

Contribution à l'étude des formulations de calcul de la force magnétique en magnétostatique, approche numérique et validation expérimentale

Olivier Barre

▶ **To cite this version:**

Olivier Barre. Contribution à l'étude des formulations de calcul de la force magnétique en magnétostatique, approche numérique et validation expérimentale. Modélisation et simulation. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2003. Français. NNT : . tel-00005921

HAL Id: tel-00005921

https://theses.hal.science/tel-00005921

Submitted on 16 Apr 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 3419

ECOLE CENTRALE DE LILLE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

THESE

Présentée en vue
d'obtenir le grade de

DOCTEUR

en

Spécialité : Génie Electrique

par

Olivier BARRE

DOCTORAT DELIVRE CONJOINTEMENT PAR L'ECOLE CENTRALE DE LILLE
ET L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

Titre de la thèse :

Contribution à l'étude des formulations de calcul de la force magnétique en magnétostatique, approche numérique et validation expérimentale

Soutenue le 15/12/2003 devant le jury d'examen :

A. NICOLET	***Rapporteur***
J. L. COULOMB	***Rapporteur***
G. SEGUIER	***Examinateur***
P. BROCHET	***Examinateur***
F. HENROTTE	***Examinateur***
M. HECQUET	***Examinateur***

Thèse préparée dans le laboratoire L2EP de l'Ecole Centrale de Lille sous la direction
du Professeur Pascal BROCHET

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire furent réalisés à l'Ecole Centrale de Lille, dans le département Génie Electrique au sein de l'équipe de recherche COME[1] appartenant au L2ep[2] de l'université de Lille-1. Je remercie L'Ecole Centrale de Lille ainsi que son département Génie Electrique pour l'accueil et le soutien qu'ils m'ont apportés durant cette thèse. D'autre part, étant professeur agrégé et enseignant à temps plein dans un lycée technique, je ne peux que remercier M Mercy[3], de m'avoir permis de présenter cette conclusion issue de plusieurs années de recherche.

La particularité de ce travail de recherche est d'aborder un grand nombre de thèmes sans pour autant demander des connaissances approfondies dans chaque domaine. C'est ainsi qu'un grand nombre d'idées présentées ne sont pas issues de l'électromagnétisme. En particulier, les très bonnes relations que l'on peut avoir avec des enseignants d'autres disciplines sont de très grandes sources d'inspiration. Je tiens à remercier dès cet instant, M CAPPELLE et M CAUSSE, professeurs agrégés en mécanique, M BRISSE et M LACROIX, professeurs agrégés en physique appliquée, pour les nombreuses discutions scientifiques qui ont agrémenté mes recherches théoriques.

Une recherche n'est pas pour autant une activité purement personnelle ; une ambiance de travail agréable, un soutien efficace, la création de bonnes relations entre personnes sont toujours des éléments favorables au bon déroulement d'une activité d'étude. En conséquence, toute ma reconnaissance va vers l'équipe COME et en particulier vers M Pascal BROCHET qui a accepté d'encadrer ce travail hors norme, dont le résultat ne fut réellement visible qu'à la fin de l'étude. Tout au long de l'étude, ses remarques judicieuses ainsi que ses questions pertinentes permirent de mettre sous forme plus rigoureuse des idées encore embryonnaires. Les relations initiées avec d'autres laboratoires comme l'Institut de l'Energie à Moscou et la venue de M KUZNETSOV, ancien élève de M SMOLENSKII, ont introduit un regard extérieur au moment opportun et ont confirmé la démarche

[1]Conception, Optimisation de Machines Electriques.

[2]Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance.

[3]Directeur du Lycée Technique Gustave EIFFEL d'Armentières.

retenue.

Mes remerciements s'adressent maintenant aux personnes qui ont collaboré directement à la mise en place des simulations numériques et à l'exploitation de celles-ci. J'associe M GILLON ainsi que M HECQUET à la réussite de la discrimination des formulations de calcul de la force d'origine magnétique.

Ma gratitude s'adresse à M COULOMB ainsi qu'à M NICOLET qui ont lu patiemment ce manuscrit et donné un avis définitif sur ce travail de synthèse. Les remarques de M COULOMB sont pour moi d'une grande importance, étant donnée sa connaissance reconnue de ce domaine. Je porte aussi un intérêt tout particulier aux remarques de M NICOLET ; son éclectisme est source d'inspiration pour des développements futurs.

Je remercie M SEGUIER d'avoir présidé le jury de thèse et d'avoir par l'intermédiaire de ses ouvrages, contribué à éveiller mon intérêt vis à vis des systèmes électromécaniques. Le sujet de ce mémoire dépasse les frontières, et je remercie M HENROTTE d'être venu de Belgique pour participer à ce jury. D'autre part, ce contact extra-territoral ne restera pas sans suite car des échanges suivront.

J'associe dans une même pensée amicale toutes les personnes du laboratoire d'électrotechnique, de même que les personnes de l'Ecole Centrale de Lille qui ont contribué, directement ou indirectement, à l'aboutissement de cette étude. Je pense en particulier à M CIMETIERE, M THOMY et M RYMEK.

Enfin, mon épouse Christine, fit preuve d'une grande patience et accepta de subir les essais de mise au point du matériau dans la cuisine. Pierre, mon jeune fils, en me montrant régulièrement qu'un objet très simple peut servir à tout autre chose que ce pourquoi il est conçu, maintient ma curiosité en éveil.

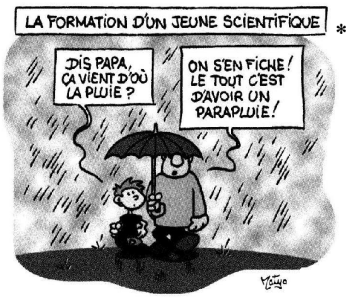


Illustration issue de:

"Pour La Science" - Novembre 2003

*** Reproduit avec l'aimable autorisation de "Pour La Science".**

Table des matières

1 Calcul des forces en magnétostatique **17**

1.1 Introduction 17
1.2 Les principes de modélisation 18
1.2.1 Origine théorique des courants équivalents 19
1.2.2 Origine théorique des masses magnétiques 20
1.3 La dérivée de l'énergie 23
1.4 Utilisation de la dérivée de l'énergie 24
1.5 Synthèse des formules 25
1.5.1 Calcul des forces par la méthode des courants équivalents. 26
1.5.2 Calcul des forces par la méthode des masses magnétiques équivalentes. 33
1.5.3 Calcul des forces par la méthode des masses et des courants surfaciques. 41
1.5.4 Calcul des forces par la dérivée de l'énergie. 45
1.5.5 Calcul des forces par la méthode du tenseur de Maxwell. . 50
1.6 Conclusion 65

2 Conception de l'expérimentation **67**

2.1 Critères de conception 69
2.1.1 Critères associés à la perméabilité 69
2.1.2 Critères associés à la géométrie. 71
2.1.3 Critères associés à la mesure. 72
2.2 Conception de la structure de test en réponse aux critères associés au champ magnétique. 76
2.2.1 Génération du champ magnétique. 76
2.2.2 Répartition et connaissance du champ magnétique. 77
2.3 Validation du système de génération de champ magnétique. 85
2.3.1 Conception des bobines 85
2.3.2 Validation expérimentale. 90
2.4 Applications des formulations associées au calcul de force sur la structure de test. 90

2.4.1 Traitement des équations liées au calcul de forces sur une surface élémentaire du dispositif. 90
2.4.2 Premier calcul de la distribution des forces sur la totalité du volume. 97
2.5 Conception du matériau de test. 103
2.5.1 La technique des matériaux composites. 103
2.5.2 Genèse du matériau de test. 103
2.6 Conclusion. 107

3 Expérimentations **109**
3.1 Réalisation de la mesure de μ_r. 109
3.2 Mesure du coefficient d'élasticité longitudinale. 121
3.3 Mesure du déplacement. 130
3.4 Résultats expérimentaux associés à la fabrication du matériau de test 134
3.4.1 Mesure du module d'élasticité longitudinale 134
3.4.2 Mesure du coefficient de perméabilité relative 138
3.4.3 Mesure du déplacement. 138
3.5 Calcul du déplacement lié à chaque formulation. 141
3.5.1 Courant volumique et courant surfacique. 141
3.5.2 Masses magnétiques surfaciques et volumiques. 141
3.5.3 Dérivée de l'énergie. 142
3.5.4 Tenseur de Maxwell$^{(1)}$ 143
3.6 Mesure du déplacement expérimental. 143
3.7 Conclusion 145

4 Annexes **151**
4.1 Validation du calcul 3D magnétostatique et vérification du fonctionnement du teslamètre. 151
4.2 Validation du calcul élément fini en mécanique. 158
4.3 Influence du coefficient de Poisson. 159
4.4 Influence du nombre d'éléments sur le calcul du déplacement. . . 161
4.5 Mesure du module d'élasticité du matériau de test pour une concentration de liant variable 163
4.6 Mesure de la perméabilité relative à l'aide de la mesure des DDP fournies par la bobine de détection 172

.

Introduction générale

Présentation générale

L'électricité fut l'un des moteurs du développement économique durant la première moitié du 20^{eme} siècle. La conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique apporte une souplesse extrêmement importante aux équipements industriels : la sécurité, les temps de mise en service n'ont plus rien de commun avec ceux des anciennes machines à vapeur. Les machines électriques qui prennent en charge cette production d'énergie mécanique, génèrent sur leur arbre de sortie un couple mécanique directement utilisable dans les mécanismes industriels. Progressivement, le système bielle-manivelle a disparu. Les moteurs électriques virent le jour en 1873. Ils utilisent, en interne, les effets des champs magnétiques pour produire cette énergie mécanique. La compréhension des interactions magnétiques à l'intérieur de la machine fut pendant longtemps, et reste encore, un sujet de recherche. Actuellement, pour simplifier la problématique, la machine de GRAMME, ainsi que les forces de Laplace sont toujours utilisées comme support pédagogique, pour expliquer le fonctionnement des moteurs. Dans cette démarche, l'aspect purement magnétique n'est pas explicité ; un courant est en interaction avec un champ magnétique. Cette interprétation pourrait être satisfaisante si elle n'était pas mise en défaut par la réalité. L'examen d'une répartition spatiale de champ magnétique dans un moteur[Fig-1] fait apparaître l'absence de champ magnétique dans les encoches associées au rotor pour les conducteurs [1, YONG WANG - 2001]. Toutes les simulations de machines électriques mettent ce résultat en évidence, et pourtant, la force de Laplace est toujours utilisée en préambule dans l'enseignement secondaire. Pour pouvoir comprendre le couplage entre le rotor et le stator d'un moteur, une autre approche doit être utilisée.

L'étude d'un moteur se prête mal à la recherche d'une modélisation d'un phénomène physique particulier, car sa mise en rotation est certainement une combinaison de plusieurs phénomènes difficilement dissociables. Cela explique pourquoi les expérimentations donnent des résultats parfois proches des modélisations, mais ceux-ci ne sont jamais identiques [36, MIZIA.J-1988].

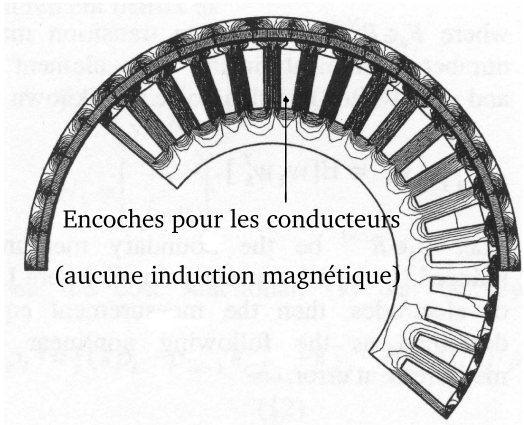


Fig – 1

Par exemple, en ne regardant que l'aspect énergétique d'un moteur, il apparaît toujours dans le bilan, des pertes certes faibles, mais difficilement calculables. Les travaux associés aux bruits acoustiques [2, DIETER G.- 1994], aux pertes de dentures [3, STOOL R.L. - 1994], aux pertes par hystérésis [4, JAYARAMAN S. - 1994] , etc. confirment bien leur existence...

Pour ces multiples raisons, la recherche d'une explication simple sur le couplage entre le rotor et le stator d'une machine n'est pas aisée. Le problème ne peut pas être traité dans sa globalité et une approche sectorisée doit être employée. Puisque les forces de Laplace ne sont pas majoritaires, c'est donc à l'extérieur du conducteur, dans les matériaux peut-être, qu'il faut rechercher la solution. Le problème se réduit à une simple question : est-on capable d'évaluer l'influence d'un champ magnétique sur un matériau ?

R.FEYNMAN observe le comportement d'un matériau vis à vis du champ magnétique et définit quatre groupements très distincts [5, FEYNMAN R.P. - 1964]. Cette classification est aussi reprise sous une forme beaucoup plus théorique par un physicien russe D.SIVOUKHINE [17, SIVOUKHINE D. - 1983]. Pour ces deux approches, l'une expérimentale et l'autre théorique, les quatre classes sont :

- Les matériaux amagnétiques
- Les matériaux diamagnétiques
- Les matériaux paramagnétiques
- Les matériaux ferromagnétiques.

La différentiation de ces matériaux se fait vis à vis d'une caractéristique physique : la perméabilité magnétique. Cette entité apparaît dans la loi de comportement qui lie l'induction magnétique au champ magnétique. En l'absence d'hypothèses réductrices, ce coefficient de proportionnalité est de type tensoriel, et possède la propriété d'être symétrique [9, LANDAU L. - 1990]. Pour des matériaux

ayant un comportement linéaire et isotrope vis à vis des champs magnétiques, cette relation s'écrit sous la forme présentée par l'équation (1).

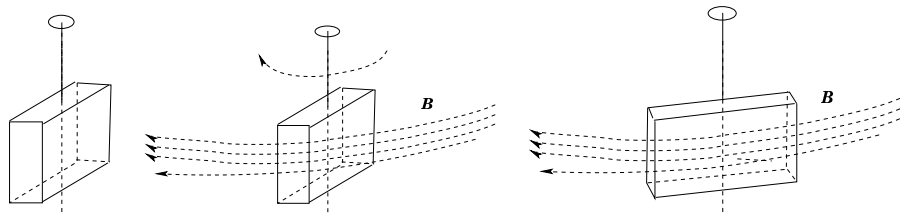
$$\overrightarrow{B} = \mu \overrightarrow{H} \qquad (1)$$

B est l'induction magnétique, H le champ magnétique et μ la perméabilité magnétique, réduite ici à un simple scalaire [5, FEYNMAN R. - 1992] [9, LANDAU L. - 1990] [17, SIVOUKHINE D. - 1983]. La connaissance de μ est suffisante pour associer le matériau à l'un des quatre groupements à partir du moment où μ est comparée à μ_0, μ_0 étant la perméabilité du vide.

- $\mu \doteq \mu_0 \Longrightarrow$le matériau est amagnétique
- $\mu < \mu_0 \Longrightarrow$ le matériau est diamagnétique
- $\mu > \mu_0 \Longrightarrow$ le matériau est paramagnétique
- $\mu \gg \mu_0 \Longrightarrow$ le matériau est ferromagnétique

Comme un moteur est un système trop complexe pour l'analyse des phénomènes physiques élémentaires, les efforts doivent porter sur l'étude d'un autre système, le plus simple possible, pour ne pas introduire de phénomènes mal maîtrisés ou impossibles à prendre en compte. Imposer un système ayant un comportement linéaire est certes restrictif mais permet toutefois d'effectuer une comparaison des formulations.

Par exemple, un solide (para ou ferromagnétique) de forme quelconque, plongé dans un champ magnétique, évolue de manière à maximiser le flux qui le traverse [Fig-2]. Une rotation, liée à cette évolution, est visible et implique l'existence de forces extérieures sur le solide.



$Fig-2$ Une rotation du solide est induite par sa recherche du maximum de flux (la rotation présentée n'est valable que pour le ferro ou le paramagnétisme)

A l'origine de tous les phénomènes électromécaniques, ces forces extérieures sont étudiées dans le but d'en calculer les intensités et les directions. Plusieurs méthodes découlent des recherches passées et sont actuellement proposées pour les quantifier : Le tenseur de Maxwell [48, STURGESS.J-P.-1994], les courants équivalents [25, HENNEBERGER G. - 1992], la dérivée de l'énergie [51, BOUALEM

B. - 1998] [40, REYNE.G.-1988] [50, COULOMB J-L. - 1983] [71, ZGAINSKI F.X.-1996] [77, BENBOUZID M.E.H.-1992]. Un tel nombre de méthodes différentes pour un même phénomène physique est un handicap. Bien souvent, ces auteurs arrivent à la conclusion que la formulation qu'ils utilisent est en accord avec leur expérimentation et pourtant les bases théoriques sur lesquelles reposent ces équations sont différentes.

En conséquence, le premier chapitre sera consacré à l'analyse des différentes formulations qui sont employées jusqu'à présent pour calculer les forces d'origine magnétique. Celles-ci sont au nombre de cinq. Bien que ces différentes formulations aient été présentées dans leurs publications par certains auteurs comme N.SADOWSKI [24, SADOWSKI N. - 1992], W.MULLER [26, MULLER W. - 1990] ou encore G.REYNE [74, REYNE.G-1987] ; l'objectif n'était pas d'en vérifier les fondements physiques. C'est donc cet aspect qui sera abordé en premier. Pour quatre de ces cinq formulations, une différence est faite entre l'aspect physique du phénomène utilisé et sa mise en équation. Par exemple, dire qu'un aimant et une bobine parcourue par un courant électrique produisent un champ magnétique ne signifie pas obligatoirement qu'il est possible de dimensionner cette bobine et de calculer l'intensité du courant de manière à substituer celle-ci à l'aimant. La dernière formulation, le tenseur de Maxwell, ne peut pas être abordée sous cet aspect. Elle utilise comme fondement les célèbres équations de ce physicien. Son analyse se limitera à reprendre la démarche et à rechercher des hypothèses réductrices susceptibles d'induire des limitations dans l'utilisation de cette formulation. Enfin, ce chapitre se clôturera par une présentation synthétique des différentes formulations même si certaines d'entre elles présentent des conditions restrictives liées à leur obtention.

Albert EINSTEIN[4], en 1921, écrivait qu'une théorie est mortelle et mettait en avant la prééminence de l'expérience. Cette proposition appelle deux remarques qui vont donner naissance aux chapitres 2 et 3. L'expérience valide la théorie, encore faut-il trouver une expérience qui permettent de différencier les différentes théories décrivant le même phénomène. Que penser d'une expérience dont le résultat est obtenu pour toutes les théories qu'elle est censée départager. Par exemple, il est inutile d'espérer différencier les équations de la forme $(f(x) = x^n)$ si seul le point d'abscisse 1 est observé.

Le chapitre 2 commence par une recherche des écarts que peuvent engendrer les différentes formulations. Ces écarts existent toujours mais ils peuvent être négligeables suivant les conditions d'emploi de ces formulations. L'examen d'expérimentations antérieures est d'un grand intérêt car il met en évidence les critères que doit obligatoirement satisfaire le système expérimental recherché. Par exemple, il apparaît qu'il est illusoire de vouloir utiliser des matériaux ferroma-

[4]Albert EINSTEIN, physicien américain, prix nobel de physique en 1922

gnétiques [37, KABASHIMA.T-1988] [44, TSUKERMAN.I-1994], que le champ magnétique ne doit privilégier aucune direction... De ce fait, il ne semble pas souhaitable de vouloir utiliser une étude d'un équipement industriel pour différencier les formulations. M MARINESCU, en calculant le couple délivré par une machine à aimant permanent, par l'intermédiaire du tenseur de Maxwell et de la dérivée de l'énergie, arrive à des résultats très similaires [33, MARINESCU.M-1988].

La seconde partie de ce chapitre présente la recherche d'une solution technique permettant la génération d'un champ magnétique hétérogène. Une étroite coopération est réalisée entre les simulations et les mesures associées à ce système. L'objectif est double. La simulation permet de donner des résultats rapides vis à vis d'une structure qui n'est pas construite physiquement ; donc de donner des informations sur les différentes structures imaginées. Puis, après réalisation, les mesures permettent de valider la bonne représentativité du champ magnétique calculé à l'aide de la simulation, par rapport au champ magnétique réel, rencontré dans la structure. En dernière partie de ce chapitre, un matériau de test est associé à cette structure expérimentale. L'objectif est de définir la géométrie ainsi que la perméabilité magnétique de ce matériau. Les simulations numériques montrent qu'une structure aussi simple qu'un parallélépipède est suffisante, à partir du moment où la perméabilité relative du matériau est faible. La conclusion associée à cette dernière partie est une proposition de réalisation d'un tel matériau.

Le chapitre 3 est la mise en oeuvre de ce matériau associé à la structure expérimentale. Plusieurs éléments sont à prendre en compte. Les simulations ne peuvent être réalisées sans la connaissance de la perméabilité relative du matériau ainsi que de son module d'élasticité. Les imprécisions liées à ces paramètres doivent être limitées, de manière à ne pas remettre en cause la différentiation des formulations. La première partie de ce chapitre est consacrée aux dispositifs de mesure des paramètres physiques du matériau de test. La deuxième partie du chapitre présente la procédure mise en oeuvre pour réaliser les mesures de déformation sur le dispositif expérimental. L'objectif est de mesurer, sans engendrer de perturbation vis à vis de l'expérience, le déplacement d'une des arêtes du parallélépipède constitué du matériau de test. La dernière partie de ce chapitre met en concurrence les résultats expérimentaux et tous les résultats provenant des simulations associées aux différentes formulations de calcul des forces.

Chapitre 1

Calcul des forces en magnétostatique

1.1 Introduction

Dérivée de l'énergie, tenseur de Maxwell, courant équivalent.... que de formulations différentes pour un même phénomène. Celui de la force engendrée sur un matériau présentant des propriétés magnétiques lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique. Ce phénomène physique peut-être analysé sous plusieurs angles de vue différents, et à chaque analyse, une formulation lui est adjointe. Dans ce chapitre, la présentation des formulations associées au calcul des forces d'origine magnétique est faite progressivement. Toutefois, la méthode dite du tenseur de Maxwell n'est prise en compte qu'à la fin du chapitre car elle présente des particularités qu'il convient de souligner.

En introduction, deux approches sont citées pour présenter la classification des matériaux. R. FEYNMAN[1] propose d'observer le comportement du matériau vis à vis de l'induction magnétique. D.SIVOUKHINE, comme L.LANDAU[2], restent très théoriques et utilisent des considérations énergiques au niveau atomique. Cette dernière approche est d'ailleurs souvent présentée, accompagnée de son auteur, par exemple, E de LACHEISSERIE citera le "diamagnétisme de LANDAU" dans l'un de ces ouvrages [56, E de LACHEISSERIE - 1999]. Ces deux principes de description se retrouvent aussi au niveau du calcul des forces d'origine magnétique. L'aspect comportemental induit les méthodes associées aux sources équivalentes et l'approche énergétique donne naissance à la dérivée de l'énergie. La première partie de ce chapitre est mise à profit pour introduire les notions de base conduisant au calcul des forces pour toutes les méthodes usuellement employées. Ensuite, la présentation des formules au cas par cas est réalisée et met en évidence les hypothèses qui ont permis de les obtenir.

[1] Richard P FEYNMAN, physicien américain, prix nobel de physique en 1965

[2] Lev LANDAU, physicien russe, prix nobel de physique en 1962

Les quelques lignes précédentes semblent opposer deux grandes écoles de physique, mais ces physiciens ne sont pas opposés à des concepts différents des leurs. Il faut noter que les physiciens russes ne nient pas l'hypothèse des sources équivalentes, mais ils ne l'utilisent pas pour déterminer les forces d'origine magnétique. De même, R.P. FEYNMAN est très célèbre pour son cours de mécanique de Princeton où les aspects énergétiques sont très loin d'être oubliés.

1.2 Les principes de modélisation

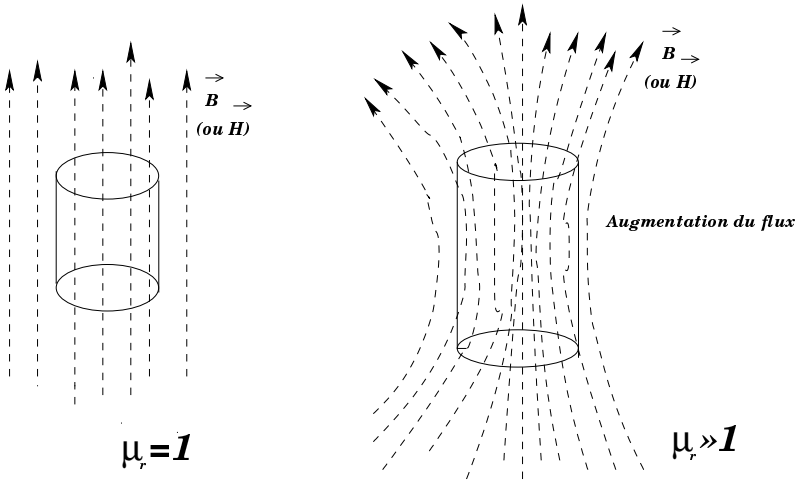
Un champ magnétique est avant tout connu par l'intermédiaire des effets physiques qu'il engendre. C'est à partir de cette remarque que le principe d'équivalence est introduit. Un aimant engendre un champ magnétique, de même qu'un courant circulant dans des spires. Si une source de champ magnétique, constituée d'un conducteur parcouru par des courants, engendre la même répartition spatiale de champ qu'un aimant, alors ces deux entités sont équivalentes, car aucun moyen de mesure ne peut les différencier. Si ces deux sources sont maintenant plongées dans un autre champ magnétique, elles doivent se comporter de la même manière. En conséquence, tout calcul traduisant un phénomène physique associé à la première source (comme le calcul des forces par l'intermédiaire de la loi de Laplace) peut être utilisé pour rendre compte du phénomène physique rencontré sur la deuxième source. A partir de ce principe d'équivalence, deux entités virtuelles supposées engendrer les mêmes effets qu'un champ magnétique sont créées : les courants et les masses magnétiques équivalentes. Ces sources équivalentes sont présentes dans les documents de référence comme les publications de G.FOURNET [53, FOURNET.G - 1985], E.DURAND [54, DURAND.E - 1968] où encore, dans des documents plus récents [56, E de LACHEISSERIE - 1999]. Dans tous les cas, elles sont supposées interpréter l'effet de la perméabilité des matériaux pour expliquer l'accroissement de l'induction magnétique. En conclusion, le solide est assimilé à un matériau amagnétique contenant ces sources de champ.

Toutefois, les deux remarques suivantes ne doivent pas être oubliées :

- *Le principe d'équivalence est associé à des effets extérieurs au solide. Donc il sera peut-être difficile de l'utiliser par rapport au solide lui-même.*
- *La source virtuelle du champ magnétique est associée au solide. En supprimant la source de champ extérieure, le solide n'engendre pas de champ magnétique. Cette source est donc aussi fictive.*

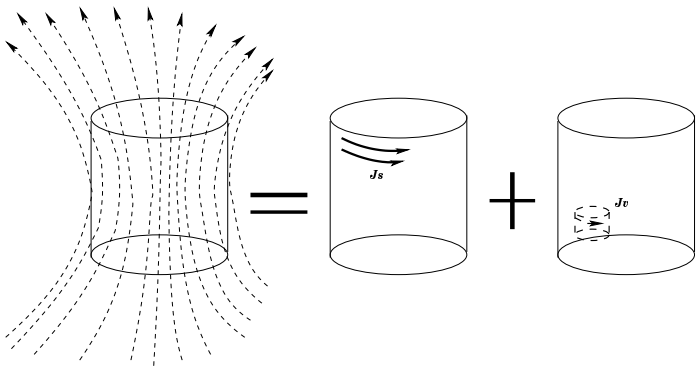
1.2.1 Origine théorique des courants équivalents

Un courant, circulant dans un conducteur, engendre un champ magnétique. Une modification d'un champ magnétique peut être obtenue par la superposition du champ initial et d'un autre champ induit par l'apparition d'un courant. Si un solide paramagnétique (ou ferro magnétique) est introduit dans un milieu parcouru par un champ magnétique uniforme, une modification de la répartition spatiale du champ ainsi que de son intensité est remarquée, alors que pour un solide amagnétique ($\mu=\mu_0$) aucune modification n'est constatée. La figure 3 illustre l'influence de la perméabilité sur la répartition spatiale du champ magnétique.



$Fig-3$

Une solution proposée pour prendre en compte ce phénomène physique est d'assimiler ce solide à un objet amagnétique ($\mu=\mu_0$) mais parcouru par des courants volumiques et surfaciques [Fig-4].



$Fig-4$

Le premier cylindre (de perméabilité $\mu = \mu_0$) est parcouru par des courants surfaciques ($\overrightarrow{J_s}$) et le deuxième (aussi de perméabilité μ_0) contient des courants volumiques ($\overrightarrow{J_v}$) ; ces deux types de courant engendrent la même répartition spatiale de champ que celle induite par l'augmentation de perméabilité magnétique. Pour le calcul des efforts, il suffit alors d'appliquer la loi de Laplace sur ces courants équivalents. Pour les courants surfaciques ainsi que les courants volumiques, les forces qui s'exercent sur le volume complet peuvent être obtenues par l'intermédiaire des équations (1.1) et (1.2).

$$\overrightarrow{F}_s = \int_S \overrightarrow{J}_s \wedge \overrightarrow{B}.ds \qquad (1.1)$$

$$\overrightarrow{F}_v = \int_v \overrightarrow{J}_v \wedge \overrightarrow{B}.dv \qquad (1.2)$$

$\overrightarrow{F}_s$ et $\overrightarrow{F}_v$ sont les résultantes pour les forces surfaciques et volumiques. Ces équations sont exploitées dans les chapitres suivants.

1.2.2 Origine théorique des masses magnétiques

De la même manière que la modification de la répartition spatiale du champ magnétique a été assimilée à une circulation de courant, l'existence de masse magnétique engendrant les mêmes effets est posée comme hypothèse de travail. Ces masses, comme les courants, sont surfaciques et volumiques. Toutefois, ce postulat pose un problème pratique : il existe dans la nature des sources pour les champs électriques, mais pour ces sources, il est tout à fait possible de les dissocier en entité positive ou en entité négative (L'électron a une charge électrostatique négative et le proton, une charge électrostatique positive). Un aimant qui est subdivisé un grand nombre de fois, garde toujours un pôle nord et un pôle sud... La recherche des masses magnétiques uniquement positives ou négatives est toujours d'actualité...

Pour lier les masses magnétiques au champ magnétique, la démarche qui permet d'associer les charges électrostatiques au champ électrique est prise comme référence. En particulier, l'équation (1.3) dans laquelle une charge électrostatique produit un champ électrique dont la divergence est non nulle, sert de modèle.

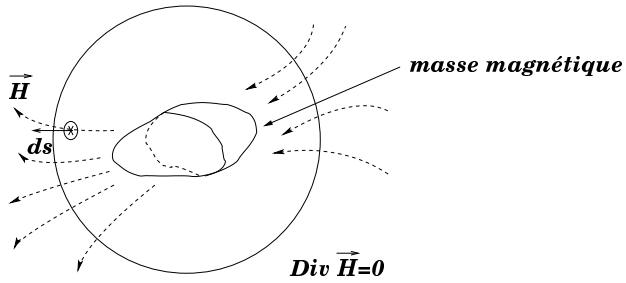
$$div\ \overrightarrow{E} = \rho/\varepsilon_0 \qquad (1.3)$$

Un champ magnétique, par contre, a toujours une divergence nulle (1.4), c'est une des équations de Maxwell qui accompagne tout ouvrage sur le magnétisme, comme le cours d'électromagnétisme de R.FEYNMAN [5, FEYNMAN R. - 1992].

$$div\left(\overrightarrow{B}\right) = 0 \qquad (1.4)$$

En conséquence, il faut faire apparaître une divergence non nulle pour introduire un terme source comme le laisse présager l'équation (1.3).

Pour justifier l'existence de ces masses magnétiques, une méthode reposant sur l'apparition d'une discontinuité du champ magnétique, est utilisée de telle manière qu'il en résulte un terme source qui est nommé "masse magnétique". Les figures suivantes vont servir de support pour cette explication.

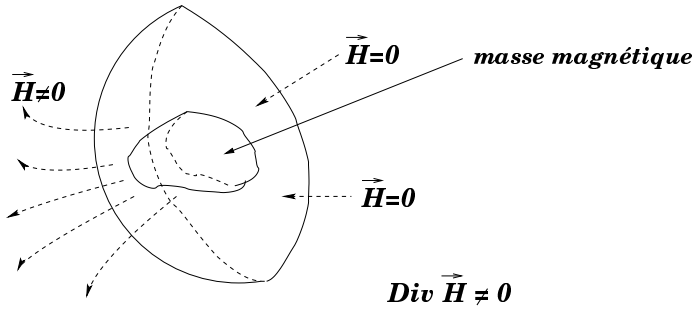


$Fig-5$

Une masse magnétique engendre un champ magnétique dont l'intégrale de $\overrightarrow{H}.\overrightarrow{ds}$ sur la surface sphérique entourant la masse, est nulle [Fig-5]. Ce résultat découle de l'application de l'équation (1.4) pour un milieu linéaire ou la divergence de $\overrightarrow{B}$ est aussi proportionnelle à la divergence de $\overrightarrow{H}$ (1.5).

$$div\left(\overrightarrow{B}\right) = div\left(\mu\overrightarrow{H}\right) = \mu\, div\left(\overrightarrow{H}\right) \qquad (1.5)$$

Si cette représentation [Fig-5] est coupée en deux parties égales, la partie gauche du solide peut être assimilée à une source de champ sortant, et la partie droite à une source de champ entrant.



$Fig-6$

Si l'une des deux parties est isolée [Fig-6], la divergence du champ magnétique ne peut plus être nulle car le champ entrant est supprimé ($\overrightarrow{H} = 0$, dans la partie qui a été ôtée) . Cette inégalité va permettre d'associer la masse magnétique au champ magnétique. Pour conserver la divergence du champ magnétique nulle, dans l'espace entourant la masse magnétique, il suffit que cette masse magnétique, ρ_m, compense le flux sortant. Sa valeur est donnée par l'équation (1.6). Cette équation est présentée sous une autre forme : le vecteur aimantation est utilisé à la place du vecteur champ magnétique dans les publications récentes [56, E de LACHEISSERIE - 1999]. Il est à remarquer que la masse magnétique est associée au champ magnétique et conserve une similitude avec l'équation (1.3) où les caractéristiques du milieu sont présentes. La permittivité (constante diélectrique) est présente dans l'équation (1.3) de même que la perméabilité (constante magnétique) dans l'équation (1.6).

$$\rho_m/\mu = -div(\overrightarrow{H}) \qquad (1.6)$$

Cette interprétation repose bien sur l'équivalence par rapport aux phénomènes extérieurs au solide et il faut se demander, comme le proposait les remarques associées à la fin du paragraphe 1.2, si elle est toujours utilisable pour analyser les effets internes ou ceux liés à la surface du solide. Le résultat de cette méthode est illustré par la figure 7, où un solide paramagnétique (ou ferromagnétique) est assimilé à un solide amagnétique contenant des masses magnétiques aussi bien volumiques (ρ_v) que surfaciques (ρ_s).

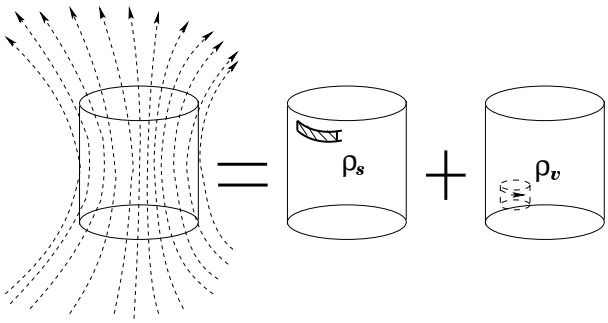


Fig – 7

Cette approche ne fournit qu'une modélisation du volume sous la forme de sources de champ. La force d'origine magnétique n'est pas encore explicitée de même que la quantification des masses magnétiques surfaciques. Pour ce dernier point, l'analyse des discontinuités de $\overrightarrow{H}$ au niveau de la surface de séparation des milieux est utilisée. Le calcul des forces est établi en poursuivant l'analogie avec l'électrostatique où la force d'origine électrostatique est proportionnelle à la

charge électrique et au champ électrique (1.7), la force d'origine magnétique sera égale au produit du champ et de la masse magnétique, surfacique ou volumique (1.8).

$$\overrightarrow{F}_{electrostatique} = q_{electrique}\,\overrightarrow{E} \qquad (1.7)$$

$$\overrightarrow{F}_{magnetostatique} = \rho_{magnetique}\,\overrightarrow{H} \qquad (1.8)$$

1.3 La dérivée de l'énergie

L'approche énergétique permet d'introduire d'autres méthodes d'analyse des problèmes physiques et en particulier de leur sens naturel d'évolution. Qui n'a pas constaté la difficulté de reconstruire l'allumette qu'il venait d'enflammer. La chimie, dans l'étude des molécules et des réactions entre molécules, a pris en compte cet aspect énergétique [58, EMSCHWILLER G. - 1990]. Plus précisément, il est utilisé pour expliquer les réactions chimiques et leurs irréversibilités (thermodynamique). Chronologiquement, la mécanique est la première discipline à utiliser cette méthode. Newton, en prenant comme exemple le mouvement d'une pomme qui quitte la branche à laquelle elle est accrochée, recherche en réalité une expérience reproductible et totalement déterministe qui lui permet de conclure que les phénomènes naturels ne peuvent que s'exécuter dans un sens bien déterminé.

Galilée découvrit le *principe d'inertie* et introduisit la notion de système isolé. Newton poursuivit les recherches et compléta le travail de Galilée, en introduisant deux nouveaux principes. Ces travaux sont synthétisés par l'intermédiaire de trois lois qui sont présentées par R.FEYNMAN dans l'une de ses publications issues de son cours de Princeton [59, FEYNMAN R.- 1995] :

- 1) Le principe d'inertie,
- 2) Relation entre l'accélération d'un corps et la force agissant sur lui,
- 3) Egalité de l'action et de la réaction

R.FEYNMAN poursuit son exposé en montrant que sont déduites de ces trois lois, l'invariance de la quantité de mouvement et enfin la conservation de l'énergie. Pour L.LANDAU et R.FEYNMAN, un système isolé conserve son énergie. Si l'énergie d'un système varie, alors il n'est plus isolé !.. Une action extérieure est intervenue...

Ces physiciens concluent que le travail de cette force extérieure est égal et opposé à la variation d'énergie de ce système. Par extension, une équation plus générale (1.9) peut être écrite pour tout système, où δE est la variation d'énergie totale, $\overrightarrow{F}$ la force et $\overrightarrow{\delta l}$ le déplacement.

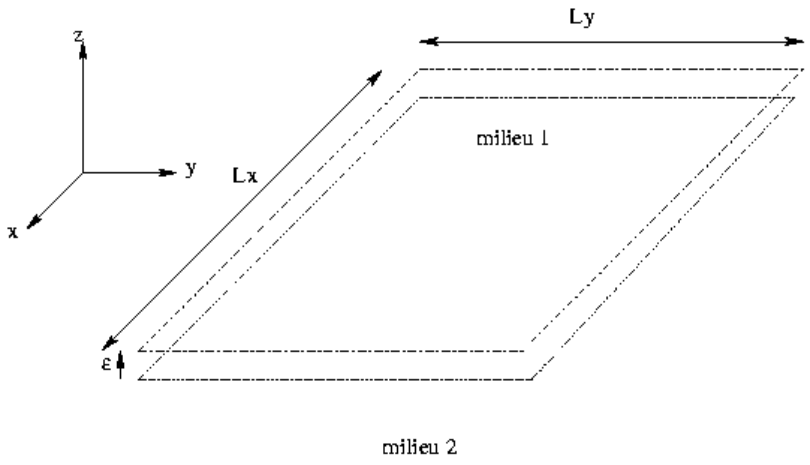
$$\delta E = -\overrightarrow{F}.\overrightarrow{\delta l} \qquad (1.9)$$

C'est l'exploitation de cette formulation qui est à l'origine de la méthode de la dérivée de l'énergie. La seule remarque qui peut être apportée sur cette méthode est son aspect global qui risque de ne pas permettre la description des phénomènes à l'échelle locale.

1.4 Utilisation de la dérivée de l'énergie

Comme la mécanique fut l'une des premières disciplines à utiliser le principe de moindre action, elle en a affiné la présentation sous la forme des équations de Lagrange et de l'équation de la conservation de l'énergie ; c'est d'ailleurs la méthode qui est retenue par L.LANDAU en introduction de son cours de mécanique [7, LANDAU L. - 1988]. Même si ce dernier élément est admis, le principe de moindre action lui a donné toute sa justification théorique. La formulation qui sert de base au calcul des forces d'origine magnétique comme celle qui est présentée par D.SIVOUKHINE [17, SIVOUKHINE D.- 1983] est l'équation (1.9) dans laquelle l'énergie est l'énergie magnétique du système. Pour pouvoir envisager l'application de ce principe , il faut que la force d'origine magnétique soit conservative [59, FEYNMAN R. - 1995]. En d'autres termes, le travail de la force d'origine magnétique ne dépend pas de la trajectoire, mais seulement du point de départ et du point d'arrivée. Cette hypothèse est admise implicitement dès que la méthode de la dérivée de l'énergie est utilisée.

La figure 8 sert de support à la mise en application de la dérivée de l'énergie.



$Fig - 8$

Une surface infinie sépare deux milieux (1 et 2) de perméabilités magnétiques différentes (μ_1 , μ_2). A un instant t_1, cette surface se déplace de ε suivant

l'axe z de manière à avoir un nouvel état à l'instant t_2. Pour un observateur ne regardant que les états du système aux instants t_1 et t_2, tout se passe comme si le matériau contenu dans le volume ($Lx \times Ly \times \varepsilon$), c'est à dire le matériau 1, était remplacé par un autre matériau, le matériau 2. Cette modification implique obligatoirement une variation de l'énergie magnétique totale, car les matériaux ont des perméabilités différentes. Cette variation d'énergie est affectée au travail d'une force liée à cette surface, et tout autre effet n'est pas pris en compte. Donc la méthode de la dérivée de l'énergie ne donne pas explicitement une force, mais plutôt une pression liée à la surface de séparation entre deux milieux. L'application de ce principe ne peut que quantifier la composante colinéaire au déplacement, c'est la seule composante que peut fournir l'équation (1.9). Bien que simple dans la présentation, cette méthode n'est pas pour autant facile à appliquer. En effet, son aspect global impose obligatoirement une prise en compte de tous les éléments du système. R.FEYNMAN rend bien compte de cette difficulté, en présentant un problème simple : celui de l'évaluation de la variation de l'énergie magnétique associée à deux bobines, suite au déplacement de l'une d'elles. Il montre que la non prise en compte de la source de tension provoque, au niveau de la résolution par la méthode énergétique, une erreur de signe dans la variation de l'énergie [5, FEYNMAN R.- 1992].

1.5 Synthèse des formules

Ces premiers paragraphes n'avaient comme objectif que de présenter les principes de base associés à chaque formulation. Pour poursuivre le calcul des forces d'origine magnétique, un système simple est analysé par l'intermédiaire des méthodes précédentes. Le système se compose d'un volume V_1 réalisé dans un matériau de perméabilité μ_1, ce volume est plongé dans un environnement de perméabilité μ_2. Un champ magnétique est présent dans les deux milieux, et a comme composante H_1 dans le volume 1 et H_2 dans le volume 2 [Fig-9]. $\vec{n}$ etant la normale sortante au volume 1.

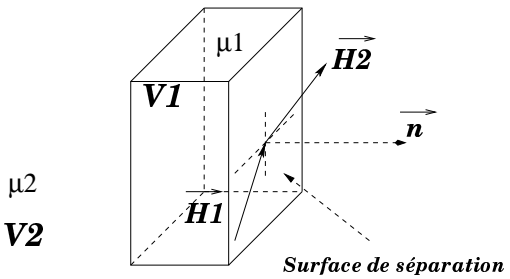


Fig – 9

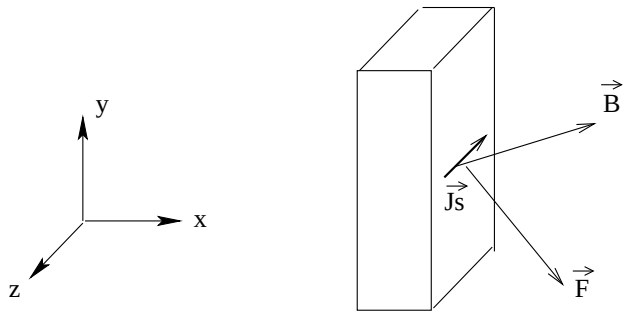
1.5.1 Calcul des forces par la méthode des courants équivalents.

Cette partie présente la démarche qui conduit à la mise en forme des forces tangentes ou normales que subit un élément surfacique du matériau. Pour éviter de surcharger inutilement la méthodologie, les développements calculatoires ne seront abordés qu'à la fin de ce paragraphe.

Les équations, qui vont être écrites, nécessitent l'emploi de la perméabilité relative ($\mu_r = \mu_1/\mu_2$). Si $\mu_1 > \mu_2$ ce solide peut être assimilé à un solide amagnétique parcouru par des courants volumiques et surfaciques. Les formulations proposées pour évaluer l'intensité des ces courants sont issues des travaux de CARPENTER [55, CARPENTER C.J. - 1959], repris par G.HENNEBERGER [25, HENNEBERGER G. - 1992], N.SADOWSKI [24, SADOWSKI N. - 1992] ou encore [41, ZHONG-QING.Y-1988] :

$$\overrightarrow{J_v} = Rot(\mu_r - 1)\overrightarrow{H}_1 \qquad (1.10)$$
$$\overrightarrow{J_s} = (\mu_r - 1)\overrightarrow{H}_1 \wedge \overrightarrow{n} \qquad (1.11)$$

J_v (1.10) et J_s (1.11) sont les densités de courants volumiques et surfaciques. En associant ces densités de courant à l'induction magnétique B, la loi de Laplace donne des forces par unité de volume ou de surface. Toutefois G.HENNEBERGER et N.SADOWSKI s'accordent sur la nullité de la résultante des forces volumiques. Celle-ci s'explique de la manière suivante : pour un volume élémentaire, un courant volumique équivalent lui est associé en appliquant l'équation (1.10). Mais ce volume élémentaire n'est pas isolé, il est accompagné par d'autres volumes élémentaires dont certains lui sont adjacents. La réunification de ces volumes fait que, localement, les courants volumiques se compensent et donnent un courant résultant nul. Les forces volumiques sont donc nulles. Cela conduit à n'utiliser que la composante surfacique du courant équivalent pour déterminer la force $\overrightarrow{F}$ [Fig-10].



$Fig - 10$

La formulation (1.11) de J_s traduit une hypothèse, dans laquelle les courants surfaciques n'existent que pour assurer la discontinuité tangentielle de $\overrightarrow{B}$ ($\overrightarrow{B}_t$ ne se conserve pas lors d'un changement de milieu). Ce courant est supposé être en interaction avec une induction magnétique ; l'intensité de cette induction magnétique étant, pour les utilisateurs de cette méthode comme G.HENNEBERGER, N.SADOWSKI, ou T.KABASHIMA [37, KABASHIMA T. - 1988], la valeur moyenne entre les deux milieux. Cela conduit à la formulation (1.12) pour la force d'origine magnétique.

$$\overrightarrow{F} = \left\{ (\mu_r - 1)(\overrightarrow{H}_1) \wedge \overrightarrow{n} \right\} \wedge \left(\frac{\overrightarrow{B_2} + \overrightarrow{B_1}}{2} \right) \qquad (1.12)$$

$(\mu_r - 1)\overrightarrow{H}_1 \wedge \overrightarrow{n}$ est le courant surfacique et $(1/2)(\overrightarrow{B_2} + \overrightarrow{B_1})$ l'induction magnétique moyenne. Cette expression (1.12) peut encore être simplifiée de manière à faire apparaître explicitement la force tangentielle $\overrightarrow{F_t}$ (1.13) et la force normale $\overrightarrow{F_n}$ (1.14).

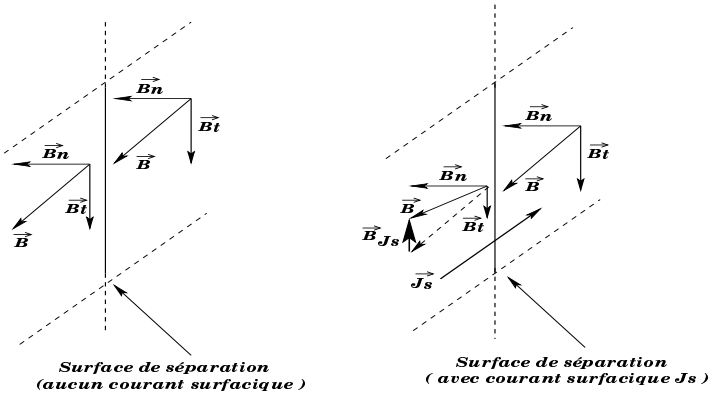
$$\overrightarrow{F}_t = \mu_2(1 - \mu_r) H_{2n} \overrightarrow{H}_{2t} \qquad (1.13)$$

$$\overrightarrow{F}_n = \frac{\mu_2(\mu_r^2 - 1) H_{2t}^2}{2} . \overrightarrow{n} \qquad (1.14)$$

Même si la formulation de ces deux équations ne semble pas immédiate, elle sera abordée par la suite, elle découle bien des hypothèses formulées sur l'écriture du courant surfacique et de l'induction magnétique. Ces deux équations (1.13) et (1.14) sont exactement celles qui sont présentées par W.MULLER [26, MULLER W. - 1990] .Cet article porte sur la comparaison des méthodes de calcul des forces d'origine magnétique ; compte tenu de la notation utilisée par cet auteur, le terme de la forme $\mu_2 H_{2n}$ n'a pas été écrit sous la forme B_n .

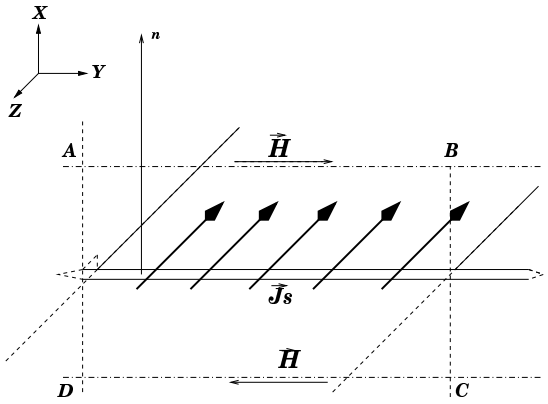
L'écriture du courant volumique (1.10) n'est que l'exploitation d'une des équations de Maxwell. Comme les milieux sont supposés linéaires, ce courant n'intervient pas de toute façon dans le calcul des forces [24, SADOWSKI N. - 1992][25, HENNEBERGER G. - 1992]. Ainsi seul le courant surfacique est responsable des forces d'origine magnétique. C'est la vérification de la validité de la formulation de J_s qui doit être recherchée en premier.

