Opérateurs et polynômes de Demazure pour les algèbres de Kac-Moody finies et affines

Séverine Verneyre-Petitgirard

N° d'ordre : 71-2004 Année 2004

THÈSE

présentée devant

l'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1

pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTORAT
(arrêté du 25 avril 2002)

présentée et soutenue publiquement le 15 Juin 2004 par

Séverine VERNEYRE-PETITGIRARD

SPECIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

Opérateurs et Polynômes de Demazure pour les Algèbres de Kac-Moody Finies et Affines

---

Au vu des rapports de :

M. Guy ROUSSEAU
M. Rupert YU

Devant la commission d'examen formée de :

M. Alberto ARABIA
M. Fokko du CLOUX
M. Olivier MATHIEU, Directeur de thèse,
M. Guy ROUSSEAU, Président du jury,
M. Rupert YU

Remerciements

Je souhaite tout d'abord exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Olivier Mathieu. Je le remercie de m'avoir donné un sujet de recherche aussi intéressant et de m'avoir guidée avec patience et enthousiasme tout au long de mon DEA puis de ma thèse.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Guy Rousseau et Rupert Yu qui me font l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. Je les remercie en particulier pour leurs remarques, toujours constructives, et leur présence à ce jury.

J'adresse mes sincères remerciements à Alberto Arabia qui a accepté de participer à ce jury. Fokko du Cloux m'a fourni le programme *Coxeter* et m'a expliqué son fonctionnement, je l'en remercie vivement. Je le remercie également pour sa présence à ce jury.

Je tiens à remercier chaleureusement tous les membres de l'Institut Girard Desargues, en particulier Meinolf Geck, dont j'ai suivi, avec plaisir, plusieurs cours de DEA et le groupe de travail, Sybil Caraboeuf et Monique Gaffier pour leur gentillesse et leur disponibilité dans toutes les démarches administatives, Thierry Dumont et Violaine Louvet pour leur précieuse aide informatique, et tous mes collègues thésards (ou jeunes docteurs) sans qui ces trois années n'auraient pas été aussi agréables. Je pense tout spécialement à mes collègues de bureau : Fabrizio Caselli, David Hézard, Nicolas Jacon, Christophe de Monval et Chadi Nour, et aussi à Olivier Brunat, Sébastien Foulle, Jean-Baptiste Gramain, Ammar Mahmood.

Je souhaite enfin remercier mes amis, ma famille et belle-famille qui m'ont soutenue et encouragée tout au long de cette période. Je remercie tout spécialement mes parents qui, par leur soutien et leur affection, ont toujours fait tout leur possible pour m'aider à réaliser mes projets. Enfin, je remercie tendrement Loïc qui a su m'écouter, me motiver et me rassurer pendant, entre autre, ces trois années.

Introduction

La théorie des algèbres de Lie, issue de l'étude des transformations infinitésimales d'un groupe de symétrie d'un objet algébrique ou géométrique, est relativement ancienne. La notion d'algèbre de Lie apparait dès 1873 dans les travaux de S. Lie.

Il s'est avéré par la suite que ce type d'algèbre intervenait dans de nombreux domaines tant mathématiques que non mathématiques. Cette théorie est donc devenue l'un des domaines de recherche les plus prolifiques. Les algèbres de Lie de dimension finie ont tout particulièrement étés étudiées. A la fin du dix-neuvième siècle, W. Killing et E. Cartan ont notamment classifié les algèbres de Lie, sur $\mathbb{C}$, simples de dimension finie. En revanche, le cas de la dimension infinie est beaucoup plus complexe et il n'existe, à l'heure actuelle, aucune théorie générale. En 1968, V. Kac et R. Moody ont travaillé, séparément, sur une certaine classe d'algèbres de Lie complexes, appelées algèbres de Kac-Moody. Les algèbres de Kac-Moody indécomposables sont de trois types : le type fini, qui correspond aux algèbres de Lie, sur $\mathbb{C}$, simples de dimension finie, le type affine et le type indéfini.

Comme pour les algèbres de Lie finies, on peut définir les modules de plus haut poids et V. Kac a obtenu une formule de caractère analogue à celle d'H. Weyl. A partir d'un module de plus haut poids λ, on peut construire un module sur la sous-algèbre de Borel, appelé module de Demazure, engendré par un vecteur de poids $w\lambda$ pour w un élément du groupe de Weyl. Ces modules sont apparus pour la première fois en 1974 dans un article de M. Demazure ([7]).

Notre travail porte sur les modules de Demazure dans les algèbres de Kac-Moody de type fini et affine. Parmi les algèbres affines, nous nous sommes penchée plus spécialement sur l'algèbre $\widehat{sl}(n)$. Nous étudions le caractère et la dimension des modules de Demazure. Cette étude nous amène à aborder, d'une part les opérateurs de Demazure, liés aux caractères, et d'autre part les polynômes de Demazure, liés à la dimension.

Pour les algèbres de Kac-Moody de type fini, nous avons obtenu deux résultats principaux. Nous avons montré que l'ensemble des $\mathbb{Z}[P]^W$-endomorphismes de $\mathbb{Z}[P]$ (où P est le réseau des poids et W est le groupe de Weyl) admet comme base les opérateurs de Demazure et que l'ensemble des polynômes, sur P, harmoniques pour le groupe de Weyl, qui sont à valeur entière relative, admet les polynômes de Demazure comme base.

Pour le type $\widehat{sl}(n)$, nous avons défini un sous-ensemble $\mathcal{E}$ du groupe de Weyl sur lequel nous avons calculé le caractère réel (c'est-à-dire le caractère où l'on omet la partie imaginaire des racines) des modules de Demazure et les polynômes de Demazure. Cet ensemble $\mathcal{E}$ est de taille non négligeable dans W puisque sa densité est non nulle.

Nous considérerons que le lecteur est familier avec la théorie des algèbres de Lie simples de dimension finie que l'on peut trouver par exemple dans [12]. Ce travail se décompose en deux parties contenant chacune trois chapitres.

Dans la première partie nous rappelons la théorie des algèbres de Kac-Moody. Dans le premier chapitre, nous définissons et étudions ces algèbres, puis nous nous penchons plus particulièrement sur les algèbres affines dans le chapitre deux. Dans le troisième chapitre nous abordons la notion de formules de caractères, d'abord pour les modules de plus haut poids, puis pour les modules de Demazure.

Dans la seconde partie, nous travaillons sur les opérateurs et les polynômes de Demazure. Nous étudions, dans le quatrième chapitre, les opérateurs $\mathcal{D}_w$, ainsi que les polynômes de Demazure. Nous prouvons, notamment, des résultats d'harmonicité pour ces polynômes. Dans le cinquième chapitre nous nous plaçons dans une algèbre de Kac-Moody de type fini. Nous démontrons quelques propriétés des opérateurs et polynômes de Demazure, puis nous démontrons que

$$End_{\mathbb{Z}[P]^W}\mathbb{Z}[P] = \bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}[P]D_w = \bigoplus_{w\in W}D_w\mathbb{Z}[P],$$

ainsi que

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}P_w.$$

Le chapitre six traite du cas $\widehat{sl}(n)$; on y calcule le caractère réel et le polynôme de Demazure pour les éléments de $\mathcal{E}$, un sous-ensemble de W. Dans le cas des algèbres de petit rang nous en déduisons les polynômes pour un sous-ensemble de W plus grand. Puis nous étudions $\mathcal{E}$.

Notations conventionnelles

$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels positifs ou nuls.
$\mathbb{N}^*$	ensemble des entiers naturels strictement positifs.
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{Z}^*$	ensemble des entiers relatifs non nuls.
$[\![p,q]\!]$	ensemble des entiers compris entre p et q, pour p et q deux entiers $p \leq q$.
$\|X\|$	cardinal de l'ensemble X.
${}^tA$	transposée de la matrice A.
$\det(A)$	déterminant de la matrice A.
$\deg P$	degré usuel de P si P est un polynôme à une variable. Si P est un polynôme à plusieurs variables, $X_1,\ldots,X_n$, $\deg P$ est le degré du polynôme à une variable obtenu en remplaçant $X_1,\ldots,X_n$ par X.
$< X >$	sous-espace (groupe, idéal, corps, …suivant le cas) engendré par X dans E, pour $X \subset E$.
S_n	groupe de permutation d'un ensemble à n éléments.
C_n^k	nombre de k-combinaisons d'un ensemble à n éléments.

Table des matières

Première partie

Rappels sur la théorie des algèbres de Kac-Moody

Chapitre 1

Algèbres de Kac-Moody

Dans ce chapitre, nous définissons les algèbres de Kac-Moody et donnons les outils de base nécessaires à leur étude. La référence principale que nous utilisons est [16]. Dans toute cette partie $A = (a_{ij})$ est une matrice complexe de taille $n \times n$ et de rang r. A partir de la partie 1.2, c'est une matrice de Cartan généralisée.

1.1 Définitions

Une **réalisation** de A est un triplet $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$, où $\mathfrak{h}$ est un espace vectoriel complexe, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$, $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h}$ et ces ensembles satisfont les conditions :
• Les éléments de Π (resp. de $\Pi^\vee$) sont linéairement indépendants
• $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = a_{ij}$ pour $i, j \in [\![1, n]\!]$
• $\dim(\mathfrak{h}) = 2n - r$.

Deux réalisations $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ et $(\mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee)$ sont dites **isomorphes** s'il existe un isomorphisme d'espace vectoriel $\Phi : \mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h}_1$ tel que $\Phi(\Pi^\vee) = \Pi_1^\vee$ et $\Phi^*(\Pi_1) = \Pi$. On a les résultats suivants (voir [16] paragraphe 1.1.) :

Proposition 1.1.1
• *Pour toute matrice A, il existe une unique réalisation à isomorphisme près.*
• *Les réalisations de deux matrices A et B sont isomorphes si et seulement si B peut être obtenue à partir de A par permutation de l'ensemble d'indices.*
• *Si $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ est une réalisation de la matrice A, alors $(\mathfrak{h}^*, \Pi^\vee, \Pi)$ est une réalisation de ${}^tA$.*
• *Etant données deux matrices A_1 et A_2 et leurs réalisations $(\mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee)$ et $(\mathfrak{h}_2, \Pi_2, \Pi_2^\vee)$, alors $(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2, \Pi_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times \Pi_2, \Pi_1^\vee \times \{0\} \cup \{0\} \times \Pi_2^\vee)$ (appelée somme directe des réalisations) est une réalisation de $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.*

Définition 1.1.2 Une matrice A est dite **décomposable** si après permutation des indices elle peut s'écrire comme une matrice diagonale par blocs. Sinon, elle est dite **indécomposable**.

Par analogie avec les algèbres de Lie de dimension finie, les éléments de Π (respectivement de $\Pi^\vee$) sont appelés les **racines simples** (resp. les **coracines simples**), Π est appelé la **base des racines**, $\Pi^\vee$ la **base des coracines**. On appelle $Q = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i$ le **réseau des racines**. On note $Q^+ = \sum_{i=1}^n \mathbb{N}\,\alpha_i$ et $Q^- = -Q^+$. On introduit un ordre partiel sur Q, en posant $\lambda \geq \mu$ si $\lambda - \mu \in Q^+$.
On pose aussi :

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\}$$

$$P^+ = \{\lambda \in P \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0\}.$$

Les éléments de P (resp. P^+) sont appelés **poids entiers** (resp. **poids dominants entiers**), P est appelé le **réseau des poids**.
Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$, nous noterons λ_i le complexe $\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle$. C'est un entier si λ est un poids entier.

Fixons $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ une réalisation de A. On introduit une algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ avec, pour générateurs, des éléments e_i, f_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$, ainsi que les éléments de $\mathfrak{h}$ et pour relations :

$$\begin{cases} [e_i, f_j] = \delta_{ij}\alpha_i^\vee & \\ [h, h'] = 0 & \text{pour } i, j \in [\![1, n]\!] \\ [h, e_i] = \langle \alpha_i, h \rangle e_i & \text{et } h, h' \in \mathfrak{h} \\ [h, f_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i. & \end{cases}$$

Par unicité, à isomorphisme près, de la réalisation de A, on voit que $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ ne dépend que de A.

Soit $\tilde{\mathfrak{n}}^+$ (resp. $\tilde{\mathfrak{n}}^-$) la sous-algèbre de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ engendrée par les e_i (resp. par les f_i). On a alors (voir [16] paragraphe 1.2.) :

Théorème 1.1.3
• *L'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ se décompose en la somme directe suivante :*

$$\tilde{\mathfrak{g}}(A) = \tilde{\mathfrak{n}}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}^-.$$

• *La sous-algèbre $\tilde{\mathfrak{n}}^+$ (resp. $\tilde{\mathfrak{n}}^-$) est librement engendrée par les e_i (resp. par les f_i).*
• *L'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ se décompose de la façon suivante :*

$$\tilde{\mathfrak{g}}(A) = \Big(\bigoplus_{\alpha \in Q^+ \setminus \{0\}} \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha} \Big) \bigoplus \mathfrak{h} \bigoplus \Big(\bigoplus_{\alpha \in Q^+ \setminus \{0\}} \tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha} \Big),$$

où $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha = \{x \in \tilde{\mathfrak{g}}(A) \mid \forall h \in \mathfrak{h},\ [h,x] = \langle \alpha, h\rangle x\}$. *De plus* dim $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha < \infty$ *et* $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha \subset \tilde{\mathfrak{n}}^\pm$ *pour* $\pm\alpha \in Q^+ \setminus \{0\}$.
• *Parmi tous les idéaux de* $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ *intersectant* $\mathfrak{h}$ *trivialement, il existe un unique idéal maximal* $\mathfrak{r}$. *De plus* $\mathfrak{r}^\pm = \mathfrak{r} \cap \tilde{\mathfrak{n}}^\pm$ *sont des idéaux et* $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^+ \oplus \mathfrak{r}^-$.

On va maintenant pouvoir définir l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(A)$. Soit $\mathfrak{r}$ l'idéal maximal de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ intersectant $\mathfrak{h}$ trivialement. Posons :

$$\mathfrak{g}(A) = \tilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r}$$

et conservons les mêmes notations pour les images de $e_i, f_i, \mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}(A)$. Alors $\mathfrak{g}(A)$ est une algèbre de Lie.
Notons $\mathfrak{n}^+$ (resp. $\mathfrak{n}^-$) la sous-algèbre de $\mathfrak{g}(A)$ engendrée par les e_i (resp. f_i) et $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}(A)$, appelée **sous-algèbre de Borel** engendrée par les e_i et $\mathfrak{h}$.

Définition 1.1.4 Le quadruplet $(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ est appelé le **quadruplet associé** à la matrice A. La matrice A est appelée **matrice de Cartan** de $\mathfrak{g}(A)$, n (la taille de la matrice A) est appelé le **rang** de $\mathfrak{g}(A)$. La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}(A)$ est appelée la **sous-algèbre de Cartan**. Les éléments e_i, f_i sont les **générateurs de Chevalley**, ils engendrent la sous-algèbre dérivée $\mathfrak{g}'(A) = [\mathfrak{g}(A), \mathfrak{g}(A)]$.

Attention : Il ne faut pas confondre le rang de $\mathfrak{g}(A)$ et le rang de A.

Définition 1.1.5 Les algèbres $\mathfrak{g}(A)$ et $\mathfrak{g}({}^tA)$ sont dites **duales**.

Nous noterons $\mathfrak{h}'$ l'intersection $\mathfrak{g}'(A) \cap \mathfrak{h}$. On a $\mathfrak{h}' = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}\alpha_i^\vee$.

L'algèbre $\mathfrak{g}(A)$ admet la décomposition suivante :

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_\alpha,$$

où $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}(A) \mid \forall h \in \mathfrak{h},\ [h,x] = \langle \alpha, h\rangle x\}$ est appelé **espace de racine** de α et $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. La dimension de $\mathfrak{g}_\alpha$ (qui est clairement finie) est appelée la **multiplicité** de α, et notée mult(α). Un élément $\alpha \in Q$ non nul de multiplicité non nulle est appelé **racine**. Une racine $\alpha \in Q^+$ (resp. $\alpha \in Q^-$) est dite positive (resp. négative), ce que l'on note $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$). On peut facilement voir que toute racine est soit négative, soit positive et que pour $\alpha \in Q$ on a mult$(\alpha) = $ mult$(-\alpha)$.
On note Δ, Δ^+, Δ^- l'ensemble des racines, des racines positives, des racines négatives. On a $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^-$ et $\Delta^- = -\Delta^+$. Donc :

$$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+,$$

et $\mathfrak{n}^{\pm} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^{\pm}} \mathfrak{g}_{\alpha}$.
L'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}(A)$ est notée $U(\mathfrak{g}(A))$.

On peut montrer le résultat suivant (voir [16] paragraphe 1.4.) :

Proposition 1.1.6 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre commutative, $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ des éléments de $\mathfrak{g}$ et soit $\Pi^{\vee} = \{\alpha_1^{\vee}, \ldots, \alpha_n^{\vee}\} \subset \mathfrak{h}$ et $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$ deux ensembles dont les éléments sont linéairement indépendants et tels que :*

$$[e_i, f_j] = \delta_{i,j}\alpha_i^{\vee} \in \mathfrak{h} \quad \text{pour } i, j \in [\![1, n]\!],$$
$$[h, e_i] = \langle \alpha_i, h\rangle e_i, \quad [h, f_i] = -\langle \alpha_i, h\rangle f_i \quad \text{pour } h \in \mathfrak{h}, i \in [\![1, n]\!].$$

Soit $A = \big(\langle \alpha_j, \alpha_i^{\vee}\rangle\big)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ et supposons que $\dim \mathfrak{h} = 2n - \operatorname{rang} A$. Supposons de plus que les e_i, f_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $\mathfrak{h}$ engendrent $\mathfrak{g}$ comme algèbre de Lie et que $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal non nul intersectant $\mathfrak{h}$ trivialement. Alors, $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}(A)$ et $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^{\vee})$ est le quadruplet associé à la matrice A.

Définition 1.1.7 Une matrice A est appelée **matrice de Cartan généralisée** si elle satisfait aux conditions suivantes :
- $a_{ii} = 2$ pour $i \in [\![1, n]\!]$
- a_{ij} est un entier négatif ou nul pour $i \neq j$
- $a_{ij} = 0$ implique $a_{ji} = 0$.

Définition 1.1.8 Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}(A)$ dont la matrice de Cartan associée est une matrice de Cartan généralisée est appelée **algèbre de Kac-Moody**.

Désormais A sera une matrice de Cartan généralisée. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible ou que la donnée de A n'est pas indispensable, on note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(A)$.

1.2 Opérateur de Casimir

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody de matrice A. Nous allons introduire ici un outil très important, notamment pour l'étude des modules de plus haut poids : l'opérateur de Casimir. Contrairement au cas des algèbres de Lie finies, on ne peut pas le définir dans l'algèbre enveloppante. En effet, pour une algèbre de Kac-Moody de dimension infinie, il est défini à l'aide d'une somme infinie. Cet opérateur appartient à une complétion de $U(\mathfrak{g})$ et il n'agit que sur certains modules. De plus, on ne peut le définir que pour certaines matrices de Cartan généralisées, les matrices de Cartan généralisées symétrisables.

Définition 1.2.1 Une matrice A est dite **symétrisable** s'il existe une **décomposition** $A = DB$ de A où D est une matrice diagonale inversible et B est une matrice symétrique. On dit alors que $\mathfrak{g}$ est **symétrisable**.

Soit A une matrice symétrisable, $D = Diag(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, B une décomposition de A comme ci-dessus et $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ la réalisation de A. Soit $\mathfrak{h}''$ un sous-espace supplémentaire de $\mathfrak{h}' = \sum_{i=1}^n \mathbb{C}\alpha_i^\vee$. Il existe une unique forme symétrique $(.,.)$ sur $\mathfrak{h}$, à valeur dans $\mathbb{C}$, telle que :

$$\begin{cases} \forall h \in \mathfrak{h}, \forall i \in [\![1,n]\!],\ (\alpha_i^\vee, h) = \langle \alpha_i, h\rangle \epsilon_i \\ \forall h, h' \in \mathfrak{h}'',\ (h,h') = 0. \end{cases}$$

Celle-ci est bien définie et non dégénérée sur $\mathfrak{h}$. On a le théorème suivant (voir [16] paragraphe 2.2.) :

Théorème 1.2.2 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody symétrisable. Soit D, B une décomposition de A. Il existe une unique forme bilinéaire $(.,.)$, à valeur dans $\mathbb{C}$, telle que $(.,.)_{|\mathfrak{h}}$ soit définie comme ci-dessus et qui soit invariante i.e. telle que $\forall x,y,z \in \mathfrak{g}$, $([x,y],z) = (x,[y,z])$.*

La forme bilinéaire définit un isomorphisme $\nu : \mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h}^*$ et induit une forme bilinéaire sur $\mathfrak{h}^*$ que l'on note encore $(.,.)$. La matrice A s'écrit alors $A = \left(\dfrac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$. On a de plus (voir [16] paragraphe 2.2.) :

Corollaire 1.2.3 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody symétrisable. Soit $(.,.)$ la forme bilinéaire définie ci-dessus. Elle satisfait aux propriétés suivantes :*
- *$(.,.)$ est non dégénérée*
- *$(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ si $\alpha + \beta \neq 0$*
- *$[x,y] = (x,y)\nu^{-1}(\alpha)$ pour $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ et $\alpha \in \Delta$.*

Si la décomposition de A est choisie telle que D soit à coefficients dans $\mathbb{Q}^+$ et B soit à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (une telle décomposition existe bien) cette forme est appelée une **forme invariante standard**.

Définition 1.2.4 Un $\mathfrak{g}$-module V est dit **restreint** si pour tout $v \in V$ et pour tout $\alpha \in \Delta^+$, sauf un nombre fini, on a $\mathfrak{g}_\alpha \cdot v = 0$.

Soit A symétrisable et V un $\mathfrak{g}$-module restreint. Soit $\rho \in \mathfrak{h}^*$ un élément tel que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \langle \rho, \alpha_i^\vee\rangle = \frac{a_{ii}}{2}.$$

On remarque que ρ n'est défini de façon unique que lorsque $\det A \neq 0$.
Pour $\alpha \in \Delta^+$, soit $\{e_\alpha^{(i)}\}$ une base de $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\{e_{-\alpha}^{(i)}\}$ une base duale de $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Soit $\{u_i\}$ et $\{u^i\}$ deux bases duales de $\mathfrak{h}$.

Définition 1.2.5 Soit $\mathfrak{g}$, V, ρ, $\{e_\alpha^{(i)}\}$, $\{u_i\}$ et $\{u^i\}$ comme ci-dessus. L'opérateur Ω sur V, appelé **opérateur de Casimir généralisé**, est défini par :

$$\Omega = 2\nu^{-1}(\rho) + \sum_i u^i u_i + 2 \sum_{\alpha \in \Delta^+} \sum_i e_{-\alpha}^{(i)} e_\alpha^{(i)}.$$

L'opérateur de Casimir a la propriété suivante (voir [16] paragraphe 2.6.) :

Théorème 1.2.6 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody symétrisable. L'action de Ω, sur un module restreint, commute avec l'action de $\mathfrak{g}$.*

On en déduit (voir [16] paragraphe 2.6.) :

Corollaire 1.2.7 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody symétrisable et V un $\mathfrak{g}$-module restreint. S'il existe un vecteur $v \in V$ tel que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $e_i \cdot v = 0$ et pour un $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$, $h \cdot v = \langle \Lambda, h \rangle v$ alors, $\Omega \cdot v = (\Lambda + 2\rho, \Lambda)v$.*
Si de plus, $U(\mathfrak{g}) \cdot v = V$, alors Ω agit sur V comme $(\Lambda + 2\rho, \Lambda) Id_V$.

Ce résultat sera très utile lorsque l'on étudiera les modules de plus haut poids.

1.3 Représentation intégrable

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody. Posons $\mathfrak{g}_i = \mathbb{C}e_i + \mathbb{C}\alpha_i^\vee + \mathbb{C}f_i$. Cette sous-algèbre de Lie est isomorphe à $sl(2)$, cela va nous permettre d'utiliser des résultats connus sur les représentations de $sl(2)$.

Définition 1.3.1 Un $\mathfrak{g}$-module V est dit **$\mathfrak{h}$-diagonalisable** si :

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda,$$

où $V_\lambda = \{v \in V \mid \forall h \in \mathfrak{h},\ h \cdot v = \langle \lambda, h \rangle v\}$ est appelé **espace de poids**. La dimension de V_λ est appelée la **multiplicité** de λ, notée $\mathrm{mult}_V(\lambda)$. Si $V_\lambda \neq \{0\}$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est un **poids**.
Un module $\mathfrak{h}$-diagonalisable sur $\mathfrak{g}$ est dit **intégrable** si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, les e_i et les f_i sont localement nilpotents sur V (x est dit localement nilpotent sur V si $\forall v \in V,\ \exists\ k \in \mathbb{N}^*,\ x^k \cdot v = 0$).

On a (voir [16] paragraphe 3.6.) :

Proposition 1.3.2 *Soit V un $\mathfrak{g}$-module intégrable dont les poids sont de multiplicité finie. Alors :*
- *Le module V se décompose, comme $\mathfrak{g}_i$-module, en une somme directe de modules irréductibles et $\mathfrak{h}$-invariants.*
- *Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ un poids de V et soit α_i une racine simple de $\mathfrak{g}$. Soit M*

l'ensemble des $t \in \mathbb{Z}$ tels que $\lambda + t\alpha_i$ soit un poids de V et soit $m_t = \mathrm{mult}_V(\lambda + t\alpha_i)$. Alors :

- *M est un segment $[\![-p, q]\!]$, où p et q sont des entiers positifs et $p - q = \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle$.*
- *$e_i : V_{\lambda+t\alpha_i} \to V_{\lambda+(t+1)\alpha_i}$ est une injection pour t entier dans l'intervalle $[-p, -\frac{1}{2}\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle]$, en particulier la fonction $t \mapsto m_t$ croît sur cet intervalle.*
- *La fonction $t \mapsto m_t$ est symétrique par rapport à $t = -\frac{1}{2}\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle$.*
- *Si λ et $\lambda + \alpha_i$ sont tous les deux des poids, alors $e_i \cdot V_\lambda \neq 0$.*

On en déduit (voir [16] paragraphe 3.6.) :

Corollaire 1.3.3
- *Si λ est un poids du $\mathfrak{g}$-module intégrable V et $\lambda + \alpha_i$ (resp. $\lambda - \alpha_i$) n'est pas un poids, alors $\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ (resp. $\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$).*
- *Si λ est un poids de V, alors $\lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$ est aussi un poids de même multiplicité.*

1.4 Groupe de Weyl et algèbre de Hecke

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ ses racines simples.

Pour chaque i dans $[\![1, n]\!]$, on définit la **réflexion fondamentale** (ou réflexion simple) s_i sur $\mathfrak{h}^*$ par :

$$s_i(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i \quad \text{pour} \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Il est clair que s_i est une réflexion car $s_i(\alpha_i) = -\alpha_i$ et l'ensemble de ses points fixes est $\{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle = 0\}$.

Définition 1.4.1 On appelle **groupe de Weyl**, noté W, le sous-groupe de $GL(\mathfrak{h}^*)$ engendré par ces réflexions fondamentales.

L'action de s_i sur $\mathfrak{h}^*$ induit la **réflexion duale** $s_i^\vee$ sur $\mathfrak{h}$, que l'on note souvent s_i par abus. On identifie parfois les groupes de Weyl de deux algèbres duales.

Par le corollaire 1.3.3, on a (voir [16] paragraphe 3.7.) :

Proposition 1.4.2
- *Soit V un module intégrable de l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et tout $w \in W$, $\mathrm{mult}_V(\lambda) = \mathrm{mult}_V(w(\lambda))$. En particulier, l'ensemble des poids de V est invariant par W.*
- *Le système de racines Δ de $\mathfrak{g}$ est W-invariant et pour tout $\alpha \in \Delta$ et tout $w \in W$, $\mathrm{mult}(\alpha) = \mathrm{mult}(w(\alpha))$.*
- *Si $\alpha \in \Delta^+$ et $s_i(\alpha) < 0$ alors $\alpha = \alpha_i$, c'est-à-dire que $\Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}$ est invariant par s_i.*

On a de plus (voir [16] paragraphe 3.9.) :

Proposition 1.4.3 *Si A symétrisable, la restriction de la forme bilinéaire $(.,.)$ à $\mathfrak{h}^*$ est W-invariante.*

Définition 1.4.4 Soit $w \in W$. Une expression de $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$, avec s_{i_j} des réflexions simples, est dite **réduite** si k est le plus petit entier tel que w s'écrive sous cette forme. L'entier k est appelé **longueur** de w et noté $\ell(w)$.

Pour $w, u, v \in W$, on dit que w s'écrit de façon réduite sous la forme $w = uv$ si $w = uv$ et $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$.

Définition 1.4.5 On définit l'**ordre de Bruhat**, noté $\leq$, en posant pour $x, y \in W$, $y \leq x$ s'il existe une expression réduite de $x = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ et une expression réduite de $y = s_{j_1} \cdots s_{j_r}$, telles que $j_1 = i_{n_1}, \cdots, j_r = i_{n_r}$ avec $1 \leq n_1 < \cdots < n_r \leq k$.

On a (voir [16] paragraphe 3.11.) :

Lemme 1.4.6 *Soit $w \in W$ et s_i une réflexion simple. Alors, $\ell(ws_i) < \ell(w)$ si et seulement si $w(\alpha_i) < 0$.*

On définit une algèbre de Hecke sur W (voir [14] paragraphe 7.4.), en prenant une indéterminée q et en posant, pour $w \in W$ et s une réflexion simple :

$$\begin{cases} T_s T_w = T_{sw} & \text{si } \ell(sw) > \ell(w) \\ T_s T_w = (q-1)T_w + qT_{sw} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que, pour $q = 0$ et $q = 1$, le produit ainsi défini donne une structure de monoïde à $\{T_w\}_{w \in W}$. Pour $q = 1$, en identifiant T_w et w, on obtient la composition sur W.

Définition 1.4.7 On notera $*$ le produit sur W que l'on obtient à partir de l'algèbre ci-dessus, à $q = 0$, en identifiant $(-1)^{\ell(w)} T_w$ et w.

En utilisant l'associativité du produit pour les algèbres de Hecke (voir [14] paragraphes 7.1. à 7.4.) et l'identification ci-dessus, on montre que :

Proposition 1.4.8 *Soit $u, u' \in W$ d'expressions réduites $u = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ et $u' = s_{j_1} \cdots s_{j_{k'}}$. Alors :*

$$\begin{aligned} u * u' &= s_{i_1} * (\cdots * (s_{i_k} * u')) \\ &= ((u * s_{j_1}) * \cdots) * s_{j_{k'}}. \end{aligned}$$

1.5 Classification des algèbres de Kac-Moody

Dans cette partie nous allons donner la classification usuelle des algèbres de Kac-Moody. Comme dans le cas des algèbres de dimension finie, on utilise les diagrammes de Dynkin.

Pour un vecteur $u = (u_1, \ldots, u_n)$ on notera $u > 0$ si toutes ses coordonnées sont strictement positives et $u \geq 0$ si toutes ses coordonnées sont positives.

Définition 1.5.1 Soit A une matrice de Cartan généralisée indécomposable. La matrice A est dite de **type fini** (resp. de **type affine**, de **type indéfini**) s'il existe $\alpha > 0$ tel que $A\alpha > 0$ (resp. $= 0$, < 0). On dit alors que $\mathfrak{g}$ est de type fini, affine ou indéfini.

