Inclusion d'algèbres de Hecke et nombres de décomposition

Gwenaelle Rassemusse Genet

▶ **To cite this version:**

Gwenaelle Rassemusse Genet. Inclusion d'algèbres de Hecke et nombres de décomposition. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2004. Français. NNT : . tel-00006398

HAL Id: tel-00006398
https://theses.hal.science/tel-00006398

Submitted on 7 Jul 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DENIS DIDEROT - PARIS 7
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES

Année 2004 N° | | | | | | | | | | |

THÈSE DE DOCTORAT
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

INCLUSION D'ALGÈBRES DE HECKE ET NOMBRES DE DÉCOMPOSITION

présentée par
Gwenaëlle RASSEMUSSE GENET
pour obtenir le grade de docteur

soutenue le 16 juin 2004 devant le jury composé de :

Michel BROUÉ	
Marc CABANES	directeur de thèse
François DIGNE	
Meinolf GECK	rapporteur
Gerhard HISS	rapporteur
Raphaël ROUQUIER	

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse Marc Cabanes. Il a su écouter et tenir compte de mes aspirations en me donnant un sujet de mémoire de D.E.A. à ma convenance. L'étude de l'article de J. Graham et G. Lehrer, sur les algèbres cellulaires, m'a donné la connaissance d'une théorie qui m'a été utile jusqu'alors, notamment dans ma thèse de doctorat. Je lui suis aussi reconnaissante de m'avoir laissée extrêmement indépendante au cours des différentes étapes de ma thèse.

En second lieu, je désire remercier les personnes qui ont accepté de relire mon travail de thèse, ainsi que celles qui ont bien voulu être présentes dans le jury.

Je voudrais encore citer et remercier tous ceux qui m'ont accordé du temps ou de l'intérêt et qui m'ont permis de progresser dans mes démarches scientifiques, que ce soit dans le cadre informatique, essentiellement J. Michel, ou par des discussions - certains enseignants-chercheurs de l'université de Metz et principalement les chercheurs de l'équipe des groupes finis de l'université Paris 7 : son directeur M. Broué, S. Kim, L. Puig, R. Rouquier, mais aussi S. Donkin, G. Hiss, J. Hu, M. Geck, B. Leclerc, A. Mathas, T. Shoji. Que soient également salués les enseignants avec qui j'ai travaillé et qui m'ont permis de consacrer encore beaucoup de temps à la recherche tout en me donnant l'envie de faire partager mon amour des mathématiques aux étudiants : P. Gérardin, J. Le Potier, M. Virotte. Je n'oublie pas non plus ceux qui restent discrètement dans l'ombre et qui pourtant ont toujours été disponibles pour m'aider dans les tâches administratives, les secrétaires J. Lepage, C. Salzard et M. Wasse, le directeur du D.E.A. de mathématiques de Paris 7, J.J. Sansuc.

Enfin, il me reste à faire savoir à mes amis (de Lorraine, Lyon ou Paris, thésards ou non, en mathématiques ou non), ma famille (parents, beaux-parents, beau-frère et belle-soeur) et surtout Frédéric, que leur présence à mes côtés a joué un rôle important au cours de mon doctorat. J'en oublierais presque les divertissements offerts par Grawie, à l'origine de pauses bénéfiques dans mon travail !

Introduction

Dans cette introduction, j'expose les résultats établis dans cette thèse. Celle-ci est divisée en trois parties dont la première est indépendante des deux autres.

I Une remarque sur les (B,N)-paires scindées

La première partie de cette thèse traite des groupes possédant une (B,N)-paire scindée ([73], [20, §65, §69], [15], [16]). L'axiomatique des (B,N)-paires, introduite par J. Tits dans son article [81], regroupe l'essentiel des propriétés des groupes de Chevalley (cf. [17]). Les diverses classifications de (B,N)-paires finies, (B,N)-paires scindées, selon [39] et [82], font d'ailleurs apparaître que, réciproquement, les groupes de Chevalley en sont à peu près les seuls exemples. En particulier, la formule des commutateurs de Chevalley est, via ces classifications, toujours vérifiée. Nous montrons dans cette partie, que dès que la décomposition de Lévi (faible) a lieu, alors une démonstration élémentaire permet de retrouver une formule des commutateurs.

Théorème 1.5.1 *Soit G un groupe admettant une (B,N)-paire scindée, satisfaisant l'hypothèse (de décomposition de Lévi faible) :*

$$\text{pour toute racine simple } \delta \in \Delta,\ U \cap U^{s_\delta} \lhd U,$$

alors il satisfait la formule du commutateur

$$\begin{aligned}&\text{pour toutes racines } \alpha,\ \beta \in \Phi,\ \alpha \neq \pm\beta,\\ &\quad [X_\alpha, X_\beta] \subseteq \left\langle X_{i\alpha+j\beta},\ i>0,\ j>0,\ i\alpha+j\beta \in \Phi \right\rangle.\end{aligned}$$

Les notations U du p-sous-groupe distingué maximal de B et X_- des groupes radiciels sont les notations classiques et sont rappelées au chapitre 1. La démonstration fait intervenir principalement des considérations de convexité dans la représentation géométrique du groupe de Weyl.

II Matrices de décomposition

La seconde partie de ce mémoire traite de matrices de décomposition de modules et d'algèbres. Ces matrices permettent de relier des représentations ordinaires et modulaires, suivant la notion introduite par R. Brauer. Nous nous intéressons essentiellement aux matrices de décomposition unitriangulaires (carrées) et à la conservation de cette forme lors du passage d'une matrice de décomposition pour un module sur une algèbre graduée à la matrice de décomposition de la restriction de ce module à une algèbre qui effectue la graduation. Nous verrons

Théorème 2.2.1 *Soit $(\mathcal{O}, K, k)$ un système p-modulaire pour un nombre premier p et un corps k algébriquement clos. Soit A une $\mathcal{O}$-algèbre $\mathcal{O}$-libre, de type fini, graduée sur une sous-algèbre B par un groupe résoluble d'ordre r premier à p. Supposons que $K \otimes_{\mathcal{O}} A$ et $K \otimes_{\mathcal{O}} B$ sont semi-simples déployées. Soit M un module sur A possédant, à multiplicité près, les mêmes facteurs directs indécomposables que* $\mathrm{Ind}\,{}_B^A\mathrm{Res}\,{}_B^A M$.

Alors, si la matrice de décomposition de M est carrée unitriangulaire, il en est de même de la matrice de décomposition de $\mathrm{Res}\,{}_B^A M$.

Cette étude repose sur la théorie de Clifford décrite au chapitre 2.

Le chapitre 3 commence par un rappel sur les algèbres cellulaires. Celles-ci ont été introduites par J.J. Graham et G.I. Lehrer dans leur article [48]. Elles sont définies à partir d'axiomes, à l'image de la correspondance de Robinson-Schensted. Ainsi sont-elles pourvues de nombreuses propriétés combinatoires. Elles possèdent notamment une matrice de décomposition "cellulaire" qui est unitriangulaire. Grâce au rapport entre la matrice de décomposition "cellulaire" et la matrice de décomposition classique d'une algèbre, une version généralisée du théorème précédent trouve des applications dans ces algèbres et dans des algèbres où la donnée cellulaire est encore plus précise, algèbres que nous appellerons algèbres fortement et très fortement cellulaires. Les algèbres de Ariki-Koike (voir [8], [28]) sont un exemple d'algèbre très fortement cellulaire.

Le chapitre 4 contient deux applications concrètes. La première illustre le théorème généralisant le Théorème 2.2.1 et concerne les algèbres de Ariki-Koike ou plus généralement les algèbres de Hecke cyclotomiques ([2], [5]).

Théorème 4.1.5 *Soient d, f, n des entiers naturels non nuls. Soit $(\mathcal{O}, K, k)$ un système p-modulaire, p ne divisant pas f, et k algébriquement clos. Soit $\omega \in \mathcal{O}$, une racine primitive f-ième de l'unité. Fixons une unité q de $\mathcal{O}$ telle que, pour tout $i \in [2, n]$, q n'est pas une racine i-ième de 1 et les ensembles $\{\omega^i \bmod J(\mathcal{O})\,;\, i \in [1, f-1]\}$ et $\{q^i \bmod J(\mathcal{O})\,;\, i \in \mathbb{Z}\}$ sont d'intersection vide. Soit une suite $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_d)$ d'unités de $\mathcal{O}$ telles que, pour tout $i \in [1, d]$, il existe y_i une racine primitive f-ième de x_i et pour $i,\ i' \in [1, d]$, $j \in [0, f-1]$, $j \neq 0$ si $i = i'$, alors $\frac{\omega^j y_i}{y_{i'}} \neq q^m,\ |m| < n$.*

Alors, il existe une matrice de décomposition unitriangulaire inférieure de l'algèbre de Hecke $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{x}}_{fd,f,n}(\mathcal{O})$, associée au groupe de réflexions complexes $G(fd, f, n)$, qui est g-stable, g étant l'automorphisme de conjugaison de $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{x}}_{fd,f,n}(\mathcal{O})$ donné par T_1.

La seconde application traite de q-algèbres de Schur de type B et D, qui sont des algèbres d'endomorphismes de modules sur des algèbres de Hecke de type B et D. C'est un résultat qui a été établi par J. Gruber et G. Hiss. Nous en donnerons à nouveau une preuve reposant sur le Théorème 2.2.1.

Théorème 4.2.1 ([50, Corollaire 7.17]) *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(\mathcal{O}, K, k)$ un système p-modulaire, avec k algébriquement clos et p un nombre premier impair. Soit q une puissance d'un nombre premier différent de p tel que l'ordre de $q \pmod p$ est impair. Soit $\mathfrak{H}' := \mathfrak{H}^{q,(1)}_{2,2,n}(\mathcal{O})$, l'algèbre de Hecke de type D de paramètre q. Alors la matrice de décomposition de la q-algèbre de Schur $S(\mathfrak{H}')$ de type D est carrée unitriangulaire.*

III Sur la conjecture de J. Gruber et G. Hiss

Le travail effectué dans la dernière partie concerne la conjecture formulée par J. Gruber et G. Hiss pour les nombres de décomposition des algèbres de Hecke de type D et de type B, [50, §7.15]. Le problème est exposé au chapitre 5.

Conjecture (GHPI) *Soit n un entier pair strictement positif et $(\mathcal{O}, K, k)$ un système p-modulaire avec k algébriquement clos et un nombre premier p impair. Soit q une puissance d'un nombre premier différent de p tel que l'ordre e de $q \pmod p$ est impair. Les nombres de décomposition d'_- de $\mathfrak{H}^{q,(1)}_{2,2,n}(\mathcal{O})$, algèbre de Hecke de type D de para-*

mètre q, satisfont

$$d'_{(\lambda,+),(\alpha,-)} = d'_{(\lambda,-),(\alpha,+)} = 0,$$

pour λ et α des partitions de $\frac{n}{2}$ avec α e-régulière.

Dans le chapitre 6, cette conjecture est généralisée aux cas des algèbres de groupes de réflexions complexes $G(r, f, n)$ et $G(r, 1, n)$. Avec quelques notations et définitions combinatoires qui seront déterminées dans ce chapitre, voici ce qui est démontré.

Proposition 6.4.1 *Soit $(\mathcal{O}, K, k)$ un système p-modulaire, pour un nombre premier p et k algébriquement clos. Soit $\rho := (r, f, n)$, pour des entiers strictement positifs r, f et n tels que $f \mid r$ et r est premier avec p. Soient λ un élément de $\mathcal{L}_\rho$, un sous-ensemble des compositions de n de hauteur r, $\alpha \vdash^{p-\mathrm{reg}} \lambda$, $\beta \vdash \lambda$, et deux entiers $i \in [0, \sigma'^{\rho}_{\alpha} - 1]$, $j \in [0, \sigma'^{\rho}_{\beta} - 1]$. Notons m le plus petit commun multiple de s'^{ρ}_{β}, s'^{ρ}_{α}.*

Alors le nombre de décomposition de la $\mathcal{O}$-algèbre $\mathcal{O}G(r, f, n)$ paramétré par $\big((\beta, j); (\alpha, i)\big)$ est nul si $i \not\equiv j \pmod{\frac{\sigma^{\rho}_{\lambda}}{m}}$.

Enfin, dans le dernier chapitre de cette troisième partie, nous donnons une condition naturelle portant sur des filtrations de produit de modules de Specht sur le corps résiduel, sous-laquelle la conjecture **(GHPI)** est vérifiée.

Proposition 7.2.1 *Soit $(\mathcal{O}, K, k)$ un système p-modulaire pour un nombre premier impair p et k algébriquement clos. Soit n un entier naturel pair, $n = 2m$. Soit q une unité de $\mathcal{O}$ qui n'est pas une racine i-ième de l'unité pour $i \in [1, n]$ et telle que l'ordre $\mathfrak{o}$ de $q \pmod{J(\mathcal{O})}$ est impair si $\mathfrak{o}$ est fini. Soit α une partition de m. Supposons que le produit de modules de Specht $S_\alpha(k) \otimes_k S_\alpha(k)$ admet une filtration*

$$\{0\} = S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_s = S_\alpha(k) \otimes_k S_\alpha(k)$$

stable par l'application $\mathrm{ech}_{S_\alpha(k), S_\alpha(k)}$ qui échange les composantes de $S_\alpha(k) \otimes_k S_\alpha(k)$, où chaque quotient successif est isomorphe à un module simple $D_\beta(k) \otimes_k D_\beta(k)$, pour $\beta \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} m$, ou à une somme de modules simples $D_\mu(k) \otimes_k D_\nu(k)$, pour μ, $\nu \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} m$, $\mu \neq \nu$, et vérifiant la propriété suivante. Pour tout $i \in [0, s-1]$, si le $(i+1)$-ième quotient est isomorphe à $D_\beta(k) \otimes_k D_\beta(k)$, pour une partition $\mathfrak{o}$-régulière β de m, alors il existe un isomorphisme $is_i : S_{i+1}/S_i \to D_\beta(k) \otimes_k D_\beta(k)$

tel que $is_i \circ \mathrm{ech}_{D_\beta(k),D_\beta(k)} = \mathrm{ech}_{S_\alpha(k),S_\alpha(k)}|_{S_{i+1}/S_i} \circ is_i$.

Alors, pour tout $\beta \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} m$, *nous avons l'égalité suivante concernant les nombres de décomposition* d'_- *de* $\mathfrak{H}^{q,(1)}_{2,2,n}$, *l'algèbre de Hecke de type D :*

$$d'_{(\alpha,+),(\beta,-)} = d'_{(\alpha,-),(\beta,+)} = 0.$$

Annexes

Dans le premier chapitre de l'annexe se trouve des résultats numériques pour certaines algèbres de Ariki-Koike provenant de programmes qui effectuent des calculs, sous gap [75], dans la base de Ariki-Koike. Ils ont été établis afin de mieux comprendre ce qui empêche la généralisation de la preuve de la conjecture **(GHPI)** des algèbres de groupes aux algèbres de Hecke.

Au second chapitre de l'annexe sont placés des résultats obtenus en utilisant le package specht [64] sous gap. Ils permettent de donner des exemples pour lesquels la condition de la Proposition 7.2.1 portant sur la filtration est satisfaite.

Table des matières

I Une remarque sur les (B,N)-paires scindées **15**

1 Formule du commutateur **17**
1.1 Introduction 17
1.2 Rappels sur les (B,N)-paires, notations 17
1.3 Décomposition de Lévi 20
1.4 Premiers résultats 21
1.5 La formule du commutateur 25

II Matrices de décomposition **29**

2 Matrices de décomposition **31**
2.1 Rappels 31
2.1.1 Algèbres graduées 31
2.1.2 Matrices de décomposition 34
2.2 Premier théorème 36
2.3 Second théorème 37
2.3.1 Quelques notions de stabilité 37
2.3.2 Second théorème 38
2.4 Premiers résultats 39
2.4.1 Restriction et induction 39
2.4.2 Théorie de Clifford 42
2.5 Conservation de la forme unitriangulaire 48
2.5.1 Stabilité et permutations 48
2.5.2 Preuve du Théorème 2.3.1 51
2.5.3 Théorème réciproque 54

3 Algèbres cellulaires particulières **57**
3.1 Rappels sur les algèbres cellulaires 58
3.1.1 Définition 58
3.1.2 Représentation des algèbres cellulaires 60
3.2 Algèbres cellulaires particulières 63

3.2.1 Propriétés supplémentaires 63
3.2.2 Conséquences des propriétés supplémentaires . . 65
3.2.3 L'algèbre $\mathrm{End}_A(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)$, A fortement cellulaire 66
3.2.4 Comparaison de A et A', A très fortement cellulaire 74
3.2.5 Application 77

4 Algèbres de Hecke, algèbres de Schur 79
4.1 Algèbres de Hecke 79
4.1.1 Rappels 79
4.1.2 Théorème 86
4.1.3 Preuve du théorème 87
4.2 q-algèbres de Schur 97
4.2.1 Hypothèses 97
4.2.2 q-algèbres de Schur 97

III Sur la conjecture de J. Gruber et G. Hiss 99

5 Introduction à la conjecture 101
5.1 Premières formules 101
5.1.1 Formules générales 101
5.1.2 Formules restreintes 104
5.2 Conjecture **(GHPI)** 105

6 Groupes de réflexions complexes 107
6.1 Équivalences de Morita 107
6.1.1 Lemme clé 107
6.1.2 Équivalence de Morita pour $RG(r, f, n)$ 109
6.2 Modules pour l'algèbre $RG(r, f, n)$ 114
6.3 Relations entre $RG(r, 1, n)$ et $RG(r, f, n)$ 119
6.3.1 Relations entre idempotents et conséquences . . 120
6.3.2 Actions des automorphismes de graduation . . . 121
6.3.3 Description des modules restreints 125
6.4 Associateur et conjecture **(GHPI)** 128
6.4.1 Associateur 128
6.4.2 Conjecture **(GHPI)** généralisée 130
6.4.3 Application au type B et D 133

7 Conjecture de Gruber-Hiss, filtration 135
7.1 Généralisation aux algèbres de Hecke 135
7.1.1 Deux équivalences de Morita 136
7.1.2 Modules pour $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}'$ 143

7.2 Filtration des modules de Specht 149
7.2.1 Une condition pour obtenir la conjecture 150
7.2.2 Exemples vérifiant la condition de filtration . . 153

IV Annexes **155**

A Résultats de programmes **157**
A.1 Programmes 157
A.2 Résultats 160

B Exemples sous Specht **167**
B.1 Contre-exemple 167
B.2 Exemples 168

Première partie

Une remarque sur les (B,N)-paires scindées

Chapitre 1

Formule du commutateur d'un groupe à (B,N)-paire scindée

1.1 Introduction

Ce premier chapitre est indépendant des chapitres suivants. Il traite de la formule du commutateur pour un groupe admettant une (B,N)-paire scindée de caractéristique p.

La structure axiomatique des (B,N)-paires reprend l'essentiel des propriétés des groupes de Chevalley ([17]) et est à l'origine, principalement destinée à étudier ces derniers (cf. [81]). Les axiomes définissant un tel groupe n'impliquent pas de façon immédiate la formule du commutateur. Or les groupes finis admettant une (B,N)-paire (scindée) ont été classifiés ([39], [82]). Ce sont à peu près tous des groupes de Chevalley. Il est possible de vérifier que, pour chacun d'eux, la formule du commutateur est valable. Le but de ce chapitre est de prouver que la décomposition de Lévi implique les formules du commutateur pour les groupes radiciels, par une méthode élémentaire et avec des considérations géométriques, sans vérification au cas par cas.

1.2 Rappels sur les (B,N)-paires, notations

En premier lieu, donnons quelques définitions sur les groupes à (B,N)-paire.

Définition - Notation 1.2.1 *Une* (B,N)-paire (ou un système de Tits) *est la donnée d'un groupe G et de deux sous-groupes B et N tels que*

(BN1) : *G est engendré par B et N,*

(BN2) : *$T := B \cap N$ est distingué dans N,*

(BN3) : *le quotient $W := N/T$ est engendré par un ensemble S d'involutions satisfaisant*

(BN4) : *pour tout $w \in W$, $s \in S$, $sBw \subseteq BwB \cup BswB$,*

(BN5) : *pour tout $s \in S$, $sBs \neq B$.*

W est appelé le groupe de Weyl *de la (B,N)-paire.*

Remarque : Dans la définition, ainsi que dans la suite, nous effectuerons le léger abus de notation qui consiste à utiliser des éléments de W et non leurs représentants dans N, quand cela a un sens. Par exemple, $Bw := B\dot{w}$ ne dépend pas du représentant (à gauche ou à droite) de $w \in W$, ici $\dot{w} \in N$, puisque T est distingué dans N et T est un sous-ensemble de B.

Définition - Notation 1.2.2 *Une (B,N)-paire, notée, selon la définition précédente, sous la forme du quadruplet (G, B, N, S) est dite* scindée *de caractéristique p, pour un nombre premier p, si et seulement si*

(SC1) : *G est un groupe fini,*

(SC2) : $\bigcap_{w \in W} B^w = T$,

(SC3) : *B admet une décomposition en produit semi-direct $B = UT$ où $U \lhd B$, U est un p-groupe et T est un p'-groupe abélien.*

Désormais, nous supposerons que (G, B, N, S) est un groupe à (B,N)-paire scindée de caractéristique p, comme dans la Définition - Notation 1.2.2.

Conservons la notation W pour désigner le groupe de Weyl de la (B,N)-paire scindée (G, B, N, S). Le couple (W, S) est alors un système de Coxeter ([20, Théorème 65.9], [73, Théorème 1.6]). Le groupe de Coxeter W admet une representation géométrique (fidèle) dans un espace euclidien E de dimension $|S|$. Ceci permet d'identifier W à un groupe fini de réflexions ([20, Théorème 64.28], [73, Théorème 1.7]).

Définition - Notation 1.2.3 *Soit Φ le système de racines associé à W, i.e., les vecteurs unitaires orthogonaux aux hyperplans fixés par les réflexions de W.*

Soit Δ un système fondamental pour Φ, choisi de façon à ce que les réflexions fondamentales $\{s_\delta\,;\,\delta\in\Delta\}$ correspondent aux éléments de S ([20, 64.A, Théorème 1], [73, Théorème 1.7]*).*

Désignons par ℓ la longueur dans W relativement à S et notons w_0 l'élément de plus grande longueur. Pour tout $\delta\in\Delta$, X_δ est le sous-groupe radiciel $U\cap U^{w_0 s_\delta}$.

Rappelons trois résultats provenant de la structure axiomatique définissant une (B,N)-paire (scindée de caractéristique p).

(R1)([20, Proposition 69.2]) : *Soit $\gamma\in\Phi$, $\gamma=w(\delta)$ pour certains $\delta\in\Delta$, $w\in W$. Alors $X_\gamma :=^w X_\delta$ est bien défini au sens où ce groupe ne dépend que de γ et est non-trivial.*

(R2)([20, Proposition 69.2] ou [73, Théorème 3.3] par récurrence) : *Il existe une suite $(\gamma_1,\dots,\gamma_N)$ formée des $N:=\ell(w_0)$ racines positives distinctes de Φ telle que U est égal au produit $X_{\gamma_1}\dots X_{\gamma_N}$. Si $\gamma\in\Phi^+$, alors $X_{-\gamma}\cap U=\{1\}=U\cap U^{w_0}$.*

(R3)([73, Lemme 2.3]) : *Soient $w\in W$, $s\in S$ tels que $\ell(ws)=\ell(w)+1$, alors $U\cap U^{ws}\subseteq U\cap U^s$.*

Avec les notations introduites, nous sommes désormais en mesure d'énoncer la formule du commutateur.

$$\text{Pour toutes racines } \alpha,\ \beta\in\Phi,\ \alpha\neq\pm\beta,$$
$$[X_\alpha,X_\beta]\subseteq\left\langle X_{i\alpha+j\beta}\,;\,i>0,\ j>0,\ i\alpha+j\beta\in\Phi\right\rangle. \quad (1.2.1)$$

Remarque : Supposons que la condition **(SC1)** n'est pas satisfaite mais que

(SC1') : W est un groupe fini,

(SC2) : $\bigcap_{w\in W} B^w=T$,

(SC3') : pour tout $g\in G$, $U^g\cap B\subseteq U$.

Il est alors possible d'établir les relations **(R1)**, **(R2)**, **(R3)**, et par conséquent d'appliquer les raisonnements effectués ci-dessous.

1.3 Décomposition de Lévi

Maintenant que les notions utiles, relatives aux (B,N)-paires ont été données, faisons quelques commentaires sur les rapports entre la décomposition de Lévi et la formule du commutateur (1.2.1).

Pour tout groupe possédant une (B,N)-paire scindée, la formule (1.2.1) est utilisée pour vérifier les décompositions de Lévi. Rappelons en quoi consistent ces décompositions.

Soient $I \subseteq S$, un sous-ensemble de réflexions fondamentales, $W_I :=< I >$ le sous-groupe de W engendré par ces réflexions, w_I, son élément de plus grande longueur, N_I le sous-groupe de N contenant T tel que $N_I/T = W_I$ et P_I le sous-groupe parabolique standard BW_IB qui admet une (B,N)-paire : (P_I, B, N_I, I) (cf. [20, §65.C]). Notons encore L_I, le sous-groupe engendré par certains groupes radiciels et T,

$$L_I :=< T,\ X_\gamma\,;\, \gamma \in \Phi_I >,$$

et U_I, le sous-groupe engendré par des groupes radiciels,

$$U_I :=< X_\gamma\,;\ \gamma \in \Phi^+ \backslash \Phi_I^+ >,$$

où Φ_I est le sous-ensemble des racines associé à W_I et $\Phi_I^+ := \Phi^+ \cap \Phi_I$.

Par le Lemme 1.4.1, cité ci-dessous,

$$U_I = U \cap U^{w_I}.$$

La *décomposition de Lévi* permet d'exprimer P_I sous la forme d'un produit semi-direct $P_I = U_I \rtimes L_I$. D'après la formule du commutateur, U_I est normalisé par L_I, donc par P_I, en observant que P_I est engendré par L_I et U_I.
En effet, utilisons l'expression (1.2.1) ainsi que des considérations sur les racines. Nous obtenons que, si $\alpha \in \Phi_I$, $\beta \in \Phi^+ \backslash \Phi_I^+$, alors $[X_\alpha, X_\beta] \subseteq U_I$. Comme U_I est clairement normalisé par T, L_I normalise U_I.
Ceci montre que la décomposition de Lévi vient en vérifiant que U_I est

normalisé par le groupe engendré par les groupes radiciels $X_\alpha,\ \alpha \in \Phi_I^+$, (soit $U \cap U^{w_0 w_I}$, en appliquant le Lemme 1.4.1) ou encore en vérifiant que U_I est distingué dans U d'après le rappel **(R2)**.

Suivant ce qui vient d'être dit, la formule du commutateur (1.2.1) implique la relation

$$\text{pour tout } I \subseteq S,\ U \cap U^{w_I} \lhd U, \tag{1.3.1}$$

en particulier en choisissant I sous la forme d'un singleton, la formule (1.2.1) entraine la relation, plus faible a priori,

$$\text{pour tout } \delta \in \Delta,\ U \cap U^{s_\delta} \lhd U. \tag{1.3.2}$$

N. Tinberg ([80]) a montré que sous l'hypothèse (1.3.2), il est possible d'obtenir l'expression (1.3.1), i.e., la propriété de décomposition de Lévi, en utilisant des méthodes élémentaires. Dans la suite de ce chapitre, nous allons prouver un peu plus, à savoir que la "décomposition de Lévi faible" (1.3.2) implique la formule du commutateur (1.2.1). Nous procèderons également de façon élémentaire, sans utiliser la classification des (B,N)-paires ou le cas du rang 2 (exposé dans [FS]) en nous basant sur des considérations de convexité dans l'espace de représentation des réflexions de W.

Remarque : Terminons cette présentation du problème par une remarque concernant la validité de l'expression (1.3.2). Si tous les sous-groupes radiciels X_δ, $\delta \in \Delta$, sont d'ordre p, alors la relation (1.3.2) est toujours vérifiée.

Preuve : Fixons $\delta \in \Delta$. Rappelons que $U_{\{\delta\}} = U \cap U^{s_\delta}$. Avec **(R2)** et le Lemme 1.4.1, $U = U_{\{\delta\}} X_\delta$ et $U_{\{\delta\}} \cap X_\delta = \{1\}$. L'indice $[U : U_{\{\delta\}}]$ est égal à $|X_\delta|$, soit par hypothèse à p. Ainsi, $U_{\{\delta\}} \lhd U$ et la formule (1.3.2) est satisfaite grâce à l'affirmation suivante. Si H_1 est un groupe fini possédant un sous-groupe propre H_2 d'indice p, où p est le plus petit diviseur premier de l'ordre de H_1, alors H_2 est distingué dans H_1, par un résultat classique de théorie des groupes.

1.4 Premiers résultats

Dans cette partie, nous donnons des résultats préliminaires qui seront utilisés dans la preuve du théorème final. Avant de les énoncer et de les prouver, introduisons deux notations.

Définition - Notation 1.4.1 *Si E' est un sous-ensemble de l'espace euclidien E,*

$$X(E') := \langle X_\gamma \,;\, \gamma \in E' \cap \Phi \rangle.$$

Si A est un sous-ensemble de W, non-vide,

$$V_A := \bigcap_{w \in A} U^w.$$

La proposition suivante montre comment exprimer V_A pour A sous-groupe non-vide de W, en fonction des groupes radiciels $X_\gamma, \gamma \in \Phi$. Dans cette perspective, nous avons d'abord besoin du

Lemme 1.4.1 *Soient des racines positives distinctes $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, pour un entier m strictement positif, et une réflexion $w \in W$. Pour tout $i \in [1, m]$, soit $x_i \in X_{\gamma_i} \backslash \{1\}$. Alors $x_1 x_2 \ldots x_m \in U^w$, si et seulement si, pour tout $i \in [1, m]$, la racine $w(\gamma_i)$ est positive.*

Preuve : L'implication "indirecte" est claire. Si pour tout $i \in [1, m]$, $w(\gamma_i) \in \Phi^+$, alors, pour tout $i \in [1, m]$, $X_{w(\gamma_i)} = {}^w X_{\gamma_i} \subseteq U$ par **(R2)**.

Prouvons l'implication "directe" par récurrence sur $\ell(w)$.

Si $w = 1$, c'est trivial avec **(R1)**.

Si $w = s_\delta$ pour une racine fondamentale δ, nous devons vérifier que δ n'apparaît pas dans $\{\gamma_i \,;\, i \in [1, m]\}$. Supposons au contraire qu'il existe $i_0 \in [1, m]$ tel que $\delta = \gamma_{i_0}$. Alors, pour tout $i \in [1, m],\ i \neq i_0$, $s_\delta(\gamma_i) \in \Phi^+$ par hypothèse sur les $\gamma_j,\ j \in [1, m]$. En appliquant l'implication "indirecte" déjà vérifiée, $x_1 \ldots x_{i_0 - 1} \in U^{s_\delta}$ et $x_{i_0 + 1} \ldots x_m \in U^{s_\delta}$. Ainsi, $x_{i_0} \in U^{s_\delta} \cap X_\delta \subseteq U^{s_\delta} \cap U^{w_0 s_\delta} = \{1\}$ par **(R2)**. Ceci contredit l'hypothèse faite sur x_{i_0}.

Si $w \in W$ tel que $\ell(w) \geq 1$. Écrivons $w = w' s_\delta$ pour certains $w' \in W$ et $\delta \in \Delta$ avec $\ell(w') = \ell(w) - 1$. Par **(R2)**, $U \cap U^w \subseteq U \cap U^{s_\delta}$. Nous venons de voir que pour tout $i \in [1, m],\ s_\delta(\gamma_i) \in \Phi^+$. Pour tout $i \in [1, m]$, posons $\gamma'_i := s_\delta(\gamma_i)$ et $x'_i := {x_i}^{\dot{s}_\delta} \in X_{\gamma'_i}$ pour un représentant $\dot{s}_\delta \in N$ de s_δ. Le résultat vient en appliquant l'hypothèse de récurrence à $x'_1 x'_2 \ldots x'_m \in U^{w'}$. ∎

Proposition 1.4.2 *Pour tout ensemble non-vide $A \subseteq W$, $V_A = X(\Psi_A)$ où $\Psi_A := \{\gamma \in \Phi\,;$ pour tout $w \in A$, $w(\gamma) \in \Phi^+\}$. En outre, Ψ_A est aussi le sous-ensemble $\{\gamma \in \Phi\,;\, X_\gamma \subseteq V_A\}$.*

Preuve : Supposons que $1 \in A$ de sorte que $\Psi_A \subseteq \Phi^+$. Choisissons $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \Phi^+$ comme dans **(R2)**. L'ensemble Ψ_A est égal à $\{\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_r}\}$ pour certains indices $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m$. Tout $x \in V_A \subseteq U$, s'écrit $x = x_1 \ldots x_m$ avec $x_i \in X_{\gamma_i}$, pour tout $i \in [1, m]$. Le Lemme 1.4.1 implique que $x_i = 1$ quand $\gamma_i \notin \Psi_A$, donc $V_A = X(\Psi_A)$. Il est alors clair que $\Psi_A \subseteq \{\gamma \in \Phi\,;\, X_\gamma \subseteq V_A\}$. Mais si $\gamma \in \Phi$ est tel que $X_\gamma \subseteq V_A$, alors $\gamma \in \Phi^+$ par **(R1)** et **(R2)**. Selon le lemme cité ci-dessus, il vient que $\gamma \in \Psi_A$. La dernière égalité de l'énoncé est prouvée.

Supposons, maintenant, que $1 \notin A$. Choisissons $a \in A$ et posons $A' := Aa^{-1} \subseteq W$. Appliquons ce que nous venons juste de montrer à A' qui contient 1. Cela permet de conclure puisque $V_A = {V_{A'}}^a$ et $\Psi_A = a^{-1}\Psi_{A'}$. ∎

À présent, passons à trois résultats géométriques, indépendants de la théorie des (B,N)-paires. Le premier est une légère adaptation du théorème de séparation des convexes convenant à nos besoins.

Lemme 1.4.3 *Soient Ψ un ensemble fini de $E\backslash\{0\}$ et C un cône convexe fermé de E tel que $C \cap -C = \{0\}$. Soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble du dual $E^\vee$ de E, $\mathcal{F} := \{f \in E^\vee\,;\, f(C\backslash\{0\}) \subseteq \mathbb{R}_+^*,\ 0 \notin f(\Psi)\}$. Alors,*

$$C = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \cup \{0\}.$$

Preuve : L'inclusion directe est claire. Pour l'autre inclusion, soit $x \notin C$(donc $x \neq 0$). Nous allons trouver une forme linéaire f telle que $f(C\backslash\{0\}) \subseteq \mathbb{R}_+^*,\ f(x) < 0$ et $0 \notin f(\Psi)$.
Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que x est de norme 1. Si $r > 0$, soit C_r, resp. D_r, le cône ouvert engendré par les éléments de la boule unité qui se trouvent à une distance strictement inférieure à r, des éléments de C, resp. de x. Il est clair que, pour r suffisamment petit, $C_r \cap D_r = \emptyset$. Par hypothèse sur C, il est possible de séparer $C\backslash\{0\}$ et $-C\backslash\{0\}$ par un hyperplan passant par 0. Pour r petit, il est

facile de voir que cet hyperplan sépare C_r et $-C_r$, donc $C_r \cap -C_r = \emptyset$. Choisissons r assez petit de façon à ce que $C_r \cap D_r = C_r \cap -C_r = \emptyset$. Prenons un hyperplan qui sépare les ouverts convexes C_r et D_r. Il passe par 0 de façon évidente. Ceci nous dit que l'ensemble $\mathcal{G} := \{f \in E^\vee\,;\, f(C\backslash\{0\}) \subseteq \mathbb{R}_+^*,\ f(x) < 0\}$ est non-vide. De plus, $\mathcal{G}$ est clairement un ouvert de $E^\vee$ ($\mathcal{G}$ est défini par des "conditions ouvertes") et que l'ensemble $\{f \in \mathcal{G}\,;\, 0 \in f(\Psi)\} \neq \mathcal{G}$ parce que Ψ est fini. Ainsi, le sous-ensemble de $\mathcal{G}$, $\{f \in \mathcal{G}\,;\, 0 \notin f(\Psi)\}$, est non-vide, ce qui prouve l'assertion. ∎

Ce lemme permet d'établir une correspondance entre les sous-ensembles "convexes" de Φ et des sous-groupes de G comme suit.

Proposition 1.4.4 *Soit C une cône fermé convexe de E tel que $C \cap -C = \{0\}$. Notons $A(C) := \{w \in W\,;\, C \cap \Phi \subseteq w^{-1}(\Phi^+)\}$. Alors,*
(i) *$C \cap \Phi = \Psi_{A(C)}$ avec les notations de la* Proposition 1.4.2*,*
(ii) *$X(C) = V_{A(C)}$.*

Preuve : L'inclusion $C \cap \Phi \subseteq \Psi_{A(C)} = \bigcap_{w \in A(C)} w^{-1}(\Phi^+)$ est triviale. Dans l'autre sens, selon le Lemme 1.4.3, $C \cap \Phi = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \cap \Phi$ où $\mathcal{F}$ est l'ensemble formé des $f \in E^\vee$ vérifiant $f(C\backslash\{0\}) \subseteq \mathbb{R}_+^*$ et $0 \notin f(\Phi)$. Pour un tel f, $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \cap \Phi$ définit un nouvel ensemble de racines positives de Φ, donc un nouveau système fondamental ([20, p. 554]). Par transitivité de W sur les systèmes fondamentaux, il existe $w_f \in W$ tel que $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \cap \Phi = w_f^{-1}(\Phi^+)$. Clairement, $w_f \in A(C)$. Ainsi, $C \cap \Phi$ est égal à l'intersection $\bigcap_{f \in \mathcal{F}} w_f^{-1}(\Phi^+)$ qui contient $\bigcap_{w \in A(C)} w^{-1}(\Phi^+)$ i.e. $\Psi_{A(C)}$. Nous avons obtenu l'implication inverse cherchée et l'assertion (i).

L'ensemble $X(C)$ est égal à $X(\Psi_{A(C)})$ par (i), soit $V_{A(C)}$ par la Proposition 1.4.2, d'où la seconde égalité (ii). ∎

Grâce à cette correspondance, il vient le

Corollaire 1.4.5 *Soient C et D deux cônes convexes fermés vérifiant $C \cap -C = \{0\}$ et $D \cap -D = \{0\}$. Alors, $X(C) \cap X(D) = X(C \cap D)$.*

Preuve : D'après la Proposition 1.4.4 (ii), $X(C) \cap X(D)$ est égal à $V_{A(C)} \cap V_{A(D)} = V_{A(C)\cup A(D)}$, soit encore à $X(\Psi_{A(C)\cup A(D)})$ par la Proposition 1.4.2. Or, $\Psi_{A(C)\cup A(D)}$ est égal à $\Psi_{A(C)} \cap \Psi_{A(D)}$, encore égal à $C \cap D \cap \Phi$ selon la Proposition 1.4.4 (i). Ceci prouve l'égalité cherchée. ∎

1.5 La formule du commutateur

Nous sommes à présent en mesure de donner le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 1.5.1 *Soit G un groupe admettant une (B,N)-paire scindée de caractéristique p qui satisfait la condition de décomposition de Lévi faible* (1.3.2)*, alors il vérifie la formule du commutateur* (1.2.1)*.*

Preuve : Pour tout sous-ensemble fini $Y \subseteq E$, désignons par $C(Y)$ le cône convexe fermé engendré par Y. Si $y,\ z \in E$, nous utiliserons l'abréviation $C(y, z)$ pour $C(\{y, z\})$.

Supposons que G vérifie l'hypothèse (1.3.2). Soient $\alpha \in \Delta$ et $\beta \in \Phi^+$, $\alpha \neq \beta$. Le groupe $U_{\{\alpha\}}$ est égal à $V_{\{1,s_\alpha\}}$ par définition, donc égal à $X(\Psi_{\{1,s_\alpha\}})$ selon la Proposition 1.4.2 et $X_\beta \subseteq U_\alpha$ selon cette même proposition, puisque $\Psi_{\{1,s_\alpha\}} = \Phi^+\backslash\{\alpha\}$. Or $\Phi^+\backslash\{\alpha\} = \Phi \cap C(\Phi^+\backslash\{\alpha\})$ parce que toute combinaison linéaire positive de racines positives qui est une racine est une racine positive et parce que, α étant une racine fondamentale, α ne s'exprime pas comme combinaison linéaire positive de plusieurs éléments de Φ^+ ([20, 64.A, preuve du Corollaire 64.10]). Par conséquent, $U_{\{\alpha\}} = X\big(C(\Phi^+\backslash\{\alpha\})\big)$.

Comme $X_\alpha \subseteq U$, la formule (1.3.2) implique que $[X_\alpha, X_\beta] \subseteq [X_\alpha, U_{\{\alpha\}}] \subseteq U_{\{\alpha\}}$. Par ailleurs, X_α et X_β sont des sous-groupes de $X\big(C(\alpha, \beta)\big)$ donc $[X_\alpha, X_\beta] \subseteq X\big(C(\alpha, \beta)\big)$. Les deux cônes convexes fermés $C(\Phi^+\backslash\{\alpha\})$ et $C(\alpha, \beta)$ satisfont $C \cap -C = \{0\}$, par propriété des racines posives. Le commutateur $[X_\alpha, X_\beta]$ est inclus dans $U_{\{\alpha\}} \cap X\big(C(\alpha, \beta)\big) = X\big(C(\Phi^+\backslash\{\alpha\})\big) \cap X\big(C(\alpha, \beta)\big)$ d'après ce qui précède, soit $X\big(C(\alpha, \beta)\backslash\{\alpha\}\big)$ par le Corollaire 1.4.5. Finalement, nous avons obtenu que, pour tout $\alpha \in \Delta,\ \beta \in \Phi^+\backslash\{\alpha\}$,

$$[X_\alpha, X_\beta] \subseteq X\big(C(\alpha, \beta)\backslash\{\alpha\}\big). \tag{1.5.1}$$

Si $\alpha \in \Delta$ et $\beta \in \Phi^-\backslash\{-\alpha\}$, la relation (1.5.1) est aussi vérifiée. En effet, nous appliquons le travail fait ci-dessus à $w_0 s_\alpha(\alpha) \in \Delta$ et $w_0 s_\alpha(\beta) \in \Phi^+$, pour obtenir l'analogue de l'inclusion (1.5.1) faisant

intervenir les racines $w_0 s_\alpha(\alpha)$ et $w_0 s_\alpha(\beta)$. Puis nous conjuguons les sous-groupes obtenus dans cette dernière relation par $s_\alpha w_0 \in W$.

Enfin, si α et β sont des racines quelconques, non-proportionnelles, il existe $w \in W$ tel que $w(\alpha) \in \Delta$. Appliquons l'un des deux cas précédents à $w(\alpha)$ et $w(\beta)$. Il vient que

$$[X_{w(\alpha)}, X_{w(\beta)}] \subseteq X\big(C\big(w(\alpha), w(\beta)\big)\backslash\{\alpha\}\big).$$

En conjugant ensuite les groupes intervenant dans cette relation, nous montrons que l'expression (1.5.1) est satisfaite pour toutes racines α, β non-proportionnelles.

Échangeons maintenant les rôles de α et β, racines non-proportionnelles,

$$[X_\alpha, X_\beta] \subseteq X\big(C(\alpha, \beta)\backslash\{\beta\}\big).$$

Par conséquent,

$$[X_\alpha, X_\beta] \subseteq X\big(C(\alpha, \beta)\backslash\{\alpha\}\big) \cap X\big(C(\alpha, \beta)\backslash\{\beta\}\big).$$

En considérant le plan engendré par α et β, il est clair que chaque ensemble $\Phi \cap \big\{C(\alpha, \beta)\backslash\{\alpha\}\big\}$, $\Phi \cap \big\{C(\alpha, \beta)\backslash\{\beta\}\big\}$ et $\Phi \cap \big\{C(\alpha, \beta)\backslash\{\alpha,\ \beta\}\big\}$, peut s'écrire $\Phi \cap C$ où C est un cône convexe fermé vérifiant $C \cap -C = \{0\}$. Le Corollaire 1.4.5 implique alors que

$$X\big(C(\alpha, \beta)\backslash\{\alpha\}\big) \cap X\big(C(\alpha, \beta)\backslash\{\beta\}\big) \subseteq X\big(C(\alpha, \beta)\backslash\{\alpha, \beta\}\big).$$

La formule du commutateur (1.2.1) est démontrée. ∎

Convention

Désormais, jusqu'à la fin de la thèse, nous adopterons les "conventions anglaises". À savoir :

- Une application sera notée à droite de l'élément qu'elle transforme. Par conséquent, les compositions d'applications sont à lire de gauche à droite. Ceci est notamment valable pour les permutations.

- Toutes les algèbres seront considérées comme des R-algèbres libres de type fini, pour un anneau R commutatif intègre. Tous les modules utilisés seront des modules à droite, sauf indication contraire, sur des R-algèbres A comme précisées ci-avant. Ils seront supposés libres de type fini (sur R). Nous noterons $\mathrm{mod}(A)$, la catégorie de tels modules.

Ces choix ont été faits afin d'assurer une cohérence avec les principales références et applications, notamment du Chapitre 4.

Deuxième partie

Matrices de décomposition

Chapitre 2

Matrices de décomposition de modules induits et restreints

Le but de ce chapitre est d'étudier les relations entre la matrice de décomposition d'un module sur une algèbre graduée et la matrice de décomposition de ce module restreint à la sous-algèbre effectuant la graduation. Sous certaines hypothèses, nous allons observer que si la première matrice est carrée unitriangulaire, alors la seconde l'est aussi, et réciproquement. En fait, nous donnerons un théorème plus général qui affirme que si la première est "stable" unitriangulaire, alors la seconde l'est aussi et réciproquement, pour des notions de stabilité appropriées.

Commençons par quelques rappels.

2.1 Rappels

2.1.1 Algèbres graduées

Définition - Notation 2.1.1 *Soient S un groupe fini, noté multiplicativement, R un anneau commutatif, A une R-algèbre de type fini en tant que R-module. Une famille $\{A_s\}_{s\in S}$ de sous-modules sur R de A, est appelée un* système de Clifford S-gradué *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *$A_sA_t = A_{st}$ (en tant que produit de modules),*
2. *pour chaque $s \in S$, il existe une unité $a_s \in A$ telle que*

$$A_s = a_sA_1 = A_1a_s,$$

3. *A se décompose en la somme $\bigoplus_{s\in S} A_s$, cette décomposition sera dite* graduée*,*
4. $1 \in A_1$.

Une R-algèbre satisfaisant ces conditions est appelée une R-algèbre graduée par S sur A_1 ([19, §11]).

Supposons que le groupe S paramétrant les indices de la décomposition graduée est un groupe cyclique d'ordre r, pour $r \in \mathbb{N}$. L'algèbre A est une R-algèbre graduée par un groupe cyclique d'ordre r, sur (la sous-algèbre) A_1, de même unité que A, s'il existe une unité $\mathfrak{a} \in A$, telle que $\mathfrak{a}A_1 = A_1\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^r \in A_1$ et $A = \oplus \mathfrak{a}^i A_1$.

À une graduation effectuée par un groupe cyclique, il est possible d'associer deux automorphismes.

Définition - Notation 2.1.2 *Soient un entier r strictement positif et un anneau commutatif R contenant une racine primitive r-ième de l'unité ω. Soit A une R-algèbre graduée par un groupe cyclique d'ordre r, sur une sous-algèbre A_1 : $A = \bigoplus_{s\in[0,r-1]} \mathfrak{a}^s A_1$, pour une unité $\mathfrak{a} \in A$, telle que $\mathfrak{a}A_1 = A_1\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^r \in A_1$.*

À une telle décomposition graduée sont associés deux automorphismes, un automorphisme $h^{(\omega)}_{A/A_1}$ de A, défini sur $\mathfrak{a}^s A_1$ comme égal à $\omega^s \mathrm{Id}_{\mathfrak{a}^s A_1}$, pour tout $s \in [0, r-1]$, et un automorphisme $g^{(\mathfrak{a})}_{A_1/A}$ de A_1 qui est la conjugaison par $\mathfrak{a}$, qui envoie $a_1 \in A_1$ sur $\mathfrak{a}^{-1}a_1\mathfrak{a}$.

Relations entre les radicaux de A et A_1

Supposons que R est un corps.

Soit A une R-algèbre graduée comme dans la Définition - Notation 2.1.2. Si $J(-)$ désigne le radical de Jacobson, nous avons une première relation entre les radicaux des algèbres A_1 et A,

$$\bigoplus_{j=0}^{r-1} J(A_1)\mathfrak{a}^j \subseteq J(A). \tag{2.1.1}$$

Afin de prouver l'inclusion précédente, montrons d'abord que

$$J(A_1) = A_1 \cap J(A). \tag{2.1.2}$$

L'idéal de A_1, $A_1 \cap J(A)$, est nilpotent, donc $A_1 \cap J(A) \subseteq J(A_1)$. L'idéal $J(A_1)$ annule tout module simple V sur A car la restriction de V à A_1 se décompose en une somme de modules simples sur A_1. Par propriété du radical, $J(A_1) \subseteq J(A)$ et l'égalité (2.1.2) est satisfaite.

L'idéal $J(A)$ est bilatère et l'unité $\mathfrak{a} \in A$ normalise A_1. L'expression de $J(A_1)$ en (2.1.2) implique que

$$\mathfrak{a}J(A_1) = J(A_1)\mathfrak{a}. \tag{2.1.3}$$

En utilisant la graduation de A, $A = \bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathfrak{a}^j A_1$, il est clair que $\bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathfrak{a}^j J(A_1)$ est un idéal bilatère de A. Il est nilpotent, donc inclus dans $J(A)$ et l'inclusion (2.1.1) est démontrée. ∎

Remarque :
Si A est semi-simple, $J(A) = \{0\}$. D'après (2.1.1), $J(A_1) = \{0\}$ donc l'algèbre A_1 est aussi semi-simple.

Supposons maintenant que le corps R satisfait l'hypothèse **(HSS)**.

Hypothèse (HSS) : Pour tout module simple N de A_1, le module induit $N \otimes_{A_1} A$ est un module semi-simple sur A.

Montrons que sous la condition **(HSS)**, l'inclusion (2.1.1) est en fait une égalité, i.e.,

$$\bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathfrak{a}^j J(A_1) = J(A). \tag{2.1.4}$$

Soit $x \in J(A)$, $x = a_0 + a_1\mathfrak{a} + \cdots + a_{r-1}\mathfrak{a}^{r-1}$ pour certains éléments $a_i \in A_1$, $i \in [0, r-1]$. Soit N un module simple sur A_1. Par hypothèse et propriété du radical, x annule $N \otimes_{A_1} A$. Donc, pour tout $n_i \in N$, $i \in [0, r-1]$, la somme $(\sum_{i=0}^{r-1} n_i \otimes_{A_1} \mathfrak{a}^i)(\sum_{j=0}^{r-1} a_j\, \mathfrak{a}^j)$ est nulle. En particulier,

nous obtenons que, pour tout $j \in [0, r-1]$, a_j annule N. Comme N est un module simple arbitraire sur A_1, $a_j \in J(A_1)$, pour tout $j \in [0, r-1]$, et $x \in \bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathfrak{a}^j J(A_1)$. Nous avons montré l'égalité (2.1.4). ∎

Remarques :

1. À partir de l'égalité (2.1.4), nous obtenons l'équivalence suivante : sous la condition **(HSS)**, A est semi-simple si et seulement si sa sous-algèbre A_1 l'est aussi. Plus généralement,

$$\dim_R A/J(A) = r \dim_R A_1/J(A_1). \tag{2.1.5}$$

2. Dans la suite, nous montrerons que les corps dont la caractéristique ne divise pas r satisfont la condition **(HSS)**.

Par contre, l'hypothèse **(HSS)** n'est pas toujours satisfaite si la caractéristique du corps divise r comme nous l'observons dans le contre-exemple suivant.

Soit $G := (C_2)^2$, où C_2 est le groupe cyclique d'ordre 2, $C_2 = \{1, \mathfrak{c}\}$, et $H = \{(1,1), (\mathfrak{c}, \mathfrak{c})\}$. Soit k le corps à deux éléments. Il est clair que kG est C_2-graduée sur kH. Une décomposition graduée est :

$$kG = kH \oplus (\mathfrak{c}, 1)kH.$$

Comme l'algèbre d'un p-groupe en caractéristique p admet un unique module simple, la k-algèbre kG, resp. kH, admet un unique module simple kS_G, resp. kS_H, où $S_G := \sum_{x \in G} x$, resp. $S_G := \sum_{x \in H} x$, de dimension 1. Supposons que le module induit $S_H \otimes_{kH} kG$ est semi-simple. Comme il est de dimension 2, il est isomorphe à $2\,kS_G$. Soit f un tel isomorphisme. Il vérifie $\big(S_H \otimes_{kH} (\mathfrak{c}, 1)\big)f = \big(S_H \otimes_{kH} (1,1)\big)f(\mathfrak{c}, 1)$ par kG-linéarité, soit $\big(S_H \otimes_{kH} (1,1)\big)f$ d'après l'action de kG sur $2\,kS_G$. Nous en déduisons que f n'est pas injective, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur f. ∎

2.1.2 Matrices de décomposition

Afin de donner les définitions de matrices de décomposition, nous avons besoin de la

Définition - Notation 2.1.3 *Le triplet $(\mathcal{O}, K, k)$ est* un système p-modulaire *si $\mathcal{O}$ est un anneau de valuation discrète complet, K est*

son corps de fraction de caractéristique 0, *k est son corps résiduel de caractéristique p. Il est dit* neutralisant *pour une $\mathcal{O}$-algèbre A, si l'algèbre des endomorphismes d'un module simple sur $\widehat{A} = K \otimes_{\mathcal{O}} A$, resp. sur $\overline{A} = k \otimes_{\mathcal{O}} A$, est isomorphe à K, resp. à k, soit encore l'algèbre quotient $\widehat{A}/J(\widehat{A})$, resp. $\overline{A}/J(\overline{A})$, est isomorphe à un produit d'algèbres de matrices à coefficients dans K, resp. k.*

Nous allons nous placer sous les hypothèses **(HMD)**.

Hypotèses (HMD) : Soient $(\mathcal{O}, K, k)$ un système p-modulaire neutralisant pour A, une $\mathcal{O}$-algèbre (libre de type fini sur $\mathcal{O}$).
Supposons que $K \otimes_{\mathcal{O}} A$ est semi-simple.

Les définitions de matrices de décomposition sont les suivantes.

Définition - Notation 2.1.4 *Sous les hypotèses* **(HMD)**, *la* matrice de décomposition de l'algèbre A *est la matrice* $\mathrm{Dec}(A) = (D_{ij})$ *où i, resp. j, parcourt l'ensemble des classes d'isomorphismes des sous-modules simples de $K \otimes_{\mathcal{O}} A$, resp. de $k \otimes_{\mathcal{O}} A$, et D_{ij} représente la multiplicité de j dans $k \otimes_{\mathcal{O}} E_i$, où E_i est une $\mathcal{O}$-forme de i.*

Remarque : Des résultats classiques montrent que la multiplicité D_{ij} ne dépend pas du choix de la $\mathcal{O}$-forme de i ([10, Proposition 1.9.6]).

Définition - Notation 2.1.5 *Sous les hypotèses* **(HMD)**, *soit M un module sur A. La* matrice de décomposition du module M *est la matrice* $\mathrm{Dec}_A(M) = (D_{ij})$ *où i, resp. j, parcourt l'ensemble des classes d'isomorphismes des sous-modules simples de $K \otimes_{\mathcal{O}} M$, resp. des facteurs directs indécomposables de M, et D_{ij} représente la multiplicité de i dans $K \otimes_{\mathcal{O}} Y_j$, pour un représentant Y_j de la classe j.*

Remarques :
1. Il est facile de voir que la matrice de décomposition du module régulier A_A est égale à la matrice de décomposition de l'algèbre A : $\mathrm{Dec}_A(A_A) = \mathrm{Dec}(A)$, (cf. [10, Proposition 1.9.6] ou [44, Exemple 4.3]). Reprenons les indices utilisés pour définir la matrice de décomposition de A. Le coefficient D_{ij} est aussi égal à la multiplicité de i dans le

relèvement à $\mathcal{O}$ de la couverture projective de j tensorisé par K. Ceci justifie l'assertion précédente.

2. Une autre relation entre les matrices de décomposition d'algèbres et les matrices de décomposition de modules est la suivante. Avec les hypothèses et notations ci-dessus, $\mathrm{Dec}_A(M) = \mathrm{Dec}\big(\mathrm{End}_A(M)\big)$. La bijection entre les modules indécomposables, resp. simples, est induite par le foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, -)$, resp. $\mathrm{Hom}_{K\otimes A}(K \otimes_{\mathcal{O}} M, -)$, ([44, Lemme 4.5]).

2.2 Premier théorème

Ces premiers rappels effectués, nous allons énoncer un théorème afin de justifier les notations, définitions et hypothèses qui apparaissent à la section suivante. Voici le premier résultat décrivant une relation entre la matrice de décomposition d'un module sur une algèbre graduée et celle du module restreint à la sous-algèbre déterminant la graduation.

Théorème 2.2.1 *Soit $(\mathcal{O}, K, k)$ un système p-modulaire pour un nombre premier p et un corps k algébriquement clos. Soit A une $\mathcal{O}$-algèbre $\mathcal{O}$-libre, de type fini, graduée sur une sous-algèbre B par un groupe résoluble d'ordre r premier à p. Supposons que $K \otimes_{\mathcal{O}} A$ et $K \otimes_{\mathcal{O}} B$ sont semi-simples déployées. Soit M un module sur A possédant, à multiplicité près, les mêmes facteurs directs indécomposables que* $\mathrm{Ind}\,{}_B^A\mathrm{Res}\,{}_B^A M$.

Alors, si la matrice de décomposition de M est carrée unitriangulaire, il en est de même de la matrice de décomposition de $\mathrm{Res}\,{}_B^A M$.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous employons à prouver ce théorème. Plus exactement, le Théorème 2.2.1, dans le cas particulier où l'algèbre A est graduée sur B par un groupe cyclique, est une conséquence d'un théorème un peu plus général affirmant que si l'une des matrices de décomposition est, ce que nous appelerons stable unitriangulaire, alors il en est de même de l'autre. Notamment, si l'une des matrices de décomposition est carrée unitriangulaire, alors l'autre matrice l'est aussi. Le Théorème 2.2.1, pris dans son cadre général, s'obtient par récurrence.