L'origine du courant surfacique est associée à la nécessité de respecter les discontinuités. Lors du franchissement d'une surface de séparation entre deux milieux de perméabilités différentes, seule la composante normale de l'induction magnétique est conservée. Dans le cas d'un milieu amagnétique, une absence de courant surfacique conduit à la conservation totale de l'induction magnétique B_n et B_t [Fig-11.a]. C'est ce courant qui expliquera la discontinuité pour la composante tangentielle de l'induction magnétique [Fig-11.b].



$Fig-11.a$ $Fig-11.b$

L'équation (1.11) prend son origine dans le calcul d'un champ magnétique généré par une surface infiniment grande, parcourue par un courant surfacique, constant en amplitude et en direction [Fig-12]. $\overrightarrow{n}$ est la normale sortante à la surface contenant $\overrightarrow{J}_s$.



$Fig-12$

A une distance quelconque de la surface contenant le courant surfacique J_s, la circulation de $\overrightarrow{H}$ sur le contour A,B,C,D comme est égale au courant traversant la surface A,B,C,D (1.15).

$$\oint_A^B \overrightarrow{H}.\overrightarrow{dl} + \oint_B^C \overrightarrow{H}.\overrightarrow{dl} + \oint_C^D \overrightarrow{H}.\overrightarrow{dl} + \oint_D^A \overrightarrow{H}.\overrightarrow{dl} = \int_s \overrightarrow{Js}.\overrightarrow{dl} \qquad (1.15)$$

Dans cette expression (1.15), les termes associés aux circulations sur les portions BC et DA sont nuls. Car, par raison d'antisymétrie, sur ces portions, $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{dl}$ sont orthogonaux. Il ne reste plus que les termes associés aux segments AB et

CD. Comme le courant est un courant surfacique, l'intégrale de ce courant est une intégrale selon une seule direction (Y) et il devient possible de déduire les deux équations (1.16) ou (1.17), de l'équation (1.15).

$$B = \frac{\mu J_s}{2} \qquad (1.16)$$

$$H = \frac{J_s}{2} \qquad (1.17)$$

Sous forme vectorielle, les deux équations précédentes deviennent :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu}{2} \overrightarrow{J_s} \wedge \overrightarrow{n} \qquad (1.18)$$

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{2} \overrightarrow{J_s} \wedge \overrightarrow{n} \qquad (1.19)$$

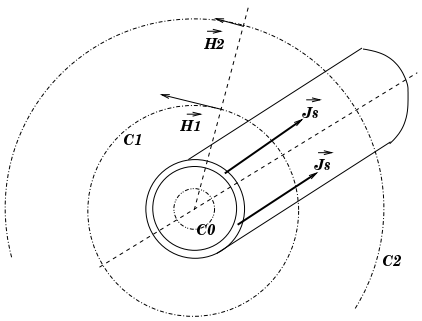
Maintenant pour une surface infinie mais fermée, on obtient les formulations suivantes :

$$\overrightarrow{B} = \mu \overrightarrow{J_s} \wedge \overrightarrow{n} \qquad (1.20)$$

$$\overrightarrow{H} = \overrightarrow{J_s} \wedge \overrightarrow{n} \qquad (1.21)$$

Car le champ magnétique à l'intérieur de cette surface est nul et l'une des deux circulations précédentes devient nulle.

Pour prouver la nullité du champ magnétique à l'intérieur d'une surface fermée, parcourue par des courants surfaciques, le calcul du champ magnétique généré par un conducteur creux est un bon exemple à exploiter [Fig-13].



$Fig-13$

Le champ magnétique $\overrightarrow{H}$ est obligatoirement tangent aux cercles C0,C1 ou C2 (symétrie axiale) et son module est constant en tout point d'un cercle C1 ou C2. En particulier, pour le cercle C0, comme il n'y a pas de courant traversant le disque délimité par le cercle C0, le champ $\overrightarrow{H}$ ne peut être que nul.

Les calculs associés à la détermination de ce champ magnétique peuvent aussi être utilisés dans l'autre sens. A partir de la connaissance du champ magnétique et pour les mêmes conditions que celles qui conduisent aux équations (1.20) ou (1.21), la valeur du courant surfacique peut être exprimée par l'intermédiaire de l'équation (1.22).

$$\overrightarrow{J_s} = -\overrightarrow{H} \wedge \overrightarrow{n} \qquad (1.22)$$

En appliquant cette formulation à un champ magnétique de module $(\mu_r - 1)H_t$, de sens opposé à $\overrightarrow{H}_t$, cf figure 11.b, parallèle à la surface de séparation, le résultat obtenu (1.23) se rapproche de la formulation proposée pour le calcul du courant surfacique équivalent.

$$\overrightarrow{J_s} = -\left(-(\mu_r - 1)\overrightarrow{H_t}\right) \wedge \overrightarrow{n} = (\mu_r - 1)\overrightarrow{H_t} \wedge \overrightarrow{n} \qquad (1.23)$$

Tout champ magnétique $\overrightarrow{H}$ peut s'écrire sous forme d'une composante normale $\overrightarrow{H}_n$ et tangentielle $\overrightarrow{H}_t$, comme $\overrightarrow{H_n}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$, l'équation précédente (1.23) peut se mettre sous la forme (1.24) :

$$\overrightarrow{J_s} = (\mu_r - 1)\overrightarrow{H} \wedge \overrightarrow{n} \qquad (1.24)$$

La formule (1.24) est exactement la même que la formule (1.11) liant le champ magnétique au courant surfacique. Donc les conditions qui ont amené l'équation (1.24) sont aussi les conditions d'emploi de l'équation (1.11)... Cette formulation (1.24) ou (1.11) n'est envisageable que pour des surfaces infinies. Ce n'est généralement pas le cas dans les applications pratiques rencontrées. Elle est rapidement mise en défaut pour des problèmes simples où le champ dépend de la distance par rapport à la surface contenant J_s.

Soit l'exemple suivant : Un solide paramagnétique de forme quelconque, mais d'épaisseur infinie, est plongé dans un champ magnétique engendré par deux bobines parcourues par des courants [Fig-14]. Par rapport à une surface élémentaire ds, un courant surfacique équivalent : J_s existe. Un axe xx' est défini comme étant orthogonal à cette surface. Ce solide est assimilé à un solide amagnétique parcouru par des courants surfaciques et volumiques. La détermination du courant surfacique $\overrightarrow{J_s}$ n'est pas aisée car il est difficile de prendre une valeur pour $\overrightarrow{H}$. En examinant la figure 14 (qui présente une coupe de ce solide selon une section

perpendiculaire à son épaisseur), pour calculer le courant surfacique $\overrightarrow{J_s}$ perpendiculaire à l'axe xx', l'hétérogénéité spatiale du champ magnétique est un handicap. Au point A1, la composante tangentielle de $\overrightarrow{H}$ est différente de la composante tangentielle de $\overrightarrow{H}$ au point A2.

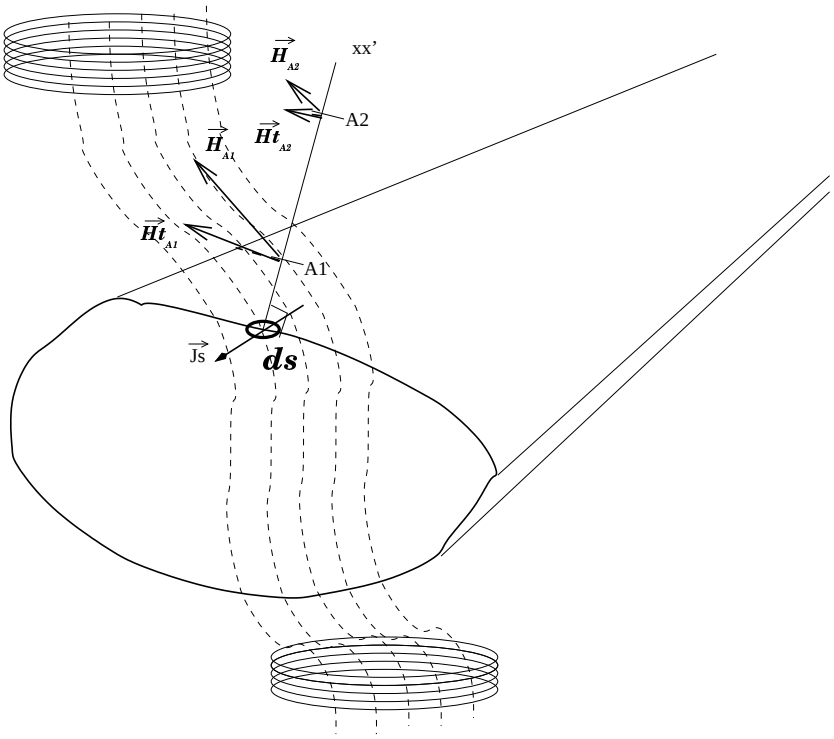


Fig – 14

Donc le courant calculé sera différent suivant la position qui est prise en compte, A1 ou A2. Comme le courant surfacique est calculé pour le même élément de surface, il n'existe qu'une seule valeur qui ne peut dépendre de la distance par rapport à la surface. Un artifice, souvent utilisé, est de prendre la composante $\overrightarrow{H}$ "proche" de la surface, mais cette solution n'est pas pour autant idéale car la proximité n'est pas un critère fiable. En particulier, avec des éléments finis, il suffit d'augmenter le nombre d'éléments dans la zone concernée, pour arriver à la conclusion que le point pris comme référence pour le choix de $\overrightarrow{H}$ est maintenant éloigné. Prendre $\overrightarrow{H}$ à la surface de séparation n'est pas réalisable, car il est inconnu sur cette surface !...

Cette formulation de la force d'origine magnétique n'est pas satisfaisante, car le calcul du courant surfacique ne donne pas un résultat unique. Hélas, sa connaissance est indispensable pour exprimer la force d'origine magnétique par la méthode des courants équivalents.

D'autre part, ce courant est en interaction avec une induction magnétique. La valeur de cette induction magnétique est prise, égale à la valeur moyenne entre l'induction à l'intérieur du solide et l'induction à l'extérieur du solide au voisinage immédiat du point de calcul. Ce postulat, que l'on retrouve explicitement dans les travaux de G.HENNEBERGER, N.SADOWSKI ou encore W.MULLER, n'aura aucune influence pour la force tangentielle ($\overrightarrow{B}_n$ est conservatif) mais influencera le calcul de la force normale.

Pour la force tangentielle, l'exploitation de l'équation (1.12) donne :

$$\overrightarrow{F}_t = ((\mu_r - 1)\overrightarrow{H}_t \wedge \overrightarrow{n}) \wedge \frac{\left(\overrightarrow{B}_{1n} + \overrightarrow{B}_{2n}\right)}{2} \qquad (1.25)$$

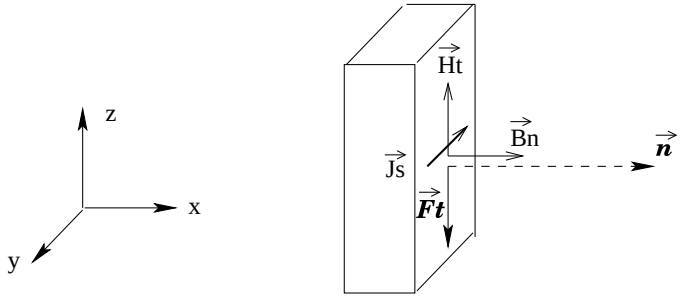
Il est inutile de faire apparaître les indices 1 ou 2 pour $\overrightarrow{H}_t$ car cette entité se conserve lors du changement de milieux. De même $\overrightarrow{B}_n$ se conserve donc $\overrightarrow{B}_{1n}$ et $\overrightarrow{B}_{2n}$ sont égaux. Prendre la valeur moyenne ou tout autre entité de la forme décrite par l'équation (1.26) redonnera $\overrightarrow{B}_n$.

$$\frac{1}{n}\left((n-x)\,\overrightarrow{B}_{1n} + (x)\,\overrightarrow{B}_{2n}\right) = \frac{1}{n}\left((n-x)+x\right)\overrightarrow{B}_n = \overrightarrow{B}_n \qquad (1.26)$$

Ce qui conduit obligatoirement à l'équation (1.27) pour la force tangentielle.

$$\overrightarrow{F_t} = (\mu_r - 1)\,(\overrightarrow{H}_t \wedge \overrightarrow{n}) \wedge \overrightarrow{B}_n \qquad (1.27)$$

Géométriquement la force $\overrightarrow{F_t}$ est de sens opposé à $\overrightarrow{H_t}$ [Fig-15] :



$Fig-15$

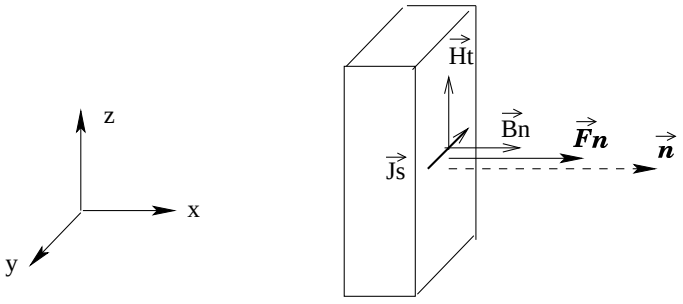
Pour la force normale, l'équation (1.12) induit l'équation (1.28) :

$$\overrightarrow{F}_n = ((\mu_r - 1)\overrightarrow{H}_t \wedge \overrightarrow{n}) \wedge \frac{\left(\overrightarrow{B}_{1t} + \overrightarrow{B}_{2t}\right)}{2} \qquad (1.28)$$

Mais $\overrightarrow{B}_t$ n'est pas conservatif et l'équation (1.29) ne sera vraie que pour l'hypothèse dans laquelle l'induction magnétique est bien la valeur moyenne.

$$\overrightarrow{F}_n = (\mu_r - 1)\overrightarrow{H}_t \wedge \overrightarrow{n}) \wedge \frac{(\mu_2)(1+\mu_r)\overrightarrow{H}_{1t}}{2} \qquad (1.29)$$

Ce qui donne géométriquement une force $\overrightarrow{F_n}$ de même sens que $\overrightarrow{B_n}$ [Fig-16] :



$Fig-16$

Les modules pour chaque composante sont de la forme (1.30) et (1.31) car $B_n = \mu_2 H_{2n}$ et $H_t = H_{2t}$.

$$\left|\overrightarrow{F}_t\right| = \mu_2\,(\mu_r - 1)\,H_{2t}\,H_{2n} \qquad (1.30)$$

$$\left|\overrightarrow{F}_n\right| = \frac{1}{2}\mu_2\,(\mu_r^2 - 1)\,H_{2t}^2 \qquad (1.31)$$

Ces équations (1.30) et (1.31) sont celles qui se rencontrent dès que les forces d'origines magnétiques sont calculées à partir des courants équivalents [24, SADOWSKI N.- 1992] [25, HENNEBERGER G.- 1992] [55, CARPENTER C.J. - 1959]. Pour donner un sens physique à ces résultats, il suffit de se tourner vers la mécanique des fluides : la force normale est similaire à la pression hydrostatique et la force tangente à l'effet de la viscosité.

Il ne faut garder à l'esprit que deux hypothèses : l'une sur le calcul du courant surfacique et l'autre sur la valeur de l'induction magnétique dans l'équation (1.12), sont implicitement utilisées pour conduire à l'écriture de ces équations.

1.5.2 Calcul des forces par la méthode des masses magnétiques équivalentes.

Les formulations qui découlent de cette méthode proviennent d'une étroite comparaison avec les calculs liés à l'électrostatique. La première étape, présentée

en début de chapitre consistait à donner un sens physique aux masses magnétiques. En particulier, une discontinuité fictive est introduite. Avec cette hypothèse la divergence de $\overrightarrow{H}$ ne pouvait plus être nulle, et par analogie avec l'électrostatique, cette divergence non nulle était égale et opposée à une entité source de champ magnétique (la masse magnétique ρ_m). L'équation (1.32) n'est qu'une écriture différente de l'équation (1.6).

$$\mu\, div(\overrightarrow{H}) = -\rho_m \qquad (1.32)$$

Pour le système comportant deux milieux comme celui qui est présenté au paragraphe 1.5 [Fig-9], N.SADOWSKI [61, SADOWSKI N.- 1993], propose d'utiliser le vecteur aimantation $\overrightarrow{M}$. Ce vecteur est assimilable à une augmentation de l'induction magnétique. Cette augmentation serait celle qu'il faudrait apporter dans un milieu amagnétique, pour retrouver la même induction que celle que l'on rencontrerait dans le milieu ferro ou paramagnétique. Cette interprétation se retrouve dans l'équation (1.33) où μ_0 est la perméabilité de l'air ; $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{H}$ sont les composantes de l'induction et du champ magnétique dans les milieux ferro ou paramagnétique.

$$\rho_m = -\mu_0 div(\overrightarrow{M}) = -\mu_0 div(\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{H}) \qquad (1.33)$$

Cela permet de construire un volume virtuel contenant des masses magnétiques dont la densité est donnée par la formulation (1.34) qui prend en compte la notation introduite au début du paragraphe 1.5.

$$\rho_m = -\mu_2\, div(\frac{\overrightarrow{B}_1}{\mu_2} - \overrightarrow{H}_1) \qquad (1.34)$$

ρ_m représente la masse magnétique par unité de volume, permettant de prendre en compte l'augmentation de l'induction magnétique induite dans le solide amagnétique équivalent [Fig-17]. Cette augmentation est le terme $(\overrightarrow{B}_1/\mu_2) - \overrightarrow{H}_1$ présent dans l'équation (1.34).

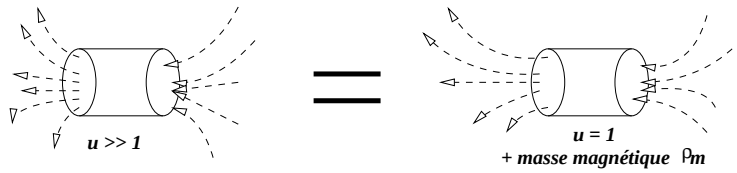


Fig – 17

Les masses magnétiques surfaciques sont introduites pour rendre compte des discontinuités au niveau de la surface de séparation des deux milieux. La masse

magnétique volumique a été définie à partir de $\overrightarrow{H}$. Par souci d'homogénéité, la discontinuité liée à $\overrightarrow{H}$ sera utilisée. En examinant la Figure-18, la masse magnétique par unité de surface, n'apparaît que pour assurer la discontinuité de $\overrightarrow{H}$ au franchissement de l'interface.

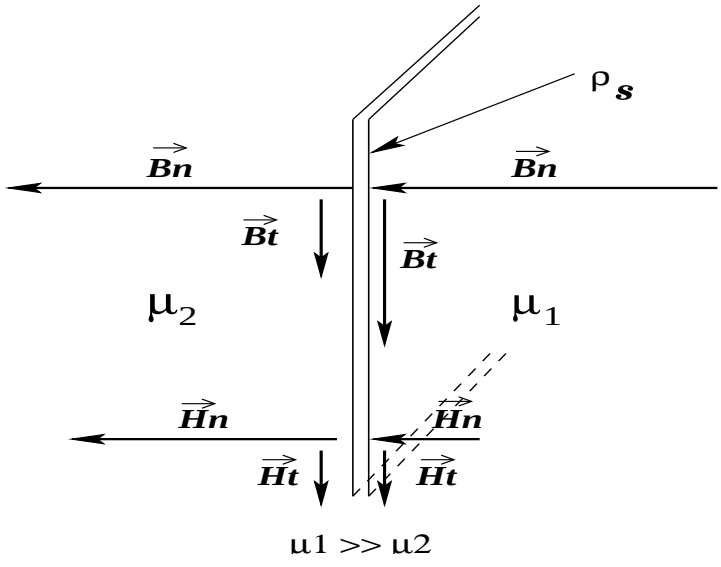


Fig – 18

Cette masse magnétique, ρ_s augmente le champ $\overrightarrow{H_n}$ de manière à retrouver un champ identique au champ extérieur et N.SADOWSKI [61, SADOWSKI.N - 1993] propose la formulation suivante pour la quantifier (1.35).

$$\rho_s = \mu_2 (H_{2n} - H_{1n}) \qquad (1.35)$$

Les forces par unité de volume ou de surface sont analogues, au niveau expression, aux forces électrostatiques et sont mises sous les formes (1.36) et (1.37).

$$\overrightarrow{F}_{Forces\ volumiques} = \rho_m \overrightarrow{H} \qquad (1.36)$$

$$\overrightarrow{F}_{Forces\ surfaciques} = \rho_s \overrightarrow{H} \qquad (1.37)$$

La démonstration utilisée pour quantifier les masses magnétiques volumiques montre immédiatement que la somme des forces volumiques sera obligatoirement nulle [Fig-19] . Chaque masse magnétique élémentaire sera accompagnée d'une masse identique mais de signe opposé, la résultante des forces pour ces deux entités sera nulle.

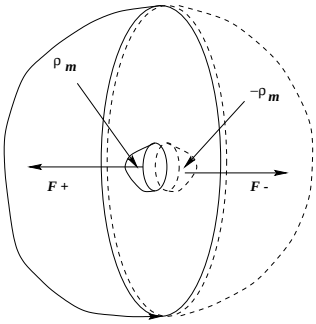


Fig – 19

Par contre, les forces induites par les masses magnétiques surfaciques ne donneront pas, à priori, une résultante nulle en présence d'un champ non uniforme. Pour poursuivre l'analyse, une décomposition sous forme d'une force normale à la surface de séparation et d'une force tangente à cette surface est nécessaire. Pour exprimer l'intensité de ces deux forces, les masses magnétiques sont en interaction avec un champ magnétique dont l'intensité est la valeur moyenne du champ magnétique (1.38) [61, SADOWSKI N.- 1993].

$$\overrightarrow{H}_{moy} = \frac{(\overrightarrow{H}_1 + \overrightarrow{H}_2)}{2} \qquad (1.38)$$

Les équations (1.36) et (1.37) deviennent :

$$\overrightarrow{F}_n = \rho_s \overrightarrow{H}_{nmoy} \qquad (1.39)$$

$$\overrightarrow{F}_t = \rho_s \overrightarrow{H}_{tmoy} \qquad (1.40)$$

A partir de ces deux expressions et de la définition de ρ_s (1.35), il est possible d'écrire les forces normale et tangente en n'utilisant que les composantes du champ magnétique.

$$\overrightarrow{F}_n = \mu_2 (H_{2n} - H_{1n}) . \frac{(\overrightarrow{H}_{1n} + \overrightarrow{H}_{2n})}{2} \qquad (1.41)$$

$$\overrightarrow{F}_t = \mu_2 (H_{2n} - H_{1n}) . \frac{(\overrightarrow{H}_{1t} + \overrightarrow{H}_{2t})}{2} \qquad (1.42)$$

La continuité de la composante normale de l'induction magnétique, $\overrightarrow{B}_n$, permet d'écrire l'équation (1.43) et la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique induit l'équation (1.44).

$$\vec{H}_{1n} = \frac{1}{\mu_r}\vec{H}_{2n} \qquad (1.43)$$

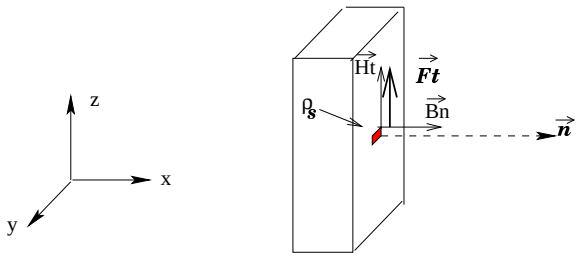
$$\vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t} \qquad (1.44)$$

Une autre écriture des équations (1.41) et (1.42) est possible en utilisant les équations (1.43) et 1.44).

$$\vec{F}_n = (\mu_2 (1 - 1/\mu_r) H_{2n}) \frac{(1 + 1/\mu_r)\vec{H}_{2n}}{2} \qquad (1.45)$$

$$\vec{F}_t = \mu_2 (1 - 1/\mu_r) H_{2n} \vec{H}_{2t} = (1 - 1/\mu_r) B_{2n} \vec{H}_{2t} \qquad (1.46)$$

Ce qui donne, une force $\vec{F}_t$ colinéaire à $\vec{H}_t$ et de même sens [Fig-20].

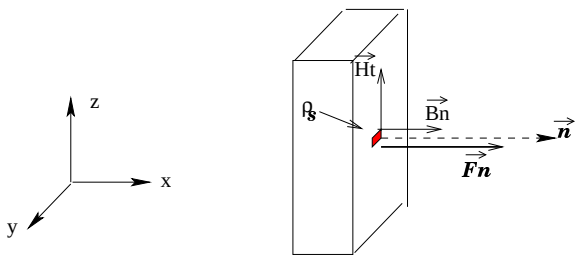


$Fig - 20$

Pour la force normale :

$$\vec{F}_n = \frac{1}{2}\mu_2 (1 - 1/\mu_r^2) H_{2n}^2 . \vec{n} = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_2}(1 - 1/\mu_r^2) B_{2n}^2 . \vec{n} \qquad (1.47)$$

Ce qui se traduit par une force $\vec{F}_n$ colinéaire à $\vec{B}_n$ et aussi de même sens [Fig-21] :



$Fig - 21$

Ces deux formulations, de la force normale et de la force tangentielle, ne reposent que sur la connaissance de la masse magnétique surfacique. La quantification de cette masse magnétique est induite par la discontinuité de $\overrightarrow{H}_n$ et ne prend en compte que les valeurs de $\overrightarrow{H}$ au voisinage de la surface de séparation. Donc la formulation de ρ_s ne prend pas en compte l'aspect spatial de la répartition du champ.

Pour comprendre les limitations de cette formulation, il suffit de faire un parallèle avec l'électrostatique et il n'est pas obligatoire de prendre un exemple complexe car seule l'origine de la formulation (1.35) est à rechercher. Cette similitude, vis à vis de la mise en équation, est mise en évidence par G.FOURNET [53, FOURNET G. - 1985] dans l'un de ses ouvrages dans lequel l'aspect de la magnétostatique associée aux masses magnétiques est abordé. $\overrightarrow{E}$, le champ électrique au point M est engendré par la charge électrique q au point M' (1.48). De même, le champ magnétique $\overrightarrow{H}$, est engendré par la masse magnétique ρ (1.49).

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{|MM'|^3} \qquad (1.48)$$

$$\overrightarrow{H} = \frac{\rho}{4\pi}\frac{\overrightarrow{MM'}}{|MM'|^3} \qquad (1.49)$$

L'exemple qui va servir de support à cette analyse est celui de deux plaques parallèles de dimensions infinies, chargées électriquement et qui engendrent un champ électrique uniforme à l'intérieur [Fig-22].

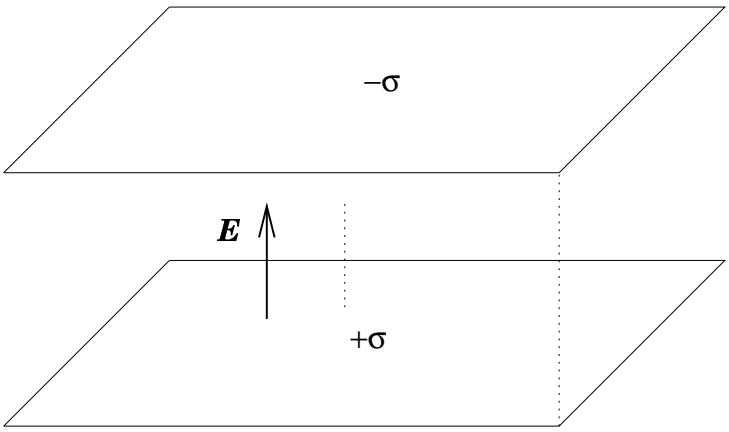
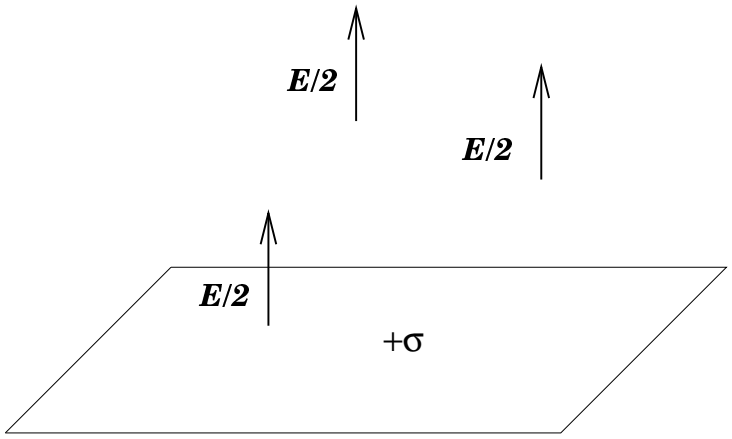


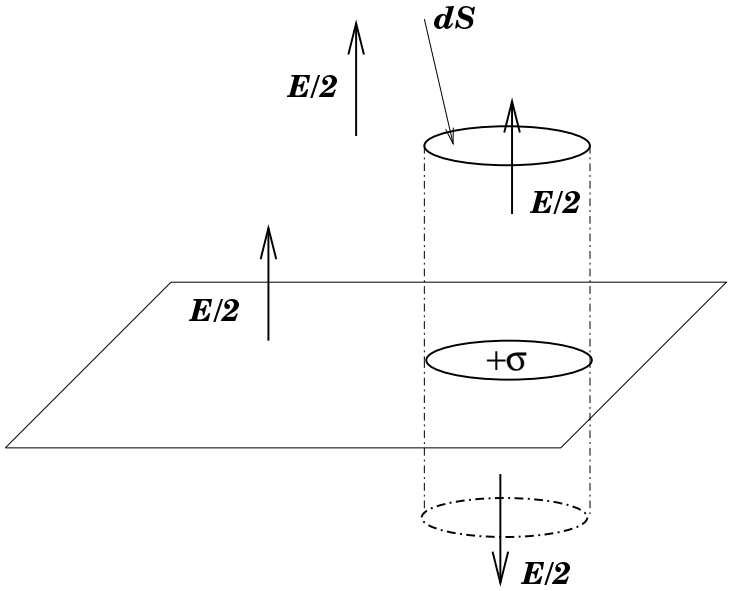
Fig – 22

En retirant l'une des deux plaques, il ne reste plus qu'une seule surface chargée électriquement [Fig-23] et il est possible de quantifier le champ électrique résultant, en utilisant des propriétés géométriques.



$Fig-23$

La démonstration est immédiate en exploitant l'équation (1.3), le flux au travers d'une surface fermée devient indépendant de la distance par rapport à la surface infinie chargée électriquement. C'est ce que traduit l'équation (1.50) issue de la figure 24.



$Fig-24$

$$\int_{Surface} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{ds} = 1/\varepsilon_0 \int_{Surface} \sigma.ds \qquad (1.50)$$

Ce calcul de champ électrique uniforme est intimement associé à la dimension infinie de la plaque électriquement chargée. Cette conclusion est aussi valable pour les masses magnétiques surfaciques. L'absence de condition spatiale pour le calcul de la masse magnétique, n'est qu'une hypothèse sur l'uniformité du champ magnétique. L'analogie entre les formulations implique que l'équation (1.35) ne sera utilisable que dans le cas de surface infiniment grande et en présence d'un champ magnétique constant.

En reprenant le système présenté à la fin du paragraphe 1.5.1 et en l'adaptant aux masses magnétiques [Fig-25], les difficultés pour quantifier ces masses magnétiques surfaciques vont être mises en évidence.

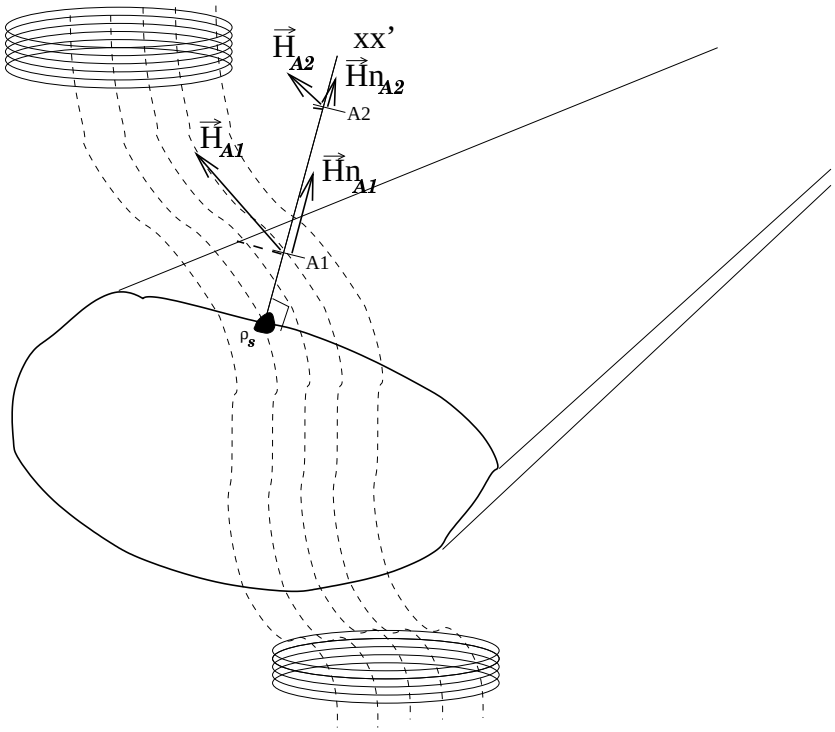


Fig – 25

Pour deux positions différentes (A1 et A2) sur l'axe xx' normal à la surface, deux valeurs différentes de $\overrightarrow{H}_n$ existent. Donc en appliquant la formulation (1.35), deux valeurs différentes sont calculées pour la même masse magnétique surfacique.

1.5.3 Calcul des forces par la méthode des masses et des courants surfaciques.

Les modélisations précédentes reposent sur l'existence de deux sources de champ. Pour chaque interprétation, courants équivalents ou masses magnétiques, une source volumique de champ et une source surfacique de champ ont été créées. Les sources volumiques de champ (masses ou courants) n'engendrent aucune force au niveau du solide. les seules forces qui sont globalement non nulles, sont engendrées par les sources surfaciques de champ (masses ou courants). Les courants surfaciques permettent de prendre en compte la discontinuité de $\overrightarrow{B}_t$ et les masses magnétiques surfaciques celle de $\overrightarrow{H}_n$. En associant ces deux sources surfaciques de champ, il est possible de reconstruire un champ magnétique équivalent avec une absence de source volumique, et cette absence de source volumique impose aux sources surfaciques de générer la totalité du champ.

Cela induit que les masses magnétiques surfaciques vont générer la totalité de $\overrightarrow{H}_n$ et les courants surfaciques prendront en charge la totalité de $\overrightarrow{B}_t$. Ce principe, qui a été repris par N.SADOWSKI [61, SADOWSKI N. - 1993], mais issu aussi des travaux de C.J.CARPENTER [55, CARPENTER C.J. - 1959] conduit aux équations (1.51) pour le calcul du courant surfacique et (1.52) pour le calcul des masses magnétiques. Ces deux équations se retrouvent aisément à partir de (1.24) et (1.35) en prenant simplement le champ magnétique, à l'intérieur du solide, nul.

$$\overrightarrow{J}_s = -\overrightarrow{H}_2 \wedge \overrightarrow{n} = -\overrightarrow{H}_t \wedge \overrightarrow{n} = \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{H}_t \qquad (1.51)$$

$$\rho_s = \mu_2 H_{2n} = B_n \qquad (1.52)$$

Pour en déduire des forces, il suffit d'appliquer à ces deux sources de champ les formules (1.2) et (1.8) utilisées dans les paragraphes précédents. Ces équations sont appliquées à une surface élémentaire de la surface de séparation entre les deux milieux de perméabilités différentes. A l'intérieur du solide, il n'y a plus aucune source de champ pouvant engendrer des forces. La force d'origine magnétique est simplement obtenue en faisant la somme des forces induites par les masses magnétiques surfaciques et des forces induites par les courants surfaciques équivalents. L'équation (1.53), est utilisée par N.SADOWSKI, et provient aussi des travaux de C.J.CARPENTER. De cette équation (1.53), une succession d'opérations va conduire à l'écriture usuellement rencontrée de la force normale (1.56) et de la force tangente (1.55).

$$\overrightarrow{F} = \rho_s \overrightarrow{H}_{moy} + \overrightarrow{J}_s \wedge \overrightarrow{B}_{moy} \qquad (1.53)$$

Une écriture intermédiaire (1.54) permet de faire apparaître les composantes du champ ou de l'induction magnétique à l'extérieur du solide (l'indice 2 est l'indice de l'environnement extérieur) :

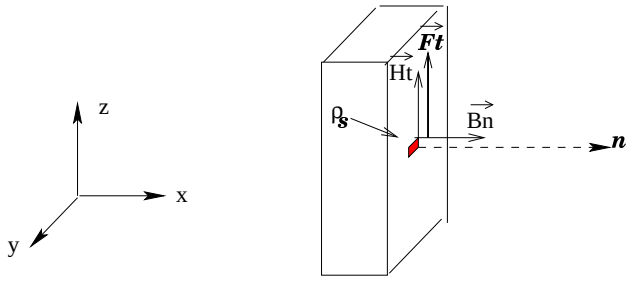
$$\overrightarrow{F} = \rho_s \overrightarrow{H}_2 - \frac{B_2^2 \overrightarrow{n}}{2\mu_2} \qquad (1.54)$$

Cette proposition permet de conclure sur les composantes tangentielle et normale de la force d'origine magnétique.

Pour la force tangente :

$$\overrightarrow{F}_t = \rho_s \overrightarrow{H}_{2t} = \mu_2 H_{2n} \overrightarrow{H}_{2t} \qquad (1.55)$$

Ce qui nous donne géométriquement une force colinéaire à $\overrightarrow{H}_t$ et de même sens [Fig-26] :

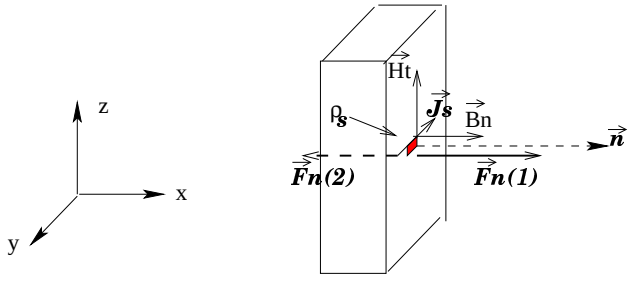


$Fig-26$

Pour la force normale :

$$\overrightarrow{F}_n = \rho_s \overrightarrow{H}_{2n} - \frac{(B_{2n}^2 + B_{2t}^2)\overrightarrow{n}}{2\mu_2} \qquad (1.56)$$

Par contre géométriquement cette force peut être dans un sens opposé à la normale sortante. La somme des deux termes peut être positive ce qui nous donne $\overrightarrow{F}_n(1)$ ou négative ce qui nous donne $\overrightarrow{F}_n(2)$ [Fig-27].



$Fig-27$

W.MULLER [26, MULLER W. - 1990] et N.SADOWSKI [61, SADOWSKI N.- 1993] présentent dans leurs travaux ces formulations et en particulier concluent que les modules de ces composantes peuvent se mettre sous la forme des équations (1.57) et (1.58) .

$$\left|\overrightarrow{F_t}\right| = B_n H_t \qquad (1.57)$$

$$\left|\overrightarrow{F}_n\right| = \frac{B_n^2}{2\mu_2} - \frac{\mu_2 H_t^2}{2} \qquad (1.58)$$

Ces résultats ne peuvent être obtenus que si certaines hypothèses sont utilisées en plus des hypothèses associées aux calculs des sources surfaciques. Écrire que l'équation (1.54) provient de l'équation (1.53) implique, pour la masse magnétique, d'être soumise à la totalité du champ et non à sa valeur moyenne. L'équation (1.59), qui permet d'écrire la valeur moyenne de $\overrightarrow{H}$, fait bien apparaître un coefficient 1/2 supplémentaire qui n'est pas présent dans l'équation (1.54).

$$\overrightarrow{H}_{moy} = \frac{\overrightarrow{H}_1 + \overrightarrow{H}_2}{2} = \frac{\overrightarrow{0} + \overrightarrow{H}_2}{2} = \frac{\overrightarrow{H}_2}{2} \qquad (1.59)$$

D'autre part, l'équation (1.54) ne peut être obtenue à partir de l'équation (1.53) que si une propriété géométrique est utilisée au cours de la transformation. La propriété qui est implicitement utilisée est résumée par l'équation (1.60).

$$\left(\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{H}_2\right) \wedge \frac{\overrightarrow{B}_2}{2} = -\frac{B_2^2.\overrightarrow{n}}{2\mu_2} \qquad (1.60)$$

Le terme de gauche de cette équation est simplement le terme représentant la force induite par les courants surfaciques. L'équation (1.61) met plus facilement en évidence cette égalité.

$$\overrightarrow{J}_s \wedge \overrightarrow{B}_{moy} = (\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{H}_t) \wedge (\frac{\overrightarrow{B}_2}{2}) = (\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{H}_2) \wedge (\frac{\overrightarrow{B}_2}{2}) \qquad (1.61)$$

L'équation (1.60) induit une force obligatoirement colinéaire à la normale sortante $\overrightarrow{n}$. Les représentations géométriques suivantes vont permettre de mettre en évidence que cette propriété n'est pas naturellement acquise. Pas à pas, le terme de gauche de l'équation (1.60), est construit en collaboration étroite avec une représentation géométrique.

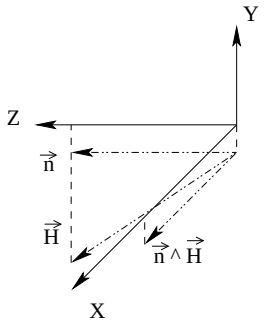


Fig – 28

Dans la figure 28, $\overrightarrow{n}$ est la normale sortante de la surface de séparation, et est colinéaire à l'axe Z. $\overrightarrow{H}$ ($\overrightarrow{H}_2$) est contenu dans le plan Z.Y. donc le produit vectoriel de $\overrightarrow{n}$et de$\overrightarrow{H}$ va donner un vecteur colinéaire à X.

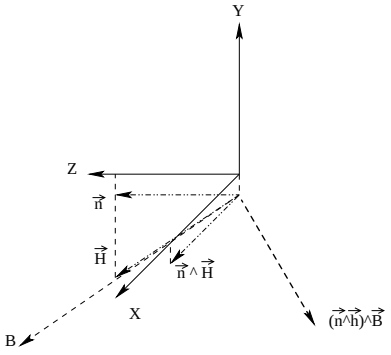


Fig – 29

En continuant la construction, [Fig-29], le produit vectoriel $\left(\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{H}\right) \wedge \overrightarrow{B}$ équivalent à $\left(\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{H}_2\right) \wedge \overrightarrow{B}_2$ va donner un vecteur contenu dans le plan Y-Z et orthogonal à $\overrightarrow{B}$ ($\overrightarrow{B}_2$). Cela n'implique absolument pas la colinéarité avec $\overrightarrow{n}$. Et cette colinéarité est indispensable pour utiliser l'équation (1.60). En l'absence de vérification de l'équation (1.60), le résultat présenté dans l'équation (1.58) n'est pas issu naturellement de l'équation (1.53) . Cette formulation, et en particulier les résultats qui en découlent, imposent donc des conditions d'emploi.

Cette écriture n'est en fait vérifiée que si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{H}$ sont orthogonaux. C'est cette condition géométrique qui permet l'écriture de l'équation (1.60). Cela se traduit ainsi par une absence de composante normale pour le champ magnétique au niveau de la surface de séparation. Ce cas peut se rencontrer, par exemple, dans des systèmes où les deux milieux différents ont la même perméabilité, comme un solide amagnétique plongé dans de l'air. Mais dans ce cas, aucune force n'existe.

1.5.4 Calcul des forces par la dérivée de l'énergie.

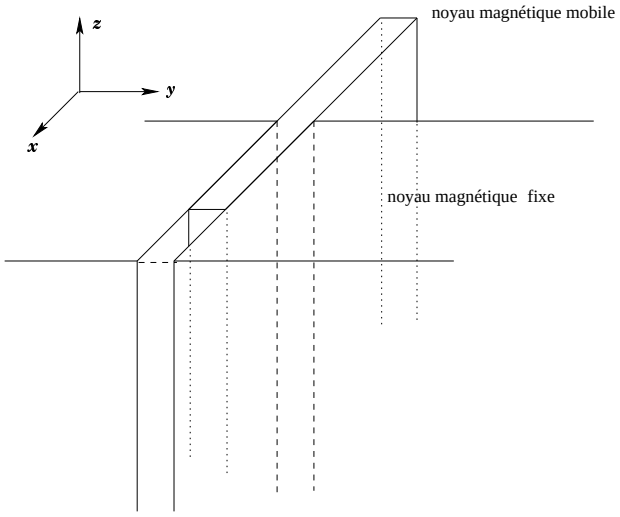
Avec cette méthode, le point de départ est l'expression de l'énergie magnétique (1.62), cette expression se rencontre dans tous les ouvrages associés au magnétisme [5, FEYNMAN R. - 1995] [9, LANDAU L.- 1990] et, en particulier, l'ouvrage de D.SIVOUKHINE [17, SIVOUKHINE D. - 1983] présente une démarche très didactique de celle-ci.

$$W_{magnetique} = \int_{volume} \int_0^B \overrightarrow{H} . \overrightarrow{dB} dv \qquad (1.62)$$

Ce qui donne comme énergie par unité de volume :

$$W_v = \int_0^B \overrightarrow{H} . \overrightarrow{dB} \qquad (1.63)$$

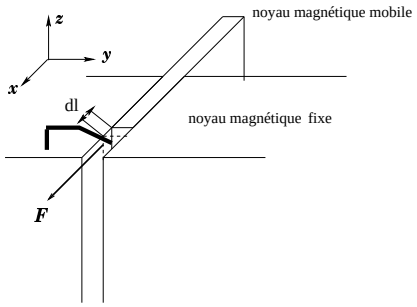
L'énergie magnétique totale est calculée pour le système présenté à la figure 30. Ce système est un assemblage de deux barres de longueur infinie constituées d'un matériau paramagnétique (ou ferromagnétique) et d'un parallélépipède réalisé dans le même matériau et prenant place entre ces deux barres, de manière à remplir une partie de l'entrefer. Ce parallélépipède peut se déplacer librement selon l'axe x.



$Fig - 30$

En présence d'un champ magnétique, cet assemblage évolue de manière à maximiser le flux circulant dans les matériaux ferro ou paramagnétique, le parallélépipède (noyau magnétique mobile) se positionne de telle sorte qu'il remplisse complètement l'entrefer.

Par contre si un obstacle ne le laisse effectuer qu'un très faible déplacement $\overrightarrow{dl}$, il n'aura pas rejoint sa position d'équilibre (position finale) et cet obstacle sera soumis à une force $\overrightarrow{F}$ dont l'origine est associée au parallélépipède qui souhaite poursuivre son déplacement [Fig-31].



$Fig-31$

Comme la longueur du noyau magnétique mobile est infiniment grande, les modifications de répartition spatiale du champ magnétique ne sont notables qu'au voisinage de l'entrefer. Ce déplacement, de faible amplitude, introduit une modification de l'énergie magnétique totale du système. L'équation (1.64) rend compte de cet effet. Un volume d'air est remplacé par une partie du noyau magnétique mobile et l'énergie magnétique liée à ce volume est modifiée.

$$\triangle W_{magnetique} = W_{etat-2} - W_{etat-1} \qquad (1.64)$$

Où W_{etat-2} est l'énergie magnétique du système après le déplacement dl et W_{etat-1} l'énergie magnétique du système avant le déplacement dl. A partir de cet instant, l'hypothèse de la variation de l'énergie est utilisée. Cette variation est assimilée à l'opposé du travail d'une force supposée constante sur la distance $\overrightarrow{dl}$. Cela conduit à l'écriture de l'équation (1.65).

$$\triangle W_{magnetique} = -\triangle W_{mecanique} = -\overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} \qquad (1.65)$$

Il faut garder à l'esprit que pour la force $\overrightarrow{F}$ définie par cette formulation, seule la composante colinéaire au déplacement $\overrightarrow{dl}$ est calculable. Toutefois, les forces induites par le principe de la variation de l'énergie ne peuvent exister que si elles participent à la variation de l'énergie totale du système. La nullité des forces tangentielles est souvent citée mais très rarement démontrée. En imaginant que le matériau situé dans l'entrefer ait un comportement proche d'un fluide extrêmement visqueux, il est ainsi possible d'imaginer que des particules élémentaires du matériau puissent se déplacer dans toutes les directions. En prenant une particule

élémentaire associée à la surface de séparation, elle peut se déplacer suivant l'axe Y. Cette évolution, référencée dl', est présentée sur la figure 32.

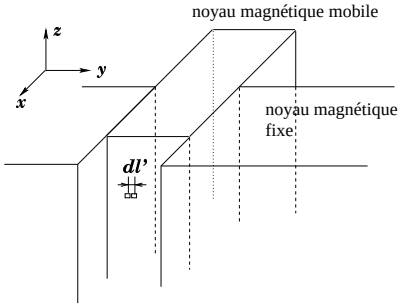


Fig – 32

Ce déplacement de particules peut être assimilé à des permutations de particules. La particule d'origine s'est bien déplacée de dl' mais une autre particule a comblé le vide laissé par son départ. En aucun cas ce déplacement ne peut induire localement de modification de la perméabilité du matériau car si cette possibilité est à envisager, elle conduit à un agrégat de particules et il n'est pas vérifié expérimentalement. En conséquence, l'énergie totale n'est absolument pas modifiée. Donc toutes les forces tangentes à la surface ou les forces à l'intérieur du parallélépipède, sont nulles. Voici une explication possible, induite par les remarques de D.SIVOUKHINE [17, SIVOUKHINE D. - 1983], sur la dérivée de l'énergie.

Il n'existe plus qu'une composante normale à la surface. Le résultat se limite à l'expression d'une force par rapport à une surface élémentaire et cette force est normale à cette surface. Il est possible d'assimiler cette force par unité de surface à une pression [Fig-33].

