



**HAL**  
open science

# Génération de résidus directionnels pour le diagnostic des systèmes linéaires stochastiques et la commande

Hicham Jamouli

► **To cite this version:**

Hicham Jamouli. Génération de résidus directionnels pour le diagnostic des systèmes linéaires stochastiques et la commande. Automatique / Robotique. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2003. Français. NNT: . tel-00005813

**HAL Id: tel-00005813**

**<https://theses.hal.science/tel-00005813>**

Submitted on 7 Apr 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UFR Sciences et Techniques Mathématiques Informatique Automatique  
Ecole Doctorale IAEM Lorraine



# THÈSE

présentée pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1

(Spécialité Automatique)

par

Hicham Jamouli

## Génération de résidus directionnels pour le diagnostic des systèmes linéaires stochastiques et la commande tolérante aux défauts

soutenue publiquement le 19 décembre 2003

### Composition du jury

*Rapporteurs :*

C. COMMAULT Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble

G. GISSINGER Professeur à l'Université de Mulhouse

*Examineurs :*

M. OULADSINE Professeur à l'Université Aix Marseille III

F. KRATZ Professeur à l'Université d'Orléans

D. SAUTER Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1

J.Y. KELLER Maître de Conférences HDR à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1



A mes Parents,  
A tous mes Frères et Soeurs  
(Merci pour tous vos sacrifices)



# Remerciements

Je tiens à remercier les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de participer à l'examen de ce travail:

Monsieur C. COMMAULT, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, pour l'intérêt qu'il y a porté.

Monsieur G. GISSINGER, Professeur à l'Université de Mulhouse, d'avoir accepté de juger ce travail. Je le remercie également pour ses conseils et ses critiques constructives.

Monsieur M. OULADSINE, Professeur à l'Université d'Aix Marseille III, pour ses remarques enrichissantes sur le document.

Monsieur F. KRATZ, Professeur à l'Université d'Orléans, pour sa lecture minutieuse du manuscrit.

Monsieur J. Y. KELLER, Maître de conférence HDR à l'Université Henri Poincaré pour ses conseils scientifiques, son aide et ses critiques constructives mais surtout pour son soutien tout au long de ma thèse.

Je remercie vivement Monsieur D. SAUTER, Professeur à l'Université Henri Poincaré de Nancy, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe de recherche, ainsi que pour ses conseils, sa disponibilité et sa sympathie.

De même, j'associe mes remerciements Monsieur ALAIN RICHARD, Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1, pour sa sympathie et ses conseils.

C'est avec une attention particulière que je remercie Mr Fredouille, pour son aide, sa sympathie et pour les soirées passées ensemble, et la famille JOIN (Le grand et Madame Flo) pour les moments inoubliables passés ensemble dans le sud. Je remercie également Ericus pour sa sympathie et sa gentillesse, sans lui je pouvais pas rester tard le soir au labo. Bien sûr je n'oublie pas la famille Djermoune (MAGADI) pour leur aide et leur soutien. Je remercie également, Mr Manuel pour sa sympathie et pour ses plats mexicains.

Je souhaite également remercier tous les copains du babe : Fatih, Said, Michael, Samir, Vincent, LIIDOO, Stéphane et tous les autres membres du laboratoire : Marion, Hassan, Didier, Christophe, Jean-Christophe, Patrick, Thierry, Jean Marie, Hugues, Olivier, Sabine, Marcus, Davidouille, Yan.

# Table des matières

Remerciements	5
Introduction générale	13
<b>1 Diagnostic des systèmes linéaires stochastiques</b>	<b>15</b>
1.1 Introduction . . . . .	15
1.2 Espace de parité stochastique . . . . .	17
1.2.1 Définition . . . . .	17
1.2.2 Analyse stochastique . . . . .	18
1.2.3 Conclusion . . . . .	19
1.3 Filtre de Kalman et test du GLR . . . . .	19
1.3.1 Relation entre l'espace de parité et le filtre de Kalman . . . . .	20
1.3.2 Test du maximum de vraisemblance (GLR) . . . . .	21
1.3.3 Conclusion . . . . .	23
1.4 Filtres de détection . . . . .	23
1.4.1 Filtre détecteur $H_2$ sur un horizon infini . . . . .	24
1.4.2 Filtre détecteur $H_2$ sur un horizon fini . . . . .	25
1.5 Conclusion . . . . .	29
<b>2 Filtre de détection basé sur l'inversion du système</b>	<b>31</b>
2.1 Filtre de détection sans entrée inconnue . . . . .	31
2.1.1 Position du problème . . . . .	32
2.1.2 Premier cas: Reconstructeur parfait . . . . .	33
2.1.2.1 Paramétrisation des inverses à gauche du système . . . . .	33
2.1.2.2 Optimisation de l'inverse à gauche au sens $H_2$ . . . . .	35
2.1.3 Deuxième cas: Reconstructeur à temps minimum . . . . .	36
2.1.3.1 Analyse structurelle du filtre . . . . .	41
2.1.3.2 Exemple illustratif . . . . .	44
2.1.4 Interprétation physique de la paramétrisation du filtre . . . . .	46
2.1.5 Conclusion . . . . .	47
2.2 Filtre de détection à entrées inconnues . . . . .	47

2.2.1	Formulation du problème . . . . .	48
2.2.2	Conception du filtre . . . . .	50
2.2.3	Exemple illustratif . . . . .	53
2.2.4	Conclusion . . . . .	54
2.3	Application à la perte d'efficacité d'actionneurs . . . . .	54
2.3.1	Introduction . . . . .	54
2.3.2	Filtre détecteur pour l'estimation adaptative de la perte d'efficacité .	55
2.3.3	Exemple illustratif . . . . .	56
2.3.4	Conclusion . . . . .	57
2.4	Conclusion . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Commande tolérante aux défauts</b>	<b>59</b>
3.1	Introduction . . . . .	59
3.2	État de l'art de la commande tolérante aux défauts . . . . .	59
3.3	Commande tolérante à réactivité maximum . . . . .	65
3.3.1	Simulation . . . . .	70
3.3.2	Conclusion . . . . .	73
3.4	Commande tolérante additive . . . . .	73
3.5	Conclusion . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Commande tolérante additive: Application</b>	<b>77</b>
4.1	Présentation du système . . . . .	77
4.1.1	Schéma . . . . .	77
4.1.2	Hypothèses . . . . .	77
4.2	Modélisation: équations de bilan . . . . .	77
4.2.1	Bilan volumique . . . . .	78
4.2.2	Bilan calorimétrique . . . . .	79
4.3	Linéarisation . . . . .	80
4.3.1	Développement de Taylor au premier ordre de l'équation 4.4 . . . . .	80
4.3.2	Développement de Taylor au premier ordre de l'équation 4.5 . . . . .	81
4.3.3	Développement de Taylor au premier ordre de l'équation 4.6 . . . . .	81
4.3.4	Développement de Taylor au premier ordre de l'équation 4.19 . . . . .	82
4.3.5	Développement de Taylor au premier ordre de l'équation 4.20 . . . . .	82
4.3.6	Développement de Taylor au premier ordre de l'équation 4.21 . . . . .	83
4.4	Obtention du modèle d'état discret du système . . . . .	84
4.5	Résultats de la commande tolérante additive . . . . .	87
4.5.1	Conclusion . . . . .	98
	<b>Conclusion</b>	<b>99</b>

---

A Paramétrisation du filtre de détection de Park et Rizzoni (1994)	101
B Algorithme d'inversion de Silverman (1969)	103



# Table des figures

1.1	Implémentation du filtre isolateur . . . . .	29
2.1	Filtre de détection, Keller (1999) . . . . .	54
2.2	Filtre de détection à entrée inconnue . . . . .	54
2.3	Filtre de Kalman adaptatif de Wu et al. (1998) . . . . .	57
2.4	Filtre de détection . . . . .	57
3.1	Biais à saut successif . . . . .	66
3.2	Enrouleur de bande . . . . .	70
3.3	Sorties régulées, commande PI . . . . .	71
3.4	Entrées de commande, commande PI . . . . .	72
3.5	Sorties régulées, commande à réactivité maximum . . . . .	72
3.6	Entrées de commande, commande à réactivité maximum . . . . .	73
4.1	Montage de trois cuves. . . . .	78
4.2	Commande nominal de type PI . . . . .	88
4.3	Estimation du défaut donnée par le filtre de détection (W) . . . . .	88
4.4	Commande tolérante additive . . . . .	89
4.5	Commande nominale de type PI . . . . .	90
4.6	Estimation du défaut donnée par le filtre de détection (W) . . . . .	90
4.7	Commande tolérante additive . . . . .	91
4.8	Commande nominale de type PI . . . . .	92
4.9	Estimation du défaut donnée par le filtre de détection ( $m^3/s$ ) . . . . .	92
4.10	Commande tolérante additive . . . . .	93
4.11	Commande nominal de type PI . . . . .	94
4.12	Estimation du défaut donnée par le filtre de détection . . . . .	94
4.13	Commande tolérante additive . . . . .	95
4.14	Commande nominale de type PI . . . . .	96
4.15	Estimation du défaut donnée par le filtre de détection . . . . .	96
4.16	Commande tolérante additive . . . . .	97
4.17	Structure de la commande tolérante aux défauts . . . . .	98



# Introduction générale

Suite à la progression rapide des nouvelles technologies, les systèmes industriels sont de plus en plus complexes et l'opération de diagnostic est devenue indispensable pour assurer la sûreté de fonctionnement et la disponibilité de ces systèmes. Bénéficiant des outils déjà existants en automatique, la recherche dans le domaine du diagnostic a connu une évolution très importante qui lui a permis de développer plusieurs méthodes donnant une solution aux problèmes de la détection et de l'isolation multi-défauts. Dans certains systèmes complexes, comme dans l'aéronautique ou les centrales nucléaires, la phase de détection et de localisation d'un ou de plusieurs défauts est nécessaire mais n'est pas suffisante pour garantir la sûreté de fonctionnement car il est indispensable de modifier la loi de commande en temps réel afin de maintenir la stabilité du système et de garantir ainsi un fonctionnement acceptable en mode dégradé. Ainsi, il est nécessaire d'associer au diagnostic une loi de commande tolérante aux défauts.

Les méthodes de diagnostic que nous proposons reposent sur la connaissance d'un modèle capable de décrire précisément le fonctionnement du système à surveiller. Si un modèle décrivant le fonctionnement normal du système est disponible, l'opération de diagnostic des défauts comporte une phase d'extraction d'indicateur de défauts et une phase de prise de décision par des techniques statistiques d'évaluation des résidus. La génération d'indicateurs de défauts (ou résidus) permet d'évaluer un écart par rapport aux conditions normales de fonctionnement à partir des mesures effectuées sur le système et ainsi d'identifier la cause de tout changement anormal.

Pour notre étude, on se placera le plus souvent possible dans le cadre général des systèmes linéaires affectés par des perturbations stochastiques et déterministes. Le diagnostic basé observateur sera résolu par la conception d'un filtre isolateur de défauts permettant la détection, l'isolation et l'estimation optimale de l'amplitude des défauts sous des conditions d'existence moins restrictives que celles rencontrées lors de la conception des observateurs à entrées inconnues. Son intégration dans une loi de commande sera ensuite réalisée à partir d'un rebouclage interne prenant en compte l'estimation de l'amplitude des défauts produite par le filtre afin de corriger la loi de commande nominale du système. L'évaluation pratique de cette méthode sera réalisée à partir de son application sur un système d'enrouleur de bandes. Ce mémoire comporte 4 chapitres. Le premier chapitre présentera quelques généralités sur le diagnostic des systèmes linéaires stochastiques. Nous réaliserons ensuite une synthèse des

différentes méthodes de diagnostic reposant sur la théorie des filtres détecteurs de défauts. Le deuxième chapitre sera dédié à la synthèse d'un filtre isolateur de défauts permettant l'obtention d'une estimation optimale de l'amplitude des défauts. Par la suite, le domaine d'application de ce filtre sera étendu au cas des systèmes affectés par des perturbations déterministes. Une application particulière portera sur le traitement des défauts de type pertes d'efficacité d'actionneurs. Dans le troisième chapitre, nous présenterons un état de l'art pour la conception de lois de commande tolérantes aux défauts. Nous réaliserons l'intégration du filtre isolateur de défauts dans une loi de commande basée observateur afin d'obtenir une loi de commande tolérante aux défauts de types actionneurs et/ou capteurs. Enfin, le dernier chapitre présentera les résultats pratiques des méthodes proposées obtenus sur un système benchmark faisant parti du projet européen IFATIS.

# Chapitre 1

## Diagnostic des systèmes linéaires stochastiques

### 1.1 Introduction

Le diagnostic des systèmes dynamiques stochastiques est généralement effectué en deux étapes:

- \* Génération de résidus: cette première phase consiste à générer un signal résiduel reflétant la distance entre le modèle du système et son comportement observé au cours du temps.
- \* Prise de décision: Cette deuxième phase consiste à implémenter un test de détection sur les résidus générés afin de détecter et localiser la présence éventuelle d'un ou de plusieurs défauts sur la base du calcul d'un seuil de signification.

Dans ce mémoire, nous aurons comme objectif la simplification de la prise de décision (même si cette deuxième phase ne sera que très peu abordée dans cette thèse) par la génération de résidus reflétant directement l'amplitude des défauts afin de permettre la conception simplifiée d'un test de détection toujours très difficile à concevoir dans le cas multi-défauts. Les techniques de génération de résidus sont généralement basées sur la redondance analytique issue de la connaissance du modèle de comportement du système. Le modèle du système est une représentation mathématique du système physique. En situation réelle, les techniques de génération de résidus doivent prendre en compte la présence de bruits et de perturbations de types internes et externes. Un défaut représente un phénomène considéré comme anormal (à détecter par le module diagnostic) alors que les perturbations ou incertitudes représentent l'ensemble des paramètres de nuisances pour le module diagnostic car faisant partie du fonctionnement normal du système. Pour ce qui concerne leur structure et effets sur le système, les défauts et perturbations sont tout à fait comparables, d'où la complexité du diagnostic en présence de paramètres de nuisances. Nous considérerons

dans ce mémoire plusieurs types de défauts:

- \* Les défauts capteurs: ils s'additionneront aux sorties du système et représenteront l'ensemble des problèmes liés à la prise d'information sur l'état du système.
- \* Les défauts d'actionneurs: ils s'additionneront aux commandes du système et concerneront l'ensemble des problèmes liés aux organes qui agissent sur l'état du procédé.
- \* Les défauts externes: ils causeront un changement non maîtrisable sur l'état du système.
- \* Les défauts internes: ils correspondront à une dégradation des composants du système par un changement sur les paramètres internes du système.

Nous considérerons dans ce mémoire plusieurs types de perturbations:

- \* Les bruits: qu'ils concernent les actionneurs, les capteurs ou le procédé lui-même, ils se caractériseront par des signaux additifs gaussiens de moyennes nulles et de covariance connue.
- \* Les perturbations additives externes: ce seront des perturbations de type entrées inconnues à effet additif sur l'entrée et/ou la sortie du système sans aucune connaissance a priori sur leur modèle d'évolution. Nous supposerons qu'il n'existe pas de perturbations de type interne (incertitudes paramétriques).

Afin d'expliquer les difficultés du diagnostic multi-défauts, considérons un système linéaire affecté par des défauts externes et des perturbations stochastiques défini de manière classique par les relations suivantes

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Fd_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k \end{aligned} \tag{1.1}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état,  $y \in \mathbb{R}^m$  le vecteur de mesures,  $u \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de commande,  $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$  la matrice de distribution des défauts et  $d \in \mathbb{R}^q$  l'amplitude de défauts.  $w_k$  et  $v_k$  représentent respectivement les bruits d'états et de mesures, supposés de moyenne nulle tels que

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \omega_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_j^T & v_j^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \delta_{k,j} \tag{1.2}$$

L'objectif de ce chapitre est de décrire les méthodes existantes dans la littérature permettant la synthèse d'un générateur de résidus insensibles à l'état du système  $x \in \mathbb{R}^n$ , sensibles aux défauts  $d \in \mathbb{R}^q$  et le moins sensibles possible aux bruits  $w_k$  et  $v_k$ . En d'autres termes, les résidus générés devront être de moyenne nulle sans défaut, à minimum de variance et si possible non corrélés. La présence d'un ou de plusieurs défauts devra se refléter sur le

résidu généré afin de permettre leur détection et leur isolation par un traitement statistique approprié. Le diagnostic multi-défauts n'est pas toujours bien appréhendé : prenons l'exemple de trois défauts hypothétiques  $f_1, f_2, f_3$  et d'un résidu à trois composantes  $r_1, r_2, r_3$  ayant pour matrice d'influence

$$\begin{array}{cccc} & f_1 & f_2 & f_3 \\ r_1 & 1 & 1 & 0 \\ r_2 & 1 & 0 & 1 \\ r_3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad (1.3)$$

Le défaut  $f_1$  affecte les trois résidus, le défaut  $f_2$  affecte  $r_1$  et  $r_3$  et enfin  $f_3$  affecte  $r_2$ . L'utilisation de ce résidu n'est valable que dans le cas mono défaut. Si le défaut  $f_1$  apparaît en premier sur le système, les autres ne seront plus détectables et isolables. La seule structure adéquate pour le traitement multi-défauts mono-filtre est la structure diagonale suivante (Commault, 1999)

$$\begin{array}{cccc} & f_1 & f_2 & f_3 \\ r_1 & 1 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 1 & 0 \\ r_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (1.4)$$

Avec cette structure diagonale, les résidus générés reflètent alors directement l'amplitude de chaque défaut permettant de simplifier considérablement leur traitement statistique. Les nouvelles techniques de génération de résidus présentées dans ce mémoire satisferont cette contrainte diagonale par l'inversion du système où les résidus générés produiront aussi les estimations optimales de l'amplitude des défauts.

Ce chapitre présente trois approches disponibles dans la littérature pour le diagnostic multi-défauts des systèmes dynamiques stochastiques. La première est celle proposée par Gustafsson (2002) basée sur l'espace de parité ([Chow et Willsky, 1984],[Gertler, 1991]). La deuxième est basée sur le filtre de Kalman associé au test du GLR (Generalized Likelihood Ratio) [Willsky, 1976]. La troisième approche présentée, qui sera celle approfondie dans ce mémoire, concernera la conception des filtres détecteurs de défauts robustes ([Park et Rizzoni, 1994], [Keller, 1999]).

## 1.2 Espace de parité stochastique

### 1.2.1 Définition

Cette technique repose sur la notion de redondance directe ou analytique générée par la prise en compte des mesures sur un espace d'observation d'ordre  $S$  comme suit

$$\begin{bmatrix} y_{k-S} \\ y_{k-S+1} \\ y_{k-S+2} \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^S \end{bmatrix} x_{k-S} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{S-1}B & CA^{S-2}B & \dots & CB & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k-S} \\ u_{k-S+1} \\ u_{k-S+2} \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CF & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAF & CF & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{S-1}F & CA^{S-2}F & \dots & CF & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{k-S} \\ d_{k-S+1} \\ d_{k-S+2} \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix} + \quad (1.6)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CA & C & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{S-1} & CA^{S-2} & \dots & C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{k-S} \\ w_{k-S+1} \\ w_{k-S+2} \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{k-S} \\ v_{k-S+1} \\ v_{k-S+2} \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Traduite sous une forme matricielle plus compacte, on a

$$Y_k = O x_{k-S} + H_u U_k + H_d \Delta_k + H_w \Upsilon_k + \Gamma_k \quad (1.8)$$

Définissons le résidu suivant

$$r_k = \vartheta^T (Y_k - H_u U_k) \quad (1.9)$$

$$= \vartheta^T (O x_{k-S} + H_d \Delta_k + H_w \Upsilon_k + \Gamma_k) \quad (1.10)$$

La matrice  $\vartheta$ , appelée matrice génératrice des résidus, est choisie dans le but de rendre le résidu indépendant de l'état.  $\vartheta$  doit donc satisfaire la condition  $\vartheta^T O = 0$  et le résidu s'exprime alors sous la forme

$$r_k = \vartheta^T (H_d \Delta_k + H_w \Upsilon_k + \Gamma_k). \quad (1.11)$$

Pour le traitement multi-défauts, cette condition est nécessaire mais n'est pas suffisante pour obtenir des résidus à structure diagonale.

## 1.2.2 Analyse stochastique

Définissons respectivement les matrices de covariance de  $\Upsilon_k$  et  $\Gamma_k$  par  $cov(\Upsilon_k) = I_S \otimes W$  et  $cov(\Gamma_k) = I_S \otimes V$  où l'opérateur  $\otimes$  représente le produit de Kronecker. Supposons le défaut

unitaire ( $\|d^i\| = 1$ ) et d'amplitude constante  $\Delta_k = \Delta_k^i$ . On obtient alors

$$(r_k/md^i) = \vartheta^T (H_w \Upsilon_k + \Gamma_k + m H_d \Delta_k^i) \quad (1.12)$$

$$\in \mathbf{N}(m \underbrace{\vartheta^T H_d \Delta_k^i}_{\mu^i}, \vartheta^T L \vartheta) \quad (1.13)$$

où  $L = H_w(I_S \otimes W)H_w^T + I_S \otimes V$ , tel que chaque défaut est associé au vecteur  $\mu^i$  de covariance  $\vartheta^T L \vartheta$ . Gustafsson (2002) génère un résidu à variance minimale avec

$$\bar{r}_k = (\vartheta^T L \vartheta)^{-1/2} r_k \quad (1.14)$$

$$= \underbrace{(\vartheta^T L \vartheta)^{-1/2} \vartheta^T}_{\bar{\vartheta}^T} (Y_k - H_u U_k) \quad (1.15)$$

et l'on obtient

$$(\bar{r}_k/md^i) = \bar{\vartheta}^T (H_w \Upsilon_k + \Gamma_k + m H_d \Delta_k^i) \quad (1.16)$$

$$\in \mathbf{N}(m \underbrace{\bar{\vartheta}^T H_d \Delta_k^i}_{\bar{\mu}^i}, I) = \mathbf{N}(m \bar{\mu}^i, I) \quad (1.17)$$

Un traitement par l'analyse en composante principale de ces résidus est alors nécessaire afin d'extraire l'information relative à la présence d'un ou de plusieurs défauts.

### 1.2.3 Conclusion

Le technique de l'espace de parité permet difficilement la génération de résidus à structure diagonale. Dans le cas pratique d'une fenêtre glissante avec le temps, les propriétés stochastiques des résidus générés dépendent de la taille de la fenêtre considérée  $S$ , un paramètre très difficile à déterminer d'un point de vue théorique.

## 1.3 Filtre de Kalman et test du GLR

Le principe de l'approche basée observateur est de reconstruire la sortie du système à partir des mesures disponibles à l'aide d'un observateur ([Clarck (1979)], [Patton, Frank et Clark, (1989)] dans le cas déterministe ou à l'aide d'un filtre de Kalman ([Willsky, (1976)], [Bas-seville, (1988)] dans le cas stochastique. Dans le domaine des systèmes stochastiques, la génération de résidus blancs à minimum de variance est basée sur le filtre de Kalman décrit par

$$\hat{x}_{k+1} = A \hat{x}_k + B u_k + K_k (y_k - C \hat{x}_k) \quad (1.18)$$

$$P_{k+1} = (A - K_k C) P_k (A - K_k C)^T + W + K_k V K_k^T \quad (1.19)$$

$$H_k = C P_k C^T + V \quad (1.20)$$

$$K_k = A P_k C^T H_k^{-1} \quad (1.21)$$

où  $P_k$  est la matrice de covariance de l'erreur d'estimation d'état,  $K_k$  le gain du filtre et où

$$\gamma_k = y_k - C\hat{x}_k \quad (1.22)$$

représente la séquence d'innovation blanche du filtre.

### 1.3.1 Relation entre l'espace de parité et le filtre de Kalman

Ces deux approches ont un objectif commun, la détection et l'isolation de défaillances via l'examen statistique des résidus générés. Dans le cas de l'espace de parité, le vecteur résidu est un sous-espace engendré par les colonnes de  $\vartheta$ . L'expression du résidu est donnée par la relation

$$r_k = \vartheta^T(Y_k - H_u U_k) \quad (1.23)$$

Via l'espace de parité, un estimateur d'état linéaire s'écrit

$$\hat{x}_{k-S} = R(Y_k - H_u U_k) \in \mathcal{N}(x_{k-S}, RLR^T) \quad (1.24)$$

et

$$r_k = Y_k - \hat{Y}_k \quad (1.25)$$

$$= Y_k - O\hat{x}_{k-S} - H_u U_k \quad (1.26)$$

$$= (I - OR)(Y_k - H_u U_k) \quad (1.27)$$

$$= (I - OR)(H_w \Upsilon_k + \Gamma_k + mH_d \Delta_k^i) \quad (1.28)$$

$$\in \mathcal{N}((I - OR)(mH_d \Delta_k^i), (I - OR)L(I - OR)^T) \quad (1.29)$$

Après normalisation, on obtient

$$L^{-1/2}(Y_k - H_u U_k) = L^{-1/2}(Ox_{k-S} + mH_d \Delta_k^i + H_w \Upsilon_k + \Gamma_k) \quad (1.30)$$

On montre que

$$K^{KF} = (L^{-1/2}O)^+ = (O^T L^{-1}O)^{-1}O^T L^{-1/2} \quad (1.31)$$

Le résidu du filtre de Kalman peut alors s'écrire

$$\gamma_k = \vartheta_{KF}^T(Y_k - H_u U_k) \quad (1.32)$$

où  $\vartheta_{KF}$  est une base formée par les lignes de  $\Sigma_{KF} = I - O(O^T S^{-1}O)^{-1}O^T S^{-1}$ . On a ainsi montré qu'il existe une certaine équivalence entre l'innovation du filtre de Kalman et le résidu généré par l'espace de parité. Ceci n'est pourtant valable que sur une fenêtre de dimension grandissante avec le temps. Dans le cas pratique d'une fenêtre de dimension finie glissante avec le temps, les propriétés statistiques du résidu généré par l'espace de parité ne correspondront pas aux propriétés statistiques optimales de la séquence d'innovation du filtre de Kalman.

### 1.3.2 Test du maximum de vraisemblance (GLR)

En parallèle au développement des observateurs, les approches statistiques ont commencé à voir le jour au début des années 70. Mehra et Peschon (1971) proposent une procédure de détection basée sur l'innovation du filtre de Kalman et l'application de tests statistiques portant sur la moyenne, la blancheur et la covariance du résidu. Willsky et Jones (1974, 1976) ont développé une stratégie de détection multi-défauts via l'application du test du maximum de vraisemblance (Generalized Likelihood Ratio) sur l'innovation du filtre de Kalman.

Soit les modèles hypothétiques de défauts  $H_i$  suivants

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + f_i(k,r)\nu(k,r) + w_k \quad (1.33)$$

$$y_k = Cx_k + v_k \quad (1.34)$$

avec  $i \in [1, \dots, N]$ . Les bruits d'état et de mesure sont gaussiens de moyennes nulles et non corrélés.  $f_i(k,r)$  est le vecteur de distribution des défauts,  $\nu(k,r)$  l'amplitude du défaut supposée ici constante est telle que  $\nu(k,r) = \nu\{k \geq r\}$ ,  $r$  étant l'instant d'apparition inconnu du défaut. Dans cette section, nous décrivons une forme modifiée du test du GLR standard prenant en compte le retard structurel du système (nous approfondirons cette notion au chapitre III). Définissons les indices de détectabilité des sauts [Liu (1997), Keller (1999)] par

$$\rho_i = \min\{s : CA^{s-1}f_i \neq 0, s = 1, 2, \dots\} \quad (1.35)$$

signifiant que la première information relative au défaut  $H_i$  sera présente sur les mesures  $y_{r+\rho_i}$ . L'effet additif du saut  $H_i$  sur l'erreur de prédiction  $e_{k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}$  et sur la séquence d'innovation  $\gamma_k = y_k - C\hat{x}_k$  peut être exprimé comme suit

$$e_{k+1} = \tilde{e}_{k+1} + \zeta_i(k+1,r)\nu \quad (1.36)$$

$$\gamma_k = \tilde{\gamma}_{k+1} + \varrho_i(k,r)\nu \quad (1.37)$$

où  $\tilde{e}_{k+1}$  et  $\tilde{\gamma}_{k+1}$  représentent respectivement l'erreur de prédiction et la séquence d'innovation en l'absence de défauts. Les trajectoires de pannes  $\zeta_i(k,r)$  et  $\varrho_i(k,r)$  sont données par la récurrence

$$\zeta_i(k+1,r) = (A - K_k C)\zeta_i(k,r) + f_i \quad (1.38)$$

$$\varrho_i(k,r) = C\zeta_i(k,r) \quad (1.39)$$

L'hypothèse  $H_i$  est alors confrontée à l'hypothèse sans défaut  $H_0$  sur la moyenne de l'innovation

$$H_0 : E(\gamma_t) = 0, t < r \quad (1.40)$$

$$H_i : E(\gamma_t) = \varrho_i(t,r)\nu, k \geq t \geq r, i \in [1, \dots, N] \quad (1.41)$$

Avec  $E\{(\gamma_{k-t} - E(\gamma_{k-t}))(\gamma_k - E(\gamma_k))^T = 0\} \forall t < k$ , le rapport de vraisemblance est donné par

$$\lambda_i(k, r, \nu) = \frac{P(\gamma_{r_i+\rho_i}/h_i) \dots P(\gamma_k/h_i)}{P(\gamma_{r_i+\rho_i}/h_0) \dots P(\gamma_k/h_0)} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t=r+\rho_i}^k \|\gamma_t - \varrho_i(t, r)\nu\|_{H_t^{-1}}^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t=r+\rho_i}^k \|\gamma_t\|_{H_t^{-1}}^2\right)} \quad (1.42)$$

Basée sur  $\gamma_0, \dots, \gamma_k$ , la prédiction de  $\nu$  au sens du maximum de vraisemblance est calculée à partir de

$$\hat{\nu}(k+1, r) = \left[ \sum_{t=r+\rho_i}^k \varrho_i^T(t, r) H_t^{-1} \varrho_i(t, r) \right]^{-1} \sum_{t=r+\rho_i}^k \varrho_i^T(t, r) H_t^{-1} \gamma_t \quad (1.43)$$

Le logarithme du rapport de vraisemblance  $T_i(k, r) = 2\log(\lambda_i(k, r, \hat{\nu}(k+1, r)))$  s'exprime

$$T_i(k, r) = b_i(k, r)^2 a_i(k, r)^{-1} \quad (1.44)$$

$$a_i(k, r) = \sum_{t=r+\rho_i}^k \varrho_i^T(t, r) H_t^{-1} \varrho_i(t, r) \quad (1.45)$$

$$b_i(k, r) = \sum_{t=r+\rho_i}^k \varrho_i^T(t, r) H_t^{-1} \gamma_t \quad (1.46)$$

La fonction de décision du GLR est finalement décrite comme suit

$$\max_{i \in [1, \dots, N], \tilde{r} \in [0, \dots, k]} \{T_i(k, \tilde{r} - \rho_i)\} > \varepsilon \quad (1.47)$$

où  $\varepsilon$  représente le seuil de décision. L'utilisation pratique du test du GLR impose de faire varier l'instant d'apparition hypothétique du défaut sur une fenêtre glissante de taille  $S$  définie par  $W = [k - S \leq \tilde{r} \leq k]$ . Si  $\max\{T_i(k, \tilde{r} - \rho_i)\} > \varepsilon$  alors un saut est détecté à l'instant  $k$  et isolé par  $(j, \hat{r}) = \operatorname{argmax}\{T_i(k, \tilde{r} - \rho_i)\}$  avec  $\hat{r} = \hat{\tilde{r}} - \rho_i$  l'estimation de l'instant d'apparition du saut. Les quantités

$$\hat{\nu}(k+1, \hat{r}) = a_j(k, \hat{r})^{-1} b_j(k, \hat{r}) \quad (1.48)$$

$$P^\nu(k+1, \hat{r}) = a_j(k, \hat{r})^{-1} \quad (1.49)$$

représentent l'estimation optimale de l'amplitude du défaut au sens du maximum de vraisemblance. Le choix du seuil de détection est couplé avec le choix de la dimension de la fenêtre glissante et leur calcul optimal reste encore actuellement un problème ouvert. Le traitement multi-défauts de types séquentiels consiste alors à compenser l'effet de ce défaut par la réactualisation de l'estimation d'état du filtre de Kalman afin d'accroître son adaptativité face à la nouvelle situation du système. La nouvelle initialisation du filtre est donnée par

$$\hat{x}_{k+1}^{\text{nouveau}} = \hat{x}_{k+1}^{\text{ancien}} + \zeta_j(k+1, \hat{r}) \hat{\nu}(k+1, \hat{r}) \quad (1.50)$$

$$P_{k+1}^{\text{nouveau}} = P_{k+1}^{\text{ancien}} + \zeta_j(k+1, \hat{r}) P^\nu(k+1, \hat{r}) \zeta_j(k+1, \hat{r})^T \quad (1.51)$$

Cette technique d'adaptation pose un problème majeur relatif à l'adéquation du filtre par rapport à la nouvelle situation du système. En présence d'un ou de plusieurs défauts, le filtre de Kalman toujours conçu sous l'hypothèse sans défaut ne permet pas leur réjection statistique au cours du temps sans changement du modèle de conception du filtre.

### 1.3.3 Conclusion

Dans cette partie, le diagnostic multi-défauts des systèmes stochastiques a été abordé par le biais du filtre de Kalman et du test du GLR. Sur le test du GLR, nous avons pris en compte les indices de détectabilité des biais qui seront utilisés à la section suivante dès la conception du filtre. Dans le contexte multi-défauts, cette technique est très difficile à implémenter car elle nécessite l'adaptation du filtre de Kalman après chaque détection et localisation d'un défaut. La troisième partie de ce chapitre va s'orienter vers une autre catégorie de techniques de générations de résidus appelées filtres de détection, une structure spéciale du filtre de Kalman permettant la génération de résidus directionnels afin d'éviter la phase de reconfiguration du filtre de Kalman après chaque détection et localisation d'un défaut et donc de simplifier la phase de décision.

## 1.4 Filtres de détection

Le filtre détecteur de défauts est une classe particulière d'observateurs d'ordre plein permettant la génération d'un résidu directionnel et la détection et l'isolation de plusieurs défauts dans le cas où ceux-ci apparaissent séquentiellement ou simultanément.

Par une approche intuitive, Beard (1971) a été le premier à introduire la théorie des filtres détecteurs. Par la suite, Massoumnia a formalisé la solution du problème à l'aide d'une synthèse géométrique. La synthèse du filtre a ensuite été réalisée par White et Speyer (1987) via une approche spectrale et par Park et Rizzoni (1994) par un placement de valeurs et de vecteurs propres de la matrice de transition du filtre. Le point commun entre ces approches est la construction des espaces de détection associés à chaque défaut. La dimension de l'espace de détection est une propriété structurelle importante du système. Dans Beard (1971), l'espace de détection est engendré par un générateur de détection. Ce problème a été résolu par Kim et Park (1999) en se basant sur une analyse structurelle des zéros invariants du système. Pour permettre la synthèse des filtres détecteurs au cas des systèmes stochastiques, une interprétation particulière du filtre détecteur a été proposée par Park et Rizzoni (1994.a) et utilisée par Park et Rizzoni (1994.b) pour son optimisation dans le contexte stochastique.

