2-contour jusqu'à $\left(-\frac{f(q)}{\log q}\right)$ en croisant uniquement un pôle en $s_2 = 0$. (confer figure 3.4).

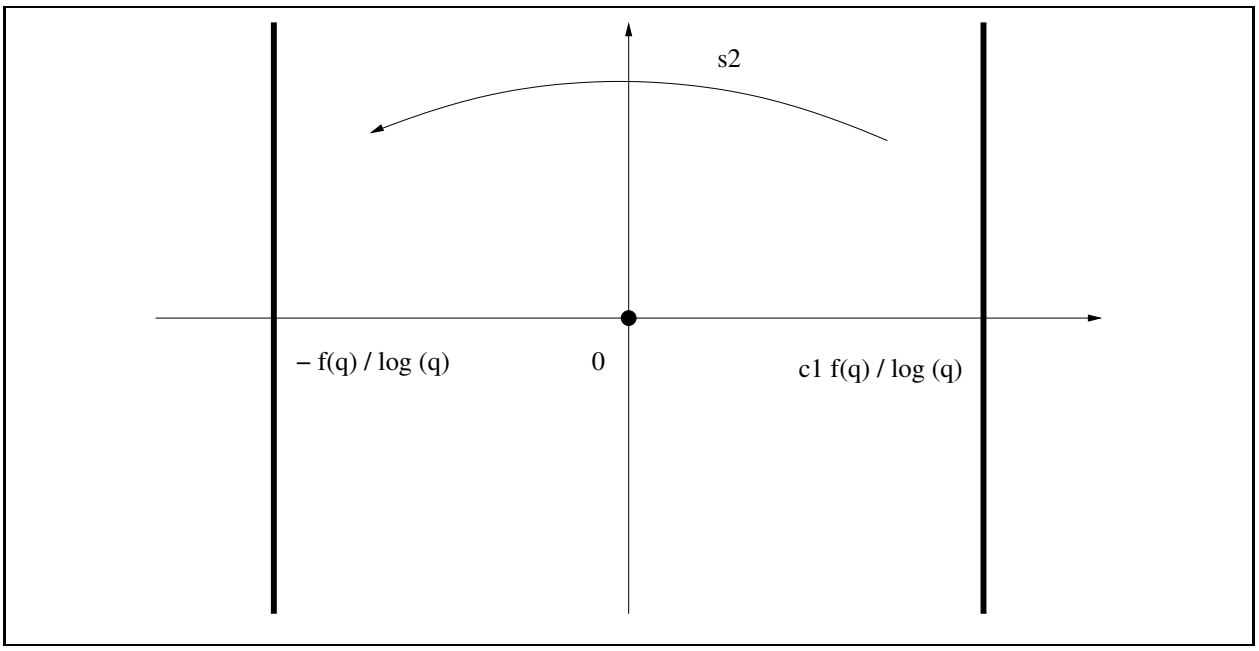

Fig 3.4: Troisième déplacement de contour

L'intégrale résiduelle est bornée par :

$$\log^A(q)\exp\left(-2\Delta f(q)\right)$$

pour un réel A ce qui est admissible alors que la contribution du résidu en $s_2 = 0$ vaut selon la proposition C.5.1 :

$$\frac{f(\mu,\overline{\mu})}{\zeta^{(D)}(1+2\mu)\zeta^{(D)}(1+2\overline{\mu})L(g\times g,1+2\tau)} = \frac{\varphi(q)}{q}\frac{\zeta_{(q)}(1+2\overline{\mu})}{\zeta^{(D)}(2(1+2\tau))}h_g(\mu,\overline{\mu},0,0)$$

ce qui est borné.

Contribution du résidu en $s_1 = -s_2 - 2\tau$

La contribution de ce résidu vaut :

$$R_g f(\mu,\overline{\mu})\frac{1}{2i\pi\log L}\int_{\left(+c_1\frac{f(q)}{\log q}\right)} h_g(\mu,\overline{\mu},-s2-2\tau,s_2)$$
$$\frac{1}{\zeta^{(D)}(1-s_2+2it)\zeta^{(D)}(1+s_2+2\overline{\mu})L(g\times g,1-s_2)L(g\times g,1+2\tau+s_2)}$$
$$L^{(1-\Upsilon)s_2}\left(\widehat{P_L'}(s_2)L^{\Upsilon s_2}-\frac{1}{1-\Upsilon}\widehat{R'_{L^{1-\Upsilon}}}(s_2)\right)$$
$$L^{-(1-\Upsilon)(s_2+2\tau)}\left(\widehat{P_L'}(-s_2-2\tau)L^{-\Upsilon(s_2+2\tau)}-\frac{1}{1-\Upsilon}\widehat{R'_{L^{1-\Upsilon}}}(-s_2-2\tau)\right)\right)\frac{\mathrm{d}s_2}{s_2^2}.$$

Les puissances de L intervenant dans cette intégrale sont :

$$L^{-2\tau},\quad L^{-(2\tau+\Upsilon s_2)},\quad L^{-2(1-\Upsilon)\tau+\Upsilon s_2},\quad L^{-2(1-\Upsilon)\tau}.$$

Comme $c_1 < 2(1-\Upsilon)$, toutes les puissances précédentes sont bornées par :

$$\exp\left(-\tilde{\delta}f(q)\right)$$

avec $\tilde{\delta} := 2\Delta(2(1-\Upsilon)-c_1) > 0$. L'intégrale précédente est alors bornée par :

$$\log^A(q)\exp\left(-\tilde{\delta}f(q)\right)$$

pour un réel A ce qui est admissible.

Deuxième cas : $(\alpha,\beta) \neq (\mu,\overline{\mu})$

On bouge le s_1-contour et le s_2-contour jusqu'à $\left(+\frac{1}{\log q}\right)$ sans rencontrer de pôles. Toutes les puissances de L apparaissant dans l'intégrande sont alors des termes bornés. Ces intégrales sont donc bornées par :

$$\log^A(q)\exp\left(-2f(q)\right)$$

pour un réel A ce qui est admissible

■

D'autre part, très loin de $\frac{1}{2}$ dans le domaine d'absolue convergence,

Lemme 3.4.2. *Si $\tau > \frac{1}{2}+\varepsilon$ alors :*

$$A_q^h\left[\left|\mathcal{L}\left(.\times g,\frac{1}{2}+\mu\right)-1\right|^2\right] \ll_\varepsilon q^{-4\Delta(1-\Upsilon)\left(\tau-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right)}. \tag{3.4.2}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Ce lemme est une conséquence directe de (3.2.1). On rappelle ici un principe de convexité de type Phragmen-Lindelöf pour les fonctions sous-harmoniques :

Lemme 3.4.3. *Soient $h_1, \cdots, h_j$ des fonctions holomorphes dans la bande :*

$$0 < a - \nu < \Re(s) = \sigma < b + \nu$$

(pour un $\nu > 0$), de sorte que la fonction

$$h = |h_1|^2 + \cdots + |h_j|^2$$

soit au plus à croissance polynomiale dans la bande et satisfait

$$|h(s)| \leq Cq^c|s|^B, \quad \textit{sur } \Re(s) = a$$

$$|h(s)| \leq Cq^d|s|^B, \quad \textit{sur } \Re(s) = b,$$

où c, d, B et C sont des nombres réels avec $B \geq 0$, $C \geq 0$. Alors pour tout s dans la bande $a \leq \Re(s) \leq b$, on a

$$|h(s)| \leq Cq^{\alpha(\sigma)}|s|^B$$

où α est la fonction affine vérifiant $\alpha(a) = c$ et $\alpha(b) = d$.

Une preuve de ce lemme peut être trouvée dans la thèse de E. Kowalski (**[Ko]**).

Preuve du théorème 3.1.2. Les lemmes 3.4.1 et 3.4.2 avec l'argument de convexité donnent :

$$A_q^h\left[\left|\mathcal{L}\left(.\times g, \frac{1}{2}+\mu\right)-1\right|^2\right] \ll_\varepsilon (1+|t|)^B q^{-\frac{\tau-\frac{f(q)}{\log q}}{\tau_0-\frac{f(q)}{\log q}}\left(4\Delta(1-\Upsilon)\left(\tau_0-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right)+\varepsilon\right)}$$

pour un réel τ_0 strictement supérieur à $\frac{1}{2}+\varepsilon$. En notant :

$$A := 4\Delta(1-\Upsilon)\left(\tau_0 - \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right)$$

on remarque alors que :

$$A_q^h\left[\left|\mathcal{L}\left(.\times g, \frac{1}{2}+\mu\right)-1\right|^2\right] \ll_\varepsilon (1+|t|)^B q^{-\frac{A}{\tau_0}\tau} q^{A\left(\frac{\tau}{\tau_0}-\frac{\tau-\frac{f(q)}{\log q}}{\tau_0-\frac{f(q)}{\log q}}\right)}.$$

Comme :

$$\frac{\tau}{\tau_0} - \frac{\tau-\frac{f(q)}{\log q}}{\tau_0-\frac{f(q)}{\log q}} \leq 0,$$

on constate que :

$$A_q^h\left[\left|\mathcal{L}\left(.\times g, \frac{1}{2}+\mu\right)-1\right|^2\right] \ll_\varepsilon (1+|t|)^B q^{-\frac{A}{\tau_0}\tau}$$

ce qui est suffisant en choisissant ε suffisamment petit et τ_0 suffisamment grand

■

Chapitre 4

Problème de convolution avec décalage additif

L'objectif est d'améliorer pour tout nombre premier q, tout entier naturel non-nul l et tout nombre complexe μ la borne de Errtwist$(q,l;\mu)$ donnée en (3.3.3) ce qui permettra d'obtenir une nouvelle estimation de Errsec$(q,L;\mu)$ et une meilleure longueur de ramollisseur effective. On rappelle que si :

$$\text{Errtwist}(q,l;\mu) = \mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((ql)^{\varepsilon}(1+|\Im(\mu)|)^{B}\frac{l^{a}}{q^{b}}\right).$$

où a et b sont des entiers naturels alors :

$$\text{Errsec}(q,L;\mu) = \mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((qL)^{\varepsilon}(1+|\Im(\mu)|)^{B}\frac{L^{2a+1}}{q^{b}}\right).$$

et tout réel $\Delta < \frac{b}{2(2a+1)}$ est effectif. On adoptera tout au long de ce chapitre les notations suivantes :

$$\tau := \Re(\mu)$$

et :

$$\delta := i\Im(\mu) := it.$$

4.1 Présentation des résultats et notations

4.1.1 Vers la conjecture de Ramanujan-Petersson-Selberg

Pour énoncer notre résultat, on introduit l'hypothèse suivante qui est une approximation de la conjecture de Ramanujan-Petersson-Selberg.

Hypothèse $\mathbf{H_2}(\theta)$. Soit π une forme automorphe cuspidale sur $GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ de paramètres de Hecke locaux $\alpha_\pi^{(1)}(p)$, $\alpha_\pi^{(2)}(p)$ en tout nombre premier p et $\mu_\pi^{(1)}(\infty)$, $\mu_\pi^{(2)}(\infty)$ en l'infini. Si π_p $(p\in\mathcal{P})$ et π_∞ ne sont pas ramifiées alors on dispose des bornes suivantes pour j dans $\{1,2\}$:

$$\begin{aligned} |\alpha_\pi^{(j)}(p)| &\leq p^{\theta}, \\ |\Re\big(\mu_\pi^{(j)}(\infty)\big)| &\leq \theta. \end{aligned}$$

Remarque 4.1.1. On dispose de bornes analogues en des places ramifiées qui peuvent être parfois utiles en pratique.

On dit que θ est *admisible* si $H_2(\theta)$ est vraie. Pour l'instant, $\theta_0 = \frac{7}{64}$ est le plus petit réel admissible grâce aux travaux de H. Kim, F. Shahidi et P. Sarnak (confer **[KiSh]** et **[KiSa]**). La conjecture de Ramanujan-Petersson-Selberg est l'hypothèse $H_2(0)$.

Nous allons maintenant donner un sens à l'hypothèse précédente en décrivant l'usage pratique que l'on en fera dans la suite. La référence utilisée est **[Ge]**. Si p est un nombre premier, on note $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour la topologie p-adique et $\mathcal{O}_p$ l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}_p$. $K_p := GL_2(\mathcal{O}_p)$ est alors un sous-groupe maximal compact ouvert de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. D'autre part, en la place infinie, $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ et $K_\infty = O_2(\mathbb{R})$. $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ désigne l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times$ son groupe des inversibles. Le centre de $GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ est :

$$Z(GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})) := \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times \right\}.$$

Définition 4.1.1. Une *forme automorphe* sur $GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ est une fonction Φ sur $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ satisfaisant :

1. Φ est $GL_2(\mathbb{Q})$ invariante à gauche :

$$\forall g \in GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}), \forall \gamma \in GL_2(\mathbb{Q}), \quad \Phi(\gamma g) = \Phi(g),$$

2. il existe un caractère unitaire Ψ de $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times$ tel que :

$$\forall g \in GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}), \forall z \in Z(GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})), \quad \Phi(gz) = \Phi(zg) = \Psi(z)\Phi(g),$$

3. Φ est $K := K_\infty \prod_{p<\infty} K_p$ finie à droite ce qui signifie que l'espace vectoriel engendré par les translatés à droite de Φ par les éléments de K est de dimension finie,
4. en tant que fonction de $GL_2(\mathbb{R})$, Φ est lisse et $\mathcal{Z}$-finie où $\mathcal{Z}$ désigne le centre de l'algèbre enveloppante de $GL_2(\mathbb{R})$,
5. Φ est à croissance modérée ce qui signifie que pour tout $c > 0$ et pour tout ensemble compact ω de $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, il existe des constantes C et N de sorte que pour tout g dans ω et tout a dans $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times$ vérifiant $|a| > c$, on a :

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \leq C|a|^N.$$

Si de plus, Φ vérifie la condition suivante pour presque tout g dans $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$:

$$\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}} \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \mathrm{d}x = 0$$

alors on dit que Φ est une *forme automorphe cuspidale* sur $GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$.

Nous allons donner deux classes d'exemples de formes automorphes cuspidales, l'une provenant du monde holomorphe et l'autre du monde réel-analytique. La théorie des formes automorphes réelles-analytiques est rappelée dans l'annexe A.

Soit f dans $S_k(N)$. Le principe d'approximation forte pour $SL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ implique que :

$$GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = GL_2(\mathbb{Q})GL_2^+(\mathbb{R}) \prod_{p<\infty} K_p^N$$

où :

$$K_p^N := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathcal{O}_p), c \equiv 0\,[N] \right\}.$$

Ainsi, toute matrice g de $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ se décompose sous la forme :

$$g = \gamma g_\infty k_0$$

avec γ dans $GL_2(\mathbb{Q})$, g_∞ dans $GL_2^+(\mathbb{R})$ et k_0 dans $\prod_{p<\infty} K_p^N$. On définit une fonction Φ_f sur $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ par :

$$\forall g = \gamma g_\infty k_0 \in GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}), \quad \Phi_f(g) = f(g_\infty.i)\frac{(\det(g_\infty))^{\frac{k}{2}}}{j(g_\infty, i)^k}.$$

Selon **[Ge]**, Φ_f est une forme automorphe cuspidale sur $GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. De plus, les paramètres locaux de Φ_f en tout nombre premier p sont donnés par :

$$\begin{aligned} \alpha_{\Phi_f}^{(1)}(p) &= \alpha_{f,1}(p), \\ \alpha_{\Phi_f}^{(2)}(p) &= \alpha_{f,2}(p) \end{aligned}$$

et les paramètres locaux de Φ_f à l'infini sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mu_{\Phi_f}^{(1)}(\infty) &= \mu_{f,1}, \\ \mu_{\Phi_f}^{(2)}(\infty) &= \mu_{f,2}. \end{aligned}$$

La conjecture de Ramanujan-Petersson-Selberg est prouvé pour toutes les formes automorphes cuspidales provenant de formes holomorphes.

Soit F une forme de Hecke-Maass cuspidale de niveau N, de poids 0 et de caractère trivial avec :

$$(\Delta_0 + \lambda_F)\, F = 0$$

où :

$$\lambda_F = \frac{1}{4} + r_F^2$$

et r_F est un nombre complexe. La suite des valeurs propres de Hecke est notée $(\lambda_F(n))_{n\wedge N=1}$ et on suppose que F est aussi un vecteur propre de l'opérateur réflexion :

$$\exists \varepsilon_F \in \{\pm 1\}, \quad X\, F = \varepsilon_F\, F.$$

Définissons une fonction Φ_F sur $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ par :

$$\forall g = \gamma g_\infty k_0 \in GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}), \quad \Phi_F(g) = F(g_\infty.i).$$

Selon **[Ge]**, Φ_F est aussi une forme automorphe cuspidale de paramètres locaux donnés en tout nombre premier p par :

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)}_{\Phi_F}(p) &= \alpha_{F,1}(p), \\ \alpha^{(2)}_{\Phi_F}(p) &= \alpha_{F,2}(p) \end{aligned}$$

et à l'infini par :

$$\begin{aligned} \mu^{(1)}_{\Phi_F}(\infty) &= \frac{\varepsilon_F - 1}{2} - ir_F, \\ \mu^{(2)}_{\Phi_F}(\infty) &= \frac{\varepsilon_F - 1}{2} + ir_F. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la conjecture de Ramanujan-Petersson-Selberg n'a pas encore été prouvée. L'hypothèse $H_2(\theta)$ est alors un substitut à cette conjecture qui nous permettra de contrôler la taille des coefficients de Fourier des formes de Maass. En effet, si θ est admissible alors :

$$\begin{aligned} |\Im(r_F)| &\leq \theta, \\ |\lambda_F(n)| &\leq \tau(n) n^\theta \end{aligned}$$

pour tout entier naturel non-nul n premier avec N. En particulier,

$$\lambda_F \geq \frac{1}{4} - \theta^2.$$

Remarque 4.1.2. Selon la dernière égalité, la conjecture de Ramanujan-Petersson-Selberg contient en particulier la conjecture de Selberg à savoir :

$$\lambda_F \geq \frac{1}{4}.$$

4.1.2 Nos résultats

En appliquant directement la méthode spectrale de P. Sarnak, on obtient :

Théorème 4.1.1. *Soit α un réel dans $]0,1[$. Soient g une forme primitive cuspidale de niveau D sans facteurs carrés, de poids $k_g > 1 + \frac{5}{2(1-\alpha)}$ et de caractère trivial et μ un nombre complexe. Supposons que q est premier, premier avec D et que $k \geq k_g + 10$. Si θ est admissible et $|\Re(\mu)| \ll \frac{1}{\log q}$ alors pour tout entier naturel non-nul l,*

$$Errtwist(q,l;\mu) = \mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((ql)^\varepsilon(1+|\Im(\mu)|)^B\left(\frac{l^{\frac{7}{2}+\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{l^{\frac{9}{2}+\theta-3\alpha}}{q^{3\alpha-\frac{5}{2}-\theta}}\right)\right) \tag{4.1.1}$$

pour une constante absolue $B > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$. En particulier, si θ est admissible et $|\Re(\mu)| \ll \frac{1}{\log q}$ alors pour tout entier naturel non-nul L,

$$Errsec(q,L;\mu) = \mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((qL)^\varepsilon(1+|\Im(\mu)|)^B\left(\frac{L^{8+2\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{L^{10+2\theta-6\alpha}}{q^{3\alpha-\frac{5}{2}-\theta}}\right)\right) \tag{4.1.2}$$

pour une constante absolue $B > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$. Par conséquent, sous $H_2(\theta)$, tout réel inférieur strictement à $\frac{1-2\theta}{8(4+\theta)}$ est effectif.

Remarque 4.1.3. La longueur de ramollisseur effective $\frac{1-2\theta}{8(4+2\theta)}$ est obtenue en choisissant $\alpha := \frac{25}{27} + \frac{4}{27}\theta$ ce qui entraîne que $k_g \geq 36$.

En appliquant la méthode spectrale de P. Sarnak en moyenne, on prouve que :

Théorème 4.1.2. *Soit α un réel dans $]0,1[$. Soient g une forme primitive cuspidale de niveau D sans facteurs carrés, de poids $k_g > 1 + \frac{5}{2(1-\alpha)}$ et de caractère trivial et μ un nombre complexe. Supposons que q est premier, premier avec D et que $k \geq k_g + 10$. Si θ est admissible et $|\Re(\mu)| \ll \frac{1}{\log q}$ alors pour tout entier naturel non-nul l,*

$$Errtwist(q,l;\mu) = \mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((ql)^{\varepsilon}(1+|\Im(\mu)|)^{B}\left(\frac{l^{3+\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{l^{\frac{17}{4}+\frac{\theta}{2}-3\alpha}}{q^{3\alpha-\frac{5}{2}-\theta}}\right)\right) \tag{4.1.3}$$

pour une constante absolue $B > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$. En particulier, si θ est admissible et $|\Re(\mu)| \ll \frac{1}{\log q}$ alors pour tout entier naturel non-nul L,

$$Errsec(q,L;\mu) = \mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((qL)^{\varepsilon}(1+|\Im(\mu)|)^{B}\left(\frac{L^{7+2\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{L^{\frac{19}{2}+\theta-6\alpha}}{q^{3\alpha-\frac{5}{2}-\theta}}\right)\right) \tag{4.1.4}$$

pour une constante absolue $B > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$. Par conséquent, sous $H_2(\theta)$, tout réel inférieur strictement à $\frac{1-2\theta}{4(7+2\theta)}$ est effectif.

Remarque 4.1.4. La longueur de ramollisseur effective $\frac{1-2\theta}{4(7+2\theta)}$ est obtenue en choisissant $\alpha := \frac{89}{96} + \frac{\theta}{8} + \frac{\theta^2}{24}$ ce qui entraîne que $k_g \geq 36$.

En appliquant la méthode spectrale en moyenne avec le rafinement de B. Kroetz et R.J. Stanton, le résultat final est le suivant :

Théorème 4.1.3. *Soit α un réel dans $]0,1[$. Soient g une forme primitive cuspidale de niveau D sans facteurs carrés, de poids $k_g > 1 + \frac{5}{2(1-\alpha)}$ et de caractère trivial et μ un nombre complexe. Supposons que q est premier, premier avec D et que $k \geq k_g + 6$. Si θ est admissible et $|\Re(\mu)| \ll \frac{1}{\log q}$ alors pour tout entier naturel non-nul l,*

$$Errtwist(q,l;\mu) = \mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((ql)^{\varepsilon}(1+|\Im(\mu)|)^{B}\left(\frac{l^{2+\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{l^{\frac{9}{4}+\frac{\theta}{2}-\alpha}}{q^{\alpha-\frac{1}{2}-\theta}}\right)\right) \tag{4.1.5}$$

pour une constante absolue $B > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$. En particulier, si θ est admissible et $|\Re(\mu)| \ll \frac{1}{\log q}$ alors pour tout entier naturel non-nul L,

$$Errsec(q,L;\mu) = \mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((qL)^{\varepsilon}(1+|\Im(\mu)|)^{B}\left(\frac{L^{5+2\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{L^{\frac{11}{2}+\theta-2\alpha}}{q^{\alpha-\frac{1}{2}-\theta}}\right)\right) \tag{4.1.6}$$

pour une constante absolue $B > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$. Par conséquent, sous $H_2(\theta)$, tout réel inférieur strictement à $\Delta_{max}(\theta) := \frac{1-2\theta}{4(5+2\theta)}$ est effectif.

Remarque 4.1.5. La longueur de ramollisseur effective $\frac{1-2\theta}{4(5+2\theta)}$ est obtenue en choisissant $\alpha := \frac{7}{8} + \frac{\theta}{6} + \frac{\theta^2}{6}$ ce qui entraîne que $k_g \geq 22$.

Remarque 4.1.6. Insistons sur le fait que :

$$\begin{aligned}\Delta_{max}(\theta_0) &= \frac{25}{668} = 0.03742...\\ \Delta_{max}(0) &= \frac{1}{20} = 0.05.\end{aligned}$$

4.1.3 Identification du problème

Il s'agit déjà d'identifier précisément Errtwist$(q,l;\mu)$. Selon **[KoMiVa]**, on a :

$$\text{Errtwist}(q,l;\mu) = \frac{2\pi}{i^k}\sum_{M,N\geq 1}\sum_{\tilde{e}e=l}\frac{\varepsilon_q(\tilde{e})}{\sqrt{\tilde{e}}}\sum_{ab=\tilde{e}}\frac{\mu(a)\varepsilon_D(a)}{\sqrt{a}}\lambda_g(b)T_{M,N} \tag{4.1.7}$$

avec :

$$\begin{aligned}T_{M,N} &= \sum_{\substack{c\in\mathbb{N}^*\\ c\equiv 0 \mod q}}\frac{1}{c^2}T_{M,N}(c),\\ T_{M,N}(c) &= c\sum_{m,n\geq 1}\lambda_g(m)\lambda_g(n)S(m,aen;c)F_{M,N}(m,n)J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{aemn}}{c}\right).\end{aligned}$$

Ici, J_{k-1} est une fonction de Bessel de première espèce définie dans l'annexe B et $F_{M,N}(.,.)$ $(M,N\geq 1)$ est une fonction à support compact dans $\left[\frac{M}{2},2M\right]\times\left[\frac{N}{2},2N\right]$ satisfaisant pour tous entiers naturels i et j, tous nombres réels positifs A et A', tous nombres réels positifs x et y :

$$x^i y^j\frac{\partial^{i+j}F_{M,N}}{\partial x^i\partial y^j}(x,y)\ll(1+|t|)^B(MN)^{-\frac{1}{2}}(\log q)^{i+j}\left(\frac{qD}{x}\right)^A\left(\frac{qD}{\tilde{e}ay}\right)^{A'}. \tag{4.1.8}$$

De plus, suite à une partition dyadique de l'unité effectuée dans **[KoMiVa]** :

$$\forall X\in\mathbb{R}_+,\quad\sum_{M\leq X}1\ll\log X.$$

Le contrôle des fonctions F_{MN} $(M,N\geq 1)$ décrit en (4.1.8) entraîne que l'on peut couper les sommes en M et N en $(qD)^{1+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon>0$:

$$\begin{aligned}\text{Errtwist}(q,l;\mu) = \frac{2\pi}{i^k}\sum_{M,N\ll_\varepsilon(qD)^{1+\varepsilon}}\sum_{\tilde{e}e=l}\frac{\varepsilon_q(\tilde{e})}{\sqrt{\tilde{e}}}\sum_{ab=\tilde{e}}\frac{\mu(a)\varepsilon_D(a)}{\sqrt{a}}\lambda_g(b)T_{M,N}\\ +\mathcal{O}_{g,\varepsilon,A}\left((1+|t|)^B\frac{1}{q^A}\right)\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

pour tout nombre réel strictement positif A.

Remarque 4.1.7. Les hypothèses faites sur le poids de f dans les théorèmes 4.1.1, 4.1.2 et 4.1.3 permettent de rendre convergente la série en c apparaissant dans $T_{M,N}$. Ces hypothèses techniques peuvent certainement être supprimées en enlevant les grandes valeurs de c grâce aux inégalités de grand crible pour les sommes de Kloosterman (confer proposition B.3.2) :

$$\sum_{\substack{1\leq l\leq \widetilde{L}\\ l\wedge q=1}} x_l \sum_{\tilde{e}e=l} \frac{\varepsilon_q(\tilde{e})}{\sqrt{\tilde{e}}} \sum_{ab=\tilde{e}} \frac{\mu(a)\varepsilon_D(a)}{\sqrt{a}} \lambda_g(b) \sum_{\substack{c\in\mathbb{N}^*\\ c\equiv 0 \mod q\\ c\geq C}} \frac{1}{c^2} T^-_{M,N}(c) \ll_\varepsilon (q\widetilde{L}C)^\varepsilon \left(\frac{\sqrt{\widetilde{L}MN}}{C}\right)^{k-\frac{3}{2}} \left(1+\frac{\widetilde{L}N}{q}\right)^{\frac{1}{2}}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et toute suite $(x_l)_{1\leq l\leq \widetilde{L}}$ satisfaisant $x_l \ll_\varepsilon l^\varepsilon$ pour tout entier naturel $1 \leq l \leq \widetilde{L}$ premier avec q.

En appliquant la formule sommatoire de Voronoï écrite dans **[KoMiVa]** à la variable m (dont l'effet principal est de transformer les sommes de Kloosterman en sommes de Ramanujan), on obtient pour tous nombres réels $M, N \geq 1$ et tout entier naturel non-nul c divisible par q :

$$T_{M,N}(c) = T^{\mathrm{OD}}_{M,N}(c) + T^-_{M,N}(c)$$

où :

$$\begin{aligned}
T^{\mathrm{OD}}_{M,N}(c) &= \varphi(c)\varepsilon_{D_2}(-c)\frac{\eta_g(D_2)}{\sqrt{D_2}} \sum_{n\geq 1} \lambda_g(aenD_2)\lambda_g(n) G^-(aen, n),\\
T^-_{M,N}(c) &= \frac{\eta_g(D_2)}{\sqrt{D_2}} \sum_{h\neq 0} r(-h\overline{D_2}; c) T^-_h(c),\\
T^-_h(c) &= \sum_{m-(aeD_2)n=h} \lambda_g(m)\lambda_g(n) G^-\left(\frac{m}{D_2}, n\right),\\
G^-(z,y) &= 2\pi i^{k_g} \int_0^{+\infty} J_{k_g-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{zu}}{c}\right) J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{aeyu}}{c}\right) F_{M,N}(u,y)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Ici,

- $D_2 := \frac{D}{D\wedge c}$,
- $\overline{D_2}$ est l'inverse de D_2 modulo c,
- $r(.;.)$ est une somme de Ramanujan (confer annexe B),
- $J_{k_g-1}(.)$ est une fonction de Bessel de première espèce définie dans l'annexe C,

E. Kowalski, P. Michel et J. Vanderkam ont alors prouvé que :

$$\text{(4.1.10)}\quad \mathrm{Errtwist}(q,l;\mu) = \frac{2\pi}{i^k} \sum_{M,N\ll_\varepsilon (qD)^{1+\varepsilon}} \sum_{\tilde{e}e=l} \frac{\varepsilon_q(\tilde{e})}{\sqrt{\tilde{e}}} \sum_{ab=\tilde{e}} \frac{\mu(a)\varepsilon_D(a)}{\sqrt{a}} \lambda_g(b) T^-_{M,N} + \mathcal{O}_{g,\varepsilon,A}\left((1+|t|)^B\left(\frac{1}{q^A} + q^\varepsilon \frac{\sigma_g(l)}{\sqrt{l}}\right)\right).$$

Notons $\mathrm{Errtwist}'(q,l;\mu)$ le terme principal de l'égalité précédente :

$$\mathrm{Errtwist}'(q,l;\mu) := \frac{2\pi}{i^k} \sum_{M,N \ll_\varepsilon (qD)^{1+\varepsilon}} \sum_{\tilde{e}e=l} \frac{\varepsilon_q(\tilde{e})}{\sqrt{\tilde{e}}} \sum_{ab=\tilde{e}} \frac{\mu(a)\varepsilon_D(a)}{\sqrt{a}} \lambda_g(b) T^-_{M,N}$$

D'autre part, $T^-_{M,N}$ est la somme des deux termes suivants :

$$\begin{aligned} T^-_{M,N}(1) &= \sum_{\substack{c\in\mathbb{N}^* \\ q\|c}} \frac{1}{c^2} T^-_{M,N}(c), \\ T^-_{M,N}(2) &= \sum_{\substack{c\in\mathbb{N}^* \\ c\equiv 0 \mod q^2}} \frac{1}{c^2} T^-_{M,N}(c). \end{aligned}$$

Nous allons nous concentrer seulement sur le premier terme sachant que la même technique s'applique pour le second terme et donne des résultats encore meilleurs (cela peut être vérifié de façon plus élégante grâce à la remarque 4.1.7). Ainsi, on peut écrire :

$$c = qc' \quad \text{avec} \quad c' \wedge q = 1$$

de sorte que (proposition B.1.3) :

$$\forall h \in \mathbb{Z}^*, \quad r(-h\overline{D_2}; c) = r(h;q)r(h;c').$$

Comme le théorème B.1.1 assure que :

$$\begin{aligned} r(h;c') &= \sum_{d|c'\wedge h} d\mu\left(\frac{c'}{d}\right), \\ r(h;q) &= -1 + \delta_{q|h} q, \end{aligned}$$

pour tout entier relatif non-nul h, on obtient :

$$T^-_{M,N}(c) = \frac{\eta_g(D_2)}{\sqrt{D_2}} \sum_{\widehat{q}\in\{1,q\}} \varepsilon(\widehat{q})\widehat{q} \sum_{d|c'} d\mu\left(\frac{c'}{d}\right) \sum_{h\neq 0} T^-_{\widehat{q}dh}(c) \tag{4.1.11}$$

avec

$$\varepsilon(\widehat{q}) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad \widehat{q} = 1, \\ +1 & \text{si} \quad \widehat{q} = q. \end{cases}$$

Posons pour tous nombres réels positifs z et y :

$$F(z,y) = 2\pi i^{k_g} D_2 \int_0^{+\infty} J_{k_g-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{zx}}{c}\right) J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{yx}}{c}\right) F_{M,N}\left(D_2 x, \frac{y}{a_2}\right) \mathrm{d}x.$$

Les propriétés du support de $F_{M,N}$ pour $M,N \geq 1$ entraînent que :

$$F(z,y) = 4\pi i^{k_g} D_2 \int_{\sqrt{\frac{M}{2D_2}}}^{\sqrt{\frac{2M}{D_2}}} J_{k_g-1}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{z}x\right) J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{y}x\right) F_{M,N}\left(D_2 x^2, \frac{y}{aeD_2}\right) x\mathrm{d}x$$

pour tous nombres réels positifs z et y et que l'on peut se limiter à l'intervalle suivant pour la deuxième variable :

$$\frac{NaeD_2}{2} \leq y \leq 2NaeD_2.$$

Nous aurons besoin d'estimations de cette fonction F. Pour cela, posons :

$$\begin{aligned} Y &:= Nae, \\ Z_1 &:= \frac{c^2}{M}, \\ P &:= 1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}, \\ \mathbf{Z} &:= Z_1 P^2. \end{aligned}$$

On a automatiquement $\mathbf{Z} \geq Z_1$ et $\mathbf{Z} \geq Y$.