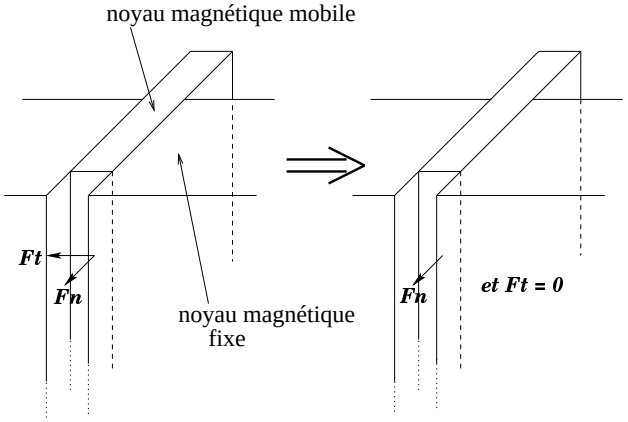


Fig – 33

En conclusion, les forces d'origine magnétique induites par cette formulation sont obligatoirement normales aux surfaces ($\overrightarrow{F}_t = 0$ et $\overrightarrow{F}_n \neq 0$) [Fig-33]. Pour calculer cette force, l'équation (1.63) liée au calcul de l'énergie magnétique est à l'origine de la formulation.

– En utilisant la loi de comportement (1) qui limitera la validité de la formulation aux matériaux linéaires, c'est à dire ne présentant pas de saturation ni d'hystérésis, l'énergie magnétique par unité de volume devient (1.66).

$$W_{magnetique(dv)} = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu} \qquad (1.66)$$

Soit *volume-1* le volume constitué par les noyaux magnétiques mobiles ou fixes et *volume-2* l'air ambiant. L'énergie magnétique totale est la somme de l'énergie contenue dans le *volume-1* et de l'énergie magnétique contenue dans le *volume-2*.

– Énergie magnétique pour le volume 1 :

$$W_1 = \int_{volume.1} \frac{B_1^2}{2\mu_1} dv = \int_{volume.1} \mu_1 \frac{H_1^2}{2} dv \qquad (1.67)$$

– Énergie magnétique pour le volume 2 :

$$W_2 = \int_{volume.2} \frac{B_2^2}{2\mu_2} dv = \int_{volume.2} \mu_2 \frac{H_2^2}{2} dv \qquad (1.68)$$

Après le déplacement $\overrightarrow{dl}$, il est tout a fait envisageable que seul le volume défini par cette extrusion voit sa répartition spatiale de champ magnétique modifiée, c'est d'ailleurs l'hypothèse faite par D.SIVOUKHINE. Pour tous les autres volumes, la répartition spatiale de champ magnétique n'a pas été remise en cause et leur perméabilité est conservée. Donc le seul volume qui est à prendre en compte est limité au volume défini par l'extrusion $\overrightarrow{dl}$: la modification de l'énergie magnétique du volume extrudé n'a été induite que par le changement de sa perméabilité.

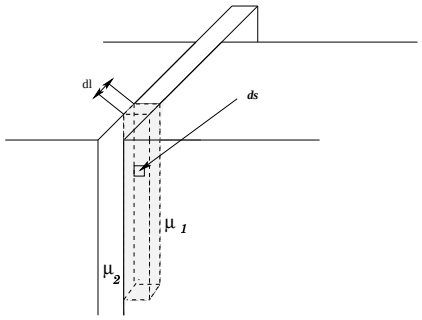


Fig – 34

Le volume grisé (V), visible sur la figure 34, a vu sa perméabilité passer de μ_2 à μ_1. En application des hypothèses précédentes, la variation totale d'énergie magnétique peut se mettre sous la forme donnée par l'équation (1.69).

$$\triangle W_{magnetique} = \int_V \left(\frac{\mu_1 H_1^2}{2} - \frac{\mu_2 H_2^2}{2} \right) dv \qquad (1.69)$$

En mettant le volume élémentaire sous la forme $dv = \overrightarrow{ds} . \overrightarrow{dl}$ (1.70) et en faisant apparaître la variation d'énergie comme étant l'opposé du travail de la force d'origine magnétique (1.71) , il est possible d'exprimer cette force (1.72) par simple équivalence du terme contenu dans l'intégrale de volume.

$$\triangle W_{magnetique} = \int_V \left(\frac{1}{2}\mu_1 H_1^2 - \frac{1}{2}\mu_2 H_2^2 \right) \overrightarrow{ds}.\overrightarrow{dl} \qquad (1.70)$$

et

$$\triangle W_{mecanique} = \overrightarrow{F} . \overrightarrow{dl} \qquad (1.71)$$

D'où :

$$\overrightarrow{F} = - \int_{section} \left(\frac{\mu_1 H_1^2}{2} - \frac{\mu_2 H_2^2}{2} \right) \overrightarrow{ds} \qquad (1.72)$$

La force par unité de surface (1.73) est déduite de l'équation (1.72).

$$F_s = \left(\frac{\mu_2 H_2^2}{2} - \frac{\mu_1 H_1^2}{2} \right) \qquad (1.73)$$

Il est encore possible d'écrire cette équation sous une autre forme, en posant :

$$\overrightarrow{H}_1 = \overrightarrow{H}_{1t} + \overrightarrow{H}_{1n} \qquad (1.74)$$

$$\overrightarrow{H}_2 = \overrightarrow{H}_{2t} + \overrightarrow{H}_{2n} \qquad (1.75)$$

$$\overrightarrow{B}_1 = \overrightarrow{B}_{1t} + \overrightarrow{B}_{1n} \qquad (1.76)$$

$$\overrightarrow{B}_2 = \overrightarrow{B}_{2t} + \overrightarrow{B}_{2n} \qquad (1.77)$$

$$\overrightarrow{B}_1 = \mu_1 \overrightarrow{H}_1 \qquad \overrightarrow{B}_2 = \mu_2 \overrightarrow{H}_2 \qquad (1.78/1.79)$$

Les indices t et n indiquent respectivement les composantes tangentielle et normale de $\overrightarrow{H}$ ou de $\overrightarrow{B}$. Comme la composante normale de $\overrightarrow{B}$ ($\overrightarrow{B}_n$) ainsi que la

composante tangentielle de $\overrightarrow{H}$ ($\overrightarrow{H}_t$) se conservent, il est plus intéressant d'écrire la pression magnétique sous la forme (1.80).

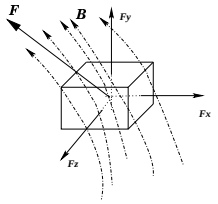
$$F_s = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right) B_n^2 + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1) H_t^2 \qquad (1.80)$$

Cette pression est ainsi exprimée par l'intermédiaire des composantes du champ ou de l'induction magnétique qui sont indépendantes des milieux. L'équation (1.80) est l'équation qui est systématiquement rencontrée lors du calcul des forces par la méthode de la dérivée de l'énergie.

1.5.5 Calcul des forces par la méthode du tenseur de Maxwell.

Une approche, connue sous le nom de "méthode du tenseur de Maxwell" se propose de calculer les forces d'origine magnétique. Cette formulation doit être utilisée avec attention car elle ne se propose pas initialement de calculer les forces locales dans les systèmes électromécaniques [32, WIGNALL.A-N.-1988]. Son appellation vient du fait qu'elle utilise la divergence du tenseur de Maxwell (1.81) et procure une force qui est celle que subit un volume élémentaire [Fig-35] plongé dans un champ magnétique.

$$\overrightarrow{F} = div\left(\widetilde{T}\right) \qquad (1.81)$$



$Fig-35$

En prenant comme notation T pour le tenseur de maxwell, la force subie par le volume élémentaire selon un axe, par exemple x, s'écrit sous la forme suivante :

$$F_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \qquad (1.82)$$

Il est aisé de déduire la force élémentaire à partir du moment où l'expression du tenseur de Maxwell est connue. La construction de cette entité, le tenseur de Maxwell, n'est pas systématiquement abordée au niveau des présentations de ses applications. Il reste toutefois possible d'en connaître la genèse par l'intermédiaire de quelques publications de référence comme celle de E.DURAND [54, DURAND.E - 1968].

Les équations de Maxwell se présentent sous la forme de 4 équations. Elles permettent de formaliser les relations qui existent entre les différentes entités

rencontrées en électrotechnique. R.FEYNMAN [5, FEYNMAN R. - 1992] [6, FEYNMAN R. - 1992] rend hommage à cette unification des lois de l'électricité et du magnétisme en consacrant un chapitre complet à ce sujet.

La première équation de Maxwell permet d'expliciter le lien entre le champ électrique source et les charges électrostatiques (1.83)

$$div\left(\overrightarrow{D}\right) = \rho \qquad (1.83)$$

Le flux de $\overrightarrow{D}$ à travers une surface fermée est proportionnel à la charge électrique contenue.

Ensuite un lien entre le champ électrique et l'induction magnétique est introduit par l'intermédiaire de la deuxième équation de Maxwell (1.84).

$$rot\left(\overrightarrow{E}\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \qquad (1.84)$$

Aussi connue sous l'appellation "loi de Faraday", la circulation du champ électrique le long d'un contour fermé est égale et opposée à la variation de flux de l'induction magnétique par rapport au temps.

La troisième équation de Maxwell, de forme similaire à la première, rend compte de la nullité systématique du flux de l'induction magnétique au travers d'une surface fermée (1.85).

$$div\left(\overrightarrow{B}\right) = 0 \qquad (1.85)$$

Cela induit des caractéristiques antisymétriques pour le champ magnétique.

Enfin la dernière équation, est issue d'une remarque de Maxwell sur la conservation de la charge électrique pour un courant électrique [5, FEYNMAN R. - 1992]. Cela conduit à l'équation (1.86).

$$rot\left(\overrightarrow{H}\right) = \overrightarrow{J} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \qquad (1.86)$$

Ces quatre équations sont insuffisantes pour construire le tenseur de Maxwell. Il faut introduire une cinquième équation qui permet de prendre en compte les effets d'un champ magnétique sur un courant électrique. Cette équation découle de la force qui s'exerce sur un charge électrique en mouvement plongée dans un champ magnétique, c'est la force de Lorentz (1.87).

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \qquad (1.87)$$

En utilisant cette équation, implicitement, la charge électrique n'a pas de lien avec le champ magnétique. En d'autres termes, ce n'est pas le déplacement de

cette charge qui engendre le champ magnétique auquel elle est soumise. Une application de cette équation à un courant électrique permet d'écrire la loi de Laplace (1.88).

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{J} \wedge \overrightarrow{B} \qquad (1.88)$$

Les conditions d'emploi de cette loi, sont similaires à celles liées à l'équation (1.87). Toutefois, ces aspects ne seront approfondis qu'à la fin du paragraphe et seule la démarche proposée par E.DURAND est exposée pour l'instant.

La loi de Laplace permet d'écrire la force qui s'exerce sur un courant $\overrightarrow{J}$ qui est plongé dans un environnement où circule une induction magnétique $\overrightarrow{B}$. Pour simplifier l'écriture de cette loi dans un repère orthonormé, il est possible de se limiter à l'écriture de la force selon un seul axe (x par exemple) (1.89) :

$$F_x = J_y.B_z - J_z.B_y \qquad (1.89)$$

En utilisant la loi de comportement (1), ce qui limite la portée de la formulation aux matériaux linéaires et en l'absence de champ électrique, E.DURAND émet l'hypothèse que ce courant, indispensable pour l'utilisation de l'équation de LAPLACE, est assimilé au rotationnel de ce même champ (1.90). Cette équation est issue de l'équation (1.86) où le deuxième terme de l'équation est absent car seul l'aspect statique est étudié, $\left(\frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} = 0\right)$.

$$rot\left(\overrightarrow{H}\right) = \overrightarrow{J} \qquad (1.90)$$

De cette équation, il est possible d'écrire $\overrightarrow{J}$ comme une composition des dérivées partielles de $\overrightarrow{H}$. Une formulation ne contenant que des termes liés au champ magnétique peut ainsi être écrite (1.91) en utilisant (1.89) et (1.90).

$$F_x = \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right).\mu.H_z - \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right).\mu.H_y \qquad (1.91)$$

Rien n'interdit d'ajouter à F_x la quantité nulle suivante (1.92) :

$$H_x.div\left(\overrightarrow{B}\right) = \mu.H_x.\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}\right) \qquad (1.92)$$

Nullité induite par (1.85) :

Alors, une autre expression pour F_x apparaît (1.93) :

$$\begin{aligned} F_x \;=\; & \mu.\left(H_x.\frac{\partial H_x}{\partial x} - H_y.\frac{\partial H_y}{\partial x} - H_z.\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \\ & +\mu.\left(H_y.\frac{\partial H_x}{\partial y} + H_x.\frac{\partial H_y}{\partial y}\right) \\ & +\mu.\left(H_z.\frac{\partial H_x}{\partial z} + H_x.\frac{\partial H_z}{\partial z}\right) \qquad (1.93) \end{aligned}$$

Cette écriture peut être employée pour toutes les composantes F_x, F_y, F_z et une identification donne chaque composante du tenseur de Maxwell (1.94) :

$$T_{ij} = \mu. \left[H_i.H_j - \frac{\delta_{ij}}{2}.H^2 \right] \qquad (1.94)$$

i et j peuvent prendre comme valeur x,y,z, et $\delta_{ij} = 1$ si i=j, sinon $\delta_{ij} = 0$.

En conclusion, le tenseur de Maxwell se met sous la forme (1.95) qui est une de ses formes usuelles :

$$T = \left\{ \begin{array}{ccc} \mu \left[H_x.H_x - \frac{H^2}{2} \right] & \mu [H_x.H_y] & \mu [H_x.H_z] \\ \mu [H_y.H_x] & \mu \left[H_y.H_y - \frac{H^2}{2} \right] & \mu [H_y.H_z] \\ \mu [H_z.H_x] & \mu [H_z.H_y] & \mu \left[H_z.H_z - \frac{H^2}{2} \right] \end{array} \right\} \quad (1.95)$$

A partir de cette présentation, il est très aisé de mettre en forme la divergence de ce tenseur, pour exprimer chaque composante de la force d'origine magnétique selon x,y et z (1.96) .

$$\begin{array}{rcl} F_x & = & \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ F_y & = & \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ F_z & = & \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{array}$$

$$(1.96)$$

Cette suite d'équations est issue de la méthode qui est proposée par E.DURAND [54, DURAND.E - 1968] pour écrire le tenseur de Maxwell. Sur le plan mathématique, la démarche est claire et ne présente pas de point à expliciter. Par contre, sur le plan physique, elle met en avant un artifice, qui consiste à utiliser la dernière équation de Maxwell pour faire apparaître le courant indispensable à l'utilisation des forces de Laplace. En un point donné, l'induction magnétique $\overrightarrow{B}$ est interprétée comme étant un courant $\overrightarrow{J}$ dont la valeur est donnée par l'équation (1.90). Assimiler ce courant au rotationnel du champ et imaginer que ce courant est en interaction avec ce même champ, revient à accepter le fait qu'une charge électrique subit le champ électrique qu'elle génère, et cette notion n'est pas d'un abord évident... A l'aide d'un exemple simple, Il est possible de souligner la complexité du problème.

Un conducteur amagnétique, comme une simple barre en cuivre, est plongé dans un champ magnétique uniforme [Fig-36]. En l'absence de courant réel dans cette barre, il ne subit aucune force de Laplace. D'autre part, le cuivre étant un matériau amagnétique, il n'existe pas de force d'origine magnétique sur cette barre.

Elle doit rester immobile et tout volume élémentaire dv ne doit subir aucune force extérieure.

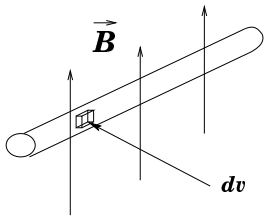


Fig – 36

La barre n'induit aucune modification de la répartition spatiale du champ magnétique, en conséquence : tout calcul de la circulation du champ magnétique sur un contour fermé, induit un courant nul pour l'équation (1.90). Et l'équation (1.88) donne une force globale nulle.

Si cette barre est maintenant réalisée à partir d'un matériau ferromagnétique, elle doit se déplacer de manière à maximiser le flux magnétique. Est-il toujours possible, comme le propose la méthode liée au tenseur de Maxwell, de prendre l'équation (1.88) comme référence pour étudier les forces d'origine magnétique ? Il faut garder à l'esprit que l'équation (1.86) n'est que l'expression de la circulation du champ magnétique sur un contour fermé. Cette équation est d'ailleurs mise à profit pour montrer la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique lors d'un changement de substance [17, SIVOUKHINE D. - 1983].

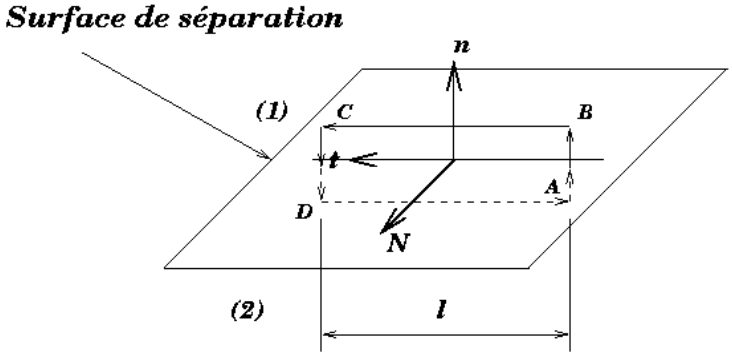


Fig – 37

En appliquant le théorème de la circulation de $\overrightarrow{H}$ sur le contour fermé ABCD [Fig-37], dont la hauteur par rapport à la surface de séparation est négligeable, les côtés BC et DA sont les seuls à prendre en compte. Cette circulation est calculée

à partir des composantes du champ magnétique, tangentielles à la surface de séparation. Comme il n'y a aucun courant traversant la section ABCD, la nullité de cette circulation s'impose et induit l'invariance des composantes tangentielles du champ magnétique. Ce phénomène se retrouve sur tous les matériaux ne contenant pas de courant réel et conduit immédiatement à la nullité des forces surfaciques calculées à partir de l'équation (1.88). La barre présentée à la figure 36, réalisée à partir d'un matériau ferromagnétique, ne subit alors aucune force surfacique.

Pour l'aspect volumique, l'équation (1.90) est toujours l'équation de référence pour identifier le courant utilisé dans l'équation de Laplace. Cela se traduit par la représentation [Fig-38] pour une surface ABCD à l'intérieur du volume.

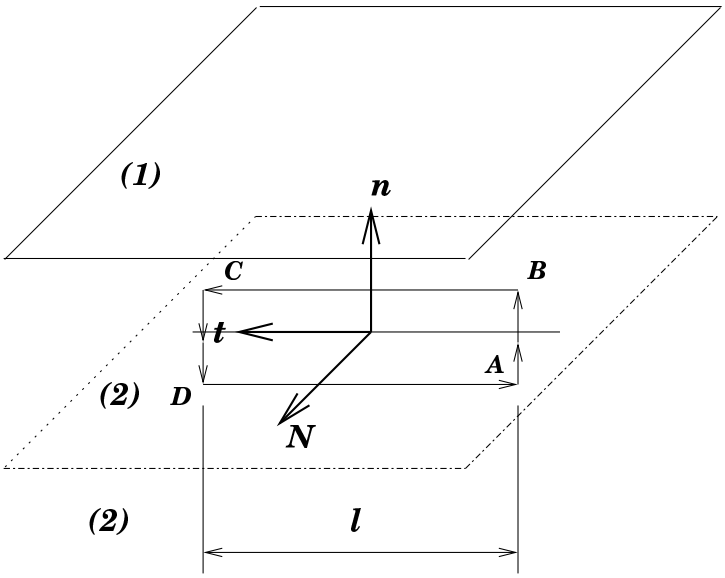
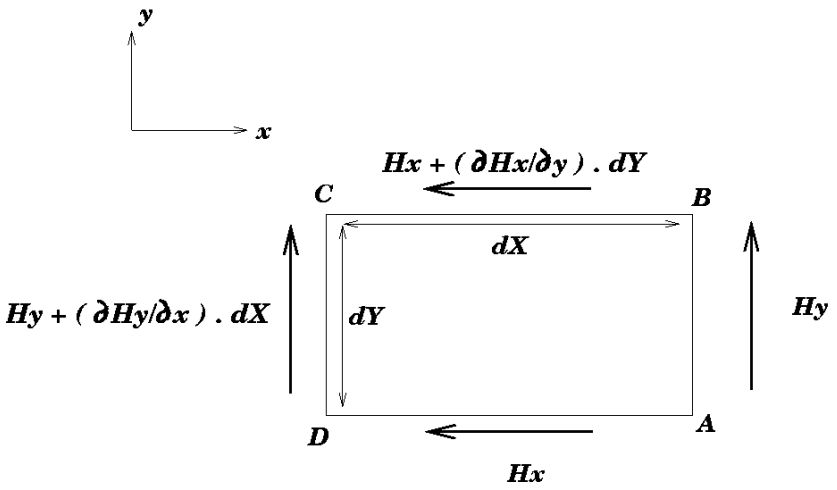


Fig – 38

En ne regardant que la section ABCD, il faut faire apparaître les composantes du champ magnétique H au niveau du contour et il n'est pas indispensable de prendre en compte la totalité des composantes car seules les composantes tangentielles au contour sont utiles. Par exemple, en utilisant la figure 39, la composante H_x après avoir parcouru la distance dY est augmentée de $(\partial H_x/\partial y)dY$. La remarque est identique pour la composante H_y. Cette méthode peut être appliquée à toute section à l'intérieur du volume.



$Fig-39$

En écrivant la circulation de $\overrightarrow{H}$ le long du contour ABCD, il ne reste que les dérivées partielles (1.97).

$$\oint_{ABCD} Hdl = \left(\frac{\partial H_x}{\partial y}\right) dYdX - \left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right) dXdY \qquad (1.97)$$

Ce qui se traduit par une équation faisant apparaître l'une des composantes de l'opérateur rotationnel associé à $\overrightarrow{H}$, c'est le terme entre accolades de l'équation (1.98).

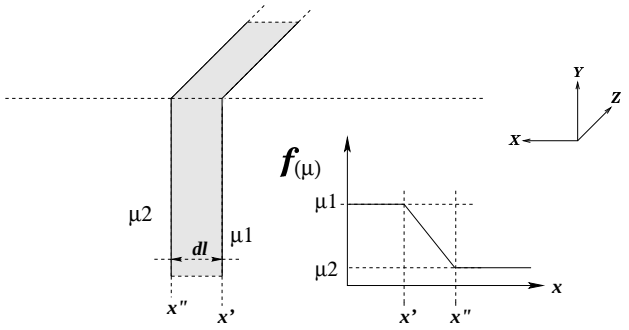
$$\oint_{ABCD} Hdl = \left\{\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)\right\} dXdY \qquad (1.98)$$

La circulation du champ magnétique le long de ce contour est égale au courant traversant ce contour. Comme il n'y pas de courant réel le traversant, la circulation ne peut être que nulle. Donc pour le courant J, présent dans l'équation (1.88), il induit une force nulle pour ce volume, car ce courant est nul d'après l'équation (1.98). La barre présentée à la figure 36, réalisée à partir d'un matériau ferromagnétique, ne subit aucune force volumique. En conclusion, elle ne doit pas se déplacer, ce qui est contraire à sa nature ferromagnétique.

Le résultat précédent fait référence à la méthode mise en oeuvre pour construire le tenseur de Maxwell. Il met en évidence une incompatibilité entre un phénomène physique et l'utilisation des équations associées à ce phénomène. La procédure qui conduit à l'écriture des forces d'origine magnétique n'est toutefois pas terminée, mais l'exemple précédent montre au moins une limitation de cette procédure. Pour la suite, deux approches différentes vont être abordées pour écrire localement les forces d'origine magnétique. Ces deux méthodes reposent sur l'utilisation du tenseur de Maxwell mais ne vont pas l'exploiter de la même manière.

Calcul de la force normale à la surface (méthode référencée Maxwell$^{(1)}$).

La discontinuité de H_n au niveau de la surface ne permet pas d'utiliser cette formulation sans aménagement, les dérivées partielles ne peuvent pas être évaluées au niveau des surfaces de séparation. En conséquence, un artifice doit être introduit pour pouvoir utiliser la méthode du tenseur de Maxwell. La surface de séparation est assimilée à un volume d'épaisseur négligeable (dl), dont la perméabilité évolue de manière continue entre la perméabilité à l'intérieur et la perméabilité à l'extérieur du volume.

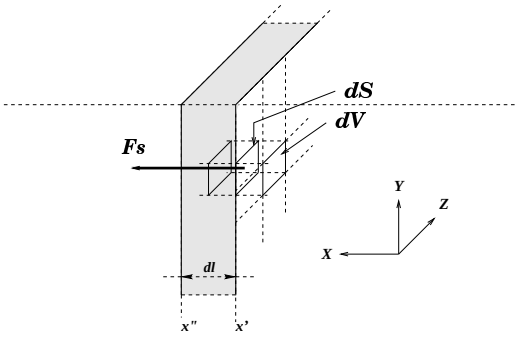


$Fig-40$

Cette évolution est assimilée à une évolution linéaire [Fig-40] et pour déterminer la force d'origine magnétique que va subir la surface de séparation, il faut réaliser une intégration de la divergence du tenseur de Maxwell sur ce domaine d'épaisseur négligeable. Comme les composantes de $\overrightarrow{H}$ sont maintenant arbitrairement continues, les dérivées partielles peuvent être utilisées sous condition de ne pas inclure dans le domaine d'intégration, les bornes de ce domaine, ou de ne pas tenir compte du problème de continuité des dérivées partielles à la frontière du domaine.

Il faut garder à l'esprit, qu'au niveau d'une surface de séparation, seule la composante normale de H est modifiée lors du changement de milieux. Si $\overrightarrow{H}_t$ est la composante tangente de $\overrightarrow{H}$ au voisinage de la surface de séparation, elle est indépendante des milieux et ces composantes selon les axes y et z sont constantes pour un déplacement suivant l'axe x. Il en découle que, dans les équations, tous les termes contenant uniquement H_y ou H_z ne seront pas modifiés dans le domaine d'intégration.

La force d'origine magnétique que subira une surface élémentaire de la surface de séparation sera obtenue par intégration de la force volumique sur la distance dl. La figure 41 illustre cette proposition. La force associée au volume dV, devient une force par unité de surface, dès que la distance dl tend vers 0. En effet, le volume dV tend vers la surface dS.



$Fig-41$

Et la forme mathématique de cette interprétation géométrique se traduit par l'équation suivante (1.99).

$$F_s = \int_{x'}^{x''} F_v.dx \qquad (1.99)$$

La force volumique F_v, présente dans cette écriture, est donnée par la divergence du tenseur de Maxwell. Comme seule la composante normale est recherchée, le calcul se limitera à la composante selon l'axe x qui conduit à l'équation ci-dessous (1.100).

$$F_v = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \qquad (1.100)$$

Pour poursuivre, il faut poser comme hypothèse que les dérivées partielles $\partial T_{xy}/\partial y$ et $\partial T_{xz}/\partial z$ sont nulles dans ce volume élémentaire. Cette hypothèse est réductrice, car elle implique que H_y et H_z sont invariants dans le domaine d'intégration et pas seulement suivant l'axe x, mais elle est indispensable pour poursuivre le calcul analytique. F_v se réduit de ce fait à l'une des dérivées partielles du tenseur de Maxwell, $\partial T_{xx}/\partial x$. Ainsi, F_s, la force surfacique, devient une variation d'une composante du tenseur de maxwell pour les positions extrêmes liées au domaine d'intégration (1.101). L'hypothèse introduite au niveau de l'évolution de la perméabilité dans le pseudo volume, associée à la surface de séparation n'est pas restrictive, car elle n'influence pas le résultat de l'intégration.

$$F_s \quad = \quad [T_{x''x''} - T_{x'x'}] \qquad (1.101)$$

La surface d'intégration peut être considérée comme suffisamment petite pour que les termes T_{xy} et T_{xz} n'évoluent pas dans le pseudo-volume d'intégration, ce qui confirme leur retrait de la formule précédente (1.100). $T_{x'x'}$ et $T_{x''x''}$ peuvent

être mis sous une forme ne faisant apparaître que les caractéristiques des milieux ainsi que celles du champ magnétique.

$$T_{x'x'} = \mu_1 \left[H_{1_x}^2 - \frac{1}{2} \left(H_{1_x}^2 + H_{1_y}^2 + H_{1_z}^2 \right) \right] \qquad (1.102)$$

$$T_{x''x''} = \mu_2 \left[H_{2_x}^2 - \frac{1}{2} \left(H_{2_x}^2 + H_{2_y}^2 + H_{2_z}^2 \right) \right] \qquad (1.103)$$

Comme les composantes tangentielles du champ ne sont pas modifiées par le changement de milieu : $H_{1_y} = H_{2_y}$ et $H_{1_z} = H_{2_z}$, Il est possible d'alléger la notation. H_y et H_z représenteront les composantes tangentielles du champ magnétique H_t . Pour les composantes normales : H_{1_x} et H_{2_x} , la loi de comportement $\left(\overrightarrow{B} = \mu \overrightarrow{H} \right)$ ainsi que la continuité de la composante normale de l'induction magnétique sont mises à profit pour introduire un terme indépendant du milieu, comme $\overrightarrow{B}_n$. Ces remarques permettent de poursuivre l'allégement de l'écriture. Les formulations de $T_{x'x'}$ et $T_{x''x''}$ deviennent (1.104) :

$$T_{x'x'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_1} \right) B_n^2 - \frac{1}{2} \mu_1 H_t^2$$

$$T_{x''x''} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_2} \right) B_n^2 - \frac{1}{2} \mu_2 H_t^2$$

$$(1.104)$$

D'où l'écriture suivante pour F_s .

$$F_s = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) B_n^2 - \frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_1) H_t^2 \qquad (1.105)$$

Une similitude est à remarquer entre cette formulation et le résultat obtenu par l'intermédiaire de la dérivée de l'énergie. Toutefois, ce n'est pas une équivalence car la présence d'un signe - en place d'un signe + entre les termes $\frac{1}{2}(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1})B_n^2$ et $\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)H_t^2$ différentie ces deux résultats.

En utilisant l'équation (1.101), une propriété couramment utilisée peut être retrouvée. Elle permet de limiter le calcul des forces que subit un volume à un simple calcul d'intégration sur une surface.

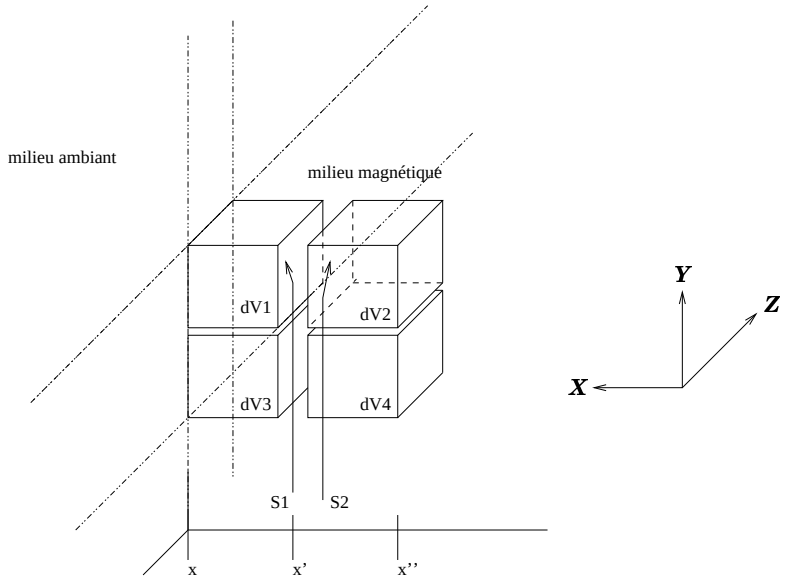


Fig – 42

La figure 42 montre plusieurs volumes élémentaires adjacents situés à l'intérieur du solide ferro-magnétique. Deux volumes élémentaires dV1 et dV2 sont sélectionnés. Pour le volume dV1, l'application de l'équation (1.101) donne la force qui s'exerce sur le volume dV1. :

$$F_{dV1} = [T_{xx} - T_{x'x'}] \qquad (1.106)$$

Et pour le volume dV2,

$$F_{dV2} = [T_{x'x'} - T_{x''x''}] \qquad (1.107)$$

La somme des forces sur ces deux volumes conduit à la disparition du terme $T_{x'x'}$. Il ne reste plus que les termes T_{xx} et $T_{x''x''}$. Si cette démarche est poursuivie sur tout le domaine, il ne restera plus qu'une somme ne contenant que des termes du tenseur de maxwell sur la surface de séparation. Mais l'utilisation de cette propriété ne donnera pas l'expression précédente (1.105) et il faut garder à l'esprit que ce calcul est fait sur un volume, et rien ne permet de donner le point d'application de la résultante de cette force. Cette propriété est toutefois très utile car elle permet d'introduire une autre manière d'utiliser le tenseur de Maxwell pour déterminer les forces d'origine magnétique ; celle-ci sera abordée dans un des paragraphes suivants, "méthode référencée Maxwell$^{(2)}$".

Calcul de la force tangente à la surface (méthode référencée Maxwell[(1)]).

Le calcul précédent part du principe que la force qui provenait de la divergence du tenseur de Maxwell est bien une force volumique et qu'un artifice doit être utilisé pour réduire cette force volumique à une force surfacique. Ce calcul, associé à certaines hypothèses, permet d'obtenir une équation pour les forces surfaciques.

Pour les forces tangentielles, la divergence du tenseur de maxwell est toujours l'équation de référence. Toutefois, le problème de discontinuité du champ magnétique rencontré lors du calcul des forces normales, n'est plus présent. En prenant un volume élémentaire proche de la surface de séparation des deux milieux, il n'y a pas de discontinuité pour les composantes du champ magnétique dans ce volume. En examinant la figure 43, il apparaît que les discontinuités n'existent que pour la surface de séparation S1.

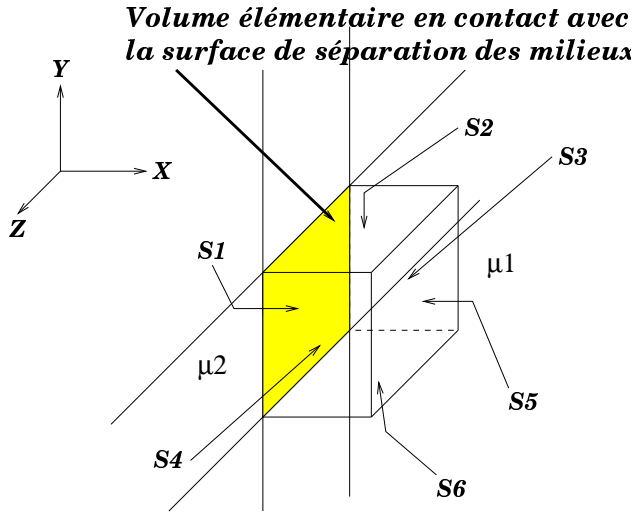


Fig – 43

Le tenseur de Maxwell est donc parfaitement calculable sur les surfaces S2, S6, S4 et S5. Il n'est pas possible, avec cette représentation de calculer les forces tangentes à la surface de séparation. Mais il est éventuellement possible d'assimiler les forces que subit le volume élémentaire selon les axes Y et Z comme étant similaires aux forces tangentielles associées à la surface de séparation.

Il n'est pas utile de poursuivre l'analyse, car l'absence de courant réel dans ce volume élémentaire induit immédiatement un rotationnel nul pour $\overrightarrow{H}$. Comme le courant issu de ce rotationnel est à l'origine de la construction du tenseur de Maxwell, sa nullité engendre immédiatement la nullité pour les forces que subit ce volume élémentaire.

En conclusion : cette méthode, qui repose sur l'utilisation de l'équation (1.81)

et fournit une force volumique, permet d'associer à une surface élémentaire de la surface de séparation, une force uniquement normale à cette surface.

Calcul de la force normale et tangente à la surface (Méthode référencée Maxwell[(2)]).

Une autre méthode, plus mathématique, est très fréquemment rencontrée. Elle utilise la formule d'Ostrogradsky pour aboutir à un résultat usuellement utilisé. Toutefois, cette formule n'est présentée dans certains livres de mathématique que dans le cas où $\overrightarrow{F}$ est un vecteur et non un tenseur (1.108) [64, SMIRNOV V.-1988] [65, PISKOUNOV N.-1987].

$$\int_V div\left(\overrightarrow{F}\right).dv = \int_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{ds} \qquad (1.108)$$

Compte tenu de l'équation (1.81), la force par unité de volume est la divergence d'un tenseur. Donc, pour exprimer la force qui agit sur un volume, il suffit d'intégrer cette force par unité de volume sur la totalité du volume (1.109).

$$\overrightarrow{F} = \int_{Volume} \overrightarrow{f}_v.dv = \int_{Volume} div\left(\widetilde{T}\right).dv \qquad (1.109)$$

C'est à partir de l'utilisation de la formule d'ostrogradski que l'intégration sur le volume peut se réduire à une intégration sur une surface. L'équation (1.110) est une interprétation de l'équation (1.109) en utilisant l'équation (1.108).

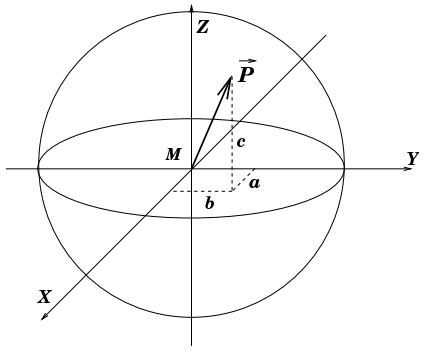
$$\int_{Volume} div\left(\widetilde{T}\right).dv = \int_{Surface} n.\widetilde{T}.ds \qquad (1.110)$$

Cette égalité n'est pas naturelle car la notion de tenseur ainsi que son utilisation sont surtout développées en mécanique où l'étude de la répartition locale des contraintes dans un matériau, se fait à l'aide du "Tenseur des contraintes". En conséquence, c'est en s'inspirant de la méthodologie employée en mécanique, présentée par la suite, qu'il sera possible de manipuler le Tenseur de Maxwell et de l'amener à fournir des éléments de réponse sur les forces supposées locales.

Le "Tenseur des contraintes" se présente sous la forme écrite en (1.111). Il est symétrique (par exemple : $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$) et ne possède à priori aucun terme nul (sauf hypothèse liée au comportement du matériau).

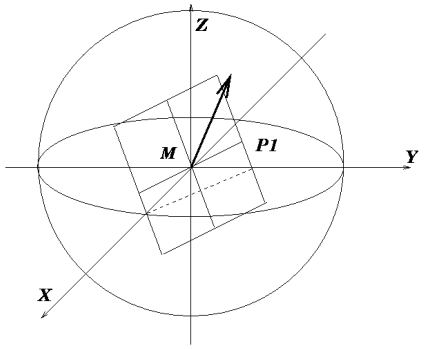
$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \Gamma_\sigma \qquad 1.111$$

Pour exploiter ce tenseur et déterminer les contraintes en un point M, une direction d'observation, $\overrightarrow{P}$ est choisie à l'intérieur du solide, comme celle présentée en figure 44. Elle est définie au moyen d'un vecteur unitaire dont les composantes sont par exemple a,b,c sur les axes x,y et z.



$Fig-44$

Il n'existe qu'un plan (P1) et un seul passant par M et perpendiculaire à la direction d'observation [Fig-45] .



$Fig-45$

En faisant le produit de ce vecteur d'observation et du tenseur des contraintes, le résultat est une entité contenant trois termes dont le premier (τ_0) est la contrainte normale et les deux autres ($\tau_1$et τ_2) les contraintes tangentielles (1.112).

$$\begin{pmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \Gamma_\sigma \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad (1.112)$$

En particulier, pour une direction d'observation selon l'axe x, le résultat pour les contraintes est le suivant (1.113) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \Gamma_\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1.113)$$

Où σ_x est la contrainte de compression selon la direction x, τ_{xy} et τ_{xz} étant les contraintes de cisaillement. Ce qui revient à prendre la première colonne du tenseur des contraintes (1.114).

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} &= \sigma_{xy} \\ \tau_{xz} &= \sigma_{xz} \end{aligned}$$

$$(1.114)$$

Ces contraintes sont associées à la surface qui a été définie comme étant normale à la direction d'observation. En appliquant ce principe au tenseur de maxwell, il est ainsi possible de construire l'ensemble des contraintes induites par le champ magnétique. Il est préférable de prendre un repère où x est la normale sortante et y orienté selon $\overrightarrow{H}_t$ de manière à alléger les expressions. Le tenseur de maxwell, associé à de telles hypothèses, se met sous la forme suivante (1.115).

$$T = \left\{ \begin{array}{ccc} \mu\left[H_n.H_n - 1/2.H^2\right] & \mu\left[H_n.H_t\right] & 0 \\ \mu\left[H_t.H_n\right] & \mu\left[H_t.H_t - 1/2.H^2\right] & 0 \\ 0 & 0 & -\mu\left[1/2.H^2\right] \end{array} \right\} \qquad (1.115)$$

et il procure les forces normale (1.116) et tangente (1.117) suivantes :

$$\overrightarrow{F}_n = \left(\frac{B_n^2}{2\mu} - \frac{\mu H_t^2}{2}\right).\overrightarrow{n} \qquad (1.116)$$

$$\overrightarrow{F}_t = B_n.\overrightarrow{H}_t \qquad (1.117)$$

Pour arriver à ces deux équations, il faut, d'une part exprimer H^2 sous la forme $H_n^2 + H_t^2$, regrouper les termes en $H_n$et en H_t et d'autre part utiliser la loi de comportement pour mettre en évidence des composantes indépendantes du milieu magnétique.

Toutefois, le tenseur de Maxwell ne peut être écrit qu'à l'intérieur du solide, car sa mise en équation repose sur une résolution d'équations différentielles (1.82) associées au champ magnétique. Or de telles équations différentielles n'ont plus

aucun sens à la frontière entre deux milieux de perméabilités différentes car H_n est discontinu en cette position. Cette méthode n'est que le résultat d'une étroite comparaison avec les méthodes associées à l'exploitation du tenseur des contraintes en mécanique. Elle présente, en plus des non prises en compte des discontinuités physiques, un résultat qui ne peut être utilisé localement. En effet, si le matériau est amagnétique, le simple fait de le plonger dans un champ magnétique induit sur lui des forces d'origine magnétique car les équations associées à $\overrightarrow{F}_n$ et $\overrightarrow{F}_t$ donnent des valeurs non nulles...

1.6 Conclusion

Pour toutes les méthodes qui furent exposées précédemment, une formulation particulière pour les forces d'origine magnétique est élaborée. Ce sont des méthodes de base, elles se différentient à très bas niveau. Elles reposent sur des principes différents et elles peuvent servir de référence pour d'autres formulations. En particulier, la méthode de la coénergie, qui n'a pas été évoquée jusqu'à présent, est une déclinaison possible de la dérivée de l'énergie dans la mesure où les matériaux linéaires sont les seuls matériaux associés à cette étude.

Ce problème de formulation est toujours un problème d'actualité et les discutions récentes montrent que toutes les formulations sont encore utilisées et qu'une analyse purement mathématique n'est pas considérée comme suffisante pour invalider une formulation [45, DELFINO.F-2001] [46, COULOMB.J-L.-2001] [47, DELFINO.F.-2001]. Des travaux plus récents présentent en particulier, des nouvelles approches [67, HENROTTE.F.-2003] ou utilisent de nouvelles formulations, issues d'anciens concepts [68, SCHLENSOK.Ch.-2003]. Ces quelques articles montrent bien qu'un regard uniquement théorique n'est qu'un élément de réponse. Comme toutes les formulations exigent à un moment donné des hypothèses, celles-ci peuvent être mises à profit pour les mettre en doute. Le tableau suivant (1.118) donne une vue synthétique des résultats issus de ce premier chapitre.

Méthode utilisée	Force normale composante selon $\overrightarrow{n}$	Force tangente composante selon $\overrightarrow{t}$
Courants équivalents	$\frac{1}{2}\mu_0\left(\mu_r^2-1\right)H_t^2$	$(1-\mu_r)H_t B_n$
Masses magnétiques équivalentes	$\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\left(1-\frac{1}{\mu_r^2}\right)B_n^2$	$\left(1-\frac{1}{\mu_r}\right)H_t B_n$
Masses et courants surfaciques	$\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B_n^2-\frac{1}{2}\mu_0 H_t^2$	$B_n.H_t$
Dérivée de l'énergie	$\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}(1-\frac{1}{\mu_r})B_n^2$ $+\frac{1}{2}\mu_0(1-\mu_r)H_t^2$	0
Tenseur de Maxwell$^{(1)}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}(1-\frac{1}{\mu_r})B_n^2$ $-\frac{1}{2}\mu_0(1-\mu_r)H_t^2$	0
Tenseur de Maxwell$^{(2)}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B_n^2-\frac{1}{2}\mu_0 H_t^2$	$B_n.H_t$

(1.118)

Dans ce tableau, les expressions des forces sont locales. Le milieu ambiant est de l'air, $\mu_2=\mu_0$. $\overrightarrow{n}$ est la normale sortante et $\overrightarrow{t}$ est un vecteur unitaire, tangent à la surface de séparation et orienté comme $\overrightarrow{H}_t$.

Chapitre 2

Conception de l'expérimentation

Introduction

les travaux de recherche sur les forces d'origine magnétique, comme ceux de G.HENNEBERGER [25, HENNEBERGER G. - 1992], N.SADOWSKI [61, SADOWSKI N. - 1993], G.REYNE [31, REYNE G. - 1988]et J.F. IMHOFF [75, IMHOFF J.F.-1990], montrent que les aspects expérimentaux n'ont jamais été négligés. Plusieurs expérimentations ont été réalisées dans le but de valider ou d'utiliser les formulations présentées dans le premier chapitre. Les démarches rencontrées dans la plupart des cas ne prennent en compte qu'une seule formulation et utilisent une étude expérimentale pour clore l'étude. C'est le cas, par exemple, pour G.HENENBERGER et G.REYNE. Par contre, N.SADOWSKI ainsi que L.HIRSINGER ont publié des travaux qui incluaient une présentation des différentes méthodes [61, SADOWSKI N. - 1993] [63, HIRSINGER.L - 1994]. Toutefois, une seule des formulations était confrontée à l'expérience utilisée en conclusion.

Les expérimentations proposées sont de deux types :

-Étude d'un système électromécanique réel, moteur par exemple, auquel est appliquée la formulation étudiée [36, MIZIA J. - 1988][51, BOUALEM.B-1998]. Les résultats théoriques, comme le calcul du couple mécanique délivré par le moteur, sont comparés aux résultats obtenus expérimentalement. Mais les calculs réalisés donnent des résultats intermédiaires, comme des forces locales, qui ne peuvent être mesurées directement sur le système. Il n'existe pas de moyen de mesurer la répartition spatiale des forces associées à un rotor de moteur. Or ce sont ces résultats qui valideraient le calcul des forces locales.

-Un dispositif très simple, spécifiquement conçu dans un but expérimental, est utilisé dans le but de vérifier une seule formulation [25, HENNEBERGER G. - 1992]. En analysant le dispositif prévu, il apparaît qu'il possède des particularités

géométriques pénalisantes pour ses performances. En effet l'utilisation exclusive des matériaux ferromagnétiques induit au niveau de la formulation, la minoration de certains termes et conduit à des résultats numériques qui sont identiques pour toutes les méthodes. Une étude comparative dans de telles conditions ne peut que conclure à l'équivalence des formulations. Il n'est pas possible d'envisager des moyens d'essais tels que ceux mis en oeuvre par le laboratoire Lawrence Livermore, les énergies de plusieurs mega-joules mises en jeux ne sont pas accessibles [23, HAINSWORTH.G.-1996].

En conséquence il est indispensable de concevoir, d'une part un système simple à étudier, et d'autre part, de tenir compte des formulations précédentes pour ne pas introduire des simplifications dommageables pour la vérification expérimentale. Plusieurs paramètres interviennent dans le calcul des forces comme la perméabilité ou les composantes du champ magnétique. Il faut impérativement les prendre en compte dès la conception de l'expérimentation.

Rendre les différences mesurables, tel est l'objectif de ce chapitre. Pour atteindre ce résultat, plusieurs étapes doivent être franchies.

Le premier paragraphe va permettre d'introduire les différents critères qu'une expérimentation se doit de vérifier. Les aspects liés à la perméabilité magnétique, à la géométrie du système, de même qu'une ébauche sur les mesures à réaliser y sont présentés.

Le paragraphe suivant va présenter la conception de la structure de test. Comme celle-ci n'est pas imposée, une très grande liberté existe ainsi pour sa conception et sa mise en oeuvre. La simulation numérique est souvent mise à contribution pour évaluer les performances d'une structure virtuelle et de ce fait confirmer sa mise en fabrication. En conclusion de ce chapitre, des mesures sont réalisées sur la structure réelle et valident la très bonne représentativité du modèle élément fini de celle-ci.

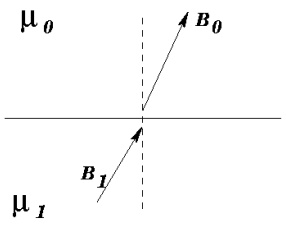
Il faut vérifier que, pour ce système de test, les calculs de force issus des formulations introduites dans le chapitre 1 donnent, d'une part des résultats différents pour les forces locales et engendrent bien globalement des distributions de forces distinctes. C'est par l'intermédiare du troisième paragraphe que cet élément est abordé.

Le quatrième paragraphe permet de conclure sur la conception du dispositf de test en proposant une solution pour le matériau qui peut être employé en tant que volume de test. En effet les caractéristiques magnétiques de ce matériau produisent de très faibles efforts.

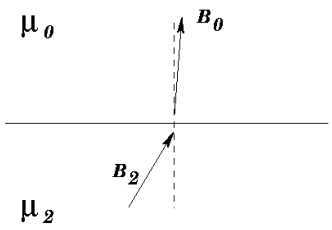
2.1 Critères de conception

2.1.1 Critères associés à la perméabilité

Les matériaux ferromagnétiques se caractérisent par une perméabilité magnétique très importante (de l'ordre de 1000). Cela se traduit, pour le champ magnétique, par une valeur négligeable de sa composante tangentielle au niveau de la surface de séparation. La figure 46 est une illustration de cette propriété. Si la matériau(1) possède une perméabilité relative faible, $\mu_1 > \mu_0$ et μ_1 est toutefois proche de la perméabilité de l'air μ_0 , la direction associée a l'induction magnétique n'évoluera que peu, lors du franchissement de la surface de séparation. Par contre, comme le montre la figure 47, si cette perméabilité relative est très grande, $\mu_2 \gg \mu_0$, cette direction va se rapprocher de la normale à la surface de séparation et minorer la composante tangentielle.