### 1.4.1 Filtre détecteur $H_2$ sur un horizon infini

Nous rappelons ici succinctement le filtre détecteur proposé par Park et Rizzoni (1994.b). Soit le système stochastique linéaire discret suivant

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Fd_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k \end{aligned} \quad (1.52)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état,  $y \in \mathbb{R}^m$  le vecteur de mesures,  $u \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de commande,  $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$  la matrice de distribution des défauts d'actionneurs et  $d \in \mathbb{R}^q$  l'amplitude de défauts.  $w_k, v_k$  représentent respectivement les bruits d'états et de mesures, supposés de moyenne nulle tels que

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \omega_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_j^T & v_j^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \delta_{k,j} \quad (1.53)$$

Soit l'observateur d'état suivant

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Bu_k + K(y_k - C\hat{x}_k) \\ q_k &= y_k - C\hat{x}_k \end{cases} \quad (1.54)$$

où  $\hat{x}_k$  et  $q_k$  représentent respectivement l'estimation d'état et le résidu de sortie du filtre. L'erreur d'estimation  $e_k = x_k - \hat{x}_k$  et le résidu de sortie sont donnés par

$$\begin{cases} e_{k+1} &= (A - KC)e_k + Fd_k - Kv_k + \omega_k \\ q_k &= Ce_k + v_k \end{cases} \quad (1.55)$$

L'objectif est la génération d'un résidu  $q_k$  directionnel tel que chaque défaut  $f_i$  ait une direction fixe dans l'espace de sortie. Sous cette contrainte directionnelle, les résidus générés doivent être à variance minimale afin de permettre leur traitement statistique optimal. La première étape de l'approche proposée par Park et Rizzoni (1994) consiste à définir la contrainte spectrale que doit respecter la matrice de transition du filtre. Cette contrainte spectrale peut être déterminée comme dans Kim et Park (1999) en se basant sur une analyse structurelle des zéros invariants du transfert  $C[Iz - A]^{-1}F$ . Pour simplifier la présentation, on suppose ici que l'espace de détection est généré par  $V_\nu = F$  (pour le cas général, voir annexe A). Le gain du filtre est alors paramétré comme suit

$$K = (AF)(CF)^+ + V_\nu K_+ + \bar{K}\Xi \quad (1.56)$$

avec  $\Xi = (I - (CF)(CF)^+)$  où les gains  $K_+$  et  $\bar{K}$  représentent les degrés de liberté qui restent disponibles pour l'optimisation du filtre. La deuxième étape consiste à minimiser la trace de la matrice de covariance des erreurs d'estimation  $P$  satisfaisant l'équation

$$(A - KC)P(A - KC)^T - P + KRK^T + Q = 0 \quad (1.57)$$

par rapport à  $K_+$  et  $\bar{K}$ . La solution de ce problème est donnée par

$$K = APC^T(CPC^T + R)^{-1} + \phi_{\perp}[(AF)(CF)^+ - APC^T(CPC^T + R)^{-1}]\psi_{\perp} \quad (1.58)$$

où

$$\begin{aligned} \phi &= V_{\nu}(V_{\nu}^T \tilde{P} V_{\nu})^{-1} V_{\nu}^T \tilde{P} & , \phi_{\perp} &= I_n - \psi \\ \psi &= (CPC^T + R)\Xi[\Xi^T(CPC^T + R)\Xi]^{-1}\Xi^T & , \psi_{\perp} &= I_m - \psi \end{aligned} \quad (1.59)$$

avec  $P$  et  $\tilde{P}$  satisfaisant les deux équations de Riccati suivantes

$$\begin{aligned} 0 &= APA^T - P - APC^T(CPC^T + R)^{-1}CPA + Q + \phi_{\perp}[(AF)(CF)^+ - APC^T(CPC^T + R)^{-1}] \\ &\times \psi_{\perp}(CPC^T + R)\psi_{\perp}^T[(AF)(CF)^+ - APC^T(CPC^T + R)^{-1}]^T\phi_{\perp}^T \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{A}^T \tilde{P} \bar{A} - \tilde{P} - \bar{A}^T \phi^T \tilde{P} \phi \bar{A} \\ &+ A^T(I - PC^T(CPC^T + R)^{-1}C)^T \phi^T \tilde{P} \phi (I - PC^T(CPC^T + R)^{-1}C)A + \tilde{R} \end{aligned} \quad (1.61)$$

où  $\bar{A} = A - (AF)(CF)^+\psi_{\perp}C - APC^T(CPC^T + R)^{-1}\psi C$

Le problème principal lié à cette approche est la recherche itérative de la solution de ces deux équations couplées ainsi que la détermination des conditions d'existence d'une solution stabilisante non définie explicitement par Park et Rizzoni (1994.b).

Le filtre détecteur que nous allons décrire maintenant permet de définir explicitement l'existence d'une solution stabilisante garantissant la génération de résidus directionnels stable permettant de s'affranchir de l'erreur d'estimation initiale.

### 1.4.2 Filtre détecteur $H_2$ sur un horizon fini

Dans ce paragraphe, nous présentons d'une manière différente les résultats de Keller (1999) permettant non seulement la génération d'un résidu de sortie directionnel mais aussi la génération d'un résidu reflétant directement l'amplitude des défauts.

Soit le système stochastique linéaire discret suivant

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Fd_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k \end{aligned} \quad (1.62)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état,  $y \in \mathbb{R}^m$  le vecteur de mesures,  $u \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de commande,  $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$  la matrice de distribution des défauts d'actionneurs et  $d \in \mathbb{R}^q$  l'amplitude de défauts.  $w_k$ ,  $v_k$  représentent respectivement les bruits d'état et de mesures, supposés de moyennes nulles tels que

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \omega_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_j^T & v_j^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \delta_{k,j} \quad (1.63)$$

On considère le filtre suivant

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Bu_k + K(y_k - C\hat{x}_k) \\ \hat{d}_k &= L(y_k - C\hat{x}_k) \end{aligned} \quad (1.64)$$

Par rapport à Park et Rizzoni (1994), on note la présence d'un gain de sortie  $L$  de dimension  $(q,m)$ . L'objectif est le calcul des gains  $L$  et  $K$  tels que la fonction de transfert entre les défauts  $d_k$  et  $\hat{d}_k$  satisfasse l'équation suivante

$$F(z) = LC[Iz - (A - KC)]^{-1}F = \xi(z) \quad (1.65)$$

avec  $\xi(z) = \text{diag} \left( z^{-\rho_1} \quad \dots \quad z^{-\rho_i} \quad \dots \quad z^{-\rho_q} \right)$  où  $\rho_i$  est l'indice de détectabilité associé au défaut  $f_i$  défini par

$$\rho_i = \min\{s : CA^{s-1}f_i \neq 0, s = 1,2,\dots\} \quad (1.66)$$

Sous (1.65), la sortie déterministe du filtre est décrite par

$$\hat{d}_k = \begin{bmatrix} d_{k-\rho_1}^T & \dots & d_{k-\rho_i}^T & \dots & d_{k-\rho_q}^T \end{bmatrix}^T + LC(A - KC)^k e_0 \quad (1.67)$$

ou encore  $\hat{d}_k^i = d_{k-\rho_i}^i$  après la disparition de l'effet de l'erreur d'estimation initiale  $e_0 = x_0 - \hat{x}_0$  garantie sous les conditions de convergence et de stabilité du filtre définies plus tard. L'objectif est de calculer  $K$  et  $L$  tel que

$$F(z) = LC[Iz - (A - KC)]^{-1}F = \begin{pmatrix} z^{-\rho_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & z^{-\rho_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & z^{-\rho_q} \end{pmatrix}, \quad (1.68)$$

Sous l'assignation spectrale deadbeat suivante

$$(A - KC)D = 0 \quad (1.69)$$

où  $D = [A^{\rho_1-1}f_1 \dots A^{\rho_i-1}f_i \dots A^{\rho_q-1}f_q]$ , la fonction de transfert  $F(z)$  devient

$$F(z) = L\Psi \begin{pmatrix} z^{-\rho_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & z^{-\rho_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & z^{-\rho_q} \end{pmatrix}, \quad (1.70)$$

où  $\Psi = CD$ . L'équation (1.65) est alors satisfaite ssi

$$L\Psi = I \quad (1.71)$$

Sous la condition d'existence du filtre

$$\text{rang}(\Psi) = q \quad (1.72)$$

les solutions de (1.69) et (1.71) peuvent être paramétrées par

$$K = \omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma \quad (1.73)$$

$$L = \Pi \quad (1.74)$$

avec  $\Sigma = \beta(I - \Psi\Pi)$ ,  $\Pi = \Psi^+$  et  $\omega = AD$  où  $\beta$  est une matrice arbitraire choisie telle que  $\text{rang}(\Sigma) = m - q$  et où  $\bar{K}_k \in \mathfrak{R}^{n, m-q}$  représente le gain libre décrivant les degrés de liberté restant disponibles pour l'optimisation du filtre. Le gain libre est calculé afin de minimiser la trace de la matrice de covariance  $\bar{P}_k$  définie par

$$\bar{P}_k = E((e_k - E(e_k))(e_k - E(e_k))^T) \quad (1.75)$$

Le terme  $\bar{e}_k = (e_k - E(e_k))$  représente l'erreur d'estimation d'état sans défaut décrite par

$$\bar{e}_{k+1} = (A - KC)\bar{e}_k + w_k - Kv_k \quad (1.76)$$

En remplaçant le gain  $K$  par son expression  $K = \omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma$  dans l'équation précédente on obtient

$$\bar{e}_{k+1} = (A - (\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)C)\bar{e}_k + w_k - (\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)v_k \quad (1.77)$$

La matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $\bar{P}_k = E(\bar{e}_k\bar{e}_k^T)$  satisfait

$$\bar{P}_{k+1} = (A - (\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)C)\bar{P}_k(A - (\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)C)^T + W + (\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)(\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)^T \quad (1.78)$$

La trace de  $\bar{P}_k$  est minimale par rapport  $\bar{K}_k$  si et seulement si

$$-(A - (\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)C)\bar{P}_kC^T\Sigma^T + (\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)\Sigma^T = 0 \quad (1.79)$$

ou si et seulement si

$$\bar{K}_k = (A\bar{P}_kC^T - \omega\Pi H_k)\Sigma^T(\Sigma H_k\Sigma^T)^{-1} \quad (1.80)$$

avec  $H_k = C\bar{P}_kC^T + I$ . L'équation de Ricatti du filtre détecteur

$$\bar{P} = (\bar{A} - \bar{K}\bar{C})\bar{P}(\bar{A} - \bar{K}\bar{C})^T + \bar{W} + \bar{K}\bar{V}\bar{K}^T \quad (1.81)$$

possède une solution  $\bar{P}$  stabilisante (poles de  $\bar{A} - \bar{K}\bar{C}$  à l'intérieur du cercle unité), et avec  $P_0 = \bar{P}_0 > 0$ , la séquence  $P_k$  converge exponentiellement vers  $P$  ssi la paire  $(\bar{A}, \bar{C})$  est détectable et ssi il n'existe pas de mode non commandable de la paire  $(\bar{A}, \bar{W})$  sur le cercle unité. Par rapport au système d'origine, Keller (1999) a donné les conditions de convergence et de stabilité suivantes

$$\text{rang} \begin{bmatrix} zI - A & D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q, \quad |z| \geq 1. \quad (1.82)$$

et

$$\text{rang} \begin{bmatrix} -e^{jw}I + A & D & W^{1/2} \end{bmatrix} = n, \quad w \in [0, 2\pi] \quad (1.83)$$

Le filtre isolateur est donc résumé comme suit

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + wq_k^r + \bar{K}_k\gamma_k \quad (1.84)$$

$$\bar{P}_{k+1} = (A - \bar{K}_k\hat{C})\bar{P}_k(A - \bar{K}_k\hat{C})^T + \bar{K}\bar{V}\bar{K}^T + \bar{W} \quad (1.85)$$

$$\bar{K} = \bar{A}\bar{P}_k\hat{C}^T(\bar{C}\bar{P}_k\bar{C}^T + \bar{V})^{-1} \quad (1.86)$$

avec

$$\bar{A} = A - w\Pi C, \quad \bar{C} = \Sigma C, \quad \bar{V} = \Sigma\Sigma^T, \quad \bar{W} = W + w\Pi\Pi^T w^T \quad (1.87)$$

et

$$\gamma_k = \Sigma(y_k - C\hat{x}_k) \quad (1.88)$$

$$q_k^r = \Pi(y_k - C\hat{x}_k) \quad (1.89)$$

où  $\gamma_k \in \mathfrak{R}^{m-q}$  est le résidu découplé des défauts représentant l'innovation du filtre et  $q_k^r \in \mathfrak{R}^q$  le résidu sensible aux défauts produisant une estimation de leurs amplitudes à temps minimale lié à leurs indices de détectabilité.

En raison de la paramétrisation  $L = \Pi$  simpliste du gain de sortie, ce filtre ne génère pas une estimation de l'amplitude des défauts à minimum de variance. Un des objectifs de nos travaux sera de remédier à ce problème. Le schéma d'implémentation de ce filtre est donné par la figure 1.1.

Pour illustrer cette approche considérons le système discret suivant:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.90)$$

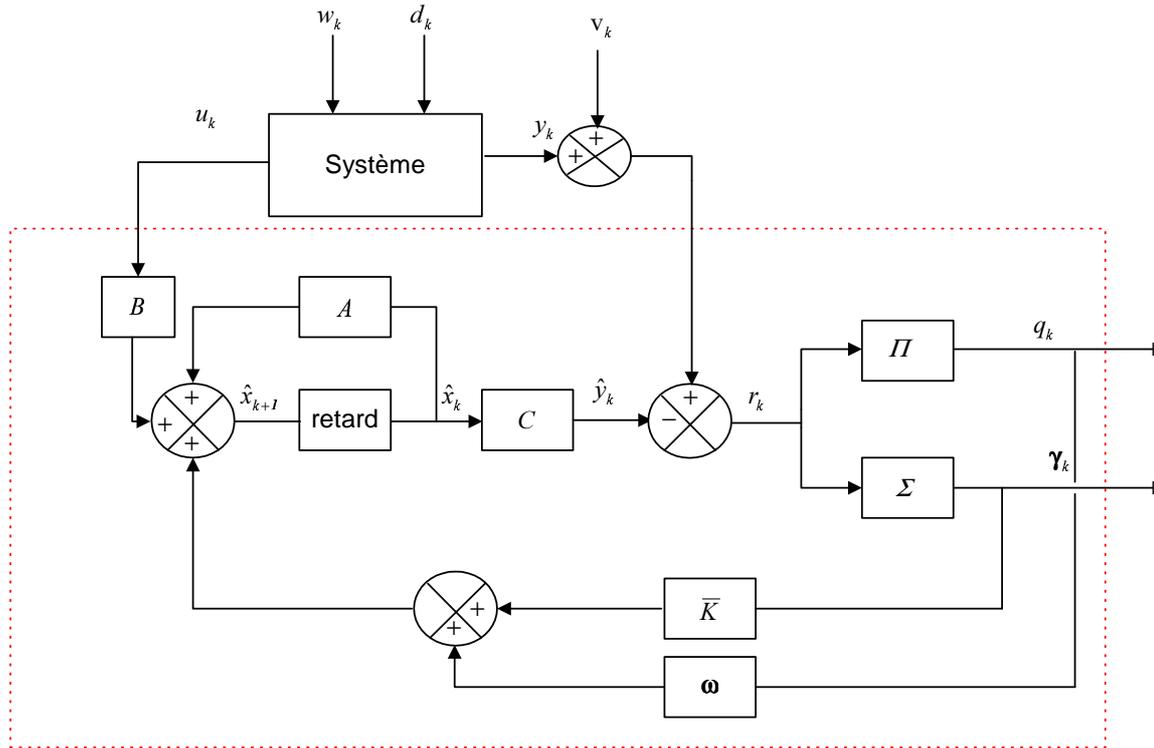


FIG. 1.1 – Implémentation du filtre isolateur

La condition d'existence des observateurs à entrées inconnues n'est pas satisfaite car

$$\text{rang}CF = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2 \quad (1.91)$$

En revanche, la condition d'existence du filtre isolateur de défauts est vérifiée car

$$\text{rang} \begin{bmatrix} CA^{\rho_1-1}f_1 & CA^{\rho_2-1}f_2 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \quad (1.92)$$

avec  $\rho_1 = \min\{t : CA^{t-1}f_1 \neq 0, t = 1, 2, \dots\} = 1$  et  $\rho_2 = \min\{t : CA^{t-1}f_2 \neq 0, t = 1, 2, \dots\} = 2$

Il existe pourtant des cas où la condition d'existence du filtre isolateur n'est pas vérifiée. On le vérifiera au chapitre suivant.

## 1.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté deux approches différentes pour la synthèse d'un filtre de détection dans le cas des systèmes dynamiques stochastiques. Basés sur les travaux de Keller (1999), les objectifs du chapitre suivant seront

- \* de concevoir un filtre détecteur sous une condition d'existence moins restrictive que  $\text{rang}(\Psi) = q$  en se basant sur une analyse des zéros infinis du transfert  $C[Iz - A]^{-1}F$ ,
- \* d'obtenir une estimation des défauts à variance minimale,
- \* de prendre en compte la présence éventuelle de perturbations déterministes telles que des entrées inconnues,
- \* d'étudier les propriétés structurelles du filtre de détection afin d'expliquer sa structure deadbeat (dans l'espace de détection) permettant d'éviter la résolution de deux équations de Riccati couplées de Park et Rizzoni (1994.b).

---

## Chapitre 2

# Filtre de détection basé sur l'inversion du système

Nous proposons dans ce chapitre une nouvelle approche de synthèse d'un filtre de détection basée sur l'inversion du système. La condition d'existence du filtre, moins restrictive que celles rencontrées dans le chapitre précédent, correspondra à la condition d'existence d'une inverse à gauche stable. Le calcul de l'inverse à gauche du système sera effectué par l'intermédiaire de la matrice d'interaction du système décrivant la structure des zéros infinis du système. La structure des zéros à l'infini ne sera plus contrainte de respecter une structure diagonale et l'estimation temps minimal des amplitudes de défauts sera à minimum de variance par l'introduction d'un degré de liberté supplémentaire sur le gain de sortie du filtre. L'analyse structurelle du filtre permettra de montrer que le filtre détecteur génère une estimation optimale réduite de l'état du système de dimension maximale. Une version simplifiée de ce filtre sera obtenue pour le diagnostic multi-défauts des systèmes dynamiques stochastiques affectés par des entrées inconnues.

### 2.1 Filtre de détection sans entrée inconnue

Le problème de la reconstruction des défauts est lié au problème du calcul de l'inverse à gauche du système. Ce lien a été montré par Hou et Patton (1998) dans le cas continu. Nous proposons la conception d'un filtre détecteur produisant une estimation des défauts à variance minimale satisfaisant  $E(\hat{d}_k) = d_{k-\alpha}$  où  $\alpha$  est le temps de retard structurel du système défini par ses zéros infinis. Après la paramétrisation de l'inverse à gauche du système, les degrés de liberté restant disponibles sont calculés pour minimiser la norme  $H_2$  du transfert entre les bruits et la sortie du filtre. Cette sortie sera filtrée par un filtre à réponse impulsionnelle finie permettant la remise en forme du signal de sortie.

### 2.1.1 Position du problème

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Fd_k + Hw_k \\ y_k &= Cx_k + Nd_k + Gw_k \end{aligned} \quad (2.1)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état,  $y \in \mathbb{R}^m$  le vecteur de mesures,  $d \in \mathbb{R}^q$  le vecteur de défauts. Chaque composante de  $d_k$  représente un défaut qui peut apparaître simultanément sur l'état et/ou sur les mesures.  $w_k$  est un bruit blanc gaussien tel que  $E\{w_k w_j^T\} = I\delta_{kj}$  affectant à la fois l'état et les mesures. On suppose  $\text{rang}(F) = q$ ,  $\text{rang}(G) = m$ ,  $q \leq m$ ,

$$\text{rang} \begin{bmatrix} zI - A & F \\ C & N \end{bmatrix} = n + q, \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 1 \quad (2.2)$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} -e^{jw}I + A & F & H \\ C & N & G \end{bmatrix} = n + m, \forall w \in [0, 2\pi] \quad (2.3)$$

Considérons le filtre suivant

$$\hat{z}_{k+1} = A\hat{z}_k + K(y_k - C\hat{z}_k) \quad (2.4)$$

où  $\hat{z}_{k+1}$  est la prédiction de  $\hat{x}_{k+1}$  basée sur les mesures disponibles jusqu'à l'instant  $k$ ,  $K$  le gain du filtre et  $L$  le gain de projection du résidu

$$r_k = L(y_k - C\hat{z}_k) \quad (2.5)$$

où  $r_k$  et  $d_k$  sont de même dimension.

Soit  $H_d(z) = C(Iz - A)^{-1}F + N$  et  $H_w(z) = C(Iz - A)^{-1}H + G$  respectivement les fonctions de transfert entre  $d(z)$ ,  $w(z)$  et  $y(z)$  et  $G(z) = L(I - C[Iz - (A - KC)]^{-1}K)$  la fonction de transfert du filtre. On distinguera deux cas:

**Premier cas:** avec  $\text{rang}(N) = q$ , les mesures qui sont affectées directement par les défauts apportent une information suffisante pour la reconstruction sans retard du vecteur défaut. La reconstruction des défauts peut alors être obtenue par le calcul de  $G(z)$  tel que le résidu de sortie réduit soit donné par

$$r(z) = d(z) + G(z)H_w(z)w(z) \quad (2.6)$$

sous la contrainte  $G(z)H_d(z) = I$  où  $G(z)$  représente alors l'inverse à gauche de  $H_d(z)$ . Les degrés de liberté restant disponibles sur  $K$  et  $L$  après la paramétrisation de  $G(z)H_d(z) = I$  seront calculés dans le but de minimiser  $\|G(z)H_w(z)\|_2$  où  $\|F(z)\|_2$  est la norme au sens  $H_2$  définie par  $\|F(z)\|_2^2 = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}[F(e^{j\theta})F^*(e^{-j\theta})]$  avec  $F^*(e^{j\theta}) = F^T(e^{-j\theta})$ . Dans ce cas, la

prédiction  $\hat{z}_{k+1}$  sera la prédiction optimale de l'état entier  $x_{k+1}$ .

**Deuxième cas :** si  $\text{rang}(N) < q$ , nous généralisons les résultats précédents. Le résidu  $r_k$  sera filtré par un filtre à réponse impulsionnelle finie  $\hat{\xi}(z)$  tel que  $\hat{r}(z) = \hat{\xi}(z)r(z)$  soit exprimé par

$$\hat{r}(z) = z^{-\alpha}d(z) + \hat{\xi}(z)G(z)H_w(z)w(z) \quad (2.7)$$

sous la contrainte  $\hat{\xi}(z)G(z)H_d(z) = Iz^{-\alpha}$  où  $\hat{\xi}(z)G(z)$  représente l'inverse à gauche à temps minimal de  $H_d(z)$ . Les degrés de liberté restant disponibles sur  $K$  et  $L$  seront calculés dans le but de minimiser  $\|\hat{\xi}(z)G(z)H_w(z)\|_2$ . Dans ce cas, la prédiction  $\hat{z}_{k+1}$  ne sera pas la prédiction optimale de l'état entier  $x_{k+1}$ . Une analyse structurale permettra de montrer que  $\hat{z}_{k+1}$  sera la prédiction optimale d'une partie réduite de l'état  $x_{k+1}$  de dimension maximum.

## 2.1.2 Premier cas: Reconstructeur parfait

Le filtre de détection présenté dans ce paragraphe ne possèdera pas d'espace de détection car l'espace maximum de prédiction couvre tout l'état. Le lecteur peut considérer que le filtre décrit dans cette partie est un filtre détecteur à espace de détection nul.

### 2.1.2.1 Paramétrisation des inverses à gauche du système

**Théorème 1** *Pour un système défini par  $\Gamma = (A, F, C, N)$  avec  $\text{rang}(N) = q$ , l'inverse à gauche de  $H_d(z)$  donnée par  $G(z) = L[I - C[Iz - (A - KC)]^{-1}K]$  telle que*

$$G(z)H_d(z) = I \quad (2.8)$$

*peut être paramétrée par  $\bar{K} \in \mathfrak{R}^{n, m-q}$  et  $\bar{L} \in \mathfrak{R}^{q, m-q}$  telle que*

$$K = FN^+ + \bar{K}\Sigma, \quad L = N^+ + \bar{L}\Sigma \quad (2.9)$$

*avec  $\Sigma = \beta(I - NN^+)$  où  $\beta$  est une matrice arbitraire choisie telle que  $\text{rang}(\Sigma) = m - q$ . Sous les conditions énoncées précédemment, il existe un gain  $\bar{K}$  tel que le filtre sous sa forme d'état suivante*

$$\Gamma(\bar{K}) = \left( \bar{A} - \bar{K}\bar{C}, \quad 0, \quad \begin{bmatrix} N^+C + \bar{L}\bar{C} \\ \bar{C} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (2.10)$$

*avec  $\bar{A} = A - FN^+C$  et  $\bar{C} = \Sigma C$  soit stable. L'état du système  $\Gamma(\bar{K})$  n'est pas affecté par  $d_k$  et l'état  $\hat{z}_k$  du filtre représente donc la prédiction non biaisée de l'état entier  $x_k$ .*

**Démonstration 1** Si  $m = q$ , alors  $\bar{K} = 0$ ,  $\bar{L} = 0$  et la contrainte  $G(z)H_d(z) = I$  est satisfaite avec  $K = FN^{-1}$  et  $L = N^{-1}$  (Solution donnée par Pattel (1982)).

Si  $m > q$ , le système (2.1) en l'absence de bruits peut s'écrire

$$x_{k+1}^* = Ax_k^* + Fd_k \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} N^+ \\ \Sigma \end{bmatrix} y_k = \begin{bmatrix} N^+C \\ \bar{C} \end{bmatrix} x_k^* + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} d_k \quad (2.12)$$

ou

$$x_{k+1}^* = Ax_k^* + Fd_k \quad (2.13)$$

$$N^+y_k = N^+Cx_k^* + d_k \quad (2.14)$$

$$\Sigma y_k = \bar{C}x_k^* \quad (2.15)$$

En remplaçant  $d_k$  obtenu avec (2.14) dans (2.13), on obtient

$$x_{k+1}^* = \bar{A}x_k^* + FN^+y_k \quad (2.16)$$

$$N^+y_k = N^+Cx_k^* + d_k \quad (2.17)$$

$$\Sigma y_k - \bar{C}x_k^* = 0 \quad (2.18)$$

En additionnant les quantités nulles  $\bar{K}\Sigma(y_k - Cx_k^*)$  et  $\bar{L}\Sigma(y_k - Cx_k^*)$  dans (2.16) et (2.17), on obtient

$$x_{k+1}^* = (\bar{A} - \bar{K}\bar{C})x_k^* + (FN^+ + \bar{K}\Sigma)y_k \quad (2.19)$$

$$d_k = (N^+ + \bar{L}\Sigma)(y_k - Cx_k^*) \quad (2.20)$$

On déduit de (2.19) et (2.20) que la réalisation d'état  $\{\bar{A} - \bar{K}\bar{C}, FN^+ + \bar{K}\Sigma, -(N^+C + \bar{L}\bar{C}), N^+ + LC\}$  représente l'ensemble des inverses à gauche (d'ordre  $n$ ) de  $H_d(z)$ . En posant  $x_k^* = \hat{z}_k$  et  $d_k = r_k$ , le filtre (2.4) de fonction de transfert  $G(z) = L(I - C[Iz - (A - KC)]^{-1}K)$  décrivant l'inverse à gauche de  $H_d(z)$  est donc paramétrée à l'aide de deux gains  $K = FN^+ + \bar{K}\Sigma$  et  $L = N^+ + \bar{L}\Sigma$ . En remplaçant ces gains dans (2.4) et (2.5), on obtient le filtre suivant

$$\hat{z}_{k+1} = \bar{A}\hat{z}_k + FN^+y_k + \bar{K}\gamma_k \quad (2.21)$$

$$\gamma_k = \Sigma y_k - \bar{C}\hat{z}_k \quad (2.22)$$

$$r_k = (N^+ + \bar{L}\Sigma)(y_k - C\hat{z}_k) \quad (2.23)$$

On a  $\Sigma N = 0$  et  $F - KN = 0$ . En l'absence du bruit, l'erreur de prédiction  $e_k = x_k - \hat{z}_k$  est donc donnée par

$$e_{k+1} = (\bar{A} - \bar{K}\bar{C})e_k \quad (2.24)$$

$$r_k = (N^+C + \bar{L}\bar{C})e_k + d_k \quad (2.25)$$

$$\gamma_k = \bar{C}e_k \quad (2.26)$$

où  $\Gamma(\bar{K}) = \left( \bar{A} - \bar{K}\bar{C}, 0, \begin{bmatrix} N^+C + \bar{L}\bar{C} \\ \bar{C} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right)$  est la représentation de (2.24), (2.25) et (2.26). L'erreur de prédiction  $e_k$  n'est pas affectée par le défaut  $d_k$  et l'état du filtre  $\hat{z}_{k+1}$  correspond à la prédiction de l'état entier  $x_{k+1}$ .

$$\text{On a } \text{rang} \begin{bmatrix} -Iz + A & F \\ C & N \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} N^+ \\ \Sigma \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Iz + A & F \\ C & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -N^+C & I \end{bmatrix} =$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} -Iz + \bar{A} & F \\ 0 & I \\ \bar{C} & 0 \end{bmatrix} \text{ car } \begin{bmatrix} N^+ \\ \Sigma \end{bmatrix} \text{ est inversible pour un } \beta \text{ choisit tel que } \text{rang}(\Sigma) = m - q.$$

Les modes inobservables de la paire  $(\bar{A}, \bar{C})$  sont les zéros invariants de  $\Gamma = (A, F, C, N)$

$$\left( \begin{bmatrix} -Iz + \bar{A} & F \\ 0 & I \\ \bar{C} & 0 \end{bmatrix} \right) \text{ n'est pas de rang pleine colonne ssi } \text{rang} \begin{bmatrix} -Iz + \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} < n). \text{ Sous la}$$

condition (2.2), on a  $\text{rang} \begin{bmatrix} -Iz + \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = n, \forall z \in C, |z| \geq 1$ , la paire  $(\bar{A}, \bar{C})$  est donc détectable et il existe  $\bar{K}$  tel que  $\bar{A} - \bar{K}\bar{C}$  soit stable.

### 2.1.2.2 Optimisation de l'inverse à gauche au sens $H_2$

**Théorème 2** : Sous (2.8), la norme  $H_2$  de  $G(z)H_w(z)$  est minimum par rapport aux paramètres libres  $\bar{K}$  et  $\bar{L}$  ssi

$$\bar{K} = (\bar{A}P\bar{C}^T + \bar{H}\bar{G}^T)(\bar{C}P\bar{C} + \bar{G}\bar{G}^T)^{-1} \quad (2.27)$$

$$\bar{L} = -(N^+CPC^T + N^+G\bar{G}^T)(\bar{C}P\bar{C}^T + \bar{G}\bar{G}^T) \quad (2.28)$$

avec  $\bar{A} = A - FN^+C$ ,  $\bar{H} = H - FN^+G$ ,  $\bar{C} = \Sigma C$  et  $\bar{G} = \Sigma G$  où  $P > 0$  solution de l'équation de Riccati

$$P = \bar{A}P\bar{A}^T + \bar{H}\bar{H}^T - (\bar{A}P\bar{C}^T + \bar{H}\bar{G}^T)(\bar{C}P\bar{C}^T + \bar{G}\bar{G}^T)^{-1}(\bar{A}P\bar{C}^T + \bar{H}\bar{G}^T) \quad (2.29)$$

est l'unique solution stabilisante ( $\bar{A} - \bar{K}\bar{C}$  stable) sous (2.2) et (2.3). On a  $\|G(z)H_w(z)\|_2^2 = \text{tr}(J)$  avec

$$J = N^+[CPC^T + GG^T - (CPC + G\bar{G}^T)(\bar{C}P\bar{C}^T + \bar{G}\bar{G}^T)^{-1}(\bar{C}PC^T + \bar{G}\bar{G}^T)](N^+)^T \quad (2.30)$$

**Démonstration 2** En absence de défauts  $d_k$ , la sortie du filtre  $r_k$  et l'erreur de l'estimation  $e_k$  sont exprimées par

$$e_{k+1} = (A - KC)e_k + (H - KG)w_k \quad (2.31)$$

$$r_k = L(Ce_k + Gw_k) \quad (2.32)$$

Soit  $P = E(e_k e_k^T)$  la matrice de covariance de l'erreur de l'estimation satisfaisant

$$P = (A - KC)P(A - KC)^T + (H - KG)(H - KG)^T \quad (2.33)$$

En remplaçant  $K = FN^+ + \bar{K}\Sigma$  dans l'expression précédente, on obtient

$$P = (\bar{A} - \bar{K}\bar{C})P(\bar{A} - \bar{K}\bar{C})^T + (\bar{H} - \bar{K}\bar{G})(\bar{H} - \bar{K}\bar{G})^T \quad (2.34)$$

Le gain  $\bar{K}$  minimisant la trace de  $P$  est donné par

$$\bar{K} = (\bar{A}P\bar{C}^T + \bar{H}\bar{G}^T)(\bar{C}P\bar{C}^T + \bar{G}\bar{G}^T)^{-1} \quad (2.35)$$

avec  $\bar{G}\bar{G}^T = \Sigma G G^T \Sigma^T > 0$  (car  $G$  et  $\Sigma$  sont de rang pleine ligne). En remplaçant (2.35) dans (2.34) on obtient (2.29).

Pour montrer que  $P$  est une solution stabilisante, (2.34) peut s'écrire sous la forme d'une équation de Riccati standard

$$P = \tilde{A}P\tilde{A}^T + \tilde{Q} - \tilde{A}P\tilde{C}^T(\tilde{C}P\tilde{C}^T + \tilde{G}\tilde{G}^T)^{-1}\tilde{C}P\tilde{A}^T \quad (2.36)$$

avec  $\tilde{A} = \bar{A} - \bar{H}\bar{G}^T(\bar{G}\bar{G}^T)^{-1}\bar{C}$  et  $\tilde{Q} = \bar{H}\bar{H}^T - \bar{H}\bar{G}^T(\bar{G}\bar{G}^T)^{-1}\bar{G}\bar{H}^T$ . Démontrée dans Keller et Darouach (1998) via les travaux de De souza et al. (1986), la détectabilité de la paire  $(\tilde{A}, \tilde{C})$  est équivalente à (2.2) et la non existence de modes non commandables de la paire  $(\tilde{A}, \tilde{Q}^{1/2})$  sur le cercle unité est garantie sous (2.3) induisant une unique solution stabilisante.

Soit  $J = E(r_k r_k^T)$  la matrice de covariance donnée par

$$J = \begin{bmatrix} I & \bar{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^+ \\ \Sigma \end{bmatrix} (CPC^T + GG^T) \begin{bmatrix} (N^+)^T & \Sigma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \bar{L}^T \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

où  $(CPC^T + GG^T)$  est la matrice de covariance du résidu  $y_k - C\hat{z}_k$ . De (2.37), la trace de  $J$  est minimum par rapport à  $\bar{K}$  et  $\bar{L}$  ssi

$$\bar{L} = -N^+(CPC^T + GG^T)(\bar{C}P\bar{C}^T + \bar{G}\bar{G}^T)^{-1} \quad (2.38)$$

En remplaçant (2.38) dans (2.37), on obtient  $\|G(z)H_w(z)\|_2^2 = tr(J)$  (fin dem).

Due aux effets additifs de l'erreur d'estimation initiale  $e_0 = x_0 - \hat{z}_0$  et du défaut  $d_k$ , on a  $J = E\{(r_k - E(r_k))(r_k - E(r_k))^T\}$  où  $E(r_k) = d_k + (N^+C + \bar{L}\bar{C})(\bar{A} - \bar{K}\bar{C})^k e_0$ . Notre solution stabilisante implique  $E(r_k) = d_k$  à la convergence du filtre.

### 2.1.3 Deuxième cas: Reconstructeur à temps minimum

Avant d'étendre les théorèmes 1 et 2 au cas le plus général des systèmes dynamiques  $\Gamma = (A, F, C, N)$  avec  $rang(N) < q$ , on propose le lemme suivant:

**Lemme 1** Sous la contrainte (2.2), le retard  $\alpha$  du système égal au nombre de zéros infinis du transfert  $H_d(z)$  est donné par le degré de la matrice d'interaction unitaire  $\xi(z)$  (une matrice polynomiale telle que  $\xi(z)\xi^*(z) = I$ ) satisfaisant

$$\hat{H}_d(z) = H_d(z)\xi(z) = C(Iz - A)^{-1}\hat{F}_\alpha + \hat{N}_\alpha \quad (2.39)$$

avec  $\text{rang}(\hat{N}_\alpha) = q$ . La matrice unitaire d'interaction  $\xi(z)$  ainsi que  $\hat{F}_\alpha$  et  $\hat{N}_\alpha$  peuvent être calculées par l'algorithme de Silverman (1969) rappelé en annexe B.