2.3 Second théorème

2.3.1 Quelques notions de stabilité

Soient R un anneau de valuation discrète complet (par exemple un corps), L une R-algèbre et h un automorphisme d'algèbre de L.

Selon des notations classiques, pour tout module N sur L, N^h est le module sur L de même espace sous-jacent que N et où l'action de L est tordue par h. À savoir, l'action de L sur N^h est donnée par $n * l := n\,(l)h$, pour tout $l \in L,\ n \in N$.

Supposons qu'il existe un entier r strictement positif, tel que pour tout module N sur L, N et N^{h^r} sont isomorphes.

Il est possible de faire agir le groupe cyclique $C_r = <\mathfrak{c}>$ sur l'ensemble des classes d'isomorphismes des modules sur L. Si $s \in [0, r-1]$ et N est un module sur L, $\mathfrak{c}^s$ envoie la classe d'isomorphismes contenant N sur celle contenant N^{h^s}.

Définition - Notation 2.3.1 *Soit N un module sur L.*

Nous noterons $o(h, N)$ le cardinal de la C_r-orbite via h de la classe d'isomorphismes de N.

*N sera dit h-*stable *si N est isomorphe à N^h, i.e., $o(h, N) = 1$.*

*N sera appelé h-*quasi-stable *si N_0^h est une facteur direct de N pour tout facteur direct indécomposable N_0 de N.*

Désignons par $\Sigma_{h,N}$ le module h-stable, $\Sigma_{h,N} := \bigoplus_{j=0}^{o(h,N)-1} N^{h^j}$.

Rappelons qu'une matrice $D = (d_{ij})$ de taille $n \times m$ est
unitriangulaire inférieure si $n \geq m$ et pour tout $i \in [1, n]$, $j \in [1, m]$,
si j > i alors $d_{ij} = 0$,
si $j = i$ alors $d_{ij} = 1$,
unitriangulaire supérieure si c'est la matrice transposée d'une matrice unitriangulaire inférieure.

Nous pouvons alors donner la nouvelle

Définition - Notation 2.3.2 *Soit $(\mathcal{O}, K, k)$ un système p-modulaire neutralisant pour une $\mathcal{O}$-algèbre A, libre de type fini sur $\mathcal{O}$, avec*

$\widehat{A} := K \otimes_{\mathcal{O}} A$ *semi-simple. Pour tout module* M *sur* A *et tout automorphisme* $h \in \mathrm{End}_A(M)$*, la matrice de décomposition* $D := \mathrm{Dec}_A(M)$ *de* M*, de taille* $n_r \times n_c$*, est dite* h-stable unitriangulaire *si*

D est unitriangulaire inférieure ($n_r \geq n_c$) et pour tout module simple V sur $\widehat{A}$ qui correspond à un indice de ligne $s \in [1, n_c]$, resp. $s \in [n_c{+}1, n_r]$, alors $V^{1_K \otimes \mathcal{O} h}$ correspond à un indice de ligne $s' \in [1, n_c]$, resp. $s' \in [n_c{+}1, n_r]$, ou

D est unitriangulaire supérieure ($n_r \leq n_c$) et pour chaque facteur direct indécomposable Y de M qui correspond à un indice de colonne $s \in [1, n_r]$, resp. $s \in [n_r + 1, n_c]$, alors Y^h correspond à un indice de colonne $s' \in [1, n_r]$, resp. $s' \in [n_r + 1, n_c]$.

Remarque : Dans le cas particulier où D est une matrice carrée unitriangulaire et M est un module h-quasi-stable, la condition de h-stabilité pour D est automatiquement vérifiée.

2.3.2 Second théorème

Commençons par citer les hypothèses sous lesquelles les résultats énoncés dans le second théorème sont vérifiés.

Hypothèses (H) : Soient r un entier strictement positif et $(\mathcal{O}, K, k)$ un système p-modulaire pour un nombre premier p ne divisant pas r et k algébriquement clos.

Soit ω une racine primitive r-ième de $\mathcal{O}$.

Soit A une $\mathcal{O}$-algèbre (libre de type fini) graduée sur une sous-algèbre B par un groupe cyclique d'ordre r :

$$A = \bigoplus_{i=0}^{r-1} \mathfrak{a}^i B, \text{ pour une unité } \mathfrak{a} \in A,\ \mathfrak{a}B = B\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}^r \in B,$$

d'automorphismes associés $h := h^{(\omega)}_{A/B}$ pour A, $g := g^{(\mathfrak{a})}_{B/A}$ pour B, avec $K \otimes_{\mathcal{O}} A$ et $K \otimes_{\mathcal{O}} B$ semi-simples déployées.

Remarques : Supposons que les hypothèses **(H)** sont satisfaites.

1. L'entier r est inversible dans $\mathcal{O}$. En effet, il existe des entiers $u,\ v$ tels que $ru = 1 - pv$ avec $p \in J(\mathcal{O})$, le radical de de Jacobson de $\mathcal{O}$, puisque $k \cong \mathcal{O}/J(\mathcal{O})$. Par propriété du radical, r est inversible.

2. Le corps k étant supposé algébriquement clos, de caractéristique p, $\mathcal{O}$ admet une racine primitive r-ième de l'unité, selon le lemme de Hensel.

Donnons à présent le théorème principal du chapitre dont le théorème 2.2.1 est une conséquence. Nous en verrons des applications dans le chapitre 4.

Théorème 2.3.1 (Théorème principal) *Supposons que les hypothèses* **(H)** *sont satisfaites. Soit M un module sur A, h-quasi-stable.*

Si la matrice de décomposition $D := \mathrm{Dec}_A(M)$, est h-stable unitriangulaire, alors la matrice de décomposition $D' := \mathrm{Dec}_B(\mathrm{Res}\, M)$ est g-stable unitriangulaire. De plus, si D est carrée, D' l'est aussi.

Avant de donner des corollaires de ce théorème, nous développons certains résultats utiles à la preuve.

2.4 Premiers résultats

Nous conservons les hypothèses **(H)** de 2.3.2. Nous y ajoutons la notation,

Définition - Notation 2.4.1 *Notons $\widehat{-} := K \otimes_{\mathcal{O}} -$.*

Commençons par énoncer quelques propriétés vérifiées par les foncteurs d'induction et de restriction.

2.4.1 Restriction et induction

Dans cette sous-section, les algèbres $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ ne sont pas nécessairement semi-simple déployées et k n'a pas besoin d'être algébriquement clos.

Considérons les foncteurs adjoints de restriction et d'induction des catégories de modules sur A et B, resp. sur $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$. Afin de simplifier les notations, nous les désignerons indifféremment par Res et Ind ,

$$\mathrm{Res}\, - : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(B),\ \mathrm{Ind}\, - = - \otimes_B A : \mathrm{mod}(B) \to \mathrm{mod}(A),$$

ou,

$$\mathrm{Res}\,- : \mathrm{mod}(\widehat{A}) \to \mathrm{mod}(\widehat{B}),\ \mathrm{Ind}\,- = - \otimes_{\widehat{B}} \widehat{A} : \mathrm{mod}(\widehat{B}) \to \mathrm{mod}(\widehat{A}).$$

D'une part, pour tout module N sur B, l'isomorphisme de modules sur B qui envoie $n \otimes_B a \in \mathrm{Res}\,\mathrm{Ind}\,N$ sur $(n *_{-j} b_j)_{j\in[0,r-1]} \in \bigoplus_{j=0}^{r-1} N^{g^{-j}}$, pour $n \in N$, $a = \sum_{j=0}^{r-1} \mathfrak{a}^j b_j$ et $b_j \in B$, $*_{-j}$ désignant l'action de B sur $N^{g^{-j}}$, montre que

$$\mathrm{Res}\,\mathrm{Ind}\,N \cong \bigoplus_{j=0}^{r-1} N^{g^j}. \tag{2.4.1}$$

Par ailleurs,

Proposition 2.4.1 *Pour tout module L sur A, les modules* $\mathrm{Ind}\,\mathrm{Res}\,L$ *et* $\bigoplus_{j=0}^{r-1} L^{h^j}$ *sont isomorphes.*

Preuve : Par définition, $\mathrm{Ind}\,\mathrm{Res}\,L$ est isomorphe au module

$$L \otimes_A ({}_AA_B) \otimes_B ({}_BA_A),$$

donc aussi à $\bigoplus_{j=0}^{r-1} L \otimes_A A^{h^j}$ parce qu'il existe un isomorphisme de (A,A)-bimodules :

$${}_AA_B \otimes_B {}_BA_A \cong \bigoplus_{j=0}^{r-1} A^{h^j}. \tag{2.4.2}$$

L'isomorphisme énoncé s'en déduit.

Montrons l'assertion (2.4.2). L'algèbre A est libre de type fini sur $\mathcal{O}$, donc la sous-algèbre B l'est aussi. Il existe $b_1, \ldots, b_s \in B$ tels que $B = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{O}b_i$. Avec la graduation de A sur B, il vient que $\{b_{i_1}\mathfrak{a}^{i_2}\,;\, i_1 \in [1,s],\ i_2 \in [0,r-1]\}$ est une $\mathcal{O}$-base de A et que $\mathcal{B} := \{b_{i_1}\mathfrak{a}^{i_2} \otimes_B \mathfrak{a}^{i_3}\,;\, i_1 \in [1,s],\ i_2, i_3 \in [0,r-1]\}$ est une $\mathcal{O}$-base de $A \otimes_B A$.

Soit le $\mathcal{O}$-homomorphisme $f : A \otimes_B A \to \bigoplus_{j=0}^{r-1} A^{h^j}$ défini sur la base $\mathcal{B}$

par $(b_{i_1}\mathfrak{a}^{i_2}\otimes_B \mathfrak{a}^{i_3})f := (\omega^{ji_3}b_{i_1}\mathfrak{a}^{i_2+i_3})_{j\in[0,r-1]}$, pour $i_3, i_2 \in [0, r-1]$, $i_1 \in [1, s]$. Il est facile de vérifier que f est un homomorphisme de (A, A)-bimodules en utilisant la base de A donnée ci-haut. Pour un choix approprié de l'ordre des éléments des bases de $A\otimes_B A$ et de $\bigoplus_{j=0}^{r-1} A^{h^j}$, la matrice de f est la matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant une matrice de Vandermonde $(\omega^{ij})_{0\le i,j\le r-1}$. Le déterminant de f est alors, au signe près, $\det(f) = \pm\big(\prod_{0\le i<j\le r-1}(\omega^i - \omega^j)\big)^{rs}$. Mais, $\prod_{1\le j\le r-1}(1-\omega^j) = r$ est une unité de $\mathcal{O}$ (cf. la première remarque suivant les hypothèses **(H)**). Ceci permet de conclure que f est un (A, A)-isomorphisme et l'assertion (2.4.2) est vérifiée. ∎

Remarques :

1. Donnons une conséquence immédiate de la Proposition 2.4.1. Dans le Théorème 2.3.1, il est équivalent de supposer que M est h-quasi-stable ou que M admet les mêmes facteurs directs indécomposables (à multiplicité près) que le module $\operatorname{Ind}\operatorname{Res} M$.

2. Soulignons que la preuve de la Proposition 2.4.1 est aussi valable dans le cas où $\mathcal{O}$ est remplacé par un corps de caractéristique nulle ou première à r de sorte que r soit une unité de ce corps.
Grâce à cette proposition, adaptée au corps $R = K$ ou $R = k$, la condition **(HSS)** de la sous-section 2.1.1 est vérifiée pour R (voir la formule (2.4.5) du Lemme 2.4.2 ci-après).

Terminons cette sous-section en donnant quelques relations entre les foncteurs de restriction ou d'induction et les modules h-stables ou g-stables.

Si N est un module sur B, alors $\operatorname{Ind} N$ est h-stable. C'est immédiat en considérant l'application qui envoie $n\otimes_B a \in \operatorname{Ind} N$ sur $n\otimes_B(a)h \in (\operatorname{Ind} N)^h$, pour $n \in N$, $a \in A$.

Un autre résultat facile est que les modules $\operatorname{Ind} N$ et $\operatorname{Ind}(N^g)$ sont isomorphes. Ceci est justifié en utilisant le morphisme qui applique $n\otimes_B a \in \operatorname{Ind} N$ sur $n\otimes_B \mathfrak{a}\, a \in \operatorname{Ind}(N^g)$, avec $n \in N$, $a \in A$.

De même, si L est un module sur A, alors $\operatorname{Res} L$ est g-stable. C'est clair en utilisant le morphisme qui à $l \in \operatorname{Res} L$ fait correspondre l'élément $l\,\mathfrak{a} \in (\operatorname{Res} L)^g$.

Par ailleurs, de façon triviale, les restrictions à B des modules L et L^h sont isomorphes puisque h restreint à B est l'application identité.

À présent, passons à d'autres relations obtenues en utilisant la théorie de Clifford.

2.4.2 Théorie de Clifford

Aux hypothèses **(H)** de 2.3.2 et aux notations de la Section 2.3, ajoutons les notations suivantes.

Définition - Notation 2.4.2 *La multiplicité du module simple U dans un module V (comme facteur de composition) quand U et V sont des modules sur $\widehat{A}$, resp. $\widehat{B}$, sera notée $[V : U]$.*

La multiplicité d'un facteur direct indécomposable U dans un module V quand U et V sont des modules sur A ou B sera également notée $[V : U]$.

Commençons par énoncer un résultat préliminaire.

Lemme 2.4.2 *Soit Y un module indécomposable sur A et W un facteur direct indécomposable du module restreint* $\operatorname{Res} Y$. *Alors, nous avons les deux égalités suivantes :*

$$[\operatorname{Ind} W : Y] = [\operatorname{Res} Y : W], \tag{2.4.3}$$

$$\frac{r}{o(g,W)o(h,Y)} = [\operatorname{Ind} W : Y][\operatorname{Res} Y : W], \tag{2.4.4}$$

ainsi que les deux isomorphismes

$$\operatorname{Ind} W \cong [\operatorname{Ind} W : Y]\Sigma_{h,Y}, \tag{2.4.5}$$

$$\operatorname{Res} Y \cong [\operatorname{Res} Y : W]\Sigma_{g,W}. \tag{2.4.6}$$

Preuve : Le module induit $\operatorname{Ind} W$ est un facteur direct de $\operatorname{Ind}\operatorname{Res} Y$. Par la Proposition 2.4.1,

$$\operatorname{Ind}\operatorname{Res} Y \cong \bigoplus_{j=0}^{r-1} Y^{h^j} \cong \frac{r}{o(h,Y)}\Sigma_{h,Y}. \tag{2.4.7}$$

La h-stabilité de $\operatorname{Ind} W$ implique alors l'isomorphisme (2.4.5). Maintenant, d'une part,

$$\operatorname{Res}\operatorname{Ind} W \cong \bigoplus_{j=0}^{r-1} W^{g^j} \cong \frac{r}{o(g,W)}\Sigma_{g,W}. \tag{2.4.8}$$

D'autre part, $\operatorname{Res}\operatorname{Ind} W \cong [\operatorname{Ind} W : Y]\, o(h,Y)\operatorname{Res} Y$. Donc, le module g-stable $\operatorname{Res} Y$ satisfait la relation (2.4.6) et l'égalité (2.4.4) est vérifiée.

Soit F_0 l'algèbre d'endomorphismes $\operatorname{End}_B(\operatorname{Res} Y)$. En utilisant la décomposition (2.4.6), nous pouvons introduire les idempotents $\pi_{j,t}$ de F_0 qui correspondent aux projections canoniques :

$$1_{F_0} = \sum_{j=0}^{o(g,W)-1} \sum_{t=1}^{[\operatorname{Res} Y:W]} \pi_{j,t}.$$

L'image de $\operatorname{Res} Y$ par $\pi_{j,t}$ est isomorphe à W^{g^j} pour tout entier $j \in [0, o(g,W)-1]$ et t, $1 \leq t \leq [\operatorname{Res} Y : W]$. Comme l'idéal $J(\mathcal{O})F_0$ est nilpotent, le théorème de relèvement des idempotents fournit une correspondance bijective entre les idempotents primitifs $\pi_{j,t} \in F_0$ et leurs images $\pi'_{j,t}$ par la surjection canonique $F_0 \to F'_0$ pour la k-algèbre quotient $F'_0 := F_0/J(\mathcal{O})F_0$. Cette correspondance conserve les équivalences entre les idempotents et leur caractère primitif. Une seconde fois, utilisons l'existence d'un relèvement des idempotents de $F''_0 := F'_0/J(F'_0)$ à F'_0. Les idempotents primitifs $\pi'_{j,t} \in F'_0$ et leurs images $\pi''_{j,t} \in F''_0$ sous la surjection canonique $F'_0 \to F''_0$ sont en correspondance bijective.
Le corps k est algébriquement clos. Le lemme de Schur implique que pour tout j, t, $\pi''_{j,t}F''_0\pi''_{j,t}$ (qui est isomorphe à l'algèbre d'endomorphismes $\operatorname{End}_{F''_0}(\pi''_{j,t}F''_0)$ par propriété des idempotents), est isomorphe à k. Par conséquent, F''_0 est un produit de $o(g,W)$ copies de l'algèbre de matrices $\operatorname{Mat}_{[\operatorname{Res} Y:W]}(k)$ et la dimension sur k de F''_0 est $\dim_k F'_0/J(F'_0) = o(g,W)([\operatorname{Res} Y : W])^2$.

Soit F l'algèbre d'endomorphismes $\operatorname{End}_A(\operatorname{Ind}\operatorname{Res} Y)$. Par [20, Proposition 11.14], F est graduée par un groupe cyclique d'ordre r sur F_0 donc $F' := F/J(\mathcal{O})F$ l'est sur F'_0. Avec le rappel 2.1.1 sur les radicaux des algèbres graduées, $\dim_k F'/J(F') = r\, o(g,W)([\operatorname{Res} Y : W])^2$. Par ailleurs, un raisonnement analogue à celui effectué au paragraphe précédent, avec $F \cong \operatorname{End}_A(\frac{r}{o(h,Y)}\Sigma_{h,Y})$ à la place de $F_0 \cong \operatorname{End}_B([\operatorname{Res} Y : W]\Sigma_{g,W})$, montre que $\dim_k F'/J(F') = \frac{r^2}{o(h,Y)}$. En comparant les deux dimensions obtenues ci-dessus pour $F'/J(F')$,

il vient que $\frac{r}{o(g,W)o(h,Y)} = ([\mathrm{Res}\, Y : W])^2$, puis en utilisant l'égalité (2.4.4), nous obtenons la première égalité (2.4.3). ∎

Remarque : Dans la proposition précédente, supposons que le travail s'effectue sur K et non plus sur $\mathcal{O}$, i.e., pour Y un module simple sur $\widehat{A}$ et W un facteur direct indécomposable de sa restriction $\mathrm{Res}\, Y$. Alors, avec une preuve analogue, n'utilisant pas le théorème de relèvement des idempotents, parce que $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont supposées semi-simples déployées, nous établissons les deux égalités suivantes :

$$[\mathrm{Ind}\, W : Y] = [\mathrm{Res}\, Y : W], \tag{2.4.9}$$

$$\frac{r}{o(\widehat{g}, W)o(\widehat{h}, Y)} = [\mathrm{Ind}\, W : Y][\mathrm{Res}\, Y : W], \tag{2.4.10}$$

ainsi que les deux isomorphismes

$$\mathrm{Ind}\, W \cong [\mathrm{Ind}\, W : Y]\Sigma_{\widehat{h},Y}, \tag{2.4.11}$$

$$\mathrm{Res}\, Y \cong [\mathrm{Res}\, Y : W]\Sigma_{\widehat{g},W}. \tag{2.4.12}$$

Avant de passer plus avant, remarquons que si le corps K est assez gros, la restriction de $\widehat{A}$ à $\widehat{B}$ de tout sous-module simple de $\mathrm{Res}\, \widehat{M}$ est sans multiplicité.

Grâce au Lemme 2.4.2, nous pouvons déjà observer le

Corollaire 2.4.3 *Sous l'hypothèse* **(H)**, *pour un module M sur A, les trois affirmations suivantes sont équivalentes.*

(C1) : *La restriction de $\widehat{A}$ à $\widehat{B}$ de tout sous-module simple de $\widehat{M}$ est sans multiplicité.*

(C2) : *Si V est un sous-module simple de $\widehat{M}$, alors il existe un module T sur $\widehat{B}$ tel que $\Sigma_{\widehat{h},V} \cong \mathrm{Ind}\, T$.*

(C3) : *Si U est un sous-module simple de $\mathrm{Res}\, \widehat{M}$, alors il existe un module S sur $\widehat{A}$ tel que $\Sigma_{\widehat{g},U} \cong \mathrm{Res}\, S$.*

Preuve : En utilisant les résultats du Lemme 2.4.2 ainsi que la remarque qui lui succède, il est évident que la condition **(C1)** implique les deux conditions **(C2)** et **(C3)**.

Supposons à présent que l'hypothèse **(C2)** est satisfaite. Soit U, un

sous-module simple de la restriction $\mathrm{Res}\, V$. Le module somme directe $[\mathrm{Ind}\, U : V]\Sigma_{\widehat{h},V}$ est isomorphe d'une part, au module induit $\mathrm{Ind}\, U$, selon l'expression (2.4.11), et d'autre part, à $[\mathrm{Ind}\, U : V]\mathrm{Ind}\, T$, par hypothèse. En considérant les restrictions de $\widehat{A}$ à $\widehat{B}$ des deux dernières expressions, il vient que la somme $\bigoplus_{j=0}^{r-1} U^{\widehat{g}^j}$ est isomorphe à la somme $[\mathrm{Ind}\, U : V]\bigoplus_{j=0}^{r-1} T^{\widehat{g}^j}$ selon (2.4.1). Les modules sur $\widehat{B}$, U et T, étant simples, nous en déduisons que $[\mathrm{Ind}\, U : V] = 1$, soit $[\mathrm{Res}\, V : U] = 1$ par le Lemme 2.4.2. Par conséquent, la condition **(C1)** est vérifiée.

Un raisonnement analogue au précédent permet de montrer que sous l'hypothèse **(C3)**, la condition **(C1)** est satisfaite.

Finalement, les énoncés **(C1)**, **(C2)**, **(C3)** sont équivalents. ∎

En fait, si le corps K est assez gros, les conditions du Corollaire 2.4.3 sont remplies. Le lemme suivant précise ce que l'expression "K assez gros" signifie.

Lemme 2.4.4 *Sous l'hypothèse* **(H)**, *pour un module M sur A, si la condition* **(C4)**, *resp.* **(C5)**, *suivante est satisfaite, alors les conditions équivalentes* **(C1)**, **(C2)** *et* **(C3)** *le sont aussi.*

(C4) : *Si V est un sous-module simple de $\widehat{M}$, il existe un isomorphisme de modules sur $\widehat{A}$, $t : V \to V^{\widehat{h}^{\mathfrak{o}}}$, tel que $t^{\frac{r}{\mathfrak{o}}} = c^{\frac{r}{\mathfrak{o}}}\mathrm{Id}_V$ pour un élément $c \in K$ et $\mathfrak{o} := o(\widehat{h}, V)$.*

(C5) : *Si U est un sous-module simple de $\mathrm{Res}\,\widehat{M}$, il existe un isomorphisme de modules sur $\widehat{B}$, $s : U \to U^{\widehat{g}^{\mathfrak{o}}}$, tel que $s^{\frac{r}{\mathfrak{o}}} \circ m_{\mathfrak{a}^{-r}} = \kappa^{\frac{r}{\mathfrak{o}}}\mathrm{Id}_U$ pour un élément $\kappa \in K$, où $\mathfrak{o} := o(\widehat{g}, U)$, $m_{\mathfrak{a}^{-r}}$ est la multiplication à droite par $\mathfrak{a}^{-r}$ et $\mathfrak{a}$ est identifié à l'élément $1_K \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a} \in \widehat{A}$.*

Preuve : Supposons qu'il existe un scalaire c comme dans **(C4)**. Posons $t' := \frac{t}{c}$, alors $t'^{\frac{r}{\mathfrak{o}}} = \mathrm{Id}_V$ et $\mathrm{Res}\, V$ est la somme

$$\mathrm{Res}\, V \cong \bigoplus_{i=0}^{\frac{r}{\mathfrak{o}}-1} \mathrm{Ker}(t' - \omega^{\mathfrak{o}i}\mathrm{Id}_V). \tag{2.4.13}$$

C'est un isomorphisme de modules sur $\widehat{B}$ car t est un morphisme de modules sur $\widehat{A}$ et $\widehat{h}|_{\widehat{B}}$ est l'identité de $\widehat{B}$.
Comme pour tout $v \in V$, $a \in \widehat{A}$, $(v.a)t = (v)t.(a)\widehat{h}^{\mathfrak{o}}$, il est facile de

voir que si x est un vecteur propre de t' pour la valeur propre $\omega^{\mathfrak{o}i}$, alors $x\mathfrak{a}^j$ est un vecteur propre de t' pour la valeur propre $\omega^{\mathfrak{o}(i+j)}$, pour tout entier j. Donc, si $i \in [0, \frac{r}{\mathfrak{o}}-1]$, le module espace propre $\mathrm{Ker}(t'-\omega^{\mathfrak{o}i}\mathrm{Id}_V)$ est isomorphe au module $\mathrm{Ker}(t'-\mathrm{Id}_V)\mathfrak{a}^i$ donc aussi à $\mathrm{Ker}(t'-\mathrm{Id}_V)^{\widehat{g}^{-i}}$, en tant que modules sur $\widehat{B}$. En introduisant ces relations dans (2.4.13), la restriction $\mathrm{Res}\, V$ s'écrit sous la forme

$$\mathrm{Res}\, V \cong \bigoplus_{i=0}^{\frac{r}{\mathfrak{o}}-1} \mathrm{Ker}(t'-\mathrm{Id}_V)^{\widehat{g}^i}.$$

Par conséquent, $\mathrm{Res}\, V$ se décompose en un nombre de modules simples sur $\widehat{B}$ supérieur à $\frac{r}{\mathfrak{o}}$. Par ailleurs, les formules (2.4.9), (2.4.10) et (2.4.12) montrent que la restriction $\mathrm{Res}\, V$ se décompose en un nombre de modules simples égal à $\frac{r}{\mathfrak{o}}$ divisé par la multiplicité de V dans le module induit par un sous-module simple de $\mathrm{Res}\, V$, donc un nombre inférieur à $\frac{r}{\mathfrak{o}}$. Par comparaison, ce nombre est $\frac{r}{\mathfrak{o}}$ et le module induit par tout sous-module simple de $\mathrm{Res}\, V$ est sans multiplicité. Selon l'égalité (2.4.9), la condition **(C1)** est satisfaite.

À présent, supposons que l'hypothèse **(C5)** est vérifiée. Posons $s' := \frac{s}{\kappa}$, alors $s'^{\frac{r}{\mathfrak{o}}} = m_{\mathfrak{a}^r}$. Définissons un K-homomorphisme $\rho : \widehat{A} \to \mathrm{End}_K(\Sigma_{\widehat{g},U})$ sur la graduation de $\widehat{A}$. Pour tout $j \in [0, r-1]$ qui s'écrit $j = d\mathfrak{o} + d'$ avec d un entier positif, $d' \in [0, \mathfrak{o}-1]$ et $(u_1, \ldots, u_{\mathfrak{o}}) \in \Sigma_{\widehat{g},U}$,

$$\begin{aligned}(u_1, \ldots, u_{\mathfrak{o}})\big((\mathfrak{a}^j)\rho\big) = \\ \big((u_{d'+1})s'^d, \ldots, (u_{\mathfrak{o}})s'^d, (u_1)s'^{d+1}, \ldots, (u_{d'})s'^{d+1}\big).\end{aligned}$$

Si $b \in \widehat{B}$, l'action de $(b)\rho$ sur un élément $(u_1, \ldots, u_{\mathfrak{o}}) \in \Sigma_{\widehat{g},U}$ est celle de b sur cet élément. À savoir,

$$(u_1, \ldots, u_{\mathfrak{o}})\big((b)\rho\big) = (u_1 *_0 b, \ldots, u_{\mathfrak{o}} *_{\mathfrak{o}-1} b),$$

où l'action de $\widehat{B}$ sur $U^{\widehat{g}^j}$ est désignée par $*_j$, pour $j \in [0, \mathfrak{o}-1]$. En considérant l'action de $\widehat{B}$ dans U pour toutes les composantes de la somme $\Sigma_{\widehat{g},U}$, $(u_1, \ldots, u_{\mathfrak{o}})\big((b)\rho\big)$ s'écrit alors

$$(u_1, \ldots, u_{\mathfrak{o}})\big((b)\rho\big) = \big(u_1 b, u_2(b^{\mathfrak{a}}), \ldots, u_{\mathfrak{o}}(b^{\mathfrak{a}^{\mathfrak{o}-1}})\big).$$

Quelques manipulations calculatoires montrent que ρ est un homomorphisme d'algèbres entre $\widehat{A}$ et $\mathrm{End}_K(\Sigma_{\widehat{g},U})$. Il est alors clair que l'action de $\widehat{B}$ sur $\Sigma_{\widehat{g},U}$ peut être étendue en une action de $\widehat{A}$ sur $\Sigma_{\widehat{g},U}$. Par conséquent, il est possible de considérer le module sur $\widehat{B}$,

$\Sigma_{\widehat{g},U}$, comme la restriction d'un module sur $\widehat{A}$. La condition **(C3)** du Corollaire 2.4.3 est remplie, ainsi que les conditions équivalentes **(C1)** et **(C2)**. ∎

Remarque : Sous l'hypothèse **(H)** de 2.3.2, l'algèbre $\widehat{A}$, resp. $\widehat{B}$, est supposée déployée. Par définition, avec les notations du Lemme 2.4.4, il existe un élément c_V, resp. c_U, du corps K tel que l'automorphisme de modules $t^{\frac{r}{\mathfrak{o}}}$ de V, resp. $s^{\frac{r}{\mathfrak{o}}} \circ m_{-\mathfrak{a}^r}$ de U, est égal à $c_V \mathrm{Id}_V$, resp. $c_U \mathrm{Id}_U$. Si K est assez gros, il contient une racine $\frac{r}{\mathfrak{o}}$-ième de c_V, resp. c_U, pour $\mathfrak{o} := o(\widehat{h}, V)$, resp. $\mathfrak{o} := o(\widehat{g}, U)$.

Après ces observations sur l'absence de multiplicité valable si le corps K est assez gros, donnons un autre corollaire du Lemme 2.4.2. En fait, il vient facilement la

Proposition 2.4.5 *Soit* $\widetilde{\ }$ *représentant* $\emptyset$ *ou* $\widehat{\ }$ *de façon à ce que* $\widetilde{x} = x$ *si* $\widetilde{\ } = \emptyset$ *et* $\widetilde{x} = \widehat{x}$ *si* $\widetilde{\ } = \widehat{\ }$, *pour un élément* x. *Soit* $\widetilde{M} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} s_i \widetilde{M_i}$ *une décomposition de* $\widetilde{M}$ *pour des entiers* s *et* s_i *strictement positifs et* $\{\widetilde{M_i}\,;\, i \in [1,s]\}$ *un ensemble complet de (représentants de classes d'isomorphismes de) facteurs directs indécomposables de* $\widetilde{M}$ *non-isomorphes deux à deux. Choisissons un sous-ensemble minimal* $J \subseteq [1,s]$ *tel que les orbites des* $\widetilde{M_j}$, $j \in J$, *sous l'action de* C_r *via* $\widetilde{h}$, *forment une partition de* $\{\widetilde{M_i}\,;\, i \in [1,s]\}$. *Pour tout* $i \in [1,s]$, *soit* $\widetilde{N_i}$ *un facteur direct indécomposable de la restriction de* $\mathrm{Res}^{\widetilde{A}}_{\widetilde{B}} \widetilde{M_i}$.
Alors, $\{\widetilde{N_j}^{\widetilde{h}}\,;\, j \in J, i \in [0, o(\widetilde{h}, \widetilde{N_j}) - 1]\}$ *est un ensemble complet de facteurs directs indécomposables non-équivalents de* $\mathrm{Res}\, \widetilde{M}$.
De plus, pour chaque $i \in [1,s]$,

$$\mathrm{Ind}\, \widetilde{N_i} \cong [\mathrm{Ind}\, \widetilde{N_i} : \widetilde{M_i}] \Sigma_{\widetilde{h}, \widetilde{M_i}} \text{ et } \mathrm{Res}\, \widetilde{M_i} \cong [\mathrm{Res}\, \widetilde{M_i} : \widetilde{N_i}] \Sigma_{\widetilde{g}, \widetilde{N_i}},$$

avec

$$\frac{r}{o(\widetilde{g}, \widetilde{N_i}) o(\widetilde{h}, \widetilde{M_i})} = [\mathrm{Ind}\, \widetilde{N_i} : \widetilde{M_i}][\mathrm{Res}\, \widetilde{M_i} : \widetilde{N_i}],$$

$$[\mathrm{Ind}\, \widetilde{N_i} : \widetilde{M_i}] = [\mathrm{Res}\, \widetilde{M_i} : \widetilde{N_i}].$$

Remarque : Le but de cette proposition est d'expliciter un ensemble complet de facteurs directs indécomposables de $\mathrm{Res}\, M$, resp. de

sous-modules simples de $\operatorname{Res}\widehat{M}$, en fonction d'un ensemble complet de facteurs indécomposables de M, resp. de sous-modules simples de $\widehat{M}$, ainsi que de donner certaines relations entre eux. En fait, nous aurions pu donner une proposition analogue décrivant les facteurs directs indécomposables de M, resp. les sous-modules simples de $\widehat{M}$, en fonction des facteurs directs indécomposables de $\operatorname{Res} M$, resp. des sous-modules simples de $\operatorname{Res}\widehat{M}$.

Preuve : Nous utilisons les notations de l'énoncé de la Proposition 2.4.5 et la prouvons pour $\widetilde{M} = M$.

Le lemme 2.4.2 donne les égalités citées à la fin de l'énoncé.

Chaque facteur direct indécomposable de $\operatorname{Res} M$ apparaît dans la décomposition de $\operatorname{Res} M_i$ pour un certain $i \in [1, s]$. Il est alors isomorphe à ${N_i}^{g^j}$ pour un $j \in [0, o(g, N_i) - 1]$ par (2.4.6). Supposons, maintenant, que les restrictions de M_i et de M_j ont un facteur direct indécomposable en commun. Par (2.4.5) et le théorème de Krull-Schmidt, M_i and M_j appartiennent à la même orbite. Lorsque deux modules sont dans la même orbite, ils ont des restrictions isomorphes. La proposition est prouvée pour M.

Le même type d'argument s'applique aussi au cas $\widetilde{M} = \widehat{M}$. ∎

2.5 Conservation de la forme unitriangulaire

Le but de cette section est de prouver le Theorème 2.3.1. Nous nous plaçons sous les mêmes hypothèses et nous conservons les mêmes notations.

Une matrice de décomposition d'un module ne permet pas de tenir compte des multiplicités des facteurs intervenant dans ce module. Sans perte de généralité, pour la preuve du Theorème 2.3.1, nous travaillerons sous l'hypothèse :

> M est supposé h-stable.

2.5.1 Stabilité et permutations

Rappelons une notation classique.

Définition - Notation 2.5.1 *Notons $\mathfrak{S}_m$, resp. $\mathfrak{S}_{[m,n]}$, le groupe symétrique à m éléments, resp. le groupe symétrique des éléments m, $m+1, \ldots, n$, pour des entiers strictement positifs m et n avec $n \geq m$.*

Dans cette partie, nous établissons des relations entre la h-stabilité de la matrice de décomposition D de M et certaines permutations. Pour cela, nous avons besoin d'autres notations.

Soit une décomposition de M, resp. de $\widehat{M}$,

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{m} m_i Y_i, \tag{2.5.1}$$

$$\widehat{M} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} n_i V_i, \tag{2.5.2}$$

pour des entiers m, m_i, resp. n, n_i, strictement positifs et un ensemble complet $\{Y_i\,;\, i \in [1,m]\}$, resp. $\{V_j\,;\, j \in [1,n]\}$, de facteurs directs indécomposables non-isomorphes deux à deux. Nous supposons que, pour tout $i \in [1,m]$, resp. $j \in [1,n]$, le module Y_i, resp. V_j, correspond à la colonne i, resp. ligne j, de D, selon la Définition - Notation 2.1.5.

Par hypothèse, M est h-stable. Nous introduisons les permutations suivantes.

Il existe deux permutations $\tau \in \mathfrak{S}_m$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que :

$$\text{pour tout } i \in [1,m], \quad Y_i^h \cong Y_{(i)\tau}, \tag{2.5.3}$$

$$\text{pour tout } j \in [1,n], \quad V_j^{\widehat{h}} \cong V_{(j)\sigma}. \tag{2.5.4}$$

Les permutations τ^r et σ^r sont les applications identités des groupes symétriques parce que h^r est l'application identité.

Il est clair qu'il existe une correspondance bijective entre les cycles de τ, resp. de σ, (dans sa décomposition en cycles à supports disjoints) et les orbites de C_r via h, resp. $\widehat{h}$, sur les classes d'isomorphismes des Y_i, $i \in [1,m]$, resp. des V_i, $i \in [1,n]$. À savoir, si $(i_1, i_2, \ldots, i_s)$ est un tel cycle de τ, resp. de σ, il lui correspond l'orbite formée des classes d'isomorphismes de Y_{i_1}, $Y_{i_2}, \ldots, Y_{i_s}$, resp. de V_{i_1}, $V_{i_2}, \ldots, V_{i_s}$.

Remarque : Nous pouvons traduire la h-stabilité de la matrice de décomposition D de M en fonction des deux permutations qui viennent d'être introduites. Si D est unitriangulaire inférieure de taille $n \times m$, alors σ se décompose comme le produit de deux permutations $\sigma = \sigma_1\sigma_2$ avec $\sigma_1 = \sigma|_{[1,m]} \in \mathfrak{S}_m$ et $\sigma_2 = \sigma|_{[m+1,n]} \in \mathfrak{S}_{[m+1,n]}$. Si D est unitriangulaire supérieure de taille $n \times m$, alors τ se décompose en le produit de deux permutations $\tau = \tau_1\tau_2$ avec $\tau_1 = \tau|_{[1,n]} \in \mathfrak{S}_n$, et $\tau_2 = \tau|_{[n+1,m]} \in \mathfrak{S}_{[n+1,m]}$.

Les permutations σ et τ sont liées entre elles selon le

Lemme 2.5.1 *Supposons que D est h-stable unitriangulaire de taille $n \times m$. Si D est unitriangulaire inférieure, resp. supérieure, alors*

$$\sigma|_{[1,m]} = \tau, \text{ resp. } \tau|_{[1,n]} = \sigma.$$

Preuve : Par récurrence, montrons que pour tout $i \in [1, \min(n, m)]$, $(i)\sigma = (i)\tau$. Supposons que D est unitriangulaire inférieure.

Dans la première étape, nous traitons le cas de l'indice m. Le module $\widehat{Y_m}$ est isomorphe au module $V_m \oplus \bigoplus_{j>m} d_{jm}V_j$ selon la forme de D. En tordant l'action de $\widehat{A}$ par l'automorphisme $\widehat{h}$, $\widehat{Y_{(m)\tau}}$ est isomorphe à $V_{(m)\sigma} \oplus \bigoplus_{j>m} d_{jm}V_{(j)\sigma}$ par définition de τ et de σ. La forme de D implique que $\widehat{Y_{(m)\tau}}$ est aussi isomorphe à $V_{(m)\tau} \oplus \bigoplus_{j>(m)\tau} d_{j(m)\tau}V_j$. Selon la remarque précédent l'énoncé de ce lemme, $V_{(m)\tau}$ n'apparaît pas dans la somme $\bigoplus_{j>m} d_{jm}V_{(j)\sigma}$. Finalement, $(m)\tau = (m)\sigma$.

Supposons que $i \in [1, m-1]$ et $(m)\tau = (m)\sigma$, $(m-1)\tau = (m-1)\sigma$, $\ldots$, $(i+1)\tau = (i+1)\sigma$. Par la forme de D, les modules sur $\widehat{A}$, $\widehat{Y_i}$ et $V_i \oplus \bigoplus_{j>i} d_{ji}V_j$, sont isomorphes. Avec une argumentation semblable à celle développée dans la première étape, $\widehat{Y_{(i)\tau}}$ est isomorphe d'une part à $V_{(i)\sigma} \oplus \bigoplus_{j>i} d_{ji}V_{(j)\sigma}$ et d'autre part à $V_{(i)\tau} \oplus \bigoplus_{j>(i)\tau} d_{j(i)\tau}V_j$. Mais $V_{(i)\tau}$ n'apparaît ni dans la somme $\bigoplus_{j>m} d_{ji}V_{(j)\sigma}$ selon la remarque citée

ci-dessus, ni dans la somme $\bigoplus_{i<j\leq m} d_{ji}V_{(j)\sigma}$ d'après l'hypothèse de récurrence. En conclusion, $(i)\tau = (i)\sigma$. La récurrence est démontrée.

Le cas où D est unitriangulaire supérieure se traite avec un raisonnement analogue. ∎

Remarque : Le bloc de taille $c \times c$ pour $c = \min(n, m)$, dans le coin supérieur gauche de D établit une correspondance bijective entre les $\{V_i\,;\, i \in [1, c]\}$ et les $\{Y_i\,;\, i \in [1, c]\}$: $Y_i \leftrightarrow V_i$, pour chaque $i \in [1, c]$. Considérons maintenant la correspondance entre les cycles de σ, resp. de τ, et les C_r-orbites des $\{V_i\,;\, i \in [1, c]\}$, resp. des $\{Y_i\,;\, i \in [1, c]\}$. Le Lemme 2.5.1 dit que h conserve l'ensemble des correspondances $\{Y_i \leftrightarrow V_i\,;\, i \in [1, c]\}$ au sens où, si $i \in [1, c]$, h transforme la correspondance $Y_i \leftrightarrow V_i$ en la correspondance $Y_i^h \cong Y_{(i)\tau} \leftrightarrow V_{(i)\sigma} \cong V_i^{\widehat{h}}$.

2.5.2 Preuve du Théorème 2.3.1

Preuve : Nous utiliserons les résultats de la Proposition 2.4.5 adaptés aux notations (2.5.1), (2.5.2). Pour tout entier $i \in [1, m]$, resp. $i \in [1, n]$, fixons W_i, resp. U_i, un facteur direct de la restriction $\mathrm{Res}\, Y_i$, resp. $\mathrm{Res}\, V_i$.

Supposons que D est unitriangulaire inférieure (donc $n \geq m$).

Premièrement, montrons que sous les hypothèses **(H)**, pour tout entier $i \in [1, m]$,

$$[\mathrm{Res}\, Y_i : W_i] = [\mathrm{Res}\, V_i : U_i]. \tag{2.5.5}$$

Soit un entier $i \in [1, m]$ tel que pour chaque entier j, $\tau^j(i) \leq i$. En restreignant l'isomorphisme de modules sur $\widehat{A}$

$$\widehat{Y_i} \cong V_i \oplus \bigoplus_{j=i+1}^{n} d_{ji}V_j$$

à un isomorphisme de modules sur $\widehat{B}$, nous obtenons que

$$\begin{aligned}[\mathrm{Res}\, Y_i : W_i]\widehat{\Sigma_{g,W_i}} \;\cong\; & [\mathrm{Res}\, V_i : U_i]\Sigma_{\widehat{g},U_i} \oplus \\ & \bigoplus_{j=i+1}^{n} d_{ji}[\mathrm{Res}\, V_j : U_j]\Sigma_{\widehat{g},U_j}.\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Avec le choix particulier de i et le Lemme 2.5.1, les modules $U_i^{\widehat{g}^s}$ pour $s \in [0, o(\widehat{g}, U_i)–1]$, apparaissent uniquement dans la somme des $\Sigma_{\widehat{g},U_i}$ du membre de droite de l'isomorphisme précédent. Un tel module, disons $U_i^{\widehat{g}^j}$ pour $j \in [0, o(\widehat{g}, U_i)–1]$, apparaît comme facteur direct de $\widehat{W}_i$, sinon aucun module de ce type n'apparaît comme facteur direct du membre de gauche de (2.5.6). Par conséquent, en considérant le nombre de $U_i^{\widehat{g}^j}$ dans chaque membre de (2.5.6), il vient que

$$[\operatorname{Res} V_i : U_i] \geq [\operatorname{Res} Y_i : W_i]. \tag{2.5.7}$$

De même en comptant le nombre de modules simples appartenant à $\{U_i^{\widehat{g}^s}\ ;\ s \in [0, o(\widehat{g}, U_i)-1]\}$, nous avons que

$$[\operatorname{Res} V_i : U_i] o(\widehat{g}, U_i) \geq [\operatorname{Res} Y_i : W_i] o(g, W_i).$$

En utilisant les formules (2.4.3), (2.4.4), (2.4.9) et (2.4.10), l'inégalité précédente s'écrit

$$\frac{r}{o(\widehat{h}, V_i)[\operatorname{Res} V_i : U_i]} \geq \frac{r}{o(h, Y_i)[\operatorname{Res} Y_i : W_i]},$$

soit encore,

$$[\operatorname{Res} V_i : U_i] \leq [\operatorname{Res} Y_i : W_i],$$

parce que $o(\widehat{h}, V_i)$, égal au cardinal du cycle de σ contenant i, et $o(h, Y_i)$, égal au cardinal du cycle de τ contenant i, sont égaux, d'après le Lemme 2.5.1. En comparant avec (2.5.7), nous en déduisons que

$$[\operatorname{Res} V_i : U_i] = [\operatorname{Res} Y_i : W_i]. \tag{2.5.8}$$

En outre, (2.5.8) est valable pour tout $i \in [1, m]$, parce que, pour tout $s \in [0, o(h, Y_i) - 1]$, les modules $\operatorname{Res} Y_i$ et $\operatorname{Res} Y_{(i)\tau^s}$ sont isomorphes. L'assertion (2.5.5) est démontrée.

Soit n', resp. m', le nombre de classes d'isomorphismes de sous-modules simples de $\operatorname{Res} \widehat{M}$, resp. de facteurs directs indécomposables de $\operatorname{Res} M$. Par la Proposition 2.4.5, $n' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{r}{(o(\widehat{g}, V_i)[\operatorname{Res} V_i : U_i])^2}$. La même proposition implique que $m' = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{r}{(o(h, Y)[\operatorname{Res} Y_i : W_i])^2}$. Avec le paragraphe précédent, il est clair que

$$n' = m' + \sum_{i=m+1}^{n} \frac{r}{(o(\widehat{g}, V_i)[\operatorname{Res} V_i : U_i])^2}.$$

Nous allons expliquer comment choisir des modules $V'_{i'}$, $i' \in [1, n']$, resp. $Y'_{j'}$, $j' \in [1, m']$, représentants des classes d'isomorphismes des sous-modules simples de $\operatorname{Res}\widehat{M}$, resp. des facteurs directs indécomposables de $\operatorname{Res} M$, de façon à ce que D' soit g-stable unitriangulaire inférieure.

Pour la première étape, commençons avec l'indice n. De manière triviale, pour tout $s \in \mathbb{Z}$, $(n)\sigma^s \leq n$. Pour chaque $j \in [0, o(\widehat{g}, U_n)-1]$, posons $V'_{n'-j} := U_n^{\widehat{g}^j}$ et $i' := n' - o(\widehat{g}, U_n)$.

Dans la seconde étape, traitons le cas de $n-1$. S'il existe $s \in \mathbb{Z}$ tel que $(n-1)\sigma^s > n-1$, rien n'est construit. Sinon, pour chaque $j \in [0, o(\widehat{g}, U_{n-1})-1]$, posons $V'_{i'-j} := U_{n-1}^{\widehat{g}^j}$ et $i' := i' - o(\widehat{g}, U_{n-1})$.

Poursuivons la procédure jusque la $(n-m)$-ième étape incluse. C'est le cas de la $(m+1)$-ième ligne. Grâce à la stabilité de la matrice, nous avons obtenu $\displaystyle\sum_{i=m+1}^{n} \frac{r}{(o(\widehat{h}, V_i)[\operatorname{Res} V_i : U_i])^2} = n' - m'$ représentants non-isomorphes de sous-modules simples de $\operatorname{Res}\widehat{M}$ et $i' = m'$. Modifions légèrement l'algorithme afin de construire les modules $Y'_{i'}$ et $V'_{i'}$ pour les indices $i' \in [1, m']$.

À la $(n-m+1)$-ième étape, nous traitons le cas de m. La stabilité de D implique que pour tout $s \in \mathbb{Z}$, $(m)\sigma^s \leq m$. Pour chaque entier $j \in [0, o(\widehat{g}, U_m) - 1]$, posons $V'_{i'-j} := U_m^{\widehat{g}^j}$, $Y'_{i'-j} := W_m^{g^j}$ et $i' := m' - o(\widehat{g}, U_m)$. Rappelons que $o(\widehat{g}, U_m) = o(g, W_m)$.

Dans la $(n-m+2)$-ième étape, occupons-nous de $m-1$. S'il existe un entier s tel que $(m-1)\sigma^s > m-1$, rien n'est fait. Sinon, pour chaque $j \in [0, o(\widehat{g}, U_{m-1})-1]$, posons $V'_{i'-j} := U_{m-1}^{\widehat{g}^j}$, $Y'_{i'-j} := W_{m-1}^{g^j}$ et $i' := i' - o(\widehat{g}, U_{m-1})$.

Poursuivons le travail jusqu'à la n-ième étape (qui concerne la première ligne). Nous obtenons les deux ensembles cherchés.

Soit $i \in [1, m]$ tel que pour tout $s \in \mathbb{Z}$, $(i)\sigma^s \leq i$. Les constructions précédentes montrent que, à i, il correspond l'ensemble d'indices $\{i', i'-1, \ldots, i'-o(\widehat{g}, U_i)+1\}$. Si nous restreignons l'isomorphisme de modules sur $\widehat{A}$,

$$\widehat{Y_i} \cong V_i \oplus \bigoplus_{j>i} d_{ji} V_j$$

à un isomorphisme de modules sur $\widehat{B}$, nous obtenons

$$\bigoplus_{s=i'-o(\widehat{g},U_i)+1}^{i'} \widehat{Y'_s} \cong \bigoplus_{t=i'-o(\widehat{g},U_i)+1}^{i'} V'_t \oplus V,$$

où V est sous-module de $\bigoplus_{j>i} \frac{d_{ji}}{[\operatorname{Res} V_i : U_i]} \operatorname{Res} V_j$. Par construction, aucun des V'_t, $t \in [i'-o(\widehat{g}, U_i)+1, i']$, n'apparaît dans V. De plus, pour chaque $s \in [0, o(\widehat{g}, U_i)-1]$, $Y'_{i'-s} \cong Y'^{g^s}_{i'}$ et $V'_{i'-s} \cong V'^{\widehat{g}^s}_{i'}$. Il est clair que $\widehat{Y'_{i'}}$ contient un unique élément de $\{V'_{i'-s}\,;\, s \in [0, o(\widehat{g}, U_i)-1]\}$ dans sa décomposition en modules simples. Sans perte de généralité, supposons que c'est le module $V'_{i'}$. Alors, pour tout $s \in [0, o(\widehat{g}, U_i)–1]$, $\widehat{Y'_{i'-s}}$ contient $V'_{i'-s}$ comme unique élément de $\{V'_{i'-s}\,;\ \ s \in [0, o(\widehat{g}, U_i)-1]\}$ dans sa décomposition en modules simples. Les colonnes $i'-o(\widehat{g}, U_i)+1, \ldots, i'$, de D' sont de la forme $\begin{pmatrix} B_0 \\ U \\ B \end{pmatrix}$, où B_0 est la matrice nulle de taille $(i'-o(\widehat{g}, U_i)) \times o(\widehat{g}, U_i)$, U est une matrice carrée unitriangulaire inférieure de dimension $o(\widehat{g}, U_i) \times o(\widehat{g}, U_i)$ et B est une matrice de taille $(n'-i') \times o(\widehat{g}, U_i)$.

Pour cet ordre de modules simples et de facteurs directs indécomposables, D' est unitriangulaire inférieure. En outre, avec une telle construction, il est trivial que D' est g-stable. Il est également clair que si D est carrée, alors D' l'est aussi.

Si D est unitriangulaire supérieure, une argumentation semblable est possible. Le théorème est prouvé. ∎

2.5.3 Théorème réciproque

Énonçons, à présent, un théorème réciproque du Théorème 2.3.1. Si nous imitons le travail précédent, il vient facilement le

Théorème 2.5.2 *Supposons que les hypothèses* **(H)** *sont satisfaites. Soit M un module sur A, h-quasi-stable.*

Si la matrice de décomposition $D' := \operatorname{Dec}_B(\operatorname{Res} M)$ est g-stable unitriangulaire alors la matrice de décomposition $D := \operatorname{Dec}_A(M)$ est h-stable unitriangulaire. De plus, si D' est carrée unitriangulaire, alors D l'est aussi.

Corollaire 2.5.3 *Supposons que les hypothèses* **(H)** *sont vérifiées. Soit un module M' sur B, g-quasi-stable. Alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :*

la matrice de décomposition de M' est g-stable unitriangulaire,
la matrice de décomposition de $\operatorname{Ind} M'$ *est h-stable unitriangulaire ; ainsi que les deux suivantes :*
la matrice de décomposition de M' est carrée unitriangulaire,
la matrice de décomposition de $\operatorname{Ind} M'$ *est carrée unitriangulaire.*

Preuve : Appliquons le Théorème 2.3.1 et le Théorème 2.5.2 avec $M = \operatorname{Ind} M'$. Comme les matrices de décomposition des modules M' et $\operatorname{Res}\operatorname{Ind} M'$ sont égales, le corollaire est démontré. ∎

Remarque : Tous les résultats précédents sont valables dans un cadre plus général où sont fixées deux $\mathcal{O}$-algèbres A et B, $\mathcal{O}$-libres de type fini. Supposons qu'il existe deux automorphismes $f_{A/B}$ et $f_{B/A}$ qui se comportent comme les automorphismes h et g introduits dans ce chapitre ainsi qu'un "bon" module M sur A. Nous supposons qu'il existe aussi un couple de foncteurs adjoints $F : \operatorname{mod}(A) \to \operatorname{mod}(B)$ remplaçant Res, et $G : \operatorname{mod}(B) \to \operatorname{mod}(A)$ remplaçant Ind, qui satisfont certaines conditions de compatibilité avec $f_{A/B}$, $f_{B/A}$ et M. Alors, des résultats analogues aux précédents peuvent être établis.

Chapitre 3

Algèbres cellulaires particulières

Dans ce chapitre, nous traitons d'algèbres particulières : les algèbres cellulaires. Cette notion a été introduite par J.J. Graham et G.I. Lehrer dans leur article [48]. Ce sont des algèbres qui possèdent des bases pourvues de propriétés combinatoires. Ceci permet de déterminer les (classes d'équivalence de) modules simples, les dimensions de modules simples, les blocs, les matrices de Cartan, etc., pour de telles algèbres, en réduisant ces questions à des problèmes d'algèbre linéaire.

Ces algèbres apparaissent dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique. Les algèbres de Brauer (dont la base est formée de diagrammes constitués de deux lignes de points reliés deux à deux), les sous-algèbres de Temperley-Lieb intervenant dans la théorie des modèles en physique, les sous-algèbres de Jones apparaissant dans la théorie des noeuds, les algèbres de Ariki-Koike liées à la théorie des représentations des groupes quantiques, sont autant d'exemples d'algèbres cellulaires.

Dans un premier temps, nous rappellerons les définitions et principales propriétés des algèbres cellulaires développées en [48] et reprises en [65, chapitre 2] qui seront utiles. Puis nous nous occuperons d'algèbres cellulaires particulières, possédant des propriétés supplémentaires.

3.1 Rappels sur les algèbres cellulaires

3.1.1 Définition

Fixons un anneau commutatif unitaire intègre R.

Commençons par énoncer les axiomes (modélisés selon correspondance de Robinson-Schensted) qu'une algèbre doit vérifier pour être cellulaire.

Définition - Notation 3.1.1 *Une* algèbre cellulaire *sur R est une algèbre associative (unitaire) A, munie d'une* donnée cellulaire $(\Lambda, M, C, *)$ *définie comme suit.*

(C1) : *L'ensemble $(\Lambda, \leq)$ est un ensemble (fini) partiellement ordonné. Il existe, pour tout $\lambda \in \Lambda$, un ensemble fini $M(\lambda)$ et une application $C : \coprod_{\lambda \in \Lambda} M(\lambda) \times M(\lambda) \to A$ qui est injective et admet pour image une R-base de A.*

(C2) : *Si $\lambda \in \Lambda$ et $S,\ T \in M(\lambda)$, écrivons $C^{\lambda}_{S,T}$ pour $(S,T)C \in A$. L'application $*$ est une anti-involution R-linéaire de A telle que $(C^{\lambda}_{S,T})^* = C^{\lambda}_{T,S}$.*

(C3) : *Si $\lambda \in \Lambda$ et $S,\ T \in M(\lambda)$, pour tout $a \in A$,*

$$C^{\lambda}_{S,T}\, a \ \equiv \sum_{T' \in M(\lambda)} r_a(T', T) C^{\lambda}_{S,T'} \qquad (\text{mod } A(<\lambda)),$$

où $r_a(T', T) \in R$ est indépendant de S et $A(<\lambda)$ est le sous-module sur R de A engendré par $\{C^{\mu}_{S'',T''}\ ;\ \mu < \lambda\ ,\ S'', T'' \in M(\mu)\}$.

Remarque : En utilisant l'involution $*$, il est facile de voir comment un élément de A agit à gauche sur les éléments de la base cellulaire.

Fixons une algèbre cellulaire A de donnée cellulaire $(\Lambda, M, *, C)$, comme dans la Définition - Notation 3.1.1.

Les axiomes **(C1)**, **(C2)** et **(C3)** permettent de construire des modules qui jouent un rôle important dans la théorie des représentations de ces algèbres.

Définition - Notation 3.1.2 *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, définissons le module à droite C_λ comme suit : C_λ est le R-module libre de base $\{C_S^\lambda ; S \in M(\lambda)\}$ et l'action de A est définie par*

$$C_T^\lambda a = \sum_{T' \in M(\lambda)} r_a(T', T) C_{T'}^\lambda, \quad a \in A,\ T \in M(\lambda), \tag{3.1.1}$$

où $r_a(T', T)$ est l'élément déterminé selon **(C3)**. *Ce module C_λ est appelé le* module cellulaire *de A correspondant à $\lambda \in \Lambda$.*

Soit $\lambda \in \Lambda$. Quelques calculs reposant sur la propriété **(C3)** montrent que, pour tout S_1, S_2, T_1, $T_2 \in M(\lambda)$, il existe un élément $r(T_1, S_2) \in R$ indépendant de S_1 et T_2 tel que

$$C_{S_1,T_1}^\lambda C_{S_2,T_2}^\lambda \equiv r(T_1, S_2) C_{S_1,T_2}^\lambda \pmod{A(<\lambda)}.$$

Ce résultat permet d'introduire des formes bilinéaires sur les modules cellulaires.