Lemme 4.1.4. *Pour tous entiers naturels α, β, tous nombres réels A_1, A_2, A_3 strictement positifs et tous nombres réels positifs z et y,*

$$z^\alpha y^\beta \frac{\partial^{\alpha+\beta} F}{\partial z^\alpha \partial y^\beta}(z,y) \ll_{k,k_g,\alpha,\beta,A_1,A_2,A_3} (1+|t|)^B (\log q)^{\alpha+\beta+A_1+A_2+A_3}$$
$$P^{\alpha+\beta}\sqrt{\frac{M}{N}}\left(\frac{\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}\right)^{k-1}\frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\sqrt{\frac{z}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{z}{Z_1}}}\right)^{k_g-1}\frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{z}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\frac{1}{\left(1+\frac{z}{\mathbf{Z}}\right)^{A_1}\left(1+\frac{y}{Y}\right)^{A_2}\left(1+\frac{Y}{\left(\sqrt{Z_1}+\sqrt{z}\right)^2}\right)^{A_3}}.$$

Preuve du lemme 4.1.4. On donne la preuve uniquement pour les cas $\alpha = \beta = 0$. Si $z < \mathbf{Z}$, on applique directement les estimations des fonctions de Bessel données en (C.2.1) et nous obtenons :

$$F(z,y) \ll_{k,k_g} (1+|t|)^B \sqrt{\frac{M}{N}}\left(\frac{\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}\right)^{k-1}\frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\sqrt{\frac{z}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{z}{Z_1}}}\right)^{k_g-1}\frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{z}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.1.12}$$

Si $z > \mathbf{Z}$, on exploite les oscillations de J_{k_g-1} en intégrant l fois par parties :

$$F(z,y) = 4\pi i^{k_g}\int_{\sqrt{\frac{M}{2D_2}}}^{\sqrt{\frac{2M}{D_2}}}\left(\frac{\exp\left(i\frac{4\pi}{c}\sqrt{z}x\right)}{\left(i\frac{4\pi}{c}\sqrt{z}\right)^l}f^{(l)}(x)+\frac{\exp\left(-i\frac{4\pi}{c}\sqrt{z}x\right)}{\left(-i\frac{4\pi}{c}\sqrt{z}\right)^l}\overline{f}^{(l)}(x)\right)\mathrm{d}x$$

avec $f(x) = xV_{k_g-1}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{z}x\right) J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{y}x\right) F_{M,N}\left(D_2x^2, \frac{y}{a_2}\right)$ satisfaisant :

$$(4.1.13)\quad f^{(l)}(x) \ll_{k,k_g,l} (1+|t|)^B (\log q)^l \frac{P^l}{\sqrt{MN}} \left(\frac{\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}\right)^{k-1} \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\sqrt{\frac{z}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{z}{Z_1}}}\right)^{k_g-1} \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{z}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{x^{l-1}}.$$

Justifions l'estimation (4.1.13). On note :

$$\begin{aligned} a_z &:= \frac{4\pi}{c}\sqrt{z}, \\ a_y &:= \frac{4\pi}{c}\sqrt{y}, \\ b_1 &:= \sqrt{\frac{M}{2D_2}}, \\ b_2 &:= \sqrt{\frac{2M}{D_2}}. \end{aligned}$$

et on écrit $f(x) = xf_1(x)f_2(x)(f_3 \circ f_4)(x)$ où :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= V_{k_g-1}(a_z x), \\ f_2(x) &= J_{k-1}(a_y x), \\ f_3(x) &= F_{M,N}\left(D_2x, \frac{y}{a_2}\right), \\ f_4(x) &= x^2. \end{aligned}$$

Les estimations connues sur les fonctions de Bessel (confer (C.2.3)) entraînent que pour tout entier naturel j,

$$x^j f_1^{(j)}(x) \ll_{j,k_g} \left(\frac{a_z b_1}{1+a_z b_1}\right)^{k_g-1} \frac{1}{(1+a_z b_2)^{\frac{1}{2}}}$$

et que :

$$x^j f_2^{(j)}(x) \ll_{j,k_g} (1+a_y b_2)^j \left(\frac{a_y b_1}{1+a_y b_1}\right)^{k-1} \frac{1}{(1+a_y b_2)^{\frac{1}{2}}}.$$

L'estimation (4.1.8) donne :

$$x^j f_3^{(j)}(x) \ll_j (1+|t|)^B \log^j(q) \frac{1}{\sqrt{MN}}.$$

Une application répétée de la formule de Leibniz assure que :

$$f^{(l)}(x) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{l-i} \sum_{k=0}^{j} c(i,j,k) x^{1-i} f_1^{(l-(i+j))}(x) f_2^{(j-k)}(x) (f_3 \circ f_4)^{(k)}(x)$$

où les $c(i,j,k)$ sont des constantes absolues. D'autre part, on montre par récurrence sur k que :

$$(f_3 \circ f_4)^{(k)}(x) = \sum_{i \in I_k} \alpha_i x^{2\beta_i} f_3^{(\gamma_i)}(x^2)$$

où I_k est un ensemble indexateur fini, les α_i sont des contantes absolues, les β_i et γ_i sont des entiers naturels satisfaisant :

$$\gamma_i - \beta_i = \frac{k}{2}$$

et

$$\gamma_i \leq k.$$

On retrouve l'estimation (4.1.13) en mettant bout à bout toutes les précédentes remarques. Par conséquent,

$$(4.1.14) \quad F(z,y) \ll_{k,k_g} (1+|t|)^B \sqrt{\frac{M}{N}} \left(\frac{\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}} \right)^{k-1} \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\sqrt{\frac{z}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{z}{Z_1}}} \right)^{k_g-1} \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{z}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}} P^l\left(\frac{z}{\mathbf{Z}}\right)^{-2l}.$$

On conclut grâce à (4.1.12) et (4.1.14) et en remarquant que l'on peut aussi exploiter les oscillations de J_{k-1} lorsque Y est grand

■

Remarque 4.1.8. Les oscillations de J_{k_g-1} entraînent que la fonction $F(z,y)$ est petite lorsque $z > \mathbf{Z}$. D'autre part, pour z dans $[0, Z_1]$, $F(z,y)$ est petite quitte à prendre le poids de g suffisamment grand. Le domaine critique pour $F(z,y)$ est donc donné par $[Z_1, \mathbf{Z}] \times \left[\frac{Y}{2}, 2Y\right]$.

La fonction $F(z,y)$ n'est pas à support compact par rapport à la variable z mais on va s'y ramener grâce à une partition dyadique de l'unité. Pour cela, soit $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à support compact dans $[1,2]$ satisfaisant :

$$\sum_{a \geq 0} \rho\left(\frac{x}{2^a}\right) = 1.$$

On pose pour tout entier naturel a :

$$(4.1.15) \qquad F_Z(z,y) := \rho\left(\frac{z}{2^a}\right) F(z,y)$$

où $Z := 2^a$ désigne dorénavant la variable indexatrice de la partition dyadique de l'unité. Pour tout Z, F_Z est une fonction à support compact dans :

$$[Z, 2Z] \times \left[\frac{Y}{2}, 2Y\right]$$

et on remarque que :

$$F(z,y)=\sum_{Z\geq 1}F_Z(z,y).$$

Les estimations de la fonction test F obtenues précédemment se transposent trivialement à la fonction F_Z pour tout Z :

Lemme 4.1.5. *Pour tous entiers naturels α, β, tous nombres réels A_1, A_2, A_3 strictement positifs et tous nombres réels positifs z et y :*

$$z^\alpha y^\beta \frac{\partial^{\alpha+\beta}F_Z}{\partial z^\alpha \partial y^\beta}(z,y)\ll_{k,k_g,\alpha,\beta,A_1,A_2,A_3}(1+|t|)^B(\log q)^{\alpha+\beta+A_1+A_2+A_3} \tag{4.1.16}$$
$$P^{\alpha+\beta}\sqrt{\frac{M}{N}}\left(\frac{\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}\right)^{k-1}\frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}\right)^{\frac12}}\left(\frac{\sqrt{\frac{Z}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{Z}{Z_1}}}\right)^{k_g-1}\frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{Z}{Z_1}}\right)^{\frac12}}$$
$$\frac{1}{\left(1+\frac{Z}{\mathbf{Z}}\right)^{A_1}\left(1+\frac{y}{Y}\right)^{A_2}\left(1+\frac{Y}{\left(\sqrt{Z_1}+\sqrt{Z}\right)^2}\right)^{A_3}}.$$

Remarquons que :

$$T^-_{\widehat{q}dh}(c)=\sum_{\substack{Z\geq 1\\ Z=2^a\\ a\in\mathbb{N}}}S_{\widehat{q}dh}(F_Z,g;1,aeD_2)$$

où :

$$S_{\widehat{q}dh}(F_Z,g;1,aeD_2):=\sum_{m-aeD_2n=\widehat{q}dh}\lambda_g(m)\lambda_g(n)F_Z(m,aeD_2n)$$

pour tout entier relatif non-nul h.

4.2 Résolutions génériques d'un problème de convolution décalé

4.2.1 Présentation

Soit $H:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ une fonction lisse compactement supportée :

$$\mathrm{Supp}(H)\subset[Z,2Z]\times\left[\frac{Y}{2},2Y\right] \tag{4.2.1}$$

et satisfaisant :

$$\forall(z,y)\in\mathbb{R}_+^*,\quad z^\alpha y^\beta\frac{\partial^{\alpha+\beta}H}{\partial z^\alpha\partial y^\beta}(z,y)\ll_{\alpha,\beta}P^{\alpha+\beta} \tag{4.2.2}$$

pour tous entiers naturels α et β. Fixons deux entiers naturels non-nuls a_1 et a_2 avec $a_1a_2<q$ et considérons les sommes suivantes :

$$S_h(H,g;a_1,a_2):=\sum_{a_1m-a_2n=h}\lambda_g(m)\lambda_g(n)H(a_1m,a_2n)$$

définies pour tout entier relatif non-nul h. Définissons aussi :

$$\Sigma_r(H,g;a_1,a_2) := \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^*\\ h\equiv 0 \mod r}} S_h(H,g;a_1,a_2)$$

pour tout entier naturel non-nul r. Les propriétés du support de la fonction test H entraînent que la moyenne précédente est de longueur $\sup(Z,Y)$:

$$\Sigma_r(H,g;a_1,a_2) = \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^*\\ |h|\ll \sup(Z,Y)\\ h\equiv 0 \mod r}} S_h(H,g;a_1,a_2).$$

Le problème de convolution avec décalage additif revient à estimer de façon non-triviale les sommes $S_h(g,a_1,a_2)$ pour $h\neq 0$ sachant que la borne triviale est donnée par :

$$S_h(H,g;a_1,a_2) \ll_{g,\varepsilon} (ZY)^{\varepsilon} \inf\left(\frac{Z}{a_1},\frac{Y}{a_2}\right)$$

pour tout $\varepsilon>0$. La borne triviale pour $\Sigma_r(H,g;a_1,a_2)$ est alors donnée par :

$$\Sigma_r(H,g;a_1,a_2) \ll_{g,\varepsilon} (ZY)^{\varepsilon} \inf\left(\frac{Z}{a_1},\frac{Y}{a_2}\right)\sup(Z,Y).$$

Il s'agit dans ce travail d'obtenir une borne optimale en a_1a_2 pour $S_h(H,g;a_1,a_2)$ sachant que notre objectif final est d'obtenir une bonne longueur de ramollisseur effective. Ainsi, aucune question d'uniformité par rapport aux paramètres de g (comme son niveau) ne sera abordée.

De tels problèmes de convolution avec décalage additif sont intensément étudiés car ils sont intimement liés aux problèmes de sous-convexité (confer chapitre 6). Historiquement, le premier exemple de problème de convolution avec décalage additif a été le problème de diviseur avec décalage additif donné par :

$$S_h(\tau,1,1) := \sum_{n\leq N} \tau(n)\tau(n+h)$$

pour tout entier relatif non-nul h. Les coefficients $(\tau(n))_{n\geq 1}$ sont les coefficients de Fourier de la forme modulaire :

$$g(z) = \left(\frac{\partial E(z,.)}{\partial s}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{y}\log y + 4\sqrt{y}\sum_{n\geq 1}\tau(n)\cos(2\pi nx)K_0(2\pi ny)$$

où pour tout nombre complexe s, $z\mapsto E(z,s)$ est la série d'Eisenstein de $SL_2(\mathbb{Z})$ de poids 0 et de caractère trivial. Comme g n'est pas cuspidale, le problème de convolution avec décalage additif correspondant aura un terme principal et Ingham a prouvé en 1927 que :

$$S_h(\tau,1,1) \backsimeq_{N\to+\infty} C(h)N\log^2 N. \tag{4.2.3}$$

Le terme d'erreur peut être exprimé en fonction des sommes de Kloosterman qui ont été intensivement étudiées par H.D. Kloosterman (**[Kl]**), puis par A. Weil (**[We]**) et T. Estermann (**[Es]**). En fait, H.D. Kloosterman a mis au point une méthode permettant de résoudre le problème de diviseur avec décalage additif appelée *méthode du cercle* qui a été reprise et perfectionnée par W. Duke, J.B. Friedlander et H. Iwaniec (**[DuFrIw]**) sous le nom de *méthode du δ-symbole*. P. Michel, E. Kowalski et J. Vanderkam ont obtenu la borne du terme d'erreur $\mathrm{Errtwist}(q,l;\mu)$ donnée en (3.3.3) en appliquant leurs résultats.

4.2.2 La méthode du δ-symbole

Survol de la méthode

La référence principale utilisée ici est l'exposé de P. Michel à l'occasion du programme sur les formes automorphes qui s'est déroulé au Fields Institute de Toronto (**[Mi4]**). Il s'agit d'exprimer la condition $k=0$ en fonction de caractères additifs de conducteur plus petit que $\sqrt{|k|}$. Tout repose sur les constatations suivantes :

- si $d \mid k$ et $|k| < d$ alors $k = 0$,
- si $d \mid k$ alors $d \leq \sqrt{k}$ ou $\frac{k}{d} \leq \sqrt{k}$.

En détectant la condition $d \mid k$ grâce aux relations d'orthogonalité de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et en utilisant de façon très astucieuse les deux remarques précédentes, on peut montrer que :

$$\delta_0(k) = \sum_{c \geq 1} \Delta_c(k) r(k,c)$$

où si $|k| \leq K$ alors $\Delta_c(k) = 0$ sauf si $c \ll \sqrt{K}$. Après avoir utilisé ce qui précède pour détecter la condition $a_1 m - a_2 n = h$, on utilise des formules sommatoires de type Voronoï et on se rend compte qu'estimer $S_h(g,a_1,a_2)$ revient à estimer des sommes du type :

$$\sum_{1 \leq c \ll \sqrt{MN}} \sum_{1 \leq m,n} \lambda_g(m)\lambda_g(n) S(-a_1 m + a_2 n, -h; c) \tilde{F}(m,n,c).$$

Ces sommes sont estimées en étudiant $\tilde{F}(m,n,c)$ qui est une transformée intégrale de F et en estimant les sommes de Kloosterman par la borne de A. Weil.

Résultat générique via la méthode du δ-symbole

Ce résultat peut-être trouvé dans **[DuFrIw3]** et **[KoMiVa]** :

Théorème 4.2.1. *Soient h un entier relatif non-nul et r un entier naturel non-nul. Si a_1 et a_2 sont premiers entre eux et H vérifie les conditions* (4.2.1) *et* (4.2.2) *alors :*

$$S_h(H,g;a_1,a_2) \ll_{\varepsilon,g} P^{\frac{5}{4}}(Z+Y)^{\frac{1}{4}}(YZ)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi,

$$\Sigma_r(H,g;a_1,a_2) \ll_{\varepsilon,g} P^{\frac{5}{4}}(Z+Y)^{\frac{1}{4}}(YZ)^{\frac{1}{4}+\varepsilon} \frac{\sup(Z,Y)}{r}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

4.2.3 La méthode spectrale

Description détaillée de la méthode spectrale

Cette méthode spectrale a été suggérée dans les années soixante par A. Selberg et mise en place de façon très générale par P. Sarnak (**[Sa]**). Tout repose sur les propriétés analytiques de la série de Dirichlet suivante (tout au long de cette partie, h est un entier relatif non-nul) :

$$D_h(g,a_1,a_2;s) := \sum_{a_1m-a_2n=h} \lambda_g(m)\lambda_g(n)\left(\frac{\sqrt{a_1a_2mn}}{a_1m+a_2n}\right)^{k_g-1}(a_1m+a_2n)^{-s}$$

qui est liée à notre problème par la formule d'inversion de Mellin (proposition C.4.1) :

$$S_h(g,a_1,a_2) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(2)} D_h(g,a_1,a_2;s)\widehat{H}(h,s)\,\mathrm{d}s \tag{4.2.4}$$

avec :

$$\widehat{H}(h,s) = \int_{\sup(|h|,h+Na_2)}^{h+4Na_2} H\left(\frac{u+h}{2},\frac{u-h}{2}\right)\left(4+\frac{2h}{u-h}-\frac{2h}{u+h}\right)^{\frac{k_g-1}{2}} u^s\frac{\mathrm{d}u}{u}. \tag{4.2.5}$$

On obtient un controle de $\widehat{H}(h,s)$ par intégration par parties et qui permettra de rendre convergente la s-intégrale dans (4.2.4) :

Lemme 4.2.2. *Si H vérifie les conditions* (4.2.1) *et* (4.2.2) *alors :*

$$\widehat{H}(h,s) \ll_\eta \left(\frac{\sup(Z,Y)}{\inf(Z,Y)}\right)^{\frac{k_g-1}{2}+\eta-1}\sup(Z,Y)^{\Re(s)}\frac{P^\eta}{|s|^\eta}$$

pour tout entier naturel η.

Remarque 4.2.1. Si $|h| \gg \sup(Z,Y)$ alors $\widehat{H}(h,s)=0$.

Preuve du lemme 4.2.2. Selon les propriétés du support de H et par η integrations par parties, on obtient :

$$\widehat{H}(h,s) = \int_{\pm h+\mathcal{O}(\inf(Z,Y))}^{\pm h+\mathcal{O}(\inf(Z,Y))} \frac{u^{s+\eta-1}}{s(s+1)\cdots(s+\eta-1)}f^{(\eta)}(u)\mathrm{d}u$$

avec :

$$\begin{aligned} f(u) &= H\left(\frac{u+h}{2},\frac{u-h}{2}\right)w(u),\\ w(u) &= g(u)^{\frac{k_g-1}{2}},\\ g(u) &= 4+\frac{2h}{u-h}-\frac{2h}{u+h}. \end{aligned}$$

On montre par récurrence sur j que :

$$w^{(j)}(u) = \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j,m_j} c(\alpha_i,m_j)\left(g^{(1)}(u)\right)^{\alpha_1}\cdots\left(g^{(j)}(u)\right)^{\alpha_j}g(u)^{\frac{k_g-1}{2}-m_j}$$

où les $c(\alpha_i, m_j)$ sont des constantes absolues et les α_i et m_j sont des entiers naturels satisfaisant :

$$\begin{aligned} j &\geq m_j, \\ 2\alpha_1 + \cdots + (j+1)\alpha_j - m_j &= j, \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_j - m_j &\leq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$w^{(j)}(u) \ll \frac{\sup(Z,Y)^{\frac{k_g-1}{2}}}{\inf(Z,Y)^{\frac{k_g-1}{2}+j}}.$$

L'estimation précédente et le lemme 4.1.5 assurent alors que :

$$f^{(\eta)}(u) \ll_\eta \left(\frac{\sup(Z,Y)}{\inf(Z,Y)}\right)^{\frac{k_g-1}{2}} \frac{1}{\inf(Z,Y)^\eta} P^\eta$$

ce qui est suffisant pour la preuve

■

On définit deux formes de Maass de niveau Da_1a_2, de poids 0 et de caractère trivial par :

$$V(z) := (a_1 y)^{\frac{k_g}{2}} g(a_1 z)(a_2 y)^{\frac{k_g}{2}} \overline{g(a_2 z)}$$

et par :

$$U_h(z,s) := \sum_{\gamma \in (\Gamma_0(Da_1a_2))_\infty \backslash \Gamma_0(Da_1a_2)} (\Im(\gamma.z))^s \, e(-h\Re(\gamma.z)).$$

On remarque alors que :

$$D_h(g,a_1,a_2;s) = \frac{(2\pi)^{s+k_g-1}}{\Gamma(s+k_g-1)\sqrt{a_1a_2}} (U_h(.,s), \overline{V}).$$

Pour toute base de Hecke orthonormale de $\mathcal{C}_0(Da_1a_2)$ notée $\beta := (u_j)_{j\geq 1}$ vérifiant :

$$\forall j \geq 1, \quad (\Delta_0 + \lambda_j)\ u_j = 0$$

avec $\lambda_j := \frac{1}{4} + r_j^2$ à laquelle on rajoutte la fonction constante u_0, l'égalité de Parseval (théorème A.3.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} (4.2.6) \quad D_h(g,a_1,a_2;s) = {} & \frac{(2\pi)^{s+k_g-1}}{\Gamma(s+k_g-1)\sqrt{a_1a_2}} \\ & \left\{ \sum_{j\geq 1} \frac{\sqrt{|h|}\,\overline{\rho_j(-h)}}{2\pi^{s-\frac{1}{2}}|h|^{s-\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}+ir_j}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}-ir_j}{2}\right) (u_j, \overline{V}) \right. \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{\kappa \in \mathrm{Cusp}(\Gamma_0(Da_1a_2))} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{|h|}\,\overline{\rho_{\kappa,r}(-h)}}{2\pi^{s-\frac{1}{2}}|h|^{s-\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}+ir}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}-ir}{2}\right) \\ & \left. \left(E_\kappa\left(.,\frac{1}{2}+ir\right), \overline{V}\right) \mathrm{d}r \right\} \end{aligned}$$

car :

$$\begin{aligned}(U_h(.,s),u_0) &= 0,\\ (U_h(.,s),u_j) &= \frac{\sqrt{|h|}\,\overline{\rho_j(-h)}}{2\pi^{s-\frac{1}{2}}|h|^{s-\frac{1}{2}}}\Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}+ir_j}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}-ir_j}{2}\right),\\ \left(U_h(.,s),E_\kappa\left(.,\frac{1}{2}+ir\right)\right) &= \frac{\sqrt{|h|}\,\overline{\rho_{\kappa,r}(-h)}}{2\pi^{s-\frac{1}{2}}|h|^{s-\frac{1}{2}}}\Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}+ir}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}-ir}{2}\right)\end{aligned}$$

pour tout entier naturel non-nul j, tout nombre réel r et toute pointe κ de $\Gamma_0(Da_1a_2)$. On se rend compte que l'hypothèse $H_2(\theta)$ est très naturelle car elle permet de contrôler efficacement la taille de la partie discrète du membre de droite. En fait, en supposant que θ est admissible, il est possible de choisir une base β formée de vecteurs propres de l'opérateur réflexion :

$$\forall j\geq 1,\quad X\,u_j=\varepsilon_j\,u_j.$$

et dont les coefficients de Fourier de ses éléments vérifient (confer **[IwLuSa]**) :

$$\forall h\in\mathbb{Z}^*,\quad \rho_j(h)\ll_\varepsilon \frac{(|h|a_1a_2(1+|r_j|))^\varepsilon}{\sqrt{a_1a_2}}\cosh\left(\frac{\pi r_j}{2}\right)|h|^{\theta-\frac{1}{2}} \tag{4.2.7}$$

pour tout $j\geq 1$ et pour tout $\varepsilon>0$. P. Sarnak (**[Sa]**) a alors prouvé que :

$$\forall j\geq 1,\quad \left(u_j,\overline{V}\right)\ll_g \sqrt{a_1a_2}\,(1+|r_j|)^{k_g+1}\exp\left(\frac{-\pi|r_j|}{2}\right) \tag{4.2.8}$$

Ainsi, la croissance exponentielle en j de $\rho_j(h)$ est compensée exactement par la décroissance exponentielle en j de $\left(u_j,\overline{V}\right)$. Ce point crucial a été obtenu par P. Sarnak par des arguments très généraux qui ne tiennent pas compte de la nature profondémment arithmétique de la surface de Riemann compacte $X_0(Da_1a_2)$ et qui restent valides pour des surfaces de Riemann compactes beaucoup plus générales. L'estimation (4.2.8) combinée avec la loi de Weyl pour le spectre du Laplacien Δ_0 sur $X_0(Da_1a_2)$ donnée en (A.3.4) valident l'estimation en moyenne suivante :

$$\sum_{|r_j|\leq R}\left|\left(u_j,\overline{V}\right)\right|^2\exp\left(\pi|r_j|\right)\ll_{\varepsilon,g} R^{2k_g+4+\varepsilon}(a_1a_2)^{2+\varepsilon} \tag{4.2.9}$$

pour tout nombre réel $R\geq 1$. On dispose aussi de la version continue de (4.2.8) :

$$\forall r\in\mathbb{R},\quad \left(E_\kappa\left(.,\frac{1}{2}+ir\right),\overline{V}\right)\ll_g \sqrt{a_1a_2}\,(1+|r|)^{k_g+1}\exp\left(\frac{-\pi|r|}{2}\right) \tag{4.2.10}$$

pour toute pointe κ de $\Gamma_0(Da_1a_2)$ d'où :

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{\kappa\in\mathrm{Cusp}(\Gamma_0(Da_1a_2))}\int_{-R}^{R}\left|\left(E_\kappa\left(.,\frac{1}{2}+ir\right),\overline{V}\right)\right|^2\exp\left(\pi|r|\right)\ll_{\varepsilon,g} R^{2k_g+4+\varepsilon}(a_1a_2)^{2+\varepsilon} \tag{4.2.11}$$

pour tout nombre réel $R\geq 1$.

Résultat générique via la méthode spectrale

En appliquant la formule de Stirling, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (4.2.9), (4.2.11) et (4.2.7) dans la formule de Parseval donnée en (4.2.6), P. Sarnak (**[Sa]**) a prouvé que :

Théorème 4.2.3 (P. Sarnak (2001)). *$D_h(g, a_1, a_2; s)$ admet un prolongement analytique au demi-plan $\left\{\Re(s) \geq \frac{1}{2} + \theta + \varepsilon\right\}$ pour tout $\varepsilon > 0$ dès que θ est admissible et y vérifie :*

$$D_h(g, a_1, a_2; s) \ll_\varepsilon \sqrt{a_1 a_2}(1 + |\Im(s)|)^3 |h|^{\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon-\Re(s)}.$$

Tous les outils nécessaires sont à notre disposition pour pouvoir prouver le théorème suivant :

Théorème 4.2.4. *Soient h un entier relatif non-nul et r un entier naturel non-nul. Si H vérifie les conditions* (4.2.1) *et* (4.2.2) *alors :*

$$S_h(H, g; a_1, a_2) \ll_{\varepsilon,g} \left(\frac{\sup(Z, Y)}{\inf(Z, Y)}\right)^{\frac{k_g-1}{2}+3+\varepsilon} \sup(Z, Y)^{\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon} \sqrt{a_1 a_2} P^{4+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi,

$$\Sigma_r(H, g; a_1, a_2) \ll_{\varepsilon,g} \left(\frac{\sup(Z, Y)}{\inf(Z, Y)}\right)^{\frac{k_g-1}{2}+3+\varepsilon} \frac{\sup(Z, Y)^{\frac{3}{2}+\theta+\varepsilon}}{r} \sqrt{a_1 a_2} P^{4+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Preuve du théorème 4.2.4. Selon le théorème 4.2.3, il est possible de bouger le contour d'intégration de (4.2.4) jusqu'à $\left(\frac{1}{2} + \theta + \varepsilon\right)$ sous l'hypothèse θ admissible ce qui entraîne que :

$$S_h(H, g; a_1, a_2) \ll_{\varepsilon,g,\eta} \left(\frac{\sup(Z, Y)}{\inf(Z, Y)}\right)^{\frac{k_g-1}{2}+\eta-1} \sup(Z, Y)^{\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon} \sqrt{a_1 a_2} P^{\eta} \int_{\left(\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon\right)} (1 + |\Im(s)|)^3 \frac{\mathrm{d}s}{|s|^{\eta}}$$

grâce au lemme 4.2.5. On choisit alors $\eta := 3 + 1 + \varepsilon$ pour rendre convergente la s-intégrale ■

4.2.4 La méthode spectrale en moyenne

Quelques éclaircissements

Au lieu de résoudre le problème de convolution avec décalage additif pour chaque entier relatif $h \neq 0$ puis réinjecter l'estimation non triviale obtenue pour obtenir une borne de $\Sigma_r(H, g; a_1, a_2)$, on trouve directement une borne de cette dernière quantité. C'est P. Michel qui, semble-t-il, a eu l'idée de «moyenner» un problème de convolution avec décalage additif sachant que son but final était de résoudre le problème de sous-convexité par rapport au niveau pour les fonctions L de Rankin-Selberg de caractères non-triviaux (confer **[Mi5]**) de

conducteur aussi grand que possible. Signalons que ce problème de convolution en moyenne se ramenait lui-même à un problème de sous-convexité pour les fonctions L de Maass de poids 0 et de caractère non-trivial et pour les fonctions L de Dirichlet. Ainsi, un phénomène se confirme : un problème de sous-convexité pour des fonctions L de degré 4 s'est ramené à un problème de sous-convexité pour des fonctions L de degré plus petit (à savoir 1 et 2). Pour revenir à nos préoccupations, on peut ramener notre problème de convolution avec décalage addittif au problème de sous-convexité pour les fonctions L de Maass de poids 0 et de caractère trivial. Malheureusement,

- d'une part, ce problème de sous-convexité n'est toujours pas résolu même si on semble disposer de tous les outils théoriques pour s'y attaquer,
- d'autre part, même une borne de sous-convexité (confer chapitre 6) pour les fonctions L de Maass de poids 0 et de caractère trivial ne permet pas d'obtenir une bonne longueur de ramollisseur effective.

On pallie ces difficultés en remplaçant le problème de sous-convexité pour les fonctions L de Maass de poids 0 et de caractère trivial par des inégalités de grand crible pour les coefficients de Fourier des formes de Maass de poids 0 et de caractère trivial. Il se trouve que la longueur de ramollisseur effective obtenue par ces inégalités de grand crible est la même que celle que l'on obtiendrait en supposant l'hypothèse de Lindelöf généralisée pour toutes les fonctions L de formes de Maass de poids 0 et de caractère trivial. De toute façon, le problème de sous-convexité et les inégalités de grand crible traduisent tous les deux des oscillations des coefficients de Fourier de ces formes de Maass. L'idée qui consiste à moyenner un problème de convolution avec décalage additif a de nouveau fait ses preuves dans un travail récent de G. Harcos et P. Michel (**[HaMi]**) qui ont résolu le problème de sous-convexité par rapport au niveau pour les fonctions L de Rankin-Selberg de caractères non-triviaux de «grand» conducteur. Il ne fait aucun doute que cette idée aura d'autres applications.

On décompose $\Sigma_r(H, g; a_1, a_2)$ en :

$$\Sigma_r(h, g; a_1, a_2) := \Sigma_r^{\mathrm{disc}}(H, g; a_1, a_2) + \Sigma_r^{\mathrm{cont}}(H, g; a_1, a_2)$$

où $\Sigma_r^{\mathrm{disc}}(H, g; a_1, a_2)$ est la contribution du spectre discret et $\Sigma_r^{\mathrm{cont}}(H, g; a_1, a_2)$ la contribution du spectre continu. La fin de ce chapitre est principalement dédiée à l'estimation successive de ces deux contributions.

Contribution du spectre discret

La contribution du spectre discret vaut :

$$\Sigma_r^{\mathrm{disc}}(H,g;a_1,a_2) := \frac{1}{2i\pi\sqrt{a_1a_2}}\int_{\left(\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon\right)} 2^{s+k_g-2}\pi^{k_g-\frac{1}{2}} \sum_{j\geq 1}\frac{\Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}+ir_j}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}-ir_j}{2}\right)}{\Gamma(s+k_g-1)}\left(u_j,\overline{V}\right)\sum_{h\neq 0}\frac{\sqrt{r|h|}\,\overline{\varepsilon_j}\,\overline{\rho_j(rh)}}{|rh|^{s-\frac{1}{2}}}\widehat{H}(rh,s)\mathrm{d}s. \tag{4.2.12}$$

On peut décomposer r sous la forme :

$$r = q^{\alpha}\tilde{r} \tag{4.2.13}$$

où $\tilde{r}$ est premier avec q et α est un entier naturel. Sachant que q est premier avec Da_1a_2, la propriété de multiplicativité (A.3.9) s'écrit :

$$\sqrt{r|h|}\rho_j(rh) = \sqrt{\tilde{r}|h|}\rho_j(\tilde{r}h)\lambda_j(q^{\alpha}) - \delta_{q|r}\delta_{q|h}\sqrt{\tilde{r}\frac{h}{q}}\rho_j\left(\tilde{r}\frac{h}{q}\right) \tag{4.2.14}$$

pour tout entier relatif non-nul h. Nous allons prouver :

Théorème 4.2.5. *Soient h un entier relatif non-nul et r un entier naturel non-nul décomposé comme en* (4.2.13)*. Si θ est admissible et H vérifie les conditions* (4.2.1) *et* (4.2.2) *alors :*

$$\Sigma_r^{disc}(H,g;a_1,a_2) \ll_{\varepsilon,g} q^{\varepsilon}\left(\frac{\sup(Z,Y)}{\inf(Z,Y)}\right)^{\frac{k_g-1}{2}+3+\varepsilon}\frac{(a_1a_2)^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{r}^{\frac{1}{2}+\theta}}P^{4+\varepsilon}\sup(Z,Y)^{1+\theta+\varepsilon} \left(\sup\left(1,\frac{\sup(Z,Y)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{q^{\frac{\alpha}{2}+\varepsilon}\sqrt{a_1a_2}}\right)+\frac{\delta_{q|r}}{q^{\frac{1}{2}+\theta(\alpha+1)}}\sup\left(1,\frac{\sup(Z,Y)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{q^{\frac{\alpha+1}{2}+\varepsilon}\sqrt{a_1a_2}}\right)\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Preuve du théorème 4.2.5. On donne la preuve seulement pour la contribution provenant du premier terme de (4.2.14). Grâce à la formule de Stirling (proposition C.1.1) et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz , la contribution du sprectre discret est bornée par :

$$\ll \frac{1}{\sqrt{a_1a_2}}\int_{\left(\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon\right)}(1+|\Im(s)|)^{-k_g} \left(\sum_{|r_j|\leq 1+|\Im(s)|}\left|\left(u_j,\overline{V}\right)\right|^2\cosh(\pi r_j)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|r_j|\leq 1+|\Im(s)|}\frac{1}{\cosh(\pi r_j)}\left|\sum_{|\tilde{r}h|\ll\frac{\sup(Z,Y)}{q^{\alpha}}}\sqrt{\tilde{r}|h|}\,\overline{\rho_j(\tilde{r}h)}\frac{\overline{\varepsilon_j}\,\lambda_j(q^{\alpha})\widehat{H}(q^{\alpha}\tilde{r}h,s)}{(q^{\alpha}\tilde{r}|h|)^{s-\frac{1}{2}}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s.$$

Selon (4.2.9), la contribution de la première racine carrée :

$$\ll_g (a_1a_2)\left(1+|\Im(s)|\right)^{2+k_g}.$$

La deuxième racine carrée vaut :

$$\left(\sum_{|r_j|\leq 1+|\Im(s)|}\frac{1}{\cosh(\pi r_j)}\left|\sum_{|n|\ll\frac{\sup(Z,Y)}{q^\alpha}}a_n n^{\frac{1}{2}}\overline{\rho_j(n)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

où l'on a posé :

$$a_n:=\begin{cases}0 & \text{si} \quad \tilde{r}\nmid n,\\ \frac{1}{(q^\alpha\tilde{r}|h|)^{s-\frac{1}{2}}}\overline{\varepsilon_j}\,\lambda_j(q^\alpha)\widehat{H}\left(q^\alpha\tilde{r}h,s\right) & \text{si} \quad n=\tilde{r}h.\end{cases}$$

L'inégalité du grand crible pour les coefficients de Fourier des formes de Maass de poids 0 (confer (A.3.5)) assure que la deuxième racine carrée est bornée par :

$$\ll_\varepsilon \left((1+|\Im(s)|)^2+\frac{\sup(Z,Y)^{1+\varepsilon}}{q^{\alpha+\varepsilon}a_1a_2}\right)^{\frac{1}{2}}||a||_2.$$

Le lemme 4.2.2 entraîne que ce terme est borné par :

$$\ll_{g,\varepsilon,\eta} q^\varepsilon\left(\frac{\sup(Z,Y)}{\inf(Z,Y)}\right)^{\frac{k_g-1}{2}+\eta-1}\frac{\sup(Z,Y)^{1+\theta+\varepsilon}}{q^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{r}^{\frac{1}{2}+\theta}}\sup\left(1,\frac{\sup(Z,Y)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{q^{\frac{\alpha}{2}+\varepsilon}\sqrt{a_1a_2}}\right)$$
$$P^\eta\frac{1+|\Im(s)|}{|s|^\eta}$$

et on conclut en choisissant $\eta=3+1+\varepsilon$ pour rendre convergente la s-integrale

■

Contribution du spectre continu

La contribution du spectre continu est :

$$\Sigma_r^{\mathrm{cont}}(H,g;a_1,a_2):=\frac{1}{8i\pi^2\sqrt{a_1a_2}}\int_{\left(\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon\right)}2^{s+k_g-2}\pi^{k_g-\frac{1}{2}}$$
$$\int_{t=-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}+it}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}-it}{2}\right)}{\Gamma(s+k_g-1)}\sum_{\kappa\in\mathrm{Cusp}(\Gamma_0(Da_1a_2))}\left(E_\kappa\left(.,\frac{1}{2}+it\right),\overline{V}\right)$$
$$\sum_{h\neq 0}\sqrt{r|h|}\,\overline{\rho_\kappa(rh,t)}\frac{\widehat{H}(rh,s)}{(r|h|)^{s-\frac{1}{2}}}\mathrm{d}t\mathrm{d}s. \tag{4.2.15}$$