**Preuve** Supposant que l'algorithme d'inversion de Silverman soit appliqué pour calculer l'inverse à droite du système transposé  $\Gamma^T = (A^T, C^T, F^T, N^T)$  où  $H_d^T(z) = F^T(Iz - A^T)^{-1}C^T + N^T$ . La matrice d'interaction  $\xi^T(z)$  unitaire ( $\xi^T(z)[\xi^T(z)]^* = I$ ) telle que  $\hat{H}_d^T(z) = \xi^T(z)H_d^T(z) = [\hat{F}_\alpha^T(Iz - A^T)^{-1}C^T + \hat{N}_\alpha^T]$  est alors obtenue. En transposant ces résultats, on obtient la matrice d'interaction unitaire  $\xi(z) = \xi_0(z)\xi_1(z) \dots \xi_{\alpha-1}(z)$  satisfaisant (2.39). Pour montrer que (2.2) est la condition d'existence de  $\xi(z)$ , définissons le rang-normal de la matrice du système par

$$\text{rang-normal} \begin{bmatrix} -Iz + A & F \\ C & N \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} -Iz + A & F \\ C & N \end{bmatrix}, \quad \forall z \notin \sigma(z) \quad (2.40)$$

où  $\sigma(z)$  est l'ensemble de valeurs propres de  $A$ . On peut vérifier que

$$\text{rang-normal} \begin{bmatrix} -Iz + A & F \\ C & N \end{bmatrix} = \text{rang-normal} \begin{bmatrix} -Iz + A & 0 \\ C & H_d(z) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

conduisant à  $\text{rang-normal}(H_d(z)) = q$  sous (2.2) décrivant la condition pour que le système soit à minimum de phase. Dans Wolowich et Falb (1976)  $\text{rang-normal}(H_d(z)) = q$  est la condition d'existence d'une matrice d'interaction.

**Lemme 2** Sous la condition (2.2), l'entier  $\alpha$  est fini et

$$\text{rang} \begin{bmatrix} -Iz + A & \hat{F}_\alpha \\ C & \hat{N}_\alpha \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} -Iz + A & F \\ C & N \end{bmatrix}.$$

**Preuve** Soit  $M_i(z^{-1}) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & z^{-1}\bar{F}_i \\ 0 & I_{q_i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{q-q_i} \end{bmatrix}$  la matrice unimodulaire telle que

$\Gamma_{i+1}(z) = \Gamma_i(z)M_i(z^{-1})$  où  $\Gamma_i(z)$  représente le système à la  $i^{\text{eme}}$  étape de l'algorithme de Silverman de l'annexe B. A l'étape finale  $\alpha$ , cette équation récursive initialisée par

$$\Gamma_0(z) = \begin{bmatrix} -Iz + A & F \\ C & N \end{bmatrix} \text{ donne } \Gamma_\alpha(z) = \begin{bmatrix} -Iz + A & \hat{F}_\alpha \\ C & \hat{N}_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Iz + A & F \\ C & N \end{bmatrix} Q(z^{-1})$$

où  $Q(z^{-1}) = F_0(z^{-1})F_1(z^{-1}) \dots F_{\alpha-1}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} I & \times \\ 0 & S_\alpha \end{bmatrix}$  avec  $S_\alpha = S_0S_1 \dots S_{\alpha-1}$  conduisant à la

relation de rang

$$\text{rang} \begin{bmatrix} -Iz + A & \hat{F}_\alpha \\ C & \hat{N}_\alpha \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} -Iz + A & F \\ C & N \end{bmatrix} \quad \forall z, |z| < \infty. \quad (2.42)$$

Dans le cas limite où  $|z| \rightarrow \infty$ , on a  $Q(z^{-1}) \rightarrow \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_\alpha \end{bmatrix}$ ,  $\hat{F}_\alpha \rightarrow FS_\alpha$ ,  $\hat{N}_\alpha \rightarrow NS_\alpha$  et donc

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \text{rang} \begin{bmatrix} -Iz + A & \hat{F}_\alpha \\ C & \hat{N}_\alpha \end{bmatrix} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \text{rang} \begin{bmatrix} -Iz + A & FS_\alpha \\ C & NS_\alpha \end{bmatrix} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \text{rang} \begin{bmatrix} -Iz + A & F \\ C & N \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

car  $S_\alpha$  est inversible. On conclut que  $\text{rang} \begin{bmatrix} -Iz + A & \hat{F}_\alpha \\ C & \hat{N}_\alpha \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} -Iz + A & F \\ C & N \end{bmatrix} \quad \forall z$ .

Définissons le filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR) par  $\hat{\xi}(z) = z^{-\alpha}\xi(z)$  où  $\alpha$  est le degré de  $\xi(z)$ . Le théorème 3 va généraliser le théorème 2 au cas des systèmes dynamiques à retard par le filtrage de la sortie du filtre par  $\hat{\xi}(z)$ .

**Théorème 3** Les inverses à gauche temps minimal  $\hat{\xi}(z)G(z)$  de  $H_d(z)$  satisfaisant l'équation

$$\hat{\xi}(z)G(z)H_d(z) = Iz^{-\alpha} \quad (2.44)$$

sont paramétrées par  $\hat{K} \in \mathfrak{R}^{n,m-q}$  et  $\hat{L} \in \mathfrak{R}^{q,m-q}$  avec

$$K = \hat{F}_\alpha \hat{N}_\alpha^+ + \hat{K} \hat{\Sigma} \quad \text{et} \quad K = \hat{N}_\alpha^+ + \hat{L} \hat{\Sigma} \quad (2.45)$$

et  $\hat{\Sigma} = \hat{\beta}(I - \hat{N}_\alpha \hat{N}_\alpha^+)$  où  $\hat{\beta}$  est une matrice arbitraire telle que  $\text{rang}(\hat{\Sigma}) = m - q$ . Sous (2.2) il existe  $\hat{K}$  tel que le filtre décrit par

$$\Gamma(\hat{K}) = \left( \hat{A} - \hat{K} \hat{C}, \hat{F}, \begin{bmatrix} \hat{N}_\alpha^+ C + \hat{L} \hat{C} \\ \hat{C} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{N}_\alpha^+ N \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (2.46)$$

avec  $\hat{A} = A - \hat{F}_\alpha \hat{N}_\alpha^+ C$ ,  $\hat{C} = \Sigma C$  et  $\hat{F} = F - \hat{F}_\alpha \hat{N}_\alpha^+ N$  soit stable. L'état du système  $\Gamma(\hat{K})$  est affecté par les défauts  $d_k$  et l'état  $\hat{z}_k$  du filtre (2.4) n'est pas la prédiction non biaisée de l'état entier  $x_k$ .

**Démonstration 3** En utilisant le lemme précédent, le système  $\Gamma = (A, F, C, N)$  possède un retard fini  $\alpha$  et  $\hat{H}_d(z) = C(Iz - A)^{-1} \hat{F}_\alpha + \hat{N}_\alpha$  n'a donc plus de retard. Ainsi la condition  $G(z)\hat{H}_d(z) = I$  peut être paramétrée comme dans le cas des systèmes sans retard conduisant à (2.45) où  $\hat{\xi}(z) = z^{-\alpha}\xi(z)$  est un filtre causal car  $\alpha$  est le degré de  $\xi(z)$ . La relation  $G(z)\hat{H}_d(z) = I$  peut aussi s'écrire  $G(z)H_d(z) = \xi^*(z)$  ou  $\hat{\xi}(z)G(z)H_d(z) = z^{-\alpha}\xi(z)\xi^*(z)$

conduisant à la satisfaction de (2.44) sous  $\xi(z)\xi^*(z) = I$ .

Le filtre se réécrit

$$\hat{z}_{k+1} = \hat{A}\hat{z}_k + \hat{F}_\alpha \hat{N}_\alpha^+ y_k + \hat{K}\gamma_k \quad (2.47)$$

$$r_k = (N_\alpha^+ + \hat{L}\hat{\Sigma})(y_k - C\hat{z}_k) \quad (2.48)$$

$$\gamma_k = \hat{\Sigma}y_k - \hat{C}\hat{z}_k \quad (2.49)$$

ou par rapport à l'erreur de prédiction  $e_k = x_k - \hat{z}_k$

$$\Gamma(\hat{K}) = \left( \hat{A} - \hat{K}\hat{C}, \hat{F} - \hat{K}\hat{\Sigma}N, \begin{bmatrix} N_\alpha^+ C + \hat{L}\hat{C} \\ \hat{C} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{N}_\alpha^+ N \\ \hat{\Sigma}N \end{bmatrix} \right) \quad (2.50)$$

Démontrons que  $\hat{\Sigma}N = 0$ : Dans l'algorithme de Silverman, on a  $\hat{\Sigma} \begin{bmatrix} \tilde{N}_i & 0 \end{bmatrix} = 0$  pour  $i = 0, \dots, \alpha - 1$  autrement  $\hat{\Sigma}\hat{N}_\alpha = \hat{\Sigma} \begin{bmatrix} \tilde{N}_{\alpha-1} & N_\alpha \end{bmatrix} = 0$  (ou  $\text{rang}\hat{N}_\alpha = q$ ) ne peut pas être satisfaite à l'iteration finale  $\alpha$ . A l'étape initiale,  $\hat{\Sigma} \begin{bmatrix} \tilde{N}_0 & 0 \end{bmatrix} = \hat{\Sigma}NS_0 = 0$  et donc  $\hat{\Sigma}N = 0$  car  $S_0$  est inversible. Sachant que  $\hat{\Sigma}N = 0$ , (2.50) implique (2.46). En revanche, comparé aux résultats du théorème 1, l'état de  $\Gamma(\hat{K})$  est affecté par le défaut car  $\hat{F} \neq 0$  et l'état  $\hat{z}_{k+1}$  du filtre n'est donc plus la prédiction de l'état entier  $x_{k+1}$  (La prochaine section montrera que  $\hat{z}_{k+1}$  est une prédiction optimale d'un sous-espace d'état de dimension maximale). A partir du lemme 2 et du théorème 1,  $(\hat{A}, \hat{C})$  est détectable et les modes inobservables de  $(\hat{A}, \hat{C})$  sont les zéros invariants de  $\Gamma = (A, F, C, N)$ . Donc (2.2) est la seule condition d'existence d'un gain  $\hat{K}$  tel que  $\hat{A} - \hat{K}\hat{C}$  soit stable. Sous la condition que  $\hat{A} - \hat{K}\hat{C}$  soit stable, l'inverse à gauche  $\hat{\xi}(z)G(z)$  de  $H_d(z)$  en temps minimal est toujours stable car  $\hat{\xi}(z)$  est toujours stable.

Le théorème suivant généralise le théorème 2 pour les systèmes dynamiques stochastiques à retard.

**Théorème 4** Soit  $\hat{H} = H - \hat{F}_\alpha \hat{N}_\alpha^+ G$  et  $\hat{G} = \hat{\Sigma}G$ . La fonction de transfert  $\hat{\xi}(z)G(z)H_w(z)$  est minimisée au sens  $H_2$  par rapport aux paramètres libres  $\hat{K}$  et  $\hat{L}$  ssi

$$\hat{K} = (\hat{A}P\hat{C}^T + \hat{F}\hat{G}^T)(\hat{C}P\hat{C}^T + \hat{G}\hat{G}^T)^{-1} \quad (2.51)$$

$$\hat{L} = \hat{N}_\alpha^+(CPC^T + GG^T)(\hat{C}P\hat{C}^T + \hat{G}\hat{G}^T)^{-1} \quad (2.52)$$

où  $P$  solution de

$$P = \hat{A}P\hat{A}^T + \hat{H}\hat{H}^T - (\hat{A}P\hat{C}^T + \hat{H}\hat{G}^T)(\hat{C}P\hat{C}^T + \hat{G}\hat{G}^T)^{-1}(\hat{A}P\hat{C}^T + \hat{H}\hat{G}^T)^T \quad (2.53)$$

est garantie d'être une solution stabilisante sous les conditions de rang (2.2) et (2.3). On a  $\|\hat{\xi}(z)G(z)H_w(z)\|_2^2 = \text{tr}(J)$  avec

$$J = \hat{N}_\alpha^+[CPC^T + GG^T - (CPC^T + GG^T)(\hat{C}P\hat{C}^T + \hat{G}\hat{G}^T)^{-1}(\hat{C}P\hat{C}^T + \hat{G}\hat{G}^T)](\hat{N}_\alpha^+)^T \quad (2.54)$$

Le rapport signal sur bruit  $\lambda = \frac{\|\hat{\xi}(z)G(z)H_d(z)\|_2^2}{\|\hat{\xi}(z)G(z)H_w(z)\|_2^2}$  est maximisé par rapport à  $\hat{K}$  et  $\hat{L}$  car  $\lambda = \frac{1}{tr(J)}$ .

**Démonstration 4** On a

$$\|\hat{\xi}(z)G(z)H_w(z)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} tr\{[\hat{\xi}(e^{j\theta})G(e^{j\theta})H_w(e^{j\theta})][\hat{\xi}(e^{j\theta})G(e^{j\theta})H_w(e^{j\theta})]^*\} \quad (2.55)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} tr\{\hat{\xi}(e^{j\theta})\hat{\xi}^*(e^{j\theta})[G(e^{j\theta})H_w(e^{j\theta})][G(e^{j\theta})H_w(e^{j\theta})]^*\} = \|G(z)H_w(z)\|_2^2 \quad (2.56)$$

La minimisation de  $\|\hat{\xi}(z)G(z)H_w(z)\|_2^2$  par rapport  $\hat{K}$  et  $\hat{L}$  est donc équivalente à la minimisation de  $\|G(z)H_w(z)\|_2^2$  par rapport à  $\bar{K}$  et  $\bar{L}$  étudiée au théorème 2. La substitution de  $K = \hat{F}_\alpha \hat{N}_\alpha + \hat{K} \hat{\Sigma}$  et  $L = \hat{N}_\alpha + \hat{L} \hat{\Sigma}$  dans (2.31) et (2.32) donne (2.51), (2.52) et (2.53) avec  $\|\hat{\xi}(z)G(z)H_w(z)\|_2^2 = tr(J)$ . On a  $\lambda = \frac{1}{tr(J)}$  car  $\|\hat{\xi}(z)G(z)H_w(z)\|_2^2 = \|Iz^{-\alpha}\|_2^2 = 1$ . Pour montrer que la solution  $P$  de (2.53) est une solution stabilisante (poles de  $\hat{A} - \hat{K}\hat{C}$  à l'intérieur du cercle unité), on peut écrire (2.53) sous la forme d'une équation de Riccati standard

$$P = \hat{A}P\hat{A}^T + \hat{Q} - \hat{A}P\hat{C}^T(\hat{C}P\hat{C}^T + \hat{G}\hat{G}^T)\hat{C}P\hat{A}^T \quad (2.57)$$

où  $\hat{A} = \hat{A} - \hat{H}\hat{G}^T(\hat{G}\hat{G}^T)^{-1}\hat{C}$  et  $\hat{Q} = \hat{H}\hat{H}^T - \hat{H}\hat{G}^T(\hat{G}\hat{G}^T)^{-1}\hat{G}\hat{H}^T$ . De l'équation (2.57) et l'aide de la condition  $rang \begin{bmatrix} -Iz + A & \hat{F}_\alpha \\ C & \hat{N}_\alpha \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} -Iz + A & F \\ C & N \end{bmatrix}$  démontrée au lemme 2, on montre que la détectabilité de la paire  $(\hat{A}, \hat{C})$  est équivalente à (2.2). De la même façon, on montre que la non existence de modes non commandables de la paire  $(\hat{A}, \hat{Q}^{1/2})$  sur le cercle unité est équivalente à (2.3).

Due aux effets additifs de l'erreur d'estimation initiale  $e_0 = x_0 - \hat{z}_0$  et du défaut  $d_k$ , on a  $E(r_k) = \sum_{j=0}^{\alpha} W_j^* d_{k-j} + (\hat{N}_\alpha^+ C + \hat{L}\hat{C})(\hat{A} - \hat{K}\hat{C})^k e_0$  pour  $k \geq \alpha$  où  $\sum_{j=0}^{\alpha} W_j^* z^{-i} = \xi^*(z)$ . Sous la condition (2.2) et (2.3),  $\hat{A} - \hat{K}\hat{C}$  est stable et la relation  $E(r_k) = \sum_{j=0}^{\alpha} W_j^* d_{k-j}$  sera atteinte à la convergence du filtre. A la convergence, on aura  $E(\hat{r}_k) = d_{k-\alpha}$  où la  $i^{eme}$  composante de  $\hat{r}_k$  est sensible à l'occurrence de la  $i^{eme}$  composante de  $d_k$  et complètement découplée des autres. L'entier  $\alpha$  représente le temps de retard structurel pour l'isolation multi-défauts qu'on ne doit pas confondre avec le temps de retard de détection du  $i^{eme}$  défaut. Cette remarque justifie a posteriori l'utilisation du filtre  $\hat{\xi}(z)$  pour concevoir correctement un test statistique sur chaque composante de  $\hat{r}_k$ , la principale nouveauté de notre approche par rapport aux filtres détecteurs de défauts disponibles dans la littérature.

### 2.1.3.1 Analyse structurelle du filtre

Dans cette section, nous étudions les propriétés structurelles du filtre détecteur. On montrera que le reconstituteur de défauts coïncide avec l'observateur d'état réduit à entrée inconnue de Kobayashi et Nakamizo (1982), le seul observateur à entrées inconnues conçu par l'inversion du système existant dans la littérature.

**Lemme** La solution du problème géométrique  $(A - KC)\Omega \subseteq \Omega$  et  $(F - KN) \subseteq \Omega$  est donnée par  $K = \hat{F}_\alpha \hat{N}_\alpha^+ + \hat{K} \hat{\Sigma}$  où  $\Omega = \text{Im} \begin{bmatrix} \hat{F} & \dots & \hat{A}^j \hat{F} & \dots & \hat{A}^{n-1} \hat{F} \end{bmatrix}$  est le plus petit sous-espace  $(A, C)$ -invariant. Le sous-espace complémentaire de  $\Omega$  dans  $\mathfrak{R}^n$  décrit donc le plus grand sous-espace d'état prédictable coïncidant avec celui de Kobayashi et Nakamizo (1982).

**Preuve** En transposant les résultats de Emre et Silverman (1976), on en déduit que le système

$$\Gamma(\hat{F}_\alpha \hat{N}_\alpha^+) = (A - \hat{F}_\alpha \hat{N}_\alpha^+ C, F - \hat{F}_\alpha \hat{N}_\alpha^+ N, C, N) = (\hat{A}, \hat{F}, C, N) \quad (2.58)$$

est minimalement commandable. Par conséquent, le sous-espace  $\Omega$  correspond au sous-espace de commandabilité de la paire  $(\hat{A}, \hat{F})$  donné par  $\Theta = \text{Im} \begin{bmatrix} \hat{F} & \dots & \hat{A}^j \hat{F} & \dots & \hat{A}^{n-1} \hat{F} \end{bmatrix}$ . Par le biais de l'injection de sortie suivante  $K = \hat{F}_\alpha \hat{N}_\alpha^+ + \hat{K} \hat{\Sigma}$  le système défini par  $\Gamma(\hat{F}_\alpha \hat{N}_\alpha^+ + \hat{K} \hat{\Sigma}) = (\hat{A} - \hat{K} \hat{C}, \hat{F}, C, N)$  car  $\hat{\Sigma} N = 0$  doit aussi être minimalement commandable par les défauts car le lemme de Emre et Silverman (1976) serait alors pris en défaut. Ce résultat s'exprime de manière géométrique par  $(\hat{A} - \hat{K} \hat{C})\Omega \subseteq \Omega, \hat{F} \subseteq \Omega \quad \forall \hat{K}$ .

**Théorème 5** La dimension de  $\Omega$  est égale à l'ordre de la matrice d'interaction  $\xi(z)$  donnée par  $\mu = \sum_{j=1}^q \rho_j$  où  $\rho_j$  représente les degrés colonnes de  $\xi(z)$ . L'espace de détection  $\Omega$  est de dimension minimale et possède une structure à valeurs propres nulles.

**Démonstration 5** Rappelons que

$$\Gamma(\hat{K}) = \left( \hat{A} - \hat{K} \hat{C}, \hat{F}, \begin{bmatrix} N_\alpha^+ C + \hat{L} \hat{C} \\ \hat{C} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{N}_\alpha^+ N \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (2.59)$$

représente les équations sans bruit du filtre données par

$$e_{k+1} = (\hat{A} - \hat{K} \hat{C})e_k + \hat{F} d_k \quad (2.60)$$

$$r_k = (N_\alpha^+ + \hat{L} \hat{C})e_k + \hat{N}_\alpha^+ N d_k \quad (2.61)$$

$$\gamma_k = \hat{C} e_k. \quad (2.62)$$

Soit  $\mu = \text{rank}(\Theta)$  avec  $\Theta = \text{Im} \begin{bmatrix} \hat{F} & \dots & \hat{A}^j \hat{F} & \dots & \hat{A}^{n-1} \hat{F} \end{bmatrix}$ . Les  $n - \mu$  lignes de  $Q$  satisfaisant l'équation  $Q\Theta = 0$  décrivent le sous-espace prédictable maximum et les  $\mu$  lignes de  $X$  définies par  $XQ^T = 0$  engendrent le sous-espace de détection  $\Omega$  de dimension  $\mu$ . Soit la matrice de transformation suivante  $T = \begin{bmatrix} Q \\ X \end{bmatrix}$  telle que

$$T\hat{A}T^{-1} = \begin{bmatrix} A^{max} & 0 \\ \times & A^{min} \end{bmatrix}, \quad T\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ F^{min} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$$\hat{C}T^{-1} = \begin{bmatrix} C^{max} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

où la paire  $(A^{min}, F^{min})$  est complètement commandable et où l'équation (2.64) est le résultat de  $\Omega \subseteq \ker \hat{C}$  (Wonham, 1985). Avec  $\begin{bmatrix} K^{max} \\ \times \end{bmatrix} = T\hat{K}$ , le système (2.59) est décomposé comme suit

$$\Gamma(T\hat{K}) = \left( \begin{bmatrix} A^{max} - K^{max}C^{max} & 0 \\ \times & A^{min} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ F^{min} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \times & C^{min} \\ C^{max} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N^{min} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (2.65)$$

avec  $N^{min} = N_{\alpha}^{+}N$  et  $\begin{bmatrix} \times & C^{min} \end{bmatrix} = (\hat{N}_{\alpha} + \hat{L}\hat{\Sigma})CT^{-1}$  où  $C^{min}$  ne dépend pas de  $\hat{L}$  car  $\hat{L}\hat{\Sigma}CT^{-1} = \hat{L}\hat{C}T^{-1} = \begin{bmatrix} \times & 0 \end{bmatrix}$ . La fonction de transfert  $F_d^{min}(z) = C^{min}(Iz - A^{min})^{-1}F^{min} + N^{min}$  de  $\Gamma^{min}$  doit satisfaire la contrainte

$$F_d^{min}(z) = \xi^*(z) \quad (2.66)$$

Dans une base polynomiale minimale décrite par les  $q$  lignes de  $\xi^*(z)$ , il existe deux matrices unimodulaires  $\phi(z)$  et  $\omega(z)$  telles que

$$\phi(z)\xi^*(z)\omega(z) = \text{diag} \begin{bmatrix} z^{-\rho_1} & \dots & z^{-\rho_i} & \dots & z^{-\rho_q} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

avec  $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_q$  où  $\rho_i$  sont les degrés des lignes de  $\xi^*(z)$  (Kailath, 1980) et où (2.67) est la forme de Smith-MacMillan de (2.66). La plus petite réalisation d'état de  $F_d^{min}(z)$  est égale à  $\mu = \sum_{j=1}^q \rho_j$ , la dimension de  $\Omega$ . Pour une réalisation minimale, les degrés des lignes de  $\xi^*(z)$  (les degrés des colonnes de  $\xi(z)$ ) sont les indices d'observabilité et  $\alpha = \max\{\rho_i\}$  est l'indice d'observabilité. Il existe alors toujours une transformation d'état de type  $\bar{T} = \begin{bmatrix} Q \\ S^{-1}X \end{bmatrix}$  où  $S$  est calculé telle que la réalisation de  $F_d^{min}(z)$  soit donnée par  $(\bar{A}^{min}, \bar{F}^{min}, \bar{C}^{min}, N^{min})$  avec  $\bar{A}^{min} = S^{-1}A^{min}S$ ,  $\bar{F}^{min} = S^{-1}F^{min}$  et  $\bar{C}^{min} = C^{min}S$  représentant une forme observable (O'reilly, 1983).  $\bar{F}_d^{min}(z) = F_d^{min}(z)$  et (2.67) implique que  $\bar{A}^{min}$  soit une matrice nilpotente d'indice  $\alpha = \max \rho_i$ , c'est-à-dire telle que  $(\bar{A}^{min})^{\alpha} = 0$ . Sous  $(\bar{A}^{min})^{\alpha} = 0$ , on conclut que  $A^{min}$  possède  $\mu$  valeurs propres nulles.

**Théorème 6** *Les valeurs propres fixes du sous-espace prédictable sont les zéros invariants du système  $\Gamma = (A, F, C, N)$ . Les  $\mu$  modes à zéro de l'espace de détection sont les images miroirs des zéros infinis de  $\Gamma = (A, F, C, N)$ . Le reconstructeur de défauts possède donc toutes les propriétés structurelles d'un filtre linéaire optimal (Kwakernaak, 1976).*

**Démonstration 6** Pour des systèmes MIMO, le nombre des zéros infinis du système correspond à l'ordre  $\mu = \sum_{j=1}^q \rho_j$  de  $\xi(z)$  (Wolovich et Falb, 1976). Les modes inobservables de la

paire  $(\hat{A}, \hat{C})$  (ou de la paire  $(\begin{bmatrix} A^{max} & 0 \\ \times & A^{min} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C^{max} & 0 \end{bmatrix})$  sous  $T = \begin{bmatrix} Q \\ X \end{bmatrix}$ ) sont les zéros invariants de  $\Gamma$  incluant les  $\mu$  modes nuls et inobservables de  $A^{min}$  (image miroir des zéros infinis de  $\Gamma$ ) situés dans l'espace de détection  $\Omega$  et les modes stables inobservables de  $A^{max}$  (les zéros invariants stables du système dans le cas d'un système à minimum de phase) sont situés dans le sous-espace prédictable rejoignant ainsi les travaux de Kobayashi et Nakamizo (1982).

**Théorème 7** *La portion dynamique du reconstructeur de défauts décrite par  $\hat{z}_{k+1}^{max} = Q\hat{x}_{k+1}$  et  $P^{max} = QPQ^T$  est une prédiction optimale de  $z_{k+1}^{max} = Qx_{k+1}$ . Le filtre d'ordre  $n - \mu$  décrit par*

$$\hat{z}_{k+1} = A^{max} \hat{z}_k^{max} + K^{max} \gamma_k \quad (2.68)$$

$$\gamma_k = \hat{\Sigma} y_k - C^{max} \hat{z}_k^{max} \quad (2.69)$$

où

$$\begin{aligned} K^{max} &= (A^{max} P^{max} C^{maxT} + H^{max} \hat{G}^T) (C^{max} P^{max} C^{maxT} + \hat{G} \hat{G}^T)^{-1} \\ P &= A^{max} P^{max} (A^{max})^T + H^{max} (H^{max})^T - (A^{max} P^{max} C^{maxT} + H^{max} \hat{G}^T) \\ &\quad (C^{max} P^{max} C^{maxT} + \hat{G} \hat{G}^T) (A^{max} P^{max} C^{maxT} + H^{max} \hat{G}^T)^T \end{aligned} \quad (2.70)$$

représente une extension stochastique de l'observateur réduit de Kobayashi et Nakamizo (1982).

**Démonstration 7** L'erreur de prédiction de l'état réduite  $e_{k+1}^{max} = Qx_{k+1} - \hat{z}_{k+1}^{max} = Qe_{k+1}$  satisfait  $E(e_{k+1}^{max}) = 0$  car  $e_{k+1}^{max} \notin \Omega$ , autrement dit  $e_{k+1}^{max}$  est découplé des défauts  $d_k$ . Posons

$P^{max} = E(e_k^{max} e_k^{maxT})$  lié au reconstructeur de défauts via  $\begin{bmatrix} \hat{z}_{k+1}^{max} \\ \hat{z}_{k+1}^{min} \end{bmatrix} = T \hat{z}_{k+1}$  par  $TPT^T =$

$\begin{bmatrix} P^{max} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$ . En accord avec  $T = \begin{bmatrix} Q \\ X \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} F^{max} \\ F^{min} \end{bmatrix} = T\hat{F}$ , les relations (2.51) et (2.53) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} T\hat{K} &= (T\hat{A}T^{-1}TPT^T T^{-T} \hat{C}^T + T\hat{F}\hat{G}^T) (\hat{C}T^{-1}TPT^T T^{-T} \hat{C}^T + \hat{G}\hat{G}^T)^{-1} \\ TPT^T &= T\hat{A}T^{-1}TPT^T T^{-T} \hat{A}^T T^T + T\hat{F}\hat{F}^T T^T \\ &\quad - (T\hat{A}T^{-1}TPT^T T^{-T} \hat{C}^T + T\hat{F}\hat{G}^T) \\ &\quad (\hat{C}T^{-1}TPT^T T^{-T} \hat{C}^T + \hat{G}\hat{G}^T)^{-1} (T\hat{A}T^{-1}TPT^T T^{-T} \hat{C}^T + T\hat{F}\hat{G}^T)^T \end{aligned} \quad (2.71)$$

conduisant aux relations (2.71).  $K^{max}$  minimise  $tr(P^{max})$  indépendamment de  $P_{12}$  et  $P_{22}$ . Le filtre optimal d'ordre  $n - \mu$  est donc dérivé de  $T\hat{z}_{k+1} = T\hat{A}T^{-1}\hat{z}_k + T(\hat{F}_\alpha\hat{N}_\alpha^+ + \hat{K}\hat{\Sigma})(y_k - CT^{-1}\hat{z}_k)$  avec  $Q\hat{F}_\alpha = 0$ . Par rapport à l'observateur d'ordre réduit de Kobayashi et Nakamizo (1982) où tous les états sont estimés avec  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 1$ , le filtre réduit (2.68) et (2.69) donne la prédiction optimale de l'état entier ssi  $\alpha = 0$ . Avec  $\alpha = 0$  l'espace de détection  $\Omega$  n'existe pas ( $\mu = 0$ ) et le filtre (2.68) et (2.69) correspond alors au reconstituteur parfait de la section précédente.

**Remarque1** Supposons que l'algorithme d'inversion de Silverman appliqué sur  $\Gamma = (A, F, C, 0)$  donne les résultats suivants  $\Gamma = (A, \hat{F}_\alpha, C, \hat{N}_\alpha)$ ,  $\hat{N}_\alpha = [CA^{\bar{\rho}_1-1}f_1 \dots CA^{\bar{\rho}_q-1}f_q]$  avec  $\bar{\rho}_i = \min\{t : CA^{t-1}f_i \neq 0, t = 1, 2, \dots\}$  à l'étape finale  $\alpha = \max\{\bar{\rho}_i\}$ . La condition  $\text{rang}\hat{N}_\alpha = q$  est la condition d'isolation des défauts "output separability" considérée souvent comme la condition d'existence du filtre détecteur de défauts (Chung et Speyer, 1998; Keller, 1999). Dans ce cas, on peut vérifier que le sous-espace  $\bar{\Omega}_i = [f_i \ Af_i \dots \ A^{\bar{\rho}_i-1}f_i]$  associé à la  $i^{eme}$  composante de  $d_k$  est solution de  $(\hat{A} - \hat{K}\hat{C})\bar{\Omega}_i \subseteq \bar{\Omega}_i$  avec  $f_i \subseteq \bar{\Omega}_i$  et que  $C\bar{\Omega}_i \cap (\sum_{j \neq i} C\bar{\Omega}_j) = \emptyset$  est clairement satisfaite. Nous sommes ici en présence d'une matrice d'interaction diagonale  $\bar{\xi}(z) = \text{diag}[z^{\bar{\rho}_1} \dots z^{\bar{\rho}_q}]$  pour le transfert de  $\Gamma = (A, F, C)$ . Cette condition de séparabilité des sorties est donc trop restrictive par rapport à la condition d'existence d'une matrice d'interaction quelconque liée à l'inversibilité du système.

**Remarque2** Dans le cas continu, Chen et al. (2003) ont proposé une structure du filtre détecteur de défauts optimal lorsque  $\gamma \rightarrow 0$ . Dans ce cas, les  $\mu$  modes fixés du filtre, correspondant aux images miroirs des  $\mu$  zéros infinis, tendent vers zéro. Autour de cette limite, le filtre continu est alors toujours mal conditionné pour son implémentation numérique car contenant alors deux échelles de temps. Conçue directement dans le cas discret, l'implémentation du reconstituteur de défauts évite les problèmes numériques que l'on rencontre lorsque l'on discrétise des systèmes à modes extrêmement rapides.

### 2.1.3.2 Exemple illustratif

Cet exemple décrit les différentes étapes de la synthèse du reconstituteur de défauts dans le contexte de la remarque 1. On considère le système discret  $\Gamma = (A, F, C)$  décrit par

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad d_k = \begin{bmatrix} d_k^1 \\ d_k^2 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

où la condition de séparabilité des sorties  $\text{rang}[CA^{\bar{p}_1-1}f_1 \quad CA^{\bar{p}_2-1}f_2] = 2$  avec  $\bar{p}_i = \min\{t : CA^{t-1}f_i \neq 0, t = 1, 2, \dots\} = 1$  pour  $i = 1, 2$  n'est pas satisfaite car  $\text{rang}[CA^{\bar{p}_1-1}f_1 \quad CA^{\bar{p}_2-1}f_2] = \text{rang}CF = 1 < 2$ . Appliqué sur  $\Gamma = (A, F, C)$ , l'algorithme d'inversion de Silverman donne les résultats suivants:

Première itération.  $\xi_0(z) = Iz$  où  $\Gamma_1 = (A, F_1, C, N_1)$  avec  $F_1 = AF = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ 1 & 1 + \lambda_2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  et

$$N_1 = CF = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a  $q_1 = \text{rang}N_1 = 1 < 2$

Deuxième itération.  $S_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ ,  $N_1S_1 = [\tilde{N}_1 \quad 0]$ ,  $\tilde{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $F_1S_1 =$

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_1 & \bar{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 + 0.5\lambda_2 & \lambda_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0.5 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ De } \xi_1(z) = S_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}, \text{ on obtient } \Gamma_2 = (A, \hat{F}_2, C, \hat{N}_2)$$

$$\text{avec } \hat{F}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{F}_1 & A\bar{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 + 0.5\lambda_2 & \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2^2 \\ 0.5 & \frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_2 + \lambda_3) \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \text{ et } \hat{N}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 & C\bar{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où  $\text{rang}\hat{N}_2 = 2$  met fin à l'algorithme.

Sur  $\Gamma_2(A, \hat{F}_2, C, \hat{N}_2)$ , le reconstructeur de défauts  $\hat{z}_{k+1} = \hat{A}\hat{z}_k + \hat{F}_2\hat{N}_2^+y_k + \hat{K}\gamma_k$ ,  $\gamma_k = \hat{\Sigma}y_k - \hat{C}\hat{z}_k$  et  $r_k = (\hat{N}_2^+ + \hat{L}\hat{\Sigma})(y_k - C\hat{z}_k)$ , synthétisant l'ensemble des inverses du système  $\Gamma = (A, F, C)$  à partir des degrés de liberté  $\hat{K} \in \mathfrak{R}^{4,1}$  et  $\hat{L} \in \mathfrak{R}^{2,1}$ , est obtenu par le calcul de l'inverse à gauche de  $\hat{N}_2$  donné par  $\hat{N}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}$  conduisant à  $\hat{\Sigma} = \hat{\beta}(I - \hat{N}_2\hat{N}_2^+) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}$  avec  $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}$  où  $\eta$  est un scalaire libre choisi tel que  $\text{rang}\hat{\Sigma} = 1$  et où

$$\hat{A} = A - \hat{F}_2\hat{N}_2^+C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5\lambda_2 & \lambda_2 & -\lambda_2^2 & 0 \\ -0.5 & 1 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \text{ et } \hat{C} = \hat{\Sigma}C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

La matrice d'interaction est donnée par  $\xi(z) = \xi_0(z)\xi_1(z) = \begin{bmatrix} 0.5z & -\frac{\sqrt{3}}{2}z^2 \\ 0.5z & \frac{\sqrt{3}}{2}z^2 \end{bmatrix}$  et son degré  $\alpha = 2$  est le retard de  $\Gamma = (A, F, C)$ . Le filtre FIR  $\hat{\xi}(z) = z^{-2}\xi(z)$  est implementé comme

$$\begin{bmatrix} \hat{d}_k^1 \\ \hat{d}_k^2 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^2 W_j r_{k-j} \text{ avec } W_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \text{ et } W_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Après l'optimisation du filtre via le calcul de  $\hat{K}$  et  $\hat{L}$  qui ne dépend pas du choix de  $\eta$  car la paire  $(A^{max}, C^{max}) = (\lambda_4, \eta)$  est observable  $\forall \eta \neq 0$  assurant la condition  $rank \hat{\Sigma} = 1$  ( $\lambda_4$  n'est pas un zéro invariant fini), la sortie de  $\hat{\xi}(z)$  donnera une estimation à variance minimale du défaut  $\begin{bmatrix} d_k^1 \\ d_k^2 \end{bmatrix}$  tel que  $E\left(\begin{bmatrix} \hat{r}_k^1 \\ \hat{r}_k^2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d_{k-2}^1 \\ d_{k-2}^2 \end{bmatrix}$  est atteinte après la convergence du filtre.