Définition - Notation 3.1.3 *Soit $\lambda \in \Lambda$, définissons l'application bilinéaire* $f_\lambda : \begin{array}{ccc} C_\lambda \times C_\lambda & \to & R \\ (C_S^\lambda, C_T^\lambda) & \mapsto & r(S,T) \end{array}$, *pour $S,\ T \in M(\lambda)$.*

Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la forme f_λ est symétrique et si $x,\ y \in C_\lambda$ et $a \in A$, alors $(xa, y)f_\lambda = (x, ya^*)f_\lambda$.

Nous supposons désormais que R est un corps.

La dernier résultat sur f_λ permet de définir un nouveau module sur A.

Définition - Notation 3.1.4 *Soit $\lambda \in \Lambda$. Notons*

$$\mathrm{rad}_\lambda := \{x \in C_\lambda \mid \text{pour tout } y \in C_\lambda,\ (x,y)f_\lambda = 0\}.$$

Soit Λ^0 l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ tels que $f_\lambda \neq 0$. Pour tout $\lambda \in \Lambda^0$, définissons le module quotient (non nul) $L_\lambda := C_\lambda/\mathrm{rad}_\lambda$.

Soit $\lambda \in \Lambda^0$. Le module L_λ est absolument simple et rad_λ est en fait le radical du module sur A, C_λ (i.e. le sous-module minimal V

de C_λ tel que le quotient C_λ/V est semi-simple).

La dernière notion considérée ici est la notion de matrice de décomposition cellulaire. Elle permet de lire les relations entre les modules cellulaires $C_\lambda,\ \lambda \in \Lambda$, et les modules simples $L_\mu,\ \mu \in \Lambda^0$, au sens suivant.

Définition - Notation 3.1.5 *Pour $\lambda \in \Lambda$ et $\mu \in \Lambda_0$, notons $d_{\lambda,\mu}$ la multiplicité de L_μ dans C_λ (comme quotient simple dans la suite de Jordan-Hölder). La matrice $D := (d_{\lambda,\mu})_{\lambda\in\Lambda,\,\mu\in\Lambda^0}$, est appelée la* matrice de décomposition cellulaire *de A.*

3.1.2 Représentation des algèbres cellulaires

Prenons un corps R et une algèbre cellulaire A comme dans la Définition - Notation 3.1.1.

Nous allons donner quelques résultats propres aux algèbres cellulaires.

Théorème 3.1.1 *L'ensemble $\{L_\lambda\ ;\ \lambda \in \Lambda_0\}$ est un ensemble complet de (représentants des classes d'équivalence des) modules absolument simples pour A.*

Une conséquence de ce théorème est que la matrice de décomposition D de A contient toutes les multiplicités des modules simples dans les modules cellulaires. En outre, les nombres de décomposition (cellulaires) satisfont des propriétés particulières.

Proposition 3.1.2 *Pour tous $\lambda \in \Lambda$, $\mu \in \Lambda_0$, les coefficients de la matrice de décomposition D satisfont les relations suivantes :*
$d_{\lambda,\mu} = 0$ *à moins que* $\lambda \leq \mu$,
$d_{\lambda\lambda} = 1$.

Remarque : Choisissons d'indexer les dernières lignes de la matrice D par les éléments de $\Lambda - \Lambda_0$ et d'ordonner les colonnes et les lignes restantes qui leur correspondent, selon un ordre respectant l'ordre partiel de Λ induit sur Λ_0 (si $\mu,\ \nu \in \Lambda_0$ sont comparables alors

μ est l'indice d'une colonne à gauche de celle indexée par ν si $\nu \leq \mu$). La matrice formée est alors unitriangulaire inférieure.

Nous verrons dans le chapitre suivant des relations entre la matrice de décomposition cellulaire et la matrice de décomposition au sens usuel (cf. 2.1.2) d'une algèbre cellulaire. De façon analogue au cas classique, le produit de la matrice de décomposition et de sa transposée est égal à la matrice de Cartan.

Occupons-nous du cas particulier où la matrice de décomposition cellulaire est carrée (unitriangulaire). Commençons par donner la définition d'algèbre quasi-héréditaire introduite par L. Scott dans [76] et reprise par E. Cline, B. Parshall et L. Scott dans [18].

Définition - Notation 3.1.6 *Soit B une algèbre de type fini sur un corps et un ensemble complet $\{L(\lambda)\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ de modules simples non-isomorphes deux à deux, paramétré par un ensemble partiellement ordonné $(\Lambda, \leq)$. L'algèbre B, muni de l'ordre $\leq$, est dite* quasi-héréditaire *si et seulement si, pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un module sur B, $\Delta(\lambda)$, appelé* module standard*, tel que*

1. *il existe une surjection $\phi_\lambda : \Delta(\lambda) \to L(\lambda)$ et les facteurs de composition du noyau sont des modules simples $L(\mu)$ pour des paramètres $\mu \in \Lambda$, $\mu < \lambda$,*
2. *il existe une surjection $\psi_\lambda : P(\lambda) \to \Delta(\lambda)$, $P(\lambda)$ étant la couverture projective de $L(\lambda)$, dont le noyau admet une filtration où les quotients successifs sont des modules standards $\Delta(\mu)$ avec $\mu \in \Lambda$, $\mu > \lambda$.*

À propos d'algèbres quasi-héréditaires, il est possible de consulter aussi [32], ou [33, Annexe].

Nous avons choisi de donner la définition d'une algèbre quasi-héréditaire comme une algèbre dont la catégorie de modules est de plus haut poids (cf. [18], avec des simplifications parce que B est de type fini) plutôt que la définition équivalente faisant intervenir des suites d'idéaux héréditaires ([18, Théorème 3.6]) car c'est cette première forme qui convient naturellement aux algèbres cellulaires dont la matrice de décomposition est carrée.

Lemme 3.1.3 *Si l'algèbre A, munie de la structure cellulaire $(\Lambda, M, C, *)$, admet une matrice de décomposition (cellulaire, unitriangulaire,) carrée, alors A est une algèbre quasi-héréditaire pour l'ordre inverse de Λ.*

Preuve : Choisissons comme ensemble des modules standards, l'ensemble des modules cellulaires. Pour tout $\lambda \in \Lambda = \Lambda_0$, soit ϕ_λ la surjection canonique qui envoie C_λ sur son module quotient $C_\lambda/\mathrm{rad}_\lambda$ qui est isomorphe à L_λ. La matrice de décomposition montre que le noyau de ϕ_λ, qui est le module rad_λ à isomorphisme près, n'admet comme facteurs de composition que des modules simples L_μ pour des paramètres $\mu \in \Lambda_0$, $\mu > \lambda$.

Soit $\lambda \in \Lambda_0$, notons P_λ le module projectif indécomposable associé au module simple L_λ, i.e., P_λ est la couverture projective de L_λ. Montrons qu'il admet une filtration dont les quotients sont des modules cellulaires d'indices $\mu \leq \lambda$.
Le module P_λ satisfait l'isomorphisme de modules sur A :

$$P_\lambda \cong P_\lambda \otimes_A (A \leq \lambda) \text{ ([48, Théorème 3.4])}.$$

En utilisant [48, Lemme 2.9 (i)], il est facile de montrer qu'il existe une suite exacte

$$0 \to P_\lambda \otimes_A (A < \lambda) \to P_\lambda \to P_\lambda(\{\lambda\}) \to 0,$$

où pour tout $\mu \in \Lambda$, $P_\lambda(\{\mu\}) := P_\lambda \otimes_A (C_\mu)^* \otimes_R C_\mu$ et $(C_\mu)^*$ désigne le module à gauche déduit du module cellulaire C_μ en appliquant l'anti-involution *. La partie (ii) de ce même lemme affirme que $P_\lambda \otimes_A (A < \lambda)$ admet une filtration dont les quotients de deux membres successifs sont de la forme $P_\lambda(\{\mu\})$ avec $\mu < \lambda$. Par ailleurs, pour tout $\mu \leq \lambda$, le module sur A, $P_\lambda(\{\mu\})$ s'écrit également $\big(P_\lambda \otimes_A (C_\mu)^*\big) \otimes_R C_\mu$, isomorphe à $d_{\mu,\lambda}\, C_\mu$ selon [48, Théorème 3.7 (ii)]. Avec la Proposition 3.1.2, nous en déduisons qu'il existe une surjection $\psi_\lambda : P_\lambda \to C_\lambda$ dont le noyau admet une filtration avec les quotients successifs isomorphes à des modules cellulaires C_μ pour des indices $\mu < \lambda$. L'assertion est vérifiée. ∎

Une forme encore plus simple pour D est la forme diagonale (de coefficients 1 sur la diagonale). C'est un critère de semi-simplicité. En effet, si A est semi-simple, $\Lambda^0 = \Lambda$ et les modules cellulaires sont en fait les modules simples de A.

Théorème 3.1.4 ([48, Théorème 3.8]) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'algèbre A est semi-simple.*
2. *Les modules cellulaires non nuls C_λ, pour $\lambda \in \Lambda$, sont simples et non-équivalents deux à deux.*
3. *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la forme f_λ est non-dégénérée (i.e.* $\mathrm{rad}_\lambda = \{0\}$*).*

3.2 Algèbres cellulaires particulières

Nous allons donner dans cette section des axiomes supplémentaires à ceux déterminant la structure cellulaire. Ils permettront de construire d'autres algèbres cellulaires possédant les mêmes propriétés.

3.2.1 Propriétés supplémentaires

Soient R un anneau commutatif unitaire intègre et A une R-algèbre munie d'une structure cellulaire $(\Lambda, M, C, *)$.

Définition - Notation 3.2.1 *L'algèbre A est* fortement cellulaire *si A satisfait les conditions suivantes.*

(C4) : *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $S^\lambda \in M(\lambda)$ (fixé) et des éléments $a_S \in A$, pour tout $S \in M(\lambda)$, tels que*

$$a^*_{S_1} C^\lambda_{S^\lambda, S^\lambda} a_{S_2} = C^\lambda_{S_1,S_2}, \text{ pour tout } S_1,\ S_2 \in M(\lambda).$$

(C5) : *Pour tout $\lambda,\ \mu \in \Lambda$, il existe un ensemble $I(\lambda,\mu)$ (peut-être vide) et pour chaque $I \in I(\lambda,\mu)$, un ensemble $M(I,\lambda,\mu) \subseteq M(\lambda)$ tels que*

- **(a)** *si $\lambda',\ \mu' \in \Lambda$ alors $I(\lambda',\mu') \cap I(\lambda,\mu) = \emptyset$ quand $(\lambda',\mu') \neq (\lambda,\mu)$, et si $I \in I(\lambda,\mu)$ et $I' \in I(\lambda,\mu')$ alors $M(I,\lambda,\mu) \cap M(I',\lambda,\mu') = \emptyset$ quand $(I,\mu) \neq (I',\mu')$;*
- **(b)** *$I(\lambda,\lambda)$ est un singeleton noté $\{I^\lambda\}$ et $M(I^\lambda,\lambda,\lambda) = \{S^\lambda\}$;*
- **(c)** *pour tout $T \in M(\lambda)$, $I \in I(\lambda,\mu)$,*

$$C^\lambda_{I,T} := \sum_{S \in M(I,\lambda,\mu)} C^\lambda_{S,T}$$

appartient à $M_\mu := C^\mu_{S^\mu,S^\mu} A$;

(d) *l'ensemble*

$$\{C^{\nu}_{I,T}\,;\, \nu \in \Lambda \mid I(\nu,\mu) \neq \emptyset,\, I \in I(\nu,\mu),\, T \in M(\nu)\}$$

est une R-base de M_μ.

(C6) : *Si N est un idéal à droite de A, pour tout $\lambda \in \Lambda$, les R-modules* $\mathrm{Hom}_A(C^{\lambda}_{S^\lambda,S^\lambda}A, N)$ *et* $AC^{\lambda}_{S^\lambda,S^\lambda} \cap N$ *sont canoniquement isomorphes (par l'application d'évaluation en $C^{\lambda}_{S^\lambda,S^\lambda}$).*

Remarque : Les conditions **(C4)** et **(C5)** sont encore de type combinatoire. La condition **(C6)** imite une propriété satisfaite par les idempotents.

Définition - Notation 3.2.2 *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit le module sur A :*

$$M_\lambda := C^{\lambda}_{S^\lambda,S^\lambda}A.$$

Définition - Notation 3.2.3 *L'algèbre A est dite* très fortement cellulaire *si A est une algèbre fortement cellulaire vérifiant en plus la condition :*

(C7) : *il existe θ, élément maximal dans Λ, tel que $C^{\theta}_{S^\theta,S^\theta} = 1$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$, $I(\lambda,\theta) = \{I_S\,;\, S \in M(\lambda)\}$ et $M(I_S,\lambda,\theta) = \{S\}$.*

Le but de la fin de ce chapitre est de montrer que si A est une algèbre fortement cellulaire, alors l'algèbre $A' := \mathrm{End}_A\big(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\big)$ est une algèbre cellulaire quasi-héréditaire. Si A est très fortement cellulaire alors A' l'est aussi. Nous comparerons alors leur matrice de décomposition.

Nous appliquerons ensuite cette structure axiomatique à une algèbre de Ariki-Koike. L'algèbre d'endomorphismes A' représente alors une q-algèbre de Schur cyclotomique selon la définition de [28].

3.2.2 Conséquences des propriétés supplémentaires

Conséquences de (C4)

Fixons un corps commutatif R et une R-algèbre A cellulaire pour la donnée $(\Lambda, M, C, *)$ qui vérifie la condition **(C4)**. Nous allons montrer que les modules cellulaires sont cycliques.

Fixons également un élément $\lambda \in \Lambda$. L'ensemble $(A < \lambda)$ est un module sur R mais aussi un module (à droite) sur A, d'après la propriété **(C3)**. Notons $\pi : A \to A/(A < \lambda)$ la surjection canonique.

Soit $S \in M(\lambda)$. Les éléments $(C^{\lambda}_{S,T})\pi$, pour T variant dans $M(\lambda)$, sont R-linéairement indépendants. Selon les formules de **(C3)** et de la Définition - Notation 3.1.2 des modules cellulaires, l'application

$$\begin{array}{rcl} < (C^{\lambda}_{S,T})\pi \,;\, T \in M(\lambda) >_R & \to & C_\lambda \\ (C^{\lambda}_{S,T})\pi & \mapsto & C^{\lambda}_{T} \end{array} \qquad (3.2.1)$$

est un isomorphisme de modules sur A.

Considérons le cas où S est choisi égal à S^λ. La condition **(C3)** montre que $(M_\lambda)\pi \subseteq < (C^{\lambda}_{S,T})\pi \,;\, T \in M(\lambda) >_R$. Par **(C4)**, cette inclusion est une égalité. Les modules $(M_\lambda)\pi$ et C_λ sont donc isomorphes et le module cellulaire associé à λ est cyclique puisque $(M_\lambda)\pi \cong (C^{\lambda}_{S^\lambda,S^\lambda})\pi A$.

Conséquences de (C5)

Supposons que la R-algèbre A, choisie comme précédemment, vérifie aussi la condition **(C5)**.

Fixons $\mu \in \Lambda$.

Les éléments de la base de M_μ donnée en **(d)** sont les $C^{\nu}_{I,T}$ pour les $\nu \in \Lambda$ tels que $I(\nu, \mu) \neq \emptyset$, $I \in I(\nu, \mu)$ et $T \in M(\nu)$. En choisissant $\nu = \mu$, la condition (b) montre que $C^{\mu}_{S^\mu,S^\mu}$ est l'un de ces éléments.

Selon la propriété **(C3)**, M_μ est contenu dans $(A \leq \mu)$, $\big($rappelons que $(A \leq \mu)$ est le module sur A dont une base sur R est formée des éléments $C^{\lambda}_{S,T}$, avec $\lambda \leq \mu$, S, $T \in M(\lambda)\big)$. En comparant avec la base donnée en **(d)**, il vient que si $\nu \in \Lambda$ est tel que $I(\nu, \mu) \neq \emptyset$, alors $\nu \leq \mu$.

Conséquences de (C6)

Avec **(C6)**, il est immédiat que

$$\text{pour tous } \lambda,\ \mu \in \Lambda,\ \mathrm{Hom}_A(M_\lambda, M_\mu) \cong M_\mu \cap M_\lambda^*. \tag{3.2.2}$$

Remarques :
1. La condition **(C6)** dit que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $C^\lambda_{S^\lambda,S^\lambda}$ se comporte comme un idempotent de A. Ceci n'est pas surprenant puisque

$$(C^\lambda_{S^\lambda,S^\lambda})^2 = (C^\lambda_{S^\lambda}, C^\lambda_{S^\lambda}) f_\lambda C^\lambda_{S^\lambda,S^\lambda} \quad (\mathrm{mod}\ (A < \lambda)).$$

2. Cette propriété implique aussi que tous les éléments de $\mathrm{Hom}_A(M_\lambda, I)$, pour $\lambda \in \Lambda$ et I idéal (à droite) de A, sont donnés par mutiplication à gauche d'un élément de A.
En effet, soit $h \in \mathrm{Hom}_A(M_\lambda, I)$. Il existe $a \in A$ tel que $(C^\lambda_{S^\lambda,S^\lambda})h = aC^\lambda_{S^\lambda,S^\lambda}$ puisque l'image de h est contenue dans $AC^\lambda_{S^\lambda,S^\lambda}$. Alors, pour tout $x = C^\lambda_{S^\lambda,S^\lambda}a' \in M_\lambda$, $(x)h = (C^\lambda_{S^\lambda,S^\lambda})ha'$ soit ax. L'application h est la multiplication à gauche par a.

Conséquences de (C7)

Supposons que A est une algèbre très fortement cellulaire. Tout élément de la base cellulaire $C^\lambda_{S,T}$ appartient au module $(A \leq \theta)$ car A est égal à $C^\theta_{S^\theta,S^\theta}A$ soit à M_θ. Par conséquent, Λ admet un unique élément maximal θ.

3.2.3 L'algèbre $\mathrm{End}_A(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)$, A fortement cellulaire

Le but de cette partie est de prouver le

Théorème 3.2.1 *Soit R un anneau commutatif unitaire et A une R-algèbre fortement cellulaire dont les caractéristiques seront notées comme en* **(C1)**-**(C6)**. *La R-algèbre A', opposée de l'algèbre $\mathrm{End}_A(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)$, est une algèbre fortement cellulaire, quasi-héréditaire.*

La multiplication de l'algèbre

$$A' := \big(\mathrm{End}_A(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)\big)^{op}$$

sera notée $\circ_{op}$. Si $\phi,\ \psi \in A'$ et $x \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, $(x)(\phi \circ_{op} \psi) := (x)(\psi \circ \phi)$ soit $\big((x)\psi\big)\phi$.

Conservons les hypothèses et notations de l'énoncé du théorème dans la suite de cette partie et démontrons-le.

A' est une algèbre cellulaire

Commençons par une définition.

Définition - Notation 3.2.4 *Pour tout $\lambda,\ \mu,\ \nu \in \Lambda,\ I \in I(\lambda,\mu)$ et $J \in I(\lambda,\nu)$, soit*

$$C^\lambda_{I,J} := \sum_{\substack{S \in M(I,\lambda,\mu),\\ T \in M(J,\lambda,\nu)}} C^\lambda_{S,T}.$$

Remarque : Par définition, $C^\lambda_{I,J}$ est égal à la somme $\sum_{T\in M(J,\lambda,\nu)} C^\lambda_{I,T}$ donc appartient à M_μ d'après **(C5)**. Ainsi, ${C^\lambda_{I,J}}^* = C^\lambda_{J,I} \in M_\nu$ et $C^\lambda_{I,J} \in M_\mu \cap {M_\nu}^*$. En fait,

Lemme 3.2.2 *Pour tout $\mu,\ \nu \in \Lambda$, les éléments (non nuls) $C^\lambda_{I,J}$ où $I \in I(\lambda,\mu),\ J \in I(\lambda,\nu)$ et $\lambda \in \Lambda$, forment une base de $M_\mu \cap {M_\nu}^*$.*

Preuve : Les $C^\lambda_{I,J}$ (non nuls) sont linéairement indépendants. En effet, soient des éléments $r^\lambda_{I,J} \in R$ pour I, J, λ comme dans l'énoncé, tels que $\sum r^\lambda_{I,J} C^\lambda_{I,J} = 0$, où dans la somme $\lambda \in \Lambda$, $I \in I(\lambda,\mu)$ et $J \in I(\lambda,\nu)$. Alors la somme $\sum r^\lambda_{I,S} C^\lambda_{I,S} = 0$ est aussi nulle, où $\lambda \in \Lambda$, $I \in I(\lambda,\mu)$, $S \in M(J,\lambda,\nu)$ pour J variant dans $I(\lambda,\nu)$ et $r^\lambda_{I,S} = r^\lambda_{I,J}$ si $S \in M(J,\lambda,\nu)$. D'après la condition **(a)** de **(C5)**, $S \in M(\lambda)$

appartient au plus à un ensemble $M(J, \lambda, \nu)$. La condition **(d)** permet de conclure.

À présent, montrons que les $C^{\lambda}_{I,J}$ engendrent $M_\mu \cap {M_\nu}^*$. Soit $h \in M_\mu \cap {M_\nu}^*$. Dans la base cellulaire, h s'écrit $\sum r^{\lambda}_{S,T} C^{\lambda}_{S,T}$ où dans la somme $\lambda \in \Lambda,\ S, T \in M(\lambda)$, pour certains $r^{\lambda}_{S,T} \in R$. Comme $h \in M_\mu$, les conditions **(a)** et **(d)** de **(C5)** impliquent que h s'écrit sous la forme $\sum r^{\lambda}_{I,T} C^{\lambda}_{I,T},\ \lambda \in \Lambda,\ I \in I(\lambda, \mu)$ et $T \in M(\lambda)$, où pour tout $S \in M(I, \lambda, \mu),\ r^{\lambda}_{S,T} = r^{\lambda}_{I,T}$. De même, $h^* \in M^\nu$. Un raisonnement analogue permet d'écrire h comme combinaison R-linéaire de $C^{\lambda}_{I,J}$ où $I \in I(\lambda, \mu),\ J \in I(\lambda, \nu)$ et $\lambda \in \Lambda$. ∎

Après nous être intéressés à une base de $M_\mu \cap {M_\nu}^*$, pour $\mu,\ \nu \in \Lambda$, passons à la base cellulaire de A'.

Définition - Notation 3.2.5 *Pour tous $\lambda,\ \mu,\ \nu \in \Lambda,\ I \in I(\lambda, \mu)$ et $J \in I(\lambda, \nu)$, soit $\phi^{\lambda}_{I,J} \in \mathrm{Hom}_A(M_\nu, M_\mu)$ l'homomorphisme sur A déterminé par sa valeur en $C^{\nu}_{S^\nu, S^\nu}$:*

$$(C^{\nu}_{S^\nu, S^\nu})\phi^{\lambda}_{I,J} = C^{\lambda}_{I,J}.$$

En étendant $\phi^{\lambda}_{I,J}$ en l'application nulle sur M_α, pour $\alpha \in \Lambda,\ \alpha \neq \nu$, $\phi^{\lambda}_{I,J}$ devient un élément de A' .

En tant que module sur R, A' est isomorphe à $\bigoplus_{\mu,\nu \in \Lambda} \mathrm{Hom}_A(M_\nu, M_\mu)$. En outre, pour tout $\nu,\ \mu \in \Lambda$, l'application d'évaluation en $C^{\nu}_{S^\nu, S^\nu}$ fournit un R-isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_A(M_\nu, M_\mu)$ et ${M_\nu}^* \cap M_\mu$. Par le Lemme 3.2.2, il est clair que les $\phi^{\lambda}_{I,J}$, pour $\lambda,\ \mu,\ \nu \in \Lambda,\ I \in I(\lambda, \mu)$ et $J \in I(\lambda, \nu)$, forment une base de A'.

Notons les caractéristiques cellulaires de A' comme celles de A mais en y ajoutant un $'$. Alors,

$\Lambda' = \Lambda$,
pour tout $\lambda \in \Lambda$, $M'(\lambda) = \bigcup_{\mu \in \Lambda} I(\lambda, \mu)$,
pour $I,\ J \in M'(\lambda)$, ${C'}^{\lambda}_{I,J}$ est l'élément $\phi^{\lambda}_{I,J} \in A'$.

Avec ces notations, l'algèbre A' vérifie la condition **(C1)**. Passons à la condition **(C2)**.

Soit $^{*'}$ le R-automorphisme de A' défini par linéarité sur la base comme suit. Pour tout $\lambda \in \Lambda,\ I,\ J \in M'(\lambda)$, ${\phi^{\lambda}_{I,J}}^{*'} := \phi^{\lambda}_{J,I}$.

Grâce au lemme suivant, A' vérifie la propriété **(C2)**.

Lemme 3.2.3 *L'application $^{*'}$ est un anti-automorphisme de A'.*

Preuve : Dans un souci d'exhaustivité, nous donnons la preuve de ce lemme qui est une adaptation des preuves de [28, Proposition 6.9, Lemme 6.10] au cadre axiomatique déterminé par les conditions **(C4)**, **(C5)**, **(C6)**.

Remarquons d'abord que pour tout $\lambda,\ \mu,\ \nu \in \Lambda,\ I \in I(\lambda,\mu),\ J \in I(\lambda,\nu)$, $(C^{\mu}_{S^\mu,S^\mu})\phi^{\lambda}_{I,J}{}^{*'} = C^{\lambda}_{J,I} = \big((C^{\nu}_{S^\nu,S^\nu})\phi^{\lambda}_{I,J}\big)^*$. Par R-linéarité, pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}_A(M_\nu, M_\mu)$, $\phi^{*'}$ est déterminé par sa valeur en $C^{\mu}_{S^\mu,S^\mu}$ donnée par

$$(C^{\mu}_{S^\mu,S^\mu})\phi^{*'} = \big((C^{\nu}_{S^\nu,S^\nu})\phi\big)^*. \tag{3.2.3}$$

Soient $\lambda,\ \mu,\ \nu \in \Lambda$ et deux homomorphismes $\phi \in \mathrm{Hom}_A(M_\nu, M_\mu)$ et $\psi \in \mathrm{Hom}_A(M_\mu, M_\lambda)$. Pour établir le lemme, il suffit de prouver que

$$(C^{\lambda}_{S^\lambda,S^\lambda})(\phi\circ\psi)^{*'} = (C^{\lambda}_{S^\lambda,S^\lambda})(\psi^{*'}\circ\phi^{*'}).$$

Selon la propriété **(C6)**, il existe $a \in A$, resp. $b \in A$, tel que $(C^{\nu}_{S^\nu,S^\nu})\phi = a\,C^{\nu}_{S^\nu,S^\nu}$, resp. $(C^{\mu}_{S^\mu,S^\mu})\psi = b\,C^{\mu}_{S^\mu,S^\mu}$. Par (3.2.3), $(C^{\lambda}_{S^\lambda,S^\lambda})(\phi\circ\psi)^{*'} = \big((C^{\nu}_{S^\nu,S^\nu})\phi\circ\psi\big)^*$ soit $(b\,a\,C^{\nu}_{S^\nu,S^\nu})^*$ d'après la seconde remarque concernant de la condition **(C6)**. Cette dernière expression est encore égale à $(C^{\mu}_{S^\mu,S^\mu})\phi^{*\prime}b^*$ avec (3.2.3) ou encore $\Big(\big((C^{\mu}_{S^\mu,S^\mu})\psi\big)^*\Big)\phi^{*'}$ par A-linéarité. L'utilisation, à nouveau de (3.2.3), permet de conclure. ∎

Traitons à présent la condition **(C3)**.

Pour cela, il suffit de considérer les compositions du type $\phi^{\lambda'}_{I',J'} \circ_{op} \phi^{\lambda}_{I,J}$ soit $\phi^{\lambda}_{I,J}\circ\phi^{\lambda'}_{I',J'}$ pour $\lambda,\ \lambda',\ \mu,\ \mu',\ \nu \in \Lambda,\ I \in I(\lambda,\mu'),\ J \in I(\lambda,\mu)$, $I' \in I(\lambda',\nu)$ et $J' \in I(\lambda',\mu')$. Soient deux tels morphismes. Rappelons que $\phi^{\lambda}_{I,J}$, resp. $\phi^{\lambda'}_{I',J'}$, est nulle sur tous les facteurs de $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ sauf sur M_μ, resp. $M_{\mu'}$, et prend ses valeurs dans $M_{\mu'}$, resp. M_ν. Pour connaître $\phi^{\lambda}_{I,J}\circ\phi^{\lambda'}_{I',J'}$, il suffit de connaître la valeur de la composition en $C^{\mu}_{S^\mu,S^\mu}$, par linéarité sur A. Soit $a \in A$ tel que $(C^{\mu}_{S^\mu,S^\mu})\phi^{\lambda}_{I,J} = C^{\mu'}_{S^{\mu'},S^{\mu'}}a$. Par

définition de $\phi^{\lambda'}_{I',J'}$,

$$(C^{\mu}_{S^\mu,S^\mu})(\phi^{\lambda}_{I,J} \circ \phi^{\lambda'}_{I',J'}) = C^{\lambda'}_{I',J'}a.$$

Par la propriété **(C6)**, $\phi^{\lambda}_{I,J} \circ \phi^{\lambda'}_{I',J'}$ est à valeurs dans $M_\nu \cap M^*_\mu$. En utilisant les conditions **(C3)** et **(C5)(d)**, il vient facilement que

$$C^{\lambda'}_{I',J'}a \equiv \sum r_a(T',T)C^{\lambda'}_{I',T'} \pmod{(A < \lambda')},$$

la somme se faisant sur les $T \in M(J',\lambda',\mu')$ et $T' \in M(\lambda')$. En comparant avec la base décrite dans le Lemme 3.2.2, si $U \in I(\lambda',\mu)$, la somme $\sum_{T\in M(J',\lambda',\mu')} r_a(T',T)$ est la même quel que soit $T' \in M(U,\lambda',\mu)$. Notons cette valeur $r_a(U)$. Remarquons que $r_a(U)$ est indépendant de I'. Écrivons $C^{\lambda'}_{I',J'}a = \sum_{U\in I(\lambda',\mu)} r_a(U)C^{\lambda'}_{I',U} + c$ où c est une combinaison R-linéaire de $C^{\alpha}_{V,W}$, $\alpha \in \Lambda$, $\alpha < \lambda'$ et $V \in I(\alpha,\nu)$, $W \in I(\alpha,\mu)$. En rappelant que $(A' < \lambda')$ est le sous-module sur R de A' engendré par les $\phi^{\beta}_{-,-}$, pour $\beta < \lambda'$, c est la valeur d'un élément de $(A' < \lambda')$ en $C^{\mu}_{S^\mu,S^\mu}$. Finalement,

$$\phi^{\lambda'}_{I',J'} \circ_{op} \phi^{\lambda}_{I,J} = \sum_{U\in I(\lambda',\mu)} r_a(U)\phi^{\lambda}_{I',U} \pmod{(A' < \lambda')}$$

avec des coefficients $r_a(U)$ ne dépendant pas de I'. Ceci permet d'affirmer que A' vérifie la propriété **(C3)**. ∎

L'algèbre A' satisfait les conditions **(C1)**, **(C2)** et **(C3)**. C'est une algèbre cellulaire. Nous avons prouvé une partie du Théorème 3.2.1.

A' est fortement cellulaire

À présent que nous savons que A' est une algèbre cellulaire, nous allons constater que A' vérifie aussi la structure axiomatique supplémentaire **(C4)**, **(C5)** et **(C6)**. Ceci la dote d'une structure d'algèbre fortement cellulaire.

Conservons la convention qui consiste à noter les caractéristiques des algèbres cellulaires avec des $'$ pour A'.

Occupons-nous de la condition **(C4)**.

Commençons par une remarque. Soit $\lambda \in \Lambda$. L'ensemble $M'(\lambda) = \bigcup_{\mu\in\Lambda} I(\lambda,\mu)$ possède un élément spécifique $S'^{\lambda} := I^{\lambda}$. Le A-homomorphisme $\phi^{\lambda}_{I^\lambda,I^\lambda}$ est nul en dehors de M_λ et $\phi^{\lambda}_{I^\lambda,I^\lambda}|_{M_\lambda}$ prend ses valeurs dans M_λ : il envoie $C^{\lambda}_{S^\lambda,S^\lambda}$ sur $C^{\lambda}_{I^\lambda,I^\lambda} = C^{\lambda}_{S^\lambda,S^\lambda}$. L'application $\phi^{\lambda}_{I^\lambda,I^\lambda}$ restreinte à la source et au but à M_λ est donc l'identité de M_λ.

Soient μ, $\nu \in \Lambda$, $I \in I(\lambda,\mu)$ et $J \in I(\lambda,\nu)$. Par définition, $\phi^{\lambda}_{I,I^\lambda} \in \mathrm{Hom}_A(M_\lambda, M_\mu)$, $\phi^{\lambda}_{I^\lambda,J} \in \mathrm{Hom}_A(M_\nu, M_\lambda)$ et $\phi^{\lambda}_{I,I^\lambda} \circ_{op} \phi^{\lambda}_{I^\lambda,J} \in \mathrm{Hom}_A(M_\nu, M_\mu)$. Calculons $(C^{\nu}_{S^\nu,S^\nu})\phi^{\lambda}_{I^\lambda,J} \circ \phi^{\lambda}_{I,I^\lambda}$. C'est égal à $(\sum_{S\in M(J,\lambda,\nu)} C^{\lambda}_{S^\lambda,S})\phi^{\lambda}_{I,I^\lambda}$, soit en utilisant la condition **(C4)** pour A et la linéarité de $\phi^{\lambda}_{I,I^\lambda}$, $C^{\lambda}_{I,I^\lambda} \sum_{S\in M(J,\lambda,\nu)} a_S = C^{\lambda}_{I,J}$. En conclusion,

$$\phi^{\lambda}_{I,I^\lambda} \circ_{op} \phi^{\lambda}_{I^\lambda,I^\lambda} \circ_{op} \phi^{\lambda}_{I^\lambda,J} = \phi^{\lambda}_{I,J}.$$

Pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $I \in M'(\lambda)$, choisissons $a'_I := \phi^{\lambda}_{I^\lambda,I}$. Alors, A' possède la propriété **(C4)**.

Considérons la condition **(C5)**.

Soit $\mu \in \Lambda$. Remarquons que $\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, M_\mu)$ est l'ensemble sous-jacent de ${M'}_\mu = \phi^{\lambda}_{I^\mu,I^\mu} \circ_{op} A'$. Il est alors clair que ${M'}_\mu$ admet les éléments $\phi^{\lambda}_{I,J}$, pour $I \in I(\lambda,\mu)$, $J \in M'(\lambda)$, λ variant dans Λ, comme éléments de base sur R.

Pour tout $\nu, \mu \in \Lambda$, posons $I'(\nu,\mu) := I(\nu,\mu)$ et pour tout $I \in I'(\nu,\mu)$, $M'(I,\nu,\mu) := \{I\}$. Avec ces choix, la condition **(C5)** est remplie pour A'.

Il reste à vérifier la condition **(C6)** avant de conclure que A' est une algèbre fortement cellulaire. C'est immédiat en rappelant que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\phi^{\lambda}_{I^\lambda,I^\lambda}$ est l'identité de M_λ donc est un idempotent de A' (cf. les remarques concernant la condition **(C6)**).

A' est quasi-héréditaire

Nous allons considérer ici le fait que A' est cellulaire. La structure fortement cellulaire ne sera pas utile ici.

Pour affirmer que A' est quasi-héréditaire, il suffit de montrer que la matrice de décomposition cellulaire de A' est carrée grâce au Lemme 3.1.3. Or, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $(C^{\lambda}_{S^\lambda,S^\lambda})\phi^{\lambda}_{I^\lambda,I^\lambda} \circ_{op} \phi^{\lambda}_{I^\lambda,I^\lambda}$ vaut d'une part $C^{\lambda}_{S^\lambda,S^\lambda}$, et d'autre part $(\phi^{\lambda}_{I^\lambda}, \phi^{\lambda}_{I^\lambda}) f'_\lambda \, C^{\lambda}_{S^\lambda,S^\lambda} \pmod{(A < \lambda)}$, où $\phi^{\lambda}_{I^\lambda} := C'^{\lambda}_{I^\lambda}$ est l'élément du module cellulaire C'_λ pour A' associé à λ et f'_λ est la forme bilinéaire associée. Par conséquent, f'_λ est non nulle. Les modules simples pour A' sont indexés par l'ensemble Λ et la matrice de décomposition cellulaire de A' est carrée. C'est ce que nous voulions démontrer.

Nous avons fini de prouver le Théorème 3.2.1. ∎

Une autre description de C'_λ

Suivant une méthode décrite par A. Mathas dans [65], il est possible de donner une autre description des éléments des modules cellulaires C'_λ.

Rappelons que C'_λ est le module cellulaire de A' associé à λ. Comme l'algèbre A' est fortement cellulaire, le commentaire donné dans la partie traitant des conséquences de la condition **(C4)** s'applique. Le module cellulaire C'_λ est isomorphe à $(M'_\lambda)\pi'$ où π' est la surjection canonique de A' sur le module quotient $A'/(A' < \lambda)$ et $M'_\lambda = \phi^{\lambda}_{I^\lambda,I^\lambda} \circ_{op} A'$. C'est un module libre sur R de base $\{(\phi^{\lambda}_{I^\lambda,I})\pi' \,;\, I \in M'(\lambda)\}$.

Identifions $(\phi^{\lambda}_{I^\lambda,I})\pi'$ à ϕ^{λ}_{I} dans la correspondance précédente. L'ensemble $\{\phi^{\lambda}_{I} \,;\, I \in M'(\lambda)\}$ est une R-base de C'_λ.

Soit $I \in M'(\lambda)$. Il existe $\mu \in \Lambda$ tel que $I \in I(\lambda, \mu)$.
Posons $C^{\lambda}_{I} := \sum_{S \in M(I,\lambda,\mu)} C^{\lambda}_{S} \in C_\lambda$.
Soit $\tilde{\phi}^{\lambda}_{I} : \bigoplus_{\nu \in \Lambda} M_\nu \to C_\lambda$ l'homomorphisme sur A déterminé par $(C^{\mu}_{S^\mu,S^\mu})\tilde{\phi}^{\lambda}_{I} = C^{\lambda}_{I}$ et qui s'annule sur les les composantes M_ν, $\nu \neq \mu$.
L'application $\tilde{\phi}^{\lambda}_{I}$ est un élément de $\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{\nu \in \Lambda} M_\nu, C_\lambda)$. Cet ensemble est trivialement un module à droite sur A' grâce à la composition $\circ_{op}$.

Dans le lemme suivant, nous établissons une relation entre les

éléments ϕ_I^λ et $\tilde{\phi}_I^\lambda$, pour $\lambda \in \Lambda$, $I \in M'(\lambda)$. Cela donne une nouvelle description du module cellulaire C'_λ.

Lemme 3.2.4 *Soit $\lambda \in \Lambda$, alors C'_λ et $\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{\mu\in\Lambda} M_\mu, C_\lambda)$ sont isomorphes en tant que modules sur A', par l'application qui associe ϕ_I^λ à $\tilde{\phi}_I^\lambda$, pour $I \in I(\lambda,\mu)$ et $\mu \in \Lambda$.*

Preuve : Soient $M := \bigoplus_{\mu\in\Lambda} M_\mu$ et $M_{<\lambda} := \bigoplus_{\mu\in\Lambda} M_\mu \cap (A < \lambda)$.

Si $\phi \in (A' < \lambda)$ alors $(M)\phi \subseteq M_{<\lambda}$. En effet, soient J_1, $J_2 \in M'(\mu)$ pour $\mu \in \Lambda$, $\mu < \lambda$. Disons que $J_1 \in I(\mu,\alpha)$ et $J_2 \in I(\mu,\beta)$ pour α, $\beta \in \Lambda$. L'application $\phi^\mu_{J_1,J_2} \in A'$ considérée comme un élément de $\mathrm{Hom}_A(M_\beta, M_\alpha)$ (nulle sur les autres composantes de $A' \cong \bigoplus_{\nu_1,\nu_2\in\Lambda} \mathrm{Hom}_A(M_{\nu_1}, M_{\nu_2})$) envoie $C^\beta_{S^\beta,S^\beta}$ sur $C^\mu_{J_1,J_2}$ donc $(M)\phi^\mu_{J_1,J_2} \subseteq C^\mu_{J_1,J_2}A \cap M_\alpha$ ou encore $(M)\phi^\mu_{J_1,J_2} \subseteq (A < \lambda) \cap M$. Les $\phi^\mu_{J_1,J_2}$, pour $\mu \in \Lambda$, $\mu < \lambda$, et J_1, $J_2 \in M'(\mu)$, forment une R-base de $(A' < \lambda)$, l'assertion est prouvée.

Par conséquent, les éléments du quotient $A'/(A' < \lambda)$ peuvent être identifiés à des homomorphismes (de modules sur A) de M dans $M/M_{<\lambda}$: si $\phi \in A'$, $(C^\beta_{S^\beta,S^\beta})\big((\phi)\pi'\big) = \big((C^\beta_{S^\beta,S^\beta})\phi\big)\pi_{M<\lambda}$ pour $\beta \in \Lambda$, $C^\beta_{S^\beta,S^\beta}$ dans la composante M_β de M et $\pi_{M<\lambda}$, la surjection canonique de M sur $M/M_{<\lambda}$. Si $I \in I(\lambda,\mu) \subseteq M'(\lambda)$, alors $(C^\mu_{S^\mu,S^\mu})(\phi^\lambda_{I^\lambda,I})\pi' = (C^\lambda_{I^\lambda,I})\pi_{M<\lambda}$. Or $(M_\lambda + M_{<\lambda})\pi_{M<\lambda}$ est isomorphe à $M_\lambda/\big(M_\lambda \cap (A < \lambda)\big)$ donc à $(M_\lambda)\pi$ et C_λ, π étant la surjection canonique de A sur $A/(A < \lambda)$ $\big($cf. les conséquences de la condition **(C4)**$\big)$. Dans cette correspondance, $(C^\lambda_{I^\lambda,I})\pi_{M<\lambda}$ est associé à C^λ_I. Ainsi, les éléments de $A'/(A' < \lambda)$ s'identifient à des homomorphismes de modules sur A, de M dans C_λ. En prenant aussi en compte la correspondance bijective qui associe ϕ^λ_I et $(\phi^\lambda_{I^\lambda,I})\pi'$, les éléments de C'_λ s'identifient à des homomorphismes de modules sur A, de M dans C_λ. Cette représentation est notée i : $C'_\lambda \to \mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{\mu\in\Lambda} M_\mu, C_\lambda)$. L'application i

$$\phi^\lambda_I \quad \mapsto \quad \tilde{\phi}^\lambda_I$$

qui envoie une base sur une base est bijective. Montrons maintenant que i est un morphisme de modules sur A'.

Soit I comme avant. Il suffit de montrer que si $\phi = \phi^\alpha_{U,V}$ avec α, $\nu \in \Lambda$, $U \in I(\alpha,\mu)$ et $V \in I(\alpha,\nu)$ alors $(C^\nu_{S^\nu,S^\nu})\big((\phi^\lambda_I \circ_{op} \phi)i\big) =$

$(C^{\nu}_{S^\nu,S^\nu})(\tilde{\phi}^\lambda_I \circ_{op} \phi)$. Si $\phi^\lambda_I \circ_{op} \phi$ s'écrit sous la forme

$$\phi^\lambda_I \circ_{op} \phi = \sum_{J\in M'(\lambda)} r_\phi(J,I)\phi^\lambda_J, \tag{3.2.4}$$

i applique $\phi^\lambda_I \circ_{op} \phi$ sur $\sum_{J\in M'(\lambda)} r_\phi(J,I)\tilde{\phi}^\lambda_J$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(C^{\nu}_{S^\nu,S^\nu})\big((\phi^\lambda_I \circ_{op} \phi)i\big) &= (C^{\nu}_{S^\nu,S^\nu}) \sum_{J\in M'(\lambda)} r_\phi(J,I)\tilde{\phi}^\lambda_J \\ &= \sum_{J\in I(\lambda,\nu)} r_\phi(J,I)C^\lambda_J. \end{aligned}\tag{3.2.5}$$

Par ailleurs, par définition de l'action dans les modules cellulaires, l'égalité (3.2.4) implique que

$$\phi^\lambda_{I^\lambda,I} \circ_{op} \phi \equiv \sum_{J\in M'(\lambda)} r_\phi(J,I)\phi^\lambda_{I^\lambda,J} \pmod{A' < \lambda}.$$

En appliquant ces morphismes sur $C^{\nu}_{S^\nu,S^\nu}$, il vient

$$(C^{\alpha}_{U,V})\phi^\lambda_{I^\lambda,I} \equiv \sum_{J\in I(\lambda,\nu)} r_\phi(J,I)C^\lambda_{I^\lambda,J} \pmod{A < \lambda}. \tag{3.2.6}$$

Or il existe $a \in A$ tel que $C^{\alpha}_{U,V} \in M_\mu$ s'écrit $C^{\mu}_{S^\mu,S^\mu}a$. En introduisant cette écriture dans (3.2.6), nous obtenons que

$$C^\lambda_{I^\lambda,I}a \equiv \sum_{J\in I(\lambda,\nu)} r_\phi(J,I)C^\lambda_{I^\lambda,J} \pmod{A < \lambda},$$

soit dans le module cellulaire C_λ,

$$C^\lambda_I a = \sum_{J\in I(\lambda,\nu)} r_\phi(J,I)C^\lambda_J. \tag{3.2.7}$$

Calculons $(C^{\nu}_{S^\nu,S^\nu})\tilde{\phi}^\lambda_I \circ_{op} \phi$. C'est égal à $(C^{\alpha}_{U,V})\tilde{\phi}^\lambda_I$ soit $C^\lambda_I a$. La comparaison des résultats (3.2.5) et (3.2.7) permet de conclure. ∎

3.2.4 Comparaison de A et A', A très fortement cellulaire

Dans cette partie, nous supposerons que A est très fortement cellulaire. En particulier, $M_\theta = C^{\theta}_{S^\theta,S^\theta}A = A$. En outre, la R-algèbre $\mathrm{End}_A(M_\theta, M_\theta)$ munie de la multiplication $\circ_{op}$ est isomorphe à A par

l'application d'évaluation en 1. Par conséquent, A peut être considérée comme une sous-algèbre de A' (non-unitaire) puisque $\mathrm{End}_A(M_\theta, M_\theta)$ s'identifie à $\phi^\theta_{I^\theta,I^\theta} A' \phi^\theta_{I^\theta,I^\theta}$.

Si (R, K, k) est un système p-modulaire neutralisant pour A avec $K \otimes_R A$ semi-simple, la matrice de décomposition de A est une sous-matrice de celle de A' (cf. [49, 6.6], [37, 6.3.2]). Nous allons voir qu'il en est de même pour les matrices de décomposition cellulaires de A et A'. Ce n'est pas surprenant. Soit (R, K, k) comme précédemment. Si les éléments de la base cellulaire de A tensorisés avec 1_K, resp. avec 1_k, forment une base cellulaire pour $K \otimes_R A$, resp. $k \otimes_R A$, alors la matrice de décomposition classique de A est la matrice de décomposition cellulaire de $k \otimes_R A$.

Inclusion des matrices de décomposition

Définition - Notation 3.2.6 *Soit $\Theta := \phi^\theta_{I^\theta,I^\theta}$ l'idempotent de A' qui représente l'identité sur A. Le foncteur de Schur associé est le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{mod}\text{–}A' & \to & \mathrm{mod}\text{–}A \\ V & \mapsto & V\Theta \end{array} .$$

Rappelons que A s'identifie à $\mathrm{End}_A(A, A)$ en faisant correspondre à $a \in A$, la multiplication à gauche $g_a \in \mathrm{End}_A(A, A)$ et $g_a = g_a\Theta = \Theta g_a$. Pour un module V quelconque sur A', A agit sur $V\Theta$, de même ensemble sous-jacent que V, comme suit. Si $v \in V$, $a \in A$, $(v) * a := v.g_a$.

Grâce aux propriétés des foncteurs de Schur (cf. [49, 6.2, 6.6]),

Proposition 3.2.5 *Soient un corps R et une R-algèbre très fortement cellulaire A. Soit $\lambda \in \Lambda$. Il existe des isomorphismes de modules sur A entre ${C'}_\lambda\Theta$ et C_λ ainsi qu'entre ${L'}_\lambda\Theta$ et L_λ.*

De plus, si $\mu \in \Lambda^0$ (i.e. $\mathrm{rad}_\mu \neq C_\mu$) alors les multiplicités de ${L'}_\mu$ dans ${C'}_\lambda$ et de L_μ dans C_λ sont égales.

Preuve : Identifions ${C'}_\lambda$ et $\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{\mu\in\Lambda} M_\mu, C_\lambda)$ (Lemme 3.2.4). Il est facile de voir que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'ensemble $\{\tilde{\phi}^\lambda_I ; I \in I(\lambda, \theta)\}$ est une base de ${C'}_\lambda\Theta$. Avec les notations de la condition **(C7)**, l'application

d'évaluation en $1 = C^{\theta}_{S^\theta,S^\theta}$, de $C'_\lambda\Theta$ dans C_λ, envoie $\tilde{\phi}^\lambda_{I_S}$ sur C^λ_S, pour $S \in M(\lambda)$. Transformant une base en une base, elle est bijective. La linéarité sur A vient facilement car pour tout $S \in M(\lambda)$, $a \in A$, $\tilde{\phi}^\lambda_{I_S}.a = \tilde{\phi}^\lambda_{I_S} \circ_{op} g_a$ évalué en 1 vaut $(1)\tilde{\phi}^\lambda_{I_S}.a$. Le premier isomorphisme de la proposition est démontré.

Soient $\lambda \in \Lambda$, $S, T \in M(\lambda)$ (de sorte que I_S, $I_T \in I(\lambda, \theta)$). Par définition de la forme bilinéaire symétrique f'_λ,

$$\phi^\lambda_{I^\lambda,I_S} \circ_{op} \phi^\lambda_{I_T,I^\lambda} \equiv (\tilde{\phi}^\lambda_{I_S}, \tilde{\phi}^\lambda_{I_T}) f'_\lambda \ \phi^\lambda_{I^\lambda,I^\lambda} \pmod{(A'<\lambda)}. \qquad (3.2.8)$$

Appliquons chaque membre de la congruence à $C^\lambda_{S^\lambda,S^\lambda}$.
Le membre de droite donne $(\tilde{\phi}^\lambda_{I_S}, \tilde{\phi}^\lambda_{I_T}) f'_\lambda \ C^\lambda_{S^\lambda,S^\lambda} \pmod{(A < \lambda)}$ car les éléments de $(A' < \lambda)$ envoient A sur $(A < \lambda)$ (voir la preuve du Lemme 3.2.4).
Pour la composition dans le membre de gauche de la congrüence (3.2.8), $\big((C^\lambda_{S^\lambda,S^\lambda})\phi^\lambda_{I_T,I^\lambda}\big)\phi^\lambda_{I^\lambda,I_S}$ est égal à $(1.C^\lambda_{T,S^\lambda})\phi^\lambda_{I^\lambda,I_S}$, soit par linéarité sur A, $C^\lambda_{S^\lambda,S}C^\lambda_{T,S^\lambda}$. En utilisant à nouveau la définition de f_λ, ce dernier terme est congrü à $(C^\lambda_S, C^\lambda_T) f_\lambda \ C^\lambda_{S^\lambda,S^\lambda}$ modulo $(A<\lambda)$.

En comparant les deux images obtenues, il vient que $(\tilde{\phi}^\lambda_{I_S}, \tilde{\phi}^\lambda_{I_T}) f'_\lambda = (C^\lambda_S, C^\lambda_T) f_\lambda$. Les éléments de $C'_\lambda\Theta \cap \mathrm{rad}'_\lambda$ appliqués en 1 donnent les éléments de rad_λ. En utilisant le premier résultat, il est clair que $L'_\lambda\Theta$ et L_λ sont isomorphes sur A.

La dernière assertion du théorème provient de ce qui précède et des propriétés du foncteur de Schur Θ (cf. [49, 6.6.b], utilisant des suites de composition). ∎

A présent, passons à une autre propriété vérifiée par A et A' quand A est très fortement cellulaire.

Propriété du double commutant

Posons $M := \bigoplus_{\mu\in\Lambda} M^\mu$. La multiplication sur A'^{op} étant la composition $\circ$, M est muni canoniquement d'une structure de module à droite sur A'^{op}. Si $\phi \in A'$ et $m \in M$, $m.\phi := (m)\phi$. Clairement, M est aussi un module à droite sur A et les deux actions commutent. La proposition suivante donne une propriété de double commutant. C'est une adaptation du dernier paragraphe de [65, chapitre 4] à la structure axiomatique déterminée par les conditions **(C1)** à **(C6)** .

Proposition 3.2.6 *Supposons que A est une algèbre très fortement cellulaire. Alors*

$$A' \cong \mathrm{End}_A(\bigoplus_{\mu\in\Lambda} M^\mu) \text{ et } A \cong \mathrm{End}_{A'^{op}}(\bigoplus_{\mu\in\Lambda} M^\mu).$$

Preuve : Le premier isomorphisme est la définition de A'. Montrons le deuxième isomorphisme.

Par l'évaluation en 1, $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ est isomorphe à M, en tant que modules sur A'^{op}, et il est clair que $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ est égal à $\phi^\theta_{I^\theta,I^\theta} \circ A'$. Ainsi, les algèbres $\mathrm{End}_{A'^{op}}(M)$ et $\phi^\theta_{I^\theta,I^\theta} \circ A' \circ \phi^\theta_{I^\theta,I^\theta} \cong A$ sont isomorphes, par propriété des idempotents. Nous avons obtenu les deux isomorphismes duaux. ∎

3.2.5 Application

Choisissons comme algèbre cellulaire A une algèbre de Ariki-Koike $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{Q}}_{r,n}(R)$, pour un anneau commutatif, intègre, (voir la Définition - Notation 4.1.3 au chapitre suivant). Les résultats cités, par exemple, dans [66], permettent de vérifier rapidement que A est dotée d'une structure d'algèbre très fortement cellulaire. Décrivons dans ce cas particulier, certains des paramètres apparaissant dans les conditions **(C1)** à **(C7)** .

L'ensemble Λ est l'ensemble des r-multipartitions de n muni de l'ordre de dominance.
Pour toute r-multipartition λ de n, $M(\lambda)$ est l'ensemble des λ-tableaux standards.
Si μ est une autre r-multipartition, $I(\lambda, \mu)$ représente l'ensemble des λ-tableaux semi-standards de type μ.
Si cet ensemble est non-vide et S est un tel tableau, l'ensemble $M(S, \lambda, \mu)$ consiste en les λ-tableaux standards $\mathfrak{s}$ vérifiant $\mu(\mathfrak{s}) = S$ (avec les notations de [28]).
La r-multipartition $\theta = (0, \ldots, 0, (1)^n)$ est minimale pour l'ordre de dominance. Pour λ comme précédemment, l'ensemble des λ-tableaux de type θ s'identifie clairement aux λ-tableaux standards.

Pour ce choix spécifique où A est l'algèbre $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{Q}}_{r,n}(R)$, l'algèbre d'endomorphismes A' est une q-algèbre de Schur.

Cet exemple illustre l'intérêt de la structure axiomatique introduite dans ce chapitre.

Chapitre 4

Algèbres de Hecke, algèbres de Schur

Dans ce chapitre, nous appliquons le théorème principal du chapitre 2 à deux types d'algèbres : certaines algèbres de Ariki-Koike et des q-algèbres de Schur de type B. Ce sont des algèbres cellulaires. Leur matrice de décomposition est unitriangulaire. Nous en déduisons que les algèbres de Hecke associées à des groupes de réflexions complexes $G(r, f, n)$ et que les q-algèbres de Schur de type D, pour certains paramètres, admettent aussi des matrices de décomposition unitriangulaires.

4.1 Algèbres de Hecke

4.1.1 Rappels

Groupes de réflexions complexes

Faisons quelques rappels sur ces groupes ([74], [2], [51]).

Définition - Notation 4.1.1 *Soient trois entiers positifs r, f et n, f divisant r. Soit ω une racine primitive complexe r-ième de l'unité. Elle engendre le groupe μ_r des racines complexes r-ièmes de l'unité. Notons $\mu_r^n(f)$ le sous-groupe de $(\mu_r)^n$, identifié à l'ensemble des n-uplets dont le produit des composantes est une racine $\frac{r}{f}$-ième de l'unité. Le groupe $G(r, f, n)$ est le produit semi-direct $\mathfrak{S}_n \ltimes \mu_r^n(f)$. Le groupe de permutation $\mathfrak{S}_n$ agit sur $(\mu_r)^n$ et sur ses sous-groupes de type $\mu_r^n(f)$ de façon classique : si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i_1, \ldots, i_n \in [0, r-1]$, alors*

$$(\omega^{i_1}, \ldots, \omega^{i_n}) * \sigma = (\omega^{i_{(1)\sigma^{-1}}}, \ldots, \omega^{i_{(n)\sigma^{-1}}}). \tag{4.1.1}$$

Remarques :

1. En particulier, pour le choix $d = 1$, $G(r, 1, n)$ est isomorphe au groupe produit en couronne $\mu_r \wr \mathfrak{S}_n$.

2. Dans le cas particulier où $r = 2$, $G(2, 1, n)$ est un groupe de type B et $G(2, 2, n)$ est un groupe de type D.

3. Le groupe de réflexions complexes $G(r, f, n)$ s'identifie au groupe des matrices monomiales carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans μ_r telles que le produit des coefficients non nuls est une racine $\frac{r}{f}$-ième de l'unité.

Définition - Notation 4.1.2 *Soient T_1, le n-uplet dont toutes les composantes sont égales à 1 sauf la première égale à ω, et T_i la transposition $(i-1, i)$, pour tout $i \in [2, n]$, considérés comme éléments de $G(r, 1, n)$.*

Le groupe $G(r, f, n)$ est engendré par les éléments T_1^f, $(T_1 * T_2)T_1^{-1}$ et T_i, pour $i \in [2, n]$.