Nous allons prouver :

Théorème 4.2.6. *Soient h un entier relatif non-nul et r un entier naturel non-nul décomposé comme en* (4.2.13). *Si θ est admissible et H vérifie les conditions* (4.2.1) *et* (4.2.2) *alors :*

$$\Sigma_r^{cont}(H,g;a_1,a_2) \ll_{\varepsilon,g} q^{\varepsilon}\left(\frac{\sup(Z,Y)}{\inf(Z,Y)}\right)^{\frac{k_g-1}{2}+3+\varepsilon}\frac{(a_1a_2)^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{r}^{\frac{1}{2}+\theta}}P^{4+\varepsilon}\sup(Z,Y)^{1+\theta+\varepsilon}$$
$$\sup\left(1,\frac{\sup(Z,Y)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{q^{\frac{\alpha}{2}+\varepsilon}\sqrt{a_1a_2}}\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Nous aurons besoin du lemme suivant à propos des coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein qui jouera le même rôle que celui joué par la propriété de multiplicativité des coefficients de Fourier des formes de Maass dans le cas du spectre discret :

Lemme 4.2.7. *Soient h un entier relatif non-nul, r un entier naturel décomposé comme en* (4.2.13) *et $\kappa = \frac{u}{w}$ une pointe de $\Gamma_0(Da_1a_2)$ avec :*

$$\begin{aligned} w &\mid Da_1a_2,\\ u\wedge w &= 1,\\ 1\leq u &\leq w\wedge\left(\frac{Da_1a_2}{w}\right)\end{aligned}$$

et a un entier premier avec $\left(w\wedge\left(\frac{Da_1a_2}{w}\right)\right)$. On note $\phi_a(\kappa)$ la pointe $\frac{ua}{w}$. Alors :

1. *L'application ϕ_a est bijective.*
2. *Si $q^k \,||\, h$ et $\overline{v}$ désigne l'inverse de v modulo $\left(w\wedge\left(\frac{Da_1a_2}{w}\right)\right)$ alors :*

$$\rho_\kappa(rh,t) = (q^{\alpha+k})^{\frac{-1}{2}}\sum_{v|q^{\alpha+k}}\left(\frac{q^{\alpha+k}}{v^2}\right)^{it}\rho_{\phi_{q^{\alpha+k}\overline{v}^2}(\kappa)}\left(\tilde{r}\frac{h}{q^k},t\right).$$

Preuve du lemme 4.2.7. Nous prouvons seulement la deuxième assertion. Selon (A.3.2), on a :

$$\rho_\kappa(rh,t) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}+it}\,|rh|^{it-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)}\left(\frac{w\wedge\left(\frac{Da_1a_2}{w}\right)}{wDa_1a_2}\right)^{\frac{1}{2}+it}\frac{1}{\varphi\left(w\wedge\left(\frac{Da_1a_2}{w}\right)\right)}$$
$$\sum_{\psi\left(w\wedge\left(\frac{Da_1a_2}{w}\right)\right)}\delta_{w'(\psi)|rh}w'(\psi)\psi(w'(\psi))G_\psi(1;w^*(\psi))\frac{\overline{\psi}(u)\overline{\psi}\left(\frac{rh}{w'(\psi)}\right)}{L^{(Da_1a_2)}(\psi^2,1+2it)}$$
$$\sum_{\substack{\gamma|(Da_1a_2)^\infty\\ \gamma\wedge\frac{Da_1a_2}{w}=1}}\frac{\psi^2(\gamma)}{\gamma^{1+2it}}r(rh;\gamma w''(\psi))\sum_{\substack{e|rh\\ e\wedge Da_1a_2=1}}\frac{\psi^2(e)}{e^{2it}}$$

où pour tout caractère de Dirichlet ψ de module $w \wedge \left(\frac{Da_1a_2}{w}\right)$ on note $w^*(\psi)$ son conducteur et l'on écrit $w = w^*(\psi)w'(\psi)w''(\psi)$ avec $w'(\psi) \mid w^*(\psi)$ et $w''(\psi) \wedge w^*(\psi) = 1$. Comme $q^{\alpha+k}$ est premier avec $\tilde{r}hq^{-k}$, on remarque que :

$$\begin{aligned}
\delta_{w'(\psi)|rh} &= \delta_{w'(\psi)|\tilde{r}hq^{-k}}, \\
r(rh;\gamma w''(\psi)) &= r(\tilde{r}hq^{-k};\gamma w''(\psi)), \\
\sum_{\substack{e|rh \\ e\wedge Da_1a_2=1}} \frac{\psi^2(e)}{e^{2it}} &= \sum_{v|q^{\alpha+k}} \frac{\psi^2(v)}{v^{2it}} \sum_{\substack{e|\tilde{r}hq^{-k} \\ e\wedge Da_1a_2=1}} \frac{\psi^2(e)}{e^{2it}}
\end{aligned}$$

■

Preuve du théorème 4.2.6. La formule de Stirling (proposition C.1.1) et le lemme précédent assurent que :

$$\Sigma_r^{\mathrm{cont}}(H,g;a_1,a_2) \ll \frac{1}{\sqrt{a_1a_2}q^{\alpha\theta}} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{q^{k\theta}} \sum_{v|q^{\alpha+k}} \int_{\left(\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon\right)} (1+|\Im(s)|)^{-k_g} \sum_{\kappa\in \mathrm{Cusp}(\Gamma_0(Da_1a_2))} \int_{t=-(1+|\Im(s)|)}^{(1+|\Im(s)|} f_\kappa(t,s)g_\kappa(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

avec :

$$\begin{aligned}
f_\kappa(t,s) &= \left|\left(E_\kappa\left(.,\frac{1}{2}+it\right),\overline{V}\right)\right| \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{-1}, \\
g_\kappa(t,s) &= \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| \left|\sum_{|\tilde{r}h|\ll \frac{\sup(Z,Y)}{q^{\alpha+k}}} \sqrt{\tilde{r}|h|}\,\overline{\rho_{\phi_{q^{\alpha+k}\frac{}{v^2}}(\kappa)}(\tilde{r}h,t)} \frac{\widehat{H}(q^{\alpha+k}\tilde{r}h,s)}{(\tilde{r}|h|)^{s-\frac{1}{2}}}\right|.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux reprises, on remarque que :

$$\Sigma_{c.f}^{\mathrm{cont}}(a_1,a_2) \ll \frac{1}{\sqrt{a_1a_2}q^{\alpha\theta}} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{q^{k\theta}} \sum_{v|q^{\alpha+k}} \int_{\left(\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon\right)} (1+|\Im(s)|)^{-k_g} \left(\sum_{\kappa\in \mathrm{Cusp}(\Gamma_0(Da_1a_2))} \int_{t=0}^{(1+|\Im(s)|)} f_{\kappa,}(t,s)^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\kappa\in \mathrm{Cusp}(\Gamma_0(Da_1a_2))} \int_{t=0}^{(1+|\Im(s)|)} g_\kappa(t,s)^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}s.$$

Selon (4.2.11), la contribution de la première racine carrée est :

$$\ll a_1a_2\left(1+|\Im(s)|\right)^{2+k_g}.$$

Comme l'application $\phi_{q^{\alpha+k}\overline{v}^2}$ réalise une bijection de l'ensemble des pointes de $\Gamma_0(Da_1a_2)$, on constate que la deuxième racine carrée vaut :

$$\left(\sum_{\kappa\in \mathrm{Cusp}(\Gamma_0(Da_1a_2))}\int_{t=0}^{(1+|\Im(s)|)}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\left|\sum_{|\tilde{r}h|\ll\frac{\sup(Z,Y)}{q^{\alpha+k}}}\sqrt{\tilde{r}|h|}\overline{\rho_\kappa(\tilde{r}h,t)}\frac{\widehat{H}(q^{\alpha+k}\tilde{r}h,s)}{(\tilde{r}|h|)^{s-\frac{1}{2}}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui vaut :

$$\left(\sum_{\kappa\in \mathrm{Cusp}(\Gamma_0(Da_1a_2))}\int_{t=0}^{(1+|\Im(s)|)}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\left|\sum_{|n|\ll\frac{\sup(Z,Y)}{q^{\alpha+k}}}|n|^{\frac{1}{2}}a_n\overline{\rho_\kappa(n,t)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

où :

$$a_n:=\begin{cases}0 & \text{si}\quad q\mid n\quad\text{ou}\quad \tilde{r}\nmid n,\\ \frac{1}{(\tilde{r}|h|)^{s-\frac{1}{2}}}\widehat{H}(q^{\alpha+k}\tilde{r}h,s) & \text{si}\quad n=\tilde{r}h\quad\text{avec}\quad q\nmid h.\end{cases}$$

L'inégalité du grand crible pour les coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein de poids 0 (confer (A.3.3)) assure que la contribution de cette deuxième racine carrée est :

$$\ll_\varepsilon\left((1+|\Im(s)|)^2+\frac{\sup(Z,Y)^{1+\varepsilon}}{q^{\alpha+k+\varepsilon}(a_1a_2)}\right)^{\frac{1}{2}}||a||_2.$$

L'estimation (4.2.2) de la fonction test achève la preuve en prenant $\eta=4+\varepsilon$ pour rendre convergente la s-intégrale.

■

4.2.5 Le raffinement de B. Kroetz et R.J. Stanton

Les preuves des théorèmes 4.2.5 et 4.2.6 utilisent l'estimation en moyenne des produits triples suivante :

(4.2.16)

$$\sum_{|r_j|\le R}\left|\left(u_j,\overline{V}\right)\right|^2\exp\left(\pi|r_j|\right)+\frac{1}{4\pi}\sum_{\kappa\in \mathrm{Cusp}(\Gamma_0(Da_1a_2))}\int_{-R}^{R}\left|\left(E_\kappa\left(.,\frac{1}{2}+ir\right),\overline{V}\right)\right|^2\exp\left(\pi|r|\right)\mathrm{d}r$$
$$\ll_{g,\varepsilon}(a_1a_2R)^\varepsilon(a_1a_2)^2R^{2k_g+x}$$

où $x=4$ ce qui nous oblige à choisir $\eta=\frac{x}{2}+1+1+\varepsilon=4+\varepsilon$ pour rendre convergente la s-intégrale dans (4.2.12) et (4.2.15). Malheureusement, il apparaît alors un facteur $P^\eta=P^{4+\varepsilon}$ qui peut être grand. B. Kroetz et R.J. Stanton (**[KrSt]**) ont prouvé l'amélioration suivante :

(4.2.17)

$$\sum_{|r_j|\le R}\left|\left(u_j,\overline{V}\right)\right|^2\exp\left(\pi|r_j|\right)+\frac{1}{4\pi}\sum_{\kappa\in \mathrm{Cusp}(\Gamma_0(Da_1a_2))}\int_{-R}^{R}\left|\left(E_\kappa\left(.,\frac{1}{2}+ir\right),\overline{V}\right)\right|^2\exp\left(\pi|r|\right)\mathrm{d}r$$
$$\ll_{g,\varepsilon}(a_1a_2R)^\varepsilon(a_1a_2)^2R^{2k_g}$$

ce qui nous permet de prendre $\eta = 1+1+\varepsilon = 2+\varepsilon$. Il n'apparaît alors qu'un facteur $P^{2+\varepsilon}$. Signalons que A. Good (**[Go]**) a prouvé l'optimalité en le paramètre R de (4.2.17) et que E. Kowalski (**[Ko2]**) a déterminé la dépendance en les paramètres de g de (4.2.17). Ce rafinement de B. Kroetz et R.J. Stanton nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.2.8. *Soient h un entier relatif non-nul et r un entier naturel non-nul décomposé comme en* (4.2.13)*. Si θ est admissible et H vérifie les conditions* (4.2.1) *et* (4.2.2) *alors :*

$$\Sigma_r(H,g;a_1,a_2) \ll_{\varepsilon,g} q^{\varepsilon}\left(\frac{\sup(Z,Y)}{\inf(Z,Y)}\right)^{\frac{kq-1}{2}+1+\varepsilon}\frac{(a_1a_2)^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{r}^{\frac{1}{2}+\theta}}P^{2+\varepsilon}\sup(Z,Y)^{1+\theta+\varepsilon}$$
$$\left(\sup\left(1,\frac{\sup(Z,Y)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{q^{\frac{\alpha}{2}+\varepsilon}\sqrt{a_1a_2}}\right)+\frac{\delta_{q|r}}{q^{\frac{1}{2}+\theta(\alpha+1)}}\sup\left(1,\frac{\sup(Z,Y)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{q^{\frac{\alpha+1}{2}+\varepsilon}\sqrt{a_1a_2}}\right)\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

4.2.6 Spectre discret versus spectre continu

On remarque que la contribution du spectre continu dans les méthodes spectrales en moyenne précédentes est la même que celle du spectre discret. On résume dans le tableau 4.1 les analogies entre ces deux contributions.

Spectre discret	Spectre continu
Loi de Weyl pour le spectre de $X_0(Da_1a_2)$	Nombre de pointes de $\Gamma_0(Da_1a_2)$
Multiplicativité des coefficients de Fourier des formes de Maass de poids 0 et de caractère trivial (A.3.9)	Lemme 4.2.7
Inégalité du grand crible pour les coefficients de Fourier des formes de Maass de poids 0 et de caractère trivial (A.3.5)	Inégalité du grand crible pour les coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein de poids 0 et de caractère trivial (A.3.3)

TAB. 4.1 – Spectre discret versus spectre continu

4.3 Améliorations de la borne de Errtwist$(q,l;\mu)$ donnée en (3.3.3)

La borne donnée en (3.3.3) est la borne obtenue dans **[KoMiVa]** en résolvant le problème de convolution avec décalage additif $T_h^-(c)$ par la méthode du δ-symbole c'est-à-dire en utilisant le théorème 4.2.1. Nous allons donner les améliorations successives que l'on obtient en résolvant ce problème de convolution avec décalage additif par la méthode spectrale, puis

la méthode spectrale en moyenne et enfin le rafinement de B. Krotz et R.J. Stanton. On s'intéresse donc à :

$$\mathrm{Errtwist}''(q,l;\mu) := \frac{2\pi}{i^k} \sum_{M,N \ll_\varepsilon (qD)^{1+\varepsilon}} \sum_{\tilde{e}e=l} \frac{\varepsilon_q(\tilde{e})}{\sqrt{\tilde{e}}} \sum_{ab=\tilde{e}} \frac{\mu(a)\varepsilon_D(a)}{\sqrt{a}} \lambda_g(b) T^-_{M,N}(1)$$

où on rappelle que :

$$T^-_{M,N}(1) = \frac{\eta_g(D_2)}{\sqrt{D_2}} \sum_{\widehat{q}\in\{1,q\}} \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{N}^{*2} \\ q\|c \\ d|\frac{c}{q}}} \frac{d\widehat{q}}{c^2} \mu\left(\frac{c}{dq}\right) \sum_{\substack{Z\geq 1 \\ Z=2^a \\ a\in\mathbb{N}^*}} \Sigma_{\widehat{q}d}\left(F_Z, g; 1, aeD_2\right). \tag{4.3.1}$$

Le théorème suivant est un énoncé unificateur des théorèmes 4.2.4, 4.2.5, 4.2.6 et 4.2.8 en prenant comme fonction test la fonction F_Z où $Z \geq 1$:

Théorème 4.3.1. *Soient h un entier relatif non-nul, c un entier naturel strictement divisible par q, d un diviseur de $\frac{c}{q}$, $\widehat{q}$ dans $\{1,q\}$ et $Z \geq 1$. Si θ est admissible alors :*

$$\Sigma_{\widehat{q}d}(F_Z, g; 1, aeD_2) \ll_{\varepsilon,g,A_1,A_3,\eta} q^\varepsilon \left(1+|t|\right)^B \sqrt{\frac{M}{N}} (ae)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}\right)^{k-1} \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\left(\frac{\sqrt{\frac{Z}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{Z}{Z_1}}}\right)^{k_g-1} \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{Z}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left(1+\frac{Z}{\mathbf{Z}}\right)^{A_1} \left(1+\frac{Y}{\left(\sqrt{Z_1}+\sqrt{Z}\right)^2}\right)^{A_3}}$$
$$\left(\frac{\sup(Z,Y)}{\inf(Z,Y)}\right)^{\frac{k_g-1}{2}+\eta-1+\varepsilon} P^{\eta+\varepsilon} \frac{\sup(Z,Y)^{\frac{1}{2}+\theta+x_1+\varepsilon}}{\widehat{q}^{x_2} d^{x_3}} \left(\sup\left(1, \frac{\sup(Z,Y)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{\widehat{q}^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\sqrt{ae}}\right)\right)^{x_4}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ où :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \eta \end{pmatrix} := \left\{ \begin{array}{ll} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \textit{par la méthode spectrale,} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\theta & 1 & 4 \end{pmatrix} & \textit{par la méthode spectrale en moyenne,} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\theta & 1 & 2 \end{pmatrix} & \textit{par B. Kroetz et R.J. Stanton.} \end{array} \right.$$

Pour tout nombre réel x et tout élément y de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, posons :

$$\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(x,y) := \sum_{\substack{x\leq Z\leq y \\ Z=2^a \\ a\in\mathbb{N}^*}} \Sigma_{\widehat{q}d}\left(F_Z, g; 1, aeD_2\right).$$

Soit α un nombre réel fixé dans $]0,1[$. On décompose la Z-somme apparaissant en (4.3.1) de la façon suivante :

$$\sum_{\substack{Z\geq 1 \\ Z=2^a \\ a\in\mathbb{N}^*}} \Sigma_{\widehat{q}d}\left(F_Z, g; 1, aeD_2\right) = \mathcal{C}_{\widehat{q}d}(1, Z_1^\alpha) + \mathcal{C}_{\widehat{q}d}(Z_1^\alpha, \mathbf{Z}) + \mathcal{C}_{\widehat{q}d}(\mathbf{Z}, +\infty).$$

Nous désignerons ces sommes jusqu'à la fin de ce chapitre de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\widehat{q}d}(1, Z_1^\alpha) &\quad \text{petits termes,} \\ \mathcal{C}_{\widehat{q}d}(Z_1^\alpha, \mathbf{Z}) &\quad \text{termes médians,} \\ \mathcal{C}_{\widehat{q}d}(\mathbf{Z}, +\infty) &\quad \text{grands termes} \end{aligned}$$

et nous adopterons les notations simplificatrices suivantes :

$$\begin{aligned} K_g &:= \frac{k_g - 1}{2}, \\ K &:= \frac{k-1}{2}. \end{aligned}$$

4.3.1 Contribution des petits termes via la méthode du δ-symbole

L'objectif de cette partie est de convaincre le lecteur que les petits termes ne limiteront pas la longueur de ramollisseur effective quitte à prendre le poids de g suffisamment grand. Tout repose sur le fait que la fonction test F_Z est asymptotiquement nulle lorsque $k_g \to +\infty$ pour $1 \leq Z \leq Z_1^\alpha$. En effet, la proposition 4.2.5 assure que :

$$F_Z(z,y) \ll_{k,k_g} (1+|t|)^B (\log q)^{A_3} \sqrt{\frac{M}{N}} \left(\frac{\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}} \right)^{k-1} \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{Z}{Z_1}\right)^{K_g}. \tag{4.3.2}$$

pour tout $1 \leq Z \leq Z_1^\alpha$.

Proposition 4.3.2. *Soit $0 < \alpha < 1$. Si $k_g > 1 + \frac{5}{2(1-\alpha)}$ alors :*

$$\sum_{\widehat{q} \in \{1,q\}} \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{N}^{*2} \\ q \| c \\ d | \frac{c}{q}}} \frac{d\widehat{q}}{c^2} \mu\left(\frac{c}{dq}\right) \mathcal{C}_{\widehat{q}d}(1, Z_1^\alpha) \ll_{k,g} (1+|t|)^B \frac{1}{q^\delta}$$

pour une constante absolue $\delta > 0$.

Preuve de la proposition 4.3.2. Si $1 \leq Z \leq Z_1^\alpha$ alors le théorème 4.2.1 et l'égalité (4.3.2) assurent que :

$$\Sigma_{\widehat{q}d}(F_Z, g; 1, aeD_2) \ll_{k,g,\varepsilon,A_3} (1+|t|)^B (\log q)^{A_3} \sqrt{\frac{M}{N}} \left(\frac{\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}} \right)^{k-1} \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{Z}{Z_1}\right)^{K_g} \frac{1}{\left(1+\frac{Y}{\left(\sqrt{Z_1}+\sqrt{Z}\right)^2}\right)^{A_3}} P^{\frac{5}{4}} \mathbf{Z}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} Y^{\frac{1}{4}+\varepsilon}.$$

On décompose les petits termes en :

$$\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(1, Z_1^\alpha) = \delta_{Y \leq Z_1^\alpha} \mathcal{C}_{\widehat{q}d}(Y, Z_1^\alpha) + \delta_{Y \leq Z_1^\alpha} \mathcal{C}_{\widehat{q}d}(1, Y) + \delta_{Z_1^\alpha < Y \leq Z_1} \mathcal{C}_{\widehat{q}d}(1, Z_1^\alpha) + \delta_{Z_1 < Y} \mathcal{C}_{\widehat{q}d}(1, Z_1^\alpha). \tag{4.3.3}$$

Contribution du premier terme de (4.3.3).
Dans ce cas, $P \ll 1$, $\mathbf{Z} \ll Z_1$ et $c \gg \sqrt{M}(Nae)^{\frac{1}{2\alpha}}$. Ainsi,

$$\delta_{Y\leq Z_1^\alpha}\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(Y,Z_1^\alpha) \ll_{k,g,\varepsilon} (1+|t|)^B \delta_{c\gg\sqrt{M}(Nae)^{\frac{1}{2\alpha}}} \frac{1}{d\widehat{q}} \sqrt{\frac{M}{N}}\left(\frac{Y}{Z_1}\right)^K Z_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon} Y^{\frac{1}{4}+\varepsilon} \sum_{1\leq Z\leq Z_1^\alpha}\left(\frac{Z}{Z_1}\right)^{K_g} Z.$$

On a alors :

$$\delta_{Y\leq Z_1^\alpha}\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(Y,Z_1^\alpha) \ll_{k,g,\varepsilon} q^\varepsilon (1+|t|)^B \delta_{c\gg\sqrt{M}(Nae)^{\frac{1}{2\alpha}}} \frac{1}{d\widehat{q}}\sqrt{\frac{M}{N}} \frac{Y^{\frac{1}{4}+K}}{Z_1^{-\frac{1}{2}+K-\alpha+(1-\alpha)K_g}}.$$

La contribution de ce premier terme à $T^-_{M,N}(1)$ est finalement bornée par :

$$\ll_{k,g,\varepsilon} (1+|t|)^B q^\varepsilon \frac{N^{1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{4}-K_g\right)}(ae)^{1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)-\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)K_g}}{q^{\frac{3}{4}}}$$

ce qui est admissible si $k_g > 1+\frac{3\alpha+1}{2(1-\alpha)}$.
Contribution du deuxième terme de (4.3.3).
On a de nouveau $P \ll 1$, $\mathbf{Z} \ll Z_1$ et $c \gg \sqrt{M}(Nae)^{\frac{1}{2\alpha}}$ d'où :

$$\delta_{Y\leq Z_1^\alpha}\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(1,Y) \ll_{k,g,\varepsilon} q^\varepsilon (1+|t|)^B \delta_{c\gg\sqrt{M}(Nae)^{\frac{1}{2\alpha}}} \frac{1}{d\widehat{q}}\sqrt{\frac{M}{N}} \frac{Y^{\frac{5}{4}+K+K_g}}{Z_1^{-\frac{1}{2}+K+K_g}}.$$

La contribution du deuxième terme à $T^-_{M,N}(1)$ est finalement bornée par :

$$\ll_{k,g,\varepsilon} (1+|t|)^B q^\varepsilon \frac{N^{\frac{3}{4}+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)K_g}(ae)^{\frac{5}{4}+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)K_g}}{q}$$

ce qui est admissible si $k_g > 1+\frac{5\alpha}{2(1-\alpha)}$.
Contribution du troisième terme de (4.3.3).
Dans ce troisième cas, $P \ll 1$, $\mathbf{Z} \ll Z_1$ et $\sqrt{MNae} \ll c \ll \sqrt{M}(Nae)^{\frac{1}{2\alpha}}$ d'où :

$$\delta_{Z_1^\alpha<Y\leq Z_1}\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(1,Z_1^\alpha) \ll_{k,g,\varepsilon} q^\varepsilon (1+|t|)^B \delta_{\sqrt{MNae}\ll c\ll\sqrt{M}(Nae)^{\frac{1}{2\alpha}}} \frac{1}{d\widehat{q}}\sqrt{\frac{M}{N}} \frac{Y^{\frac{5}{4}+K}}{Z_1^{-\frac{1}{2}+K+(1-\alpha)K_g}}.$$

La contribution de ce troisième terme à $T^-_{M,N}(1)$ est bornée par :

$$\ll_{k,g,\varepsilon} (1+|t|)^B q^\varepsilon \frac{N^{\frac{3}{4}-(1-\alpha)K_g}(ae)^{\frac{5}{4}+(1-\alpha)K_g}}{q}$$

ce qui est admissible si $k_g > 1+\frac{5}{2(1-\alpha)}$.
Contribution du quatrième terme de (4.3.3).
Ici, $P \ll \sqrt{\frac{Y}{Z_1}}$, $\mathbf{Z} \ll Y$ et $c \ll \sqrt{MNae}$ d'où :

$$\delta_{Z_1<Y}\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(1,Z_1^\alpha) \ll_{k,g,\varepsilon} q^\varepsilon (1+|t|)^B \delta_{c\ll\sqrt{MNae}} \frac{1}{d\widehat{q}}\sqrt{\frac{M}{N}} \frac{Y^{\frac{17}{8}}}{Z_1^{\frac{3}{8}+(1-\alpha)K_g}}.$$

La contribution de ce quatrième terme à $T^-_{M,N}(1)$ est finalement bornée par :

$$\ll_{k,g,\varepsilon} (1+|t|)^B q^{\varepsilon} \frac{(ae)^{\frac{17}{8}}}{q^{\frac{1}{4}+(1-\alpha)K_g}}$$

ce qui est admissible si $k_g > 1 + \frac{3}{2(1-\alpha)}$

■

4.3.2 Contribution des termes médians

Proposition 4.3.3. *Soit $0<\alpha<1$. Si θ est admissible et $k > k_g+2\eta+x_4+2x_1+\theta-\frac{1}{2}-\frac{x_3}{2}$ alors :*

$$\sum_{\widehat{q}\in\{1,q\}} \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{N}^{*2}\\ q\|c\\ d|\frac{c}{q}}} \frac{d\widehat{q}}{c^2}\mu\left(\frac{c}{dq}\right)\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(Z_1^{\alpha},\mathbf{Z}) \ll_{k,g,\varepsilon} (1+|t|)^B q^{\varepsilon}\left(\frac{l^{1+x_1+\theta-\frac{x_3}{2}}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{l^{\frac{1}{2}+x_1+\frac{\eta}{2}+\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{l^{\eta+x_1-\frac{x_3}{2}+\theta-\alpha(\eta-1)}}{q^{\frac{3}{2}-\theta-\eta+\alpha(\eta-1)}}\right)$$

pour tout $\varepsilon>0$ où :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \eta \end{pmatrix} := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \text{par la méthode spectrale,} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\theta & 1 & 4 \end{pmatrix} & \text{par la méthode spectrale en moyenne,} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\theta & 1 & 2 \end{pmatrix} & \text{par B. Kroetz et R.J. Stanton.} \end{cases}$$

Preuve de la proposition 4.3.3. On décompose les termes médians en :

$$\begin{aligned}(4.3.4)\quad \mathcal{C}_{\widehat{q}d}(Z_1^{\alpha},\mathbf{Z}) &= \delta_{Y\le Z_1^{\alpha}}\left(\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(Z_1^{\alpha},Z_1)+\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(Z_1,\mathbf{Z})\right) \\ &+ \delta_{Z_1^{\alpha}<Y\le Z_1}\left(\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(Z_1^{\alpha},Y)+\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(Y,Z_1)+\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(Z_1,\mathbf{Z})\right) \\ &+ \delta_{Z_1<Y}\left(\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(Z_1^{\alpha},Z_1)+\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(Z_1,Y)+\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(Y,\mathbf{Z})\right).\end{aligned}$$

Premier cas : $Y \le Z_1^{\alpha}$.
Dans ce cas, $c \gg \sqrt{M}(Nae)^{\frac{1}{2\alpha}} \gg \sqrt{MNae}$, $P \ll 1$ et $\mathbf{Z} \ll Z_1$. Le théorème 4.3.1 assure que :

$$\Sigma_{\widehat{q}d}(F_Z,g;1,aeD_2) \ll_{\varepsilon,g,A_1,\eta} q^{\varepsilon}(1+|t|)^B\sqrt{\frac{M}{N}}(ae)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{Y}{Z_1}\right)^K \left(\frac{\sqrt{\frac{Z}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{Z}{Z_1}}}\right)^{k_g-1} \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{Z}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{Z}{Y}\right)^{K_g+\eta-1+\varepsilon}\frac{Z^{\frac{1}{2}+\theta+x_1+\varepsilon}}{\widehat{q}^{x_2}d^{x_3}}\left(\frac{Z}{Y}\right)^{\frac{x_4}{2}} N^{\frac{\delta_1(\widehat{q})}{2}x_4}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.
Contribution du premier terme de (4.3.4).
La contribution de ce terme à $T^{-}_{M,N}(1)$ est bornée par :

$$\ll_{\varepsilon,k,g} (1+|t|)^B q^{\varepsilon} \frac{(ae)^{1+x_1+\theta-\frac{x_3}{2}}}{q^{\frac{1}{2}+x_2-x_1-\theta+\delta_1(\widehat{q})(1-\frac{x_4}{2}-x_2)}} = (1+|t|)^B q^{\varepsilon} \frac{(ae)^{1+x_1+\theta-\frac{x_3}{2}}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}}$$

si $K - K_g > -\frac{x_3}{2}+\eta-\frac{1}{2}+\frac{x_4}{2}+\theta+x_1$. La condition précédente permet de rendre convergente les séries en c et en d.
Contribution du deuxième terme de (4.3.4).
Sachant que $\mathbf{Z} \ll Z_1$, la contribution du deuxième terme à $T^{-}_{M,N}(1)$ est exactement la même que la contribution du premier terme.

Deuxième cas : $Z_1^{\alpha} < Y \leq Z_1$.
Dans ce cas, $\sqrt{MNae} \ll c \ll \sqrt{M}(Nae)^{\frac{1}{2\alpha}}$, $P \ll 1$ et $\mathbf{Z} \ll Z_1$. Le théorème 4.3.1 assure que :

$$\Sigma_{\widehat{q}d}(F_Z, g; 1, aeD_2) \ll_{\varepsilon,g,A_1,\eta} q^{\varepsilon} (1+|t|)^B \sqrt{\frac{M}{N}}(ae)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Y}{Z_1}\right)^K \left(\frac{\sqrt{\frac{Z}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{Z}{Z_1}}}\right)^{k_g-1}$$
$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{Z}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\sup(Z,Y)}{\inf(Z,Y)}\right)^{K_g+\eta-1+\varepsilon} \frac{\sup(Z,Y)^{\frac{1}{2}+\theta+x_1+\varepsilon}}{\widehat{q}^{x_2} d^{x_3}} \left(\frac{\sup(Z,Y)}{Y}\right)^{\frac{x_4}{2}} N^{\frac{\delta_1(\widehat{q})}{2}x_4}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. On se rend compte alors que la contribution du quatrième terme de (4.3.4) à $T^{-}_{M,N}(1)$ sera égale à la contribution du premier terme de (4.3.4) à $T^{-}_{M,N}(1)$ et que la contribution du cinquième terme de (4.3.4) à $T^{-}_{M,N}(1)$ sera égale à la contribution du deuxième terme de (4.3.4) à $T^{-}_{M,N}(1)$.
Contribution du troisième terme de (4.3.4).
La contribution de ce terme à $T^{-}_{M,N}(1)$ est bornée par :

$$\ll_{\varepsilon,k,g} (1+|t|)^B q^{\varepsilon} \frac{(ae)^{\eta+x_1-\frac{x_3}{2}+\theta-\alpha(\eta-1)}}{q^{\frac{3}{2}-\eta+x_2-x_1-\theta+\alpha(\eta-1)+\delta_1(\widehat{q})(1-\frac{x_4}{2}-x_2)}} = (1+|t|)^B q^{\varepsilon} \frac{(ae)^{\eta+x_1-\frac{x_3}{2}+\theta-\alpha(\eta-1)}}{q^{\frac{3}{2}-\theta-\eta+\alpha(\eta-1)}}.$$

Aucun condition sur K n'est nécessaire ici car les séries en c et d convergent automatiquement.

Troisième cas : $Z_1 < Y$.

Dans ce cas, $c \ll \sqrt{MNae}$, $P \ll \sqrt{\frac{Y}{Z_1}}$ et $\mathbf{Z} \ll Y$. Le théorème 4.3.1 assure que :

$$\Sigma_{\widehat{q}d}(F_Z,g;1,aeD_2) \ll_{\varepsilon,g,A_3,\eta} q^{\varepsilon}\,(1+|t|)^B \sqrt{\frac{M}{N}}(ae)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Z_1}{Y}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{\frac{Z}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{Z}{Z_1}}}\right)^{k_g-1} \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{Z}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left(1+\frac{Y}{\left(\sqrt{Z_1}+\sqrt{Z}\right)^2}\right)^{A_3}}$$
$$\left(\frac{\sup(Z,Y)}{\inf(Z,Y)}\right)^{\frac{k_g-1}{2}+\eta-1+\varepsilon} \left(\frac{Y}{Z_1}\right)^{\frac{\eta}{2}+\varepsilon} \frac{\sup(Z,Y)^{\frac{1}{2}+\theta+x_1+\varepsilon}}{\widehat{q}^{x_2}d^{x_3}} \left(\frac{\sup(Z,Y)}{Y}\right)^{\frac{x_4}{2}} N^{\frac{\delta_1(\widehat{q})}{2}x_4}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Contribution du sixième terme de (4.3.4).

La contribution de ce terme à $T^{-}_{M,N}(1)$ est bornée par :

$$\ll_{\varepsilon,k,g} (1+|t|)^B q^{\varepsilon} \frac{(ae)^{\eta+x_1-\frac{x_3}{2}+\theta-\alpha(\eta-1)}}{q^{\frac{3}{2}-\eta+x_2-x_1-\theta+\alpha(\eta-1)+\delta_1(\widehat{q})(1-\frac{x_4}{2}-x_2)}} = (1+|t|)^B q^{\varepsilon} \frac{(ae)^{\eta+x_1-\frac{x_3}{2}+\theta-\alpha(\eta-1)}}{q^{\frac{3}{2}-\theta-\eta+\alpha(\eta-1)}}$$

en choisissant $A_3 := \frac{x_3}{2} - \frac{1}{4} + K_g + \frac{\eta}{2} + \alpha(\eta-1) - \varepsilon$.

Contribution du septième terme de (4.3.4).

La contribution de ce terme à $T^{-}_{M,N}(1)$ est bornée par :

$$\ll_{\varepsilon,k,g} (1+|t|)^B q^{\varepsilon} \frac{(ae)^{\frac{1}{2}+x_1+\frac{\eta}{2}+\theta}}{q^{\frac{1}{2}+x_2-x_1-\theta+\delta_1(\widehat{q})(1-\frac{x_4}{2}-x_2)}} = (1+|t|)^B q^{\varepsilon} \frac{(ae)^{\frac{1}{2}+x_1+\frac{\eta}{2}+\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}}$$

en choisissant $A_3 := K_g + \eta - \frac{3}{4} + \varepsilon$.

Contribution du huitième terme de (4.3.4).