Cet exemple donne la matrice de transformation d'état suivante  $T = \begin{bmatrix} X \\ Q \end{bmatrix}$  avec  $X =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tel que } XQ^T = 0. \text{ Alors, la paire } (A^{min}, F^{min}) = \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.5\lambda_2 & \lambda_2 & -\lambda_2^2 \\ -0.5 & 1 & -\lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \text{ est de dimension } \mu = 3. \text{ Cela permet de montrer la}$$

relation  $\mu = \rho_1 + \rho_2$  où  $\rho_1 = 1$  et  $\rho_2 = 2$  sont respectivement les degrés de la première et de la deuxième colonne de  $\xi(z)$ . Avec  $C^{min} = \hat{N}_2^+ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}$ , on peut écrire

le système  $\Gamma^{min} = (A^{min}, F^{min}, C^{min})$  d'une manière équivalente en introduisant la matrice  $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  telle que

$$\Gamma^{min} = (S^{-1}A^{min}S, S^{-1}F^{min}, C^{min}S) = \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \right) \text{ où la}$$

paire  $(S^{-1}A^{min}S, C^{min}S) = \left( \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \right)$  a une forme observable avec

$N_1 = [0]$  et  $N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  deux matrices nilpotentes d'indices de nilpoticité  $\rho_1 = 1$  et

$\rho_2 = 2$ . Avec  $\alpha = \max\{\rho_1, \rho_2\} = 2$ , on a  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.5\lambda_2 & \lambda_2 & -\lambda_2^2 \\ -0.5 & 1 & -\lambda_2 \end{bmatrix}^2 = 0$  illustrant la propriété

deadbeat de l'espace de détection  $\Omega$ .

### 2.1.4 Interprétation physique de la paramétrisation du filtre

Dans le cas d'une matrice d'interaction diagonale, l'indice de détectabilité  $\rho_i$  correspond au temps de retard entre l'instant d'apparition du défaut  $d^i$  et son premier effet sur les mesures. Dans le cas d'une matrice d'interaction quelconque, la généralisation du raisonnement

précédent ne peut être effectuée que sur le terme  $\alpha$  correspondant alors au degré de la matrice polynomiale  $\xi(z)$  représentant le temps de retard pour que tous les défauts (supposés apparaître au même instant) aient une première répercussion différente sur les mesures (le temps de retard pour l'isolation est plus important que pour la détection d'un défaut particulier sauf dans le cas d'une matrice diagonale satisfaisant  $\rho_i = \rho_j, \forall(i,j)$ ). Dans le cas stochastique, l'application du test de GLR nécessite la supposition d'un seul instant d'apparition pour l'ensemble de tous les défauts hypothétiques (afin de rechercher l'hypothèse la plus vraisemblable parmi l'ensemble de toutes les hypothèses). L'application d'un test de détection globale nécessite donc de retarder globalement l'ensemble des défauts d'un retard  $\alpha$  (c'est le rôle du post filtre  $\hat{\xi}(z)$ ), même s'il existe un ou plusieurs défauts qui ont une répercussion plus rapide que  $\alpha$ . La section du chapitre 1 portant sur la prise en compte du retard sur le test du GLR dans le cas d'une matrice d'interaction diagonale permet effectivement de ne pas retarder systématiquement la détection de tous les défauts de  $\alpha = \max(\rho_i)$  grâce à l'utilisation d'un changement de variable sur l'instant hypothétique d'apparition de chaque défaut. Il semble qu'avec le recul, cette technique ne soit pas la bonne car les mesures prises en compte pour la recherche de l'hypothèse la plus vraisemblable ne sont pas les mêmes (fenêtres glissantes de dimensions différentes pour chaque défaut si  $\rho_i \neq \rho_j, \forall(i,j)$ ).

### 2.1.5 Conclusion

Nous avons présenté une approche complètement différente de celles qui existent dans la littérature pour la conception d'un filtre de détection robuste dans le contexte  $H_2$ . Basés sur la paramétrisation de toutes les inverses à gauche du système, les degrés de liberté restant disponibles sont alors utilisés pour minimiser la norme  $H_2$  du transfert entre les défauts et leurs estimations produites par la sortie du filtre. La remise en forme du signal de sortie du filtre est effectuée à l'aide d'un filtre à réponse impulsionnelle finie construit par rapport à la structure des zéros infinis du système. L'étude de la structure géométrique du filtre détecteur a permis de montrer qu'il génère une estimation d'état réduite de dimension maximum. Cette partie réduite maximale de l'état que l'on peut prédire d'une manière optimale ainsi que l'estimation temps minimal des défauts produits par le filtre seront d'une importance capitale pour la conception des lois de commande tolérantes aux défauts étudiées au chapitre 3.

## 2.2 Filtre de détection à entrées inconnues

Il existe deux approches pour générer un résidu découplé des entrées inconnues dans les cas des systèmes déterministes : la première est basée sur un placement de valeurs propres ([Patton et Chen 1992], [Hsu et Shen 1995]) et la seconde basée sur la conception des observateurs à entrées inconnues (Wunenberg et Frank 1987). Nikoukhah (1994) a été le premier

à développer une méthode de diagnostic robuste dans le cas stochastique où le résidu généré est découplé des entrées inconnues mais où le problème de l'estimation des défauts n'est pas étudié. Récemment, Chen et Speyer (2002) ont proposé un filtre détecteur robuste permettant un découplage parfait des résidus par rapport aux entrées inconnues mais ne permettant que le traitement mono-défaut. Sur la base des travaux de Keller (1999), Parlangeli et Valcher (2002) ont proposé un filtre permettant l'estimation des défauts en présence de perturbations stochastiques et déterministes. Cependant, comme dans Keller (1999), l'estimation des défauts produite par leur filtre, découplée des entrées inconnues, n'est pas à minimum de variance. Cette section va résoudre ce problème par la prise en compte d'un degré de liberté supplémentaire sur le gain de sortie du filtre. Cette partie sera organisée comme suit: Le premier paragraphe formalise le problème et le deuxième propose la solution avant de conclure sur un exemple numérique illustratif.

### 2.2.1 Formulation du problème

Afin de faciliter la formulation du problème, nous supposons la condition d'existence d'une matrice d'interaction diagonale. Le filtre détecteur proposé dans cette section permettra l'estimation optimale et temps minimal des défauts de manière découplée par rapport aux entrées inconnues. Un exemple numérique sera présenté pour illustrer les résultats produits par le filtre. Considérons le système discret suivant

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Fd_k + Mn_k + w_k \quad (2.74)$$

$$y_k = Cx_k + v_k \quad (2.75)$$

où  $x_k \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état,  $y_k \in \mathfrak{R}^m$  le vecteur de mesures,  $u_k \in \mathfrak{R}^p$  le vecteur de commande.  $F = \begin{bmatrix} f_1 & \dots & f_i & \dots & f_q \end{bmatrix}$  est la matrice de distribution des défauts,  $M = \begin{bmatrix} m_1 & \dots & m_i & \dots & m_s \end{bmatrix}$  la matrice de distribution des perturbations.  $d_k \in \mathfrak{R}^q$  et  $n_k \in \mathfrak{R}^s$  représentent respectivement le vecteur des défauts et le vecteur des entrées inconnues. Les bruits de mesure  $w_k$  et d'état  $v_k$  sont non corrélés de moyennes nulles tels que

$$E \left( \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_j^T & v_j^T \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \delta_{kj} \quad (2.76)$$

où  $W \geq 0$  et  $V \geq 0$ . L'état initial  $x_0$  est une variable aléatoire telle que  $E\{x_0\} = \bar{x}_0$  et  $E\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\} = \bar{P}_0$  est décorrélé avec  $w_k$  et  $v_k$ .

On suppose que la fonction de transfert du système  $H_{dn} = C(Iz - A)^{-1} \begin{bmatrix} F & M \end{bmatrix}$  possède une matrice d'interaction  $\xi_{dn}(z)$  diagonale.

Considérons le filtre suivant

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + K(y_k - C\hat{x}_k) \quad (2.77)$$

$$\hat{d}_k = L(y_k - C\hat{x}_k) \quad (2.78)$$

où  $\hat{x}_k$  est l'état du filtre,  $\hat{d}_k$  la sortie du filtre et où  $L \in \mathfrak{R}^{q,m}$  et  $K \in \mathfrak{R}^{n,m}$  sont les deux gains du filtre.

L'erreur d'estimation  $e_k = x_k - \hat{x}_k$  et la sortie du filtre  $\hat{d}_k$  sont données

$$e_{k+1} = (A - KC)e_k + Fd_k + Mn_k + w_k - Kv_k \quad (2.79)$$

$$\hat{d}_k = L(Ce_k + v_k) \quad (2.80)$$

**Définitions** Les indices de détectabilité ([Liu et Si, 1997], [Keller, 1999]) caractérisant le retard  $\rho_i$  des défauts et le retard  $\mu_i$  des entrées inconnues sont définis par

$$\rho_i = \min\{\nu : CA^{\nu-1}f_i \neq 0, \nu = 1, 2, \dots\} \quad (2.81)$$

$$\mu_i = \min\{\nu : CA^{\nu-1}m_i \neq 0, \nu = 1, 2, \dots\} \quad (2.82)$$

Les matrices de détectabilité associées aux défauts et aux perturbations sont respectivement données par

$$\begin{aligned} \Psi_f &= CD_f \text{ avec } D_f = \begin{bmatrix} A^{\rho_1-1}f_1 & \dots & A^{\rho_i-1}f_i & \dots & A^{\rho_q-1}f_q \end{bmatrix} \\ \Psi_m &= CD_m \text{ avec } D_m = \begin{bmatrix} A^{\mu_1-1}m_1 & \dots & A^{\mu_i-1}m_i & \dots & A^{\mu_s-1}m_s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Sous la condition d'existence

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \Psi_f & \Psi_m \end{bmatrix} \right) = q + s \quad (2.84)$$

L'objectif est la synthèse des gains  $K$  et  $L$  tels que

$$W(z) \underset{d \rightarrow \hat{d}}{=} LC(zI - (A - KC))^{-1}F \quad (2.85)$$

$$= \text{diag}(z^{-\rho_1}, z^{-\rho_2}, \dots, z^{-\rho_q}) \quad (2.86)$$

$$W(z) \underset{n \rightarrow \hat{d}}{=} LC(zI - (A - KC))^{-1}M = 0 \quad (2.87)$$

Après avoir donné toutes les solutions de (2.86) et (2.87), la synthèse des degrés de liberté restant disponibles consistera à minimiser la trace de la matrice de covariance  $P_k^d$  de l'erreur d'estimation des défauts donnée par

$$P_k^d = E((\hat{d}_k - E(\hat{d}_k))(\hat{d}_k - E(\hat{d}_k))^T) \quad (2.88)$$

où  $E(\hat{d}_k) = \begin{bmatrix} d_{k-\rho_1}^1 & \dots & d_{k-\rho_i}^i & \dots & d_{k-\rho_q}^q \end{bmatrix}^T$  est satisfaite à la convergence du filtre sous les conditions (2.86) et (2.87).

## 2.2.2 Conception du filtre

### Théorème 8 *Paramétrisation du filtre*

Sous (2.84), les solutions de (2.86) et (2.87) sont données par

$$K = \omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma \quad (2.89)$$

$$L = \varpi\Pi + \bar{K}_k\Sigma \quad (2.90)$$

avec  $\Sigma = \beta(I - \Psi\Pi)$ ,  $\Pi = (\Pi)^+$ ,  $\omega = AD$ ,  $\Psi = CD$ ,  $D = \begin{bmatrix} D_f & D_m \end{bmatrix}$ ,  $\varpi = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$  où  $\beta$  une matrice arbitraire choisie telle que  $\text{rang}(\Sigma) = m - (q + s)$  et où  $\bar{K}_k \in \mathfrak{R}^{n, m - (q + s)}$  et  $\bar{L}_k \in \mathfrak{R}^{q, m - (q + s)}$  sont les paramètres libres éventuellement temps variant.

**Démonstration 8** On a

$$W(z) \underset{d \rightarrow \hat{d}}{=} LC(zI - (A - KC))^{-1}F \quad (2.91)$$

$$= \sum_{k \geq 0} LC(A - KC)^k F z^{-k-1} \quad (2.92)$$

$$= \sum_{k \geq 0} z^{-k-1} \left[ \dots \quad LC(A - KC)^k f_i \quad \dots \right] \quad (2.93)$$

où

$$\sum_{k \geq 0} z^{-k-1} LC(A - KC)^k f_i = z^{-1} LC f_i + z^{-2} LC(A - KC) f_i + \dots \quad (2.94)$$

$$= LCA^{\rho_i-1} f_i z^{-\rho_i} + \sum_{k \geq 0} LC(A - KC)^{k+1} A^{\rho_i-1} f_i z^{-k-1-\rho_i} \quad (2.95)$$

En substituant (2.95) dans (2.93), on obtient

$$W(z) \underset{d \rightarrow \hat{d}}{=} \left[ \dots \quad \sum_{k \geq 0} LC(A - KC)^{k+1} A^{\rho_i-1} f_i z^{-k-1-\rho_i} \quad \dots \right] \quad (2.96)$$

Si le gain  $K$  satisfait l'assignation spectrale suivante

$$(A - KC) \left[ \dots \quad A^{\rho_i-1} f_i \quad \dots \right] = 0 \quad (2.97)$$

alors (2.96) devient

$$W(z) \underset{d \rightarrow \hat{d}}{=} \left[ \dots \quad LCA^{\rho_i-1} f_i z^{-\rho_i} \quad \dots \right] \quad (2.98)$$

$$= L\Psi_f \text{diag}(z^{-\rho_1}, \dots, z^{-\rho_i}, \dots, z^{-\rho_q}) \quad (2.99)$$

et (2.86) est satisfaite sous la contrainte algébrique

$$L\Psi_f = I \quad (2.100)$$

De la même manière, sous l'assignation spectrale suivante

$$(A - KC) \begin{bmatrix} \dots & A^{\mu_i-1} m_i & \dots \end{bmatrix} = 0 \quad (2.101)$$

on obtient

$$W(z) = L \Psi_m \underset{n \rightarrow \hat{d}}{\text{diag}}(z^{-\mu_1}, \dots, z^{-\mu_i}, \dots, z^{-\mu_s}) \quad (2.102)$$

et (2.87) est satisfaite sous la contrainte algébrique

$$L \Psi_m = 0 \quad (2.103)$$

Les équations (2.97), (2.101), (2.100) et (2.103) peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante

$$(A - KC)D = 0 \quad (2.104)$$

$$L\Psi = \varpi \quad (2.105)$$

Avec (2.84), l'assignation spectrale (2.104) et la contrainte algébrique (2.105) peuvent être paramétrées par

$$K = \omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma \quad (2.106)$$

$$L = \varpi\Pi + \bar{L}_k\Sigma \quad (2.107)$$

Il reste donc à calculer les paramètres libres  $\bar{K}_k$  et  $\bar{L}_k$  tels que la trace de la matrice de covariance  $P_k^d$  de l'erreur d'estimation des défauts soit minimale.

### **Théorème 9 Optimisation du filtre isolateur**

*Sous les conditions de stabilité et de convergence données par*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} zI - A & D_f & D_m \\ C & & 0 \end{bmatrix} = n + q + s, \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 1 \quad (2.108)$$

et

$$\text{rang} \begin{bmatrix} -e^{jw}I + A & D_f & D_m & W^{1/2} \end{bmatrix} = n, \forall w \in [0, 2\pi] \quad (2.109)$$

le filtre isolateur de défauts à entrées inconnues est décrit par les équations suivantes

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + (\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)(y_k - C\hat{x}_k) \quad (2.110)$$

$$\bar{P}_{k+1} = (\bar{A} - \bar{K}_k\bar{C})\bar{P}_k(\bar{A} - \bar{K}_k\bar{C})^T + \bar{W} + \bar{K}_k\bar{V}\bar{K}_k^T \quad (2.111)$$

$$\hat{d}_k = (\varpi\Pi + \bar{L}_k\Sigma)(y_k - C\hat{x}_k) \quad (2.112)$$

$$P_k^d = (\varpi\Pi + \bar{L}_k\Sigma)H_k(\varpi\Pi + \bar{L}_k\Sigma)^T \quad (2.113)$$

avec

$$\bar{K}_k = \bar{A}\bar{P}_k\bar{C}^T(\bar{C}\bar{P}_k\bar{C} + \bar{V})^{-1} \quad (2.114)$$

$$\bar{L}_k = -\varpi\Pi H_k \Sigma^T (\Sigma H_k \Sigma^T)^{-1} \quad (2.115)$$

$$H_k = C\bar{P}_k C^T + I \quad (2.116)$$

où  $\bar{A} = A - \omega\Pi C$ ,  $\bar{C} = \Sigma C$ ,  $\bar{V} = \Sigma\Sigma^T$ ,  $W = W + \omega\Pi\Pi^T\omega^T$

**Démonstration 9** La sortie du filtre peut s'exprimer

$$\hat{d}_k = LCe_k \quad (2.117)$$

$$= L(C\bar{e}_k + v_k) + \left[ d_{k-\rho_1}^1 \quad \dots \quad d_{k-\rho_i}^i \quad \dots \quad d_{k-\rho_q}^q \right]^T \quad (2.118)$$

en fonction de l'évolution des erreurs de prédiction d'état sans défaut satisfaisant

$$\bar{e}_{k+1} = (A - KC)\bar{e}_k + w_k - Kv_k \quad (2.119)$$

Soit  $e_k^d = \hat{d}_k - E(\hat{d}_k)$ . En substituant (2.106) et (2.107) dans (2.118) et (2.119), on obtient

$$\bar{e}_{k+1} = (A - (\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)C)\bar{e}_k + w_k - (\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)v_k \quad (2.120)$$

$$e_k^d = (\varpi\Pi + \bar{L}_k\Sigma)(C\bar{e}_k + v_k) \quad (2.121)$$

Les matrices de covariance de l'erreur de prédiction d'état  $\bar{P}_k = E(\bar{e}_k\bar{e}_k^T)$  et  $P_k^d = E(e_k^d e_k^{dT})$  satisfont

$$\bar{P}_{k+1} = (A - (\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)C)\bar{P}_k(A - (\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)C)^T \quad (2.122)$$

$$+W + (\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)(\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)^T \quad (2.123)$$

$$P_k^d = (\varpi\Pi + \bar{L}_k\Sigma)(C\bar{P}_k C^T + I)(\varpi\Pi + \bar{L}_k\Sigma)^T \quad (2.124)$$

Les traces de  $\bar{P}_{k+1}$  et  $P_k^d$  sont minimisées par rapport  $\bar{K}_k$  et  $\bar{L}_k$  ssi

$$-(A - (\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)C)\bar{P}_k C^T \Sigma^T + (\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)\Sigma^T = 0 \quad (2.125)$$

$$(\omega\Pi + \bar{L}_k\Sigma)H_k \Sigma^T = 0 \quad (2.126)$$

Les solutions de (2.125) et (2.126) sont données par

$$\bar{K}_k = (A\bar{P}_k C^T - \omega\Pi H_k)\Sigma^T (\Sigma H_k \Sigma^T)^{-1} \quad (2.127)$$

$$\bar{L}_k = -\varpi\Pi H_k \Sigma^T (\Sigma H_k \Sigma^T)^{-1} \quad (2.128)$$

Avec  $\Pi\Sigma^T = 0$ , (2.127) donne (2.114). Les conditions de stabilité et de convergence du filtre sont déduites directement des résultats donnés par Keller (1999).

### 2.2.3 Exemple illustratif

On considère un système discret décrit par

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0 & 0.8 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.129)$$

$$W = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.130)$$

Le système est affecté par deux défauts actionneurs (de type biais dans cet exemple) définis par

$$f_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, d_k^1 = 2, \rho_1 = 2 \quad (2.131)$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, d_k^2 = 3, \rho_2 = 1 \quad (2.132)$$

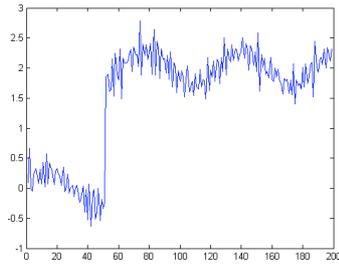
apparaissant à l'instant 50 et par une perturbation de type entrée inconnue toujours présente caractérisée par

$$m_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, n_k^1 = 1.2 * \sin(0.1k), \mu_1 = 1. \quad (2.133)$$

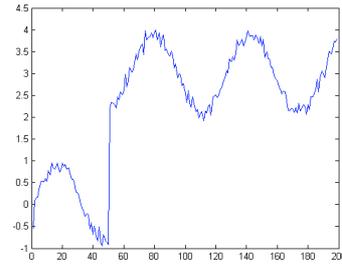
Les résultats obtenus par notre filtre sont comparés aux résultats du filtre de détection de Keller (1999). La figure 2.1 montre que les estimations des défauts du filtre de Keller (1999) sont sensibles à l'entrée inconnue.

En revanche, notre estimateur est insensible à la présence de la perturbation comme le montre la figure 2.2.

L'application d'un test statistique sur l'estimation des défauts produite par le filtre de détection à entrées inconnues permettra d'éviter les fausses alarmes dues à la présence de l'entrée inconnue et à l'utilisation d'un estimateur de défauts qui ne serait pas à minimum de variance.

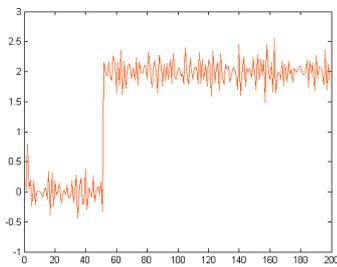


(a) Estimation du premier défaut,  $\hat{d}_k^1$

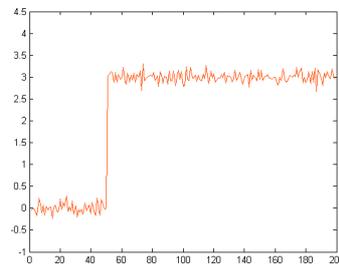


(b) Estimation du deuxième défaut,  $\hat{d}_k^2$

FIG. 2.1 – *Filtre de détection, Keller (1999)*



(a) Estimation du premier défaut,  $\hat{d}_k^1$



(b) Estimation du deuxième défaut,  $\hat{d}_k^2$

FIG. 2.2 – *Filtre de détection à entrée inconnue*

## 2.2.4 Conclusion

Nous avons présenté un filtre détecteur de défauts pour les systèmes linéaires stochastiques affectés par des entrées inconnues. La sortie du filtre est une estimation temps minimal des défauts à minimum de variance découplée des perturbations sous des conditions d'existence, de convergence et de stabilité explicitement obtenues. Dans le cas où la condition d'existence d'une matrice d'interaction diagonale n'est pas satisfaite, il est tout à fait possible d'étendre les résultats par une analyse plus fine de la structure des zéros infinis de la matrice de transfert du système.

## 2.3 Application à la perte d'efficacité d'actionneurs

### 2.3.1 Introduction

Les défauts d'actionneurs sont souvent la cause majeure de la détérioration des performances d'un système de contrôle/commande. Dans le but de maintenir les performances

du système de contrôle/commande en présence d'une perte d'efficacité d'un ou de plusieurs actionneurs, Wu et al (1998) ont développé un filtre de Kalman adaptatif, basé sur le filtre de Kalman à deux étages de Keller et Darouach (1997), permettant l'estimation adaptative de la perte d'efficacité. En raison de la forme particulière du filtre de Kalman à deux étages, l'adaptativité du filtre liée au facteur d'oubli du filtre est réglée par la variance arbitraire affectée sur l'équation du biais modélisant la perte d'efficacité. Dans le cas d'une perte abrupte d'efficacité, l'adaptativité du filtre de Wu (1998) risque de ne pas être suffisante et de ne pas permettre au système de contrôle/commande de corriger suffisamment tôt le défaut. Cette partie est organisée comme suit: dans le premier paragraphe on montre comment le filtre détecteur développé au chapitre précédent peut être appliqué pour l'estimation temps minimal de la perte d'efficacité. Dans le deuxième, nous comparerons de manière numérique les résultats obtenus avec ceux de Wu et al. (1998). Cette comparaison permettra de mettre en valeur les résultats obtenus dans ce chapitre et d'expliquer clairement la notion de temps minimal liée à l'adaptativité maximum du filtre.

### 2.3.2 Filtre détecteur pour l'estimation adaptative de la perte d'efficacité

Soit un système dynamique stochastique discret en présence d'une perte d'efficacité de la commande (défaut interne) décrit sous forme d'état

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \begin{bmatrix} b_1 n_k^1 & \dots & b_i n_k^i & \dots & b_p n_k^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k^1 \\ \vdots \\ u_k^i \\ \vdots \\ u_k^p \end{bmatrix} + w_k \quad (2.134)$$

$$y_k = Cx_k + v_k \quad (2.135)$$

où  $x_k \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état,  $y_k \in \mathfrak{R}^m$  le vecteur de mesures et où  $u_k \in \mathfrak{R}^p$  sont les entrées du système.  $n_k = \begin{bmatrix} n_k^1 & \dots & n_k^i & \dots & n_k^p \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^p$  est le vecteur des  $p$  facteurs d'efficacité satisfaisant  $-1 \leq n_k^i \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , et  $B = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_i & \dots & b_p \end{bmatrix}$ . Les bruits gaussiens  $w_k$  et  $v_k$  de moyennes nulles sont non corrélés avec

$$E \left( \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_j^T & v_j^T \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \delta_{kj} \quad (2.136)$$

où  $W \geq 0$  et  $V \geq 0$ . Les équations du modèle d'état précédent peuvent être réécrites comme suit

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + F_{(k,u)} n_k + w_k \quad (2.137)$$

$$y_k = Cx_k + v_k \quad (2.138)$$

où  $F_{(k,u)} = \begin{bmatrix} b_1 u_k^1 & \dots & b_i u_k^i & \dots & b_p u_k^p \end{bmatrix}$  et  $n_k = \begin{bmatrix} n_k^1 & \dots & n_k^i & \dots & n_k^p \end{bmatrix}^T$ .

L'application temps variant du filtre de détection (sans entrées inconnues ici) est alors possible si  $F_{(k,u)}$  conserve son rang égal à  $q$  tout au long du traitement, c'est-à-dire ssi la commande  $u_k \in \mathfrak{R}^p$  appliquée au système n'est pas nulle, une condition non restrictive en pratique sous la condition de ne pas perdre totalement le contrôle d'un actionneur.

### 2.3.3 Exemple illustratif

Considérons l'équation d'état d'un avion (Wu, 1998) où la perte d'efficacité d'un actionneur est un problème majeur:

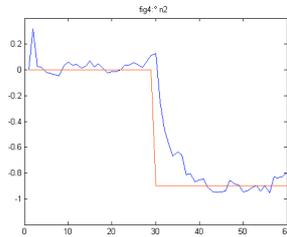
$$A = \begin{bmatrix} 1.0037 & 0.0026 & -0.0004 & -0.0461 \\ 0.0045 & 0.9037 & -0.0188 & -0.3834 \\ 0.0098 & 0.00339 & 0.9383 & 0.1302 \\ 0.0005 & 0.0017 & 0.0968 & 1.0067 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.0447 & 0.0167 \\ 0.3407 & -0.7249 \\ -0.5278 & 0.4214 \\ -0.0268 & 0.0215 \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W^x = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, W^n = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } V = I. \quad (2.140)$$

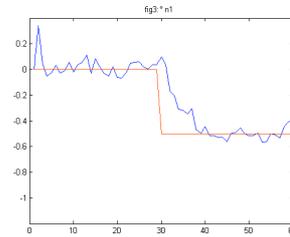
$$b_1 = \begin{bmatrix} 0.0447 & 0.3407 & -0.5278 & -0.0268 \end{bmatrix}^T, n_1 = -0.9, \rho_1 = 1 \quad (2.141)$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0.0167 & -0.7249 & 0.4214 & 0.0215 \end{bmatrix}^T, n_2 = -0.5, \rho_2 = 1 \quad (2.142)$$

La figure (2.3) représente l'estimation adaptative de la perte d'efficacité apparaissant à l'instant 30 sur les deux actionneurs produite par le filtre de Wu et al. (1998) avec un facteur d'oubli relativement grand. La figure (2.4) représente l'estimation temps minimal de la perte d'efficacité donnée par le filtre de détection. Ces résultats numériques permettent d'apprécier l'adaptativité maximale de nos estimations par rapport au filtre de Kalman adaptatif de Wu et al. (1998).

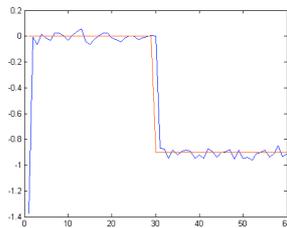


(a) Estimation de la  
perte d'efficacité du  
premier actionneur,  
 $\hat{n}_k^1$

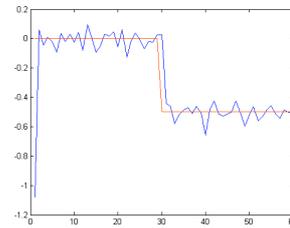


(b) Estimation de la  
perte d'efficacité du  
deuxième actionneur,  
 $\hat{n}_k^2$

FIG. 2.3 – *Filtre de Kalman adaptatif de Wu et al. (1998)*



(a) Estimation de la  
perte d'efficacité du  
premier actionneur,  
 $\hat{n}_k^1$



(b) Estimation de la  
perte d'efficacité du  
deuxième actionneur,  
 $\hat{n}_k^2$

FIG. 2.4 – *Filtre de détection*

### 2.3.4 Conclusion

Nous avons présenté une application particulière de nos résultats dédiée à l'estimation de la perte d'efficacité de la commande où l'amélioration de l'adaptativité est un résultat très important dans le contexte de la commande tolérante aux défauts afin de générer une commande reconfiguratrice très réactive à l'occurrence d'un problème de ce type.

## 2.4 Conclusion

Le chapitre 2 a présenté une nouvelle approche permettant le traitement multi-défauts dans les systèmes dynamiques stochastiques discrets. Cette approche est basée sur le calcul optimal de l'inverse à gauche du système permettant de remonter à la source du problème en fonction des mesures disponibles à l'autre bout du système. En ce sens, cette nouvelle approche est tout à fait naturelle mais sort du cadre de résolution du diagnostic multi-défauts généralement résolu trop simplement par une approche basée observateur d'état. On ne cherche pas ici à observer l'état du système qui résume seulement les conséquences de la présence d'un ou de plusieurs défauts mais on a reconstruit ici directement la cause, c'est-à-dire leurs amplitudes hypothétiques.

---

## Chapitre 3

# Commande tolérante aux défauts

### 3.1 Introduction

La commande tolérante aux défauts a pour but de s'accommoder automatiquement de l'effet des défauts tout en étant capable de maintenir la stabilité et au mieux les performances nominales du système. La conséquence est d'éviter l'arrêt immédiat du système et de permettre son fonctionnement en mode dégradé. Le problème majeur rencontré pour la conception de telles lois de commandes est que la plupart des techniques de diagnostic sont développées comme un outil de surveillance et non pas comme une partie intégrante de la commande. Le problème général qui se pose est donc de savoir comment intégrer les techniques de diagnostic existantes au profit de la commande tolérante aux défauts. Au chapitre 2, nous avons développé un filtre détecteur et réalisé son étude géométrique. Cette étude a permis de montrer que le filtre de détection génère un espace de détection deadbeat. L'objectif de ce chapitre est de montrer comment utiliser notre filtre de détection afin de générer une loi de commande à réactivité maximum permettant d'annuler très rapidement les effets néfastes liés à l'apparition d'un ou de plusieurs défauts sur le système. Avant de donner notre solution, un état de l'art de la commande tolérante aux défauts est réalisé.

### 3.2 État de l'art de la commande tolérante aux défauts

Les techniques de commande tolérante aux défauts peuvent être classifiées en trois grands ensembles : l'accommodation passive, l'accommodation active et l'accommodation adaptative.

\* **Accommodations passives.** Elles sont basées sur l'idée simple que les défauts représen-

tent des perturbations que la loi de commande doit prendre en compte dès sa conception initiale engendrant une structure de contrôle fixe à paramètres fixes. Elles utilisent les techniques de commande robuste par rapport aux incertitudes structurées que sont

les défauts (commande  $H_\infty$ , commande à rejet de perturbation,...). Ce type d'approche n'a besoin ni d'un module de diagnostic pour détecter la présence des défauts ni d'un bloc de reconfiguration de la structure et/ou des paramètres du système de contrôle.

\* **Accommodations actives**, Au contraire des méthodes passives, les méthodes actives réagissent à l'apparition d'un ou de plusieurs défauts par la restructuration du système de contrôle. Leur objectif principal est de compenser au mieux l'effet des défauts sur le système afin que la stabilité et les performances du système soient maintenues en jouant sur la robustesse de la commande qui doit être améliorée à chaque détection d'un défaut. Elles sont composées essentiellement de trois éléments fondamentaux :

- 1) Une commande reconfigurable,
- 2) Un module de diagnostic permettant la détection, l'isolation et l'estimation de l'amplitude des défauts,
- 3) Un mécanisme de reconfiguration.

Le problème critique dans cette approche est la limitation du temps disponible pour le recalcul de la loi de commande à chaque instant de détection d'un défaut. Dans le cas stochastique, ce type d'approche engendre aussi un autre problème très peu étudié dans le contexte déterministe. Lors d'une fausse alarme ou d'une non détection, que se passe-t-il sur la robustesse et les performances du système?. Cette thèse ne rentre pas dans le cadre de ce type de commande très difficile à aborder dans le contexte stochastique où la prise de décisions est toujours affectée d'un risque d'erreur.

\* **Accommodation adaptative**. La commande tolérante aux défauts de type adaptative est une approche à accommodation active mais où seuls les paramètres de la commande sont modifiés suite à l'occurrence d'un défaut. Elle possède donc une structure fixe. Dans le cas des systèmes linéaires à défauts additifs externes, elle consiste à générer un signal résidu reflétant le défaut à compenser. Ce résidu est alors utilisé pour générer la correction à apporter à la commande nominale du système ([Noura et al. 2000]). Dans le cas où la correction n'est effectuée que lorsque le défaut est déclaré significatif par un test statistique appliqué sur les résidus, alors la commande adaptative résultante peut être classée dans la catégorie des méthodes actives car dépendante d'une prise de décision.

Avant de présenter notre technique de commande tolérante aux défauts de type adaptative sans test de détection, nous rappelons quelques méthodes de reconfiguration basées sur la pseudo-inverse, la commande adaptative pour des défauts de type interne, la commande multi-modèles et la commande prédictive. Nous insisterons plus particulièrement sur la stratégie de commande adaptative de type LQG proposée par Wu et al. (2000) obtenue dans le cadre du traitement de défauts de type perte d'efficacité d'actionneurs.

- \* **Méthode de la pseudo-inverse** : Considérons le système nominal en boucle fermée suivant forme d'état suivante:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

$$y = Cx \quad (3.2)$$

$$u = -Kx \quad (3.3)$$

L'apparition d'un défaut conduit à une modification du modèle décrit maintenant par

$$\dot{x}_f = A_f x_f + B_f u_f \quad (3.4)$$

$$y_f = C_f x_f \quad (3.5)$$

où l'indice  $f$  indique la situation en défaut du système. Cette méthode consiste à calculer une nouvelle matrice de gain  $K_f$  de telle sorte que la dynamique du système défaillant en boucle fermée soit approximativement égale à celle du système nominal.

$$u_f = -K_f x_f \quad (3.6)$$

$$A - BK = A_f - B_f K_f \quad (3.7)$$

Une approximation au sens des moindres carrés est donnée par:

$$K_f = B_f^+ (A_f - A + BK) \quad (3.8)$$

où  $B_f^+$  est la matrice pseudo-inverse de  $B_f$ . L'avantage de cette méthode est la simplicité du calcul mais la solution n'est pas toujours satisfaisante car elle ne garanti pas la stabilité en mode défaillant. La méthode de la pseudo-inverse modifiée (MPIM) a été proposée par Gao et Antsaklis (1991) pour garantir cette stabilité. Un compromis doit alors être trouvé entre la stabilité et les performances du système reconfiguré.