On a (voir [16] paragraphe 4.3.) :

Théorème 1.5.2 *Soit A une matrice de Cartan généralisée indécomposable. Alors :*
• *Les matrices A et ${}^tA$ sont de même type.*
• *Si A est de type fini, alors $det(A) \neq 0$, il existe $u > 0$ tel que $Au > 0$ et $Av \geq 0$ implique $v > 0$ ou $v = 0$.*
• *Si A est de type affine, alors A est de corang 1, il existe un unique $u > 0$ (à un facteur multiplicatif près) tel que $Au = 0$ et $Av \geq 0$ implique $Av = 0$.*
• *Si A est de type indéfini, alors il existe $u > 0$ tel que $Au < 0$ et $Av \geq 0$, $v \geq 0$ implique $v = 0$.*

Remarque 1.5.3 Dans le cas des algèbres de type affine nous noterons les indices des racines simples de 0 à $r = n - 1$.

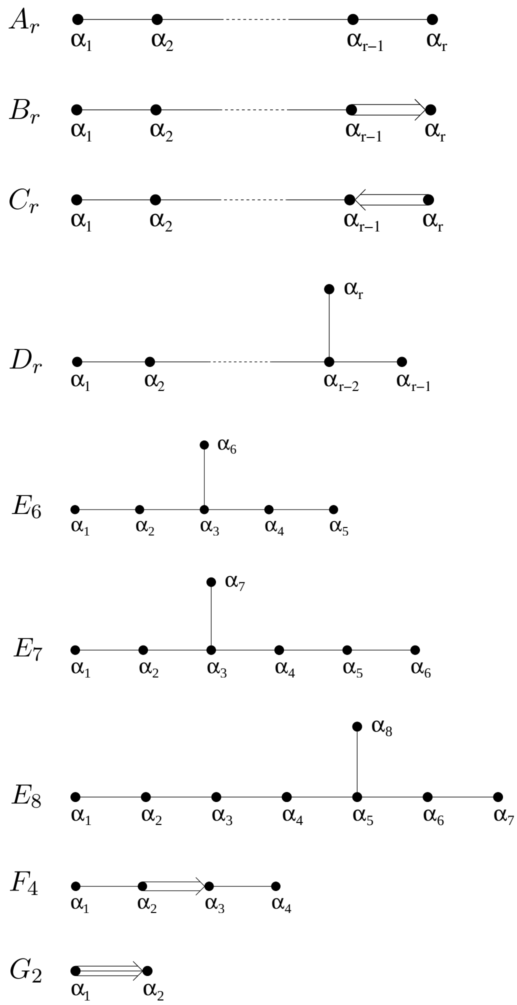
Pour classifier les matrices de Cartan généralisées de type fini ou affine, on introduit les **diagrammes de Dynkin**. Soit $A = (a_{ij})$ une telle matrice. On associe à A le diagramme dont les sommets sont $1, \ldots, n$. Si $a_{ij}a_{ji} \leq 4$ et $|a_{ij}| \geq |a_{ji}|$, les sommets i et j sont reliés par $|a_{ij}|$ lignes, avec une flèche en direction de i si $|a_{ij}| > 1$. Si $a_{ij}a_{ji} > 4$, les sommets i et j sont reliés par une ligne plus épaisse dotée du couple d'entier $(|a_{ij}|, |a_{ji}|)$.
Pour une matrice A affine, soit $\delta = \sum_{i=0}^{r} a_i\alpha_i$ tel que $A\delta = 0$ et tel que les a_i soient des entiers strictement positifs, premiers entre eux. On indique, en plus, sur le diagramme de A les coefficients a_i. On notera $a_i^\vee$ les coefficients correspondants associés à ${}^tA$.

Remarque 1.5.4
• Le diagramme de Dynkin d'une matrice A est connexe si et seulement si A est indécomposable.
• Si A est de type fini ou affine chaque sous-matrice $(a_{ij})_{i,j \in S \subsetneq [\![1,n]\!]}$ de A se décompose en somme directe de matrices de type fini.

• Plus particulièrement, en enlevant à A, matrice de type affine, la première ligne et la première colonne on obtient une matrice de type fini.

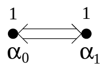
Cela permet de construire tous les diagrammes de Dynkin possibles pour les matrices de Cartan généralisées indécomposables, de type affine ou fini dont voici la liste (voir [16] paragraphe 4.8.) :

Algèbres de Kac-Moody de type fini

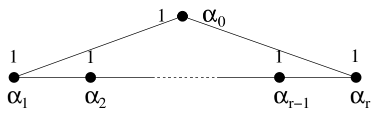


Algèbres de Kac-Moody de type affine 1

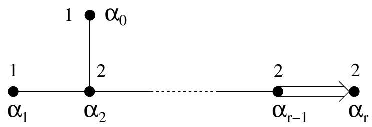
$A_1^{(1)}$



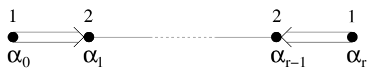
$A_r^{(1)}$ $(r \geq 2)$



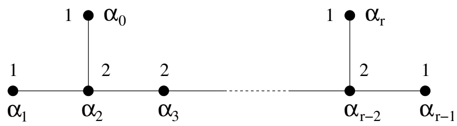
$B_r^{(1)}$ $(r \geq 3)$



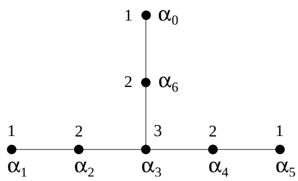
$C_r^{(1)}$ $(r \geq 2)$



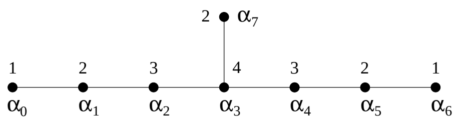
$D_r^{(1)}$ $(r \geq 4)$



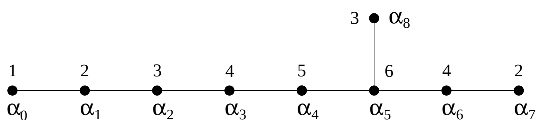
$E_6^{(1)}$



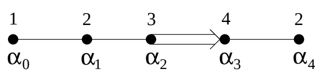
$E_7^{(1)}$



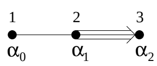
$E_8^{(1)}$



$F_4^{(1)}$

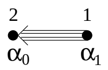


$G_2^{(1)}$



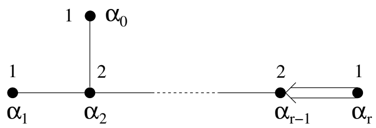
Algèbres de Kac-Moody de type affine 2

$A_2^{(2)}$

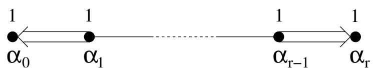


$A_{2r}^{(2)}$ $(r \geq 2)$

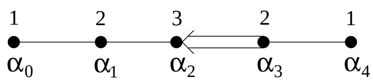
$A_{2r-1}^{(2)}$ $(r \geq 3)$



$D_{r+1}^{(2)}$ $(r \geq 2)$

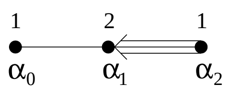


$E_6^{(2)}$



Algèbres de Kac-Moody de type affine 3

$D_4^{(3)}$



L'appellation algèbre de Kac-Moody de type fini n'est pas fortuite comme le montre la proposition suivante (voir [16] paragraphe 4.9.) :

Proposition 1.5.5 *Soit A une matrice de Cartan généralisée et indécomposable. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
• *A est une matrice de Cartan généralisée de type fini*
• *A est symétrisable et la forme bilinéaire $(.,.)_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}}$ est définie positive (où $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}, \Pi, \Pi^\vee)$ est la réalisation de A sur $\mathbb{R}$, et donc $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$)*
• $|W| < \infty$
• $|\Delta| < \infty$
• *$\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple de dimension finie.*

1.6 Racines

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody.

Définition 1.6.1 Une racine $\alpha \in \Delta$ est dite **réelle** s'il existe $w \in W$ tel que $w(\alpha)$ soit une racine simple. On note Δ_{re} (resp. Δ_{re}^+) l'ensemble des racines réelles (resp. réelles positives).

Soit $\alpha \in \Delta_{re}$, on a alors $\alpha = w(\alpha_i)$ pour un $w \in W$ et un $\alpha_i \in \Pi$. On définit une **racine (réelle) duale** $\alpha^\vee \in \Delta_{re}^\vee$ par $\alpha^\vee = w(\alpha_i^\vee)$. (On vérifie que cela ne dépend pas du w choisi.) On obtient donc une bijection canonique, W-invariante, $\Delta_{re} \mapsto \Delta_{re}^\vee$.
On note s_α la réflexion $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. C'est bien une réflexion. De plus, on remarque que $s_\alpha = w s_i w^{-1} \in W$.

Les racines réelles ont les propriétés suivantes (qui rappellent les propriétés des racines dans les algèbres de Lie de dimension finie) (voir [16] paragraphe 5.1.) :

Proposition 1.6.2 *Soit α une racine réelle de $\mathfrak{g}$. Alors :*
• $\mathrm{mult}(\alpha) = 1$
• *$k\alpha$ est une racine si et seulement si $k = \pm 1$*
• *Soit $\beta \in \Delta$, il existe des entiers positifs p et q tels que $p - q = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ et tels que $\beta + k\alpha \in \Delta \cup \{0\}$ si et seulement si $k \in [\![-p, q]\!]$*
• *Supposons que A est symétrisable. Soit $(.,.)$ une forme invariante standard. Alors $(\alpha, \alpha) > 0$ et $\alpha^\vee = \frac{2\nu^{-1}(\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$.*

Contrairement au cas de la dimension finie, les racines ne sont pas toutes réelles. C'est pourquoi on introduit la notion de racine imaginaire, qui n'a pas d'équivalent dans la théorie des algèbres de Lie finies.

Définition 1.6.3 Une racine qui n'est pas réelle est appelée racine **imaginaire**. On note Δ_{im} (resp. Δ_{im}^{+}) l'ensemble des racines imaginaires (resp. imaginaires positives).

On a $\Delta = \Delta_{re} \sqcup \Delta_{im}$ et (voir [16] paragraphe 5.2.) :

Proposition 1.6.4
• *L'ensemble* Δ_{im}^{+} *est* W*-invariant.*
• *Si* A *est symétrisable et* $(.,.)$ *est une forme invariante standard, alors une racine* α *est imaginaire si et seulement si* $(\alpha, \alpha) \leq 0$.

On peut montrer que (voir [16] paragraphe 5.6.) :

Théorème 1.6.5
• *Si* $\mathfrak{g}$ *est de type fini alors* Δ_{im}^{+} *est vide.*
• *Si* $\mathfrak{g}$ *est de type affine alors* $\Delta_{im}^{+} = \{n\delta \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Chapitre 2

Algèbres de Kac-Moody affines

Dans ce chapitre, nous étudions plus en détail les algèbres de Kac-Moody de type affine. Dans un premier temps, nous décrivons les éléments associés (la forme bilinéaire standard, le système de racines, le groupe de Weyl, ...) à une algèbre de Kac-Moody affine $\mathfrak{g}$, à l'aide d'une algèbre de Lie de dimension finie, simple, sous-jacente $\mathfrak{g}^0$. Le groupe de Weyl W est notamment le groupe affine du groupe de Weyl de $\mathfrak{g}^0$, d'où le terme d'algèbre de Lie affine. Dans un second temps, nous construisons les algèbres de Kac-Moody affines à partir d'algèbres de Lie finies. On trouve, là encore, les démonstrations des résultats énoncés dans [16].

2.1 Structure des algèbres de Kac-Moody affines

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody de type affine. Numérotons ses racines comme dans les diagrammes de Dynkin. Soit A sa matrice de Cartan généralisée associée.
Alors, l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ est symétrisable et indécomposable. Son centre est de dimension 1 et est engendré par $K = \sum_{i=0}^{r} a_i^\vee \alpha_i^\vee$, appelé **élément central canonique**.

Soit $d \in \mathfrak{h}$ un élément satisfaisant aux conditions :

$$\begin{cases} \langle \alpha_i, d \rangle = 0 & \text{pour } i \in [\![1, r]\!] \\ \langle \alpha_0, d \rangle = 1. \end{cases}$$

Un tel d (défini à $\mathbb{C}K$ près) est appelé un **élément graduant**. En effet, on obtient une graduation de $\mathfrak{g}$ en posant $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$ où $\mathfrak{g}_n = \{g \in \mathfrak{g} \mid [d, g] = ng\}$.

Les $\alpha_0^\vee, \ldots, \alpha_r^\vee, d$ forment une base de $\mathfrak{h}$, et $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathbb{C}d$. On peut donc définir une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $(.,.)$ sur $\mathfrak{h}$, à valeur dans $\mathbb{C}$, par :

$$\begin{cases} (\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee) = a_j a_j^{\vee -1} a_{ij} \quad \text{pour } i,j \in [\![0,r]\!] \\ (\alpha_i^\vee, d) = 0 \quad \text{pour } i \in [\![1,r]\!] \\ (\alpha_0^\vee, d) = a_0 \\ (d,d) = 0. \end{cases}$$

Cette forme s'étend de façon unique en une forme bilinéaire $(.,.)$ sur $\mathfrak{g}$ telle que les propriétés du théorème 1.2.2 soient satisfaites. Cette forme est alors invariante standard. Désormais on se fixe une telle forme que l'on appelle la **forme invariante normalisée**.

Pour décrire la forme induite sur $\mathfrak{h}^*$ on introduit un élément $\Lambda_0 \in \mathfrak{h}^*$ tel que :

$$\begin{cases} \langle \Lambda_0, \alpha_i^\vee \rangle = \delta_{0i} \quad \text{pour } i \in [\![0,r]\!] \\ \langle \Lambda_0, d \rangle = 0. \end{cases}$$

Les $\alpha_0, \ldots, \alpha_r, \Lambda_0$ forment une base de $\mathfrak{h}^*$ et on a :

$$\begin{cases} (\alpha_i, \alpha_j) = a_j^\vee a_j^{-1} a_{ij} \quad \text{pour } i,j \in [\![0,r]\!] \\ (\alpha_i, \Lambda_0) = 0 \quad \text{pour } i \in [\![1,r]\!] \\ (\alpha_0, \Lambda_0) = a_0^{-1} \\ (\Lambda_0, \Lambda_0) = 0. \end{cases}$$

On remarque que l'application $\nu : \mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h}^*$ vérifie : $a_i^\vee \nu(\alpha_i^\vee) = a_i \alpha_i$, $\nu(K) = \delta$ et $\nu(d) = a_0 \Lambda_0$.

Nous notons de même, pour $j \in [\![1,r]\!]$, $\Lambda_j \in \mathfrak{h}^*$ l'élément tel que :

$$\begin{cases} \langle \Lambda_j, \alpha_i^\vee \rangle = \delta_{ji} \quad \text{pour } i \in [\![0,r]\!] \\ \langle \Lambda_j, d \rangle = 0. \end{cases}$$

Les éléments Λ_j sont appelés les **poids fondamentaux**. Le réseau P s'écrit alors $P = \bigoplus_{i \in [\![0,r]\!]} \mathbb{Z}\Lambda_i \oplus \mathbb{C}\delta$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ s'écrit $\lambda = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \Lambda_i + c\delta$ avec $c \in \mathbb{C}$.

Notons $\mathfrak{h}^0$ (resp. $\mathfrak{h}^0_{\mathbb{R}}$) l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) par $\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_r^\vee$. On note de même leurs duaux $\mathfrak{h}^{0*}$ et $\mathfrak{h}^{0*}_{\mathbb{R}}$. On a alors les sommes directes orthogonales de sous-espaces suivantes :

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^0 \oplus (\mathbb{C}K + \mathbb{C}d) \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}^{0*} \oplus (\mathbb{C}\delta + \mathbb{C}\Lambda_0),$$

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}^0_{\mathbb{R}} \oplus (\mathbb{R}K + \mathbb{R}d) \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}^{0*}_{\mathbb{R}} \oplus (\mathbb{R}\delta + \mathbb{R}\Lambda_0).$$

On remarque que la restriction de la forme bilinéaire $(.,.)$ à $\mathfrak{h}^{0*}_{\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{h}^0_{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathfrak{h}^{0*}_{\mathbb{R}} + \mathbb{R}\delta$ et $\mathfrak{h}^0_{\mathbb{R}} + \mathbb{R}K$) est définie positive (resp. semi-définie positive de noyaux $\mathbb{R}\delta$ et $\mathbb{R}K$).

Pour un élément λ de $\mathfrak{h}^*$, on note λ^0 sa projection orthogonale sur $\mathfrak{h}^{0*}$ suivant $\mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\Lambda_0$, que l'on peut identifier à la restriction de λ à $\mathfrak{h}^0$. On a la formule suivante :

$$\lambda = \lambda^0 + \langle \lambda, K \rangle \Lambda_0 + (\lambda, \Lambda_0)\delta. \tag{2.1}$$

D'où $\rho = \rho^0 + (\sum_{i=0}^{r} a_i^\vee)\Lambda_0$.
On remarque que $\lambda_i = \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle = \langle \lambda^0, \alpha_i^\vee \rangle = \lambda_i^0$, pour $i \in [\![1, r]\!]$.

Définition 2.1.1 Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on appelle **niveau** de λ le complexe $\langle \lambda, K \rangle$. On note l le niveau de λ. Pour $l \in \mathbb{C}$, on note $\mathfrak{h}^{*l} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, K \rangle = l\}$ et $P^l = \{\lambda \in P \mid \langle \lambda, K \rangle = l\}$.

Nous n'utiliserons jamais les sous-espaces de $\mathfrak{h}^*$ et de P de niveau 0, il n'y aura donc pas de confusions possibles avec $\mathfrak{h}^{0*}$ et P^0, l'ensemble des poids entiers de $\mathfrak{h}^{0*}$.

Proposition 2.1.2 *Pour $l \in \mathbb{C}$, les espaces affines $\mathfrak{h}^{*l}$ et P^l sont invariants par l'action de W.*

Preuve : Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et soit s_i une réflexion simple de W. On a $\langle s_i\lambda, K \rangle = \langle \lambda - \lambda_i \alpha_i, K \rangle = \langle \lambda, K \rangle - \lambda_i \langle \alpha_i, K \rangle = \langle \lambda, K \rangle$. Par conséquent, pour tout $w \in W$ on a $\langle w\lambda, K \rangle = \langle \lambda, K \rangle$, le niveau est donc invariant par l'action de W. On en déduit que, pour $l \in \mathbb{C}$, les espaces $\mathfrak{h}^{*l}$ et P^l sont invariants par l'action de W.

$\square$

Les espaces $\mathbb{C}\delta \subset \mathfrak{h}^{0*} \subset \mathfrak{h}^*$ sont W-invariants. En quotientant P^l par $\mathbb{C}\delta$, on obtient $P^l/\mathbb{C}\delta$ qui est isomorphe à P^0 pour l'action de W. De même, en quotientant $\mathfrak{h}^{*l}$ par $\mathbb{C}\delta$, on obtient $\mathfrak{h}^{*l}/\mathbb{C}\delta$ qui est isomorphe à $\mathfrak{h}^{0*}$ pour l'action de W.

Remarque 2.1.3 Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\lambda_{|\mathfrak{h}'}$ est entièrement déterminé par la restriction de λ à $\mathfrak{h}^0$ (ou par λ^0) et par le niveau l de λ. C'est pourquoi, on note parfois $\lambda_{|\mathfrak{h}'} = (\lambda^0, l)$.

Notons $\mathfrak{g}^0$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par les e_i et les f_i pour $i \in [\![1, r]\!]$. C'est l'algèbre de Kac-Moody associée à la matrice A^0 obtenue en enlevant à A la première ligne et la première colonne. Les éléments e_i et f_i pour $i \in [\![1, r]\!]$, sont les générateurs de Chevalley de $\mathfrak{g}^0$, $\mathfrak{h}^0 = \mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{h}$ est sa sous-algèbre de Cartan, $\Pi^0 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ est sa base des racines, $\Pi^{0\vee} = \{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_r^\vee\}$ est sa base des coracines. L'ensemble $\Delta^0 = \Delta \cap \mathfrak{h}^{0*}$ est le système de racines de $\mathfrak{g}^0$. Les Λ_i^0 (pour $i \in [\![1, r]\!]$) sont les poids fondamentaux de $\mathfrak{g}^0$. Notons, de même, W^0 le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}^0$ et Q^0 son réseau de racines.
Par la remarque 1.5.4 et la proposition 1.5.5, $\mathfrak{g}^0$ est une algèbre de Lie de dimension finie, dont le diagramme de Dynkin est obtenu à partir de celui de $\mathfrak{g}$ en enlevant le sommet numéro 0.
On obtient une description des racines de $\mathfrak{g}$ à partir de celles de $\mathfrak{g}^0$ (voir [16] paragraphe 6.3.) :

Proposition 2.1.4 *Soit Δ_s^0 l'ensemble des racines courtes de $\mathfrak{g}^0$, Δ_l^0 l'ensemble de ses racines longues et t le numéro du tableau, type affine t, contenant le diagramme de $\mathfrak{g}$.*
• $\Delta_{re} = \{\alpha + k\delta \mid \alpha \in \Delta^0, k \in \mathbb{Z}\}$ *si* $t = 1$.
• $\Delta_{re} = \{\alpha + k\delta \mid \alpha \in \Delta_s^0, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha + kt\delta \mid \alpha \in \Delta_l^0, k \in \mathbb{Z}\}$ *si* $t = 2$ *ou* 3 *mais* $\mathfrak{g}$ *n'est pas du type* $A_{2n}^{(2)}$.
• $\Delta_{re} = \{\frac{1}{2}(\alpha + (2k-1)\delta) \mid \alpha \in \Delta_l^0, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha + kt\delta \mid \alpha \in \Delta_s^0, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha + 2k\delta \mid \alpha \in \Delta_l^0, k \in \mathbb{Z}\}$ *si* $\mathfrak{g}$ *est du type* $A_{2n}^{(2)}$.

On peut aussi décrire plus précisément le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$. On identifie W^0 au sous-groupe de W engendré par les réflexions fondamentales $s_1, \ldots, s_r$. Pour $\alpha \in \mathfrak{h}^{0*}$, on définit un endomorphisme de $\mathfrak{h}^*$ par :

$$t_\alpha(\lambda) = \lambda + \langle \lambda, K \rangle \alpha - ((\lambda, \alpha) + \frac{1}{2}|\alpha|^2 \langle \lambda, K \rangle)\delta.$$

Soit $M \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{0*}$ le réseau défini par $M = \nu(\mathbb{Z}(\mathrm{W}^0\, \theta^\vee))$ avec $\theta = \delta - a_0 \alpha_0$ et soit T le sous-groupe de $GL(\mathfrak{h}^*)$ engendré par les endomorphismes t_α pour $\alpha \in M$. On a alors (voir [16] paragraphe 6.5.) :

Proposition 2.1.5 $W = \mathrm{W}^0 \ltimes T$.

Proposition 2.1.6 *Pour* $\alpha \in M$ *et* $l \in \mathbb{C}$, *l'endomorphisme* t_α *agit comme une translation de vecteur* $l\alpha$ *sur les ensembles* $P^l/\mathbb{C}\delta$ *et* $\mathfrak{h}^{*l}/\mathbb{C}\delta$.

2.2 Construction des algèbres de Kac-Moody affines non tordues

Dans cette partie nous allons présenter une construction plus explicite des algèbres de Kac-Moody affines de type $X_r^{(1)}$, appelées algèbres de Kac-Moody affines non tordues, à partir d'une algèbre de Lie finie.

Soit $\mathfrak{g}^0$ une algèbre de Lie simple de dimension finie, de type X_r. Notons $[.,.]_0$ son crochet et $(.,.)_0$ une forme bilinéaire invariante symétrique non dégénérée de $\mathfrak{g}^0$, par exemple sa forme de Killing.
Notons $\mathbf{L} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ l'algèbre des polynômes de Laurent en t. Pour $P \in \mathbf{L}$, P s'écrit $P = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k t^k$ où seul un nombre fini de c_k est non nul. Nous noterons Res $P = c_{-1}$ le **résidu** de P.

Notons $\mathbf{L}(\mathfrak{g}^0) = \mathbf{L} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^0$. Définissons le crochet $[.,.]_1$ par :

$$[P \otimes x, Q \otimes y]_1 = PQ \otimes [x, y]_0 \qquad \text{pour } P, Q \in \mathbf{L} \text{ et } x, y \in \mathfrak{g}^0.$$

Munie du crochet $[.,.]_1$, $\mathbf{L}(\mathfrak{g}^0)$ est une algèbre de Lie infinie.

Définissons ψ par :

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathbf{L}(\mathfrak{g}^0) \times \mathbf{L}(\mathfrak{g}^0) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & (P \otimes x, Q \otimes y) & \mapsto & (x,y)_0 \mathrm{Res}\, \dfrac{dP}{dt} Q. \end{array}$$

Notons $\widetilde{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0) = \mathbf{L}(\mathfrak{g}^0) \oplus \mathbb{C}K$ et

$$[a + \lambda K, b + \mu K] = [a,b]_1 + \psi(a,b)K \qquad \text{pour } a, b \in \mathbf{L}(\mathfrak{g}^0) \text{ et } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Munie du crochet $[.,.]$, $\widetilde{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0)$ est une algèbre de Lie infinie, obtenue par extension centrale de $\mathbf{L}(\mathfrak{g}^0)$.

Enfin, notons $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0)$ l'algèbre obtenue en ajoutant à $\widetilde{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0)$ l'élément d de la manière suivante : $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0) = \mathbf{L}(\mathfrak{g}^0) \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$ et

$$[t^m \otimes x + \lambda K + \mu d, t^n \otimes y + \lambda_1 K + \mu_1 d] = (t^{m+n} \otimes [x,y]_0 + \mu n t^n \otimes y - \mu_1 m t^m \otimes x) +$$

$$m\delta_{m,-n}(x,y)_0 K \qquad \text{pour } x, y \in \mathfrak{g}^0 \text{ et } \lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{C}.$$

Munie du crochet $[.,.]$, $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0)$ est une algèbre de Lie infinie. Nous allons montrer que c'est une algèbre de Kac-Moody affine de type $X_r^{(1)}$.

Soit $\Delta^0 \subset \mathfrak{h}^{0*}$ le système de racines de $\mathfrak{g}^0$. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ une base de racines, $H_1, \ldots, H_r$ la base des coracines, $E_1, \ldots, E_r, F_1, \ldots, F_r$ les générateurs de Chevalley. Soit θ la plus grande racine de Δ^0. L'algèbre de Lie finie $\mathfrak{g}^0$ se décompose en espaces de racines :

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}^0 \bigoplus \Big(\bigoplus_{\alpha \in \Delta^0} \mathfrak{g}^0_\alpha \Big).$$

On a, pour tout $\alpha \in \Delta^0$, $(\alpha, \alpha)_0 \neq 0$ et $\dim \mathfrak{g}^0_\alpha = 1$.
Soit ω^0 l'involution de Chevalley de $\mathfrak{g}^0$, c'est-à-dire l'application définie par :

$$\begin{cases} \omega^0(E_i) = -F_i & \\ \omega^0(F_i) = -E_i & \text{pour } i \in [\![0, r]\!] \\ \omega^0(h) = -h & \text{pour } h \in \mathfrak{h}^0. \end{cases}$$

Choisissons F_0 dans $\mathfrak{g}^0_\theta$ tel que $(F_0, \omega^0(F_0))_0 = -\frac{2}{(\theta,\theta)_0}$. Posons $E_0 = -\omega^0(F_0)$.

Remarque 2.2.1 Les éléments $E_0, \ldots, E_r$ engendrent l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^0$. En effet, $\mathfrak{g}^0$ est engendré par les crochets de E_0 avec les éléments de $\mathfrak{n}^{0+}$.

Revenons maintenant à l'algèbre de Lie $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0)$. On peut identifier $\mathfrak{g}^0$ à la sous-algèbre $1 \otimes \mathfrak{g}^0$.

• Posons $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^0 + \mathbb{C}K + \mathbb{C}d$, on voit, par définition du crochet, que c'est une sous-algèbre commutative de dimension $r+2$ de $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0)$.

• Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^{0*}$, on étend λ en une application linéaire de $\mathfrak{h}^*$, que l'on note encore λ, en posant $\langle \lambda, K \rangle = 0$ et $\langle \lambda, d \rangle = 0$. On définit de plus $\delta \in \mathfrak{h}^*$ en posant $\delta_{|\mathfrak{h}^0 + \mathbb{C}K} = 0$ et $\langle \delta, d \rangle = 1$.

• Posons :

$$\begin{array}{ccc} e_0 = t \otimes E_0 & f_0 = t^{-1} \otimes F_0 & \\ e_i = 1 \otimes E_i & f_i = 1 \otimes F_i & \text{pour } i \in [\![1, r]\!]. \end{array}$$

Les $e_0, \ldots, e_r, f_0, \ldots, f_r$ sont des éléments de $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0)$.

• Posons $\Delta = \{\gamma + j\delta \mid j \in \mathbb{Z} \text{ et } \gamma \in \Delta^0\} \cup \{j\delta \mid j \in \mathbb{Z}^*\}$. L'algèbre $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0)$ admet la décomposition, en espaces de racines, suivante :

$$\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0) = \mathfrak{h} \bigoplus \Big(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0)_\alpha \Big),$$

avec $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0)_{\gamma + j\delta} = t^j \otimes \mathfrak{g}^0_\gamma$ et $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0)_{j\delta} = t^j \otimes \mathfrak{h}^0$.

• Posons $\Pi = \{\alpha_0 = \delta - \theta, \alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ et $\Pi^\vee = \{\alpha_0^\vee = \frac{2}{(\theta,\theta)_0} K - 1 \otimes \theta^\vee, \alpha_1^\vee = 1 \otimes H_1, \ldots, \alpha_r^\vee = 1 \otimes H_r\}$. On a $\Pi \subset \mathfrak{h}^*$ et $\Pi^\vee \subset \mathfrak{h}$ et leurs éléments sont linéairement indépendants.

• Soit A la matrice de type $X_r^{(1)}$ avec les racines dans l'ordre du diagramme de Dynkin. Alors A^0, la matrice A où on a enlevé la première ligne et la première colonne, est la matrice associée à $\mathfrak{g}^0$ si on a numéroté les racines de $\mathfrak{g}^0$ comme dans le diagramme de Dynkin. On remarque que θ, défini ci-dessus, est la même combinaison linéaire des racines simples que le θ défini dans la partie précédente. On peut montrer que pour un tel θ, $a_{0,i} = -\langle \theta, \alpha_i^\vee \rangle$ (pour $i \in [\![1, r]\!]$). Or $\langle \delta, \alpha_i^\vee \rangle = 0$, donc $\langle \alpha_0, \alpha_i^\vee \rangle = -\langle \theta, \alpha_i^\vee \rangle$. D'où $\langle \alpha_0, \alpha_i^\vee \rangle = a_{0,i}$. On vérifie, de même, l'égalité pour les $a_{i,0}$ et $a_{0,0}$. On en déduit que :

$$A = \big(\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle \big)_{i,j \in [\![0, r]\!]},$$

avec $\alpha_0, \alpha_0^\vee$ définis comme ci-dessus. De plus, rang $A = r = 2(r+1) - \dim \mathfrak{h}$.

• En utilisant la définition du crochet et les formules vérifiées par les E_i et les F_i, on montre que les formules de la propriété 1.1.6 sont vérifiées.