La condition sur le produit des coefficients implique clairement que l'algèbre B d'un groupe de type $G(r, f, n)$, s'identifie à une sous-algèbre qui gradue l'algèbre A d'un groupe de type $G(r, 1, n)$ par un groupe cyclique d'ordre f. La graduation prend la forme :

$$A = B \oplus T_1 B \oplus \ldots \oplus T_1^{f-1} B, \tag{4.1.2}$$

où de façon immédiate, T_1 est une unité de A satisfaisant $T_1 B = B T_1$ et $T_1^f \in B$.

Algèbres de Hecke associées à des groupes de réflexions complexes

Définition - Notation 4.1.3 *Soient d, f, n, des entiers naturels non nuls, $r := df$.*
Soient R un anneau intègre, q une unité de R et deux suites $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, $\mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_r)$ d'éléments de R.
À l'instar de S. Ariki et K. Koike, [8] et [2], nous noterons $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$, resp. $\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(R)$, la R-algèbre de Hecke associée au groupe de réflexions complexes $G(r, 1, n)$, resp. $G(r, f, n)$, pour les paramètres q, $\mathbf{Q}$, resp. q, $\mathbf{x}$. Elles sont définies par générateurs et relations comme suit.

L'algèbre $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$*, dite aussi de Ariki-Koike, est engendrée par les élément* $T_1, \dots, T_n$*, soumis aux relations :*

$(T_1 - Q_1)\dots(T_1 - Q_r) = 0,$
$(T_i - q)(T_i + 1) = 0,\ 2 \le i \le n,$
$T_1T_2T_1T_2 = T_2T_1T_2T_1,$
$T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1},\ 2 \le i \le n-1,$
$T_iT_j = T_jT_i,\ 1 \le i < j \le n,\ j \ge i+2.$

L'algèbre cyclotomique $\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(R)$ *admet pour générateurs, les éléments* $a_0, \dots, a_n$*, satisfaisant*

$(a_0 - x_1)\dots(a_0 - x_d) = 0$
$(a_i - q)(a_i + 1) = 0,\ 1 \le i \le n,$
$a_1a_3a_1 = a_3a_1a_3,$
$a_ia_{i+1}a_i = a_{i+1}a_ia_{i+1},\ 2 \le i \le n-1,$
$(a_1a_2a_3)^2 = (a_3a_1a_2)^2,$
$a_1a_i = a_ia_1,\ 4 \le i \le n,$
$a_ia_j = a_ja_i,\ 2 \le i < j \le n,\ j \ge i+2,$

$$a_0a_1a_2 = (q^{-1}a_1a_2)^{2-r}a_2a_0a_1 + (q-1)\sum_{i=1}^{r-2}(q^{-1}a_1a_2)^{1-k}a_0a_1,$$
$$= a_1a_2a_0,$$

$a_0a_i = a_ia_0,\ 3 \le i \le n.$

Supposons que l'anneau R et les suites $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{x}$ vérifient les conditions **(HQ/x)**.

Hypothèses (HQ/x) : L'anneau R contient une racine primitive f-ième de l'unité notée ω et pour tout $i \in [1, f]$, il existe y_i, une racine inversible f-ième de x_i. La suite $\mathbf{Q}$ est choisie en fonction de la suite $\mathbf{x}$ ou plus exactement de $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)$ au sens où $\mathbf{Q}$ est formée par les r éléments $y_1,\ \omega y_1, \dots,\ \omega^{f-1}y_1, \dots,\ y_d,\ \omega y_d, \dots,\ \omega^{f-1}y_d$.

Alors $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$ est isomorphe à la R-algèbre de présentation :

générateurs : $T_1, \dots, T_n,$
relations : $(T_1^f - x_1)\dots(T_1^f - x_d) = 0,$
$(T_i - q)(T_i + 1) = 0,\ 2 \le i \le n,$
$T_1T_2T_1T_2 = T_2T_1T_2T_1,$
$T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1},\ 2 \le i \le n-1,$
$T_iT_j = T_jT_i,\ 1 \le i < j \le n,\ j \ge i+2.$

Définition - Notation 4.1.4 *Notons $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_n}(R)$ la R-algèbre de Hecke associée au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ pour le paramètre q. C'est une algèbre définie par la présentation suivante.*

$\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_n}(R)$ est engendrée par les éléments $T_2, \ldots, T_n$, soumis aux relations

$(T_i - q)(T_i + 1) = 0,\ 2 \leq i \leq n,$
$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1},\ 2 \leq i \leq n-1,$
$T_i T_j = T_j T_i,\ 2 \leq i < j \leq n,\ j \geq i+2.$

Pour tout $w \in \mathfrak{S}_n$, si w admet une décomposition réduite égale à $s_{i_1} \ldots s_{i_s}$ où s_i est la transposition $(i-1, i)$, $i \in [2, n]$, nous noterons $T_w := T_{i_1} \ldots T_{i_s}$.

Soit I un sous-ensemble de $[2, n]$. La R-algèbre de Hecke $\mathfrak{H}^q_{W_I}$ associée au sous-groupe parabolique $W_I =< s_i\,;\, i \in I >$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_n}(R)$, engendrée par les T_i, $i \in I$.

Remarques :

1. Soient deux entiers naturels a et b de somme n. Le sous-groupe parabolique $\mathfrak{S}_{a,b}$ de $\mathfrak{S}_n$ engendré par les s_i, $i \in [2, n] \backslash \{a+1\}$. Ainsi, la R-algèbre $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{a,b}}(R)$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_n}(R)$, engendrée par les T_i, $i \in [2, n]$, $i \neq a+1$. Elle est isomorphe à l'algèbre produit tensoriel sur R des deux algèbres $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_a}(R)$ et $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_b}(R)$.

2. Les éléments T_w, pour $w \in \mathfrak{S}_n$, sont bien définis grâce au lemme de Matsumoto ([20, Théorème 64.20]) et l'ensemble $\{T_w\,;\, w \in \mathfrak{S}_n\}$ est une R-base de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_n}(R)$.

3. Dans le cas général où $\mathbf{Q}$ est un r-uplet d'éléments arbitraires de R, la deuxième relation, ainsi que les deux dernières dans la présentation de $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{Q}}_{r,n}(R)$, permettent de considérer $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_n}(R)$ comme une sous-algèbre de $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{Q}}_{r,n}(R)$, en l'identifiant à la sous-algèbre engendrée par les $T_2, \ldots, T_n$.

Définition - Notation 4.1.5 *Posons $t_1 := T_1$ et, par récurrence, pour tout $i \in [2, n]$, $t_i := T_i t_{i-1} T_i$. Ce sont les éléments de Jucy-Murphy.*

S. Ariki et K. Koike ont montré le

Lemme 4.1.1 ([8, Théorème 3.10]) *L'algèbre $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$ est un R-module libre admettant pour base*

$$\mathcal{B} := \{t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n} T_w \,;\, i_j \in [0, r-1],\ w \in \mathfrak{S}_n\}.$$

Un autre résultat prouvé par S. Ariki sera utile. Il donne des conditions sur les paramètres q et $\mathbf{Q}$ pour que l'algèbre $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$ soit semi-simple quand R est un corps.

Lemme 4.1.2 ([1, Théorème principal]) *Supposons que R est un corps et $q \neq 1$. Il y a équivalence entre les trois assertions suivantes :*

1. *$\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$ est une algèbre semi-simple déployée sur R.*
2. *$\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$ est une algèbre semi-simple.*
3. *Les paramètres q et $\mathbf{Q}$ satisfont*

$$q^m Q_i \neq Q_j, \text{ pour tout } i,\ j,\ 1 \leq i \neq j \leq r, \quad \text{et } m,\ |m| < n, \tag{4.1.3}$$

et

$$\prod_{j=1}^{n} 1 + q + \ldots + q^{j-1} \neq 0. \tag{4.1.4}$$

$\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$ comme algèbre graduée sur $\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(R)$

Nous supposons vérifiée l'hypothèse **(HQ/x)**.

Le but de cette partie est de montrer que, sous cette condition, la R-algèbre $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$ est graduée par un groupe cyclique d'ordre f sur une sous-algèbre isomorphe à la R-algèbre $\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(R)$. Commençons par expliciter la sous-algèbre en question grâce au

Lemme 4.1.3 ([2, Proposition 1.6]) *L'application $\phi : \mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(R) \to \mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$ définie sur les générateurs par*

$$(a_0)\phi = T_1^f,\ (a_1)\phi = T_1^{-1} T_2 T_1,\ (a_i)\phi = T_i,\ i \in [2, n],$$

est un monomorphisme d'algèbres. Il permet d'identifier $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{x}}_{r,f,n}(R)$ *à son image dans* $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{Q}}_{r,n}(R)$ *qui est la sous-algèbre* R*-libre de base*

$$\{t_1^{k_1}\dots t_n^{k_n}T_w\,;\, k_j\in[0,r-1],\, k_1+\dots+k_n\equiv 0 \pmod f,\, w\in\mathfrak{S}_n\}.$$

L'algèbre $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{x}}_{r,f,n}(R)$ sera désormais identifiée à son image par ϕ dans $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{Q}}_{r,n}(R)$, i.e., à la sous-algèbre de $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{Q}}_{r,n}(R)$ engendrée par T_1^f, $T_1^{-1}T_2T_1$ et $\mathfrak{H}^{q}_{\mathfrak{S}_n}(R)$.

Nous pouvons alors donner l'analogue de la décomposition graduée (4.1.2) pour les algèbres de groupes de réflexions complexes.

Lemme 4.1.4 *Sous la condition* **(HQ/x)**, *la* R*-algèbre* $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{Q}}_{r,n}(R)$ *est graduée sur la* R*-algèbre* $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{x}}_{r,f,n}(R)$ *par un groupe cyclique d'ordre* f, *de décomposition graduée* $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{Q}}_{r,n}(R)=\bigoplus_{j=0}^{f-1} t_1^j\,\mathfrak{H}^{q,\mathbf{x}}_{r,f,n}(R)$.

Preuve : En premier lieu, montrons que $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{Q}}_{r,n}(R)$ se décompose en la somme de R-modules

$$\mathfrak{H}^{q,\mathbf{Q}}_{r,n}(R)=\bigoplus_{j=0}^{f-1} t_1^j\mathfrak{H}^{q,\mathbf{x}}_{r,f,n}(R). \tag{4.1.5}$$

Pour cela, utilisons les bases fournies par les Lemmes 4.1.1 et 4.1.3. Soit h, un élément de la base $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{Q}}_{r,n}(R)$, $h:=t_1^{k_1}\dots t_n^{k_n}T_w$, $k_j\in[0,r-1]$, $w\in\mathfrak{S}_n$. Soit $b\in[0,f-1]$, tel que $\sum_{j=1}^{n}k_j\equiv b \pmod f$. Considérons les deux cas,

- $k_1\geq b$. L'élément h s'écrit sous la forme $t_1^b t_1^{k_1-b}t_2^{k_2}\dots t_n^{k_n}T_w$. Par conséquent, h appartient au R-module $t_1^b\mathfrak{H}^{q,\mathbf{x}}_{r,f,n}(R)$.

- $k_1<b$. Avec la première relation donnée dans la seconde présentation de $\mathfrak{H}^{q,\mathbf{Q}}_{r,n}(R)$, t_1 est inversible et

$$t_1^{-1}=\sum_{j=1}^{d} c_j\, t_1^{fj-1}, \tag{4.1.6}$$

pour des éléments $c_j \in R$, $j \in [1,d]$. Ainsi $t_1^{k_1-b}$ est égal à $P(t_1^f)t_1^{k_1-b}$ pour un polynôme P à coefficients dans R et toutes les puissances de t_1 apparaissant dans le développement de $P(t_1^f)t_1^{k_1-b}$ sont strictement positives. L'élément h s'écrit alors $t_1^b P(t_1^f)t_1^{k_1-b}t_2^{k_2}\dots t_n^{k_n}T_w$. Sous cette forme, il est clair que h appartient au R-module $t_1^b\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(R)$.

Par conséquent, $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$ est somme des R-modules $t_1^j\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(R)$, j variant dans $[0,f-1]$. Cette somme est directe parce que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$ et que l'ensemble $\{t_1^{k_1}\dots t_n^{k_n}T_w\,;\,k_j\in[0,r-1],\ k_1+\dots+k_n\equiv j \pmod f,\ w\in\mathfrak{S}_n\}$ est une base de $t_1^j\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(R)$ pour $j\in[0,f-1]$. L'assertion (4.1.5) est vérifiée.

A présent, montrons que t_1 commute à $\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(R)$, i.e.,

$$t_1\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(R) = \mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(R)t_1. \tag{4.1.7}$$

Comme t_1 commute avec tous les t_i, $i\in[1,n]$, ainsi qu'avec tous les T_j, pour $j\in[3,n]$, (cf. [8, Lemme 3.3]), il suffit de montrer que $t_1T_2 \in \mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(R)\,t_1$ pour obtenir l'inclusion directe dans (4.1.7). Un argument de dimension ou un raisonnement symétrique permettra de conclure.
D'après la seconde relation dans la présentation de $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}$, T_2 est inversible, d'inverse $T_2^{-1} = q^{-1}(T_2+1-q)$. Avec la troisième relation de cette même présentation,

$$\begin{aligned} t_1T_2 &= T_2T_1T_2T_1T_2^{-1}T_1^{-1} \\ &= \frac{1}{q}T_2T_1T_2T_1T_2T_1^{-1} + (\frac{1}{q}-1)t_2 \\ &= \frac{1}{q}T_2t_2 + (\frac{1}{q}-1)t_2 \\ &= \frac{1}{q}T_2t_1^{-1}t_2t_1 + (\frac{1}{q}-1)t_1^{-1}t_2t_1. \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

En considérant la forme de t_1^{-1} donnée en (4.1.6), la dernière égalité (4.1.8) justifie l'appartenance de t_1T_2 à $\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(R)t_1$. Finalement, la formule (4.1.7) est établie.

De l'égalité (4.1.7), il vient que pour tout i, $j\in[0,f-1]$, $t_1^i\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}\,t_1^j\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}$ est égal à $t_1^{i+j}\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}$ où $i+j$ est considéré modulo f. Selon la Définition - Notation 2.1.1 sur les systèmes gradués, le lemme est démontré. ∎

Modules de Specht

J. Graham et G. Lehrer puis R. Dipper, G. James et A. Mathas ont montré que l'algèbre $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$ était cellulaire ([48, §5], [28, Théorème 3.26]). L'ensemble Λ introduit dans la condition **(C1)** de la Définition - Notation 3.1.1 est représenté ici par l'ensemble Λ_r des r-multipartitions de n, i.e., des r-uplets $\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$ de partitions tels que $\sum_{j=1}^{r} |\lambda^{(j)}| = n$. L'ensemble $M(\lambda)$ de cette même condition, pour $\lambda \in \Lambda_r$, est ici l'ensemble des λ-tableaux standards. Les éléments de Λ_r se représentent sous la forme d'une suite de r diagrammes de Young. Pour $\lambda \in \Lambda_r$, un λ-tableau $\mathbb{T} = (\mathbb{T}^{(1)}, \ldots, \mathbb{T}^{(r)})$ est obtenu à partir de la représentation en diagrammes de λ, en remplaçant chaque case par un élément de $[1, n]$, sans répétition. Le tableau $\mathbb{T}$ est standard si dans chaque composante $\mathbb{T}^{(j)}$, les coefficients sont placés dans l'ordre croissant en parcourant chaque ligne de gauche à droite et chaque colonne de haut en bas.

Définition - Notation 4.1.6 *Posons Λ_r, l'ensemble des r-multipartitions de n. Soit $\lambda \in \Lambda_r$.*

Nous désignerons par $S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(R)$ le module de Specht associé à λ, défini dans [28]*, pour la R-algèbre $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$.*

L'ensemble des λ-tableaux standards sera noté $St(\lambda)$.

Pour tout $\lambda \in \Lambda_r$, le module de Specht $S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(R)$ est, à isomorphisme près, la représentation cellulaire de $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$ associée à λ (cf. la partie exposant les conséquences de la condition **(C4)** en (3.2.2)).

4.1.2 Théorème

Définition - Notation 4.1.7 *Jusqu'à la fin du chapitre, le symbole, $\widehat{\ }$, resp. $^-$, désignera l'extension scalaire à K, resp. à k.*

Nous allons citer le théorème, faisant l'objet de cette sous-section, sous les hypothèses et notations **(HN)** suivantes.

Hypothèses (HN) : Soient d, f, n, des entiers naturels non nuls, $r := df$.

Soit $(\mathcal{O}, K, k)$ un système p-modulaire pour un nombre premier p ne divisant pas f, avec k algébriquement clos.

Soit $\omega \in \mathcal{O}$, une racine primitive f-ième de l'unité (qui existe par le lemme de Hensel).

Fixons une unité q de $\mathcal{O}$ telle que

$$\prod_{i=1}^{n} 1+q+\ldots+q^{i-1} \neq 0 \text{ et pour tout } i \in [1, f\text{–}1], \overline{\omega}^i \notin \overline{q}^{\mathbb{Z}}, \quad (4.1.9)$$

ainsi qu'une suite $(y_1, \ldots, y_d)$ d'unités de $\mathcal{O}$ telle que

$$\text{si } i, i' \in [1, d],\ j \in [0, f\text{–}1],\ j \neq 0 \text{ si } i = i',\ \text{alors } \frac{\omega^j y_i}{y_{i'}} \neq q^m,\ |m|<n. \quad (4.1.10)$$

Formons les deux suites

$\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_d)$ où pour tout $i \in [1, d]$, $x_i := y_i^f$, et

$\mathbf{Q} := (Q_1, \ldots, Q_r)$ où les Q_i sont les r éléments distincts $\omega^i y_j$, pour $i \in [0, f-1]$, $j \in [1, d]$.

Posons $A := \mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(\mathcal{O})$ et $B := \mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(\mathcal{O})$.

Remarque : La condition (4.1.9) signifie que q n'est pas une racine i-ème de l'unité, pour $i \in [2, n]$, et aucune puissance de $\overline{\omega}$ non-triviale n'est égale à une puissance de $\overline{q}$.

Nous sommes en mesure d'énoncer le

Théorème 4.1.5 *Sous les hypothèses* **(HN)**, *il existe une matrice de décomposition unitriangulaire inférieure de l'algèbre* $\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(\mathcal{O})$ *qui est* g*-stable, avec* g *l'automorphisme de* $\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(\mathcal{O})$ *donné par la conjugaison par* T_1.

Pour la suite, nous conservons les hypothèses et notations de **(HN)** et démontrons le Théorème 4.1.5.

4.1.3 Preuve du théorème

Selon le Lemme 4.1.4, A est graduée sur B de graduation $A = \bigoplus_{j=0}^{f-1} T_1^j B$ et T_1 vérifie les relations $T_1 B = B T_1$ et $T_1^f \in B$. Soit $h := h_{A/B}^{(\omega)}$ l'automorphisme de A associé à la graduation.

Avec le Lemme 4.1.2, (4.1.9) et (4.1.10), $\widehat{A}$ est semi-simple déployée. Puisque $\widehat{A}$ est graduée par un groupe cyclique d'ordre f sur $\widehat{B}$, $\widehat{B}$ est aussi semi-simple (cf. les dernières remarques de 2.1.1). Suite au Lemme 4.1.11 ci-dessous, les conditions **(H)** de 2.3.2 seront satisfaites.

Il restera à donner une matrice de décomposition h-stable unitriangulaire de A avant de pouvoir appliquer le Théorème 2.3.1 au cas particulier $M = A$. Il en résultera le Théorème 4.1.5.

Matrice de décomposition de A

Afin d'appliquer le Théorème 2.3.1 du chapitre 2 au module régulier A_A, nous avons besoin d'une matrice de décomposition de A unitriangulaire h-stable.

Nous allons utiliser la structure cellulaire des algèbres A, $\widehat{A}$ et $\overline{A}$ et choisir comme matrice de décomposition classique de A, la matrice de décomposition cellulaire de $\overline{A}$ qui unitriangulaire inférieure. Avant d'expliciter cette matrice, fixons un ordre spécifique dans la suite $\mathbf{Q}$ puisque les modules de Specht dépendent de l'ordre des paramètres de $\mathbf{Q}$, contrairement à l'algèbre de Hecke (à isomorphisme près). Cet ordre permettra d'appliquer la Proposition 4.11 de [31].

Grâce à la condition (4.1.9), il est facile de voir qu'il est possible d'ordonner les éléments de $\mathbf{Q}$, $\omega^i y^j$, pour $i \in [0, f-1]$, $j \in [1, d]$, de sorte que $\mathbf{Q}$ se scinde en des suites $\mathbf{Q}_{a,i}$, avec $a \in [1, t]$, $i \in [0, f-1]$, pour un entier naturel non nul t, i.e., $\mathbf{Q}$ est la concaténation des suites

$$\mathbf{Q}_{1,0}, \ldots, \mathbf{Q}_{1,f-1}, \mathbf{Q}_{2,0}, \ldots, \mathbf{Q}_{2,f-1}, \ldots, \mathbf{Q}_{t,0}, \ldots, \mathbf{Q}_{t,f-1}, \qquad (4.1.11)$$

(dans cet ordre), avec les deux propriétés suivantes.

La première est que les quotients d'éléments qui appartiennent à deux telles suites distinctes ne sont pas une puissance de q modulo l'idéal $J(\mathcal{O})$.

La seconde est que pour tout $i \in [0, f-1]$, $a \in [1, t]$, alors $\mathbf{Q}_{a,i} = \omega^i \mathbf{Q}_{a,0}$.

Donnons une procédure pour construire de telles suites.

Formons la suite $\mathbf{Q} := (Q_1, \ldots, Q_r)$ constituée par les r éléments de l'ensemble (non ordonné) $Y := \{y_1, \ldots, \omega^{f-1} y_1, \ldots, y_d, \ldots, \omega^{f-1} y_d\}$ de la façon suivante. Il existe d'uniques entiers r_1 strictement positif, $i_{1,1}, \ldots, i_{1,r_1} \in [1, d]$ et $j_{1,1}, \ldots, j_{1,r_1} \in [0, f-1]$, tels que $i_{1,1} < i_{1,2} <$

$\ldots < i_{1,r_1}$ et l'ensemble $\{\overline{\omega}^{j_{1,1}}\overline{y_{i_{1,1}}}, \ldots, \overline{\omega}^{j_{1,r_1}}\overline{y_{i_{1,r_1}}}\}$ est l'intersection de l'ensemble $\{\overline{q}^a\overline{y_1}\,;\, a \in \mathbb{Z}\}$ avec $\overline{Y}$, $\overline{Y}$ désignant l'ensemble Y réduit modulo $J(\mathcal{O})$. L'unicité de tels éléments provient de l'hypothèse (4.1.9). Pour tout $m \in [0, f-1]$, nous choisirons $(Q_{mr_1+1}, \ldots, Q_{mr_1+r_1}) := (\omega^{j_{1,1}+m}y_{i_{1,1}}, \ldots, \omega^{j_{1,r_1}+m}y_{i_{1,r_1}})$. Remarquons que $Q_{mr_1+1} = \omega^m y_1$.

Soit i' le plus petit des entiers $i \in [1, d]$ tel que $\overline{y_i}$ n'apparaît pas dans $\{\overline{Q_j}\,;\, j \in [1, fr_1]\}$. Nous adaptons la construction précédente en remplaçant $y_1 = y_{i_{1,1}}$ par $y_{i'}$. Il existe d'uniques entiers r_2 strictement positif, $i_{2,1}, \ldots, i_{2,r_2} \in [1, d]$ et $j_{2,1}, \ldots, j_{2,r_2} \in [0, f-1]$, tels que $i_{2,1} < i_{2,2} < \ldots < i_{2,r_2}$ et l'ensemble $\{\overline{\omega}^{j_{2,1}}\overline{y_{i_{2,1}}}, \ldots, \overline{\omega}^{j_{2,r_2}}\overline{y_{i_{2,r_2}}}\}$ est l'intersection de l'ensemble $\{\overline{q}^a\overline{y_{i'}}\,;\, a \in \mathbb{Z}\}$ avec $\overline{Y}\backslash\{\overline{Q_j}\,;\, j \in [1, fr_1]\}$. Pour tout $m \in [0, f–1]$, nous choisirons la suite $(Q_{fr_1+mr_2+1}, \ldots, Q_{fr_1+mr_2+r_2})$ égale à la suite $(\omega^{j_{2,1}+m}y_{i_{2,1}}, \ldots, \omega^{j_{2,r_2}+m}y_{i_{2,r_2}})$.
Notons encore que $Q_{fr_1+mr_2+1} = \omega^m y_{i'}$.

En itérant le procédé, nous obtenons les entiers $r_1,\ r_2,\ \ldots, r_t$ strictement positifs, $i_{a,1}, \ldots, i_{a,r_a} \in [1, d]$ et $j_{a,1}, \ldots, j_{a,r_a} \in [0, f-1]$, avec $i_{1,1} < i_{2,1} < \ldots < i_{t,1}$ et $i_{a,1} < i_{a,2} < \ldots < i_{a,r_a}$ pour tout $a \in [1, t]$. Les suites formées dans cette construction vérifient les deux propriétés énoncées ci-haut.

Par définition d'une matrice de décomposition d'une algèbre, les lignes de la matrice de décomposition (classique) de l'algèbre A sont indexées par les classes d'isomorphismes des modules simples de $\widehat{A} \cong \mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(K)$. Nous avons déjà dit que, sous les hypothèses **(HN)**, cette algèbre est semi-simple. En appliquant le Théorème 3.1.4, il vient que l'ensemble des modules de Specht $\{S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)\,;\, \lambda \in \Lambda_r\}$ est un ensemble complet de représentants de ces classes. Utilisons les r-multipartitions de Λ_r comme paramètres des lignes. Grâce aux bases des modules cellulaires, il est facile de voir que, pour tout $\lambda \in \Lambda_r$, le module de Specht sur A, $S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(\mathcal{O})$, est une $\mathcal{O}$-forme de $S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$ dont la réduction à k, $\overline{S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(\mathcal{O})}$, est isomorphe au module du Specht $S_\lambda^{\overline{q},\overline{\mathbf{Q}}}(k)$ en tant que modules sur $\overline{A} \cong \mathfrak{H}_{r,n}^{\overline{q},\overline{\mathbf{Q}}}(k)$.

Les colonnes de la matrice de décomposition de A sont indexées par les classes d'isomorphismes des modules simples sur $\overline{A}$. Notons Λ_r^0, l'ensemble des r-multipartitions $\lambda \in \Lambda_r$ telles que $D_\lambda^{\overline{q},\overline{\mathbf{Q}}}(k) := S_\lambda^{\overline{q},\overline{\mathbf{Q}}}(k)/\mathrm{rad}_\lambda^{\overline{q},\overline{\mathbf{Q}}}(k)$ n'est pas nul, où $\mathrm{rad}_\lambda^{\overline{q},\overline{\mathbf{Q}}}(k)$ est le radical d'une forme bilinéaire symétrique définie sur le module cellulaire $S_\lambda^{\overline{q},\overline{\mathbf{Q}}}(k)$ (voir la Définition - Notation 3.1.4). Les quotients non-nuls des modules de Specht $\{D_\lambda^{\overline{q},\overline{\mathbf{Q}}}(k)\,;\, \lambda \in \Lambda_r^0\}$ ou les multipartitions de Λ_r^0

peuvent être choisis comme paramètres des colonnes de la matrice de décomposition de A, d'après la théorie des algèbres cellulaires.

Le coefficient donné par la ligne correspondant à $\lambda \in \Lambda_r$ et par la colonne associée à $\mu \in \Lambda_r^0$, représente la multiplicité de $D_\mu^{\overline{q},\overline{\mathbf{Q}}}(k)$ comme facteur de composition de $S_\lambda^{\overline{q},\overline{\mathbf{Q}}}(k)$. Ceci prouve que la matrice de décomposition de l'algèbre A est la matrice de décomposition cellulaire de $\overline{A}$, par la Définition - Notation 3.1.5. En particulier, nous choisirons une matrice de décomposition D de A de forme unitriangulaire inférieure égale à la matrice de décomposition cellulaire de $\overline{A}$ avec l'ensemble Λ_r^0 comme indices de la première diagonale, i.e., si pour un entier i, $1 \leq i \leq |\Lambda_r^0|$, la i-ième colonne correspond à $\lambda \in \Lambda_r^0$, alors la i-ième colonne aussi.

D'après le rappel 2.1.2 au sujet des matrices de décomposition, D est aussi la matrice de décomposition du module régulier A. Nous venons de voir que ses lignes sont indexées par les classes d'isomorphismes des modules simples $S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K),\ \lambda \in \Lambda_r$. Pour vérifier la h-stabilité de D, il faut et il suffit donc de vérifier que, si $\lambda \in \Lambda_r^0$, alors le module simple $S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)^{\widehat{h}}$ de $\widehat{A}$ est isomorphe à $S_\mu^{q,\mathbf{Q}}(K)$ pour un élément μ appartenant à Λ_r^0. C'est le but de ce qui suit.

h-stabilité de D

Décrivons $\mu \in \Lambda_r$ en fonction de $\lambda \in \Lambda_r$, si $S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)^{\widehat{h}} \cong S_\mu^{q,\mathbf{Q}}(K)$. Afin de rendre la recherche de μ plus facile, nous allons exhiber une autre description des modules de Specht, utilisant les tableaux standards. La méthode pour trouver μ devient alors une question combinatoire.

S. Ariki et K. Koike ont introduit dans [8], l'ensemble des modules simples sur $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(K)$,

$$V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K),\ \lambda \in \Lambda_r.$$

Pour $\lambda \in \Lambda_r$, $V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$ admet les λ-tableaux standards pour base de son K-espace vectoriel sous-jacent.

Remarques :

1. Ces modules simples généralisent les modules simples décrits par P.N. Hoefsmit pour les types A et B ([53]).

2. L'ensemble $\{V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)\,;\,\lambda\in\Lambda_r\}$ est un ensemble complet de modules simples sur $\widehat{A}$.

Dans un premier temps, montrons que, pour tout $\lambda\in\Lambda_r$, les modules simples $V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$ et $S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$ sont isomorphes.

Définition - Notation 4.1.8 *Soit $\mathfrak{U}_{n,r}^{q,\mathbf{Q}}(K)$ la sous-algèbre commutative de $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(K)$ engendrée par les éléments t_i, $i\in[1,n]$ (*[8, Lemme 3.3]*).*

Le prochain lemme affirme que les matrices représentant l'action de $\mathfrak{U}_{n,r}^{q,\mathbf{Q}}(K)$ sur $V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$, pour $\lambda\in\Lambda_r$, sont diagonales si elles sont exprimées par rapport à la base formée par les λ-tableaux standards. Avant de l'énoncer, nous avons besoin de la

Définition - Notation 4.1.9 *Si $\lambda\in\Lambda_r$ est représentée sous forme de diagrammes et c est une case, la* composante *de c,* $\mathrm{comp}(c)$*, est l'indice de la composante de λ contenant c et le* contenu *de c,* $\mathrm{cont}(c)$ *est la différence $a-b$ si c se situe dans la ligne b et la colonne a de la composante $\lambda^{(\mathrm{comp(c)})}$.*

Si $\mathbb{T}$ est un λ-tableau, $\lambda\in\Lambda_r$, et $i\in[1,n]$, la composante *de i dans $\mathbb{T}$,* $\mathrm{comp}(\mathbb{T},i)$*, désigne la composante de la case c où est placé i et le* contenu *de i dans $\mathbb{T}$,* $\mathrm{cont}(\mathbb{T},i)$*, le contenu de c dans λ.*

Nous pouvons alors énoncer le résultat de S. Ariki.

Lemme 4.1.6 ([8]) *1. L'algèbre $\mathfrak{U}_{n,r}^{q,\mathbf{Q}}(K)$ agit de façon diagonale sur le module $V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$ par rapport à la base spécifique formée par les λ-tableaux standards. L'action de t_i est donnée par*

$$\mathbb{T}\,t_i=Q_{\mathrm{comp}(\mathbb{T},i)}q^{\mathrm{cont}(\mathbb{T},i)+(i-1)}\mathbb{T},\ \text{pour } i\in[1,n],\ \mathbb{T}\in St(\lambda). \quad (4.1.12)$$

2. Si $q\neq 1$, les représentations linéaires de $\mathfrak{U}_{n,r}^{q,\mathbf{Q}}(K)$ qui envoient t_i sur $Q_{\mathrm{comp}(\mathbb{T},i)}q^{\mathrm{cont}(\mathbb{T},i)+(i-1)}$ sont mutuellement non-équivalentes. L'algèbre $\mathfrak{U}_{n,r}^{q,\mathbf{Q}}(K)$ est une algèbre commutative de dimension $\sum_{\lambda\in\Lambda_r}|St(\lambda)|$.

Preuve : La preuve du premier point est donnée par S. Ariki et K. Koike ([8, Proposition 3.16]).

Pour justifier la seconde partie, nous pouvons également reprendre une de leurs preuves ([8, Proposition 3.17]). Il faut cependant modifier le passage affirmant qu'à partir d'une représentation linéaire de $\mathfrak{U}_{n,r}^{q,\mathbf{Q}}(K)$ apparaissant dans $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_r} V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$, il est possible de construire le tableau standard de façon unique car ici les paramètres q et $\mathbf{Q}$ ne sont plus des indéterminées. Ceci est en fait assuré par les conditions (4.1.9) et (4.1.10) comme S. Ariki le souligne dans sa preuve ([1, Proposition 3.2]). Raisonnons par récurrence sur les coefficients $i \in [1, n]$ à placer dans le tableau.

Puisque le contenu de 1 dans n'importe quel tableau standard est 0 et que tous les Q_j, pour $j \in [1, r]$, sont distincts selon l'hypothèse (4.1.10), la valeur prise par t_1 dans la représentation permet de placer 1 correctement dans la bonne composante.

Supposons avoir placés $1, 2, \ldots, i-1$, pour un entier $i \in [2, n]$. Considérons les valeurs $Q_{\mathrm{comp}(c)}\, q^{\mathrm{cont}(c)}$ pour les cases c qu'il est possible d'ajouter au diagramme déjà formé en respectant la forme standard. Ces valeurs sont toutes distinctes. En effet, la différence entre les contenus de deux telles cases est de valeur absolue strictement inférieure à n. Si ces deux cases appartiennent à la même composante, ceci est dû au fait que q n'est pas une racine i-ième de l'unité pour $i \in [2, n]$ $\big($condition (4.1.9)$\big)$. Si deux telles cases se situent dans des composantes différentes, c'est l'expression (4.1.10) qui prouve l'affirmation. La donnée de la valeur prise par t_i permet de définir ainsi la composante et le contenu de la case qui contiendra i. La position de cette case est alors unique (du fait de la conservation de la forme standard). La récurrence est montrée. ∎

Il vient alors immédiatement le

Corollaire 4.1.7 *Si $q \neq 1$ et λ et μ sont deux éléments de Λ_r tels que les modules $V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$ et $V_\mu^{q,\mathbf{Q}}(K)$ sont isomorphes comme modules sur $\mathfrak{U}_{n,r}^{q,\mathbf{Q}}(K)$, alors $\lambda = \mu$.*

Avec quelques manipulations combinatoires, nous obtenons aussi le

Corollaire 4.1.8 *Pour tout $\lambda \in \Lambda_r$, les modules sur $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(K)$, $S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$ et $V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$ sont isomorphes.*

Preuve : Suivant [63], les propriétés (4.1.9) et (4.1.10) permettent d'introduire, pour tout $\lambda \in \Lambda_r$, une K-base de $S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$, qui sera notée $\{f_\mathbb{T}\,;\, \mathbb{T} \in St(\lambda)\}$. Pour tout $i \in [1,n]$, $\mathbb{T} \in St(\lambda)$, l'action de t_i sur $f_\mathbb{T}$ est donnée par

$$f_\mathbb{T}\, t_i = Q_{\mathrm{comp}(\mathbb{T},i)}\, q^{\mathrm{cont}(\mathbb{T},i)+(i-1)} f_\mathbb{T},$$

selon [63, Proposition 3.4]. En comparant avec l'action de t_i sur la base des λ-tableaux standards de $V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$ donnée en (4.1.12), il est clair que $S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$ et $V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$ sont isomorphes en tant que modules sur $\mathfrak{U}_{n,r}^{q,\mathbf{Q}}(K)$. Par le Corollaire 4.1.7, nous pouvons conclure que, quand $q \neq 1$, $S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$ et $V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$ sont isomorphes en tant que modules sur $\widehat{A} = \mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(K)$. Quand $q = 1$, un tel isomorphisme provient de [63, Proposition 3.5] et [8, p. 229]. ∎

Nous pouvons maintenant décrire la r-multipartition cherchée μ.

Lemme 4.1.9 *Soit $\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)}) \in \Lambda_r$. Alors le module $S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)^{\widehat{h}}$ est isomorphe au module $S_{\lambda\varpi}^{q,\mathbf{Q}}(K)$ où ϖ est la permutation de $\mathfrak{S}_r$ définie par $Q_{(i)\varpi} := \omega Q_i$, pour tout $i \in [1,r]$, i.e., $\omega\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\varpi^{-1}$ et $\lambda\varpi = (\lambda^{((1)\varpi^{-1})}, \ldots, \lambda^{((r)\varpi^{-1})})$.*

Preuve : Nous allons montrer que

$$V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)^{\widehat{h}} \cong V_{\lambda\varpi}^{q,\mathbf{Q}}(K). \tag{4.1.13}$$

Ainsi le lemme résultera du Corollaire 4.1.8.

Supposons $q \neq 1$. Le sous-espace sous-jacent de $V_K^{q,\mathbf{Q}}(\lambda)^{\widehat{h}}$, resp. de $V_{\lambda\varpi}^{q,\mathbf{Q}}(K)$, admet pour K-base l'ensemble des λ-tableaux standards $St(\lambda)$, resp. l'ensemble $\{\mathbb{T}\varpi\,;\, \mathbb{T} \in St(\lambda)\}$ des $\lambda\varpi$-tableaux standards. Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} is: & V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)^{\widehat{h}} & \to & V_{\lambda\varpi}^{q,\mathbf{Q}}(K) \\ & \mathbb{T} \in St(\lambda) & \mapsto & \mathbb{T}\varpi \end{array}.$$

Alors is est un isomorphisme de modules sur $\mathfrak{U}_{n,r}^{q,\mathbf{Q}}(K)$.
En effet, soient $i \in [1,n]$, $\mathbb{T} \in St(\lambda)$, alors $(\mathbb{T} * t_i)is = \omega(\mathbb{T}\, t_i)\varpi$ soit $\omega Q_{\mathrm{comp}(\mathbb{T},i)} q^{\mathrm{cont}(\mathbb{T},i)+(i-1)}\mathbb{T}\varpi$, d'après l'expression (4.1.12), où $*$ désigne l'action de $\mathfrak{U}_{n,r}^{q,\mathbf{Q}}(K)$ dans $V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)^{\widehat{h}}$. Par un court calcul, $\omega Q_{\mathrm{comp}(\mathbb{T},i)} = Q_{\mathrm{comp}(\mathbb{T}\varpi,i)}$. En outre, il est clair que les contenus $\mathrm{cont}(\mathbb{T},i)$ et $\mathrm{cont}(\mathbb{T}\varpi,i)$ sont égaux. Par conséquent, $(\mathbb{T} * t_i)is = (\mathbb{T})is\, t_i$. L'assertion précédente est vérifiée. En utilisant

le Corollaire 4.1.7, l'application is est même un isomorphisme de modules sur $\widehat{A}$. L'affirmation (4.1.13) est démontrée.

Si $q = 1$, T_1 agit sur le tableau standard $\mathbb{T}$ de $V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$ par multiplication par $Q_{\mathrm{comp}(\mathbb{T},1)}$ et T_i, $i \in [2,n]$, transforme $\mathbb{T}$ en $\mathbb{T}s_i$. Un raisonnement utilisant les mêmes arguments que précédemment, en regardant cette fois l'action de $\widehat{A}$, amène le résultat (4.1.13). ∎

Remarques :

1. L'application ϖ est bien définie parce que l'ensemble formé par les éléments de $\mathbf{Q}$ est stable par mutiplication par ω, par construction, et tous ces éléments sont distincts selon (4.1.10). En outre, ω étant une racine f-ième de l'unité, il est trivial que ϖ^f est l'identité de $\mathfrak{S}_r$.

2. Nous avons vu, en Sous-Section 2.3.1, que le groupe cyclique C_f, d'ordre f, engendré par $\mathfrak{c}$, opère sur l'ensemble des classes d'isomorphismes des modules de $\widehat{A}$ via $\widehat{h}$. Pour tout $\lambda \in \Lambda_r$, $u \in [0, f-1]$, $\mathfrak{c}^u$ agit sur la classe du module simple $S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$ et donne la classe du module simple $S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)^{(\widehat{h})^u}$, à savoir la classe de $S_{\lambda\varpi^u}^{q,\mathbf{Q}}(K)$, selon le Lemme 4.1.9. De même, C_f opère sur l'ensemble des multipartitions Λ_r via ϖ. Soit $\lambda \in \Lambda_r$ considérée comme la concaténation des partitions $\lambda_{1,0}, \ldots, \lambda_{1,f-1}, \lambda_{2,0}, \ldots, \lambda_{t,f-1}$, suivant le même découpage qu'en (4.1.11). Pour tout $u \in [0, f-1]$, $\mathfrak{c}^u$ agit sur λ pour donner $\lambda\varpi^u$ qui est la concaténation des partitions $\lambda_{1,f-u}, \ldots, \lambda_{1,f-1-u}, \lambda_{2,f-u}, \ldots, \lambda_{t,f-1-u}$.

Grâce à ces descriptions, il est clair que les actions, notées $*$, du groupe cyclique C_f sur l'ensemble des classes d'isomorphismes des modules simples de $\widehat{A}$ et sur l'ensemble des multipartitions Λ_r sont compatibles : pour tout $\lambda \in \Lambda_r$, $u \in [0, f-1]$,

$$S_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K) * \mathfrak{c}^u = S_{\lambda * \mathfrak{c}^u}^{q,\mathbf{Q}}(K).$$

Par conséquent, déterminer le nombre $o(\widehat{h}, V)$ pour un module simple V sur $\widehat{A}$ devient un problème combinatoire. Si V est paramétré par $\lambda \in \Lambda_r$, $o(\widehat{h}, V)$ est le cardinal de l'orbite de λ sous l'action de C_f via ϖ.

La dernière étape de cette partie consiste à montrer que, si $\lambda \in \Lambda_r^0$, alors $\lambda\varpi \in \Lambda_r^0$. Les résultats obtenus jusqu'à présent, n'ont pas pris en compte le choix particulier de l'ordre du r-uplet $\mathbf{Q}$. Grâce au résultat de R. Dipper et A. Mathas, dans [31], nous pouvons énoncer la

Proposition 4.1.10 *Si $\lambda \in \Lambda_r^0$, alors $\lambda\varpi \in \Lambda_r^0$. Donc, D est h-stable unitriangulaire.*

Preuve : Soit $\mathfrak{I} := \{(a,i)\,;\, a \in [1,t],\ i \in [0,f-1]\}$. D'après le choix particulier de l'ordre de $\mathbf{Q}$ (voir (4.1.11)),

$$\prod_{\substack{(a,i),(b,j)\in\mathfrak{I}\\(a,i)\neq(b,j)}} \prod_{\substack{Q_m\in\mathbf{Q}_{a,i}\\Q_{m'}\in\mathbf{Q}_{b,j}}} \prod_{-n<l<n} (\overline{q}^l\overline{Q_m} - \overline{Q_{m'}}) \neq 0.$$

Toute r-multipartition $\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$ s'écrit comme la concaténation des suites de partitions $\lambda_{1,0}, \ldots, \lambda_{1,f-1}, \ldots, \lambda_{t,0}, \ldots, \lambda_{t,f-1}$ suivant le découpage de $\mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_r)$ en (4.1.11). Adaptons [31, Proposition 4.11]. Pour $\lambda \in \Lambda_r$, $D_\lambda^{\overline{q},\overline{\mathbf{Q}}}(k) \neq \{0\}$, i.e., $\lambda \in \Lambda_r^0$, si et seulement si, pour chaque $(a,i) \in \mathfrak{I}$, $D_{\lambda_{a,i}}^{\overline{q},\overline{\mathbf{Q}_{a,i}}}(k) \neq \{0\}$.
Par la Définition - Notation 3.1.4 du radical d'un module de Specht, ceci revient à ce que, pour chaque $(a,i) \in \mathfrak{I}$, $D_{\lambda_{a,i}}^{\overline{q},\overline{\omega}\overline{\mathbf{Q}_{a,i}}}(k) \neq 0$. Ainsi $D_{\lambda_{a,i-1}}^{\overline{q},\overline{\mathbf{Q}_{a,i}}}(k) \neq \{0\}$, en considérant i–1 comme i–1 (mod f). En utilisant à nouveau le résultat de R. Dipper et A. Mathas cité ci-dessus, $D_{\lambda\varpi}^{\overline{q},\overline{\mathbf{Q}}}(k) \neq \{0\}$. La h-stabilité est démontrée. ∎

Dernière vérification

Le lemme suivant traite des conditions restant à satisfaire avant d'appliquer le Théorème 2.3.1. À savoir, nous allons montrer que, sous les hypothèses **(HN)** citées à la sous-section 4.1.2, $\widehat{B}$ est déployée.

Lemme 4.1.11 *La K-algèbre $\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(K)$ est semi-simple déployée.*

Preuve : Les restrictions et inductions se feront ici par rapport aux K-algèbres $\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(K)$ et $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(K)$, avec les foncteurs notés Res et Ind. Rappelons que pour tout $\lambda \in \Lambda_r$, $V_\lambda := V_\lambda^{q,\mathbf{Q}}(K)$ a une base formée des λ-tableaux standards $\mathbb{T} = (\mathbb{T}^{(1)}, \ldots, \mathbb{T}^{(r)})$ où $\mathbb{T}$ s'écrit comme la concaténation de suites de tableaux $\mathbb{T}_{1,0}, \ldots, \mathbb{T}_{1,f-1}, \mathbb{T}_{2,0}, \ldots, \mathbb{T}_{t,f-1}$ en effectuant un découpage comme en (4.1.11). Nous noterons alors $\mathbb{T} := (\mathbb{T}_{a,i})_{(a,i)\in\mathfrak{I}}$ pour

$$\mathfrak{I} = \{(a,i),\ a \in [1,t],\ i \in [0,f-1]\}.$$

Fixons $\lambda \in \Lambda_r$. Soit $\mathfrak{o} := o(\widehat{h}, V_\lambda)$ et $\Omega : \begin{array}{ccc} V_\lambda^{\widehat{h}^{\mathfrak{o}}} & \to & V_\lambda \\ \mathbb{T} & \mapsto & \mathbb{T}\varpi^{\mathfrak{o}} \end{array}$, bien définie par le Lemme 4.1.9. Remarquons que, pour $\mathbb{T} = (\mathbb{T}_{a,i})_{(a,i)\in\mathfrak{I}}$, $\Omega(\mathbb{T}) = (\mathbb{T}_{a,i-\mathfrak{o}})_{(a,i)\in\mathfrak{I}}$, où $i-\mathfrak{o}$ est considéré modulo f. Selon la preuve du Lemme 4.1.9, Ω est un isomorphisme sur $\widehat{A}$. Comme $\Omega^{\frac{f}{\mathfrak{o}}} = \mathrm{Id}_{V_\lambda}$, $\mathrm{Res}\, V_\lambda$ est la somme des modules sur $\widehat{B}$,

$$\mathrm{Res}\, V_\lambda = \bigoplus_{i=0}^{\frac{f}{\mathfrak{o}}-1} \mathrm{Ker}(\Omega - \omega^{\mathfrak{o}i}\mathrm{Id}_{V_\lambda}).$$

Il est facile de voir que pour tout $i \in [0, \frac{f}{\mathfrak{o}}-1]$, les modules sur $\widehat{B}$, $\mathrm{Ker}(\Omega - \omega^{\mathfrak{o}i}\mathrm{Id}_{V_\lambda})$ et $\mathrm{Ker}(\Omega - \mathrm{Id}_{V_\lambda})^{\widehat{g}^i}$ sont isomorphes. En effet, si $y \in \mathrm{Ker}(\Omega - \mathrm{Id}_{V_\lambda})$, alors $y\,T_1^i \in \mathrm{Ker}(\Omega - \omega^{-\mathfrak{o}i}\mathrm{Id}_{V_\lambda})$ et si un module V sur $\widehat{B}$ s'étend en un module sur $\widehat{A}$ alors, pour tout $i \in [0, f-1]$, les modules sur $\widehat{B}$, VT_1^i et $V^{\widehat{g}^{-i}}$, sont isomorphes.
Soit x le nombre (avec multiplicité) de sous-modules simples sur $\widehat{B}$ contenus dans $\mathrm{Ker}(\Omega - \mathrm{Id}_{V_\lambda})$. Suivant le raisonnement de la preuve de la Proposition 2.4.5, si U est un sous-module simple de $\mathrm{Res}\, V_\lambda$, alors

$$\mathrm{Res}\, V_\lambda \cong [\mathrm{Res}\, V_\lambda : U]\Sigma_{\widehat{g},U} \text{ et } o(\widehat{g}, U)[\mathrm{Res}\, V_\lambda : U] = \frac{f}{\mathfrak{o}}x. \qquad (4.1.14)$$

Soit E_1, l'algèbre d'endomorphismes $\mathrm{End}_{\widehat{B}}(\mathrm{Res}\, V_\lambda)$, de dimension

$$\dim_K(E_1) = o(\widehat{g}, U)([\mathrm{Res}\, V_\lambda : U])^2 \dim_K\big(\mathrm{End}_{\widehat{B}}(U)\big).$$

Soit $E := \mathrm{End}_{\widehat{A}}(\mathrm{Ind}\,\mathrm{Res}\, V_\lambda)$. D'une part, $\dim_K(E) = \frac{f^2}{\mathfrak{o}}$ car $\mathrm{Ind}\,\mathrm{Res}\, V_\lambda \cong \frac{f}{\mathfrak{o}}\Sigma_{\widehat{h},V_\lambda}$ et $\widehat{A}$ est semi-simple déployée. D'autre part, $\dim_K E = f\dim_K E_1$ parce que E est graduée par un groupe cyclique d'ordre f sur E_1 (cf. [19, Proposition 11.14]). Avec (4.1.14), il vient que

$$1 = x\,[\mathrm{Res}\, V_\lambda : U]\,\dim_K\big(\mathrm{End}_{\widehat{B}}(U)\big). \qquad (4.1.15)$$

Cette dernière égalité montre que la dimension $\dim_K\big(\mathrm{End}_{\widehat{B}}(U)\big)$ vaut 1, d'où l'assertion sur le caractère déployé de B. ∎

Remarques :

1. L'égalité (4.1.15) montre que $[\mathrm{Res}\, V_\lambda : U] = 1$. Par conséquent, la restriction de $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(K)$ à $\mathfrak{H}_{r,f,n}^{q,\mathbf{x}}(K)$ de tout module simple sur $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(K)$ est sans multiplicité.

2. La preuve de ce lemme donne un moyen de construire les sous-modules simples de $\mathrm{Res}\, V$ quand V est un module simple sur $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(K)$ en tant qu'espaces propres.

4.2 q-algèbres de Schur

Dans cette section, nous donnons une application du Théorème 2.2.1 qui permet de retrouver un résultat mentionné par J. Gruber et G. Hiss [50, Corollary 7.17].

4.2.1 Hypothèses

Nous allons utiliser certains des résultats obtenus dans la section précédente pour un choix spécial des paramètres. Afin de traiter les algèbres de Hecke de type D et B, prenons $r = 2$, $f = 2$, $d = 1$, $x_1 = 1$ et $\mathbf{Q} = (1, -1)$. Nous travaillerons sous les hypothèses **(HS)** suivantes.

Hypothèses (HS) : Soient n un entier naturel non nul, $(\mathcal{O}, K, k)$ un système p-modulaire, avec k algébriquement clos et p un nombre premier impair.

Soit q une puissance d'un nombre premier différent de p tel que l'ordre de $q \pmod p$ est impair.

Soient $\mathfrak{H} := \mathfrak{H}_{2,n}^{q,(1,-1)}(\mathcal{O})$, l'algèbre de Hecke de type B pour les paramètres q et $\mathbf{Q} = (1, -1)$, et $\mathfrak{H}' := \mathfrak{H}_{2,2,n}^{q,(1)}(\mathcal{O})$, l'algèbre de Hecke de type D pour les paramètres q et $\mathbf{x} = (1)$.

4.2.2 q-algèbres de Schur

Définition - Notation 4.2.1 *La* q-algèbre de Schur *de type B, resp. de type D, définie par J. Gruber et G. Hiss (*[50, §7]*) est l'algèbre d'endomorphismes :*

$$S(H) := \mathrm{End}_H(\bigoplus_J y_J H)$$

où $H = \mathfrak{H}$, resp. $H = \mathfrak{H}'$, J parcourt les sous-ensembles des sous-diagrammes maximaux de type A du diagramme de Dynkin de type B, resp. de type D, et

$$y_J := \sum_{w \in W_J} (-q)^{-l(w)} T_w$$

avec W_J comme dans la Définition - Notation 4.1.4.

Théorème et preuve

Énonçons un résultat obtenu par J. Gruber et G. Hiss dont une preuve repose sur le Théorème 2.3.1.

Théorème 4.2.1 ([50, Corollary 7.17]) *Supposons que les hypothèses* **(HS)** *sont satisfaites. Alors la matrice de décomposition de la q-algèbre de Schur $S(\mathfrak{H}')$ de type D est carrée unitriangulaire.*

Preuve : La q-algèbre de Schur cyclotomique $\mathcal{S}(\Lambda_2)$ introduite par Dipper, James et Mathas est (à isomorphisme près) :

$$\mathcal{S}(\Lambda_2) := \mathrm{End}_{\mathfrak{H}}(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_2} u_\lambda^- y_\lambda \mathfrak{H})$$

avec la notation de [63, §4] (voir [28, Définition 6.1] et [35, Remarque 2.5]) où Λ_2 est l'ensemble des bi-compositions de n. Il est clair que $S(\mathfrak{H})$ est de la forme $e\mathcal{S}(\Lambda_2)e$ pour un idempotent $e \in \mathcal{S}(\Lambda_2)$ et l'algèbre des endomorphismes des modules de Young ([50, Définition 7.5]) est aussi de la forme $e'S(\mathfrak{H})e'$ pour un idempotent $e' \in S(\mathfrak{H})$. D'une part, la matrice de décomposition de $S(\mathfrak{H})$ est une sous-matrice de la matrice de décomposition de $\mathcal{S}(\Lambda_2)$ qui est carrée unitriangulaire de taille $s \times s$, où s est le cardinal des bi-partitions de n, par [28, Corollaire 6.17] et [36, Théorème 6.3.2]. D'autre part, la matrice de décomposition de $S(\mathfrak{H})$ contient la matrice de décomposition des modules de Young qui est aussi carrée unitriangulaire de taille $s \times s$ d'après [50, Théorème 7.7]. Par conséquent, les trois matrices de décomposition sont égales. Les classes d'isomorphismes des facteurs directs indécomposables du module sur $\mathfrak{H}$, $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_2} u_\lambda^- y_\lambda \mathfrak{H}$, resp. $\bigoplus_J y_J \mathfrak{H}$ où J parcourt les sous-ensembles du sous-diagramme maximal de type A du diagramme de Dynkin de type B, sont les classes d'isomorphismes des modules de Young (de type B). En outre, $\bigoplus_J y_J \mathfrak{H}$ est stable sous l'automorphisme de $\mathfrak{H}$ associé à la graduation de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}'$. Les hypothèses **(HS)** ainsi que le Lemme 4.1.11 permettent d'appliquer le Théorème 2.2.1. Il vient que la matrice de décomposition de $\mathrm{Res}^{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{H}'} \bigoplus_J y_J \mathfrak{H} \cong \bigoplus_J y_J \mathfrak{H}' \oplus \bigoplus_J T_1 y_J T_1 \mathfrak{H}'$ est carrée unitriangulaire. Donc la matrice de décomposition de son algèbre d'endomorphismes, i.e., de la q-algèbre de Schur $S(\mathfrak{H}')$, l'est aussi . ∎

Troisième partie

Sur la conjecture de J. Gruber et G. Hiss

Chapitre 5

Introduction à la conjecture

L'objectif de cette troisième partie est d'étudier la conjecture énoncée par J. Gruber et G. Hiss, [50, §7.15], dans le cas des nombres de décomposition des algèbres de Hecke de type B et de type D. Nous l'appelerons conjecture **(GHIP)**. Dans un premier temps, nous généralisons et prouvons cette conjecture pour les algèbres de groupes de réflexions complexes $G(r, 1, n)$ et $G(r, f, n)$. Dans un second temps, nous montrons que les techniques utilisées dans le cas des algèbres de groupes ne sont pas directement applicables aux algèbres de Hecke associées à ces groupes. Nous étudierons les limites du raisonnement dans le cas particulier du type B et D. Nous donnerons, cependant, une condition portant sur des filtrations de produits tensoriels de modules de Specht sous-laquelle la conjecture **(GHIP)** est valable.

Avant de décrire ce qui se passe dans les algèbres de groupes, nous allons donner des formules exprimant des multiplicités (de modules dans d'autres modules) sur une sous-algèbre B, en fonction de multiplicités (de modules dans d'autres modules) sur une algèbre graduée sur B. Ceci permettra d'exposer le problème abordé dans cette dernière partie.

5.1 Premières formules

5.1.1 Formules générales

Plaçons-nous sous les conditions suivantes.

Hypothèses (Hyp) : Soient un entier r strictement positif, p un nombre premier ne divisant pas r et $(\mathcal{O}, K, k)$ un système p-

modulaire avec k algébriquement clos.

Soit ω une racine primitive r-ième de l'unité.

Soit A une $\mathcal{O}$-algèbre (libre de type fini) graduée par un groupe cyclique d'ordre r sur une sous-algèbre B : $A = \bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathfrak{a}^j B$ pour une unité $\mathfrak{a} \in A$ telle que $\mathfrak{a}B = B\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^r \in B$, d'automorphismes associés $h := h^{(\omega)}_{A/B}$ et $g := g^{(\mathfrak{a})}_{B/A}$.

Supposons que $\widehat{A} := A \otimes_{\mathcal{O}} K$ et $\widehat{B} := B \otimes_{\mathcal{O}} K$ sont semi-simples déployées.

Définition - Notation 5.1.1 *Le produit tensoriel* $- \otimes_{\mathcal{O}} K$ *sera abrégé en* $\widehat{-}$.

Le foncteur de restriction de $\mathrm{mod}(A)$ *dans* $\mathrm{mod}(B)$ *ou de* $\mathrm{mod}(\widehat{A})$ *dans* $\mathrm{mod}(\widehat{B})$ *sera noté indifféremment* Res .

Soit M un module sur A, h-stable, admettant une matrice de décomposition unitriangulaire h-stable.