$Fig-46$



$Fig-47$

En conséquence, pour les formulations de calcul des forces associées à de tels matériaux, des minorations ou des suppressions de certains termes vont apparaître. Les termes en H_t ou B_t vont s'effacer devant les termes en B_n et les termes de la forme $1/\mu_r$ vont disparaître devant les autres termes proches de l'unité. Les formulations présentées dans le chapitre précédent, suite à ces remarques, vont s'écrire sous la forme suivante si des matériaux ferromagnétiques sont utilisés comme matériaux d'étude (2.1) :

Méthode utilisée	Force normale	Force tangente
Courant équivalent	0	$(1-\mu_r)\,H_t B_n$
Masses magnétiques équivalentes	$1/2\,(1/\mu_0)\,B_n^2$	0
Masses et courants surfaciques	$1/2\,(1/\mu_0)\,B_n^2$	0
Dérivée de l'énergie	$1/2\,(1/\mu_0)\,B_n^2$	0
Tenseur de Maxwell$^{(1)ou(2)}$	$1/2\,(1/\mu_0)\,B_n^2$	0

(2.1)

Pour les quatre dernières méthodes, la composante tangentielle de la force peut être assimilée à un terme négligeable, voisin de zéro, devant la force normale car H_t ou B_t sera négligeable devant H_n ou B_n pour un matériau ayant une perméabilité très grande. Il est de ce fait illusoire de vouloir prouver la validité d'une de ces formulations avec un dispositif utilisant uniquement des matériaux ferromagnétiques comme support expérimental. Les calculs numériques donneront des résultats tellement voisins, qu'aucune expérimentation ne pourra les différentier. D'autre part, l'utilisation de tels matériaux rend la détermination du champ magnétique au voisinage de la surface de séparation sensible au maillage [34, McFEE.S-1988]. Il est à remarquer que la première formulation, dans ces conditions, donne un résultat qui est loin d'être réaliste. Il n'y a plus aucune force normale.

La perméabilité magnétique élevée conduit à une impossibilité de différencier les formules, surtout si on ne regarde que la force gloable [76, DE MEDEIROS L.H.-1997]. Comment vont se comporter les formulations vis à vis d'une perméabilité relative de 1 ?

Les formulations précédentes peuvent être écrites sous la forme (2.2) :

Méthode utilisée	Force normale	Force tangente
Courants équivalents	0	0
Masses magnétiques équivalentes	0	0
Masses et courants surfaciques	$\frac{B_n^2}{2\mu_0} - \frac{\mu_0 H_t^2}{2}$	$H_t\, B_n$
Dérivée de l'énergie	0	0
Tenseur de Maxwell$^{(1)}$	0	0
Tenseur de Maxwell$^{(2)}$	$\frac{B_n^2}{2\mu_0} - \frac{\mu_0 H_t^2}{2}$	$B_n.H_t$

$$(2.2)$$

Physiquement, on est en présence d'un matériau amagnétique. Les formulations masses et courants surfaciques équivalents ainsi que le tenseur de Maxwell$^{(2)}$ ne donnent pas un résultat réaliste. Un solide amagnétique ne peut pas subir une force d'origine magnétique lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique et expérimentalement, c'est ce que l'on observe !...

Par l'intermédiaire de ces cas extrêmes, des résultats qualitatifs peuvent être apportés sur le réalisme de certaines formulations. Ils induisent aussi un critère important sur la nature des matériaux à employer.

– Le matériau qui est utilisé dans l'expérience doit présenter une perméabilité relative suffisamment faible pour ne pas minorer les termes de la forme $1/\mu_r$ devant les autres termes de l'expression.

En d'autre terme, il ne faut pas employer de matériau de test de type matériaux ferromagnétiques.

2.1.2 Critères associés à la géométrie.

Le dispositif expérimental doit engendrer un champ magnétique le plus hétérogène possible et ne privilégier aucune direction

L'analyse d'une expérimentation réalisée en 1992 par G.HENNEBERGER va fournir un critère supplémentaire pour la conception de l'expérience [25, HENNEBERGER G.-1992]. L'aspect qui va être pris en compte ne sera pas celui de la perméabilité car il a été évoqué précédemment. Le dispositif présenté figure 48 est une illustration d'un dispositif utilisé pour valider le calcul des forces par l'intermédiaire de la méthode des courants équivalents.

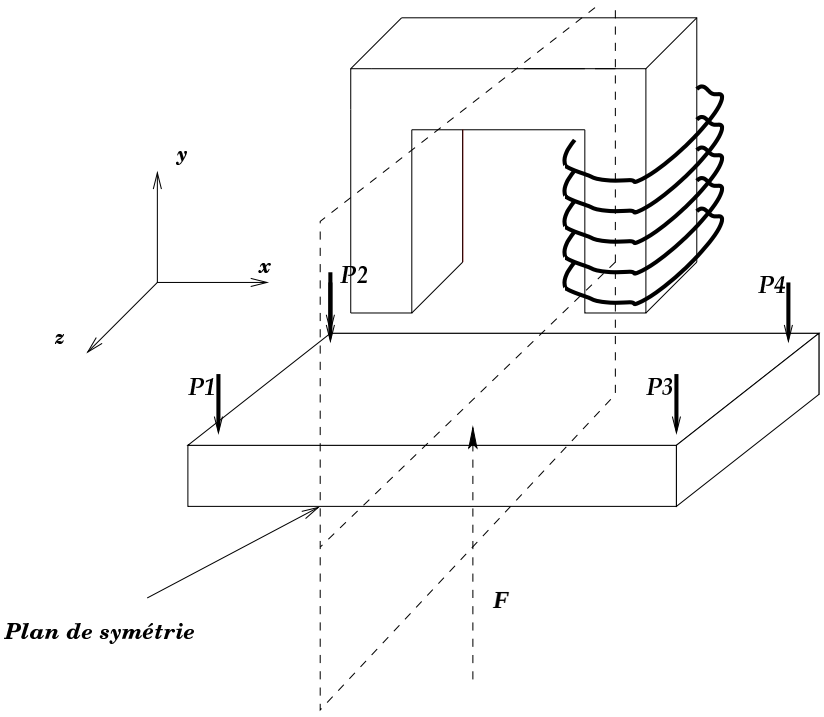


Fig – 48

Ce dispositif [Fig-48] est constitué d'un solénoïde permettant de créer un champ magnétique. Il lui est associé un barreau métallique maintenu en position par l'intermédiaire de 4 points de contact (P1, P2, P3 et P4) pourvus de jauges de contrainte ou d'équipements de mesure similaires permettant de mesurer les efforts en ces points. Suite à la circulation d'un courant dans le solénoïde, ce barreau métallique va subir une force d'origine magnétique tendant à l'attirer vers le solénoïde. Les jauges de contrainte permettent, à priori, de mesurer la force qui s'exerce globalement sur le barreau. Comme ce système présente des

axes de symétrie, il apparaît que la résultante de la composante tangentielle, suivant l'axe x, des forces d'origine magnétique est obligatoirement nulle. En effet, par raison de symétrie, toutes les composantes tangentielles à droite du plan de symétrie vont s'annuler avec les composantes tangentielles à gauche du plan de symétrie et ceci indépendamment des formulations associées au calcul des forces. En conséquence, ce mode opératoire est à éviter sous peine de ne pouvoir valider les équations liées au calcul des composantes tangentielles des forces d'origine magnétique.

Il est indispensable d'utiliser une géométrie qui ne présente pas une telle propriété. Il faut créer une dissymétrie dans le système expérimental mais aussi imposer à ce système d'engendrer une répartition spatiale de champ magnétique la plus hétérogène possible. L'hétérogénéité sera atteinte à partir du moment où un déplacement très faible (de l'ordre de quelques mm) suffit à remettre en cause les composantes du champ magnétique avant déplacement.

2.1.3 Critères associés à la mesure.

Comme l'objectif est de valider le calcul des forces d'origine magnétique, il n'est pas souhaitable d'utiliser une mesure qui ne découle pas directement des formulations. La force qui est obtenue par l'intermédiaire des formulations est une grandeur locale. En conséquence, l'expérimentation doit fournir un résultat qui est dépendant de la répartition spatiale des forces d'origine magnétique. Par exemple la force globale que subit le solide d'épreuve peut très bien être obtenue par l'intermédiaire de plusieurs répartitions différentes. L'exemple suivant va permettre de mieux expliciter ce problème de causalité.

Une expérimentation se propose de calculer les déplacements induits par les forces d'origine magnétique dans un moteur [52, RAMESOHL.I-1996]. Dans un premier temps, la répartition spatiale du champ magnétique dans l'entrefer est obtenue par simulation numérique. De cette répartition spatiale, un calcul de forces est déduit (la formulation retenue importe peu pour l'analyse). Cette répartition spatiale de forces permet de décrire en chaque point du stator l'évolution temporelle de la sollicitation mécanique. De ce résultat, un calcul mécanique est entrepris et conduit à la détermination du déplacement, en fonction du temps, de tout point matériel associé au stator.

Dans cette étude, des problèmes techniques sont mis en évidence :

Il faut se mettre en un point de fonctionnement rendant négligeable l'influence de l'amortissement lié à la matière car il ne peut être pris en compte dans les calculs mécaniques. Ce qui se traduit par une analyse des effets des fréquences éloignées des fréquences propres mécaniques.

Comme il est difficile de mettre en équation un système mécanique aussi hétérogène qu'un moteur. I.RAMESOHL est dans l'obligation d'introduire une sim-

plification où l'ensemble des matériaux constituant la machine, est assimilé aux tôles associées au rotor et au stator. Il est évident que le cuivre, de même que les paliers ou roulements à billes, ne peuvent avoir ces caractéristiques. Dans le cas où ces éléments représentent un volume non négligeable de la structure, le calcul des modes propres de vibration n'est d'ailleurs pas toujours réalisable [43, CHANG SEOP KOH.-2001] .

Les déformations ne sont mesurées que pour une fréquence et selon une seule direction. La conclusion de cette manipulation fut de souligner la difficulté de réaliser des mesures ponctuelles avec des capteurs ayant des dimensions non négligeables devant la structure à tester.

Une autre difficulté, qui est liée à la mécanique vibratoire, est la présence des modes propres. Ces modes de vibration se superposent aux autres modes et peuvent perturber la mesure.

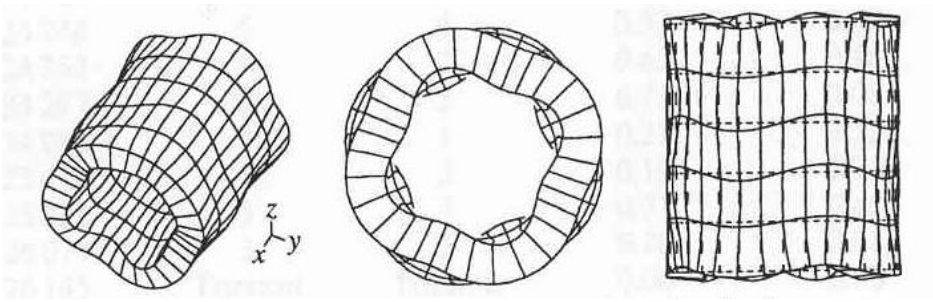


Fig – 49

La figure 49 est une représentation succincte du phénomène de vibration (mode propre). Suite à une impulsion ou à une excitation extérieure, une structure oscille à une fréquence propre et cette fréquence est indépendante de l'amplitude de l'excitation [13, MIGOULINE V.-1991] [12, TIMOSHENKO.S-1939]. L'amplitude des déformations, associées à ces modes de vibration, n'est pas toujours facilement quantifiable.

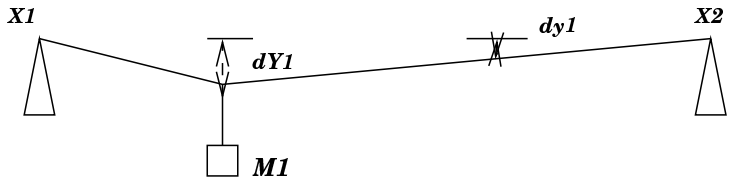
Quelle orientation faut-il prendre ?

L'expérience présentée se sert des résultats issus d'un domaine de la mécanique, la mécanique vibratoire, qui ne prend en compte que les solides élastiques. Le point de départ de toute analyse dans ce domaine repose sur la connaissance du matériau et non des forces extérieures qu'il subit. Pour des structures simples (ressort, lame ..), il est possible de prendre en compte les contraintes extérieures et d'en déduire les déplacements en fonction du temps pour chaque point de la structure. Mais dès que des assemblages sont réalisés, ceux-ci modifient le comportement du système par rapport à un système homogène.

La Résistance Des Matériaux [10, FEODOSSIEW V.-1971] est à la base de la mécanique des structures. Elle se propose d'analyser les phénomènes au niveau local (contrainte et déformation) et de fournir des résultats locaux puis globaux. En particulier, la RDM montre que pour une répartition de force donnée, le solide soumis à cette répartition se déforme selon une géométrie unique [8, LANDAU L.-1990]. Donc il y a une relation bijective entre les répartitions des contraintes et la déformation induite. Cette remarque peut être mise à profit pour l'expérimentation.

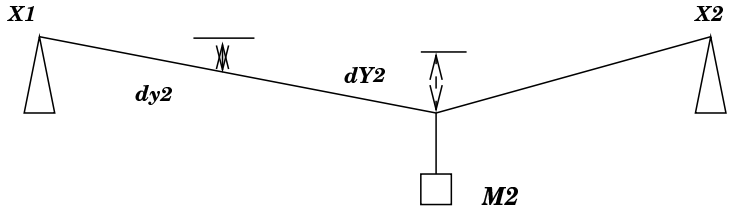
L'équivalence entre la répartition des efforts et la géométrie de la structure est une hypothèse fondamentale qu'il convient d'expliciter. Il n'est pas indispensable de développer ce thème au moyen d'une approche mathématique complexe. En s'inspirant d'une illustration issue du premier des trois volumes traitant de la modélisation des structures par éléments finis de J.L.BATOZ [14, BATOZ J-L.-1990] [15, BATOZ.J-L-1990], il est possible d'introduire cette notion importante à l'aide de quelques figures. Toutefois, il faut garder à l'esprit que le comportement linéaire de l'exemple utilisé ne peut être obtenu que dans les cas où les déplacements sont extrèmement faibles autour d'un point d'équilibre.

Un fil élastique est tendu entre deux supports fixes (X1 et X2). Une masse M1 est accrochée à ce fil et elle induit un déplacement dY1 [Fig-50].



$Fig-50$

Ce déplacement dY1 est proportionnel à la masse M1 et en tout point du fil, cette proportionnalité se retrouve. Le déplacement dy1 n'est pas le même que le déplacement dY1 mais il est proportionnel à M1. Si une masse M2 est positionnée à un autre endroit du fil, elle engendre un déplacement dY2 au point d'accrochage de M2 et un déplacement dy2 au précédent point d'accrochage de M1 [Fig-51].



$Fig-51$

En mettant simultanément ces deux masses, un déplacement dY1’ est engendré au point supportant M1 de même qu’un déplacement dY2’ au point supportant M2. L’état du système est en fait la superposition des deux états précédents et un lien existe entre les déplacements : dY1’=dY1+dy1 et dY2’=dY2+dy2 [Fig-52].

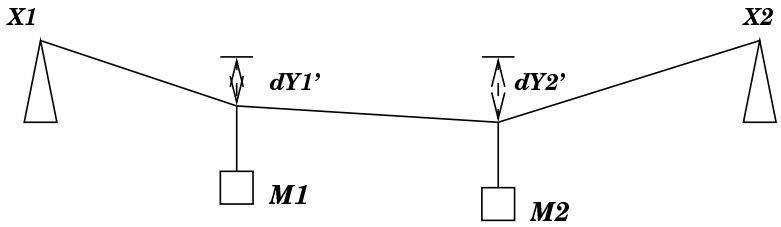


Fig – 52

Le déplacement dY1’ de même que dY2’, est une combinaison linéaire des masses associées à M1 et M2. En conséquence, la connaissance de dY1’ et dY2’ ainsi que celle des coefficients de proportionnalité (lien entre le déplacement et la charge) permet de calculer les masses associées M1 et M2. La résolution est très rapide, car elle se présente sous la forme d’un système de deux équations linéaires contenant deux inconnues.

Cette présentation peut être étendue à un système contenant m masses [Fig-53]. Pour toute masse Mn, le déplacement de son point d’accrochage est une combinaison linéaire des m masses. Donc la connaissance du déplacement en chaque point d’accrochage permet de calculer chaque masse, et inversement, la connaissance de chaque masse permet de calculer le déplacement en chaque point d’accrochage. Si deux systèmes présentent les mêmes déplacements, alors cela veut dire qu’ils supportent les mêmes masses.

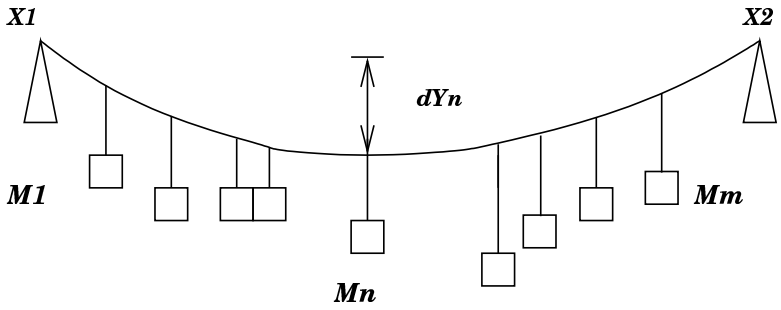


Fig – 53

Cela se traduit pour l’expérimentation par le fait que la déformation de la structure ne peut pas être la même si deux distributions différentes de forces lui sont

appliquées. L'objectif est donc d'engendrer des distributions de forces d'origine magnétique, les plus différentes possibles. Cela conduit à poursuivre la conception en incluant la génération du champ magnétique car la répartition spatiale du champ magnétique joue un rôle certain dans cette distribution de forces.

2.2 Conception de la structure de test en réponse aux critères associés au champ magnétique.

Dans cette partie, un moyen permettant de prendre en compte les critères donnés précédemment est recherché. Il doit notamment introduire une différence notable dans les résultats obtenus à partir des différentes formulations.

2.2.1 Génération du champ magnétique.

Il est souhaitable d'engendrer un champ magnétique présentant une répartition spatiale la plus hétérogène possible et de ce fait, plusieurs structures ont été imaginées :

– Plusieurs bobines placées aléatoirement dans l'air,
– Un entrefer comportant d'importantes aspérités,
– Une combinaison des deux précédentes ?...

Mais comme une réalisation simple est requise, la structure suivante est retenue [Fig-54] :

- un noyau ferromagnétique réalisé à partir de tôles de transformateur
- deux bobines de 250 spires pouvant supporter un courant de 4 A en continu (même si cette valeur maximale ne sera pas atteinte).
- un entrefer de taille suffisamment grande pour rendre hétérogène le champ magnétique.

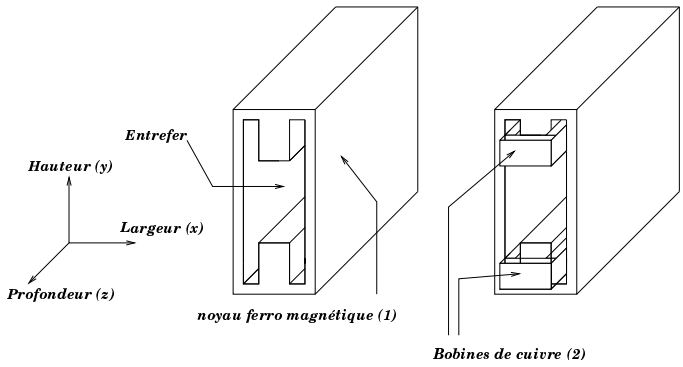


Fig – 54

Comme le montre la figure 54, le volume d'air (entrefer) est très important. Il va induire deux phénomènes, l'un très pénalisant et l'autre au contraire très intéressant.

D'une part, l'intensité du champ magnétique sera d'autant plus faible que le volume d'air sera important. Comme les forces d'origine magnétique seront liées à l'intensité de ce champ, on rencontrera malheureusement des forces de valeurs très faibles.

Mais d'autre part, la perméabilité de l'air étant très faible devant la perméabilité des tôles de transformateur, c'est la perméabilité magnétique de l'air qui conditionnera en grande partie l'intensité du champ magnétique. En conséquence, il sera très utile de montrer qu'une connaissance approximative de la perméabilité des tôles ne remettra pas en cause le calcul du champ magnétique dans l'entrefer.

2.2.2 Répartition et connaissance du champ magnétique.

La répartition spatiale du champ magnétique dans l'entrefer de la structure est établie à l'aide d'une modélisation "élément fini" [Fig-55]. Toutefois, dans cette figure, seule la répartition spatiale du champ magnétique dans une région réduite de l'espace (1/2 volume d'entrefer) est représentée.

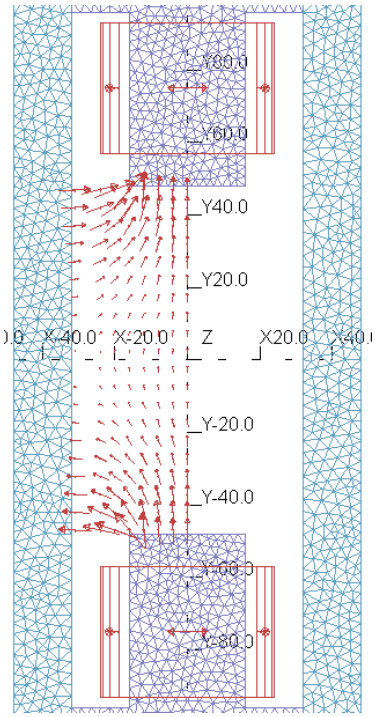


Fig – 55

Par raison de symétrie, la distribution complète peut en être déduite et le résultat présenté est suffisant pour constater l'hétérogénéité du champ magnétique engendré.

Bien que cette visualisation ne fasse apparaître que deux composantes, l'étude est menée selon les trois dimensions et il est intéressant de faire apparaître l'évolution de $\overrightarrow{B}$ en fonction de la profondeur [Fig-56].

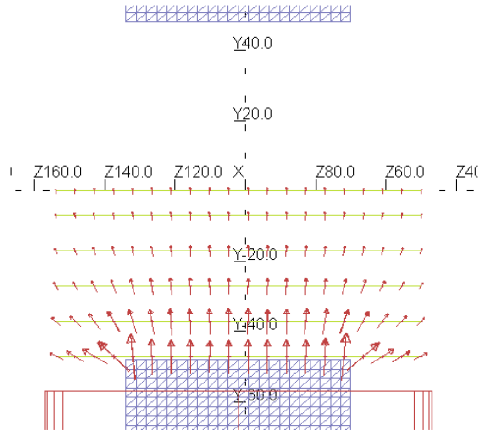


Fig – 56

Comme précédemment, il n'apparaît sur cette figure qu'une demi-distribution. Seul le champ magnétique contenu dans la moitié inférieure de l'entrefer est présenté. En utilisant les propriétés d'antisymétrie du champ magnétique, la moitié supérieure peut être construite. Cette représentation montre la présence d'une zone où l'évolution du champ magnétique ne semble pas conditionnée par la profondeur ; globalement à l'intérieur de l'entrefer. Ainsi, l'équipement permettant d'engendrer le champ magnétique possédera des caractéristiques proches du 2D dans un certain domaine. Cette remarque sera mise en évidence dans le paragraphe suivant où des figures plus précises sont présentées et elle est à mettre à profit pour limiter les paramètres qui seront à gérer dans la conception de l'expérimentation. Il faut garder à l'esprit que l'objectif est de concevoir une expérience discriminante et non la plus complexe possible.

- évolution de la densité de flux en fonction de la perméabilité des tôles de transformateur.

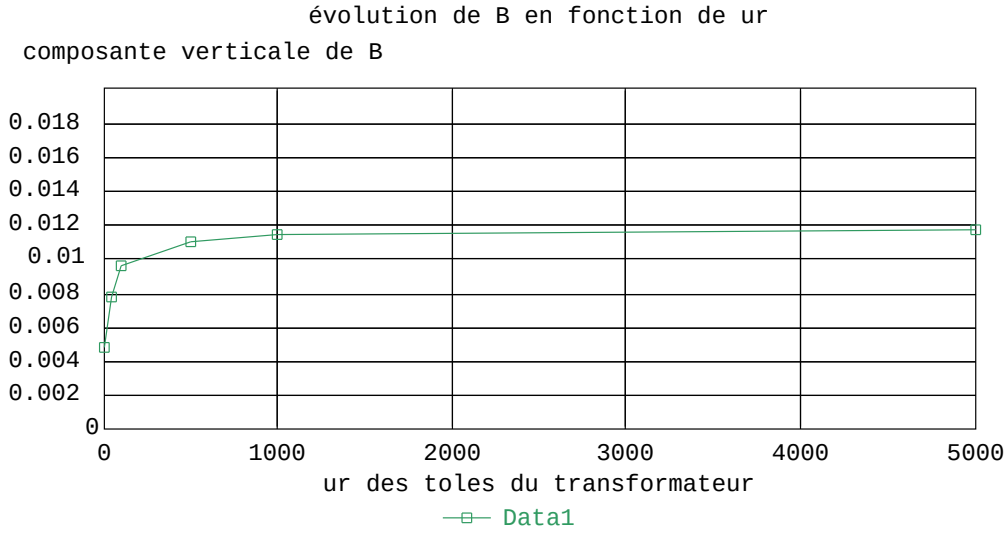
Cette partie de l'étude a été réalisée en utilisant une simulation 3D. Une simulation 2D pouvait suffire mais des critères, comme le respect des symétries, permettant d'évaluer la qualité de la simulation disparaîtraient. A une position choisie aléatoirement dans l'entrefer, la composante selon Y du champ magnétique a été

calculée en fonction de la perméabilité relative des tôles du transformateur. Le résultat du calcul de la composante verticale de B (B_y) à cette position aléatoire et pour plusieurs perméabilités des tôles est donné ci dessous (Tab-2.3).

μ_r	$B_y\ (mT)$
10	0.00465
50	0.00765
100	0.00950
500	0.01095
1000	0.01130
5000	0.01160

$Tab-2.3$

En représentant ces résultats sous forme graphique [Fig-57], Il apparaît que pour une perméabilité relative supérieure à 500, les caractéristiques magnétiques des tôles n'interviennent plus de manière notable dans l'évolution du champ magnétique.



$Fig-57$

La perméabilité relative des tôles étant supérieure à 1000, l'imprécision de cette caractéristique ne sera pas préjudiciable au calcul du champ magnétique généré car le domaine d'étude se réduit aux phénomènes linéaires à l'intérieur de l'entrefer.

- évolution de B en fonction du matériau contenu dans l'entrefer.

D'après les conclusions précédentes, la déformation subie par un solide de référence, soumis à un champ magnétique, doit être utilisée comme moyen de validation pour les différentes formulations. Ce solide est positionné dans l'entrefer dans la zone présentant des caractéristiques invariantes en fonction de la profondeur ; ceci dans le but de simplifier la résolution du problème. Les formulations présentées dans la première partie montrent le lien étroit entre les composantes Bn, Ht et la force d'origine magnétique. Ces deux grandeurs caractéristiques du champ magnétique s'obtiennent à partir d'un calcul type élément fini. La géométrie ainsi que les caractéristiques physiques du volume de test peuvent influencer fortement la répartition spatiale du champ magnétique et détruire cette hétérogénéité. Pour conserver l'hétérogénéité du champ magnétique il faut rechercher, par simulation, les limites de la perméabilité magnétique que le matériau de test peut avoir. Cela se fera simplement par modification incrémentale de la perméabilité du matériau de test et visualisation de la répartition spatiale du champ magnétique.

Dans la figure suivante [Fig- 58], la structure de test, modélisée sous forme élément fini, est présentée accompagnée d'un volume supplémentaire de perméabilité variable. Cette structure est utilisée comme support d'étude pour visualiser, dans le plan de symétrie, le champ magnétique à la surface de séparation : matériau test / air .

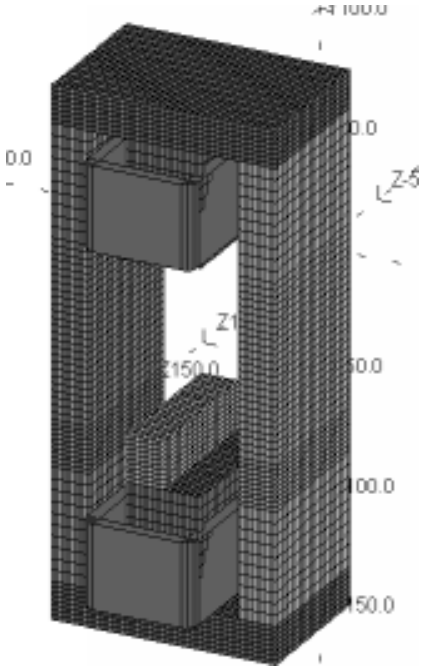
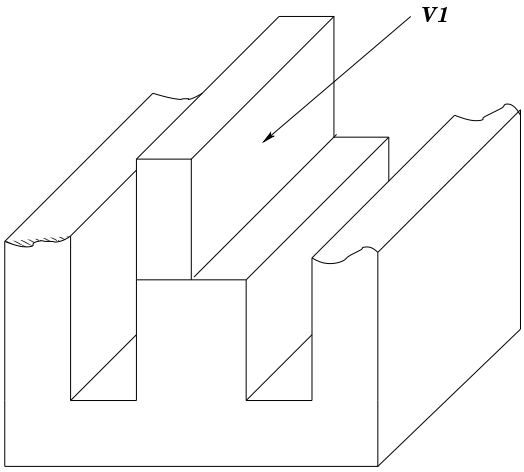


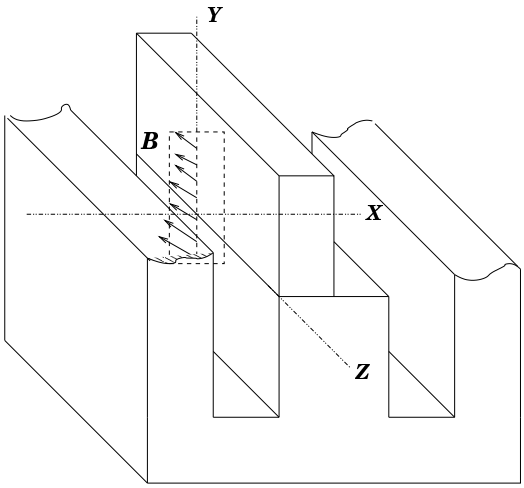
Fig – 58

La géométrie choisie, pour le volume supplémentaire, est élémentaire. La figure 59 montre que celui-ci n'est qu'un simple parallélépipède (V1). Des géométries plus complexes peuvent être utilisées, mais compte tenu des difficultés de réalisation prévisibles, elles ne seront pas prises en compte.

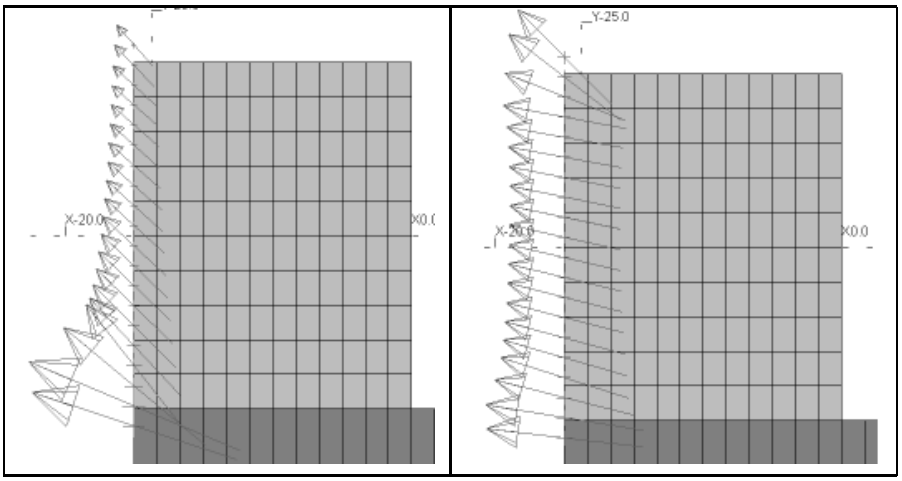


$Fig-59$

C'est à partir de cette épure que les simulations sont conduites. Une zone réduite, visualisée sur la figure 60, sert de base à la représentation de la densité de flux et pour limiter le domaine d'étude, les résultats associés à une faible perméabilité relative du matériau de test sont les seuls présentés.

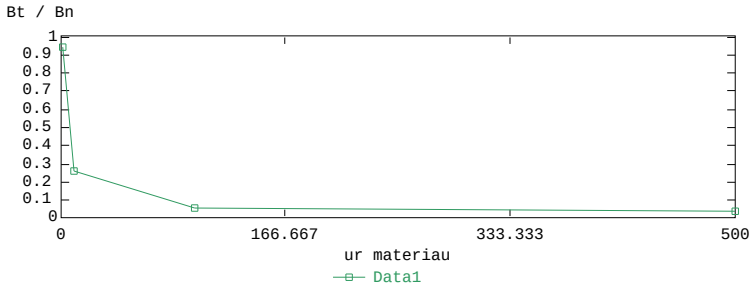


$Fig-60$



$Fig-61$ $Fig-62$

Les figures 61 et 62 montrent la répartition spatiale du champ magnétique à la surface de séparation dans le cas où la perméabilité magnétique du matériau de test est de 2 [Fig-61] ou de 10 [Fig-62]. Il est à remarquer la diminution des composantes tangentielles du champ magnétique au profit des composantes normales, dès que la perméabilité magnétique du matériau de test augmente. En conséquence, il sera obligatoire de travailler sur des matériaux de faible perméabilité sous peine d'annuler les composantes tangentielles. Cette remarque, issue de l'examen des distributions de flux précédentes, est confirmée par une autre approche, [Fig-63]. Dans ce diagramme, en un point de la surface, la tangente entre la composante normale du champ et sa composante tangentielle est calculée [Fig-64], ($tg(\alpha) = B_t/B_n$). Puis, cette valeur a été évaluée pour plusieurs valeurs de perméabilité relative du matériau de test. Il apparaît très vite une disparition de la composante tangentielle du champ magnétique par rapport à la composante normale, dès que la perméabilité relative dépasse 50...



$Fig-63$

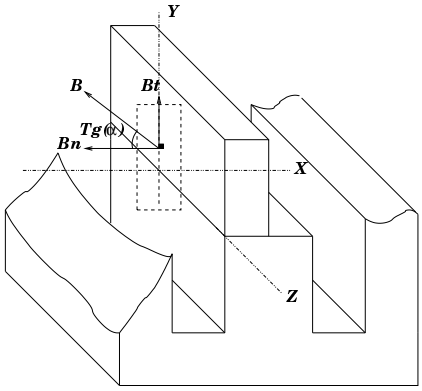


Fig – 64

Cette faible perméabilité est également intéressante pour la modélisation élément fini car elle évite d'avoir des valeurs importantes de champ magnétique dans des zones où les résultats des calculs de champs sont très sensibles à la géométrie. Les illustrations [Fig-65] et [Fig-66] vont donner à cette remarque toute son importance. Dans ces deux représentations, un matériau de forte perméabilité est utilisé et seul le nombre d'éléments finis constituant la surface de séparation est modifié (l'image de gauche contient deux fois plus d'éléments que l'image de droite).

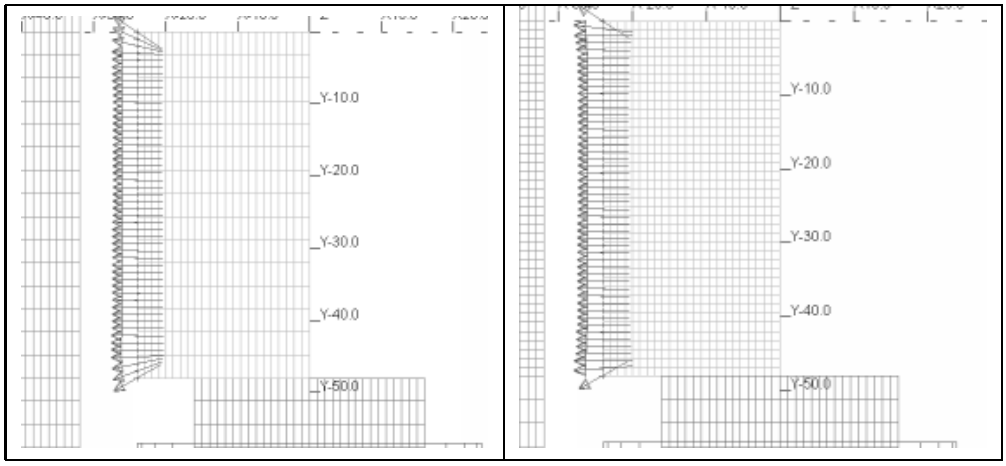
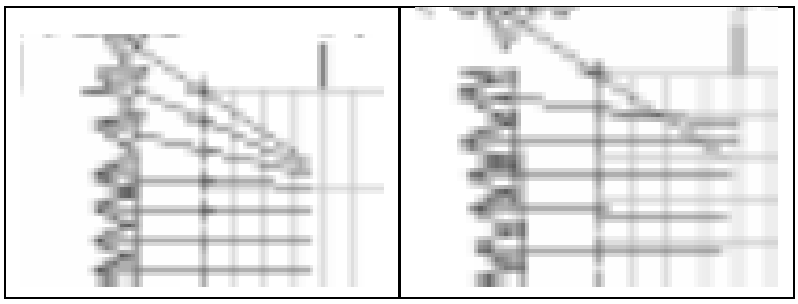


Fig – 65 *Fig* – 66

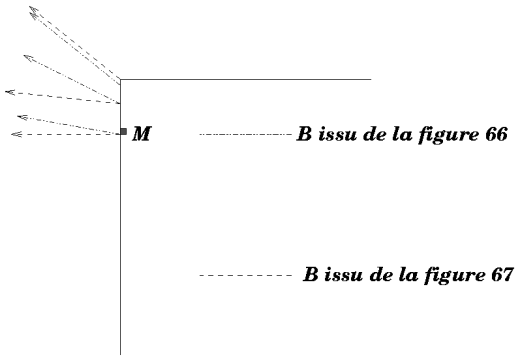
Cette perméabilité magnétique élevée explique pourquoi l'intensité du champ magnétique est pratiquement la même sur toute la surface de séparation. Ce qui permet de reporter l'attention au niveau des arêtes. Ainsi, à ces endroits, la direction du champ magnétique dépend beaucoup du maillage utilisé. Les figures

67 et 68 sont des agrandissements de l'arête supérieure et montrent avec plus de détail la répartition spatiale du champ magnétique. Les différences sont visibles et rendent bien compte de la difficulté d'évaluer le champ magnétique lors d'une modification brusque de la géométrie.



$Fig-67$ $Fig-68$

En ne reprenant que les informations pertinentes issues de ces deux représentations, il est maintenant évident que pour une position identique, les deux maillages ne donnent pas le même résultat [Fig-69]. Au point M, par exemple, L'intensité de $\overrightarrow{B}$ varie peu, mais la direction évolue de manière significative entre les deux maillages.



$Fig-69$

Pour s'affranchir de cette difficulté, une expérimentation qui minore l'intensité du champ magnétique au niveau des arêtes est souhaitable. Cette condition est réalisée pour des matériaux de faible perméabilité. Par exemple, la structure précédente, associée à un matériau de test de perméabilité relative de 2, engendrera la répartition spatiale de champ magnétique suivante [Fig-70].

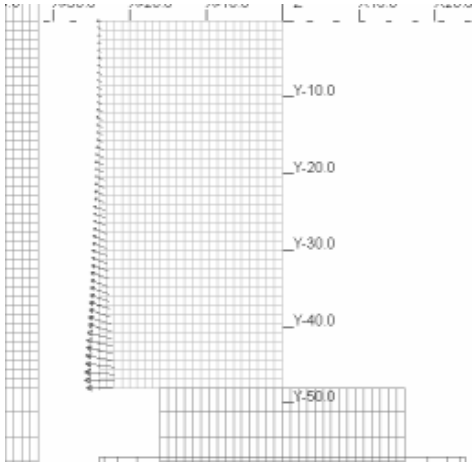


Fig – 70

L'intensité du champ magnétique au voisinage de l'arête supérieure est négligeable. Mais cette propriété ne se rencontre pas au niveau de l'arrête inférieure. Toutefois, même si la non nullité du champ magnétique dans la partie inférieure du volume de test implique l'existence d'une force d'origine magnétique, la proximité avec la surface de contact limitera fortement l'amplitude des déplacements induits, voir l'annulera au point de contact. Les difficultés liées à la détermination du champ magnétique peuvent bien sûr être pris en compte au niveau du code de calcul [35, TARNHUVUD.T-1988] ou au niveau du maillage [38, RATNAJEEVAN.S-1988].

2.3 Validation du système de génération de champ magnétique.

Les simulations précédentes, couplées aux analyses des formulations, ont conduit à concevoir une structure équipée de deux bobines pour générer un champ magnétique hétérogène. La distribution engendrée présente des caractéristiques d'invariance selon la profondeur dans une zone réduite de l'entrefer. Comme cette propriété est utilisée, il est souhaitable de vérifier sa robustesse vis à vis des conditions expérimentales.

2.3.1 Conception des bobines .

La réalisation des bobines peut à priori sembler simple et ne pas intervenir de manière forte dans la répartition spatiale du champ. Cette conclusion, qui s'impose lors de simulation en 2D plan, est trompeuse. En effet de telles simulations

ne prennent pas en compte la géométrie exacte du système. Par exemple : les bobines se referment au niveau des deux extrémités, cette jonction est parcourue par un courant qui se conduit comme une source de champ magnétique et la position de cette jonction n'est pas connue avec une grande précision. Dans le cas de la configuration présentée par l'intermédiaire de la figure 71, les jonctions extérieures sont très proches du noyau magnétique et peuvent perturber le champ magnétique dans l'entrefer.

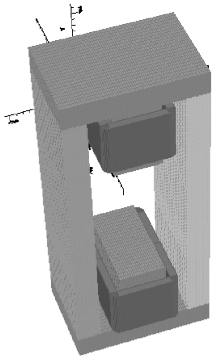


Fig – 71

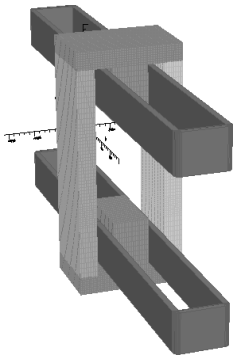


Fig – 72

Par contre, pour une configuration où les jonctions sont éloignées [Fig-72]. L'influence de ces conducteurs s'en trouve certainement minorée mais comme il est impossible de reporter ces jonctions à l'infini, il convient de vérifier leur influence à l'aide de la simulation numérique.

Il est clair qu'une zone présentant des caractéristiques invariantes, selon la profondeur, existe. La connaissance de l'étendue de cette zone ainsi que les différentes possibilités permettant de l'augmenter sont mises à profit pour dimensionner le volume de test selon la profondeur. La figure 73 présente le volume de test prévisionnel. Celui-ci comporte trois sous-volumes, V1,V2 et V3. Les volumes V2 et V3 sont dans des zones où l'invariance des caractéristiques, selon la profondeur, n'est pas assurée, ils doivent être exclus du volume réel qui se limitera au volume V1.

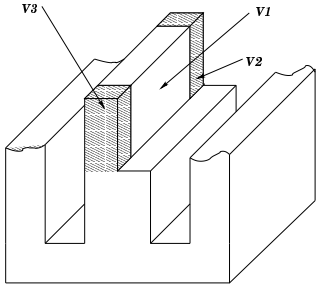
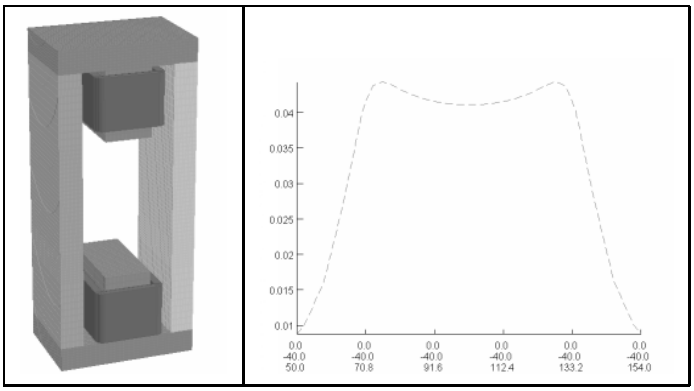


Fig – 73

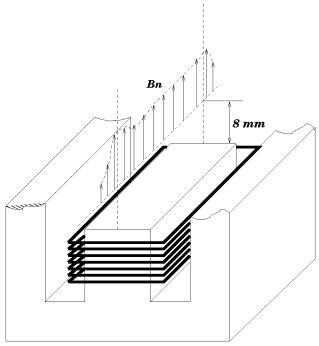
conducteur au plus près de l'entrefer

En supposant que les conducteurs qui réalisent la jonction sont très proches de l'entrefer (distance de l'ordre de 1 mm), la structure est similaire à celle présentée dans la figure 74.a. Il est prévisible qu'une modification apparaisse pour la répartition spatiale de l'induction magnétique dans des régions proches des extrémités. Par l'intermédiaire de la simulation numérique, la composante verticale de l'induction magnétique, pour un courant de 4 A dans les bobines, est calculée. L'évolution de l'intensité de la composante verticale en fonction de la profondeur est présentée en figure 74.b. La valeur maximale rencontrée est de 0.0445 T et la minimale de 0.0411 T ; ce qui donne une variation maximale de 8.2 % pour tout l'entrefer.



$Fig-74.a$ $Fig-74.b$

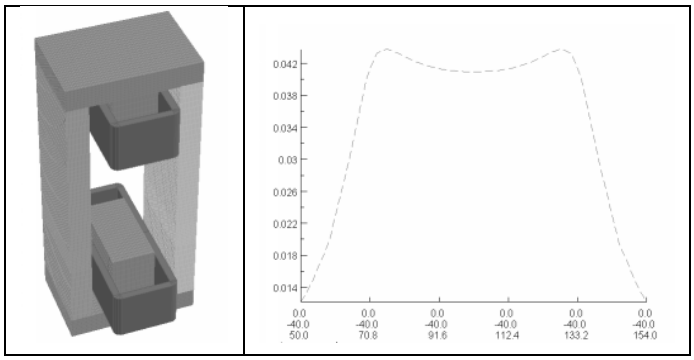
On retrouve dans la figure 74.b une légère augmentation de l'induction magnétique dans les zones proches des frontières de la structure. La figure 75 replace cette présentation dans la structure de test et met ainsi en évidence le fait que cette augmentation peut être attribuée aux portions de conducteurs fermant le circuit électrique.



$Fig-75$

Conducteur à 20 mm de l'entrefer.

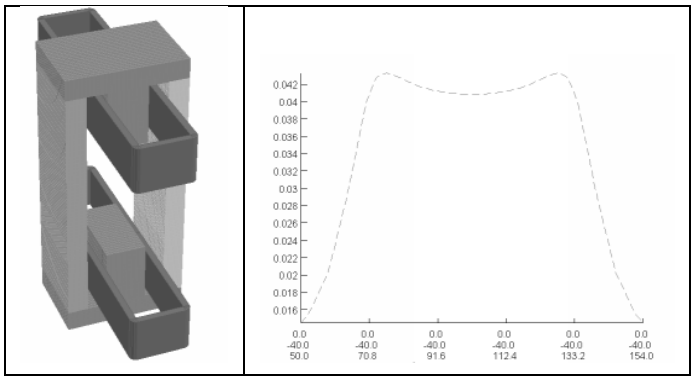
Il est raisonnable d'envisager une réalisation où les conducteurs se refermeront à une distance de 20 mm de l'entrefer [Fig-76.a]. Toujours dans les conditions précédentes, la simulation permet de construire une répartition de la composante verticale de l'induction magnétique dans l'entrefer. La valeur maximale chute très peu, 0,044 T et la valeur minimale reste très proche de la précédente 0,0410 T. Il est à remarquer que les effets de bord n'ont pas disparus mais que l'ondulation a été réduite [Fig-76.b]. On arrive à une variation maximale dans l'entrefer de 6.8%.



$Fig-76.a$ $Fig-76.b$

Conducteur à 70 mm de l'entrefer.

Cette configuration est réalisable [Fig-77.a] , mais elle impose l'utilisation d'une grande quantité de cuivre et des supports pour le maintien des bobines. La valeur maximale n'a que peu chuté (0.0434 T) de même que la valeur minimale (0.0408 T). L'ondulation est descendue à 5.9 % [Fig-77.b].



$Fig-77.a$ $Fig-77.b$

Il est donc impossible de supprimer les effets de bord. Même si les jonctions réalisant la fermeture des conducteurs peuvent être repoussées à une distance très élevée de la structure, des effets sont toujours présents et sont en fait induits par les portions latérales des bobines. La figure 78 illustre ce propos. La section 2 engendre une induction magnétique dont $\overrightarrow{B2}$ est l'un des constituants. Une partie de cette induction va circuler dans l'entrefer et briser l'homogénéité. Mais les sections 1 et 3 donnent aussi naissance à une induction magnétique dont $\overrightarrow{B1}$ et $\overrightarrow{B3}$ ne sont que des constituants et rien ne s'opposera à ce qu'une partie de ces deux inductions circule, elle aussi, dans l'entrefer.

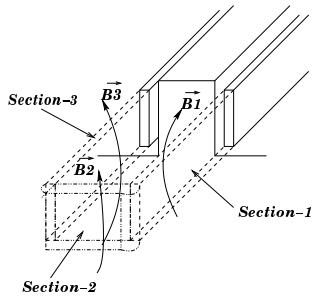


Fig – 78

En conclusion, une solution intermédiaire est choisie : les bobines se refermeront à quelques cm de l'entrefer. La valeur minimale du champ magnétique est acceptable et les effets d'ondulation sont à peine perceptibles. La zone dans l'entrefer, dont les caractéristiques sont bidimensionnelles, est alors de l'ordre de 40 mm sur la profondeur [Fig-79].

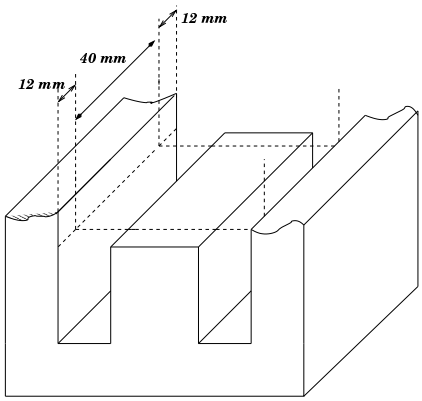


Fig – 79

2.3.2 Validation expérimentale.

Ces simulations, bien que très utiles pour aider à concevoir la structure, se doivent d'être associées à des mesures sur le dispositif réel. Ces mesures serviront d'une part à confirmer la bonne prise en compte des effets des jonctions extérieures des conducteurs et d'autre part à vérifier les résultats des simulations.