- \* **Commande adaptative**: Cette approche est naturelle pour résoudre le problème d'accommodation aux défauts de type interne. En effet, lorsqu'un défaut interne apparaît sur le système, il entraîne alors une modification de ses paramètres. L'identification en ligne de ces paramètres permet alors la modification des paramètres du correcteur à structure fixe. Ces méthodes ont souvent été testées en simulation dans le domaine de l'aéronautique ([Dittmar, 1988], [Huang et Stengel, 1990], [Rausch, 1995]). Morse et Ossman (1990) ont étudié un régulateur multivariable adaptatif défini par Sobel et al. (1982) ajustant directement les gains du régulateur en temps réel. Cependant, les auteurs soulignent la difficulté à déterminer les matrices de pondération nécessaires au compromis stabilité/performance. Les différentes situations étudiées ne font souvent intervenir que des défauts peu sévères et la présence de bruit n'est pas prise en compte.
- \* **Commande multi-modèles**: Cette démarche attire l'attention de nombreux chercheurs pour résoudre le problème de l'accommodation pour des systèmes non-linéaires.

En effet, ces techniques permettent de commander un système non-linéaire sur une large zone de fonctionnement décomposée en plusieurs zones linéarisées autour de différents points de fonctionnement (c'est d'ailleurs cette technique de linéarisation qui sera adoptée pour l'application pratique de nos résultats au chapitre 4). Les techniques linéaires restent alors utilisables en nonlinéaire. Une méthode d'accommodation aux défauts basée sur une commande adaptative multi-modèles a été synthétisée par Maybeck et al. (1991). La loi de commande globale est déterminée à partir de  $n$  lois de commandes calculées pour toutes les situations possibles du système sont décrites par un ensemble de  $n$  modèles. Le premier modèle correspond au fonctionnement nominal du système. Les autres situations prennent en compte l'apparition d'un défaut particulier entraînant le système en dehors de sa zone de fonctionnement nominal. Les matrices de gain  $K_i$  de la commande sont calculées à l'avance pour chacun des modes de fonctionnement. La commande locale  $u_i$  est déterminée par la relation:

$$u_i = K_i \hat{X}_i \quad (3.9)$$

où  $\hat{X}_i$  est l'estimation de l'état du système fournie par le  $i^{eme}$  filtre. Une unité de calcul des probabilités de Bayes permet de calculer les probabilités  $P(H_i/r_i)$  associées à chaque modèle possible par

$$P(H_i/r_i) = \frac{P(H_i)P(r_i/H_i)}{\sum_{i=1}^n [P(H_i)P(r_i/H_i)]} \quad (3.10)$$

où  $P(r_i/H_i)$  désigne la probabilité conditionnelle de l'innovation  $r_i$  issue du  $i^{eme}$  filtre et où  $P(H_i)$  est la probabilité a priori du modèle  $H_i$ . La loi de commande globale appliquée au système est alors déterminée par:

$$U = \sum_{i=1}^m u_i P(H_i/r_i) \quad (3.11)$$

Cette méthode requiert le calcul a priori des gains des régulateurs correspondant à chaque situation du système. Une méthode fondée sur le principe d'interaction a été développée pour des défauts de type capteur et actionneur ([Ragot et al., 1998], [Zhang et Jiang, 1999], [Yang et al., 2000]). Cette technique est basée sur une estimation d'état reconfigurée permettant d'éviter la modification du gain de la commande par retour d'état pour n'importe quelle situation du système.

- \* **Commande prédictive:** Tout le potentiel de la commande prédictive à résoudre le problème de l'accommodation aux défauts a été montré par Maciejowki (1997). Elle permet de réadapter le correcteur en présence de défauts de manière à garantir la stabilité du système et à maintenir des performances très proches de celles du système nominal ([Rowe et Maciejowski, 2000], [Gopinathan et al., 1999]). Cependant, la plupart de ces méthodes sont valables sous certaines hypothèses: le modèle des défauts (et

leurs effets sur le système) doit être parfaitement connu, les défauts considérés doivent être de faible amplitude de telle sorte que les objectifs à atteindre par le système puissent rester inchangés après l'apparition des défauts [Maciejowski, 2000].

\* **Commande LQG adaptative, Wu et al. (2000)**

Soit un système dynamique linéaire en défaut décrit par le modèle d'état augmenté suivant

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Fn_k + w_k^x \quad (3.12)$$

$$n_{k+1} = n_k + w_k^n \quad (3.13)$$

$$y_{k+1} = Cx_{k+1} + v_{k+1} \quad (3.14)$$

où les défauts  $n_k$  sont modélisés par une équation de type biais aléatoire. Les bruits  $w_k^x, w_k^n$  et  $v_k$  sont supposés de moyennes nulles non corrélés tels que

$$E \left( \begin{bmatrix} w_k^x \\ w_k^n \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_j \\ w_j^n \\ v_j \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} Q^x & 0 & 0 \\ 0 & Q^n & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \delta_{kj} \quad (3.15)$$

avec  $Q^x > 0$ ,  $Q^n > 0$  et  $R > 0$ . Les conditions initiales  $x_0$  et  $n_0$  sont supposées non corrélées avec  $w_k^x$ ,  $w_k^n$  et  $v_k$ .

Pour des défauts de type perte d'efficacité d'actionneurs alors  $F = BU_k$  avec  $U_k =$

$$\text{diag} \left( u_k^1 \quad u_k^2 \quad \dots \quad u_k^q \right) \text{ et } n_k = \begin{bmatrix} n_k^1 \\ n_k^2 \\ \vdots \\ n_k^q \end{bmatrix}.$$

Introduisant des facteurs d'oubli sur le filtre de Kalman à deux étages développé par Keller et Darouach (1997), Wu et al. (2000) ont permis l'adaptation du filtre par rapport à des changements sur la valeur du biais  $n_k$  en modifiant l'estimateur du biais. On rappelle le filtre obtenu :

Estimateur du biais

$$\hat{n}_{k+1/k} = \hat{n}_{k/k} \quad (3.16)$$

$$P_{k+1/k}^n = \sum_{i=1}^q \frac{1}{\lambda_k^i} \alpha_{k/k}^i e_k^i (e_k^i)^T + Q_k^n \quad (3.17)$$

$$\hat{n}_{k+1/k+1} = \hat{n}_{k+1/k} + K_{k+1}^n (\tilde{r}_{k+1} - H_{k+1/k} \hat{n}_{k/k}) \quad (3.18)$$

$$K_{k+1}^n = P_{k+1/k}^n H_{k+1/k}^T (H_{k+1/k} P_{k+1/k}^n H_{k+1/k}^T + \tilde{S}_{k+1})^{-1} \quad (3.19)$$

$$P_{k+1/k+1}^n = (I - K_{k+1}^n H_{k+1/k}) P_{k+1/k}^n \quad (3.20)$$

où

$$\tilde{r}_{k+1} = y_{k+1} - C\tilde{x}_{k+1/k} \quad (3.21)$$

$$\tilde{S}_{k+1} = C\tilde{P}_{k+1/k}^x C^T + R_{k+1} \quad (3.22)$$

$$(3.23)$$

avec

$$P_{k/k}^n = \sum_{i=1}^q \alpha_{k/k}^i e_k^i (e_k^i)^T \quad (3.24)$$

$$\lambda_k^i = \begin{cases} 1 & \alpha_{k/k}^i > \alpha_{max} \\ \alpha_{k/k}^i [\alpha_{min} + \frac{\alpha_{max} - \alpha_{min}}{\alpha_{max}} \alpha_{k/k}^i]^{-1} & \alpha_{k/k}^i \leq \alpha_{max} \end{cases} \quad (3.25)$$

et  $\lambda_k^i$  les facteurs d'oubli liés à la covariance du biais.

Estimateur d'état sans biais

$$\tilde{x}_{k+1/k} = A\tilde{x}_{k/k} + Bu_k \quad (3.26)$$

$$\tilde{x}_{k+1/k} = \tilde{x}_{k+1/k} + W_k \hat{n}_{k/k} - V_{k+1/k} \hat{n}_{k/k} \quad (3.27)$$

$$\tilde{P}_{k+1/k}^x = A\tilde{P}_{k/k}^x A^T + Q_k^x \quad (3.28)$$

$$\tilde{P}_{k+1/k}^x = \tilde{P}_{k+1/k}^x + W_k P_{k/k}^n W_k^T - V_{k+1/k} P_{k+1/k}^n V_{k+1/k}^T \quad (3.29)$$

$$\tilde{x}_{k+1/k+1} = \tilde{x}_{k+1/k} + \tilde{K}_{k+1}^x (y_{k+1} - C\tilde{x}_{k+1/k}) \quad (3.30)$$

$$\tilde{K}_k^x = \tilde{P}_{k+1/k}^x C^T (C\tilde{P}_{k+1/k}^x C^T + R_{k+1})^{-1} \quad (3.31)$$

$$\tilde{P}_{k+1/k+1}^x = (I - \tilde{K}_{k+1}^x C) \tilde{P}_{k+1/k}^x \quad (3.32)$$

Equations de couplage

$$W_k = AV_{k/k} + F_k \quad (3.33)$$

$$V_{k+1/k} = W_k P_{k/k}^n (P_{k+1/k}^n)^{-1} \quad (3.34)$$

$$H_{k+1/k} = CV_{k+1/k} \quad (3.35)$$

$$V_{k+1/k+1} = V_{k+1/k} - \tilde{K}_{k+1}^x H_{k+1/k} \quad (3.36)$$

Reconfiguration (estimation de l'état réel du système)

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \tilde{x}_{k+1/k+1} + V_{k+1/k+1} \hat{n}_{k+1/k+1} \quad (3.37)$$

$$P_{k+1/k+1} = \tilde{P}_{k+1/k+1}^x + V_{k+1/k+1} P_{k+1/k+1}^n V_{k+1/k+1}^T \quad (3.38)$$

Par le principe de séparation, la loi de commande obtenue par Wu et al. (2000) est donnée par

$$u_k = -L_k^x \hat{x}_{k/k} \quad (3.39)$$

$$(3.40)$$

où  $L^x$  est solution du critère LQG suivant

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (x_k^T Q_c x_k + u_k^T R_c u_k) \quad (3.41)$$

sous la contrainte

$$x_{k+1} = Ax_k + B(I + \hat{\Gamma})u_k + w_k^x \quad (3.42)$$

$$y_k = Cx_k + v_k \quad (3.43)$$

avec  $Q_c$  et  $R_c$  deux matrices de pondération bien connues dans le cadre de la commande LQG et  $\hat{\Gamma} = \text{diag} \left( \hat{n}_k^1 \quad \dots \quad \hat{n}_k^j \right)$ . La solution dépendante de  $\hat{\Gamma}$  est donnée par

$$L^x = R_c^{-1}(I + \hat{\Gamma})B^T P_c \quad (3.44)$$

$$0 = A^T P_c + P_c A - P_c B(I + \hat{\Gamma})R_c^{-1}(I + \hat{\Gamma})B^T P_c + Q_c \quad (3.45)$$

Le recalcul de la loi de commande est effectué à chaque changement significatif sur  $\hat{\Gamma}$  détecté à l'aide d'un test statistique non décrit ici. On note que l'équation de Riccati (3.45) est non linéaire en raison de la présence de  $\hat{\Gamma}$ . Ceci peut entraîner des problèmes de convergence.

La section suivante proposera d'éviter l'utilisation d'un test statistique par l'utilisation d'un filtre de Kalman augmenté à adaptativité maximum. Le retour d'état sera calculé sur le même modèle que le filtre sur la base d'un rejet asymptotique des modes non contrôlables. Cette loi de commande permettra le rejet des perturbations sans connaissance a priori sur leurs modèles d'évolution et seront donc considérées comme des entrées inconnues.

### 3.3 Commande tolérante à réactivité maximum

Notre objectif est d'utiliser le filtre de détection du chapitre 2 pour concevoir une structure de contrôle tolérante aux défauts à réactivité maximum. L'idée directrice est analogue à celle de Wu et al. (1998) qui s'appuie sur l'estimation adaptative du vecteur d'état du système et du vecteur défaut pour produire une loi de commande par retour d'état fonction de ces deux quantités. Rappelons que Wu et al. (2000) considèrent un modèle d'évolution de type biais aléatoire

$$\nu_{k+1} = \nu_k + w_k \quad (3.46)$$

où  $w_k$  représente le bruit gaussien fictif de covariance fixant l'adaptativité du filtre de Kalman. Notre loi de commande tolérante aux défauts sera de la même façon conçue sur le modèle du système à état augmenté mais l'estimation de ces deux quantités sera obtenue par l'application du filtre de détection à état augmenté conçu sous le modèle d'évolution suivant

$$\nu_{k+1} = \nu_k + \sum_{j=1}^f \Delta\nu_j \delta_{k,k_j} \quad (3.47)$$

où  $k_j$  est l'instant du changement impulsionnel sur le biais,  $\Delta\nu_j$  l'amplitude du  $j^{\text{eme}}$  saut impulsionnel,  $\delta_{k,k_j}$  l'opérateur de Kronecker.

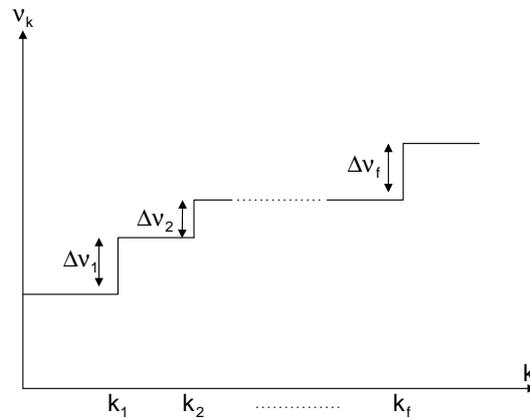


FIG. 3.1 – Biais à saut successif

En présence des défauts impulsionnels  $d_k = \sum_{j=1}^f \Delta\nu_j \delta_{k,k_j}$  l'estimation de l'état augmenté  $\hat{Z}_k$  donnée par le filtre détecteur retrouvera son caractère non biaisé  $E(\hat{Z}_{r+\alpha+1}) = X_{r+\alpha+1}$  après un temps minimal donné par  $\alpha + 1$ .  $\hat{Z}_k$  sera donc une estimation d'état reconfigurée en temps minimal ou à adaptativité maximale. C'est cette propriété qui est utilisée ici pour le développement d'une loi de commande tolérante à des perturbations constantes par morceaux. Le gain du retour d'état de la loi de commande sera calculé sur la base d'une technique de rejet des modes non contrôlables  $\nu_k$ . Pour simplifier la présentation, on ne considère que des défauts de type actionneur ou système. Soit le système suivant

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + F\nu_k + Hw_k \quad (3.48)$$

$$\nu_{k+1} = \nu_k + d_k \quad (3.49)$$

$$y_k = Cx_k + Gw_k \quad (3.50)$$

où  $x_k \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état,  $y_k \in \mathfrak{R}^m$  est le vecteur de mesures,  $u_k \in \mathfrak{R}^p$  les entrées du système,  $F \in \mathfrak{R}^{(n,q)}$  est la matrice de distribution des défauts avec  $E\{w_k w_j^T\} = I\delta_{kj}$ ,

$\text{rang}F = q$ ,  $\text{rang}G = m$ ,  $q \leq m$  où  $d_k = \sum_{j=1}^f \Delta\nu_j \delta_{k,k_j}$  représente un signal fictif de type impulsionnel. Sans perte de généralité, on suppose ici que  $p = m$ , c'est à dire que le nombre de commande est égal au nombre de sortie à réguler.

Avec  $X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ \nu_k \end{bmatrix}$ , le système (3.48; 3.49; 3.50) s'écrit

$$X_{k+1} = \bar{A}X_k + \bar{B}u_k + \bar{F}\nu_k + \bar{H}w_k \quad (3.51)$$

$$y_k = \bar{C}X_k + Gw_k \quad (3.52)$$

$$\text{où } \bar{A} = \begin{bmatrix} A & F \\ 0 & I \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}, \bar{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \bar{H} = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les conditions de convergence et de stabilité du filtre détecteur du chapitre 2 conçu sur le système à état augmenté (3.51; 3.52) sont données par

$$\text{rang} \begin{bmatrix} -Iz + \bar{A} & \bar{F} \\ \bar{C} & 0 \end{bmatrix} = n + 2q, \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 1 \quad (3.53)$$

$$\text{et} \quad (3.54)$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} -e^{jw}I + \bar{A} & \bar{F} & \bar{H} \\ \bar{C} & 0 & G \end{bmatrix} = n + q + m, \forall w \in [0, 2\pi] \quad (3.55)$$

Le filtre de détection à état augmenté est décrit par par

$$\hat{Z}_{k+1} = \hat{A}\hat{Z}_k + \hat{B}u_k + \hat{F}_\alpha \hat{N}_\alpha^+ y_k + \hat{K}\hat{\gamma}_k \quad (3.56)$$

$$\hat{\gamma}_k = \hat{\Sigma}y_k - \hat{C}\hat{Z}_k \quad (3.57)$$

$$\hat{K} = (\hat{A}\hat{P}\hat{C}^T + \hat{H}\hat{G}^T)(\hat{C}\hat{P}\hat{C}^T + \hat{G}\hat{G}^T)^{-1}(\hat{A}\hat{P}\hat{C}^T + \hat{F}\hat{G}^T)^T \quad (3.58)$$

où  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P^x & P^{x\nu} \\ P^{\nu x} & P^\nu \end{bmatrix}$  est solution de

$$\bar{P} = \hat{A}\hat{P}\hat{A}^T + \hat{F}\hat{F}^T - (\hat{A}\hat{P}\hat{C}^T + \hat{F}\hat{G}^T)(\hat{C}\hat{P}\hat{C}^T + \hat{G}\hat{G}^T)^{-1}(\hat{A}\hat{P}\hat{C}^T + \hat{F}\hat{G}^T)^T \quad (3.59)$$

avec

$$\hat{A} = \bar{A} - \hat{F}_\alpha \hat{N}_\alpha^+ \bar{C}, \hat{C} = \hat{\Sigma}\bar{C}, \hat{H} = \bar{H} - \hat{F}_\alpha \hat{N}_\alpha^+ G \text{ et } \hat{G} = \hat{\Sigma}G.$$

Rappelons que l'espace de détection est deadbeat. Donc, suite à l'apparition de l'impulsion  $d_k = \sum_{j=1}^f \Delta\nu_j \delta_{k,k_j}$  à l'instant  $r$  modélisant un saut d'amplitude  $\Delta\nu_k$  sur  $\nu_k$ , l'erreur d'estimation du filtre atteignable par  $\Delta\nu_k$  va décroître à zéro en un temps minimal. C'est cette propriété qui est utilisée ici pour la conception d'une loi de commande à réactivité maximum par rapport aux changements abrupts induits par l'entrée impulsionnelle fictive

$d_k = \sum_{j=1}^f \Delta \nu_j \delta_{k,k_j}$ . Notons que la structure particulière du système à état augmenté engendre un espace de détection incluant forcément l'état  $\nu_k$ . L'estimation de  $\nu_k$  sera donc garantie d'être à adaptativité maximum.

Nous proposons le calcul de la commande par retour d'état

$$u_k = -L\hat{Z}_k \quad (\text{ou } u_k = - \begin{bmatrix} L^x & L^\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{\nu}_k \end{bmatrix}) \quad (3.60)$$

ou par le principe de séparation le calcul de la loi de commande  $u_k = -LX_k$  pour le système

$$X_{k+1} = \bar{A}X_k + \bar{B}u_k \quad (3.61)$$

$$y_k = \bar{C}X_k \quad (3.62)$$

Posons

$$u_k = u_k^n - G_1 \nu_k \quad (3.63)$$

où  $u_k^n = -\bar{L}\bar{x}_k$  est la loi de contrôle stabilisante nominale supposée avoir été calculée par une technique quelconque sur le système sans défaut

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + Bu_k \quad (3.64)$$

$$y_k = C\bar{x}_k \quad (3.65)$$

Soit la transformation d'état suivante

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \nu_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \nu_k \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Sous la transformation (3.66), le système (3.61; 3.62) contrôlé par (3.63) est donné par

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{k+1} \\ \nu_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & (I-A)T + F \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \nu_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} (u_k^n - G_1 \nu_k) \quad (3.67)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} C & -CT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \nu_k \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

L'influence de  $\nu_k$  sur  $y_k$  est annulée ssi les inconnues  $T$  et  $G_1$  sont solutions de

$$(I-A)T + F = -BG_1 \quad (3.69)$$

$$CT = 0 \quad (3.70)$$

Sous la condition d'existence d'une solution donnée par

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A - I & B & -F \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} I - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

et si  $I - A$  est inversible, on a

$$G_1 = [C(I - A)^{-1}B]^{-1}C(I - A)^{-1}F \quad (3.72)$$

et

$$T = (I - A)^{-1}(BG_1 - F) \quad (3.73)$$

Avec ces quantités, le système (3.67; 3.68) devient

$$\bar{x}_{k+1} = (A - B\bar{L})\bar{x}_k \quad (3.74)$$

$$y_k = C\bar{x}_k \quad (3.75)$$

où  $A - B\bar{L}$  est stable. La loi de contrôle

$$u_k = \begin{bmatrix} \bar{L} & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \nu_k \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

est donc une loi de contrôle stabilisante à rejet des modes  $\nu_k$  non contrôlables. On a donc

$$u_k = - \begin{bmatrix} \bar{L} & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \nu_k \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$= - \begin{bmatrix} \bar{L} & \bar{L}T + G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \nu_k \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Par le principe de séparation,

$$u_k = - \begin{bmatrix} L^x & L^\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{\nu}_k \end{bmatrix} \quad \text{avec } L^x = \bar{L} \text{ et } L^\nu = \bar{L}T + G_1 \quad (3.79)$$

est une loi de contrôle stabilisante à rejet temp minimal de l'effet du signal impulsionnel  $d_k = \Delta\nu\delta_{k,r}$ . Il est bien évident que les performances et la robustesse de notre loi de commande dépendent de celles définies par  $u_k^n = -\bar{L}\hat{x}_k$  sur le système nominal. Si l'on suppose que  $u_k^n = -\bar{L}\hat{x}_k$  est une commande de type LQG (Moore, 1981), alors (3.79) sera une commande de type LTR (Tay, 1991). Comme dans le cadre de ce type de commande, le cas où  $p > m$  n'est pas présenté ici mais est donné à traiter en guise de perspective.

### 3.3.1 Simulation

Notre loi de commande tolérante aux défauts est illustrée sur un processus d'enroulement de bande. Il se compose d'un enrouleur et d'un dérouleur situés aux extrémités et d'un rouleau tracteur central. Le rôle du rouleau tracteur est d'imposer la vitesse de défilement de la bande. Les tensions de déroulement  $T_1$  et d'enroulement  $T_3$  sont maîtrisées en agissant sur les vitesses angulaires  $\Omega_1$  et  $\Omega_3$  ou sur les couples des bobines correspondantes. Trois moteurs à courant continu associés à trois réducteurs de vitesse sont couplés aux bobines. Une régulation des courants  $I_1$  et  $I_3$  est réalisée sur les moteurs de l'enrouleur et du dérouleur respectivement tandis que la vitesse de rotation  $\Omega_2$  est réglée sur le moteur du rouleau tracteur. Des variateurs de type Rectivar assurent ces régulations. Des dynamos tachymétriques permettent de mesurer les vitesses angulaires de trois moteurs. Les tensions de déroulement  $T_1$  et d'enroulement  $T_3$  sont obtenues à l'aide des jauges de contrainte. Les consignes sur  $I_1^*$ ,  $\Omega_2^*$  et  $I_3^*$  sont calculées de deux manières différentes: Soit au niveau d'un automate programmable, soit à partir d'une plate-forme temps-réel constituée d'une carte dSPACE et d'un ordinateur de type PC.

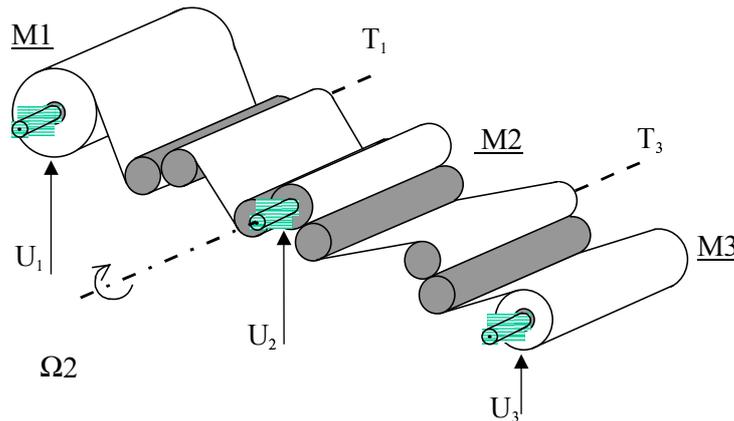


FIG. 3.2 – Enrouleur de bande

Les entrées de commande de ce système sont  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .  $u_1$  et  $u_3$  correspondent aux consignes de courant  $I_1^*$  et  $I_3^*$  des régulateurs locaux.  $u_2$  est la tension de commande du moteur  $M_2$ . Le principal objectif consiste à contrôler les tensions  $T_1$  et  $T_3$  de la bande ainsi que la vitesse de déroulement  $\Omega_2$ . Ce système est linéarisé autour d'un point de fonctionnement. Le modèle obtenu autour du point de fonctionnement nominal suivant

$$U_0 = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.6 & 0.15 \end{bmatrix}^T \quad Y_0 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}^T \quad T_e = 0.1s \quad (3.80)$$

est décrit par la représentation d'état

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Hw_k \quad (3.81)$$

$$y_k = Cx_k + Gw_k \quad (3.82)$$

avec

$$x = \begin{bmatrix} T_1 & \Omega_2 & T_3 \end{bmatrix}^T \quad u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T \quad (3.83)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.4126 & 0 & -0.0196 \\ 0.0333 & 0.5207 & -0.0413 \\ -0.0101 & 0 & 0.2571 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1.7734 & 0.0696 & 0.0734 \\ 0.0928 & 0.4658 & 0.1051 \\ -0.0424 & -0.093 & 2.0752 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

$$C = I_3, \quad H = \text{diag}\{0.01, 0.01, 0.01\}, \quad G = \text{diag}\{0.03, 0.03, 0.03\} \quad (3.85)$$

Le calcul du gain  $\bar{L}$  est obtenu par la minimisation du critère LQ

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) \quad (3.86)$$

où  $R = \text{diag}\{0.1, 0.1, 0.1\}$  et  $Q = \text{diag}\{0.5, 0.5, 0.5\}$ .

Un défaut d'amplitude 0.5 affecte le deuxième actionneur à l'instant 40. Les résultats donnés

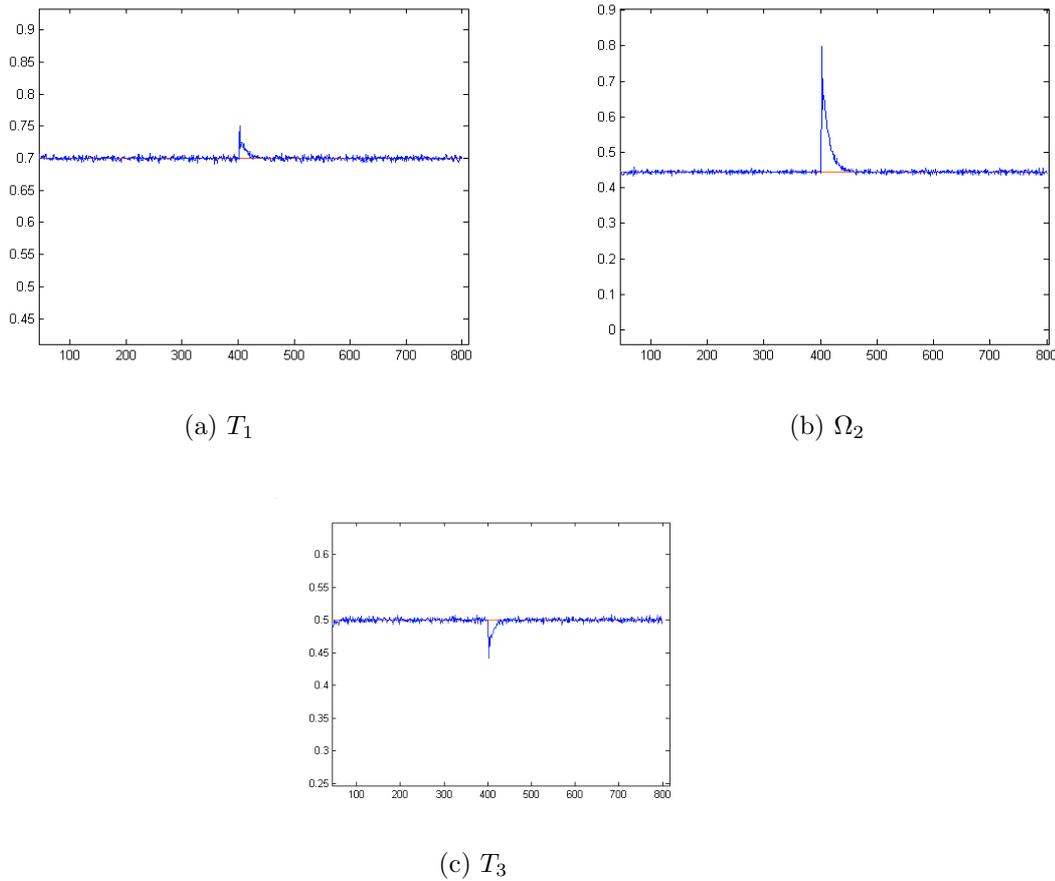


FIG. 3.3 – Sorties régulées, commande PI

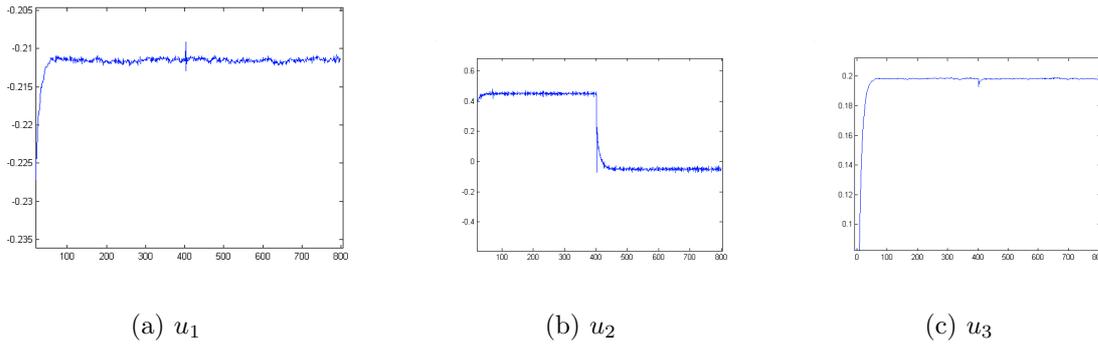


FIG. 3.4 – Entrées de commande, commande PI

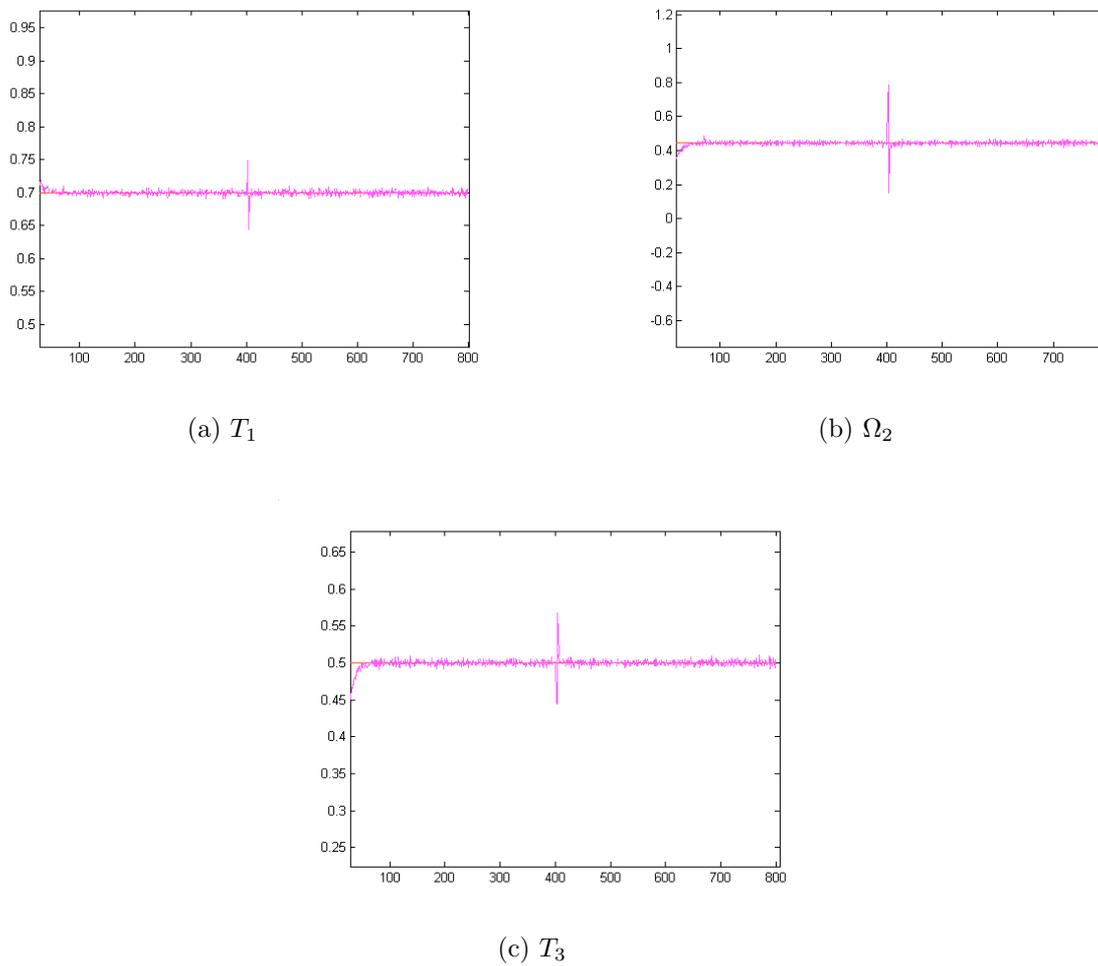


FIG. 3.5 – Sorties régulées, commande à réactivité maximum

par une commande de type PI (Fig 3.3) non explicitée ici et par la commande tolérante aux défauts à réactivité maximale (Fig 3.5) montrent clairement la différence quant à la réactivité de notre loi de commande.

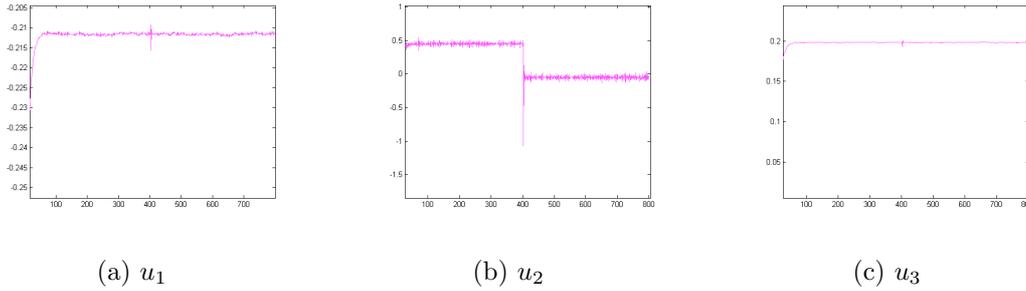


FIG. 3.6 – Entrées de commande, commande à réactivité maximale

### 3.3.2 Conclusion

La commande à réactivité maximale présentée dans ce chapitre permet d'annuler les effets des ruptures sur le modèle du biais en un temps théorique égal à  $\alpha$  (dépendant donc du retard structurel du système, sur l'exemple  $\alpha = 2$ ). En automatique, il existe toujours un compromis à faire entre robustesse et performance. Si le critère de performance est défini par la variance des sorties régulées par rapport à leurs consignes, alors on peut montrer que cette loi de commande augmente beaucoup cette variance dans le cas de systèmes rapides (à bandes passantes très larges). Ce n'est pas le cas sur les résultats obtenus sur le système à enroulement de bande possédant une bande passante relativement faible. Ceci peut être un problème dans le cas d'une perte d'efficacité d'un actionneur sur un moteur d'avion par exemple. On pourrait montrer que cette approche débouche sur une commande de type LTR (Loop Transfer Recovery) obtenue par le calcul explicite de l'inverse à gauche du système à état augmenté. Elle diffère donc de celles existantes dans la littérature lorsque la commande de type LTR est obtenue via la commande LQG dans le cas limite où la puissance des bruits sur l'équation du biais tend vers l'infini. Notre commande limitée dans sa formulation au cas de défauts actionneurs peut aussi traiter simultanément des défauts capteurs pour n'importe quel type d'évolution temporelle, de type rampe par exemple.