• Notons $\widehat{\mathbf{L}}_e(\mathfrak{g}^0)$ la sous-algèbre de $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0)$ engendrée par les e_i, f_i pour $i \in [\![0, r]\!]$ et $\mathfrak{h}$. Les E_i, F_i, pour $i \in [\![1, r]\!]$, engendrent $\mathfrak{g}^0$ donc les e_i, f_i, pour $i \in [\![1, r]\!]$, engendrent $1 \otimes \mathfrak{g}^0$, donc $1 \otimes \mathfrak{g}^0 \subset \widehat{\mathbf{L}}_e(\mathfrak{g}^0)$. De plus, $t \otimes E_0 \in \widehat{\mathbf{L}}_e(\mathfrak{g}^0)$. En considérant des crochets de $t \otimes E_0$ avec des éléments de $1 \otimes \mathfrak{g}^0$ et grâce à la remarque 2.2.1, on montre que $t \otimes \mathfrak{g}^0 \subset \widehat{\mathbf{L}}_e(\mathfrak{g}^0)$. Par récurrence, on trouve $t^k \otimes \mathfrak{g}^0 \subset \widehat{\mathbf{L}}_e(\mathfrak{g}^0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On montre, de même, que $t^k \otimes \mathfrak{g}^0 \subset \widehat{\mathbf{L}}_e(\mathfrak{g}^0)$ pour tout $k \in -\mathbb{N}$. On en déduit que $\widehat{\mathbf{L}}_e(\mathfrak{g}^0) = \widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0)$.

• Supposons qu'il existe un idéal non nul dont l'intersection avec $\mathfrak{h}$ est triviale. Notons $\mathfrak{i}$ cet idéal. L'idéal $\mathfrak{i}$ est non nul, il existe donc un $\alpha \in \Delta$ tel que $\mathfrak{i} \cap \widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0)_\alpha \neq \{0\}$. Par conséquent, il existe un $j \in \mathbb{Z}$ et un $x \in \mathfrak{g}^0_\gamma \setminus \{0\}$ avec $\gamma \in \Delta^0 \cup \{0\}$ tel que $t^j \otimes x \in \mathfrak{i}$. Soit $y \in \mathfrak{g}^0_{-\gamma}$ tel que $(x, y)_0 \neq 0$. Alors, $[t^j \otimes x, t^{-j} \otimes y] = j(x, y)_0 K + [x, y]_0 \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{i}$. Comme $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{i} = \{0\}$, on en déduit que $j = 0$ et $[x, y]_0 = 0$. Or, si $j = 0$, alors $\gamma \in \Delta^0$ et $[x, y]_0 = (x, y)_0 \nu^{-1}(\gamma) \neq 0$. C'est absurde.

Par la proposition 1.1.6, on déduit que (voir [16] paragraphe 7.4.) :

Théorème 2.2.2 $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0)$ *est une algèbre de Kac-Moody de type* $X_r^{(1)}$ *et* $(\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{g}^0), \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ *est le quadruplet associé à* A.

On peut déduire de cette construction que (voir [16] paragraphe 7.4.) :

Corollaire 2.2.3 *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Kac-Moody affine non tordue de rang* $r+1$. *La multiplicité des racines imaginaires est* r.

2.3 Construction des algèbres de Kac-Moody affines tordues

Soit $\mathfrak{k}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie. Soit σ un automorphisme de $\mathfrak{k}$ tel que $\sigma^m = Id$ pour m un entier non nul. Posons $\epsilon = \exp(\frac{2\pi i}{m})$. L'automorphisme σ est diagonalisable et ses valeurs propres sont de la forme ϵ^j avec $\bar{j} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (où $\bar{j}$ est la classe de j modulo m). Décomposons $\mathfrak{k}$ en :

$$\mathfrak{k} = \bigoplus_{\bar{j} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \mathfrak{k}_{\bar{j}},$$

où $\mathfrak{k}_{\bar{j}}$ est l'espace propre de valeur propre ϵ^j.

Comme dans la partie précédente on définit $\mathbf{L}(\mathfrak{k})$ et $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{k})$, nous noterons ici $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{k}) = \mathbf{L}(\mathfrak{k}) \oplus \mathbb{C}K' \oplus \mathbb{C}d'$. On définit $\mathbf{L}(\mathfrak{k}, \sigma, m)$, une sous-algèbre de l'algèbre $\mathbf{L}(\mathfrak{k})$, par :

$$\mathbf{L}(\mathfrak{k}, \sigma, m) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} t^j \otimes \mathfrak{k}_{\bar{j}}$$

et $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{k}, \sigma, m)$, une sous-algèbre de $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{k})$ par :

$$\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{k}, \sigma, m) = \mathbf{L}(\mathfrak{k}, \sigma, m) \oplus \mathbb{C}K' \oplus \mathbb{C}d'.$$

Alors (voir [16] paragraphe 8.5.) :

Théorème 2.3.1 *Soit $\mathfrak{k}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie de type X_n, σ un automorphisme de $\mathfrak{k}$ tel que $\sigma^m = Id$, pour $m \in \mathbb{N}^*$. Soit t le plus petit entier strictement positif tel que σ^t soit un automorphisme intérieur. Alors, $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{k}, \sigma, m)$ est une algèbre de Kac-Moody affine de type $X_n^{(t)}$.*

Remarque 2.3.2 Le groupe des automorphismes extérieurs d'une algèbre de Lie simple de dimension finie est isomorphe à $\{Id\}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou S_3 et donc t est égal à $1, 2$ ou 3.

Construisons maintenant plus précisément les algèbres de Kac-Moody affines tordues.

Soit $\mathfrak{k}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie de type X_n, $\mathfrak{h}_\mathfrak{k}$ sa sous-algèbre de Cartan, $\Delta_\mathfrak{k}$ son système de racines, $(.,.)_\mathfrak{k}$ une forme bilinéaire invariante symétrique non dégénérée. Cette dernière définit un isomorphisme $\nu : \mathfrak{h}_\mathfrak{k} \to \mathfrak{h}_\mathfrak{k}^*$.
On choisit, pour tout $\alpha \in \Delta_\mathfrak{k}$, un $E'_\alpha \in \mathfrak{k}_\alpha$ tel que $[E'_\alpha, E'_{-\alpha}] = \nu^{-1}(-\alpha)$. L'algèbre $\mathfrak{k}$ se décompose alors en :

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{h}_\mathfrak{k} \bigoplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta_\mathfrak{k}} \mathbb{C}E'_\alpha).$$

Pour $\bar{\mu}$ un automorphisme de diagramme de Dynkin, on définit un automorphisme μ de $\mathfrak{k}$ en posant $\mu(\alpha) = \bar{\mu}(\alpha)$ et $\mu(E'_\alpha) = E'_{\bar{\mu}(\alpha)}$.

Soit $\Pi' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$ les racines simples de $\mathfrak{k}$ énumérées selon le même ordre que dans les diagrammes de Dynkin de type fini. Posons $E'_i = E'_{\alpha'_i}$, $F'_i = -E'_{-\alpha'_i}$ et $H'_i = \alpha_i^{\vee\prime}$.

Cas 1 : $X_n = D_{r+1}$. Soit $\bar{\mu}$ l'automorphisme d'ordre $t = 2$ défini par

$$\begin{aligned} &\bar{\mu}(\alpha'_i) = \alpha'_i \text{ pour } i \in [\![1, r-1]\!] \\ &\bar{\mu}(\alpha'_r) = \alpha'_{r+1} \\ &\bar{\mu}(\alpha'_{r+1}) = \alpha'_r. \end{aligned}$$

Posons $\theta^0 = \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_r$
$H_i = H'_i$ pour $i \in [\![1, r-1]\!],\ H_r = H'_r + H'_{r+1},\ H_0 = \nu^{-1}(-\theta^0 - \mu(\theta^0))$
$E_i = E'_i$ pour $i \in [\![1, r-1]\!],\ E_r = E'_r + E'_{r+1},\ E_0 = E'_{-\theta^0} - E'_{-\mu(\theta^0)}$
$F_i = F'_i$ pour $i \in [\![1, r-1]\!],\ F_r = F'_r + F'_{r+1},\ F_0 = -E'_{\theta^0} + E'_{\mu(\theta^0)}$.

Cas 2 : $X_n = A_{2r-1}$. Soit $\bar{\mu}$ l'automorphisme d'ordre $t = 2$ défini par

$$\bar{\mu}(\alpha'_i) = \alpha'_{2r-i} \text{ pour } i \in [\![1, 2r-1]\!].$$

Posons $\theta^0 = \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_{2r-2}$
$H_i = H'_i + H'_{2r-i}$ pour $i \in [\![1, r-1]\!]$, $H_r = H'_r$, $H_0 = \nu^{-1}(-\theta^0 - \mu(\theta^0))$
$E_i = E'_i + E'_{2r-i}$ pour $i \in [\![1, r-1]\!]$, $E_r = E'_r$, $E_0 = E'_{-\theta^0} - E'_{-\mu(\theta^0)}$
$F_i = F'_i + F'_{2r-i}$ pour $i \in [\![1, r-1]\!]$, $F_r = F'_r$, $F_0 = -E'_{\theta^0} + E'_{\mu(\theta^0)}$.

Cas 3 : $X_n = E_6$. Soit $\bar{\mu}$ l'automorphisme d'ordre $t = 2$ défini par

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(\alpha'_1) &= \alpha'_5\\ \bar{\mu}(\alpha'_2) &= \alpha'_4\\ \bar{\mu}(\alpha'_3) &= \alpha'_3\\ \bar{\mu}(\alpha'_4) &= \alpha'_2\\ \bar{\mu}(\alpha'_5) &= \alpha'_1\\ \bar{\mu}(\alpha'_6) &= \alpha'_6.\end{aligned}$$

Posons $\theta^0 = \alpha'_1 + 2\alpha'_2 + 2\alpha'_3 + \alpha'_4 + \alpha'_5 + \alpha'_6$
$H_1 = H'_1 + H'_5$, $H_2 = H'_2 + H'_4$, $H_3 = H'_3$, $H_4 = H'_6$, $H_0 = \nu^{-1}(-\theta^0 - \mu(\theta^0))$
$E_1 = E'_1 + E'_5$, $E_2 = E'_2 + E'_4$, $E_3 = E'_3$, $E_4 = E'_6$, $E_0 = E'_{-\theta^0} - E'_{-\mu(\theta^0)}$
$F_1 = F'_1 + F'_5$, $F_2 = F'_2 + F'_4$, $F_3 = F'_3$, $F_4 = F'_6$, $F_0 = -E'_{\theta^0} + E'_{\mu(\theta^0)}$.

Cas 4 : $X_n = D_4$. Soit $\bar{\mu}$ l'automorphisme d'ordre $t = 3$ défini par

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(\alpha'_1) &= \alpha'_3\\ \bar{\mu}(\alpha'_2) &= \alpha'_2\\ \bar{\mu}(\alpha'_3) &= \alpha'_4\\ \bar{\mu}(\alpha'_4) &= \alpha'_1.\end{aligned}$$

Posons $\theta^0 = \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3$
$H_1 = H'_1 + H'_3 + H'_4$, $H_2 = H'_2$, $H_0 = \nu^{-1}(-\theta^0 - \mu(\theta^0) - \mu^2(\theta^0))$
$E_1 = E'_1 + E'_3 + E'_4$, $E_2 = E'_2$, $E_0 = E'_{-\theta^0} + \eta^2 E'_{-\mu(\theta^0)} + \eta E'_{-\mu^2(\theta^0)}$
$F_1 = F'_1 + F'_3 + F'_4$, $F_2 = F'_2$, $F_0 = -E'_{\theta^0} - \eta E'_{\mu(\theta^0)} - \eta^2 E'_{\mu^2(\theta^0)}$.

Cas 5 : $X_n = A_{2r}$. Soit $\bar{\mu}$ l'automorphisme d'ordre $t = 2$ défini par

$$\bar{\mu}(\alpha'_i) = \alpha'_{2r+1-i} \text{ pour } i \in [\![1, 2r]\!].$$

Posons $\theta^0 = \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_{2r}$
$H_i = H'_i + H'_{2r+1-i}$ pour $i \in [\![1, r-1]\!]$, $H_0 = 2(H'_r + H'_{r+1})$, $H_r = \nu^{-1}(-\theta^0)$
$E_i = E'_i + E'_{2r+1-i}$ pour $i \in [\![1, r+1]\!]$, $E_0 = \sqrt{2}(E'_r + E'_{r+1})$, $E_r = E'_{-\theta^0}$
$F_i = F'_i + F'_{2r+1-i}$ pour $i \in [\![1, r-1]\!]$, $F_0 = \sqrt{2}(F'_r + F'_{r+1})$, $F_r = -E'_{\theta^0}$.

Posons $\alpha_i = \dfrac{2H_i}{(H_i, H_i)_{\mathfrak{k}}}$. De plus, pour les cas 1 à 4, posons $\theta_0 = \frac{1}{r}(\mu(\theta^0) + \cdots + \mu^t(\theta^0))$ et $\varepsilon = 0$. Pour le cas 5, posons $\theta_0 = \theta^0$ et $\varepsilon = r$. Posons enfin $I = [\![0, r]\!] \setminus \{\varepsilon\}$.

Pour $j \in [\![0, t-1]\!]$, soit $\Delta_{\bar{j}}$ l'ensemble des poids non nuls de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}\,\bar{0}}$ sur $\mathfrak{k}_{\bar{j}}$. Notons $\mathfrak{k}_{\bar{j}} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\bar{j}} \cup \{0\}} \mathfrak{k}_{\bar{j},\alpha}$ la décomposition en espaces de poids.

Posons $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}\,\bar{0}} + \mathbb{C}K' + \mathbb{C}d'$.

Soit $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}^*$, on étend λ en une application linéaire de $\mathfrak{h}^*$, que l'on note encore λ, en posant $\langle \lambda, K' \rangle = 0$ et $\langle \lambda, d' \rangle = 0$. On définit de plus $\delta \in \mathfrak{h}^*$ en posant $\delta_{|\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}} + \mathbb{C}K'} = 0$ et $\langle \delta, d' \rangle = 1$.

Posons :

$$e_\varepsilon = t \otimes E_\varepsilon \qquad f_\varepsilon = t^{-1} \otimes F_\varepsilon$$
$$e_i = 1 \otimes E_i \qquad f_i = 1 \otimes F_i \qquad \text{pour } i \in I.$$

Posons $\Delta = \{\gamma + j\delta \mid \gamma \in \Delta_{\bar{s}}$ pour $s \in [\![0, t-1]\!]$ et $j \in \mathbb{Z}$ pour $j \equiv s \bmod t\} \cup \{j\delta \mid j \in \mathbb{Z}^*\}$. Alors $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{k}, \mu, t)$ admet la décomposition, en espaces de racines, suivante :

$$\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{k}, \mu, t) = \mathfrak{h} \bigoplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{k}, \mu, t)_\alpha \right),$$

avec $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{k}, \mu, t)_{\gamma + j\delta} = t^j \otimes \mathfrak{k}_{\bar{j},\gamma}$ et $\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{k}, \mu, t)_{j\delta} = t^j \otimes \mathfrak{k}_{\bar{j},0}$.

Posons $\Pi = \{\alpha_\varepsilon = \delta - \theta_0,\ \alpha_i \text{ pour } i \in I\}$ et $\Pi^\vee = \{\alpha^\vee{}_\varepsilon = \frac{t}{a_0} K' - 1 \otimes H_\varepsilon,\ \alpha^\vee{}_i = 1 \otimes H_i \text{ pour } i \in I\}$.
Posons :

$$A = \left(\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle \right)_{i,j \in [\![0,r]\!]}.$$

Alors (voir [16] paragraphe 8.3.) :

Théorème 2.3.3 *$\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{k}, \mu, t)$ est une algèbre de Kac-Moody de type $X_n^{(t)}$ et $(\widehat{\mathbf{L}}(\mathfrak{k}, \mu, t), \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ est le quadruplet associé à A.*

On peut déduire de cette construction que (voir [16] paragraphe 8.3.) :

Corollaire 2.3.4 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody affine tordue de rang $r+1$ et de type $X_n^{(t)}$. La multiplicité des racines $jt\delta$ pour $j \in \mathbb{Z}^*$ est r et la multiplicité des racines $j\delta$ pour $j \not\equiv 0 \mod t$ est $\frac{n-r}{t-1}$.*

Chapitre 3

Formules de caractère

Les formules de caractère sont l'objet principal de ce chapitre. Nous introduisons, dans un premier temps, les modules de plus haut poids ainsi que la notion de caractère. Puis nous énonçons la formule de Kac-Weyl. Dans un second temps, nous définissons les modules et les opérateurs de Demazure. Ces opérateurs nous seront très utiles car ils permettent de calculer les caractères de modules de Demazure.

Tout au long de ce chapitre $\mathfrak{g}$ sera une algèbre de Kac-Moody de type fini ou affine.

3.1 Module de plus haut poids

Les résultats énoncés ici sont démontrés dans [16].

Soit V un $\mathfrak{g}$-module, $\mathfrak{h}$-diagonalisable, $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$. Posons $P(V) = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid V_\lambda \neq 0\}$ et pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $D(\lambda) = \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid \mu \leq \lambda\}$.
On introduit la catégorie suivante, notée $\mathcal{O}$:
• ses objets sont les $\mathfrak{g}$-modules, V, $\mathfrak{h}$-diagonalisables dont les espaces de poids sont de dimension finie et tels qu'il existe un nombre fini d'éléments $\lambda_{(1)}, \dots, \lambda_{(s)} \in \mathfrak{h}^*$ tels que $P(V) \subset \bigcup_{i=1}^{s} D(\lambda_{(i)})$
• ses morphismes sont les morphismes de $\mathfrak{g}$-modules.

Une famille de modules importante de $\mathcal{O}$ est la famille des modules de plus haut poids :

Définition 3.1.1 Soit V un $\mathfrak{g}$-module. Pour $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$, un vecteur $v \in V$ non nul est appelé **vecteur de plus haut poids** Λ si :

$$\begin{cases} \mathfrak{n}^+ \cdot v = 0 \\ h \cdot v = \langle \Lambda, h \rangle v \qquad \text{pour } h \in \mathfrak{h}. \end{cases}$$

Le module V est dit **de plus haut poids** s'il existe $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ (appelé **plus haut poids**) et $v_\Lambda \in V$ un vecteur de plus haut poids Λ tel que :

$$U(\mathfrak{g}) \cdot v_\Lambda = V.$$

Le $\mathfrak{g}$-module V se décompose alors en $V = \bigoplus\limits_{\lambda \leq \Lambda} V_\lambda$, $V_\Lambda = \mathbb{C}v_\Lambda$ et $\dim V_\lambda < \infty$ pour tout poids λ.

Définition 3.1.2 Le **module de Verma**, $M(\Lambda)$, est un $\mathfrak{g}$-module, de plus haut poids Λ, tel que chaque $\mathfrak{g}$-module de plus haut poids Λ soit un quotient de $M(\Lambda)$.

On a (voir [16] paragraphes 9.2. et 9.3.) :

Proposition et définition 3.1.3
• *Pour tout $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$, il existe un unique module de Verma, $M(\Lambda)$, à isomorphisme près.*
• *Le module $M(\Lambda)$ est un $U(\mathfrak{n}^-)$-module de rang 1 engendré par un vecteur de plus haut poids.*
• *Le module $M(\Lambda)$ contient un unique sous-module propre maximal, noté $M'(\Lambda)$.*
*On pose $L(\Lambda) = M(\Lambda)/M'(\Lambda)$, c'est l'**unique module irréductible de plus haut poids** Λ.*

On aimerait pouvoir décomposer les modules de $\mathcal{O}$ en modules irréductibles. Malheureusement, un module V de $\mathcal{O}$ n'admet pas forcément une suite de composition $V \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ telle que V_i/V_{i+1} soit irréductible et $V_i/V_{i+1} \in \mathcal{O}$. En revanche, on a (voir [16] paragraphe 9.6.) :

Lemme 3.1.4 *Soit $V \in \mathcal{O}$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Il existe un ensemble fini de sous-modules $V = V_t \supset V_{t-1} \supset \ldots \supset V_1 \supset V_0 = \{0\}$ et un ensemble $J \subset [\![1, t]\!]$ tels que :*
• *si $j \in J$, alors $V_j/V_{j-1} \simeq L(\lambda_{(j)})$ pour un $\lambda_{(j)} \geq \lambda$*
• *si $j \notin J$, alors $(V_j/V_{j-1})_\mu = 0$ pour tout $\mu \geq \lambda$.*

Soit $V \in \mathcal{O}$, $\mu \in \mathfrak{h}^*$ et soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\mu \geq \lambda$. On se donne une filtration comme ci-dessus. On note $[V : L(\mu)]$ le nombre de fois que μ apparait dans $\{\lambda_{(j)} \mid j \in J\}$. Ceci est indépendant de la filtration, on appelle ce nombre la **multiplicité** de $L(\mu)$ dans V.

3.2 Caractère

Notons **E** l'algèbre sur $\mathbb{C}$ dont les éléments sont les séries $\sum\limits_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} c_\lambda e^\lambda$ où $c_\lambda \in \mathbb{C}$ et $c_\lambda = 0$ pour λ en dehors d'une union finie de $D(\mu)$ et dont les

opérations sont définies de façon usuelle (en utilisant $e^{\lambda}e^{\mu} = e^{\lambda+\mu}$). Pour faciliter la lisibilité nous utiliserons aussi la notation $\exp(\lambda)$ pour e^{λ}.
Pour V, un $\mathfrak{h}$-module diagonalisable de dimension finie, on définit le **caractère** (ou caractère formel) de V par :

$$\mathrm{ch}V = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} (\dim\ V_\lambda)e^{\lambda}.$$

Seul un nombre fini de V_λ diffèrent de $\{0\}$, la somme est donc bien définie et est dans $\mathbf{E}$. On peut définir, plus généralement, le caractère d'un module de $\mathcal{O}$. Pour $V = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda$ un module de $\mathcal{O}$, on définit, de la même façon, le **caractère** de V par :

$$\mathrm{ch}V = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} (\dim\ V_\lambda)e^{\lambda}.$$

Le caractère $\mathrm{ch}V$ appartient à l'algèbre $\mathbf{E}$. On peut calculer, par exemple, le caractère de $M(\Lambda)$. On trouve (voir [16] paragraphe 9.7.) :

$$\mathrm{ch}M(\Lambda) = e^{\Lambda} \prod_{\alpha\in\Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{-\,\mathrm{mult}(\alpha)}. \tag{3.1}$$

En utilisant le lemme 3.1.4, en faisant varier l'élément $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on montre (voir [16] paragraphe 9.7.) :

Proposition 3.2.1 *Soit V un $\mathfrak{g}$-module de $\mathcal{O}$. Alors :*

$$\mathrm{ch}\,V = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} [V : L(\Lambda)]\,\mathrm{ch}\,L(\Lambda).$$

Grâce à l'opérateur de Casimir généralisé et plus particulièrement au corollaire 1.2.7, on trouve (voir [16] paragraphe 9.8.) :

Proposition 3.2.2 *Soit V un $\mathfrak{g}$-module de plus haut poids Λ. Alors*

$$\mathrm{ch}\,V = \sum_{\substack{\lambda\leq\Lambda \\ |\lambda+\rho|^2=|\Lambda+\rho|^2}} c_\lambda\,\mathrm{ch}\,M(\lambda)$$

avec $c_\lambda \in \mathbb{Z}$ et $c_\Lambda = 1$.

On a (voir [16] paragraphe 10.1.) :

Lemme 3.2.3 *Le $\mathfrak{g}$-module $L(\Lambda)$ est intégrable si et seulement si $\Lambda \in P^+$.*

En utilisant la formule de la propostion 3.2.2, la formule (3.1) ainsi que l'invariance par W de la multiplicité des racines pour un module intégrable, on obtient la formule de Kac-Weyl (voir [16] paragraphe 10.4.) :

Théorème 3.2.4 *Soit $\Lambda \in P^+$. Alors*

$$\operatorname{ch} L(\Lambda) = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) \exp(w(\Lambda+\rho)-\rho)}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1-\exp(-\alpha))^{\operatorname{mult}(\alpha)}} \tag{3.2}$$

où $\epsilon(w)$ est la signature de w.

Remarque 3.2.5 Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est de type fini on retrouve la formule de caractère de Weyl.

En appliquant cela à $L(0)$ on trouve la formule du dénominateur :

$$\sum_{w \in W} \epsilon(w) \exp(w(\rho)-\rho) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1-\exp(-\alpha))^{\operatorname{mult}(\alpha)}. \tag{3.3}$$

Remarque 3.2.6 Si $\lambda \in P$ toutes les valeurs propres de $L(\lambda)$ sont incluses dans P et donc $\operatorname{ch} L(\lambda) \in \mathbb{C}[[P]]$.

On appelle **spécialisation** de **type** $t = (t_0, \ldots, t_r)$ (ou $t = (t_0, \ldots, t_{r+1})$ si $\mathfrak{g}$ est affine) l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Sp}_t : & \mathbb{C}[[P]] & \mapsto & \mathbb{C}((X)) \\ & e^{\Lambda_i} & \mapsto & X^{t_i} \\ & e^{\delta} & \mapsto & X^{t_{r+1}} \quad \text{si } \mathfrak{g} \text{ est affine} \end{array}$$

Si les t_i sont tels que les e^{α_i} (et éventuellement e^{δ}) se spécialisent en des X^{m_i} avec tous les m_i strictements positifs l'application est bien définie. Sinon elle n'est plus définie partout et il faut vérifier, à chaque spécialisation, que cela a bien un sens. La spécialisation de type $(0, \ldots, 0)$ nous sera très utile car elle permet d'obtenir la dimension, en effet :

Proposition 3.2.7 *Si V est un $\mathfrak{h}$-module de dimension finie dont les valeurs propres sont dans P, en spécialisant on obtient* $\mathrm{Sp}_{(0,\ldots,0)} \operatorname{ch} V = \dim V$.

Désormais lorsqu'on ne précise pas le type de la spécialisation c'est que l'on fait une spécialisation de type $(0, \ldots, 0)$, ce que l'on notera Sp m.

Dans le cas des algèbres de Kac-Moody de type affine on définit le caractère réel (introduit dans [26]) :

Définition 3.2.8 Un **caractère réel** est l'image d'un caractère de $\mathbb{C}[[P]]$ par l'application de $\mathbb{C}[[P]]$ dans $\mathbb{C}[[P']]$ pour $P' = \sum_{i \in [\![0,r]\!]} \mathbb{Z}\Lambda_i$, laissant stable les e^{Λ_i} et qui à e^{δ} associe 1.

Le caractère réel d'un caractère de $\mathbb{C}[[P]]$ n'est pas toujours défini. Lorsqu'il est défini, nous notons de la même façon le caractère et le caractère réel et nous précisons avec quoi nous travaillons lorsqu'il y a risque de confusion.

3.3 Modules de Demazure

Soit $\lambda \in P^+$, et $w \in W$. Notons $e_{w\lambda}$ un vecteur propre, de $L(\lambda)$, de valeur propre $w\lambda$. Un tel vecteur propre est unique à multiplication par un scalaire près. Le $\mathfrak{b}$-module engendré par $e_{w\lambda}$ est donc indépendant du choix du vecteur propre.

Définition 3.3.1 Pour $\lambda \in P^+$ et $w \in W$, le $\mathfrak{b}$-module engendré par $e_{w\lambda}$, noté $E_w(\lambda)$, est appelé **module de Demazure**.

Tous les vecteurs propres de $E_w(\lambda)$ sont de valeur propre supérieure ou égale à $w\lambda$ et inférieure ou égale à λ, il y en a un nombre fini. On peut définir son caractère $\mathrm{ch}\, E_w$; il est dans $\mathbb{C}[P]$. De plus, le module $E_w(\lambda)$ est de dimension finie.

Définition 3.3.2 Pour $\lambda \in P^+$ et $w \in W$, on note $P_w(\lambda) = \dim E_w(\lambda)$, P_w est appelé **polynôme de Demazure**. Nous justifierons plus loin le nom de polynôme.

3.4 Opérateur de Demazure

Définition 3.4.1 Pour $\alpha \in \Delta_{re}$, on définit l'**opérateur de Demazure** D_α par :

$$\begin{array}{rccc} D_\alpha : & \mathbb{C}[P] & \to & \mathbb{C}[P] \\ & u & \mapsto & \dfrac{u - s_\alpha \cdot u}{1 - e^{-\alpha}}, \end{array}$$

où $s_\alpha \cdot e^\lambda = e^{s_\alpha \cdot \lambda} = e^{s_\alpha(\lambda+\rho)-\rho}$.

Par un calcul facile on voit que :

$$\begin{aligned} D_\alpha e^\lambda &= e^\lambda + \cdots + e^{s_\alpha \lambda} && \text{si } \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \\ &= 0 && \text{si } \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = -1 \\ &= -(e^{\lambda+\alpha} + \cdots + e^{s_\alpha(\lambda)-\alpha}) && \text{si } \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle < -1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

En spécialisant, on trouve :

$$\mathrm{Sp}\, D_\alpha e^\lambda = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle + 1. \tag{3.5}$$

Proposition 3.4.2 *Soit $\alpha \in \Delta_{re}$ et $m \in \mathbb{Z}[P]$. Si m est invariant par s_α (i.e. $s_\alpha(m) = m$), alors, pour $\mu \in P$, $D_\alpha(e^\mu m) = (D_\alpha e^\mu)m$, en particulier $D_\alpha m = m$.*

Proposition et définition 3.4.3 *Soit $w \in W$ et $s_{i_1} \ldots s_{i_k}$ une expression réduite de w. Alors, $D_{\alpha_{i_1}} \cdots D_{\alpha_{i_k}}$ est indépendant de l'expression réduite choisie. On définit $D_w = D_{\alpha_{i_1}} \cdots D_{\alpha_{i_k}}$, l'opérateur D_w est aussi appelé **opérateur de Demazure**.*

Preuve : On trouve dans [8] paragraphe 5.5. une preuve de l'indépendance par rapport à l'expression réduite dans le cas fini. On en déduit le résultat dans le cas affine en remarquant que, pour montrer l'indépendance des opérateurs de Demazure par rapport à l'expression réduite, il suffit de montrer que, pour α et β deux racines simples dont l'ordre, m, de $s_\alpha s_\beta$ dans W est fini, on a $D_\alpha D_\beta \cdots = D_\beta D_\alpha \cdots$ avec m termes de chaque côté. Pour montrer cela on peut se placer dans une sous-algèbre de rang deux et de dimension finie de $\mathfrak{g}$. En effet, pour les algèbre $A_1^{(1)}$ et $A_2^{(2)}$, l'ordre de $s_\alpha s_\beta$ est infini. Pour les autres algèbres affines, on travaille dans une sous-algèbre stricte ce qui est de dimension finie.

□

Proposition 3.4.4 *Soit $w, w' \in W$. On a l'égalité : $D_{w'} D_w = D_{w' * w}$.*

Preuve : Soit $w, w' \in W$, $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ une expression réduite de w et s_i une réflexion simple.
Si $s_i * w = s_i w$, alors $s_i w = s_i s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ est une expression réduite, d'où $D_{s_i} D_w = D_{s_i} D_{s_{i_1}} \cdots D_{s_{i_k}} = D_{s_i s_{i_1} \cdots s_{i_k}} = D_{s_i w} = D_{s_i * w}$ car on travaille uniquement avec des expressions réduites.
Si $s_i * w = w$, alors il existe une expression réduite de w ayant s_i comme réflexion simple à gauche. On peut supposer que $s_{i_1} = s_i$. Alors, $D_{s_i} D_w = D_{s_{i_1}} D_{s_{i_1}} \cdots D_{s_{i_k}} = D_{s_{i_1}} \cdots D_{s_{i_k}} = D_{s_{i_1} \cdots s_{i_k}} = D_w = D_{s_i * w}$ car $D_{s_i} D_{s_i} = D_{s_i}$ (voir [7]). D'où $D_{s_i} D_w = D_{s_i * w}$.
On en déduit le résultat par récurrence sur $\ell(w)$, en utilisant la proposition 1.4.8.

□

Attention : Pour $\alpha \in \Delta_{re}$ une racine non simple, s_α est un élément de W donc D_{s_α} est bien défini mais $D_\alpha \neq D_{s_\alpha}$ en général.