Dans un premier temps, les capacités du logiciel de simulation, OPERA 3D, sont évaluées sur un exemple simple : les bobines de Helmotz. La comparaison entre les valeurs calculées et les valeurs mesurées montre qu'une grande confiance pouvait être accordée à la simulation. L'écart est inférieur à 3% (annexe 4.1).

Puis des mesures d'induction magnétique sont réalisées sur la structure de test. Elles montrent la très bonne correspondance entre la simulation et l'expérimentation. En particulier, les légères augmentations du champ magnétique au voisinage des jonctions extérieures des conducteurs sont bien présentes (annexe 4.1).

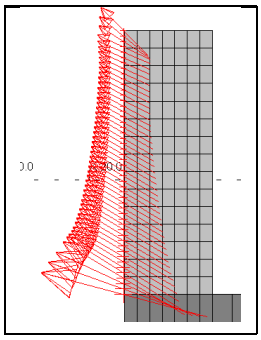
2.4 Applications des formulations associées au calcul de force sur la structure de test.

2.4.1 Traitement des équations liées au calcul de forces sur une surface élémentaire du dispositif.

Le chapitre 1, consacré à l'analyse des formulations de calcul des forces liées au champ magnétique, a introduit les équations permettant de calculer localement les forces d'origine magnétique. Ces expressions mettent en évidence l'importance de la perméabilité relative vis à vis des résultats de calcul. Elles ont conduit aussi à rechercher un champ magnétique, le plus hétérogène possible, tout en postulant l'existence d'un matériau présentant une faible perméabilité relative. L'association du volume de matériau test avec la structure ne remet pas en cause la connaisance du champ magnétique ni son hétérogénéité. Pour cette partie, la perméabilité relative du matériau de test est arbitrairement de 3.

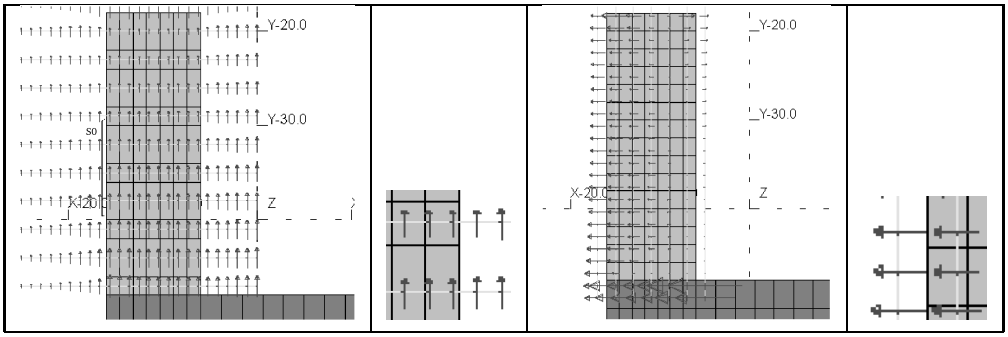
Hétérogénéité du champ mais maintien des continuités

la figure 80 est une illustration de la distribution du flux sur l'une des surfaces de séparation du volume de test. Cette représentation montre qu'il n'est pas indispensable de prendre une géométrie particulièrement complexe pour avoir l'hétérogénéité recherchée. Toutefois, il faut garder à l'esprit que le volume de test, bien qu'il soit symétrique, n'est pas placé au centre de l'entrefer, ce qui fait qu'il n'y a pas de symétrie dans le système complet.



$Fig-80$

Les formulations sont écrites de manière à utiliser les composantes magnétiques ($\overrightarrow{B}$ ou $\overrightarrow{H}$) qui sont indépendantes du milieu. C'est à dire $\overrightarrow{B}_n$ ou $\overrightarrow{H}_t$. Les deux figures suivantes [Fig-81 a & b] et [Fig-82 a & b] montrent l'évolution de $\overrightarrow{H}_t$ ainsi que de $\overrightarrow{B}_n$ au voisinage et dans le volume de test. Ces représentations sont issues des simulations et permettent de conclure que les continuités physiques sont respectées.



$Fig-81.a$ $Fig-81.b$ $Fig-82a$ $Fig-82b$

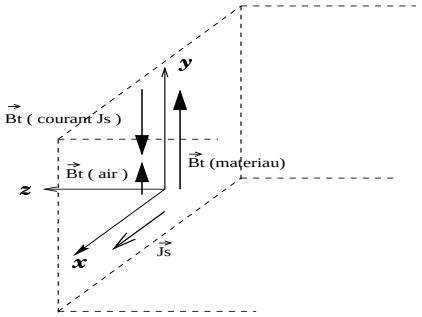
En limitant le calcul des forces sur une région très réduite de cette surface de séparation (S0), il est possible d'évaluer localement la force d'origine magnétique. Si les résultats numériques associés à chacune des formulations, ont des valeurs très éloignées les unes des autres, la phase suivante peut être abordée.

Calcul avec la formulation *Courants Équivalents*

Pour mémoire, les formulations donnant la force normale ainsi que la force tangente à la surface de séparation sont les suivantes :

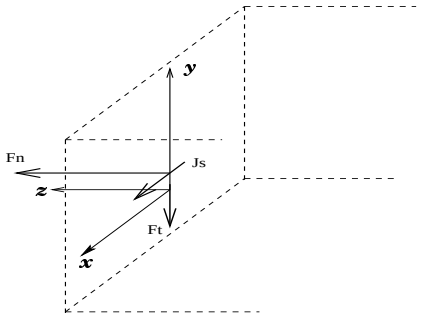
Fn	$\frac{1}{2}\mu_0(\mu_r^2-1)H_t^2$	(2.3)
Ft	$(1-\mu_r)H_t B_n$	(2.4)

Ces formulations, démontrées au début du premier chapitre, reposent sur l'existence d'un courant surfacique destiné à créer la discontinuité tangentielle de $\overrightarrow{B}$. En particulier, la continuité de $\overrightarrow{H}_t$ impliquera une composante $\overrightarrow{B}_t$ plus importante dans le matériau de test que dans l'air [Fig-82]. En conséquence, le courant surfacique $\overrightarrow{J}_s$ créera une induction magnétique qui diminuera l'intensité de $\overrightarrow{B}_t$. Ce courant équivalent sera orienté selon les x croissants, comme cela est présenté à la figure 83.



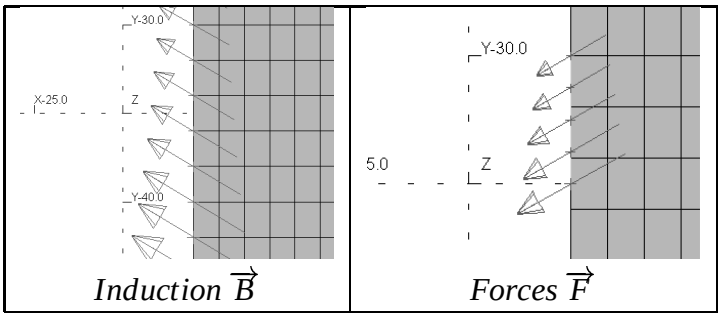
$Fig-83$

A l'aide de cette représentation et des formulations associées, il est très rapide d'en déduire les orientations pour les forces tangente et normale [Fig-84].



$Fig-84$

En appliquant les deux formulations (2.3 & 2.4) liées à $\overrightarrow{F}_n$ et $\overrightarrow{F}_t$ à une faible surface du volume de test, S0 sur la figure 81.a, il est aisé d'avoir une visualisation des forces associées. la figure 85 montre la répartition de l'induction magnétique sur la surface de séparation et la figure 86 les forces associées à cette surface.



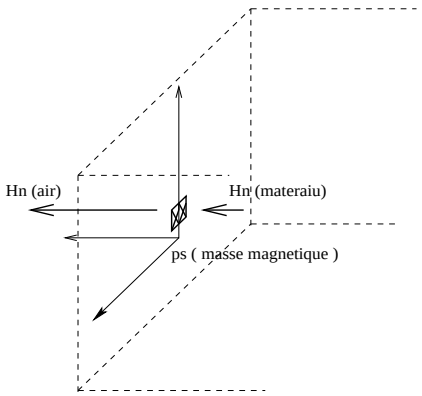
$Fig-85$ $Fig-86$

Calcul avec la formulation *Masses Magnétiques Équivalentes*

Pour mémoire, les formulations donnant la force normale ainsi que la force tangente sur la surface de séparation pour une modélisation utilisant les masses magnétiques équivalentes sont les suivantes :

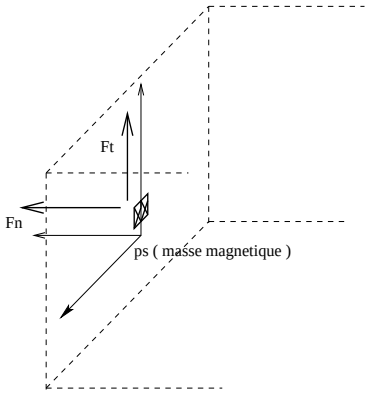
Fn	$\frac{1}{2}(\frac{1}{\mu_0})(1-\frac{1}{\mu_r^2})B_n^2 \qquad (2.5)$
Ft	$(1-\frac{1}{\mu_r})HtBn \qquad (2.6)$

Cette méthode repose sur l'existence de masses magnétiques surfaciques permettant de garantir la discontinuité de $\overrightarrow{H}_n$. A la surface de séparation, il y a continuité de $\overrightarrow{B}_n$, donc une intensité plus réduite pour $\overrightarrow{H}_n$ doit être rencontrée à l'intérieur du matériau de test. La masse magnétique associée à cette discontinuité sera positive et assurera l'augmentation de $\overrightarrow{H}_n$ [Fig-87].



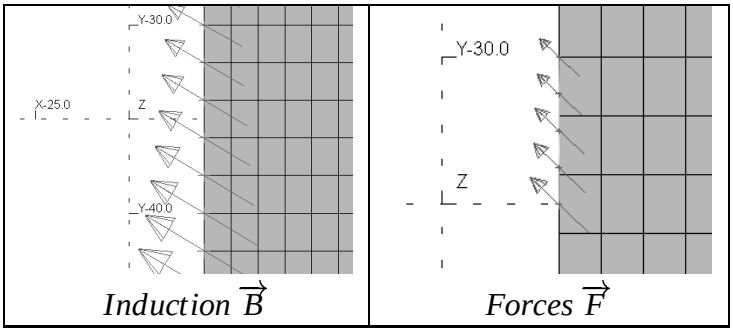
$Fig-87$

Comme précédemment, il est très rapide d'en déduire les orientations des forces magnétiques associées (normale et tangente) [Fig-88].



$Fig-88$

Les deux figures suivantes [Fig-89] et [Fig-90] synthétisent les résultats en présentant, sur une surface très réduite, l'induction magnétique [Fig-89] et la force calculée à l'aide des formulations (2.5 & 2.6) sur cette même surface [Fig-90]. Il apparaît très nettement un changement d'orientation des forces ; celles-ci sont dirigées vers le haut.



$Fig-89$ $Fig-90$

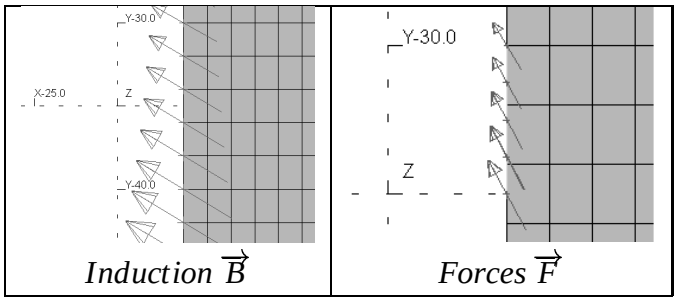
Calcul avec la formulation *Masses Magnétiques et Courants Surfaciques Équivalents*

Les formulations donnant la force normale ainsi que la force tangente à la surface de séparation sont les suivantes :

Fn	$\frac{1}{2}(\frac{1}{\mu_0})B_n^2 - \frac{1}{2}(\mu_0)H_t^2 \qquad (2.7)$
Ft	$H_t B_n \qquad (2.8)$

Comme ces formulations ne sont qu'un assemblage des deux précédentes, il n'est pas utile de reprendre les justifications précédentes. Ce qui permet de ré-

duire l'analyse à la représentation des forces d'origine magnétique. Les deux figures [Fig-91] et [Fig-92] montrent le résultat de ces formules sur une surface très réduite. Pour la figure 91, l'induction magnétique sur cette portion de surface de séparation est représentée ; pour la figure 92, ce sont les forces calculées à l'aide de ces formulations qui sont mises en évidence. Il est a remarqué une augmentation sensible de la composante tangentielle de la force.



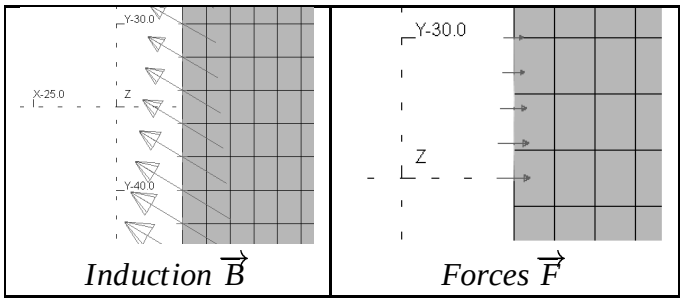
$Fig-91$ $Fig-92$

Calcul avec la formulation *Dérivée de L'énergie.*

La formulation donnant la force normale à la surface de séparation est la suivante, sans oublier que la force tangente est nulle.

Fn	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0}\right)\left(1-\frac{1}{\mu_r}\right)B_n^2+\frac{1}{2}\left(\mu_0\right)\left(1-\mu_r\right)H_t^2 \qquad (2.9)$
Ft	0

Compte tenu de l'équation (2.9), $\overrightarrow{F}n$ peut être sortante ou entrante par rapport à la surface de séparation. Les deux figures [Fig-93] et [Fig-94] montrent le résultat de cette formule sur une surface très réduite. Pour la figure 93, c'est la répartition spatiale de l'induction magnétique qui est présentée et pour la figure 94, la force calculée à l'aide de la formulation (2.9) est mise en évidence.



$Fig-93$ $Fig-94$

Il apparait que la force est dirigée vers l'intérieur du solide. Comme elle est assimilée à une pression, il n'est pas souhaitable de lui voir associer une valeur négative et il peut être utile d'utiliser la normale entrante pour exploiter cette formulation quand les matériaux possèdent une faible perméabilité relative.

Calcul avec la formulation *Tenseur de Maxwell*$^{(1)}$.

La formulation donnant la force normale (la force tangente est nulle) à la surface de séparation est la suivante :

Fn	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0}\right)\left(1-\frac{1}{\mu_r}\right)B_n^2 - \frac{1}{2}\left(\mu_0\right)\left(1-\mu_r\right)H_t^2$	(2.10)
Ft	0	

Compte tenu de l'équation 2.9, le résultat associé à l'équation 2.10 est similaire à celui présenté à la figure 87 sauf que la direction des forces surfaciques est toujours orientée vers l'extérieur du solide.

Conclusion pour cette série de calcul

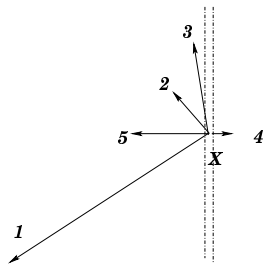
A l'aide d'une simulation numérique, les composantes $\overrightarrow{B}_n$ et $\overrightarrow{H}_t$ associées à la surface de séparation sont calculées localement et les forces d'origine magnétique sont déduites en utilisant les formulations présentées dans le premier chapitre. La faible perméabilité $(\mu_r = 3)$ du matériau de test met en évidence les différentes directions, pour les forces ainsi calculées, suivant les formulations employées. En particulier, certaines d'entre elles peuvent apparaître contradictoires. C'est le cas pour les formulations qui proposent une force dirigée vers le solide. Comme il est de perméabilité supérieure à 1, les forces devraient à priori être orientées vers l'extérieur du solide. La règle du flux maximum doit donner au solide la volonté d'occuper le maximum d'espace et donc de lui adjoindre des forces orientées vers l'extérieur.

	Courants surfaciques et volumiques	Masses magnétiques équivalentes	Masse et courant surfaciques	dérivée de l'énergie	Tenseur de maxwell$^{(1)}$
$\left\|\overrightarrow{F}_n\right\|$	$777\,N/m^2$	$140\,N/m^2$	$77\,N/m^2$	$80\,N/m^2$	$300\,N/m^2$
$\left\|\overrightarrow{F}_t\right\|$	$507\,N/m^2$	$160\,N/m^2$	$300\,N/m^2$	$0\,N/m^2$	$0\,N/m^2$

$Fig-95$

Dans tous les cas, la répartition spatiale du champ magnétique ou de l'induction dans l'air est la même. Par simulation, les intensités caractéristiques pour la

force tangentielle ainsi que la force normale sont calculées [Fig-95]. Ces valeurs sont des valeurs moyennes vis à vis d'une zone d'étude de taille réduite située à la moitié de la hauteur du volume de test. La méthode référencée "Tenseur de Maxwell$^{(2)}$" n'est pas prise en compte car elle ne peut fournir un résultat local compte tenu de son origine. Une autre représentation de ces résultats, sous forme graphique, permet d'appréhender les différences vis à vis des amplitudes des composantes pour des positions similaires.



$Fig-96$

La figure 96 montre que pour une position X, associée à la surface de séparation, il est possible d'avoir 5 forces locales différentes pour le même phénomène physique.

1 : Force d'origine magnétique calculée à l'aide de la méthode des courants équivalents.

2 : Force d'origine magnétique calculée à l'aide de la méthode des masses magnétiques équivalentes.

3 : Force d'origine magnétique calculée à l'aide de la méthode des masses et courants surfaciques équivalents.

4 : Force d'origine magnétique calculée à l'aide des méthodes énergétiques.

5 : Force d'origine magnétique calculée à l'aide du tenseur de Maxwell$^{(1)}$.

La perméabilité relative μ_r, de faible valeur, intervient fortement dans les formulations. En particulier le terme de la forme $(1-1/\mu_r)$, qui n'est pas proche de 1, et la valeur non négligeable de $\overrightarrow{H}_t$ suffisent à expliquer une telle dispersion.

2.4.2 Premier calcul de la distribution des forces sur la totalité du volume.

Le paragraphe précédent a permis de mettre en évidence le comportement satisfaisant de la structure de test. Les forces calculées sont d'une grande diversité en direction et en amplitude. Dans cette partie, les formulations sont appliquées à la totalité du système expérimental réel. La connaissance du champ magnétique

est assurée de manière précise par la simulation. Les distributions de force induites par les différentes formulations peuvent ainsi être comparées.

Cette connaissance du champ magnétique est extrêmement importante car la diversité de ces composantes se reporte aussi sur les composantes des forces d'origine magnétique. En particulier, la figure 82 précédente montre que la composante normale du champ magnétique sur la frontière du volume de test est très faible du coté droit. Ces faibles valeurs masquent un phénomène de changement d'orientation de la composante normale du champ magnétique qui est successivement entrant et sortant sur cette frontière.

Pour mettre en évidence ce phénomène, la procédure qui a permis de construire les figures 81 et 82 est reprise. Toutefois, seul l'induction magnétique associée à la frontière du volume de test est présentée [Fig-97].

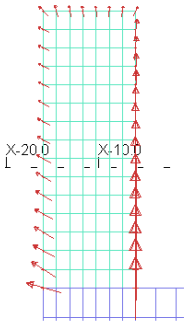


Fig – 97

De façon à mettre en évidence ce changement d'orientation de l'induction magnétique, les composantes normales de l'induction, associées à la partie droite, sont multipliées par un coefficient positif. La figure 98 met en évidence le changement d'orientation. Ce flux est entrant dans la partie inférieure et sortant dans la partie supérieure.

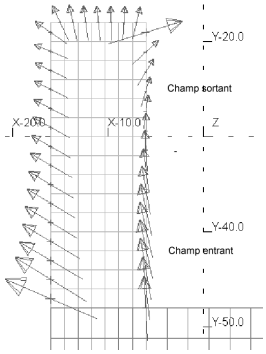


Fig – 98

Il est clair que la démarche visant à obtenir une asymétrie sur le volume de test a conduit à un résultat parfaitement acceptable.

Répartition spatiale des forces avec la formulation *des Courants Équivalents*

La figure ci-dessous donne une idée très précise des contraintes qui s'exercent sur le solide. Il est à noter que la totalité des forces sont dirigées vers l'extérieur du solide.

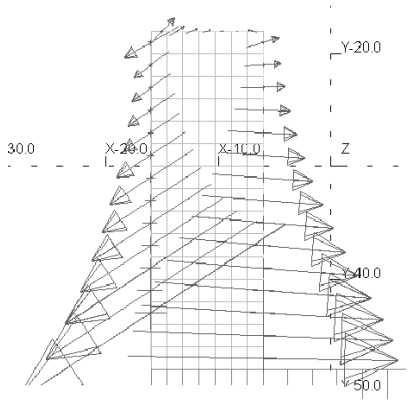


Fig – 99

Répartition spatiale des forces avec la formulation des *Masses Magnétiques Équivalentes*

Comme précédemment la totalité des forces est dirigée vers l'extérieur du solide [Fig-100]. L'intensité de ces forces est faible, voir négligeable du coté droit.

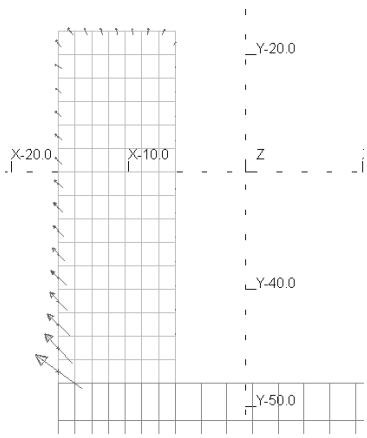


Fig – 100

Répartition spatiale des forces avec la formulation des *Masses Magnétiques et Courants surfaciques Équivalents*

La distribution des forces est issue de la répartition spatiale du champ magnétique. Si un matériau amagnétique est utilisé, cette distribution ne sera que très peu modifiée. Ce qui fait que cette formulation donnera une distribution non nulle et asymétrique sur un tel matériau. Or un matériau amagnétique ne subit aucune force.

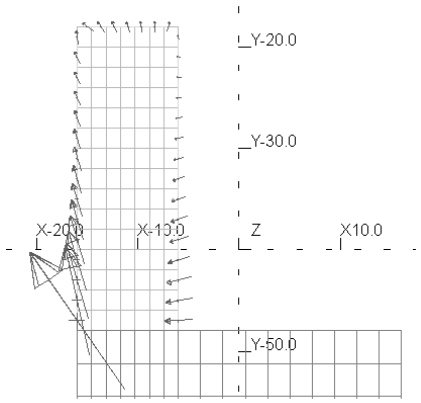


Fig – 101

Répartition spatiale des forces avec la formulation de la *Dérivée de L'énergie.*

Aucune force tangente, mais les forces normales sont dirigées vers l'intérieur du solide.

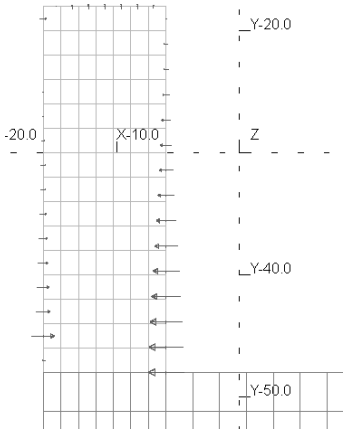


Fig – 102

Répartition spatiale des forces avec la formulation donnée par le *Tenseur de Maxwell*(1)

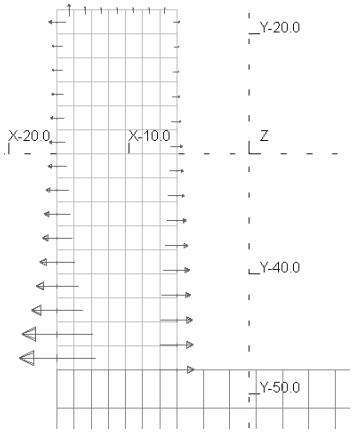


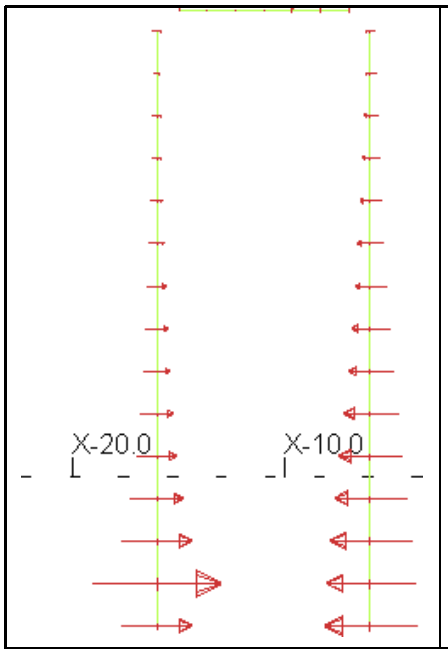
Fig – 103

Il apparaît très vite que les différentes formulations utilisées dans des conditions de faible perméabilité et en présence d'un champ magnétique très hétérogène donnent des résultats très différents. Les représentations privilégient les orientations et non les amplitudes. Pour comparer les amplitudes, il faut utiliser les résultats présentés au tableau 95. La méthode des masses magnétiques et courants surfaciques équivalents ne satisfait pas les conditions limites dans le cas où le solide est amagnétique et donne un résultat non nul pour la distribution de forces en surface.

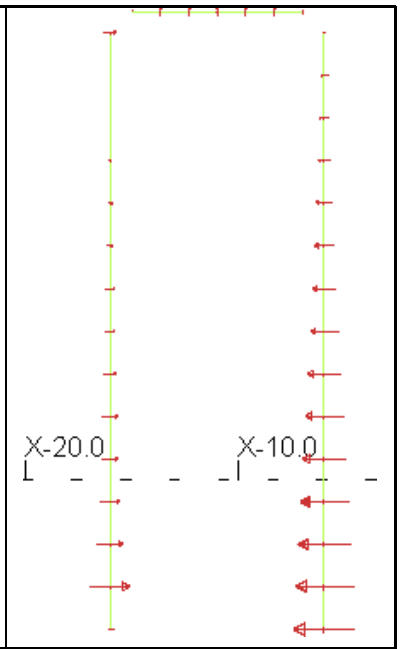
Remarque sur la méthode de la dérivée de l'énergie

Cette méthode, très souvent utilisée dans les systèmes électromécaniques pour la détermination des caractéristiques mécaniques comme le couple d'un moteur, présente des résultats qui semblent étonnants. Ces résultats proviennent de la faible perméabilité relative du matériau de test. En effet la présence de composante tangentielle non négligeable, induit une force locale dirigée vers le matériau.

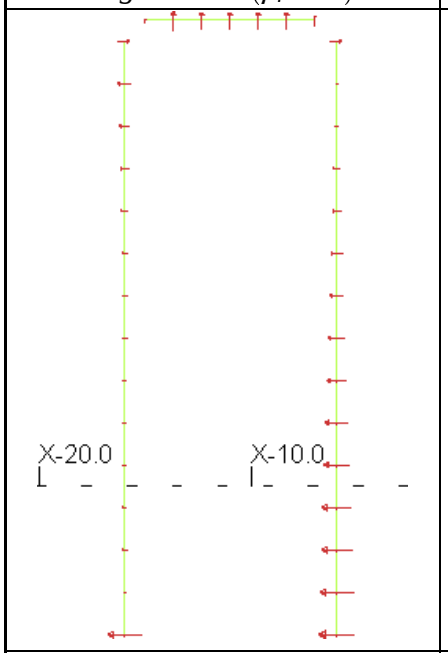
Il est intéressant de voir l'évolution de cette distribution de forces en fonction de la perméabilité relative du matériau de test.



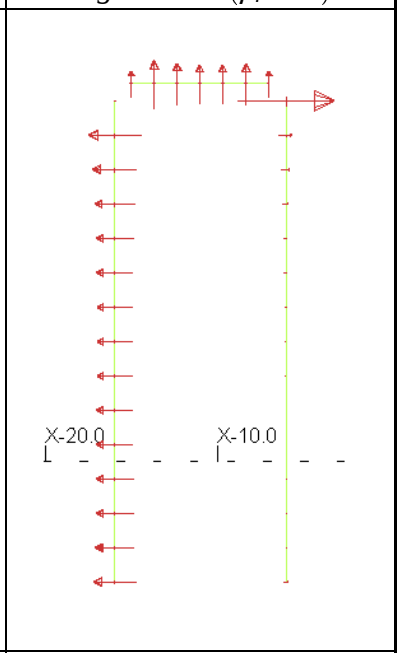
$Fig-104 \quad (\mu_r = 2)$



$Fig-105 \quad (\mu_r = 5)$



$Fig-106 \quad (\mu_r = 10)$



$Fig-107 \quad (\mu_r = 100)$

Les quatre figures précédentes illustrent les résultats de la formulation basée sur la dérivée de l'énergie pour plusieurs valeurs de perméabilité relative. Il est à remarquer qu'un changement de sens des forces surfaciques ne s'opère que pour une valeur de la perméabilité magnétique supérieure à $10 \times \mu_0$.

2.5 Conception du matériau de test.

Il est clair que le matériau de test doit posséder une perméabilité relative faible, inférieure à 10, sous peine de ne pouvoir obtenir des répartitions spatiales de forces variées. Toutefois, cette faible perméabilité, couplée à une induction magnétique de l'ordre de 20 mT, ne pourra que donner des forces par unité de surface d'amplitude réduite. Les matériaux ferromagnétiques couramment rencontrés dans l'industrie électrique sont issus de la métallurgie et possèdent surtout des caractéristiques proches des aciers. Ces caractéristiques mécaniques sont à l'opposé des caractéristiques recherchées.

2.5.1 La technique des matériaux composites.

L'industrie a toujours utilisé l'assemblage de matériaux différents pour obtenir un produit, qui globalement, possède des caractéristiques que n'avaient aucun des matériaux d'origine. Les pneumatiques des premiers véhicules automobiles illustrent bien ce propos. La structure, autrefois métallique à base de fils d'acier de faible section, donnait au produit ses propriétés mécaniques (souplesse et résistance) alors que le mélange à base de caoutchouc ne servait qu'à réaliser la bande de roulement (adhérence) et à assurer l'étanchéité vis à vis de l'environnement extérieur.

Cette idée d'assemblage a donné naissance à des dérivés connus sous le nom de matériaux composites (exemple : fibre de verre + résine époxy...). C'est en appliquant cette démarche que le matériau de test va être conçu. Il sera fait d'un assemblage d'un matériau connu pour ses propriétés ferromagnétiques et d'un autre dont les caractéristiques mécaniques sont à l'opposé de celles de l'acier.

2.5.2 Genèse du matériau de test.

Au niveau du matériau de test, trois grandeurs vont le caractériser. L'une magnétique (la perméabilité relative) et les deux autres mécaniques (le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). Bien sûr, ce matériau doit présenter des caractéristiques isotropes.

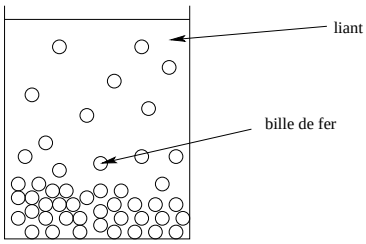
Isotropie.

Les constituants de bases sont :

– des billes de fer doux de 0.05 mm de diamètre
– un liant à base de collagène contenant un fort pourcentage d'eau.

Les billes étant infiniment plus petites que le volume du matériau de test, qui est de l'ordre de quelques cm^3 , les caractéristiques seront isotropes. Toutefois, cette

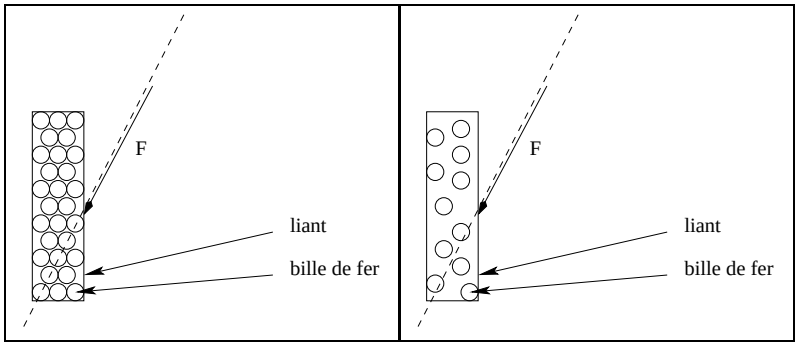
propriété ne sera assurée qu'à partir du moment où la non agrégation des billes de fer dans le mélange est réalisée . Cette agrégation est encouragée d'une part, par la très forte différence de masse volumique entre les billes de fer et le liant et d'autre part, par le temps que met le liant à perdre ces caractéristiques visqueuses et passer en phase solide. C'est ce phénomène qui est présenté dans la figure 108.



$Fig-108$

Il ne faut pas en déduire pour autant qu'un chargement maximum en billes de fer doit être recherché. En effet les caractéristiques mécaniques du matériau de test doivent être proches de celles du liant et non de celles des billes de fer. Même s'il est aisé de comprendre que l'ensemble n'aura jamais les caractéristiques de l'acier, il convient de remarquer que des contacts trop nombreux entre les billes de fer sont défavorables au maintien d'une très faible élasticité.

Les deux figures suivantes illustrent bien ce cas extrême qu'il ne faut pas rencontrer. En particulier, en regardant la figure de gauche [Fig-109], l'application de la force $\overrightarrow{F}$ se fait suivant la direction représentée par les traits discontinus. Comme une succession de billes est alignée sur cet axe, ce sont les billes de fer qui prennent en charge la reprise d'efforts sur la structure et non le liant. Par contre, pour l'exemple proposé par la figure de droite [Fig-110], les billes n'ayant aucun contact entre elles, seul le liant peut prendre en compte les efforts extérieurs.



$Fig-109$ $Fig-110$

Perméabilité relative faible.

Les billes de fer ont une perméabilité relative très grande, de l'ordre de 1000. et il est impossible de donner la densité requise pour obtenir un matériau de perméabilité relative donnée. Plusieurs essais, réalisés durant les phases expérimentales, ont montré que la perméabilité relative ne pouvait être supérieure à 10 avec les conditions de fabrication retenues. En fait, c'est le critère suivant, élasticité très faible, qui sera préjudiciable au niveau de la réalisation du matériau de test. Dès que celui-ci sera vérifié, il sera très facile d'obtenir une perméabilité relative faible.

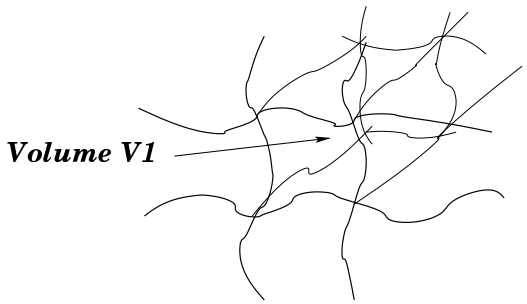
Caractéristiques mécaniques (très faible module d'élasticité)

Le module de Young, module d'élasticité longitudinale, caractérise l'aptitude du matériau à se déformer sous charge. Un très faible module d'élasticité se rencontre dans les matériaux moux comme les matériaux expansés (polystyrène expansé ou mousse de polyuréthane). Hélas, l'utilisation de ces composés comme liant ne peut être envisagé, par le fait même que leurs caractéristiques mécaniques sont obtenues par une augmentation de volume, suite à la vaporisation d'un composé introduit dans le produit au moment de la fabrication. Cette augmentation de volume (de plusieurs fois le volume initial) ne peut garantir une répartition isotrope des billes de fer.

Une autre direction à explorer, plus proche des techniques utilisées pour les matériaux composites, est celle qui conduit aux résines époxy ou résines polyester. La polymérisation d'un liant assure le maintient en position d'une matrice constituée d'un autre matériau. Ce procédé permet en outre de maîtriser le volume final. Il est évident que ce type de liant ne peut pas être utilisé, car les résines employées possèdent des modules d'élasticité supérieurs de plusieurs ordres de grandeur à celui qui est requis.

La chimie organique, et en particulier le domaine des "gels", a mis au point de longues chaînes moléculaires susceptibles d'engendrer des "matériaux" présentant de très faible module d'élasticité [20, DJABOUROV M.-1995]. Les "gels" sont hydrophiles et le composé obtenu après absorption d'eau se rapproche plus, d'une matière molle que d'une matière dure. Pour le liant, il est intéressant d'utiliser des collagènes d'origine animal ou végétal, saturés en eau. Il suffit, pour la suite, d'ajouter les billes de fer pour créer le matériau de test. Cette association présente de nombreux avantages qu'il convient d'expliciter :

- Élasticité uniquement associée aux molécules de collagène.
- Non compressibilité de l'eau

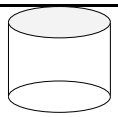


$Fig-111$

La figure 111 montre de manière schématique les chaînes de protéines à température ambiante. Elles forment un maillage suffisamment fin pour piéger de minuscules gouttes d'eau de volume V1. Comme l'eau reste à l'intérieur de ce volume sous sa forme liquide, elle ne peut participer à l'élasticité du matériau. Son caractère incompressible est un élément important vis à vis de la caractérisation du matériau car il donne une information sur le coefficient de Poisson.

Au niveau mécanique, deux caractéristiques doivent être déterminées, le module d'élasticité longitudinal (E) ainsi que le coefficient de Poisson (ν). Le module d'élasticité longitudinal est obtenu au moyen d'un essai de compression (ou de traction) simple et découle directement de la loi de Hooke. Par contre, le coefficient de Poisson, n'est pas obtenu aussi facilement et provient d'un autre essai, mettant en oeuvre un extensomètre diamétral. Toutefois une analyse plus physique de ce coefficient va éviter cette expérimentation difficile.

Un matériau soumis à une compression longitudinale se déforme. Toutefois, on remarque une perte de volume, une légère contraction latérale apparaît. Cette contraction latérale peut être assimilée à des effets de contraintes latérales. C'est le coefficient de Poisson qui permet de prendre en compte ces contraintes. Les trois figures suivantes illustrent ce phénomène [Fig-112, Fig-113, Fig-114].

	Absence de compression $(Fig-112)$
	compression Iso-volume $(Fig-113)$
	compression réelle (coefficient de poisson) $(Fig-114)$

Comme le liant est composé à plus de 98% d'eau, vis à vis de la compression, il se comportera comme son principal constituant. C'est à dire qu'il conservera ses propriétés de non compressibilité et pourra être assimilé à un matériau ayant

un coefficient de Poisson de 0.5 [18, LEHOUCQ R.-1999]. Même si par la suite, il est chargé de micro-billes de fer, les contraintes seront de toute façon beaucoup trop faibles pour pouvoir réagir avec elles.

2.6 Conclusion.

L'objectif de cette partie était de concevoir une expérimentation discriminante. La démarche associée à cet objectif se décompose en trois étapes, certes distinctes, mais qui doivent être réaliées dans cet ordre précis. La première étape consiste à construire une structure et à vérifier le comportement du champ magnétique dans celle-ci à l'aide de simulations paramétrables. Dans cette structure, un volume de test est introduit dans le but de servir de moyen de mesure pour discriminer les différentes formulations. La deuxième étape prend en charge l'étude des caractéristiques de ce matériau et il apparaît que l'objectif principal n'est vraiment atteint qu'à partir du moment où le matériau associé à ce volume de test possède des caractéristiques physiques peu communes. C'est pourquoi la dernière partie de ce chapitre a présenté une méthode qui conduit à l'obtention d'un tel matériau.

Chapitre 3

Expérimentations

Introduction

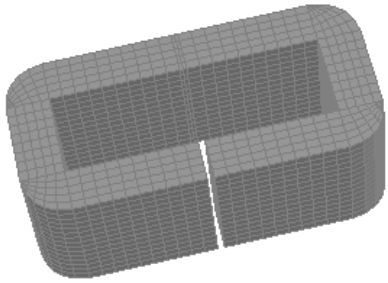
Les chapitres précédents ont conduit à définir des conditions d'expérimentation. Celles-ci imposent l'utilisation d'un matériau inhabituel, mou et de faible perméabilité relative. Les paragraphes qui suivent vont présenter l'aspect pratique de l'étude. Le matériau est réalisé, caractérisé et mis en situation. Il est de type composite, seul type susceptible de fournir les caractéristiques tant recherchées.

La première partie de ce chapitre est consacrée au moyen de mesures permettant d'obtenir la perméabilité relative ainsi que le module d'élasticité du matériau de test. Cette caractérisation du matériau est une première étape incontournable vis à vis de l'étude, car la modélisation par élément fini ne sera réellement utilisable qu'à partir du moment où ces deux paramètres sont connus. La deuxième partie est consacrée à la mesure du déplacement du volume de matériau test, suite à l'application du champ magnétique. Enfin le dernier paragraphe présente tous les résultats expérimentaux et en particulier permet la discrimination des formulations sur le calcul des forces d'origine magnétique.

3.1 Réalisation de la mesure de μ_r.

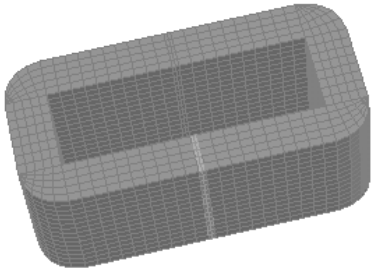
Dans cette partie, le dispositif expérimental mis en place pour mesurer la perméabilité relative du matériau μ_r est décrit. L'idée de base est de réaliser une comparaison par rapport à l'air et non de faire une mesure absolue. Les mesures par comparaison, par rapport à un élément de référence sont toujours plus précises que celles réalisées en absolu. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder la précision associée au GPS en mode absolu (30 m) et en mode différentiel (1 m) ou encore, de se souvenir du principe retenu pour la lecture d'une longueur sur un équipement de mesure de type pied à coulisse . Pour la réalisation de cette mesure

de perméabilité, un circuit magnétique utilisant des éléments de transformateur dont la perméabilité magnétique est infiniment grande devant la perméabilité de l'air $(\mu_r \cong 1000)$ a été fabriqué. Un faible entrefer (1.6 mm) est présent de manière à pouvoir introduire une éprouvette de matériau de test. Celui-ci est visible sur la figure 115.



$Fig - 115$

Cet entrefer est suffisamment important pour qu'une imprécision sur la perméabilité magnétique du fer ne change pas, de manière notable, la répartition spatiale du champ magnétique. C'est le matériau de test, visible dans l'entrefer [Fig-116], ou l'air, dans le cas où il est absent, qui conditionnera en grande partie l'intensité du champ magnétique. Comme le matériau de test ne doit pas présenter de perméabilité relative supérieure à 10, l'hypothèse liée à l'influence de la perméabilité du circuit magnétique sur l'intensité du champ magnétique ne sera pas remise en question lors des essais. Le comportement de cette structure se rapproche du comportement de la structure de test présenté au chapitre 2 où il avait été démontré que la perméabilité des matériaux ferromagnétiques utilisés, n'intervenait plus dans la connaissance du champ magnétique dans l'entrefer, à partir du moment où cette perméabilité dépassait $500 \times \mu_0$ [Fig-57].



$Fig - 116$

Autour de cette structure, deux bobines sont ajoutées et sont parcourues par un courant sinusoïdal de fréquence et d'amplitude, modifiables à volonté [Fig-117]. Toutefois l'essai réalisé avec un courant de $0.5\,A_{eff}$ et de fréquence 50 Hz constitue l'essai de référence, car le noyau magnétique, pour cette fréquence et pour ce courant, ne présente pas d'effets, liés à la saturation ou à l'hystérésis. Cette hypothèse peut être vérifiée expérimentalement par une méthode simple que les électriciens mettent en oeuvre pour mettre en évidence l'absence de déformation d'un signal sinusoïdal. Ils utilisent un oscilloscope, associent à l'une des deux voies le signal à vérifier, et à l'autre voie, une sinusoïde de référence ayant la même amplitude, la même fréquence et la même phase. La visualisation de la différence des deux signaux doit donner un signal de composante nulle.

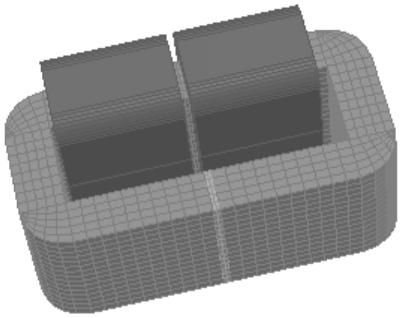
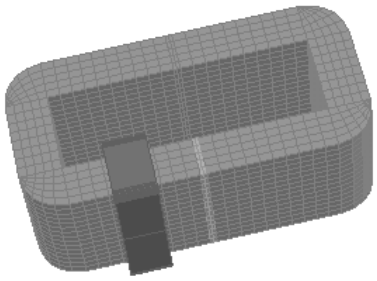


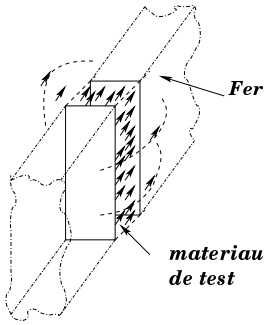
Fig – 117

La circulation de ce courant dans les bobines crée un champ magnétique variable dans le noyau magnétique. La grande perméabilité de ce noyau et son absence de saturation permet, dans un premier temps, de faire l'hypothèse que le flux, à l'intérieur de ce noyau, est constant. Toute bobine entourant le noyau magnétique est traversée par un flux, dont la valeur est proportionnelle à l'intensité du champ magnétique. Une bobine de détection est ajoutée à la structure [Fig-118] de manière à évaluer ce flux. Si la fréquence ainsi que l'intensité du courant sont maintenues constantes dans les bobines de génération, alors, par l'intermédiaire de cette bobine, une information sur le flux en présence ou en l'absence du matériau de test est obtenue en application directe de la loi de Faraday [6, FEYMAN R.P. - 1992]. La force électromotrice induite dans la bobine de détection sera fonction de la perméabilité relative du matériau de test dans l'entrefer. Les seules hypothèses qui sont à introduire ne concernent que le comportement linéaire des matériaux et il n'est pas nécessaire d'introduire une hypothèse réductrice : imposer une relation linéaire entre la perméabilité du matériau à tester et la différence de potentiel délivrée par la bobine de détection par exemple.

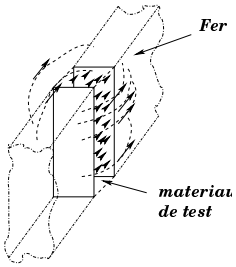


$Fig-118$

Cette dernière hypothèse est d'ailleurs irréaliste. L'information, telle que la valeur efficace de la fem engendrée aux bornes de la bobine de détection, ne peut pas être liée linéairement à la perméabilité magnétique relative du matériau de test. En effet, les simulations associées à ce système de mesure montrent que pour de faibles valeurs de perméabilité relative, une partie non négligeable du flux peut passer dans l'air au voisinage de l'entrefer. Cet effet est schématisé au moyen des illustrations [Fig-119] et [Fig-120]. Dans la figure 119, le matériau a une perméabilité relative éloignée de l'unité. Le champ magnétique, peut passer facilement à l'intérieur du matériau de test, et de ce fait l'intensité du champ magnétique dans l'air reste faible.



$Fig-119$

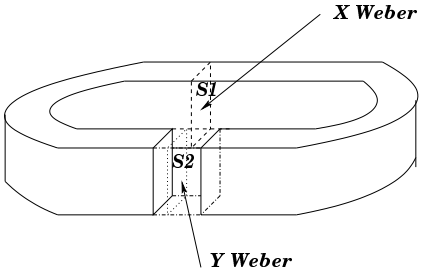


$Fig-120$

Par contre, pour la figure 120, le matériau a une perméabilité proche de l'unité. Le champ magnétique passe aussi facilement dans l'air que dans le matériau de test, une partie du flux est détournée dans l'air et l'intensité du champ magnétique dans le matériau de test diminue.

Donc pour un matériau de test de faible perméabilité, le flux dans ce matériau ne peut pas être égal au flux dans une section du circuit magnétique. Le flux traversant la section S1 appartenant au circuit magnétique n'est en aucun cas égal au flux traversant la section S2 se situant dans l'entrefer ($X \neq Y$) [Fig-121]. Le

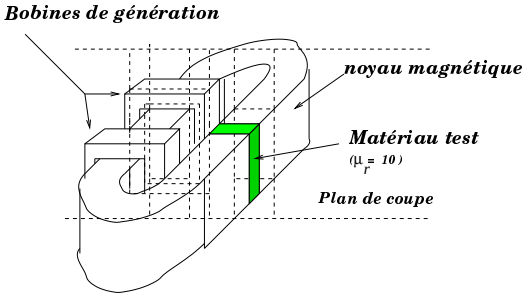
flux dans l'air n'est pas négligeable. Ce flux, qui est dépendant de la valeur de la perméabilité relative du matériau de test n'est pas inversement proportionnel à la perméabilité relative du matériau de test. En d'autres termes, un facteur 2 appliqué à la perméabilité relative du matériau de test, ne se retrouvera pas au niveau du flux passant dans le noyau magnétique. Il est, de ce fait, inutile d'espérer qu'une augmentation d'un facteur 2 de la perméabilité relative se traduise par une augmentation d'un facteur 2 de l'induction magnétique au niveau de la bobine de détection. Il est impératif d'utiliser des simulations numériques tridimensionnelles pour connaître précisément la circulation du champ magnétique et en déduire une relation entre la perméabilité relative du matériau à tester et la différence de potentiel au niveau de la bobine de détection.



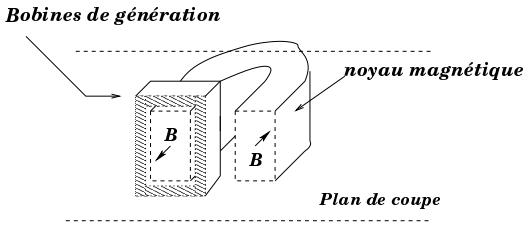
$Fig - 121$

De manière à bien visualiser ce phénomène sur la structure liée à la mesure de la perméabilité magnétique, deux simulations utilisant deux valeurs pour la perméabilité relative du matériau ont été réalisées ($\mu_r = 10$ et $\mu_r = 2$).

Deux plans de coupe sont définis. Le premier plan, visible sur la figure 122.a, est perpendiculaire au circuit magnétique et passe par le milieu d'une des deux bobines de génération. Il permet de visualiser l'induction magnétique dans deux portions adjacentes du circuit magnétique [Fig-122.b].



$Fig - 122.a$



$Fig - 122.b$

La figure 122.b fait apparaître le plan de coupe et les deux sections de circuit magnétique. En visualisant l'évolution de la composante normale de l'in-

duction magnétique par rapport à ce plan [Fig-123], il en résulte immédiatement l'absence d'induction magnétique dans l'air avoisinant. L'induction magnétique n'existe que dans le circuit magnétique.