## 3.4 Commande tolérante additive

Soit le système discret linéaire décrit par :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Fd_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k \end{aligned} \tag{3.87}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état,  $y \in \mathbb{R}^m$  le vecteur de mesures,  $u \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de commande,  $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$  la matrice de distribution des défauts et  $d \in \mathbb{R}^q$  l'amplitude de défauts actionneurs.

Le nombre de sorties à réguler est supposé inférieur ou égal aux nombres d'entrées de commande. On suppose que  $\text{rang}(C) = n$ , donc la condition (3.72) devient  $\text{rang}[BF] = \text{rank}[B]$ . Pour la régulation des sorties, la commande nominale est supposée être de type PI définie par  $u_k = -Kx_k = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix}$  avec  $z_{k+1} = z_k + T_e(y_k^r - y_k)$  et  $T_e$  la période d'échantillonnage et  $y_k^r$  la référence. Les gains  $K_1$  et  $K_2$  sont calculés par la minimisation du critère quadratique

$$J = 1/2 \sum_{k=0}^N (X_k^T Q X_k + u_k^T R u_k) \quad (3.88)$$

où  $X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix}$ . La présence de l'action intégrale permet d'avoir  $y_k^r - y_k = 0$  en régime statique. Le filtre de détection conçu sur (3.88) est donné par

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + (\omega\Pi + \bar{K}_k\Sigma)(y_k - C\hat{x}_k) \quad (3.89)$$

$$\bar{P}_{k+1} = (\bar{A} - \bar{K}_k\bar{C})\bar{P}_k(\bar{A} - \bar{K}_k\bar{C})^T + \bar{W} + \bar{K}_k\bar{V}\bar{K}_k^T \quad (3.90)$$

$$\hat{d}_k = (\omega\Pi + \bar{L}_k\Sigma)(y_k - C\hat{x}_k) \quad (3.91)$$

$$P_k^d = (\omega\Pi + \bar{L}_k\Sigma)H_k(\omega\Pi + \bar{L}_k\Sigma)^T \quad (3.92)$$

$$\gamma_k = \Sigma(y_k - C\hat{x}_k) \quad (3.93)$$

avec

$$\bar{K}_k = \bar{A}\bar{P}_k\bar{C}^T(\bar{C}\bar{P}_k\bar{C} + \bar{V})^{-1} \quad (3.94)$$

$$\bar{L}_k = -\omega\Pi H_k\Sigma^T(\Sigma H_k\Sigma^T)^{-1} \quad (3.95)$$

$$H_k = C\bar{P}_kC^T + I \quad (3.96)$$

$$\Sigma = \beta(I - \Psi\Pi) \quad (3.97)$$

Dans le cas où la matrice  $C$  est de rang plein en ligne, on peut reconstruire une estimation de tout l'état du système (à partir des équations (3.92) et (3.94)) comme suit

$$x_k^{rec} = \begin{bmatrix} \Sigma C \\ (\omega\Pi + \bar{L}_k\Sigma)C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma C\hat{x}_k \\ \hat{d}_k + (\omega\Pi + \bar{L}_k\Sigma)\hat{x}_k \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

A ce stade, on ne doit pas confondre la prédiction  $\hat{z}_{k+1}$  structurellement étudiée au chapitre 2 et l'estimation reconfigurée  $x_k^{rec}$ . L'estimation reconfigurée  $x_k^{rec}$  peut alors être utilisée pour reconfigurer intuitivement ([Noura et al. 2000], [Sauter et al. 2003]) la loi de commande nominale comme suit:

$$u_k = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^{rec} \\ z_k \end{bmatrix} + u_k^{ad} \quad (3.99)$$

avec

$$u_k^{ad} = -B^+ F \hat{d}_k \quad (3.100)$$

et  $B^+$  la pseudo-inverse de  $B$ . Cette commande est cependant limitée au cas où  $\alpha = 1$ : si  $\alpha = 1$  alors l'estimation reconfigurée  $x_k^r$  est l'estimation non biaisée de tout l'état du système  $x_k$  (Kobayashi et Nakamizo, 1982) obtenue par la prise en compte des mesures jusqu'à l'instant  $k$  afin d'annuler l'espace de détection  $\Omega$  (défini au chapitre 2 sur l'erreur de prédiction de  $x_k$  et donc sans la prise en compte de  $y_k$ ). Le principal intérêt de cette commande est de permettre la correction directe de la loi de commande nominale, de type PI dans notre cas. C'est pour cette raison qu'elle fera l'objet au chapitre 4 d'une application sur un procédé Benchmark dans le cadre du projet européen IFATIS où la loi de contrôle nominale du procédé existe déjà et où l'objectif est l'amélioration de cette loi de contrôle en présence de défauts.

### 3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre deux stratégies différentes pour la conception d'une loi de commande tolérante aux défauts à réactivité maximum. La première débouche sur une commande de type LTR par rejet des modes non contrôlables. La deuxième est basée sur une commande additive permettant la reconfiguration de la commande nominale dans le cas particulier où tous les états du système sont mesurés directement. La validation pratique des résultats de cette deuxième approche sera l'objet du chapitre suivant. Il est clair que l'estimation des défauts à variance minimale produite par le filtre de détection permet de limiter l'augmentation de la variance des sorties régulées par rapport à leurs consignes. Elle permet aussi de s'appuyer sur l'existence d'une structure de commande fonctionnant correctement sous l'hypothèse que les défauts ne sont pas présents. C'est donc cette structure de commande qui est plus intéressante pour l'intégration d'un test de détection afin de reconfigurer la loi de commande nominale en présence de défauts significatifs et donc de limiter l'augmentation de la variance due à la présence du terme additif  $u_k^{ad}$ .



# Chapitre 4

## Commande tolérante additive: Application

### 4.1 Présentation du système

Le procédé hydraulique/thermique constitué de trois réservoirs de section  $S$  est schématisé par la figure ci-dessous. L'objectif en termes de régulation est de pouvoir disposer d'un volume constant de fluide à une température désirée dans la cuve 3.

#### 4.1.1 Schéma

#### 4.1.2 Hypothèses

- ★ Les trois cuves ont une même section  $S$ .
- ★ Les électrovannes  $EV_1$  et  $EV_2$  sont ouvertes.
- ★ Les températures d'arrivée des fluides ( $T_{1_i}$  et  $T_{2_i}$ ) sont constantes.
- ★ Les réservoirs sont supposés parfaitement calorifugés et leurs capacités thermiques sont négligeables.

### 4.2 Modélisation: équations de bilan

Le modèle de connaissance de ce système s'obtient en effectuant les bilans volumique et calorimétrique.

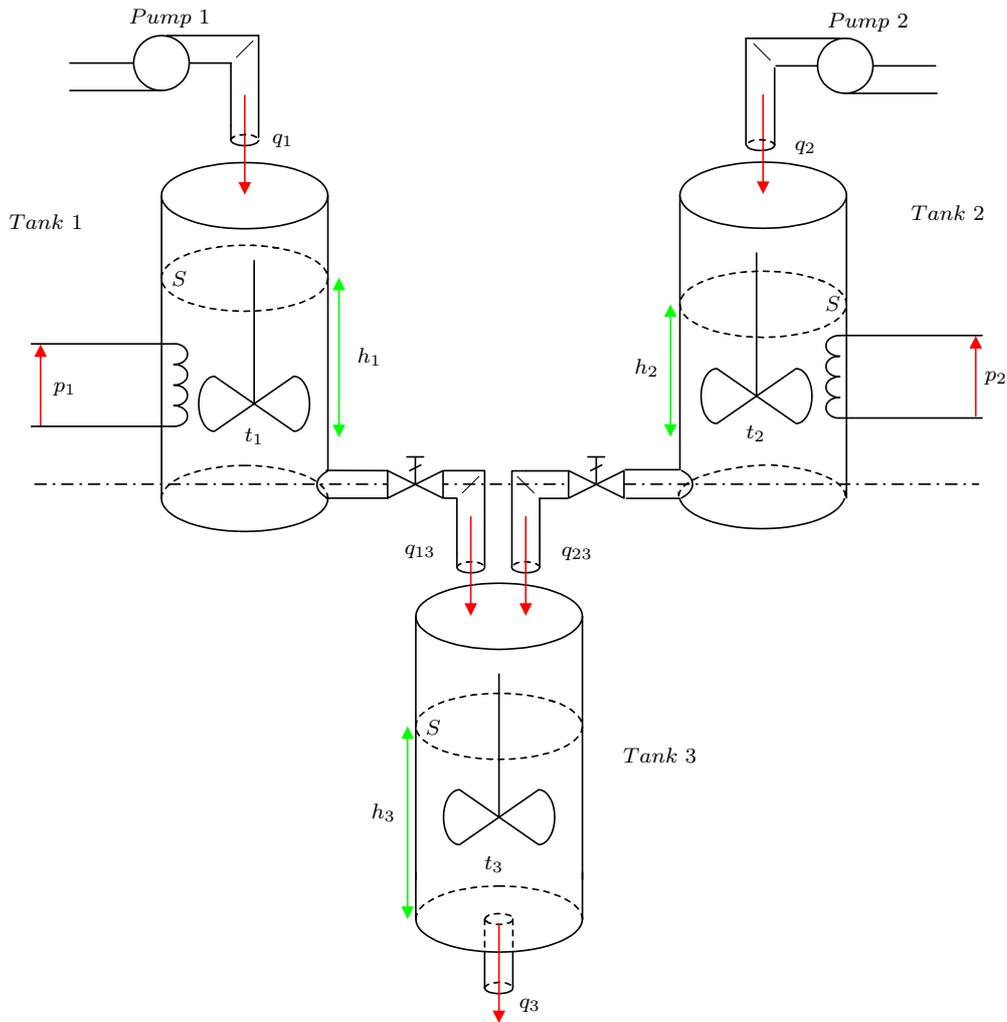


FIG. 4.1 – Montage de trois cuves.

### 4.2.1 Bilan volumique

Écrivons que la différence entre les débits entrant et sortant fait évoluer le niveau à l'intérieur de chacun des réservoirs.

$$S \frac{dH_1}{dt} = Q_1 - Q_{13} \quad \text{avec} \quad Q_{13} = \alpha_1 \sqrt{H_1} \quad (4.1)$$

$$S \frac{dH_2}{dt} = Q_2 - Q_{23} \quad \text{avec} \quad Q_{23} = \alpha_2 \sqrt{H_2} \quad (4.2)$$

$$S \frac{dH_3}{dt} = Q_{13} + Q_{23} - Q_3 \quad \text{avec} \quad Q_3 = \alpha_3 \sqrt{H_3} \quad (4.3)$$

Nous obtenons trois équations différentielles non linéaires à cause des racines carrées sur

les hauteurs  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$ .

$$\dot{H}_1 = \frac{1}{S} \left( Q_1 - \alpha_1 \sqrt{H_1} \right) = f(Q_1, H_1) \quad (4.4)$$

$$\dot{H}_2 = \frac{1}{S} \left( Q_2 - \alpha_2 \sqrt{H_2} \right) = f(Q_2, H_2) \quad (4.5)$$

$$\dot{H}_3 = \frac{1}{S} \left( \alpha_1 \sqrt{H_1} + \alpha_2 \sqrt{H_2} - \alpha_3 \sqrt{H_3} \right) = f(H_1, H_2, H_3) \quad (4.6)$$

## 4.2.2 Bilan calorimétrique

Le bilan calorimétrique revient à écrire que l'énergie calorifique apportée par chaque résistance chauffante est utilisée d'une part à l'élévation de la température du fluide qui entre dans le réservoir et d'autre part à la modification de la température contenue dans les réservoirs 1 et 2.

Trois quantités d'énergie sont à considérer:

- Les énergies électrique  $dW_1$  apportées au système;

$$dW_{1_1} = P_1 dt \quad (4.7)$$

$$dW_{1_2} = P_2 dt \quad (4.8)$$

$$dW_{1_3} = 0 \quad (4.9)$$

- Les énergies  $dW_2$  qui élèvent la température des fluides qui entrent pendant le temps  $dt$  des valeurs  $T_{entree}$  aux valeurs  $T_{sortie}$ ;

$$dW_{2_1} = \mu c Q_1 (T_1 - T_{1_i}) dt \quad (4.10)$$

$$dW_{2_2} = \mu c Q_2 (T_2 - T_{2_i}) dt \quad (4.11)$$

$$dW_{2_3} = \mu c \left[ (T_3 - T_1)Q_{13} + (T_3 - T_2)Q_{23} \right] dt \quad (4.12)$$

Avec  $c$  la chaleur spécifique du fluide et  $\mu$  sa masse volumique.

- Les énergies  $dW_3$  qui font évoluer la température des fluides à l'intérieur des bacs de la valeur  $dT_{sortie}$ .

$$dW_{3_1} = S H_1 \mu c dT_1 \quad (4.13)$$

$$dW_{3_2} = S H_2 \mu c dT_2 \quad (4.14)$$

$$dW_{3_3} = S H_3 \mu c dT_3 \quad (4.15)$$

La relation  $dW_1 = dW_2 + dW_3$  conduit aux expressions:

$$P_1 dt = \mu c Q_1 (T_1 - T_{1i}) dt + S H_1 \mu c dT_1 \quad (4.16)$$

$$P_2 dt = \mu c Q_2 (T_2 - T_{2i}) dt + S H_2 \mu c dT_2 \quad (4.17)$$

$$0 = \mu c \left[ (T_3 - T_1)Q_{13} + (T_3 - T_2)Q_{23} \right] dt + S H_3 \mu c dT_3 \quad (4.18)$$

Ce qui conduit au système de trois équations non linéaire:

$$\dot{T}_1 = \frac{1}{S H_1} \left( \frac{P_1}{\mu c} - (T_1 - T_{1i})Q_1 \right) = g(P_1, T_1, Q_1, H_1) \quad (4.19)$$

$$\dot{T}_2 = \frac{1}{S H_2} \left( \frac{P_2}{\mu c} - (T_2 - T_{2i})Q_2 \right) = g(P_2, T_2, Q_2, H_2) \quad (4.20)$$

$$\dot{T}_3 = -\frac{1}{S H_3} \left[ Q_{13}(T_3 - T_1) + Q_{23}(T_3 - T_2) \right] = g(T_1, T_2, T_3, H_1, H_2, H_3) \quad (4.21)$$

### 4.3 Linéarisation

Pour linéariser les équation ?? et ??, nous allons considérer des petites variations autour du régime nominal.

$$\begin{array}{l|l} H_1 = H_{10} + h_1 & H_2 = H_{20} + h_2 \\ Q_1 = Q_{10} + q_1 & Q_2 = Q_{20} + q_2 \\ P_1 = P_{10} + p_1 & P_2 = P_{20} + p_2 \\ T_1 = T_{10} + \theta_1 & T_2 = T_{20} + \theta_2 \end{array}$$

#### 4.3.1 Développement de Taylor au premier ordre de l'équation 4.4

En effectuant un développement de Taylor limité au premier ordre de l'équation 4.4, nous obtenons:

$$\frac{dH_1}{dt} \approx \left[ \frac{dH_1}{dt} \right]_0 + \left[ \frac{\partial f}{\partial H_1} \right]_0 dH_1 + \left[ \frac{\partial f}{\partial Q_1} \right]_0 dQ_1 \quad (4.22)$$

Soit, en remarquant qu'au régime nominal  $dH_1/dt = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= \left[ \frac{\partial f}{\partial H_1} \right]_0 h_1 + \left[ \frac{\partial f}{\partial Q_1} \right]_0 q_1 \\ &= \frac{-\alpha_1}{2 S \sqrt{H_{10}}} h_1 + \frac{1}{S} q_1 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Au régime nominal, l'équation statique nous permet de calculer la valeur de  $\alpha_1$ , qui remplacée dans ?? donne l'équation linéarisée de l'évolution du niveau.

$$0 = \frac{1}{S} \left( Q_{10} - \alpha_1 \sqrt{H_{10}} \right) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{Q_{10}}{\sqrt{H_{10}}} \quad (4.24)$$

$$\dot{h}_1 = \frac{-Q_{10}}{2 S H_{10}} h_1 + \frac{1}{S} q_1 \quad (4.25)$$

### 4.3.2 Développement de Taylor au premier ordre de l'équation 4.5

En effectuant un développement de Taylor limité au premier ordre de l'équation 4.5, nous obtenons:

$$\frac{dH_2}{dt} \approx \left[ \frac{dH_2}{dt} \right]_0 + \left[ \frac{\partial f}{\partial H_2} \right]_0 dH_2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial Q_2} \right]_0 dQ_2 \quad (4.26)$$

Soit, en remarquant qu'au régime nominal  $dH_2/dt = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dh_2}{dt} &= \left[ \frac{\partial f}{\partial H_2} \right]_0 h_2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial Q_2} \right]_0 q_2 \\ &= \frac{-\alpha_2}{2 S \sqrt{H_{20}}} h_2 + \frac{1}{S} q_2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Au régime nominal, l'équation statique nous permet de calculer la valeur de  $\alpha_2$ , qui remplacée dans ?? donne l'équation linéarisée de l'évolution du niveau.

$$0 = \frac{1}{S} \left( Q_{20} - \alpha_2 \sqrt{H_{20}} \right) \Rightarrow \alpha_2 = \frac{Q_{20}}{\sqrt{H_{20}}} \quad (4.28)$$

$$\dot{h}_2 = \frac{-Q_{20}}{2 S H_{20}} h_1 + \frac{1}{S} q_2 \quad (4.29)$$

### 4.3.3 Développement de Taylor au premier ordre de l'équation 4.6

En effectuant un développement de Taylor limité au premier ordre de l'équation 4.6, nous obtenons:

$$\frac{dH_3}{dt} \approx \left[ \frac{dH_3}{dt} \right]_0 + \left[ \frac{\partial f}{\partial H_1} \right]_0 dH_1 + \left[ \frac{\partial f}{\partial H_2} \right]_0 dH_2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial H_3} \right]_0 dH_3 \quad (4.30)$$

Soit, en remarquant qu'au régime nominal  $dH_3/dt = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dh_3}{dt} &= \left[ \frac{\partial f}{\partial H_1} \right]_0 h_1 + \left[ \frac{\partial f}{\partial H_2} \right]_0 h_2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial H_3} \right]_0 h_3 \\ &= \frac{\alpha_1}{2 S \sqrt{H_{10}}} h_1 + \frac{\alpha_2}{2 S \sqrt{H_{20}}} h_2 - \frac{\alpha_3}{2 S \sqrt{H_{30}}} h_3 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Au régime nominal, l'équation statique nous permet de calculer la valeur de  $\alpha_3$ , qui remplacée dans ?? donne l'équation linéarisée de l'évolution du niveau.

$$0 = \frac{1}{S} \left( \alpha_1 \sqrt{H_{10}} + \alpha_2 \sqrt{H_{20}} - \alpha_3 \sqrt{H_{30}} \right) \Rightarrow \alpha_3 = \frac{Q_{10} + Q_{20}}{\sqrt{H_{30}}} \quad (4.32)$$

$$\dot{h}_3 = \frac{Q_{10}}{2 S H_{10}} h_1 + \frac{Q_{20}}{2 S H_{20}} h_2 - \frac{Q_{10} + Q_{20}}{2 S H_{30}} h_3 \quad (4.33)$$

### 4.3.4 Développement de Taylor au premier ordre de l'équation 4.19

En effectuant un développement de Taylor limité au premier ordre de l'équation 4.19, nous obtenons:

$$\frac{dT_1}{dt} \approx \left[ \frac{dT_1}{dt} \right]_0 + \left[ \frac{\partial g}{\partial P_1} \right]_0 dP_1 + \left[ \frac{\partial g}{\partial T_1} \right]_0 dT_1 + \left[ \frac{\partial g}{\partial Q_1} \right]_0 dQ_1 + \left[ \frac{\partial g}{\partial H_1} \right]_0 dH_1 \quad (4.34)$$

En remplaçant les différentielles par des petites variations,

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{dT_1}{dt} = \left[ \frac{\partial g}{\partial P_1} \right]_0 p_1 + \left[ \frac{\partial g}{\partial T_1} \right]_0 \theta_1 + \left[ \frac{\partial g}{\partial Q_1} \right]_0 q_1 + \left[ \frac{\partial g}{\partial H_1} \right]_0 h_1 \quad (4.35)$$

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial P_1} \right]_0 = \frac{1}{S H_{10} \mu c}$$

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial T_1} \right]_0 = -\frac{Q_{10}}{S H_{10}}$$

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial Q_1} \right]_0 = -\frac{T_{10} - T_{1i}}{S H_{10}}$$

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial H_1} \right]_0 = -\frac{1}{S H_{10}^2} \left( \frac{P_{10}}{\mu c} - (T_{10} - T_{1i}) Q_{10} \right)$$

Au point de fonctionnement, écrivons que la température  $T_1$  reste constante, soit

$$\left[ \frac{dT_1}{dt} \right]_0 = 0 = \frac{1}{S H_{10}} \left( \frac{P_{10}}{\mu c} - (T_{10} - T_{1i}) Q_{10} \right) \quad (4.36)$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial g}{\partial P_1} \right]_0 = 0.$$

De plus, il est nécessaire de connaître  $\mu$  et  $c$ . Le régime permanent permet d'écrire

$$\frac{1}{\mu c} = \frac{Q_{10}}{P_{10}} (T_{10} - T_{1i}) \quad (4.37)$$

Avec cette nouvelle donnée,

$$\dot{\theta}_1 = \frac{Q_{10}}{S H_{10} P_{10}} (T_{10} - T_{1i}) p_1 - \frac{Q_{10}}{S H_{10}} \theta_1 - \frac{1}{S H_{10}} (T_{10} - T_{1i}) q_1 \quad (4.38)$$

### 4.3.5 Développement de Taylor au premier ordre de l'équation 4.20

En effectuant un développement de Taylor limité au premier ordre de l'équation 4.20, nous obtenons:

$$\frac{dT_2}{dt} \approx \left[ \frac{dT_2}{dt} \right]_0 + \left[ \frac{\partial g}{\partial P_2} \right]_0 dP_2 + \left[ \frac{\partial g}{\partial T_2} \right]_0 dT_2 + \left[ \frac{\partial g}{\partial Q_2} \right]_0 dQ_2 + \left[ \frac{\partial g}{\partial H_2} \right]_0 dH_2 \quad (4.39)$$

En remplaçant les différentielles par des petites variations,

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{dT_2}{dt} = \left[ \frac{\partial g}{\partial P_2} \right]_0 p_2 + \left[ \frac{\partial g}{\partial T_2} \right]_0 \theta_2 + \left[ \frac{\partial g}{\partial Q_2} \right]_0 q_2 + \left[ \frac{\partial g}{\partial H_2} \right]_0 h_2 \quad (4.40)$$

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial P_2} \right]_0 = \frac{1}{S H_{20} \mu c}$$

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial T_2} \right]_0 = -\frac{Q_{20}}{S H_{20}}$$

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial Q_2} \right]_0 = -\frac{T_{20} - T_{2i}}{S H_{20}}$$

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial H_2} \right]_0 = -\frac{1}{S H_{20}^2} \left( \frac{P_{20}}{\mu c} - (T_{20} - T_{2i}) Q_{20} \right)$$

Au point de fonctionnement, écrivons que la température  $T_2$  reste constante, soit

$$\left[ \frac{dT_2}{dt} \right]_0 = 0 = \frac{1}{S H_{20}} \left( \frac{P_{20}}{\mu c} - (T_{20} - T_{2i}) Q_{20} \right) \quad (4.41)$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial g}{\partial P_2} \right]_0 = 0.$$

De plus, il est nécessaire de connaître  $\mu$  et  $c$ . Le régime permanent permet d'écrire

$$\frac{1}{\mu c} = \frac{Q_{20}}{P_{20}} (T_{20} - T_{2i}) \quad (4.42)$$

Avec cette nouvelle donnée,

$$\dot{\theta}_2 = \frac{Q_{20}}{S H_{20} P_{20}} (T_{20} - T_{2i}) p_2 - \frac{Q_{20}}{S H_{20}} \theta_2 - \frac{1}{S H_{20}} (T_{20} - T_{2i}) q_2 \quad (4.43)$$

### 4.3.6 Développement de Taylor au premier ordre de l'équation 4.21

En effectuant un développement de Taylor limité au premier ordre de l'équation 4.21, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{dT_3}{dt} \approx & \left[ \frac{dT_3}{dt} \right]_0 + \left[ \frac{\partial g}{\partial H_1} \right]_0 dH_1 + \left[ \frac{\partial g}{\partial H_2} \right]_0 dH_2 + \left[ \frac{\partial g}{\partial H_3} \right]_0 dH_3 \\ & + \left[ \frac{\partial g}{\partial T_1} \right]_0 dT_1 + \left[ \frac{\partial g}{\partial T_2} \right]_0 dT_2 + \left[ \frac{\partial g}{\partial T_3} \right]_0 dT_3 \end{aligned} \quad (4.44)$$

En remplaçant les différentielles par des petites variations,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_3}{dt} = \frac{dT_3}{dt} = & \left[ \frac{\partial g}{\partial H_1} \right]_0 h_1 + \left[ \frac{\partial g}{\partial H_2} \right]_0 h_2 + \left[ \frac{\partial g}{\partial H_3} \right]_0 h_3 \\ & + \left[ \frac{\partial g}{\partial T_1} \right]_0 \theta_1 + \left[ \frac{\partial g}{\partial T_2} \right]_0 \theta_2 + \left[ \frac{\partial g}{\partial T_3} \right]_0 \theta_3 \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial g}{\partial H_1} \right]_0 &= -\frac{Q_{10}}{2 S H_{30} H_{10}} (T_{30} - T_{20}) \\
\left[ \frac{\partial g}{\partial H_2} \right]_0 &= -\frac{Q_{20}}{2 S H_{30} H_{20}} (T_{30} - T_{20}) \\
\left[ \frac{\partial g}{\partial H_3} \right]_0 &= \frac{1}{S H_{30}^2} \left[ (T_{30} - T_{10}) Q_{10} + (T_{30} - T_{20}) Q_{20} \right] \\
\left[ \frac{\partial g}{\partial T_1} \right]_0 &= \frac{Q_{10}}{S H_{30}} \\
\left[ \frac{\partial g}{\partial T_2} \right]_0 &= \frac{Q_{20}}{S H_{30}} \\
\left[ \frac{\partial g}{\partial T_3} \right]_0 &= -\frac{1}{S H_{30}} (Q_{10} + Q_{20})
\end{aligned}$$

Au point de fonctionnement, écrivons que la température  $T_3$  reste constante, soit

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{dT_3}{dt} \right]_0 = 0 &= \frac{1}{S H_{30}} \left[ (T_{30} - T_{10}) Q_{10} + (T_{30} - T_{20}) Q_{20} \right] \\
&\Rightarrow \left[ \frac{\partial g}{\partial H_3} \right]_0 = 0.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Avec cette nouvelle donnée,

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_3 &= -(T_{30} - T_{10}) \frac{Q_{10}}{2 H_{10} H_{30}} h_1 - (T_{30} - T_{20}) \frac{Q_{20}}{2 H_{20} H_{30}} h_2 \\
&\quad + \frac{Q_{10}}{S H_{30}} \theta_1 + \frac{Q_{20}}{S H_{30}} \theta_2 - \frac{1}{S H_{30}} (Q_{10} + Q_{20}) \theta_3
\end{aligned} \tag{4.47}$$

## 4.4 Obtention du modèle d'état discret du système

Nous cherchons à donner une représentation d'état de la forme:

$$\begin{cases} \dot{\underline{X}} = A \underline{X} + B \underline{U} \\ \underline{Y} = C \underline{X} + D \underline{U} \end{cases} \tag{4.48}$$

En adoptant les hauteur  $h$  ainsi que les températures  $\theta$  comme composantes du vecteur d'état, les équations ??, ??, ??, ??, ?? et ?? conduisent à la représentation d'état suivante:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{bmatrix}^T, \quad \underline{U} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & p_1 & p_2 \end{bmatrix}^T, \quad \underline{Y} = \underline{X}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{Q_{10}}{2SH_{10}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Q_{20}}{2SH_{20}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Q_{10}}{2SH_{10}} & \frac{Q_{20}}{2SH_{20}} & -\frac{Q_{10} + Q_{20}}{2SH_{30}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{Q_{10}}{SH_{10}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{Q_{20}}{SH_{20}} & 0 \\ -\frac{(T_{30} - T_{10})Q_{10}}{2H_{10}H_{30}} & -\frac{(T_{30} - T_{20})Q_{20}}{2H_{20}H_{30}} & 0 & \frac{Q_{10}}{SH_{30}} & \frac{Q_{20}}{SH_{30}} & -\frac{Q_{10} + Q_{20}}{2SH_{30}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{T_{10} - T_{1_i}}{SH_{10}} & 0 & \frac{(T_{10} - T_{1_i})Q_{10}}{SH_{10}P_{10}} & 0 \\ 0 & -\frac{T_{20} - T_{2_i}}{SH_{20}} & 0 & \frac{(T_{20} - T_{2_i})Q_{20}}{SH_{20}P_{20}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur de sortie étant identique au vecteur d'état, la matrice d'observation  $C$  est la matrice identité de dimensions  $6 \times 6$ .

Les valeurs nominales sont les suivantes:

$Q_{10}$ $Q_{20}$	Débit d'entrée de la cuve 1 Débit d'entrée de la cuve 2	Valeur nominale Valeur nominale	$0.8 \text{ l/mn}$ $1 \text{ l/mn}$
$H_{10}$ $H_{20}$ $H_{30}$	Hauteur du fluide dans la cuve 1 Hauteur du fluide dans la cuve 2 Hauteur du fluide dans la cuve 3	Valeur nominale Valeur nominale Valeur nominale	$400 \text{ mm}$ $300 \text{ mm}$ $200 \text{ mm}$
$T_{10}$ $T_{20}$ $T_{30}$	Température de sortie du fluide contenu dans la cuve 1 Température de sortie du fluide contenu dans la cuve 2 Température de sortie du fluide contenu dans la cuve 3	Valeur nominale Valeur nominale Valeur nominale	$15 \text{ }^\circ\text{C}$ $20 \text{ }^\circ\text{C}$ $18 \text{ }^\circ\text{C}$
$P_{10}$ $P_{20}$	Puissance de chauffe de la résistance 1 Puissance de chauffe de la résistance 2	Valeur nominale Valeur nominale	$5 \text{ kW}$ $7 \text{ kW}$
$Q_{130}$ $Q_{230}$	Débit de sortie de la cuve 1 Débit de sortie de la cuve 2	Valeur nominale Valeur nominale	$0.8 \text{ l/mn}$ $0.8 \text{ l/mn}$
$T_{1i}$ $T_{2i}$	Température du fluide entrant dans la cuve 1 Température du fluide entrant dans la cuve 2	Constante Constante	$17 \text{ }^\circ\text{C}$ $22 \text{ }^\circ\text{C}$
$S$ $R$	Section des cuves 1, 2 et 3 Rayon des cuves 1, 2 et 3	Constante Constante	$0.0154 \text{ m}^2$ $7 \text{ cm}$

Le système est d'ordre 6. La période d'échantillonnage  $T_e$  est choisie égale au cinquième de la constante de temps la plus faible. Par la méthode de discrétisation d'Euler, nous obtenons le modèle d'état discret suivant

$$A = \begin{bmatrix} 0.9780 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9636 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0209 & 0.0346 & 0.9048 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9565 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9286 & 0 \\ -0.2765 & 0.3659 & 0 & 0.0787 & 0.0969 & 0.8187 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$B = 1.0e + 003 * \begin{bmatrix} 1.3186 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3089 & 0 & 0 \\ 0.0142 & 0.0236 & 0 & 0 \\ -6.5207 & 0 & 0.0000003 & 0 \\ 0 & -8.5677 & 0 & 0.000001 \\ -0.4646 & -0.1974 & 0.00000001 & 0.00000005 \end{bmatrix}, \quad C = I_6 \quad (4.50)$$

## 4.5 Résultats de la commande tolérante additive

Les défauts simulés sur le benchmark sont de types actionneurs et capteurs: - Une perte d'efficacité d'actionneur de 50/100 sur l'entrée P1 à l'instant 5000 s est simulée avec  $B_f = B(I + \text{diag}(\alpha))$  et  $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_q]^T$  où  $\alpha_1 = -0.5$  et  $\alpha_i = 0$  pour  $i \neq 1$ :

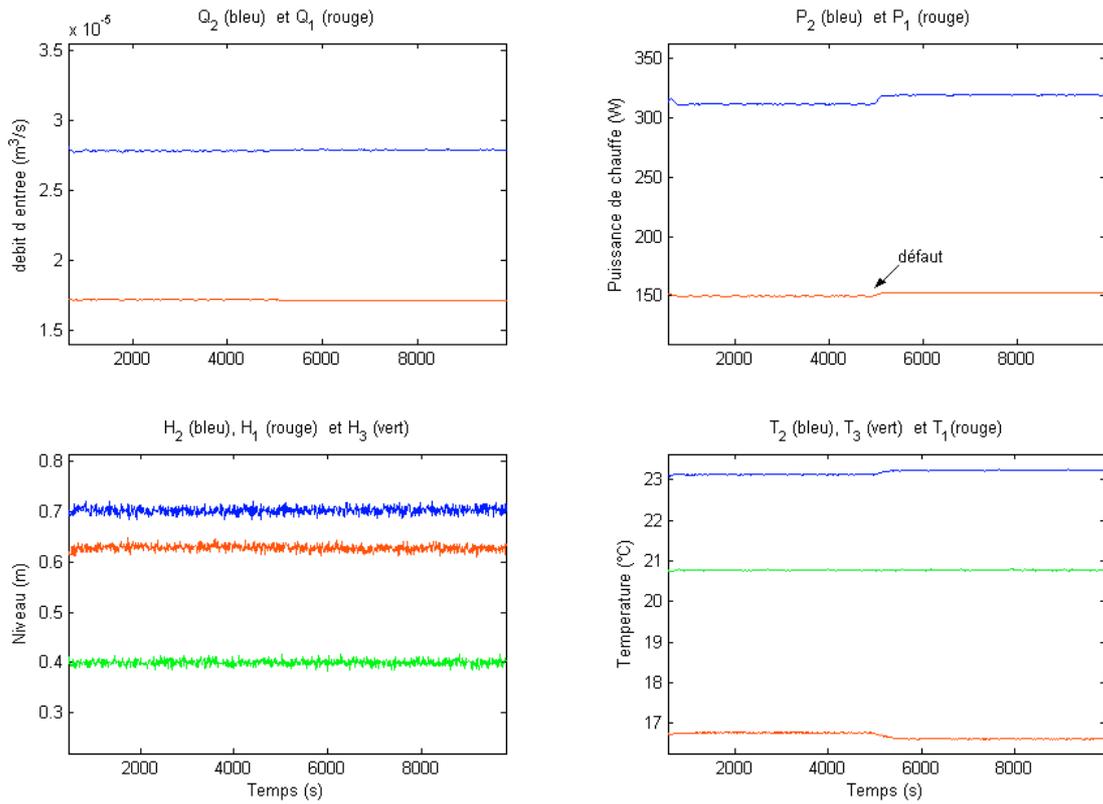


FIG. 4.2 – Commande nominal de type PI

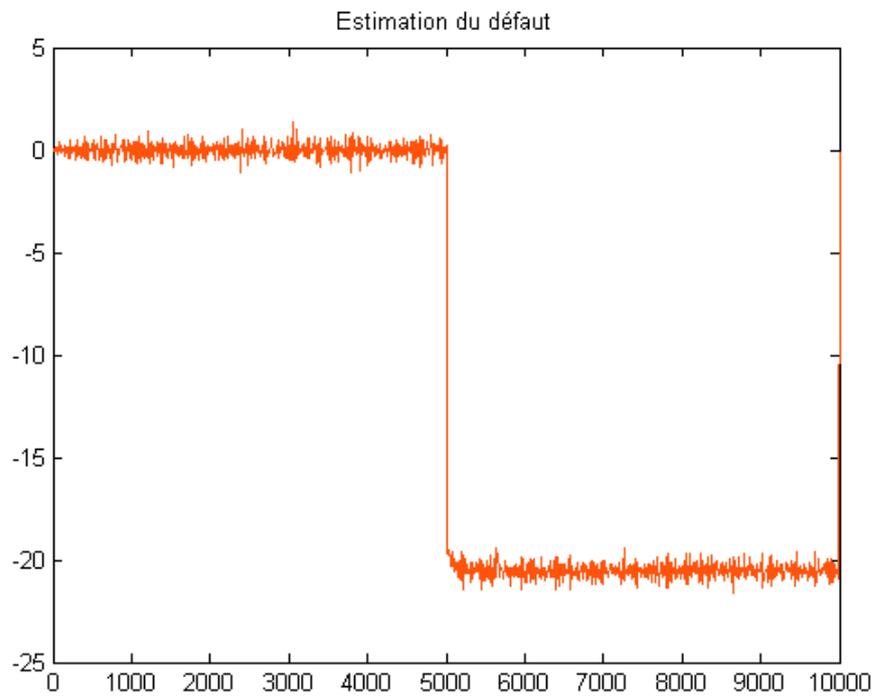
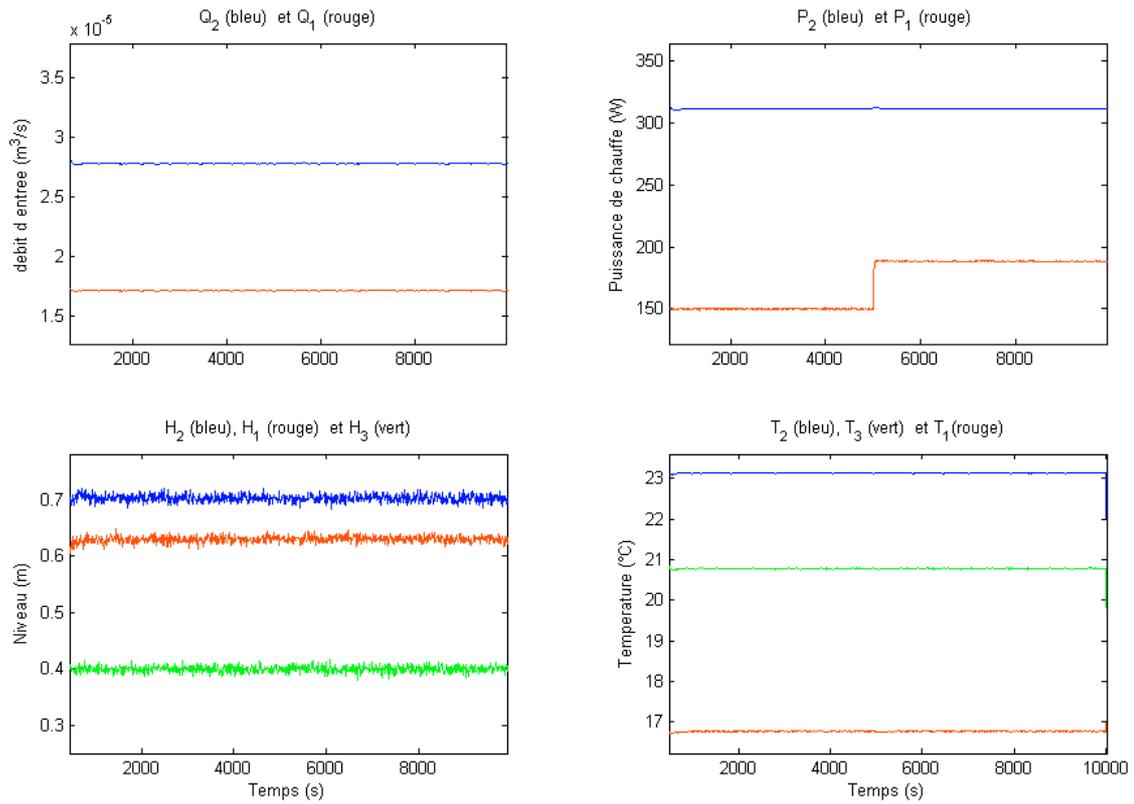


FIG. 4.3 – Estimation du défaut donnée par le filtre de détection (W)

FIG. 4.4 – *Commande tolérante additive*

La présence de l'action intégrale dans la loi de commande permet d'annuler l'erreur statique sur  $T_3$ . Sur la figure (Fig 4.2), suite à l'apparition du défaut à l'instant 5000, on constate que son effet est visible sur la sortie régulée  $T_3$  mais surtout sur  $T_1$  et  $T_2$ . Sur la (Fig 4.4), cet effet est négligeable grâce à notre commande tolérante additive.

