Groupoïdes quantiques mesurés : axiomatique, étude, dualité, exemples

Franck Lesieur

Année : 2003

N° |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Thèse

présentée à l'Université d'Orléans

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université d'Orléans

Discipline : Mathématiques

par

Franck LESIEUR

Groupoïdes quantiques mesurés : axiomatique, étude, dualité, exemples.

Soutenue publiquement le 14 novembre 2003
devant le **Jury** composé de :

Président :	G. Skandalis	(IMJ, UMR 7586, Univ. de Paris VII)
Directeur de thèse :	M. Enock	(IMJ, UMR 7586, CNRS)
Co-directeur de thèse :	J.M. Vallin	(MAPMO, UMR 6628, Univ. d'Orléans)
Rapporteurs :	L. Vainerman	(LMNO, UMR 6139, Univ. de Caen)
	A. Van Daele	(KU Leuven)
Autre membre :	G. Ferrand	(LIFO, FRE 2490, Univ. d'Orléans)

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie naturellement Michel Enock qui m'a offert l'opportunité de travailler sur un sujet aussi passionnant que les groupoïdes quantiques. Michel Enock et Jean-Michel Vallin m'ont enseigné la rigueur : les discussions et les réflexions, que nous avons eues, m'ont permis de progresser dans mon travail. Je les remercie de la liberté qu'ils m'ont laissée dans mes recherches et de la grande disponibilité dont ils ont fait preuve à mon égard. Je veux aussi saluer le courage et le temps qu'ils ont mis pour relire un nombre incalculable de versions préliminaires.

Je veux remercier Leonid Vainerman et Alfons Van Daele qui ont accepté de lire cette thèse et d'en être les rapporteurs. Ma reconnaissance va également à Gérard Ferrand et Georges Skandalis qui me font l'honneur d'être membres de mon Jury de thèse.

J'ai été initié aux algèbres d'opérateurs grâce au cours de DEA de Paris VI dispensé par Michel Enock et Leonid Vainerman sur la théorie générale des C*-algèbres et sur les groupes quantiques compacts. Mon mémoire de DEA, déjà dirigé par Michel Enock, portait sur les algèbres de Woronowicz et s'orientait donc vers les groupes quantiques en général. Ensuite mes travaux de recherche ont été fortement inspirés par la théorie des groupes quantiques de Johan Kustermans et Stefaan Vaes et par les développements de Michel Enock et Jean-Michel Vallin sur les inclusions d'algèbres de von Neumann. Je tiens à remercier Marie-Claude David, Johan Kustermans et Stefaan Vaes pour les discussions sur le sujet.

J'ai beaucoup appris grâce aux équipes d'algèbres d'opérateurs d'Orléans et de Paris, et de manière plus générale grâce au GDR d'algèbres d'opérateurs. Les séminaires, les colloques et autres journées auxquels j'ai pu assister, ont toujours été d'un grand intérêt, ont éclairé beaucoup de zones obscures dans mes connaissances et, surtout, ont aiguisé ma curiosité et mon envie d'apprendre des mathématiques. J'ai particulièrement apprécié la convivialité du séminaire d'algèbres d'opérateurs d'Orléans (le vendredi à 14 heures 01) : j'en remercie les participants et en particulier les organisateurs, Claire Anantharaman et Jean Renault, qui m'ont permis de présenter à plusieurs reprises mes travaux.

Je remercie le MAPMO et tous ses membres qui m'ont accueilli pendant la préparation de cette thèse. Le laboratoire m'a permis notamment d'assister à des colloques nationaux et internationaux qui se sont avérés plus que profitables pour ma formation.

Ma reconnaissance s'adresse aussi à tous mes collègues de travail et, en particulier :

- aux participants du séminaire des Jeunes d'Orléans et de Paris avec qui j'ai beaucoup appris,
- à mes collègues de bureau et plus généralement aux doctorants et anciens doctorants du MAPMO à qui je souhaite une bonne réussite,
- à Frédéric Cadet, Benoît Collins, Stéphane Damaville, Stéphane Vassout, Roland Vergnioux et Yi-Jun Yao qui ont préparé leur thèse en même temps que moi sur les algèbres d'opérateurs,
- aux collègues qui m'ont aidé à faire mes premières armes dans l'enseignement, parmi eux Yves Denizeau et Olivier Garet,
- aux collègues du CIES pour leur bonne humeur.