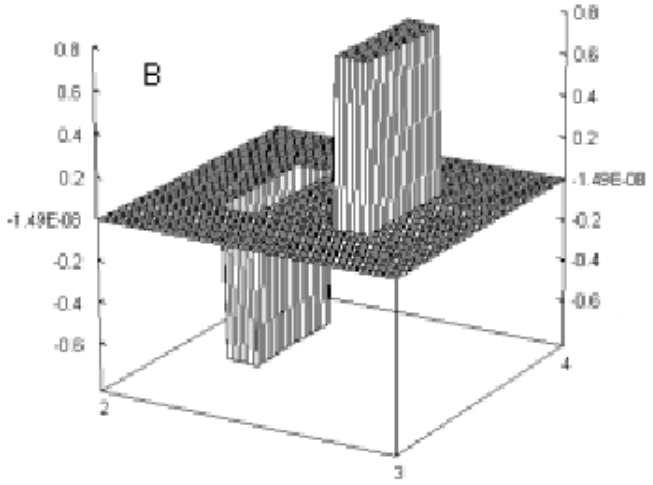


Fig – 123

Toutefois, ce graphique ne donne qu'une image qualitative sur la circulation du flux. La simulation permet d'avoir une idée beaucoup plus précise du flux circulant dans l'air. Une légère diminution du flux se remarque à la figure 124.

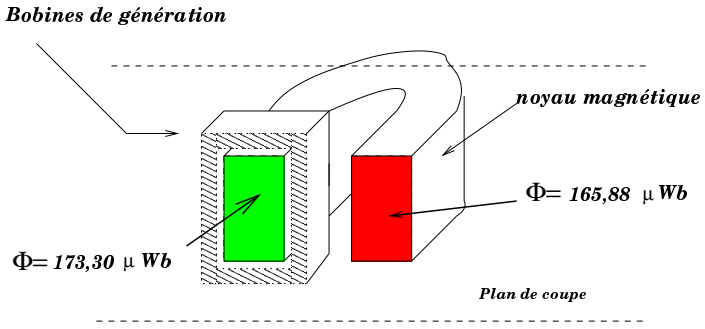


Fig – 124

Par contre, si un autre plan de coupe est utilisé, comme celui présenté à la figure 125.a, l'évolution du champ magnétique dans l'entrefer sera prise en compte [Fig-125.b]. Ce plan passe par le milieu de la structure et est toujours orthogonal au circuit magnétique.

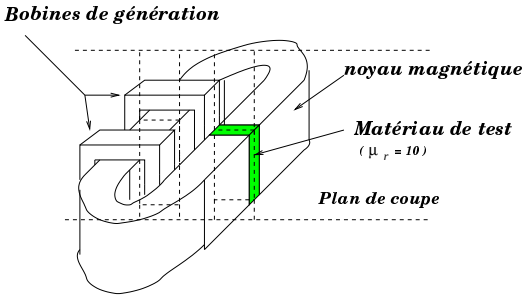


Fig – 125.*a*

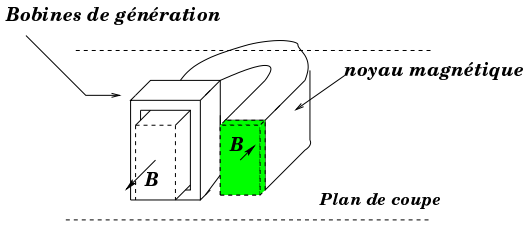


Fig – 125.*b*

L'évolution de la composante, normale à ce plan, de l'induction magnétique a été visualisée à la figure 126.

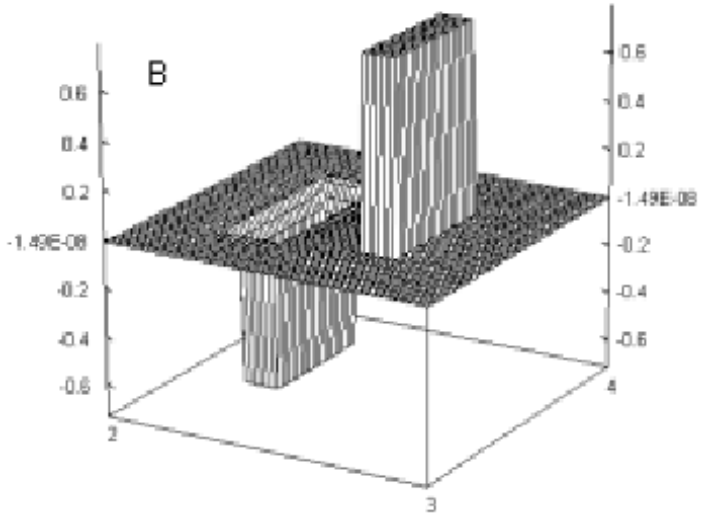


Fig – 126

La figure 126 montre immédiatement que la perméabilité magnétique relative de 10 pour le matériau de test est suffisante pour éviter la dispersion de l'induction magnétique. Toutefois, une légère diminution de l'intensité est à remarquer. La perte de 0.1 Tesla pour l'induction magnétique dans l'entrefer impose l'existence d'un flux dans l'air au voisinage de l'entrefer.

Ce flux dans l'air s'accroît d'une manière indiscutable dès que l'entrefer est chargé par un matériau de perméabilité relative encore plus faible ($\mu_r = 2$). Deux plans de coupe vont être utilisés. Le premier contient deux sections différentes du noyau magnétique et sera utilisé pour visualiser la composante normale de l'induction magnétique par rapport à ce plan [Fig-127.a et Fig-127.b].

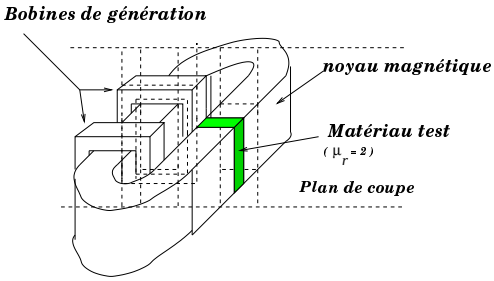


Fig – 127.*a*

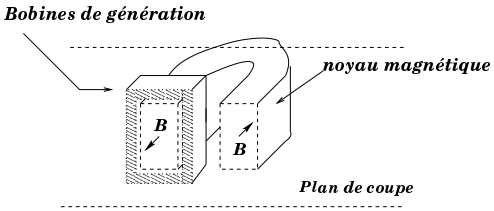


Fig – 127.*b*

A partir du plan de coupe présenté à la figure 127.b, il est possible de visualiser l'évolution de la composante normale de l'induction magnétique par rapport à ce plan [Fig-128].

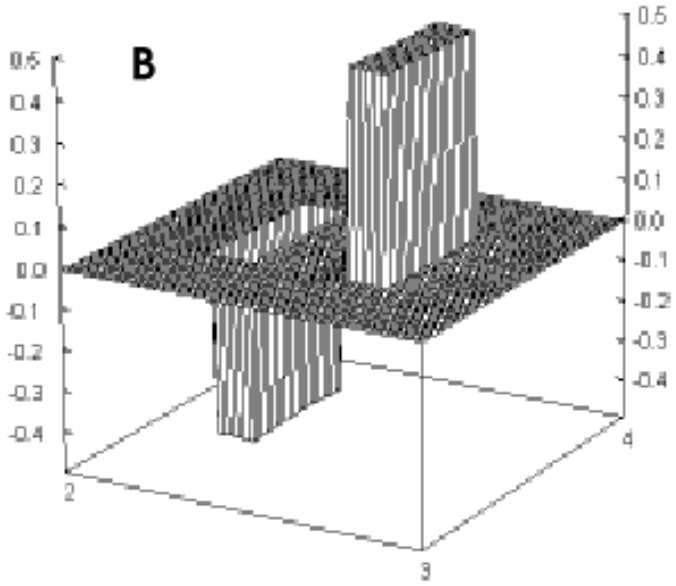


Fig – 128

Bien qu'il soit indiscutable que le flux magnétique est majoritairement dans le circuit magnétique, l'inégalité des amplitudes est nettement visible et rend obligatoire l'existence de flux dans l'air entourant le circuit magnétique [Fig-128]. Ce flux n'était pas visible sur la figure 123 et seule, la simulation le mettait en évidence [Fig-124]. Pour cette configuration, la simulation permet encore une fois de mieux quantifier ce flux dans l'air [Fig-129].

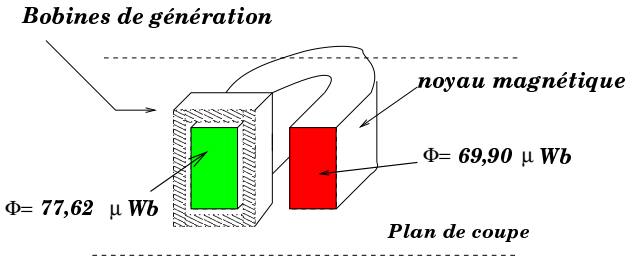


Fig – 129

En utilisant un second plan de coupe, passant par l'entrefer comme cela est proposé à la figure 130.a, il est possible d'évaluer les conséquences d'une telle diminution de la perméabilité relative du matériau de test.

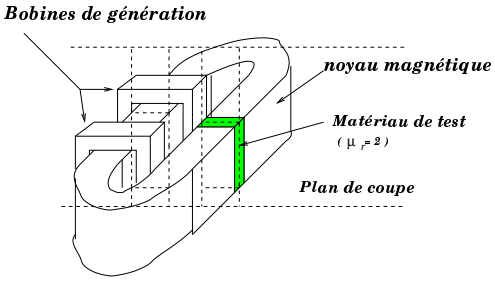


Fig – 130.*a*

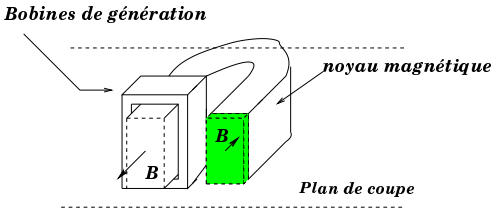


Fig – 130.*b*

A partir du plan de coupe présenté à la figure 130.b, il est possible de visualiser l'évolution de la composante normale de l'induction magnétique par rapport à ce plan [Fig-131].

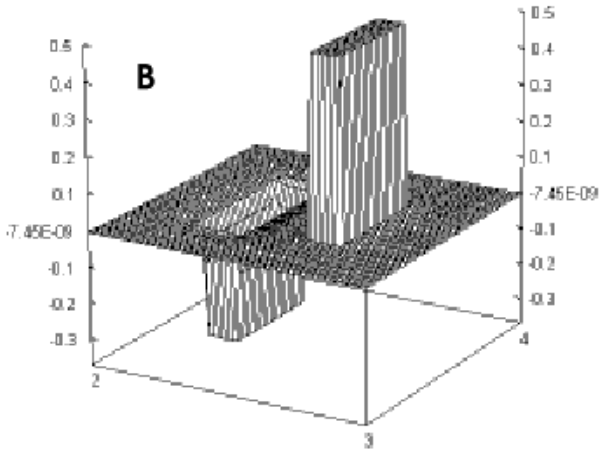


Fig – 131

Il apparaît sur la figure 131, d'une part une diminution importante de l'amplitude de l'induction magnétique dans l'entrefer, et d'autre part, qu'au voisinage immédiat de cet entrefer, une composante non négligeable du champ magnétique, existe dans l'air.

La diminution du flux magnétique, qui passe de 165 μW à 70 μW, est bien provoquée par la diminution de la perméabilité relative du matériau à tester. Il est à remarquer qu'elle n'est pas d'un facteur 5 alors que la perméabilité relative a été divisée par 5. D'autre part, une autre diminution d'intensité apparaît entre les deux branches du circuit magnétique ; près de 30% du champ magnétique passera dans l'air, entourant l'entrefer, de manière à garder constant le flux pour un matériau ayant un μ_r de 2 ($\int_S \vec{B}.\vec{ds} = cste$). Il est clair que, pour de faibles valeurs de perméabilité relative pour le matériau de test, le système de mesure a un comportement qui est loin d'être linéaire et c'est le domaine dans lequel il va être utilisé. Le flux dans l'air au niveau du premier plan de coupe est relativement faible et constant. Il est de 7.72 μWb pour un matériau de test de perméabilité relative de 2 et de 7.42 μWb pour un matériau ayant un μ_r de 10. Toutefois, cette quantité ne sera négligeable que si le flux dans le circuit magnétique est très grand devant cette valeur. Des simulations, réalisées pour plusieurs valeurs de perméabilité relative, sont donc utilisées comme références pour construire une courbe d'étalonnage représentative du fonctionnement du système de mesure.

Pour faciliter l'exploitation expérimentale, une courbe qui donne la valeur de μ_r en fonction des tensions relevées au niveau de la bobine de détection est construite. 10 simulations sont ainsi réalisées pour des valeurs de perméabilité relative variant de 1. à 10. Pour chaque simulation, le flux passant au travers de la bobine de détection a été calculé et comparé au même flux, obtenu avec un matériau dont la perméabilité relative n'était que de 1 (de l'air). Ces résultats ont permis de construire le graphique associé à la figure 132.

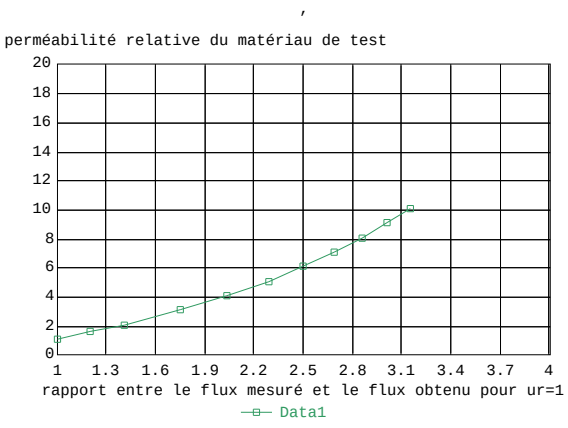


Fig – 132

Ce graphique permet de connaître la perméabilité relative du matériau à partir du moment où deux mesures sont réalisées. La première est la mesure de la ddp aux bornes de la bobine de détection, pour un entrefer ne contenant que de l'air, et la deuxième est cette même mesure, pour un entrefer contenant le matériau à tester. Si le courant parcourant les deux bobines de génération du champ magnétique est maintenu constant, alors le rapport entre ces deux tensions est le point d'entrée de la courbe d'étalonnage (Fig-132). En reportant sur l'axe vertical le point d'intersection entre la courbe d'étalonnage et le rapport des deux tensions, il apparaît la valeur de la perméabilité relative du matériau.

Si le graphique précédent permet de déduire la perméabilité relative du matériau de test, rien ne permet d'évaluer la précision de cette mesure puisque la courbe d'étalonnage est issue de la simulation. Aucun facteur n'a été pris en compte comme, par exemple, les imprécisions liées à la géométrie du système. Une autre étape est donc nécessaire : la recherche de la précision du procédé.

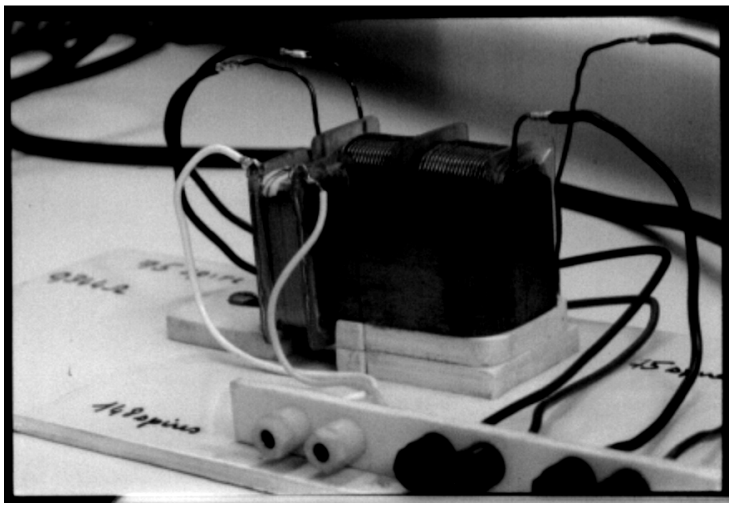
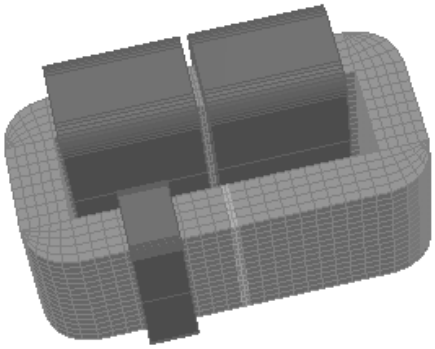


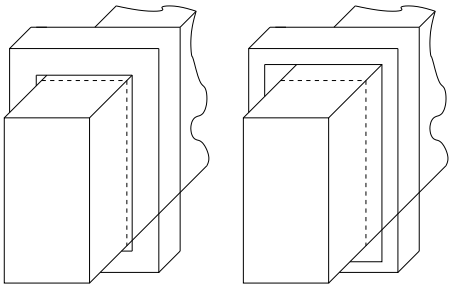
Fig – 133

La figure 133 présente le système réel. La bobine de détection, équipée des fils blancs, est un élément réalisé en interne qui possède des caractéristiques géométriques imparfaites. Comme c'est elle qui va donner l'information sur le flux circulant dans le circuit magnétique, c'est l'un des éléments qui est le plus critique, car sa position, ainsi que sa forme, conditionnent directement la ddp mesurée à ces bornes. Une modélisation de ce procédé se réduit à la figure-134, où un noyau magnétique présentant un entrefer de 1.6 mm, est entouré par deux bobines de 75 spires chacune, parcourues par un courant sinusoïdal de 0.5 A. L'autre bras du circuit magnétique supporte la bobine de détection (148 spires) donnant une image du flux circulant dans l'entrefer sous forme d'une différence de potentiel.



$Fig-134$

Pour obtenir une estimation de l'erreur de mesure du flux traversant la bobine de détection, deux simulations sont réalisées en utilisant deux situations jugées extrêmes. La première part du principe, que la bobine de détection est très proche du noyau $(1\,mm)$ [Fig-135] et la deuxième, qu'elle est éloignée du noyau magnétique $(3\,mm)$ [Fig-136].



$Fig-135$ $Fig-136$

En calculant le flux à l'intérieur de la bobine de détection pour ces deux géométries possibles, il apparaît que l'erreur sur le flux ne dépassera pas 2%, En conséquence, la courbe d'étalonnage ne sera pas remise en cause par les imprécisions liées à la réalisation de cette bobine. Ce moyen d'essai a montré qu'il présentait de bonnes caractéristiques répétitives comme le prouve le rapport d'essai en annexe 4.6.

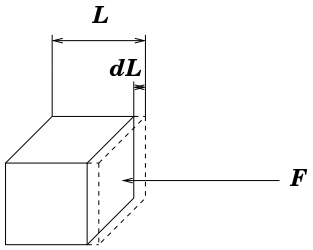
3.2 Mesure du coefficient d'élasticité longitudinale.

Rappel sur les propriétés mécaniques des matériaux.

En 1936, S.TIMOSHENKO[1] commence sa présentation de la théorie de l'élasticité en se limitant aux matériaux ayant des lois de comportement linéaire [11, TIMOSHENKO S.-1936]. C'est à dire : les déformations engendrées par les efforts sur ces matériaux seront proportionnelles à ces efforts. Cela a conduit très tôt à rechercher une grandeur dont la connaissance serait suffisante pour prédire l'évolution de tout type de volume ou structure, face à une ou plusieurs forces extérieures. Cette grandeur, apparaît dans la loi de comportement, connue sous le nom de loi de HOOKE. Cette loi relie des grandeurs issues des forces extérieures aux grandeurs associées à la géométrie du volume ou de la structure (3.1).

$$\sigma = E\,\varepsilon \qquad (3.1)$$

σ est la contrainte mécanique appliquée à un élément de volume élémentaire, ε la déformation dans la direction de la contrainte et E le module d'élasticité longitudinale. La figure 137 permet de mieux expliciter cette équation. Pour un volume élémentaire il est possible de faire apparaître : un lien entre la géométrie et la déformation (3.2), et un lien entre la force extérieure et la contrainte (3.3). Il faut noter que cette relation est bijective. A un déplacement correspond une contrainte unique et inversement.



$Fig-137$

$$\varepsilon = dL/L \qquad (3.2)$$
$$\sigma = F/section\,du\,cube \qquad (3.3)$$

L'aspect unidimensionnel, qui est utilisé pour cette interprétation, est suffisant pour comprendre le principe de l'élasticité mais ne permet pas de résoudre un

[1]S.TIMOSHENKO, Professeur de mécanique à l'université du Michigan en 1936 puis à l'université de Stanford en 1939

grand nombre de problèmes. Il faut pour cela introduire une approche tridimensionnelle où une interprétation de type tensorielle est utilisée. Ce concept, que l'on rencontre dès les premières pages d'ouvrages contemporains comme celui de L.LANDAU [8, LANDAU L.-1990], est beaucoup plus général mais reste plus difficile à appréhender, dès qu'un aspect très pratique est recherché.

En quelques lignes, en voici le principe : en un point P, trois plans sont définis et vont servir de support pour les contraintes selon les trois directions [Fig-138].

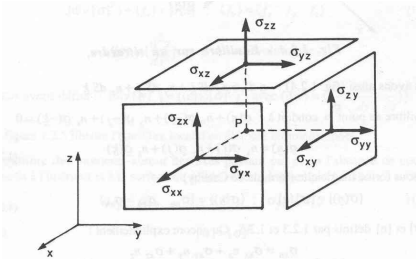


Fig – 138

Par exemple, pour le plan parallèle au plan xy, il est possible de construire les différentes contraintes associées. Il suffit de connaître la normale à ce plan $\overrightarrow{n}$, de composantes n_x ,n_y ,n_z dans un repère orthonormé X,Y,Z ainsi que le tenseur des contraintes associé noté $\left(\widetilde{T}\right)$ et d'appliquer la formulation présentée en (3.4).

$$\left\{\begin{array}{l}\tau_x\\ \tau_y\\ \tau_z\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{lll}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{array}\right\} . \left\{\begin{array}{l}n_x\\ n_y\\ n_z\end{array}\right. \quad ou\ \overrightarrow{\tau} = \widetilde{T}.\overrightarrow{n} \qquad (3.4)$$

Cette présentation, abordée dans le chapitre 1 lors de l'introduction du tenseur de Maxwell, permet de définir localement les contraintes en un point et selon une direction. Les composantes τ_x ,τ_y sont les composantes dites contraintes de cisaillement et la composante τ_z est la composante dite contrainte de traction ou de compression vis à vis de cette surface car $n_x = n_y = 0$ et $n_z = 1$. Il apparaît immédiatement qu'en un point P, les contraintes dépendent du plan associé à l'observation. Cette remarque, associée à la notation tensorielle, semble très éloignée de la réalité et pourtant l'utilisation de cette théorie prédit la fracture d'un solide sous un angle de 45° lors d'une compression excessive et cette valeur est expérimentalement vérifiée [11, TIMOSHENKO S.-1936].

Cette mise en équation est rigoureuse, c'est par exemple celle qui est utilisée pour la résolution par éléments finis des problèmes mécaniques [16, DHATT G.-1984]. Cependant, la première approche unidimensionnelle reste à la base des essais de caractérisation des matériaux.

Critères à respecter pour une bonne estimation des propriétés mécaniques.

Pour mettre au point une procédure de test permettant de mesurer le module d'élasticité, il suffit de s'inspirer des procédures de caractérisation des matériaux. Des exemples, mettant en évidence l'ingéniosité des expérimentateurs, sont présents dans des ouvrages comme ceux traitant de la résistance des matériaux [10, FEODOSSIEW V.-1971]. Ces procédures ne demandent pas un équipement très important mais imposent des conditions de réalisation strictes, sous peine d'obtenir des erreurs de caractérisation.

L'essai de compression ou de traction simple est l'essai de prédilection pour mesurer le coefficient d'élasticité longitudinale. Il doit être mené en respectant certaines règles. Ces règles ne sont absolument pas dictées par une quelconque théorie, mais proviennent des remarques avisées des expérimentateurs. Ces remarques furent, par la suite, intégrées dans les procédures d'essai, de manière à rendre les résultats reproductibles [10, FEODOSSIEW V.-1971].

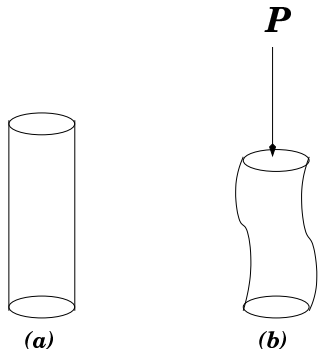


Fig – 139

– **Règle-1 : Faible hauteur de l'éprouvette par rapport à sa largeur.**

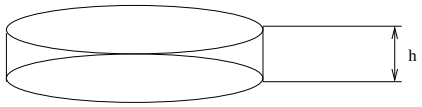
En effet, une éprouvette de faible section par rapport à sa hauteur, présentera un comportement de flambement, totalement incompatible avec l'hypothèse de compression simple. Il apparaît très vite qu'une telle éprouvette [Fig-139.a] sous charge (P) a un mouvement complexe de compression, accompagné d'une torsion, comme le montre la figure 139.b... Il ne faut pas en déduire que la hauteur de l'éprouvette doit être la plus petite possible sous peine de ne pas pouvoir assurer les autres conditions suivantes.

– **Règle-2 : Section réduite pour avoir une répartition uniforme de la contrainte de compression et absence de tout autre contrainte.**

L'éprouvette est placée entre deux plaques parallèles parfaitement planes. Cette condition assure normalement une répartition uniforme de la contrainte de compression. Ce résultat ne sera obtenu que si l'éprouvette ne modifie pas sa surface

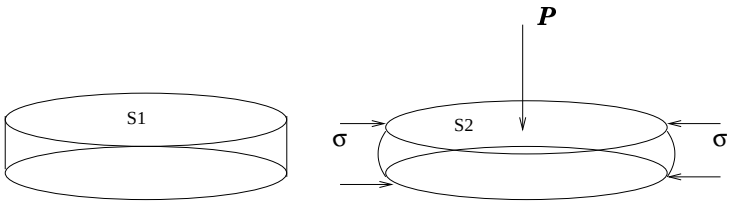
de contact avec les deux plaques. En utilisant une éprouvette de très faible hauteur, les conditions de mesure sont peu avantageuses et des contraintes supplémentaires, liées au contact avec les deux plaques, apparaissent.

Ces deux difficultés sont explicitées dans les exemples suivants :



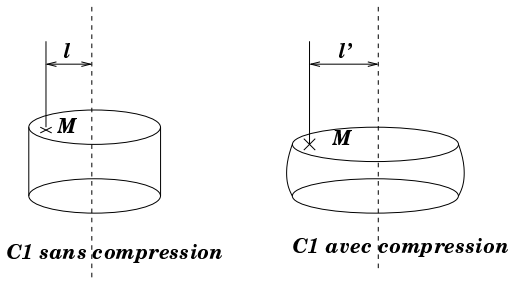
$Fig-140$

L'éprouvette présentée à la figure 140 possède une section très importante vis à vis de sa hauteur. L'application d'une charge de compression n'engendrera qu'une très faible variation de h qui sera de ce fait difficile à mesurer.



$Fig-141.a$ $Fig-141.b$

Cette compression (P) s'accompagne aussi d'une augmentation de volume [Fig-141.a et Fig-141.b]. En raison de la faible épaisseur de l'éprouvette, un gonflement issu de la conservation du volume est immédiatement observé. Toutefois, cette modification de la géométrie induira des contraintes σ au niveau des surfaces de contact, car aucun glissement n'est à priori autorisé.



$Fig-142$

La figure 142 montre qu'un point M voit sa position évoluer lors d'une compression importante du cylindre C1. Même si la variation de distance entre l et l'

est faible, elle est suffisante pour créer des contraintes horizontales indésirables. Ce sont des contraintes de cisaillement.

Un autre phénomène peut apparaître, si les surfaces de contact ne sont pas parfaitement parallèles, c'est l'hétérogénéité des contraintes de compression. En effet si l'éprouvette ne présente pas deux surfaces parallèles, les contraintes de compression apparaîtront en premier du côté de plus forte épaisseur. Cette condition de parallélisme sera plus difficile à réaliser si la surface de l'éprouvette est grande par rapport à la hauteur. C'est pourquoi il est souhaitable de se limiter à quelques cm^2.

En conclusion, les éprouvettes de compression utilisées doivent présenter la caractéristique suivante : la hauteur est deux fois plus petite que le diamètre. Et le respect de cette règle évite des erreurs expérimentales. Cette règle est d'ailleurs celle utilisée pour la caractérisation des aciers. Pour s'affranchir des problèmes de géométrie des surfaces de contact, une méthode admise est d'appliquer une charge initiale suffisante pour assurer un contact complet au niveau des surfaces.

– **Règle-3 : Faible déformation.**

Une déformation importante peut remettre en cause l'estimation de la contrainte de compression appliquée à un élément de surface élémentaire. Pour évaluer cette contrainte, il suffit de calculer la pression que subit l'éprouvette sur l'une de ces deux faces en contact. Une formulation extrêmement simple est utilisée : la pression est égale à la force appliquée, divisée par la surface en contact et cette pression est la valeur de la contrainte de compression. Cette formule part du principe que la surface de l'éprouvette n'est pas modifiée, ou alors trop peu, pour remettre en cause l'expérience. La propriété n'est vérifiée que pour des déplacements très faibles. Pour des déplacements importants, il est évident que la surface en contact ne peut plus être considérée comme constante. Il n'est plus possible d'estimer correctement la pression à la surface de contact et un risque non négligeable de ne plus être dans le domaine élastique, existe.

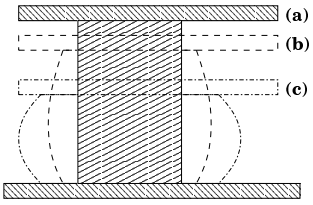


Fig – 143

En regardant la figure 143, plusieurs géométries associées à l'éprouvette sont présentées. Il apparaît en trait discontinu deux états de l'éprouvette pour des compressions croissantes (b et c). En particulier, une variation non négligeable de la

surface de contact existe pour chacun des états présentés. La règle retenue est de limiter à moins de 1/10 mm le déplacement pour une hauteur d'éprouvette de 10 mm. C'est à dire une compression de 1%.

– **Règle-4 : Assurer une liberté de mouvement aux surfaces en contact avec l'éprouvette.**

Cette condition est difficile à prendre en compte car ses effets ne peuvent apparaître que dans des situations particulières d'essai. En examinant une machine de compression utilisée pour identifier le module d'élasticité longitudinal, il apparaît que les éprouvettes sont mises en place entre deux plateaux parallèles et même si le parallélisme des deux plateaux est assuré, l'un des deux plateaux, en général le plateau inférieur, a la possibilité de se déplacer dans le plan horizontal. Cette caractéristique permet de garantir l'absence de contrainte tangentielle au niveau de l'essai. En l'absence de contrainte tangentielle, l'éprouvette se brisera suivant une droite à 45° dès qu'elle arrivera à sa limite de rupture, comme le prédit la théorie [10, FEODOSSIEW V.-1971].

C'est le cas de la première éprouvette (a) présentée à la figure 144. Par contre, si des contraintes tangentielles apparaissent en cours d'essai, même si cette éprouvette se brise encore selon des droites à 45°, celles-ci changeront plusieurs fois d'orientation et en fin d'essai, l'éprouvette prendra une forme bi-conique, comme la deuxième éprouvette (b) ou se fissurera suivant sa longueur comme la dernière éprouvette (c).

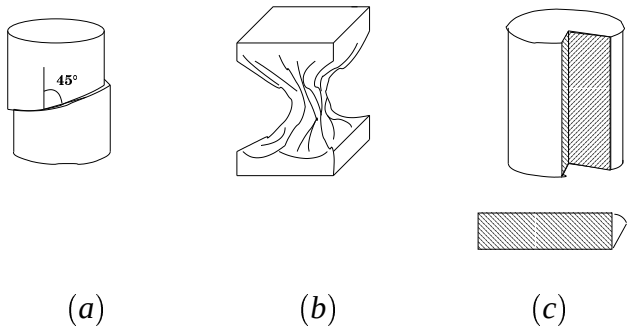


Fig – 144

Tous les éléments qui ont été présentés permettent de mieux appréhender les difficultés qui sont associées à la mesure du coefficient d'élasticité. Comme les essais se font sur des matériaux de très faible coefficient d'élasticité, il est inutile d'espérer utiliser les équipements d'essai couramment rencontrés en mécanique. Toutefois, les principes de base ainsi que les précautions à prendre restent valides et sont tout à fait applicables pour concevoir le banc de test.

Conception du banc de mesure du module d'élasticité longitudinale

Les critères à respecter ne sont pas très nombreux et se réduisent aux critères suivants :

– **Parallélisme des plateaux.**

Comme cela a été dit précédemment, l'essai de compression impose l'utilisation de plateaux parallèles, dont un est libre dans un plan horizontal. Pour répondre à cet impératif, le fait que les déplacements sont de très faibles amplitudes est un élément important et permet d'assimiler la structure présentée à la figure 145 comme similaire à celle d'une presse ayant un déplacement vertical.

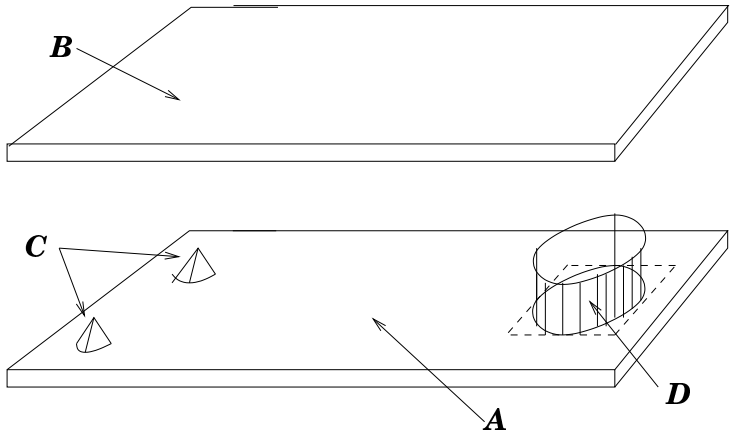


Fig – 145

Le moyen d'essai présenté à la figure 145 est constitué d'un plateau horizontal (A). Ce plateau supporte deux plots (C) de hauteur identique dont les extrémités en contact avec le plateau (B) sont de surface très réduite. Enfin une éprouvette (D) de hauteur similaire aux deux plots est positionnée à l'autre extrémité du plateau (A). Si l'éprouvette de compression est placée à une distance suffisamment grande de l'axe de rotation réalisé par les plots (C), le déplacement au niveau de l'éprouvette peut être assimilé à un déplacement purement vertical.

Ce qui conduit à la procédure d'essai suivante [Fig-146] : le déplacement au niveau de l'éprouvette est mesuré à l'aide d'un équipement adapté (C), et la charge utilisée pour contraindre cette éprouvette (A) est réalisée au moyen d'un récipient (B) contenant un liquide de densité connue. Comme il est très facile de doser le volume avec une grande précision, la charge sera aussi connue avec une grande précision.

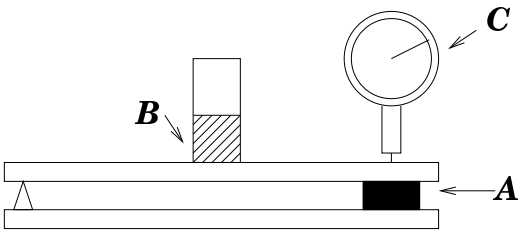


Fig – 146

Le déplacement est limité à 1/10 mm et la hauteur de l'éprouvette est égale à la hauteur des plots (14mm), la condition de parallélisme est de ce fait assurée. Par contre, la liberté de déplacement d'un des plateaux par rapport à l'autre n'est pas assurée. Toutefois, le très faible coefficient d'élasticité attendu, ne rend pas impératif le respect de cette condition.

– **Absence de perturbation apportée par la mesure du déplacement.**
Pour cet objectif, certains équipements de mesure utilisés en mécanique sont tout à fait adaptés. Les pieds à coulisse numérique donnent sans peine le 1/100 de mm ainsi que les comparateurs à cadran [Fig-147].

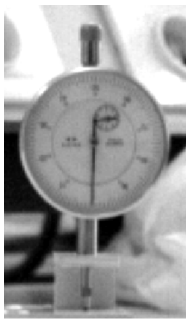


Fig – 147

La précision du 1/100 mm ne sera réellement atteinte qu'avec un équipement où le facteur humain n'intervient que très peu au niveau de la mesure. Le pied à coulisse est à proscrire pour ce type de mesure car le positionnement résulte d'un déplacement réalisé par l'utilisateur et, compte tenu de la matière, il est impossible de garantir un contact, sans introduire de contraintes aléatoires. Par contre, le comparateur à cadran fut conçu, à l'origine, pour exercer une légère force de pression sur le solide à mesurer, et celle-ci est indépendante de la mesure. Dans ce cas, le facteur humain disparaît car l'opérateur n'intervient plus dans la mesure en elle-même. Cette légère pression peut même être mise à profit pour minimiser l'influence des imperfections géométriques de l'éprouvette. En effet celle-ci peut

très bien ne pas présenter des surfaces parallèles ou planes et il est hors de question d'effectuer un usinage sur ce type de matériau. En assurant une charge minimale qui place le système dans des conditions nominales de mesure, le contact est suffisant pour garantir une réponse linéaire du matériau sous charge. Cette précharge, si elle est insuffisante pour garantir un contact parfait, apparaîtra immédiatement dans les enregistrements et permettra de dévalider l'essai. Par exemple : un enregistrement présentant deux parties distinctes, deux pentes différentes, montre que le contact n'est pas complet [Fig-148].

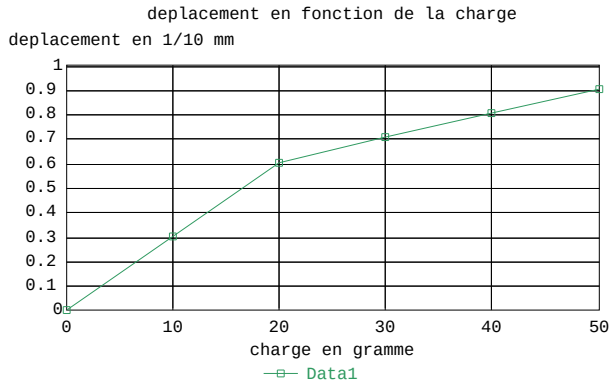


Fig – 148

Typiquement, cet essai est réalisé avec une précontrainte trop faible, la pente diminue avec la charge, ce qui veut dire que la surface de contact augmente. Inversement, un essai avec une précontrainte trop forte donne une pente qui augmente avec la charge, une déformation plastique peut même apparaître. La précontrainte est obligatoire et son intensité doit être déterminée expérimentalement. Heureusement, comme seule l'analyse de la déformation en fonction de l'augmentation de la charge est réalisée, la valeur de la précontrainte n'a aucune influence sur le résultat final. Les seules erreurs de types "erreurs systématiques" sont en fait induites par des phénomènes qui doivent avoir des effets linéaires par rapport aux déplacements. En d'autres termes, ce sont les effets liés à l'élasticité des autres matériaux. Comme ceux-ci sont infiniment plus rigides que le matériau de test, ces effets sont négligeables.

Conclusion sur la précision de la mesure pour les caractéristiques du matériau.

Le moyen d'essai mis en oeuvre pour la mesure de la perméabilité est associé très tôt à des simulations. Celles-ci permettent de rejeter un grand nombre d'incertitudes de mesure pour la perméabilité relative. En particulier, ces simulations

sont réalisées sans hypothèse sur la circulation du champ magnétique : les fuites ne sont pas omises. Les effets de la saturation, ou de l'absence de connaissance précise de la perméabilité relative des tôles utilisées ne sont pas préjudiciables. Les simulations ou les expériences réalisées montrent leur inexistence. Par contre, le moyen d'essai utilisé pour mesurer le coefficient d'élasticité ne présente pas de telles caractéristiques. Ce type de système n'a pas conduit à une simulation numérique. Cette simulation ne s'imposait pas, car des phénomènes similaires aux fuites de champ magnétique dans l'air, ne se rencontrent pas en mécanique du solide. Par contre, la trop grande simplicité du système conduit à reporter toutes les difficultés au niveau du mode opératoire. L'absence de contrainte tangentielle, la planéité des surfaces en contact de l'éprouvette, le parallélisme des plateaux.... ne sont réellement vérifiés qu'au travers des résultats obtenus par l'intermédiaire d'un nombre important de tests. Il est hors de question de réaliser un nombre infiniment grand d'essais, la matière n'y résisterait pas !... Par contre, il est tout à fait possible de déterminer expérimentalement le nombre d'essais à réaliser pour atteindre une précision acceptable (une précision de l'ordre de 10% est raisonnable). Un essai réalisé sur un matériau test sans poudre de fer (moins fragile) montre qu'avec moins de 7 séries de mesures, il est tout à fait possible d'obtenir le coefficient d'élasticité à 10 %. Cet aspect pratique est abordé de façon complète dans le paragraphe 3.4 dédié aux expérimentations.

3.3 Mesure du déplacement.

Soumise à un ensemble de forces extérieures, comme celles d'origine magnétique, la structure de test va se déformer. Cette déformation, d'après la théorie de l'élasticité, ne peut correspondre qu'à une seule répartition de forces. En mesurant le déplacement en tout point de la structure et en le comparant à celui calculé, il est donc tout à fait possible de comparer efficacement les différentes formulations de la force d'origine magnétique. Comme il est impossible de réaliser un nombre infini de mesures de déplacement, il faut simplifier le problème. Par l'intermédiaire des simulations, il apparaît que le déplacement des arrêtes supérieures n'est jamais le même suivant la méthode utilisée pour calculer les forces d'origine magnétique. Ainsi le seul déplacement qui sera pris en compte au niveau expérimental est celui présenté à la figure 149.

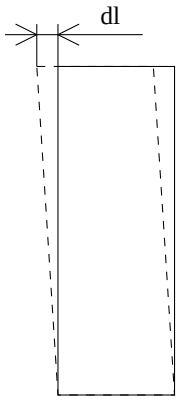


Fig – 149

Il faut rechercher une méthode permettant de mesurer ce déplacement *dl* avec la meilleure précision possible et surtout sans perturber le banc d'essai. La présence d'un champ magnétique, qu'il ne faut en aucun cas perturber, interdit l'utilisation d'équipement comportant des pièces autres que des pièces amagnétiques. La nature du matériau de test, son très faible module d'élasticité, n'encouragent pas à réaliser une mesure par contact.

Les méthodes de mesure.

Pour les mesures de distance, les industriels ont développé deux types de capteur, les capteurs avec et sans contact. Le principe de fonctionnement d'un capteur sans contact est d'utiliser un support immatériel (un faisceau lumineux par exemple) pour obtenir une information sur la position d'un élément de surface réfléchissante. Bien que ce principe soit le seul principe qui puisse être utilisé, il n'est pas possible d'utiliser ce type de capteur dans le montage expérimental. Le montage de la surface réfléchissante sera très difficile à réaliser si cette surface doit être en permanence orthogonale au faisceau lumineux. L'absence de contact associée à cette méthode de mesure reste toutefois intéressante. Comme il n'existe pas industriellement de capteur permettant de réaliser la mesure demandée, une méthode adaptée doit être imaginée.

La méthode utilisée pour la mesure devra satisfaire aux conditions suivantes :
- Utiliser un support immatériel (mesure sans contact).
- ne pas imposer des conditions géométriques strictes vis à vis de la structure de test.

Vis à vis de ces critères, l'idée du faisceau lumineux est conservée mais il n'est pas envisageable de monter un équipement supplémentaire sur le matériau de test.

Il va imposer des contraintes géométriques dans son fonctionnement. En regardant la géométrie du banc de test [Fig-150], il apparaît que la direction donnée par l'axe z est la seule direction selon laquelle le faisceau laser peut être émis.

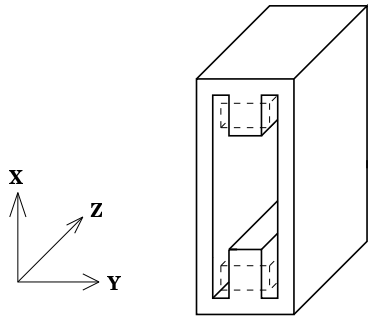


Fig – 150

Comme la connaissance du déplacement de l'arête supérieure est la seule information requise, il suffit de l'orienter sur cette position [Fig-151].

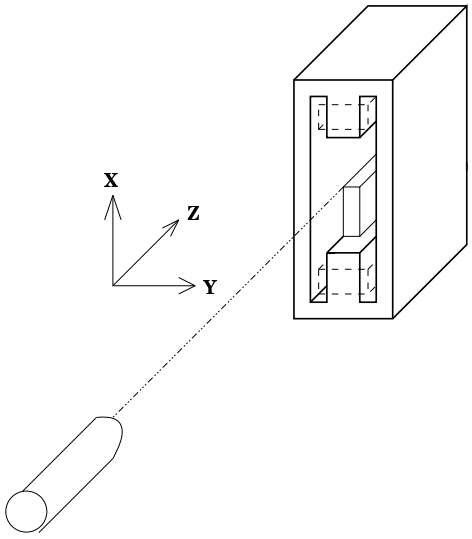


Fig – 151

Le faisceau illumine l'arête supérieure mais aucune réflexion ne peut être exploitée. il faut utiliser le fait que cette arête va masquer une certaine partie du faisceau pour poursuivre la recherche. Comme le faisceau n'est pas dispersé dans l'espace (cohérence du faisceau laser), la partie visible du faisceau transporte globalement une information sur la géométrie exacte de la zone au voisinage de l'arête. C'est l'ombre de l'arête supérieure [Fig-152]. Ainsi il suffit de matérialiser

ce faisceau laser au moyen d'un support opaque placé orthogonalement par rapport à sa direction pour avoir une représentation plus accessible de la déformation du matériau de test.

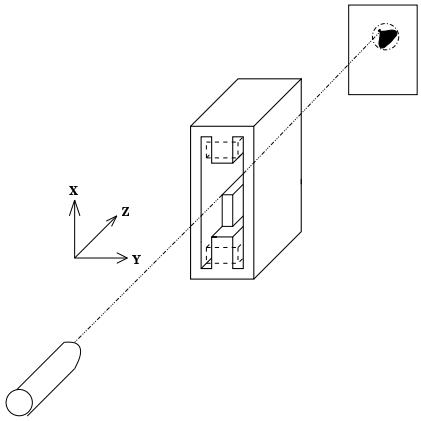


Fig – 152

La cible utilisée pour matérialiser la géométrie de la structure de test peut très bien être utilisée en même temps pour réaliser la mesure. Un support semi-transparent (comme un verre dépoli) présentant à sa surface un quadrillage fin (de l'ordre de 0.5 mm) suffit pour visualiser l'ombre induite par le faisceau laser. Il est maintenant possible de quantifier le déplacement de l'arête supérieure ; déplacement engendré par les forces d'origine magnétique, comme cela est présenté idéalement sur les deux figures suivantes [Fig-153 & Fig-154].

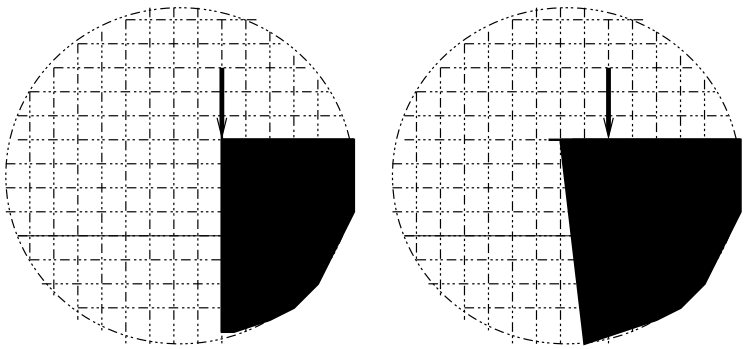


Fig – 153 *Fig* – 154

Par exemple, la figure 153 montre la projection de la zone voisine de l'arête supérieure à l'état initial et la figure 154 présente cette même projection suite à la circulation du courant dans les deux bobines de la structure de test. Il apparaît clairement que l'arête supérieure s'est déplacée de 2 unités (1 mm).

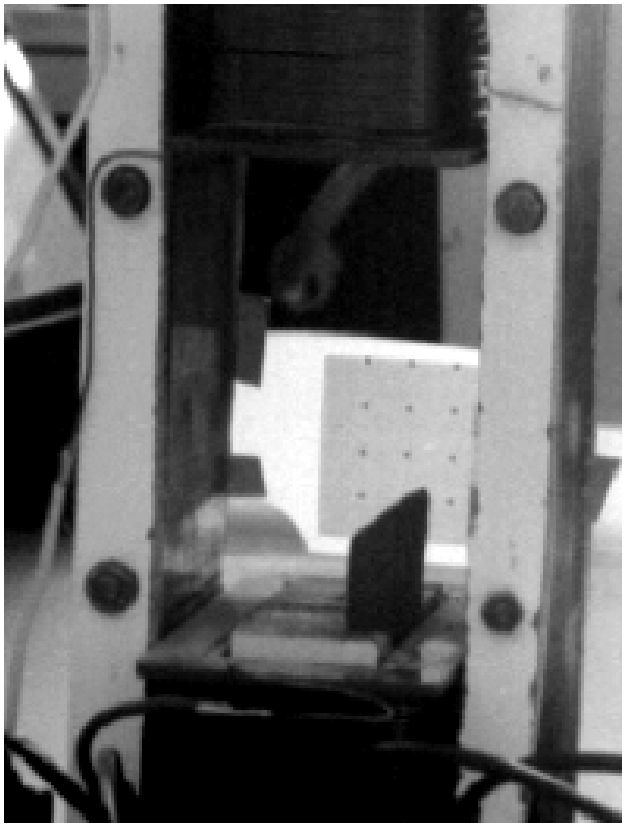


Fig – 155

Sur cette photo [Fig-155], la structure de test ainsi que le support semi-transparent utilisé pour visualiser la géométrie sont présentés. Ce montage est associé à un appareil photo (équipé d'un objectif destiné à la photo macroscopique) dont le rôle sera de donner une image exploitable de la déformation.

3.4 Résultats expérimentaux associés à la fabrication du matériau de test

3.4.1 Mesure du module d'élasticité longitudinale

Plusieurs essais sont réalisés pour différentes concentrations de liant (gélatine) et il apparaît que le comportement du matériau sans poudre de fer est relativement linéaire en fonction de la dilution, comme cela est présenté dans le tableau associé à la figure 156. Les fortes dilutions ne sont toutefois pas exploitables car elles produisent un composé dont le démoulage est très difficile ; des ruptures interviennent trop facilement (annexe 4.5).