- une perte d'efficacité sur l'entrée P1 de 90 pour cent apparaissant à l'instant 5000s:

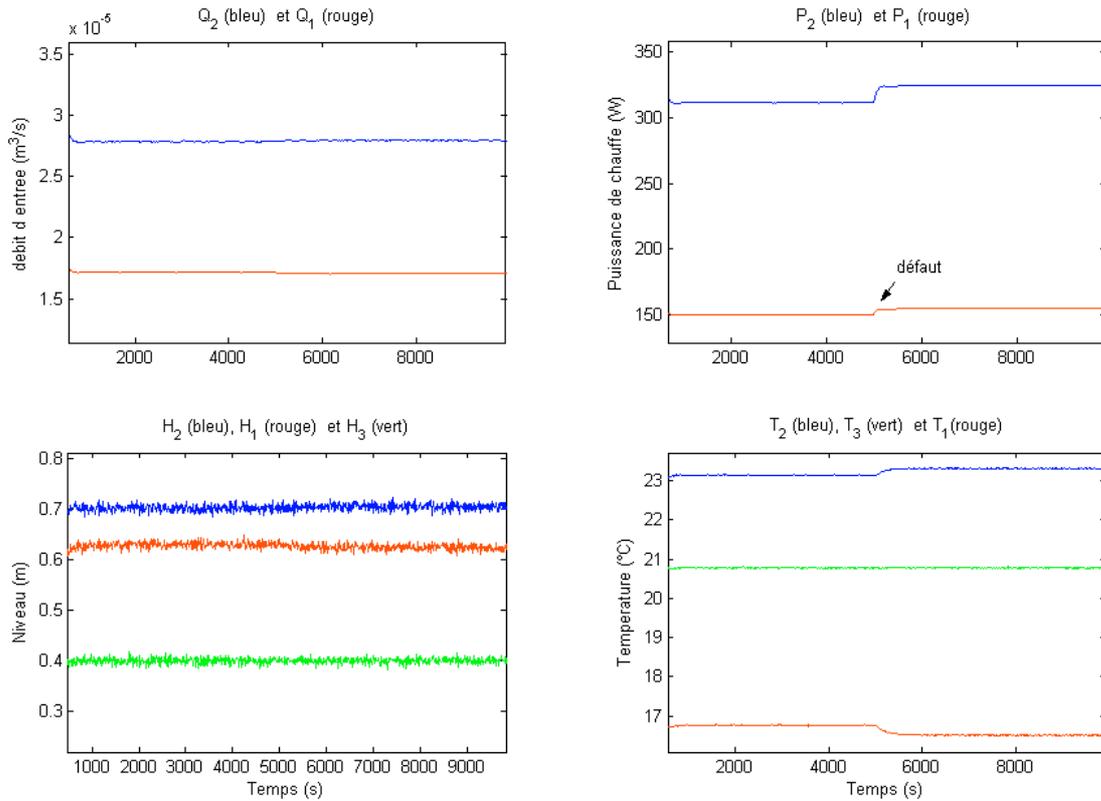


FIG. 4.5 – *Commande nominale de type PI*

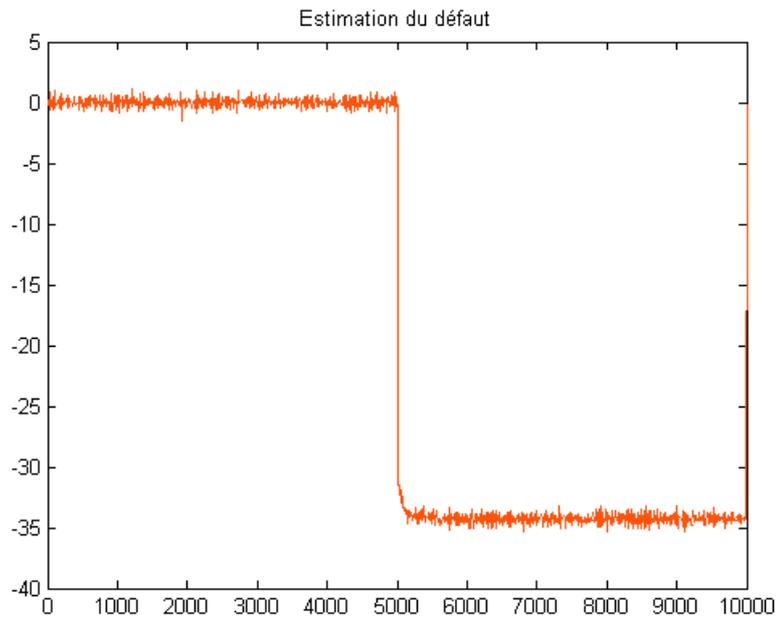
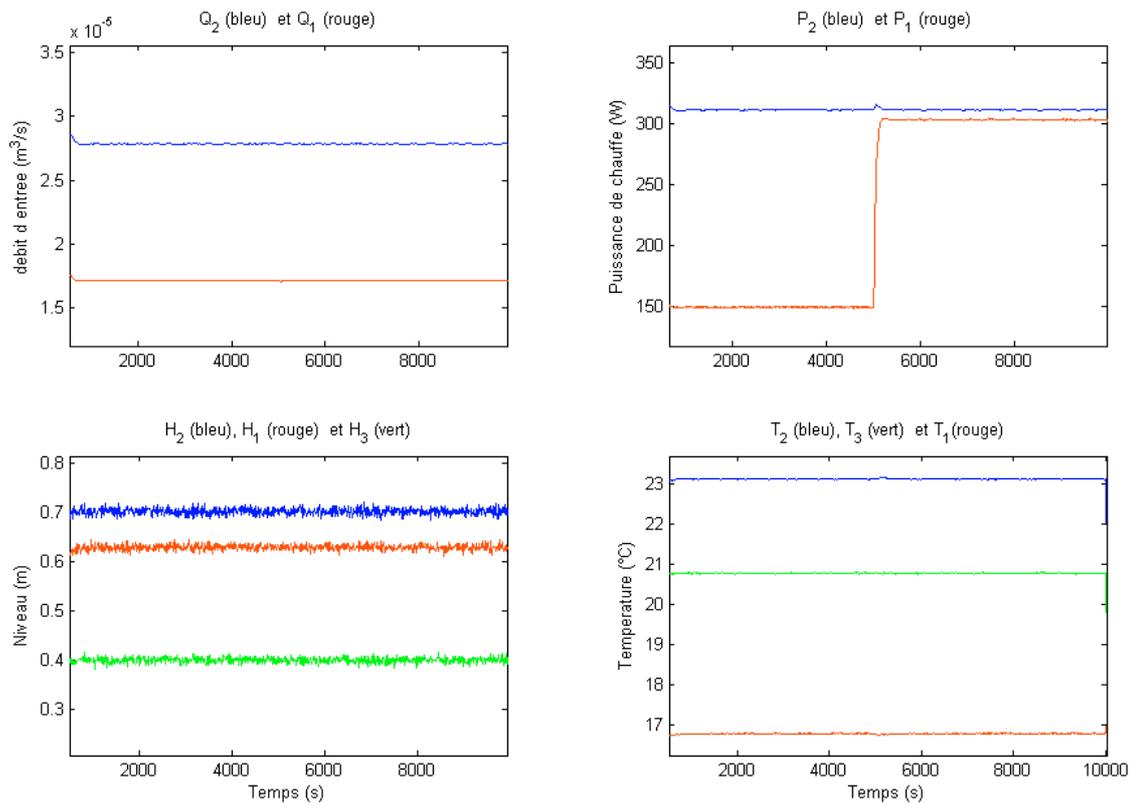


FIG. 4.6 – *Estimation du défaut donnée par le filtre de détection (W)*

FIG. 4.7 – *Commande tolérante additive*

La figure 4.7 montre la réactivité de notre loi de commande tolérante à ce défaut sévère. Sur le procédé réel, la saturation des actionneurs peut diminuer la réactivité de cette loi de commande et l'empêcher de retrouver ses performances nominales. Une solution consistera alors à redéfinir les objectifs à atteindre en marche dégradée.

- une rampe sur  $Q_1$  de pente  $4.10^{-9}$ , apparaissant à l'instant 5000 s :

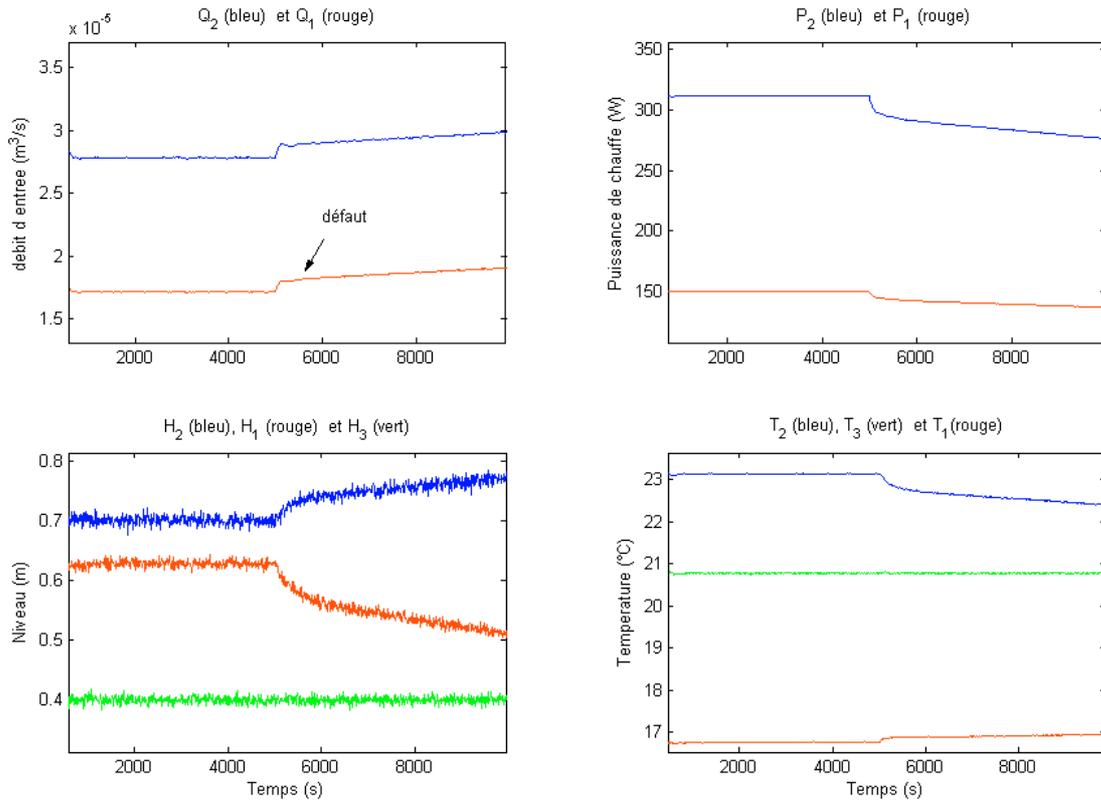


FIG. 4.8 – Commande nominale de type PI

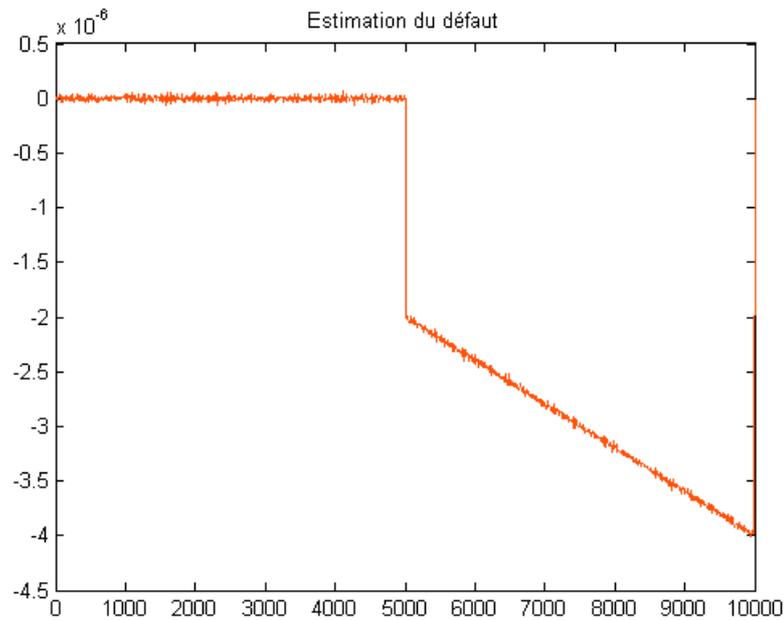
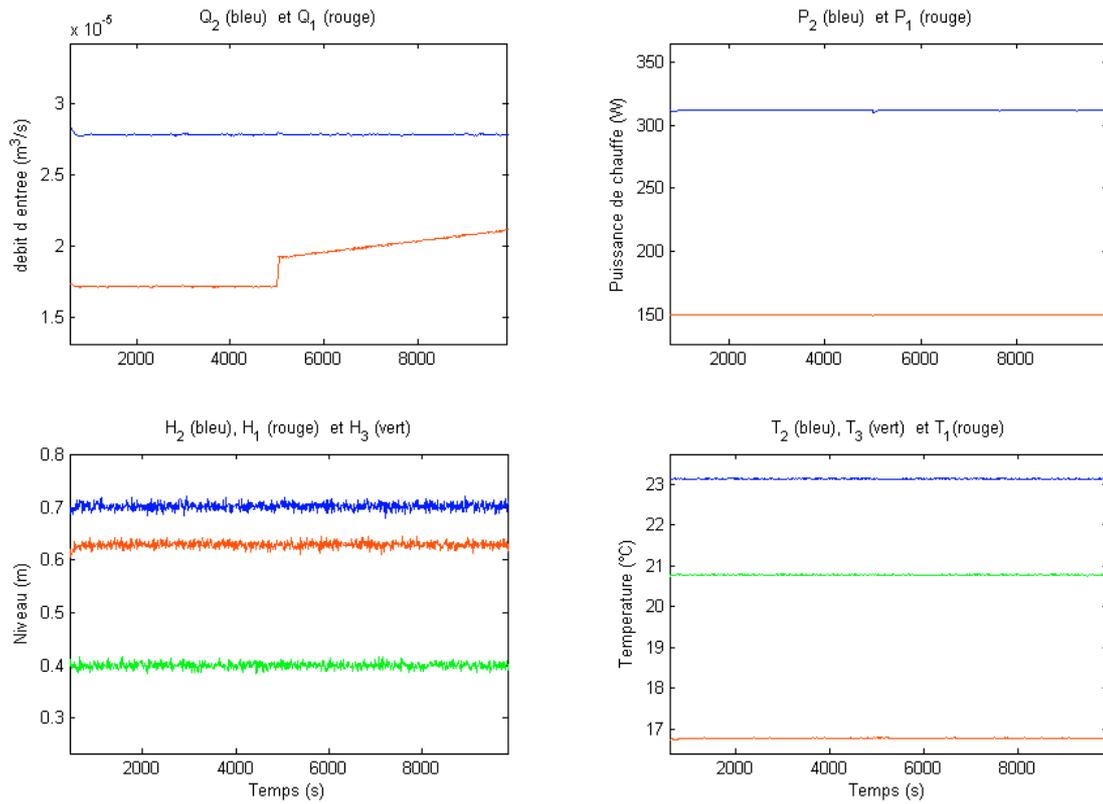


FIG. 4.9 – Estimation du défaut donnée par le filtre de détection ( $m^3/s$ )

FIG. 4.10 – *Commande tolérante additive*

Ce type défaut est très courant en pratique car du au vieillissement naturel du matériel. La présence d'une action intégrale ne suffit pas pour s'accommoder de ce type de défauts. La figure 4.10 montre les performances de la commande tolérante additive et l'impuissance de la commande PI à s'accommoder de ce type de défaut. Sur le procédé réel, la compensation de défaut de ce type dépend des limites physiques du système.

- Un bais d'amplitude 0.07m sur le capteur H3 apparaissant à l'instant 5000s:

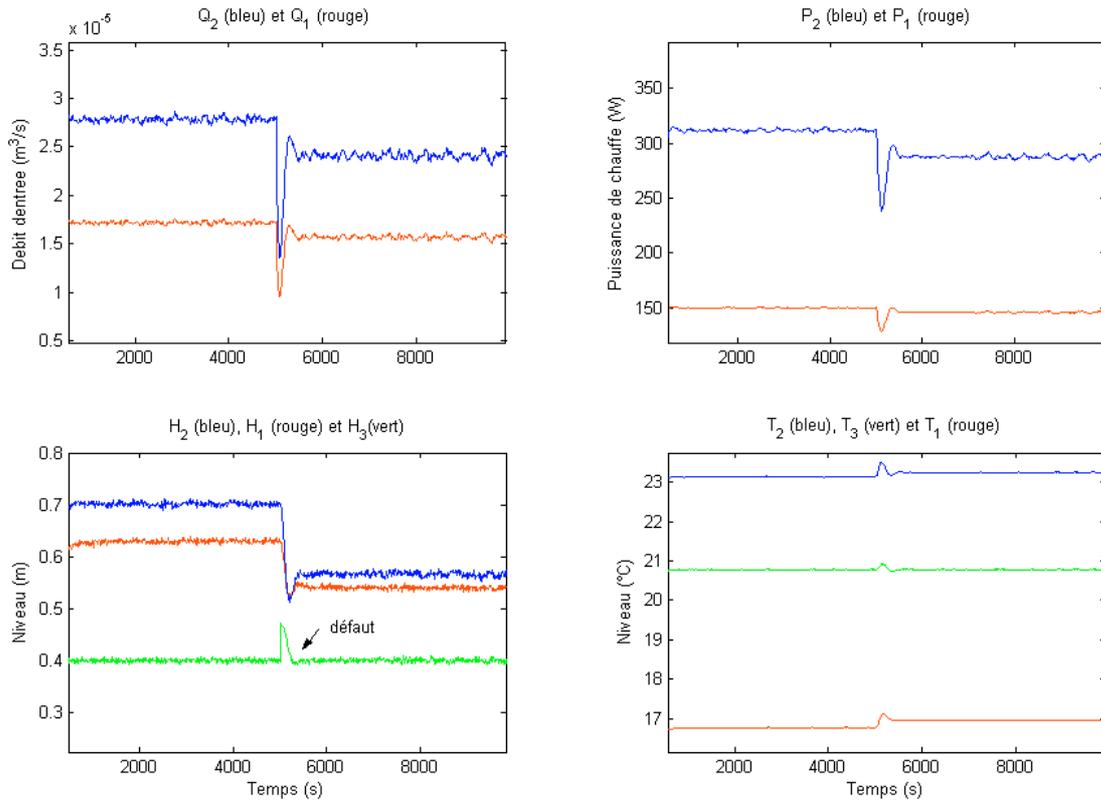


FIG. 4.11 – Commande nominal de type PI

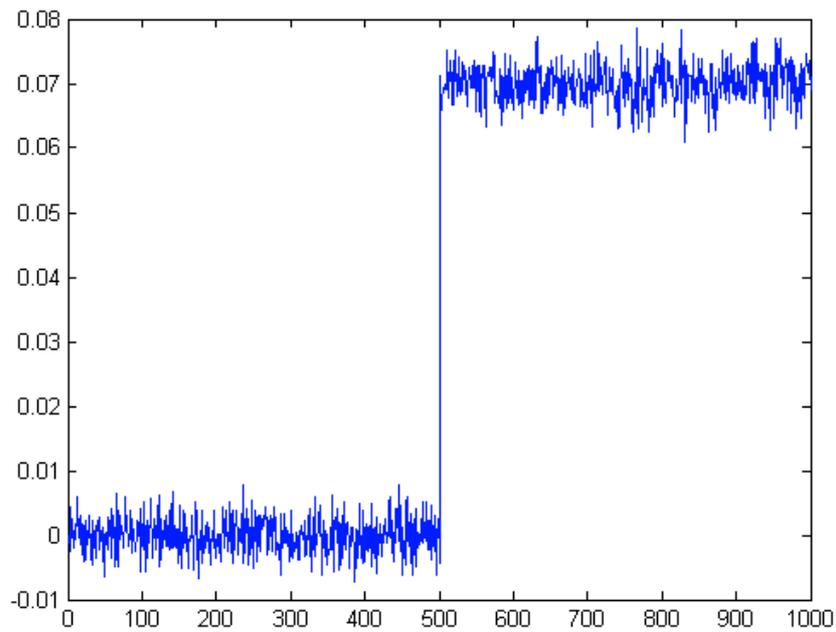
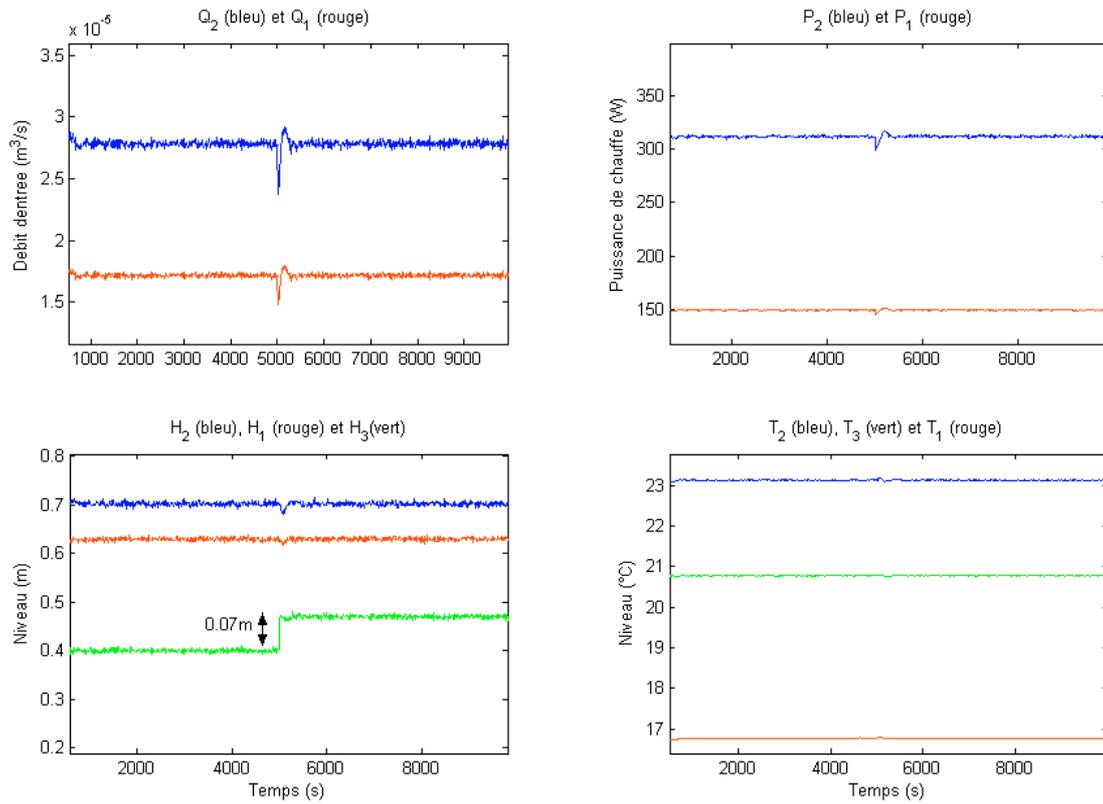


FIG. 4.12 – Estimation du défaut donnée par le filtre de détection

FIG. 4.13 – *Commande tolérante additive*

Sur la figure 4.11, la mesure de  $H_3$  rejoint la consigne grâce à la commande PI mais la sortie réelle du système est différente de sa valeur de référence en raison du défaut.

Basée sur l'estimation du défaut  $H_3$  (figure 4.12), la commande tolérante additive des figures (4.13) permet d'éviter ce problème et de retrouver la valeur de référence sur  $H_3$ .

- Un biais sur le capteur H1 d'amplitude 0.1m apparaissant à l'instant 5000:

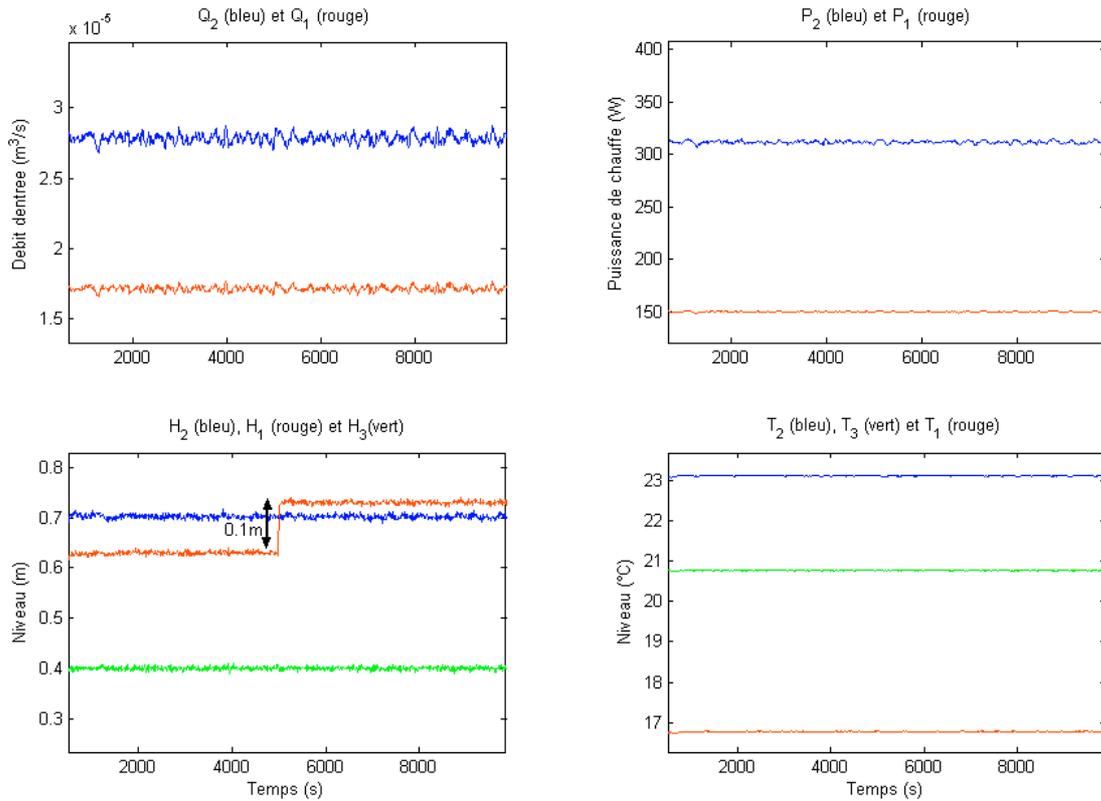


FIG. 4.14 – Commande nominale de type PI

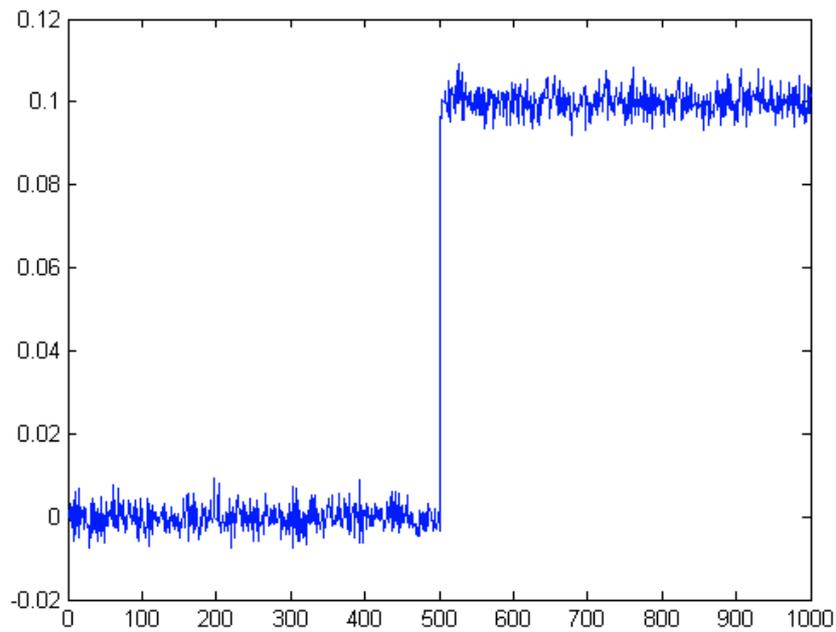
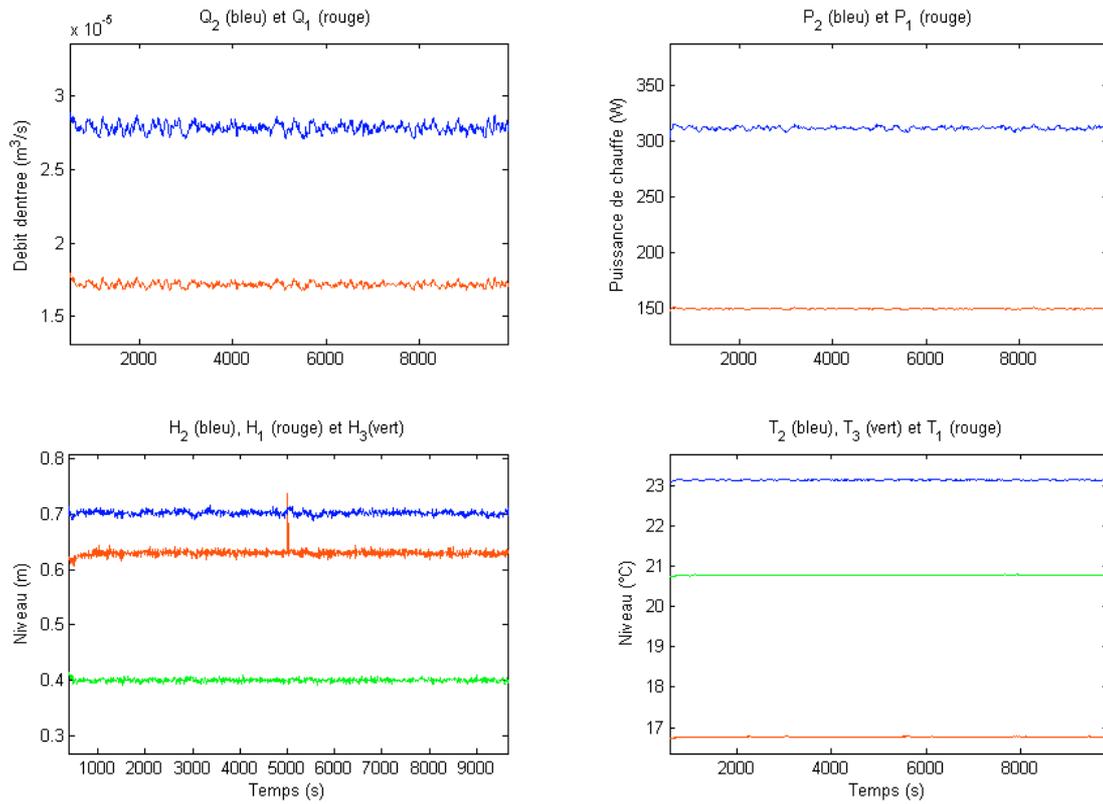


FIG. 4.15 – Estimation du défaut donnée par le filtre de détection

FIG. 4.16 – *Commande tolérante additive*

Ce défaut n'agit pas sur la commande car cette sortie H1 n'est pas régulée mais toutes les propriétés de réactivité sont conservées.