Je salue spécialement Barbara avec qui j'ai eu de très nombreuses discussions sur l'enseignement, le fonctionnement de l'Université, la condition des doctorants, la politique...

Je ne veux surtout pas oublier les très serviables Virginie Foucault, Anne Liger et Christelle Morillon dont l'aide m'a été très précieuse dans bon nombre de démarches. Je souhaite aussi remercier les secrétaires du CIES, de l'École Doctorale des Sciences et Techniques, du Service Recherche et du Service du Personnel de l'Université d'Orléans.

Dans ma vie privée, le soutien de Magali a été de tous les instants et, dans un certain sens, cette thèse est un peu la sienne. Je remercie aussi ma famille et mes amis, en particulier mes parents, Rosine, Daniel et Martine, Lionel, Marie-Andrée et Victor, Stéphane et Céline, Guillaume... Je tiens enfin à remercier M. et Mme Dethune et leurs enfants qui m'ont accueilli à Orléans.

Table des matières

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1 Historique.

1.1.1 La théorie des groupes quantiques a connu des développements importants ces dernières années dans le cadre des algèbres d'opérateurs et elle est au centre de recherches intenses à l'heure actuelle. Cette théorie, dont le but essentiel est d'expliquer la dualité des groupes, a bénéficié de nombreuses contributions : [KaV74], [Wor88], [ES89], [MN91], [BS93], [Wor95], [Wor96], [VDa98], [KV00]. Le travail de J. Kustermans et S. Vaes est à ce propos capital : ils ont proposé une définition simple pour les groupes quantiques localement compacts dans [KV00]. Leur théorie élégante regroupe tous les exemples connus (groupes localement compacts, groupes quantiques compacts [Wor95], le groupe quantique « $ax + b$ »[Wor01], [WZ02], les algèbres de Woronowicz [MN91]...) et étend la dualité de ces objets. Les principaux atouts de cette théorie sont, d'une part, le peu d'axiomes à vérifier pour obtenir un groupe quantique et, d'autre part, la grande maniabilité de tels objets qui a permis de développer la théorie dans de nombreuses directions (la théorie des actions de groupes localement compacts dans [Vae01b], la théorie des coreprésentations induites dans [Kus02], la construction des biproduits croisés à cocycle dans [VV03]). Ils ont complété leur travail en donnant une version des groupes quantiques localement compact dans le cadre des algèbres de von Neumann ([KV03]).

1.1.2 Les groupes qui interviennent en géométrie sont plus naturellement définis par leurs actions que par une définition algébrique. La catégorie des groupoïdes contient les groupes, les actions de groupes et les relations d'équivalence. Ce concept a été utilisé par G.W Mackey et P. Hahn ([Mac66], [Hah78a] et [Hah78b]), dans une version mesurée, pour faire un lien entre la théorie des groupes et la théorie ergodique. Une version dans le cas localement compact et le point de vue des algèbres d'opérateurs ont été introduits et étudiés par J. Renault dans [Ren80] et [Ren97]. Cette théorie possède beaucoup d'exemples intéressants en géométrie différentielle ([Co94]), en particulier le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage.

1.1.3 La notion de bimodule de Hopf introduite par J.M Vallin dans [Val96] permet d'obtenir une dualité pour les groupoïdes. Une question naturelle est de savoir si on peut construire une catégorie, contenant les groupes quantiques et les groupoïdes, avec une dualité qui étendrait celle des catégories précédentes. Toute réunion disjointe de groupoïdes est un groupoïde, et donc, une stabilité par somme directe de cette catégorie devrait être vérifiée.

1.1.4 La dualité dans le cas des groupes quantiques repose essentiellement sur un unitaire fondamental possédant la propriété de multiplicativité mise en valeur par S. Baaj et G. Skandalis [BS93]. Une généralisation de cette notion a été formulée par J.M Vallin : les unitaires pseudo-multiplicatifs. Dans [Val00], J.M Vallin exhibe, dans le cas des bimodules de Hopf issus des groupoïdes, un unitaire fondamental pseudo-multiplicatif. Notons que techniquement ces notions reposent sur la théorie des produits tensoriels relatifs de J.L Sauvageot (ou « fusion des bimodules »d'A. Connes).