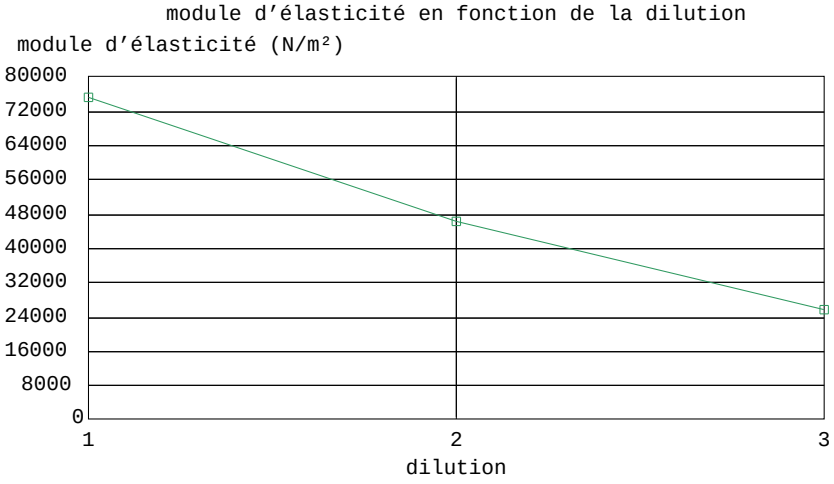


Fig – 156

Ces premiers essais permettent de mettre au point la procédure de test qui est, de ce fait, en mesure de garantir une précision meilleure que 10% sur la mesure du coefficient d’élasticité, à condition de réaliser au moins 7 mesures. Ce nombre de mesures sera justifié ultérieurement.

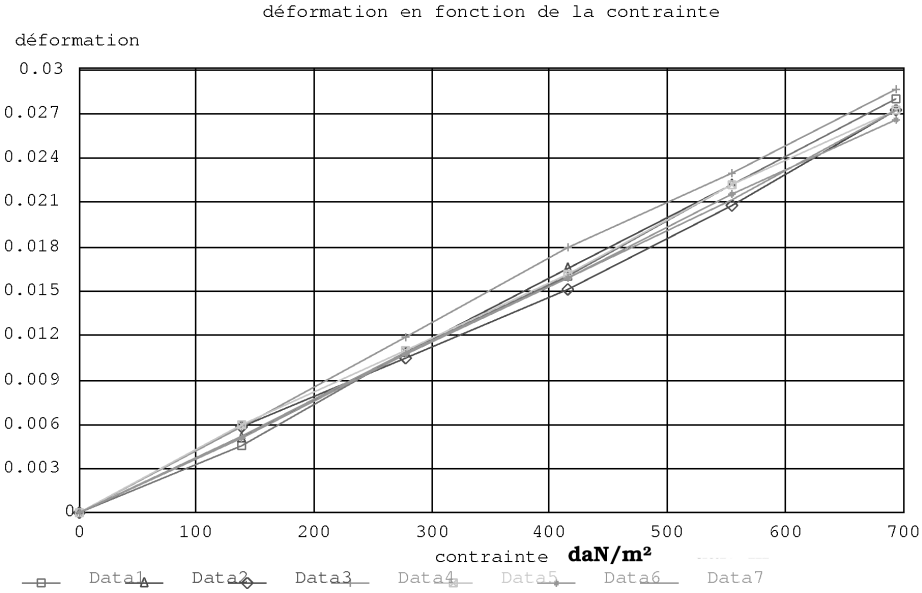


Fig – 157

La figure 157 montre un des résultats d’une série de test. Le bon regroupement des différents essais de compression laisse présager d’une bonne évaluation du

module d'élasticité. En particulier, pour ces essais, le module d'élasticité moyen est de 25 500 N/m^2 avec une précision de 2500 N/m^2. Cette présentation est très instructive car elle illustre une des difficultés rencontrées lors des essais. Pour chaque essai, le module d'élasticité est calculé en utilisant une régression linéaire associée à la méthode des moindres carrés.

essai	courbe	module d'élasticité (N/m^2)
1	Data-1	24 544.
2	Data-2	25 173.
3	Data-3	26 120.
4	Data-4	24 227.
5	Data-5	25 588.
6	Data-6	26 046.
7	Data-7	25 750.

Fig – 158

Un examen détaillé de ces résultats met en évidence que la valeur la plus basse est obtenue par l'intermédiaire de l'essai 4 [Fig-158]. En examinant plus en détail l'enregistrement (Data-4) dans la figure 159, il apparaît que cet essai se détache très nettement du groupement principal.

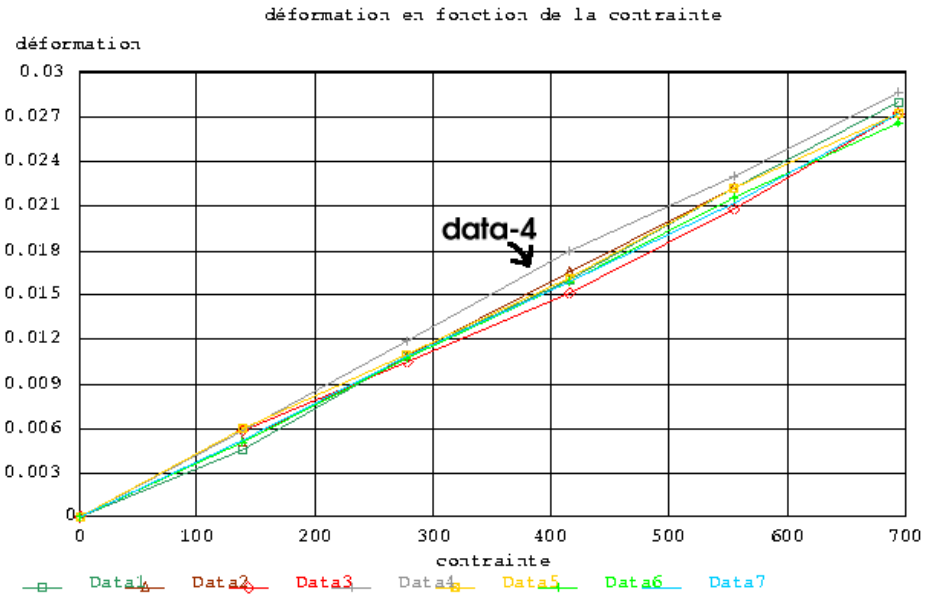


Fig – 159

Les valeurs obtenues pour cet essai ne sont pas placées aussi aléatoirement que les autres, mais suivent bien une droite qui est légèrement différente de la

tendance associée aux autres. C'est cette dernière remarque qui permet de rejeter l'expérimentation N°4 et de ne pas la comptabiliser pour le calcul de la moyenne. Comme le montage expérimental est très sensible aux conditions géométriques, l'une de celles ci n'est certainement pas respectée. Cette démarche est dictée par la connaissance des problèmes associés au moyen de mesure, et aussi issue de la volonté de vérification de la méthode expérimentale. En effet, la validité de la procédure vient de l'hétérogénéité des mesures et tout écart persistant par rapport à la tendance peut être assimilé à une erreur de manipulation.

Précédemment, une remarque sur le nombre de mesures a été faite. La justification de ce nombre va maintenant être abordée. Si la diminution de l'incertitude sur la valeur du module d'élasticité est un objectif premier, alors deux possibilités sont à étudier : une modification du système de mesure ou une augmentation du nombre de mesures. La modification du mécanisme est toujours possible mais induit des solutions techniques qui sont hors de portée, compte tenu des moyens disponibles. Par exemple, il est inutile de nier l'existence de frottements parasites. Le mouvement associé aux surfaces de contact fait que la compression n'est pas réellement uniforme. La partie supérieure n'exécute pas un déplacement linéaire mais une rotation.... Sur les équipements de mesure utilisés pour des matériaux plus consistants, ces problèmes sont pris en compte dès la conception de l'appareil. Par exemple : le plateau inférieur est guidé en translation par des glissières qui donnent à la surface de contact une liberté de mouvement dans le plan horizontal. L'efficacité technique de ces solutions n'est pas à remettre en cause. Comme leur mise en oeuvre est relativement difficile dans le cas présent, il faut se demander si elles sont bien adaptées à un matériau comme celui utilisé pour les essais. Pour l'exemple utilisé, il n'est effectivement pas prouvé que les contraintes tangentielles parasites soient annulées par ce type de glissières. Par contre, l'augmentation du nombre de mesures induit mathématiquement une diminution de l'intervalle d'incertitude. Cette possibilité est d'ailleurs systématiquement employée pour les contrôles effectués en cours de fabrication sur les chaînes de production. Le principe des cartes de contrôle est présenté d'une manière très didactique dans l'ouvrage de R.SPIEGEL [27, SPIEGEL R.-1992] mais d'autres publications le complètent [28, VESSEREAU.A.-1986] [29, AIVAZIAN.S.-1978] [30, LIPSCHUTZ.S.-1978]. En quelques lignes, en voici les éléments principaux. Une série de mesures est réalisée sur un échantillon et comme le nombre de mesures n'est pas infini, l'écart type calculé en utilisant cette série n'est en aucun cas l'écart type réel. Toutefois, il est possible de construire un intervalle de confiance à partir de cet écart type associé à cet échantillon. La théorie des petits échantillons montre que cet intervalle est d'autant plus réduit que le nombre de mesures augmente. Avec un objectif de précision de 10% sur la mesure du module d'élasticité, il apparaît que 7 essais de compression suffisent. La mise en pratique et l'explication de ces résultats sont données en annexe 4.5.

3.4.2 Mesure du coefficient de perméabilité relative

Cette partie sera beaucoup plus réduite, car la conception du moyen de mesure a mis en oeuvre toute une série de simulations, visant à s'affranchir de l'imprécision de certains paramètres comme la perméabilité relative du circuit magnétique, ou au contraire, en prenant finement en charge des phénomènes physiques difficilement négligeables comme les fuites dans l'air. L'utilisation de la simulation numérique évite de faire des hypothèses restrictives sur le comportement du montage. Ce qui n'était pas le cas pour le montage précédent. La courbe d'étalonnage obtenue à partir des simulations numériques peut être mise en oeuvre. Toutefois, plusieurs essais sont réalisés pour vérifier la dispersion des mesures. Dans un premier temps, le même matériau a été soumis plusieurs fois au même champ magnétique sans être retiré du moyen d'essai et aucune modification de comportement n'a été notée. Par contre, si le matériau est retiré puis remis en place, de légères imprécisions géométriques sont induites et provoquent une variation de la tension mesurée au niveau de la bobine de détection. Cette variation est faible (de l'ordre de 0.05 volts pour 2 volts) mais elle est suffisante pour provoquer une imprécision de l'ordre de 2% sur la mesure de la perméabilité relative (annexe 4.6).

3.4.3 Mesure du déplacement.

Cette dernière mesure est l'aboutissement des essais entrepris. Elle permet de conclure sur la validité d'une des formulations pour le calcul des forces d'origine magnétique. Bien qu'elle soit importante, il ne faut pas en déduire qu'une précision extrême est requise pour cette mesure. En effet, la démarche consistait à trouver une méthode qui amplifie les écarts entre les résultats des différentes formulations. Pour chaque formulation, une valeur de déplacement est calculée au moyen d'une simulation. Cette simulation prend en compte la valeur de la perméabilité relative et la valeur du coefficient d'élasticité du matériau test. En conséquence une erreur est associée à ce déplacement calculé, car il est lié à ces deux paramètres expérimentaux. Il suffit de ne pas avoir de recouvrement au niveau des valeurs possibles de déplacements pour permettre la discrimination.

Par exemple, dans la figure suivante [Fig-160], deux déplacements calculés au moyen de deux formulations différentes sont présentés $dl1$ et $dl2$.

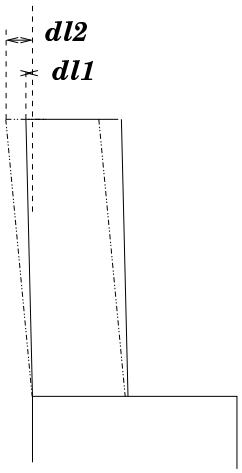


Fig – 160

Il est clair qu'un écart significatif existe entre ces deux déplacements calculés, mais il faut associer à ces calculs, les écarts possibles introduits par les imprécisions sur les paramètres de la simulation. En particulier, il ne faut pas admettre de recouvrement des zones associées aux déplacements possibles comme cela est présenté à la figure 161.

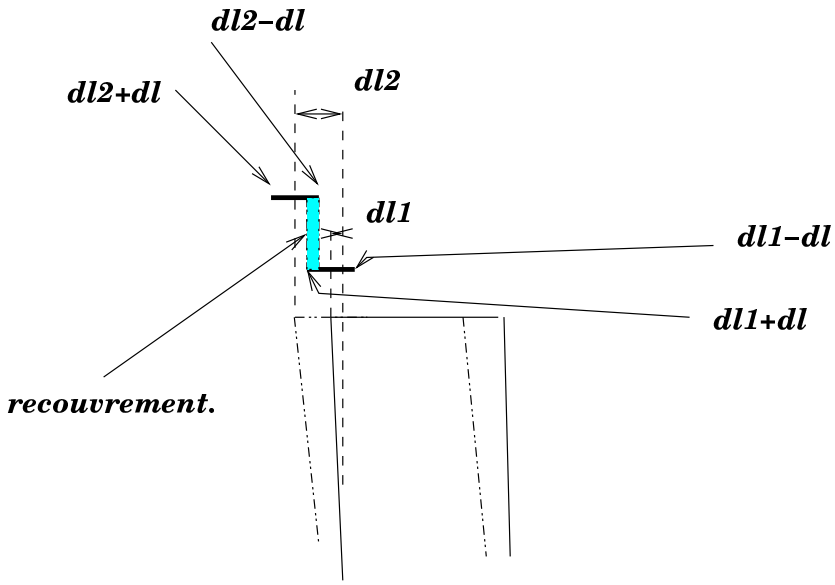


Fig – 161

L'erreur sur le calcul du déplacement est de l'ordre de 10 à 12%, compte tenu des imprécisions sur le module d'élasticité et de la perméabilité relative.

La mesure du déplacement possède elle aussi ses imprécisions. Elles sont totalement indépendantes des mesures de perméabilité ou du coefficient d'élasticité. Le moyen de mesure retenu ne peut pas concurrencer les machines à mesurer tridimensionnelles, mais il est toutefois suffisant pour espérer atteindre une précision de l'ordre de 2/10 mm. Cette méthode de mesure photométrique a été présentée la première fois au deuxième séminaire international sur les vibrations et les bruits acoustiques des machines électriques à Lodz [49, BARRE.O-2000] et reprise par la suite [42, PARK.G-S.-2001].

La mesure du déplacement est unique et doit être comparée aux zones de déplacements possibles, calculées par l'intermédiaire des simulations. La figure 162 permet de mieux illustrer ce propos.

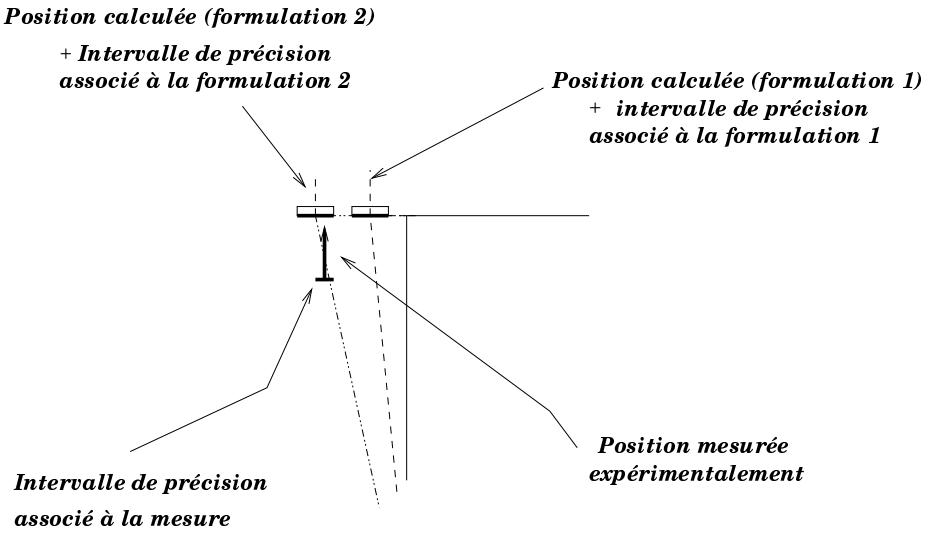


Fig – 162

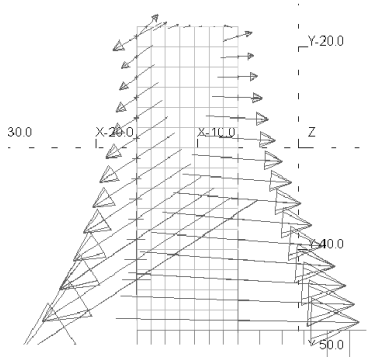
Cette illustration s'appuie sur un cas favorable où les deux positions issues des simulations sont bien distinctes et il y a absence de recouvrement des intervalles de précision [Fig-162]. La mesure, associée à son intervalle de tolérance, montre qu'il est impossible d'obtenir la position calculée, associée à la formulation 1. Par contre, la formulation 2 est une formulation qui est validée par cette expérience. Cela montre que des performances faibles pour des moyens d'essais, sont toutefois suffisantes si les imprécisions liées à ces équipements sont intégrées très tôt au niveau de l'étude.

3.5 Calcul du déplacement lié à chaque formulation.

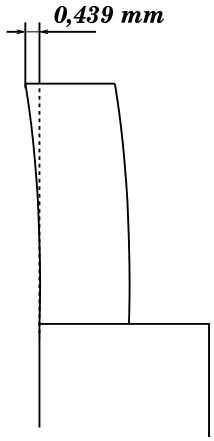
Les évaluations des caractéristiques mécaniques et magnétiques du matériau sont introduites dans des simulations, pour déduire le déplacement associé à chaque formulation. Le module d'élasticité du matériau est de 70 000 N/m^2, sa perméabilité relative est de 3.1. Le courant dans les enroulements est de 3A. Pour la partie magnétostatique, le logiciel Opera 3D est utilisé, et pour la partie mécanique, un logiciel 2D suffit. Toutefois, comme le matériau utilisé n'est pas connu des bases de données associées au logiciel de calcul mécanique, une adaptation doit être réalisée. Il est ainsi possible d'utiliser pour le calcul, un matériau dont le coefficient d'élasticité est 1 000 fois plus grand, à partir du moment où les efforts appliqués sont 1 000 fois plus grands.

3.5.1 Courant volumique et courant surfacique.

Les forces d'origine magnétique sont calculées à partir de la formulation présentée au chapitre 1. Compte tenu de la perméabilité relative, la répartition spatiale des forces se traduit par la représentation suivante [Fig-163] :



$Fig-163$



$Fig-164$

Sous une telle distribution de contraintes et pour un matériau possédant le module d'élasticité précité, la structure doit se déformer selon la géométrie associée à la figure 164 et présenter un déplacement latéral de 0.439 mm.

3.5.2 Masses magnétiques surfaciques et volumiques.

Les forces d'origine magnétique sont calculées à partir de la formulation présentée au chapitre 1. la répartition spatiale des forces se traduit par la représentation suivante [Fig-165].

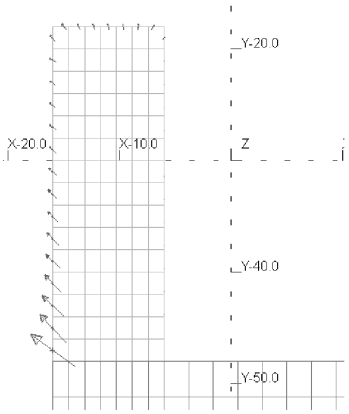


Fig – 165

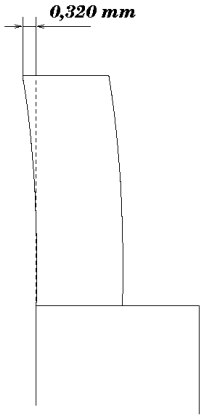


Fig – 166

Avec cette répartition de contrainte et pour un matériau possédant le module d'élasticité précité, la structure déformée devrait avoir la géométrie suivante [Fig-166] et présenter un déplacement latéral de 0.320 mm :

3.5.3 Dérivée de l'énergie.

Les forces d'origine magnétique, calculées à partir de la formulation présentée au chapitre 1 se distribuent sur la structure de test, sous forme de la répartition présentée à la figure 167.

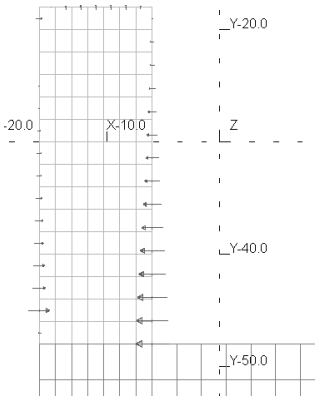


Fig – 167

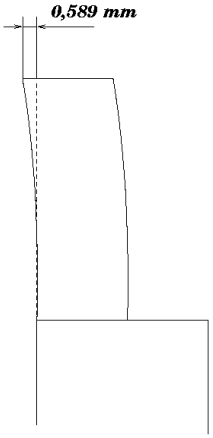
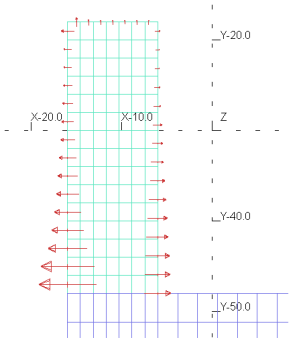


Fig – 168

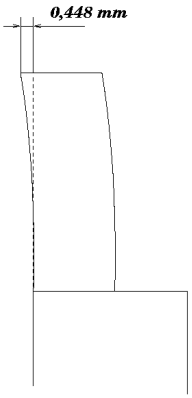
Associée à un tel cas de charge, la structure devrait présenter la géométrie associée à la figure 168. Cela implique un déplacement latéral de 0.589 mm :

3.5.4 Tenseur de Maxwell(1)

Les forces d'origine magnétique sont calculées à partir de la formulation présentée au chapitre 1. la distribution des forces se traduit par la représentation suivante [Fig-169] :



$Fig-169$



$Fig-170$

Sous un tel cas de charge et pour un matériau possédant le module d'élasticité précité, la structure déformée devrait avoir la géométrie associée à la figure 170 et présenter un déplacement latéral de 0.448 mm :

3.6 Mesure du déplacement expérimental.

A l'aide de la méthode présentée dans le chapitre précédent, la position de l'arête supérieure est observée dans deux cas précis. Le premier, pour un courant nul dans les bobines, qui permet d'avoir la position initiale. Le deuxième, pour un courant de 3 Ampères dans ces bobines, pour avoir la position finale. Cette position est celle qui est issue de la déformation du matériau en présence des forces d'origine magnétique. De ces deux positions, il est facile d'en déduire le déplacement de l'arête supérieure. C'est ce déplacement qui doit être comparé à tous les déplacements calculés au paragraphe précédent.

Les calculs de déplacement sont réalisés à l'aide d'un logiciel, éléments finis, reposant sur le principe que le matériau est linéaire. Cette hypothèse peut être exprimée sous une autre forme : il est possible d'appliquer sur ce matériau le principe de superposition. Bien que cette remarque semble évidente, elle va être utilisée pour éviter de prendre en compte la densité du matériau de test.

- Pour avoir la déformation du volume de test, il suffit de sommer toutes les déformations issues de toutes les contraintes extérieures. Or l'action de la pesanteur

est incluse naturellement dans ces contraintes extérieures. La pesanteur est une action extérieure qui est présente en permanence... Comme la déformation de la structure est extrêmement faible, cette action extérieure n'est pas remise en cause par le déplacement. Donc, les effets de la pesanteur sont les mêmes en présence ou en absence de courant. En l'absence de courant , la position du solide de test est le résultat de l'effet de la pesanteur. Il est possible d'écrire que le déplacement de l'arête supérieure est proportionnelle à la pesanteur (3.5).

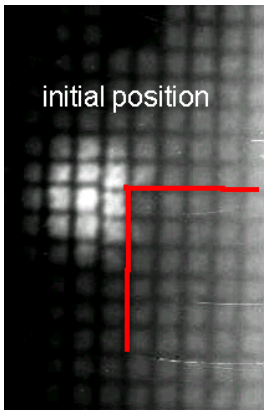
$$dl = f(pesanteur) \tag{3.5}$$

Suite à l'application du courant de 3 ampères, cette position est le résultat de l'action des forces d'origine magnétique mais aussi de la pesanteur. Le déplacement associé est toujours proportionnel à la pesanteur et aux forces d'origine magnétique. Il est possible d'écrire cette proposition sous forme mathématique (3.6). L'hypothèse de linéarité permet de mettre sous une autre forme cette équation (3.7).

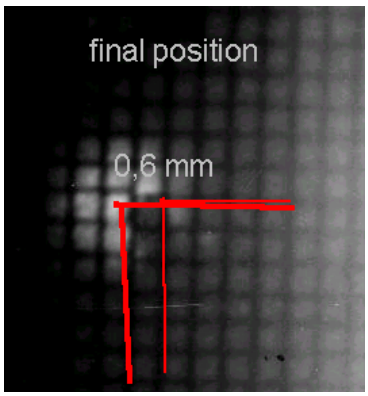
$$dl' = f(pesanteur + forces\ magnetiques) \tag{3.6}$$

$$dl' = f(pesanteur) + f(forces\ magnetiques) \tag{3.7}$$

Comme la déformation associée à la pesanteur est indépendante du courant, mesurer l'écart entre les deux positions revient à mesurer le déplacement induit par les forces d'origine magnétique.



$Fig-171$



$Fig-172$

La figure 171 montre la situation initiale du volume de test en l'absence de courant dans les bobines. C'est aussi la situation initiale de ce volume associé aux forces extérieures telle que la pesanteur. Enfin, la figure 172 montre la position finale du volume de test en présence d'un courant de 3 ampères dans les

bobines. De ces deux figures, il est possible d'en déduire le déplacement uniquement associé aux contraintes d'origine magnétique. Il est présenté en figure 172 et il est de l'ordre de 0.6 mm. Ces 0.6 mm se doivent d'être comparés à tous les déplacements calculés au paragraphe précédent. Cette comparaison est synthétisée par l'intermédiaire de la figure 173 et les résultats furent présentés en 2003 [73, BARRE 0.-2003].

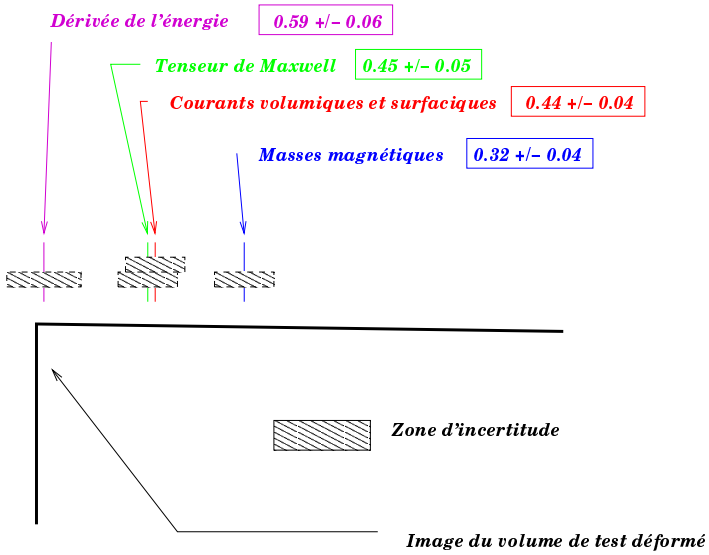


Fig – 173

La figure 173 présente toutes les positions possibles ainsi que l'incertitude provenant des imprécisions sur la perméabilité relative et sur le module d'élasticité. C'est d'ailleurs ce dernier paramètre qui est le plus préjudiciable. Il apparaît que la position réelle du volume de test valide la formulation associée à la dérivée de l'énergie. Il faut toutefois garder à l'esprit que cette validation est probabiliste. Il y a près de 9 chances sur 10 pour que la formulation soit la mieux adaptée.

3.7 Conclusion

La vérification expérimentale des équations associées aux phénomènes physiques est le souci premier de toutes les personnes dont le domaine d'activité contient des sciences physiques. Dans le cas du génie électrique, cette vérification n'est pas aisée, car cette discipline utilise des moyens techniques qui sont complexes et difficiles à modéliser dans leur globalité. Des hypothèses sont introduites pour fournir, à l'aide des simulations, des résultats sur le comportement de ces équipements. Une telle procédure est hélas difficilement envisageable pour

valider les formulations introduites au chapitre 1. En conséquence, une démarche spécifique est entreprise pour verifier les équations associées à un seul phénomène physique. Il apparaît que le résultat final permet de conclure sur la validité d'une des formulations. Toutefois, ce résultat repose sur la réalisation et la caractérisation d'un matériau nouveau. Cette nouveauté implique la mise en place de méthodes de mesure particulières. Les différents paragraphes associés à ce chapitre montrent que cet aspect n'est pas d'un abord évident. La précision obtenue sur les paramètres physiques de ce nouveau composé est suffisante pour permettre la discrimination des formulations. Le parallélépipède de test se déforme en présence d'un champ magnétique et la déformation, proposée par la méthode de la dérivée de l'énergie, est plus proche de la réalité. Cette méthode, reprise par A.BOSSAVIT dans son discours d'introduction du congrès COMPUMAG 2003, est d'ailleurs utilisée pour les systèmes présentant un comportement non linéaire. Elle reste par contre en concurrence avec toutes les autres méthodes dans le domaine linéaire. Il est à noter que MAXWELL, dans son ouvrage de référence sur l'électromagnétisme, proposait d'utiliser les méthodes énergétiques pour quantifier les forces d'origine magnétique [62, MAXWELL.J-C.-1873]. Bien que d'autres formulations se rencontrent dans des publications récentes, l'essai réalisé peut servir d'essai de référence. En effet, il montre que pour des matériaux linéaires, ces formulations se doivent de donner le même résultat analytique que celui proposé par la méthode de la dérivée de l'énergie. Enfin, les méthodes basées sur l'équivalence, comme les sources équivalentes, donnent des résultats éloignés du résultat expérimental.

Conclusion générale

Une interprétation d'un même phénomène physique, sous forme de plusieurs formulations, n'est pas souhaitable. Si ces formulations ne fournissent pas les mêmes résultats, il devient évident que certaines d'entr'elles ne peuvent permettre de prendre en compte ce phénomène. Même si des erreurs sont commises, il convient de garder à l'esprit que chronologiquement, les grandes révolutions scientifiques ont été entachées d'erreurs et que leur vérification expérimentale ne fut pas aisée. Pour traiter le problème de calcul des forces engendrées par les champs magnétiques, une approche hors norme, voire éloignée de la doctrine, est à utiliser. Par exemple, un autre phénomène physique qui, a fait couler beaucoup d'encre, peut servir d'illustration. Il faut se souvenir de Galilée et de sa théorie de la gravitation. Dans son dernier livre, *Discours concernant deux sciences nouvelles*, il discute longuement sur la chute des corps. Il en arrive à la conclusion que deux objets de masse différente, lâchés du haut d'un bâtiment, arrivent en même temps au sol. La vérification expérimentale de cette conclusion présente bien des difficultés de mise en pratique. Une bille en acier arrive un peu plus tôt qu'une boule en bois léger comme le balsa, les frottements de l'air ne sont pas pris en compte dans ce principe, mais, hélas, ils existent dans l'expérience. Donc, sous certaines conditions non réalisables à l'époque, cette théorie pouvait s'avérer exacte.

Pendant plusieurs siècles la science, dut se contenter d'une théorie presque invérifiable et qui fut remise en cause par la suite. Toutefois, cette théorie sur la gravitation avait comme principal avantage d'être non seulement mesurable : toute masse est soumise à la gravité ; mais aussi d'affecter tous les individus vivant sur terre. Chaque être humain était une sorte d'instrument de mesure et pouvait ressentir les effets de la gravitation. Pour ce qui est des champs magnétiques, la difficulté augmente. Le corps humain ne peut pas les ressentir. Par contre, les courants électriques ne laissent pas indifférent le système nerveux humain. Les premières expériences visant à mettre en évidence les lois associées aux champs magnétiques se firent par l'intermédiaire des courants électriques. C'est certainement une des raisons qui fait que la loi de Laplace est toujours utilisée comme préambule pour la présentation des machines tournantes. La tentation est donc grande de garder ces courants pour expliquer les phénomènes magnétiques. En

effet un courant pouvait se mesurer alors qu'il était impossible de quantifier la matière composant les aimants naturels. Ces remarques ont donné naissance au premier chapitre. Celui-ci se proposait de reprendre pas à pas la construction des équations rencontrées dans la majorité des publications.

Un retour vers la théorie de la gravitation montre que son origine n'a pas été l'expérience, mais plutôt une analyse philosophique ; l'idée d'une terre ronde fut appuyée par les examens des autres planètes. L'expérience est, bien sûr, un des éléments clefs des théories de Galilée, mais cette expérience a été conçue en fonction des moyens de l'époque. En particulier, Galilée avait réalisé un plan incliné sur lequel une bille en acier pouvait rouler avec peu de frottement. A des intervalles précis, des cloches était posées et un tintement se faisait entendre lors du passage de la bille. Si la théorie de Galilée était bonne, le temps séparant deux tintements successifs devait être constant. Grâce à des expériences de ce type, l'universalité de la chute libre a vu le jour. Il ne faut pas pour autant croire que cette aventure est terminée : le projet spatial MICROSCOPE sélectionné par le CNES ambitionne de tester la théorie de la chute des corps à l'aide d'un équipement embarqué dans un satellite. L'examen des équations associées aux forces d'origine magnétique, ne peut fournir la réponse sur leur validité. Seule, la démarche peut être vérifiée et les hypothèses associées, être mises en évidence. C'est pourquoi, pour chaque présentation de chaque formulation, les concepts qui ont donné naissance à ces équations sont systématiquement soulignés. Cet aspect est une particularité du premier chapitre, et permet de mieux appréhender la partie expérimentale.

Dans le premier chapitre, il apparaît que toutes les formulations sont sujettes à caution. Par exemple, la mise en équation du courant surfacique, ou encore les hypothèses sur la nullité de certaines dérivées partielles, que l'on rencontre lors de l'utilisation du tenseur de Maxwell... Tous ces éléments donnent un caractère inachevé à toute analyse purement théorique. Einstein écrivait :"l'expérience est un juge impitoyable qui ne dit jamais "oui" à une théorie mais "peut-être" et le plus souvent "non" ". En conséquence de quoi, il est illusoire de rechercher l'expérience ultime qui validera une formulation associée à un phénomène physique. Dans le meilleur des cas, la réponse positive de cette expérience ne pourra être associée qu'au "peut-être" !... Mais si elle est discriminante, elle répondra certainement "non"... Le résultat d'une expérience n'est pas une preuve formelle de la validité d'une formulation... Mais il est clair, que si les autres formulations ne s'accordent pas avec l'expérience, elles ne peuvent être acceptées.

Dans le cas de la vérification des formulations des forces d'origine magnétique, les moyens actuels, et en particulier les outils de simulation numérique ont été mis en oeuvre pour concevoir une expérience qui départage les diverses formulations. De nombreuses difficultés furent levées en utilisant ces outils de simulation, mais d'autres le furent plus intuitivement. Le deuxième chapitre est consacré à sa conception, il se conclut par la réalisation d'une structure de test

et par la mise en évidence qu'un matériau totalement nouveau, doit être fabriqué. La déformation de ce matériau en présence d'un champ magnétique sert alors de moyen de validation. Cette expérience ne met pas en jeux des moyens importants, mais elle impose des connaissances connexes. L'obtention d'un champ magnétique hétérogène est aisée, à condition de ne pas requérir d'intensité élevée. Il est clair que les équipements des laboratoires AT&T pouvant générer plusieurs Teslas sont uniques [19, BOEBINGER.G.-1995] . De jeunes chercheurs, par le passé, ont obtenu des résultats enviés par des laboratoires aux moyens plus conséquents, en utilisant des modes opératoires hors normes que le hasard avait placés sur leur route. Pierre Gilles de GENNES[2] présente d'ailleurs l'un de ces résultats dans son ouvrage "Les objets Fragiles". La bonne connaissance des phénomènes physiques mis en jeux peut parfois suppléer à une instrumentation qu'il est possible de qualifier de sommaire. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder les photos prises par les photographes professionnels dans des conditions telles, qu'aucun système automatisé ne peut les prendre en compte...

L'instrumentation entre pour une grande part dans la validation expérimentale des concepts théoriques. En donnant le prix Nobel à G.CHARPAK[3], les physiciens ont remis en avant l'importance des sciences basées sur l'expérience. Le troisième chapitre, consacré à cette expérimentation, montre comment il est possible de déterminer les grandeurs physiques associées à ce matériau nouveau. Là encore, la nouveauté du matériau de test a conduit à concevoir les équipements de mesure. Suite à cette caractérisation, il est enfin possible de discriminer les différentes formulations présentées dans le premier chapitre. Chaque formulation propose, pour le matériau de test en présence d'un champ magnétique, une déformation unique. Les déformations associées à chaque formulation, sont suffisament éloignées les unes des autres pour être différenciées. L'expérience donne une et une seule déformation qu'il conviendra de comparer aux déformations calculées.

Le résultat découvert à la fin du troisième chapitre, certes intéressant, ne répond pas à toutes les questions que l'on est en droit de se poser. La dérivée de l'énergie est en bonne place pour la quantification des forces d'origine magnétique mais elle n'explique, en aucun cas, le pourquoi ou le comment du phénomène. Les méthodes énergétiques ne peuvent en fait que constater l'évolution naturelle des phénomènes. Par exemple, la combustion du méthane en présence d'oxygène dégage de l'énergie thermique et produit de la vapeur d'eau et du gaz carbonique. Un bilan thermique montre bien que l'énergie perdue au niveau moléculaire est bien égale à l'énergie thermique dégagée. Mais il est impossible de dire quels atomes d'oxygène se combineront avec un atome de carbone pour réaliser une

[2]Pierre Gilles de GENNES, physicien français,Professeur au Collège de France, prix nobel de physique en 1991

[3]Georges CHARPAK, physicien français, académicien, prix nobel de physique en 1992

molécule de gaz carbonique et ceux qui participeront à la création des molécules d'eau... Compte tenu de cette remarque, la formulation énergétique présente des difficultés d'utilisation... Assimiler la variation d'énergie au travail d'une force est un choix et non une égalité vérifiée dans tous les cas. La variation d'énergie chimique associée à une combustion dégage de l'énergie thermique et non de l'énergie mécanique...

Les perspectives sont nombreuses et elles peuvent être présentées sous deux formes différentes. D'une part, savoir calculer les forces d'origine magnétique est un préambule à toute conception ou optimisation de machines électriques. D'autre part, même si le résultat numérique est important, la méthode l'est tout autant car elle donne des informations sur les principes physiques mis en jeux. Par exemple, les systèmes de conversion de l'énergie sont tous conçus avec un impératif commun : le meilleur rendement possible a un coût acceptable. Cet objectif peut être atteint de deux manières différentes. Soit de nouvelles structures de conversion sont développées, soit les anciennes structures sont optimisées. Les nouveaux moyens de transport, tels que ceux mis au point dans le cadre du MAGLEV, montrent bien que les applications des champs magnétiques ne sont pas encore toutes exploitées et les phénomènes maitrisés [21, DONG-HUM.K-1996]. Dans les deux cas, une parfaite connaissance des principes physiques et de leur mise en équation est requise. Le génie électrique, de même que la physique appliquée font partie de ces disciplines où la validation expérimentale est indispensable. Toutefois, le génie électrique, en tant que science industrielle, est confronté en permanence à des systèmes dans lesquels plusieurs principes physiques sont mis en oeuvre en même temps. Pour constater les progrès accomplis, il suffit d'examiner une machine de GRAMME. La diminution de l'entrefer a conduit à une augmentation du rendement mais a compliqué la compréhension des phénomènes physiques mis en oeuvre. En effet c'est la seule machine électrique qui peut se prévaloir de tourner à l'aide des forces de Laplace.

Pour conclure vis à vis des équipements réalisés, il semblait vraisemblable qu'ils ne soient plus jamais mis en oeuvre... Pourtant, le système de mesure de la perméabilité relative a été utilisé dans le cadre d'une modélisation par réseau de neurones d'un cycle d'hytérésis [72, ARNOULD.P-2000]. Associer la conception d'équipement à un travail de recherche n'est pas une démarche commune. D'ailleurs, qui reprocherait à un laboratoire d'hésiter à investir dans des équipements qui ne peuvent être réutilisés ? Par contre, la richesse d'une telle démarche peut être utilisée comme support pour initier d'autres travaux. A titre d'exemple, le contenu de certaines publications a conforté l'idée du matériau nouveau indispensable au bon déroulement de cette étude [66, ALEXEEV AG-1995].

Chapitre 4

Annexes

4.1 Validation du calcul 3D magnétostatique et vérification du fonctionnement du teslamètre.

L'objectif est d'évaluer l'approche modélisation élément fini en 3D et notre aptitude à calculer précisément une distribution spatiale d'un champ magnétique à l'aide du code employé [69, OPERA 2D/3D]. Pour cet essai, une structure de référence est employée : elle est constituée de deux bobines de Helmotz. Cette structure peut être étudiée analytiquement et les résultats qui en sont issus peuvent être comparés à ceux fournis par la simulation. Les calculs sont comparés à des mesures expérimentales et la chaîne de mesures est ainsi validée. Enfin, une validation du calcul de champ est effectuée sur la structure employée pour les essais.

Les bobines de Helmotz.

Cette structure est utilisée dès qu'une expérience simple doit être mise en oeuvre pour valider les équations associant un courant et le champ magnétique engendré. La géométrie retenue présente des caractéristiques qui permettent de calculer le champ magnétique selon l'axe de symétrie (z).

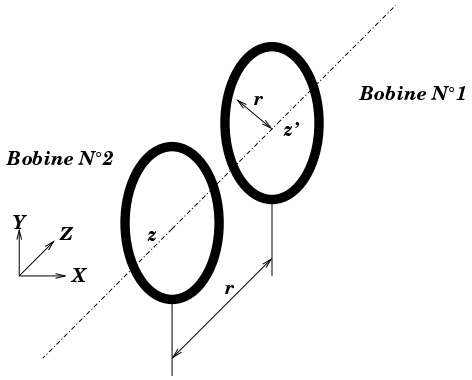


Fig – 174

La figure 174 présente cette géométrie. Deux bobines plates de rayon identique, r=6,5 cm, sont placées à une distance r l'une de l'autre. Si ces deux bobines sont parcourues par un même courant, alors le champ magnétique peut être calculé analytiquement sur l'axe zz' et est constant à l'intérieur de ces bobines. Cette structure est aussi modélisée sous forme élément fini à l'aide du logiciel de calcul de champ magnétique.

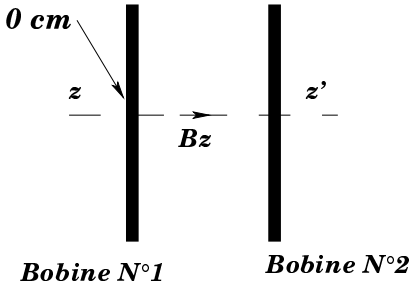


Fig – 175

L'intensité du champ magnétique est évaluée pour plusieurs positions sur l'axe zz' [Fig-175]. Le tableau ci dessous donne les valeurs obtenues analytiquement et les valeurs issues de la simulation.

Position	calcul analytique	simulation
0 cm	3.9 mT	3,9 mT
1 cm	4,0 mT	4,05 mT
2 cm	4,1 mT	4,1 mT
3 cm	4,1 mT	4,1 mT
4 cm	4,1 mT	4,1 mT

Tab – 1

Dans ce tableau [Tab-1], la très bonne correspondance entre les valeurs issues du calcul analytique et les valeurs provenant de la simulationapparaît très clairement. Cette très bonne adéquation provient d'une part, de la présentation des résultats à 0.1 mT mais surtout de l'utilisation, pour le calcul analytique, du rayon équivalent, fourni par le constructeur, pour les bobines plates. Ce rayon n'a pas d'existence réelle, c'est un rayon tout à fait virtuel qui est le rayon de la bobine plate équivalente.

Suite à ces calculs, des mesures sont réalisées sur le dispositif réel à l'aide d'un teslamètre. Bien que la position de la sonde ne soit connue qu'à 1 mm près, le champ magnétique ne varie que très peu au voisinage de l'axe zz'.

Position	Valeur mesurée	Valeur calculée
0 cm	3.71 mT	3.9 mT
1 cm	3.83 mT	4.05 mT
2 cm	3.86 mT	4.1 mT
3 cm	3.87 mT	4.1 mT
4 cm	3.84 mT	4.1 mT
5 cm	3.83 mT	4.1 mT
6 cm	3.72 mT	4 mT

$Tab-2$

Le tableau 2 donne une très bonne idée des performances du teslamètre. Comme il y a une très bonne adéquation entre le calcul analytique et la simulation, il est possible d'imputer l'erreur, entre la valeur mesurée et la valeur calculée, comme étant une imperfection de l'appareil de mesure.

Un élément important pour un instrument de mesure est sa linéarité, celle-ci est vérifiée au moyen d'un essai. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous [Tab-3].

position	Courant en Ampère	Valeur mesurée	erreur de linéarité
3,25 cm	0 A	0 mT	
3,25 cm	1 A	1,29 mT	0 %
3,25 cm	2 A	2,58 mT	0 %
3,25 cm	3 A	3,89 mT	0,5 %
3,25 cm	0 A	0,01 mT	

$Tab-3$

Il apparaît immédiatement que le teslamètre a une réponse parfaitement linéaire [Tab-3]. Donc l'erreur précédente peut être associée à une légère impréci-

sion sur un des amplificateurs associés à la chaîne de mesure, et peut donc être compensée par l'utilisation du facteur multiplicatif 1.05.

Mesure sur le dispositif de test

Le dispositif réel est constitué d'une structure en tôle de transformateur de perméabilité magnétique particulièrement élevée ($\mu_r > 1000\mu_0$). Deux bobines en cuivre comportant 120 spires lui sont associées, de manière a générer un champ magnétique dans l'entrefer.

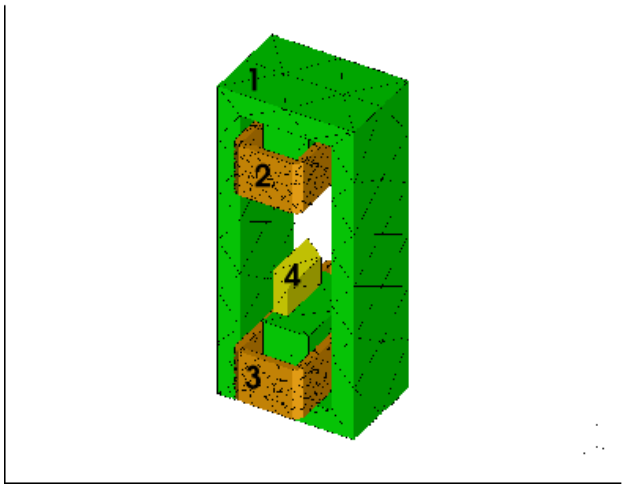


Fig – 176

Références utilisées pour la figure 176 :

- 1 : Noyau magnétique
- 2 : Bobine de cuivre supérieure (120 Spires)
- 3 : Bobine de cuivre inférieure (120 Spires)
- 4 : Volume de matériau test.

La figure 176 montre la structure utilisée pour les essais. Comme il est impossible de calculer analytiquement la valeur du champ magnétique dans l'entrefer, une modélisation est faite à l'aide d'un code de calcul. La simulation réalisée utilise des éléments quadrilatères, de 2 mm environ de côté, pour ceux qui sont situés dans l'entrefer, et prend en compte un volume d'air avoisinant. La géométrie du volume complet est donnée par la figure 177.

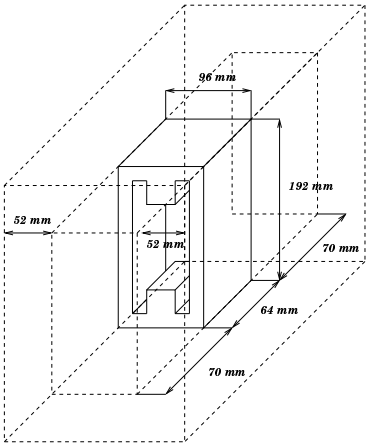


Fig – 177

Par simulation, il est possible d'avoir la valeur ainsi que la direction de l'induction magnétique en tout point de l'entrefer. Toutefois, toutes les mesures ne sont pas réalisables. En particulier, la composante By de l'induction magnétique est mesurée en des points particuliers sur l'axe X et ses valeurs sont comparées aux valeurs obtenues par simulation [Fig-178].

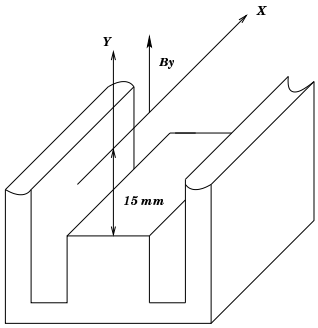


Fig – 178

La précision de la position de la sonde en hauteur est de l'ordre de 1 mm. En conséquence, la simulation sera utilisée pour produire les valeurs de B_y pour un axe x à 14 mm du noyau et pour un axe x à 16 mm du noyau. Si les simulations sont fiables, les valeurs mesurées [Tab-4] doivent toujours être comprises entre les valeurs issues des deux simulations.

Position de la sonde sur l'axe x	By mesuré
0 cm	10.93 mT
1 cm	12.00 mT
2 cm	12.05 mT
3 cm	11.87 mT

Tab – 4

- A une distance de 14 mm du noyau inférieur, la simulation donne le profil suivant pour le module de By [Fig-179].

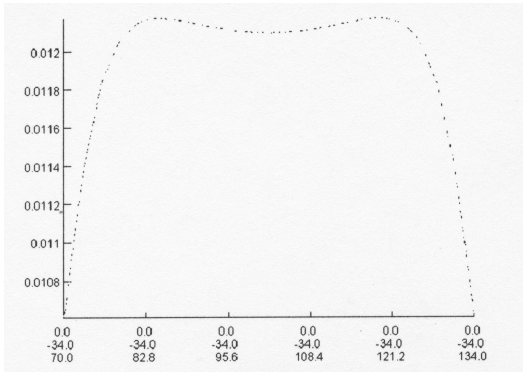


Fig – 179

Pour exploiter cette figure, il faut vérifier que toutes les valeurs mesurées sont bien inférieures aux valeurs issues de la simulation. En effet, la sonde étant à une hauteur légèrement supérieure, la valeur de By doit être inférieure [Fig-180].