La commande additive n'a pas été implémentée pour prendre en compte les informations du bloc FDI. Il serait intéressant d'implémenter plusieurs tests de détection sur l'amplitude des défauts donnée par le filtre de détection afin de reconfigurer la loi de commande nominale en présence de défauts significatifs et donc de limiter l'augmentation de la variance due à la présence du terme additif  $u_k^{ad}$ . La structure de ce type de commande reconfiguratrice est donnée par la figure suivante

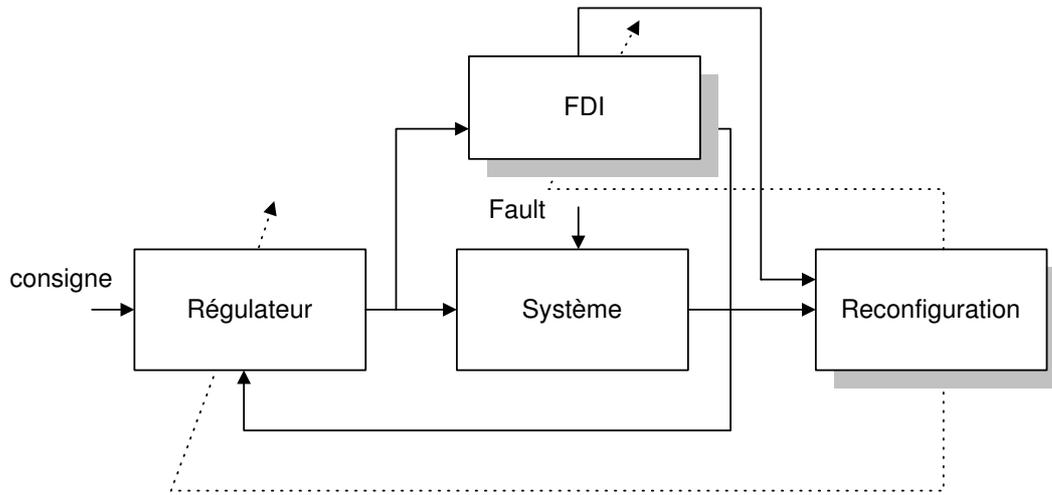


FIG. 4.17 – Structure de la commande tolérante aux défauts

Pour atteindre cet objectif, il sera alors nécessaire d'étudier la variance de  $x_k^{rec} - x_k$  intervenant dans la loi de commande additive afin de déterminer l'augmentation de la variance entre les sorties régulées et leurs consignes (et donc de définir un critère de performance non étudié dans cette thèse).

#### 4.5.1 Conclusion

Ces résultats permettent de montrer la réactivité de notre loi de commande suite à l'apparition de défauts de types pertes d'efficacité d'actionneur, biais sur capteur et rampe sur actionneur. Toutes les propriétés de la loi de commande nominale PI, en terme de robustesse et de performance sont donc retrouvées en temps minimal. Ce temps minimal correspond au temps structurel du système étudié au chapitre 2. Notre objectif d'intégration d'un outil de diagnostic dans une loi de commande basée observateur est atteint. Un test de détection appliqué sur l'estimation des défauts donnée par le filtre de détection permettrait de renseigner la partie supervision du système de contrôle commande et éventuellement d'agir en conséquence sur la loi de commande.

# Conclusion

Le travail présenté dans ce mémoire a porté sur le diagnostic des systèmes linéaires stochastiques avec pour objectif terminal la conception de lois de commande tolérantes aux défauts. La première phase du travail a porté sur la conception d'un filtre de détection robuste afin que son résidu directionnel soit insensible aux incertitudes déterministes et le plus possible insensible aux incertitudes stochastiques. Ce travail a donné lieu à la conception d'un filtre de détection basé sur l'inversion du système, une approche complètement différente de celles existantes dans la littérature. Après la paramétrisation de toutes les inverses à gauche du système obtenue par l'étude de la structure des zéros infinis du système, les degrés de liberté restant disponibles ont été déterminés afin de permettre l'atténuation optimale des perturbations stochastiques sur le résidu généré. Cette approche a permis de définir le filtrage d'état optimal d'une partie réduite du vecteur d'état du système de dimension maximale. En d'autres mots, la conséquence des défauts sur l'erreur d'estimation d'état du filtre a été réduite à son maximum tout en conservant suffisamment d'information pour leur détection et localisation dans l'espace de sortie. La structure deadbeat de l'espace de détection du filtre, de dimension minimale, est à la base de la conception de deux lois de commande tolérantes aux défauts à réactivité maximum. La première est basée sur le filtre de détection à état augmenté et sur le principe de séparation bien connu dans le cadre LQG. La loi de commande a été obtenue par un rejet des modes non contrôlables. Cette approche a débouché sur une commande de type LTR obtenue ici par le calcul explicite de l'inverse à gauche du système. Elle diffère donc de celles existantes dans la littérature lorsque la commande de type LTR est obtenue via la commande LQG dans le cas limite où la puissance des bruits sur le filtre de Kalman tend vers l'infini. Les résultats théoriques sont donc validés par l'existence de ce lien. La dernière phase du travail a permis la validation pratique de la loi de commande additive à réactivité maximale sur un système Benchmark dans le cadre du projet IFATIS. Cette loi de commande a été comparée avec une commande de type PI standard. Les résultats pratiques ont montré les propriétés de réactivité quant à l'annulation des effets néfastes liés à l'apparition brutale d'un ou de plusieurs défauts sur le système par rapport à une commande de type PI standard toujours plus lente à réagir. Les résultats du bloc FDI ne renseignent pour l'instant que la partie supervision du système de contrôle/commande. Les perspectives de nos travaux portent bien évidemment sur le passage en boucle fermée du bloc FDI afin d'adapter en temps réel la structure de la loi de contrôle. Dans le contexte stochastique

où les résultats du bloc FDI peuvent être erronés (fausses alarmes, non détections..), cette approche boucle fermée reste encore actuellement très difficile à élaborer d'un point de vue théorique. Il serait intéressant d'améliorer l'étude structurelle du filtre de détection dans un contexte multi-filtres (Conditions duales des ordres essentiels définis pour la commande).

## Annexe A

# Paramétrisation du filtre de détection de Park et Rizzoni (1994)

Dans Park et Rizzoni (1994), le filtre de détection est obtenu à partir de l'assignation spectrale suivante

$$(\lambda_j I - (A - KC))v_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.1})$$

Avec  $f_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j^i v_j^i$  et  $n_i \leq n$ , le problème consiste alors à paramétrer les solutions de

$$\begin{bmatrix} \lambda_j^i I - A & K \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_j^i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ w_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

avec  $w_i \triangleq Cf_i = Cv_j^i$  et  $j = 1, 2, \dots, \bar{n}_i \geq n_i$  où  $\bar{n}_i$  est le nombre de valeurs propres à assigner. La solution est alors donnée par

$$K = (Af_i - \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j^i \lambda_j^i v_j^i)(Cf_i)^+ + K_i(I - (Cf_i)(Cf_i)^+) \quad (\text{A.3})$$

L'équation (A.2) ne peut pas être une solution directe du gain  $K$  car le terme en somme est inconnu. C'est la principale limitation de cette méthode. L'espace de détection et l'ordre de détection sont définis comme suit

$$A - KC = (A_i - K_i C_i) \quad (\text{A.4})$$

avec

$$\begin{aligned} C_i &= (I - (Cf_i)(Cf_i)^+)C \\ A_i &= A - (Af_i - \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j^i \lambda_j^i v_j^i)(Cf_i)^+ C \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

La paire  $(A_i, C_i)$  n'est pas totalement observable. L'espace de détection est défini par les vecteurs propres associés aux valeurs propres inobservables.

$$\mathcal{D}_{f_i} = \mathcal{N} \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

L'ordre de détection  $\mu_i$  du défaut  $f_i$  est défini par la dimension de l'espace de détection

$$\mu_i = \text{rang}(\mathcal{D}_{f_i}) = n - \text{rang} \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

## Annexe B

# Algorithme d'inversion de Silverman (1969)

L'algorithme d'inversion recursive de Silverman consiste à calculer l'inverse à droite du transfert  $H_d^T(z) = F^T(Iz - A^T)^{-1}C^T + N^T$  obtenu par la répétition de l'opération sur la sortie du système  $\Gamma^T = (A^T, C^T, F^T, N^T)$ . La matrice d'interaction unitaire  $\xi^T(z)$  d'ordre minimal  $\alpha$  telle que  $\xi^T(z)H_d^T(z) = [\hat{F}_\alpha^T(Iz - A^T)^{-1}C^T + \hat{N}_\alpha^T]$  avec  $\hat{N}_\alpha^T$  est de rang plein en ligne et donnée par  $\xi^T(z) = \xi_{\alpha-1}^T(z) \dots \xi_1^T(z)\xi_0^T(z)$  avec  $\xi_j^T(z) = \begin{bmatrix} I_{qj} & 0 \\ 0 & zI_{q-qj} \end{bmatrix} S_j^T$  (satisfaisant  $[\xi_j^T(z)][\xi_j^T(z)]^* = I_q$ ). L'algorithme de Silverman est décrit par les étapes suivantes:

Soit  $q_0 = \text{rang} N^T < q$ , il existe une matrice orthogonale  $S_0^T (S_0^T S_0 = I)$  tel que  $S_0^T N^T = \begin{bmatrix} \tilde{N}_0^T \\ 0 \end{bmatrix}$  où  $\tilde{N}_0^T$  est de rang  $q_0$ .

Avec  $S_0^T d_k = \begin{bmatrix} \tilde{d}_k^0 \\ \tilde{d}_k^1 \end{bmatrix}$  et  $S_0^T F^T = \begin{bmatrix} \tilde{F}_0^T \\ \tilde{F}_1^T \end{bmatrix}$ , le système  $\Gamma^T$  peut s'écrire

$$x_{k+1}^* = A^T x_k^* + C^T y_k \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{d}_k^0 \\ \tilde{d}_k^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_0^T \\ \tilde{F}_1^T \end{bmatrix} x_k^* + \begin{bmatrix} \tilde{N}_0^T \\ 0 \end{bmatrix} y_k \quad (\text{B.2})$$

ou d'une façon équivalente

$$\begin{bmatrix} I_{q_0} & 0 \\ 0 & zI_{q-q_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{d}_k^0 \\ \tilde{d}_k^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{d}_k^0 \\ \tilde{d}_{k+1}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_0^T \\ \tilde{F}_1^T A^T \end{bmatrix} x_k^* + \begin{bmatrix} \tilde{N}_0^T \\ \tilde{F}_1^T C^T \end{bmatrix} y_k \quad (\text{B.3})$$

Le système  $\Gamma_1^T$  est alors défini par

$$x_{k+1}^* = A^T x_k^* + C^T y_k \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{d}_k^0 \\ \tilde{d}_{k+1}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_0^T \\ \tilde{F}_1^T \end{bmatrix} x_k^* + \begin{bmatrix} \tilde{N}_0^T \\ \tilde{N}_1^T \end{bmatrix} y_k \quad (\text{B.5})$$

où  $F_1^T = \bar{F}_1^T A^T$  et  $N_1^T = \bar{M}_1^T C^T$  avec  $\xi_0^T(z) = \begin{bmatrix} I_{q_0} & 0 \\ 0 & zI_{q-q_0} \end{bmatrix} S_0^T$  la matrice de passage

de  $\Gamma^T$  vers  $\Gamma_1^T$ . Soit  $q_1 = \text{rang} \begin{bmatrix} \tilde{N}_0^T \\ N_1^T \end{bmatrix}$ . Si  $q_1 < q$ , alors il existe une matrice orthogonale

$S_1^T (S_1^T S_1 = I)$  telle que  $S_1^T \begin{bmatrix} \tilde{N}_0^T \\ N_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_1^T \\ 0 \end{bmatrix}$  où  $\tilde{N}_1^T$  est de rang pleine ligne  $q_1$ . Avec  $S_1^T \begin{bmatrix} \tilde{d}_k^0 \\ \tilde{d}_{k+1}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{d}_{k+1}^1 \\ \tilde{d}_{k+1}^2 \end{bmatrix}$  et  $S_1^T \begin{bmatrix} \tilde{F}_0^T \\ F_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_1^T \\ \tilde{F}_2^T \end{bmatrix}$ , le système  $\tilde{\Gamma}_1^T$  peut s'écrire

$$x_{k+1}^* = A^T x_k^* + C^T y_k \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{d}_{k+1}^1 \\ \tilde{d}_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_1^T \\ \tilde{F}_2^T \end{bmatrix} x_k^* + \begin{bmatrix} \tilde{N}_1^T \\ 0 \end{bmatrix} y_k \quad (\text{B.7})$$

Avec

$$\begin{bmatrix} I_{q_1} & 0 \\ 0 & zI_{q-q_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{d}_{k+1}^1 \\ \tilde{d}_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{d}_{k+1}^1 \\ \tilde{d}_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_1^T \\ \tilde{F}_2^T A^T \end{bmatrix} x_k^* + \begin{bmatrix} \tilde{N}_1^T \\ \tilde{F}_2^T C^T \end{bmatrix} y_k \quad (\text{B.8})$$

la séquence  $\Gamma_2$  est alors définie par

$$x_{k+1}^* = A^T x_k^* + C^T y_k \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{d}_{k+1}^1 \\ \tilde{d}_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_1^T \\ \tilde{F}_2^T \end{bmatrix} x_k^* + \begin{bmatrix} \tilde{N}_1^T \\ \tilde{N}_2^T \end{bmatrix} y_k \quad (\text{B.10})$$

où  $F_2^T = \bar{F}_2^T A^T$  et  $N_2 = \bar{F}_2^T C^T$  avec  $\xi_1^T(z) = \begin{bmatrix} I_{q_1} & 0 \\ 0 & zI_{q-q_1} \end{bmatrix} S_1^T$  la matrice de passage de  $\Gamma_1^T$

vers  $\Gamma_2^T$ .

Si  $H_d^T(z)$  est inversible à droite, alors il existe un entier  $\alpha$  tel que le système original  $\Gamma^T$  se transforme

$$x_{k+1}^* = A^T x_k^* + C^T y_k \quad (\text{B.11})$$

$$d_k^\alpha = \hat{F}_\alpha^T x_k^* + \hat{N}_\alpha^T y_k \quad (\text{B.12})$$

avec  $d_k^\alpha = \begin{bmatrix} \tilde{d}_{k+\alpha-1}^{\alpha-1} \\ \tilde{d}_{k+\alpha}^\alpha \end{bmatrix}$ ,  $\hat{F}_\alpha^T = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{\alpha-1}^T \\ F_\alpha^T \end{bmatrix}$  tel que  $\hat{N}_\alpha^T = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{\alpha-1}^T \\ N_\alpha^T \end{bmatrix}$  soit de rang pleine ligne. Le degré de la matrice d'interaction  $\xi^T(z) = \xi_{\alpha-1}^T(z) \dots \xi_1^T(z) \xi_0^T(z)$  satisfaisant  $\xi^T(z) [\xi^T(z)]^* = I$  (car  $S_0^T S_0 = I, S_1^T S_1 = I, \dots, S_{\alpha-1}^T S_{\alpha-1} = I$ ) est minimal et correspond au nombre d'itérations  $\alpha$  pour obtenir  $\Gamma_\alpha^T$  à partir de  $\Gamma^T$ .

Soit  $\Gamma^T(K^T) = (A^T - C^T K^T, C^T, F^T - N^T K^T, N^T)$  définit la boucle fermée du système  $\Gamma^T = (A^T, C^T, F^T, N^T)$  obtenu par le retour d'état suivant  $y_k = -K^T x_k^*$ . Le système  $\Gamma^T(K^T)$  est inobservable au maximum avec  $K^T = (\hat{N}_\alpha)^+ \hat{F}_\alpha^T$  (Erme et Silverman, 1976)

# Bibliographie

- Adam-Medina, M., M. Rodrigues, D. Theilliol et H. Jamouli (2003). Fault diagnosis in non-linear systems through an adaptive filter under a convex set representation. *ECC Cambridge, UK*.
- Ahmed-Zaid, F., K. Gousman P. Ioannou et R. Rooney (1991). Accommodation of failure in the f-16 aircraft using adaptive control. *IEEE Control Systems*, pp. 73–78.
- Anderson, B.D.O et J.B. Moore (1990). *Optimal control: Linear quadratic methods*. Englewood Cliffs. Prentice Hall.
- Balas, G. et J.Bokor (2002). Detection filter design for LPV systems. *15th IFAC World Congress on Automatic Control, Barcelone*.
- Basseville, M. et A. Benveniste (1983). Design and comparative study of some sequential jump detection algorithms for digital signal. *IEEE transaction. Acous., speech, signal processing*, **31**, 521–534.
- Basseville, M. et I. Nikiforov (1994). *Detection of abrupt changes theory and application*. Thomas Kailath. Prentice Hall.
- Beard, R.V. (1971). Failure Accomodation In Linear Systems Through self-reorganization. PhD thesis. Massachusetts Institute of Technology. Department of Aeronautics and Astronautics, Cambridge , Massachusetts (USA).
- Bennett, S.M., R.J. Patton et S. Daley (1999). Sensor fault tolerant control of rail traction drive. *Control Engineering Practice*, **7**(2), 217–225.
- Blanke, M., R.J. Patton C. Frei, F. Kraus et M. Starosweicki (2000). What is fault-tolerant control?. *Proc. of the 4th IFAC Symp. on Fault Detection, supervision and safety for Technical Process, Budapest*, pp. 40–51.
- Chen, R.H., D.L. Mingori et J.L. Speyer (2003). Optimal stochastic fault detection filter. *Automatica*, **39**, 377–390.
- Chen, R.H. et J.L Speyer (2002). Robust multiple-fault detection filter. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **12**, 675–696.
- Choi, J.W, J.G. Lee, Y. Kim et T. Kang (1995). Design of an effective controller via disturbance accommodating left eigenstructure assignment. *Automatica*, **18**(2), 347–354.
- Choi, J.W., S.B Lee et al. (2000). A fault isolation filter design using left eigenstructure assignment scheme. *KSME International Journal*, **14**(6), 583–589.

- Chow, E.Y et A.S Willsky (1984). Analytical redundancy and the design of robust detection systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, **AC-29**(7), 603–614.
- Chung, W.H. et J.L. Speyer (1998). A game theoretic fault detection filter. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **AC-43**, 933–935.
- Clark, R.N. (1979). The dedicated observer approach to instrument failure detection. *18th IEEE Conf. on Decision and Control, Fort Lauderdale*, pp. 237–241.
- Commault, C. (1999). On the disturbed fault detection and isolation problem. *Systems Control Letters*, **38**, 73–78.
- Commault, C., M. Dion, O. Sename et R. Motyeian (2002). Observer-based fault detection and isolation for structured systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, **47**(12), 2074–2079.
- Deckert, J.C., M.N. Desai, J.J. Deyst et A.S. Willsky (1977). F8-dfbw sensor failure identification using analytical redundancy. *IEEE Transaction On Automatic Control*, **22**, 795–803.
- DeSousa, C.E., M.R. Gevers et G.C. Goodwin (1986). Riccati equations in optimal filtering of nonstabilizable systems having singular state transition matrices. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **AC-31**, 831–838.
- Dittmar, C.J. (1988). A hyperstable model-following flight control system used for reconfiguration following aircraft impairment. *American Control Conference*, pp. 2219–2224.
- Douglas, R.K. et J.L. Speyer (1996). Robust fault detection filter design. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **19**(1), 214–218.
- Edelmayer, A., J. Bokor et al. (1997). Robust detection filter design in the presence of time-varying system perturbations. *Automatica*, **33**(3), 471–475.
- Erme, E. et L.M. Silverman (1976). Minimal dynamic inverse for linear systems with arbitrary initial states. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **AC-21**, 766–770.
- Franck, P.M. (1990). Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy. *Automatica*, **26**, 459–474.
- Franck, P.M. et X. Ding (1994). Comparison of Observer-based Fault Detection Approaches. *Safeprocess 94, Helsinki (Finland)*, pp. 556–561.
- Friedland, B. (1969). Treatment of bias in recursive filtering. *IEEE Transaction On Automatic Control*, **14**, 359–367.
- Gao, Z. et P.J. Antsaklis (1991). Stability of the pseudo-inverse method for reconfigurable control systems. *International Journal of Control*, **53**(3), 717–729.
- Gertler, J. (1991). Analytical Redundancy Methods in Failure Detection and Isolation. *Safeprocess 91, Baden-Baden (Germany)*, pp. 9–21.
- Gertler, J. (1998). *Fault Detection and Diagnosis in Engineering Systems*. Marcel Dekker, Inc.

- Gertler, J. et D. Singer (1986). A New Structural Framework for Parity Equation Based Failure Detection and Isolation. *Automatica*, **26**, 381–388.
- Gleason, D. et A. Andrisani (1990). Observer design for discrete systems with unknown exogenous inputs. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **AC-35**, 933–935.
- Gopinathan, M., K.R. Mehra et C.J. Runkle (1999). Model predictive fault-tolerant temperature control scheme for hot isostatic pressing furnaces. *American Control Conference*, pp. 637–641.
- Groszkiewicz, J.E. et M. Bodson (1995). Flight control reconfiguration using adaptive methods. *Control conference on decision*, pp. 1159–1164.
- Gustafson, D.E., A.S. Willsky, M.C. Lancaster J.Y. Wang et J.H. Triebwasser (1978). Ecg/vgc rhythm diagnosis using statistical signal analysis i; identification of persistent rhythms. *IEEE Transaction Biomed. Eng*, **25**, 344–352.
- Gustafsson, F. (2002). Stochastic fault diagnosability in parity spaces. *15th Triennial World Congress, Barcelona*.
- Hou, M. et P.C Muller (1994). Fault detection and isolation observers. *International Journal Control*, **60**, 827–846.
- Hou, M. et R.J. Patton (1998). Input observability and input reconstruction. *Automatica*, **34**, 789–794.
- Hsu, P.L. et L.C. Shen (1995). A robust diagnostic approach for uncertain system: an example for the jet engine sensor systems. *SPIE's Conference on Sensing, Actuating, and Control*, **2494**, 48–59.
- Huang, C.Y et R.F Stengel (1990). Restructurable control using proportional-integral implicit model following. *Journal of Guidance Control and dynamics*, **13**(2), 303–309.
- Izadi-Zamanabadi, R. et M. Blanke (1999). A ship propulsion system as benchmark for fault tolerant control. *Control Engineering Practice*, **7**(2), 227–239.
- Jamouli, H., J.Y. Keller et D. Sauter (2001). Estimation of loss control effectiveness. *16th IAR Annual meeting and Associated Workshops, Strasbourg*.
- Jamouli, H., J.Y. Keller et D. Sauter (2003). Fault isolation filter with unknown inputs in stochastic systems. *Safeprocess, Washington*.
- Jiang, J. (1994). Design of reconfigurable control systems using eigenstructure assignment. *Control Engineering Practice*, **59**(2), 195–410.
- Join, C., J-C. Ponsart, D. Sauter et H. Jamouli (2003). Fault decoupling via generalized output injection. *ECC Cambridge, UK*.
- Jones, H.L. (1973). Failure detection in linear systems. PhD thesis. Massachusetts Institute of Technology. Department of Aeronautics and Astronautics, Cambridge.
- Kailath, T. (1980). *Linear systems*. Prentice-Hall.
- Keller, J.Y. (1999). Fault isolation filter design for linear stochastic systems. *Automatica*, **35**, 1701–1706.

- Keller, J.Y. et M. Darouach (1997). Optimal two-stage Kalman filter in the presence of random bias. *Automatica*, **33**(9), 1745–1748.
- Keller, J.Y. et M. Darouach (1998). Reduced-order Kalman filter with unknown inputs. *Automatica*, **34**(11), 1463–1468.
- Keller, J.Y., H. Jamouli, C. Aubrun et D. Sauter (2002). Minimum time fault isolation filter in discrete time stochastic systems. *Conference on Decision and Control, Las Vegas*.
- Kim, Y. et J. Park (1999). An analysis of detection spaces using invariant zeros. *Proceedings of the American Control Conference, San Diego, California*, pp. 3810–3814.
- Kitanidis, P.K. (1987). Unbiased minimum variance linear state estimation. *Automatica*, **23**(6), 775–778.
- Kobayashi, N. et T. Nakamizo (1982). An observer design for systems with unknown inputs. *International Journal of Control*, **35**, 605–619.
- Konstantopoulos, I.K et P.J Antsaklis (1999). An optimization approach to control reconfiguration. *Dynamics and Control*, **9**(3), 255–270.
- Kullback, S. (1959). *Information theory and statistics*. Jhon-Wiley and Son. Prentice Hall. New York.
- Kwakernaak, H. (1976). Asymptotic root loci of multivariable linear regulators and linear optimal filters. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **AC-17**, 79–86.
- Liu, B. et J. Si (1994). Fault detection and isolation for linear time invariant systems. *33rd Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista*, pp. 3048–3053.
- Liu, B. et J. Si (1997). Fault isolation filter design for linear time invariant systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **42**(5), 704–707.
- Looze, D.P, J.S Eterno J.L. Weiss et N.M Barrett (1985). An automatic redesign approach for restructurable control systems. *IEEE Control systems magazine*, pp. 16–22.
- Maciejowski, J.M. (1997). Reconfigurable control using constrained optimization. *European control conference, Belgium*, pp. 107–130.
- Maciejowski, J.M. (2000). Fault-tolerant aspects of mpc. *IN Proc. of the IEE Seminar on Practical Experiences with Predictive Control*.
- Mahmoud, M., J. Jiang et Y.M. Zhang (2001). Stochastic stability analysis for fault tolerant control systems in the presence of noise. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **46**(11), 1810–1815.
- Mahmoud, M., J. Jiang et Y.M. Zhang (2003). *Active Fault Tolerant Control systems : Stochastic Analysis and Synthesis*. Vol. 287. Lectures Notes in Control and Information Sciences. Berlin, Germany.
- Massoumnia, M. (1986). A geometric approach to the synthesis of failure detection filters. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **31**(9), 839–846.

- Massoumnia, M. et W.E. Vander Velde (1987). Generating Parity Relations for Detecting and Identifying Control System Component Failures. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **11**(1), 60–65.
- Massoumnia, M., G.C. Verghese et A.S. Willsky (1989). Failure detection and identification. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **34**(3), 316–321.
- Maybeck, P.S (1999). Multiple model adaptive algorithms for detecting and compensating sensor and actuator/surface failures in aircraft flight control systems. *International Journal of Robust and nonlinear control*, **9**(14), 1051–1070.
- Maybeck, P.S et R.D Stevens (1991). Reconfigurable flight control via multiple model adaptive control methods. *IEEE Transactions on aerospace and electronic systems*, **27**(3), 470–480.
- Mehra, R.K et J. Peschon (1971). An innovations approach to fault detection and diagnosis in dynamic systems. *Automatica*, **7**, 637–640.
- Moore, J.B., D. Gangsaas et J. Blight (1981). Performance and robustness trades in IQG regulator design. *20th CDC, San Diego, California*, pp. 1191–1200.
- Morse, W.D. et K.A. Ossman (1990). Model following reconfigurable flight control system for the AFTI/F1-16. *Journal Guidance*, **13**(6), 969–976.
- Nett, C.N., J.A. Jacobson et A.T. Milier (1988). An integrated approach to control and diagnostics: The four-parameter controller. *IEEE American control conference. Atlanta*, pp. 824–835.
- Nikoukhah, R. (1994). Innovations generation in the presence of unknown inputs : application to robust failure detection. *Automatica*, **30**(12), 1851–1867.
- Noura, H. (2002). Méthodes d’accommodation aux défauts: Théorie et application. HDR. Université Henri Poincaré Nancy1.
- Noura, H. et F. Hamelin D. Sauter (1997). Evaluation of a fault-tolerant control design for actuators faults. *IEEE American control conference. San Diego*.
- Noura, H., F. Hamelin D. Sauter et D. Sauter (2000). Fault tolerant control in dynamic systems : Application to a winding machine. *IEEE Control system Magazine*, **20**(1), 33–49.
- Ochi, Y. et K. Kanai (1991). Design of restructurable flight control systems using feedback linearization. *Journal guidance*, **14**(5), 903–911.
- O’Reilly, J. (1983). *Observers for linear systems*. Academic Press.
- Owen, D.B. (1962). *Handbook of statistical tables*. Addison-Wesley. Reading, M.A.
- Park, J. et G. Rizzoni (1994a). An eigenstructure assignment algorithm for the design of fault detection filters. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **39**(7), 1521–1524.
- Park, J. et G. Rizzoni (1994b). A new interpretation of the fault detection filter. *International Journal of Control*, **60**, 1339–1351.

- Park, J. et G. Rizzoni (1994c). A new interpretation of the fault detection filters. *International Journal of Control*, **60**, 767–787.
- Park, J., G. Rizzoni et W.B. Ribbens (1994). On the representation of sensor faults in fault detection filters. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **30**(11), 1793–1795.
- Parlangeli, G. et M.E. Valcher (2002). Disturbed fault detection and isolation problems for linear state models in a noisy environment. *15th IFAC World Congress on Automatic Control, Barcelone*.
- Patel, R.V. (1982). Construction of stable inverses for linear systems. *International Journal Systems Science*, **13**, 499–515.
- Patton, R.J. (1993). Robustness issues in fault tolerant control. *IEE Colloquium on Fault Diagnosis and Control System Reconfiguration*, **9**(1), 9–25.
- Patton, R.J. (1997). Fault tolerant control: the 1997 situation. *In the proceeding of IFAC Symposium SAFEPROCESS'97, UK*, pp. 1033–1055.
- Patton, R.J. et J. Chen (1991a). A Re-examination of the Relationship between Parity Space and Observer-based Approaches in Fault Diagnosis. *Diagnostic et Sûreté de Fonctionnement*, **1**, 183–200.
- Patton, R.J. et J. Chen (1991b). A Review of Parity Space Approaches to Fault Diagnosis. *Safeprocess 91, Baden-Baden(Germany)*, **1**, 65–81.
- Patton, R.J. et J. Chen (1992). Robust fault detection of jet engine sensor systems using eigenstructure assignment. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **15**(6), 1491–1497.
- Patton, R.J. et J. Chen (1997). Observer-based Fault Detection and Isolation: Robustness and Applications. *Control Engineering Practice*, **5**(5), 671–682.
- Patton, R.J., P.M. Frank et R.N. Clark (1989). *Fault Diagnosis in Dynamic Systems, Theory and Application*. Prentice Hall, New York. Control Engineering Series.
- Peng, Y. et M. Kinnaert (1992). Explicit solution to the singular LG regulation problem. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **AC-37**, 633–636.
- Rago, C., R. Prasanth, R.K. Mehra et R. Fortenbaugh (1998). Failure detection and identification and fault tolerant control using the immf-kf with applications to eagle-eye uav. *IN Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, Florida*, pp. 4208–4213.
- Rausch, H.E. (1995). Autonomous control reconfiguration. *IEEE Control Systems Magazine*, **15**(6), 37–49.
- Rowe, C. et J.M. Maciejowski (2000). Improving the feasibility of lmi-based robust constrained model predictive control: application to fault tolerant control. *UKACC International Conference on Control*.
- Sauter, D. et H. Noura F. Hamelin (1998). Fault tolerant control in dynamic systems using convex optimization. *Proc, IEEE ISIC/CIRA/ISAS*, **2**(5), 187–192.

- Sauter, D., H. Jamouli et J.Y. Keller (2003). Actuator fault compensation for a winding machine. *Symposium on automation mineral and metal processing, Chine*.
- Shen, Li. et Pau. Hsu (1998). Robust design of fault isolation observers. *Automatica*, **34**(1), 1421–1429.
- Silverman, L.M. (1969). Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **14**, 270–276.
- Sobel, K., H. Kaufman et L. Mabiou (1982). Implicit adaptive control for a class of mimo systems. *IEEE Transactions on Aerospace and electronic systems*, **18**(5), 576–590.
- Staroswiecki, M. et A.L. Gehin (2001). From control to supervision. *Annual Reviews in Control*, **25**, 1–11.
- Stein, G. et M. Athans (1987). The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design. *IEEE Transactions On Automatic Control*, **AC-32**(2), 105–114.
- Summerer, L., J.Y. Keller et M. Darouach (1997). Robust fault diagnosis with a two-stage Kalman estimator. *European Journal of Control*, **3**, 247–252.
- Tao, G. et X. Ma S.M Joshi (2001). Adaptive state feedback and tracking control of systems with actuator failures. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **46**(1), 78–95.
- Tay, T.T. et J.B. Moore (1991). Adaptive LQG controller with loop transfer recovery. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, **5**, 135–149.
- Theilliol, D. et D. Sauter H. Noura (1998). Fault tolerant control method for actuator and component faults. *IEEE conference decision and control, Tampa, FL*.
- Tortora, G. (2002). Fault-tolerant control and intelligent instrumentation. *Computer and Control Engineering Journal*, **13**(5), 259–269.
- Veillette, R.J. (1995). Reliable linear-quadratic state-feedback control. *Automatica*, **31**(1), 137–143.
- White, J.E. et J.L. Speyer (1987). Detection filter design : Spectral theory and algorithms. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **AC-32**(7), 593–603.
- Willsky, A.S. (1976). A survey of design methods for failure detection in dynamic systems. *Automatica*, **12**, 601–611.
- Willsky, A.S. et H.L. Jones (1976). A generalized likelihood ratio approach to detection and estimation of jumps in linear systems. *IEEE Transaction On Automatic Control*, **21**, 108–112.
- Willsky, A.S., E.Y. Chow, P.K. Houpt S.B. Gershwin, C.S. Greene et A.L. Kurkjian (1980). Dynamic model-based techniques for the detection of incidents on freeways. *IEEE Transaction On Automatic Control*, **25**, 347–360.
- Wolowich, W.A et P.L. Falb (1976). Invariants and canonical forms under dynamic compensation. *SIAM J. Control optim.*, **14**, 996–1008.
- Wonham, W.M. (1985). *Linear multivariable control: a geometric approach*. Vol. 10 de *Applications of Mathematics*. 2 ed.. Springer-Verlag.

- Wu, E. et K. Zhou Y. Zhang (1998). Control effectiveness estimation using an adaptive kalman estimator. *Proc, IEEE ISIC/CIRA/ISAS*, pp. 181–186.
- Wu, N.E. (1997). Robust feedback design with optimized diagnostic performance. *IEEE Transaction on Automatic Control*, **42**(9), 1264–1268.
- Wu, N.E. et T.J Chen (1996). Feedback design in control reconfigurable systems. *International Journal of Robust and nonlinear control*, **6**(6), 561–570.
- Wu, N.E., K. Zhou et G. Salomon (2000a). Reconfigurability in linear time-invariant systems. *Automatica*, **36**, 1767–1771.
- Wu, N.E., Y.M. Zhang et K. Zhou (2000b). Detection, estimation, and accommodation of loss control effectiveness. *International journal of adaptive control and signal processing*, **14**(7), 775–795.
- Wunnenberg, J. et P.M. Frank (1987). Sensor fault using detection via robust observers. *SIAM J. Control optim.*, **14**, 996–1008.
- Yang, Z., R. Izadi-Zamanabadi et M. Blanke (2000). On-line multiple-model based adaptive control reconfiguration for a class of nonlinear control systems. *IFAC Symposium on fault detection, supervision and safety for technical Processes-Safe process, Budapest*.
- Zaid, F.A, K. Gousman P. lonnaou et R. Rooney (1991). Accommodation of failures in the F16 aircraft using adaptive control. *IEEE Control systems magazine*, **11**(1), 73–84.
- Zhang, Y. et J. Jiang (1999). An interacting multiple-model based fault detection, diagnosis and fault tolerant control approach. *IEEE Conference on Decsion and Control, Phoenix*, pp. 3593–3598.
- Zhang, Y.M et J. Jiang (2001a). An active fault tolerant control using IMM approach. *IEEE Transactions on aerospace and electronic systems*, **37**(4), 1221–1235.
- Zhang, Y.M et J. Jiang (2001b). Fault tolerant control systems design with consideration of performance degradation. *American Control conference, Virginia*, pp. 2694–2699.
- Zhang, Y.M. et J. Jiang (2002). Active fault-tolerant control system against partial actuator failures. *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, **149**(1), 95–104.
- Zhang, Y.M et J. Jiang (2002, spain). Design of restructurable active fault tolerant control systems. *IFAC World Congress b'02*.
- Zhao, Q. et J. Jiang (1998). Reliable state feedback control system design against actuator failures. *Automatica*, **34**(10), 1267–1272.
- Zhou, D.H. et P.M. Frank (1998). Fault diagnosis and fault tolerant control. *IEEE Transaction. Aerospace and Electronic*, **34**(2), 420–427.