On sait, voir [17] paragraphe 3.4. ou [20] chapitre IX, que :

Théorème 3.4.5 *Pour $w \in W$ et $\lambda \in P^+$, $\operatorname{ch} E_w(\lambda) = D_w e^\lambda$.*

On en déduit que :

Corollaire 3.4.6 *Pour $w \in W$ et $\lambda \in P^+$, $P_w(\lambda) = \operatorname{Sp} D_w e^\lambda$.*

Au vu du corollaire précédent, on étend la définition des polynômes de Demazure à l'ensemble P :

Définition 3.4.7 Pour $w \in W$ et $\lambda \in P$, on pose $P_w(\lambda) = \operatorname{Sp} D_w e^\lambda$.

Deuxième partie

Résultats sur les opérateurs et polynômes de Demazure

Chapitre 4

Polynômes de Demazure

Nous nous penchons, dans ce chapitre, sur les polynômes de Demazure. Nous introduisons les opérateurs $\mathcal{D}_w$, pour w dans W, qui agissent sur les polynômes sur $\mathfrak{h}^*$, invariants par translation de vecteur $c\delta$, pour c dans $\mathbb{C}$. Ces opérateurs sont liés aux polynômes de Demazure et grâce à leur étude nous obtenons des résultats sur ces polynômes. Nous définissons et travaillons, ensuite, sur les polynômes harmoniques. Enfin, suivant le type de l'algèbre de Kac-Moody, nous démontrons différents résultats relatifs à l'harmonicité des polynômes de Demazure.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody de type fini ou affine.

4.1 Opérateur $\mathcal{D}$

Soit $r+1$ le rang de $\mathfrak{g}$. Nous noterons, dans cette partie, les indices des racines simples de 0 à r.
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{h}^*$ à valeur dans $\mathbb{C}$, invariantes par translation de vecteur $c\delta$, pour $c \in \mathbb{C}$. On remarque que c'est l'ensemble des fonctions de la forme $q \circ \rho$ où $\rho : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{C}^{r+1}$ est la projection sur $\bigoplus_{i \in [\![0,r]\!]} \mathbb{C}\Lambda_i$ parallèlement à $\mathbb{C}\delta$ et $q : \mathbb{C}^{r+1} \to \mathbb{C}$ est une fonction polynomiale.

Remarque 4.1.1 Soit P un polynôme de $\mathcal{P}$. Il dépend uniquement des coefficients $\lambda_i = \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle$, nous noterons donc indifférement $P(\lambda)$, $P(\lambda^0, l)$ ou $P(\lambda_0, \ldots, \lambda_r)$.

Proposition et définition 4.1.2 *Pour $\beta \in \Delta_{re}$, on définit l'opérateur $\mathcal{D}_\beta$ par :*

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{D}_\beta : & \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ & f & \mapsto & \mathcal{D}_\beta f, \end{array}$$

où $\mathcal{D}_\beta f$ est la fonction de $\mathcal{P}$ qui coïncide avec la fonction $\lambda \to \sum_{k=0}^{\langle\lambda,\beta^\vee\rangle} f(\lambda-k\beta)$ sur $\{\lambda \in P \mid \langle\lambda,\beta^\vee\rangle > 0\}$.

Preuve : Soit $\beta \in \Delta_{re}$. Vérifions que l'opérateur $\mathcal{D}_\beta$ est bien défini. Soit $f \in \mathcal{P}$, f se décompose en $f = q \circ \rho$ avec $\rho : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{C}^{r+1}$ la projection sur $\bigoplus_{i\in[\![0,r]\!]} \mathbb{C}\Lambda_i$ parallèlement à $\mathbb{C}\delta$ et $q : \mathbb{C}^{r+1} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale.
Alors, d'après la définition, $\mathcal{D}_\beta q \circ \rho = \tilde{q} \circ \rho$ avec $\tilde{q}$ le polynôme qui coïncide, sur $\{(\lambda_0, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^{r+1} \mid \sum_{i=0}^r \lambda_i b_i > 0\}$, avec le polynôme

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_r) \to \sum_{k=0}^{\sum_{i\in[\![0,r]\!]} \lambda_i b_i} q(\lambda_0 - k\beta_0, \dots, \lambda_r - k\beta_r),$$

où les b_i sont définis par $\beta^\vee = \sum_{i\in[\![0,r]\!]} b_i\alpha_i^\vee$. Ceci définit bien un polynôme. En effet, $q(\lambda_0 - k\beta_0, \dots, \lambda_r - k\beta_r)$ se décompose en $\sum_{n\in\mathbb{N}} q_n(\lambda_0, \dots, \lambda_r)k^n$ où les q_n sont des polynômes en les λ_i et seul un nombre fini d'entre eux est non nul.
Pour m et n des entiers positifs la somme $\sum_{k=0}^{m} k^n$ s'exprime comme un polynôme en m de degré $n+1$. Comme $\sum_{i\in[\![0,r]\!]} \lambda_i b_i$ est un entier positif et est linéaire en les λ_i on en déduit que la somme $\sum_{k=0}^{\sum_{i\in[\![0,r]\!]} \lambda_i b_i} k^n$ est une fonction polynomiale en les λ_i de degré $n+1$. La fonction $\tilde{q}$ est donc bien un polynôme en les λ_i de degré $\deg q + 1$. L'opérateur $\mathcal{D}_\beta$ est donc bien défini. □

Comme on le voit dans la démonstration ci-dessus, on a :

Remarque 4.1.3 Soit $\beta \in \Delta_{re}$. Si f est un polynôme de $\mathcal{P}$ de degré n, alors $\mathcal{D}_\beta f$ est un polynôme de $\mathcal{P}$ de degré $n+1$.

Lemme 4.1.4 *On définit l'opérateur $\tilde{\mathcal{D}}$ par :*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\mathcal{D}} : & \mathbb{Z}[X] & \to & \mathbb{Z}[X] \\ & Q & \mapsto & \tilde{\mathcal{D}}Q, \end{array}$$

où $\tilde{\mathcal{D}}Q$ est le polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ qui coïncide, sur $\mathbb{N}$, avec le polynôme $X \to \sum_{k=0}^{X} Q(X-2k)$. Alors, $\tilde{\mathcal{D}}Q(X) = -\tilde{\mathcal{D}}Q(-X-2)$.

Preuve : Il suffit de démontrer le lemme pour les monômes. Posons donc $Q_p(X) = X^p$ pour $p \in \mathbb{N}$.

On a la formule de récurrence :

$$\tilde{\mathcal{D}}Q_p(X) = \frac{1}{2(p+1)}\left[(X+2)^{p+1} - (-X)^{p+1} - \sum_{j=0}^{p-1} C_{p+1}^j 2^{p+1-j}\tilde{\mathcal{D}}Q_j(X)\right].$$

En effet, soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{D}}Q_{p+1}(n+2) &= \sum_{k=0}^{n+2}(n+2-2k)^{p+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(n+2-2k)^{p+1} + (-n-2)^{p+1} + (-n)^{p+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p+1} C_{p+1}^j 2^{p+1-j}(n-2k)^j + (-n-2)^{p+1} + (-n)^{p+1} \\
&= \sum_{j=0}^{p+1} C_{p+1}^j 2^{p+1-j}\tilde{\mathcal{D}}Q_j(n) + (-n-2)^{p+1} + (-n)^{p+1}.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
2(p+1)\tilde{\mathcal{D}}Q_p(n) &= \tilde{\mathcal{D}}Q_{p+1}(n+2) - \tilde{\mathcal{D}}Q_{p+1}(n) - (-n-2)^{p+1} - (-n)^{p+1} \\
&\qquad - \sum_{j=0}^{p-1} C_{p+1}^j 2^{p+1-j}\tilde{\mathcal{D}}Q_j(n),
\end{aligned}$$

d'où :

$$\tilde{\mathcal{D}}Q_p(n) = \frac{1}{2(p+1)}\left[(n+2)^{p+1} - (-n)^{p+1} - \sum_{j=0}^{p-1} C_{p+1}^j 2^{p+1-j}\tilde{\mathcal{D}}Q_j(n)\right].$$

On en déduit la formule de récurrence pour les polynômes.

On a $\tilde{\mathcal{D}}Q_0(X) = 0 = -\tilde{\mathcal{D}}Q_0(-X-2)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons que le lemme soit vérifié pour Q_j avec $j \le p-1$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{D}}Q_p(-X-2) = {} & \tfrac{1}{2(p+1)}\Bigg[(-X)^{p+1} - (X+2)^{p+1} \\
& \qquad - \sum_{j=0}^{p-1} C_{p+1}^j 2^{p+1-j}\tilde{\mathcal{D}}Q_j(-X-2)\Bigg] \\
= {} & \tfrac{1}{2(p+1)}\left[(-X)^{p+1} - (X+2)^{p+1} + \sum_{j=0}^{p-1} C_{p+1}^j 2^{p+1-j}\tilde{\mathcal{D}}Q_j(X)\right] \\
= {} & -\tilde{\mathcal{D}}Q_p(X).
\end{aligned}$$

On en déduit par récurrence que le lemme est vérifié.

□

Proposition 4.1.5 *Soit $w \in W$, P_w se prolonge de façon unique en un élément de $\mathcal{P}$ que nous noterons encore P_w. Pour s_i une réflexion simple, $\mathcal{D}_{\alpha_i} P_w = P_{w * s_i}$.*

Preuve :
• Montrons, tout d'abord, que, pour tout $w \in W$, P_w se prolonge de façon unique en un élément de $\mathcal{P}$ que nous noterons encore P_w.

On a $P_1(\lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in P$. Or P est Zariski-dense dans $\mathfrak{h}^*$ donc P_1 se prolonge de façon unique sur $\mathfrak{h}^*$ en $P_1 = 1$ élément de $\mathcal{P}$. Le polynôme de Demazure est donc dans $\mathcal{P}$ pour l'élément de longueur 0.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons le résultat vrai pour les éléments de longueur inférieure ou égale à k. Soit $w' \in W$ de longueur $k+1$, w' s'écrit ws_i avec $w \in W$ de longueur k et s_i une réflexion simple. Montrons que, pour tout $\lambda \in P$, $\mathcal{D}_{\alpha_i} P_w(\lambda) = P_{w'}(\lambda)$.
Soit $\lambda \in P$. Si $\lambda_i \geq 0$, alors on a :

$$\begin{aligned} P_{w'}(\lambda) &= \operatorname{Sp} D_w D_{s_i} e^{\lambda} = \operatorname{Sp}(D_w e^{\lambda} + \ldots + D_w e^{s_i \lambda}) \\ &= P_w(\lambda) + \ldots + P_w(s_i \lambda) = \mathcal{D}_{\alpha_i} P_w(\lambda). \end{aligned}$$

Si $\lambda_i \leq -1$, on a alors :

$$\begin{aligned} P_{w'}(\lambda) &= \operatorname{Sp} D_w D_{s_i} e^{\lambda} = -\operatorname{Sp} D_w D_{s_i} e^{s_i \lambda - \alpha_i} \\ &= -(P_w(s_i \lambda - \alpha_i) + \cdots + P_w(\lambda + \alpha_i)). \end{aligned}$$

Or $-(P_w(s_i \lambda - \alpha_i) + \cdots + P_w(\lambda + \alpha_i)) = \mathcal{D}_{\alpha_i} P_w(\lambda)$. En effet, pour λ fixé, introduisons le polynôme $Q(k) = P_w(\lambda + \frac{k - \lambda_i}{2} \alpha_i)$. Pour $\mu \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\mu_i > 0$ on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha_i} P_w(\mu) &= \sum_{k=0}^{\mu_i} P_w(\mu - k\alpha_i) \\ &= \sum_{k=0}^{\mu_i} Q(\mu_i - 2k) \\ &= \tilde{\mathcal{D}} Q(\mu_i). \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $\mu \in P$, $\mathcal{D}_{\alpha_i} P_w(\mu) = \tilde{\mathcal{D}} Q(\mu_i)$. Donc, par le lemme précédent, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha_i} P_w(\lambda) &= \tilde{\mathcal{D}} Q(\lambda_i) \\ &= -\tilde{\mathcal{D}} Q(-\lambda_i - 2) \\ &= -\mathcal{D}_{\alpha_i} P_w(s_i \lambda - \alpha_i) \\ &= -(P_w(s_i \lambda - \alpha_i) + \cdots + P_w(\lambda + \alpha_i)) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{D}_{\alpha_i} P_w(\lambda) = P_{w'}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in P$.
On en déduit que l'application $\lambda \to P_{w'}(\lambda)$ est une application polynomiale sur P à valeur dans $\mathbb{C}$, invariante par translation de vecteur $c\delta$, pour $c \in \mathbb{C}$. Comme P est Zariski-dense dans $\mathfrak{h}^*$, $P_{w'}$ se prolonge de façon unique sur $\mathfrak{h}^*$

en un élément de $\mathcal{P}$ que l'on note encore $P_{w'}$.
Par récurrence, on en déduit le résultat pour tous les élements de W.

• Soit $w \in W$ et s_i une réflexion simple, soit $\lambda \in P^+$. Si $w * s_i = ws_i$, alors on a $\mathcal{D}_{\alpha_i} P_w(\lambda) = P_{ws_i}(\lambda)$ par le point précédent.
Si $w * s_i = w$, alors w s'écrit de façon réduite $w = us_i$,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{s_i} P_w(\lambda) &= P_w(\lambda) + \ldots + P_w(s_i\lambda) \\ &= \mathrm{Sp}(D_u D_{s_i} e^{\lambda} + \ldots + D_u D_{s_i} e^{s_i\lambda}). \end{aligned}$$

Pour $\mu \in P^+$, on voit que $D_{s_i} e^{\mu-\alpha_i} = -D_{s_i} e^{s_i\mu}$. En utilisant cela pour $\mu = \lambda - k\alpha_i$ avec $k \in [\![0, E(\langle\lambda, \alpha^\vee\rangle/2)]\!]$, où $E(x)$ est la partie entière de x, on obtient $D_{s_i} e^{\lambda-\alpha_i} + \ldots + D_{s_i} e^{s_i\lambda} = 0$ d'où $\mathcal{D}_{s_i} P_w(\lambda) = \mathrm{Sp}\, D_u D_{s_i} e^{\lambda} = P_w(\lambda)$. Donc $\mathcal{D}_{\alpha_i} P_w(\lambda) = P_{w*s_i}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in P^+$. On en déduit que $\mathcal{D}_{\alpha_i} P_w = P_{w*s_i}$ pour les polynômes prolongés.

$\square$

Corollaire 4.1.6 *Pour $w \in W$ et $\lambda \in P$, $P_w(\lambda)$ est égal à la spécialisation du caractère réel $D_w e^{\lambda}$.*

Proposition 4.1.7 *Soit $w \in W$, et $s_{i_1} \ldots s_{i_k}$ une expression réduite de w. Alors, pour tout $P \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in P$,*

$$\mathcal{D}_{\alpha_{i_k}} \ldots \mathcal{D}_{\alpha_{i_1}} P(\lambda) = \sum_{\mu \in P} m_\mu(\lambda) P(\mu),$$

où les $m_\mu(\lambda) \in \mathbb{Z}$ sont définis par $D_{w^{-1}} e^{\lambda} = \sum_{\mu \in P} m_\mu(\lambda) e^{\mu}$.

Preuve : Montrons le résultat par récurrence sur la longueur de w. Pour $w = 1$, le résultat est évident. Pour $w = s_i$ une réflexion simple, on voit que les polynômes coïncident pour $\lambda \in P^+$ on en déduit l'égalité.
Soit $k \geq 2$, supposons le résultat vrai pour les éléments de longueur strictement inférieure à k. Soit $w \in W$ de longueur k et $s_{i_1} \ldots s_{i_k}$ une expression réduite de w. Posons $u = s_{i_1} \ldots s_{i_{k-1}}$, alors $\ell(u) = k - 1$. Soit $P \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in P$. Par hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{D}_{\alpha_{i_{k-1}}} \ldots \mathcal{D}_{\alpha_{i_1}} P(\lambda) = \sum_{\mu \in P} m_\mu(\lambda) P(\mu),$$

où les $m_\mu(\lambda)$ sont tels que $D_{u^{-1}} e^{\lambda} = \sum_{\mu \in P} m_\mu(\lambda) e^{\mu}$ et

$$\mathcal{D}_{\alpha_{i_k}} P(\mu) = \sum_{\nu \in P} c_\nu(\mu) P(\nu),$$

où les $c_\nu(\mu)$ sont tels que $D_{s_{i_k}} e^\mu = \sum_{\nu \in P} c_\nu(\mu) e^\nu$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\alpha_{i_k}} \dots \mathcal{D}_{\alpha_{i_1}} P(\lambda) &= \mathcal{D}_{\alpha_{i_k}} \sum_{\mu \in P} m_\mu(\lambda) P(\mu) \\
&= \sum_{\mu \in P} m_\mu(\lambda) \mathcal{D}_{\alpha_{i_k}} P(\mu) \\
&= \sum_{\mu \in P} m_\mu(\lambda) \sum_{\nu \in P} c_\nu(\mu) P(\nu),
\end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned}
D_{w^{-1}} e^\lambda &= D_{s_{i_k}} D_{u^{-1}} e^\lambda \\
&= D_{s_{i_k}} \sum_{\mu \in P} m_\mu(\lambda) e^\mu \\
&= \sum_{\mu \in P} m_\mu(\lambda) D_{s_{i_k}} e^\mu \\
&= \sum_{\mu \in P} m_\mu(\lambda) \sum_{\nu \in P} c_\nu(\mu) e^\nu.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathcal{D}_{\alpha_{i_k}} \dots \mathcal{D}_{\alpha_{i_1}} P(\lambda) = \sum_{\nu \in P} r_\nu(\lambda) P(\nu),$$

où les $r_\nu(\lambda)$ sont tels que $D_{w^{-1}} e^\lambda = \sum_{\nu \in P} r_\nu(\lambda) e^\nu$.

□

Proposition et définition 4.1.8 *Soit $w \in W$, et $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ une expression réduite de w. L'opérateur $\mathcal{D}_{\alpha_{i_k}} \cdots \mathcal{D}_{\alpha_{i_1}}$ est indépendant de l'expression réduite choisie. On définit $\mathcal{D}_w = \mathcal{D}_{\alpha_{i_k}} \cdots \mathcal{D}_{\alpha_{i_1}}$ (attention à l'ordre).*

Preuve : Soit $w \in W$, et $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ une expression réduite de w. L'opérateur $D_{w^{-1}}$ étant indépendant de l'expression réduite choisie, grâce à la proposition précédente, on en déduit l'indépendance par rapport à l'expression réduite de $\mathcal{D}_{\alpha_{i_k}} \dots \mathcal{D}_{\alpha_{i_1}}$.

□

Attention : Comme pour les opérateurs de Demazure pour $\alpha \in \Delta_{re}$ non simple on a $\mathcal{D}_\alpha \neq \mathcal{D}_{s_\alpha}$ en général.

Proposition 4.1.9 *Soit α_i une racine simple. Alors, $\mathcal{D}_{\alpha_i} \mathcal{D}_{\alpha_i} = \mathcal{D}_{\alpha_i}$.*

Preuve : Soit $P \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in P$. Alors $\mathcal{D}_{\alpha_i} P(\lambda) = \sum_{\mu \in P} m_\mu(\lambda) P(\mu)$, où les $m_\mu(\lambda)$ sont tels que $D_{\alpha_i} e^\lambda = \sum_{\mu \in P} m_\mu(\lambda) e^\mu$ par la proposition 4.1.7. Donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\alpha_i} \mathcal{D}_{\alpha_i} P(\lambda) &= \mathcal{D}_{\alpha_i} \sum_{\mu \in P} m_\mu(\lambda) P(\mu) \\
&= \sum_{\mu \in P} m_\mu(\lambda) \mathcal{D}_{\alpha_i} P(\mu) \\
&= \sum_{\mu \in P} m_\mu(\lambda) \sum_{\nu \in P} m_\nu(\mu) P(\nu) \\
&= \sum_{\nu \in P} \left(\sum_{\mu \in P} m_\mu(\lambda) m_\nu(\mu) \right) P(\nu).
\end{aligned}$$

Or $D_{\alpha_i} D_{\alpha_i} e^{\lambda} = D_{\alpha_i} e^{\lambda} = \sum\limits_{\nu \in P} m_{\nu}(\lambda) e^{\nu}$ et

$$\begin{array}{rcl} D_{\alpha_i} D_{\alpha_i} e^{\lambda} & = & D_{\alpha_i} \sum\limits_{\mu \in P} m_{\mu}(\lambda) e^{\mu} \\ & = & \sum\limits_{\mu \in P} m_{\mu}(\lambda) D_{\alpha_i} e^{\mu} \\ & = & \sum\limits_{\mu \in P} m_{\mu}(\lambda) \sum\limits_{\nu \in P} m_{\nu}(\mu) e^{\nu} \\ & = & \sum\limits_{\nu \in P} \left(\sum\limits_{\mu \in P} m_{\mu}(\lambda) m_{\nu}(\mu) \right) e^{\nu}. \end{array}$$

Donc $m_{\nu}(\lambda) = \sum\limits_{\mu \in P} m_{\mu}(\lambda) m_{\nu}(\mu)$. On en déduit que :

$$\mathcal{D}_{\alpha_i} \mathcal{D}_{\alpha_i} P(\lambda) = \mathcal{D}_{\alpha_i} P(\lambda).$$

Ceci étant vrai pour tout $P \in \mathcal{P}$ et tout $\lambda \in P$, on en conclut que

$$\mathcal{D}_{\alpha_i} \mathcal{D}_{\alpha_i} = \mathcal{D}_{\alpha_i}.$$

□

Notons H_0 l'algèbre de Hecke à $q = 0$ de W (voir page 20).

Corollaire 4.1.10 *L'application*

$$\begin{array}{rcl} H_0 & \rightarrow & End\ \mathcal{P} \\ T_w & \mapsto & (-1)^{\ell(w)} \mathcal{D}_w \end{array}$$

est bien définie. C'est une représentation de l'algèbre de Hecke de W à $q = 0$.

Preuve : L'algèbre de Hecke H_0, peut aussi se définir par générateurs et relations avec pour générateurs les T_s, pour s réflexion simple et pour relations, $T_s^2 = T_s$ pour s réflexion simple, ainsi que $T_{s_1} T_{s_2} \cdots = T_{s_2} T_{s_1} \cdots$ avec m termes de chaque côté, pour s_1 et s_2 deux réflexions simples distincts et m l'ordre de $s_1 s_2$ dans W s'il est fini (voir [10]).
Par la proposition 4.1.9, pour s une réflexion simple de W, on a $(-1)\mathcal{D}_s(-1)\mathcal{D}_s = -(-1)\mathcal{D}_s$. De plus, on déduit de la proposition 4.1.7 que pour s_1 et s_2 deux réflexions simples de W dont l'ordre m de $s_1 s_2$ dans W est fini, $(-1)\mathcal{D}_{s_1}(-1)\mathcal{D}_{s_2} \cdots = (-1)\mathcal{D}_{s_2}(-1)\mathcal{D}_{s_1} \cdots$ (avec m termes de chaque côté). C'est donc bien une représentation de l'algèbre de Hecke de W à $q = 0$.

□

On montre facilement en utilisant la proposition 4.1.5 et la remarque 4.1.3 que :

Proposition 4.1.11 *Pour $w \in W$, $P_w = \mathcal{D}_w 1$ et $\deg P_w = \ell(w)$.*

4.2 Polynômes harmoniques

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension k et soit $v_1, \cdots, v_k$ une base de V. Notons $x_1, \cdots, x_k$ sa base duale. L'ensemble SV^* est l'algèbre des fonctions polynômes sur V, il s'écrit $SV^* = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k]$.

Soit $v \in V$. Notons ∂_v l'opérateur, de SV^* dans SV^*, qui à $h \in SV^*$ associe

$$\partial_v h(x) = \lim_{t \to 0} \frac{h(x+tv) - h(x)}{t}.$$

Introduisons l'application canonique φ, de V dans l'ensemble des opérateurs à coefficients constants, $\mathbb{C}\Big[\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_k}\Big]$, et qui à v associe ∂_v. On peut vérifier que, pour u et v dans V, $\partial_u \partial_v = \partial_v \partial_u$. L'application se prolonge donc en une application de SV dans $\mathbb{C}\Big[\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_k}\Big]$. Comme $\dfrac{\partial}{\partial x_i} = \partial_{v_i}$, l'application est surjective. Pour des raisons de dimension (des sous-espaces gradués associés) on en déduit que φ est bijective. D'où $SV = \mathbb{C}\Big[\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_k}\Big]$.

Définition 4.2.1 Soit G un groupe agissant sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V. Un polynôme sur V est dit **harmonique** (par rapport à G) s'il est annulé par $(S^+V)^G$, l'ensemble des opérateurs différentiels, à coefficients constants, sans terme constant et invariant par le groupe G. Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le groupe et sa représentation on note $\mathcal{H}$ l'ensemble des polynômes harmoniques.

Remarque 4.2.2 L'action de G étant linéaire $(S^+V)^G = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}^*} \big(S^iV\big)^G$ où $\big(S^iV\big)^G$ est l'ensemble des polynômes homogènes de degré i invariants par G. Donc $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel gradué : $\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_i$, où $\mathcal{H}_i$ est l'ensemble des polynômes harmoniques homogènes de degré i.

Remarque 4.2.3 Lorsqu'on considère l'action du groupe symétrique S_n sur $\mathbb{C}^n$, les polynômes harmoniques sont les polynômes h tels que $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^k h}{\partial x_i^k} = 0$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Proposition 4.2.4 *Soit G un groupe fini agissant sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie. Soit f une fonction polynôme sur V. On a les équivalences suivantes :*
1) $\forall (x,y) \in V^2,\ |G| f(x) = \sum_{g \in G} f(x+gy)$
2) $\forall \Delta \in (S^+V)^G,\ \Delta f = 0$ *(i.e. f est harmonique).*

Preuve :
• Soit $n \in \mathbb{N}$, S^nV est un $GL(V)$ module irréductible (voir [9] paragraphe 6.1.). Puisque $\{\partial_v^{(n)} \mid v \in V\}$ (où $\partial_v^{(n)} = \frac{\partial_v^n}{n!}$) est une orbite dans S^nV, pour l'action de $GL(V)$, elle engendre S^nV.
Considérons l'application :

$$\begin{array}{ccc} S^nV & \to & \left(S^nV\right)^G \\ d & \mapsto & \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} gd. \end{array}$$

Pour $d \in \left(S^nV\right)^G$, $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} gd = d$, l'application est donc surjective. Comme S^nV est engendré par les $\partial_v^{(n)}$, pour $v \in V$, on en déduit que $(S^+V)^G$ est engendré par les opérateurs $\sum\limits_{g\in G}\partial_{gv}^{(n)}$, pour $v \in V$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in SV^*$ vérifiant 1). On a par la formule de Taylor :

$$\forall x \in V,\ f(x+v) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_v^{(n)} f(x).$$

Soit $x, y \in V$ et $t \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \sum_{g\in G} f(x+gty) &= \sum_{g\in G}\sum_{n\in\mathbb{N}} t^n \partial_{gy}^{(n)} f(x) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} t^n (\sum_{g\in G}\partial_{gy}^{(n)}) f(x) \\ &= |G| f(x). \end{aligned}$$

Donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} t^n (\sum\limits_{g\in G}\partial_{gy}^{(n)}) f = 0$. C'est un polynôme en t égal au polynôme nul, chacun de ses coefficients est donc nul. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{g\in G}\partial_{gy}^{(n)} f$ $= 0$. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in V$, la famille $\sum\limits_{g\in G}\partial_{gy}^{(n)}$ est une famille génératrice de $(S^+V)^G$ donc :

$$\forall \Delta \in (S^+V)^G,\ \Delta f = 0.$$

• Soit f un polynôme vérifiant 2). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{g\in G}\partial_{gy}^{(n)} \in (S^+V)^G$ donc $\sum\limits_{g\in G}\partial_{gy}^{(n)} f = 0$.

Donc, pour tout $x, y \in V$:

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in G} f(x+gy) &= \sum_{g\in G}\sum_{n\in\mathbb{N}} \partial_{gy}^{(n)} f(x) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{g\in G} \partial_{gy}^{(n)}) f(x) \\
&= \sum_{g\in G} \partial_{gy}^{(0)} f(x) \\
&= |G| f(x).
\end{aligned}$$

□

Introduisons le crochet de dualité suivant :

$$\begin{array}{ccc}
SV \times SV^* & \to & \mathbb{C} \\
(\Delta, P) & \mapsto & \langle \Delta, P\rangle,
\end{array}$$

où $\langle \Delta, P\rangle = \Delta P(0) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \Delta_i P_i$ pour $\Delta = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \Delta_i$ où les Δ_i sont les composantes homogènes de degré i de Δ et $P = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} P_i$ où les P_i sont les composantes homogènes de degré i de P. Seul un nombre fini de Δ_i et de P_i sont non nuls, la somme est donc bien définie. On peut vérifier que le crochet est non dégénéré.

Proposition 4.2.5 *Soit G un groupe fini agissant sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie. L'ensemble $\mathcal{H}$ des polynômes harmoniques est la cogèbre duale de l'algèbre $SV/ < (S^+V)^G >$. De plus* $\dim \mathcal{H} \geq |G|$.

Preuve :
• On a :

$$\mathcal{H} = \{f \in SV^* \mid \forall \Delta \in (S^+V)^G,\ \Delta f = 0\}.$$

Notons I l'idéal engendré par $(S^+V)^G$. Soit $\Delta \in (S^+V)^G$ et $f \in SV^*$. Comme le crochet est non dégénéré, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta f = 0 &\Leftrightarrow \langle SV, \Delta f\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle SV\Delta, f\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{H}$ si et seulement si $\langle I, f\rangle = 0$. On en déduit que :

$$\mathcal{H} = \{f \in SV^* \mid \langle I, f\rangle = 0\}.$$

On sait que SV est un module de type fini sur $(SV)^G$ (voir [33] paragraphe 2.1.) et que $I \cap (SV)^G = (S^+V)^G$. On en déduit que SV/I est de type fini sur $(SV)^G/(S^+V)^G \simeq \mathbb{C}$, donc SV/I est de dimension finie.

Comme SV/I est une algèbre de dimension finie, on peut définir une structure de cogèbre appelée cogèbre duale sur $(SV/I)^*$ (voir [1] paragraphe 2.1.).

On a l'isomorphisme :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{H} & \to & (SV/I)^* \\ & f & \mapsto & \hat{f} : d \to \langle d, f \rangle. \end{array}$$

Sur SV^* on a la structure naturelle de cogèbre avec comme coproduit :

$$\begin{array}{rccl} \delta : & SV^* & \to & SV^* \bigotimes SV^* \\ & f & \mapsto & \sum_{i\in J} h_i \otimes g_i, \end{array}$$

où J est un ensemble minimal tel qu'il existe h_i et g_i dans SV^* tels que $f(x+y) = \sum_{i\in J} h_i(x)g_i(y)$ pour $x, y \in V$. Et comme counité :

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon : & SV^* & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & f(0). \end{array}$$

Soit $f \in \mathcal{H}$ et $\Delta \in (S^+V)^G$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \delta\Delta f & = & \Delta \otimes 1 \delta f \\ \\ & = & \Delta \otimes 1 \sum_{i\in J} h_i \otimes g_i \\ \\ & = & \sum_{i\in J} \Delta h_i \otimes g_i \end{array}$$

Or $\Delta f = 0$ donc $\Delta \otimes 1 \sum_{i\in J} h_i \otimes g_i = 0$. D'où $\sum_{i\in J} h_i \otimes g_i \in \ker(\Delta \otimes 1) = \ker \Delta \otimes SV^*$ (voir [4] paragraphe II.3.6.) et ceci pour tout $\Delta \in (S^+V)^G$ donc $\sum_{i\in J} h_i \otimes g_i \in \mathcal{H} \otimes SV^*$. En appliquant $1 \otimes \Delta$ à $\sum_{i\in J} h_i \otimes g_i \in \mathcal{H} \otimes SV^*$ on montre que $\sum_{i\in J} h_i \otimes g_i \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Donc $\delta f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. On en déduit que $\mathcal{H}$ est une sous-cogèbre de SV^*. C'est la sous-cogèbre duale de l'algèbre SV/I.