La contribution de ce huitième terme à $T^{-}_{M,N}(1)$ est bornée par :

$$\ll_{\varepsilon,k,g} (1+|t|)^B q^{\varepsilon} \frac{(ae)^{\frac{1}{2}+x_1+\frac{\eta}{2}+\theta}}{q^{\frac{1}{2}+x_2-x_1-\theta+\delta_1(\widehat{q})(1-\frac{x_4}{2}-x_2)}} = (1+|t|)^B q^{\varepsilon} \frac{(ae)^{\frac{1}{2}+x_1+\frac{\eta}{2}+\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}}$$

en prenant $A_3 := 0$.

4.3.3 Contribution des grands termes

Proposition 4.3.4. *Si θ est admissible et $k > k_g + 2\eta + x_4 + 2x_1 + \theta - \frac{1}{2} - \frac{x_3}{2}$ alors :*

$$\sum_{\widehat{q}\in\{1,q\}} \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{N}^{*2}\\ q\|c\\ d\|\frac{c}{q}}} \frac{d\widehat{q}}{c^2}\mu\left(\frac{c}{dq}\right) \mathcal{C}_{\widehat{q}d}(\mathbf{Z},+\infty) \ll_{k,g,\varepsilon} (1+|t|)^B q^{\varepsilon} \left(\frac{l^{1+x_1+\theta-\frac{x_3}{2}}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{l^{\frac{1}{2}+x_1+\frac{\eta}{2}+\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}}\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ où :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \eta \end{pmatrix} := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \text{par la méthode spectrale,} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\theta & 1 & 4 \end{pmatrix} & \text{par la méthode spectrale en moyenne,} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\theta & 1 & 2 \end{pmatrix} & \text{par B. Kroetz et R.J. Stanton.} \end{cases}$$

Preuve de la proposition 4.3.4. Si $Z \geq \mathbf{Z}$ alors le théorème 4.3.1 assure que :

$$\Sigma_{\widehat{q}d}(F_Z, g; 1, aeD_2) \ll_{\varepsilon,g,A_1,\eta} q^{\varepsilon}(1+|t|)^B \sqrt{\frac{M}{N}}(ae)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}\right)^{k-1} \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\left(\frac{Z_1}{Z}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\mathbf{Z}}{Z}\right)^{A_1} \left(\frac{Z}{Y}\right)^{K_g+\eta-1+\varepsilon} P^{\eta+\varepsilon} \frac{Z^{\frac{1}{2}+\theta+x_1+\varepsilon}}{\widehat{q}^{x_2} d^{x_3}} \left(\sup\left(1, \frac{Z^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{\widehat{q}^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\sqrt{ae}}\right)\right)^{x_4}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ d'où :

$$\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(\mathbf{Z}, +\infty) \ll_{\varepsilon,g,A_1,\eta} q^{\varepsilon}(1+|t|)^B \sqrt{\frac{M}{N}}(ae)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}{1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}}\right)^{k-1} \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{Y}{Z_1}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\frac{P^{\eta+\varepsilon}}{\widehat{q}^{x_2} d^{x_3}} \frac{Z_1^{\frac{1}{4}} N^{\frac{\delta_1(\widehat{q})}{2} x_4} \mathbf{Z}^{-\frac{3}{4}+K_g+\frac{x_4}{2}+\eta+\theta+x_1+2\varepsilon}}{Y^{K_g+\eta-1+\frac{x_4}{2}+\varepsilon}}.$$

On décompose les grands termes en :

$$\mathcal{C}_{\widehat{q}d}(\mathbf{Z}, +\infty) = \delta_{Y \leq Z_1} \mathcal{C}_{\widehat{q}d}(\mathbf{Z}, +\infty) + \delta_{Y \geq Z_1} \mathcal{C}_{\widehat{q}d}(\mathbf{Z}, +\infty). \tag{4.3.5}$$

Contribution du premier terme de (4.3.5).
Pour ce terme, $P \ll 1$, $\mathbf{Z} \ll Z_1$ et $c \gg \sqrt{MNae}$. La contribution de ce terme à $T^{-}_{M,N}(1)$ est bornée par :

$$\ll_{\varepsilon,k,g} (1+|t|)^B q^{\varepsilon} \frac{(ae)^{1+x_1+\theta-\frac{x_3}{2}}}{q^{\frac{1}{2}+x_2-x_1-\theta+\delta_1(\widehat{q})(1-\frac{x_4}{2}-x_2)}} = (1+|t|)^B q^{\varepsilon} \frac{(ae)^{1+x_1+\theta-\frac{x_3}{2}}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}}$$

si $K - K_g > -\frac{x_3}{2} + \eta - \frac{1}{2} + \frac{x_4}{2} + \theta + x_1$. La condition précédente permet de rendre convergente les séries en c et en d.
Contribution du deuxième terme de (4.3.5).
Ici, $P \ll \sqrt{\frac{Y}{Z_1}}$, $\mathbf{Z} \ll Y$ et $c \ll \sqrt{MNae}$. La contribution de ce terme à $T^{-}_{M,N}(c)$ est bornée par :

$$\ll_{\varepsilon,k,g} (1+|t|)^B q^{\varepsilon} \frac{(ae)^{\frac{1}{2}+x_1+\frac{\eta}{2}+\theta}}{q^{\frac{1}{2}+x_2-x_1-\theta+\delta_1(\widehat{q})(1-\frac{x_4}{2}-x_2)}} = (1+|t|)^B q^{\varepsilon} \frac{(ae)^{\frac{1}{2}+x_1+\frac{\eta}{2}+\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}}$$

■

4.3.4 Preuve des théorèmes 4.1.1, 4.1.2 et 4.1.3

On se contente de prouver le théorème 4.1.1 sachant que les preuves des deux autres théorèmes sont identiques.
Preuve du théorème 4.1.1. Les propositions 4.3.2, 4.3.3 et 4.3.4 assurent que :

$$\text{Errtwist}(q, l; \mu) = \mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((ql)^{\varepsilon}(1+|\Im(\mu)|)^B \left(\frac{l^{\frac{3}{2}+\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{l^{\frac{7}{2}+\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{l^{\frac{9}{2}+\theta-3\alpha}}{q^{3\alpha-\frac{5}{2}-\theta}}\right)\right) \tag{4.3.6}$$

si $k_g > 1 + \frac{5}{2(1-\alpha)}$ et $k > k_g + 9 + \theta$ d'où :

$$\text{Errsec}(q,L;\mu) = \mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((qL)^{\varepsilon}(1+|\Im(\mu)|)^{B}\left(\frac{L^{4+2\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{L^{8+2\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{L^{10+2\theta-6\alpha}}{q^{3\alpha-\frac{5}{2}-\theta}}\right)\right). \tag{4.3.7}$$

Ainsi, toute longueur de ramollisseur inférieure strictement à :

$$\inf\left(\frac{1-2\theta}{8\,(2+\theta)}, \frac{1-2\theta}{8\,(4+\theta)}, \frac{6\alpha-5-2\theta}{8\,(5+\theta-3\alpha)}\right)$$

est effective. Le dernier terme dans le minimum précédent est une fonction croissante par rapport à α. On choisit alors $\alpha := \frac{25}{27} + \frac{4}{27}\theta$ de sorte que :

$$\frac{1-2\theta}{8\,(4+\theta)} = \frac{6\alpha-5-2\theta}{8\,(5+\theta-3\alpha)}$$

■

Chapitre 5

Zéros des fonctions L et méthode de ramollissement

L'objectif de ce chapitre est triple :
- présenter le résultat final concernant l'analyse des zéros réels non-triviaux d'une famille de fonctions L de Rankin-Selberg,
- décrire le modèle des matrices aléatoires qui permet de prévoir un tel résultat,
- motiver la méthode analytique utilisée à savoir la méthode de ramollissement.

5.1 Zéros de grande hauteur

Soit $L(\pi_0,.)$ une fonction L satisfaisant (pour vraiment simplifier) :

$$\forall i \in \{1,\cdots,d_{\pi_0}\}, \quad \mu_{\pi_0,i} < 0$$

et que :

$$\forall i \in \{1,\cdots,d_{\pi_0}\}, \quad \alpha_{\pi_0,i} = \mathcal{O}(p^c)$$

pour une constante abolue $0 < c \leq 1$. L'existence d'un produit Eulérien sur $\Re(s) > 1$ entraîne que :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 1 \Rightarrow L(\pi_0, s) \neq 0.$$

Selon l'équation fonctionnelle satisfaite par $L(\pi_0,.)$, les seuls zéros de la fonction L sur $\Re(s) < 0$ sont donnés par les pôles de $L_\infty(\pi_0,.)$ c'est-à-dire :

$$\cup_{1\leq i\leq d_{\pi_0}} \{\mu_{\pi_0,i} - 2n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Ces zéros s'appellent les *zéros triviaux* de la fonction L. On peut montrer de façon classique par le principe de l'argument que pour T suffisamment grand :

$$N(\pi_0,T) := \left|\left\{\rho \in \mathbb{C}, \left|\Re(\rho) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}, 0 \leq \Im(\rho) \leq T\right\}\right| = \frac{d_{\pi_0}}{2\pi} T \log T (1 + o(1))$$

de sorte que l'écart moyen entre les parties imaginaires de deux zéros consécutifs de partie imaginaire inférieure à T est de l'ordre de $\frac{2\pi}{d_{\pi_0} \log T}$. Ces résultats portent sur le comptage

des zéros dits de *grande hauteur*. Un des problèmes majeurs de la théorie analytique des nombres est l'étude de la répartition de ces zéros dans la bande critique et notamment de la répartition horizontale de ces zéros. La conjecture principale est l'hypothèse de Riemann généralisée :

Hypothèse de Riemann généralisée. Tous les zéros de $L(\pi_0, .)$ appartenant à la bande critique sont sur la droite $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Cette conjecture fondamentale [1] n'est même pas prouvée pour la fonction zéta de Riemann et possède de nombreuses applications arithmétiques (confer chapitres 1 et 6). Une tentative d'attaque de la conjecture de Riemann, inspirée par G. Polya et D. Hilbert, est de réaliser les zéros d'une fonction L comme le spectre d'un opérateur suffisamment symétrique pour déduire la conjecture de Riemann pour cette fonction L. La nature spectrale des zéros non-triviaux d'une fonction L a été confirmée par H.L. Montgomery (**[Mo]**) qui a prouvé un lien entre les valeurs propres de certaines matrices aléatoires de grand rang et les zéros non-triviaux de la fonction zéta de Riemann.

5.2 Matrices aléatoires

La référence exhaustive pour la théorie des matrices aléatoires est **[Me]**. Ici, on se contente de reprendre fidèlement l'exposé donné par P. Michel (**[Mi6]**) au séminaire Bourbaki. Un ensemble de matrices aléatoires est une suite $G := (G(N), d_N)_{N\geq 1}$ d'espaces de probabilités matriciels vérifiant $G(N) \subset GL_N(\mathbb{C})$. Nous ne donnons que les exemples qui ont un intérêt pour ce mémoire. L'*ensemble unitaire Gaussien* G=GUE est défini par :

$$\begin{cases} G(N) & = \text{matrices inversibles hermitiennes de taille } N, \\ d_N A & = c_N \exp\left(-N \operatorname{tr}(A^2)\right) dx_N(A) \end{cases}$$

où dx_N désigne la mesure de Lebesque sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices hermitiennes de taille N. Les trois autres exemples sont des espaces matriciels compacts qui sont automatiquement munis de leur mesure de Haar :

- le type *symplectique* $G = Sp$: $G(N)$ est le groupe des matrices symplectiques unitaires de taille $2N$,
- le type *orthogonal pair* $G = SO^+$: $G(N)$ est le groupe des matrices orthogonales de taille $2N$,
- le type *orthogonal impair* $G = SO^-$: $G(N)$ est le groupe des matrices orthogonales de taille $2N + 1$.

G désigne l'un des ensembles de matrices aléatoires précédents. On note $\{e(\theta_1), \cdots, e(\theta_N)\}$ les valeurs propres de A à symétries près. Ainsi, si A est une matrice de $Sp(N)$ ou de $SO^+(N)$ alors l'ensemble de ses valeurs propres est noté :

$$\left\{ e(\theta_1), \cdots, e(\theta_N), e\left(\theta_1 + \frac{1}{2}\right), \cdots, e\left(\theta_N + \frac{1}{2}\right) \right\}$$

[1] Cette conjecture ne résoudra pas tous les problèmes arithmétiques (comme par exemple le problème du plus grand écart entre grands nombres premiers) et on arrive parfois à prouver des énoncés en moyenne ou de densité plus puissants que la conjecture de Riemann.

et si A est une matrice de $SO^-(N)$ alors l'ensemble de ses valeurs propres est noté :

$$\left\{1, e(\theta_1), \cdots, e(\theta_N), e\left(\theta_1 + \frac{1}{2}\right), \cdots, e\left(\theta_N + \frac{1}{2}\right)\right\}$$

avec dans tous les cas $0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_N \leq \frac{1}{2}$ et on les renormalise par :

$$\widehat{\theta_i} := 2N\theta_i.$$

La *distribution de corrélation d'ordre* 2 est définie par :

$$R_2(A, \Phi) := \frac{2}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \Phi(\widehat{\theta_i}, \widehat{\theta_j})$$

pour toute fonction Φ symétrique, invariante par les translations de vecteurs $(u, \cdots, u)$ pour tout réel u, et avec de «bonnes» propriétés de décroissance. $R_2(A, \Phi)$ compte le nombre de couples de valeurs propres distinctes dans un intervalle de longueur $\frac{1}{N}$. La *distribution de répartition d'ordre* 1 est définie par :

$$W(A, \Phi) := \sum_{i=1}^{N} \Phi(\widehat{\theta_i})$$

pour toute fonction Φ symétrique et à décroissance rapide. $W(A, \Phi)$ décrit la répartition des valeurs propres de A dans un $\frac{1}{N}$-voisinage de 1. N. M. Katz et P. Sarnak (**[KaSa]**) ont étudié le comportement de ces statistiques lorsque $N \to +\infty$:

Théorème 5.2.1 (N. M. Katz-P. Sarnak (1999)). *Soit G l'un des ensembles de matrices aléatoires précédents. Il existe des distributions $R_2(G)$ et $W(G)$ vérifiant pour toute fonction test convenable Φ :*

$$\begin{aligned} \lim_{N \to +\infty} \int_{G(N)} R_2(A, \Phi) d_N(A) &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) R_2(G)(x) \mathrm{d}x, \\ \lim_{N \to +\infty} \int_{G(N)} W(A, \Phi) d_N(A) &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) W(G)(x) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

De plus, les auteurs ont calculé ces distributions limites et ont obtenu les formules explicites suivantes :

$$R_2(Sp)(x) = R_2(SO^+)(x) = R_2(SO^-)(x) = R_2(GUE)(x) = 1 - \left(\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}\right)^2$$

et :

$$\begin{aligned} W(SO^+)(x) &= 1 + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}, \\ W(SO^-)(x) &= 1 - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} + \delta_0(x), \\ W(Sp)(x) &= 1 - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} \end{aligned}$$

où δ_0 est la distribution de Dirac en 0.

5.3 Zéros de grande hauteur et matrices aléatoires

On peut définir de façon analogue des statistiques sur les zéros d'une fonction $L(\pi_0,.)$. Par exemple, en notant $\rho=\frac{1}{2}+i\gamma$ les zéros non-triviaux de cette fonction L ($\gamma\in\mathbb{C}$) et en fixant une fonction h lisse à décroissance rapide, on pose :

$$R^h_{2,\pi_0}(T,\Phi):=\frac{2\pi}{d_{\pi_0}T\log T}\sum_{\substack{(\gamma_{\pi_0},\gamma'_{\pi_0})\in\mathbb{C}^2\\ L\left(\pi_0,\frac{1}{2}+i\gamma_{\pi_0}\right)=0\\ L\left(\pi_0,\frac{1}{2}+i\gamma'_{\pi_0}\right)=0}} h\left(\frac{\gamma_{\pi_0}}{T}\right)h\left(\frac{\gamma'_{\pi_0}}{T}\right)\Phi\left(\frac{d_{\pi_0}\log T}{2\pi}(\gamma_{\pi_0}-\gamma'_{\pi_0})\right)$$

pour toute fonction lisse à décroissance rapide. $R^h_{2,\pi_0}(T,\Phi)$ compte le nombre de couple de zéros de $L(\pi_0,.)$ de hauteur de l'ordre de T et d'écart de l'ordre de $\frac{2\pi}{d_{\pi_0}\log T}$. Z. Rudnick et P. Sarnak (**[RuSa]**) ont prouvé que si $L(\pi_0,.)$ vérifie une hypothèse technique qui est une petite conséquence d'une généralisation de la conjecture de Ramanujan-Petersson-Selberg alors pour toute fonction h qui est la transformée de Fourier d'une fonction lisse à support compact et pour toute fonction lisse Φ dont la transformée de Fourier est à support compact suffisamment petit au voisinage de 0, on a :

$$\lim_{T\to+\infty}R^h_{2,\pi_0}(T,\Phi)=\widehat{h^2}(0)\int_{\mathbf{R}}\Phi(x)R_2(GUE)(x)\mathrm{d}x.$$

Ainsi, aussi surprenant que cela puisse paraître, l'espacement entre les couples de zéros de grande hauteur de toutes les fonctions L se comporte de la même façon.

5.4 Zéros de petite hauteur et matrices aléatoires

On appelle *zéros de petite hauteur* d'une fonction L les zéros de la bande critique qui sont très «proches» du point critique. On peut montrer en supposant l'hypothèse de Riemann généralisée pour la fonction $L(\pi_0,s)$ que lorsque $Q_{\pi_0}(0)$ est grand :

$$N(\pi_0,1)=\frac{\log Q_{\pi_0}(0)}{\pi}(1+o(1)).$$

Ainsi, l'espacement moyen entre deux zéros de $L(\pi_0,.)$ de parties imaginaires inférieures à 1 est de l'ordre de $\frac{2\pi}{\log Q_{\pi_0}(0)}$. On cherche à étudier par analogie avec l'étude menée pour les zéros de grande hauteur la répartition des zéros de $L(\pi_0,.)$ dans un $\frac{1}{\log Q_{\pi_0}(0)}$-voisinage du segment critique. Pour cela, on inclut la fonction $L(\pi_0,.)$ dans une famille $\mathcal{F}$ de fonctions L et on étudie pour toute fonction lisse Φ dont la transformée de Fourier est à support compact :

$$W(\mathcal{F}_Q,\Phi):=\frac{1}{|\mathcal{F}_Q|}\sum_{\pi\in\mathcal{F}_Q}W(\pi,\Phi)$$

où :

$$W(\pi,\Phi):=\sum_{\substack{\gamma_\pi\in\mathbb{C}\\ L\left(\pi,\frac{1}{2}+i\gamma_\pi\right)=0}}\Phi\left(\frac{\log Q_\pi(0)}{2\pi}\gamma_\pi\right).$$

On cherche à prouver des résultats du type :

Enoncé de Densité ED(ν). Il existe un ensemble de matrices aléatoires G tel que si Φ est une fonction lisse dont la transformée de Fourier est à support compact dans $]-\nu,\nu[$ alors :

$$\lim_{Q\to+\infty} W(\mathcal{F}_Q,\Phi) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x)W(G)(x)\mathrm{d}x.$$

Dans ce cas, on dit que le *type de symétrie* de la famille $\mathcal{F}$ est G. De tel résultats montrent de nouveau l'intérêt de considérer des fonctions L en famille et introduisent une classification des familles de fonctions L par leur type de symétrie. Contrairement à ce qui se passe pour les zéros de grande hauteur, la répartition des zéros de petite hauteur d'une famille de fonctions L dépend de cette famille et plus exactement de son type de symétrie. Cependant, ces résultats sont souvent des résultats conditionnels car on les prouve en supposant l'hypothèse de Riemann généralisée au moins pour toutes les fonctions L qui apparaissent dans la famille. Par exemple, H. Iwaniec-W. Luo-P. Sarnak ont prouvé dans **[IwLuSa]** que le type de symétrie de la famille $\mathcal{H}_+$ est SO^+ et que le type de symétrie de la famille $\mathcal{H}_-$ est SO^- en supposant l'hypothèse de Riemann généralisée pour toutes les fonctions L de cette famille mais aussi pour toutes les fonctions L de Dirichlet. Le type de symétrie de la famille $\mathcal{G}$ est Sp. En ce qui concerne la famille $\mathcal{F}$ des fonctions L de Rankin-Selberg, il est conjecturé que son type de symétrie est aussi Sp. Il est important de remarquer que la valeur critique pour un énoncé de densité est $\nu = 1$. En effet, la formule de Plancherel assure que :

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(x)W(G)(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi}(x)\widehat{W(G)}(x)\mathrm{d}x$$

et on remarque, en accord avec la tableau 5.1, qu'il n'est pas possible de distinguer les

	Sp	SO^+	SO^-
$x = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
$0 \neq \lvert x\rvert < 1$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x = \pm 1$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\lvert x\rvert > 1$	0	0	0

TAB. 5.1 – Valeurs prises par $\widehat{W(G)}(x)$

distributions SO^+ et SO^- sur $]-1,1[$ et que la distibution Sp a une discontinuité en ± 1. Lorsque le conducteur de la famille est grand devant la taille de la famille, il est très difficile de franchir la valeur critique $\nu = 1$ et on se contente parfois d'énoncé de densité en moyenne.

5.5 Méthode de ramollissement

5.5.1 Description de la méthode sur un exemple

Cet exemple est issu de **[KoMiVa2]**. Soit q un nombre premier. Pour f dans $S_2^p(q)$, on note :

$$\Lambda(f,s) := q_f^{\frac{s}{2}} L_\infty(f,s)L(f,s)$$

la fonction L complétée de la forme modulaire f. Un des objectifs (parmi d'autres...) des auteurs est de prouver qu'il y a une proportion positive explicite de formes cuspidales de niveau q et de poids 2 dont la fonction L ne s'annule pas au point critique c'est-à-dire :

$$\underline{\lim}_{q\to+\infty} \frac{\left|\left\{f \in S_2^p(q), \Lambda\left(f,\frac{1}{2}\right) \neq 0\right\}\right|}{|S_2^p(q)|} \geq \pi_0$$

où $\pi_0 > 0$ est une constante absolue explicite. Pour cela, ils étudient les premier et second moments harmoniques de la famille :

$$\coprod_{q\in\mathcal{P}} \{L(f,.), f \in S_2^p(q)\}$$

au point critique qui sont donnés par :

$$M_1^h\left(q,\frac{1}{2}\right) = \sum_{f\in S_2^p(q)}^{h} \Lambda\left(f,\frac{1}{2}\right), \tag{5.5.1}$$

$$M_2^h\left(q,\frac{1}{2}\right) = \sum_{f\in S_2^p(q)}^{h} \Lambda\left(f,\frac{1}{2}\right)^2. \tag{5.5.2}$$

W. Duke (**[Du]**) a prouvé que :

$$M_1^h\left(q,\frac{1}{2}\right) \backsimeq_{q\to+\infty} c_1, \tag{5.5.3}$$

$$M_2^h\left(q,\frac{1}{2}\right) \backsimeq_{q\to+\infty} c_2 \log q \tag{5.5.4}$$

où $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ sont des constantes absolues. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que :

$$\sum_{f\in S_2^p(q),\Lambda\left(f,\frac{1}{2}\right)\neq 0}^{h} 1 \gg \frac{1}{\log q}. \tag{5.5.5}$$

Malheureusement, la borne inférieure ci-dessus tend vers 0 lorsque le niveau q devient grand. Les estimations (5.5.3) et (5.5.4) nous informent que même si $\Lambda\left(f,\frac{1}{2}\right)$ est génériquement de taille 1, il existe des formes f pour lesquelles $\Lambda\left(f,\frac{1}{2}\right)$ est de taille au moins $\sqrt{\log q}$. On a obtenu (5.5.5) en travaillant en moyenne ce qui fait que l'on perd la contribution des formes f pour lesquelles $\Lambda\left(f,\frac{1}{2}\right)$ est anormalement grand par rapport à la valeur moyenne. On peut rattrapper cette perte et compenser le facteur gênant $\log q$ dans (5.5.5) en ramollissant c'est-à-dire en effectuant la substitution suivante :

$$\Lambda\left(f,\frac{1}{2}\right) \rightsquigarrow \Lambda\left(f,\frac{1}{2}\right) M\left(f,\frac{1}{2}\right)$$

où $M\left(f,\frac{1}{2}\right)$ est un polynôme de Dirichlet choisi de sorte que $\Lambda\left(f,\frac{1}{2}\right) M\left(f,\frac{1}{2}\right)$ soit presque constant lorsque f décrit $S_2^p(q)$:

$$M\left(f,\frac{1}{2}\right) := \sum_{1\leq m\leq q^{\Delta}} \lambda_f(m)\frac{x_m}{\sqrt{m}}.$$

avec $\Delta > 0$. On étudie alors les premier et second moments harmoniques ramollis de la famille :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1^h\left(q,\frac{1}{2}\right) &= \sum_{f\in S_2^p(q)}^{h}\Lambda\left(f,\frac{1}{2}\right)M\left(f,\frac{1}{2}\right),\\ \mathcal{M}_2^h\left(q,\frac{1}{2}\right) &= \sum_{f\in S_2^p(q)}^{h}\Lambda\left(f,\frac{1}{2}\right)^2 M\left(f,\frac{1}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

E. Kowalski, P. Michel et J. Vanderkam ont alors prouvé que :

$$\begin{aligned}M_1^h\left(q,\frac{1}{2}\right) &\backsimeq_{q\to+\infty} \mathcal{L}(\overrightarrow{x}),\\ M_2^h\left(q,\frac{1}{2}\right) &\backsimeq_{q\to+\infty} \mathcal{Q}(\overrightarrow{x})\end{aligned}$$

où $\mathcal{L}(\overrightarrow{x})$ est une forme linéaire en $\overrightarrow{x} = (x_m)_{1\leq m\leq q^\Delta}$ et $\mathcal{Q}(\overrightarrow{x})$ une forme quadratique d'où :

$$\sum_{f\in S_2^p(q),\Lambda\left(f,\frac{1}{2}\right)\neq 0}^{h} 1 \gg \frac{\mathcal{L}(\overrightarrow{x})^2}{\mathcal{Q}(\overrightarrow{x})}. \tag{5.5.6}$$

Il s'agit alors de minimiser la forme quadratique $\mathcal{Q}$ sous la contrainte linéaire $\mathcal{L}$: il existe une procédure classique pour résoudre un tel problème d'optimisation. L'inconvénient principal de la méthode de ramollissement est que l'on compte non seulement les zéros des fonctions L mais aussi les zéros du ramollisseur.

5.5.2 Historique et motivation

Cette technique de ramollissement a été inventé par H. Bohr et E. Landau (**[BoLa]**) au début du siècle précédent puis a été largement développé par A. Selberg (**[Se2]**) pour estimer la proportion des zéros de la fonction zéta de Riemann sur la droite critique. Hafner a repris cette étude dans le cas des fonctions L de degré 2.

Ramollir a été remis au grand jour de façon très spectaculaire par H. Iwaniec et P. Sarnak (**[IwSa]**) qui ont prouvé que pour N suffisamment grand, $L\left(f,\frac{1}{2}\right)\neq 0$ pour au moins 50% de formes cuspidales f de niveau N, de poids k fixé, de caractère trivial et de signe d'équation fonctionnelle $+1$. D'autre part, et cela justifie l'intérêt que l'on porte aux zéros des fonctions L, toute amélioration même microscopique de 50% en $50\% + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ constituerait une preuve de l'inexistence du zéro de Siegel et entraînerait donc :

$$h(q) \geq c_\varepsilon q^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

pour une constante $c_\varepsilon > 0$ effective. Cet exemple est vraiment surprenant car un résultat de non-annulation pour une première famille de fonctions L nous amène à un résultat de non-annulation pour une deuxième famille de fonctions L. La théorie des matrices aléatoires

a mis en lumière le fait que les zéros des fonctions L d'une même famille ont des liens entre eux. Cet exemple nous fait intuiter que les zéros de toutes les fonctions L ne sont pas indépendants ce qui amène J.B. Conrey à évoquer une «conspiration entre les fonctions L» (**[Co]**). Ainsi, il apparaît par exemple peu probable de prouver l'hypothèse de Riemann généralisée pour une fonction L isolée.

5.5.3 Zéros réels des fonctions L de Dirichlet

Nous nous contentons ici d'énoncer le résultat qui a été en quelque sorte à l'origine de ce mémoire. J.B. Conrey et K. Soundararajan (**[CoSo]**) ont prouvé, en ramollissant et en se servant d'un lemme de comptage de zéros du à A. Selberg (**[Se]**) qui avait été remis au goût du jour par E. Kowalsi et P. Michel (**[KoMi]**), le résultat très surprenant suivant :

Théorème 5.5.1 (J.B. Conrey-K. Soundararajan (2002)). *Il existe une infinité (au moins* 20% *en un sens convenable) de caractères de Dirichlet primitifs χ dont la fonction L de Dirichlet $L(\chi,.)$ ne s'annule pas sur le segment critique* $[0,1]$.

C'est la première fois que l'on réussissait à exhiber une infinité de fonctions L sans zéros réels. La famille considérée par les auteurs est la famille $\mathcal{G}$. La technique de comptage des zéros sera décrite dans la partie suivante dans le cas de notre famille favorite, la famille $\mathcal{F}$ de fonctions L de Rankin-Selberg. Voici néanmoins les propriétés partagées par les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ qui jouent un rôle crucial :

- les équations fonctionnelles de chaque fonction L de ces familles ont le même signe,
- ce signe vaut un ; par conséquent, l'ordre d'annulation au point critique $\frac{1}{2}$ de chaque fonction L de ces familles est un entier naturel pair,
- le type de symétrie de ces familles est le type symplectique (au moins conjecturalement pour la famille $\mathcal{F}$).

Remarque 5.5.1. Nous insistons sur le fait que la formule asymptotique obtenue pour le second moment harmonique ramolli de la famille $\mathcal{F}$ (confer théorème 3.1.1) est la même que la formule asymptotique obtenue par J.B. Conrey et K. Soundararajan (confer théorème 2.2.6) pour le second moment ramolli de la famille $\mathcal{G}$. Ceci est conforme avec la théorie des matrices aléatoires et plus précisément la conjecture des moments qui prévoit que l'asymptotique d'un moment d'une famille ne dépend que du type de symétrie de cette famille. De même, les formules asymptotiques obtenues par K. Soundararajan pour les seconds moments ramollis des familles $\mathcal{H}_{\pm}$ seront certainement différentes de celles obtenues pour les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

Remarque 5.5.2. K. Soundararajan a annoncé aux Journées Arithmétiques 2003 (Graz) avoir prouvé un résultat concernant les zéros réels des fonctions L appartenant aux familles $\mathcal{H}_{\pm}$. Il faut toutefois noter que toutes les fonctions L de la famille $\mathcal{H}_{-}$ admettent trivialement un zéro au point critique sachant que le signe de leur équation fonctionnelle vaut -1.

5.6 Zéros réels des fonctions L de Rankin-Selberg

L'espace $S_k^p(q)$ est un espace de probabilité pour la mesure de probabilité harmonique suivante :

$$\forall A \subset S_k^p(q), \quad \mu_q^h(A) := \frac{1}{A_q^h[1]} A_q^h\left[\chi_A(.)\right]$$

où χ_A est la fonction caractéristique de l'ensemble mesurable A. Le résultat final concernant les zéros réels des fonctions L de Rankin-Selberg est donné par :

Théorème 5.6.1. *Soit g une forme primitive cuspidale de niveau D sans facteurs carrés, de poids $k_g \geq 22$ et de caractère trivial. Il existe une infinité (au moins 1.8% en un sens convenable) de fonctions L de Rankin-Selberg $L(f \times g, .)$, où f décrit l'ensemble des formes primitives cuspidales de niveau premier q suffisamment grand, de poids $k \geq k_g + 6$ et de caractère trivial qui admettent au plus huit zéros réels non-triviaux. Plus précisément, pour q un nombre premier et premier avec D, et $k \geq k_g + 6$, on a :*

$$\mu_q^h\left(\{f \in S_k^p(q), L(f \times g, .) \text{ admet au plus huit zéros dans } [0,1]\}\right) \geq 0.018 + o_g(1).$$

Remarque 5.6.1. En supposant la conjecture de Ramanujan-Petersson-Selberg (hypothèse $H_2(0)$), on obtient 4% de fonctions L de Rankin-Selberg ayant au plus 6 zéros réels non-triviaux. Cependant, même cette conjecture puissante et profonde ne semble pas donner l'existence d'une infinité de fonctions L de Rankin-Selberg sans zéros dans $[0,1]$ par la méthode actuelle.

Au cours de la preuve du théorème précédent, nous établissons aussi des résultats concernant le rang analytique de la famille $\mathcal{F}$ défini par :

$$r(f \times g) = \mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}} L(f \times g, s).$$

Théorème 5.6.2. *Le rang analytique $r(. \times g)$ de la famille $\mathcal{F}$ est borné en moyenne. Plus précisément, il satisfait :*

$$\frac{1}{A_q^h[1]} A_q^h[r(. \times g)] \leq 9.82 + o_g(1)$$

Remarque 5.6.2. On peut remplacer 9.82 par 7.66 en supposant la conjecture de Ramanujan-Petersson-Selberg.

Remarque 5.6.3. En fait, en appliquant la procédure décrite dans **[H-BMi]**, on peut obtenir la décroissance exponentielle du rang analytique de la famille $\mathcal{F}$: il existe des constantes absolues $A, B > 0$ telles que :

$$\frac{1}{A_q^h[1]} A_q^h\left[\exp\left(Ar(. \times g)\right)\right] \leq B.$$

Ainsi, la proportion harmonique des formes primitives de niveau premier q premier avec D, de poids $k \geq k_g + 6$ et de rang analytique plus grand que r décroit exponentiellement avec r.

Remarque 5.6.4. Tous les résultats précédents concernant le rang analytique de la famille $\mathcal{F}$ sont en accord avec la théorie des matrices aléatoires et en particulier avec la conjecture du rang qui prédit que pour tout entier naturel $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mu_q^h\left(\{f \in S_k^p(q), r(f \times g) = 0\}\right) &\to 1, \\ \mu_q^h\left(\{f \in S_k^p(q), r(f \times g) = 2m\}\right) &\to 0 \end{aligned}$$

lorsque $q \to +\infty$.

Nous allons maintenant donner les détails de la technique de comptage.