Décomposons M, resp. $\widehat{M}$, en modules indécomposables,

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{m} m_i Y_i, \text{ resp. } \widehat{M} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} n_i V_i,$$

où les $Y_i,\ i \in [1,m]$, resp. les V_i, $i \in [1,n]$, sont non-isomorphes deux à deux. Pour tout $i \in [1,m]$, resp. $i \in [1,n]$, choisissons W_i, resp. U_i, un facteur direct indécomposable de $\mathrm{Res}\, Y_i$, resp. $\mathrm{Res}\, V_i$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, resp. $\tau \in \mathfrak{S}_m$, déterminées ainsi : pour tout $i \in [1,n]$, resp. $j \in [1,m]$, $V_i^{\widehat{h}}$ est isomorphe à $V_{(i)\sigma}$, resp. Y_j^g est isomorphe à $Y_{(j)\tau}$.

Nous cherchons des relations entre des multiplicités $[\widehat{Y_{i_1}} : V_{i_2}]$ et $[\widehat{W_{i_3}} : U_{i_4}]$ pour des entiers $i_1,\ i_3 \in [1,m],\ i_2,\ i_4 \in [1,n]$.

Fixons $i \in [1,n]$, $j \in [1,m]$.

Au début de la preuve du Théorème 2.3.1, nous avons montré que, si $i \leq \min(n,m)$, alors

$$[\mathrm{Res}\, V_i : U_i] = [\mathrm{Res}\, Y_i : W_i]. \tag{5.1.1}$$

Considérons l'isomorphisme

$$\widehat{Y_j} \cong \bigoplus_{s=0}^{o(\widehat{h},V_i)-1} [\widehat{Y_j} : V_i^{\widehat{h}^s}]\ V_i^{\widehat{h}^s} \oplus W,$$

où W est un module sur $\widehat{A}$ n'admettant aucun $V_i^{\widehat{h}^s}$, $s \in [0, o(\widehat{h}, V_i)-1]$, dans sa décomposition en modules simples. En restreignant cet isomorphisme sur $\widehat{B}$, le Lemme 2.4.2 implique que

$$[\operatorname{Res} Y_i : W_i] \bigoplus_{s=0}^{o(g,W_j)-1} \widehat{W_j^{g^s}} \cong$$
$$([\operatorname{Res} V_i : U_i] \sum_{t=0}^{o(\widehat{h},V_i)-1} [\widehat{Y_j} : V_i^{\widehat{h}^t}]) \bigoplus_{s=0}^{o(\widehat{g},U_i)-1} U_i^{\widehat{g}^s} \oplus \operatorname{Res} W. \quad (5.1.2)$$

Par choix de W, la Proposition 2.4.5 implique qu'aucun module $U_i^{\widehat{g}^s}$, avec $s \in [0, o(\widehat{g}, U_i)-1]$, n'apparaît pas dans la décomposition en modules simples de $\operatorname{Res} W$. Décomposons $\widehat{W_j}$ en modules simples :

$$\widehat{W_j} \cong \bigoplus_{s=0}^{o(\widehat{g},U_i)-1} [\widehat{W_j} : U_i^{\widehat{g}^s}]\, U_i^{\widehat{g}^s} \oplus W'$$

où W' est un facteur direct de $\operatorname{Res} W$. Pour tout $l \in [0, o(g, W_j)-1]$, il vient alors que

$$\widehat{W_j}^{\widehat{g}^l} \cong \bigoplus_{s=0}^{o(\widehat{h},U_i)-1} [\widehat{W_j} : U_i^{\widehat{g}^s}]\, U_i^{\widehat{g}^{s+l}} \oplus W'^{\widehat{g}^l}. \quad (5.1.3)$$

Soit $s \in [0, o(\widehat{g}, U_i) - 1]$, en faisant varier l dans (5.1.3), la multiplicité de $U_i^{\widehat{g}^s}$ dans $\bigoplus_{t=0}^{o(g,W_j)-1} \widehat{W_j^{g^t}}$ est $\sum_{l=0}^{o(g,W_j)-1} [\widehat{W_j} : U_i^{\widehat{g}^{s-l}}]$. D'après l'isomorphisme (5.1.2) et l'égalité (5.1.1), c'est aussi $\sum_{t=0}^{o(\widehat{h},V_i)-1} [\widehat{Y_j} : V_i^{\widehat{h}^t}]$. Nous avons montré

$$\sum_{l=0}^{o(g,W_j)-1} [\widehat{W_j} : U_i^{\widehat{g}^l}] = \sum_{t=0}^{o(\widehat{h},V_i)-1} [\widehat{Y_j} : V_i^{\widehat{h}^t}]. \quad (5.1.4)$$

Remarque : Dans l'égalité (5.1.4), la symétrie entre le membre de gauche et celui de droite correspond aux relations entre les foncteurs adjoints de restriction et d'induction et provient de la théorie de Clifford (cf. Chapitre 2).

5.1.2 Formules restreintes

Supposons désormais que r est un nombre premier.

La formule (5.1.4) donne quatre cas à considérer (à cause des formules de la Proposition 2.4.5). Explicitons les quatre égalités. Pour cela, supposons fixés deux entiers $i \in [1,n]$ et $j \in [1,m]$.

$\underline{Cas\ 1}$: $o(h,Y_j) = o(\widehat{h},V_i) = r$ (donc $o(g,W_j) = 1 = [\operatorname{Res} Y_j : W_j]$). Le module restreint $\operatorname{Res} Y_j$ est encore un module indécomposable sur B, isomorphe à W_j. Nous avons l'égalité

$$[\widehat{W_j} : U_i] = \sum_{l=0}^{r-1} [\widehat{Y_j} : V_i^{\widehat{h}^l}].$$

$\underline{Cas\ 2}$: $o(h,Y_j) = r$, $o(\widehat{h},V_i) = 1$, alors

$$[\widehat{W_j} : U_i] = [\widehat{Y_j} : V_i].$$

$\underline{Cas\ 3}$: $o(h,Y_j) = 1$, $o(\widehat{h},V_i) = r$. Comme $\frac{r}{o(g,W_j)}$ est un carré, selon la Proposition 2.4.5, $o(g,W_j) = r$. De plus, $o(\widehat{g},U_i) = 1$, i.e., U_i est $\widehat{g}$-stable. Le membre de gauche de (5.1.4) s'écrit alors $r[\widehat{W_j} : U_i]$. Comme Y_j est h-stable, pour tout $l \in [0,r-1]$, la multiplicité de $V_i^{\widehat{h}^l}$ dand $\widehat{Y_j}$ est égale à $[\widehat{Y_j} : V_i]$. Le membre de droite de (5.1.4) dans ce cas devient $r[\widehat{Y_j} : V_i]$. Finalement,

$$[\widehat{W_j} : U_i] = [\widehat{Y_j} : V_i].$$

$\underline{Cas\ 4}$: $o(h,Y_j) = o(\widehat{h},V_i) = 1$ donne immédiatement

$$\sum_{l=0}^{r-1} [\widehat{W_j} : U_i^{\widehat{g}^l}] = [\widehat{Y_j} : V_i]. \tag{5.1.5}$$

Remarques :

1. La symétrie observée à la remarque précédente est claire dans le cas particulier où r est choisi premier. Les cas 1 et 4, resp. 2 et 3, se correspondent.

2. Dans le cas où les nombres de décomposition de M, module sur A, sont connus, alors ceux du module restreint $\mathrm{Res}\, M$ le sont aussi, à l'exception de ceux qui relèvent du quatrième cas considéré ci-dessus.

5.2 Conjecture (GHPI)

Intéressons-nous au cas indéterminé (5.1.5) dans le cadre d'une algèbre de Hecke de type B graduée par groupe cyclique d'ordre 2 sur une algèbre de Hecke de type D.

Hypothèses : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(\mathcal{O}, K, k)$, un système p-modulaire, avec k algébriquement clos et p un nombre premier impair.

Soit q une puissance d'un nombre premier différent de p tel que l'ordre de $q \pmod p$ est impair.

Soient $\mathfrak{H} := \mathfrak{H}_{2,n}^{q,(1,-1)}(\mathcal{O})$, l'algèbre de Hecke de type B pour les paramètres q et $\mathbf{Q} = (1, -1)$ et $\mathfrak{H}' := \mathfrak{H}_{2,2,n}^{q,(1)}(\mathcal{O})$, l'algèbre de Hecke de type D pour les paramètres q et $\mathbf{x} = (1)$.

Les modules simples de $\widehat{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}_{2,n}^{q,(1,-1)}(K)$, resp. indécomposables de $\mathfrak{H}$, sont en bijection avec l'ensemble Λ_2 des bi-partitions de n, resp. $\Lambda_2^0 \subseteq \Lambda_2$. Soit h, l'automorphisme de $\mathfrak{H}$ associé à la graduation $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \oplus T_1\mathfrak{H}'$. Le module paramétré par une bi-partition (α, β) de n, avec l'action de $\widehat{\mathfrak{H}}$, resp. de $\mathfrak{H}$, tordue par $\widehat{h}$, resp. h, est isomorphe au module indexé par la bi-partition (β, α). Lorsque le travail a lieu sur $\widehat{\mathfrak{H}}$, cela a été vu au Lemme 4.1.9. Nous le montrerons de façon plus générale au chapitre 7. Par conséquent, la théorie de Clifford implique que le module correspondant au couple (α, β), comme ci-dessus, ne se restreint pas en un module simple de $\widehat{\mathfrak{H}'}$, resp. indécomposable de $\mathfrak{H}'$, si et seulement si $\alpha = \beta$. Indexons par $(\alpha, +)$ et $(\alpha, -)$ les deux modules non-isomorphes qui apparaissent dans la décomposition de la restriction d'un tel module. Avec des notations évidentes, le quatrième cas cité plus haut donne la formule suivante entre les nombres de décomposition d'_- de $\mathfrak{H}'$ et d_- de $\mathfrak{H}$:

$$\begin{aligned} d_{(\lambda,\lambda),(\alpha,\alpha)} &= d'_{(\lambda,+),(\alpha,+)} + d'_{(\lambda,-),(\alpha,+)} \\ &= d'_{(\lambda,+),(\alpha,-)} + d'_{(\lambda,-),(\alpha,-)}, \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

pour $(\lambda, \lambda) \in \Lambda_2$ et $(\alpha, \alpha) \in \Lambda_2^0$.

La conjecture de J. Gruber et G. Hiss, [50, §7.15], implique la conjecture concernant les nombres de décomposition de $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}'$, appelée conjecture **(GHPI)** :

pour tout $(\lambda, \lambda) \in \Lambda_2,\ (\alpha, \alpha) \in \Lambda_2^0$,

$$\begin{aligned} d'_{(\lambda,+),(\alpha,-)} &= 0, \text{ soit aussi} \\ d'_{(\lambda,-),(\alpha,+)} &= 0, \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

ou encore, avec (5.2.1),

$$\begin{aligned} d_{(\lambda,\lambda),(\alpha,\alpha)} &= d'_{(\lambda,+),(\alpha,+)} \\ &= d'_{(\lambda,-),(\alpha,-)}. \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

En fait, la conjecture de Gruber-Hiss porte sur les nombres de décomposition des modules de Young de $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}'$. Or tout module projectif indécomposable Y de $\mathfrak{H}$ est un facteur direct d'un $e_{i,n-i}\mathfrak{H}$ pour un entier $i \in [0, n]$, où l'idempotent $e_{i,n-i}$ de $\mathfrak{H}$ est défini à la Définition - Notation 7.1.2. La composition $\lambda = (1, \ldots, 1)$ de n est i-compatible, selon les termes de [50], et $e_{i,n-i}\mathfrak{H} = e_{i,n-i}y_\lambda\mathfrak{H}$. Par conséquent, Y est un (i, B_n)-module de Young. Tout module projectif indécomposable W de $\mathfrak{H}'$ apparaît comme un facteur direct de la restriction à $\mathfrak{H}'$ d'un module projectif indécomposable sur $\mathfrak{H}$, donc d'un module de Young de $\mathfrak{H}$. Le module W est alors un module de Young de $\mathfrak{H}'$. La matrice de décomposition de $\mathfrak{H}$, resp. de $\mathfrak{H}'$, s'obtient à partir de la matrice de décomposition des modules de Young de $\mathfrak{H}$, resp. de $\mathfrak{H}'$, en ôtant les colonnes correspondant aux modules de Young non-projectifs. C'est pourquoi, la conjecture de Gruber-Hiss implique la conjecture **(GHPI)**.

Au chapitre suivant, cette dernière est généralisée et prouvée pour les algèbres de groupes de réflexions complexes $G(r, 1, n)$ graduées sur les algèbres de groupes de type $G(r, f, n)$, pour des entiers f et r strictement positifs, f divisant r. Dans le cas particulier où $f = 2$ et $r = 2$, la conjecture **(GHPI)** est alors vérifiée.

Chapitre 6

Algèbres de groupes de réflexions complexes

Dans ce chapitre, nous travaillons avec les algèbres de groupes de réflexions complexes $G(r, f, n)$ (cf. le rappel 4.1.1) et leur catégorie de modules. Nous les décrivons à partir d'équivalences de Morita et d'autres catégories de modules bien connues. Nous sommes alors en mesure d'établir des relations entre des modules de l'algèbre du groupe $G(r, f, n)$ et de l'algèbre du groupe $G(r, 1, n)$ qui est graduée sur l'algèbre de $G(r, f, n)$. Nous discutons ensuite de la nullité de certains nombres de décomposition de cette dernière algèbre en fonction de leur indice. En particulier, la conjecture **(GHPI)** s'avère vérifiée dans le cas des algèbres des groupes de type B et D.

Commençons par énoncer des résultats clés pour ce chapitre en énonçant certaines équivalences de Morita.

6.1 Équivalences de Morita

6.1.1 Lemme clé

Nous avons besoin de la

Définition - Notation 6.1.1 *Si $\mathcal{O}$ est un anneau commutatif, A est une $\mathcal{O}$-algèbre commutative et $(G, *)$ est un groupe fini agissant (à droite) sur A par des automorphismes de $\mathcal{O}$-algèbre, nous définissons $G \ltimes A$ comme l'ensemble constitué par les combinaisons $\mathcal{O}$-linéaires de couples (g, a), pour $g \in G,\ a \in A$, muni d'une structure de $\mathcal{O}$-algèbre. La multiplication de deux éléments $(g_1, a_1)(g_2, a_2)$, pour $g_1, g_2 \in G$, $a_1, a_2 \in A$ est donnée par l'élement $(g_1 g_2, a_1 *_{g_2} a_2)$.*

Le lemme général suivant permet d'établir des équivalences de Morita pour les algèbres de groupes de réflexions complexes de type $G(r, f, n)$.

Lemme 6.1.1 ([14, Exercice 18.6]) *Soient $\mathcal{O}$ un anneau commutatif noethérien, A une $\mathcal{O}$-algèbre commutative $\mathcal{O}$-libre de rang $n \in \mathbb{N}$ et $(G, *)$ un groupe fini agissant sur A par des automorphismes de $\mathcal{O}$-algèbre. Alors, l'algèbre $G \ltimes A$ est Morita équivalente au produit des algèbres de groupes $\prod_i \mathcal{O}[G_i]$, où i parcourt les G-classes des idempotents primitifs de A et G_i désigne le centralisateur d'un élément de i.*

Preuve : $\mathcal{O}$ est noethérien, l'unité de l'algèbre commutative A admet une décomposition en idempotents primitifs (unique à l'ordre près). Comme G agit par automorphisme d'algèbre, il laisse stable l'ensemble des idempotents primitifs de A. Dans chaque G-classe i d'idempotents primitifs, fixons un représentant e_i de centralisateur G_i. Notons $\mathbf{e}_i$ la somme des idempotents dans la G-classe i. Il est facile de voir que $\mathbf{e}_i$ est un idempotent central de $G \ltimes A$. Il vient alors que $G \ltimes A = \mathbf{e}_i\, G \ltimes A \oplus (1 - \mathbf{e}_i)\, G \ltimes A$. Ainsi $G \ltimes A$ se décompose en la somme $\bigoplus_i \mathbf{e}_i\, G \ltimes A$, où i parcourt les G-classes des idempotents primitifs de A. Fixons un tel i. Soient $\{g_{i,j} \in G,\ j \in [1, l_i]\}$ des représentants à droite des classes d'équivalence correspondant au sous-groupe G_i de G : $G = \bigcup_{j=1}^{l_i} G_i g_{i,j}$. Avec ces notations, $\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{l_i} e_i * g_{i,j}$ et $\mathbf{e}_i\, G \ltimes A = \bigoplus_{j=1}^{l_i} (e_i * g_{i,j})\, G \ltimes A$, soit encore $G \ltimes A\, \mathbf{e}_i = \bigoplus_{j=1}^{l_i} g_{i,j}^{-1} e_i\, G \ltimes A$. Il est clair que $e_i\, G \ltimes A$ est un progénérateur de l'algèbre $G \ltimes A\, \mathbf{e}_i$ (d'unité $\mathbf{e}_i$). Par des propriétés classiques, l'algèbre $G \ltimes A\, \mathbf{e}_i$ est Morita équivalente à l'algèbre $e_i\, G \ltimes A\, e_i$.

Tous les éléments de $e_i\, G \ltimes A\, e_i$ sont de la forme $\sum_{g \in G_i} r_g (g, e_i)$, pour des coefficients $r_g \in \mathcal{O}$. L'application
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}[G_i] & \to & e_i\, G \ltimes A\, e_i \\ \sum_{g \in G_i} r_g g & \mapsto & \sum_{g \in G_i} r_g (g, e_i) \end{array}$$
où les $r_g \in \mathcal{O}$, est un isomorphisme d'algèbres. Le lemme est démontré. ∎

Dans le rappel sur les groupes de réflexions complexes en 4.1.1, nous avons vu que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur les groupes $(\mu_r)^n$ et $\mu_r^n(d)$ selon la formule (4.1.1), donc aussi sur leur $\mathcal{O}$-algèbre de groupe, par $\mathcal{O}$-linéarité, pour $\mathcal{O}$ comme dans le Lemme 6.1.1. L'application de ce lemme à de telles algèbres est l'objet de la sous-section suivante.

6.1.2 Équivalence de Morita pour l'algèbre de $G(r, f, n)$

Désormais, jusqu'à la fin de ce chapitre, nous travaillerons sous les hypothèses **(HAG)** suivantes.

Hypothèses (HAG) : Soit $(\mathcal{O}, K, k)$ un système p-modulaire, pour un nombre premier p et k algébriquement clos.

Soient les entiers strictement positifs r, d, f et n tels que r est premier avec p, $r = df$ et $\rho := (r, f, n)$.

Soient ζ, resp. ω, une racine primitive r-ième de $\mathcal{O}$, resp. de $\mathbb{C}$.

Le but de cette sous-section est de donner une équivalence de Morita pour l'algèbre $\mathcal{O}G(r, f, n)$. Dans ce dessein, introduisons les notations et définitions suivantes.

Définition - Notation 6.1.2 *Toute* composition λ de n de hauteur r *sera notée* $\lambda \models^r n$. *Soit* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, *une telle composition.*

Nous noterons s_λ^ρ *le plus petit entier strictement positif* s *tel que pour tout* $i \in [1, r]$, $\lambda_i = \lambda_{i+sd}$, *les indices étant considérés modulo* r. *L'entier* s_λ^ρ *divise* f *et* n. *Posons*

$$\sigma_\lambda^\rho := \frac{r}{ds_\lambda^\rho},\ n_\lambda^\rho := \frac{n}{\sigma_\lambda^\rho}.$$

Nous désignerons par $\lambda(\rho)$ *la* $s_\lambda^\rho d$*-composition* $\lambda(\rho) := (\lambda_1, \ldots, \lambda_{s_\lambda^\rho d})$.

> Nous omettrons l'exposant ρ dans les notations précédentes quand il n'y aura pas d'ambigüité sur le triplet (r, f, n).

Il est aisé de montrer que s_λ divise f en utilisant la division euclidienne de f par s_λ et le fait que, pour tout $i \in [1, r]$, $\lambda_i = \lambda_{i+r}$, avec les conventions précédentes sur les indices.

Par ailleurs, σ_λ divise n, parce que, pour tout entier i,

$$\lambda_{1+is_\lambda d} + \lambda_{2+is_\lambda d} + \ldots + \lambda_{(i+1)s_\lambda d} = \frac{n}{\sigma_\lambda}.$$

La composition $\lambda(\rho)$ est donc une $s_\lambda d$-composition de n_λ.

Rappelons que toute composition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ de n détermine un sous-groupe de Young $\mathfrak{S}_\lambda$ qui est le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ isomorphe à $\mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{\lambda_n}$:

$$\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\{1,\ldots,\lambda_1\}} \times \mathfrak{S}_{\{\lambda_1+1,\ldots,\lambda_1+\lambda_2\}} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{\{1+\lambda_1+\ldots+\lambda_{r-1},\ldots,\lambda_1+\ldots+\lambda_r\}}.$$

Tout groupe cyclique d'ordre r agit sur l'ensemble des compositions de n de hauteur r. Si $\lambda \models^r n$ s'écrit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, alors pour tout entier i,

$$\lambda * \mathrm{ad}_i := (\lambda_{1-i}, \lambda_{2-i}, \ldots, \lambda_{r-i}), \tag{6.1.1}$$

les indices étant considérés modulo r, de représentants à valeurs dans $[1, r]$.

Définition - Notation 6.1.3 *Nous noterons $\overset{\sim}{}_\rho$ la relation d'équivalence sur l'ensemble des compositions de n de hauteur r : si μ et ν sont de telles compositions, $\mu \overset{\sim}{}_\rho \nu$ si et seulement si il existe un entier t tel que $\nu = \mu * ad_{td}$.*

Soit $\mathcal{L}_\rho$ l'ensemble formé par les compositions maximales pour l'ordre lexicographique de chaque classe d'équivalence $\overset{\sim}{}_\rho$.

Terminons par une définition moins combinatoire,

Définition - Notation 6.1.4 *Soient i un entier, j un entier strictement positif, l'élément $w_i^{(j)}$ est la permutation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_j$ donnée par l'addition de i modulo j, les valeurs étant prises dans l'intervalle $[1, j]$. Par convention, $w_i := w_i^{(n)}$.*

Ces définitions acquises, donnons un résultat préliminaire.

Lemme 6.1.2 *Soit λ une composition de n de hauteur r. Le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par $\mathfrak{S}_\lambda$ et $w_{n_\lambda^\rho}^{(n)}$ est isomorphe au groupe produit semi-direct $(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda^\rho} \rtimes < w_{n_\lambda^\rho}^{(n)} >$.*

Preuve : Afin d'alléger encore les écritures, nous poserons $w := w_{n_\lambda}$. Remarquons que pour tout entier i, w^i est l'addition de in_λ modulo n. Tout élément $\sigma \in \mathfrak{S}_\lambda$ est un produit d'éléments de la forme $w^{n-i}\sigma_{i+1}w^i$ pour $i \in [0, \sigma_\lambda - 1]$ et $\sigma_i \in \mathfrak{S}_{\lambda(\rho)}$. Il existe donc une correspondance bijective entre les permutations de $\mathfrak{S}_\lambda$ et les σ_λ-uplets d'éléments de $\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)}$. Avec les notations précédentes, σ est associée à $s := (\sigma_1, \ldots, \sigma_{\sigma_\lambda})$. Dans cette identification, le groupe cyclique d'ordre σ_λ engendré par w agit sur $(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda}$ comme sur $\mathfrak{S}_\lambda$. À savoir, w agit sur s comme w agit (par conjugaison à droite) sur $\sigma = \sigma_1(\sigma_2)^w \ldots (\sigma_{\sigma_\lambda})^{w^{\sigma_\lambda - 1}}$:

$$s * w := (\sigma_{\sigma_\lambda}, \sigma_1, \ldots, \sigma_{\sigma_\lambda - 1}).$$

Grâce à cette opération, il est trivial que le groupe engendré par $\mathfrak{S}_\lambda$ et w est isomorphe au groupe produit semi-direct $(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda^\rho} \rtimes < w >$. La multiplication est donnée ainsi. Si $s, t \in (\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda}$ et $i, j \in [0, \sigma_\lambda - 1]$, alors

$$(w^i, s)(w^j, t) = (w^{i+j}, s * w^j t).$$

Nous pouvons vérifier que cette multiplication est compatible à celle du groupe $<\mathfrak{S}_\lambda, w>$ car si $\sigma \in \mathfrak{S}_\lambda$, resp. $\tau \in \mathfrak{S}_\lambda$, est l'élément associé à s, resp. t, alors

$$w^i \sigma w^j \tau = w^{i+j} s^{w^i} t.$$

Le lemme est démontré. ∎

Nous avons rassemblé tous les outils pour énoncer la

Proposition 6.1.3 *La $\mathcal{O}$-algèbre $\mathcal{O}G(r, f, n)$ est Morita équivalente au produit des $\mathcal{O}$-algèbres* $\prod_{\lambda \in \mathcal{L}_\rho} \mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda^\rho} \rtimes < w_{n_\lambda^\rho}^{(n)} >$.

Preuve : Cette proposition est une application du Lemme 6.1.1. Par conséquent, nous allons d'abord construire les idempotents de l'algèbre du groupe $G(r, f, n)$ en suivant la méthode décrite dans ce lemme et dans sa preuve pour le choix de $A = \mathcal{O}\mu_r^n(f)$ (cf. la Définition - Notation **??**) et $G = \mathfrak{S}_n$ agissant sur A comme il l'a été rappelé en (4.1.1).

Explicitons d'abord les idempotents primitifs de $\mathcal{O}\mu_r^n(f)$. Construisons-les, par exemple, en utilisant la théorie des caractères sur l'algèbre de groupe $K\mu_r^n(f)$ qui est semi-simple d'après le théorème de Maschke.

Pour tout $\mathbf{j} = (\omega^{j_1}, \ldots, \omega^{j_n}) \in (\mu_r)^n$, où les j_i sont des entiers, soit

$\chi_{\mathbf{j}}$ la fonction définie sur $K(\mu_r)^n$ par linéarité comme suit. Pour tout $\mathbf{w} = (\omega^{i_1}, \ldots, \omega^{i_n}) \in (\mu_r)^n$, avec $i_j \in \mathbb{Z}$,

$$(\mathbf{w})\chi_{\mathbf{j}} = \zeta^{i_1 j_1 + \ldots + i_n j_n}.$$

Nous noterons $\chi_{\mathbf{j}}|_{\mu_r^n(f)}$ la restriction de la fonction $\chi_{\mathbf{j}}$ à $K\mu_r^n(f)$. C'est un caractère irréductible de $K\mu_r^n(f)$. Si un tel $\mathbf{j}$ est fixé, il est facile de voir que les seuls $\mathbf{j}' \in (\mu_r)^n$ tels que $\chi_{\mathbf{j}}|_{\mu_r^n(f)} = \chi_{\mathbf{j}'}|_{\mu_r^n(f)}$ sont exactement les éléments de la forme $\omega^{sd}\mathbf{j}$ pour un entier s, i.e., $\mathbf{j}' = (\omega^{j_1+sd}, \ldots, \omega^{j_n+sd})$.
Sur $(\mu_r)^n$, mettons la relation d'équivalence également notée $\widetilde{\ }_\rho$: si $\mathbf{j}, \mathbf{j}' \in (\mu_r)^n$, alors $\mathbf{j} \widetilde{\ }_\rho \mathbf{j}'$ si et seulement si il existe un entier s tel que $\mathbf{j} = \omega^{sd}\mathbf{j}'$. Les classes d'équivalence pour cette relation sont au nombre de $\frac{r^n}{f}$ qui est aussi le cardinal de $\mu_r^n(f)$. Choisissons-les pour indexer les caractères irréductibles de $K\mu_r^n(f)$. Ils paramètrent aussi les idempotents primitifs de $K\mu_r^n(f)$. Si $\widetilde{\mathbf{j}}$ est une classe de $(\mu_r)^n/\widetilde{\ }_\rho$ de représentant $\mathbf{j} \in (\mu_r)^n$, l'idempotent correspondant à $\widetilde{\mathbf{j}}$ est

$$e_{\widetilde{\mathbf{j}}} := \frac{f}{r^n} \sum_{\mathbf{w} \in \mu_r^n(f)} (\mathbf{w})\chi_{\mathbf{j}}\ \mathbf{w}. \tag{6.1.2}$$

L'entier r est une unité de $\mathcal{O}$. L'élément $e_{\widetilde{\mathbf{j}}}$ appartient à la $\mathcal{O}$-algèbre de groupe $\mathcal{O}\mu_r^n(f)$. L'ensemble des idempotents primitifs de $\mathcal{O}\mu_r^n(f)$ est formé par les $\frac{r^n}{f}$ éléments $e_{\widetilde{\mathbf{j}}}$, pour $\widetilde{\mathbf{j}}$ variant dans $(\mu_r)^n/\widetilde{\ }_\rho$.

A présent, fixons $\mathbf{j} = (\omega^{j_1}, \ldots, \omega^{j_n}) \in (\mu_r)^n$ de classe $\widetilde{\mathbf{j}}$ dans $(\mu_r)^n/\widetilde{\ }_\rho$. Calculons l'orbite de $e_{\widetilde{\mathbf{j}}}$ sous l'action de $G = \mathfrak{S}_n$.
Soit $\pi \in G$. Regardons comment opère π sur $e_{\widetilde{\mathbf{j}}}$:

$$\begin{aligned} e_{\widetilde{\mathbf{j}}} * \pi &= \frac{f}{r^n} \sum_{\mathbf{w}=(\omega^{i_1},\ldots,\omega^{i_n}) \in \mu_r^n(f)} \zeta^{i_1 j_1 + \ldots + i_n j_n} (\omega^{i_{(1)\pi^{-1}}}, \ldots, \omega^{i_{(n)\pi^{-1}}}) \\ &= \frac{f}{r^n} \sum_{\mathbf{w}=(\omega^{i_1},\ldots,\omega^{i_n}) \in \mu_r^n(f)} \zeta^{i_1 j_{(1)\pi^{-1}} + \ldots + i_n j_{(n)\pi^{-1}}} \mathbf{w}. \end{aligned}$$

La dernière expression n'est autre que l'idempotent $e_{\widetilde{\mathbf{j}*\pi}}$ où $\mathbf{j} * \pi = (\omega^{j_{(1)\pi^{-1}}}, \ldots, \omega^{j_{(n)\pi^{-1}}})$ et $\widetilde{\mathbf{j} * \pi}$ est la classe de $\mathbf{j} * \pi$ dans $(\mu_r)^n/\widetilde{\ }_\rho$. Comme l'action de G sur $(\mu_r)^n$ ne fait que permuter les composantes, il est clair que cette action passe au quotient par la relation $\widetilde{\ }_\rho$. Définir $\widetilde{\mathbf{j}} * \pi := \widetilde{\mathbf{j} * \pi}$ a bien un sens. Avec ces notations, nous venons de montrer que

$$e_{\widetilde{\mathbf{j}}} * \pi := e_{\widetilde{\mathbf{j}*\pi}}. \tag{6.1.3}$$

À tout $\mathbf{j} = (\omega^{j_1}, \ldots, \omega^{j_n}) \in (\mu_r)^n$, pour des entiers j_i, correspond une composition de hauteur r de n notée $\lambda(\mathbf{j}) = (\lambda(\mathbf{j})_1, \ldots, \lambda(\mathbf{j})_r)$. À savoir, pour tout $i \in [1, r]$,

$$\lambda(\mathbf{j})_i := \#\{s \in [1, n]\,;\, j_s \equiv i - 1 \pmod r\}.$$

En outre, à toute composition $\lambda \models^r n$, correspond un élement de $(\mu_r)^n$ noté $\mathbf{j}(\lambda)$ qui est le n-uplet

$$(\underbrace{\omega^0, \ldots, \omega^0}_{\lambda_1 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\omega^{r-1}, \ldots, \omega^{r-1}}_{\lambda_r \text{ fois}}).$$

Grâce à l'égalité (6.1.3), il est facile de voir que l'orbite de $e_{\widetilde{\mathbf{j}}}$ sous l'action de G est formée des idempotents e_x pour des classes $x \in (\mu_r)^n/\widetilde{\ }_\rho$ telles qu'il existe un représentant $\mathbf{j}' \in (\mu_r)^n$ satisfaisant $\lambda(\mathbf{j}) = \lambda(\mathbf{j}')$. L'ensemble des $\mathbf{j}' \in (\mu_r)^n$ tels que $e_{\widetilde{\mathbf{j}'}}$ est dans la même orbite que $e_{\widetilde{\mathbf{j}}}$ est l'ensemble des $\mathbf{j}'$ tels qu'il existe un entier t vérifiant la propriété : pour tout $i \in [0, r-1]$, $\lambda(\mathbf{j})_i = \lambda(\mathbf{j}')_{i+td}$, les indices étant considérés modulo r, soit encore l'ensemble des $\mathbf{j}'$ tels que $\lambda(\mathbf{j}) \widetilde{\ }_\rho\, \lambda(\mathbf{j}')$. Ainsi, l'ensemble des classes d'équivalence sur les compositions de n de hauteur r, pour la relation $\widetilde{\ }_\rho$, est un ensemble de paramètres pour les orbites des idempotents de $\mathcal{O}\mu_r^n(f)$ sous l'action de G. L'ensemble des idempotents $e_\lambda^\rho := e_{\widetilde{\mathbf{j}(\lambda)}}$, pour $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$, est un ensemble complet de représentants des orbites pour l'action de G sur les idempotents primitifs de $\mathcal{O}\mu_r^n(f)$.

Soit $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$. Calculons le stabilisateur de e_λ^ρ sous l'action de G. Soit π un élément de ce stabilisateur. D'après l'égalité (6.1.3), π vérifie $\widetilde{\mathbf{j}} * \pi = \widetilde{\mathbf{j}}$, pour $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\lambda)$. Écrivons $\mathbf{j}$ sous la forme $(\omega^{j_1}, \ldots, \omega^{j_n}) \in (\mu_r)^n$. Les n-uplets $(\omega^{j_1}, \ldots, \omega^{j_n})$ et $(\omega^{j_{(1)\pi^{-1}}}, \ldots, \omega^{j_{(n)\pi^{-1}}})$ sont $\widetilde{\ }_\rho$-équivalents. Il existe un entier s tel que pour tout $i \in [1, n]$, $j_i \equiv j_{(i)\pi^{-1}} + sd \pmod r$. Nous en déduisons que pour tout $i \in [1, r]$, $\lambda_i = \lambda_{i+sd}$ (les indices étant considérés modulo r à valeurs dans $[1, r]$). Il vient alors que le groupe stabilisateur cherché est le sous-groupe de G engendré par $\mathfrak{S}_\lambda$ et w_{n_λ}.

Finalement, les Lemmes 6.1.1 et 6.1.2 permettent de conclure. ∎

Définition - Notation 6.1.5 *Notons F_ρ et G_ρ les foncteurs à l'origine de l'équivalence de Morita de la Proposition* 6.1.3*,*

$$F_\rho : \mathrm{mod}\big(\mathcal{O}G(r, f, n)\big) \to \prod_{\lambda \in \mathcal{L}_\rho} \mathrm{mod}(\mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda^\rho} \rtimes < w_{n_\lambda^\rho}^{(n)} >), \quad (6.1.4)$$

et G_ρ le foncteur réciproque.

Pour tout $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$, e^ρ_λ est l'idempotent utilisé dans la preuve de la Proposition 6.1.3*, unité de l'algèbre $e^\rho_\lambda \mathcal{O}G(r,f,n)e^\rho_\lambda$, isomorphe à l'algèbre $\mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma^\rho_\lambda} \rtimes < w^{(n)}_{n^\rho_\lambda} >$. Le produit tensoriel sur ces algèbres sera noté $\otimes^\rho_\lambda$.*

Détaillons les images des foncteurs F_ρ et G_ρ en suivant les étapes de la preuve du Lemme 6.1.1. Soient V un module sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$ et $\mathbf{e}$, la somme des idempotents $\sum_{\lambda\in\mathcal{L}_\rho} e^\rho_\lambda$. Le module $(V)F_\rho = V\mathbf{e}$ est un module sur $\prod_{\lambda\in\mathcal{L}_\rho} \mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w^{(n)}_{n^\rho_\lambda} >$. Il se décompose comme le produit $\prod_{\lambda\in\mathcal{L}_\rho} Ve^\rho_\lambda$ où Ve^ρ_λ est un module sur $\mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma^\rho_\lambda} \rtimes < w^{(n)}_{n^\rho_\lambda} >$. Soit $v \in V$. Pour tout $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$, l'action sur $v\mathbf{e} \in V\mathbf{e}$ d'un élément $g_\lambda \in (\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w^{(n)}_{n^\rho_\lambda} >$ (identifié au stabilisateur de e^ρ_λ) est donnée par l'action de $e^\rho_\lambda g_\lambda$ sur v. Inversement, pour tout $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$, soit V_λ un module sur $\mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w^{(n)}_{n^\rho_\lambda} >$ considéré aussi comme un module sur $e^\rho_\lambda \mathcal{O}G(r,f,n)e^\rho_\lambda$. Posons $V := \prod_{\lambda\in\mathcal{L}_\rho} V_\lambda$. C'est un module sur la $\mathcal{O}$-algèbre $\prod_{\lambda\in\mathcal{L}_\rho} \mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w^{(n)}_{n_\lambda} >$. Le module $(V)G_\rho$ est le module sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$, $\bigoplus_{\lambda\in\mathcal{L}_\rho} V_\lambda \otimes^\rho_\lambda e^\rho_\lambda \mathcal{O}G(r,f,n)$.

Toutes les constructions précédentes ont été établies sur l'anneau des coefficients $\mathcal{O}$, par conséquent elles sont aussi valables sur k et K.

Définition - Notation 6.1.6 *Les extensions à K, resp. à k, des foncteurs F_ρ et G_ρ seront notées $\widehat{F}_\rho$ et $\widehat{G}_\rho$, resp. $\overline{F}_\rho$ et $\overline{G}_\rho$.*

Pour tout $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$, l'image de e^ρ_λ dans $kG(r,f,n)$ sera désignée par $\overline{e}^\rho_\lambda$. L'analogue de $\otimes^\rho_\lambda$ sur K, resp. sur k, sera noté $\widehat{\otimes}^\rho_\lambda$, resp. $\overline{\otimes}^\rho_{k,\lambda}$.

6.2 Modules pour l'algèbre du groupe $G(r,f,n)$

Nous conservons les hypothèses **(HAG)** et les notations de la section précédente. Grâce aux équivalences de Morita qui y sont données,

nous sommes en mesure d'expliciter l'ensemble des (classes d'isomorphismes des) modules projectifs indécomposables de $\mathcal{O}G(r, f, n)$ ainsi que les modules simples de $KG(r, f, n)$ et de $kG(r, f, n)$.

Définition - Notation 6.2.1 *S'il existe un plus petit entier naturel s strictement positif tel que $1+q+\ldots+q^{s-1}$ est congru à $0 \pmod{J(\mathcal{O})}$, nous le noterons $\mathfrak{o}$, sinon nous poserons $\mathfrak{o} := 0$.*

Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ une composition de n de hauteur r. Soit α un r-uplet de partitions $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ où pour tout $i \in [1, r]$, α_i est une partition, resp. partition $\mathfrak{o}$-régulière, de λ_i. Nous noterons $\alpha_i \vdash \lambda_i$, resp. $\alpha_i \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda_i$ et $\alpha \vdash \lambda$, resp. $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$.

Soit α comme dans la définition précédente. Pour $R \in \{\mathcal{O}, K, k\}$, $S_{\alpha_i}(R)$ est le module de Specht (selon la définition de [59] ou de [28] spécialisée au cas des algèbres de groupes de type A) associé à la partition α_i de l'algèbre de Hecke $\mathfrak{H}^{q_R}_{\mathfrak{S}_{\lambda_i}}(R)$, où $q_R := 1_R \otimes_{\mathcal{O}} q$. Le module $S_{\alpha_1}(R) \otimes_R \ldots \otimes_R S_{\alpha_r}(R)$ sur $\mathfrak{H}^{q_R}_{\mathfrak{S}_{\lambda_1}}(R) \otimes_R \ldots \otimes_R \mathfrak{H}^{q_R}_{\mathfrak{S}_{\lambda_r}}(R)$ identifié à un module sur $\mathfrak{H}^{q_R}_{\mathfrak{S}_\lambda}(R)$, sera noté $S_\alpha(R)$.

Si α est $\mathfrak{o}$-régulière, le quotient de $S_{\alpha_i}(k)$ par son radical est un module simple (non nul) noté $D_{\alpha_i}(k)$. Soit $Y_{\alpha_i}(k)$ sa couverture projective et $Y_{\alpha_i}(\mathcal{O})$ le relèvement de $Y_{\alpha_i}(k)$ à $\mathcal{O}$. Les modules $D_\alpha(k)$, $Y_\alpha(k)$ et $Y_\alpha(\mathcal{O})$ sont construits de façon analogue à $S_\alpha(R)$.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \models^r n$. Notons $\overline{q}$, l'image de q dans k. Pour tout $i \in [1, r]$, l'ensemble des modules simples de l'algèbre $\mathfrak{H}^{q}_{\mathfrak{S}_{\lambda_i}}(K)$, resp. de $\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_{\lambda_i}}(k)$, est constitué par les modules de Specht $S_{\alpha_i}(K)$ où $\alpha_i \vdash \lambda_i$, resp. par les quotients $D_{\alpha_i}(k)$ où $\alpha_i \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda_i$.

Nous aurons besoin de déterminations combinatoires suivantes.

Définition - Notation 6.2.2 *Soient $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \models^r n$ et $\alpha \vdash \lambda$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.*

Notons s'^{ρ}_{α} le plus petit entier strictement positif s tel que pour tout $i \in [1, r]$, $\alpha_i = \alpha_{i+ss^{\rho}_{\lambda}d}$, les indices étant pris modulo r dans $[1, r]$. Il est facile de voir que s'^{ρ}_{α} divise σ^{ρ}_{λ}. Posons $\sigma'^{\rho}_{\alpha} := \frac{\sigma^{\rho}_{\lambda}}{s'^{\rho}_{\alpha}}$ et $\lambda(\rho, \alpha)$ la composition de $s'^{\rho}_{\alpha} n^{\rho}_{\lambda} = \frac{n}{\sigma'^{\rho}_{\alpha}}$ de hauteur $s'^{\rho}_{\alpha} s^{\rho}_{\lambda} d$, $\lambda(\rho, \alpha) := (\lambda_1, \ldots, \lambda_{s'^{\rho}_{\alpha} s^{\rho}_{\lambda} d})$.

Quand le triplet (r, f, n) est fixé, nous omettrons l'exposant ρ dans les notations précédentes.

Nous aurons également besoin des modules décrits ci-après.

Définition - Notation 6.2.3 *Pour tout $i \in [0, \sigma'^{\rho}_{\alpha} - 1]$, soit $\chi^{\rho}_{\alpha,i}$, le caractère de l'algèbre de groupe $K < w^{(n)}_{s'^{\rho}_{\alpha} n^{\rho}_{\lambda}} >$ qui envoie $w^{(n)}_{j s'^{\rho}_{\alpha} n^{\rho}_{\lambda}}$ sur $\zeta^{j i s^{\rho}_{\lambda} s'^{\rho}_{\alpha} d}$ pour $j \in [0, \sigma'^{\rho}_{\alpha} - 1]$.*

Soit $\chi^{\rho}_{\alpha,i} S_{\alpha}(K)$ le module de l'algèbre $K(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'^{\rho}_{\alpha}} \rtimes < w^{(n)}_{s'^{\rho}_{\alpha} n^{\rho}_{\lambda}} >$ défini ainsi. Il a même ensemble sous-jacent que $S_{\alpha}(K)$. Si $v \in S_{\alpha}(K)$, $v = v_1 \otimes_K \ldots \otimes_K v_{\sigma'_{\alpha}}$ avec $v_i \in S_{\alpha_{1+(i-1)s'^{\rho}_{\alpha} s^{\rho}_{\lambda} d}}(K) \otimes_K \ldots \otimes_K S_{\alpha_{i s'^{\rho}_{\alpha} s^{\rho}_{\lambda} d}}(K)$, alors $\sigma \in \mathfrak{S}_{\lambda}$ agit sur v dans $\chi^{\rho}_{\alpha,i} S_{\alpha}(K)$ comme dans $S_{\alpha}(K)$ et $w^{(n)}_{s'^{\rho}_{\alpha} n^{\rho}_{\lambda}}$ agit sur v dans $\chi^{\rho}_{\alpha,i} S_{\alpha}(K)$ comme suit :

$$v * w^{(n)}_{s'^{\rho}_{\alpha} n^{\rho}_{\lambda}} = \zeta^{i s^{\rho}_{\lambda} s'^{\rho}_{\alpha} d} v_{\sigma'^{\rho}_{\alpha}} \otimes_K v_1 \otimes_K \ldots \otimes_K v_{\sigma'^{\rho}_{\alpha} - 1}.$$

Si α est $\mathfrak{o}$-régulière, les modules $\chi^{\rho}_{\alpha,i} Y_{\alpha}(\mathcal{O})$, resp. $\overline{\chi}^{\rho}_{\alpha,i} D_{\alpha}(k)$, sur $\mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'^{\rho}_{\alpha}} \rtimes < w^{(n)}_{s'^{\rho}_{\alpha} n^{\rho}_{\lambda}} >$, resp. sur $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'^{\rho}_{\alpha}} \rtimes < w^{(n)}_{s'^{\rho}_{\alpha} n^{\rho}_{\lambda}} >$ sont définis de façon analogue.

Remarque : Dans les définitions précédentes, nous avons identifié les K-algèbres $K(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'_{\alpha}} \rtimes < w_{s'_{\alpha} n_{\lambda}} >$ et $K < \mathfrak{S}_{\lambda}, w_{s'_{\alpha} n_{\lambda}} >$ comme nous l'avons fait pour $K(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_{\lambda}} \rtimes < w_{n_{\lambda}} >$ et $K < \mathfrak{S}_{\lambda}, w_{n_{\lambda}} >$ au Lemme 6.1.2.

Nous pouvons énoncer le

Lemme 6.2.1 *L'ensemble des modules simples de $KG(r, f, n)$ est formé des modules $S^{\rho}_{\alpha,i}(K) := \mathrm{Ind}\, \chi^{\rho}_{\alpha,i} S_{\alpha}(K) \widehat{\otimes}^{\rho}_{\lambda} e^{\rho}_{\lambda} KG(r, f, n)$ pour $\lambda \in \mathcal{L}_{\rho}$, $\alpha \vdash \lambda$, $i \in [0, \sigma'^{\rho}_{\alpha} - 1]$.*

L'ensemble des modules simples de $kG(r, f, n)$ est formé des modules $D^{\rho}_{\alpha,i}(k) := \mathrm{Ind}\, \overline{\chi}^{\rho}_{\alpha,i} D_{\alpha}(k) \overline{\otimes}^{\rho}_{\lambda} \overline{e}^{\rho}_{\lambda} kG(r, f, n)$ pour $\lambda \in \mathcal{L}_{\rho}$, $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$, $i \in [0, \sigma'^{\rho}_{\alpha} - 1]$.

L'ensemble des modules projectifs indécomposables de $\mathcal{O}G(r, f, n)$ est constitué des modules $Y^{\rho}_{\alpha,i}(\mathcal{O}) := \mathrm{Ind}\, \chi^{\rho}_{\alpha,i} Y_{\alpha}(\mathcal{O}) \otimes^{\rho}_{\lambda} e^{\rho}_{\lambda} \mathcal{O}G(r, f, n)$ pour $\lambda \in \mathcal{L}_{\rho}$, $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$, $i \in [0, \sigma'^{\rho}_{\alpha} - 1]$.

Dans les notations précédentes, Ind *est le foncteur d'induction de*

$R(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'^{\rho}_{\alpha}} \rtimes < w^{(n)}_{s'^{\rho}_{\alpha} n^{\rho}_{\lambda}} >$ *à* $R(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma^{\rho}_{\lambda}} \rtimes < w^{(n)}_{n^{\rho}_{\lambda}} >$, *pour* $R \in \{K, k, \mathcal{O}\}$ *selon le cas considéré.*

Preuve : Avec le rappel concernant les équivalences de Morita, en fin de la Sous-Section 6.1.2, il suffit de donner, pour tout $\lambda \in \mathcal{L}_{\rho}$, un ensemble complet de modules simples de $K(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w_{n_\lambda} >$ et de $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w_{n_\lambda} >$, ainsi que des modules projectifs indécomposables de $\mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w_{n_\lambda} >$.

Commençons par travailler sur la K-algèbre $KG(r,f,n)$. Fixons $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathcal{L}_{\rho}$ et cherchons l'ensemble des modules simples de $K(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma^{\rho}_{\lambda}} \rtimes < w_{n_\lambda} >$. Pour former ces modules, nous allons appliquer des résultats classiques de théorie des représentations pour des algèbres sur lesquelles agit un groupe. D'après le rappel succédant la Définition-Notation 6.2.1, il est immédiat que les modules $S_\alpha(K)$, pour $\alpha \vdash \lambda$, sont les modules simples de $K(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda}$. Dans la preuve du Lemme 6.1.2, nous avons vu que le groupe engendré par la permutation w_{n_λ} agit sur $K(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda}$. Afin de trouver tous les modules simples de $K(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma^{\rho}_{\lambda}} \rtimes < w_{n_\lambda} >$, il faut trouver le stabilisateur de $S_\alpha(K)$ sous l'action de $< w_{n_\lambda} >$, pour tout $\alpha \vdash \lambda$. Soient $\alpha \vdash \lambda$, $i \in [0, \sigma_\lambda - 1]$. Formons le module $S_\alpha(K)^{w_{in_\lambda}}$ sur $K(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda}$. Il a le même espace sous-jacent que $S_\alpha(K)$ et pour tout $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{\sigma_\lambda}) \in (\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda}$ et $v \in S_\alpha(K)$, l'action $v * \sigma$ de σ sur v dans $S_\alpha(K)^{w_{in_\lambda}}$ est égale à l'action de $\sigma * w_{in_\lambda}$ sur v dans $S_\alpha(K)$, à savoir $v(\sigma_{\sigma_\lambda - i}, \ldots, \sigma_{\sigma_\lambda}, \sigma_1, \ldots, \sigma_{\sigma_\lambda - i - 1})$. Le stabilisateur de $S_\alpha(K)$ est l'ensemble des $i \in [0, \sigma_\lambda - 1]$ tels que les modules $S_\alpha(K)$ et $S_\alpha(K)^{w_{in_\lambda}}$ sont isomorphes sur $K(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda}$. Le module $S_\alpha(K)^{w_{in_\lambda}}$ est un module simple de $K(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda}$, il est isomorphe à un module $S_{\alpha(i)}(K)$ pour un certain paramètre $\alpha(i) \vdash \lambda$ dépendant de λ et i. Cherchons à décrire ces paramètres. Remarquons que si $\alpha(1)$ est connu alors toutes les multipartitions $\alpha(i)$, $i \in [0, \sigma_\lambda - 1]$, le sont aussi.

Fixons $\alpha \vdash \lambda$, $\alpha = (\alpha^1_1, \ldots, \alpha^1_{s_\lambda d}, \ldots, \alpha^{\sigma_\lambda}_1, \ldots, \alpha^{\sigma_\lambda}_{s_\lambda d})$ avec $\alpha^u_v \vdash \lambda_v$. Pour tout $j \in [1, \sigma_\lambda]$, posons $S_{\alpha^j}(K) := S_{\alpha^j_1}(K) \otimes_K \ldots \otimes_K S_{\alpha^j_{s_\lambda d}}(K)$ de façon à représenter $S_\alpha(K)$ sous la forme du produit tensoriel $S_{\alpha^1}(K) \otimes_K \ldots \otimes_K S_{\alpha^{\sigma_\lambda}}(K)$. Le module $S_\alpha(K)^{w_{n_\lambda}}$ est isomorphe au module $S_{\alpha * \mathrm{ad}_{-s_\lambda d}}(K)$ identifié à $S_{\alpha_2}(K) \otimes_K \ldots \otimes_K S_{\alpha^{\sigma_\lambda}}(K) \otimes_K S_{\alpha^1}(K)$ avec la notation (6.1.1). En effet, considérons l'application de $S_\alpha(K)^{w_{n_\lambda}}$ dans $S_{\alpha * \mathrm{ad}_{-s_\lambda d}}(K)$, qui envoie $v_1 \otimes_K \ldots \otimes_K v_{\sigma_\lambda}$ sur $v_2 \otimes_K \ldots \otimes_K v_{\sigma_\lambda} \otimes_K v_1$, pour $v_i \in S_{\alpha^i}(K)$. Il vient facilement que c'est un isomorphisme de $K(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda}$ et pour tout $i \in [0, \sigma_\lambda - 1]$, $S_\alpha(K)^{w_{in_\lambda}}$ et $S_{\alpha * \mathrm{ad}_{-is_\lambda d}}(K)$ sont isomorphes. Le paramètre $\alpha(i)$ est égal à $\alpha * \mathrm{ad}_{-is_\lambda d}$. Ainsi

le stabilisateur cherché est le groupe cyclique d'ordre σ'_α engendré par $w_{s'_\alpha n_\lambda}$.

La K-algèbre du stabilisateur de $S_\alpha(K)$ admet pour modules simples ou caractères les fonctions $\chi^\rho_{\alpha,i}$, $i \in [0, \sigma'_\alpha - 1]$. Finalement, les modules simples de $K(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w_{n_\lambda} >$ sont les modules de la forme suivante : $\mathrm{Ind}\, \chi^\rho_{\alpha,i} S_\alpha(K)$ pour $\alpha \vdash \lambda$, $i \in [0, \sigma'_\alpha - 1]$.

Supposons toujours λ fixée. Les modules simples de la k-algèbre $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w_{n_\lambda} >$ s'obtiennent en suivant la méthode adoptée pour trouver ceux de $K(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma^\rho_\lambda} \rtimes < w_{n_\lambda} >$. Ils sont de la forme $\mathrm{Ind}\, \overline{\chi}^\rho_{\alpha,i} D_\alpha(k)$ pour $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$, $i \in [0, \sigma'_\alpha - 1]$.

À présent, le but est de construire les modules projectifs indécomposables des $\mathcal{O}$-algèbres $\mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w_{n_\lambda} >$ pour toutes les compositions $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$. Fixons un tel $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$. Soit $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$. Reprenons la Définition - Notation 6.2.1. Il est clair que le module $Y_\alpha(k)$ sur $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda}$ est la couverture projective de $D_\alpha(k)$. Suivant le procédé de construction des modules simples $\overline{\chi}^\rho_{\alpha,i} D_\alpha(k)$, formons les modules $\overline{\chi}^\rho_{\alpha,i} Y_\alpha(k)$ de $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'_\alpha} \rtimes < w_{s'_\alpha n_\lambda} >$, pour $i \in [0, \sigma'_\alpha - 1]$. Considérons l'épimorphisme de modules sur $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda}$, de $Y_\alpha(k)$ sur $D_\alpha(k)$ qui est le produit tensoriel des projections canoniques de $Y_{\alpha_i}(k)$ sur $D_{\alpha_i}(k)$, $i \in [1, r]$. Il se prolonge en un épimorphisme de modules sur $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'_\alpha} \rtimes < w_{s'_\alpha n_\lambda} >$, de $\overline{\chi}^\rho_{\alpha,i} Y_\alpha(k)$ sur $\overline{\chi}^\rho_{\alpha,i} D_\alpha(k)$ car l'action du groupe $< w_{s'_\alpha n_\lambda} >$ ne fait que permuter les composantes, à un scalaire près, et $\overline{\chi}^\rho_{\alpha,i} Y_\alpha(k)$ est la couverture projective de $\overline{\chi}^\rho_{\alpha,i} D_\alpha(k)$ sur $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'_\alpha} \rtimes < w_{s'_\alpha n_\lambda} >$. En effet, $Y_\alpha(k)$ est la restriction du module $\overline{\chi}^\rho_{\alpha,i} Y_\alpha(k)$ à $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda}$ isomorphe à $k\mathfrak{S}_\lambda$. L'algèbre $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'_\alpha} \rtimes < w_{s'_\alpha n_\lambda} >$, identifiée à l'algèbre $k < \mathfrak{S}_\lambda, w_{s'_\alpha n_\lambda} >$, est graduée sur l'algèbre $k\mathfrak{S}_\lambda$: $k < \mathfrak{S}_\lambda, w_{s'_\alpha n_\lambda} > = \bigoplus_{i=0}^{\sigma'_\alpha - 1} w_{i s'_\alpha n_\lambda} k\mathfrak{S}_\lambda$.
En utilisant le Lemme 2.4.2, $\overline{\chi}^\rho_{\alpha,i} Y_\alpha(k)$ est facteur direct du module induit de $k\mathfrak{S}_\lambda$ à $k < \mathfrak{S}_\lambda, w_{s'_\alpha n_\lambda} >$ à partir de $Y_\alpha(k)$ qui est un module projectif de l'algèbre $k < \mathfrak{S}_\lambda, w_{s'_\alpha n_\lambda} >$ puisque $Y_\alpha(k)$ est un module projectif de $k\mathfrak{S}_\lambda$. Par conséquent, $\overline{\chi}^\rho_{\alpha,i} Y_\alpha(k)$ est un module projectif sur $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'_\alpha} \rtimes < w_{s'_\alpha n_\lambda} >$ qui est indécomposable puisque sa restriction à $k\mathfrak{S}_\lambda$, $Y_\alpha(k)$, est indécomposable. L'assertion est prouvée.
Le module sur $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'_\alpha} \rtimes < w_{s'_\alpha n_\lambda} >$, $\overline{\chi}^\rho_{\alpha,i} Y_\alpha(k)$, étant projectif (indécomposable), le module qu'il induit sur $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w_{n_\lambda} >$ est aussi projectif. En outre, avec le rappel concernant les algèbres graduées appliqué à $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma^\rho_\lambda} \rtimes < w_{n_\lambda} >$ graduée sur $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'_\alpha} \rtimes < w_{s'_\alpha n_\lambda} >$, le radical de Jacobson de l'algèbre $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'_\alpha} \rtimes < w_{s'_\alpha n_\lambda} >$ induit à

l'algèbre $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w_{n_\lambda} >$ est isomorphe au radical de Jacobson de cette dernière. Ainsi, le quotient de $\mathrm{Ind}\, \overline{\chi}^{\rho}_{\alpha,i} Y_\alpha(k)$ par son radical est isomorphe au module simple $\mathrm{Ind}\, \overline{\chi}^{\rho}_{\alpha,i} D_\alpha(k)$, où Ind représente l'induction de $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'_\alpha} \rtimes < w_{s'_\alpha n_\lambda} >$ à $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w_{n_\lambda} >$. Nous venons de montrer que $\mathrm{Ind}\, \overline{\chi}^{\rho}_{\alpha,i} Y_\alpha(k)$ est une couverture projective de $\mathrm{Ind}\, \overline{\chi}^{\rho}_{\alpha,i} D_\alpha(k)$. De plus, il est clair que $\mathrm{Ind}_{\mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'_\alpha} \rtimes < w_{s'_\alpha n_\lambda} >}^{\mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w_{n_\lambda} >} \chi^{\rho}_{\alpha,i} Y_\alpha(\mathcal{O})$ est un relèvement à $\mathcal{O}$ de $\mathrm{Ind}\, \overline{\chi}^{\rho}_{\alpha,i} Y_\alpha(k)$. Grâce à la correspondance bijective entre les modules simples de la k-algèbre $k(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w_{n_\lambda} >$ et les modules projectifs de $\mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w_{n_\lambda} >$, nous sommes en mesure de décrire l'ensemble des modules projectifs indécomposables de cette dernière. Il est formé des modules $\mathrm{Ind}_{\mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'_\lambda} \rtimes < w_{s'_\alpha n_\lambda} >}^{\mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma_\lambda} \rtimes < w_{n_\lambda} >} \chi^{\rho}_{\alpha,i} Y_\alpha(\mathcal{O})$, où $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$, $i \in [0, \sigma'_\alpha - 1]$. La preuve est terminée. ∎

6.3 Relations entre les algèbres de $G(r,1,n)$ et $G(r,f,n)$

Continuons à travailler avec les conditions et notations **(HAG)** de la Sous-Section 6.1.2.