1.1.5 Dans le cadre des inclusions d'algèbres de von Neumann de profondeur 2, M. Enock et J.M Vallin puis M. Enock mettent en évidence deux structures duales l'une de l'autre qui peuvent être considérées comme des groupoïdes quantiques. Ils utilisent les notions de bimodule de Hopf et d'unitaire pseudo-multiplicatif. À ce stade, il apparaît que la théorie modulaire sur la base (équivalent des unités pour les groupoïdes) n'est pas triviale et qu'une simple généralisation des axiomes des groupes quantiques ne peut pas suffire pour construire la catégorie des groupoïdes quantiques : il faut ajouter un axiome de type modulaire sur la base ([Eno00]) i.e pour faire les constructions, on doit utiliser un poids particulier sur la base.

1.1.6 Dans [Eno02], M. Enock étudie en détail la notion d'unitaire pseudo-multiplicatif et introduit une notion de régularité analogue à celle de S. Baaj et G. Skandalis. Dans le cadre des groupes quantiques, l'unitaire fondamental est faiblement régulier et maniable au sens de Woronowicz. Dans une théorie des groupoïdes quantiques, l'unitaire fondamental devra vérifier une telle condition. En outre, M. Enock définit et étudie dans ce même article des objets qui correspondent à des « groupoïdes quantiques de type compact (resp. discret) ». De la même manière, ces exemples doivent entrer dans la théorie générale.

1.1.7 Notons que déjà beaucoup de travaux ont été menés sur les groupoïdes quantiques mais essentiellement en dimension finie. Il faut citer à ce propos les C^*-algèbres de Hopf faibles introduites par G. Böhm, F. Nill et K. Szlachányi [BNS99], [BSz96], puis étudiées par F. Nill et L. Vainerman [Nik02], [Nil98], [NV00], [NV02]. J.M Vallin a développé une théorie des groupoïdes quantiques en dimension finie en s'appuyant sur les isométries partielles multiplicatives [Val01], [Val02]. Il a montré que sa théorie correspondait exactement aux C^*-algèbres de Hopf faibles.

1.2 Objectifs et Méthodes.

Dans ce travail, on propose une définition pour les groupoïdes quantiques mesurés en dimension quelconque. Le qualificatif « mesuré »signifie que les objets qu'on étudie sont dans un cadre d'algèbres de von Neumann et que l'existence de l'analogue d'une « mesure »est a-priori supposée. On utilise une approche similaire à la théorie de J. Kustermans et S. Vaes qui se prête bien à la généralisation. On emploie la formalisme des bimodules de Hopf et des unitaires pseudo-multiplicatifs. On développe alors la théorie avec l'objectif de construire un dual et un théorème de bidualité.

1.3 Plan.

1.3.8 Après avoir présenté les outils et les techniques qui seront utilisés, on rappelle les définitions des objets qui interviendront au long du travail. On commence par associer à tout bimodule de Hopf muni de poids opératoriels invariants un unitaire pseudo-multipicatif. Cet unitaire concentre l'information de la structure, dans le sens où on peut reconstruire l'algèbre de von Neumann sous-jacente et le coproduit à partir de cette donnée. On définit alors les groupoïdes quantiques mesurés comme tout bimodule de Hopf muni de poids opératoriels invariants adaptés dans un sens qu'on précisera. Cette hypothèse correspond au choix d'un poids particulier sur la base pour les constructions qui est du même type que la condition de poids adapté pour les inclusions d'algèbres de von Neumann de profondeur 2.