5.6.1 Autour du lemme de comptage

Le lemme de Selberg est le point de départ de la preuve des résultats précédents :

Lemme 5.6.3. *Soit ψ une fonction holomorphe, qui ne s'annule pas dans un demi-plan $\Re(z) \geq W$. Soit $\mathcal{B}$ la boîte rectangulaire de sommets $W_0 \pm iH$, $W_1 \pm iH$ où $H > 0$ et $W_0 < W < W_1$. Alors :*

$$\begin{aligned} 4H \sum_{\substack{\beta+i\gamma \in \mathcal{B} \\ \psi(\beta+i\gamma)=0}} \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2H}\right) \sinh\left(\frac{\pi(\beta - W_0)}{2H}\right) &= \int_{-H}^{H} \cos\left(\frac{\pi t}{2H}\right) \log|\psi(W_0 + it)| \mathrm{d}t \\ &+ \int_{W_0}^{W_1} \sinh\left(\frac{\pi(\alpha - W_0}{2H}\right) \log|\psi(\alpha + iH)\psi(\alpha - iH)| \mathrm{d}\alpha \\ &- \Re\left(\int_{-H}^{H} \cos\left(\pi \frac{W_1 - W_0 + it}{2iH}\right) (\log\psi)(W_1 + it)\right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Une preuve de ce lemme est donnée dans l'article de J.B. Conrey et K. Soundararajan (**[CoSo]**). Cette preuve repose sur le fait que :

$$\int_{\partial\mathcal{B}} k(s)(\log f)(s) \mathrm{d}s = 0 \tag{5.6.1}$$

avec :

$$k(s) := \cos\left(\pi \frac{s - W_0}{2iH}\right)$$

et $\partial\mathcal{B}$ le bord de la boîte $\mathcal{B}$. Signalons que les propriétés indispensables notées $(\mathcal{P})$ du noyau k sont :

– k est imaginaire pur sur $\Im(s) = H$ et y satisfait :

$$k(s) = -k(\overline{s}),$$

– k vérifie la condition de positivité suivante dans la boite $\mathcal{B}$:

$$\forall \beta \in [W_0, W_1], \forall \gamma \in [-H, H], \quad \Re k(\beta + i\gamma) \geq 0.$$

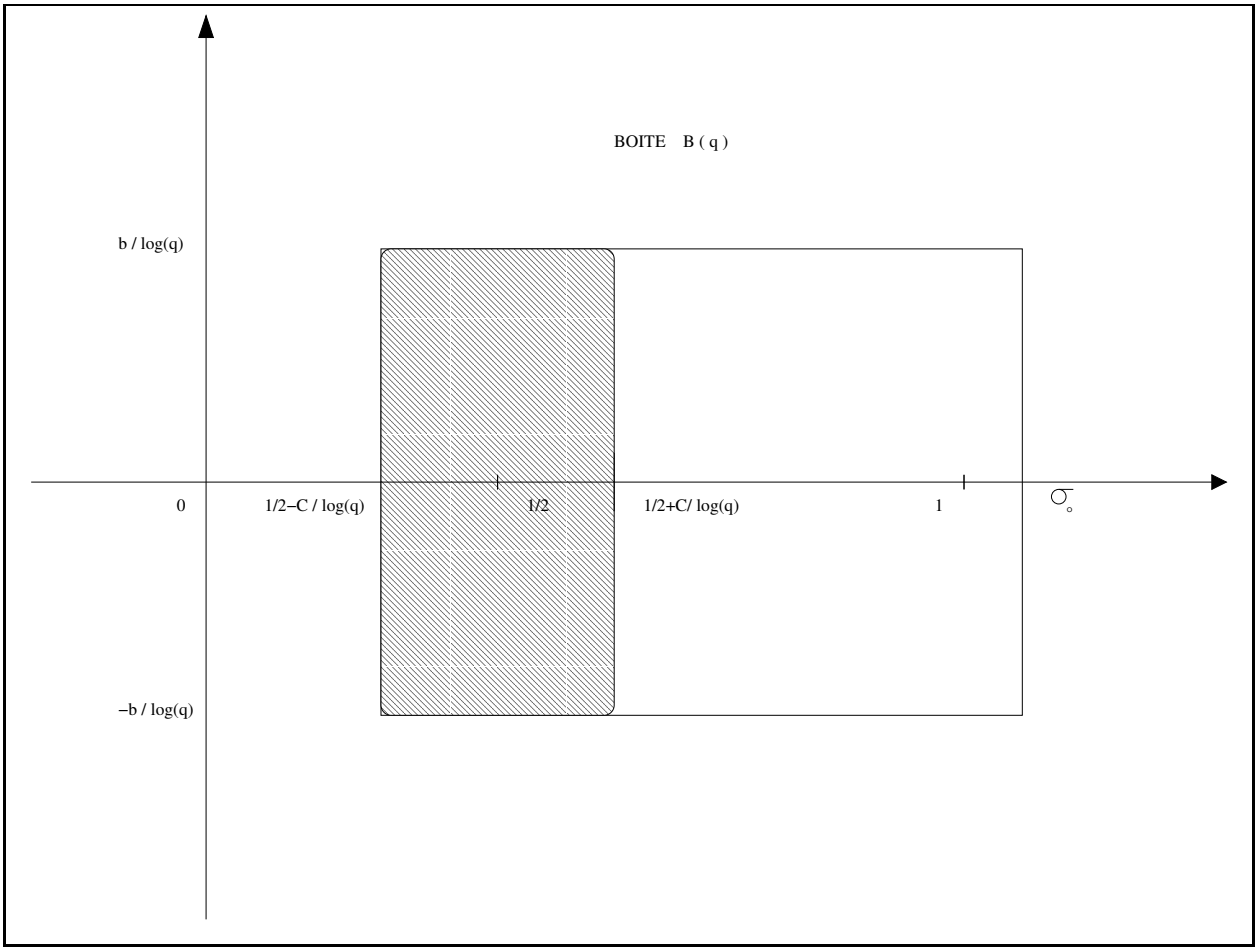

Fig 5.1: Boîte $\mathcal{B}(q)$

On désire appliquer le lemme de Selberg à $L(f\times g,.)$ avec la boîte $\mathcal{B}(q)$ (figure 5.1). Soient N un entier naturel et $S_k^p(q,N)$ l'ensemble des formes f de $S_k^p(q)$ dont la fonction L de Rankin-Selberg $L(f\times g,.)$ admet :

- un zéro d'ordre $2n_1$ en $\frac{1}{2}$,
- et n_2 zéros avec multiplicités dans $\left]\frac{1}{2},1\right]$

avec $2n_1+2n_2\geq 2(N+1)$. On remarque que le complémentaire de $S_k^p(q,N)$ dans $S_k^p(q)$ est exactement l'ensemble des formes f de $S_k^p(q)$ dont la fonction L de Rankin-Selberg $L(f\times g,.)$ admet au plus $2N$ zéros dans $[0,1]$. On note aussi :

$$s_k^{p,h}(q,N):=\mu^h\left(S_k^p(q,N)\right).$$

L'idée de la preuve est la suivante : nous allons trouver un entier naturel N indépendant de q tel que pour q suffisamment grand :

$$s_k^{p,h}(q,N)\leq s_0<1$$

et conclure que pour $100(1-s_0)\%$ de formes primitives cuspidales f de poids k et de caractère trivial, $L(f\times g)$ admet au plus $2N$ zéros non-triviaux sur l'axe réel (et en fait dans une petite boîte $\mathcal{B}(q)$ de hauteur $\mathcal{O}(1)/\log q$).

5.6.2 Les étapes successives et la méthode de ramollissement

Nous suivons la méthode développée dans l'article de J.B. Conrey et K. Soundararajan. Soit f dans $S_k^p(q)$. On pose :

$$Z_q(f;b,c):=\sum_{\substack{1\geq\beta\geq\frac{1}{2}-\frac{c}{\log q}\\ \beta\neq\frac{1}{2}\\ L(f\times g,\beta)=0}}\sinh\left(\frac{\pi\left(c+\log q\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\right)}{2b}\right).$$

Le lemme de Selberg entraîne que :

$$4b\sinh\left(\frac{\pi c}{2b}\right)r(f\times g)+4bZ_q(f;b,c)\leq\sum_{j=1}^{3}I_f^q(j)$$

où :

$$I_f^q(1)=\int_{-b}^{b}\cos\left(\frac{\pi t}{2b}\right)\log\left|L\left(f\times g,\frac{1}{2}-\frac{c}{\log q}+i\frac{t}{\log q}\right)\right|\mathrm{d}t,$$

$$I_f^q(2)=\int_{-c}^{\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)\log q}\sinh\left(\frac{\pi(x+c)}{2b}\right)\log\left|L\left(f\times g,\frac{1}{2}+\frac{x}{\log q}+i\frac{b}{\log q}\right)\right|^2\mathrm{d}x,$$

$$I_f^q(3)=-\Re\left(\int_{-b}^{b}\cos\left(\pi\frac{\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)\log q+c+it}{2ib}\right)\left(\log L(f\times g,.)\right)\left(\sigma_0+i\frac{t}{\log q}\right)\mathrm{d}t\right).$$

Tout repose sur le lemme suivant :

Lemme 5.6.4. *Soit f dans $S_k^p(q)$. Si $L(f\times g,.)$ admet n_2 zéros avec multiplicités dans $\left]\frac{1}{2},1\right]$ alors :*

$$Z_q(f;b,c)\geq 2n_2\sinh\left(\frac{\pi c}{2b}\right).$$

Preuve du lemme 5.6.4 Supposons que $L(f\times g,\beta)=0$ avec $\frac{1}{2}<\beta\leq 1$.

– Si $\frac{1}{2}+\frac{c}{\log q}<\beta\leq 1$ alors :

$$\sinh\left(\frac{\pi\left(c+\log q\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\right)}{2b}\right)\geq 2\sinh\left(\frac{\pi c}{2b}\right)$$

car $\sinh(2x)\geq 2\sinh x$ si $x\geq 0$.

– Si $\beta:=\frac{1}{2}+\frac{\xi}{\log q}$ avec $0<\xi\leq c$ alors l'équation fonctionnelle implique que :

$$L\left(f\times g,\frac{1}{2}-\frac{\xi}{\log q}\right)=0$$

et la contribution de ce zéro β à $Z_q(f;b,c)$ est de :

$$\sinh\left(\frac{\pi(c+\xi)}{2b}\right)+\sinh\left(\frac{\pi(c-\xi)}{2b}\right)\geq 2\sinh\left(\frac{\pi c}{2b}\right)$$

car $\sinh(x+y)+\sinh(x-y)\geq 2\sinh x$ si $0\leq y\leq x$.

On termine la preuve de ce lemme en remarquant que la somme dans $Z_q(f;b,c)$ tient compte des multiplicités.

■

Ainsi, on s'aperçoit que si f appartient à $S_k^p(q,N)$ alors :

$$(N+1)\times 8b\sinh\left(\frac{\pi c}{2b}\right)\leq\sum_{j=1}^{3}I_f^q(j)$$

et que pour toute forme f dans $S_k^p(q)$:

$$4b\sinh\left(\frac{\pi c}{2b}\right)r(f\times g)\leq\sum_{j=1}^{3}I_f^q(j).$$

On obtient en moyennant :

$$s_k^{p,h}(q,N)\leq\frac{1}{N+1}\frac{1}{A_q^h[1]8b\sinh\left(\frac{\pi c}{2b}\right)}A_q^h\left[\sum_{j=1}^{3}I_.^q(j)\right]$$

et :

$$\frac{1}{A_q^h[1]}A_q^h[r(.\times g)]\leq 2\frac{1}{A_q^h[1]8b\sinh\left(\frac{\pi c}{2b}\right)}A_q^h\left[\sum_{j=1}^{3}I_.^q(j)\right].$$

Le second moment de la famille $\mathcal{F}$ est défini pour tout nombre complexe μ par :

$$W^h(g;\mu) := A_q^h\left[\left|L\left(.\times g,\frac{1}{2}+\mu\right)\right|^2\right].$$

La concavité de la fonction log entraîne alors que :

$$s_k^{p,h}(q,N) \leq \frac{1}{N+1}\frac{1}{8b\sinh\left(\frac{\pi c}{2b}\right)}\left(J_1^{q,h}+J_2^{q,h}+\frac{1}{A_q^h[1]}A_q^h[I_.^q(3)]\right) \tag{5.6.2}$$

et

$$\frac{1}{A_q^h[1]}A_q^h[r(.\times g)] \leq 2\frac{1}{8b\sinh\left(\frac{\pi c}{2b}\right)}\left(J_1^{q,h}+J_2^{q,h}+\frac{1}{A_q^h[1]}A_q^h[I_.^q(3)]\right) \tag{5.6.3}$$

où :

$$\begin{aligned} J_1^{q,h} &:= \int_0^b \cos\left(\frac{\pi t}{2b}\right)\log\left(\frac{1}{A_q^h[1]}W^h\left(g;\frac{-c+it}{\log q}\right)\right)\mathrm{d}t,\\ J_2^{q,h} &:= \int_{-c}^{\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)\log q}\sinh\left(\frac{\pi(x+c)}{2b}\right)\log\left(\frac{1}{A_q^h[1]}W^h\left(g;\frac{x+ib}{\log q}\right)\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

J.B. Conrey et K. Soundararajan ont comparé le lemme de Selberg et le principe de l'argument habituellement utilisé pour compter des zéros. Le principal inconvénient du principe de l'argument est que l'argument de $L(f\times g,.)$ est très lié aux éventuels zéros présents sur les côtés horizontaux de $\mathcal{B}(q)$ ce qui fait que l'on maîtrise mal $L(f\times g,.)$ sur ces segments. Pour appliquer le lemme de Selberg, on a seulement besoin de contrôler $\log L(f\times g,.)$ sur ces côtés horizontaux, sur le segment vertical gauche ce qui est plus facile et dans la région d'absolue convergence de la fonction L pour le segment vertical droite. Tout ceci est rendu possible par la contribution du noyau $x\mapsto \sinh\left(\frac{\pi(x+c)}{2b}\right)$. Malheureusement, ce noyau croît comme $x\mapsto q^{\frac{\pi(x+c)}{2b}}$ sur les côtés horizontaux de la boîte ce qui n'est pas acceptable pour nous. Ce problème est résolu en ramollissant : on remplace $L(f\times g,.)$ par $\mathcal{L}(f\times g,.) := L(f\times g,.)M(f\times g,.)$ de sorte que la fonction L ramollie soit très proche de 1. Ainsi, la croissance exponentielle du noyau est compensée par la décroissance exponentielle du logarithme du second moment harmonique ramolli de la famille $\mathcal{F}$. Le défaut de cette procédure est que l'on compte de nouveau les zéros à la fois de la fonction L de Rankin-Selberg et du ramollisseur.

K. Soundararajan a vraiment légitimé la méthode de ramollissement aux Journées Arithmétiques 2003 (Graz). En effet, on pourrait avoir l'idée de modifier le lemme de Selberg et de chercher un autre noyau k dans (5.6.1) ayant les propriétés $(\mathcal{P})$ qui ne croisse pas exponentiellement vite sur les segments horizontaux de la boîte. Cette idée est vouée à l'échec car K. Soundararajan nous a convaincu, par des arguments d'analyse complexe (principe de réflexion, principe du maximum), que tout noyau k convenable croît exponentiellement sur les côtés horizontaux de la boîte !

Au cours de la preuve, il deviendra évident qu'il est malheureusement impossible de choisir une boîte d'ordre de grandeur plus petit que $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log q}\right)$ (confer (5.6.7)). De plus, il apparaîtra une limitation naturelle entre la hauteur de la boîte et la longueur du ramollisseur (confer (5.6.8)).

En recommençant la même procédure avec la fonction L ramollie au lieu de la fonction L, on obtient :

Proposition 5.6.5.

$$s_k^{p,h}(q,N) \leq \frac{1}{N+1}\frac{1}{8b\sinh\left(\frac{\pi c}{2b}\right)}\left(\mathcal{J}_1^{q,h}+\mathcal{J}_2^{q,h}+\frac{1}{A_q^h[1]}A_q^h[\mathcal{I}_\cdot^q(3)]\right) \tag{5.6.4}$$

et

$$\frac{1}{A_q^h[1]}A_q^h[r(.\times g)] \leq 2\frac{1}{8b\sinh\left(\frac{\pi c}{2b}\right)}\left(\mathcal{J}_1^{q,h}+\mathcal{J}_2^{q,h}+\frac{1}{A_q^h[1]}A_q^h[\mathcal{I}_\cdot^q(3)]\right) \tag{5.6.5}$$

où :

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1^{q,h} &:= \int_0^b \cos\left(\frac{\pi t}{2b}\right)\log\left(\frac{1}{A_q^h[1]}\mathcal{W}^h\left(g;\frac{-c+it}{\log q}\right)\right)\mathrm{d}t,\\ \mathcal{J}_2^{q,h} &:= \int_{-c}^{\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)\log q}\sinh\left(\frac{\pi(x+c)}{2b}\right)\log\left(\frac{1}{A_q^h[1]}\mathcal{W}^h\left(g;\frac{x+ib}{\log q}\right)\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

et pour tout f dans $S_k^p(q)$,

$$\mathcal{I}_f^q(3) = -\Re\left(\int_{-b}^{b}\cos\left(\pi\frac{\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)\log q+c+it}{2ib}\right)\left(\log\mathcal{L}(f\times g,.)\right)\left(\sigma_0+i\frac{t}{\log q}\right)\mathrm{d}t\right).$$

5.6.3 Fin de la preuve

On suppose que Δ est une longueur de ramollisseur effective. Le point de départ est les inégalités (5.6.4) et (5.6.5). On pose $\tilde{b} := 2b$ et $\tilde{c} := 2c$. On choisit :

$$\sigma_0 := 1+\frac{\log_2(q)}{\log q}. \tag{5.6.6}$$

En nottant $\mathcal{B}\left(f\times g,\sigma_0+i\frac{t}{\log q}\right) := \mathcal{L}\left(f\times g,\sigma_0+i\frac{t}{\log q}\right)-1$, on a :

$$\left(\log\mathcal{L}(f\times g,.)\right)\left(\sigma_0+i\frac{t}{\log q}\right) = \mathcal{B}\left(f\times g,\sigma_0+i\frac{t}{\log q}\right)+\mathcal{O}\left(\left|\mathcal{B}\left(f\times g,\sigma_0+i\frac{t}{\log q}\right)\right|^2\right)$$

et aussi :

$$\frac{1}{A_q^h[1]}A_q^h\left[\log\left(\mathcal{L}\left(.\times g,\sigma_0+i\frac{t}{\log q}\right)\right)\right] \ll q^{-4\Delta(1-\Upsilon)\left(\frac{1}{2}+\frac{\log_2 q}{\log q}\right)}$$

selon le théorème 3.1.2. Finalement :

$$\frac{1}{A_q^h[1]} A_q^h[\mathcal{I}_\cdot^{\,q}(3)] \ll (\log q)^{\left(\frac{\pi}{\tilde{b}}-4\Delta(1-\Upsilon)\right)} q^{\frac{\pi}{2\tilde{b}}-2\Delta(1-\Upsilon)}. \tag{5.6.7}$$

Ce terme est un terme d'erreur car on suppose dorénavant que :

$$\tilde{b} > \frac{\pi}{4\Delta(1-\Upsilon)}. \tag{5.6.8}$$

Soit f une fonction strictement positive satisfaisant :

$$\begin{aligned} \exists \lim_{q\to+\infty} f(q) &= +\infty, \\ f(q) &= o(\log q). \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{2,1}^{q,h} &:= \int_{-c}^{f(q)} \sinh\left(\frac{\pi(x+c)}{2b}\right) \log\left(\frac{1}{A_q^h[1]}\mathcal{W}^h\left(g;\frac{x+ib}{\log q}\right)\right)\mathrm{d}x, \\ \mathcal{J}_{2,2}^{q,h} &:= \int_{f(q)}^{\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)\log q} \sinh\left(\frac{\pi(x+c)}{2b}\right) \log\left(\frac{1}{A_q^h[1]}\mathcal{W}^h\left(g;\frac{x+ib}{\log q}\right)\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Le théorème 3.1.1 assure que :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1^{q,h} &= \frac{1}{2}\int_0^{\tilde{b}} \cos\left(\frac{\pi t}{2\tilde{b}}\right) \log\left(\mathcal{V}_{\Delta,P}^{\Upsilon}(-\tilde{c},t)\right)\mathrm{d}t + \mathcal{O}_g\left(\frac{1}{q^\delta}+\frac{1}{\log q}\right), \\ \mathcal{J}_{2,1}^{q,h} &= \frac{1}{2}\int_0^{2(c+f(q))} \sinh\left(\frac{\pi x}{2\tilde{b}}\right) \log\left(\mathcal{V}_{\Delta,P}^{\Upsilon}\left(x-\tilde{c},\tilde{b}\right)\right)\mathrm{d}x + \frac{\exp\left(\frac{\pi f(q)}{\tilde{b}}\right)}{q^\delta} \\ &\quad + \frac{f(q)}{\log q}\left(1+\int_0^{f(q)} \sinh\left(\frac{\pi(x+c)}{2b}\right)\exp\left(-4\Delta(1-\Upsilon)\right)\mathrm{d}x\right), \\ \mathcal{J}_{2,2}^{q,h} &\ll \exp\left(-\left(4\Delta(1-\Upsilon)-\frac{\pi}{\tilde{b}}\right)f(q)\right) \end{aligned}$$

pour une constante absolue δ strictement positive. Notre choix de hauteur de boîte entraîne que les intégrales :

$$\frac{1}{2}\int_0^{2(c+f(q))} \sinh\left(\frac{\pi x}{2\tilde{b}}\right) \log\left(\mathcal{V}_{\Delta,P}^{\Upsilon}\left(x-\tilde{c},\tilde{b}\right)\right)\mathrm{d}x$$

et :

$$\int_0^{f(q)} \sinh\left(\frac{\pi(x+c)}{2b}\right)\exp\left(-4\Delta(1-\Upsilon)x\right)\mathrm{d}x$$

convergent en $+\infty$ d'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1^{q,h} &\leq \frac{1}{2}\int_0^{\tilde{b}} \cos\left(\frac{\pi t}{2\tilde{b}}\right) \log\left(\mathcal{V}_{\Delta,P}^{\Upsilon}(-\tilde{c},t)\right)\mathrm{d}t + o_g(1), \\ \mathcal{J}_{2,1}^{q,h} &\leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sinh\left(\frac{\pi x}{2\tilde{b}}\right) \log\left(\mathcal{V}_{\Delta,P}^{\Upsilon}\left(x-\tilde{c},\tilde{b}\right)\right)\mathrm{d}x + \frac{\exp\left(\frac{\pi f(q)}{\tilde{b}}\right)}{q^\delta} + \frac{f(q)}{\log q}, \\ \mathcal{J}_{2,2}^{q,h} &\ll \exp\left(-\left(4\Delta(1-\Upsilon)-\frac{\pi}{\tilde{b}}\right)f(q)\right). \end{aligned}$$

On choisit alors :

$$f(q) = \log^{\alpha} q$$

avec $0 < \alpha < 1$ ce qui assure que :

$$s_k^{p,h}(q,N) \leq \frac{1}{N+1} \frac{1}{8\tilde{b}\sinh\left(\frac{\pi\tilde{c}}{2\tilde{b}}\right)} \left(\int_0^{\tilde{b}} \cos\left(\frac{\pi t}{2\tilde{b}}\right) \log\left(\mathcal{V}_{\Delta,P}^{\Upsilon}\left(-\tilde{c},t\right)\right) \mathrm{d}t \right.$$
$$\left. + \int_0^{\infty} \sinh\left(\frac{\pi x}{2\tilde{b}}\right) \log\left(\mathcal{V}_{\Delta,P}^{\Upsilon}\left(x-\tilde{c},\tilde{b}\right)\right) \mathrm{d}x \right) + o_g(1)$$

et que :

$$\frac{1}{A_q^h[1]} A_q^h[r(.\times g)] \leq 2 \frac{1}{8\tilde{b}\sinh\left(\frac{\pi\tilde{c}}{2\tilde{b}}\right)} \left(\int_0^{\tilde{b}} \cos\left(\frac{\pi t}{2\tilde{b}}\right) \log\left(\mathcal{V}_{\Delta,P}^{\Upsilon}\left(-\tilde{c},t\right)\right) \mathrm{d}t \right.$$
$$\left. + \int_0^{\infty} \sinh\left(\frac{\pi x}{2\tilde{b}}\right) \log\left(\mathcal{V}_{\Delta,P}^{\Upsilon}\left(x-\tilde{c},\tilde{b}\right)\right) \mathrm{d}x \right) + o_g(1).$$

On choisit :

$$P(x) = 3\left(\frac{x}{\Upsilon}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\Upsilon}\right)^3$$

et :

$$\tilde{b} = \frac{\pi}{4\Delta(1-\Upsilon) - 10^{-10}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} s_k^{p,h}(q,N) &\leq \frac{1}{N+1} I_{\mathrm{num}}(\Delta) + o_g(1), \\ \frac{1}{A_q^h[1]} A_q^h[r(.\times g)] &\leq 2 I_{\mathrm{num}}(\Delta) + o_g(1) \end{aligned}$$

où :

$$I_{\mathrm{num}}(\Delta) = \inf_{\substack{0<\Upsilon<1 \\ \tilde{c}>0}} \mathrm{num} \frac{1}{8\tilde{b}\sinh\left(\frac{\pi\tilde{c}}{2\tilde{b}}\right)} \left(\int_0^{\tilde{b}} \cos\left(\frac{\pi t}{2\tilde{b}}\right) \log\left(\mathcal{V}_{\Delta,P}^{\Upsilon}\left(-\tilde{c},t\right)\right) \mathrm{d}t \right.$$
$$\left. + \int_0^{\infty} \sinh\left(\frac{\pi x}{2\tilde{b}}\right) \log\left(\mathcal{V}_{\Delta,P}^{\Upsilon}\left(x-\tilde{c},\tilde{b}\right)\right) \mathrm{d}x \right)$$

La notation infnum signifie que l'on calcule de façon numérique avec le logiciel MapleV[2] les intégrales apparaissant dans le membre de droite et que l'on détermine donc expérimentalement la plus petite valeur possible pour le membre de droite à longueur de ramollisseur effective fixée. On constate évidemment que la «fonction» $I_{\mathrm{num}}(\Delta)$ est «décroissante» (tout

[2]les lignes de code (inte.mws) sont disponibles à l'adresse suivante : http ://guillaume.ricotta.free.fr

Δ	Υ	$\tilde{c}$	$I_{\mathrm{num}}(\Delta)$	$2N$	$\frac{I_{\mathrm{num}}(\Delta)}{E(I_{\mathrm{num}}(\Delta))+1}$	$100\left(1-\frac{I_{\mathrm{num}}(\Delta)}{E(I_{\mathrm{num}}(\Delta))+1}\right)$	$2I_{\mathrm{num}}(\Delta)$
$\frac{1}{60}$	0.3	10	11.17	22	0.94	6%	22.34
$\frac{25}{1052}$	0.37	17	7.66	14	0.96	4.3%	15.32
$\frac{25}{924}$	0.39	17	6.8	12	0.98	2.9%	13.6
$\frac{1}{32}$	0.4	20	5.17	10	0.87	13.9%	10.34
$\frac{1}{28}$	0.42	21	5.14	10	0.86	14.4%	10.28
$\frac{25}{668}$	0.44	23	4.91	8	0.982	1.8%	9.82
$\frac{1}{20}$	0.45	23.7	3.83	6	0.96	4%	7.66
$\frac{1}{2}$	0.64	6.8	0.79	0	0.79	21%	1.58

TAB. 5.2 – Quelques valeurs prises par $I_{\mathrm{num}}(\Delta)$

ceci est expérimental d'où les guillemets) : plus le ramollisseur est long, meilleur est le résultat. On choisit alors :

$$N = E(I_{\mathrm{num}}(\Delta)) \tag{5.6.9}$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x. On donne dans le tableau 5.2 quelques valeurs obtenues pour $I_{\mathrm{num}}(\Delta)$ pour les longueurs de ramollisseur qui nous intéressent. Le tableau se lit de la façon suivante : pour chaque ramolliseur Δ et pour tout nombre premier q suffisamment grand, on arrive à exhiber :

$$100\left(1-\frac{I_{\mathrm{num}}(\Delta)}{E(I_{\mathrm{num}}(\Delta))+1}\right)\%$$

de fonctions L de Rankin-Selberg $L(f\times g,.)$ avec f dans $S_k^p(q)$ ayant au plus $2N$ zéros réels non-triviaux

■

5.6.4 Justification via le modèle des matrices aléatoires

La théorie des matrices aléatoires permet de comprendre pourquoi cette méthode a une chance d'être efficace à condition de pouvoir prendre une longueur de ramollisseur suffisamment grande. Le défaut majeur de cette méthode est que l'on tient compte des zéros des fonctions L qui sont dans la boîte $\mathcal{B}(q)$ privée de l'axe réel. Or, même en supposant l'hypothèse de Riemann généralisée pour toutes les fonctions L des familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, il pourrait y avoir a priori des zéros sur l'axe critique très proches du point critique ! La théorie des matrices aléatoires prévoit que ce n'est pas le cas car :

– les valeurs propres des matrices aléatoires unitaires symplectiques de grand rang se comportent comme les valeurs propres des matrices aléatoires orthogonales impaires de grand rang,

– pour les matrices aléatoires orthogonales impaires de grand rang, la valeur propre 1 «repousse» les autres valeurs propres.

En d'autres termes, comme le type de symétrie des familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est le type symplectique, le premier zéro de toute fonction L des familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est repoussé suffisamment loin de l'axe réel. Ce phénomène de répulsion est aussi présent pour les familles $\mathcal{H}_\pm$:

– le premier zéro de toute fonction L de $\mathcal{H}_+$ est repoussée par l'axe réel,
– le second zéro de toute fonction L de $\mathcal{H}_-$ est repoussée par le point critique (qui est le premier zéro !).

Chapitre 6

Taille des fonctions L et méthode d'amplification

Le problème fondamental en théorie analytique des nombres détaillé dans ce chapitre est le problème de sous-convexité dont les conséquences arithmétiques sont nombreuses et ont souvent des interprétations «géométriques». La nouvelle borne de sous-convexité obtenue pour les fonctions L de Rankin-Selberg est prouvée dans ce chapitre.

6.1 Présentation du problème de sous-convexité et premiers exemples

6.1.1 Généralités

On s'intéresse dans ce chapitre à la taille des fonctions L sur toute droite verticale et plus spécialement sur la droite critique. Soit $L(\pi_0, .)$ une fonction L fixée. On définit pour tout nombre réel σ :

$$\mu(\pi_0;\sigma) := \inf\left\{\xi \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, L(\pi_0, \sigma+it) = \mathcal{O}\left(Q_{\pi_0}(t)^{\xi}\right)\right\}. \tag{6.1.1}$$

Selon **[Ti1]**, $\sigma \mapsto \mu(\pi_0;\sigma)$ est une fonction convexe positive décroissante continue appelée *fonction ordre* de π_0. Le point-clef est la convexité de cette fonction qui résulte du principe de Phragmen-Lindelöf suivant prouvé dans **[Ti2]** :

Proposition 6.1.1 (E.C. Titchmarsh). *Soient $\sigma_1 < \sigma_2$ deux nombres réels. On suppose que :*

$$\forall \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2], \exists \xi \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad L(\pi_0, \sigma+it) \ll Q_{\pi_0}(t)^{\xi}.$$

Si :

$$\forall j \in \{0,1\}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad L(\pi_0, \sigma_j+it) \ll Q_{\pi_0}(t)^{\xi_j}$$

alors :

$$\forall \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2], \forall t \in \mathbb{R}, \quad L(\pi_0, \sigma+it) \ll Q_{\pi_0}(t)^{l(\sigma)}$$

où $l(\sigma)$ est l'application affine prenant la valeur ξ_1 en σ_1 et ξ_2 en σ_2.

Soit $\delta > 1$. La théorie générale des séries de Dirichlet entraîne que sur $\Re(s) := \sigma \geq \delta$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad L(\pi_0, \sigma + it) \ll_\varepsilon Q_{\pi_0}(t)^\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$ donc $\mu(\pi_0; \sigma) = 0$ si $\sigma \geq \delta$ pour tout $\delta > 1$. Par continuité,

$$\forall \sigma \leq 1, \quad \mu(\pi_0; \sigma) = 0. \tag{6.1.2}$$

L'équation fonctionnelle de $L(\pi_0, .)$ s'écrit :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad L(\pi_0, s) = \chi(\pi_0, s) L(\tilde{\pi}_0, 1 - s)$$

où :

$$\chi(\pi_0, s) := \varepsilon_{\pi_0} q_{\pi_0}^{\frac{1}{2}-s} \frac{L_\infty(\tilde{\pi}_0, 1 - s)}{L_\infty(\pi_0, s)}$$

vérifie selon la formule de Stirling :

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}, \quad \chi(\pi_0, \sigma + it) \backsimeq_{|t| \to +\infty} \left(\frac{1}{2\pi^{d_{\pi_0}}} \right)^{\frac{1}{2}-\sigma} Q_{\pi_0}(t)^{\frac{1}{2}-\sigma}.$$

Ainsi, on obtient selon (6.1.2), $\mu(\pi_0; \sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$ si $\sigma \leq -\delta$ pour tout $\delta > 0$. Par continuité,

$$\forall \sigma \leq 0, \quad \mu(\pi_0; \sigma) = \frac{1}{2} - \sigma. \tag{6.1.3}$$

La fonction $\sigma \mapsto \mu(\pi_0; \sigma)$ est convexe donc son graphe est en-dessous de la corde joignant $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ à $(1, 0)$ ce qui assure que :

$$\mu\left(\pi_0; \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{4}.$$

En d'autres termes,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad L\left(\pi_0, \frac{1}{2} + it\right) \ll_\varepsilon Q_{\pi_0}(t)^{\frac{1}{4}+\varepsilon} \tag{6.1.4}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. La borne précédente est appellée *borne de convexité* ou *borne triviale*. L'*hypothèse de Lindelöf généralisée* est une conjecture qui concerne la taille de $L(\pi_0, .)$ sur la droite critique :

Hypothèse de Lindelöf généralisée.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad L\left(\pi_0, \frac{1}{2} + it\right) \ll_\varepsilon Q_{\pi_0}(t)^\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Cette conjecture est une conséquence faible de l'hypothèse de Riemann généralisée pour $L(\pi_0, .)$: il s'agit d'appliquer le principe du maximum à une détermination holomorphe du logarithme de $L(\pi_0, .)$. On peut la réécrire sous la forme suivante :

Hypothèse de Lindelöf généralisée.

$$\mu\left(\pi_0; \frac{1}{2}\right) = 0.$$

L'hypothèse de Lindelöf généralisée pour $L(\pi_0, .)$ est équivalente à l'énoncé suivant :

$$\mu(\pi_0;\sigma) \begin{cases} = \frac{1}{2} - \sigma & \text{si} \quad \sigma \leq 0, \\ \leq \frac{1}{2} - \sigma & \text{si} \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}, \\ = 0 & \text{si} \quad \sigma \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{6.1.5}$$

L'allure du graphe de $\mu(\pi_0; .)$ est donnée dans la figure 6.1. On appelle *borne de sous-convexité* tout résultat intermédiaire entre la borne de convexité et l'hypothèse de Lindelöf généralisée pour $L(\pi_0, .)$ à savoir il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad L\left(\pi_0, \frac{1}{2} + it\right) \ll_\varepsilon Q_{\pi_0}(t)^{\frac{1}{4}-\delta+\varepsilon} \tag{6.1.6}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ ce qui se réécrit :

$$\mu(\pi_0;\sigma) \begin{cases} = \frac{1}{2} - \sigma & \text{si} \quad \sigma \leq 0, \\ \leq \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + 2\delta\right)\sigma & \text{si} \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}, \\ \leq \left(\frac{1}{2} - 2\delta\right)(\sigma - 1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \geq 1, \\ 0 & \text{si } \sigma \geq 0. \end{cases}$$

La dernière section de ce chapitre mettra l'accent sur le fait qu'une borne de sous-convexité même microscopique (c'est-à-dire avec δ minuscule) a des conséquences arithmétiques profondes. Parfois, on se contente d'une borne de sous-convexité par rapport à un seul paramètre à savoir le conducteur arithmétique (parfois appelé *niveau*) q_{π_0} ou la *hauteur* de s donnée par $\left|\frac{1}{2} + it\right|$ ou le *paramètre spectral à l'infini* défini par $\prod_{i=1}^{d_{\pi_0}} (1 + |\mu_{\pi_0,i}|)$ tout en gardant les autres paramètres constants. Certaines applications nécessitent alors de garder un contrôle raisonnable (polynomial par exemple) de ces autres paramètres. On dit que l'on a *résolu le problème de convexité* pour une fonction L lorsque l'on a prouvé une borne de sous-convexité pour celle-ci.