• Soit M un sous-espace supplémentaire homogène de I dans SV, alors $SV = M \oplus I$. Montrons que $SV = (SV^G)M$. Pour cela nous allons démontrer par récurrence sur n que S^nV est la composante de degré n de $(SV)^GM$. Notons $I = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$ les décompositions en sous-espaces homogènes de I et M. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $S^nV = I_n \oplus M_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que pour tout k strictement inférieur à n, $S^kV \subset (SV^G)M$. Soit $p \in S^nV$, p s'écrit $p = m + i$ avec $m \in M_n$ et $i \in I_n$, or $I_n = \sum_{a=1}^{n} (S^aV)^G S^{n-a}V$ donc $i = \sum_{a=1}^{n} j_a k_a$ avec $j_a \in (S^aV)^G$ et $k_a \in S^{n-a}V$. Or $n - a < n$ donc par hypothèse de récurrence $S^{n-a}V \subset (SV^G)M$. Donc p est dans $(SV)^GM$. D'où, par récurrence, $SV = (SV)^GM$.

Notons K le corps de fraction de SV. Par la théorie de Galois $\dim_{K^G} K = |G|$. Comme $K = K^GM$, on a donc $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = \dim_{\mathbb{C}} M \geq \dim_{K^G} K = |G|$.

$\square$

Corollaire 4.2.6 *Soit G un groupe fini engendré par des réflexions, agissant sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie. Alors, l'ensemble $\mathcal{H}$ des polynômes harmoniques est un espace vectoriel de dimension $|G|$.*

Preuve : En utilisant la proposition précédente et le fait que SV est un module libre sur SV^G de rang $|G|$ (voir [28] paragraphe 4.2.5.), on en conclut que $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel de dimension $|G|$.

□

4.3 Propriétés des polynômes de Demazure

4.3.1 Type fini

Prenons ici $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody de type fini. Notons $\mathcal{H}$ les polynômes de $\mathcal{P}$ harmoniques pour le groupe W.

Proposition 4.3.1 *Pour $w \in W$, les polynômes P_w sont des éléments de $\mathcal{H}$.*

Preuve : Soit $w \in W$. Pour montrer que P_w est harmonique par rapport à W on sait, par la proposition 4.2.4, qu'il suffit de montrer que :

$$|W|P_w(\lambda) = \sum_{v\in W} P_w(\lambda + v\mu) \qquad \text{pour} \ \ \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*.$$

Comme P_w est un polynôme, il suffit de montrer cela pour $\lambda, \mu \in P$. Prenons donc $\lambda, \mu \in P$. On a :

$$\sum_{v\in W} D_w e^{\lambda+v\mu} = D_w(e^{\lambda} \sum_{v\in W} e^{v\mu})$$

car D_w est linéaire. Or $\sum_{v\in W} e^{v\mu}$ est invariant par W, donc :

$$\sum_{v\in W} D_w e^{\lambda+v\mu} = (\sum_{v\in W} e^{v\mu}) D_w(e^{\lambda}).$$

En spécialisant, on trouve :

$$\sum_{v\in W} P_w(\lambda + v\mu) = (\sum_{v\in W} 1) P_w(\lambda) = |W|P_w(\lambda),$$

d'où le résultat.

□

Proposition 4.3.2 *Les polynômes P_w, pour $w \in W$, forment une base de $\mathcal{H}$.*

Preuve : Supposons que les P_w ne soient pas linéairement indépendants. Soit $\sum_{w\in W} a_w P_w = 0$ une relation non triviale. Posons $S = \{w \in W \mid a_w \neq 0\}$ et $\ell(S) = \max\{\ell(w) \mid w \in S\}$. Parmi toutes les relations non triviales choisissons en une telle que $\ell(S)$ soit maximale et prenons $w_1 \in S$ un élément de longueur maximale dans S.
Si $w_1 \neq w_0$, il existe une réflexion simple s_i telle que $\ell(w_1 s_i) > \ell(w_1)$. On a :

$$0 = \mathcal{D}_{\alpha_i} \sum_{w\in S} a_w P_w = \sum_{w\in S} a_w P_{w*s_i}.$$

Par définition de S la relation $\sum_{w\in S} a_w P_{w*s_i} = 0$ est triviale, or le coefficient de $P_{w_1 * s_i}$ est $a_{w_1} \neq 0$, c'est absurde.
Si $w_1 = w_0$, le degré de P_{w_0} est strictement plus grand que le degré de P_w pour $w \neq w_0$. Son terme dominant ne peut donc s'annuler avec aucun autre terme. C'est absurde.
Les P_w, pour $w \in W$, sont donc linéairement indépendants. Par le corollaire 4.2.6 on sait que $\mathcal{H}$ est de dimension $|W|$. On en déduit qu'ils forment une base de $\mathcal{H}$.

□

4.3.2 Type affine

Prenons ici $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody de type affine. Nous reprenons les notations de la partie 2.1. Le groupe $\mathrm{W}^0 \subset W$ agit sur $\mathfrak{h}^{0*} \bigoplus (\mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\Lambda_0)$ en agissant de façon usuelle sur $\mathfrak{h}^{0*}$ et de façon triviale sur $\mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\Lambda_0$. Notons $\mathcal{H}$ les polynômes de $\mathcal{P}^0$ harmoniques par rapport à W^0.

Proposition 4.3.3 *Pour $w \in W$, les polynômes P_w sont W^0-harmoniques. Soit $l \in \mathbb{C}$. Les polynômes $P_{w|\mathfrak{h}^{*l}}$, pour $w \in W$, sont des éléments de $\mathcal{H}[l] = \{\sum_{k\in\mathbb{N}} l^k R_k(\lambda^0) \mid R_k \in \mathcal{H}\}$.*

Preuve : Soit $w \in W$. Pour montrer que P_w est W^0-harmonique, on sait par la proposition 4.2.4, qu'il suffit de montrer que :

$$|\,\mathrm{W}^0\,| P_w(\lambda) = \sum_{v\in W^0} P_w(\lambda + v\mu) \qquad \text{pour} \;\; \lambda \in \mathfrak{h}^* \text{ et } \mu \in \mathfrak{h}^{0*}.$$

Comme P_w est un polynôme, il suffit de montrer cela pour $\lambda \in P$ et $\mu \in P^0$. Prenons donc $\lambda \in P$ et $\mu \in P^0$. On a :

$$\sum_{v\in W^0} D_w e^{\lambda + v\mu} = D_w(e^{\lambda} \sum_{v\in W^0} e^{v\mu})$$

car D_w est linéaire. Or $\sum_{v\in W^0} e^{v\mu}$ est invariant par W^0, de plus, en exposant il n'y a que des poids de niveau 0, en considérant les caractères réels c'est donc stable par W, d'où :

$$\sum_{v\in W^0} D_w e^{\lambda+v\mu} = (\sum_{v\in W^0} e^{v\mu}) D_w(e^\lambda).$$

En spécialisant, on en déduit que P_w est W^0-harmonique.
Soit $l \in \mathbb{C}$. Si $\lambda \in \mathfrak{h}^{*l}$, on peut l'écrire :

$$P_w(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{N}} l^k R_k(\lambda^0),$$

où seul un nombre fini de k intervient et où les R_k sont dans $\mathcal{H}$.

□

Corollaire 4.3.4 *Soit $w \in W$. Soit $l \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^{*l}$. Le polynôme P_w s'écrit, de façon unique, sous la forme :*

$$P_w(\lambda) = \sum_{v\in W^0} Q_v(l) P_v^0(\lambda^0),$$

où les Q_v sont des polynômes.

Preuve : Reprenons les notations de la démonstration ci-dessus. Les polynômes P_v^0, pour $v \in \mathrm{W}^0$, forment une base de $\mathcal{H}$, donc pour $k \in \mathbb{N}$, le polynôme R_k s'écrit $R_k = \sum_{v\in W^0} a_{k,v} P_v^0$, avec $a_{k,v} \in \mathbb{C}$.
D'où, en posant $Q_v(l) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{k,v} l^k$, on obtient :

$$P_w(\lambda) = \sum_{v\in W^0} Q_v(l) P_v^0(\lambda^0).$$

□

Définition 4.3.5 On définit l'**ordre de Bruhat faible** sur W, noté $\leq_f$, en posant pour $x, y \in W$, $x \leq_f y$ s'il existe un $u \in W$ tel que $y = u * x$.

Remarque 4.3.6 $x \leq_f y$ équivaut à, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $s_{i_1}, \cdots, s_{i_k}$, k réflexions simples de W telles que y s'écrive de façon réduite $y = s_{i_1} \cdots s_{i_k} x$.

Définition 4.3.7 Soit $w \in W$, P_w s'écrit $P_w(\lambda) = \sum_{u\in \mathrm{W}^0} Q_u(l) P_u^0(\lambda^0)$. L'ensemble $\mathrm{Supp}\, P_w = \{v \in \mathrm{W}^0 \mid Q_v \neq 0\}$ est appelé le **support** de P_w.

Proposition 4.3.8 *Soit $w \in W$, posons $w = yx$ où $y \in \{u \in W \mid \forall i \in [\![1, r]\!],\ us_i > u\}$ et $x \in \mathrm{W}^0$. Alors $\mathrm{Supp}\, P_w \subset \{v \in \mathrm{W}^0 \mid x \leq_f v\}$ et $x \in \mathrm{Supp}\, P_w$.*

Preuve : Soit $w \in W$, w s'écrit $w = yx$ avec $y \in \{u \in W \mid \forall i \in [\![1, r]\!],\ us_i > u\}$ et $x \in \mathrm{W}^0$. Soit $l \in \mathbb{C}$, et $\lambda \in \mathfrak{h}^{*l}$.
• Montrons que $\operatorname{Supp} P_w \subset \{v \in \mathrm{W}^0 \mid x \leq_f v\}$. Par le corollaire 4.3.4 le polynôme P_y s'écrit $P_y(\lambda) = \sum_{u \in W^0} R_u(l) P_u^0(\lambda^0)$ où les R_u sont des polynômes. De plus, soit R un polynôme en une variable, P un polynôme en r variables et $\alpha_i \in \Pi^0$. Il est clair que $\mathcal{D}_{\alpha_i} R(l) P(\lambda^0) = R(l) \mathcal{D}_{\alpha_i} P(\lambda^0)$. Et donc, $P_w(\lambda) = \mathcal{D}_x P_y(\lambda) = \sum_{u \in W^0} R_u(l) P^0_{u * x}(\lambda^0)$. On en déduit que $\operatorname{Supp} P_w \subset \{v \in \mathrm{W}^0 \mid x \leq_f v\}$.

Montrons maintenant que $1 \in \operatorname{Supp} P_y$.

• On sait que P_y s'écrit $P_y(\lambda) = \sum_{u \in \mathrm{W}^0} R_u(l) P_u^0(\lambda^0)$ avec $R_u \in \mathbb{C}[l]$. Nous allons montrer que, pour tout $u \in \mathrm{W}^0$, $\deg R_u P_u^0 \leq \ell(y)$.
On sait que $\deg P_y \leq \ell(y)$, donc $\deg \sum_{u \in \mathrm{W}^0} R_u P_u^0 \leq \ell(y)$. Considérons ces polynômes commes des polynômes en $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ dans $\mathbb{C}(l)$, on sait que le degré de $P^0_{w_0}$ est strictement plus grand que celui des autres polynômes P^0_u pour $u \neq w_0$. On en déduit que le terme dominant de $R_{w_0} P^0_{w_0}$ (comme un polynôme en $r+1$ variables) ne peut s'annuler avec aucun autre terme, et donc que $\deg R_{w_0} P^0_{w_0} \leq \ell(y)$. D'où $\deg \sum_{\ell(u) < \ell(w_0)} R_u P_u^0 \leq \ell(y)$.
Soit n un entier non nul et supposons que $\deg \sum_{\ell(u) \leq \ell(w_0) - n} R_u P_u^0 \leq \ell(y)$. Soit $v \in \mathrm{W}^0$ de longueur $\ell(w_0) - n$. Alors il existe $s_{i_1}, \cdots, s_{i_n}$ n réflexions simples telles que $v s_{i_1} \cdots s_{i_n} = w_0$. De plus, pour tout $v' \in \mathrm{W}^0$ différent de v et de longueur inférieure ou égale à $\ell(w_0) - n$ on a $v' s_{i_1} \cdots s_{i_n} < w_0$.
Par la remarque 4.1.3, on sait que $\deg \mathcal{D}_{s_{i_1} \cdots s_{i_n}} \sum_{\ell(u) \leq \ell(w_0) - n} R_u P_u^0 \leq \ell(y) + n$ c'est-à-dire $\deg \sum_{\ell(u) \leq \ell(w_0) - n} R_u P^0_{u * s_{i_1} \cdots s_{i_n}} \leq \ell(y) + n$. Comme on l'a vu précédemment le terme dominant de $R_v P^0_{w_0}$ ne peut s'annuler avec aucun autre terme et donc $\deg R_v P^0_{w_0} \leq \ell(y) + n$. D'où $\deg R_v P_v^0 \leq \ell(y)$.
En faisant de même avec les autres éléments de longueur $\ell(w_0) - n$, on en déduit par récurrence que pour tout $u \in \mathrm{W}^0$, $\deg R_u P_u^0 \leq \ell(y)$ et donc $\deg R_u \leq \ell(y) - \ell(u)$.

• Montrons que $1 \in \operatorname{Supp} P_y$. Supposons que ce n'est pas le cas. Comme $y \in \{u \in W \mid \forall i \in [\![1, r]\!], us_i > u\}$ on sait que yw_0 est réduit i.e. que $\ell(yw_0) = \ell(y) + \ell(w_0)$ (voir [14] paragraphe 1.10.). D'où $\deg P_{yw_0} = \ell(y) + \ell(w_0)$. D'autre part $P_{yw_0} = \sum_{u \in \mathrm{W}^0} R_u P^0_{w_0}$. Or $\deg R_u P^0_{w_0} = \deg R_u + \ell(w_0) \leq \ell(w_0) + \ell(y) - \ell(u) \leq \ell(w_0) + \ell(y) - 1$ si $1 \notin \operatorname{Supp} P_y$. C'est absurde. Donc $1 \in \operatorname{Supp} P_y$. De plus on en déduit que $\deg R_1 P^0_{w_0} = \deg P_{yw_0}$ donc $\deg R_1 = \ell(y)$.

Comme $P_w = \mathcal{D}_x P_y = \mathcal{D}_x \sum_{u \in \mathrm{W}^0} R_u P_u^0 = \sum_{u \in \mathrm{W}^0} R_u P_{u*x}^0$, on en déduit que $x \in \operatorname{Supp} P_w$.

□

Remarque 4.3.9 Dans la démonstration précédente on voit, en conservant les mêmes notations, que $\deg Q_x = \ell(y)$.

Proposition 4.3.10 *Soit $l \in \mathbb{C}$, les polynômes $P_{w|\mathfrak{h}^{*l}}$, pour $w \in W$, engendrent $\mathcal{H}[l]$.*

Preuve : Soit $l \in \mathbb{C}$. Soit E le sous-ensemble de $\mathcal{H}[l]$ engendré par les polynômes $P_{w|\mathfrak{h}^{*l}}$, pour $w \in W$.
Soit k un entier. Prenons $y \in \{u \in W \mid \forall i \in [\![1, r]\!], us_i > u\}$ de longueur k (un tel y existe bien). Alors $P_{yw_0|\mathfrak{h}^{*l}} = QP_{w_0}$ où Q est un polynôme en l de degré k. Ceci étant vrai pour tout entier k, on en déduit que $\mathbb{C}[l]P_{w_0}^0 \subset E$.
Soit n un entier non nul et supposons que pour $v \in \mathrm{W}^0$ de longueur strictement plus grande que $\ell(w_0) - n$ on ait $\mathbb{C}[l]P_v^0 \subset E$. Soit $v \in W^0$ de longueur $\ell(w_0) - n$ et soit k un entier. Prenons $y \in \{u \in W \mid \forall i \in [\![1, r]\!], us_i > u\}$ de longueur k. Alors $P_{yv|\mathfrak{h}^{*l}} = Q_v P_v^0 + \sum_{u>v} Q_u P_u^0$ et Q_v est de degré k. Par hypothèse de récurrence on sait que $\sum_{u>v} Q_u P_u^0 \in E$. On en déduit que $Q_v P_v^0 \in E$. Ceci étant valable pour tout entier k, on en déduit que $\mathbb{C}[l]P_v^0 \subset E$.
Donc pour tout $v \in \mathrm{W}^0$, $\mathbb{C}[l]P_v^0 \subset E$. Comme les polynômes P_v^0, pour $v \in \mathrm{W}^0$, engendrent $\mathcal{H}$, on en conclut que $E = \mathcal{H}[l]$.

□

Remarque 4.3.11 En revanche les $P_{w|\mathfrak{h}^{*l}}$, pour l dans $\mathbb{C}$ et w dans W, ne sont pas linéairement indépendants dans $\mathcal{H}[l]$ en général. En effet, on verra plus loin qu'ils ne sont pas distincts (par exemple $P_{s_1 s_0 s_1 s_2 s_3 s_2 s_1 s_2} = P_{s_3 s_0 s_1 s_2 s_3 s_2 s_1 s_2}$ dans $A_4^{(1)}$).

Chapitre 5

Type fini

Nous travaillons, ici, dans des algèbres de Kac-Moody de type fini. Pour le type fini les opérateurs et polynômes de Demazure fournissent des bases intéressantes. Nous allons démontrer, en effet, que les opérateurs de Demazure forment une base du $\mathbb{Z}[P]$-module des endomorphismes de $\mathbb{Z}[P]$ invariants par $\mathbb{Z}[P]^W$. Les polynômes de Demazure, quant à eux, sont une base, sur $\mathbb{Z}$, des polynômes sur $\mathfrak{h}^*$, harmoniques pour le groupe de Weyl, à valeurs entières relatives sur P.

Dans tout ce chapitre $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Kac-Moody de type fini. On note de façon usuelle ses éléments associés : W son groupe de Weyl, P son réseau de poids....

5.1 Quelques Propriétés

Définition 5.1.1 Soit $\mu \in P$. On définit la translation :

$$\begin{array}{rccc} T_\mu : & \mathbb{Z}[P] & \rightarrow & \mathbb{Z}[P] \\ & u & \rightarrow & e^\mu u. \end{array}$$

Lemme 5.1.2 *Soit s_α une réflexion de W de racine α et soit $\lambda, \mu \in P$. Alors, $D_\alpha T_\mu$ s'écrit :*

$$D_\alpha T_\mu e^\lambda = (D_\alpha e^\mu - e^{s_\alpha \mu})e^\lambda + e^{s_\alpha \mu} D_\alpha e^\lambda.$$

Preuve : Soit $\lambda, \mu \in P^+$,

$$\begin{array}{rcl} D_\alpha T_\mu e^\lambda & = & e^{\lambda+\mu} + \cdots + e^{\lambda + s_\alpha \mu + \alpha} + e^{\lambda + s_\alpha \mu} + \cdots + e^{s_\alpha \lambda + s_\alpha \mu} \\ & = & (D_\alpha e^\mu - e^{s_\alpha \mu})e^\lambda + e^{s_\alpha \mu} D_\alpha e^\lambda. \end{array}$$

Ceci étant une égalité entre polynômes en e^{Λ_i}, on en déduit l'égalité pour tout $\lambda, \mu \in P$.

□

Proposition 5.1.3 *Soit $w \in W$ et $\mu \in P$. Alors, $D_w T_\mu$ s'écrit :*

$$D_w T_\mu = \sum_{\substack{v \in W \\ v \leq w}} \Big(\sum_{\nu \in P} a_{v,\nu}(\mu) T_\nu \Big) D_v,$$

où les coefficients $a_{v,\nu}(\mu)$ sont dans $\mathbb{Z}$ et seul un nombre fini d'entre eux est non nul.

Preuve : La propriété est vérifiée pour w de longueur 1 par le lemme précédent. On en déduit facilement le résultat par récurrence.

□

En spécialisant, on trouve :

Corollaire 5.1.4 *Soit $w \in W$ et $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$. Alors :*

$$P_w(\lambda + \mu) = \sum_{\substack{v \in W \\ v \leq w}} b_{v,\mu} P_v(\lambda),$$

avec $b_{v,\mu} \in \mathbb{Z}$.

De la même façon on peut montrer que :

Proposition 5.1.5 *Soit $w \in W$ et $\mu \in P$. Alors $T_\mu D_w$ s'écrit :*

$$T_\mu D_w = \sum_{\substack{v \in W \\ v \leq w}} D_v \Big(\sum_{\nu \in P} a'_{v,\nu}(\mu) T_\nu \Big),$$

où les coefficients $a'_{v,\nu}(\mu)$ sont dans $\mathbb{Z}$ et seul un nombre fini d'entre eux est non nul.

Remarque 5.1.6 Jusqu'ici les résultats sont aussi valables pour une algèbre de Kac-Moody affine.

Lemme 5.1.7 *Soit θ la plus longue racine de $\mathfrak{g}$. Posons l'ensemble $J = \{i \in [\![1, r]\!] \mid \langle \theta, \alpha_i^\vee \rangle = 0\}$ et w_J l'élément de longueur maximale dans $< s_j, j \in J >$, alors $w_0 = s_\theta w_J$.*

Preuve : Soit $w = s_\theta w_J$, comme $s_\theta \in \{u \in W \mid \forall j \in J, us_j > u\}$ et $w_J \in < s_j, j \in J >$, l'écriture est réduite i.e. $\ell(w) = \ell(s_\theta) + \ell(w_J)$ (voir [14] paragraphe 1.10.). Soit $i \in J$, alors $w_J \alpha_i = -\alpha_j$ où $j \in J$ et donc $s_\theta w_J \alpha_i = -\alpha_j$. Donc $w\alpha_i \in \Delta^-$. Soit $i \notin J$, alors $w_J \alpha_i = \alpha_i + \sum_{j \in J} m_j \alpha_j$, donc $s_\theta w_J \alpha_i = w_J \alpha_i - \langle \alpha_i, \theta^\vee \rangle \theta \leq w_J \alpha_i - \theta \leq 0$. Donc $w\alpha_i \in \Delta^-$. D'où w envoie toutes les racines positives sur des racines négatives. Donc $w = w^{-1} = w_0$ (voir [14] paragraphe 1.8.).

□

Proposition 5.1.8 *Soit $w \in W$ et $t \in \mathbb{Z}$. Alors :*

$$D_w T_{t\theta} = \sum_{\substack{v \in W \\ v \leq w \leq s_\theta * v}} \left(\sum_{\nu \in P} a''_{v,\nu}(t) T_\nu \right) D_v,$$

où les coefficients $a''_{v,\nu}(t)$ sont dans $\mathbb{Z}$ et seul un nombre fini d'entre eux est non nul.

Preuve : Grâce au lemme précédent on sait que $w \in W$ s'écrit, de façon réduite, $w = w'u$ avec $w' \leq s_\theta$ et $u \leq w_J$. Puisque $u \in< s_j, j \in J >$, $D_u T_{t\theta} = T_{t\theta} D_u$. D'autre part, on a $D_{w'} T_{t\theta} = \sum_{\substack{v \in W \\ v \leq w'}} \left(\sum_{\nu \in P} a_{v,\nu}(t) T_\nu \right) D_v$ où les coefficients $a_{v,\nu}(t)$ sont dans $\mathbb{Z}$ et seul un nombre fini d'entre eux est non nul.
Donc :

$$\begin{aligned} D_w T_{t\theta} &= D_{w'} T_{t\theta} D_u = \sum_{\substack{v \in W \\ v \leq w'}} \left(\textstyle\sum_{\nu \in P} a_{v,\nu}(t) T_\nu \right) D_v D_u \\ &= \sum_{\substack{v \in W \\ v \leq w'}} \left(\textstyle\sum_{\nu \in P} a_{v,\nu}(t) T_\nu \right) D_{v*u} \end{aligned}$$

et on a bien $w = w' * u \leq s_\theta * v * u$.

□

En spécialisant on trouve :

Corollaire 5.1.9 *Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $w \in W$ et $t \in \mathbb{Z}$,*

$$P_w(\lambda + t\theta) = \sum_{\substack{v \in W \\ v \leq w \leq s_\theta * v}} b'_{v,t} P_v(\lambda),$$

avec $b'_{v,t} \in \mathbb{Z}$.

5.2 Endomorphismes de $\mathbb{Z}[P]$

Le résultat du théorème 5.2.4 se rapproche d'un résultat connu dans le cas des corps (voir [2] paragraphe IV.1.) :

Théorème 5.2.1 *Soit K un corps, L une extension galoisienne de K de groupe de Galois G. Alors, $K = L^G$ et $End_K L$ est isomorphe au produit croisé de L par G, $L\langle G \rangle$, où $L\langle G \rangle = \{ \sum_{g \in G} l_g g \mid \forall g \in G,\ l_g \in L\}$ muni du produit $\sum_{g \in G} l_g g \sum_{h \in G} m_h h = \sum_{g,h \in G} l_g g(m_h) gh$.*

Définition 5.2.2 Soit $w \in W$. On pose $\Delta_w = \{\alpha \in \Delta^+ \mid w^{-1}(\alpha) < 0\}$ et Δ_w sera appelé l'**ensemble des inversions généralisées** de w.

Nous étudierons cet ensemble dans la partie 6.3.

Lemme 5.2.3 *Pour* $w \in W$, $\quad D_w = \dfrac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta_w}(1-e^{\alpha})}\left(w + \sum_{v<w} a_v D_v\right)$ *avec* $a_v \in \mathbb{Z}[P]$.

Preuve : Nous allons démontrer ce lemme par récurrence. Le résultat est évident pour 1, l'élément de longueur 0.
Soit $w = s_\alpha$ une réflexion simple. Soit $\lambda \in P$. Alors $D_{s_\alpha} = D_\alpha$ et :

$$D_\alpha e^{\lambda} = \frac{e^{\lambda} - s_\alpha \cdot e^{\lambda}}{1-e^{-\alpha}} = \frac{e^{\lambda} - e^{s_\alpha\lambda-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} = \frac{e^{s_\alpha\lambda} - e^{\lambda+\alpha}}{1-e^{\alpha}}.$$

Donc $D_\alpha = \dfrac{1}{1-e^{\alpha}}(s_\alpha - e^{\alpha}D_1)$, on a bien $\Delta_{s_\alpha} = \{\alpha\}$ et $e^{\alpha} \in \mathbb{Z}[P]$ d'où le résultat pour les éléments de longueur 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai pour les éléments de longueur n. Soit $w \in W$ de longueur $n+1$. Alors w s'écrit de façon réduite sous la forme $w = s_i w'$ avec $\ell(w') = n$ et s_i une réflexion simple de racine α_i. Par hypothèse de récurrence :

$$D_{w'} = \frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta_{w'}}(1-e^{\alpha})}\big(w' + \sum_{v<w'} a_v D_v\big),$$

avec $a_v \in \mathbb{Z}[P]$. Alors :

$$\begin{aligned}
D_{s_i w'} &= D_{\alpha_i} D_{w'} \\
&= \frac{1}{1-e^{\alpha_i}}\left(s_{\alpha_i} D_{w'} - e^{\alpha_i} D_{w'}\right) \\
&= \frac{1}{1-e^{\alpha_i}}\left[s_i\left(\frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta_{w'}}(1-e^{\alpha})}\Big(w' + \sum_{v<w'} a_v D_v\Big)\right) - e^{\alpha_i} D_{w'}\right] \\
&= \frac{1}{1-e^{\alpha_i}}\left[\frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta_{w'}}(1-e^{s_i\alpha})}\Big(s_i w' + \sum_{v<w'} a_v s_i D_v\Big) - e^{\alpha_i} D_{w'}\right] \\
&= \frac{1}{(1-e^{\alpha_i})\prod_{\alpha\in s_i\Delta_{w'}}(1-e^{\alpha})}\left[s_i w' + \left(\sum_{v<w'} a_v s_i D_v - \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. e^{\alpha_i}\left(\prod_{\alpha\in s_i\Delta_{w'}}(1-e^{\alpha})\right) D_{w'}\right)\right]
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence $a_v \in \mathbb{Z}[P]$ pour $v < w'$ et s_i s'écrit $s_i = (1-e^{\alpha_i})D_{\alpha_i} + e^{\alpha_i}D_1$ donc $\sum_{v<w'} a_v s_i D_v$ s'écrit $\sum_{v<w} a'_v D_v$ avec $a'_v \in \mathbb{Z}[P]$.

Donc :

$$\sum_{v<w'} a_v s_i D_v - e^{\alpha_i}\left(\prod_{\alpha\in s_i\Delta_{w'}}(1-e^{\alpha})\right)D_{w'} = \sum_{v<w} b_v D_v$$

avec $b_v \in \mathbb{Z}[P]$. D'autre part :

$$\begin{aligned}
\Delta_{s_i w'} &= \{\alpha\in\Delta^+ \mid (s_i w')^{-1}\alpha < 0\}\\
&= \{\alpha\in\Delta^+ \mid w'^{-1}s_i\alpha < 0\}\\
&= \{\alpha\in\Delta^+ \mid s_i\alpha < 0 \text{ et } w'^{-1}s_i\alpha < 0\}\cup\\
&\qquad\qquad\{\alpha\in\Delta^+ \mid s_i\alpha > 0 \text{ et } w'^{-1}s_i\alpha < 0\}\\
&= \{\alpha_i\}\cup(s_i\Delta_{w'}\cap\Delta^+)\\
&= \{\alpha_i\}\cup s_i\Delta_{w'} \text{ car } s_i w' \text{ est réduit}
\end{aligned}$$

Donc $D_w = \dfrac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta_w}(1-e^{\alpha})}\big(w+\sum_{v<w} b_v D_v\big)$ avec $b_v\in\mathbb{Z}[P]$. D'où le résultat par récurrence.

□

Théorème 5.2.4 *Soit W le groupe de Weyl associé à une algèbre de Lie simple de dimension finie et P son réseau de poids. On a :*

$$End_{\mathbb{Z}[P]^W}(\mathbb{Z}[P]) = \bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}[P]\,D_w = \bigoplus_{w\in W} D_w\,\mathbb{Z}[P].$$

Preuve :
• Posons :

$$\mathcal{L} = End_{\mathbb{Z}[P]^W}(\mathbb{Z}[P]) \qquad \mathcal{L}' = \sum_{w\in W}\mathbb{Z}[P]w \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}'' = \sum_{w\in W}\mathbb{Z}[P]D_w.$$

Notons L le corps des fractions de $\mathbb{Z}[P]$ et $K = L^W$. D'après le théorème 5.2.1, les $w\in W$ sont linéairement indépendants sur L (donc sur $\mathbb{Z}[P]$). De plus, par le lemme précédent on voit que la matrice de passage des D_w aux w est triangulaire en prenant un ordre des lignes et des colonnes compatible avec l'ordre de Bruhat. Les D_w sont donc linéairement indépendants sur L et donc sur $\mathbb{Z}[P]$. On en déduit que $\mathcal{L}' = \bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}[P]w$ et que $\mathcal{L}'' = \bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}[P]D_w$.