En Section 4.1, nous avons vu que l'algèbre $\mathcal{O}G(r,1,n)$ est graduée sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$ par un groupe cyclique d'ordre f,

$$\mathcal{O}G(r,1,n) = \bigoplus_{i=0}^{f-1} T_1^i \mathcal{O}G(r,f,n),$$

où T_1 est le n-uplet $(\omega, 1, \ldots, 1)$.

> Nous noterons les automorphismes associés à cette graduation $h := h^{(\zeta)}_{A/B}$, $g := g^{(T_1)}_{B/A}$ avec $A := \mathcal{O}G(r,1,n)$ et $B := \mathcal{O}G(r,f,n)$, (cf. la Définition - Notation 2.1.2).

Définition - Notation 6.3.1 *Posons $\rho' := (r,1,n)$ et conservons la notation $\rho := (r,f,n)$.*

Dans cette section, nous établissons des relations entre des modules projectifs indécomposables de $\mathcal{O}G(r,1,n)$ et de $\mathcal{O}G(r,f,n)$ à l'aide des descriptions données en Section 6.2.

6.3.1 Relations entre idempotents et conséquences

Commençons par exprimer les idempotents (décrits dans la preuve de la Proposition 6.1.3) de $\mathcal{O}G(r,1,n)$ en fonction de ceux de $\mathcal{O}G(r,f,n)$ et vice versa. Rappelons que les premiers sont paramétrés par les classes de $(\mu_r)^n/\widetilde{\ }_\rho$ et les seconds par $(\mu_r)^n/\widetilde{\ }_{\rho'}$ identifié à $(\mu_r)^n$, où $\widetilde{\ }_\rho$ est la relation d'équivalence sur $(\mu_r)^n$, définie comme suit. Si $\mathbf{j}, \mathbf{j}' \in (\mu_r)^n$, alors $\mathbf{j} \widetilde{\ }_\rho \mathbf{j}'$ si et seulement si il existe un entier s tel que $\mathbf{j} = \omega^{sd}\mathbf{j}'$. Notons $\widetilde{\mathbf{j}}$ l'image de $\mathbf{j} \in (\mu_r)^n$ dans $(\mu_r)^n/\widetilde{\ }_\rho$.
Soit $\mathbf{j} = (\omega^{j_1}, \ldots, \omega^{j_n}) \in (\mu_r)^n$. Décomposons la somme exprimant $e_{\mathbf{j}}$ dans l'expression (6.1.2),

$$e_{\mathbf{j}} = \frac{1}{r^n}\Big(\sum_{i=0}^{f-1} \sum_{\mathbf{w}\in\mu_r^n(f)} \zeta^{ij_1}\ (\mathbf{w})\chi_{\mathbf{j}}\, \mathbf{w}T_1^i\Big).$$

Nous en déduisons que

$$e_{\mathbf{j}} = \frac{1}{f}\ e_{\widetilde{\mathbf{j}}}\ \Big(\sum_{i=0}^{f-1} \zeta^{ij_1} T_1^i\Big). \tag{6.3.1}$$

En utilisant cette dernière égalité, il vient facilement que

$$e_{\widetilde{\mathbf{j}}} = \sum_{i=0}^{f-1} e_{\omega^{id}\mathbf{j}}. \tag{6.3.2}$$

En outre, la relation (6.3.1) permet de calculer $(e_{\mathbf{j}})h$. C'est la somme $\frac{1}{f}\, e_{\widetilde{\mathbf{j}}}\Big(\sum_{i=0}^{f-1} \zeta^{i(j_1+d)} T_1^i\Big)$, soit

$$(e_{\mathbf{j}})h = e_{\omega^d\mathbf{j}}. \tag{6.3.3}$$

Comparons maintenant les modules monogènes engendrés par ces idempotents. C'est l'objet du

Lemme 6.3.1 *Les foncteurs d'induction* Ind *et de restriction* Res *sont définis ici par rapport aux algèbres* $\mathcal{O}G(r,1,n)$ *et* $\mathcal{O}G(r,f,n)$. *Soit* $\mathbf{j} \in (\mu_r)^n$.

1. Les deux modules $\mathrm{Ind}\, e_{\widetilde{\mathbf{j}}}\mathcal{O}G(r,f,n)$ *et* $\bigoplus_{i=0}^{f-1} e_{\omega^{id}\mathbf{j}}\, \mathcal{O}G(r,1,n)$ *sont isomorphes.*

2. Les deux modules $\mathrm{Res}\, e_{\mathbf{j}}\mathcal{O}G(r,1,n)$ *et* $e_{\widetilde{\mathbf{j}}}\mathcal{O}G(r,f,n)$ *sont isomorphes.*

Preuve : Pour tout $\mathbf{j} \in (\mu_r)^n$, les modules $e_{\widetilde{\mathbf{j}}}\mathcal{O}G(r,1,n)$ et $\mathrm{Ind}\, e_{\widetilde{\mathbf{j}}}\mathcal{O}G(r,f,n)$ sont clairement isomorphes. En prenant en compte l'égalité (6.3.2), nous obtenons l'isomorphisme annoncé au premier point.

Inversement, intéressons-nous à la restriction à $\mathcal{O}G(r,f,n)$ du module $e_{\mathbf{j}}\mathcal{O}G(r,1,n)$. Soit pr l'application de projection de $\mathcal{O}G(r,1,n)$ sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$ suivant la décomposition de $\mathcal{O}G(r,1,n)$ donnée par la graduation. Remarquons d'abord que les éléments de $e_{\widetilde{\mathbf{j}}}\mathcal{O}G(r,f,n)$, resp. $e_{\mathbf{j}}\mathcal{O}G(r,1,n)$, sont des combinaisons $\mathcal{O}$-linéaires d'éléments de la forme $\sigma e_{\widetilde{\mathbf{j}*\sigma}}$, resp. $\sigma e_{\mathbf{j}*\sigma}$, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, (avec l'action classique de $\mathfrak{S}_n$ sur des n-uplets, décrite dans la preuve de la Proposition 6.1.3). Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la projection sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$ de $\sigma e_{\mathbf{j}*\sigma}$, est égale à $\frac{1}{f}\sigma e_{\widetilde{\mathbf{j}*\sigma}}$, par (6.3.1). L'application $f\,\mathrm{pr} : \mathrm{Res}\, e_{\mathbf{j}}\mathcal{O}G(r,1,n) \to e_{\widetilde{\mathbf{j}}}\mathcal{O}G(r,f,n)$ est clairement un morphisme de modules sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$. Considérons l'application de multiplication à gauche par $e_{\mathbf{j}}$, $m_{e_{\mathbf{j}}} : e_{\widetilde{\mathbf{j}}}\mathcal{O}G(r,f,n) \to \mathrm{Res}\, e_{\mathbf{j}}\mathcal{O}G(r,1,n)$. C'est trivialement un morphisme de modules sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$. Or pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, l'élément $\sigma e_{\mathbf{j}*\sigma} = e_{\mathbf{j}}\sigma$, est envoyé par $f\,\mathrm{pr}$ sur $e_{\widetilde{\mathbf{j}}}\sigma$ dont l'image par $m_{e_{\mathbf{j}}}$ est $e_{\mathbf{j}}\sigma$ d'après (6.3.2). Inversement, l'application $m_{e_{\mathbf{j}}} \circ (f\,\mathrm{pr})$ est l'identité de $e_{\widetilde{\mathbf{j}}}\mathcal{O}G(r,f,n)$. Les applications $m_{e_{\mathbf{j}}}$ et $f\,\mathrm{pr}$ sont réciproques l'une de l'autre. Le deuxième isomorphisme est démontré. ∎

6.3.2 Actions des automorphismes de graduation

Occupons-nous maintenant de l'action de h, resp. g, sur les modules projectifs indécomposables de $\mathcal{O}G(r,1,n)$, resp. de $\mathcal{O}G(r,f,n)$.

Lemme 6.3.2 *Soient* $\lambda \models^r n$, $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$.

1. L'application $\mathrm{ass}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})} : Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})^h \to Y^{\rho'}_{\alpha*\mathrm{ad}_d,0}(\mathcal{O})$ *qui envoie* $y \otimes^{\rho'}_{\lambda} e^{\rho'}_{\lambda} b$ *sur* $y * \mathrm{ad}_d \otimes^{\rho'}_{\lambda*\mathrm{ad}_d} w^{(n)}_{\lambda_1+\ldots+\lambda_{r-d}}(e^{\rho'}_{\lambda} b)h$, *pour* $b \in G(r,1,n)$, $y \in Y_\alpha(\mathcal{O})$, *est un isomorphisme.*

2. Soit l'application $\mathrm{conj}_{Y^{\rho}_{\alpha,i}(\mathcal{O})}$ *définie de* $Y^{\rho}_{\alpha,i}(\mathcal{O})^g$ *sur*

$Y^{\rho}_{\alpha,i+1}(\mathcal{O})$ qui fait correspondre à $y \otimes'^{\rho}_{\alpha} sw^{(n)}_{jn^{\rho}_{\lambda}} e^{\rho}_{\lambda} \otimes^{\rho}_{\lambda} e^{\rho}_{\lambda} b$ l'élément $y \otimes'^{\rho}_{\alpha} T_1 sw^{(n)}_{jn^{\rho}_{\lambda}} e^{\rho}_{\lambda} {T_1}^{-1} \otimes^{\rho}_{\lambda} T_1 e^{\rho}_{\lambda} b {T_1}^{-1}$ pour $y \in Y_{\alpha}(\mathcal{O})$, $s \in \mathfrak{S}_{\lambda}$, $j \in [0, \sigma^{\rho}_{\lambda} - 1]$ et $b \in G(r,f,n)$ et $\otimes'^{\rho}_{\alpha}$ est le produit tensoriel sur $\mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'^{\rho}_{\alpha}} \rtimes < w^{(n)}_{s'^{\rho}_{\alpha} n^{\rho}_{\lambda}} >$. Alors $\mathrm{conj}_{Y^{\rho}_{\alpha,i}(\mathcal{O})}$ est un isomorphisme de modules sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$.

Remarque : Apportons une précision sur les notations du lemme précédent.

Par définition, $Y_{\alpha}(\mathcal{O})$ est considéré comme le produit tensoriel $Y_{\alpha_1}(\mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} \ldots \otimes_{\mathcal{O}} Y_{\alpha_r}(\mathcal{O})$. Ainsi, si $y \in Y_{\alpha}(\mathcal{O})$, $y = y_1 \otimes \ldots \otimes y_r$, alors $y * \mathrm{ad}_d = y_{r-d+1} \otimes \ldots y_r \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_{r-d} \in Y_{\alpha * \mathrm{ad}_d}(\mathcal{O})$.

Preuve : Fixons λ, α comme dans l'énoncé. Cherchons le paramètre correspondant au module $Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})^h$, qui est un module projectif indécomposable sur $\mathcal{O}G(r,1,n)$.
Reprenons les notations de la preuve de la Proposition 6.1.3. Considérons l'égalité (6.3.3). Le n-uplet de $(\mu_r)^n$, $\omega^d \mathbf{j}(\lambda)$ est égal à $\mathbf{j}(\mu) * w_{\lambda_1+\ldots+\lambda_{r-d}}$ pour $\mu := \lambda * \mathrm{ad}_d$ puisque $\mathbf{j}(\mu)$ est l'élément de $(\mu_r)^n$ égal à $(\underbrace{\omega^0, \ldots, \omega^0}_{\lambda_{r-d+1}}, \ldots, \underbrace{\omega^{d-1}, \ldots, \omega^{d-1}}_{\lambda_r}, \underbrace{\omega^d, \ldots, \omega^d}_{\lambda_1}, \ldots)$. Selon la formule (6.1.3), il vient que

$$(e^{\rho'}_{\lambda})h = e^{\rho'}_{\lambda * \mathrm{ad}_d} * w_{\lambda_1+\ldots+\lambda_{r-d}}. \tag{6.3.4}$$

L'application $\mathrm{ass}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ a pour de source $\left(Y_{\alpha}(\mathcal{O}) \otimes^{\rho'}_{\lambda} e^{\rho'}_{\lambda} \mathcal{O}G(r,1,n)\right)^h$ et pour but $Y_{\alpha * \mathrm{ad}_d}(\mathcal{O}) \otimes^{\rho'}_{\lambda * \mathrm{ad}_d} e^{\rho'}_{\lambda * \mathrm{ad}_d} \mathcal{O}G(r,1,n)$. Remarquons que (6.3.4) implique que

$$w_{\lambda_1+\ldots+\lambda_{r-d}}(e^{\rho'}_{\lambda})h = e^{\rho'}_{\lambda * \mathrm{ad}_d} w_{\lambda_1+\ldots+\lambda_{r-d}}. \tag{6.3.5}$$

L'application $\mathrm{ass}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ est bien définie. En effet, soit $y := y_1 \otimes_{\mathcal{O}} \ldots \otimes_{\mathcal{O}} y_r$ un élément de $Y_{\alpha}(\mathcal{O})$, où pour tout $i \in [1,r]$, $y_i \in Y_{\alpha_i}(\mathcal{O})$. Identifions $\mathcal{O}\mathfrak{S}_{\lambda}$ au produit tensoriel $\mathcal{O}\mathfrak{S}_{\lambda_1} \otimes_{\mathcal{O}} \ldots \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}\mathfrak{S}_{\lambda_r}$ et rappelons que $e^{\rho'}_{\lambda} \mathcal{O}G(r,1,n) e^{\rho'}_{\lambda}$ est isomorphe à $\mathcal{O}\mathfrak{S}_{\lambda}$. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{\lambda}$ identifié à $(s_1, \ldots, s_r)$ où pour tout $i \in [1,r]$, $s_i \in \mathfrak{S}_{\lambda_i}$, $\mathrm{ass}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ envoie $y\sigma \otimes e^{\rho'}_{\lambda} b$ égal à $(y_1 s_1 \otimes_{\mathcal{O}} \ldots \otimes_{\mathcal{O}} y_r s_r) \otimes e^{\rho'}_{\lambda} b$ sur $(y_{r-d+1} s_{r-d+1} \otimes_{\mathcal{O}} \ldots \otimes_{\mathcal{O}} y_{r-d} s_{r-d}) \otimes w_{\lambda_1+\ldots+\lambda_{r-d}}(e^{\rho'}_{\lambda} b)h$. Or cette dernière expression est égale à $y * \mathrm{ad}_d \, \sigma^{w_{\lambda_{r-d+1}+\ldots\lambda_r}} \otimes w_{\lambda_1+\ldots+\lambda_{r-d}}(e^{\rho'}_{\lambda} b)h$ soit $(y * \mathrm{ad}_d) \otimes e^{\rho'}_{\lambda * \mathrm{ad}_d} w_{\lambda_1+\ldots+\lambda_{r-d}} \sigma(b)h$ en utilisant (6.3.5) et le fait

que $\sigma^{w_{\lambda_{r-d+1}+\ldots\lambda_r}}$ appartient au stabilisateur de $e^{\rho'}_{\lambda*\mathrm{ad}_d}$, $\mathfrak{S}_{\lambda*\mathrm{ad}_d}$. C'est l'image par $\mathrm{ass}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ de $y\otimes\sigma e^{\rho'}_{\lambda}b = y\otimes e^{\rho'}_{\lambda}\sigma b$. En outre, $\mathrm{ass}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ est clairement un morphisme de modules sur $\mathcal{O}G(r,1,n)$ ainsi qu'une bijection. La première partie du lemme est prouvée.

Passons à l'action de g sur les modules projectifs indécomposables de $\mathcal{O}G(r,f,n)$. Fixons $\lambda\in\mathcal{L}_\rho$ et $\alpha\vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}}\lambda,\ \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$. Soit $i\in[0,\sigma'_\alpha-1]$. Nous cherchons à décrire $Y^\rho_{\alpha,i}(\mathcal{O})^g$. Rappelons que $Y^\rho_{\alpha,i}(\mathcal{O})$ est isomorphe au module

$$Y_\alpha(\mathcal{O})\otimes'^\rho_\alpha\mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho)})^{\sigma^\rho_\lambda}\rtimes <w_{n_\lambda}> e^\rho_\lambda\otimes^\rho_\lambda e^\rho_\lambda\mathcal{O}G(r,f,n).$$

Montrons que $\mathrm{conj}_{Y^\rho_{\alpha,i}(\mathcal{O})}$ est bien définie.
Soient s, j, b comme dans l'énoncé, $\sigma\in\mathfrak{S}_\lambda$ et $l\in[0,\sigma_\lambda-1]$. L'élément $y\otimes sw_{jn_\lambda}e^\rho_\lambda\otimes\sigma w_{ln_\lambda}e^\rho_\lambda b$ est égal à $y\otimes sw_{jn_\lambda}e^\rho_\lambda\otimes e^\rho_\lambda\sigma w_{ln_\lambda}b$ puisque σw_{ln_λ} appartient au stabilisateur de e^ρ_λ, $<\mathfrak{S}_\lambda,w_{n_\lambda}>$. Il est envoyé par $\mathrm{conj}_{Y^\rho_{\alpha,i}(\mathcal{O})}$ sur $y\otimes T_1sw_{jn_\lambda}e^\rho_\lambda{T_1}^{-1}\otimes\sigma w_{ln_\lambda}\big(T_1*(\sigma w_{ln_\lambda})\big)e^\rho_\lambda b{T_1}^{-1}$, où $*$ représente l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur les éléments de $(\mu_r)^n$, soit

$$y\otimes T_1sw_{jn_\lambda}\sigma w_{ln_\lambda}\big({T_1}^{-1}*(\sigma w_{ln_\lambda})\big)e^\rho_\lambda\otimes T_1*(\sigma w_{ln_\lambda})e^\rho_\lambda b{T_1}^{-1}. \quad (6.3.6)$$

Soit $l':=(1)\sigma+ln_\lambda$. Alors, le n-uplet $T_1*(\sigma w_{ln_\lambda})$ a toutes ses composantes égales à 1 sauf la l'-ième qui vaut ω. Écrivons $\mathbf{j}(\lambda):=(\omega^{j_1},\ldots,\omega^{j_r})$. En utilisant la définition des idempotents (6.1.2), il vient que

$${T_1}^{-1}\big(T_1*(\sigma w_{ln_\lambda})\big)e^\rho_\lambda=\zeta^{j_1-j_{l'}}e^\rho_\lambda. \quad (6.3.7)$$

De la même façon, $T_1\big({T_1}^{-1}*(\sigma w_{ln_\lambda})\big)e^\rho_\lambda=\zeta^{-j_1+j_{l'}}e^\rho_\lambda$. Nous en déduisons que l'expression (6.3.6) est égale à $y\otimes T_1sw_{jn_\lambda}\sigma w_{ln_\lambda}{T_1}^{-1}e^\rho_\lambda\otimes T_1e^\rho_\lambda b{T_1}^{-1}$, soit l'image de $y\otimes sw_{jn_\lambda}e^\rho_\lambda\sigma w_{ln_\lambda}\otimes e^\rho_\lambda b$ par $\mathrm{conj}_{Y^\rho_{\alpha,i}}$.
Soient à présent $\sigma\in\mathfrak{S}_\lambda$ et $l\in[0,\sigma'_\alpha-1]$. Par $\mathrm{conj}_{Y^\rho_{\alpha,i}}$, l'élément $y\otimes\sigma w_{ls'_\alpha n_\lambda}sw_{jn_\lambda}e^\rho_\lambda\otimes e^\rho_\lambda b$ est envoyé sur $y\sigma w_{ls'_\alpha n_\lambda}\otimes(T_1*\sigma w_{ls'_\alpha n_\lambda})sw_{jn_\lambda}e^\rho_\lambda{T_1}^{-1}\otimes T_1e^\rho_\lambda b{T_1}^{-1}$. Si σ est représenté par le r-uplet $(\sigma_1,\ldots,\sigma_{\sigma'_\alpha})$ avec $\sigma_i\in\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)}$ et y par $y_1\otimes_{\mathcal{O}}\ldots\otimes_{\mathcal{O}}y_{\sigma'_\alpha}$ avec $y_i\in Y_{\alpha_{1+(i-1)s'_\alpha s_\lambda d}}(\mathcal{O})\otimes_{\mathcal{O}}\ldots\otimes_{\mathcal{O}}Y_{\alpha_{is'_\alpha s_\lambda d}}(\mathcal{O})$, en posant $l':=(1)\sigma+ls'_\alpha n_\lambda$, la dernière expression est égale à

$$\zeta^{(i+1)ls'_\alpha s_\lambda d}y'\otimes\omega^{\mathbf{j}(\lambda)_1-\mathbf{j}(\lambda)_{l'}}T_1sw_{jn_\lambda}e^\rho_\lambda{T_1}^{-1}\otimes T_1e^\rho_\lambda b{T_1}^{-1}, \quad (6.3.8)$$

où $y':=y_{1-l}\sigma_{1-l}\otimes\ldots\otimes y_{\sigma'_\alpha-l}\sigma_{\sigma'_\alpha-l}$, en utilisant (6.3.7). Si i_1 est le premier indice $i\in[1,r]$ tel que $\lambda_i\neq0$, $\mathbf{j}(\lambda)$ s'écrit comme la concaténation des suites

$$
\begin{array}{l}
(\overbrace{\omega^{i_1-1},\ldots,\omega^{i_1-1}}^{\lambda_{i_1}}) \\
\vdots \\
(\overbrace{\omega^{s_\lambda d-1},\ldots,\omega^{s_\lambda d-1}}^{\lambda_{s_\lambda d}}) \\
\vdots \\
(\overbrace{\omega^{ls'_\alpha s_\lambda d-1},\ldots,\omega^{ls'_\alpha s_\lambda d-1}}^{\lambda_{s_\lambda d}}) \\
(\overbrace{\omega^{ls'_\alpha s_\lambda d+i_1-1},\ldots,\omega^{ls'_\alpha s_\lambda d+i_1-1}}^{\lambda_{i_1}}) \\
\vdots
\end{array}
$$

avec $\mathbf{j}(\lambda)_1 = \omega^{i_1-1}$ et $\mathbf{j}(\lambda)_{l'} = \omega^{ls'_\alpha s_\lambda d+i_1-1}$ parce que $\sigma \in \mathfrak{S}_\lambda$ donc $(1)\sigma \in \{1,\ldots,\lambda_{i_1}\}$ et par définition de s_λ et de n_λ. L'expression (6.3.8) est alors égale à

$$\zeta^{ijs'_\alpha s_\lambda d}(y_{1-l}\sigma_{1-l} \otimes \ldots \otimes y_{\sigma'_\alpha-l}\sigma_{\sigma'-l}) \otimes T_1 sw_{jn_\lambda} e_\lambda^\rho {T_1}^{-1} \otimes T_1 e_\lambda^\rho b {T_1}^{-1}.$$

C'est l'image, par $\mathrm{conj}_{Y^\rho_{\alpha,i}(\mathcal{O})}$ de $y\sigma w_{ls'_\alpha n_\lambda} \otimes sw_{jn_\lambda} e_\lambda^\rho \otimes e_\lambda^\rho b$. L'application $\mathrm{conj}_{Y^\rho_{\alpha,i}(\mathcal{O})}$ est bien définie. En outre, il est trivial que c'est un morphisme de modules sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$ et une bijection. Le deuxième point du lemme est démontré. ∎

Remarque : Soient $\lambda \models^r n$ et $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$. L'isomorphisme $\mathrm{ass}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ permet de décrire le cardinal $o\big(h, Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})\big)$ en fonction de α. C'est le cardinal de l'orbite contenant α sous l'action du groupe cyclique d'ordre f engendré par $*\mathrm{ad}_d$. Selon la définition de s'_α, il est clair que ce cardinal est égal à $s'_\alpha s_\lambda$. Nous obtenons l'égalité

$$o\big(h, Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})\big) = s'_\alpha s_\lambda. \tag{6.3.9}$$

Inversement, si $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$ et $i \in [0, \sigma'_\alpha - 1]$, l'isomorphisme $\mathrm{conj}_{Y^\rho_{\alpha,i}(\mathcal{O})}$ implique de façon immédiate que

$$o\big(g, Y^{\rho}_{\alpha,i}(\mathcal{O})\big) = \sigma'_\alpha. \tag{6.3.10}$$

Par définition des éléments qui interviennent dans les membres de droite des formules (6.3.9) et (6.3.10), il vient

$$o\big(h, Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})\big) o\big(g, Y^{\rho}_{\alpha,i}(\mathcal{O})\big) = f. \tag{6.3.11}$$

6.3.3 Description des modules restreints

Intéressons-nous à présent à la restriction à $\mathcal{O}G(r,f,n)$ d'un module projectif indécomposable de $\mathcal{O}G(r,1,n)$.

Lemme 6.3.3 *Soient* $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$, $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$. *Les deux modules* $\mathrm{Res}^{\mathcal{O}G(r,1,n)}_{\mathcal{O}G(r,f,n)}) Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})$ *et* $\bigoplus_{i=0}^{\sigma'^{\rho}_{\alpha}-1} Y^{\rho}_{\alpha,i}(\mathcal{O})$ *sont isomorphes.*

Preuve : Fixons λ, α comme dans l'énoncé. Soit $\mathrm{res}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ l'application $\mathcal{O}$-linéaire de la restriction $\mathrm{Res}^{\mathcal{O}G(r,1,n)}_{\mathcal{O}G(r,f,n)}) Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})$ dans la somme $\bigoplus_{i=0}^{\sigma'_\alpha} Y^{\rho}_{\alpha,i}(\mathcal{O})$ qui envoie $y \otimes^{\rho'}_{\lambda} e^{\rho'}_{\lambda} b$ sur $(y \otimes'^{\rho}_{\alpha} 1 \otimes^{\rho}_{\lambda} e^{\rho}_{\lambda} b)_{i\in[0,\sigma'_\alpha-1]}$ pour des éléments $y \in Y_\alpha(\mathcal{O})$, $b \in \mathfrak{S}_n$. Rappelons que les éléments de $e^{\rho'}_{\lambda}\mathcal{O}G(r,1,n)$ sont des combinaisons $\mathcal{O}$-linéaires d'éléments de la forme $e^{\rho'}_{\lambda}\sigma$ soit $\sigma(e^{\rho'}_{\lambda} * \sigma)$, ce qui explique pourquoi $\mathrm{res}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ est complètement déterminée sur les valeurs données ci-dessus. Rappelons aussi que pour tout $i \in [0,\sigma'_\alpha - 1]$, le module $Y^{\rho}_{\alpha,i}(\mathcal{O})$ est représenté par $\chi^{\rho}_{\alpha,i} Y_\alpha(\mathcal{O}) \otimes'^{\rho}_{\alpha} \mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'^{\alpha}} \rtimes < w_{\sigma'_\alpha n_\lambda} > \otimes^{\rho}_{\lambda} e^{\rho}_{\lambda}\mathcal{O}G(r,f,n)$. Les deux produits tensoriels qui apparaissent dans ce module se font sur des algèbres contenant $\mathcal{O}\mathfrak{S}_\lambda$ (à identification près). Il est alors évident que $\mathrm{res}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ est bien définie. De plus, cette application est égale au produit des applications $\mathrm{Id}_{Y^{\alpha}_{\mathcal{O}}} \otimes 1 \otimes f\,\mathrm{pr}$, où pr est la projection de $\mathcal{O}G(r,1,n)$ sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$ selon la décomposition graduée d'unité T_1, définie dans la preuve du Lemme 6.3.1, qui est un morphisme de modules sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$. Par conséquent, $\mathrm{res}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ l'est aussi.

Soit l'application $\mathrm{res}'_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ définie dans le sens opposé à celui de $\mathrm{res}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$, qui envoie $(y_i \otimes s_i w_{c_i n_\lambda} \otimes e^{\rho}_{\lambda} b_i)_{i\in[0,\sigma'_\alpha-1]}$ sur la somme

$$\sum_{j=0}^{\sigma'_\alpha-1} \sum_{i=0}^{\sigma'_\alpha-1} y_i *_i w_{js'_\alpha n_\lambda} \otimes e^{\rho'}_{\lambda} w_{-js'_\alpha n_\lambda} s_i w_{c_i n_\lambda} b_i,$$

pour $y_i \in Y^{\rho}_{\alpha,i}(\mathcal{O})$, $*_i$ l'action de $\mathcal{O}(\mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)})^{\sigma'^{\alpha}} \rtimes < w_{\sigma'_\alpha n_\lambda} >$ sur ce dernier module, $s_i \in \mathfrak{S}_\lambda$, $c_i \in [0,\sigma_\lambda - 1]$, $b_i \in \mathfrak{S}_n$. Montrons que cette nouvelle application est bien définie et que c'est le morphisme réciproque de $\mathrm{res}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ à un scalaire près.
Il est évident qu'il n'y a pas de problème dans la définition de $\mathrm{res}'_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$

au niveau du deuxième produit tensoriel de son espace de départ. Regardons ce qu'il se passe au niveau du premier produit tensoriel. Pour cela, soient $\sigma \in \mathfrak{S}_\lambda$, $i, j \in [0, \sigma'_\alpha - 1]$ et y_i, c_i, b_i comme ci-dessus. Écrivons $y_i = y_i^1 \otimes_{\mathcal{O}} \ldots \otimes_{\mathcal{O}} y_i^{\sigma'_\alpha}$ avec pour tout $l \in [1, \sigma'_\alpha]$, $y_i^l \in Y_{\alpha_{1+(l-1)s'_\alpha s_\lambda d}}(\mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} \ldots \otimes_{\mathcal{O}} Y_{\alpha_{ls'_\alpha s_\lambda d}}(\mathcal{O})$ et σ correspond à $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\sigma'_\alpha})$ avec $\sigma_j \in \mathfrak{S}_{\lambda(\rho,\alpha)}$. Alors

$$y_i \sigma w_{js'_\alpha n_\lambda} \otimes s_i w_{c_i n_\lambda} \otimes e_\lambda^\rho b_i = \zeta^{ijs'_\alpha s_\lambda d} y' \otimes s_i w_{c_i n_\lambda} \otimes e_\lambda^\rho b_i, \tag{6.3.12}$$

avec $y' := y_i^{1-j} \sigma_{1-j} \otimes_{\mathcal{O}} \ldots \otimes_{\mathcal{O}} y_i^{\sigma'_\alpha - j} \sigma_{\sigma'_\alpha - j}$. Par définition, $\mathrm{res}'_{Y_{\alpha,0}^{\rho'}(\mathcal{O})}$ applique (6.3.12) sur

$$\sum_{l=0}^{\sigma'_\alpha - 1} \zeta^{i(j+l)s'_\alpha s_\lambda d} y'' \otimes e_\lambda^{\rho'} w_{-ls'_\alpha n_\lambda} s_i w_{c_i n_\lambda} b_i, \tag{6.3.13}$$

avec $y'' := y_i^{1-(j+l)} \sigma_{1-(j+l)} \otimes_{\mathcal{O}} \ldots \otimes_{\mathcal{O}} y_i^{\sigma'_\alpha - (j+l)} \sigma_{\sigma'_\alpha - (j+l)}$. Par ailleurs, $\mathrm{res}'_{Y_{\alpha,0}^{\rho'}(\mathcal{O})}$ envoie $y_i \otimes \sigma w_{js'_\alpha n_\lambda} s_i w_{c_i n_\lambda} \otimes e_\lambda^\rho b_i$ sur la somme

$$\sum_{l=0}^{s'_\alpha - 1} \zeta^{ils'_\alpha s_\lambda d} z \otimes e_\lambda^{\rho'} (\sigma^{w_{ls'_\alpha n_\lambda}}) w_{(j-l)s'_\alpha n_\lambda} s_i w_{c_i n_\lambda} b_i, \tag{6.3.14}$$

où $z := y_i^{1-l} \otimes_{\mathcal{O}} \ldots \otimes_{\mathcal{O}} y_i^{\sigma'_\alpha - l}$. Comme $\mathfrak{S}_\lambda w_{n_\lambda} = w_{n_\lambda} \mathfrak{S}_\lambda$ et $\mathfrak{S}_\lambda e_\lambda^{\rho'} = e_\lambda^{\rho'} \mathfrak{S}_\lambda$, les éléments $\sigma^{w_{ls'_\alpha n_\lambda}} \in \mathfrak{S}_\lambda$ et $e_\lambda^{\rho'}$ commutent. L'expression (6.3.14) est égale à

$$\sum_{l=0}^{\sigma'_\alpha - 1} \zeta^{ils'_\alpha s_\lambda d} z' \otimes e_\lambda^{\rho'} w_{(j-l)s'_\alpha n_\lambda} s_i w_{c_i n_\lambda} b_i, \tag{6.3.15}$$

avec $z' := y_i^{1-l} \sigma_{1-l} \otimes_{\mathcal{O}} \ldots \otimes_{\mathcal{O}} y_i^{\sigma'_\alpha - l} \sigma_{\sigma'_\alpha - l}$. Avec un changement de variable, nous retrouvons l'expression (6.3.13). Ainsi, l'application $\mathrm{res}'_{Y_{\alpha,0}^{\rho'}(\mathcal{O})}$ est bien définie. C'est trivialement un morphisme de modules sur $\mathcal{O}G(r, f, n)$.

Effectuons la composition des deux applications $\mathrm{res}_{Y_{\alpha,0}^{\rho'}(\mathcal{O})}$ et $\mathrm{res}'_{Y_{\alpha,0}^{\rho'}(\mathcal{O})}$. Pour tout $y = y_1 \otimes_{\mathcal{O}} \ldots \otimes_{\mathcal{O}} y_{\sigma'_\alpha} \in Y_\alpha(\mathcal{O})$, comme précédemment, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\mathrm{res}_{Y_{\alpha,0}^{\rho'}(\mathcal{O})}$ applique $y \otimes_\lambda^{\rho'} e_\lambda^{\rho'} \sigma$ sur $(y \otimes 1 \otimes_\lambda^\rho e_\lambda^\rho \sigma)_{i \in [0, \sigma'_\alpha - 1]}$ que $\mathrm{res}'_{Y_{\alpha,0}^{\rho'}(\mathcal{O})}$ envoie sur la somme

$$\sum_{i=0}^{\sigma'_\alpha - 1} \sum_{j=0}^{\sigma'_\alpha - 1} \zeta^{ijs'_\alpha s_\lambda d} (y_{1-j} \otimes_{\mathcal{O}} \ldots \otimes_{\mathcal{O}} y_{\sigma'_\alpha - j}) \otimes e_\lambda^{\rho'} w_{-js'_\alpha n_\lambda} \sigma$$

soit $\sigma'_\alpha y \otimes e_\lambda^{\rho'}\sigma$. Inversement, soient $i \in [0,\sigma'_\alpha-1]$, $y \in Y^\rho_{\alpha,i}(\mathcal{O})$, $\sigma \in \mathfrak{S}_\lambda$, $c \in [0,\sigma_\lambda-1]$ et $b \in \mathfrak{S}_n$. L'image de $y \otimes \sigma w_{cn_\lambda} \otimes e^\rho_\lambda b$ par $\mathrm{res}'_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ est la somme

$$\sum_{j=0}^{\sigma_\alpha-1} y *_i w_{js'_\alpha n_\lambda} \otimes e_\lambda^{\rho'} w_{-js'_\alpha n_\lambda}\sigma w_{cn_\lambda} b.$$

Considérons les composantes de l'image de cette somme par $\mathrm{res}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$. Pour $l \in [0,\sigma'_\alpha-1]$, sur $Y^\rho_{\alpha,l}(\mathcal{O})$, c'est

$$\sum_{j=0}^{\sigma'_\alpha-1} (y *_i w_{js'_\alpha n_\lambda}) *_l w_{-js'_\alpha n_\lambda} \otimes 1 \otimes e^\rho_\lambda \sigma w_{cn_\lambda} b. \tag{6.3.16}$$

Par définition de l'action dans $Y^\rho_{\alpha,l}(\mathcal{O})$, si $l \neq i$, alors l'expression (6.3.16) est nulle. Sur la composante indexée par i, (6.3.16) est égale à $\sigma'_\alpha y \otimes 1 \otimes e^\rho_\lambda \sigma w_{cn_\lambda} b$.
Nous avons montré que la composition (dans un sens ou dans l'autre) des deux morphismes $\mathrm{res}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ et $\mathrm{res}'_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ est σ'_α fois l'application identité de l'espace de départ. Ceci termine la preuve du lemme. ∎

Remarques :

1. L'isomorphisme cité dans le Lemme 6.3.3 montre que les paramètres choisis pour indexer les modules projectifs indécomposables de $\mathcal{O}G(r,1,n)$ et de $\mathcal{O}G(r,f,n)$ sont compatibles. En outre, pour tout $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$, $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$ et $i \in [0,\sigma_\lambda-1]$, nous avons vu dans la remarque succédant le Lemme 6.3.2 que le produit $o\big(h, Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})\big)o\big(g, Y^\rho_{\alpha,i}(\mathcal{O})\big)$ est égal à f. Cette égalité s'obtient aussi en utilisant la Proposition 2.4.2 et le Lemme 6.3.3.

2. Dans toute cette section, nous avons raisonné dans les $\mathcal{O}$-algèbres $\mathcal{O}G(r,1,n)$ et $\mathcal{O}G(r,f,n)$, notamment avec leurs modules projectifs indécomposables $Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})$, pour $\lambda \models^r n$, $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$, et $Y^\rho_{\alpha,i}(\mathcal{O})$, pour $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$, $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$ et $i \in [0,\sigma'_\alpha-1]$. Tous les arguments utilisés sont également valables dans les K-algèbres, resp. k-algèbres, $KG(r,1,n)$ et $KG(r,f,n)$, resp. $kG(r,1,n)$ et $kG(r,f,n)$, avec des résultats concernant les modules simples $S^{\rho'}_{\alpha,0}(K) := \big(S_\alpha(K)\big)\widehat{G}_{\rho'}$, pour $\lambda \models^r n$, $\alpha \vdash \lambda$, et $S^\rho_{\alpha,i}(K) := \big(\chi^\rho_{\alpha,i} S_\alpha(K)\big)\widehat{G}_\rho$, pour $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$, $\alpha \vdash \lambda$ et $i \in [0,\sigma'_\alpha-1]$, resp. $D^{\rho'}_{\alpha,0}(k) := \big(D_\alpha(k)\big)\overline{G}_{\rho'}$, pour $\lambda \models^r n$, $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$, et $D^\rho_{\alpha,i}(k) := \big(\overline{\chi}^\rho_{\alpha,i} D_\alpha(k)\big)\overline{G}_\rho$, pour $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$, $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$ et $i \in [0,\sigma'_\alpha-1]$.

6.4 Associateur et conjecture (GHPI)

6.4.1 Associateur

L'isomorphisme donné dans le Lemme 6.3.3 identifie les (paramètres des) modules projectifs indécomposables sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$ qui apparaissent dans la restriction d'un module projectif indécomposable sur $\mathcal{O}G(r,1,n)$. Nous donnons ici une autre description de la décomposition de la restriction d'un tel module en fonction d'espaces propres grâce aux isomorphismes "associateurs" vus en première partie du Lemme 6.3.2.

Définition - Notation 6.4.1 *Soit v un endomorphisme R-linéaire pour un anneau R. Si $r \in R$ est une valeur propre de v, l'espace propre de v associé à r est noté $E(v,r)$.*

Fixons $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$ et $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$. Par définition de s'_α et avec le Lemme 6.3.2, il est possible de représenter l'application $\mathrm{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ comme un isomorphisme de modules sur $\mathcal{O}G(r,1,n)$,

$$\mathrm{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})} : Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})^{h^{s'_\alpha s_\lambda}} \to Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O}).$$

Par restriction à $\mathcal{O}G(r,f,n)$, c'est un automorphisme de la restriction de $Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})$ à $\mathcal{O}G(r,f,n)$. Comme h^f est l'identité sur $\mathcal{O}G(r,1,n)$, $\mathrm{ass}^{f}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ est un automorphisme de $Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})$. La composition des permutations $w_{n-(\lambda_1+\ldots+\lambda_d)}\ldots w_{n-(\lambda_{(f-1)d+1}+\ldots+\lambda_{fd})}$ est l'identité de $\mathfrak{S}_n$ puisque c'est l'inverse de l'application qui est l'addition de $\lambda_1+\ldots+\lambda_d+\ldots+\lambda_{(f-1)d+1}+\ldots+\lambda_{fd} = n \pmod n$. Par conséquent, l'automorphisme $\mathrm{ass}^{f}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ est l'identité de $Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})$. C'est l'analogue de l'associateur introduit par J. R. Stembridge, [79]. Finalement, l'application $\mathrm{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ annule le polynôme scindé $X^{\sigma'_\alpha}-1$. Elle est donc diagonalisable et $Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})$ est somme directe des espaces propres associés aux valeurs propres $\zeta^{is'_\alpha s_\lambda d}$, pour $i \in [0,\sigma'_\alpha-1]$. Nous avons la décomposition

$$Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O}) = \bigoplus_{i=0}^{\sigma'_\alpha-1} E(\mathrm{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, \zeta^{is'_\alpha s_\lambda d}). \tag{6.4.1}$$

Les espaces propres sont des modules sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$ puisque nous venons de rappeler que $\mathrm{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ (ou sa restriction) était un morphisme

de modules sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$. Nous obtenons, pour le module restreint de $\mathcal{O}G(r,1,n)$ à $\mathcal{O}G(r,f,n)$,

$$\operatorname{Res} Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O}) \cong \bigoplus_{i=0}^{\sigma'_\alpha-1} E(\operatorname{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, \zeta^{is'_\alpha s_\lambda d}). \tag{6.4.2}$$

Remarquons que l'action de $\mathcal{O}G(r,1,n)$ est en quelque sorte transitive dans son action sur les espaces propres $E(\operatorname{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, \zeta^{is'_\alpha s_\lambda d})$, pour $i \in [0, \sigma'_\alpha - 1]$. Plus précisément, soit $x \in E(\operatorname{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, 1)$, alors $xT_1{}^{-1} \in E(\operatorname{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, \zeta^{s'_\alpha s_\lambda d})$. En effet, $(xT_1{}^{-1})\operatorname{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ est égal à $(x)\operatorname{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}\zeta^{s'_\alpha s_\lambda d}T_1{}^{-1}$, par définition de $\operatorname{ass}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$, encore égal à $\zeta^{s'_\alpha s_\lambda d}xT_1{}^{-1}$. Ceci montre que les deux modules sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$, $E(\operatorname{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, 1)^g$ (isomorphe à $E(\operatorname{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, 1)T_1{}^{-1}$) et $E(\operatorname{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, \zeta^{s'_\alpha s_\lambda d})$, sont isomorphes. L'isomorphisme (6.4.2) devient

$$\operatorname{Res} Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O}) \cong \bigoplus_{i=0}^{\sigma'_\alpha-1} E(\operatorname{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, 1)^{g^i}. \tag{6.4.3}$$

Fixons $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$, $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}}$. En comparant l'isomorphisme donné dans le Lemme 6.3.3 et l'isomorphisme (6.4.3), il est naturel de vouloir trouver quelle est la valeur propre associée à l'espace propre de $\operatorname{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ isomorphe à $Y^\rho_{\alpha,i}(\mathcal{O})$, pour tout $i \in [0, \sigma'_\alpha - 1]$. Nous allons montrer que

$$Y^\rho_{\alpha,0}(\mathcal{O}) \cong E(\operatorname{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, 1). \tag{6.4.4}$$

Comme nous venons de voir que pour tout $i \in [0, \sigma'_\alpha - 1]$, $E(\operatorname{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, 1)^{g^i}$ est isomorphe à $E(\operatorname{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, \zeta^{is'_\alpha s_\lambda d})$ et que, d'après le Lemme 6.3.2, $Y^\rho_{\alpha,0}(\mathcal{O})^{g^i}$ est isomorphe à $Y^\rho_{\alpha,i}(\mathcal{O})$, nous obtenons que

$$Y^\rho_{\alpha,i}(\mathcal{O}) \cong E(\operatorname{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, \zeta^{is'_\alpha s_\lambda d}). \tag{6.4.5}$$

D'après le Lemme 6.3.3, les éléments de $Y^\rho_{\alpha,0}(\mathcal{O})$ s'identifient aux combinaisons $\mathcal{O}$-linéaires d'éléments de $\operatorname{Res} Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})$ de la forme

$\sum_{j=0}^{\sigma'_\alpha} y *_0 w_{js'_\alpha n_\lambda} \otimes e_\lambda^{\rho'} w_{-js'_\alpha n_\lambda} s w_{cn_\lambda} b$, avec $y \in Y_\alpha(\mathcal{O})$, $s \in \mathfrak{S}_\lambda$, $c \in [0, \sigma'_\lambda - 1]$ et $b \in \mathfrak{S}_n$. Or, l'application $\mathrm{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ envoie $y \otimes^{\rho'}_\lambda e^{\rho'}_\lambda b$ sur $y * \mathrm{ad}_{ds'_\alpha s_\lambda} \otimes^{\rho'}_\lambda e^{\rho'}_\lambda w_{n-(\lambda_{r-ds'_\alpha s_\lambda}+\ldots+\lambda_r)} b$, pour $b \in \mathfrak{S}_n$, $y \in Y_\alpha(\mathcal{O})$. L'assertion 6.4.4 est alors immédiate. ∎

Remarque : Tout comme dans la section précédente, il est possible d'utiliser les arguments précédents pour raisonner sur les modules simples de $KG(r,1,n)$ et $KG(r,f,n)$ ou de $kG(r,1,n)$ et $kG(r,f,n)$. La notion d'associateur se généralise clairement à ces algèbres.

> Nous désignerons le morphisme associateur d'un module M par ass_M.

Dans la sous-section suivante, nous explicitons des relations entre les associateurs $\mathrm{ass}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ et les associateurs $\mathrm{ass}_{S^{\rho'}_{\beta,0}(K)}$.

6.4.2 Conjecture (GHPI) généralisée

Voici comment généraliser la conjecture **(GHPI)** à des groupes de réflexions complexes.

La proposition suivante fournit des conditions de nullité concernant le nombre de décomposition de $\mathcal{O}G(r,f,n)$ associé au module indécomposable $E(\mathrm{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, \zeta^{is'_\alpha s_\lambda d})$ (ou $(Y^\rho_{\alpha,i}(\mathcal{O}))$ et $E(\mathrm{ass}^{s'_\beta s_\lambda}_{S^{\rho'}_{\beta,0}(K)}, \zeta^{js'_\beta s_\lambda d})$ (ou $S^\rho_{\beta,j}(K)$), pour les paramètres $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$, $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$, $\beta \vdash \lambda$, $i \in [0, \sigma'_\alpha - 1]$, $j \in [0, \sigma'_\beta - 1]$.

Proposition 6.4.1 *Soit $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$, $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$, $\beta \vdash \lambda$, $i \in [0, \sigma'^\rho_\alpha - 1]$, $j \in [0, \sigma'^\rho_\beta - 1]$. Notons m le plus petit commun multiple de s'^ρ_β, s'^ρ_α. Alors le nombre de décomposition de la $\mathcal{O}$-algèbre $\mathcal{O}G(r,1,n)$ paramétré par $\big((\beta,i);(\alpha,j)\big)$, égal à la multiplicité $[\widehat{Y^\rho_{\alpha,i}(\mathcal{O})} : S^\rho_{\beta,j}(K)]$, est nul si $i \not\equiv j \pmod{\frac{\sigma^\rho_\lambda}{m}}$.*

Preuve : La K-algèbre $KG(r,1,n)$ est semi-simple. Pour

tout $\lambda \in \mathcal{L}_\rho$, $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} \lambda$, $\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ se décompose en la somme

$$\bigoplus_{\beta\vdash\lambda} [\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})} : S^{\rho'}_{\beta,0}(K)]\, S^{\rho'}_{\beta,0}(K). \tag{6.4.6}$$

Comme $S^{\rho'}_{\beta,0}(K)^{\widehat{h}}$ est isomorphe à $S^{\rho'}_{\beta*\mathrm{ad}_d,0}(K)$ selon le Lemme 6.3.2, leurs restrictions à $KG(r,f,n)$ sont isomorphes. Nous en déduisons que la restriction de $\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ se scinde en la somme

$$\bigoplus_{\beta\vdash\lambda} \Big(\sum_{t=0}^{s'_\beta s_\lambda - 1} [\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})} : S^{\rho'}_{\beta*\mathrm{ad}_{td},0}(K)]\Big) \mathrm{Res}\, S^{\rho'}_{\beta,0}(K), \tag{6.4.7}$$

où la somme sur les β est effectuée sur des représentants des classes des partitions de λ pour la relation d'équivalence induite par l'action de ad_d. Or, de façon triviale l'application $\mathrm{ass}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$ se prolonge à $\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}$, disons en $\mathrm{ass}_{\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}}$ et $E(\mathrm{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}}, \zeta^{is'_\alpha s_\lambda d})$ est égal à $E(\mathrm{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}}, \zeta^{is'_\alpha s_\lambda d})$. En outre, selon (6.4.6) et la définition des applications "associateurs", $\mathrm{ass}_{\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}}$ s'écrit comme la somme des applications :

$$\mathrm{ass}_{\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}} = \bigoplus_{\beta\vdash\lambda} [\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})} : S^{\rho'}_{\beta,0}(K)] \mathrm{ass}_{S^{\rho'}_{\beta,0}(K)}. \tag{6.4.8}$$

Les deux entiers s'_α et s'_β divisant σ_λ, m divise aussi σ_λ et $\frac{\sigma_\lambda}{m}$ est égal à $\frac{\sigma'_\alpha}{c_\alpha}$ ainsi qu'à $\frac{\sigma'_\beta}{c_\beta}$ pour des entiers c_α et c_β déterminés par $m := c_\alpha s'_\alpha$ et $m := c_\beta s'_\beta$. Par des raisonnements analogues à ceux qui ont permis d'établir le résultat (6.4.2), il vient que

$$\mathrm{Res}\, Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O}) \cong \bigoplus_{i=0}^{\frac{\sigma_\lambda}{m}-1} E(\mathrm{ass}^{ms_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, \zeta^{ims_\lambda d}). \tag{6.4.9}$$

Or, pour tout $i \in [0, \sigma'_\alpha - 1]$, si $y \in E(\mathrm{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, \zeta^{is'_\alpha s_\lambda d})$, alors $y \in E(\mathrm{ass}^{ms_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, \zeta^{ims_\lambda d})$. En comparant les deux isomorphismes (6.4.2) et (6.4.9), nous en déduisons que pour tout $i \in [0, \frac{\sigma_\lambda}{m}-1]$, l'espace propre $E(\mathrm{ass}^{ms_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, \zeta^{ims_\lambda d})$ est isomorphe à la somme

$$\bigoplus_{t=0}^{c_\alpha - 1} E(\mathrm{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}, \zeta^{(i+t\frac{\sigma_\lambda}{m})s'_\alpha s_\lambda d}) \tag{6.4.10}$$

en tant que modules sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$. De même,

$$\operatorname{Res} S^{\rho'}_{\beta,0}(K) \cong \bigoplus_{i=0}^{\frac{\sigma_\lambda}{m}-1} E(\operatorname{ass}^{ms_\lambda}_{S^{\rho'}_{\beta,0}(K)}, \zeta^{ims_\lambda d}), \tag{6.4.11}$$

avec, pour tout $i \in [0, \sigma'_\beta - 1]$, l'isomorphisme de modules sur $\mathcal{O}G(r,f,n)$,

$$E(\operatorname{ass}^{ms_\lambda}_{S^{\rho'}_{\beta,0}(K)}, \zeta^{ims_\lambda d}) \cong \bigoplus_{t=0}^{c_\beta - 1} E(\operatorname{ass}^{s'_\beta s_\lambda}_{S^{\rho'}_{\beta,0}(K)}, \zeta^{(i+t\frac{\sigma_\lambda}{m})s'_\beta s_\lambda d}). \tag{6.4.12}$$

En reprenant la décomposition (6.4.7), nous avons

$$\bigoplus_{i=0}^{\frac{\sigma_\lambda}{m}-1} E(\operatorname{ass}^{ms_\lambda}_{\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}}, \zeta^{ims_\lambda d}) \cong c \bigoplus_{i=0}^{\frac{\sigma_\lambda}{m}-1} E(\operatorname{ass}^{ms_\lambda}_{S^{\rho'}_{\beta,0}(K)}, \zeta^{ims_\lambda d}) \oplus W,$$

où $c := \Big(\sum_{t=0}^{s'_\beta s_\lambda - 1} [\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})} : S^{\rho'}_{\beta * \mathrm{ad}_{td},0}(K)] \Big)$ et W est un module sur $KG(r,f,n)$ stable par $\operatorname{ass}^{ms_\lambda}_{\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}}$ (en utilisant l'identification 6.4.8) et qui ne contient aucun sous-module isomorphe à $S^{\rho}_{\beta * \mathrm{ad}_{td},j}(K)$, pour tout $j \in [0, \sigma'_\beta - 1]$ et $t \in [0, s_\lambda s'_\beta - 1]$ (cf. la correspondance (6.4.5)). Utilisons la compatibilité des associateurs observée en (6.4.8). En identifiant les espaces propres associés à la même valeur propre, il est clair que, pour tout $i \in [0, \frac{\sigma_\lambda}{m} - 1]$,

$$E(\operatorname{ass}^{ms_\lambda}_{\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}}, \zeta^{ims_\lambda d}) = cE(\operatorname{ass}^{ms_\lambda}_{S^{\rho'}_{\beta,0}(K)}, \zeta^{ims_\lambda d}) \oplus W_i,$$

où W_i est un sous-module de W. En introduisant les expressions (6.4.10) et (6.4.12), ceci implique que pour tout $i \in [0, \frac{\sigma_\lambda}{m} - 1]$,

$$\bigoplus_{t=0}^{c_\alpha - 1} E(\operatorname{ass}^{s'_\alpha s_\lambda}_{\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})}}, \zeta^{(i+t\frac{\sigma_\lambda}{m})s'_\alpha s_\lambda d}) = c \bigoplus_{t=0}^{c_\beta - 1} E(\operatorname{ass}^{s'_\beta s_\lambda}_{S^{\rho'}_{\beta,0}(K)}, \zeta^{(i+t\frac{\sigma_\lambda}{m})s'_\beta s_\lambda d}) \oplus W_i.$$

Puisque W_i ne contient aucun sous-module isomorphe à $S^{\rho}_{\beta,j}(K)$, pour tout $j \in [0, \sigma'_\beta - 1]$, il est évident que la multiplicité de $S^{\rho}_{\beta,j}(K)$ dans $\widehat{Y^{\rho}_{\alpha,i}(\mathcal{O})}$ est nulle à moins que $i \equiv j \pmod{\frac{\sigma_\lambda}{m}}$. C'est ce que nous voulions montrer. ∎

Remarque : Conservons les notations de la Proposition 6.4.1 et de sa preuve. Supposons être dans le cas contraire, i.e., $i \equiv j \pmod{\frac{\sigma_\lambda}{m}}$. Le

nombre de décomposition cherché (ou la multiplicité cherchée) apparaît dans la relation, pour tout $i \in [0, \frac{\sigma_\lambda}{m}-1]$, $j \in [0, \sigma'_\beta - 1]$,

$$\sum_{t=0}^{c_\alpha - 1} [\widehat{Y^\rho_{\alpha,i+t\frac{\sigma_\lambda}{m}}(\mathcal{O})} : S^\rho_{\beta,j}(K)] = \sum_{l=0}^{s'_\beta s_\lambda - 1} [\widehat{Y^{\rho'}_{\alpha,0}(\mathcal{O})} : S^{\rho'}_{\beta * \mathrm{ad}_{ld},0}(K)]. \quad (6.4.13)$$

Des expressions plus précises peuvent être établies en utilisant l'action de $\widehat{g}$ sur les modules de $KG(r,f,n)$. Par exemple, la multiplicité de $S^\rho_{\beta,j}(K)$ dans $\widehat{Y^\rho_{\alpha,i}(\mathcal{O})}$ est égale à celle de $S^\rho_{\beta,j-1}(K)$ dans $\widehat{Y^\rho_{\alpha,i-1}(\mathcal{O})}$, etc.

6.4.3 Application au type B et D

Prenons le choix particulier où $r=2$, $f=2$, $d=1$, $\rho=(2,2,n)$. Nous sommes alors dans le cas des groupes de type B et de type D $\big(G(2,1,n)$ et $G(2,2,n)\big)$.

Nous avons vu dans le chapitre 5 que si les nombres de décomposition de la $\mathcal{O}$-algèbre $\mathcal{O}G(2,1,n)$ sont connus alors les nombres de décomposition de la $\mathcal{O}$-algèbre $\mathcal{O}G(2,2,n)$ le sont aussi à l'exception de ceux du type $d_{(\beta,\pm);(\alpha,\pm)}$, resp. $d_{(\beta,\pm);(\alpha,\mp)}$. Ces derniers correspondent aux nombres de décomposition associés à $S^\rho_{(\beta,\beta),i}(K)$ et $Y^\rho_{(\alpha,\alpha),i}(\mathcal{O})$, $i \in \{0,1\}$, resp. à $S^\rho_{(\beta,\beta),i}(K)$ et $Y^\rho_{(\alpha,\alpha),i'}(\mathcal{O})$, pour $i,i' \in \{0,1\}$, $i \neq i'$, $\beta \vdash (\frac{n}{2},\frac{n}{2})$ et $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} (\frac{n}{2},\frac{n}{2})$. L'égalité (6.4.13) spécialisée à ce cas particulier donne l'égalité (5.2.3) alors que la nullité donnée en (5.2.2) provient de la Proposition 6.4.1. Cette proposition montre donc que la conjecture **(GHPI)** est satisfaite dans le cas des algèbres de groupes, comme l'ont écrit J. Gruber et G. Hiss. La Proposition 6.4.1 est en quelque sorte une généralisation de la conjecture aux algèbres de groupes de réflexions complexes $G(r,1,n)$ et $G(r,f,n)$.