6.1.2 Premiers exemples

Exemple A

La borne de convexité pour les fonctions L de Dirichlet est donnée par :

$$L\left(\chi, \frac{1}{2} + it\right) \ll_\varepsilon \left(q\left|\frac{1}{2} + it\right|\right)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$$

pour tout caractère de Dirichlet primitif de module q et pour tout $\varepsilon > 0$. D.A. Burgess (**[Bu]**) a obtenu une borne de sous-convexité par rapport au niveau à savoir :

$$L\left(\chi, \frac{1}{2} + it\right) \ll_\varepsilon \left|\frac{1}{2} + it\right|^2 q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\varepsilon}$$

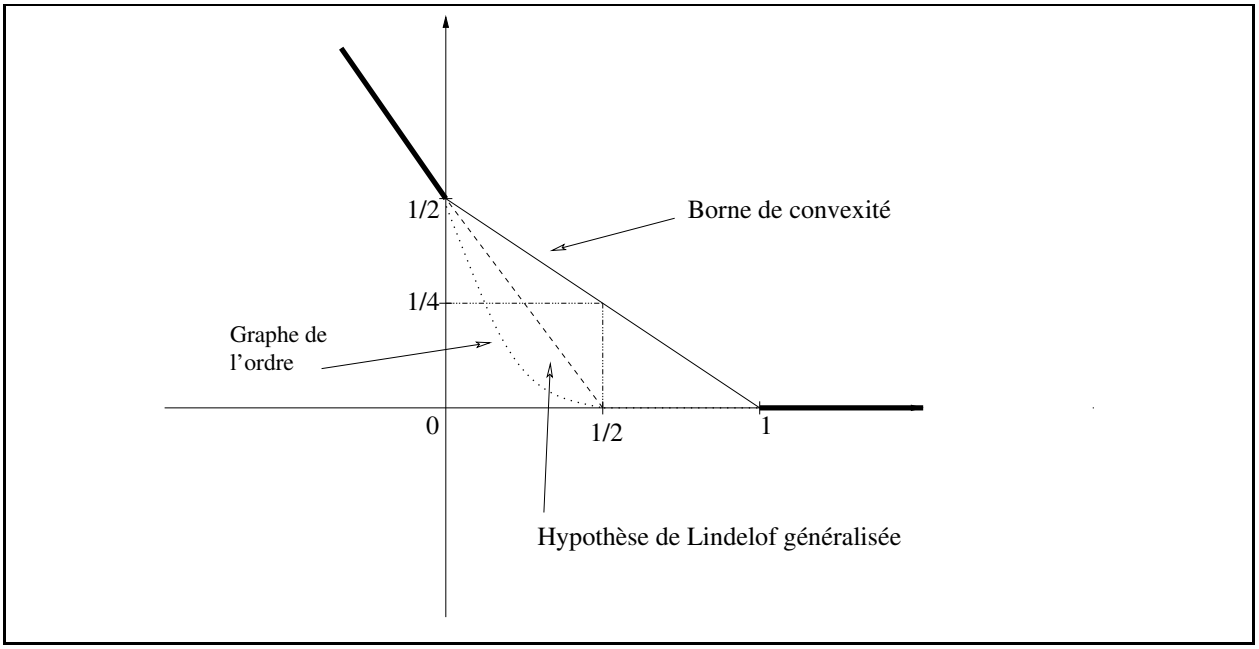

Fig 6.1: Graphe de $\sigma \mapsto \mu(\pi_0, \sigma)$

pour (entre autres...) tout caractère de Dirichlet primitif de module q et pour tout $\varepsilon > 0$. J.B. Conrey et H. Iwaniec (**[CoIw]**) ont amélioré ce résultat dans le cas des caractères de Dirichlet primitifs réels de module q (entre autres...) :

$$L\left(\chi, \frac{1}{2} + it\right) \ll_\varepsilon \left|\frac{1}{2} + it\right|^3 q^{\frac{1}{4} - \frac{3}{16} + \varepsilon}.$$

Exemple B
La borne de convexité pour $L(f, .)$ où f est une forme primitive cuspidale de niveau N, de poids k et de caractère trivial est donnée par :

$$L\left(f, \frac{1}{2} + it\right) \ll_\varepsilon \left(N \left|\frac{1}{2} + it\right|^2 k^2\right)^{\frac{1}{4} + \varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Exemple C
La borne de convexité pour les fonctions L de Rankin-Selberg de la famille $\mathcal{F}$ est donnée par :

$$L\left(f \times g, \frac{1}{2} + it\right) \ll_{g,k,\varepsilon} \left(q \left|\frac{1}{2} + it\right|^2\right)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$$

pour tout ε. E. Kowalski, P. Michel et J. Vanderkam (**[KoMiVa]**) ont résolu le problème de convexité pour ces fonctions L de Rankin-Selberg par rapport au niveau :

$$L\left(f \times g, \frac{1}{2} + it\right) \ll_{g,k,\varepsilon} \left|\frac{1}{2} + it\right|^B q^{\frac{1}{2} - \frac{1}{80} + \varepsilon}$$

pour une constante absolue $B > 0$ et pour tout ε.

6.2 Méthode d'amplification

Cette méthode permet parfois d'obtenir une borne de sous-convexité pour une fonction $L(\pi_0, .)$. On va en donner une description assez théorique en se limitant au point critique. On inclut cette fonction L particulière dans une famille $\mathcal{F} := \coprod_{Q \geq 1} \mathcal{F}(Q)$ de fonctions L. En pratique, on peut s'attendre à obtenir la borne suivante :

$$\sum_{\pi \in \mathcal{F}(Q)} \left| L\left(\pi, \frac{1}{2}\right) \right|^{\kappa} \ll_{\varepsilon} |\mathcal{F}(Q)| \, Q^{\varepsilon} \tag{6.2.1}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et pour Q suffisamment grand. Remarquons que cette borne est réalisée si l'on suppose l'hypothèse de Lindelöf généralisée pour toutes les fonctions L de la famille $\mathcal{F}$. Cette borne est communément appelé *borne de Lindelöf en moyenne* et entraîne que :

$$\left| L\left(\pi_0, \frac{1}{2}\right) \right| \ll_{\varepsilon} |\mathcal{F}(Q)|^{\frac{1}{\kappa}} \, Q_{\pi_0}^{\varepsilon} \tag{6.2.2}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. On se rend compte que ceci permet de résoudre le problème de convexité pour $L(\pi_0, .)$ uniquement lorsque :

$$\kappa > \kappa_0 = 4 \frac{\log |\mathcal{F}(Q)|}{\log Q}.$$

Ainsi, il faut absolument pouvoir borner un moment surcritique sur la droite critique. La méthode d'amplification permet de réduire la difficulté en se limitant au moment critique et nous autorise à prendre $\kappa = \kappa_0$. En pratique, on est capable de prouver que :

$$\sum_{\pi \in \mathcal{F}(Q)} \left| L\left(\pi, \frac{1}{2}\right) \right|^{\kappa_0} \left| M\left(\pi, \overrightarrow{x}, \frac{1}{2}\right) \right|^2 \ll_{\varepsilon} |\mathcal{F}(Q)| \left(||\overrightarrow{X}||_2^2 + \frac{L^A}{|\mathcal{F}(Q)|^a} ||\overrightarrow{X}||_1 \right) \tag{6.2.3}$$

où $\overrightarrow{X}$ est défini par :

$$\forall 1 \leq l \leq L = Q^{\Delta}, \quad X_l := \frac{x_l}{\sqrt{l}}.$$

Ici, A peut être «grand» et a peut être «petit» mais on espère que ce n'est pas trop le cas. On choisit le vecteur $\overrightarrow{x}$ de sorte que $\left| M\left(\pi_0, \overrightarrow{x}, \frac{1}{2}\right) \right|$ soit «grand» et *amplifie* la contribution de π_0 :

$$\left| M\left(\pi_0, \overrightarrow{x}, \frac{1}{2}\right) \right|^2 \gg L^{\alpha}, \tag{6.2.4}$$

$$||\overrightarrow{X}||_2^2 + ||\overrightarrow{X}||_1 \ll L^{\beta} \tag{6.2.5}$$

avec α et β des nombres réels strictement positifs. Le polynôme de Dirichlet $M\left(\pi, \overrightarrow{x}, s\right)$ s'appelle alors un *amplificateur*. Cette estimation en moyenne entraine que :

$$L\left(\pi_0, \frac{1}{2}\right) \ll Q_{\pi_0}^{\frac{1}{4} - \frac{\Delta}{\kappa_0}(\alpha - \beta)} + Q_{\pi_0}^{\frac{1}{4} - \frac{\Delta}{\kappa_0}(\alpha - \beta - A) - \frac{a}{4\kappa_0}}.$$

En supposant $\alpha > \beta$ et $\Delta(\alpha - \beta - A) + a > 0$ et en choisissant :

$$\Delta = \frac{a}{4A}$$

on obtient :

$$L\left(\pi_0, \frac{1}{2}\right) \ll Q_{\pi_0}^{\frac{1}{4} - \frac{a}{4A\kappa_0}(\alpha-\beta)} \tag{6.2.6}$$

ce qui est une borne de sous-convexité. Nous reviendrons dans la section suivante sur le choix d'un amplificateur dans le cas du degré 2. La méthode d'amplification apparaît donc comme la méthode «duale» de la méthode de ramollissement décrite dans le chapitre précédent.

6.3 Cas des fonctions L de Rankin-Selberg

Une conséquence intéressante de la nouvelle borne obtenue pour Errtwist$(q, l; \mu)$ (théorème 4.1.3) est une nouvelle borne de sous-convexité en fonction du niveau pour les fonctions L de Rankin-Selberg de la famille $\mathcal{F}$ obtenue par la **méthode d'amplification** :

Théorème 6.3.1. *Soit g une forme primitive cuspidale de niveau sans facteurs carrés, de poids $k_g \geq 20$ et de caractère trivial. Supposons que q est un nombre premier suffisamment grand et $k \geq k_g + 6$. Si θ est admissible alors pour tout entier naturel j et pour toute forme f dans $S_k^p(q)$, on a :*

$$\left| L^{(j)}\left(f \times g, \frac{1}{2} + it\right) \right| \ll_{\varepsilon,k,j,g} (1 + |t|)^B \, q^{\frac{1}{2} - \omega(\theta) + \varepsilon}, \tag{6.3.1}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ où t est un nombre réel, l'exposant $B > 0$ est une constante absolue et :

$$\omega(\theta) := \frac{1 - 2\theta}{4(9 + 4\theta)}.$$

Remarque 6.3.1. Dans **[KoMiVa]**, le même résultat a été prouvé mais avec $\omega = \frac{1}{80} = 0.0125$ au lieu $\omega(\theta)$. Mentionnons que :

$$\begin{aligned} \omega(\theta_0) &= \frac{25}{1208} = 0.020695..., \\ \omega(0) &= \frac{1}{36} = 0.027777... \end{aligned}$$

La suite de cette section est dédiée à la preuve du théorème 6.3.1. Posons (comme dans **[KoMiVa]**) pour tout entier naturel non-nul $L \geq 1$ et toute suite de nombres complexes $\overrightarrow{x} = (x_l)_{1 \leq l \leq L}$ satisfaisant $x_l = 0$ si $q \mid l$:

$$L_g(\mu, \overline{\mu}; L; \overrightarrow{x}) := \sum_{1 \leq l \leq L} x_l \mathsf{M}_g(\mu, \overline{\mu}; l).$$

Selon **[KoMiVa]** :

$$L_g(\mu, \overline{\mu}; L; \overrightarrow{x}) = \sum_{1 \leq l \leq L} x_l \text{Errtwist}(q, l; \mu) + \mathcal{O}_{\varepsilon,g}\left((1 + |t|)^B q^{\varepsilon} \sum_{1 \leq l \leq L} |x_l| \frac{\sigma_g(l)}{\sqrt{l}}\right).$$

Le théorème 4.1.3 entraine que :

Proposition 6.3.2. *Soit α un nombre réel dans $]0,1[$. Soient g une forme primitive cuspidale de niveau D sans facteurs carrés, de poids $k_g > 1 + \frac{5}{2(1-\alpha)}$ et de caractère trivial et μ un nombre complexe. Supposons que q est un nombre premier premier avec D et que $k \geq k_g + 6$. Si θ est admissible et $\Re(\mu) \ll \frac{1}{\log q}$ alors pour tout entier naturel non-nul $L < q$,*

$$L_g(\mu, \overline{\mu}; L; \overrightarrow{x}) \ll_{\varepsilon,k,g} (qL)^{\varepsilon} (1+|t|)^B \left(\sum_{1 \leq l \leq L} |x_l| \frac{\sigma_g(l)}{\sqrt{l}} + \left(\frac{L^{\frac{5}{4}+\frac{\theta}{2}}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{L^{2+\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{L^{\frac{9}{4}+\frac{\theta}{2}-\alpha}}{q^{\alpha-\frac{1}{2}-\theta}} \right) ||\overrightarrow{x}||_1 \right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Preuve du théorème 6.3.1. Soit $\mathcal{Q}(.)$ la forme quadratique suivante :

$$\mathcal{Q}(\overrightarrow{x}) := \sum_{f \in S_k^p(q)}^{h} \left| \sum_{1 \leq l \leq L} x_l \lambda_f(l) \right|^2 \left| L\left(f \times g, \frac{1}{2} + \mu\right) \right|^2.$$

pour $L < \sqrt{q}$. Définissons $\overrightarrow{X} := (X_l)_{1 \leq l \leq L^2}$ avec :

$$X_l := \sum_{d \geq 1} \sum_{\substack{l_1 l_2 = l \\ 1 \leq l_1, l_2 \leq \frac{L}{d}}} \overline{x_{dl_1}} x_{dl_2}.$$

Les auteurs de **[KoMiVa]** ont prouvé que :

$$\mathcal{Q}(\overrightarrow{x}) \ll_g L_g(\mu, \overline{\mu}; L^2; \overrightarrow{X}).$$

Comme :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq l \leq L^2} |X_l| \frac{\sigma_g(l)}{\sqrt{l}} &\ll_{\varepsilon} L^{\varepsilon} ||\overrightarrow{x}||_2^2, \\ ||\overrightarrow{X}||_1 &\ll_{\varepsilon} ||\overrightarrow{x}||_1^2 \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, la proposition 6.3.2 nous amène à :

$$\left| \sum_{1 \leq l \leq L} x_l \lambda_f(l) \right|^2 \left| L\left(f \times g, \frac{1}{2} + \mu\right) \right|^2 \ll_{\varepsilon,k,g} (qL)^{\varepsilon} (1+|t|)^B q \left(||\overrightarrow{x}||_2^2 + \left(\frac{L^{\frac{5}{2}+\frac{\theta}{2}}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{L^{4+2\theta}}{q^{\frac{1}{2}-\theta}} + \frac{L^{\frac{9}{2}+\theta-2\alpha}}{q^{\alpha-\frac{1}{2}-\theta}} \right) ||\overrightarrow{x}||_1 \right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Il s'agit alors de judicieusement choisir les coefficients de Dirichlet du futur amplificateur. Le choix le plus naturel est donné par :

$$x_l := \begin{cases} \overline{\lambda_f(p)} & \text{si} \quad l = p \quad \text{avec} \quad p \quad \text{un nombre premier}, \quad p \leq L, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas,

$$\left|\sum_{1\leq l\leq L} x_l\lambda_f(l)\right|^2 = \left|\sum_{1\leq p\leq\sqrt{L}} |\lambda_f(p)|^2\right|^2.$$

Malheureusement, cette dernière quantité peut être petite (en fait, chaque valeur propre de Hecke $\lambda_f(p)$ ($p\in\mathcal{P}$) peut être petite) et l'amplification est loin d'être optimale. Un choix plus judicieux a été proposé dans **[DuFrIw3]** :

$$x_l := \begin{cases} -1 & \text{si } l=p^2 \text{ avec } p \text{ un nombre premier, } p\leq\sqrt{L}, \\ \lambda_f(p) & \text{si } l=p \text{ avec } p \text{ un nombre premier, } p\leq\sqrt{L}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas, $\left|\sum_{1\leq l\leq L} x_l\lambda_f(l)\right|^2$ est grande car pour tout nombre premier p ne divisant pas q, les valeurs propres de Hecke $\lambda_f(p)$ et $\lambda_f(p^2)$ ne peuvent pas être simultanément petites étant donné que :

$$\lambda_f(p)^2 - \lambda_f(p^2) = 1.$$

Il est important de remarquer que cet amplificateur est très lacunaire ce qui est propre au degré 2 (dans le cas du degré 1, il est possible de construire des amplificateurs pratiquement sans «trous»). Toutefois, on prouve que :

$$\begin{aligned} \left|\sum_{1\leq l\leq L} x_l\lambda_f(l)\right|^2 &\gg_\varepsilon q^{-\varepsilon}L, \\ ||\overrightarrow{x}||_2^2 + ||\overrightarrow{x}||_1 &\ll \sqrt{L} \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon>0$. Ainsi,

$$\left|L\left(f\times g,\frac{1}{2}+\mu\right)\right|^2 \ll_{\varepsilon,k,g} (qL)^\varepsilon(1+|t|)^B\left(\frac{q}{\sqrt{L}} + q^{\frac{1}{2}+\theta}L^{\frac{5}{2}+\theta} + q^{\frac{1}{2}+\theta}L^{4+2\theta} + q^{\frac{3}{2}+\theta-\alpha}L^{\frac{9}{2}+\theta-2\alpha}\right)$$

pour tout entier naturel non-nul $L<\sqrt{q}$ et tout $\varepsilon>0$. On cherche L sous la forme $L=q^{2x}$ avec $0<x<\frac{1}{4}$. Ainsi,

$$\left|L\left(f\times g,\frac{1}{2}+\mu\right)\right|^2 \ll_{\varepsilon,k,g} q^\varepsilon(1+|t|)^B \inf_{0<x<\frac{1}{4}}\left(q^{1-x} + q^{\frac{1}{2}+\theta+(8+4\theta)x} + q^{\frac{3}{2}+\theta-\alpha+(9+2\theta-4\alpha)x}\right)$$

et le minimum est atteint en $x=\frac{1-2\theta}{2(9+4\theta)}$ avec le choix suivant de α :

$$\alpha := \frac{19}{22} + \frac{2}{11}\theta + \frac{2}{11}\theta^2.$$

On a alors prouvé le théorème 6.3.1 pour $j=0$ dans un voisinage tubulaire de la droite critique. Les autres cas ($j\neq 0$) en découlent grâce aux inégalités de Cauchy

■

6.4 Applications arithmétiques de la sous-convexité

6.4.1 Généralités

Soient $L(\pi_1,.)$ et $L(\pi_2,.)$ deux fonctions L. Donnons-nous une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dont le support est un compact inclus dans $[0,b]$ et vérifiant :

$$\forall x \in [0,a], \quad \varphi(x) = 1.$$

avec $0 \leq a < b$. Supposons qu'il existe deux fonctions $f_{\pi_1\times\pi_1}(.)$ et $f_{\pi_1\times\pi_2}(.)$ holomorphes sans zéros sur $\Re(s) > \frac{1}{2} - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ telles que :

$$\begin{aligned} L(\pi_1 \times \pi_1, s) &:= f_{\pi_1\times\pi_1}(s) \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_{\pi_1}(n)\lambda_{\pi_1}(n)}{n^s}, \\ L(\pi_1 \times \pi_2, s) &:= f_{\pi_1\times\pi_2}(s) \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_{\pi_1}(n)\lambda_{\pi_2}(n)}{n^s} \end{aligned}$$

soient deux fonctions L et supposons que $L(\pi_1 \times \pi_2,.)$ est entière. Pour tout entier naturel non-nul N, les sommes

$$S_N(\pi_1,\pi_2) := \sum_{n\geq 1} \lambda_{\pi_1}(n)\lambda_{\pi_2}(n)\varphi\left(\frac{n}{N}\right)$$

jouent un rôle important en théorie analytique des nombres. En effet,

- d'une part, briser la convexité pour $L(\pi_1 \times \pi_2,.)$ peut parfois être réalisé en obtenant une borne non-triviale pour $S_N(\pi_1,\pi_2)$ lorsque N est de l'ordre de $\sqrt{Q_{\pi_1\times\pi_2}(t)}$ comme le montre l'équation fonctionnelle approchée de cette fonction L (confer chapitre 2),
- d'autre part, ces sommes permettent d'obtenir une majoration non-triviale pour :

$$N(\pi_1,\pi_2) := \inf\{n \geq 1, \lambda_{\pi_1}(n) \neq \lambda_{\pi_2}(n)\}.$$

Le point de départ est la remarque suivante :

$$S_{N(\pi_1,\pi_2)}(\pi_1,\pi_2) = S_{N(\pi_1,\pi_2)}(\pi_1,\pi_1)$$

si $a = 0$ et $b = 1$. Ces choix de a et b étant fixés, la formule d'inversion de Mellin (confer proposition C.4.1) appliquée à deux reprises assure que :

$$\begin{aligned} S_{N(\pi_1,\pi_2)}(\pi_1,\pi_2) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{(3)} N(\pi_1,\pi_2)^s \frac{L(\pi_1\times\pi_2,s)}{f_{\pi_1\times\pi_2}(s)}\mathcal{M}(\varphi)(s)\mathrm{d}s, \\ S_{N(\pi_1,\pi_2)}(\pi_1,\pi_1) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{(3)} N(\pi_1,\pi_2)^s \frac{L(\pi_1\times\pi_1,s)}{f_{\pi_1\times\pi_1}(s)}\mathcal{M}(\varphi)(s)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

En bougeant le contour jusqu'à $\Re(s) = \frac{1}{2}$ dans chaque intégrale, on obtient en mettant

bout à bout toutes les remarques précédentes :

$$\frac{\mathcal{M}(\varphi)(1)\,\mathrm{res}_{s=1}\,L(\pi_1\times\pi_1,s)}{f_{\pi_1\times\pi_1}(1)}N(\pi_1,\pi_2)= \tag{6.4.1}$$
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\left(\frac{1}{2}\right)}N(\pi_1,\pi_2)^s\frac{L(\pi_1\times\pi_2,s)}{f_{\pi_1\times\pi_2}(s)}\mathcal{M}(\varphi)(s)\mathrm{d}s$$
$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{\left(\frac{1}{2}\right)}N(\pi_1,\pi_2)^s\frac{L(\pi_1\times\pi_1,s)}{f_{\pi_1\times\pi_1}(s)}\mathcal{M}(\varphi)(s)\mathrm{d}s.$$

Estimer $N(\pi_1,\pi_2)$ revient alors à contrôler les intégrales résiduelles grâce à une borne de (sous-)convexité pour $L(\pi_1\times\pi_2,.)$ et pour $L(\pi_1\times\pi_1,.)$. Nous allons maintenant donner deux exemples assez similaires.

6.4.2 Exemple I : plus petit résidu non-quadratique modulo un nombre premier

Cet exemple est détaillé dans **[Mo2]**. Soit p un nombre premier impair. Ici,

- $\pi_1 := \varepsilon_1$ est le caractère de Dirichlet trivial de module 1,
- $\pi_2 := \chi_p := \left(\frac{\cdot}{p}\right)$ est un caractère de Dirichlet primitif de module p.

Notons :

$$N(p) := \inf\{n\geq 1, \chi_p(n)\neq\varepsilon_1(n)=1\}.$$

Il est immédiat de vérifier que :

$$N(p) := \inf\{N\geq 1, \left|\sum_{1\leq n\leq N}\chi_p(n)\right|<N\}.$$

L'inégalité de Polya-Vinogradov (**[Ap]**) assure que pour tout entier naturel non-nul N,

$$\left|\sum_{1\leq n\leq N}\chi_p(n)\right|<2\sqrt{p}\log p$$

donc :

$$N(p)\ll_\varepsilon p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon>0$. D'autre part,

Théorème 6.4.1. *Soit p un nombre premier impair. Si :*

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad L\left(\chi_p,\frac{1}{2}+it\right)\ll_\varepsilon p^{\frac{1}{4}-\omega+\varepsilon}$$

où $0<\omega<\frac{1}{4}$ et pour tout $\varepsilon>0$ alors :

$$N(p)\ll_\varepsilon p^{\frac{1}{2}-2\omega+\varepsilon} \tag{6.4.2}$$

pour tout $\varepsilon>0$.

Preuve du théorème 6.4.1. L'égalité (6.4.1) assure que :

$$(\mathcal{M}(\varphi)(1)\,\mathrm{res}_{s=1}\,\zeta(s))\;N(p) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\left(\frac{1}{2}\right)} N(p)^s L(\chi_p,s)\mathcal{M}(\varphi)(s)\mathrm{d}s \\ - \frac{1}{2i\pi}\int_{\left(\frac{1}{2}\right)} N(p)^s \zeta(s)\mathcal{M}(\varphi)(s)\mathrm{d}s.$$

et on conclut grâce à l'hypothèse faite sur la taille de $L(\chi_p,.)$ sur la droite critique

■

Remarque 6.4.1. La borne de convexité pour $L(\chi_p,.)$ permet de retrouver le résultat obtenu par l'inégalité de Polya-Vinogradov alors que l'hypothèse de Lindelöf généralisée pour $L(\chi_p,.)$ donne le résulat optimal attendu à savoir :

$$N(p) \ll_\varepsilon p^\varepsilon \tag{6.4.3}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

6.4.3 Exemple II : problème de différentiation des formes modulaires via leur coefficients de Fourier

Pour traîter cet exemple, on fait le choix suivant :

- $\pi_1 := g$ est une forme primitive cuspidale de niveau D sans facteurs carrés, de poids $k_g \geq 20$ et de caractère trivial,
- $\pi_2 := f$ est une forme primitive cuspidale de niveau premier q premier avec D, de poids $k \geq k_g + 6$ et de caractère trivial.

On note alors :

$$N_g(f) := \inf\{n \geq 1, \lambda_f(n) \neq \lambda_g(n)\}.$$

L'estimation obtenue est :

Théorème 6.4.2. *Soit g une forme primitive cuspidale de niveau sans facteurs carrés, de poids $k_g \geq 20$ et de caractère trivial. Supposons que q est un nombre premier suffisamment grand et $k \geq k_g + 6$. Si θ est admissible alors pour toute forme f dans $S_k^p(q)$, on a :*

$$N_g(f) \ll_{\varepsilon,k,g} q^{1-2\omega(\theta)+\varepsilon} \tag{6.4.4}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ où :

$$\omega(\theta) := \frac{1-2\theta}{4(9+4\theta)}.$$

Preuve du théorème 6.4.2. L'égalité (6.4.1) assure que :

$$\frac{\mathcal{M}(\varphi)(1)\;\mathrm{res}_{s=1}\,L(g\times g,s)}{\zeta^{(D)}(2)}\;N_g(f) = \\ \frac{1}{2i\pi}\int_{\left(\frac{1}{2}\right)} N_g(f)^s \frac{L(f\times g,s)}{\zeta^{(qD)}(2s)}\mathcal{M}(\varphi)(s)\mathrm{d}s \\ - \frac{1}{2i\pi}\int_{\left(\frac{1}{2}\right)} N_g(f)^s \frac{L(g\times g,s)}{\zeta^{(D)}(2s)}\mathcal{M}(\varphi)(s)\mathrm{d}s.$$

On conclut grâce à la borne de convexité pour $L(f\times g,.)$ obtenue au théorème 6.3.1

■

Remarque 6.4.2. La borne de convexité pour $L(f \times g, .)$ et $L(g \times g, .)$ entraîne que :

$$N_g(f) \ll_{\varepsilon,k,g} q^{1+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Remarque 6.4.3. En supposant l'hypothèse de Riemann généralisée pour $L(f \times g, .)$ et $L(g \times g, .)$, D. Goldfeld et J. Hoffstein (**[GoHo]**) ont prouvé que :

$$N_g(f) \ll_{k,k_g} \log(qD)^2 (\log\log(qD))^4$$

dès que qD est suffisamment grand.

Conclusion

Récapitulatif des résultats et des techniques utilisées

Au cours de ce travail, des formules asymptotiques précises ont été établies pour le second moment harmonique ramolli d'une famille de fonctions L de Rankin-Selberg. Dans ces formules apparaît une limitation de la longueur du ramollisseur causée par la résolution d'un problème de convolution avec décalage additif qui constitue le point essentiel de ce mémoire. Ce problème de convolution a été résolu en appliquant une méthode spectrale de P. Sarnak et en la raffinant en travaillant en moyenne notament via des inégalités de grand crible pour les coefficients de Fourier des formes de Maass de poids 0 et de caractère trivial. Il est finalement possible de prendre un ramollisseur de longueur de l'ordre de $\frac{1}{20}$. On a alors proposé deux applications de ces formules asymptotiques :

- en utilisant une technique de comptage de zéros suggérée par A. Selberg et développée par J.B. Conrey et K. Soundararajan et en ramollissant, on a prouvé l'existence d'une infinité de fonctions L de Rankin-Selberg avec au plus huit zéros réels non-triviaux,
- en amplifiant, on a prouvé une nouvelle borne de sous-convexité pour les fonctions L de Rankin-Selberg.

Ce travail confirme aussi le fait que le modèle des matrices aléatoires associé à chaque famille de fonctions L est un modèle extrêmement fiable qui permet de nous guider dans l'étude analytique d'une famille de fonctions L. En effet, on constate que le second moment harmonique ramolli de la famille $\mathcal{F}$ et le second moment ramolli de la famille $\mathcal{G}$ ont le même comportement asymptotique ce qui est en accord avec la conjecture des moments car ces deux familles ont (conjecturalement) le même type de symétrie. En outre, tous les résultats concernant le rang analytique de la famille $\mathcal{F}$ comme par exemple sa décroissance analytique sont en accord avec la conjecture du rang. Enfin, le modèle des matrices aléatoires de la famille prévoit que toutes les techniques utilisées ont une chance d'aboutir.

Suppression des poids harmoniques

Il est naturel de se demander si les résultats que l'on a obtenu en moyenne harmonique restent valables en moyenne naturelle. La seule question à se poser est si les formules asymptotiques établies pour le second moment harmonique ramolli de la famille $\mathcal{F}$ restent valables pour le second moment ramolli de la famille $\mathcal{F}$ défini par :

$$\mathcal{W}(g;\mu) := A_q \left[\left| \mathcal{L}\left(. \times g, \frac{1}{2} + \mu \right) \right|^2 \right]$$

pour tout nombre complexe μ. Il ne fait aucun doute que la même formule restera valide dans le domaine d'absolue convergence et avec la même longueur de ramollisseur effective étant

donné que cela résulte uniquement de la forme des coefficients du ramollisseur. Autour du point critique, tentons d'appliquer la procédure mise en place par E. Kowalski et P. Michel (**[KoMi]**) en poids 2 mais valable sans aucun doute en poids quelconque. Rappelons cette procédure. Si α est une suite de nombres complexes indexée par $S_k^p(q)$ satisfaisant :

$$A_q^h\left[|\alpha_.|\right] \ll \log^A(q), \tag{6.4.5}$$

$$\sup_{f\in S_k^p(q)} \omega_q(f)\,|\alpha_f| \ll \frac{1}{q^\delta} \tag{6.4.6}$$

pour des constantes absolues strictement positives A et δ alors pour tout nombre réel κ strictement positif, il existe une constante γ strictement positive ne dépendant que de κ et de δ telle que :

$$\mathcal{W}(g;\mu) = \frac{1}{\zeta(2)} A_q^h\left[\omega_.\left(q^\kappa\right)\alpha_.\right] + \mathcal{O}(q^{-\gamma})$$

où (confer (1.5.1)) :

$$\forall f \in S_k^p(q), \quad \omega_f(q^\kappa) := \sum_{1\leq n\leq q^\kappa} \frac{\rho_f(n)}{n}.$$

Tentons d'appliquer cette procédure pour :

$$\forall f \in S_k^p(q), \quad \alpha_f := \left|\mathcal{L}\left(f\times g, \frac{1}{2}+\mu\right)\right|^2.$$

Remarquons déjà que autour du point critique :

$$\mathcal{W}^h(g;\mu) \ll_g \left(1+|\Im(\mu)|\right)^B$$

pour une constante absolue B : il s'agit des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2. La condition (6.4.5) est donc satisfaite. A propos de la condition (6.4.6), on remarque que si $|\Re(\mu)| \ll \frac{1}{\log q}$ alors :

$$\forall f \in S_k^p(q), \quad M\left(f\times g, \frac{1}{2}+\mu\right) \ll_\varepsilon L^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi, si :

$$\forall f \in S_k^p(q), \quad L\left(f\times g, \frac{1}{2}+\mu\right) \ll_{g,\varepsilon} q^{\frac{1}{2}-\omega+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et pour un nombre réel ω alors si $|\Re(\mu)| \ll \frac{1}{\log q}$:

$$\sup_{f\in S_k^p(q)} \omega_q(f)\,|\alpha_f| \ll_\varepsilon q^{4\Delta-2\omega+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. La condition (6.4.6) est donc satisfaite si :

$$\Delta < \omega.$$

Ainsi, se débarasser des poids harmoniques semble avoir un coût puisqu'il semble falloir prendre un ramollisseur de longueur strictement inférieure à $\omega(\theta)$ sous l'hypothèse θ admissible et sachant que $\omega(0) = \frac{1}{36}$. On s'attend donc à ce que la même formule asymptotique

pour le second moment ramolli que pour le second moment harmonique ramolli soit valable autour du point critique mais avec une longueur de ramollisseur beaucoup plus petite.

Perspectives nouvelles

La motivation première de ce travail était de tenter d'exhiber une infinité de fonctions L de Rankin-Selberg sans zéros réels non-triviaux. On a seulement réussi pour l'instant à produire une infinité de fonctions L de Rankin-Selberg avec au plus huit zéros réels non-triviaux. De plus, même l'hypothèse de Ramanujan-Petersson-Selberg ne permet pas d'exhiber une infinité de fonctions L de Rankin-Selberg sans zéros réels non-triviaux par la méthode actuelle. La raison est que l'on ne peut pas prendre un ramollisseur de longueur aussi grande que souhaitée. En effet, suite à ce travail, il n'est pas possible de prendre un ramollisseur de longueur supérieure à $\frac{1}{20}$:

$$\Delta \approx \frac{1}{20}.$$

Rappelons que la limitation de la longueur du ramollisseur provient de la résolution d'un problème de convolution avec décalage additif. Il semble difficile d'améliorer la longueur de ramollisseur effective maximale par les techniques disponibles à l'heure actuelle. Aussi, deux options sont envisageable :

- soit mettre en place une autre technique de comptage de zéros que celle utilisée qui permet de conclure avec un ramollisseur de longueur de l'ordre de $\frac{1}{20}$,
- soit améliorer la longueur de ramollisseur effective maximale en implémentant de nouvelles idées.

La deuxième option est plus intéressante car elle consiste à développer de nouveaux outils qui, certainement, seront amenés à jouer un rôle important en théorie analytique des nombres. Nous allons donner quelques pistes concernant la deuxième option.

Une première piste consiste à obtenir des inégalités de grand crible pour les coefficients de Fourier des formes de Maass de niveau N, de poids 0 et de caractère trivial faisant intervenir la norme p ($p > 2$) de la suite des coefficients au lieu de la norme 2 c'est-à-dire :

$$\sum_{|r_j|\leq R} \frac{1}{\cosh \pi r_j} \left| \sum_{1\leq m\leq M} a_m \sqrt{m} \rho_j(m) \right|^p \ll_\varepsilon \left(R^A + \frac{M^{1+\varepsilon}}{N} \right) ||a||_p^p$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et tout nombre réel $R \geq 1$ et pour une constante absolue $A > 0$.

Une deuxième piste consiste à travailler encore davantage en moyenne en estimant directement $\mathrm{Errsec}(q, L; \mu)$. Souvenons-nous que :

$$\mathrm{Errsec}(q, L; \mu) = \sum_{\substack{1\leq d, l_1, l_2, \\ dl_1 \leq L, \\ dl_2 \leq L}} \frac{x_{dl_1}(g, \mu) x_{dl_2}(g, \overline{\mu})}{l_1^{\frac{1}{2}+\mu} l_1^{\frac{1}{2}+\overline{\mu}} d^{1+\mu+\overline{\mu}}} \mathrm{Errtwist}(q, l_1 l_2; \mu)$$

On a jusqu'à présent exploité seulement le fait que les coefficients $x_.(g,.)$ du ramollisseur sont petits mais on n'a pas exploité le fait que ces coefficients oscillent à cause de la présence de fonctions de Moebius. Pour tenir compte de ces oscillations, il faudrait établir des inégalités de grand crible pour les coefficients de Fourier des formes de Maass de poids 0 et de caractère trivial en moyenne sur le niveau.