• On a de plus $\mathcal{L}'' = \bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}[P]\,D_w = \bigoplus_{w\in W} D_w\,\mathbb{Z}[P]$. En effet, soit $w\in W$ et $m\in\mathbb{Z}[P]$, m s'écrit $m=\sum_{\lambda\in P} c_\lambda e^{\lambda}$ où les c_λ sont dans $\mathbb{Z}$ et seul un nombre fini d'entre eux est non nul. On a :

$$\begin{array}{rcl} D_w \sum\limits_{\lambda\in P} c_\lambda T_\lambda & = & \sum\limits_{\lambda\in P} c_\lambda D_w T_\lambda \\ & = & \sum\limits_{\lambda\in P} c_\lambda \sum\limits_{v\leq w} (\sum_{\nu\in P} a_{v,\nu}(\lambda) T_\nu) D_v \\ & = & \sum\limits_{v\leq w} (\sum\limits_{\nu,\lambda\in P} c_\lambda a_{v,\nu}(\lambda) T_\nu) D_v \end{array}$$

d'après la proposition 5.1.3. Donc $\bigoplus_{w\in W} D_w\ \mathbb{Z}[P] \subset \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}[P]\ D_w$.
En utilisant la proposition 5.1.5 on montre l'inclusion inverse, d'où l'égalité.

• Nous voulons démontrer que $\mathcal{L} = \mathcal{L}''$. On remarque que $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}''$ sont inclus dans $\mathcal{L}$. Nous allons chercher le déterminant d'une matrice de décomposition d'une base de $\mathcal{L}''$ dans une base de $\mathcal{L}$. Pour cela nous allons calculer le déterminant d'une matrice de décomposition d'une base de $\mathcal{L}'$ dans une base de $\mathcal{L}''$ et le déterminant d'une matrice de décomposition d'une base de $\mathcal{L}'$ dans une base de $\mathcal{L}$.

• Calculons $\det_{\mathcal{L}''}\mathcal{L}'$. Dans les bases $(w)_{w\in W}$ et $(D_w)_{w\in W}$, la matrice de décomposition de $\mathcal{L}'$ sur $\mathcal{L}''$ est :

$$\begin{pmatrix} \ddots & & * \\ & \prod_{\alpha\in\Delta_w}(1-e^\alpha) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}_{v,w\in W}.$$

Donc :

$$\begin{array}{rcl} \det_{\mathcal{L}''}\mathcal{L}' & = & \prod\limits_{w\in W} \prod\limits_{\alpha\in\Delta_w} (1-e^\alpha) \\ & = & \prod\limits_{\alpha\in\Delta^+} (1-e^\alpha)^{N(\alpha)} \quad \text{avec} \quad N(\alpha) = |\{w\in W \mid \alpha\in\Delta_w\}|. \end{array}$$

L'involution de W qui à un w associe $\bar{w} = ww_0$ est telle que, pour chaque $w\in W$, Δ_w et $\Delta_{\bar{w}}$ réalisent une partition de Δ^+. Soit $\alpha\in\Delta^+$, pour chaque $w\in W$, α appartient soit à Δ_w, soit à $\Delta_{\bar{w}}$, donc $N(\alpha) = \frac{|W|}{2}$.
Donc :

$$\det_{\mathcal{L}''}\mathcal{L}' = \left(\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^\alpha)\right)^{\frac{|W|}{2}}.$$

On voit notamment que $\det_{\mathcal{L}''}\mathcal{L}'$ est de la forme $\sum\limits_{\lambda\in P} c_\lambda e^\lambda$ avec $0\leq\lambda\leq|W|\rho$ et $c_0 = 1$, $c_{|W|\rho} = \pm 1$.

• Etudions maintenant $\det_{\mathcal{L}}\mathcal{L}'$.
Pour $v \in W$, soit $Dg_v = \{i \in [\![1,n]\!] \mid v^{-1}\alpha_i < 0\} = \{i \in [\![1,n]\!] \mid s_i v < v\}$, c'est l'ensemble des descentes à gauche de v. Posons $\Lambda_v = \sum\limits_{i \in Dg_v} \Lambda_i$ et $e_v = \exp(v^{-1}\Lambda_v)$.
D'après [31], on sait que $\mathbb{Z}[P] = \bigoplus\limits_{v\in W} \mathbb{Z}[P]^W e_v$. Soit $\widehat{e_v} : \mathbb{Z}[P] \to \mathbb{Z}[P]$ l'application $\mathbb{Z}[P]^W$-linéaire définie par $\widehat{e_v}(e_w) = \delta_{v,w}$. On a alors, $\mathcal{L} = \bigoplus\limits_{v\in W} \mathbb{Z}[P]\widehat{e_v}$.

Dans les bases $(w)_{w\in W}$ et $(\widehat{e_w})_{w\in W}$, la matrice de décomposition de $\mathcal{L}'$ sur $\mathcal{L}$ est donc :

$$\left(\quad w(e_v) \quad \right)_{v,w\in W}.$$

Regardons la colonne v pour $v \in W$. Les termes apparaissant dans la colonne v sont les $\exp(wv^{-1}\Lambda_v)$ pour $w \in W$, c'est-à-dire les $\exp(w\Lambda_v)$ à permutation près. Les éléments de la colonne v sont donc de la forme e^λ avec $\lambda \in P$ et $w_0\Lambda_v \leq \lambda \leq \Lambda_v$. Or $\sum\limits_{v\in W} \Lambda_v = \sum\limits_{i=1}^{n} N(\alpha_i)\Lambda_i = \frac{|W|}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\Lambda_i = \frac{|W|}{2}\rho$ et $w_0 \sum\limits_{v\in W} \Lambda_v = -\frac{|W|}{2}\rho$. D'où $\det_{\mathcal{L}}\mathcal{L}'$ est de la forme $\sum\limits_{\lambda\in P} b_\lambda e^\lambda$ avec $-\frac{|W|}{2}\rho \leq \lambda \leq \frac{|W|}{2}\rho$.

On a d'autre part :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{L}}\mathcal{L}' &= \sum_{\varphi\in Bij(W)} \varepsilon(\varphi) \prod_{v\in W} \varphi(v)e_v \\ &= \sum_{\varphi\in Bij(W)} \varepsilon(\varphi) \exp(\sum_{v\in W} \varphi(v)v^{-1}\Lambda_v), \end{aligned}$$

où $Bij(W)$ est l'ensemble des bijections de W et $\varepsilon(\varphi)$ est la signature de φ. Or, pour $\varphi \in Bij(W)$, $\sum\limits_{v\in W} \varphi(v)v^{-1}\Lambda_v \leq \sum\limits_{v\in W}\Lambda_v = \frac{|W|}{2}\rho$ et on a égalité si est seulement si pour tout $v \in W$, $\varphi(v)v^{-1}\Lambda_v = \Lambda_v$ c'est-à-dire si $\varphi(v) \in (Stab\ \Lambda_v)v$ où $Stab\ \Lambda_v$ est le stabilisateur de Λ_v dans W. Or, on voit que $Stab\ \Lambda_v =< s_i, i \notin Dg_v >$. Comme $v \in \{u \in W \mid \forall i \notin Dg_v,\ s_i u > u\}$, on en déduit que les éléments de $(Stab\ \Lambda_v)v$ sont supérieurs ou égaux à v. Donc $\sum\limits_{v\in W} \varphi(v)v^{-1}\Lambda_v = \frac{|W|}{2}\rho$ implique que pour tout $v \in W$, $\varphi(v) \geq v$. La seule bijection réalisant cela étant l'identité, on en déduit que $b_{\frac{|W|}{2}\rho} = 1$.
On démontre, de même, que $b_{-\frac{|W|}{2}\rho} = \pm 1$, la seule bijection permettant d'obtenir ce terme étant $\varphi(v) = w_0 v$.

• On a $\mathcal{L}'' \subset \mathcal{L}$ donc $\det_{\mathcal{L}}\mathcal{L}'' \in \mathbb{Z}[P]$. De plus $\det_{\mathcal{L}}\mathcal{L}'' = \det_{\mathcal{L}'}\mathcal{L}''\det_{\mathcal{L}}\mathcal{L}'$, donc $\det_{\mathcal{L}}\mathcal{L}''\det_{\mathcal{L}''}\mathcal{L}' = \det_{\mathcal{L}}\mathcal{L}'$.

Les termes dominants apparaissant dans $\det_{\mathcal{L}}\mathcal{L}'$ sont les termes dominants de $\det_{\mathcal{L}''}\mathcal{L}'$ multipliés aux termes dominants de $\det_{\mathcal{L}}\mathcal{L}''$. Or $\det_{\mathcal{L}''}\mathcal{L}'$ et $\det_{\mathcal{L}}\mathcal{L}'$ ont un unique terme dominant, il en est donc de même pour $\det_{\mathcal{L}}\mathcal{L}''$, notons le $m_{\lambda_d}e^{\lambda_d}$. On a l'égalité $\exp(\frac{|W|}{2}\rho) = \pm m_{\lambda_d}\exp(\lambda_d)\exp(|W|\rho)$, d'où $m_{\lambda_d} = \pm 1$ et $\lambda_d = -\frac{|W|}{2}\rho$. En faisant de même avec les termes minorants, on montre que $\det_{\mathcal{L}}\mathcal{L}''$ a un unique terme minorant et qu'il vaut $\pm\exp(-\frac{|W|}{2}\rho)$. D'où $\det_{\mathcal{L}}\mathcal{L}'' = \pm\exp(-\frac{|W|}{2}\rho)$, c'est un élément inversible de $\mathbb{Z}[P]$. On en déduit que $\mathcal{L} = \mathcal{L}''$, c'est-à-dire que :

$$End_{\mathbb{Z}[P]^W}(\mathbb{Z}[P]) = \bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}[P]D_w = \bigoplus_{w\in W}D_w\mathbb{Z}[P].$$

$\square$

5.3 Polynômes harmoniques à valeurs entières relatives

Soit $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des polynômes harmoniques prenant des valeurs entières relatives sur P.

Théorème 5.3.1 *On a :*

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}P_w.$$

Preuve : Montrons que, pour $w \in W$, le polynôme P_w est dans $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$. Soit $w \in W$, on sait que pour $\lambda \in P^+$, $P_w(\lambda) = \dim E_w(\lambda)$, donc $P_w(P^+) \subset \mathbb{N}$. On en déduit (en résolvant un système linéaire) que P_w est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$, il existe donc un entier non nul m tel que mP_w soit un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$, il existe $(x_1', \cdots, x_n') \in \mathbb{N}^n$ tel que $(x_1, \cdots, x_n) \equiv (x_1', \cdots, x_n') \bmod m$. Donc $mP_w(x_1, \cdots, x_n) \equiv mP_w(x_1', \cdots, x_n') \equiv 0 \bmod m$ car $P_w(x_1', \cdots, x_n') \in \mathbb{Z}$. Donc m divise $mP_w(x_1, \cdots, x_n)$. On en déduit que $P_w(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{Z}$ d'où $P_w(P) \subset \mathbb{Z}$. Donc $P_w \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$. D'où $\bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}P_w \subset \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$.

Réciproquement, par [11], on sait que les polynômes $x \to P_{w_0}(x + w^{-1}\Lambda_w)$, pour $w \in W$, forment une base de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$. Or, par le corollaire 5.1.4, on sait que, pour $(\lambda, \mu) \in P^2$,

$$P_{w_0}(\lambda + \mu) = \sum_{v\in W} b_{v,\mu}P_v(\lambda) \text{ avec } b_{v,\mu} \in \mathbb{Z}.$$

D'après [21] paragraphe 7, on sait même plus précisément que :

$$P_{w_0}(\lambda + \mu) = \sum_{v\in W} R_{vw_0}(\mu)P_v(\lambda),$$

où $R_v(\mu) = (-1)^{\ell(v)} \sum_{u \leq v} (-1)^{\ell(u)} P_u(\mu)$.
Donc $x \to P_{w_0}(x + w^{-1}\Lambda_w)$ appartient à $\bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}P_w$. D'où $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \subset \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}P_w$.

On en conclut que :

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}P_w.$$

□

Chapitre 6

Type $\widehat{sl}(n)$

Dans ce chapitre nous étudions les caractères réels et les polynômes de Demazure pour une algèbre de type $A_r^{(1)}$. Il n'existe pas de formule explicite donnant le polynôme de Demazure pour tout élément du groupe de Weyl. C'est pourquoi, nous définissons un ensemble $\mathcal{E}$ de W sur lequel nous obtenons une formule explicite. Dans le cas des algèbres de petit rang, nous sommes même en mesure d'en déduire les polynômes pour tous les w dans W ayant comme descentes à droite toutes les réflexions simples sauf une. Nous caractérisons, ensuite, les éléments de $\mathcal{E}$ à l'aide de leur ensemble d'inversions généralisées et de leur écriture sous la forme xt, avec x dans W^0 et t dans T. Enfin, nous calculons la densité de $\mathcal{E}$.

Dans toute ce chapitre $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Kac-Moody de type $A_r^{(1)}$. Nous noterons W, P, …, les éléments associés et les indices de 0 à r.

Pour i dans $[\![0, r]\!]$, en enlevant la $i+1^{\mathrm{e}}$ ligne et la $i+1^{\mathrm{e}}$ colonne de la matrice associée à $\mathfrak{g}$, ce qui revient à "enlever" la i$^{\mathrm{e}}$ racine, on obtient une matrice de type A_r (que l'on note aussi $sl(r+1)$, c'est pourquoi on note souvent $\widehat{sl}(r+1)$ les algèbres de type $A_r^{(1)}$). Nous noterons avec un exposant i les éléments associés à cette algèbre finie ($\mathfrak{g}^i$ l'algèbre, W^i son groupe de Weyl …). Nous noterons w_i l'élément de longueur maximale dans W^i. Pour simplifier nous considérons les indices modulo $r+1$, c'est-à-dire, par exemple que, pour k dans $\mathbb{Z}$, $\alpha_{j+k(r+1)} = \alpha_j$.

Tous les caractères considérés ici sont des caractères réels.

6.1 Ensemble $\mathcal{E}$ et calcul des polynômes pour les éléments de $\mathcal{E}$

Nous allons définir ici un ensemble de W pour lequel le calcul des caractères réels et des polynômes de Demazure est facile.

Définition 6.1.1 Nous noterons $\mathcal{E}$ l'ensemble des éléments de W de la forme $w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \cdots, i_k \in [\![0, r]\!]$. Pour un élément w de $\mathcal{E}$ nous appellerons **expression** de w une écriture de la forme $w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, $i_1, \cdots, i_k \in [\![0, r]\!]$ et $i_j \neq i_{j+1}$ pour $j \in [\![1, k-1]\!]$.

On remarque que, pour $i \in [\![0, r]\!]$, D_{w_i} et P_{w_i} sont connus. En effet, soit $l \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in P^l$, alors par la formule (2.1) (appliquée à $\mathfrak{g}^i$ au lieu de $\mathfrak{g}^0$ ce qui ne change pas la formule car dans $\mathfrak{g}$ toutes les racines jouent le même rôle), λ s'écrit $\lambda = \lambda^i + l\Lambda_i + (\lambda, \Lambda_i)\delta$. Donc $D_{w_i}e^{\lambda} = D_{w_i}e^{\lambda^i + l\Lambda_i}$ (ce sont des caractères réels). Par la proposition 3.4.2, on sait que $D_{w_i}e^{\lambda} = e^{l\Lambda_i}D_{w_i}e^{\lambda^i}$. De plus, pour calculer $D_{w_i}e^{\lambda^i}$ on peut considérer que l'on travaille dans $\mathfrak{g}^i$. Or, dans $\mathfrak{g}^i$, $E_{w_i}(\lambda^i) = L(\lambda^i)$, $D_{w_i}e^{\lambda^i}$ est donc connu par la formule du caractère de Weyl (c.f. théorème 3.2.4). D'où :

$$D_{w_i}e^{\lambda} = e^{l\Lambda_i}\frac{\sum_{w \in W^i} \varepsilon(w)\exp(w(\lambda^i + \rho^i))}{\sum_{w \in W^i} \varepsilon(w)\exp(w\rho^i)}.$$

Le polynôme de Demazure est lui aussi connu :

$$\begin{aligned} P_{w_i}(\lambda) &= \frac{\prod_{\alpha \in \Delta^{i+}} \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle}{\prod_{\alpha \in \Delta^{i+}} \langle \rho, \alpha \rangle} \\ &= \tfrac{1}{1^r \ldots r^1}\left[(\lambda_{i+1} + 1)\ldots(\lambda_{i+r+1} + 1)\right]\left[(\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} + 2)\right. \\ &\qquad \left.\ldots(\lambda_{i+r} + \lambda_{i+r+1} + 2)\right]\ldots\left[(\lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_{i+r+1} + r)\right]. \end{aligned}$$

Théorème 6.1.2 *Soit $w \in \mathcal{E}$ et $w_{i_k} * \cdots * w_{i_1}$ une expression de w. Soit $l \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in P^l$. Alors :*

$$D_w e^{\lambda} = e^{l\Lambda_{i_k}}\Big(D_{w_{i_k}}e^{l\Lambda^{i_k}_{i_{k-1}}}\Big)\ldots\Big(D_{w_{i_2}}e^{l\Lambda^{i_2}_{i_1}}\Big)\Big(D_{w_{i_1}}e^{\lambda^{i_1}}\Big),$$

où l'égalité est pour les caractères réels et Λ^i_j est la projection orthogonale du poids fondamental Λ_j sur $\mathfrak{h}^{i*}$ suivant $\mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\Lambda_i$.

Preuve : Soit $l \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in P^l$.
• Soit w un élément de $\mathcal{E}$, $w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1}$ une expression de w. Nous allons calculer D_w par récurrence en utilisant notamment la proposition 3.4.2.

Par la proposition 3.4.4, on a :

$$D_w e^{\lambda} = D_{w_{i_k}} \ldots D_{w_{i_1}} e^{\lambda}.$$

• Soit $i \in [\![0, r]\!]$ et soit $m \in \mathbb{C}[P'^l]$ invariant par toutes les réflexions simples s_k pour $k \neq i$ (avec $P'^l = P' \cap P^l = (\sum_{i=0}^{r} \mathbb{Z}\Lambda_i) \cap P^l$). Pour pouvoir faire

un calcul par récurrence on cherche un poids $\mu_{i\to j}$ de niveau zero tel que $e^{\mu_{i\to j}}m$ soit invariant par toutes les réflexions simples s_k pour $k\neq j$. Posons $\mu_{i\to j}=l(\Lambda_j-\Lambda_i)$ et vérifions que $e^{l(\Lambda_j-\Lambda_i)}m$ est invariant par toutes les réflexions simples s_k pour $k\neq j$.
Les éléments m, $e^{l\Lambda_i}$ et $e^{l\Lambda_j}$ sont invariants par tous les s_k pour $k\neq i,j$, il en est donc de même pour $e^{l(\Lambda_j-\Lambda_i)}m$. Par conséquent, il nous suffit de vérifier que $e^{l(\Lambda_j-\Lambda_i)}m$ est invariant par s_i. On a $m=\sum\limits_{\nu\in P'^l} c_\nu e^\nu$ avec $c_\nu\in\mathbb{Z}$.

Donc :

$$e^{l(\Lambda_j-\Lambda_i)}m=e^{l(\Lambda_j-\Lambda_i)}\sum_{\nu\in P'^l}c_\nu e^\nu$$

et

$$\begin{aligned} s_i(e^{l(\Lambda_j-\Lambda_i)}m) &= e^{l(\Lambda_j-\Lambda_i)+l\alpha_i}\sum_{\nu\in P'^l}c_\nu e^{s_i\nu}\\ &= e^{l(\Lambda_j-\Lambda_i)}\sum_{\nu\in P'^l}c_{s_i\nu-l\alpha_i}e^\nu. \end{aligned}$$

D'où $e^{l(\Lambda_j-\Lambda_i)}m$ est invariant par s_i si et seulement si $c_\nu=c_{s_i\nu-l\alpha_i}$. Or en travaillant dans $\mathfrak{h}^{*l}/\mathbb{C}\delta$ on a $s_i=t_is_{\theta_i}$ avec $t_i\nu=\nu+l\theta_i$ et $s_{\theta_i}\nu=\nu-\langle\nu,\theta_i^\vee\rangle\theta_i$ où θ_i est la plus longue racine de $\mathfrak{g}^i$. Or $s_{\theta_i}\in W^i$ et laisse donc invariant m d'où $c_\nu=c_{s_{\theta_i}\nu}$. Comme sur $\mathfrak{h}^{*l}/\mathbb{C}\delta$, $s_{\theta_i}(\nu)=t_i^{-1}s_i(\nu)=s_i(\nu)-l\theta_i$ on a $c_{s_{\theta_i}\nu}=c_{s_i\nu-l\alpha_i}$. On en déduit l'invariance.

On peut maintenant calculer D_w :

$$\begin{aligned} D_we^\lambda &= D_{w_{i_k}}\left(\dots\left(D_{w_{i_1}}e^\lambda\right)\right)\\ &= D_{w_{i_k}}\left(e^{l(\Lambda_{i_{k-1}}-\Lambda_{i_k})}e^{l(\Lambda_{i_k}-\Lambda_{i_{k-1}})}\left(\dots\left(D_{w_{i_1}}e^\lambda\right)\right)\right)\\ &= \left(D_{w_{i_k}}e^{l(\Lambda_{i_{k-1}}-\Lambda_{i_k})}\right)e^{l(\Lambda_{i_k}-\Lambda_{i_{k-1}})}\left(D_{w_{i_{k-1}}}\left(\dots\left(D_{w_{i_1}}e^\lambda\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Or, par la formule (2.1) :

$$\begin{aligned} l(\Lambda_{i_{k-1}}-\Lambda_{i_k}) &= l(\Lambda_{i_{k-1}}-\Lambda_{i_k})^{i_k}+0\Lambda_{i_k}+c\delta \qquad \text{avec } c\in\mathbb{C}\\ &= l\Lambda^{i_k}_{i_{k-1}}+c\delta. \end{aligned}$$

Donc $D_{w_{i_k}}e^{l(\Lambda_{i_{k-1}}-\Lambda_{i_k})}=D_{w_{i_k}}e^{l\Lambda^{i_k}_{i_{k-1}}}$. D'où :

$$D_we^\lambda=\left(D_{w_{i_k}}e^{l\Lambda^{i_k}_{i_{k-1}}}\right)e^{l(\Lambda_{i_k}-\Lambda_{i_{k-1}})}\left(D_{w_{i_{k-1}}}\left(\dots\left(D_{w_{i_1}}e^\lambda\right)\right)\right),$$

et par récurrence :

$$D_we^\lambda=e^{l\Lambda_{i_k}}\left(D_{w_{i_k}}e^{l\Lambda^{i_k}_{i_{k-1}}}\right)\dots\left(D_{w_{i_2}}e^{l\Lambda^{i_2}_{i_1}}\right)\left(D_{w_{i_1}}e^{\lambda^{i_1}}\right).$$

□

Théorème 6.1.3 *Soit $w \in \mathcal{E}$ et $w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1}$ une expression de w. Soit $l \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^{*l}$. Alors :*
• *Si r est pair :*

$$P_w(\lambda) = \left(\frac{1}{1^r \dots r^1}\right)^{k-1} \prod_{p=1}^{r/2} \big((l+p)(l+r+1-p)\big)^{\sum_{i=1}^{p-1} it_i + \sum_{i=p}^{r/2} pt_i} P_{w_{i_1}}(\lambda)$$

avec $t_i = |\{j \in [\![2,k]\!] \mid i_j - i_{j-1} \equiv \pm i \ mod\ r+1\}|$ pour $i \leq \frac{r}{2}$.
• *Si r est impair :*

$$P_w(\lambda) = \left(\frac{1}{1^r \dots r^1}\right)^{k-1} \prod_{p=1}^{(r-1)/2} \big((l+p)(l+r+1-p)\big)^{\sum_{i=1}^{p-1} it_i + \sum_{i=p}^{r/2} pt_i}$$

$$\big(l + \frac{r+1}{2}\big)^{\sum_{i=1}^{\frac{r+1}{2}} it_i} P_{w_{i_1}}(\lambda)$$

avec $t_i = |\{j \in [\![2,k]\!] \mid i_j - i_{j-1} \equiv \pm i \ mod\ r+1\}|$ pour $i \leq \frac{r+1}{2}$.

Preuve : Soit $l \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in P^l$. En spécialisant la formule du théorème précédent on trouve :

$$P_w(\lambda) = \prod_{j=2}^{k} \left(P_{w_{i_j}}(l\Lambda^{i_j}_{i_{j-1}})\right) P_{w_{i_1}}(\lambda^{i_1}).$$

Or :

$$P_{w_{i_j}}(l\Lambda^{i_j}_{i_{j-1}}) = P_{w_0}(l\Lambda^{0}_{i_{j-1}-i_j}) = \frac{1}{1^r \dots r^1} \prod_{p=1}^{i} ((l+p)(l+r+1-p))^p \prod_{p=i+1}^{r-i} (l+p)^i$$

pour i le plus petit représentant, dans $[\![1, r+1]\!]$, des classes modulo $r+1$ de $i_{j-1} - i_j$ et de $-(i_{j-1} - i_j)$ si $i \neq \frac{r+1}{2}$ et :

$$P_{w_{i_j}}(l\Lambda^{i_j}_{i_{j-1}}) = \frac{1}{1^r \dots r^1}(l + \frac{r+1}{2})^{\frac{r+1}{2}} \prod_{p=1}^{\frac{r-1}{2}} ((l+p)(l+r+1-p))^p,$$

si $i = \frac{r+1}{2}$. D'où le résultat.

□

Remarque 6.1.4 L'application qui à λ associe $P_{w_{i_j}}(l\Lambda^{i_j}_{i_{j-1}})$ est un polynôme qui dépend uniquement du niveau de λ, notons le $Q_{i_j,i_{j-1}}$. On a $\deg Q_{i_j,i_{j-1}} = (r+1-i)i$ où i le plus petit représentant, dans $[\![1, r+1]\!]$, des classes modulo $r+1$ de $i_{j-1} - i_j$ et de $-(i_{j-1} - i_j)$.

6.2 Calcul de polynômes pour certaines algèbres

En utilisant une méthode analogue à celle utilisée pour démontrer les théorèmes 6.1.2 et 6.1.3, on peut calculer les polynômes P_w, pour w s'écrivant sous forme réduite $s_{i_k}\cdots s_{i_1}e$, avec $e\in\mathcal{E}$ ayant w_{i_1} comme terme de gauche (et k petit).

Soit $w\in W$ s'écrivant sous forme réduite $s_{i_k}\cdots s_{i_1}e$, avec $e\in\mathcal{E}$ ayant w_{i_1} comme terme de gauche. Soit $j\in[\![1,r]\!]$ différent de i_1. Notons r_1 le plus grand entier tel que $i_1,\cdots,i_{r_1}$ diffèrent de j, r_2 le plus grand entier tel que $i_{r_1+1},\cdots,i_{r_2}$ diffèrent de i_1, r_3 le plus grand entier tel que $i_{r_2+1},\cdots,i_{r_3}$ diffèrent de i_1 et ainsi de suite jusqu'a ce qu'on arrive à i_k.
Soit $l\in\mathbb{C}$ et $\lambda\in P^l$. On a :

$$\begin{aligned}
D_we^\lambda &= D_{s_{i_k}\cdots s_{i_1}}D_ee^\lambda\\
&= D_{s_{i_k}\cdots s_{i_1}}\left(e^{l(\Lambda_{i_1}-\Lambda_j)}e^{l(\Lambda_j-\Lambda_{i_1})}D_ee^\lambda\right)\\
&= D_{s_{i_k}\cdots s_{i_{r_1+1}}}\left[\left(D_{s_{i_{r_1}}\cdots s_{i_1}}e^{l(\Lambda_{i_1}-\Lambda_j)}\right)\left(e^{l(\Lambda_j-\Lambda_{i_1})}D_ee^\lambda\right)\right]\\
&= D_{s_{i_k}\cdots s_{i_{r_1+1}}}\left[\left(e^{l(\Lambda_j-\Lambda_{i_1})}D_{s_{i_{r_1}}\cdots s_{i_1}}e^{l(\Lambda_{i_1}-\Lambda_j)}\right)\left(D_ee^\lambda\right)\right]\\
&= D_{s_{i_k}\cdots s_{i_{r_2+1}}}\left[\left(D_{s_{i_{r_2}}\cdots s_{i_{r_1+1}}}\left(e^{l(\Lambda_j-\Lambda_{i_1})}D_{s_{i_{r_1}}\cdots s_{i_1}}e^{l(\Lambda_{i_1}-\Lambda_j)}\right)\right)\left(D_ee^\lambda\right)\right]
\end{aligned}$$

et ainsi de suite en utilisant alternativement que D_ee^λ est invariant par tous les D_{s_i} pour $i\neq i_1$ et que $e^{l(\Lambda_j-\Lambda_{i_1})}D_ee^\lambda$ est invariant par tous les D_{s_i} pour $i\neq j$, jusqu'à obtenir un produit de D_ee^λ par un autre "caractère" que l'on calcul. Puis on spécialise pour trouver P_w.

C'est cette méthode que nous avons utilisée dans cette partie.

6.2.1 $\widehat{sl}(2)$

Pour $\widehat{sl}(2)$, on retrouve le résultat de [25] :
Le groupe de Weyl de $\widehat{sl}(2)$ contient deux éléments de longueur $n>0$:

$$\begin{aligned}
w_k^+ &= s_{i_k}\cdots s_{i_2}s_{i_1} \quad \text{avec } i_j\equiv j+1 \bmod 2\\
w_k^- &= s_{i_k}\cdots s_{i_2}s_{i_1} \quad \text{avec } i_j\equiv j \bmod 2
\end{aligned}$$

Ce qui correspond ici à $w_k^+=w_{i_k}*\cdots*w_{i_2}*w_{i_1}$ avec $i_j\equiv j+1 \bmod 2$ et $w_k^-=w_{i_k}*\cdots*w_{i_2}*w_{i_1}$ avec $i_j\equiv j \bmod 2$. On en déduit que $\mathcal{E}=W$.

Soit $l\in\mathbb{C}$ et $\lambda\in\mathfrak{h}^{*l}$. Alors :

$$P_w(\lambda)=\begin{cases}(l+1)^{k-1}(\lambda_0+1) & \text{si } w=w_k^+ \text{ pour un } k\geq 1\\ (l+1)^{k-1}(\lambda_1+1) & \text{si } w=w_k^- \text{ pour un } k\geq 1.\end{cases}$$

6.2.2 $\widehat{sl}(3)$

Pour $\widehat{sl}(3)$, on peut montrer que les éléments de W de la forme $u * w_j$ avec $j \in [\![0,2]\!]$ s'écrivent soit e, avec $e \in \mathcal{E}$, soit $s_i e$, avec $e \in \mathcal{E}$, ayant comme terme de gauche w_i.
Pour $l \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^{*l}$. Alors :

$$P_w(\lambda) = \begin{cases} \left(\frac{(l+1)(l+2)}{2}\right)^{k-1} P_{w_{i_1}}(\lambda) \\ \qquad\qquad \text{si } w = w_{i_k} * \cdots * w_{i_1} \text{ pour un } k \geq 1 \\ (l+1)\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2}\right)^{k-1} P_{w_{i_1}}(\lambda) \\ \qquad\qquad \text{si } w = s_{i_k} w_{i_k} * \cdots * w_{i_1} \text{pour un } k \geq 1. \end{cases}$$

6.2.3 $\widehat{sl}(4)$

A partir de $\widehat{sl}(4)$ il n'est pas aisé de trouver directement l'écriture de tous les éléments de W de la forme $u * w_j$, avec $j \in [\![0,3]\!]$, à partir des éléments de $\mathcal{E}$.
Pour les déterminer nous sommes partie d'un élément w de $\mathcal{E}$ et nous avons regardé ses descentes à gauche (grâce au programme *Coxeter*), puis nous avons étudié de la même façon les $s_i w$ pour $i \notin Dg_w$.
Nous nous sommes arrété lorsque nous avons retrouvé un élément de $\mathcal{E}$ ou un élément s'écrivant de façon réduite sous la forme ve avec $e \in \mathcal{E}$ de longueur plus grande que l'élément de $\mathcal{E}$ de départ. Il n'est pas évident, a priori, que ce procédé ait une fin, c'est néanmoins le cas ici.
Le résultat obtenu est résumé dans la figure page 79. Pour simplifier nous avons considéré que $w \in \mathcal{E}$, a w_0 comme terme de gauche et nous avons écrit i au lieu de s_i. Sur chaque flèche nous avons indiqué la réflexion fondamentale que nous avons ajoutée. Enfin, nous avons calculé, pour chaque élément, son polynôme de Demazure.