Chapitre 7

Conjecture de Gruber-Hiss et filtration de modules de Specht

L'objectif premier de ce chapitre est de mimer les méthodes employées au chapitre précédent (établissant des résultats concernant les algèbres de groupes de type B et D) dans le cadre des algèbres de Hecke de type B et D, en vue de traiter la conjecture **(GHPI)**, i.e., la conjecture de Gruber-Hiss pour les nombres de décomposition de ces algèbres. En effet, dans le chapitre précédent, nous avons montré la validité de la conjecture (5.2.2) pour les algèbres de groupes notamment grâce à des considérations faisant intervenir les espaces propres de certaines applications dites "associateurs". Nous montrerons les limites de la généralisation de la notion d'associateur lors du passage des algèbres de groupes, i.e., des algèbres de Hecke où l'indéterminée q est spécialisée à 1, aux algèbres de Hecke pour q paramètre générique.

Dans un second temps, nous donnerons une condition naturelle, sur des filtrations de produits tensoriels de modules de Specht d'algèbres de Hecke de type A, sous laquelle la conjecture s'avère satisfaite.

7.1 Généralisation aux algèbres de Hecke

En tout premier lieu, fixons les notations et hypothèses qui seront conservées jusqu'à la fin de ce chapitre.

Hypothèses (HBD) : Soit $(\mathcal{O}, K, k)$ un système p-modulaire pour un nombre premier impair p et k algébriquement clos.

Soit n un entier naturel.

Soit q une unité de $\mathcal{O}$ qui n'est pas une racine i-ième de l'unité, pour

tout $i \in [1, n]$, et dont aucune puissance paire n'est une racine de l'unité modulo $J(\mathcal{O})$.

Remarque : La première condition sur q est équivalente au fait que

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + q + \ldots + q^{i-1}) \neq 0.$$

La seconde condition se quantifie en disant que

$$-1 \notin q^{\mathbb{Z}} \pmod{J(\mathcal{O})}.$$

Par conséquent, pour tout entier i, $1 + q^i \notin J(\mathcal{O})$, soit encore, par propriété du radical, $1 + q^i$ est une unité de $\mathcal{O}$.

Définition - Notation 7.1.1 *Posons $\mathfrak{H} := \mathfrak{H}_{2,n}^{q,(1,-1)}(\mathcal{O})$, l'algèbre de Hecke de type B, pour un entier n strictement positif. Elle est graduée par un groupe cyclique d'ordre 2, sur $\mathfrak{H}' := \mathfrak{H}_{2,2,n}^{q,(1)}$, algèbre cyclotomique de type D (cf. la* Définition - Notation 4.1.3*), $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \oplus T_1\mathfrak{H}'$. Les automorphismes associés à cette graduation sont notées h pour $\mathfrak{H}$ et g pour $\mathfrak{H}'$ conformément à la* Définition - Notation 2.1.2*.*

7.1.1 Deux équivalences de Morita

Les modules construits au chapitre précédent s'obtiennent à l'aide d'équivalences de Morita. Afin de travailler dans des conditions similaires, nous rappelons deux équivalences de Morita, l'une pour le type B ([27] ou un cas particulier de [34]), l'autre pour le type D ([70] et [53]). C'est à partir de ces données que s'organisent les différents raisonnements analogues à ceux suivis dans les algèbres de groupes.

Équivalence de Morita pour $\mathfrak{H}$

Définition - Notation 7.1.2 *Pour tout entier $a \in [0, n]$, p_a^+ et p_a^- sont les produits*

$$\begin{aligned} p_a^+ &:= \prod_{i=1}^{a}(q^{i-1} + t_i), \\ p_a^- &:= \prod_{i=1}^{a}(q^{i-1} - t_i). \end{aligned}$$

Soient $a,\ b,\ m$ des entiers naturels tels que $m \geq a+b$. La permutation $w_b^{(a+b)} \in \mathfrak{S}_{a+b}$, égale à l'addition de b modulo $a+b$, peut être considérée comme un élément de $\mathfrak{S}_m$ en prolongeant la permutation initiale par l'identité sur $[a+b+1, m]$. L'élément

$$h_{a,b} := T_{w_b^{(a+b)}}$$

est alors vu comme un élément de $\mathfrak{H}_{2,m}^{q,(1,-1)}$.

Pour $a,\ b,\ m$, comme ci-dessus, les éléments

$$\begin{aligned} v_{a,b} &:= p_a^+ h_{a,b} p_b^-, \\ v_{a,b}^- &:= p_a^- h_{a,b} p_b^+ \end{aligned}$$

appartiennent à l'algèbre $\mathfrak{H}_{2,m}^{q,(1,-1)}$.

Remarque : Si a et b sont des entiers naturels de somme n, nous avons de façon immédiate que $(p_a^+)h = p_a^-$ et $(v_{a,b})h = v_{a,b}^-$.

Le premier résultat concerne un isomorphisme du module régulier de $\mathfrak{H}$.

Proposition 7.1.1 *Sous les notations et hypothèses* **(HBD)**, *le module régulier à droite de $\mathfrak{H}$ est isomorphe à la somme directe*

$$\bigoplus_{i=0}^{n} \binom{n}{i} v_{n-i,i}\mathfrak{H}. \tag{7.1.1}$$

Preuve : Sous l'hypothèse de départ **(HBD)**, les modules $v_{a,b}\mathfrak{H}$, pour des entiers $a,\ b \in [0,n]$, $a+b \leq n$, sont projectifs (sur $\mathfrak{H}$) selon [27, Théorème 4.10] et la première remarque de la Section 7.1. Par [27, Corollaire 3.18], si de plus $b \geq 1$, il existe un isomorphisme de modules sur $\mathfrak{H}$:

$$v_{a,b-1}\mathfrak{H} \cong v_{a+1,b-1}\mathfrak{H} \oplus v_{a,b}\mathfrak{H}. \tag{7.1.2}$$

Nous en déduisons que,

$$\text{pour tout } m \leq n,\ \mathfrak{H}_{\mathfrak{H}} \cong \bigoplus_{i=0}^{m} \binom{m}{i} v_{i,m-i}\mathfrak{H}. \tag{7.1.3}$$

Ceci se montre par récurrence sur m (pour n fixé). Dans le cas $m = 0$, (7.1.3) est trivial. Fixons ensuite $m \in [0, n-1]$ et supposons avoir montré l'isomorphisme (7.1.3). En remplaçant chaque élément de la somme $v_{i,m-i}\mathfrak{H}$, $i \in [0, m]$, par $v_{i+1,m-i}\mathfrak{H} \oplus v_{i,m-i+1}\mathfrak{H}$, selon (7.1.2), il vient que $\mathfrak{H}$ est somme directe des modules $v_{i,m+1-i}\mathfrak{H}$, i variant de 0 à $m+1$. Pour un tel i, le facteur $v_{i,m+1-i}\mathfrak{H}$ apparaît avec la multiplicité $\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} = \binom{m+1}{i}$, avec la convention $\binom{m}{j} = 0$ pour tout entier $j \notin [0, m]$. Finalement, l'isomorphisme (7.1.3) est montré au rang $m+1$. Ceci termine la récurrence et la preuve puisque (7.1.1) n'est autre que (7.1.3) dans le cas $m = n$. ∎

A présent, citons en une proposition, des définitions et des résultats de R. Dipper et G. James ou J. Du et H. Rui sur lesquels la suite de ce chapitre repose en partie.

Définition - Notation 7.1.3 *Soient a et b des entiers positifs. Nous noterons $\mathrm{tw}_{b,a}$, l'application de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{b,a}}(\mathcal{O})$ dans $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{a,b}}(\mathcal{O})$, qui pour tout $i \in [2, a+b]$, $i \neq b+1$, fait correspondre à T_i, $T_{(i)w_a^{(a+b)}}$.*

Proposition 7.1.2 ([27], [34]) *Sous les hypothèses* **(HBD)**, *pour tout entier positif a, b, il existe un élément $z_{b,a}$ inversible, appartenant au centre de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{b,a}}(\mathcal{O})$ tel que*

$$v_{a,b}h_{b,a}v_{a,b} = v_{a,b}z_{b,a} = (z_{b,a})\mathrm{tw}_{b,a}\, v_{a,b}. \tag{7.1.4}$$

Les éléments $e_{a,b} := v_{a,b}h_{b,a}(z_{b,a}^{-1})\mathrm{tw}_{b,a}$ sont des idempotents satisfaisant les trois relations suivantes. Pour tout entier $a,\ b \in [0, n],\ a \neq b$,

$$\begin{aligned} v_{a,n-a}\mathfrak{H} &= e_{a,n-a}\mathfrak{H}, \\ e_{a,n-a}\mathfrak{H}e_{b,n-b} &= 0, \\ e_{a,n-a}\mathfrak{H}e_{a,n-a} &\cong \mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{a,n-a}}(\mathcal{O}). \end{aligned}$$

Donnons quelques compléments d'informations à propos des éléments $z_{b,a}$ qui viennent d'être introduits.

Définition - Notation 7.1.4 *Désignons par * l'anti-automorphisme de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_n}(\mathcal{O})$ qui envoie T_i sur T_i, pour $i \in [2, n]$.*

Pour tout entier $a,\ b \in [0,n]$, $a+b \leq n$,

$$(z_{a,b})\mathrm{tw}_{a,b} = (z_{b,a})^*. \tag{7.1.5}$$

En effet, en appliquant l'automorphisme h à l'expression (7.1.4), il vient que $v^-_{a,b} h_{b,a} v^-_{a,b} = v^-_{a,b} z_{b,a}$. Puis, en utilisant * qui transforme $v^-_{a,b}$ en $v_{b,a}$ et $h_{b,a} = T_{w_a^{(a+b)}}$ en $T_{(w_a^{(a+b)})^{-1}} = T_{w_b^{(a+b)}} = h_{a,b}$, nous avons $v_{b,a} h_{a,b} v_{b,a} = (z_{b,a})^* v_{b,a}$. Nous concluons avec un argument d'unicité en comparant la dernière expression obtenue avec (7.1.4).

Dans le cas particulier $a = b = m$, nous retrouvons le résultat [54, Lemme 1.10], établi par J. Hu,

$$z_{m,m} = (z_{m,m})\mathrm{tw}_{m,m} = (z_{m,m})^*.$$

Les Propositions 7.1.1 et 7.1.2 permettent de conclure, en utilisant le foncteur de Schur associé à l'idempotent $\dot{e} = \sum_{k=0}^{n} e_{k,n-k}$, que les deux algèbres $\mathfrak{H}$ et $\dot{e}\mathfrak{H}\dot{e}$ sont liées par une équivalence de Morita (cf. [49, §4]). Grâce aux propriétés des idempotents qui apparaissent dans $\dot{e}$, il vient le

Corollaire 7.1.3 *Les deux algèbres $\mathfrak{H}$ et $\bigoplus_{i=0}^{n} \mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{i,n-i}}(\mathcal{O})$ sont Morita-équivalentes.*

Équivalence de Morita pour $\mathfrak{H}'$

À présent, effectuons le travail analogue pour $\mathfrak{H}'$ avec [70] et [54].

Définition - Notation 7.1.5 *Pour tout entier $a \in [1,n]$, soit*

$$\tilde{p}(a) = \prod_{i=2}^{a} (q^{i-1} + T_{i,3} T_1 T_2 T_1 T_2 T_{3,i}),$$

où pour $i,j \in [2,n]$, $T_{i,j} = T_{s_{i,j}}$ avec

$$s_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ (i,i-1)(i-1,i-2)\dots(j+1,j) & \text{si } i > j \\ (i,i+1)(i+1,i+2)\dots(j-1,j) & \text{si } i < j \end{cases},$$

soit $(j, j+1, \ldots, i)$, *si* $i > j$, *ou* $(j, j-1, \ldots, i)$, *si* $i < j$.

Soient a, b, *des entiers naturels tels que* $a \in [1, n]$, $b \in [0, n-1]$, $n \geq a + b$. *Notons*

$$v(a,b) := \begin{cases} \tilde{p}(a) & \text{si } b = 0 \\ \tilde{p}(a)\big(h_{a,b} - (h_{a,b})g\big)\tilde{p}(b) & \text{si } b > 0 \end{cases}.$$

Soit $a \in [1, n]$. Pour tout entier m, $n \geq m \geq a$, $\tilde{p}(a)$ appartient à $\mathfrak{H}^{q,(1)}_{2,2,m}$ donc aussi à $\mathfrak{H}^{q,(1,-1)}_{2,m}$. Si $b \in [0, n-1]$ et $m \in [a+b, n]$, $v(a,b) \in \mathfrak{H}^{q,(1)}_{2,2,m}$.

Remarque : Pour éviter toute ambigüité, nous utilisons ici un tilde $\tilde{}$ pour conserver la notation barre $\bar{}$ au foncteur produit tensoriel par k.

La Proposition 7.1.1 trouve alors son analogue dans la

Proposition 7.1.4 *Le module régulier à droite* $\mathfrak{H}'$ *satisfait :*
si n *est impair*

$$\mathfrak{H}' \cong \bigoplus_{i=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} \binom{n}{i} v(i, n-i)\mathfrak{H}', \tag{7.1.6}$$

si n *est pair*

$$\mathfrak{H}' \cong \binom{n-1}{\frac{n}{2}} v(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})\mathfrak{H}' \oplus \bigoplus_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n} \binom{n}{i} v(i, n-i)\mathfrak{H}', \tag{7.1.7}$$

où $\lfloor - \rfloor$ *désigne la fonction partie entière.*

Preuve : Par [70, Proposition 1.22], pour tout entier naturel a, b, avec $a \geq 1$ et $2 \leq a+b < n$, il existe une suite exacte courte de modules sur $\mathfrak{H}'$:

$$0 \to v(a, b+1)\mathfrak{H}' \to v(a,b)\mathfrak{H}' \to v(a+1, b)\mathfrak{H}' \to 0.$$

Comme par **(HBD)** et [70, Proposition 2.13], les modules non nuls apparaissant dans la suite exacte sont projectifs, celle-ci se scinde. Il vient,

$$v(a,b)\mathfrak{H}' \cong v(a, b+1)\mathfrak{H}' \oplus v(a+1, b)\mathfrak{H}', \tag{7.1.8}$$

puis pour tout $l \in [1,n]$,

$$\mathfrak{H}'_{\mathfrak{H}'} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} \binom{l-1}{i-1} v(i,l-i)\mathfrak{H}'. \tag{7.1.9}$$

Ceci se montre par récurrence sur l (pour n fixé) comme dans la preuve de la Proposition 7.1.1. Or si $a \geq 1,\ b \geq 1$ et $a \neq b$, par [70, Proposition 3.3], $v(a,b)\mathfrak{H}' \cong v(b,a)\mathfrak{H}'$. En prenant en compte cet isomorphisme, l'expression (7.1.9) devient, pour tout $l \in [1,n]$,

$$\mathfrak{H}'_{\mathfrak{H}'} \cong \bigoplus_{i=\lfloor \frac{l}{2}+1 \rfloor}^{l} \binom{l}{i} v_{i,l-i}\mathfrak{H}' \oplus \delta(l)\binom{l-1}{\frac{l}{2}} v_{\frac{l}{2},\frac{l}{2}}\mathfrak{H}', \tag{7.1.10}$$

où $\delta(l) = \begin{cases} 0 & \text{si } l \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } l \text{ est pair} \end{cases}$. L'assertion cherchée vient en considérant le cas particulier $m = n$. ∎

La proposition suivante, due à C. Pallikaros, donne pour $\mathfrak{H}'$, des résultats similaires à ceux énoncés dans la Proposition 7.1.2 pour $\mathfrak{H}$.

Proposition 7.1.5 ([70]) *Sous les hypothèses* **(HBD)**, *pour tout entier $a \in [1,n],\ b \in [0,n-a]$, il existe un élément $z(b,a)$ inversible, appartenant au centre de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{b,a}}(\mathcal{O})$ tel que*

$$v(a,b)h_{b,a}v(a,b) = v(a,b)z(b,a).$$

Pour de tels entiers $a,\ b$, les éléments $e(a,b) := v(a,b)z(b,a)^{-1}h_{b,a}$ sont des idempotents satisfaisant les relations suivantes. Si $a,\ b \in [1,n]$, a et b distincts de $\frac{n}{2}$, $a \neq b$,

1. *$e(a,n-a)\mathfrak{H}' = v(a,n-a)\mathfrak{H}'$,*
2. *$e(a,n-a)\mathfrak{H}'e(b,n-b) = 0$,*
3. *$e(a,n-a)\mathfrak{H}'e(a,n-a) = e(a,n-a)\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{a,n-a}}(\mathcal{O})$ et $e(a,n-a)$ commute à tous les éléments de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{a,n-a}}(\mathcal{O})$. En outre, les deux algèbres $e(a,n-a)\mathfrak{H}'e(a,n-a)$ et $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{a,n-a}}(\mathcal{O})$ sont isomorphes.*

Le problème, souligné par C. Pallikaros dans l'introduction de son article [70], est le cas où n est pair.

Hypothèse : **Désormais,** n **sera supposé pair,**

$$n = 2m.$$

Sous les hypothèses **(HBD)**, le module $v(m,m)\mathfrak{H}'$ est projectif.

Définition - Notation 7.1.6 *Il existe un idempotent* $e(m,m)$ *tel que* $e(m,m)\mathfrak{H}' = v(m,m)\mathfrak{H}'$.

Soit $A(m)$ *l'algèbre (non unitaire)* $e(m,m)\mathfrak{H}'e(m,m)$.

L'idempotent $e(m,m)$ est orthogonal aux idempotents de la forme $e(a,n-a)$, $a \in [1,n]\backslash\{m\}$ et mieux, $e(a,n-a)\mathfrak{H}'e(b,n-b) = 0$ si $a,\ b \in [1,n]$, $a \neq b$ et a ou b est égal à m ([70, Corollaire 2.6 (iv)] ou [70, Proposition 3.4 (ii)]).

Si $\dot{e}'$ désigne l'idempotent de $\mathfrak{H}'$, $\dot{e}' = \sum_{k=m}^{n} e(k,n-k)$, la Proposition 7.1.4 permet d'affirmer que les deux algèbres $\mathfrak{H}'$ et $\dot{e}'\mathfrak{H}'\dot{e}'$ sont Morita équivalentes, soit encore, avec la Proposition 7.1.5,

Corollaire 7.1.6 *Les deux algèbres* $\mathfrak{H}'$ *et* $A(m) \oplus \bigoplus_{k=m+1}^{n} \mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{k,n-k}}(\mathcal{O})$ *sont Morita-équivalentes.*

L'algèbre $A(m)$ a été étudiée par J. Hu dans [54]. Les résultats qui seront utiles ici font l'objet de la

Proposition 7.1.7 ([54]) *Supposons les hypothèses* **(HBD)** *vérifiées.*

1. *Il existe un unique élément* $h_m \in \mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_n}(\mathcal{O})$ *tel que*

$$p_m^+ h_{m,m} p_m^- = p_m^+ h_m + \sum_{b>m} h'_b p_b^+ h''_b, \text{ avec } h'_b,\ h''_b \in \mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_n}(\mathcal{O}).$$

2. *L'élément*

$$e(m,m) := 2z_{m,0}^{-1} z_{m,m}^{-1} v(m,m) h_m$$

est un idempotent de $\mathfrak{H}'$ *qui engendre le même module à droite que* $v(m,m)$. *Nous le noterons* $e(m,m)$.

3. *La somme* $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{m,m}}(\mathcal{O})\oplus h_m^*\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{m,m}}(\mathcal{O})$ *est la sous-algèbre de* $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_n}(\mathcal{O})$ *engendrée par* $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{m,m}}(\mathcal{O})$ *et* h_m^*. *Elle est isomorphe à l'algèbre* $A(m) = e(m,m)\mathfrak{H}'e(m,m)$.
4. *L'élément* h_m *satisfait les deux égalités* $h_m^* v(m,m) = v(m,m)h_m$ *et* $h_m^2 = z_{m,m}$.

Remarques :

Les hypothèses **(HBD)** n'interviennent pas dans le premier résultat de la proposition. Elles ne sont utiles qu'à partir du deuxième point.

La notation $e(m,m)$ est compatible à celle de C. Pallikaros puisque dans cette dernière, $e(m,m)$ doit uniquement répondre aux conditions suivantes : être un idempotent de $\mathfrak{H}'$ qui engendre $v(m,m)\mathfrak{H}'$. Ceci est le cas pour $e(m,m) = 2z_{m,0}^{-1}z_{m,m}^{-1}v(m,m)h_m$.

7.1.2 Modules pour $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}'$

Dans le cas des algèbres de groupes, les équivalences de Morita établies dans la Proposition 6.1.3 ont permis de construire les modules projectifs indécomposables de $\mathcal{O}G(2,1,n)$ et de $\mathcal{O}G(2,2,n)$. Nous reproduisons les mêmes constructions, adaptées aux algèbres de Hecke à partir des équivalences de Morita décrites au Corollaire 7.1.3 et au Corollaire 7.1.6 .

Définition - Notation 7.1.7 *Jusqu'à la fin du chapitre, nous noterons indifféremment* $\widehat{-} := K\otimes_{\mathcal{O}} -$ *ou* $1_K\otimes_{\mathcal{O}} -$ *et* $\overline{-} := k\otimes_{\mathcal{O}} -$ *ou* $1_k\otimes_{\mathcal{O}} -$.

Définition - Notation 7.1.8 *Soient* F_1, G_1, *resp.* F_2, G_2, *les foncteurs associés à l'équivalence de Morita décrite au* Corollaire 7.1.3, *resp. au* Corollaire 7.1.6, $F_1 : \mathrm{mod}(\mathfrak{H}) \to \prod_{i=0}^{n} \mathrm{mod}\big(\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{i,n-i}}(\mathcal{O})\big)$ *de foncteur réciproque* G_1, *resp.* $F_2 : \mathrm{mod}(\mathfrak{H}') \to \mathrm{mod}\big(A(m)\big) \times \prod_{i=m+1}^{n} \mathrm{mod}\big(\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{i,n-i}}(\mathcal{O})\big)$, *de foncteur réciproque* G_2.

Définition - Notation 7.1.9 *Soit* $\mathfrak{o}$ *le plus petit entier strictement positif* s *tel que* $1+q+\ldots+q^{s-1} = 0 \pmod{J(\mathcal{O})}$ *si il existe, sinon posons* $\mathfrak{o} := 0$.

Soient $i \in [0,n]$ et α une partition de i. Nous noterons $S_\alpha(\mathcal{O})$ le module de Specht de paramètre α de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_i}(\mathcal{O})$. Soit β une partition de $n-i$. Le module $S_{\alpha,\beta}(\mathcal{O})$ de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{i,n-i}}(\mathcal{O})$ identifiée à $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_i}(\mathcal{O})\otimes_{\mathcal{O}}\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{n-i}}(\mathcal{O})$ est le produit tensoriel des deux modules de Specht $S_\alpha(\mathcal{O})\otimes_{\mathcal{O}} S_\beta(\mathcal{O})$. Nous noterons $S_\alpha(K)$ et $S_{\alpha,\beta}(K)$, resp. $S_\alpha(k)$ et $S_{\alpha,\beta}(k)$, les analogues des modules $S_\alpha(\mathcal{O})$ et $S_{\alpha,\beta}(\mathcal{O})$, sur le corps K, resp. k.

Si $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} i$, le module simple $D_\alpha(k)$ sur $\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_i}(k)$ est le quotient du module de Specht $S_\alpha(k)$ par son radical. Nous noterons $Y_\alpha(k)$ sa couverture projective de relèvement $Y_\alpha(\mathcal{O})$ à $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_i}(\mathcal{O})$. Si $\beta \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} n-i$, nous formons les modules $D_{\alpha,\beta}(k)$, $Y_{\alpha,\beta}(k)$ et $Y_{\alpha,\beta}(\mathcal{O})$ en suivant la construction des modules $S_{\alpha,\beta}(\mathcal{O})$.

Rappelons que pour tout $i \in [1,n]$, l'ensemble des modules simples de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_i}(K)$ est l'ensemble des modules de Specht $S_\alpha(K)$, pour α partition de i et l'ensemble des modules simples, resp. projectifs indécomposables, de $\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_i}(k)$, resp. de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_i}(\mathcal{O})$, est l'ensemble des modules $D_\alpha(k)$, resp. des modules $Y_\alpha(\mathcal{O})$, pour α partition $\mathfrak{o}$-régulière de i.

Suite à ces notations et rappels, nous pouvons énoncer le

Lemme 7.1.8 *L'ensemble des modules simples de $\widehat{\mathfrak{H}}$ est l'ensemble $\{\big(S_{\alpha,\beta}(K)\big)\widehat{G_1}\,;\,\alpha\vdash i,\,\beta\vdash n-i,\,i\in[0,n]\}$.*

L'ensemble des modules simples de $\overline{\mathfrak{H}}$ est constitué des modules $\big(D_{\alpha,\beta}(k)\big)\overline{G_1}$, $\alpha\vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} i$, $\beta\vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} n-i$, $i\in[0,n]$.

Enfin, l'ensemble des modules projectifs indécomposables de $\mathfrak{H}$ est formé des éléments $\big(Y_{\alpha,\beta}(\mathcal{O})\big)G_1$, $\alpha\vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} i$, $\beta\vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} n-i$, $i\in[0,n]$.

Utilisons à présent l'équivalence de Morita (7.1.6) pour former les modules simples de $\widehat{\mathfrak{H}'}$ et de $\overline{\mathfrak{H}'}$ ainsi que l'ensemble des modules projectifs indécomposables de $\mathfrak{H}'$.
Pour tout $i\in[m+1,n]$, la description des modules simples de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_i}(K)$ et $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{n-i}}(K)$, $\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_i}(k)$ et $\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_{n-i}}(k)$, et également des modules projectifs indécomposables de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_i}(\mathcal{O})$ et $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{n-i}}(\mathcal{O})$, rappelée précédemment permet d'expliciter la partie des modules simples de $\widehat{\mathfrak{H}'}$ et de $\overline{\mathfrak{H}'}$, ou des modules projectifs indécomposables de $\mathfrak{H}$ qui provient des composantes $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{i,n-i}}(K)$, $\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_{i,n-i}}(k)$ ou $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{i,n-i}}(\mathcal{O})$ par l'équivalence de Morita.

Il reste à expliciter les modules provenant des algèbres $\widehat{A(m)}$, $A(m)$ et $\overline{A(m)}$. Rappelons que $A(m)$ est une algèbre graduée

"par" h_m^* sur $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{m,m}}(\mathcal{O})$. Pour trouver ces modules, nous mimerons ce qui a été fait pour les algèbres des groupes $G(r,f,n)$ ([72], [61] ou [60]).

> Nous utiliserons la notation $-_R$ pour symboliser l'extension à R, pour $R \in \{\mathcal{O}, K, k\}$.

Étudions les modules simples de $A(m)_R$ pour $R \in \{K, k\}$.
Soient $M_1,\ M_2$ des modules sur $\mathfrak{H}^{q_R}_{\mathfrak{S}_m}(R)$, alors $M_1 \otimes_R M_2$ peut s'identifier à un module de $\mathfrak{H}^{q_R}_{\mathfrak{S}_{m,m}}(R)$. Il en est de même de $(M_1 \otimes_R M_2)^{h^*_{m\,R}}$. Rappelons que l'espace sous-jacent de ce dernier module est identique à celui de $M_1 \otimes_R M_2$ et l'action $*$ de $\mathfrak{H}^{q_R}_{\mathfrak{S}_{m,m}}(R)$ sur $(M_1 \otimes_R M_2)^{h^*_{m\,R}}$ est donnée en fonction de celle sur $M_1 \otimes_R M_2$: pour tout $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ et $w_1,\ w_2 \in \mathfrak{S}_m$, $(m_1 \otimes_R m_2) * T_{w_1(w_2 w_m^{(n)})} := (m_1 \otimes_R m_2) T_{w_2(w_1 w_m^{(n)})}$ soit $m_1 T_{w_2} \otimes_R m_2 T_{w_1}$. Il est alors clair que l'application

$$\begin{array}{rccc} t_{M_1,M_2} : & (M_1 \otimes_R M_2)^{h^*_{m\,R}} & \to & M_2 \otimes_R M_1 \\ & m_1 \otimes_R m_2 & \mapsto & m_2 \otimes_R m_1 \end{array} \tag{7.1.11}$$

est un isomorphisme de modules sur $\mathfrak{H}^{q_R}_{\mathfrak{S}_{m,m}}(R)$.

D'après la théorie des représentations des algèbres graduées, l'algèbre $A(m)_R$ admet deux types de modules simples.
Soient $\alpha,\ \beta$, deux partitions distinctes de m, resp. $\mathfrak{o}$-régulières de m. Le module induit de $\mathfrak{H}^{q_R}_{\mathfrak{S}_{m,m}}(R)$ à $A(m)_R$ à partir de $S_{\alpha,\beta}(K)$ si $R = K$ ou de $D_{\alpha,\beta}(k)$ si $R = k$, est un module simple de $A(m)_R$.

À présent, supposons que $\alpha = \beta$. D'après l'application (7.1.11), les modules $S_{\alpha,\alpha}(K)$ et $S_{\alpha,\alpha}(K)^{\widehat{h^*_m}}$ ou $D_{\alpha,\alpha}(k)$ et $D_{\alpha,\alpha}(k)^{\overline{h^*_m}}$, sont isomorphes. Comme dans le cas des algèbres de groupes, il est possible d'étendre l'action de $\mathfrak{H}_{\mathfrak{S}_{m,m}}(R)$ sur $S_{\alpha,\alpha}(K)$ si $R = K$, ou sur $D_{\alpha,\alpha}(k)$ si $R = k$, à $A(m)_R$. En effet, le carré de h^*_m est égal à $z_{m,m}$ d'après [54, Lemme 1.10] et $z_{m,m}$ agit sur $S_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O})$ par un scalaire $f_{(\alpha,\alpha)}(q)$ qui admet une racine carrée $\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(q)} \in \mathcal{O}$, ([54, Lemme 3.2, Théorème 3.5]). Nous en déduisons que $\widehat{h^*_m}^2 = \widehat{z_{m,m}}$, resp. $\overline{h^*_m}^2 = \overline{z_{m,m}}$, agit sur $S_{\alpha,\alpha}(K)$, resp. $D_{\alpha,\alpha}(k)$, par un scalaire $f_{(\alpha,\alpha)}(q)$, resp. $f_{(\alpha,\alpha)}(\overline{q})$. L'action de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{m,m}}(K)$ sur $S_{\alpha,\alpha}(K)$ se prolonge en une action de $\widehat{A(m)}$ sur $S_{\alpha,\alpha}(K)$ en posant, pour tout $s,\ t \in S_\alpha(K)$, $(s \otimes_K t) * \widehat{h^*_m} := \sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(q)}(t \otimes_K s)$. L'action de $\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_{m,m}}(k)$ sur $D_{\alpha,\alpha}(k)$ se prolonge en une action de $\overline{A(m)}$ de façon analogue. Ceci donne un sens à la

Définition - Notation 7.1.10 *Soit χ_+, resp. χ_-, le caractère de $\widehat{A(m)}$ qui vaut 1 sur $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{m,m}}(K)$ et 1, resp. -1, sur $\widehat{h_m}^*$. Nous noterons encore $\chi_\pm$ la restriction de $\chi_\pm$ à $A(m)$ et $\overline{\chi}_\pm$ sa réduction à $\overline{A(m)}$.*

Soit $\alpha \vdash m$, resp. $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} m$. Notons $\chi_\pm S_{\alpha,\alpha}(K)$, resp. $\overline{\chi}_\pm D_{\alpha,\alpha}(k)$, le produit tensoriel extérieur des deux modules sur $\widehat{A(m)}$, resp. $\overline{A(m)}$, $\chi_\pm$ et $S_{\alpha,\alpha}(K)$, resp. $\overline{\chi}_\pm$ et $D_{\alpha,\alpha}(k)$.

Nous pouvons énoncer le

Lemme 7.1.9 *L'ensemble des modules simples de $\widehat{\mathfrak{H}'}$ est constitué des modules $\big((S_{\alpha,\beta}(K)\big)\widehat{G_2}$ pour des partitions $\alpha \vdash i$, $\beta \vdash n-i$, avec $i \in [m+1,n]$, des modules $\big(\mathrm{Ind}^{\widehat{A(m)}}_{\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{m,m}}(K)} S_{\alpha,\beta}(K)\big)\widehat{G_2}$, pour des partitions distinctes α, β, de m, ainsi que des modules $\big(\chi_+ S_{\alpha,\alpha}(K)\big)\widehat{G_2}$, $\big(\chi_- S_{\alpha,\alpha}(K)\big)\widehat{G_2}$, avec $\alpha \vdash m$.*

L'ensemble des modules simples de $\overline{\mathfrak{H}'}$ est constitué des modules $\big(D_{\alpha,\beta}(k)\big)\overline{G_2}$ pour des partitions $\mathfrak{o}$-régulières $\alpha \vdash i$, $\beta \vdash n-i$, avec $i \in [m+1,n]$, des modules $\big(\mathrm{Ind}^{\overline{A(m)}}_{\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{m,m}}(k)} D_{\alpha,\beta}(k)\big)\overline{G_2}$, pour des partitions $\mathfrak{o}$-régulières distinctes α, β, de m, ainsi que des modules $\big(\overline{\chi}_+ D_{\alpha,\alpha}(k)\big)\overline{G_2}$, $\big(\overline{\chi}_- D_{\alpha,\alpha}(k)\big)\overline{G_2}$, avec $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} m$.

Cherchons à appliquer les méthodes précédentes pour construire les modules projectifs indécomposables de $\mathfrak{H}'$. Les modules $\big(Y_{\alpha,\beta}(\mathcal{O})\big)G_2$, pour des partitions $\mathfrak{o}$-régulières $\alpha \vdash i$, $\beta \vdash n-i$, avec $i \in [m+1,n]$, constituent une partie de cet ensemble. Supposons que α est une partition $\mathfrak{o}$-régulière de m. Nous avons encore que $Y_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O})^{h_m^*}$ et $Y_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O})$ sont isomorphes en tant que modules sur $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{m,m}}(\mathcal{O})$. Le problème pour étendre l'action de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{m,m}}(\mathcal{O})$ sur $Y_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O})$ à $A(m)$ est que $z_{m,m}$ n'agit pas forcément par un scalaire sur $Y_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O})$. Le lemme de Schur, entre autres, ne peut pas être appliqué.

Donnons un contre-exemple. Supposons que $z_{m,m}$ (considéré comme élément de $\mathfrak{H}$) agisse par multiplication par un scalaire $g_{(\alpha,\alpha)}(q) \in \mathcal{O}$ sur $Y_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O})$ pour une partition $\mathfrak{o}$-régulière α de m. Par extension des scalaires, $z_{m,m}$ (considéré comme élément de $\widehat{\mathfrak{H}}$) agit aussi par multiplication par $g_{\alpha,\alpha}(q) \in \mathcal{O} \subseteq K$ sur $\widehat{Y_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O})}$. La K-algèbre $\widehat{\mathfrak{H}}$ est semi-simple, $\widehat{Y_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O})}$ se décompose en la somme

$\bigoplus_{\lambda,\mu\vdash m} d_{(\lambda,\mu),(\alpha,\alpha)} S_{\lambda,\mu}(K)$. Comme $z_{m,m}$ agit par $f_{\lambda,\mu}(q)$ sur $S_{\lambda,\mu}(K)$, si le couple (λ,μ) est tel que $d_{(\lambda,\mu),(\alpha,\alpha)} \neq 0$, alors $f_{\lambda,\mu}(q) = g_{(\alpha,\alpha)}(q)$. Or, $d_{(\alpha,\alpha),(\alpha,\alpha)} \neq 0$. Par conséquent, si (λ,μ) est tel que $d_{(\lambda,\mu),(\alpha,\alpha)} \neq 0$, alors $f_{\lambda,\mu}(q) = f_{\alpha,\alpha}(q)$.

Afin de remplir les hypothèses **(HBD)** et de travailler avec un paramètre q tel que $\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_m}(k)$ ne soit pas semi-simple (nullité du polynôme de Poincaré), supposons que $n = 6$ et q est un élément inversible de $\mathcal{O}$ qui n'est pas une racine i-ième de l'unité pour tout $i \in [1,n]$, mais $\overline{q} = 1$ ou $\overline{q}$ est une racine primitive troisième de l'unité de k. Dans $\mathfrak{H}^{q}_{\mathfrak{S}_3}(K)$, $\widehat{Y_{(3)}(\mathcal{O})}$ se décompose en $S_{(3)}(K) \oplus S_{(2,1)}(K)$ (cf. Annexe B.1). Par conséquent, $S_{(3),(3)}(K)$ et $S_{(2,1),(2,1)}(K)$ apparaissent dans $\widehat{Y_{(3),(3)}(\mathcal{O})}$ (avec multiplicité 1). Or $f_{(3),(3)}(q) = q^6(1+q^3)(1+q^2)(1+q)$ et $f_{(2,1),(2,1)} = q^6(1+q^3)(1+q^{-1})(1+q^{-2})$ d'après [54, Théorème 3.6]. Par hypothèse, q n'est pas racine du polynôme $1+X+X^2-X^4-X^5-X^6$ qui est le produit des polynômes cyclotomiques $\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4$. Nous en déduisons que $f_{(3),(3)}(q) \neq f_{(2,1),(2,1)}(q)$ et $z_{m,m}$ n'agit pas par un scalaire sur $Y_{(3),(3)}(\mathcal{O})$.

Remarque : Notons que $f_{(3),(3)}(\overline{q}) = f_{(2,1),(2,1)}(\overline{q})$ dans k.

Dans le cas des algèbres de groupes, nous avions également formé les modules des algèbres sur K, k et $\mathcal{O}$ du groupe $G(r,f,n)$ en fonction des sous-modules apparaissant dans les restrictions des modules des algèbres du groupe $G(r,1,n)$, notamment grâce aux espaces propres des morphismes associateurs. Regardons ce qu'il se passe dans les algèbres de Hecke de type B. Nous allons montrer le

Lemme 7.1.10 *Pour toute partition, resp. partition $\mathfrak{o}$-régulière, $\alpha \vdash i$, $\beta \vdash n-i$, $i \in [0,n]$, les modules $\big(S_{\alpha,\beta}(K)\big)\widehat{G_1}^{\widehat{h}}$ et $\big(S_{\beta,\alpha}(K)\big)\widehat{G_1}$, resp. $\big(Y_{\alpha,\beta}(\mathcal{O})\big){G_1}^{h}$ et $\big(Y_{\beta,\alpha}(\mathcal{O})\big)G_1$, $\big(D_{\alpha,\beta}(k)\big)\overline{G_1}^{\overline{h}}$ et $\big(D_{\beta,\alpha}(k)\big)\overline{G_1}$, sont isomorphes.*

Preuve : Rappelons que pour tout $i \in [0,n-1]$, $j \in [2,n]\backslash\{n-i+1\}$, $h_{i,n-i}T_j = T_{(j)w_i^{(n)}} h_{i,n-i}$, soit aussi, pour tout $w \in \mathfrak{S}_{(n-i,i)}$,

$$h_{i,n-i}T_w = T_{w'}h_{i,n-i}, \text{ pour } w' := {}^{w^{(n)}_{n-i}}w, \tag{7.1.12}$$

L'élément $v_{i,n-i}$ vérifie aussi

$$v_{i,n-i}T_w = T_{w'}v_{i,n-i}, \text{ pour } w' := {}^{w_{n-i}^{(n)}}w. \tag{7.1.13}$$

Soit $\alpha \vdash i$, $\beta \vdash n-i$, pour un entier $i \in [0,n]$. Nous allons montrer que $\big(S_{\alpha,\beta}(K)\big)\widehat{G_1}$ et $\big(S_{\beta,\alpha}(K)\big)\widehat{G_1}^{\widehat{h}}$ sont isomorphes. Quand α et β sont des partitions $\mathfrak{o}$-régulières, un raisonnement analogue permet d'établir un isomorphisme entre $\big(Y_{\alpha,\beta}(\mathcal{O})\big)G_1$ et $\big(Y_{\beta,\alpha}(\mathcal{O})\big){G_1}^h$ et entre $\big(D_{\alpha,\beta}(k)\big)\overline{G_1}$ et $\big(D_{\beta,\alpha}(k)\big)\overline{G_1}^{\overline{h}}$.

Tout d'abord, remarquons que les modules $\big(S_{\beta,\alpha}(K)\big)\widehat{G_1}^{\widehat{h}}$ et $S_{\beta,\alpha}(K) \otimes_{\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{n-i,i}}(K)} v^-_{n-i,i}\widehat{\mathfrak{H}}$ sont isomorphes par le morphisme $\mathrm{Id}_{S_{\beta,\alpha}(K)} \otimes \widehat{h}$. Pour montrer l'assertion, il suffit donc de donner un isomorphisme entre $\big(S_{\alpha,\beta}(K)\big)\widehat{G_1}$ et $S_{\beta,\alpha}(K) \otimes_{\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{n-i,i}}(K)} v^-_{n-i,i}\widehat{\mathfrak{H}}$. Soit $is_{\alpha,\beta}$ l'application définie sur ce premier module à valeurs dans le second, qui envoie $(s_\alpha \otimes s_\beta) \otimes v_{i,n-i}t$, pour $s_\alpha \in S_\alpha(K)$, $s_\beta \in S_\beta(K)$ et $t \in \widehat{\mathfrak{H}}$, sur $(s_\beta \otimes s_\alpha) \otimes p^-_{n-i}h_{n-i,i}v_{i,n-i}t$. En utilisant (7.1.12), (7.1.13) et le fait que p^-_{n-i} commute avec les éléments de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{n-i,i}}(K)$, il vient que $is_{\alpha,\beta}$ est bien définie et c'est clairement un morphisme de modules sur $\widehat{\mathfrak{H}}$. Soit l'application $is'_{\alpha,\beta}$ définie dans le sens inverse de $is_{\alpha,\beta}$, déterminée comme suit. L'image de $(s_\beta \otimes s_\alpha) \otimes v^-_{n-i,i}t$, pour $s_\alpha \in S_\alpha(K)$, $s_\beta \in S_\beta(K)$ et $t \in \widehat{\mathfrak{H}}$, est égale à $(s_\alpha \otimes s_\beta) \otimes (z^{-1}_{n-i,i})\mathrm{tw}_{n-i,i}p^+_i h_{i,n-i}v^-_{n-i,i}h$. Comme $(z_{n-i,i})\mathrm{tw}_{n-i,i}$ est un élément central de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{i,n-i}}(K)$, les arguments utilisés pour justifier que $is_{\alpha,\beta}$ est bien définie montrent que $is'_{\alpha,\beta}$ l'est aussi. En outre, $is_{\alpha,\beta} \circ is'_{\alpha,\beta}$ est l'application identité de $\big(S_{\alpha,\beta}(K)\big)\widehat{G_1}$ et les espaces de départ et d'arrivée de $is_{\alpha,\beta}$ et $is'_{\alpha,\beta}$ ont même dimension. Par conséquent, $is'_{\alpha,\beta}$ est l'application réciproque de $is_{\alpha,\beta}$. ∎

Remarque : Reprenons la preuve précédente et ses notations. La composition $is'_{\alpha,\beta} \circ is_{\alpha,\beta}$ est l'identité de $S_{\beta,\alpha}(K) \otimes_{\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{n-i,i}}(K)} v^-_{n-i,i}\widehat{\mathfrak{H}}$. Or, elle envoie $(s_\beta \otimes s_\alpha) \otimes v^-_{i,n-i}$, pour $s_\alpha \in S_\alpha(K)$, $s_\beta \in S_\beta(K)$, sur $(s_\beta \otimes s_\alpha) \otimes v^-_{i,n-i}z_{i,n-i}(z^{-1}_{n-i,i})\mathrm{tw}_{n-i,i}$. Ceci implique que, pour tout $i \in [0,n]$,

$$z_{i,n-i} = (z_{n-i,i})\mathrm{tw}_{n-i,i}.$$

En prenant en compte l'égalité (7.1.5), il vient aussi que, pour tout $i \in [0,n]$,

$$z^*_{i,n-i} = z_{i,n-i}.$$

Considérons le cas particulier où $i = m$. Soit $\alpha \vdash m$. La démonstration du Lemme 7.1.10 fournit un isomorphisme $\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(K))\widehat{G_1}}$ de $\big(S_{\alpha,\alpha}(K)\big)\widehat{G_1}$ dans $\big(S_{\alpha,\alpha}(K)\big)\widehat{G_1}^{\widehat{h}}$ qui associe à $(s_1 \otimes s_2) \otimes v_{m,m}t$, l'élément $(s_2 \otimes s_1) \otimes v_{m,m}h_{m,m}p_m^+(t)\widehat{h}$, pour $s_1, s_2 \in S_\alpha(K)$, $t \in \widehat{\mathfrak{H}}$. Le carré de $\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(K))\widehat{G_1}}$ est donc un automorphisme de $\big(S_{\alpha,\alpha}(K)\big)\widehat{G_1}$ qui envoie $(s_1 \otimes s_2) \otimes v_{m,m}t$ sur $(s_1 \otimes s_2)z_{m,m} \otimes v_{m,m}t$. L'application $\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(K))\widehat{G_1}}$ est donc la multiplication par le scalaire $f_{(\alpha,\alpha)}(q)$. Utilisons le même procédé que dans le cas des groupes. Le module $\big(S_{\alpha,\alpha}(K)\big)\widehat{G_1}$ restreint à $\widehat{\mathfrak{H}'}$ se décompose en deux modules simples qui sont les espaces propres $E(\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(K))\widehat{G_1}}, \sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(q)})$ et $E(\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(K))\widehat{G_1}}, -\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(q)})$. Avec des notations adaptées, si α est $\mathfrak{o}$-régulière, la restriction à $\overline{\mathfrak{H}'}$ du module sur $\overline{\mathfrak{H}}$, $\big(D_{\alpha,\alpha}(k)\big)\overline{G_1}$, se décompose en deux modules simples qui sont les espaces propres $E(\mathcal{S}_{(D_{\alpha,\alpha}(k))\overline{G_1}}, \sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(\overline{q})})$ et $E(\mathcal{S}_{(D_{\alpha,\alpha}(k))\overline{G_1}}, -\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(\overline{q})})$. Par contre, pour les modules projectifs indécomposables de $\mathfrak{H}$, nous retombons sur la difficulté provenant de ce que $z_{m,m}$ n'agit pas par un scalaire sur $Y_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O})$. Nous ne pouvons pas décomposer la restriction du module $\big(Y_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O})\big)G_1$ à $\mathfrak{H}'$ en deux modules qui soient des espaces propres pour l'associateur $\mathcal{S}_{(Y_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O}))G_1}$.

7.2 Filtration des modules de Specht

Les arguments utilisés dans le cadre des algèbres de groupes pour décrire les matrices de décomposition des algèbres de groupes de type D en fonction de celles des algèbres de groupes de type B ne peuvent être reproduits dans le cas plus général des algèbres de Hecke. Les morphismes associateurs perdent leur caractère "universel" au cours de la généralisation et ne permettent plus de décomposer des modules restreints de $\mathfrak{H}$ à $\mathfrak{H}'$ en fonction d'espaces propres. Aucune imbrication d'espaces relative à des valeurs propres n'est alors possible. Par conséquent, nous allons changer de méthode et utiliser la définition de matrice de décomposition reposant sur les multiplicités de modules sur $\overline{\mathfrak{H}}$ et $\overline{\mathfrak{H}'}$. Nous donnerons une condition sous laquelle la conjecture **(GHPI)** est satisfaite.

7.2.1 Une condition pour obtenir la conjecture

Les applications associateurs sont reliées aux applications d'échange définies comme suit.

Définition - Notation 7.2.1 *Soit $R \in \{\mathcal{O}, K, k\}$. Soient M_1, M_2, des modules sur $\mathfrak{H}^{q_R}_{\mathfrak{S}_m}(R)$. Considérons $M_1 \otimes_R M_2$ comme un module sur $\mathfrak{H}^{q_R}_{\mathfrak{S}_{m,m}}(R)$, où $q_R := 1_R \otimes_{\mathcal{O}} q$. Notons*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ech}_{M_1,M_2} : & M_1 \otimes_R M_2 & \to & M_2 \otimes_R M_1 \ . \\ & m_1 \otimes_R m_2 & \mapsto & m_2 \otimes_R m_1 \end{array}$$

Si $N1 \subseteq N_2$ sont des sous-modules de $M_1 \otimes_R M_2$ stables par ech_{M_1,M_2}, nous noterons $\mathrm{ech}_{M_1,M_2}|_{N_2/N_1}$, l'application ech_{M_1,M_2} restreinte à N_2 et passée au quotient par N_1.

Nous sommes désormais en mesure d'énoncer une condition sous laquelle la conjecture de **(GHPI)** est vérifiée.

Proposition 7.2.1 *Soit α une partition de m. Supposons que $S_{\alpha,\alpha}(k)$ admet une filtration*

$$\{0\} = S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_s = S_{\alpha,\alpha}(k)$$

stable par $\mathrm{ech}_{S_\alpha(k),S_\alpha(k)}$, où chaque quotient successif est isomorphe à un module simple $D_{\beta,\beta}(k)$, pour $\beta \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} m$, ou à une somme de modules simples $D_{\mu,\nu}(k)$, pour $\mu,\ \nu \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} m$, $\mu \neq \nu$, satisfaisant la propriété suivante. Pour tout $i \in [0, s-1]$, si le $(i+1)$-ième quotient est isomorphe à $D_{\beta,\beta}(k)$, pour une partition β $\mathfrak{o}$-régulière de m, alors il existe un isomorphisme $is_i : S_{i+1}/S_i \to D_{\beta,\beta}(k)$ tel que $is_i \circ \mathrm{ech}_{D_\beta(k),D_\beta(k)} = \mathrm{ech}_{S_\alpha(k),S_\alpha(k)}|_{S_{i+1}/S_i} \circ is_i$.

Alors, pour tout $\beta \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} m$, nous avons les égalités suivantes concernant les nombres de décomposition $d'_{_}$ de $\mathfrak{H}'$ et $d_{_}$ de $\mathfrak{H}$:

$$\begin{aligned} d'_{(\alpha,+),(\beta,-)} &= 0, \\ d'_{(\alpha,-),(\beta,+)} &= 0, \\ d'_{(\alpha,+),(\beta,+)} &= d_{(\alpha,\alpha),(\beta,\beta)}, \\ d'_{(\alpha,-),(\beta,-)} &= d_{(\alpha,\alpha),(\beta,\beta)}. \end{aligned}$$

Remarque : Pour $\alpha \vdash m$, le module $S_{\alpha,\alpha}(k)$ admet une filtration dont des quotients successifs sont les modules simples $D_{\mu,\nu}(k)$ où μ et ν sont des partitions $\mathfrak{o}$-régulières de m. Soient μ, ν de telles partitions, $D_{\mu,\nu}(k)$ apparaît avec la multiplicité $d_{(\alpha,\alpha),(\mu,\nu)}$ qui est égale au produit des nombres de décomposition de $\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_m}(k)$, $d_{\alpha,\mu}d_{\alpha,\nu}$. Donc $D_{\mu,\nu}(k)$ apparaît avec la même multiplicité que $D_{\nu,\mu}(k)$.

Preuve de la Proposition : Nous avons vu que $\mathcal{S}^2_{(S_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O}))G_1} = f_{(\alpha,\alpha)}(q)\mathrm{Id}_{(S_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O}))G_1}$. Le module $\big(S_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O})\big)G_1$ restreint à $\mathfrak{H}'$ se scinde en deux modules simples qui sont les espaces propres de $\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O}))G_1}$ associées aux valeurs propres $\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(q)}$ et $-\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(q)}$.
Soit $\mathcal{B}_\alpha$ la $\mathcal{O}$-base cellulaire du module de Specht $S_\alpha(\mathcal{O})$ qui est un module cellulaire pour l'algèbre cellulaire $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_m}(\mathcal{O})$. L'espace propre $E(\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O}))G_1}, \sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(q)})$, resp. $E(\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O}))G_1}, -\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(q)})$, est engendré sur $\mathcal{O}$ par les éléments

$$\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(q)}(b_1\otimes b_2)\otimes v_{m,m}t + (b_2\otimes b_1)\otimes v_{m,m}h_{m,m}p^+_m t,$$

resp.

$$\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(q)}(b_1\otimes b_2)\otimes v_{m,m}t - (b_2\otimes b_1)\otimes v_{m,m}h_{m,m}p^+_m t,$$

de $\big(S_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O})\big)G_1$, pour $b_1, b_2 \in \mathcal{B}_\alpha$, $t \in \mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{m,m}}(\mathcal{O})$. Comme $\mathcal{B}_\alpha$, resp. $\overline{\mathcal{B}_\alpha} := \{\overline{b}\,;\, b \in \mathcal{B}_\alpha\}$, est aussi une base cellulaire du module de Specht $S_\alpha(K)$, resp. $S_\alpha(k)$, qui est un module cellulaire de l'algèbre $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_m}(K)$, resp. $\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_m}(k)$, il est clair que

$$\begin{aligned}
\widehat{E(\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O}))G_1}, \pm\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(q)})} &\cong E(\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(K))\widehat{G_1}}, \pm\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(q)}),\\
\overline{E(\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(\mathcal{O}))G_1}, \pm\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(q)})} &\cong E(\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(k))\overline{G_1}}, \pm\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(\overline{q})}),
\end{aligned}$$

comme modules sur $\widehat{\mathfrak{H}}$, resp. sur $\overline{\mathfrak{H}}$. Comme dans le cas des algèbres de groupes, les modules sur $\widehat{\mathfrak{H}'}$, resp. sur $\overline{\mathfrak{H}'}$, $E(\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(K))\widehat{G}_1}, \pm\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(q)})$ et $\big(\chi_\pm S_{\alpha,\alpha}(K)\big)\widehat{G_2}$, resp. $E(\mathcal{S}_{(D_{\beta,\beta}(k))\overline{G_1}}, \pm\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(\overline{q})})$ et $\big(\overline{\chi}_\pm D_{\beta,\beta}(k)\big)\overline{G_2}$ pour $\beta \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} m$, sont isomorphes. Dans le premier cas (sur le corps K), ceci provient de l'isomorphisme de modules sur $\mathfrak{H}'$ entre la restriction de $\big(S_{\alpha,\alpha}(K)\big)\widehat{G_1}$ et la somme $\big(\chi_+ S_{\alpha,\alpha}(K)\big)\widehat{G_2}\oplus\big(\chi_- S_{\alpha,\alpha}(K)\big)\widehat{G_2}$ qui envoie $s_1\otimes s_2\otimes_{\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_{m,m}}(K)} v_{m,m}t$ sur $(s_1\otimes s_2\otimes_{\widehat{A(m)}} v(m,m)t, s_1\otimes s_2\otimes_{\widehat{A(m)}} v(m,m)t)$ pour s_1, $s_2 \in S_\alpha(K)$, $t \in \mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_n(K)}$. Le morphime réciproque (au scalaire $2c$ près, pour $c := \sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(q)}$) envoie $(s_1\otimes s_2\otimes_{\widehat{A(m)}} v(m,m)t, s'_1\otimes$

$s'_2 \otimes_{\widehat{A(m)}} v(m,m)t')$ sur $c(s_1 \otimes s_2) \otimes v_{m,m}t + (s_2 \otimes s_1) \otimes v_{m,m}h_m t + c(s'_1 \otimes s'_2) \otimes v_{m,m}t' - (s'_2 \otimes s'_1) \otimes v_{m,m}h_m t'$ pour s_1, s_2, s'_1, $s'_2 \in S_\alpha(K)$, t, $t' \in \mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_n}(K)$. Dans le second cas (sur le corps k), nous avons un isomorphisme analogue. Nous en déduisons que les modules sur $\widehat{\mathfrak{H}'}$, $\big(\chi_+ S_{\alpha,\alpha}(K)\big)\widehat{G_2}$ et $\big(\chi_- S_{\alpha,\alpha}(K)\big)\widehat{G_2}$, admettent pour $\mathcal{O}$-forme réduite à k, les modules sur $\overline{\mathfrak{H}'}$, $E(\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(k))\overline{G_1}}, \sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(\overline{q})})$ et $E(\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(k))\overline{G_1}}, -\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(\overline{q})})$.

D'après la formule (5.2.1), pour montrer la proposition, il suffit de montrer que $d'_{(\alpha,-),(\beta,+)}$ (qui est égal à $d'_{(\alpha,+),(\beta,-)}$ en tordant l'action par g) est nul, soit encore que $E(\mathcal{S}_{(D_{\beta,\beta}(k))\overline{G_1}}, \sqrt{f_{(\beta,\beta)}(\overline{q})})$ n'apparaît pas comme facteur de composition de $E(\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(k))\overline{G_1}}, -\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(\overline{q})})$.

Remarquons que le foncteur $- \otimes_{\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_{m,m}}(k)} \overline{e_{m,m}}\overline{\mathfrak{H}}$ est exact parce que $\overline{e_{m,m}}\overline{\mathfrak{H}}$ est un module libre à gauche sur $\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_{m,m}}(k)$. En effet, $\overline{e_{m,m}}\overline{\mathfrak{H}} = \overline{v_{m,m}}\overline{\mathfrak{H}}$ par propriété des idempotents $e_{i,n-i}$ et $\overline{v_{m,m}}\overline{\mathfrak{H}} = \overline{v_{m,m}}\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_n}(k)$ par [27, Théorème 3.13]. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des représentants distingués des classes à droite de $\mathfrak{S}_{m,m}$ dans $\mathfrak{S}_n$, i.e., les éléments de longueur minimale pour chaque classe. Par [23, Lemme 2.4], $\overline{v_{m,m}}\overline{\mathfrak{H}} = \bigoplus_{w \in \mathcal{R}} \mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_{m,m}}(k)\overline{v_{m,m}}T_w$. Par conséquent l'assertion sur l'exactitude est satisfaite.