Une dernière piste consiste à obtenir une nouvelle estimation en moyenne sur le spectre du produit triple en tenant compte cette fois-ci de la nature profondémment arithmétique de la surface de Riemann compacte sur laquelle vivent les objets qui interviennent. Ceci pourrait être réalisé en examinant les identités de produit triple prouvées par M. Harris-S.S. Kudla (**[HaKu]**), S. Bocherer-R. Schulze-Pillot (**[BoSc]**) et T. Watson (**[Wa2]**) qui font le lien entre le produit triple et des valeurs spéciales de fonctions L :

$$\left|\left(u_j,\overline{V}\right)\right|^2 \approx \frac{\Lambda\left(g\times g\times u_j,\frac{1}{2}\right)}{\Lambda(\mathrm{Sym}^2,1)^2\Lambda(\mathrm{Sym}^2 u_j,1)}.$$

Dans l'égalité précédente, Λ désigne la fonction L complétée. Signalons que de telles identités ne sont pas valides pour l'instant en toute généralité. P. Michel a suggéré dans **[Mi1]** d'utiliser la convexité avec le grand crible et de tirer parti de la factorisation suivante :

$$\Lambda\left(g\times g\times u_j,\frac{1}{2}\right)=\Lambda\left(\mathrm{Sym}^2 g\times u_j,\frac{1}{2}\right)\Lambda\left(u_j,\frac{1}{2}\right)$$

pour obtenir de meilleures estimations en moyenne du produit triple que celles obtenues jusqu'à présent.

Le lecteur l'aura compris : ce travail est loin d'être terminé et je vais y consacrer toute mon énergie lors de mon futur séjour postdoctoral à l'Université de Montréal (Québec, Canada).

Annexe A

Formes automorphes réelles analytiques

Dans cet appendice est rappelée sans aucune preuve la théorie des formes automorphes réelles-analytiques de poids 0 et de caractère trivial. Tout n'est pas nécessaire pour la compréhension du chapitre 4 : la longueur de cet appendice se justifie cependant par la volonté de rendre ce mémoire complet. L'excellente référence principale est **[DuFrIw2]**. Les connaissances minimales sur les fonctions spéciales apparaissant dans cette annexe sont détaillées dans l'annexe C.

A.1 Description des opérateurs linéaires et différentiels en jeu

A toute matrice γ de $SL_2(\mathbb{R})$ est associée l'*opérateur translation* R_γ : il s'agit de l'opérateur linéaire sur $\mathcal{F}(\mathbb{H},\mathbb{C})$ défini par :

$$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{H},\mathbb{C}), \forall z \in \mathbb{H}, \quad (R_\gamma f)(z) = f(\gamma.z).$$

L'objectif de cette théorie est entre autres de mieux comprendre l'algèbre des *opérateurs invariants de poids* 0 qui est constituée des opérateurs linéaires qui commutent avec tous les opérateurs translation. L'opérateur invariant de poids 0 le plus important est le *Laplacien de poids* 0 donné par :

$$\Delta_0 := y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Cet opérateur invariant est fondamental car l'algèbre des opérateurs invariants se trouve être l'algèbre des polynômes en Δ_0. Intéressons-nous donc aux *fonctions propres* de cet opérateur : il s'agit des fonctions lisses $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ satisfaisant :

$$(\Delta_0 + \lambda) f = 0.$$

Dans ce cas, λ s'appelle la *valeur propre* de Δ_0 associée à f. Il est coutume d'écrire les valeurs propres du Laplacien sous la forme :

$$\lambda(s) := s(1-s)$$

où :

$$s = \frac{1}{2} + ir$$

et r est un nombre complexe. Signalons que comme Δ_0 est un opérateur elliptique, toutes ses fonctions propres sont *réelles-analytiques* sur le demi-plan de Poincaré. Enumérons quelques fonctions propres remarquables du Laplacien de poids 0 :

- toute fonction holomorphe sur $\mathbb{H}$ est une fonction propre de valeur propre $\lambda(0) = 0$,
- les fonctions suivantes ont pour valeur propre $\lambda(s)$:

$$\begin{aligned} f^+(z,s) &= \frac{1}{2}\left(y^s + y^{1-s}\right), \\ f^-(z,s) &= \frac{1}{2s-1}\left(y^s - y^{1-s}\right), \\ f_0^+(z,s) &= 2\sqrt{y}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi y)e(x), \\ f_0^+(z,s) &= 2\sqrt{y}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi y)e(-x). \end{aligned}$$

A.2 Espaces fonctionnels en jeu

Soit N un entier naturel non-nul. Une fonction $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ est dite $\Gamma_0(N)$-*automorphe* de poids 0 et de caractère trivial si elle satisfait la *relation d'automorphie* suivante :

$$f(\gamma.z) = f(z)$$

pour toute matrice γ de $\Gamma_0(N)$. On note $\mathcal{A}_0(N)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $\Gamma_0(N)$-automorphes de poids 0 et de caractère trivial.

Une *forme de Maass* de niveau N, de poids 0 et de caractère trivial est une fonction lisse de $\mathcal{A}_0(N)$ qui est aussi une fonction propre du Laplacien de poids 0. Si f est une forme de Maass de niveau N, de poids 0 et de caractère trivial satisfaisant la condition de croissance suivante :

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{H}, \quad f(x+iy) \ll y^\alpha + y^{1-\alpha}$$

pour un réel α alors f admet le *développement de Fourier* suivant :

$$f(z) = \rho^+ f^+(z,s) + \rho^- f^-(z,s) + 2\sqrt{y}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \rho_f(n)|n|^{\frac{1}{2}}K_{ir}(2\pi|n|y)e(nx)$$

où $\lambda(s) = \lambda\left(\frac{1}{2} + ir\right)$ est la valeur propre de f et ρ^+, ρ^- et $\rho_f(n)$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$ sont des nombres complexes appelés *coefficients de Fourier* de f. On s'aperçoit que le signe de r n'influe pas car $K_{ir}(.) = K_{-ir}(.)$.

On note $\mathcal{L}_0(N)$ l'espace des fonctions $\Gamma_0(N)$-automorphes de poids 0, de caractère trivial et de carré intégrable relativement au produit scalaire :

$$(f,g) := \int_{\mathcal{D}_0(N)} f(z)\overline{g(z)}\,\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}$$

où $\mathcal{D}_0(N)$ est un domaine fondamental de $\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}$. Enfin, $\mathcal{B}_0(N)$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions lisses bornées de $\mathcal{A}_0(N)$ de Laplaciens bornés sur le demi-plan de Poincaré.

A.3 Théorie spectrale du Laplacien de poids 0

A.3.1 Généralités

La théorie spectrale de Δ_0 repose sur les remarques suivantes :
- $\mathcal{B}_0(N)$ est un sous-espace dense de $\mathcal{L}_0(N)$ pour la topologie hermitienne induite par $(\,.\,,\,.\,)$,
- $-\Delta_0$ est un opérateur hermitien sur $\mathcal{B}_0(N)$,
- $-\Delta_0$ est borné inférieurement sur $\mathcal{B}_0(N)$ à savoir :

$$\forall f \in \mathcal{B}_0(N), \quad (f, -\Delta_0\, f) \geq 0.$$

Certains résultats d'analyse spectrale assurent alors que $-\Delta_0$ admet un prolongement hermitien à $\mathcal{L}_0(N)$ et que ce prolongement décompose cet espace en espaces propres. Il apparaît alors deux composantes :
- une *composante continue* engendrée par les séries d'Eisenstein incomplètes,
- une *composante discrète* engendrée par les formes de Maass cuspidales.

A.3.2 Spectre continu : séries d'Eisenstein

Séries d'Eisenstein

La *série d'Eisenstein* de niveau N, de poids 0 et de caractère trivial associée à la pointe κ de $\Gamma_0(N)$ est donnée par :

$$E_\kappa(z,s) := \sum_{\gamma \in (\Gamma_0(N))_\kappa \backslash \Gamma_0(N)} \left(\Im(\sigma_\kappa^{-1}\gamma.z)\right)^s$$

où σ_κ est une matrice de normalisation pour cette pointe, z est dans le demi-plan de Poincaré et s est un nombre complexe. Rappelons les propriétés des séries d'Eisenstein démontrées principalement par A. Selberg (**[Se3]**) :
- Fixons z_0 dans $\mathbb{H}$. $s \to E_\kappa(z_0,s)$ est une fonction holomorphe sur $\Re(s) > 1$ et admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$. De plus, sur $\Re(s) \geq \frac{1}{2}$, $E_\kappa(z_0,.)$ possède un unique pôle simple en $s=1$ de résidu indépendant de z_0 donné par :

$$\mathrm{res}_{s=1}\, E_\kappa(z_0,s) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(X_0(N))}.$$

- Fixons s_0 dans $\mathbb{C}$ privé des pôles de $E_\kappa(z,.)$. La fonction $z \to E_\kappa(z,s_0)$ est alors une forme de Maass de niveau N, de poids 0, de caractère trivial et de valeur propre $\lambda(s_0)$ mais n'appartient pas à $\mathcal{L}_0(N)$ (sa valeur propre $\lambda(s_0)$ n'est pas toujours positive).

Le *développement de Fourier* en la pointe ∞ de la série d'Eisenstein associée à la pointe $\kappa = \frac{u}{w}$ est donné par :

$$E_\kappa\left(z, \frac{1}{2}+ir\right) = \delta_\infty(\kappa) y^{\frac{1}{2}+ir} + \phi_\kappa\left(\frac{1}{2}+ir\right) y^{\frac{1}{2}-ir} + 2\sqrt{y}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \rho_\kappa(n,r)|n|^{\frac{1}{2}} K_{ir}(2\pi|n|y)e(nx)$$

avec pour tout entier relatif non-nul n :

$$\text{(A.3.1)} \qquad \rho_\kappa(n,r) = \frac{\pi^{ir}|n|^{ir-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+ir\right)}\left(\frac{w\wedge\frac{N}{w}}{wN}\right)^{\frac{1}{2}+ir} \sum_{\gamma\wedge\frac{N}{w}=1} \gamma^{-1-2ir} \sum_{\substack{\delta(\gamma w)\\ \delta\wedge\gamma w=1\\ \delta\gamma\equiv u \bmod\left(w\wedge\frac{N}{w}\right)}} e\left(-n\frac{\delta}{\gamma w}\right)$$

dans le domaine $\Im(r) < 0$ (confer **[DeIw]**) et :

$$\forall s\in\mathbb{C}, \quad \phi_\kappa(s) := \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)}\sum_{c\in\mathbb{N}^*}\frac{S_{\infty,\kappa}(0,0;c)}{c^{2s}}$$

où $S_{\infty,\kappa}(0,0;.)$ est une somme de Kloosterman plus générale que celles décrites dans l'appendice B (confer **[Iw]**). Les $\rho_\kappa(n,r)$ $(n\in\mathbb{Z}^*)$ sont les *coefficients de Fourier* de la série d'Eisenstein associée à la pointe κ. $E_\kappa(z,s)$ est *paire* au sens suivant :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad \rho_\kappa(-n,r) = \rho_\kappa(n,r).$$

Selon la théorie générale des séries d'Eisenstein, l'application $r\mapsto\rho_\kappa(n,r)$ (n est un entier naturel non-nul) définie sur $\Im(r)<0$ se prolongent holomorphiquement au plan complexe. Ces coefficients de Fourier ne sont pas multiplicatifs car les séries d'Eisenstein ne sont pas des vecteurs propres des opérateurs de Hecke mais P. Michel (**[Mi2]**) a «restauré» la multiplicativité en prouvant que pour tout entier relatif non-nul n :

$$\begin{aligned}\text{(A.3.2)} \quad \rho_\kappa(n,r) = {} & \frac{\pi^{ir}|n|^{ir-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+ir\right)}\left(\frac{w\wedge\frac{N}{w}}{wN}\right)^{\frac{1}{2}+ir}\frac{1}{\varphi\left(w\wedge\left(\frac{N}{w}\right)\right)} \\ & \sum_{\psi\left(w\wedge\left(\frac{N}{w}\right)\right)} \delta_{w'(\psi)|n} w'(\psi)\psi(w'(\psi))G_\psi(1;w^*(\psi))\frac{\overline{\psi}(u)\overline{\psi}\left(\frac{n}{w'(\psi)}\right)}{L^{(N)}(\psi^2,1+2ir)} \\ & \sum_{\substack{\gamma|N^\infty\\ \gamma\wedge\frac{N}{w}=1}}\frac{\psi^2(\gamma)}{\gamma^{1+2ir}} r(n;\gamma w''(\psi)) \sum_{\substack{e|n\\ e\wedge N=1}}\frac{\psi^2(e)}{e^{2ir}}\end{aligned}$$

où pour tout caractère de Dirichlet ψ de module $w\wedge\left(\frac{N}{w}\right)$, $w^*(\psi)$ désigne son conducteur et l'on écrit :

$$w = w^*(\psi)w'(\psi)w''(\psi)$$

avec :

$$w'(\psi) \mid w^*(\psi)$$

et :

$$w''(\psi) \wedge w^*(\psi) = 1.$$

J.-M. Deshouillers et H. Iwaniec ont établis dans **[DeIw]** l'*inégalité de grand crible* suivante pour ces coefficients de Fourier :

(A.3.3)

$$\sum_{\kappa \in \mathrm{Cusp}(\Gamma_0(N))} \int_{-R}^{+R} \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + ir\right) \right|^2 \left| \sum_{1 \leq m \leq M} a_m m^{\frac{1}{2}} \rho_\kappa(m, r) \right|^2 \mathrm{d}r \ll_\varepsilon \left(R^2 + \frac{M^{1+\varepsilon}}{N}\right) ||a||_2^2$$

pour tout nombre réel $R \geq 1$, toute suite de nombres complexes $(a_m)_{1 \leq m \leq M}$ et tout $\varepsilon > 0$.

Séries d'Eisenstein incomplètes et théorie spectrale

Soit ψ une fonction lisse à support compact dans $\mathbb{R}_+$. La série d'Eisenstein incomplète associée à ψ et à la pointe κ est définie par :

$$E_\kappa(z, \psi) := \sum_{\gamma \in (\Gamma_0(N))_\kappa \backslash \Gamma_0(N)} \psi\left(\Im(\sigma_\kappa^{-1} \gamma . z)\right).$$

$E_\kappa(z, \psi)$ appartient à $\mathcal{L}_0(N)$ mais n'est pas une forme de Maass (ce n'est pas une fonction propre du Laplacien). On note alors :

$$\mathcal{E}_0(N) := \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\{E_\kappa(., \psi), \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)\}\right)}^{(.,.)}.$$

Δ_0 admet un spectre continu sur $\mathcal{E}_0(N)$ qui recouvre $[\frac{1}{4}, +\infty[$ de multiplicité égale au nombre de pointes de $\Gamma_0(N)$. De plus, tout fonction f de $\mathcal{E}_0(N)$ admet le développement suivant :

$$f(z) = (f, u_0) u_0(z) + \sum_{\kappa \in \mathrm{Cusp}(\Gamma_0(N))} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(.), E_\kappa\left(., \frac{1}{2} + ir\right)\right) E_\kappa\left(z, \frac{1}{2} + ir\right) \mathrm{d}r$$

où u_0 est la fonction constante de valeur $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Vol}(X_0(N))}}$. La décomposition précédente est valable au sens de la norme 2 pour toute f de $\mathcal{E}_0(N)$ mais aussi au sens de la convergence absolue et de la convergence uniforme compacte si f est dans $\mathcal{B}_0(N)$.

A.3.3 Spectre discret : formes de Maass cuspidales

Théorie spectrale

Notons $\mathcal{C}_0(N)$ l'orthogonal de $\mathcal{E}_0(N)$ pour le produit scalaire $(.,.)$. Cet espace consiste en les fonctions f dont les coefficients de Fourier ρ^+ et ρ^- s'annulent. De plus, $\mathcal{C}_0(N)$ est Δ_0-stable. Une *forme de Maass cuspidale* est une forme de Maass qui appartient à $\mathcal{C}_0(N)$. Le noyau de Δ_0 est donné par l'espace des formes modulaires cuspidales de niveau N, de poids 0 et de caractère trivial $S_0(N)$. La correspondance entre les coefficients de Fourier est donnée par :

$$\forall f \in S_0(N), \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \psi_f(n) = \sqrt{n} \rho_f(n).$$

Δ_0 admet un spectre discret, infini et de multiplicité finie sur $\mathcal{C}_0(N)$. Si $(f_j)_{j\geq 1}$ est une base orthonormée de $\mathcal{C}_0(N)$ alors tout élément f de $\mathcal{C}_0(N)$ admet le développement suivant :

$$f(z) = \sum_{j\geq 1} (f, u_j)\, u_j(z).$$

La décomposition précédente est valable au sens de la norme 2 pour toute f de $\mathcal{C}_0(N)$ mais aussi au sens de la convergence absolue et de la convergence uniforme compacte si f est dans $\mathcal{B}_0(N)$. Il est conjecturé que la multiplicité de toute valeur propre non-nulle est bornée.

Loi de Weyl pour le spectre et inégalité de grand crible

Soit $(f_j)_{j\geq 1}$ une base orthonormale de $C_0(N)$. On note $\lambda_j := \lambda(s_j) := \lambda\left(\frac{1}{2} + ir_j\right)$ la valeur propre de f_j pour tout entier naturel non-nul j.

Comme $-\Delta_0$ est un opérateur hermitien positif, les valeurs propres λ_j sont des réels positifs pour tout entier naturel non-nul j. Soit j_0 un entier naturel non-nul fixé. Trois situations peuvent se produire :

– soit r_{j_0} est un nombre réel et alors :

$$\lambda_{j_0} = \frac{1}{4} + r_{j_0}^2 \geq \frac{1}{4}$$

et :

$$\Re(s_{j_0}) = \frac{1}{2},$$

– soit $r_{j_0} \in \left\{\pm\frac{i}{2}\right\}$ et alors :

$$\lambda_{j_0} = 0$$

et :

$$s_{j_0} \in \{0, 1\},$$

(f_{j_0} appartient à $S_0(N)$)

– soit r_{j_0} est un nombre imaginaire pur vérifiant $|\Im(r_{j_0})| < \frac{1}{2}$ et alors :

$$\lambda_{j_0} = \frac{1}{4} - \Im(r_{j_0})^2 > 0$$

et :

$$0 < s_{j_0} < 1.$$

La valeur propre λ_{j_0} est dite *exceptionnelle*. La conjecture de Selberg (confer chapitre 4) prédit que le spectre discret ne contient pas de valeurs propres exceptionnelles.

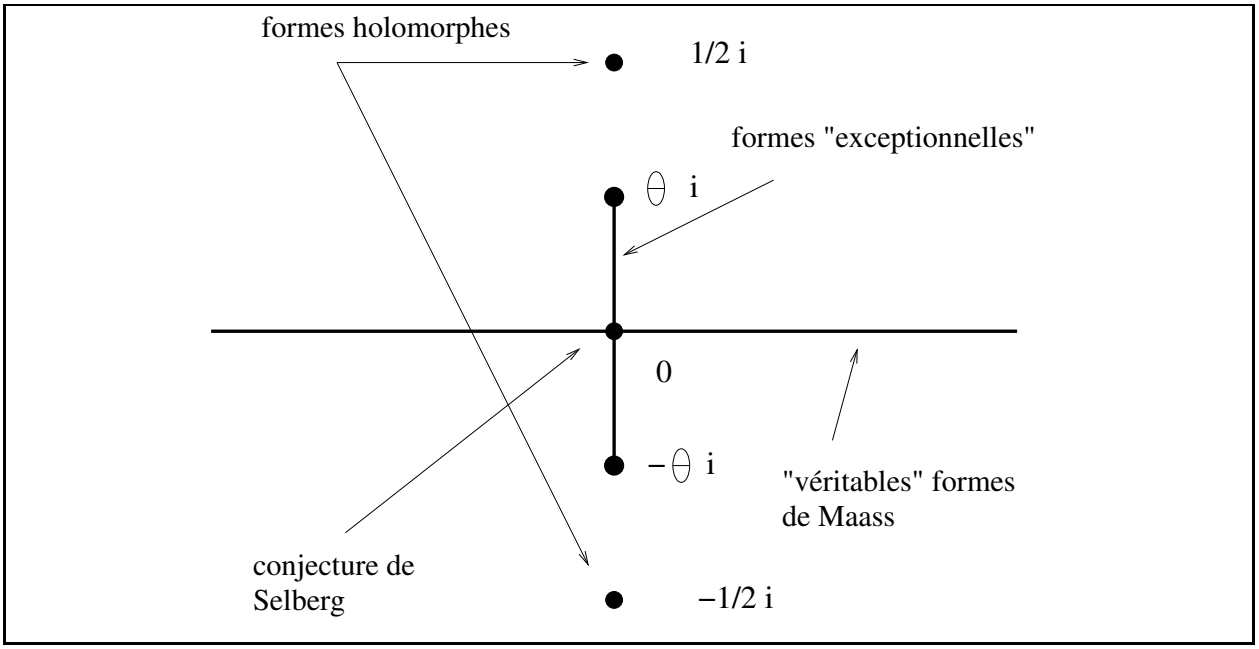

Fig A.1: Localisation du paramètre spectral r dans le plan complexe

Tout est résumé dans la figure A.1 (on y a inclut la conjecture de Selberg et l'hypothèse $H_2(\theta)$ décrites dans le chapitre 4).

Compter le nombre de valeurs propres inférieures à une borne donnée est possible grâce à la *loi de Weyl sur le spectre* :

$$\sum_{|r_j|\leq R} 1 = \frac{\mathrm{vol}(X_0(N))}{4\pi} R^2 + \mathcal{O}\left(\sqrt{N} R \log(NR)\right) \tag{A.3.4}$$

où :

$$\mathrm{vol}(X_0(N)) = \frac{\pi}{3}\nu(N) \ll_\varepsilon N^{1+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

J.-M. Deshouillers et H. Iwaniec ont établis dans **[DeIw]** l'*inégalité de grand crible* suivante pour les coefficients de Fourier des formes f_j :

$$\sum_{|r_j|\leq R} \frac{1}{\cosh(\pi r_j)} \left| \sum_{1\leq m\leq M} a_m m^{\frac{1}{2}} \rho_j(m) \right|^2 \ll_\varepsilon \left(R^2 + \frac{M^{1+\varepsilon}}{N}\right) ||a||_2^2 \tag{A.3.5}$$

pour tout nombre réel $R \geq 1$, toute suite de nombres complexes $(a_m)_{1\leq m\leq M}$ et tout $\varepsilon > 0$.

Opérateurs de Hecke

Les opérateurs de Hecke $(T_n)_{n\geq 1}$ agissent aussi sur $\mathcal{L}_0(N)$, commutent avec Δ_0 et sont hermitiens si $n \wedge N = 1$. Une forme cuspidale de *Hecke-Maass* est une forme de Maass

cuspidale qui est aussi un vecteur propre de T_n pour $n \wedge N = 1$. Une *base de Hecke* est une base orthonormale de $C_0(N)$ constituée de formes cuspidales de Hecke-Maass. Pour f une forme cuspidale de Hecke-Maass de valeurs propres de Hecke $(\lambda_f(n))_{n\wedge N=1}$, on dispose des relations suivantes valables pour tous entiers naturels non-nuls m et n vérifiant $mn \wedge N = 1$:

$$\sqrt{n}\rho_f(n) = \rho_f(1)\lambda_f(n),$$
$$\sqrt{n}\rho_f(-n) = \rho_f(-1)\lambda_f(n),$$

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{d|m\wedge n} \varepsilon_N(d)\lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right), \tag{A.3.6}$$

$$\lambda_f(mn) = \sum_{d|m\wedge n} \mu(d)\varepsilon_N(d)\lambda_f\left(\frac{m}{d}\right)\lambda_f\left(\frac{n}{d}\right). \tag{A.3.7}$$

L'action des opérateurs de Hecke sur le développement de Fourier d'une forme de Hecke-Maass cuspidale f est connue :

$$\sqrt{m}\rho_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{d|m\wedge n} \varepsilon_N(d)\sqrt{\frac{mn}{d^2}}\rho_f\left(\frac{mn}{d^2}\right), \tag{A.3.8}$$

$$\sqrt{mn}\rho_f(mn) = \sum_{d|m\wedge n} \mu(d)\varepsilon_N(d)\sqrt{\frac{m}{d}}\rho_f\left(\frac{m}{d}\right)\lambda_f\left(\frac{n}{d}\right) \tag{A.3.9}$$

pour tous entiers naturels non-nuls m et n avec $n \wedge N = 1$.

Opérateur réflexion

L'*opérateur réflexion* est l'opérateur linéaire sur $\mathcal{L}_0(N)$ défini par :

$$\forall f \in \mathcal{L}_0(N), \forall z \in \mathbb{H}, \quad (Xf)(z) = f(-\overline{z}).$$

Cet opérateur est une involution qui commute avec le Laplacien et les opérateurs de Hecke : il est donc possible de choisir une base de Hecke constituée de fonctions propres pour l'opérateur réflexion ce qui signifie que si f est un élément de cette base de valeur propre non-nulle (pour le Laplacien) alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \rho_f(-n) = \varepsilon_f\,\rho_f(n)$$

avec $\varepsilon_f \in \{\pm 1\}$. On dit que f est *paire* si $\varepsilon_f = +1$ et *impaire* sinon.

Théorie d'Atkin-Lehner

La théorie d'Atkin-Lehner décrite au chapitre 1 pour l'espace $S_0(N)$ est tout autant valable pour l'espace $\mathcal{C}_0(N)$ avec la même terminologie. La propriété-clef est la *propriété de multiplicité un* qui assure que deux fonctions nouvelles de $\mathcal{C}_0(N)$ qui sont des vecteurs propres avec les mêmes valeurs propres de Hecke de tous les opérateurs de Hecke sauf un nombre fini d'entre eux sont égales à une constante complexe multiplicative près. Ainsi, une forme de Hecke nouvelle est fonction propre de tous les opérateurs de Hecke. D'autre part, les égalités (A.3.6) et (A.3.7) sont valables pour tous les entiers naturels non-nuls m et n si f est nouvelle.

A.3.4 Formule de Parseval

Concluons cette appendice en énonçant la formule de Parseval utile dans le chapitre 4.

Théorème A.3.1. *Soient f et g dans $\mathcal{L}_0(N)$. Si $(u_j)_{j\geq 1}$ est une base orthonormée de $\mathcal{C}_0(N)$ et u_0 est la fonction constante de norme 2 égale à 1 alors :*

$$(f,g) = \sum_{j\geq 0}(f,u_j)\overline{(g,u_j)} + \sum_{\kappa\in Cusp(\Gamma_0(N))}\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(.),E_\kappa\left(.,\frac{1}{2}+ir\right)\right)\overline{\left(g(.),E_\kappa\left(.,\frac{1}{2}+ir\right)\right)}\mathrm{d}r.$$

Annexe B

Quelques sommes exponentielles arithmétiques

L'étude de la taille des sommes exponentielles arithmétiques est un problème central en théorie analytique des nombres. On décrit dans cet appendice toutes les sommes exponentielles que l'on a croisées dans ce mémoire.

B.1 Sommes de Ramanujan

La référence utilisée est **[Ap]**. Les *sommes de Ramanujan* sont définies par :

$$r(m;n) := \sum_{\substack{l \bmod n \\ l\wedge n=1}} e\left(\frac{lm}{n}\right) \tag{B.1.1}$$

pour tous entiers relatifs m et n non-nuls. En tant que fonction de m, $r(m;n)$ est n-périodique ce qui signifie que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^{*^2}, \quad r(m+n;n) = r(m;n).$$

La formule principale est donnée dans le théorème suivant :

Théorème B.1.1. *Soient m et n des entiers relatifs non-nuls. On a :*

$$r(m;n) = \sum_{d|m\wedge n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Remarque B.1.1. Cette formule est en quelque sorte le développement de Fourier de l'application suivante :

$$m \to \sum_{d|m\wedge n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

où n est un entier relatif non-nul fixé.

Corollaire B.1.2. *Soient m et n deux entiers relatifs non-nuls avec $n \mid m$.*

$$\begin{aligned} r(1;n) &= \mu(n), \\ r(m;n) &= \varphi(n). \end{aligned}$$

Les propriétés de multiplicativité des sommes de Ramanujan sont résumées dans la proposition suivante :

Proposition B.1.3. *Soient m_1, m_2, $n_1$et n_2 quatre entiers relatifs non-nuls.*

$$r(m_1m_2;n_1n_2) = \begin{cases} r(m_1;n_1)r(m_2;n_2) & si \quad m_1 \wedge n_2 = m_2 \wedge n_1 = 1, \\ r(m_1;n_1) & si \quad n_2 = 1 \quad et \quad m_2 \wedge n_1 = 1, \\ r(m_1;n_1)\mu(n_2) & si \quad m_2 = 1 \quad et \quad m_1 \wedge n_2 = 1. \end{cases}$$

Le théorème B.1.1 et les propriétés de multiplicativité précédentes aboutissent à la formule finale suivante :

Théorème B.1.4. *Soient m et n deux entiers relatifs non-nuls.*

$$r(m;n) = \varphi(n)\frac{\mu\left(\frac{n}{m\wedge n}\right)}{\varphi\left(\frac{n}{m\wedge n}\right)}.$$

B.2 Sommes de Gauss

Tous les détails peuvent être trouvés dans **[Ap]**. Soit χ un caractère de Dirichlet de module un entier naturel n. Les *sommes de Gauss* associées à χ sont définies par :

$$G_m(\chi) := \sum_{l=1}^{n} \chi(l)e\left(\frac{lm}{n}\right). \tag{B.2.1}$$

pour tout entier relatif non-nul m. Notons que lorsque χ est le caractère de Dirichlet trivial ε_n de module n alors on retrouve les sommes de Ramanujan :

$$\forall m \in \mathbb{Z}^*, \quad G_m(\varepsilon_n) = r(m;n).$$

Il est naturel de se demander s'il est toujours possible d'exprimer $G_m(\chi)$ en fonction de $G_1(\chi)$. La réponse est positive pour tout entier relatif m premier avec le niveau de χ. En effet :

Proposition B.2.1. *Soient χ un caractère de Dirichlet de niveau un entier naturel non-nul n et m un entier relatif premier avec n.*

$$G_m(\chi) = \overline{\chi(m)}G_1(\chi).$$

La réponse est positive pour tout entier relatif m si χ est un caractère de Dirichlet primitif (et en fait si et seulement si χ est primitif).

Théorème B.2.2. *Soient χ un caractère de Dirichlet primitif de niveau un entier naturel non-nul n et m un entier relatif non-nul.*

$$G_m(\chi) = \overline{\chi(m)}G_1(\chi).$$

De plus,

$$|G_1(\chi)| = \sqrt{n}.$$

B.3 Sommes de Kloosterman

Pour cette section, le lecteur peut consulter **[Iw0]**. Soient m, n des entiers relatifs et c un entier naturel non-nul. La *somme de Kloosterman* classique (c'est-à-dire pour le groupe de congruence $\Gamma_0(1)$ et les pointes ∞ et ∞) est donnée par :

$$S(m,n;c) := \sum_{x \mod c} e\left(\frac{mx+n\overline{x}}{c}\right) \tag{B.3.1}$$

où $\overline{x}$ désigne l'inverse de x modulo c. Par exemple, si $n=0$ alors on retrouve les sommes de Ramanujan :

$$S(m,0;c) = r(m;c).$$

On aura besoin de la majoration de A. Weil (**[We]**) et T. Estermann (**[Es]**) :

Théorème B.3.1 (A. Weil-T. Estermann). *Soient m, n des entiers relatifs non-nuls et c un entier naturel non-nul.*

$$|S(m,n;c)| \leq (m,n,c)^{\frac{1}{2}}\sqrt{c}\,\tau(c).$$

Nous redonnons aussi l'inégalité du grand crible pour les sommes de Kloosterman (confer **[DuFrIw3]**) :

Proposition B.3.2. *Soit $k \geq 2$ un entier naturel. Pour toute fonction η à support dans $[C,2C]$ telle que $\eta^{(i)} \ll_i C^{-i}$ pour tout entier naturel i, on pose :*

$$\Delta_\eta(n,l) := \frac{2\pi}{i^k} \sum_{\substack{c\in\mathbb{N}^* \\ c\equiv 0 \mod q}} \frac{S(n,l;c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{ln}}{c}\right)\eta(c).$$

Pour toutes suites de nombres complexes $\overrightarrow{x} := (x_l)_{1\leq l\leq L}$ et $\overrightarrow{y} := (y_n)_{1\leq n\leq N}$,

$$\sum_{1\leq l\leq L}\sum_{1\leq n\leq N} x_l y_n \Delta_\eta(n,l) \ll_{\varepsilon,k} C^\varepsilon \left(\frac{\sqrt{LN}}{C}\right)^{k-\frac{3}{2}} \left(1+\frac{L}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1+\frac{N}{q}\right)^{\frac{1}{2}} ||\overrightarrow{x}||_2 ||\overrightarrow{y}||_2$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Annexe C

Boîte à outils analytique

Cet appendice est une sorte de bestiaire analytique qui contient tous les outils analytiques dont on a eu besoin dans ce mémoire.

C.1 Fonction Γ

La référence utilisée ici est **[Bl]**. La fonction Γ est définie sur $\Re(s) > 0$ par :

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty \exp(-u) u^s \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

La convergence uniforme de l'intégrale précédente assure que cette fonction est holomorphe sur $\Re(s) > 0$. D'autre part, on montre en intégrant par parties que la fonction Γ vérifie la relation suivante :

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$$

pour $\Re(s) > 0$. Cette relation permet de prolonger méromorphiquement la fonction Γ au plan complexe avec uniquement des pôles simples en $\mathbb{Z}_-$ de résidu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{res}_{s=-n}\,\Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Une propriété fondamentale de la fonction Γ est que $\Gamma(s)$ décroit exponentiellement vite lorsque $\Im(s)$ croit vers $\pm\infty$. Il s'agit de décrire le comportement asymptotique de la fonction Γ sur toute partie complexe du type :

$$\mathcal{D}_{a,b} := \{s \in \mathbb{C}, a \leq \Re(s) \leq b, |\Im(s)| \geq 1\}$$

où $a \leq b$ sont des nombres réels. Le résultat est le suivant :

Proposition C.1.1. *Pour tout s dans $\mathcal{D}_{a,b}$,*

$$|\Gamma(s)| = \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{\pi}{2}|\Im(s)|\right) |s|^{\Re(s)-\frac{1}{2}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\Im(s)| \cos^2\left(\frac{arg(s)}{2}\right)} + \frac{|a|^3 + |b|^3}{|\Im(s)|^3}\right)\right)$$

où la constante impliquée dans le symbole de Landau est absolue et en particulier ne dépend pas de a et de b.

Remarque C.1.1. Cette formule sera abusivement appelée «formule de Stirling». C'est une généralisation précise de la formule de Stirling pour les factorielles.

Preuve de la proposition C.1.1 On note $s := \sigma + it$ où σ et t sont des réels et on se limite au cas $t \geq 1$. La (véritable) formule de Stirling (**[Ti1]**) assure que :

$$(\log\Gamma)(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right)\log s - s + \frac{\log 2\pi}{2} + \int_0^\infty \frac{\Phi(u)}{(s+u)^2}\mathrm{d}u \tag{C.1.1}$$

où $\log\Gamma$ est une détermination holomorphe du logarithme de Γ sur $\mathcal{D}_{a,b}$, log est une détermination holomorphe de la fonction identité sur $\mathcal{D}_{a,b}$ et Φ est une fonction de la variable réelle bornée définie par :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \Phi(u) := -\int_0^u \left(\{v\} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}v.$$

Comme :

$$\frac{|s+u|^2}{(t+u)^2} = 1 - (1 - \cos(\arg(s)))\frac{2ut}{(t+u)^2} \geq 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos(\arg(s))) = \cos^2\left(\frac{\arg(s)}{2}\right),$$

on remarque que :

$$\left|\int_0^\infty \frac{\Phi(u)}{(s+u)^2}\mathrm{d}u\right| \ll \frac{1}{t\cos^2\left(\frac{\arg(s)}{2}\right)} \tag{C.1.2}$$

où la constante impliquée est absolue. D'autre part,

$$\Re\left(\left(s - \frac{1}{2}\right)\log s - s\right) = \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\log|s| - t\arctan\left(\frac{t}{\sigma}\right) - \sigma. \tag{C.1.3}$$

Comme :

$$\arctan\left(\frac{t}{\sigma}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sigma}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sigma}{t} + \mathcal{O}\left(\frac{|a|^3 + |b|^3}{t^3}\right),$$

on obtient, en prenant la partie réelle dans (C.1.1) et en tenant compte de (C.1.2) et de (C.1.3), que :

$$\log|\Gamma(s)| = \log\sqrt{2\pi} + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\log|s| - \frac{\pi}{2}t + \mathrm{Err}(s) \tag{C.1.4}$$

où :

$$\mathrm{Err}(s) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t\cos^2\left(\frac{\arg(s)}{2}\right)} + \frac{|a|^3 + |b|^3}{t^3}\right).$$

En prenant l'exponentielle de l'égalité (C.1.4), on constate que :

$$|\Gamma(s)| = \sqrt{2\pi}\exp\left(-\frac{\pi}{2}t\right)|s|^{\sigma-\frac{1}{2}}\exp(\mathrm{Err}(s))$$

et le résultat en découle car $\lim_{t\to+\infty}\mathrm{Err}(s) = 0$ donc :

$$\exp(\mathrm{Err}(s)) = 1 + \mathcal{O}(\mathrm{Err}(s))$$

avec une constante impliquée absolue

■

C.2 Fonctions de Bessel

On énumère ici les définitions et les estimations des fonctions de Bessel de première et deuxième espèce qui apparaissent dans ce mémoire.