Les éléments de W de la forme $u * w_j$ s'écrivent donc :

$$w = \begin{cases} e \quad \text{avec } e \in \mathcal{E}, \\ \qquad\qquad \text{alors pour } \ \lambda \in \mathfrak{h}^{*l},\ P_w(\lambda) = P_e(\lambda) \\ s_i e \quad \text{avec } e \in \mathcal{E} \text{ et } e = w_i * \cdots, \\ \qquad\qquad \text{alors our } \ \lambda \in \mathfrak{h}^{*l},\ P_w(\lambda) = (l+1)P_e(\lambda) \\ s_{i\pm 1} s_i e \quad \text{avec } e \in \mathcal{E} \text{ et } e = w_i * \cdots, \\ \qquad\qquad \text{alors pour } \ \lambda \in \mathfrak{h}^{*l},\ P_w(\lambda) = \frac{1}{2}(l+1)(l+2)P_e(\lambda) \\ s_{i+1} s_{i-1} s_i e \quad \text{avec } e \in \mathcal{E} \text{ et } e = w_i * \cdots, \\ \qquad\qquad \text{alors pour } \ \lambda \in \mathfrak{h}^{*l},\ P_w(\lambda) = \frac{1}{6}(l+1)(l+2)(2l+3)P_e(\lambda) \\ s_{i+2} s_{i+1} s_{i-1} s_i e \quad \text{avec } e \in \mathcal{E} \text{ et } e = w_i * \cdots, \\ \qquad\qquad \text{alors pour } \ \lambda \in \mathfrak{h}^{*l},\ P_w(\lambda) = \frac{1}{4}(l+1)^2(l+2)^2 P_e(\lambda) \end{cases}$$

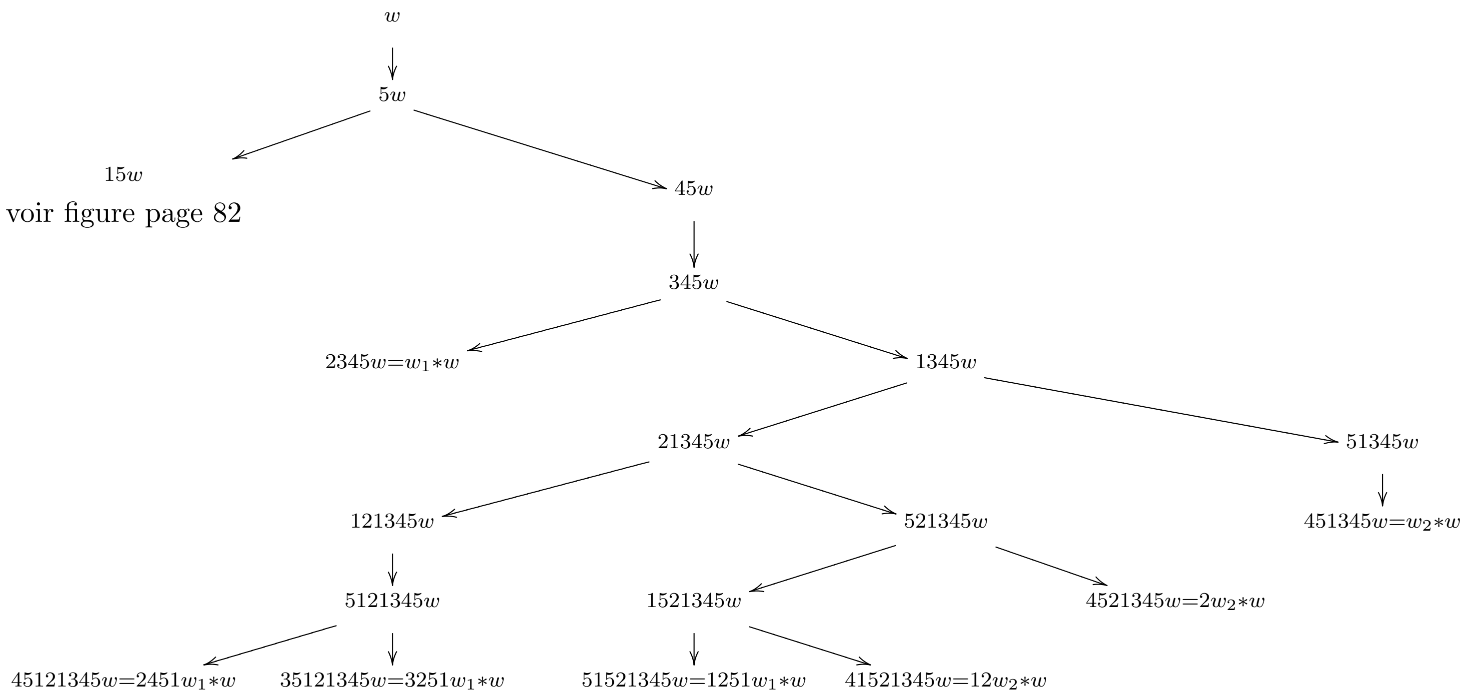
$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & \begin{array}{c} w \\ P(\lambda)=P_w(\lambda) \end{array} \arrow[d, "0"] & & \\
& & \begin{array}{c} 0w \\ P(\lambda)=(l+1)P_w(\lambda) \end{array} \arrow[dll, "1"'] \arrow[drr, "3"] & & \\
\begin{array}{c} 10w \\ P(\lambda)=\frac{1}{2}(l+1)(l+2)P_w(\lambda) \end{array} \arrow[d, "2"] \arrow[drr, "3"] & & & & \begin{array}{c} 30w \\ P(\lambda)=\frac{1}{2}(l+1)(l+2)P_w(\lambda) \end{array} \arrow[dll, "1"'] \arrow[d, "2"] \\
\begin{array}{c} 210w=w_3*w \\ P(\lambda)=P_{w_3*w}(\lambda) \end{array} & & \begin{array}{c} 310w \\ P(\lambda)=\frac{1}{6}(l+1)(l+2)(2l+3)P_w(\lambda) \end{array} \arrow[dl, "2"'] \arrow[dr, "0"] & & \begin{array}{c} 230w=w_1*w \\ P(\lambda)=P_{w_1*w}(\lambda) \end{array} \\
& \begin{array}{c} 2310w \\ P(\lambda)=\frac{1}{4}(l+1)^2(l+2)^2P_w(\lambda) \end{array} \arrow[dl, "1"'] \arrow[d, "4"] \arrow[dr, "3"] & & \begin{array}{c} 0310w=w_2*w \\ P(\lambda)=P_{w_2*w}(\lambda) \end{array} & \\
\begin{array}{c} 12310w=21w_1*w \\ P(\lambda)=\frac{1}{2}(l+1)(l+2)P_{w_1*w}(\lambda) \end{array} & \begin{array}{c} 02310w=2w_2*w \\ P(\lambda)=(l+1)P_{w_2*w}(\lambda) \end{array} & \begin{array}{c} 32310w=23w_3*w \\ P(\lambda)=\frac{1}{2}(l+1)(l+2)P_{w_3*w}(\lambda) \end{array} & &
\end{tikzcd}
$$

6.2.4 $\widehat{sl}(5)$

Nous avons utilisé ici la même méthode que pour $\widehat{sl}(4)$ et nous avons résumé les résultats obtenus dans les figures pages 81 et 82.
Pour simplifier, pour chaque élément nous n'avons indiqué qu'une seule façon de l'obtenir et nous n'avons pas mis la réflexion fondamentale ajoutée. De plus, nous n'avons pas indiqué les polynômes obtenus sur la figure, nous les avons résumés ici en écrivant i au lieu de s_i :

$$
\begin{aligned}
&P_{0w}(\lambda) = (l+1)P_w(\lambda)\\
&P_{40w}(\lambda) = \tfrac{1}{2}(l+1)(l+2)P_w(\lambda)\\
&P_{210w}(\lambda) = P_{340w}(\lambda) = \tfrac{1}{6}(l+1)(l+2)(l+3)P_w(\lambda)\\
&P_{410w}(\lambda) = \tfrac{1}{6}(l+1)(l+2)(2l+3)P_w(\lambda)\\
&P_{1340w}(\lambda) = P_{4210w}(\lambda) = \tfrac{1}{24}(l+1)(l+2)(l+3)(3l+4)P_w(\lambda)\\
&P_{0410w}(\lambda) = \tfrac{1}{12}(l+1)(l+2)^2(l+3)P_w(\lambda)\\
&P_{21340w}(\lambda) = P_{34210w}(\lambda) = \tfrac{1}{12}(l+1)^2(l+2)^2(l+3)P_w(\lambda)\\
&P_{01340w}(\lambda) = P_{04210w}(\lambda) = \tfrac{1}{24}(l+1)(l+2)^3(l+3)P_w(\lambda)\\
&P_{021340w}(\lambda) = P_{034210w}(\lambda) = \tfrac{1}{144}(l+1)^2(l+2)^2(l+3)(5l+12)P_w(\lambda)\\
&P_{121340w}(\lambda) = P_{434210w}(\lambda) = \tfrac{1}{48}(l+1)^2(l+2)^2(l+3)(l+4)P_w(\lambda)\\
&P_{234210w}(\lambda) = \tfrac{1}{36}(l+1)^2(l+2)^2(l+3)P_w(\lambda)\\
&P_{1021340w}(\lambda) = P_{4034210w}(\lambda) = P_{0234210w}(\lambda) = \tfrac{1}{72}(l+1)^2(l+2)^3(l+3)^2P_w(\lambda)\\
&P_{0121340w}(\lambda) = P_{0434210w}(\lambda) = \tfrac{1}{144}(l+1)^2(l+2)^2(l+3)(l+4)(2l+3)P_w(\lambda)\\
&P_{40234210w}(\lambda) = P_{10234210w}(\lambda) = \tfrac{1}{144}(l+1)^2(l+2)^4(l+3)^2P_w(\lambda)\\
&P_{410234210w}(\lambda) = \tfrac{1}{1728}(l+1)^2(l+2)^3(l+3)^2(7l^2+28l+24)P_w(\lambda)\\
&P_{0410234210w}(\lambda) = \tfrac{1}{432}(l+1)^3(l+2)^4(l+3)^3P_w(\lambda).
\end{aligned}
$$

Nous remarquons que le polynôme $P_{410234210w}$ est le seul polyôme calculé ici dont les racines ne soient pas rationnelles négatives. Ses racines sont -1, -2, -3 et $-2 \pm \frac{2\sqrt{7}}{7}$.



w
5w
15w
voir figure page 82
45w
345w
2345w=w1*w
1345w
21345w
51345w
121345w
521345w
451345w=w2*w
5121345w
1521345w
4521345w=2w2*w
45121345w=2451w1*w
35121345w=3251w1*w
51521345w=1251w1*w
41521345w=12w2*w

- w, $P(\lambda)=P_w(\lambda)$
  - $5w$, $P(\lambda)=(l+1)P_w(\lambda)$
    - $45w$ c.f. p.81
    - $15w$, $P(\lambda)=\frac{1}{2}(l+1)(l+2)P_w(\lambda)$
      - $215w$
        - $3215w=w_4*w$
        - $4215w$
          - $34215w$
            - $534215w$
              - $4534215w$
                - $14534215w=43w_3*w$
              - $1534215w=3w_3*w$
            - $434215w$
              - $5434215w$
                - $15434215w=1354w_4*w$
                - $25434215w=2354w_4*w$
                - $45434215w=4354w_4*w$
            - $234215w$
              - $1234215w=321w_1*w$
              - $4234215w=234w_4*w$
              - $5234215w$
                - $45234215w$
                  - $345234215w=432w_2*w$
                  - $545234215w=24354w_4*w$
                - $15234215w$
                  - $415234215w$
                    - $2415234215w=1243w_3*w$
                    - $5415234215w$
                      - $5124354w_4*w$
                      - $51243w_3*w$
                      - $51432w_2*w$
                      - $5143251w_1*w$
                    - $3415234215w=1432w_2*w$
                  - $215234215w=123w_3*w$
                  - $515234215w=13251w_1*w$
      - $415w$
        - $5415w$
          - $54215w$
            - $154215w=w_3*w$

6.3 Inversions généralisées d'un élément w de W

Nous travaillons, dans cette partie, dans un cadre plus général, $\mathfrak{g}$ sera une algèbre de Kac-Moody de type fini ou affine.

Rappelons que pour $w \in W$, l'ensemble des inversions généralisées de w est $\Delta_w = \{\alpha \in \Delta^+ \mid w^{-1}(\alpha) < 0\}$.
Puisque $\sum\limits_{\alpha \in \Delta_w} \alpha = \rho - w\rho$, l'ensemble Δ_w détermine entièrement w. De plus, on voit facilement que $\Delta_w \subset \Delta^+_{re}$. On sait que (voir [22] et [5]) :

Théorème 6.3.1 *Si $\mathfrak{g}$ est de type fini un sous-ensemble L de Δ^+ est l'ensemble des inversions généralisées d'un $w \in W$ si et seulement si :*
- *Si $\alpha, \beta \in L$ et $\alpha + \beta \in \Delta$ alors $\alpha + \beta \in L$*
- *Si $\alpha, \beta \in \Delta^+ \setminus L$ et $\alpha + \beta \in \Delta$ alors $\alpha + \beta \in \Delta^+ \setminus L$.*

Théorème 6.3.2 *Si $\mathfrak{g}$ est de type affine un sous-ensemble L de Δ^+ est l'ensemble des inversions généralisées d'un $w \in W$ si et seulement si :*
- *C'est un ensemble fini inclus dans Δ_{re}*
- *Si $\alpha, \beta \in L$ et $\alpha + \beta \in \Delta$ alors $\alpha + \beta \in L$*
- *Si $\alpha, \beta \in \Delta^+ \setminus L$ et $\alpha + \beta \in \Delta$ alors $\alpha + \beta \in \Delta^+ \setminus L$.*

Regardons plus précisément les ensembles d'inversions généralisées pour les algèbres de Kac-Moody de type affine 1.

Dans ce cas :

$$\Delta = \{\alpha + k\delta \mid \alpha \in \Delta^0,\ k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \{k\delta \mid k \in \mathbb{Z}^*\}$$

et

$$\Delta^+ = \bigcup_{\alpha \in \Delta^{0+}} \{\alpha + k\delta \mid k \in \mathbb{N}\} \bigcup \bigcup_{\alpha \in \Delta^{0-} \cup \{0\}} \{\alpha + k\delta \mid k \in \mathbb{N}^*\}.$$

Soit $\alpha \in \Delta^0$, posons $\Delta_\alpha = \Delta^+ \cap (\alpha + \mathbb{Z}\delta)$ de sorte que :

$$\Delta_\alpha = \begin{cases} \{\alpha + k\delta \mid k \in \mathbb{N}\} & \text{si } \alpha \in \Delta^{0+} \\ \{\alpha + k\delta \mid k \in \mathbb{N}^*\} & \text{si } \alpha \in \Delta^{0-}. \end{cases}$$

On a alors :

$$\Delta^+ = \bigcup_{\alpha \in \Delta^0} \Delta_\alpha \bigcup \mathbb{N}^*\delta \quad \text{et} \quad \Delta^+_{re} = \bigcup_{\alpha \in \Delta^0} \Delta_\alpha.$$

Soit $w \in W$. Puisque $\Delta_w \subset \Delta^+_{re}$ on a :

$$\Delta_w = \bigcup_{\alpha \in \Delta^0} \Delta_{w,\alpha},$$

où $\Delta_{w,\alpha} = \Delta_\alpha \cap \Delta_w$.
Soit $\alpha \in \Delta^0$ notons $w^{-1}(\alpha) = \beta - r_\alpha \delta$ avec $\beta \in \Delta^0$ et $r_\alpha \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\Delta_{w,\alpha} = \{\alpha + k\delta \mid k \in [\![\delta_{\alpha<0}, r_\alpha - \delta_{\beta>0}]\!]\},$$

où $\delta_{\alpha<0} = 1$ si $\alpha < 0$ et 0 sinon et $\delta_{\beta>0} = 1$ si $\beta > 0$ et 0 sinon.
Dans le cas où w s'écrit sous la forme $w = xt_\lambda$ avec $x \in \mathrm{W}^0$ et $\lambda \in Q^0$ (où Q^0 est le réseau des racines de $\mathfrak{g}^0$) on a pour $\alpha \in \Delta^{0+}$:

$$(xt_\lambda)^{-1}\alpha = x^{-1}\alpha - (x\lambda, \alpha)\delta.$$

Posons :

$$t_{(\alpha)} = \begin{cases} (x\lambda, \alpha) & \text{pour } \alpha \in \Delta^0_x \\ (x\lambda, \alpha) - 1 & \text{pour } \alpha \in \Delta^{0\,+} \setminus \Delta^0_x. \end{cases}$$

Alors :

$$\Delta_{xt_\lambda} = \Big(\bigcup_{\alpha\in\Delta^{0\,+}} \{\alpha + t\delta \mid 0 \le t \le t_{(\alpha)}\}\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{\alpha\in\Delta^{0\,+}} \{-\alpha + t\delta \mid 0 < t < -t_{(\alpha)}\}\Big).$$

6.4 Etude de l'ensemble $\mathcal{E}$

Considérons à nouveau $\mathfrak{g}$ de type $\widehat{sl}(r+1)$.

Définition 6.4.1 Pour une expression $w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1}$ d'un élément w de $\mathcal{E}$, on appellera **termes** de w les $w_{i_1}, \cdots, w_{i_k}$.

Cette écriture d'un élément de $\mathcal{E}$ n'est bien sûr ni unique, ni réduite. Pour avoir une écriture réduite introduisons $u_{i,j}$ l'élément $w_i w_{i,j}$, où $w_{i,j}$ est le plus long élément de $< s_k, k \in [\![0, r]\!] \setminus \{i, j\} >$.
Alors $w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1} = u_{i_k,i_{k-1}} \cdots u_{i_2,i_1} w_{i_1}$ où la deuxième écriture est réduite. En effet, par définition de $u_{i,j}$ on a

$$\begin{aligned} w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1} &= (u_{i_k,i_{k-1}} w_{i_k,i_{k-1}}) * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1} \\ &= u_{i_k,i_{k-1}} * (w_{i_k,i_{k-1}} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1}) \\ &= u_{i_k,i_{k-1}} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1} \\ &= u_{i_k,i_{k-1}} * \cdots * u_{i_2,i_1} * w_{i_1} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\ell(w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1}) \le \sum_{j=2}^{k} \ell(u_{i_j,i_{j-1}}) + \ell(w_{i_1}).$$

D'autre part, on sait que :

$$\ell(w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1}) = \deg P_{w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1}} = \sum_{j=2}^{k} \deg Q_{i_j,i_{j-1}} + \deg P_{w_{i_1}},$$

où $Q_{i_j,i_{j-1}}$ est défini page 76.
Or $\ell(u_{i,j}) = \ell(w_j) - \ell(w_{i,j}) = (r+1-|j-i|)|j-i| = \deg Q_{i,j}$ et $\ell(w_{i_1}) = \deg P_{w_{i_1}}$. Il y a donc égalité dans l'inégalité ci-dessus. On en conclut que l'écriture est réduite.

Définition 6.4.2 Pour un élément w de $\mathcal{E}$, et $w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1}$ une expression de w, l'entier k sera appelé le **nombre de termes** de w, w_{i_k} sera appelé le **terme de gauche** et w_{i_1} le **terme de droite**.

Nous verrons plus loin, au corollaire 6.4.7, que ces notions sont indépendantes de l'expression de w. La définition a donc bien un sens.

6.4.1 Caractérisation des éléments de $\mathcal{E}$ à l'aide de leur ensemble d'inversions généralisées

Rappelons que, dans un groupe de Weyl fini de type sl$(k+1)$, de racines simples $\beta_1, \cdots, \beta_k$, l'élément le plus long v_0 agit comme $v_0(\beta_i) = -\beta_{k+1-i}$. En utilisant ce résultat dans des sous-groupes finis de W, qui sont tous de ce type ou produits de groupes de ce type, ainsi que le fait que $\delta = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i$ est invariant par W, on montre que :

$$\begin{aligned} & w_i(\alpha_j) = -\alpha_{2i-j} + 2\delta_{i,j}\delta \\ & w_{i,j}(\alpha_k) = -\alpha_{i+j-k} + (\delta_{i,k} + \delta_{j,k})\delta \qquad\qquad \text{pour } i,j,k \in [\![0,r]\!] \\ & w_j w_{i,j}(\alpha_k) = \alpha_{j+k-i} + (\delta_{j,k} - \delta_{i,k})\delta. \end{aligned}$$

Lemme 6.4.3 *Soit w un élément de $\mathcal{E}$, $w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1}$ une expression de w et soit $p \in [\![1,r]\!]$. Alors :*

$$w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1}(\alpha_p) = -\alpha_{i_k+i_1-p} + \Big((k+1)\delta_{i_1,p} - \sum_{l=1}^{k-1} \delta_{i_1+i_l-i_{l+1},p}\Big)\delta.$$

Preuve : Montrons le résultat par récurrence.
Pour $k = 1$ on retrouve la formule écrite ci-dessus.
Soit $k \geq 1$ un entier fixé et supposons le résultat vrai pour les éléments de $\mathcal{E}$ qui peuvent s'écrire avec au plus k termes. (Notons que l'expression "au plus k termes", de même que plus loin l'expression "ayant une écriture avec $k+1$ termes", a bien un sens même sans avoir montré l'unicité du nombre de termes intervenant dans l'expression d'un élément de $\mathcal{E}$.)
Soit w un élément de $\mathcal{E}$ ayant une expression avec $k+1$ termes, w s'écrit :

$$w = w_{i_{k+1}} * w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1} = u_{i_{k+1},i_k} w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} w(\alpha_p) &= u_{i_{k+1},i_k}\left(-\alpha_{i_k+i_1-p}+\left((k+1)\delta_{i_1,p}-\sum_{l=1}^{k-1}\delta_{i_1+i_l-i_{l+1},p}\right)\delta\right) \\ &= -\alpha_{i_{k+1}+i_1-p}+\left((k+2)\delta_{i_1,p}-\sum_{l=1}^{k}\delta_{i_1+i_l-i_{l+1},p}\right)\delta. \end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence.

□

Par le théorème 6.3.2, on sait que les w (dans W) et les Δ_w (dans les sous-ensembles de Δ^+ ayant certaines propriétés) sont en bijection. Le théorème suivant fournit donc une caractérisation de l'ensemble $\mathcal{E}$:

Théorème 6.4.4 *L'ensemble $\mathcal{E}$ correspond à l'ensemble des w de W dont l'ensemble des inversions généralisées est de la forme :*

$$\begin{aligned} D_{i,t_0,\cdots,t_r} = &\left\{\alpha_p+\cdots+\alpha_{p+p'}+t\delta \mid 1\leq p\leq p+p'\leq r\ ,\right. \\ &\qquad \left. i\notin [\![p,p+p']\!]\ \text{et}\ 0\leq t\leq \sum_{v=p}^{p+p'}t_v\right\} \\ &\bigcup\left\{-(\alpha_p+\cdots+\alpha_{p+p'})+t\delta \mid 1\leq p\leq p+p'\leq r,\right. \\ &\qquad \left. i\in [\![p,p+p']\!]\ \ \text{et}\ 0<t<\sum_{v=0}^{p-1}t_v+\sum_{v=p+p'+1}^{r}t_v+2\right\}, \end{aligned}$$

avec $i\in[\![0,r]\!]$ et $t_0,\cdots,t_r\in\mathbb{N}$ avec $t_i=0$.

Preuve : Soit $\alpha\in\Delta^+$. Alors α s'écrit $\alpha=\varepsilon(\alpha_p+\cdots+\alpha_{p+p'})+t\delta$ avec $1\leq p\leq p+p'\leq r$ et soit $\varepsilon=1$ et $t\in\mathbb{N}$, soit $\varepsilon=-1$ ou 0 et $t\in\mathbb{N}^*$.

Soit $w\in\mathcal{E}$ et $w_{i_k}*w_{i_{k-1}}*\cdots*w_{i_1}$ une expression de w. Alors :

$$\begin{aligned} w^{-1}(\alpha) = &-\varepsilon(\alpha_{i_1+i_k-p}+\cdots+\alpha_{i_1+i_k-p-p'})+ \\ &\left(\varepsilon\Big((k+1)\delta_{i_k\in[\![p,p+p']\!]}-\sum_{l=1}^{k-1}\delta_{i_k+i_{l+1}-i_l\in[\![p,p+p']\!]}\Big)+t\right)\delta, \end{aligned}$$

où $\delta_{i\in[\![p,p+p']\!]}=1$ si i est dans l'intervalle $[\![p,p+p']\!]$ et 0 sinon.

Dans quel cas a-t-on $w^{-1}(\alpha) < 0$?
Si $\varepsilon = 0$, alors $w^{-1}(\alpha)$ ne peut pas être négative.
Si $\varepsilon = 1$ (et $t \geq 0$) alors :

$$\begin{aligned} w^{-1}(\alpha) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (k+1)\delta_{i_k \in [\![p,p+p']\!]} - \textstyle\sum_{l=1}^{k-1} \delta_{i_k+i_{l+1}-i_l \in [\![p,p+p']\!]} + t \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq t \leq \textstyle\sum_{l=1}^{k-1} \delta_{i_k+i_{l+1}-i_l \in [\![p,p+p']\!]} - (k+1)\delta_{i_k \in [\![p,p+p']\!]}. \end{aligned}$$

Si $\varepsilon = -1$ (et $t > 0$) alors :

$$\begin{aligned} w^{-1}(\alpha) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -(k+1)\delta_{i_k \in [\![p,p+p']\!]} + \textstyle\sum_{l=1}^{k-1} \delta_{i_k+i_{l+1}-i_l \in [\![p,p+p']\!]} + t < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < t < -\textstyle\sum_{l=1}^{k-1} \delta_{i_k+i_{l+1}-i_l \in [\![p,p+p']\!]} + (k+1)\delta_{i_k \in [\![p,p+p']\!]}. \end{aligned}$$

Pour $0 \leq v \leq r$ posons $t_v = |\{l \in [\![1, k-1]\!] \mid i_k + i_{l+1} - i_l \equiv v \bmod r+1)\}|$.
Remarquons que comme $w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1}$est une expression de w on a $i_{l+1} \neq i_l$ pour $l \in [\![1, k-1]\!]$ et donc $t_{i_k} = 0$. De plus $\sum\limits_{v=0}^{r} t_v = k-1$.

Alors :

$$\begin{aligned} \Delta_w \quad = \quad &\Bigg\{ \alpha_p + \cdots + \alpha_{p+p'} + t\delta \mid 1 \leq p \leq p+p' \leq r, \\ &\qquad i_k \notin [\![p, p+p']\!] \text{ et } 0 \leq t \leq \sum_{v=p}^{p+p'} t_v \Bigg\} \\ &\bigcup \Bigg\{ -(\alpha_p + \cdots + \alpha_{p+p'}) + t\delta \mid 1 \leq p \leq p+p' \leq r,\ i_k \in [\![p, p+p']\!] \\ &\qquad \text{et } 0 < t < \sum_{v=0}^{p-1} t_v + \sum_{v=p+p'+1}^{r} t_v + 2 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Réciproquement, soit $i \in [\![0,r]\!]$ et $t_0, \cdots, t_r \in \mathbb{N}$ avec $t_i = 0$. Posons

$$D_{i,t_0,\cdots,t_r} = \Bigg\{ \alpha_p + \cdots + \alpha_{p+p'} + t\delta \mid 1 \leq p \leq p+p' \leq r$$

$$i \notin [\![p, p+p']\!] \text{ et } 0 \leq t \leq \sum_{v=p}^{p+p'} t_v \Bigg\}$$

$$\bigcup \Bigg\{ -(\alpha_p + \cdots + \alpha_{p+p'}) + t\delta \mid 1 \leq p \leq p+p' \leq r \ i \in [\![p, p+p']\!]$$

$$\text{et } 0 < t < \sum_{v=0}^{p-1} t_v + \sum_{v=p+p'+1}^{r} t_v + 2 \Bigg\}.$$

Alors $D_{i,t_0,\cdots,t_r} = \Delta_w$ avec par exemple :

$$w = w_i * \underbrace{w_{i+1} * \cdots * w_{i+t_{i+1}}}_{saut\ de\ 1} * \underbrace{w_{i+t_{i+1}+2} * \cdots * w_{i+t_{i+1}+2t_{i+2}}}_{saut\ de\ 2} * \cdots$$
$$\cdots * w_{i+t_{i+1}+2t_{i+2}+\cdots+rt_r+(r+1)t_0+\cdots+(r+i)t_{i-1}}.$$

□

Corollaire 6.4.5 *L'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ dont le terme de gauche est w_0 correspond à l'ensemble des $w \in W$ dont l'ensemble des inversions généralisées est de la forme :*

$$D_{0,t_0,\cdots,t_r} = \left\{ \alpha_p + \cdots + \alpha_{p+p'} + t\delta \mid 1 \leq p \leq p+p' \leq r \ et \ 0 \leq t \leq \sum_{v=p}^{p+p'} t_v \right\}.$$

Corollaire 6.4.6 *Un élément de $\mathcal{E}$, $w = w_{i_k} * \cdots * w_{i_1}$ est uniquement caractérisé par i_1 et par les $t'_v = |\{l \in [\![1, k-1]\!] \mid i_{l+1} - i_l \equiv v \ mod \ \ r+1\}|$ pour $v \in [\![1, r]\!]$.*

En écrivant $k = \sum_{v=1}^{r} t'_v$ et $w_{i_k} = w_{i_1 + \sum_{v=1}^{r} vt'_v}$ on voit que :

Corollaire 6.4.7 *Le nombre de termes, ainsi que les termes de gauche et de droite sont indépendants de l'écriture d'un élément de $\mathcal{E}$.*

6.4.2 Caractérisation des éléments de $\mathcal{E}$ par leur écriture sous la forme xt_λ

Le groupe de Weyl W s'écrit $W = \mathrm{W}^0 \ltimes T$. Dans cette partie nous allons caractériser les éléments de $\mathcal{E}$ par leur écriture sous la forme xt_λ avec $x \in \mathrm{W}^0$ et $t_\lambda \in T$.

Théorème 6.4.8 *L'ensemble $\mathcal{E}$ de W est l'ensemble des w de W qui s'écrivent sous l'une des formes suivantes :*
- $w = w_0 t_\lambda$ *avec* $\lambda \in Q^0$, $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \Lambda_i^0$, *tel que*
  - $*$ *soit* $\lambda_k \leq 0$ *pour* $k \in [\![1, r]\!]$
  - $*$ *soit* $\lambda_k \leq 0$ *pour* $k \in [\![1, r]\!] \setminus \{a\}$ *et* $\lambda_a \geq 2 - \sum_{v \in [\![1,r]\!] \setminus \{a\}} \lambda_v$
- $w = w_{0,j} t_\lambda$ *avec* $j \in [\![1, r]\!]$ *et* $\lambda \in Q^0$, $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \Lambda_i^0$, *tel que*
  - $*$ *soit* $\lambda_k \leq 0$ *pour* $k \in [\![1, r]\!]$, *et* $\lambda_j < 0$
  - $*$ *soit* $\lambda_k \leq 0$ *pour* $k \in [\![1, r]\!] \setminus \{a\}$, *avec* $a \neq j$, $\lambda_j < 0$ *et* $\lambda_a \geq 1 - \sum_{v \in [\![1,r]\!] \setminus \{a\}} \lambda_v$
  - $*$ *soit* $\lambda_k \leq 0$ *pour* $k \in [\![1, r]\!] \setminus \{j\}$, *et* $\lambda_j \geq 1 - \sum_{v \in [\![1,r]\!] \setminus \{j\}} \lambda_v$.