Supposons qu'il existe une filtration de $S_{\alpha,\alpha}(k)$ comme dans l'énoncé, alors $\big(S_{\alpha,\alpha}(k)\big)\overline{G_1}$ admet une filtration stable par $\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(k))\overline{G_1}}$, par définition de cette application,

$$\{0\} = S_0 \subset (S_1)\overline{G_1} \subset \ldots \subset (S_s)\overline{G_1} = \big(S_{\alpha,\alpha}(k)\big)\overline{G_1}.$$

Si $i \in [0, s-1]$ est tel que $(i+1)$-ième quotient de la filtration initiale est isomorphe à $D_{\beta,\beta}(k)$, pour une partition β $\mathfrak{o}$-régulière de m, par propriété des foncteurs exacts, le $(i+1)$-ième quotient de la nouvelle filtration $(S_{i+1})\overline{G_1}/(S_i)\overline{G_1}$ est isomorphe à $\big(D_{\beta,\beta}(k)\big)\overline{G_1}$ par l'application $(is_i)\overline{G_1}$, avec un léger abus de notation. En outre, l'égalité de départ $is_i \circ \mathrm{ech}_{D_\beta(k),D_\beta(k)} = \mathrm{ech}_{S_\alpha(k),S_\alpha(k)}|_{S_{i+1}/S_i} \circ is_i$ devient $(is_i)\overline{G_1} \circ \mathcal{S}_{(D_{\beta,\beta}(k))\overline{G_1}} = \mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(k))\overline{G_1}}|_{(S_{i+1})\overline{G_1}/(S_i)\overline{G_1}} \circ (is_i)\overline{G_1}$. Dans une base adaptée à la filtration de $(S_{\alpha,\alpha}(k))\overline{G_1}$ (c'est à dire que la base est formée d'une base de $(S_1)\overline{G_1}$, complétée en une base de $(S_2)\overline{G_1}$, etc.), $\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(k))\overline{G_1}}$ admet comme matrice, une matrice triangulaire supérieure par blocs, dont les blocs diagonaux correspondent aux matrices des applications associateurs passées aux quotients $\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(k))\overline{G_1}}|_{(S_{i+1})\overline{G_1}/(S_i)\overline{G_1}}$, avec $i \in [0, s-1]$. En particulier, pour $i \in [0, s-1]$ tel que S_{i+1}/S_i est isomorphe à $D_{\beta,\beta}(k)$, ce bloc représente la matrice de $\mathcal{S}_{(D_{\beta,\beta}(k))\overline{G_1}}$. Par conséquent, quitte à modifier la base, nous pouvons supposer

que ce bloc est la matrice diagonale où les éléments sur la première moitié de la diagonale sont égaux à $\sqrt{f_{(\beta,\beta)}(\overline{q})}$ et ceux sur la seconde moitié sont égaux à $-\sqrt{f_{(\beta,\beta)}(\overline{q})}$. En considérant le carré de cette matrice qui est la matrice scalaire $f_{(\alpha,\alpha)}(\overline{q})\mathrm{Id}$, il est immédiat que $f_{(\beta,\beta)}(\overline{q}) = f_{(\alpha,\alpha)}(\overline{q})$. Par des résultats élémentaires d'algèbre linéaire, la matrice de $\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(k))\overline{G_1}}$ peut se représenter sous la forme d'une matrice triangulaire supérieure par bloc, où les blocs diagonaux indexés par (i,i) pour i pair, resp. impair, sont égaux à la matrice scalaire $\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(\overline{q})}\mathrm{Id}$, resp. $-\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(\overline{q})}\mathrm{Id}$, et les blocs d'indice (i,j) avec i et j de parité différente, sont les matrices nulles. Grâce à la forme de cette matrice, nous pouvons affirmer que le module sur $\overline{\mathfrak{H}'}$, $E(\mathcal{S}_{(S_{\alpha,\alpha}(k))\overline{G_1}}, -\sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(\overline{q})})$ ne peut admettre de facteur de composition isomorphe à $E(\mathcal{S}_{(D_{\beta,\beta}(k))\overline{G_1}}, \sqrt{f_{(\alpha,\alpha)}(\overline{q})})$. ∎

7.2.2 Exemples vérifiant la condition de filtration

Il est légitime de se demander si la condition concernant la filtration des modules de Specht est souvent vérifiée.

Soit $\alpha \vdash^{\mathfrak{o}-\mathrm{reg}} m$. Supposons que dans $\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_m}(k)$, le module de Specht $S_\alpha(k)$ admet une filtration de hauteur 2, i.e., il existe un paramètre $\beta \neq \alpha$ tel que $\{0\} \subset D_\beta(k) \subset S_\alpha(k)$ avec le quotient $S_\alpha(k)/D_\beta(k)$ isomorphe à $D_\alpha(k)$. Alors, $S_{\alpha,\alpha}(k)$ admet une filtration satisfaisant les conditions de la Proposition 7.2.1. En effet, nous pouvons former la suite $\{0\} \subset D_{\beta,\beta}(k) \subset S_\alpha(k) \otimes D_\beta(k) \oplus D_\beta(k) \otimes S_\alpha(k) \subset S_{\alpha,\alpha}(k)$ dont les quotients successifs sont $D_{\beta,\beta}(k)$, $D_\alpha(k) \otimes D_\beta(k) \oplus D_\beta(k) \otimes D_\alpha(k)$ et $D_{\alpha,\alpha}(k)$. Avec les notations de la proposition citée ci-dessus, is_1 est l'identité et is_3 est le produit tensoriel de la surjection canonique de $S_\alpha(k)$ sur $D_\alpha(k)$ par elle-même. La "condition d'échange" est alors trivialement satisfaite.

Dans l'Annexe B.2, grâce au package de Specht, nous donnons des exemples où cette dernière hypothèse est satisfaite.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Résultats de programmes

A.1 Programmes

Avec le logiciel gap, version 3, ([75]), le "package" chevie permet de travailler dans des algèbres de Hecke cyclotomiques (associées à des groupes de réflexions complexes) ou dans des algèbres de Iwahori-Hecke (c'est à dire dans des algèbres de Hecke associées à des groupes de Coxeter). Pour ce dernier type d'algèbres, il existe des bases de type "T" dont les éléments sont indexés par les éléments du groupe associé.
J'ai écrit des programmes qui permettent de travailler dans des algèbres de Ariki-Koike, en introduisant le domaine `ArKAlgOps`. Le package vkcurve est à charger pour travailler dans un anneau avec des indéterminées q et $\mathbf{Q}$ (essentiellement la procédure mvp.g). Un élément de l'algèbre de Hecke $\mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$, selon la notation du Chapitre 4, admet pour représentation interne un enregistrement à trois champs,

- un champ `comp` qui est un vecteur de composantes,
- un champ `vcoef` qui est le vecteur des coefficients associés aux composantes,
- un champ `operations` égal à `ArKAlgOps`,

où le terme composante désigne un enregistrement à deux champs,

- un champ `power` qui est un vecteur de taille n à coefficients dans $[0, r-1]$,
- un champ `sym` représentant une permutation de $\mathfrak{S}_n$.

Une composante qui est l'enregistrement
`rec(power := [i1,...,in], sym := w)`,
où les `ij` $\in [0, r-1]$, et `w` $\in \mathfrak{S}_n$, correspond à l'élément $t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n} T_w \in \mathfrak{H}_{r,n}^{q,\mathbf{Q}}(R)$. L'enregistrement à trois champs décrit précédemment permet de construire des combinaisons R-linéaires de composantes qui sont en fait les éléments de la base de Ariki-Koike (cf.

le Lemme 4.1.1). Il apparaît à l'écran comme une somme d'éléments de la forme `cL[i1,...,ir]T(w)` où `c` est un coefficient.

Après lecture de certains fichiers, initialisés avec $n = 4$, $r = 3$, pour les indéterminées `q` et $\mathbf{Q} := (\mathtt{u1},\mathtt{u2},\mathtt{u3})$, voici un succint échantillon de quelques commandes.

```
gap>v1:=CreaArKel([[[2,1,1,2],(1,2,3,4),2],[[0,0,2,0],(2,4),q^(-1)]]);
(q^-1)L[ 0, 0, 2, 0 ]T((2,4))+2L[ 2, 1, 1, 2 ]T((1,2,3,4))
gap>v1 = ArKAlgOps.ArKel([2,1,1,2],(1,2,3,4),2) +
>        ArKAlgOps.ArKel([0,0,2,0],(2,4),q^(-1));
true
gap>v2 :=  L(1) * L(2)^2 * L(3)^2 * T((1,3))^(-1);
(-1+q^-3-2q^-2+2q^-1)L[ 1, 2, 2, 0 ]+(q^-3-2q^-2+q^-1)L[ 1, 2, 2, 0]T((2,3))+\
(q^-3-2q^-2+q^-1)L[ 1, 2, 2, 0 ]T((1,2))+(q^-3-q^-2)L[1, 2, 2, 0 ]T((1,2,3))+\
(q^-3-q^-2)L[ 1, 2, 2, 0]T((1,3,2))+(q^-3)L[ 1, 2, 2, 0 ]T((1,3))
gap>v1 = ArKAlgOps.ArKel([2,1,1,2],(1,2,3,4),2) +
>        q^(-1) * ArKAlgOps.ArKel([0,0,2,0],(2,4),1);
true
gap>(1,3) = (1,2) * (2,3) * (1,2);
true
gap>(2,3)*(1,2);
(1,2,3)
gap>v3 := v2 * T((1,2)) * T((1,2,3));
L[ 1, 2, 2, 0 ]
gap>v2 - v3;
(-2+q^-3-2q^-2+2q^-1)L[ 1, 2, 2, 0]+(q^-3-2q^-2+q^-1)L[ 1, 2, 2, 0 ]T((2,3))+\
(q^-3-2q^-2+q^-1)L[1, 2, 2, 0 ]T((1,2))+(q^-3-q^-2)L[ 1, 2, 2, 0 ]T((1,2,3))+\
(q^-3-q^-2)L[ 1, 2, 2, 0 ]T((1,3,2))+(q^-3)L[ 1, 2, 2, 0 ]T((1,3))
gap> v1 * v3;
```

La dernière commande est suivie d'un résultat qui n'est pas reproduit ici parce que les coefficients des éléments de la base de Ariki-Koike sont des polynômes en les variables `q`, `u1`, `u2`, `u3`, qui rendent le résultat assez long. En simplifiant un peu les éléments à multiplier, nous avons déjà un résultat assez compliqué.

```
gap>v1 := CreaArKel([[[1,0,1,0],(1,2),2],[[0,2,0,0],(2,4),1]]);
1L[ 0, 2, 0, 0 ]T((2,4))+2L[ 1, 0, 1, 0 ]T((1,2))
gap>v2 := L(3)^2 * T((2,3));
L[ 0, 0, 2, 0 ]T((2,3))
gap>v1 * v2;
(-q^4u1u2u3+2q^5u1u2u3-q^6u1u2u3)L[ 0, 0, 0, 1]+(q^3u1u2u3-3q^4u1u2u3+3q^5u1u\
2u3-q^6u1u2u3)L[ 0, 0, 0, 1]T((2,3))+(q^3u1u2u3-3q^4u1u2u3+3q^5u1u2u3-q^6u1u2\
u3)L[ 0, 0, 0,1 ]T((1,2))+(-q^2u1u2u3+4q^3u1u2u3-6q^4u1u2u3+4q^5u1u2u3-q^6u1u\
2u3)L[ 0, 0, 0, 1 ]T((1,3,2))+(q^5u1u2u3-q^6u1u2u3)L[ 0, 0, 1, 0]T((3,4))+(-q\
^4u1u2u3+2q^5u1u2u3-q^6u1u2u3)L[ 0, 0, 1, 0]T((2,3,4))+(-2q^4u1u2u3+2q^5u1u2u\
3)L[ 0, 0, 1, 0]T((1,2))+(-q^4u1u2u3+2q^5u1u2u3-q^6u1u2u3)L[ 0, 0, 1, 0 ]T((1\
,2)(3,4))+(2q^3u1u2u3-4q^4u1u2u3+2q^5u1u2u3)L[ 0, 0, 1, 0]T((1,3,2))+(q^3u1u2\
```

```
u3-3q^4u1u2u3+3q^5u1u2u3-q^6u1u2u3)L[ 0, 0,1, 0 ]T((1,3,4,2))+(q^3u1u2+q^3u1u\
3+q^3u2u3-2q^4u1u2-2q^4u1u3-2q^4u2u3+q^5u1u2+q^5u1u3+q^5u2u3)L[ 0,1, 0, 1 ]+(\
-q^2u1u2-q^2u1u3-q^2u2u3+3q^3u1u2+3q^3u1u3+3q^3u2u3-3q^4u1u2-3q^4u1u3-3q^4u2u3\
+q^5u1u2+q^5u1u3+q^5u2u3)L[ 0, 1, 0, 1]T((2,3))+(-q^4u1u2-q^4u1u3-q^4u2u3+q^5\
u1u2+q^5u1u3+q^5u2u3)L[0, 1, 1, 0 ]T((3,4))+(q^3u1u2+q^3u1u3+q^3u2u3-2q^4u1u2\
-2q^4u1u3-2q^4u2u3+q^5u1u2+q^5u1u3+q^5u2u3)L[ 0, 1, 1, 0]T((2,3,4))+(-q^2u1-q\
^2u2-q^2u3+2q^3u1+2q^3u2+2q^3u3-q^4u1-q^4u2-q^4u3)L[ 0, 2, 0, 1]+(qu1+qu2+qu3\
-3q^2u1-3q^2u2-3q^2u3+3q^3u1+3q^3u2+3q^3u3-q^4u1-q^4u2-q^4u3)L[ 0,2, 0, 1 ]T(\
(2,3))+(2-q^-1-q)L[ 0, 2, 0, 2 ]+(3+q^-2-3q^-1-q)L[0, 2, 0, 2 ]T((2,3))+(-q^-\
2+q^-1)L[ 0, 2, 0, 2]T((2,4))+(q^3u1+q^3u2+q^3u3-q^4u1-q^4u2-q^4u3)L[ 0, 2, 1\
, 0]T((3,4))+(-q^2u1-q^2u2-q^2u3+2q^3u1+2q^3u2+2q^3u3-q^4u1-q^4u2-q^4u3)L[0,\
2, 1, 0 ]T((2,3,4))+(-1+2q-q^2)L[ 0, 2, 1, 1 ]+(-3+q^-1+3q-q^2)L[ 0, 2, 1, 1 \
]T((2,3))+(2-q^-1-q)L[ 0, 2, 1, 1 ]T((2,3,4))+(1-q^-1)L[ 0, 2, 1,1 ]T((2,4))+\
(q-q^2)L[ 0, 2, 2, 0 ]T((3,4))+(-1+2q-q^2)L[ 0, 2,2, 0 ]T((2,3,4))+qL[ 0, 2, \
2, 0 ]T((2,4,3))+(-1+q)L[ 0, 2, 2, 0]T((2,4))+(-2q^6u1u2u3+2q^7u1u2u3)L[ 1, 0\
, 0, 0]T((1,2))+(2q^5u1u2u3-4q^6u1u2u3+2q^7u1u2u3)L[ 1, 0, 0, 0]T((1,2,3))+(\
2q^5u1u2u3-2q^6u1u2u3+2q^7u1u2u3)L[ 1, 0, 0, 0]T((1,3,2))+(-2q^4u1u2u3+4q^5u1\
u2u3-4q^6u1u2u3+2q^7u1u2u3)L[ 1,0, 0, 0 ]T((1,3))+(2q^4u1u2+2q^4u1u3+2q^4u2u3\
-2q^5u1u2-2q^5u1u3-2q^5u2u3)L[ 1, 0, 1, 0]T((1,2))+(-2q^3u1u2-2q^3u1u3-2q^3u2\
u3+2q^4u1u2+2q^4u1u3+2q^4u2u3-2q^5u1u2-2q^5u1u3-2q^5u2u3)L[ 1, 0,1, 0 ]T((1,3\
,2))+(2q^2u1+2q^2u2+2q^2u3)L[ 1, 0, 2, 0]T((1,3,2))+(-q^2u1-q^2u2-q^2u3+3q^3u\
1+3q^3u2+3q^3u3-3q^4u1-3q^4u2-3q^4u3+q^5u1+q^5u2+q^5u3)L[ 1, 1, 0,1 ]T((1,2))\
+(qu1+qu2+qu3-4q^2u1-4q^2u2-4q^2u3+6q^3u1+6q^3u2+6q^3u3-4q^4u1-4q^4u2-4q^4u3+q\
^5u1+q^5u2+q^5u3)L[ 1, 1, 0, 1]T((1,3,2))+(q^3u1+q^3u2+q^3u3-2q^4u1-2q^4u2-2q\
^4u3+q^5u1+q^5u2+q^5u3)L[ 1, 1, 1, 0]T((1,2)(3,4))+(-q^2u1-q^2u2-q^2u3+3q^3u1\
+3q^3u2+3q^3u3-3q^4u1-3q^4u2-3q^4u3+q^5u1+q^5u2+q^5u3)L[ 1, 1, 1,0 ]T((1,3,4,\
2))+(2q^2u1+2q^2u2+2q^2u3-2q^3u1-2q^3u2-2q^3u3)L[ 1,1, 1, 0 ]T((1,3))+(-2+2q)\
[ 1, 1, 2, 0]T((1,3))+(q-3q^2+3q^3-q^4)L[ 1, 2, 0, 1 ]T((1,2))+(-1+4q-6q^2+4\
q^3-q^4)L[ 1, 2, 0, 1 ]T((1,3,2))+(-q^2+2q^3-q^4)L[ 1, 2, 1, 0]T((1,2)(3,4))+\
(q-3q^2+3q^3-q^4)L[ 1, 2, 1, 0]T((1,3,4,2))+(-2q+2q^2)L[ 1, 2, 1, 0 ]T((1,3))\
+(-2q^2+2q^3)L[2, 0, 2, 0 ]T((1,2))+(2q-4q^2+2q^3)L[ 2, 0, 2, 0 ]T((1,3,2))+(\
q^2-3q^3+3q^4-q^5)L[ 2, 1, 0, 1]T((1,2))+(-q+4q^2-6q^3+4q^4-q^5)L[ 2, 1, 0, 1\
 ]T((1,3,2))+(-q^3+2q^4-q^5)L[ 2, 1, 1, 0 ]T((1,2)(3,4))+(-2q^2+4q^3-2q^4)L[ 2\
, 1, 1, 0 ]T((1,2,3))+(q^2-3q^3+3q^4-q^5)L[ 2, 1, 1, 0]T((1,3,4,2))+(2q-6q^2+\
6q^3-2q^4)L[ 2, 1, 1, 0 ]T((1,3))
```

Dans le cas $r = 2$, j'ai exprimé la base de Ariki-Koike en fonction de la base de type "T" et vice-versa.

Ces procédures ont été écrites afin de calculer les matrices des représentations régulières de $z_{m,m}$ (avec les notations du Chapitre 7). En effet, nous avons vu que, dans le cas des algèbres de groupes de type B, les automorphismes associateurs ont un caractère universel au sens où, notamment, le carré d'un associateur est égal à l'application identité de sa source et ceci quelle que soit la source. Le carré de l'associateur généralisé aux algèbres de Hecke de type B est fonction de l'action de $z_{m,m}$. Pour obtenir la conjecture **(GHPI)**, nous pouvions légitimement nous demander ce que devenait ce caractère universel en nous intéressant à $z_{m,m}$. Comme c'est un élément de $\mathfrak{H}^q_{\mathfrak{S}_n}(R)$, travailler dans la base de Ariki-Koike pour trouver les matrices des

représentations régulières de $z_{m,m}$, paraît naturel. Voici quelques résultats.

A.2 Résultats

Le travail s'effectue dans $\mathfrak{H}_{2,2}^{q,(1,-1)}(R)$, pour un anneau R contenant les entiers.

La matrice de la représentation régulière de $z_{m,m}$, resp. h_m, dans la base de Ariki-Koike est la matrice diagonale par bloc contenant 2^2 fois le bloc `MregzMaple`, resp. `MreghMaple`. Il a été calculé grâce aux implémentations vues en A.1 sous gap. Les 2 valeurs propres du bloc `MregzMaple`, resp. `MreghMaple`, sont contenus dans le vecteur `valprz`, resp. `valprh`. Elles ont été calculées avec Maple.

Il est clair que les éléments de `valprh` au carré donnent les éléments de `valprz`, selon l'égalité $h_m^2 = z_{m,m}$.

```
                [           2                ]
                [1 + 2 q + q          0      ]
MregzMaple := [                              ]
                [                           2]
                [     0          1 + 2 q + q ]

                    [1 - q     2 q  ]
     MreghMaple := [                ]
                    [  2      -1 + q]

                    [           2]
                    [1 + 2 q + q ]
         valprz := [             ]
                    [           2]
                    [1 + 2 q + q ]

                       [q + 1 ]
            valprh := [      ]
                       [-q - 1]
```

Nous avons reproduit le travail précédent dans $\mathfrak{H}_{2,4}^{q,(1,-1)}(R)$.

Cette fois la matrice de la représentation régulière de $z_{m,m}$, resp. de h_m, est la matrice diagonale par blocs, contenant 2^4 blocs, chacun égal à `MregzMaple`, resp. `MreghMaple`, qui n'est pas développé à cause de sa dimension ($(4!)^2 = 24^2$). Les vecteurs des valeurs propres `valprz`

et `valprh` n'y sont pas non plus. C'est pourquoi nous demandons explicitement leur valeur ainsi que les puissances au carré des éléments de `valprh` pour vérifier que ce sont les éléments de `valprz`.

```
                    [ 24 x 24 Matrix       ]
MregzMaple := [ Data Type: anything  ]
                    [ Storage: rectangular ]
                    [ Order: Fortran_order ]

                    [ 24 x 24 Matrix       ]
MreghMaple := [ Data Type: anything  ]
                    [ Storage: rectangular ]
                    [ Order: Fortran_order ]

                 [ 24 Element Column Vector ]
valprz := [ Data Type: anything      ]
                 [ Storage: rectangular     ]
                 [ Order: Fortran_order     ]

                 [ 24 Element Column Vector ]
valprh := [ Data Type: anything      ]
                 [ Storage: rectangular     ]
                 [ Order: Fortran_order     ]
```

```
> for i from 1 to 24 do  print(valprz[i])  end do;
```

```
   4     5     3    2    8     7     6
3 q  + 4 q  + 2 q  + q  + q  + 2 q  + 3 q

 4     5     8     7     9    10     6
q  + 2 q  + 3 q  + 4 q  + 2 q  + q   + 3 q

   4     5     3    2    8     7     6
3 q  + 4 q  + 2 q  + q  + q  + 2 q  + 3 q

 4     5     8     7     9    10     6
q  + 2 q  + 3 q  + 4 q  + 2 q  + q   + 3 q

   4     5     3    2    8     7     6
3 q  + 4 q  + 2 q  + q  + q  + 2 q  + 3 q

 4     5     8     7     9    10     6
q  + 2 q  + 3 q  + 4 q  + 2 q  + q   + 3 q

   4     5     3    2    8     7     6
3 q  + 4 q  + 2 q  + q  + q  + 2 q  + 3 q

 4     5     8     7     9    10     6
q  + 2 q  + 3 q  + 4 q  + 2 q  + q   + 3 q

   4     5     3    2    8     7     6
```

```
 3 q  + 4 q  + 2 q  + q  + q  + 2 q  + 3 q

 4     5     8     7     9    10     6
q  + 2 q  + 3 q  + 4 q  + 2 q  + q   + 3 q

    4     5     3    2    8     7     6
 3 q  + 4 q  + 2 q  + q  + q  + 2 q  + 3 q

 4     5     8     7     9    10     6
q  + 2 q  + 3 q  + 4 q  + 2 q  + q   + 3 q

           8     7     5     4
        4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

           8     7     5     4
        4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

           8     7     5     4
        4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

           8     7     5     4
        4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

           8     7     5     4
        4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

           8     7     5     4
        4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

           8     7     5     4
        4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

           8     7     5     4
        4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

           8     7     5     4
        4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

           8     7     5     4
        4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

           8     7     5     4
        4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

           8     7     5     4
        4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

> for i from 1 to 24 do  print(valprh[i])  end do;

                2    3    4
             -q - q  - q  - q

                2    3    4
              q + q  + q  + q
```

```
 2   3   4   5
q  + q  + q  + q

  2   3   4   5
-q  - q  - q  - q

      2   3   4
-q - q  - q  - q

      2   3   4
 q + q  + q  + q

 2   3   4   5
q  + q  + q  + q

  2   3   4   5
-q  - q  - q  - q

      2   3   4
-q - q  - q  - q

      2   3   4
 q + q  + q  + q

 2   3   4   5
q  + q  + q  + q

  2   3   4   5
-q  - q  - q  - q
```

```
    2         1/2          2
2 (q  - q + 1)    (q + 1) q

    2         1/2          2
-2 (q  - q + 1)    (q + 1) q

    2         1/2          2
2 (q  - q + 1)    (q + 1) q

    2         1/2          2
-2 (q  - q + 1)    (q + 1) q

    2         1/2          2
2 (q  - q + 1)    (q + 1) q

    2         1/2          2
-2 (q  - q + 1)    (q + 1) q

    2         1/2          2
2 (q  - q + 1)    (q + 1) q

    2         1/2          2
-2 (q  - q + 1)    (q + 1) q
```

```
                    2         1/2          2
                 2 (q  - q + 1)    (q + 1) q

                    2         1/2          2
                -2 (q  - q + 1)    (q + 1) q

                    2         1/2          2
                 2 (q  - q + 1)    (q + 1) q

                    2         1/2          2
                -2 (q  - q + 1)    (q + 1) q
```

```
> for i from 1 to 24 do  print(expand(valprh[i]^(2)))  end do;
```

```
                  4     5     3    2    8     7     6
                3 q  + 4 q  + 2 q  + q  + q  + 2 q  + 3 q

                  4     5     3    2    8     7     6
                3 q  + 4 q  + 2 q  + q  + q  + 2 q  + 3 q

                4     5     8     7     9    10     6
               q  + 2 q  + 3 q  + 4 q  + 2 q  + q   + 3 q

                4     5     8     7     9    10     6
               q  + 2 q  + 3 q  + 4 q  + 2 q  + q   + 3 q

                  4     5     3    2    8     7     6
                3 q  + 4 q  + 2 q  + q  + q  + 2 q  + 3 q

                  4     5     3    2    8     7     6
                3 q  + 4 q  + 2 q  + q  + q  + 2 q  + 3 q

                4     5     8     7     9    10     6
               q  + 2 q  + 3 q  + 4 q  + 2 q  + q   + 3 q

                4     5     8     7     9    10     6
               q  + 2 q  + 3 q  + 4 q  + 2 q  + q   + 3 q

                  4     5     3    2    8     7     6
                3 q  + 4 q  + 2 q  + q  + q  + 2 q  + 3 q

                  4     5     3    2    8     7     6
                3 q  + 4 q  + 2 q  + q  + q  + 2 q  + 3 q

                4     5     8     7     9    10     6
               q  + 2 q  + 3 q  + 4 q  + 2 q  + q   + 3 q

                4     5     8     7     9    10     6
               q  + 2 q  + 3 q  + 4 q  + 2 q  + q   + 3 q

                    8     7     5     4
                 4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q
```

```
   8     7     5     4
4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

   8     7     5     4
4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

   8     7     5     4
4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

   8     7     5     4
4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

   8     7     5     4
4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

   8     7     5     4
4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

   8     7     5     4
4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

   8     7     5     4
4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

   8     7     5     4
4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q

   8     7     5     4
4 q  + 4 q  + 4 q  + 4 q
```

Quand q est indéterminé, les valeurs de `valprz` montrent que les morphismes associateurs généralisés aux algèbres de Hecke perdent leur caractère "universel".

Annexe B

Exemples sous Specht

Nous utilisons le package specht pour travailler dans des algèbres de Hecke de type A de paramètre q. Soit $H :=$ `Specht`($\mathfrak{o}$,p). C'est l'algèbre de Hecke de type A sur un corps k de caractéristique p, où q est d'ordre $\mathfrak{o}$. La commande `DecompositionMatrix`(H,n) donne la matrice de décomposition cellulaire de $\mathfrak{H}^{q}_{\mathfrak{S}_n}(k)$.

B.1 Contre-exemple

Travaillons dans $\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_3}(k)$, où $\overline{q} = 1$ dans le corps k de caractéristique 3 (et l'ordre de $\overline{q}$ est égal 3) ou $\overline{q}$ est une racine primitive 3-ième dans le corps k de caractéristique 5 (et l'ordre de $\overline{q}$ est aussi égal à 3).

```
gap>H := Specht(3,3);
Specht(e=3, p=3, S(), P(), D())
gap>DecompositionMatrix(H,3);
3  | 1
2,1| 1 1
1^3| . 1

gap> H := Specht(3,5);
Specht(e=3, p=5, S(), P(), D(),HeckeRing="e3p5")
gap>DecompositionMatrix(H,3);
3  | 1
2,1| 1 1
1^3| . 1
```

Par conséquent, dans les deux cas, le nombre de décomposition de $\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_3}(k)$, $d_{(2,1),(3)}$ est non nul donc $D_{(3)}(k)$ apparaît comme multiplicité dans $S_{(2,1)}(k)$. Si k fait partie d'un système 3-modulaire ou 5-modulaire

$(\mathcal{O}, K, k)$, et $\overline{q}$ est l'image par la surjection canonique de $\mathcal{O}$ dans son corps résiduel, d'un élément inversible de $\mathcal{O}$ qui n'est pas une racine i-ème de l'unité, pour $i \in [2, n]$, alors $S_{(2,1)}(K)$ apparaît dans $K \otimes_{\mathcal{O}} Y_{(3)}(\mathcal{O})$.

B.2 Exemples

A présent, nous allons donner quelques matrices de décomposition qui permettent de vérifier la condition forte terminant le Chapitre 7 sur des filtrations de hauteur 2 de modules de Specht de $\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_m}(k)$. La condition est vérifiée si la ligne correspondant à la partition régulière α contient 2 coefficients 1 et des points (ou des zéros).

```
gap>H := Specht(3,3);
Specht(e=3, p=3, S(), P(), D())

gap>DecompositionMatrix(H,3);
3  | 1
2,1| 1 1
1^3| . 1

gap>DecompositionMatrix(H,4);
4    | 1
3,1  | . 1
2^2  | 1 . 1
2,1^2| . . . 1
1^4  | . . 1 .

gap>DecompositionMatrix(H,5);
5    | 1
4,1  | . 1
3,2  | . 1 1
3,1^2| . . . 1
2^2,1| 1 . . . 1
2,1^3| . . . . 1
1^5  | . . 1 . .

gap>DecompositionMatrix(H,6);
6      | 1
5,1    | 1 1
4,2    | . . 1
4,1^2  | . 1 . 1
3^2    | . 1 . . 1
3,2,1  | 1 1 . 1 1 1
3,1^3  | . . . 1 . 1
2^3    | 1 . . . . 1
```

```
2^2,1^2| . . . . . . 1
2,1^4  | . . . . 1 1 .
1^6    | . . . . 1 . .

gap> DecompositionMatrix(H,7);
7      | 1
6,1    | . 1
5,2    | 1 . 1
5,1^2  | . . . 1
4,3    | . . 1 . 1
4,2,1  | 1 . 1 . 1 1
4,1^3  | . . . . . 1
3^2,1  | . . . 1 . . 1
3,2^2  | . 1 . . . . . 1
3,2,1^2| 1 . . . 1 1 . . 1
3,1^4  | . . . . . . . 1 .
2^3,1  | 1 . . . . . . . 1
2^2,1^3| . . . . 1 . . . 1
2,1^5  | . . . . . . 1 . .
1^7    | . . . . 1 . . . .

gap> DecompositionMatrix(H,8);
8      | 1
7,1    | . 1
6,2    | . 1 1
6,1^2  | . . . 1
5,3    | . . . . 1
5,2,1  | 1 . . . 1 1
5,1^3  | . . . . . 1
4^2    | . . 1 . . . 1
4,3,1  | . . . . 1 1 . 1
4,2^2  | . 1 1 . . . 1 . 1
4,2,1^2| . . . . . . . . . 1
4,1^4  | . . . . . . . . 1 .
3^2,2  | . . . 1 . . . . . . 1
3^2,1^2| 1 . . . . 1 . 1 . . . 1
3,2^2,1| . 1 . . . . . . 1 . . . 1
3,2,1^3| . . . . . . 1 . 1 . . . 1
3,1^5  | . . . . . . . . . . 1 . .
2^4    | 1 . . . . . . . . . . 1 .
2^3,1^2| . . . . . . . . . . . . 1
2^2,1^4| . . . . . . . 1 . . . 1 .
2,1^6  | . . . . . . . 1 . . . . .
1^8    | . . . . . . 1 . . . . . .

gap> DecompositionMatrix(H,9);
9        | 1
8,1      | 1 1
7,2      | . . 1
```

```
7,1^2    | . 1 . 1
6,3      | . 1 . . 1
6,2,1    | 1 1 . 1 1 1
6,1^3    | . . . 1 . 1
5,4      | . . . . 1 . 1
5,3,1    | . . . . . . . . 1
5,2^2    | 1 1 . . 1 1 1 . 1
5,2,1^2  | . . . . . . . . . 1
5,1^4    | . . . . . 1 . . 1 .
4^2,1    | . . . . 1 1 1 . . . 1
4,3,2    | . 1 . 1 1 1 1 . 1 . 1 1
4,3,1^2  | . . . . . . . . . 1 . . 1
4,2^2,1  | . . 1 . . . . . . . . . . 1
4,2,1^3  | . . . . . . . . . . . . . 1
4,1^5    | . . . . . . . . 1 . . 1 . .
3^3      | . . . 1 . . . . . . . 1 . .
3^2,2,1  | 1 1 . 1 . 1 . . 1 . 1 1 . . 1
3^2,1^3  | 1 . . . . 1 1 . 1 . 1 . . . 1
3,2^3    | 1 1 . . . . . . 1 . . . . . 1
3,2^2,1^2| . . . . . . . . . . . . . . . . 1
3,2,1^4  | . . . . . . . 1 . 1 . 1 1 . . 1 .
3,1^6    | . . . . . . . . . . 1 1 . . . .
2^4,1    | 1 . . . . . . . . . . . . . 1 .
2^3,1^3  | . . . . . . . . . . 1 . . . 1 .
2^2,1^5  | . . . . . . . . . . . . 1 . . .
2,1^7    | . . . . . . . 1 . . . 1 . . . . .
1^9      | . . . . . . . 1 . . . . . . . . .

gap> DecompositionMatrix(H,10);
10       | 1
9,1      | . 1
8,2      | 1 . 1
8,1^2    | . . . 1
7,3      | . . 1 . 1
7,2,1    | 1 . 1 . 1 1
7,1^3    | . . . . . 1
6,4      | . . . . . . 1
6,3,1    | . . . 1 . . . 1
6,2^2    | . 1 . . . . 1 . 1
6,2,1^2  | 1 . . . 1 1 . . . 1
6,1^4    | . . . . . . . . 1 .
5^2      | . . . . 1 . . . . . 1
5,4,1    | . . . . . . . . 1 . . . 1
5,3,2    | . . . 1 . . . 1 . . . 1 1
5,3,1^2  | . . . . . . . . . . . . . . . 1
5,2^2,1  | 1 . 1 . 1 . . . . 1 1 . . . 1
5,2,1^3  | . . . . . . . . . . 1 . . . . 1
5,1^5    | . . . . . . . . . . . . . 1 . .
4^2,2    | . . . . . . . 1 . 1 . . . . . . 1
```

```
4^2,1^2  | . . . . 1 . . . . 1 1 . . . . . 1
4,3^2    | . . . . 1 1 . . . . 1 . . . . . . 1
4,3,2,1  | 1 . 1 . 1 1 . . . 1 1 . . . 1 . 1 1 1
4,3,1^3  | 1 . . . . . . . . . 1 1 . . . 1 . 1 . 1
4,2^3    | 1 . 1 . . . . . . . . . . . . 1 . . . 1
4,2^2,1^2| . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
4,2,1^4  | . . . . . . . . . . 1 . . . 1 . . 1 1 .
4,1^6    | . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 . .
3^3,1    | 1 . . . . 1 . . . . . . . . . . . . 1 1 .
3^2,2^2  | . . . 1 . . . . . . . . 1 . . . . . . . 1
3^2,2,1^2| . 1 . . . . . . 1 . . . . . . 1 . . . . . 1
3^2,1^4  | . . . . . . . . . . . . 1 1 . . . . . . . 1 .
3,2^3,1  | . 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
3,2^2,1^3| . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 . . . . . 1
3,2,1^5  | . . . . . . . . . . . 1 . . . . . 1 1 1 . . .
3,1^7    | . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 . . . . . .
2^5      | 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 . . .
2^4,1^2  | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 .
2^3,1^4  | . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 . 1 . . .
2^2,1^6  | . . . . . . . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
2,1^8    | . . . . . . . . . . . . 1 . . . . . . . . . .
1^10     | . . . . . . . . . . . . . 1 . . . . . . . . . .

gap> H := Specht(5,5);
Specht(e=5, p=5, S(), P(), D())

gap>DecompositionMatrix(H,5);
5    | 1
4,1  | 1 1
3,2  | . . 1
3,1^2| . 1 . 1
2^2,1| . . . . 1
2,1^3| . . . 1 . 1
1^5  | . . . . . 1

gap>DecompositionMatrix(H,6);
6      | 1
5,1    | . 1
4,2    | 1 . 1
4,1^2  | . . . 1
3^2    | . . . . 1
3,2,1  | . . 1 . . 1
3,1^3  | . . . . . . 1
2^3    | . . . . . . . 1
2^2,1^2| . . . . . 1 . . 1
2,1^4  | . . . . . . . . . 1
1^6    | . . . . . . . . . 1 .

gap>DecompositionMatrix(H,7);
```

```
7      | 1
6,1    | . 1
5,2    | . 1 1
5,1^2  | . . . 1
4,3    | 1 . . . 1
4,2,1  | . . . . . 1
4,1^3  | . . . . . . 1
3^2,1  | . . . . 1 . . 1
3,2^2  | . . 1 . . . . . 1
3,2,1^2| . . . . . . . . . 1
3,1^4  | . . . . . . . . . . 1
2^3,1  | . . . . . . . . 1 . . 1
2^2,1^3| . . . . . . . 1 . . . . 1
2,1^5  | . . . . . . . . . . . . 1
1^7    | . . . . . . . . . . . 1 .

gap>DecompositionMatrix(H,8);
8        | 1
7,1      | . 1
6,2      | . . 1
6,1^2    | . . . 1
5,3      | . 1 . . 1
5,2,1    | . . . 1 . 1
5,1^3    | . . . . . . 1
4^2      | 1 . . . . . . 1
4,3,1    | . . . . . . . . 1
4,2^2    | . . . . . 1 . . . 1
4,2,1^2  | . . . . . . . . . . 1
4,1^4    | . . . . . . . . . . . 1
3^2,2    | . . . . 1 . . . . . . . 1
3^2,1^2  | . . . . . . . 1 . . . . . 1
3,2^2,1  | . . . . . . . . . . . . . . . 1
3,2,1^3  | . . . . . . . . . . . . . 1 . 1
3,1^5    | . . . . . . . . . . . . . . . 1
2^4      | . . . . . . . . . 1 . . . . . .
1 2^3,1^2| . . . . . . . . . . . . 1 . . . . 1
2^2,1^4  | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
2,1^6    | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 .
1^8      | . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 . .

gap>DecompositionMatrix(H,9);
9        | 1
8,1      | . 1
7,2      | . . 1
7,1^2    | . . . 1
6,3      | . . 1 . 1
6,2,1    | . . . . . 1
6,1^3    | . . . . . . 1
5,4      | . 1 . . . . . 1
```

```
5,3,1    | . . . 1 . . . . 1
5,2^2    | . . . . . . . . . 1
5,2,1^2  | . . . . . . . 1 . . . 1
5,1^4    | . . . . . . . . . . . . 1
4^2,1    | 1 . . . . . . . . . . . 1
4,3,2    | . . . . . . . . 1 . . . . 1
4,3,1^2  | . . . . . . . . . . . . . 1 . 1
4,2^2,1  | . . . . . . . . . . 1 . . . . 1
4,2,1^3  | . . . . . . . . . . . . . . . 1 . 1
4,1^5    | . . . . . . . . . . . . . . . . 1
3^3      | . . . . 1 . . . . . . . . . . . . 1
3^2,2,1  | . . . . . . . 1 . . . . . . . . . . 1
3^2,1^3  | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
3,2^3    | . . . . . . . . . . . . . . . 1 . . . . 1
3,2^2,1^2| . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 . . 1
3,2,1^4  | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
3,1^6    | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 .
2^4,1    | . . . . . . . . . . . . . 1 . . . . . . . . . 1
2^3,1^3  | . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 . . . . . . 1
2^2,1^5  | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
2,1^7    | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 .
1^9      | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 . . . .

gap> H := Specht(3,5);
Specht(e=3, p=5, S(), P(), D(), HeckeRing="e3p5")
gap>DecompositionMatrix(H,3);
3  | 1
2,1| 1 1
1^3| . 1

gap>DecompositionMatrix(H,4);
4    | 1
3,1  | . 1
2^2  | 1 . 1
2,1^2| . . . 1
1^4  | . . 1 .

gap>DecompositionMatrix(H,5);
5    | 1
4,1  | . 1
3,2  | . 1 1
3,1^2| . . . 1
2^2,1| 1 . . . 1
2,1^3| . . . . 1
1^5  | . . 1 . .

gap> H := Specht(5,7);
Specht(e=5, p=7, S(), P(), D(), HeckeRing="e5p7")
```

```
gap>DecompositionMatrix(H,5);
5    | 1
4,1  | 1 1
3,2  | . . 1
3,1^2| . 1 . 1
2^2,1| . . . . 1
2,1^3| . . . 1 . 1
1^5  | . . . . . 1

gap>DecompositionMatrix(H,6);
6      | 1
5,1    | . 1
4,2    | 1 . 1
4,1^2  | . . . 1
3^2    | . . . . 1
3,2,1  | . . 1 . . 1
3,1^3  | . . . . . . 1
2^3    | . . . . . . . 1
2^2,1^2| . . . . . 1 . . 1
2,1^4  | . . . . . . . . . 1
1^6    | . . . . . . . . 1 .

gap>DecompositionMatrix(H,7);
7      | 1
6,1    | . 1
5,2    | . 1
1 5,1^2| . . . 1
4,3    | 1 . . . 1
4,2,1  | . . . . . 1
4,1^3  | . . . . . . 1
3^2,1  | . . . . 1 . . 1
3,2^2  | . . 1 . . . . . 1
3,2,1^2| . . . . . . . . . 1
3,1^4  | . . . . . . . . . . 1
2^3,1  | . . . . . . . . 1 . . 1
2^2,1^3| . . . . . . . 1 . . . . 1
2,1^5  | . . . . . . . . . . . . 1
1^7    | . . . . . . . . . . . 1 .

gap> DecompositionMatrix(H,8);
8        | 1
7,1      | . 1
6,2      | . . 1
6,1^2    | . . . 1
5,3      | . 1 . . 1
5,2,1    | . . . 1 . 1
5,1^3    | . . . . . . 1
4^2      | 1 . . . . . . 1
4,3,1    | . . . . . . . .
```

```
1 4,2^2  | . . . . . 1 . . . 1
4,2,1^2  | . . . . . . . . . . 1
4,1^4    | . . . . . . . . . . 1
3^2,2    | . . . . 1 . . . . . .
1 3^2,1^2| . . . . . . . 1 . . . . . 1
3,2^2,1  | . . . . . . . . . . . . . . . 1
3,2,1^3  | . . . . . . . . . . . . . . . 1 . 1
3,1^5    | . . . . . . . . . . . . . . . 1
2^4      | . . . . . . . . . . 1 . . . . . 1
2^3,1^2  | . . . . . . . . . . . . . . . 1 . . . . 1
2^2,1^4  | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
2,1^6    | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 .
1^8      | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 . .

gap>DecompositionMatrix(H,9);
9        | 1
8,1      | . 1
7,2      | . . 1
7,1^2    | . . . 1
6,3      | . . 1 . 1
6,2,1    | . . . . . 1
6,1^3    | . . . . . . 1
5,4      | . 1 . . . . . 1
5,3,1    | . . . 1 . . . . 1
5,2^2    | . . . . . . . . . 1
5,2,1^2  | . . . . . . 1 . . . 1
5,1^4    | . . . . . . . . . . . 1
4^2,1    | 1 . . . . . . . . . . . 1
4,3,2    | . . . . . . . . 1 . . . . 1
4,3,1^2  | . . . . . . . . . . . . . 1 . 1
4,2^2,1  | . . . . . . . . . . . 1 . . . . 1
4,2,1^3  | . . . . . . . . . . . . . . . 1 . 1
4,1^5    | . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
3^3      | . . . . 1 . . . . . . . . . . . . . 1
3^2,2,1  | . . . . . . . 1 . . . . . . . . . . 1
3^2,1^3  | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
3,2^3    | . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 . . . . 1
3,2^2,1^2| . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 . . 1
3,2,1^4  | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
3,1^6    | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 .
2^4,1    | . . . . . . . . . . . . . 1 . . . . . . . . . . 1
2^3,1^3  | . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 . . . . . . 1
2^2,1^5  | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
2,1^7    | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 .
1^9      | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 . . . .
```

Remarques :

1. Nous vérifions que la caractéristique du corps n'a pas vraiment d'importance. Les matrices de décomposition dépendent essentiellement de l'ordre de $\overline{q}$.

2. Les exemples ont été choisis afin d'annuler le polynôme de Poincaré de $\mathfrak{H}^{\overline{q}}_{\mathfrak{S}_m}(k)$ avec l'ordre $\mathfrak{o}$ de q impair, et en tenant compte des possibilités du package specht. En général $\mathfrak{o} \leq m < 2\mathfrak{o}$.

Bibliographie

[1] S. Ariki. On the semi-simplicity of the Hecke algebra of $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})\wr\mathfrak{S}_n$. *J. of Algebra*, **169** : 216–225, 1994.

[2] S. Ariki. Representation theory of a Hecke algebra of $G(r, p, n)$. *J. of Algebra*, **177** : 164–185, 1995.

[3] S. Ariki. On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m, 1, n)$. *J. Math. Kyoto Univ.*, **36** : 789–808, 1996.

[4] S. Ariki. *Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux*. American Mathematical Society, 2000.

[5] S. Ariki. Lectures on cyclotomic Hecke algebras. *London Math. Soc.*, **290** : 1–22, 2001.

[6] S. Ariki. On the classification of simple modules for cyclotomic Hecke algebra of type $G(m, 1, n)$ and Kleshev multipartitions. *Osaka J. Math.*, **38** : 827–837, 2001.

[7] S. Ariki. *Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux*, volume 26. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[8] S. Ariki and K. Koike. A Hecke algebra of $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})\wr\mathfrak{S}_n$ and construction of its irreductible representations. *Adv. in Math.*, **106** : 216–243, 1994.

[9] S. Ariki and A. Mathas. The number of simple modules of the Hecke algebras of type G(r,1,n). *Math. Z.*, **233** : 601–623, 2000.

[10] D.J. Benson. *Representations and cohomology I : Basic representation theory of finite groups and associative algebras*, volume 30. Cambridge University Press, 1998.

[11] M. Broué. Reflection groups, braid groups, Hecke algebras, finite reductive groups. *Current Developments in Math.*, pages 1–107, 2000.

[12] M. Broué and S. Kim. Familles de caractères des algèbres de Hecke cyclotomiques. *Adv. Math.*, **172** : 53–136, 2002.

[13] M. Broué, G. Malle, and R. Rouquier. Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras. *J. Reine Angew. Math.*, **500** : 127–190, 1998.

[14] M. Cabanes and M. Enguehard. *Representation theory of finite reductive groups*, volume 1. Cambridge University Press, New Mathematical Monographs edition, 2004.

[15] R.W. Carter. *Simple groups of Lie type*, volume 28. John Wiley & sons, Pure and Applied Mathematics edition, 1972.

[16] R.W. Carter. *Finite groups of Lie type. Conjugacy classes and complex characters.* Wiley Interscience, 1985.

[17] C. Chevalley. Sur certains groupes simples. *Tôhoku Math. J.*, **1955** : 14–66, 1955.

[18] E. Cline, B. Parshall, and L. Scott. Finite dimensional algebras and highest weight categories. *J. reine angew. Math*, **391** : 85–99, 1988.

[19] C.W. Curtis and I. Reiner. *Methods of representation theory. With applications to finite groups and orders*, volume 1. A Wiley-Interscience Publication, 1981.

[20] C.W. Curtis and I. Reiner. *Methods of representation theory. With applications to finite groups and orders*, volume 2. A Wiley-Interscience Publication, 1987.

[21] C.W. Curtis and I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras*. A Wiley-Interscience Publication, 1988.

[22] F. Digne and J. Michel. *Representations of finite groups of Lie type*, volume 21. Cambridge University Press, 1991.

[23] R. Dipper and G. James. Representations of Hecke algebra of general linear groups. *Proc. London Math. Soc.*, **52** : 20–52, 1986.

[24] R. Dipper and G. James. Blocks and idempotents of Hecke algebras of general linear groups. *Proc. London Math. Soc.*, **54** : 57–82, 1987.

[25] R. Dipper and G. James. The q-Schur algebra. *Proc. London Math. Soc.*, **59** : 23–50, 1989.

[26] R. Dipper and G. James. q-tensor space and q-Weyl modules. *Trans. Am. Math. Soc.*, **327** : 251–282, 1991.

[27] R. Dipper and G. James. Representations of Hecke algebra of type B_n. *J. Algebra*, **146** : 454–481, 1992.

[28] R. Dipper, G. James, and A. Mathas. Cyclotomic q-Schur algebras. *Math. Z.*, **229** : 385–416, 1998.

[29] R. Dipper, G. James, and A. Mathas. The (Q, q)-Schur algebra. *Proc. London Math. Soc.*, **77** : 327–361, 1998.

[30] R. Dipper, G. James, and E. Murphy. Hecke algebras of type B_n at roots of unity. *Proc. London Math. Soc.*, **70** : 505–528, 1995.

[31] R. Dipper and A. Mathas. Morita equivalences of Ariki-Koike algebras. *Math. Z.*, **240** : 579–610, 2002.

[32] V. Dlab and C.M. Ringel. Quasi-hereitary algebras. *Illinois J. of Mathematics*, **33** : 280–291, 1989.

[33] S. Donkin. *The q-Schur algebra*, volume 253. Cambridge University Press, 1998.

[34] J. Du and H. Rui. Ariki-Koike algebras with semi-simple bottoms. *Math. Z.*, **234** : 807–830, 2000.

[35] J. Du and H. Rui. Specht modules for Ariki-Koike algebras. *Comm. Algebra*, **29** : 4701–4719, 2001.

[36] J. Du and L. L. Scott. q-Schur^2 algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352** : 4325–4353, 2000.

[37] J. Du and L. L. Scott. Stratifying q-Schur algebras of type D. *Representations and quantizations*, pages 167–197, 2000. China Higher Education Press.

[38] O. Foda, B. Leclerc, M. Okado, J.Y. Thibon, and T. Welsh. Branching functions of $A^{(1)}_{n-1}$ and Jantzen-Seitz problem for Ariki-Koike algebras. *Adv. in Math.*, **141** : 322–365, 1999.

[39] P. Fong and G. Seitz. Groups with a BN-pair of rank 2. I & II. *Invent. math.*, **21, 24** : 1–57, 191–239, 1973, 1974.

[40] M. Geck. Kazhdan-Lusztig cells and decomposition numbers. *Representation theory*, **2** : 264–277, 1998.

[41] M. Geck. Representations of Hecke algebras at roots of unity. *Astérisque*, **63** : 33–55, 1998. Séminaire Bourbaki, Exp. No. 836.

[42] M. Geck. On the representation theory of Iwahori-Hecke algebras of extended finite Weyl group. *Representation theory*, **4** : 370–397, 2000.

[43] M. Geck. Kazhdan-Lusztig cells, q-Schur algebras, and James'conjecture. *J. London Math. Soc.*, **63** : 336–352, 2001.

[44] M. Geck. *Modular Harish-Chandra series, Hecke algebras and (generalized) q-Schur algebras*, chapter Modular representation theory of finite groups, pages 211–221. eds M.J. Collins, B.J. Parshall, L.L. Scott, 2001.

[45] M. Geck and G. Pfeiffer. *Character of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*. The Clarendon Press, Oxford University Press, 2000.

[46] G. Genet. On the commutator formula of a split BN-pair. *Pac. J. Math.*, **207** : 177–181, 2002.

[47] G. Genet. On decomposition matrices of graded algebras. *J. of Algebra*, **274** : 523–542, 2004.

[48] J.J. Graham and G.I. Lehrer. Cellular algebras. *Invent. math.*, **123** : 1–34, 1996.

[49] J. A. Green. *Polynomial representations of GL_n*, volume 830. SLN Springer-Verlag, 1980.

[50] J. Gruber and G. Hiss. Decomposition numbers of finite classical groups for linear primes. *J. reine angew. Math*, **485** : 55–91, 1997.

[51] T. Halverson and A. Ram. Murnaghan-Nakayama rules for characters of Iwahori-Hecke algebras of the complex reflection groups $G(r, p, n)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348** : 3967–3995, 1996.

[52] T. Halverson and A. Ram. Murnaghan-Nakayama rules for characters of Iwahori-Hecke algebras of classical type. *Canad. J. Math.*, **50** : 167–192, 1998.

[53] P.N. Hoefsmit. *Representations of Hecke algebras of finite groups with BN-pair of classical type*. PhD thesis, University of British Columbia, 1974.

[54] J. Hu. A Morita equivalence theorem for Hecke algebra $\mathfrak{H}_q(D_n)$ when n is even. *Manuscripta Math.*, **108** : 409–430, 2002.

[55] J. Hu. Crystal bases and simple modules for Hecke algebra of type D_n. *J. Algebra*, **267** : 7–20, 2003.

[56] J.E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge University Press, 1993.

[57] G. James. The decomposition matrices of $GL_n(q)$ for $n \leq 10$. *Proc. London Math. Soc.*, **60** : 225–265, 1990.

[58] G.D. James. *The representation theory of the symmetric groups*, volume 682. Springer, 1978.

[59] G.D. James and A. Kerber. *The representation theory of the symmetric group*, volume 16. Addison-Wesley Publishing Co., 1981.

[60] A. Kerber. *Representations of permutations groups. I*, volume 240. Springer-Verlag, 1971.

[61] I.G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. The Clarendon Press, Oxford University Press, 1995.

[62] S. MacLane. *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag, 1998.

[63] A. Mathas. Matrix units and generic degrees for the Ariki-Koike algebras. À paraître.

[64] A Mathas. *Specht, a GAP package for the calculating the decomposition matrices of Hecke algebras of type A*, 1997.

[65] A. Mathas. *Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric group*, volume 15. AMS, 1999.

[66] A. Mathas. The representation theory of the Ariki-Koike and cyclotomic q-Schur algebras. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, À paraître.

[67] E. Murphy. On the representation theory of the symmetric group and associated Hecke algebra. *J. Algebra*, **152** : 492–513, 1992.

[68] E. Murphy. The representations theory of Hecke algebras of type A_n. *J. Algebra*, **173** : 97–121, 1995.

[69] H. Nagao and Y. Tsushima. *Representations of finite groups*. Academic Press, 1989.

[70] C. Pallikaros. Representations of Hecke algebra of type D_n. *J. Algebra*, **169** : 20–48, 1994.

[71] A Ram. Seminormal representations of Weyl groups and Iwahori-Hecke algebras. *Proc. London Math. Soc.*, **75** : 99–133, 1997.

[72] A Ram and J. Ramagge. Affine Hecke algebras, Cyclotomic Hecke algebras and Clifford theory. À paraître.

[73] F. Richen. Modular representations of split BN-pairs. *Trans. Am. Math.*, **140** : 435–460, 1969.

[74] R. Rouquier. Weyl groups, affine Weyl groups and reflection group. In *Representations of reductive groups*, pages 21–39. Cambridge University Press, 1998.

[75] Martin Schœnert et al. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming*, 1995.

[76] L.L. Scott. Simulating algebraic geometry with algebra, I : the algebraic theory of derived categories. *Proc. Sym. Pure Math.*, **47**, 1987.

[77] G.C. Shephard and J.A. Todd. Finite unitary reflection groups. *Canadian J. Math.*, **6** : 274–304, 1954.

[78] R. Steinberg. *Lectures on Chevalley groups*. Yale University, 1978.

[79] J.R. Stembridge. On the eigenvalues of representations of reflection groups and wreath products. *Pacific Journal of Mathematics*, **140** : 353–396, 1989.

[80] N.B. Tinberg. The Levi decomposition of a split BN-pair. *Pacific J. Math.*, **91** : 233–238, 1980.

[81] J. Tits. Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **254** : 2910–2912, 1962.

[82] J. Tits. *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, volume 386. Springer-Verlag, 1974.

Inclusion d'algèbres de Hecke et nombres de décomposition

Gwenaëlle Rassemusse Genet

RÉSUMÉ : Cette thèse comporte trois parties.

Dans la première, nous nous intéressons à la formule du commutateur d'un groupe admettant une BN-paire scindée. Nous montrons que sous une condition dite "condition de Lévi faible", le groupe vérifie cette formule.

Dans la seconde partie, nous étudions la conservation de la forme unitriangulaire lors du passage d'une matrice de décomposition d'un module sur une algèbre graduée à la matrice de décomposition de la restriction de ce module sur l'algèbre effectuant la graduation et vice-versa. Nous verrons des applications pour des algèbres cellulaires pourvues également d'autres propriétés combinatoires, notamment des algèbres de Ariki-Koike.

Nous terminons par une partie traitant de la conjecture de J. Gruber et G. Hiss pour les nombres de décomposition des algèbres de Hecke de type B et D. Nous généralisons et prouvons cette conjecture dans le cas des algèbres de groupes de réflexions complexes. Puis nous observons quels sont les problèmes de la généralisation des méthodes utilisées lors du passage des algèbres de groupes aux algèbres de Hecke (de type B et D). Enfin, nous donnons une condition naturelle sur des filtrations de modules de Specht, sous laquelle la conjecture est satisfaite.

En annexe, se trouvent des exemples numériques issus de programmes informatiques illustrant la troisième partie.

DISCIPLINE : mathématiques

MOTS - CLÉS : formule du commutateur - (B,N)-paire scindée - matrice de décomposition unitriangulaire - algèbre graduée - théorie de Clifford - algèbre cellulaire - algèbre de Hecke - conjecture de Gruber-Hiss - nombres de décomposition de type B et D

ADRESSE DE L'U.F.R. : U.F.R. de Mathématiques
Case 7012
Université de Paris 7 - Denis Diderot
2, place Jussieu
75251 Paris cedex 05
France

ADRESSE ÉLECTRONIQUE : genet@math.jussieu.fr