C.2.1 Fonctions de Bessel de première espèce

La *fonction de Bessel de première espèce* d'ordre un entier naturel k est définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad J_k(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^r}{r!(k+r)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{k+2r}.$$

Les fonctions J_k envisagées comme des fonctions de la variable réelle sont des fonctions oscillantes amorties et plus k est grand plus ces oscillations sont amorties. Selon **[Wa]**, pour tout entier naturel non-nul k,

$$\forall j \geq 0, \quad \left(\frac{x}{1+x}\right)^j J_k^{(j)}(x) \ll_{j,k} \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k. \tag{C.2.1}$$

Plus précisément, pour tout entier naturel non-nul k,

$$J_k(x) = \exp(ix) V_k(x) + \exp(-ix)\overline{V_k}(x) \tag{C.2.2}$$

où :

$$\forall j \geq 0, \quad x^j V_k^{(j)}(x) \ll_{j,k} \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k. \tag{C.2.3}$$

C.2.2 Fonctions de Bessel de deuxième espèce

La *fonction de Bessel de deuxième espèce* d'ordre un nombre complexe ν est définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad K_\nu(y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^\nu \exp\left(-\frac{y}{2}(t + t^{-1})\right) \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Ainsi, la fonction $\nu \to K_\nu(y)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et paire si $\Re(y) > 0$ alors que la fonction $y \to K_\nu(y)$ décroit exponentiellement vite en $+\infty$. Plus précisément, la formule suivante est valide uniformément sur $\Re(\nu) \geq 0$ et $y > 0$ (confer **[Mot]**) :

$$K_\nu(y) = \left(\frac{\pi}{2y}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-y) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\nu|^2}{y}\right)\right).$$

C.3 Formule de Perron

Une formule de Perron explicite est donnée dans la proposition suivante dont une preuve peut être trouvée dans **[Te]** :

Proposition C.3.1. *Soit $D(s) := \sum_{n\geq 1} d_n n^{-s}$ une série de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue finie σ_a. Si x, T sont des nombres réels supérieurs à 1 avec x non-entier et c est un nombre réel strictement supérieur à $\sup(0, \sigma_a)$ alors :*

$$\sum_{1\leq n\leq x} d_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT} D(s)x^s\frac{\mathrm{d}s}{s} + \mathcal{O}\left(x^c \sum_{n\geq 1}\frac{|d_n|}{n^c\left(1+T|\log\left(\frac{x}{n}\right)|\right)}\right).$$

C.4 Transformée intégrale de Mellin

La référence utilisée pour cette notion est **[CoLa]**. Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit au moins formellement la *transformée de Mellin* de h notée $\mathcal{M}(f)$ comme étant la fonction de la variable complexe suivante :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{M}(h)(s) := \int_0^{+\infty} x^s h(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}. \tag{C.4.1}$$

Remarque C.4.1. En posant $f(y) = h(\exp(-y))$, on constate que la transformée de Mellin de h est la transformée de Laplace bilatérale de f et donc la somme de deux transformées de Laplace unilatérales de f.

Selon la remarque précédente, il est possible de prouver que deux situations peuvent se produire :

– soit $\mathcal{M}(h)(s)$ n'est définie pour aucun nombre complexe s,

– soit $\mathcal{M}(h)(s)$ est définie sur une *bande de convergence* $\sigma_1 < \Re(s) < \sigma_2$ notée $\mathcal{B}(\sigma_1, \sigma_2)$.

Un problème intéressant est d'inverser le processus au sens suivant : connaissant une fonction ϕ sur $\mathcal{B}(\sigma_1, \sigma_2)$, est-il possible de trouver une fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall s \in \mathcal{B}(\sigma_1, \sigma_2), \quad \mathcal{M}(h)(s) = \phi(s) \quad ?$$

D'autre part, une telle fonction h est-elle unique ? Une réponse partielle est donnée par la version suivante de la *formule d'inversion de Mellin* :

Proposition C.4.1. *Soit ϕ une fonction holomorphe sur une bande $\mathcal{B}(\sigma_1, \sigma_2)$. On suppose qu'il existe une sous-bande $\mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_2)$ de $\mathcal{B}(\sigma_1, \sigma_2)$ et un réel $\eta > 0$ avec :*

$$\phi(s) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^{1+\eta}}\right)$$

lorsque $s \to \infty$ dans cette sous-bande. Si l'on définit une fonction h sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) := \frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} x^{-z}\phi(z)\mathrm{d}z$$

pour $\alpha_1 < c < \alpha_2$ alors :

$$\forall s \in \mathcal{B}(\sigma_1, \sigma_2), \quad \mathcal{M}(h)(s) = \phi(s).$$

Remarque C.4.2. Sous les hypothèses précédentes, la *transformée de Mellin inverse* de Φ existe et est unique sur toute bande d'holomorphie de Φ. Cependant, il est possible d'obtenir des transformées de Mellin inverse de Φ distinctes sur deux bandes d'holomorphie de Φ disjointes.

C.5 Un calcul utile de résidu

Rappelons que l'on a associé à tout polynôme à coefficients réels $A(X) := \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ et tout nombre réel M la fonction de la variable complexe s suivante :

$$\widehat{A_M}(s) = \sum_{k\geq 0} a_k \frac{k!}{(s\log M)^k}.$$

Proposition C.5.1. *Soient A un polynôme à coefficients réels, M un nombre réel, a un entier naturel non-nul et l un entier naturel.*

$$res_{s=0}\ \frac{1}{\log^{a-1}(M)} \frac{M^s s^l \widehat{A_M^{(a-1)}}(s)}{s^a} = \frac{A^{(l)}(1)}{\log^l(M)}.$$

Preuve du lemme C.5.1 : Ecrivons le développement de Taylor de $A^{(a-1)}(X)$ sous la forme :

$$A^{(a-1)}(X) = \sum_{k\geq 0} a_k^{(a-1)} X^k$$

et notons r le résidu à évaluer. On a alors :

$$r = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k^{(a-1)} k!}{\log^k(M)} \sum_{n\geq 0} \frac{\log^n(M)}{n!} \operatorname{res}_{s=0}\ s^{n+l-(a+k)}.$$

Comme :

$$\operatorname{res}_{s=0}\ s^{n+l-(a+k)} = \delta_{a+k-(1+l)}(n),$$

le résidu à évaluer vaut donc :

$$r = \frac{1}{\log^l(M)} \sum_{k\geq 1+l-a} \frac{a_k^{(a-1)} k!}{(k+a-1-l)!}.$$

Le lecteur peut vérifier que pour tout entier naturel $k \geq 1+l-a$:

$$a_k^{(a-1)} = a_{k+a-1}(k+(a-1))\cdots(k+1)$$

ce qui entraîne que :

$$r = \frac{1}{\log^l(M)} \sum_{k\geq 1+l-a} a_k^{(a-1)} (k+a-1-(l-1))\cdots(k+a-1)$$

et la somme précédente vaut $A^{(l)}(1)$

■

Annexe D

Le problème purement technique des formes anciennes

L'objectif principal de cet appendice est de convaincre le lecteur que le théorème 3.3.1 reste valide même si il y a des formes anciennes dans $S_k(q)$. Rappelons certaines notations de **[KoMiVa]** :

$$\widetilde{\mathsf{M}_g}(\alpha,\beta;l) := \sum_{m,n\geq 1} \frac{\lambda_g(m)\lambda_g(n)}{\sqrt{mn}} V_{g,\alpha}\left(\frac{m}{qD}\right) V_{g,\beta}\left(\frac{n}{qD}\right) \sum_{f\in S_k^p(q)}^{h} \psi_f(m)\overline{\psi_f(n)}\lambda_f(l). \tag{D.0.1}$$

où $(\alpha,\beta) \in \mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$ et la fonction $V_{g,.}(.)$ et ses propriétés peuvent être trouvées en pages 137-138 :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \forall A > 0, \quad V_{g,.}(y) \ll_A (1+|\Im(\mu)|)^B\, y^{-A} \tag{D.0.2}$$

pour une constante absolue $B > 0$. Dans cette appendice, t désigne la partie imaginaire de μ. Les auteurs ont prouvé en utilisant la formule de Petersson (confer page 138) donnée au théorème 2.2.1 que s'il n'y a pas de formes anciennes dans $S_k(q)$ et si $l < q$ alors :

$$(qD)^{2\Re(\mu)}\mathcal{M}_g^h(\mu;l) = \varepsilon(g;\mu) \begin{pmatrix} \widetilde{\mathsf{M}_g}(\mu,\overline{\mu};l) \\ \widetilde{\mathsf{M}_g}(-\mu,\overline{\mu};l) \\ \widetilde{\mathsf{M}_g}(\mu,-\overline{\mu};l) \\ \widetilde{\mathsf{M}_g}(-\mu,-\overline{\mu};l) \end{pmatrix}$$

avec pour tout (α,β) dans $\mathcal{S}(\mu,\overline{\mu})$:

$$\widetilde{\mathsf{M}_g}(\alpha,\beta;l) = \sum_{\tilde{e}e=l} \frac{\varepsilon_g(\tilde{e})}{\sqrt{\tilde{e}}} \sum_{ab=\tilde{e}} \frac{\mu(a)\varepsilon_D(a)}{\sqrt{a}}\lambda_g(b) \sum_{m,n\geq 1} \frac{\lambda_g(m)\lambda_g(n)}{\sqrt{mn}} V_{g,\alpha}\left(\frac{m}{qD}\right) V_{g,\beta}\left(\frac{a\tilde{e}n}{qD}\right) \Delta_q(m,aen). \tag{D.0.3}$$

Dans notre cas, il y a des formes anciennes car le poids k est grand mais nous allons prouver que :

Proposition D.0.2. *Soit g une forme primitive cuspidale de niveau D sans facteurs carrés et de caractère trivial. Supposons que q est premier, premier avec D. Si μ est un nombre complexe et $l < q$ est un entier naturel non-nul alors :*

$$\widetilde{\mathsf{M}}_g(\alpha,\beta;l) = \sum_{\tilde{e}e=l}\frac{\varepsilon_q(\tilde{e})}{\sqrt{\tilde{e}}}\sum_{ab=\tilde{e}}\frac{\mu(a)\varepsilon_D(a)}{\sqrt{a}}\lambda_g(b) \sum_{m,n\geq 1}\frac{\lambda_g(m)\lambda_g(n)}{\sqrt{mn}}V_{g,\alpha}\left(\frac{m}{qD}\right)V_{g,\beta}\left(\frac{a\tilde{e}n}{qD}\right)\Delta_q(m,aen) + \mathcal{O}_{\varepsilon,k,g}\left((ql)^{\varepsilon}(1+|\Im(\mu)|)^B\frac{\sqrt{l}}{q}\right) \tag{D.0.4}$$

pour une constante absolue $B > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$.

Par conséquent, si $l < q$ alors tout se passe comme s'il n'y avait pas de formes anciennes et le théorème 3.3.1 reste valide même si il y a des formes anciennes. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme D.0.3. *Soit $N \geq 1$. Pour tous entiers naturels non-nuls m et n, on a :*

$$\Delta_N(m,n) \ll_{\varepsilon} (Nmn)^{\varepsilon}\frac{\sqrt{mn}}{N}. \tag{D.0.5}$$

Preuve du lemme D.0.3. Les estimations des fonctions de Bessel données dans l'appendice C entraînent que :

$$\Delta_N(m,n) \ll \frac{1}{N}\sum_{c\ll\frac{\sqrt{mn}}{N}}\frac{|S(m,n;Nc)|}{c}\left(\frac{Nc}{\sqrt{mn}}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{N}\sum_{c\gg\frac{\sqrt{mn}}{N}}\frac{|S(m,n;Nc)|}{c}\left(\frac{\sqrt{mn}}{Nc}\right)^{k-1}$$

et on conclut grâce à l'estimation de Weil des sommes de Kloosterman (appendice B)

■

Preuve de la proposition D.0.2. En utilisant les propriétés de multiplicativité des valeurs propres de Hecke de f et de g, on remarque que :

$$\widetilde{\mathsf{M}}_g(\alpha,\beta;l) = \sum_{\tilde{e}e=l}\frac{\varepsilon_q(\tilde{e})}{\sqrt{\tilde{e}}}\sum_{ab=\tilde{e}}\frac{\mu(a)\varepsilon_D(a)}{\sqrt{a}}\lambda_g(b) \sum_{m,n\geq 1}\frac{\lambda_g(m)\lambda_g(n)}{\sqrt{mn}}V_{g,\alpha}\left(\frac{m}{qD}\right)V_{g,\beta}\left(\frac{a\tilde{e}n}{qD}\right)\sum_{f\in S_k^p(q)}^{h}\lambda_f(m)\lambda_f(aen). \tag{D.0.6}$$

On coupe la sommation en les variables m et n dans $D.0.6$ de la façon suivante :

$$\sum_{\substack{q\nmid m\\ q^2\nmid n}}\cdots + \sum_{\substack{q\nmid n\\ q^2\nmid m}}\cdots + \sum_{q^2\mid mn}\cdots := I + II + III. \tag{D.0.7}$$

Montrons que le troisième terme dans (D.0.7) est un terme d'erreur :

$$III = \sum_{\substack{q^2|m\\ n\geq 1}} \cdots + \sum_{\substack{q|m\\ q|n}} \cdots + \sum_{\substack{m\geq 1\\ q^2|n}} \cdots := IIIa + IIIb + IIIc.$$

Nous ne donnons les détails que pour la contribution provenant du terme $IIIa$. On remarque que :

$$\left|\sum_{f\in S_k^p(q)}^{h} \lambda_f(q^2m)\lambda_f(aen)\right| \ll \left(\sum_{f\in \mathcal{B}_k(q)}^{h} \left|\psi_f(q^2m)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{f\in \mathcal{B}_k(q)}^{h} |\psi_f(aen)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et on sait que c'est borné par $\sqrt{qm}\left(1+\frac{\sqrt{aen}}{q}\right)$ selon la formule de Petersson (théorème 2.2.1). Ainsi,

$$\text{(D.0.8)}\quad IIIa \ll \left(\sum_{m\geq 1} \frac{|\lambda_g(q^2m)|}{\sqrt{q^2m}}\sqrt{qm}\,|V_{g,\alpha}(qm)|\right) \left(\sum_{n\geq 1} \frac{|\lambda_g(n)|}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{\sqrt{aen}}{q}\right)\left|V_{g,\beta}\left(\frac{a\tilde{e}n}{q}\right)\right|\right) := IIIa1 \times IIIa2.$$

En utilisant l'estimation (D.0.2), on observe que :

$$\begin{aligned} IIIa1 &\ll_\varepsilon q^\varepsilon\sqrt{ae}(1+\sqrt{q}),\\ IIIa2 &\ll_{\varepsilon,A} \frac{q^\varepsilon}{q^{\frac{1}{2}+A}} \end{aligned}$$

pour tout $A>1$. Ainsi, la contribution du troisième terme dans (D.0.7) est :

$$III \ll_\varepsilon q^\varepsilon \frac{\sqrt{ae}}{q}.$$

A propos du premier terme dans (D.0.7) (on procède de même pour le second terme), on peut appliquer la formule d'H. Iwaniec, W. Luo, P. Sarnak (2.2.2) ce qui donne (n'oublions pas que q est premier !) :

$$\sum_{f\in S_k^p(q)}^{h} \lambda_f(m)\lambda_f(aen) = \Delta_q(m,aen) - \frac{1}{q\nu(n\wedge q)}\sum_{\tilde{q}|q^\infty}\frac{1}{\tilde{q}}\Delta_1(m\tilde{q}^2,aen).$$

Par conséquent, le premier terme vaut :

$$\text{(D.0.9)}\quad I = \sum_{\substack{q\nmid m\\ q^2\nmid n}} \frac{\lambda_g(m)\lambda_g(n)}{\nu(q\wedge n)\sqrt{mn}}\Delta_q(m,aen) - \frac{1}{q}\sum_{\tilde{q}|q^\infty}\frac{1}{\tilde{q}}\sum_{\substack{q\nmid m\\ q^2\nmid n}} \frac{\lambda_g(m)\lambda_g(n)}{\nu(q\wedge n)\sqrt{mn}}\Delta_1(m\tilde{q}^2,aen) := Ia + Ib$$

avec, selon la formule de Petersson (le niveau ici est un !) :

$$\Delta_1(m\tilde{q}^2, aen) = \sum_{h \in S_k^p(1)} \omega_1(h)\lambda_h(m\tilde{q}^2)\lambda_h(aen). \tag{D.0.10}$$

La contribution du second terme dans (D.0.9) est donc égale à :

$$\begin{aligned} Ib = \frac{1}{q}\sum_{\tilde{q}|q^\infty}\frac{1}{\tilde{q}}\sum_{h\in S_k^p(1)}\omega_1(h)&\left(\sum_{\substack{m\geq 1\\ q\nmid m}}\frac{\lambda_g(m)\lambda_h(\tilde{q}^2m)}{\sqrt{m}}V_{g,\alpha}\left(\frac{m}{qD}\right)\right)\\ &\times\left(\sum_{\substack{n\geq 1\\ q^2\nmid n}}\frac{\lambda_g(n)\lambda_h(aen)}{\sqrt{n}\nu(q\wedge n)}V_{g,\beta}\left(\frac{a\tilde{e}n}{qD}\right)\right)\\ &:= \frac{1}{q}\sum_{\tilde{q}|q^\infty}\frac{1}{\tilde{q}}\sum_{h\in S_k^p(1)}\omega_1(h)Ib1\times Ib2. \end{aligned} \tag{D.0.11}$$

Etudions $Ib2$:

$$\begin{aligned} Ib2 = \sum_{\substack{n\geq 1\\ q\nmid n}}\frac{\lambda_g(n)\lambda_h(aen)}{\sqrt{n}}V_{g,\beta}\left(\frac{a\tilde{e}n}{qD}\right)&\\ +\frac{1}{\nu(q)}\sum_{\substack{n\geq 1\\ q|n}}\frac{\lambda_g(n)\lambda_h(aen)}{\sqrt{n}\nu(q\wedge n)}V_{g,\beta}\left(\frac{a\tilde{e}n}{qD}\right) &:= Ib21 + Ib22. \end{aligned}$$

On se contente d'analyser $Ib21$ sachant que la même démarche s'applique pour $Ib22$ et donne un résultat encore meilleur. La formule d'inversion de Mellin (proposition C.4.1) assure que $Ib21$ vaut :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(2)} L\left(ae, q^2; \frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{qD}{a\tilde{e}}\right)^z \mathcal{M}(V_{g,\beta})(z)\mathrm{d}z \tag{D.0.12}$$

avec :

$$L(ae, q^2; z) := \sum_{\substack{n\geq 1\\ q^2\nmid n}}\frac{\lambda_h(aen)\lambda_g(n)}{n^z}.$$

On montre que :

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad \mathcal{M}(V_{g,\beta})(z) \ll (1+|t|)^B|z|^{-2}. \tag{D.0.13}$$

En utilisant les propriétés de multiplicativité des valeurs propres de Hecke de f et de g, on obtient :

$$L(ae, q^2; z) = R(ae; z)\frac{L^{(aeq^2)}(h\times g, z)}{\zeta^{(aeq^2)}(2z)}$$

avec :

$$R(ae;z) := \sum_{n|(ae)^\infty} \frac{\lambda_h(aen)\lambda_g(n)}{n^z}.$$

En fait, si $ae = p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$ est la décomposition en facteurs premiers de ae alors on remarque que :

$$R(ae;z) = \prod_{i=0}^{r}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda_g(p_i^k)\lambda_f(p_i^{a_i+k})}{p_i^{kz}}\right)$$

et la borne de Ramanujan-Petersson-Selberg pour les valeurs propres de g assure que chaque série apparaissant dans l'égalité précédente converge sur $\Re(z) > 0$ donc $R(ae;z)$ y converge aussi. De plus, sur $\Re(z) > 0$,

$$\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda_g(p_i^k)\lambda_f(p_i^{a_1+k})}{p_i^{kz}} \ll \tau(p^{a_i+1})$$

pour tout entier naturel i compris entre 0 et r donc :

$$R(ae;z) \ll \tau(ae) \ll_\varepsilon (ae)^\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$. En bougeant le contour jusqu'à $\Re(z) = \varepsilon$ dans (D.0.12), on obtient grâce à la borne de convexité de la fonction L de Rankin-Selberg $L(h\times g,.)$ (h est de niveau 1 !) que :

$$Ib21 \ll_\varepsilon (qae)^\varepsilon(1+|t|)^B$$

pour tout $\varepsilon > 0$. On obtient de façon analogue :

$$Ib22 \ll_\varepsilon \frac{(qae)^\varepsilon}{\sqrt{q}\nu(q)}(1+|t|)^B$$

Il est plus facile de gérer $Ib1$ car comme $\tilde{q}\wedge m = 1$ si $q\nmid m$, on a :

$$\lambda_h(\tilde{q}^2 m) = \lambda_h(\tilde{q}^2)\lambda_h(m).$$

Finalement,

$$Ib \ll_{\varepsilon,g} \frac{(aeq)^\varepsilon}{q} \tag{D.0.14}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Mettant tout ensemble, on a prouvé que :

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathsf{M}}_g(\alpha,\beta;l) = {} & \sum_{\tilde{e}e=l}\frac{\varepsilon_q(\tilde{e})}{\sqrt{\tilde{e}}}\sum_{ab=\tilde{e}}\frac{\mu(a)\varepsilon_D(a)}{\sqrt{a}}\lambda_g(b)\\ & \sum_{m,n\geq 1}\frac{\lambda_g(m)\lambda_g(n)}{\sqrt{mn}}V_{g,\alpha}\left(\frac{m}{qD}\right)V_{g,\beta}\left(\frac{a\tilde{e}n}{qD}\right)\Delta_q(m,aen)\\ & -\sum_{\tilde{e}e=l}\frac{\varepsilon_q(\tilde{e})}{\sqrt{\tilde{e}}}\sum_{ab=\tilde{e}}\frac{\mu(a)\varepsilon_D(a)}{\sqrt{a}}\lambda_g(b)\sum_{\substack{m,n\geq 1\\ q^2|mn}}\frac{\lambda_g(m)\lambda_g(n)}{\sqrt{mn}}V_{g,\alpha}\left(\frac{m}{qD}\right)V_{g,\beta}\left(\frac{a\tilde{e}n}{qD}\right)\Delta_q(m,aen)\\ & + \mathcal{O}_{\varepsilon,g}\left((ql)^\varepsilon(1+|t|)^B\frac{\sqrt{l}}{q}\right)\end{aligned} \tag{D.0.15}$$

et le second terme de (D.0.15) est $\ll_{\varepsilon,g} (ql)^\varepsilon\frac{\sqrt{l}}{q}$ grâce au lemme D.0.3

■

Remarque D.0.1. La même analyse est valable pour les premiers moments harmoniques tordus qui ont aussi été étudiés dans **[KoMiVa]**.

Bibliographie

[Ap] Apostol T.M. : *Introduction to analytic number theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (1976).

[AtLe] Atkin A., Lehner J. : *Hecke operators on $\Gamma_0(m)$*, Math. Ann. 185, 134–160 (1970).

[Bl] Blanchard A. : *Initiation à la théorie analytique des nombres premiers*, Dunod, Paris, 1969.

[BoSc] Bocherer S., Schulze-Pillot R. : *On the central critical value of the triple product L-function*, David, Sinnou (ed.), Number theory. Séminaire de Théorie des Nombres de Paris 1993-94. Cambridge : Cambridge University Press. Lond. Math. Soc. Lect. Note Serv. 235, 1–46 (1996).

[BoLa] Bohr H., Landau E. : *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, Compte Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, vol. 158, 106–110 (1914).

[Br] Brumer A. : *The rank of $J_0(N)$*, Astérisque 228, SMF (1995), 41–68.

[Bu] Burgess D. A. : *On character sums and L-series*, Proc. London Math. Soc. (3) 12, 1962, 193–206.

[Co] Conrey J. B. : *The Riemann Hypothesis*, Notices of the AMS, vol. 50, no. 3 (2003).

[CoLa] Colombo S., Lavoine J. : *Transformations de Laplace et de Mellin*, Mémorial des sciences mathématiques, Fascicule 169, Gauthier-Villars éditeur (1972).

[CoIw] Conrey B., Iwaniec H. : *The cubic moment of central values of automorphic L-functions*, Annals of Math. 151, 1175-1216 (2000).

[CoSo] Conrey J.B., Soundararajan K. : *Real zeros of quadratic Dirichlet L-functions*, Invent. Math. 150, 1-44 (2002).

[CoMi] Cogdell J., Michel P. : *On the complex moments of symmetric power L-functions at $s = 1$*, à paraître.

[DeIw] Deshouillers J.-M., Iwaniec H. : *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms*, Invent. Math. 70 no. 2, 219–288 (1982/83).

[Du] Duke W. : *The critical order of vanishing of automorphic L-functions with high level*, Invent. Math. 119 , 165–174 (1995).

[DuFrIw] Duke W., Friedlander J.B., Iwaniec H. : *A quadratic divisor problem*, Invent. Math. 115 , 209–217 (1994).

[DuFrIw2] Duke W., Friedlander J.B., Iwaniec H. : *The subconvexity problem for Artin L functions*, Invent. Math. 149, 489–577 (2002).

[DuFrIw3] Duke W., Friedlander J.B., Iwaniec H. : *Bounds for automorphic L-functions*, I., Invent. Math. 112, no. 1, 1–8 (1993) ; II., Invent. Math. 115, no. 2, 219–239 (1994).

[Es] Estermann T. : *On Kloosterman's sum*, Mathematika 8, 83–86 (1961).

[Ge] Golbart S. : *Automorphic forms on adele groups*, Annals of Mathematics Studies, no. 83, Princeton University Press, 1975.

[Go] Goldfeld D. : *The class number of quadratic fields and the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa 3,4 (1976), 623–663.

[GoHo] Goldfeld D., Hoffstein J. : *On the number of Fourier coefficients that determine a modular form*, Am. Math. Society , Contemporary Mathematics, Volume 143, 385–393 (1993).

[GoHoLi] Goldfeld D., Hoffstein J., Lieman D. : *An effective zero free region*, Ann. of Math. (2) 140, 177–181 (1994).

[GoJa] Godement R., Jacquet H. : *Zeta functions of simple algebras*, Lecture Notes in Mathematics 260, Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag VIII, 188 p. (1972).

[Goo] Good A. :*Cusp forms and eigenfunctions of the Laplacian*, Math. Ann. 255, no. 4 (1981), 523–548.

[GrZa] Gross B., Don Zagier : *Heegner points and derivatives of L-series*, Invent. Math 85 (1986) 225–320.

[Ha] Harcos G. :*New Bounds for Automorphic L-Functions*, thesis, Faculty of Princeton (juin 2003).

[HaMi] Harcos G., Michel P. :*The subconvexity problem for Rankin-Selberg L-function and equidistribution of Heegner points II*, à paraître.

[HaLi] Hardy G.H., Littlewood J.E. :*The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line*, Math. Z. 10 (1921), 283–317.

[HaKu] Harris M., Kudla S.S. :*The central critical value of a triple product L-function*, ANN. Math. (2) 133 (1991), 605–672.

[H-BMi] Heath-Brown D.R., Michel P., *Exponential decays for the frequency of the analytic rank of Automorphic L-functions*, Duke Math. Journal 102 no. 3, 130–148 (2000).

[Iw0] Iwaniec H. :*Introduction to the spectral theory of automorphic forms*, Revista Matematica Iberoamericana, 1995.

[Iw] Iwaniec H. :*Topics in Classical Automorphic Forms*, volume 17 de Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.

[IwLuSa] Iwaniec H., Luo W., Sarnak P. :*Low Lying Zeros of Families of L-Functions*, Publications Mathématiques de l'Institut des hautes études scientifiques, 91 : 55–131, 2001.

[IwSa] Iwaniec H., Sarnak P. :*The non-vanishing of central values of automorphic L-functions and Landau-Siegel zeros*, Israël Journal of Maths. 120 (2000), 155–177.

[KaSa] Katz N. M., Sarnak P. : *Random matrices, Frobénius eigenvalues, and monodromy*, American Math. Soc. Colloquium Publications, 45 (1999).

[KiSa] Kim H., Sarnak P. : *Appendix : Refined estimates towards the Ramanujan and Selberg conjectures*, J.A.M.S. (to appear).

[KiSh] Kim H., Shahidi F. : *Cuspidality of symmetric powers with applications*, Duke Math. J. 112, no. 1, 177–197 (2002).

[Kl] Kloosterman H.D. : *On the representation of numbers in the forms* $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$, Acta Math. 49, 407–464 (1926).

[Kn] Knapp A. :*Elliptic curves*, Mathematical Notes 40, Princeton University Press, 427 p. (1992).

[Ko] Kowalski E. : *The rank of the jacobian of modular curves : Analytic methods*, thesis, Rutgers University (1998).

[Ko2] Kowalski E. : *Dependency on the group in automorphic Sobolev inequalities*, Preprint (2002).

[KoMi] Kowalski E., Michel P. :*The analytic rank of* $J_0(q)$ *and zeros of automorphic L-functions*, Duke Mathematical journal, 100 (3) : 503–542, décembre 1999.

[KoMiVa] Kowalski E., Michel P., Vanderkam J. : *Rankin-Selberg L-functions in the level aspect*, Duke Math. J. 114, 123–191 (2002).

[KoMiVa2] Kowalski E., Michel P., Vanderkam J. : *Non-vanishing of high derivatives of automorphic L-functions at the center of the critical strip*, J. reine angew. Math. 526 (2000), 1–34.

[KrSt] Kroetz B., Stanton R.J. : *Holomorphic extension of representations : (I) automorphic functions*, Annals of Math. (to appear).

[La] Landau E. :*Bemerkungen zum Heilbronnschen Satz*, Acta Arith. 1 (1935), 1–18.

[Mi1] Michel P. :*Analytic Number theory and Families of Automorphic L-functions*, IAS/Park City Mathematics Institute, juillet 2002, IAS/PCMI lecture series (à paraître).

[Mi2] Michel P. : *The subconvexity problem for Rankin-Selberg L-functions and Equidistribution of Heegner points*, to appear in Annals of Math.

[Mi3] Michel P. : *Familles de fonctions L de formes automorphes et applications*, Proceedings des Journées arithmétiques de Lille, Journ. Th. Nombres Bordeaux (à paraître).

[Mi4] Michel P. : *On the shifted convolution problem*, Workshop on automorphic forms, Fields Institute (Toronto, Ontario, Canada), disponible à http ://www.fields.utoronto.ca/audio/02-03/.

[Mi5] Michel P. : *The subconvexity problem for Rankin-Selberg L-functions and equidistribution of Heegner points*, à paraître dans Annals of Maths.

[Mi6] Michel P. : *Répartition des zéros des fonctions L t matrices aléatoires*, Séminaire Bourbaki, 53ème année, 2000-2001, n. 887.

[Me] Mehta M. L. : *Random matrices*, Second edition, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1991.

[Mo] Montgomery H. L. : *The pair correlation of zeros of the zeta function*, Analytic number theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV), p. 181–193 (1972).

[Mo2] Montgomery H. L. : *Topics in multiplicative number theory*, Lecture Notes in Mathematics 227, Springer-Verlag (1971).

[Mot] Motohashi Y. : *Spectral theory of the Riemann Zeta-function*, Cambridge Tracts in Mathematics, volume 127, Cambridge University Press (1997).

[Ro] Royer E. : *Interprétation combinatoire des moments négatifs des valeurs des focntions L au bord de la bande critique*, Annales Scientifiques de l'Ecole normale supérieure, volume 26, 2003, 601–620.

[RoWu] Royer E., Wu J. : *Taille des valeurs de fonctions L de carré symétriques au bord de la bande critique*, à paraître à la Revista Ibericoamericana, 2003.

[RuSa] Rudnick Z., Sarnak P. : *Zeros of principal L-functions and random matrix theory*, A celebration of John F. Nash, Jr. Duke Math. J. 81 (1996), no. 2, 269–322.

[Sa] Sarnak P. : *Estimates for Rankin-Selberg L-functions and quantum unique ergodicity*, J. Func. Analysis 184, 419–453 (2001).

[Se] Selberg A. : *Contributions to the theory of Dirichlet's L-functions*, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I (1946), 1–62.

[Se2] Selberg A. : *Collected Papers. Vol. I et II.*, Springer-Verlag, Berlin (1999).

[Se3] Selberg A. : *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. 20, 47–87 (1956).

[Sh] Shimura G. :*On the holomorphy of certain Dirichlet series*, Proceedings of the London Mathematical Society, 31, 79–98 (1975).

[Si] Siegel C.L. :*Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper*, Acta Arith. 1 (1935), 83–86.

[TaWi] Taylor R., Wiles A. :*Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. (2) 141 553–572.

[Te] Tenenbaum G. :*Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, SMF (1995).

[Ti1] Titchmarsh E.C. : *The theory of functions*, Oxford University Press, Second Edition, 1939.

[Ti2] Titchmarsh E.C. : *The theory of the Riemann zeta Function*, Oxford University Press, 1951.

[Wa] Watson G.N. : *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Reprint of the second (1994) edition, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[Wa2] Watson T. : *Rankin triple products and quantum chaos*, Thesis, Princeton Univ., Princeton, NJ (2001).

[We] Weil A. : *On some exponential sums*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 34, 204–207 (1948).

[Wi] Wiles A. : *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. (2) 141, 443-551.

Résumé

Cette thèse établit des formules asymptotiques robustes pour le second moment harmonique ramolli des fonctions L de Rankin-Selberg. La principale contribution est une amélioration substancielle de la longueur admissible du ramollisseur qui est réalisée grâce à la résolution d'un problème de convolution avec décalage additif par une méthode spectrale considérée en moyenne. Une première conséquence est une nouvelle borne de sous-convexité pour les fonctions L de Rankin-Selberg par rapport au niveau qui possède de nombreuses applications arithmétiques déjà connues. En outre, une infinité de fonctions L de Rankin-Selberg ayant au plus huit zéros réels non-triviaux est exhibée et de nouvelles estimations non-triviales du rang analytique de la famille étudiée sont obtenues.

Real zeros and size of Rankin-Selberg L-functions in the level aspect

Abstract

This thesis establishes some strong asymptotic formulae for the harmonic mollified second moment of a family of Rankin-Selberg L-functions. The main contribution is a substancial improvement of the admissible length of the mollifier which is done by solving a shifted convolution problem by a spectral method on average. A first consequence is a new sharp subconvexity bound for Rankin-Selberg L-functions in the level aspect which has many already known arithmetic applications. Moreover, infinitely many Rankin-Selberg L-functions having at most eight non-trivial real zeros are produced and some new non-trivial estimates of the analytic rank of the family studied are obtained.

Discipline : Théorie analytique des nombres

Mots-clés : fonctions L de Rankin-Selberg, zéros réels non-triviaux, problème de sous-convexité, problème de convolution avec décalage additif, Laplacien hyperbolique, théorie spectrale, méthode spectrale, inégalités du grand crible, méthodes de ramollissement et d'amplification.

Intitulé et adresse du laboratoire :

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier

UMR CNRS 5149

Université Montpellier II

Case Courrier 051

Place Eugène Bataillon

34095 MONTPELLIER

CEDEX 5