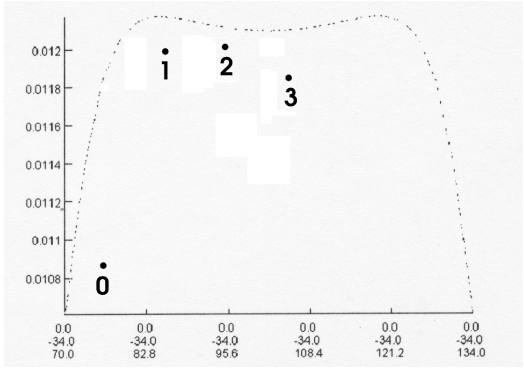


Fig – 180

- A une distance de 16 mm du noyau inférieur, la simulation donne le profil suivant pour By [Fig-181]

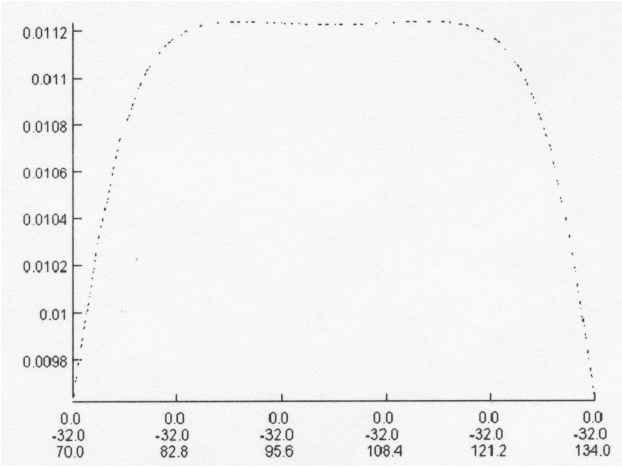


Fig – 181

Pour exploiter cette figure, il faut vérifier que toutes les valeurs mesurées sont bien supérieures aux valeurs issues de la simulation. En effet la sonde étant à une hauteur légèrement inférieure, la valeur de By doit être supérieure [Fig-182].

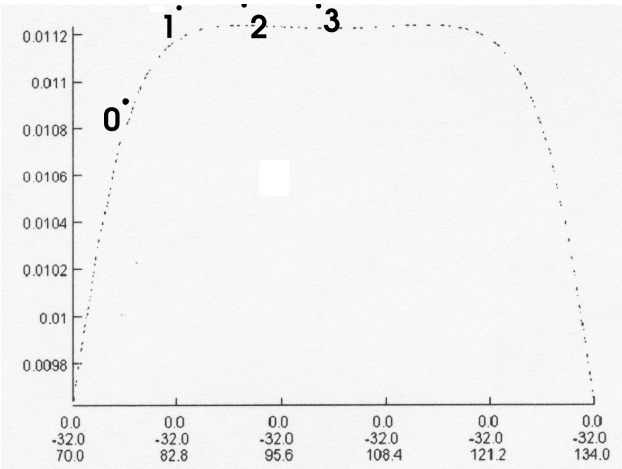


Fig – 182

Conclusion

Les valeurs issues de l'expérimentation sont en accord avec les simulations et montrent que la simulation permet d'avoir une bonne image de la distribution de

l'induction magnétique dans l'entrefer.

4.2 Validation du calcul élément fini en mécanique.

Les éléments finis sont massivement utilisés en mécanique et font l'objet de beaucoup d'attention quant à la validation des calculs. Toutefois, il convient de noter que la validation d'un calcul de déplacement en élément fini, ne peut en aucun cas être réalisée par un calcul analytique, tel que celui utilisé pour la détermination de la flèche associée à une poutre encastrée. En effet, les résultats analytiques sont issus de calculs se basant sur des hypothèses différentes. Ils sont associés à la "résistance des structures" alors que les calculs, type élément fini, proviennent de la "résistance des matériaux". La différence entre ces deux approches est la non prise en compte du coefficient de Poisson pour la méthode conduisant au calcul analytique. En gardant à l'esprit cette différence, il est toujours possible de comparer un résultat issu de la résistance des structures et celui calculé par une méthode, type élément fini.

Comparaison des résultats issus des éléments finis et du résultat provenant d'un calcul analytique.

Il semble évident de penser qu'un nombre élevé d'éléments va donner un résultat très proche de la réalité. Mais, même les résultats analytiques ne représentent pas la réalité.

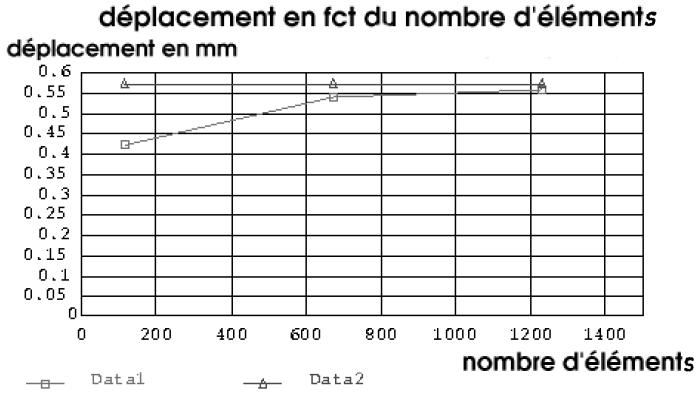


Fig – 183

Associée à la figure 183, la courbe (data2) est le déplacement obtenu de manière analytique (il est évidemment indépendant du nombre d'éléments). La courbe (data1) est le déplacement obtenu par calcul, élément fini, suite au cas de charge présenté à la figure 184. Il est clair qu'une convergence de ces deux courbes apparaît, dès que, plus de 600 éléments sont utilisés pour décrire le volume de référence. Mais il convient de ne pas perdre de vue que ces deux courbes sont issues d'hypothèses différentes et qu'aucune des deux ne peut être assimilée à la réalité : le calcul analytique ne prend pas en compte le coefficient de Poisson et le calcul numérique, type élément fini, est très dépendant du nombre d'éléments.

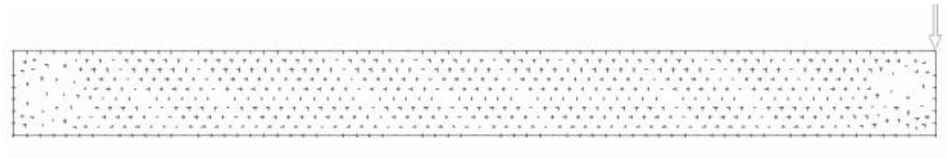


Fig – 184

En conclusion, cette poutre associée à la figure 185 est encastrée à gauche et est soumise à une force à son extrémité droite qui tend à la faire plier vers le bas.



Fig – 185

Si le déplacement vertical de l'extrémité droite est recherchée [Fig-185], les deux méthodes précitées vont donner chacune un résultat : 0.556 mm pour les éléments finis et 0.5714 mm pour la résistance des structures. Même si les valeurs de déplacement sont très voisines l'une de l'autre, il faut garder à l'esprit que des hypothèses différentes sont utilisées pour conduire à ces résultats.

4.3 Influence du coefficient de Poisson.

Le coefficient de Poisson permet de prendre en compte la modification du volume en fonction de la charge appliquée. Cela se traduit par l'apparition de contraintes perpendiculaires au déplacement. Une hypothèse est posée pour ce

coefficient : il est de 0.5. Cette valeur est induite par la non compressibilité de l'eau qui compose en grande partie le matériau de test. Il est toutefois utile de vérifier l'influence du coefficient de Poisson sur le calcul du déplacement.

Évolution du déplacement en fonction du coefficient de Poisson.

Un volume constitué d'un matériau homogène est maillé sous forme de 500 éléments. C'est une poutre encastrée à gauche et soumise à une charge ponctuelle à droite. Suite à ce cas de charge, elle va fléchir vers le bas [Fig-186].

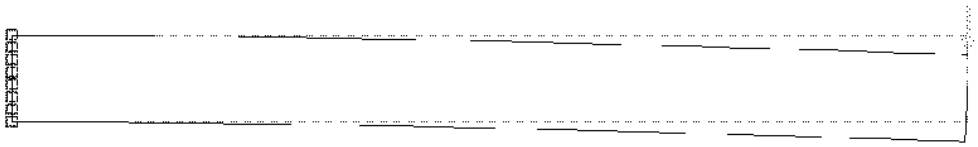


Fig – 186

Pour ce maillage et pour un cas de charge constant, la flèche associée à cette poutre est calculée pour plusieurs coefficients de Poisson. La valeur de la charge ainsi que le module d'élasticité n'ont pas d'importance car seule l'évolution du déplacement en fonction du coefficient de Poisson est recherchée.

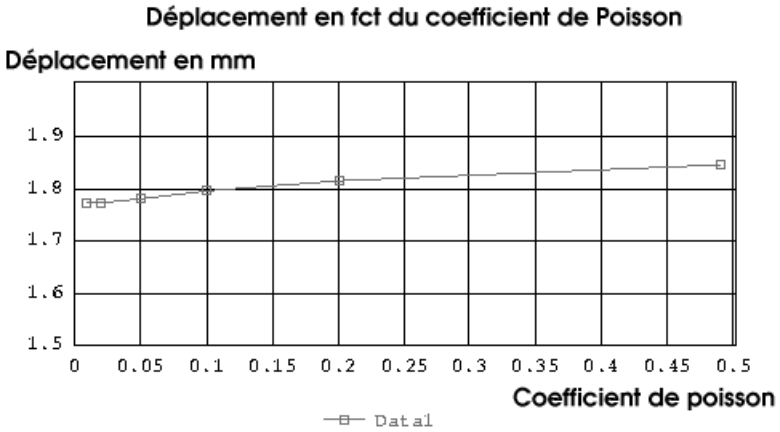


Fig – 187

La figure 187 présente l'évolution de la flèche en fonction du coefficient de Poisson. Il apparaît que pour une variation importante de ce coefficient, de 0 à

0.5, une variation de l'ordre de 5% de la flèche est rencontrée. Donc utiliser un coefficient de Poisson nul en place d'un faible coefficient, ou un coefficient de 0.5 en place d'un coefficient important ne remet pas en cause le calcul du déplacement.

4.4 Influence du nombre d'éléments sur le calcul du déplacement.

Le calcul du déplacement est important vis à vis des essais. Il n'est pas souhaitable de prendre un nombre d'éléments trop important, car le maillage de la frontière du volume du matériau de test est commun avec la simulation en magnétostatique ; et la densité de ce maillage est limité, par le fait que le volume modélisé pour les phénomènes magnétiques, prend aussi en compte un volume d'air avoisinant. En conséquence, il faut rechercher l'influence du nombre d'éléments sur le déplacement issu du calcul, élément fini mécanique. Pour répondre à cette question, un cas test est étudié et le déplacement est calculé pour plusieurs densités de maillage.

Application des efforts sur la structure de test.

La structure de test, un simple parallélépipède, se voit soumise à une action de compression uniforme sur l'un de ses cotés [Fig-188]. Cette action engendre un déplacement de la structure, et c'est le déplacement latéral de l'arête supérieure gauche, dl, qui est pris en compte [Fig-189].

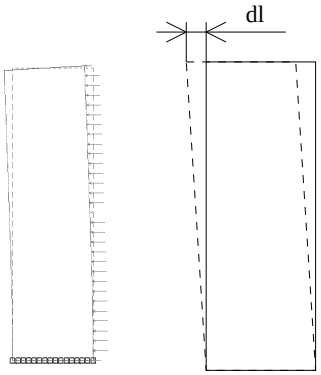


Fig – 188

Fig – 189

Variation du maillage.

Le maillage est avant tout défini par l'intermédiaire du nombre d'éléments qui le compose. L'étude commence par un maillage peu dense [Fig-190], et se poursuit en augmentant le nombre d'éléments [Fig-191].

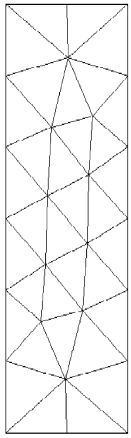


Fig – 190

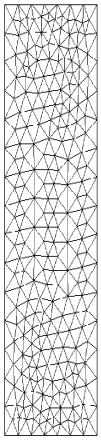


Fig – 191

Calcul du déplacement avec un cas de charge imposé.

A partir d'un cas de charge constant, le logiciel de calcul fournit le déplacement de l'arête supérieure gauche [70, RDM-Le MANS-2000]. Le seul paramètre qui évolue dans les simulations est le nombre d'éléments qui compose le parallélépipède, c'est à dire la densité de maillage.

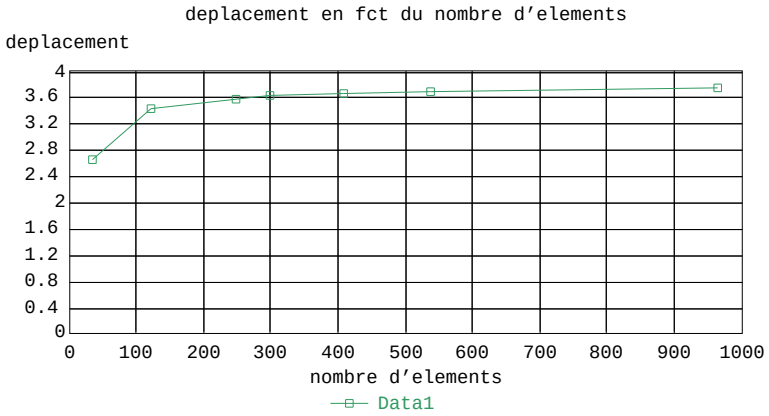


Fig – 192

En examinant les résultats [Fig-192], il apparaît très vite que l'ordre de grandeur, pour le déplacement, est atteint pour un nombre très faible d'éléments (250-300). Une augmentation du nombre d'éléments ne sera plus significative à partir de 500 éléments.

4.5 Mesure du module d'élasticité du matériau de test pour une concentration de liant variable

Le matériau de test est une composition de gélatine diluée dans de l'eau. Le résultat est un matériau composite homogène de module d'élasticité très faible. Toutefois, ce module d'élasticité doit dépendre des proportions de matière première dans le mélange. Il est utile de connaître l'évolution des caractéristiques du matériau en fonction de la concentration de liant. En particulier plusieurs questions vont être abordées :

- quel mode opératoire va limiter la dispersion des mesures.
- comment faire pour atteindre une précision de l'ordre de 10% pour le module d'élasticité.

Rappel de la procédure de test.

Un essai de compression sur une éprouvette de matériau de test dont la géométrie est donnée ci- dessous est réalisé [Fig-193].

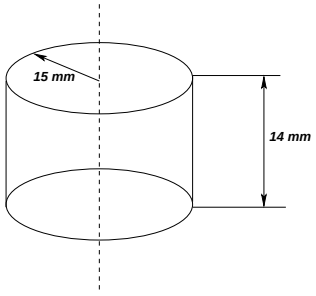


Fig – 193

Vis à vis de cette géométrie, il est très simple d'en déduire la surface en contact avec les plateaux horizontaux : 0.000706857 m^2 (πr^2). Le calcul de la déformation sera de la forme $\varepsilon = \triangle x/14$ si $\triangle x$ est exprimé en mm. Comme base de travail, un volume de 11 ml d'eau est associé à une plaque de 30 cm^2 de gélatine. Pour faire

varier la concentration du liant, il suffit de faire revenir à l'état liquide le cylindre de test et de lui ajouter 11 ml d'eau, ou un multiple de ce volume, pour passer à l'essai suivant.

Déplacement en fonction de la charge. (dilution = 1)

– Cet essai va être mis à profit pour montrer qu'un simple retournement de l'éprouvette provoque une variation importante du module d'elasticité mesuré.

Plusieurs essais sont réalisés, de manière à pouvoir évaluer la précision des mesures. La charge (masse) est donnée en grammes et le déplacement (dx) en 1/100 de mm. Les résultats associés à ces 7 essais sont présentés sous forme d'un tableau de mesures [Tab-5.a et Tab-5.b].

masse (g)	essai-1 dx (1/100 mm)	essai-2 dx (1/100 mm)	essai-3 dx (1/100 mm)
0	0	0	0
10	2.5	2	2.1
20	5	5	5.2
30	7.5	7	8.1
40	10.2	9.9	10.1
50	13	12.8	13

$Tab - 5.a$

masse (g)	essai-4 dx (1/100 mm)	essai-5 dx (1/100 mm)	essai-6 dx (1/100 mm)	essai-7 dx (1/100mm)
0	0	0	0	0
10	2	2.5	2.8	2
20	5	6	5	5
30	8	8.5	7.8	8
40	11	11	11.7	11.2
50	14	14.2	15	15

$Tab - 5.b$

Comme la surface de contact est connue, il est très facile de calculer la contrainte de compression ainsi que la déformation. Ces résultats, contraintes et déformations, apparaissent dans le tableau 6 [Tab-6.a et Tab-6.b].

contrainte $(N.m^2)$	essai-1 déformation	essai-2 déformation	essai-3 déformation
0.00	0.00	0.00	0.00
138.78	0.00178	0.001428	0.0015
277.56	0.00357	0.003571	0.003714
416.34	0.005214	0.005	0.005785
555.12	0.007285	0.007071	0.007214
693.9	0.009285	0.009142	0.009257

$Tab-6a$

contrainte $(N.m^2)$	essai-4 déformation	essai-5 déformation	essai-6 déformation	essai-7 déformation
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
137.78	0.001428	0.001785	0.002	0.001428
277.56	0.003574	0.004285	0.003571	0.003571
416.34	0.005714	0.006071	0.005571	0.005714
555.12	0.007857	0.007857	0.008357	0.008
693.9	0.01	0.01014	0.010714	0.010714

$Tab-6b$

Pour chaque essai, on peut calculer le module d'élasticité en utilisant les méthodes de régression linéaire et les résultats sont donnés par l'intermédiaire du tableau 7 [Tab-7].

$$\begin{array}{lll} essai-1 & 75101 & N/m^2 \\ essai-2 & 75536 & N/m^2 \\ essai-3 & 73928 & N/m^2 \\ essai-4 & 67778 & N/m^2 \\ essai-5 & 68545 & N/m^2 \\ essai-6 & 64480 & N/m^2 \\ essai-7 & 63902 & N/m^2 \end{array}$$

$Tab-7$

Les essais 1 à 3 et 4 à 7 sont réalisés dans les mêmes conditions. Toutefois, entre l'essai 3 et 4, l'éprouvette est retournée pour évaluer l'influence des manipulations [Tab-8].

	Module d'élasticité Valeur Moyenne de l'échantillon $(N.m^2)$	écart type de l'échantillon
essai 1 à 3	74 855	831
essai 4 à 7	66 176	2325

$Tab - 8$

Il est clair que les manipulations interviennent de manière importante dans la mesure. En particulier, cette opération de retournement peut être utilisée pour vérifier le mode opératoire. Une trop grande différence dans les modules d'élasticité peut avoir comme origine une mauvaise manipulation.

– En conclusion, la valeur moyenne du module d'élasticité associé à cet essai est de l'ordre de 71 000 N/m^2 ; un moyen de vérification du bon déroulement de l'essai peut être obtenu en retournant l'éprouvette et ce retournement ne doit pas engendrer de variation importante.

Déplacement en fonction de la charge. (dilution = 2)

– Cet essai va être mis à profit pour montrer qu'une précontrainte plus importante peut suffire à retrouver des conditions plus favorables de mesure suite à un retournement de l'éprouvette.

Plusieurs essais sont réalisés de manière à pouvoir évaluer la précision des mesures, mais cette fois, une précontrainte plus importante est présente (30 à 40 g). La charge (masse) est donnée en grammes et le déplacement (dx) en 1/100 de mm [Tab-9a et Tab-9b].

masse (g)	essai-1 dx (1/100 mm)	essai-2 dx (1/100 mm)	essai-3 dx (1/100 mm)
0	0	0	0
10	3.5	3.5	4
20	8	8.	7.5
30	13	12.5	11.5
40	17	15.5	16.5
50	21.5	21.	20.

$Tab - 9.a$

masse (g)	essai-4 dx (1/100 mm)	essai-5 dx (1/100 mm)	essai-6 dx (1/100 mm)	essai-7 dx (1/100 mm)
0	0	0	0	0
10	3	3	4	4.1
20	8	9	8.5	9.
30	12	12	13	12.5
40	17	16	17.5	18
50	21	20.8	21.5	23.

$Tab - 9.b$

En suivant la même procédure que celle employée au paragraphe précédent, il est très facile de calculer la contrainte de compression ainsi que la déformation [Tab-10.a et Tab-10.b].

contrainte (N/m^2)	essai-1 déformation	essai-2 déformation	essai-3 déformation
0.00	0.00	0.00	0.00
138.78	0.0025	0.0025	0.002857
277.56	0.005714	0.005714	0.005356
416.34	0.009285	0.008927	0.008213
555.12	0.01214	0.01106	0.01178
693.90	0.01535	0.015	0.01428

$Tab - 10.a$

contrainte (N/m^2)	essai-4 déformation	essai-5 déformation	essai-6 déformation	essai-7 déformation
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
138.78	0.002142	0.002142	0.002857	0.002928
277.56	0.005714	0.006428	0.006071	0.006428
416.34	0.00857	0.00857	0.009285	0.008928
555.12	0.01214	0.01142	0.01249	0.012
693.90	0.015	0.0155	0.01535	0.01725

$Tab - 10.b$

Pour chaque essai, le module d'élasticité est calculé en utilisant les méthodes de régression linéaire [Tab-11].

$essai-1$	44441	N/m^2
$essai-2$	46736	N/m^2
$essai-3$	48055	N/m^2
$essai-4$	45460	N/m^2
$essai-5$	45173	N/m^2
$essai-6$	44599	N/m^2
$essai-7$	41873	N/m^2

$Tab-11$

L'éprouvette a été retournée plusieurs fois. Mais en imposant une précontrainte plus forte. Il n'apparaît pas de groupement de mesures comme précédemment.

– En conclusion, la valeur moyenne du module d'élasticité, associé à cet essai, est de l'ordre de 45 000 N/m^2 et la précontrainte est suffisante pour éviter des regroupements de mesure.

Déplacement en fonction de la charge. (dilution = 3)

– Cet essai va être mis à profit pour évaluer la précision associée au module d'élasticité.

Pour ces essais, la précontrainte est appliquée. La charge (masse) est donnée en grammes et le déplacement (dx) en 1/100 de mm [Tab-12.a et Tab-12.b].

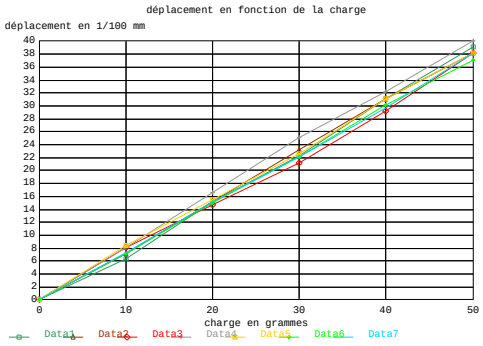
masse (g)	essai-1 dx (1/100 mm)	essai-2 dx (1/100 mm)	essai-3 dx (1/100 mm)
0	0	0	0
10	6.2	7	8
20	15	15	14.5
30	22.2	23	21
40	31	31	29
50	39	38	x

$Tab-12.a$

masse (g)	essai-4 dx (1/100 mm)	essai-5 dx (1/100 mm)	essai-6 dx (1/100 mm)	essai-7 dx (1/100 mm)
0	0	0	0	0
10	8	8.2	7	7.2
20	16.5	15.3	14.9	15
30	25	22.5	22	22
40	32	31	30	29.5
50	40	38	37	38

$Tab - 12.b$

La présence de deux groupements différents est plus difficile à observer. Le retournement de l'éprouvette est réalisé à partir de l'essai 4. Une forme graphique de ces résultats est présentée par l'intermédiare de la figure 194.



$Fig - 194$

Il est très simple de calculer la contrainte de compression ainsi que la déformation. Les résultats de ces calculs sont mis sous la forme du tableau [Tab-13.a et Tab-13.b].

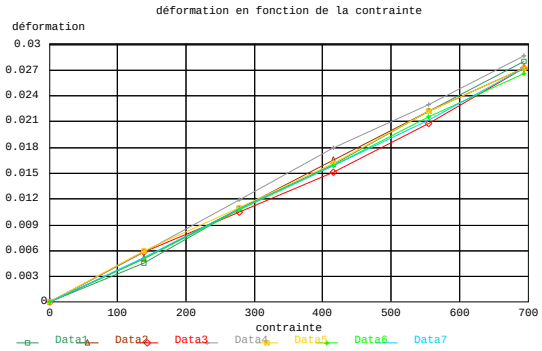
contrainte (N/m^2)	essai-1 déformation	essai-2 déformation	essai-3 déformation
0	0	0	0
138.78	0.004428	0.005	0.005714
277.56	0.010714	0.01071	0.010357
416.34	0.01585	0.01642	0.015
555.12	0.02214	0.02214	0.020714
693.9	0.02785	0.02714	0.02714

$Tab - 13.a$

contrainte (N/m^2)	essai-4 déformation	essai-5 déformation	essai-6 déformation	essai-7 déformation
0	0	0	0	0
138.78	0.005714	0.005857	0.005	0.005142
277.56	0.001178	0.01092	0.01064	0.010714
416.34	0.01785	0.01607	0.01571	0.01571
555.12	0.02285	0.02214	0.02142	0.021071
693.9	0.02857	0.02714	0.02642	0.027142

$Tab - 13.b$

Et sous forme graphique [Fig-195].



$Fig - 195$

Pour chaque essai, on peut calculer le module d'élasticité en utilisant les méthodes de régression linéaire. Ces résultats sont associés au tableau 14. Il est à remarquer que la série N°4 s'éloigne des autres.

$$\begin{array}{ll} essai-1 & 24544 \quad N/m^2 \\ essai-2 & 25173 \quad N/m^2 \\ essai-3 & 26120 \quad N/m^2 \\ essai-4 & 24227 \quad N/m^2 \\ essai-5 & 25588 \quad N/m^2 \\ essai-6 & 26046 \quad N/m^2 \\ essai-7 & 25750 \quad N/m^2 \end{array}$$

$Tab - 14$

Si le calcul de l'écart type associé à cet échantillon est réalisé en utilisant les 7 mesures, il est de 734 N/m^2. Par contre, si le résultat issu de la série N°4 n'est pas pris en compte, l'écart type est plus petit et il vaut : 594 N/m^2.

Mais cet écart type, calculé à partir de l'échantillon, n'est pas l'écart type réel associé au système de mesure. Il est possible d'avoir une estimation de cet écart type avec un certain intervalle de confiance en utilisant la distribution du Khi-deux. Dans cette méthode, il faut tenir compte du nombre de mesures.

En utilisant les résultats associés au tableau 14 et en ommetant l'essai N°4, il est clair que l'écart type issu de l'expérience est plus faible. Mais l'absence d'un essai engendre-t-il une augmentation importante de l'intervalle de confiance ?

L'une des bornes de l'intervalle de confiance de l'écart type est donné par la relation ci dessous :

$$\hat{s} = s\frac{\sqrt{N-1}}{\chi_x}$$

Dans le cas présent, si la limite de confiance sur l'écart type est de 95%, alors : $\chi_x = \chi_{0.05} = 1.15$ pour N=6 et $\chi_x = \chi_{0.05} = 1.64$ pour N=7.

nombre de mesures	écart type de l'échantillon	estimation de l'écart type (Limite de confiance à 95 %)
6	594	1191
7	734	1096

$Tab - 15$

Il apparait que, même avec une mesure qui semble erronée, l'écart type estimé associé aux 7 mesures est encore favorable. Choisir un intervalle de confiance de 95 % permet d'avoir un bon niveau de probabilité sur la connaisance de l'écart type réel (σ).

Cet écart type peut maintenant être mis à profit pour donner une information sur la précision du module d'élasticité. En associant à la valeur moyenne du module d'élasticité une tolérance de +/- 2σ, la probabilité d'avoir le module d'élasticité dans cet intervalle est de 90% (0.95^2).

E = 25 349 N/m^2 +/- 2 192 N/m^2

– En conclusion, la valeur moyenne du module d'élasticité associé à cet essai est de l'ordre de 25 000 N/m^2 et la précision sur cette valeur, avec une probabilité de 90 % est de l'ordre de 2 200 N/m^2. Il apparait que la précision sur le module d'élasticité est meilleure que 10 % (8.8 % réel).

Conclusion sur le module d'élasticité en fonction de la dilution.

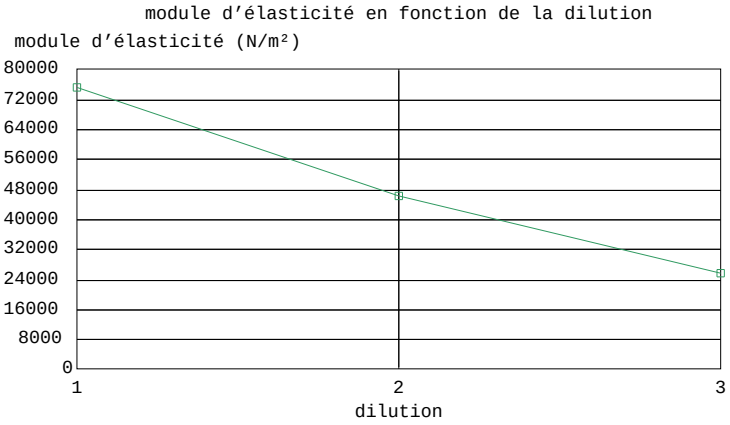


Fig – 196

Le module d'élasticité est proportionnel à la quantité de liant [Fig-196].

Conclusion sur la précision du système de mesure.

Une précision de 10 % est souhaitable. Il apparaît que cette précision est atteinte à partir du moment où un nombre d'essais suffisant est réalisé et qu'une précontrainte est appliquée au niveau de l'éprouvette. La dernière expérience montre qu'avec 7 essais, le module d'elasticité est connu avec une erreur de 8.8 %. Par contre, le trop faible module d'élasticité, associé au matériau, le rend plus difficile à manipuler.

4.6 Mesure de la perméabilité relative à l'aide de la mesure des DDP fournies par la bobine de détection

Le matériau de test est une composition de gélatine, diluée dans de l'eau, associée à de la poudre de fer. Une éprouvette, de taille suffisante pour réaliser trois échantillons, est utilisée pour vérifier la dispersion des mesures de perméabilité relative.

Rappel de la procédure de test.

Il faut mesurer la ddp aux bornes de la bobine de détection avec et sans matériau de test dans l'entrefer, alors qu'un courant sinusoïdal de 0.5 Aeff est appliqué aux deux autres bobines. La structure complète retenue pour ces essais est présentée en Figure 197.

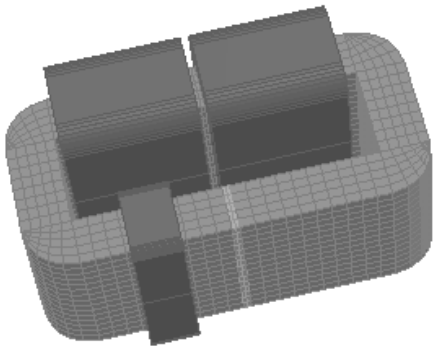


Fig – 197

La ddp est mesurée à l'aide d'un voltmètre et c'est la valeur efficace de cette tension qui sera retenue comme grandeur représentative du flux circulant au niveau de la bobine de détection. Le courant dans les deux enroulements principaux est maintenu constant. . Pour un courant sinusoïdal dans les enroulements principaux, une tension sinusoïdale est présente au niveau de la bobine de détection si le système a un comportement linéaire. Le comportement linéaire de la structure est vérifié à l'aide d'un oscilloscope. Pour vérifier si un signal est sinusoïdal, il suffit de visualiser la différence entre ce signal et un signal de référence sinusoïdal. Le résultat est un signal dont la valeur est nulle à tout instant.

essai-1

La tension à vide est de V1=1.41 Volts.
En présence de matériau de test :
2.01 Volts
2.02 Volts
2.01 Volts

Moyenne : V2=2.01 Volts

essai-2

La tension à vide est toujours de V1=1.41 Volts

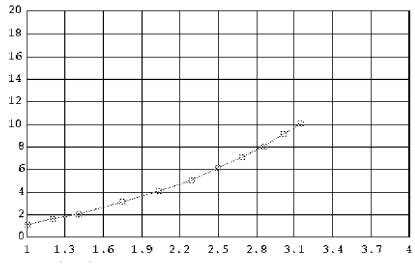
En présence de matériau de test :
1.99 Volts
1.97 Volts
1.99 Volts
Moyenne : V2=1.99 Volts

essai-3

La tension à vide est de V1=1.41 Volts
En présence de matériau de test :
2.01 Volts
2.02 Volts
2.02 Volts
Moyenne : V2=2.02 Volts

Utilisation de la courbe d'étalonnage [Fig-198]

Perméabilité relative



Rapport entre le flux mesuré en présence du matériau test et le flux mesuré en présence d'air

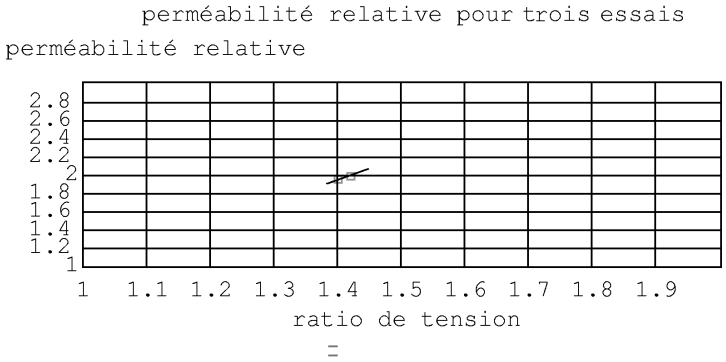
$Fig-198$

Le moyen d'essai ainsi que la courbe d'étalonnage sont présentés au niveau du chapite 3 paragraphe 3.1. En conséquence, on se limitera à son exploitation. Comme la tension relevée aux bornes de la bobine de détection est proportionnelle au flux, le rapport entre le flux mesuré en présence du matériau de test et le flux mesuré en présence d'air peut être assimilé à V1/V2. En particulier, entre 1.3 et 1.9, la courbe peut être modélisée sous la forme $\mu_r = 3.132108 \times (V1/V2) - 2.466108$. L'utilisation de cette équation conduit aux résultats associés au tableau [Tab-16].

$V1$	$V2$	$V1/V2$	μ_r
2.01 Volts	1.41 Volts	1.42	1.9814
1.99 Volts	1.41 Volts	1.40	1.9188
2.01 Volts	1.41 Volts	1.42	1.9814

$Tab - 16$

A partir de ces trois essais, une représentation graphique montrant la dispersion de la mesure peut être construite [Fig-199].



$Fig - 199$

Une valeur moyenne de 1.960 pour la perméabilité relative est obtenue. Il est aussi possible d'en déduire un intervalle de confiance en utilisant la méthode présentée au paragraphe 4.5.Neuf mesures de V2 sont réalisées. L'écart type associé à cet échantillon est de 0.0165. Avec une limite de confiance à 95%, une estimation de l'écart type (σ) est de 0.017. La faible valeur de cet écart type estimé montre qu'une précision de 2 σ (0.034) conduit à une précison de l'ordre de 1,7 % sur la perméabilité relative.

Conclusion sur les essais.

Avec une précison de 8,8 % sur le module d'élasticité et une précision de 1,7 % sur la perméabilité relative, il est possible d'espérer une précision de l'ordre de 10 % sur le calcul de la déformation.

Bibliographie

[1] YONG WANG, K.T. CHAU, C.C. CHAN & J.Z. JIANG, Transient Analysis of a New Outer-Rotor Permanent-Magnet Brushless DC Drive Using Circuit-Field-Torque Time-Stepping Finite Element Method. COMPUMAG 2-5 July 2001 (Evian France)

[2] G.DIETER, Philips Research Laboratories, The audible noise of induction machines compared for diffrenet mathods of calculating the air-gap filed, ICEM 1994

[3] R.L. STOLL & I. SEIBERT. , Tooth Ripple loss in solid Pole Faces, ICEM 94.

[4] S. JAYARAMAN & E.G. STRANGAS, Iron Losses From Time Dependent Finite Element Solutions. ICEM 1994.

[5] R. FEYNMAN, Le cours de Physique de Feynman, Tome 1 Electromagnétisme

[6] R. FEYNMAN, Le cours de Physique de Feynman, Tome 2 Electromagnétisme

[7] L.LANDAU & E.LIFCHITZ, Physique théorique (tome 1 : Mécanique), édition MIR 1988

[8] L.LANDAU & E.LIFCHITZ, Physique théorique (Tome 7 : Théorie de l'élasticité), édition MIR 1990

[9] L.LANDAU & E.LIFCHITZ, Physique théorique (Tome 8 : Electrodynamique des milieux continus), édition MIR 1990

[10] V.FEODOSSIEW, Résistance des matériaux, édition MIR 1971

[11] S.TIMOSHENKO, Théorie de l'élasticité, Librairie polytechnique CH.BERANGER 1936

[12] S.TIMOSHENKO, Théorie des vibrations, Librairie polytechnique CH.BERANGER 1939

[13] V.MIGOULINE V.MEDVEDEV E.MOUSTEL V.PARYGUINE, Fondement de la théorie des oscillations, édition MIR 1991

[14] J-L.BATOZ & G.DHATT, Modélisation des structures par éléments finis (Volume 1 solides élastiques), édition HERMES 1990

[15] J-L.BATOZ & G.DHATT, Modélisation des structures par éléments finis (Volume 2 Poutres et plaques), édition HERMES 1990

[16] G.DHATT & G.TOUZOT, Une présentation de la méthode des éléments finis, (Deuxième édition), MALOINE SA éditeur 1984

[17] D.SIVOUKHINE,Cours de physique générale, Tome 3 Electricité, édition MIR 1983

[18] R.LEHOUCQ, La taille des molécules, (pages 96-97) POUR LA SCIENCE - MAI 1999

[19] G.BOEBINGER A.PASSNER J.BEVK, Les aimants les plus puissants du monde, (pages 62-68) POUR LA SCIENCE - AOUT 1995

[20] M.DJABOUROV J-M.GUENET, Les gels, des liquides qui ne coulent pas, (pages 50-57) POUR LA SCIENCE - SEPTEMBRE 1995

[21] DONG-HUN K, Ji-KWANG Lee & SONG-YOP Hahn, New Levitation Scheme with AC Superconducting Magnet for EDS MAGLEV System. IEEE Transaction on magnetics (Vol 32 N°5 September 1996)

[22] I.RAMESOHL, G.HENNEBERGER, S.KUOPPERS & W.HADRYS, Three Dimensional Calculation of Magnetic Forces and Displacements of a Claw-Pole Generator. IEEE Transaction on magnetics (Vol 32 N°3 May 1996)

[23] G.HAINSWORTH, P-J.LEONARD & D.RODGER, Finite Element Modelling of Magnetic Compression Using Coupled Electromagnetic-Structural Codes. IEEE Transaction on magnetics (Vol 32 N°3 May 1996)

[24] N.SADOWSKI, Y.LEFEVRE, M.LAJOIE-MAZENC & J-P-A BASTOS, Sur le calcul des forces magnétique. Journal de Physique III France 2 (1992) 859-870

[25] G.HENNEBERGER, Ph K.SATTLER, D.SHEN, Nature of the equivalent magnetizing current for the force calculation. IEEE Transaction on magnetics (Vol 28 N°2 March 1992)

[26] W.MULLER, Comparison of different methods of force calculation, IEEE Transaction on magnetics (Vol 26 N°2 March 1990)

[27] MURRAY R.SPIEGEL, Probabilité et Statistique : cours et problèmes, McGraw-Hill , Série Schaum (1992)

[28] A.VESSEREAU, La Statistique, Presse universitaires de france , 1986

[29] S.AÏVAZIAN, Etudes Statistiques des Dépendances, Edition de Moscou , 1978

[30] S.LIPSCHUTZ, Probabilité, Cours et problèmes, McGraw-Hill, Série Schaum (1978)

[31] G.REYNE, J.C. SABONNADIERE, J.F. IMHOFF, Finite element modeling of electromagnetic force densities in DC machines. IEEE Transaction on magnetics (Vol 24 N°6 November 1988)

[32] A.N. WIGNALL, A.J. GILBERT, S.J. YANG, Calculation of forces on magnetised ferrous cores using the maxwell stress method. IEEE Transaction on magnetics (Vol 24 N°1 Janury 1988)

[33] M.MARINESCU, Numerical computation of torques in permanent magnet motors by maxwell stresses and energy method. IEEE Transaction on magnetics (Vol 24 N°1 Janury 1988)

[34] S.McFEE, J.P. WEBB, D.A. LOWTHER, A tunable volume integration formulation for force calculation in finite-elemnt based computational magnetostatics. IEEE Transaction on magnetics (Vol 24 N°1 Janury 1988)

[35] T.TARNHUVUD, K.REICHERT, Accuracy problems of force and torque calculation in FE-systems. IEEE Transaction on magnetics (Vol 24 N°1 Janury 1988)

[36] J.MIZIA, K.ADAMIAK, A.R.EASTHAM, G.E. DAWSON, Finite lement force calculation : Comparison of methods for electri machines. IEEE Transaction on magnetics (Vol 24 N°1 Janury 1988)

[37] T.KABASHIMA, A.KAWAHARA, T.GOTO, Force calculation using magnetizing currents. IEEE Transaction on magnetics (Vol 24 N°1 Janury 1988)

[38] S.RATNAJEEVAN, H.HOOLE, Flux density and energy parturbations in adaptive finite element mesh generation. IEEE Transaction on magnetics (Vol 24 N°1 Janury 1988)

[39] K.MIYATA, K.MIYA, Magnetic field and stress analysis of saturated steel. IEEE Transaction on magnetics (Vol 24 N°1 Janury 1988)

[40] G.REYNE, G.MEUNIER, J.H. IMHOFF, E.EUXIBIE, Magnetic forces and mechanical behaviour of ferromagnetic materials. Presentation and results on the theorical, experimental and numerical approaches. IEEE Transaction on magnetics (Vol 24 N°1 Janury 1988)

[41] ZHONG-QING YOU, YU-SHI SUN, ZHONG-WEI JIANG, Determination of the current equivalent parameters for the fictitious magnetic monopole model of magnetostatic problems. IEEE Transaction on magnetics (Vol 24 N°1 Janury 1988)

[42] G.S.PARK, S.H.PARK, Determination of the curvature of the magnetic fluid under the external forces. COMPUMAG July 2-5 2001.

[43] CHANG SEOP KOH, JAE-SEOP RYU, EUNG-SOO SHIN, Finite element analysis of the mechanical vibration of a spindle system under electromagnetic excitations. COMPUMAG July 2-5 2001.

[44] I.TSUKERMAN, J.D. LAVERS, A. KONRAD, finite element analysis of static and time-depend fields and forces in a synchronous motor. ISEM 5-8 september 1994.

[45] F. DELFINO, Some Numerical Aspect in Electrodynamics of Magnetic Materials. ICS Newsletter, Vol 8, No 3, November 2001

[46] J-L. COULOMB, Comments about the technical article : Some Numerical Aspect in Electrodynamics of Magnetic Materials. ICS Newsletter,

[47] F. DELFINO, Comments about Prof. J-L.COULOMB's notes about my article entitled : Some Numerical Aspect in Electrodynamics of Magnetic Materials . ICS Newsletter

[48] J.P. STURGESS , force calculations for finite-element simulations of time varying fileds, ICEM 5-8 september 1994

[49] O.BARRE & F.PIRIOU, Calculation and Measure of Displacement Due to Magnetic Fields. 2^{nd} International Seminar On Vibrations and Acoustic Noise of Electric Machinery, 1-3 June 2000.

[50] J-L.COULOMB, A Methodology For The determination Of Global Electromechanical Quantities From A Finite Element Analysis And Its Application To the Evaluation Of Magnetic Forces, Torques and Stiffness. IEEE Transactions on Magnetics Vol. MAG-19 November 1983.

[51] B.BOUALEM & F.PIRIOU , Presentation of an unified algoritm to calculate local force with virtual works method, International Seminar On Vibrations And Acoustic Noise of Electric Machine, Béthune 1998.

[52] I.RAMESOHL, G.HENNEBERGER. Three Dimensional Calculation of Magnetic Forces and Displacements of a Claw-Pole Generator. IEEE Transaction On Magnetics Vol 32 NO 3 May 1996.

[53] G.FOURNET, Electromagnétisme à partir des équations locales . Masson Paris 1985.

[54] E. DURAND, Magnétostatique Masson Paris, 1968

[55] C.J. CARPENTER, Surface-integral methods of calculating forces on magnetized iron parts. IEE-Monograph, N.342, pp. 19-28, August 1959.

[56] E. de LACHEISSERIE, Magnétisme - Tome 1 Fondements , Collection Grenoble Science 1999.

[57] E. de LACHEISSERIE, Magnétisme - Tome 2 Matériaux et applications, Collection Grenoble Science 1999.

[58] G. EMSCHWILLER , La chimie physique, édition “Que Sais-je”

[59] R. FEYNMAN, Le cours de Physique de Feynman, Tome 1 Mécanique

[60] R. FEYNMAN, Le cours de Physique de Feynman, Tome 1 Mécanique

[61] N. SADOWSKI , Modélisation Des Machines Electriques A Partir De La Résolution Des Equations Du Champ En Tenant Compte Du Mouvement Et Du Circuit D’alimentation. Thèse de Doctorat de L’institut National Polytechnique de Toulouse - 1993

[62] J-C. MAXWELL , Traité d’Electricité et de Magnétisme TOME II , Editions Jacques GABAY.

[63] L. HIRSINGER, Etude des déformations magnéto-élastiques dans les matériaux ferromagnétiques doux. Thèse de Doctorat de l’Université PARIS 6 - 1994

[64] V. SMIRNOV, Cours de Mathématiques supérieures (Tome 2) édition MIR 1988

[65] V. PISKOUNOV , Calcul Différentiel et Intrégral (Tome 2) édition MIR 1987

[66] A.G. ALEXEEV, B.V. ISIKOVITCH, Relation of Magnetic Elastomer Strain to there magnetic properties. ISEM - Sep 1995

[67] F. HENROTTE, G. DELIEGE, K. HAMEYER, The eggshell method for the computation of electromagnetic forces in 2D and 3D. EMF-2003, Aachen 6-9 October 2003

[68] Ch. SCHLENSOK, G. SCHNEELOCH, G. HENNBERGER, Analysis of stator-teeth forces in induction machines with squirrel cages using 2D-FEM. EMF-2003, Aachen 6-9 October 2003.

[69] Opera - Vector Fields : PC-OPERA 2D, PC-OPERA 3D, Tosca, Elektra Reference manuals. (2001)

[70] RDM Le MANS : Version 5 (2000) : Logiciel de calcul élément fini en mécanique , Yves DEBARD, IUT Le MANS

[71] F.X. ZGAINSKI, J.L. COULOMB, Y.MARECHAL. A Tool box for 3-D mesh generation in electromagnetism and electromechanical engineering. IEEE, Transactions on magnetics Vol 32, N°3 May 1996.

[72] P. ARNOULD. Modélisation par réseau de neuronne d’une inductance saturable. Mémoire de DEA, Université de LILLE-1 (2000).

[73] O.BARRE. P.BROCHET. Discrimination of stress formulae induced by magnetic field experimentation and numerical simulation. EMF-2003, Aachen 6-9 October 2003.

[74] G.REYNE J.C. SABONNADIERES J.L. COULOMB P.BRISSONNEAU. A survey of the main aspects of magnetic forces and mechanical behaviour of ferromagnetic materials under magnetisation. IEEE, Transaction on magnetics Vol-23, N°5, September 1987.

[75] J.F. IMHOFF, G.REYNE, A.FOGGIA, J.C. SABONNADIERES. Modélisation des phénomènes électromagnétiques et mécaniques : Application à l'analyse vibratoire des machines électriques. Revue Phys. Appl. N°25 Juillet 1990.

[76] L.H. DE MEDEIROS, G.REYNE, G.MEUNIER. Force electromagnétique sur les matériaux ferromagnétiques durs. Journée Vibrations et bruit acoustique des machines électriques : LESIR, ENS-Cachan avril 1997.

[77] M.E.H. BENBOUZID, G.REYNE, J.C. SABONNADIERE, F.CLAEYSSEN. An energy functional for nonlinear finite element modelling of TERFENOL-D rods. Proceeding of the GMM&A Symp, Nov. 92 (International Symposium on giant magnetostrictive materials and their applications).

Contribution à l'étude des formulations de calcul de la force magnétique en magnétostatique, approche numérique et validation expérimentale

Par Olivier BARRE

Résumé: Ce mémoire présente une étude des méthodes de calcul de la force engendrée par les champs magnétiques sur les matériaux linéaires en magnétostatique et se propose d'en comparer les performances sur les matériaux de faibles perméabilités. Les démonstrations de ces méthodes sont abordées et les hypothèses mises en évidence. Pour discriminer les formulations, courants équivalents, masses magnétiques équivalentes, tenseur de Maxwell, dérivée de l'énergie, une expérience et les mesures associées sont conçues par calcul de champ. Un matériau spécifique, de faible module d'élasticité est également synthétisé. Plongé dans un champ magnétique, un volume de test de ce matériau se déforme. Chaque formulation permet d'obtenir une répartition des contraintes sur le volume. Pour chaque répartition, la déformation du volume est calculée. Chaque déformation est comparée à celle qui est obtenue expérimentalement. Il apparaît que les méthodes énergétiques sont les plus précises.

Mots Clefs : méthode des éléments finis, méthodes de calcul des forces d'origine magnétique, modélisation par les courants équivalents, modélisation par les masses magnétiques équivalentes, modélisation par les masses magnétiques et les courants surfaciques équivalents, méthodes énergétiques, mesure de perméabilité relative, mesure sans contact, matériaux magnétiques composites linéaires, méthodes de validation expérimentales.

Contribution to the study of magnetic force formulations in magneto static field, numerical point of view and experimental validation.

Abstract: This thesis presents methods associated to calculation of forces generated on linear material by magnetostatic fields. It proposes also to compare their accuracy on material with low permeability. The demonstration of these methods are taken into account and assumptions are highlighted. To discriminate these formulations, equivalent currents, equivalent magnetic masses, Maxwell's Tensor, energy principle, an experiment and all associated measurements are designed by field calculation. A specific material with low modulus of elasticity is also synthesized. Under a magnetic field, a volume of such test material must provide significant deformations. Each formulation is able to provide stress distribution on this test volume. For each distribution, the deformation of volume is calculated. Each deformation is compared to the deformation provided by the experiment. It appeared that energy method is the most accurate method.

Keywords: finite element method, methods for magnetic stress calculation, equivalent currents modelling, equivalent magnetic masses modelling, equivalent surface magnetic masses and currents modelling, energy method, relative permeability measurement, measure without contact, linear composite magnetic materials, validation with experimental methods.