Preuve : Remarquons que l'on a ici $(\lambda, \alpha_k) = \langle \lambda, \alpha_k^\vee \rangle = \lambda_k$, pour $k \in [\![1, r]\!]$. Soit w un éléments de $\mathcal{E}$ dont le terme de gauche est w_i pour $i \in [\![0, r]\!]$. On sait par le théorème 6.4.4 que :

$$
\begin{aligned}
D_{i,t_0,\cdots,t_r} = & \Bigg\{ \alpha_p + \cdots + \alpha_{p+p'} + t\delta \mid 1 \leq p \leq p + p' < i \text{ ou} \\
& \qquad i < p \leq p + p' \leq r \text{ et } 0 \leq t \leq \sum_{v=p}^{p+p'} t_v \Bigg\} \\
& \bigcup \Bigg\{ -(\alpha_p + \cdots + \alpha_{p+p'}) + t\delta \mid 1 \leq p \leq i \leq p + p' \leq r \\
& \qquad \text{et } 0 < t < \sum_{v=0}^{p-1} t_v + \sum_{v=p+p'+1}^{r} t_v + 2 \Bigg\}, \qquad (6.2)
\end{aligned}
$$

pour $t_0, \cdots, t_r \in \mathbb{N}$ et $t_i = 0$.
Soit $x \in \mathrm{W}^0$ et $\lambda \in Q^0$. Comme on l'a vu dans la partie 6.3 on a

$$\Delta_{xt_\lambda} = \Big(\bigcup_{\alpha \in \Delta^{0\,+}} \{\alpha + t\delta \mid 0 \leq t \leq t_{(\alpha)}\} \Big) \bigcup \Big(\bigcup_{\alpha \in \Delta^{0\,+}} \{-\alpha + t\delta \mid 0 < t < -t_{(\alpha)}\} \Big).$$

Regardons à quelle condition on a égalité des deux ensembles d'inversions généralisées. Pour $m \in [\![1, r]\!] \setminus \{i\}$ on doit avoir l'égalité des ensembles Δ_{w,α_m} et $\Delta_{xt_\lambda,\alpha_m}$, pour cela on doit avoir $t_m = t_{(\alpha_m)}$.
On a, de plus, d'une part :

$$t_{(\alpha_p + \cdots + \alpha_{p+p'})} = \sum_{v=p}^{p+p'} t_v = \sum_{v=p}^{p+p'} t_{(\alpha_v)}$$

pour $i \leq p \leq p+p' \leq r$ et $1 \leq p \leq p+p' \leq i$ d'après l'égalité des ensembles $\Delta_{w,\alpha_p+\cdots+\alpha_{p+p'}}$ et $\Delta_{xt_\lambda,\alpha_p+\cdots+\alpha_{p+p'}}$. Par définition de $t_{(\alpha)}$ ceci n'est possible que s'il existe au plus un $j \in [\![1, i-1]\!]$ et au plus un $j \in [\![i+1, r]\!]$ tel que $t_{(\alpha_j)} = (x\lambda, \alpha_i) - 1$ i.e. tel que $\alpha_j \notin \Delta_x^0$.
On a, d'autre part, (si $i \in [\![1, r]\!]$) pour $1 \leq p \leq i \leq p+p' \leq r$:

$$-t_{(\alpha_p+\cdots+\alpha_{p+p'})} = \sum_{v=0}^{p-1} t_v + \sum_{v=p+p'+1}^{r} t_v + 2 = k+1 - \sum_{v=p}^{p+p'} t_v$$

où k est le nombre de termes de w, d'après l'égalité des deux ensembles $\Delta_{w,-(\alpha_p+\cdots+\alpha_{p+p'})}$ et $\Delta_{xt_\lambda,-(\alpha_p+\cdots+\alpha_{p+p'})}$. Ceci n'est possible que s'il existe au plus un $j \in [\![1, r]\!]$ tel que $\alpha_j \notin \Delta_x^0$.
De plus, si $\alpha_j \notin \Delta_x^0$ pour avoir égalité on doit avoir $\alpha_p + \cdots + \alpha_{p+p'} \notin \Delta_x^0$ dès que $p \leq j \leq p+p'$.

On a donc :
• Soit il n'existe aucun $j \in [\![1, r]\!]$ tel que $\alpha_j \notin \Delta_x^0$. Alors $\Delta_x^0 = \Delta^{0\,+}$, donc $x = w_0$. Dans ce cas on a :

$*$ Si $i = 0$. Pour tout $m \in [\![1, r]\!]$, $t_{(\alpha_m)} = t_m \geq 0$ implique que $(\lambda, w_0\alpha_m) \geq 0$ et donc $(\lambda, \alpha_{r+1-m}) \leq 0$.

$*$ Si $i \in [\![1, r]\!]$. Pour tout $m \in [\![1, r]\!] \setminus \{i\}$, $t_{(\alpha_m)} = t_m \geq 0$ implique que $(\lambda, w_0\alpha_m) \geq 0$ et donc $(\lambda, \alpha_{r+1-m}) \leq 0$.
Pour $m = i$, $t_{(\alpha_i)} = -(k+1) + t_i = -(k+1)$ car $t_i = 0$. Donc $(\lambda, w_0\alpha_i) = -(k+1)$, d'où $(\lambda, \alpha_{r+1-i}) = k+1$. Comme $k - 1 = \sum_{v=0}^{r} t_v$, cela implique que $(\lambda, \alpha_{r+1-i}) \geq 2 + \sum_{v\in[\![1,r]\!]\setminus\{i\}} t_v = 2 - \sum_{v\in[\![1,r]\!]\setminus\{i\}} (\lambda, \alpha_{r+1-v})$.

• Soit il existe un $j \in [\![1, r]\!]$ unique tel que $\alpha_j \notin \Delta_x^0$. Alors $\Delta_x^0 = \{\alpha_p + \cdots + \alpha_{p+p'} \mid 1 \leq p \leq p+p' \leq r \text{ et } j \notin [\![p, p+p']\!]\}$, donc $x = w_{0,j}$. Dans ce cas on a :

$*$ Si $i = 0$. Pour tout $m \in [\![1, r]\!] \setminus \{j\}$, $t_{(\alpha_m)} = t_m \geq 0$ implique que $(\lambda, w_{0,j}\alpha_m) \geq 0$ et donc $(\lambda, \alpha_{j-m}) \leq 0$.
Pour $m = j$, $t_{(\alpha_j)} = t_j \geq 0$ implique que $(\lambda, w_{0,j}\alpha_j) - 1 \geq 0$ et donc $(\lambda, \alpha_0) < 0$. Or $(\lambda, \delta) = 0$ donc $(\lambda, \alpha_0) = -\sum_{k=1}^{r} (\lambda, \alpha_k)$. La condition est donc équivalente à $(\lambda, \alpha_j) > -\sum_{k\in[\![1,r]\!]\setminus\{j\}} (\lambda, \alpha_k)$.

$*$ Si $i \in [\![1, r]\!]$. Pour tout $m \in [\![1, r]\!] \setminus \{i, j\}$, $t_{(\alpha_m)} = t_m \geq 0$ implique que $(\lambda, w_{0,j}\alpha_m) \geq 0$ et donc $(\lambda, \alpha_{j-m}) \leq 0$.

– Si $i \neq j$. Pour $m = j$, $t_{(\alpha_j)} = t_j \geq 0$ implique que $(\lambda, w_{0,j}\alpha_j) - 1 \geq 0$ et donc $(\lambda, \alpha_0) < 0$. Comme ci-dessus la condition est équivalente à

$(\lambda, \alpha_{j-i}) > -\sum_{k\in[\![1,r]\!]\setminus\{j-i\}} (\lambda, \alpha_k)$.
Pour $m = i$, $t_{(\alpha_i)} = -(k+1)$ i.e. $(\lambda, w_{0,j}\alpha_i) = -(k+1)$, d'où $(\lambda, \alpha_{j-i}) = k+1$. Comme $k-1 = \sum_{v=0}^{r} t_v$, cela implique que $(\lambda, \alpha_{j-i}) \geq 2 + \sum_{v\in[\![1,r]\!]\setminus\{i\}} t_v = 1 - \sum_{v\in[\![1,r]\!]\setminus\{i\}}(\lambda, \alpha_{j-v}) = 1 + (\lambda, \alpha_{j-i}) + (\lambda, \alpha_j)$ c'est-à-dire $(\lambda, \alpha_j) < 0$.

– Si $i = j$. Pour $m = i = j$, $t_{(\alpha_i)} = -(k+1)$ i.e. $(\lambda, w_{0,i}\alpha_i) - 1 = -(\lambda, \alpha_0) - 1 = -(k+1)$, cela implique que $(\lambda, \alpha_0) \geq 1 + \sum_{v\in[\![1,r]\!]\setminus\{i\}} t_v = 1 - \sum_{v\in[\![1,r]\!]\setminus\{i\}}(\lambda, \alpha_{i-v})$. Ce qui est équivalent à $(\lambda, \alpha_i) < 0$.

Réciproquement, pour chacune des formes de xt_λ données dans l'énoncé on peut, en faisant un raisonnement analogue à celui ci-dessus, associer un $i \in [\![0, r]\!]$ et des t_v avec $t_i = 0$ tel que $\Delta_{xt_\lambda} = D_{i,t_0,\cdots,t_r}$ et ainsi trouver un $w \in \mathcal{E}$ tel que $w = xt_\lambda$.

□

6.4.3 Densité de $\mathcal{E}$ dans W

Soit M un système symétrique de générateurs de W. On définit une métrique sur W en prenant comme boule pour $n \in \mathbb{N}$, $B(n) = \{w \in W \mid w = m_1 \cdots m_k \ \text{ avec } \ m_i \in M \text{ et } k \leq n\}$.

Définition 6.4.9 On appelera **densité**, pour le système symétrique de générateurs M, d'un ensemble E de W, la limite, si elle existe :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|E \cap B(n)|}{|B(n)|}.$$

On appelle densité naturelle (ou densité pour l'orde de Bruhat) la densité pour le système de génerateur $s_0, \cdots, s_r$.

Lemme 6.4.10 *Pour le système de générateurs $s_0, \cdots, s_r$, on a $B(n) = \{w \in W \mid \ell(w) \leq n\}$ et :*

$$|B(n)| \sim \frac{n^r(r+1)}{r!}.$$

Preuve : D'après [14] paragraphes 8.9. et 3.16., on voit que :

$$W(t) = \sum_{w\in W} t^{\ell(w)} = \frac{\sum_{i=0}^{r} t^i}{(1-r)^r} = \Big(\sum_{i=0}^{r} t^i\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} C_{r+k-1}^{r-1} t^k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

avec $a_k = \sum_{j=k-r}^{k} C_{r+j-1}^{r-1} = \sum_{j=0}^{k} C_{r+j-1}^{r-1} - \sum_{j=0}^{k-r-1} C_{r+j-1}^{r-1} = C_{r+k}^{r} - C_{k-1}^{r}$ pour $k \geq r+1$. On a donc pour $n \geq r+1$:

$$\begin{aligned} |B(n)| &= \sum_{k=r+1}^{n} a_k + |B(r)| = \sum_{k=r+1}^{n} C_{r+k}^{r} - \sum_{k=r+1}^{n} C_{k-1}^{r} + |B(r)| \\ &= C_{n+r+1}^{r+1} - C_{n}^{r+1} + (|B(r)| - C_{2r+1}^{r+1}) \\ &= \tfrac{1}{(r+1)!}\left(\tfrac{(n+r+1)!}{n!} - \tfrac{n!}{(n-r-1)!}\right) + (|B(r)| - C_{2r+1}^{r+1}) \end{aligned}$$

En utilisant, un développement asymptotique de $n!$, $(n+r+1)!$ et $(n-r-1)!$ on obtient que :

$$|B(n)| \sim \frac{n^r(r+1)}{r!}.$$

□

Lemme 6.4.11 *Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^{0*}$, $\lambda = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \Lambda_i^0$, posons $m_i(\lambda) = \sum_{k=1}^{i} \lambda_k$ pour $i \in [\![1,r]\!]$ et $m_0(\lambda) = 0$. Soit C^0 la chambre fondamentale de $\mathfrak{g}^0$. Alors pour $w \in \mathrm{W}^0$,*

$$wC^0 = \{\lambda \in \mathfrak{h}^{0*} \mid m_{w(0)}(\lambda) < m_{w(1)}(\lambda) < \cdots < m_{w(r)}(\lambda)\},$$

où on a identifié w et son image dans S_{r+1} par l'isomorphisme naturel.

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} C^0 &= \{\lambda \in \mathfrak{h}^{0*} \mid \forall i \in [\![1,r]\!],\ \lambda_i > 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathfrak{h}^{0*} \mid m_0(\lambda) < m_1(\lambda) < \cdots < m_r(\lambda)\}. \end{aligned}$$

De plus, soit $i \in [\![1,r]\!]$, alors :

$$\begin{cases} (s_i\lambda)_k = \lambda_k & \text{si } k \in [\![1,r]\!] \setminus \{i, i\pm 1\} \\ (s_i\lambda)_i = -\lambda_i & \\ (s_i\lambda)_{i\pm 1} = \lambda_{i\pm 1} + \lambda_i. & \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} m_k(s_i\lambda) = m_k(\lambda) & \text{si } k \in [\![1,r]\!] \setminus \{i, i-1\} \\ m_{i-1}(s_i\lambda) = m_i(\lambda) & \\ m_i(s_i\lambda) = m_{i-1}(\lambda). & \end{cases}$$

La réflexion s_i échange donc m_i et m_{i-1}. On en déduit que pour $w \in \mathrm{W}^0$,

$$wC^0 = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid m_{w(0)}(\lambda) < m_{w(1)}(\lambda) < \cdots < m_{w(r)}(\lambda)\},$$

où on a identifié w et son image dans S_{r+1} par l'isomorphisme naturel.

□

Proposition 6.4.12 *La densité naturelle de l'ensemble $\mathcal{E}$ dans W est* $\dfrac{1}{r!^2}$.

Preuve : Soit $\lambda \in Q^0$. La condition $\lambda_k \leq 0$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$ équivaut à la condition pour que λ appartienne à l'adhérence de la chambre $w_0 C^0$.
Etudions la condition :

$$(*) \begin{cases} (1) \quad \forall k \in [\![1, r]\!] \setminus \{a\} \quad \lambda_k \leq 0 \\ (2) \quad \lambda_a \geq -\sum_{k \in [\![1,r]\!] \setminus \{a\}} \lambda_k. \end{cases}$$

En reprenant les notations du lemme précédent, (1) équivaut à $m_0(\lambda) \geq \cdots \geq m_{a-1}(\lambda)$ et $m_a(\lambda) \geq \cdots \geq m_r(\lambda)$. Comme $m_r(\lambda) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = \lambda_a + \sum_{k \in [\![1,r]\!] \setminus \{a\}} \lambda_k$, on voit que (2) équivaut à $m_r \geq 0$. Donc $(*)$ équivaut à

$$m_a(\lambda) \geq \cdots \geq m_r(\lambda) \geq m_0(\lambda) \geq \cdots \geq m_{a-1}(\lambda),$$

ce qui caractérise l'adhérence d'une chambre de Weyl d'après le lemme précédent.

On en déduit que chacune des conditions d'inégalités énoncées pour λ dans le théorème 6.4.8 correspond à la condition pour que λ appartienne à l'adhérence d'une chambre de Weyl privée éventuellement d'un nombre fini d'hyperplans. On remarque, de plus, que les chambres intervenant pour $x = w_0$ sont distinctes. Il en est de même pour celles intervenant pour $x = w_{0,j}$.
Pour écrire un élément de $\mathcal{E}$ sous la forme $x t_\lambda$ avec $x \in \mathrm{W}^0$ et $\lambda \in Q^0$ on a donc $r+1$ choix pour x. Une fois x fixé, dans chacun des cas, λ appartient, au choix, à $r+1$ sous-ensembles distincts de Q^0, chacun correspondant à l'adhérence d'une chambre de Weyl privée d'un nombre fini d'hyperplans.
Soit $w \in \mathrm{W}^0$ et $\lambda \in Q^0$, on a $t_{w\lambda} = w t_\lambda w^{-1}$. D'où pour $w \in \mathrm{W}^0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, en identifiant λ et t_λ on a :

$$C^0 \cap B(n - 2\ell(w)) \subset wC^0 \cap B(n) \subset C^0 \cap B(n + 2\ell(w)),$$

et donc :

$$C^0 \cap B(n - r(r+1)) \subset wC^0 \cap B(n) \subset C^0 \cap B(n + r(r+1)).$$

Par le lemme 6.4.10, on a $|B(n)| \sim \frac{n^r(r+1)}{r!}$. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} \frac{|B(n+k)|}{|B(n)|} = 1$, pour k un entier fixé. On en déduit que la densité de chaque chambre de Weyl est la même. Comme il y a $(r+1)!$ chambres de Weyl et que $|\,\mathrm{W}^0\,| = (r+1)!$, on en conclut que la densité de $\mathcal{E}$ est $\dfrac{1}{r!^2}$.

□

Remarque 6.4.13 La densité est encore $\dfrac{1}{r!^2}$ lorsque l'on prend un système symétrique fini de générateurs tel que chaque sous-ensemble de T où les vecteurs de translations décrivent une chambre de Weyl donnée soient de même densité. Il semble probable que ce soit le cas pour tous les systèmes symétriques finis de générateurs.

Notons encore B les boules associées au système de générateurs $s_0, \cdots, s_r$. Soit $W(t)$ la série $W(t) = \sum\limits_{w \in W} t^{\ell(w)} = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |B(n)| t^n$. Par le lemme 6.4.10, on sait que son rayon de convergence est 1 et qu'elle diverge en 1. Pour E un sous-ensemble de W, on défini $E(t) = \sum\limits_{w \in E} t^{\ell(w)}$. On appelle densité analytique de E, la limite, si elle existe, $\lim\limits_{t \to 1^-} \frac{E(t)}{W(t)}$.
La proposition suivante fournit un résultat analogue à l'énoncé de [27] paragraphe VI.4.5.

Proposition 6.4.14 *Si E, un sous-ensemble de W, a une densité naturelle, alors il a une densité analytique et les deux densités sont égales.*

Preuve : Soit E un sous-ensemble de W ayant une densité naturelle. Notons $E(t) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} e_n t^n$, $W(t) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} v_n t^n$, $E_n = \sum\limits_{k=0}^{n} e_n$ et $W_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_n$. Notons c la densité naturelle de E, c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{E_n}{W_n}$. Soit $t \in \mathbb{R}$, $|t| < 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{E(t)}{W(t)} &= \frac{E(t)}{(1-t)} \frac{(1-t)}{W(t)} \\
&= \frac{(\sum_{n=0}^{\infty} e_n t^n)(\sum_{n=0}^{\infty} t^n)}{(\sum_{n=0}^{\infty} t^n)(\sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n)} \\
&= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n}.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{E_n}{W_n} = c$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$, $|\frac{E_n}{W_n} - c| < \varepsilon$, et donc $E_n = cW_n + \varepsilon_n W_n$ avec $|\varepsilon_n| < \varepsilon$. On a donc :

$$\frac{E(t)}{W(t)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n} = \frac{\sum_{n=0}^{N} (E_n - cW_n) t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n} + c + \frac{\sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n W_n t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n}$$

Or $\left| \frac{\sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n W_n t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n} \right| < \varepsilon$ et $\frac{\sum_{n=0}^{N} (E_n - cW_n) t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n}$ tend vers 0 lorsque t tend vers 1 par valeurs inférieurs. On en déduit que $\lim\limits_{t \to 1^-} \frac{E(t)}{W(t)} = c$. L'ensemble E a donc une densité analytique et elle est égale à la densité naturelle. $\square$

Par la proposition précédente, on sait que $\mathcal{E}$ a comme densité analytique $\frac{1}{r!^2}$. On peut démontrer directement ce résultat :

Proposition 6.4.15 *La série formelle* $\mathcal{E}(t) = \sum_{w\in\mathcal{E}} t^{\ell(w)}$ *vaut :*

$$\mathcal{E}(t) = (r+1)t^{\frac{(r+1)r}{2}} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1-t^{(r+1-i)i}}.$$

La densité analytique de $\mathcal{E}$ *dans* W *est* $\frac{1}{r!^2}$.

Preuve : Soit $e \in \mathcal{E}$, $w_{i_k} * w_{i_{k-1}} * \cdots * w_{i_1}$ une expression de e. Comme on l'a vu e est caractérisé par i_1 et les $t_i = |\{l \in [\![1, k-1]\!] \mid i_{l+1} - i_l \equiv i \bmod r+1\}|$, pour $i \in [\![1, r]\!]$ et $\ell(e) = \ell(w_{i_1}) + \sum_{i=1}^{r} t_i(r+1-i)i$ car $\ell(u_{i,j}) = (r+1-|i-j|)|i-j|$. Donc $|\{e \in \mathcal{E} \mid \ell(e) = N + \ell(w_0)\}| = (r+1)|\{t_1, \cdots, t_r \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{r} t_i(r+1-i)i = N\}|$, la multiplication par $r+1$ correspondant au choix de i_1. On en déduit que :

$$\mathcal{E}(t) = (r+1)t^{\frac{(r+1)r}{2}} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1-t^{(r+1-i)i}}.$$

Posons $X = t-1$. Alors pour $i \in [\![1, r]\!]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t^{(r+1-i)i}} &= \frac{1}{1-(X+1)^{(r+1-i)i}} \\ &= \frac{-1}{\sum_{j=1}^{(r+1-i)i} C^{j}_{(r+1-i)i} X^j} \\ &\sim \frac{-1}{(r+1-i)iX} \text{ en } 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{E}(X+1) \sim \frac{(-1)^r(r+1)}{X^r r!^2}.$$

D'après [14] paragraphes 8.9. et 3.16., on voit que :

$$W(t) = \sum_{w\in W} t^{\ell(w)} = \frac{(-1)^r \sum_{i=0}^{r} t^i}{(t-1)^r}.$$

Donc $W(X+1) \sim \frac{(-1)^r(r+1)}{X^r}$, d'où

$$\frac{\mathcal{E}(X+1)}{W(X+1)} \sim \frac{1}{r!^2} \quad \text{en } 0$$

□

Lemme 6.4.16 *Soit* E *un sous-ensemble de* W *et* M *un système symétrique fini de générateurs de* W*. Si la densité de* E *pour* M *est non nulle, alors pour tout système symétrique fini de générateur de* W *la densité de* E*, est non nulle.*

Preuve : Soit M_1 un système symétrique fini de générateurs de W. Notons B_1 les boules associées à ce système. Notons B les boules associées à S (l'ensemble des réflexions simples). Comme M_1 est fini, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M_1 \subset B(n_0)$. De même, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $S \subset B_1(n_1)$.

Soit E un sous-ensemble de W. Alors :

$$|E \cap B(n/n_1)| \leq |E \cap B_1(n)| \leq |E \cap B(nn_0)|$$

$$|B(n/n_1)| \leq |B_1(n)| \leq |B(nn_0)|.$$

Donc :

$$\frac{|E \cap B(n/n_1)|}{|B(n/n_1)|}\frac{|B(n/n_1)|}{|B(nn_0)|} \leq \frac{|E \cap B_1(n)|}{|B_1(n)|} \leq \frac{|E \cap B(nn_0)|}{|B(nn_0)|}\frac{|B(nn_0)|}{|B(n/n_1)|}.$$

Par le lemme 6.4.10, on a $|B(n)| \sim \frac{n^r(r+1)}{r!}$. En conséquence, $\frac{|B(n/n_1)|}{|B(nn_0)|}$ et $\frac{|B(nn_0)|}{|B(n/n_1)|}$ tendent vers des limites finies et non nulles quand n tend vers l'infini. En considérant l'inégalité de droite, on en déduit que si E a une densité non nulle pour M_1, il en est de même pour S. En considérant l'inégalité de gauche, on en déduit que si E a une densité non nulle pour S, il en est de même pour M_1. D'où le résultat pour tous les systèmes finis de générateurs. □

On en déduit que :

Proposition 6.4.17 *Pour tout système symétrique fini de générateurs, la densité de l'ensemble $\mathcal{E}$ est non nulle.*

Index

Liste des symboles

Bibliographie

[1] E. ABE, *Hopf Algebras,* Cambridge, Cambridge University Press, (1977).

[2] A. BLANCHARD, *Les Corps non Commutatifs,* Paris, Presses Universitaire de France, (1972).

[3] N. BOURBAKI, *Groupes et Algèbres de Lie, chap. 4, 5, 6,* Paris, Hermann, (1968).

[4] N. BOURBAKI, *Algèbres, chap. 1, 2, 3,* Paris, Hermann, (1970).

[5] P. CELLINI et P. PAPI, *The Structure of Total Reflections Orders in Affine Root Systems,* Journal of Alg., 205, (1998), p.207-226.

[6] M. DEMAZURE, *Invariants Symétriques Entiers des Groupes de Weyl et Torsion,* Invent. Math., 21, (1973), p.287-301.

[7] M. DEMAZURE, *Une Nouvelle Formule des Caractères,* Bull. Sci. Math., 98, (1974), p.163-172.

[8] M. DEMAZURE, *Désingularisation des Variétés de Schubert Généralisées,* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 7, (1974), p.53-88.

[9] W. FULTON et J. HARRIS, *Representation Theory,* Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, (1991).

[10] M. GECK et G. PFEIFFER, *Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke Algebras,* Oxford, Clarendon Press, (2000).

[11] S.G. HULSURKAR, *Proof of Verma's Conjecture on Weyl's Dimension Polynomial,* Invent. Math., 27, (1974), p.45-52.

[12] J.E. HUMPHREYS, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory,* Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, (1972).

[13] J. HUMPHREYS, *Linear Algebraic Groups,* Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, (1987 troisième édition).

[14] J. HUMPHREYS, *Reflection Groups and Coxeter Groups,* Cambridge, Cambridge University Press, (1990).

[15] A. JOSEPH, *On the Demazure Character Formula,* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 18, (1985), p.389-419.

[16] V.G. KAC, *Infinite Dimensional Lie Algebras,* Cambridge, Cambridge University Press, (1995 troisième édition).

[17] S. KUMAR, *Demazure Character Formula in Arbitrary Kac-Moody Setting,* Invent. Math., 89, (1987), p.395-423.

[18] S. LANG, *Algebra,* New York, Addison-Wesley Publishing Company, (1974 sixième édition).

[19] G. LUSZTIG, *The Two-Sided Cells of the Affine Weyl Group of Type* $\widetilde{A}_n$ in *Infinite Dimensional Groups with application* (Ed. V.G. Kac), New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, Springer-Verlag, (1985), p.275-283.

[20] O. MATHIEU, *Formules de Caractères pour les Algèbres de Kac-Moody Générales,* Astérisque, Société Mathématiques de France, 159-160, (1988).

[21] O. MATHIEU, *Positivity of some Intersection in* $K_0(G/B)$*,* Journal of Pure and Appl. Alg., 152, (2000), p.231-243.

[22] P. PAPI, *A Characterisation of a Special Ordering in a Root System,* Proc. of the Amer. Math. Soc., 120 n3, (1994), p.661-665.

[23] P. PAPI, *Convex Ordering in Affine Root Systems,* Jounal of Alg., 172, (1995), p.613-623.

[24] P. PAPI, *Convex Ordering in Affine Root Systems II,* Jounal of Alg., 186, (1996), p.72-91.

[25] Y. SANDERSON, *Dimension of Demazure Modules for Rank Two Affines Lie Algebras,* Compos. Math., 101, (1996), p.115-131.

[26] Y. SANDERSON, *Real Characters for Demazure Modules of Rank Two Affines Lie Algebras,* Journal of Alg., 184, (1996), p.985-1000.

[27] J.P. SERRE, *Cours d'Arithmétique,* Paris, Presses Universitaires de France, (1970).

[28] T.A. SPRINGER, *Invariant Theory,* Berlin-Heidelberg-New York, Lecture Notes in Mathematics 585, Springer-Verlag, (1977).

[29] T.A. SPRINGER, *Representation of Weyl Groups,* Lecture for the European School of Group Theory, Univ of Twente, Enschede, The Netherlands, 1992.

[30] R. STEINBERG, *Differential Equations Invariant under Finite Reflection Groups,* Trans. AMS, 112, (1964), p.392-400.

[31] R. STEINBERG, *On a Theorem of Pittie,* Topology, 14, (1975), p.173-177.

[32] I. STEWART, *Galois Theory,* Londre, Chapman and Hall, (1973).

[33] B. STURMFELS, *Algorithms in Invariant Theory,* New York, Springer-Verlag Wien New York, (1993).

TITLE

Demazure Operators and Polynomials for Finite and Affine Kac-Moody Algebras.

ABSTRACT

The aim of this work is to study Demazure modules for finite and affine type Kac-Moody algebras, and especially $\widehat{sl}(n)$. We study the character and the dimension of Demazure modules. This leads us to deal with Demazure operators, related to characters and with Demazure polynomials, related to dimension. We first show various harmonicity results for Demazure polynomials. Then, for finite type Kac-Moody algebras, we prove that the Demazure operators form a basis of the set of $\mathbb{Z}[P]^W$-endomorphismes of $\mathbb{Z}[P]$, and that the Demazure polynomials form a basis of the set of W-harmonic polynomial that takes integer values on P. Lastly, for $\widehat{sl}(n)$, we define and study a subset $\mathcal{E}$ of W of nonnull density, on which we calculate the real character of Demazure module and Demazure polynomial. In small rank we deduce the polynomials on a larger subset.

KEY WORDS

Lie Algebra, Kac-Moody algebra, Demazure operator, Demazure module, Demazure polynomial, Harmonic polynomial, Character formula, Real character.

RÉSUMÉ

Notre travail porte sur les modules de Demazure sur les algèbres de Kac-Moody de type fini et affine et plus spécialement sur $\widehat{sl}(n)$. Nous étudions le caractère et la dimension des modules de Demazure. Cette étude nous amène à aborder, d'une part, les opérateurs de Demazure, liés aux caractères, et d'autre part, les polynômes de Demazure, liés à la dimension. Nous prouvons tout d'abord différents résultats d'harmonicité pour les polynômes de Demazure. Puis, pour les algèbres de type fini, nous montrons que les opérateurs de Demazure forment une base des $\mathbb{Z}[P]^W$-endomorphismes de $\mathbb{Z}[P]$ et que les polynômes de Demazure forment une base de l'ensemble des polynômes, sur P, harmoniques pour W et à valeur dans $\mathbb{Z}$. Enfin, pour l'algèbre $\widehat{sl}(n)$, nous définissons et étudions un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de W de densité non nulle sur lequel nous calculons le caractère réel des modules de Demazure et les polynômes de Demazure. En petit rang nous en déduisons les polynômes pour un sous-ensemble plus grand.

MOTS-CLÉS

Algèbre de Lie, Algèbre de Kac-Moody, Opérateur de Demazure, Modules de Demazure, Polynôme de Demazure, Polynôme harmonique, Formule de caractère, Caractère réel.

DISCIPLINE

Mathématiques Pures

INTITULÉ ET ADRESSE DU LABORATOIRE

Institut Girard Desargues
Université Claude Bernard Lyon 1
Bâtiment Braconnier (ex-101)
21 avenue Claude Bernard
69622 Villeurbanne cedex
France