1.3.9 À l'aide de cet axiome supplémentaire, on construit alors les éléments caractéristiques de la structure : d'abord une antipode S dont la décomposition polaire est fournie par une coinvolution R et un groupe à un paramètre d'automorphismes qu'on appelle groupe d'échelle τ. On montre en particulier que S, R et τ ne dépendent pas des poids opératoriels invariants. Dans le chapitre 5, on introduit un module, qui correspond au module dans le cas des groupoïdes, et l'opérateur d'échelle, qui est affilié à l'hypercentre du bimodule de Hopf. Ces deux objets proviennent du cocycle de Radon-Nikodym du poids invariant à droite par rapport au poids invariant à gauche via la généralisation du théorème de Radon-Nikodym ([Vae01a] proposition 5.2). C'est donc l'existence d'un poids convenable sur la base N qui permet de construire le module. Dans le cas des groupoïdes, c'est aussi l'existence d'une mesure convenable sur G^0 qui permet de construire le module. L'opérateur d'échelle est l'objet correspondant au facteur d'échelle dans le cas des groupes quantiques localement compacts. On est aussi en mesure de prouver l'unicité du poids opératoriel invariant à un élément du centre de la base près.

1.3.10 En s'inspirant toujours des travaux de J. Kustermans et S. Vaes, on construit un objet dual, grâce à l'unitaire fondamental et à une hypothèse supplémentaire qui est vérifiée dans de nombreux cas. L'objet dual vérifie les axiomes des groupoïdes quantiques mesurés si, et seulement si la base N est semifinie. Notons que dans ce cas, l'hypothèse supplémentaire est automatiquement vérifiée. On est donc malheureusement encore loin d'une théorie achevée : il manque une caractérisation, dans le cas général, des objets duaux, et la construction du foncteur inverse de dualité.

1.3.11 On dispose maintenant de nombreux exemples de groupes quantiques localement compacts grâce, entre autres, à des exemples de Woronowicz [Wor91], [Wor01], [WZ02], [Wor87] et à une procédure de construction due à S. Vaes et L. Vainerman à partir de produits bicroisés à cocycle [VV03]). La théorie des groupoïdes quantiques mesurés possède d'emblée également de nombreux exemples : les groupoïdes, les C*-algèbres de Hopf faibles, les groupes quantiques, les groupoïdes quantiques de type compact (resp. discret)... qu'on caractérise dans la théorie générale (la caractérisation des groupoïdes comme groupoïdes quantiques mesurés dont l'algèbre de von Neumann sous-jacente est abélienne sera démontrée ultérieurement). Remarquons que les inclusions d'algèbres de von Neumann de profondeur 2 n'entrent dans ce cadre que d'une manière imparfaite : il y a une erreur dans ([Eno00], 4.1) et le résultat n'est démontré que dans le cas où la base est, là aussi, semifinie ; toute cette théorie devra être reprise dans le cadre d'une théorie des actions et produits croisés de groupoïdes quantiques mesurés. Finalement, on s'assure de la stabilité des groupoïdes quantiques mesurés par somme directe et produit tensoriel fini. Ces propriétés, qu'il est naturel d'attendre, permettent de construire de nouveaux exemples de groupoïdes quantiques mesurés à partir de ceux déjà connus : on peut, entre autres, exhiber des groupoïdes quantiques avec des opérateurs d'échelle non scalaires.

1.4 Commentaires.

La définition des groupes quantiques localement compacts relativement simple serait meilleure si l'existence des poids invariants n'était pas supposée mais était un théorème comme le théorème de Haar dans le cas des groupes localement compacts. Un tel théorème d'existence semble encore loin d'être obtenu même s'il faut noter quelques premières investigations dans ce sens (au niveau des groupes quantiques) et quelques premiers résultats obtenus par A. Van Daele [VDa95], [VDa01]. Dans tous les cas, il s'agit d'un problème difficile. En revanche, ce théorème d'existence n'existe pas pour les groupoïdes (même localement compacts), et il semble donc que cette objection, naturelle pour la théorie des groupes quantiques à son état actuel, ne concerne pas la théorie des groupoïdes quantiques.

Le principal travail qui doit poursuivre cette étude concerne certainement la caractérisation des objets duaux pour obtenir une dualité dans le cas où la base n'est plus semifinie. On peut aussi envisager le développement d'une théorie des groupoïdes quantiques algébriques dans l'esprit de [VDa98] et [KVD97].

Chapitre 2

PRÉLIMINAIRES

2.1 Les poids [Str81], [Tak03].

Soit N une algèbre de von Neumann et soit ψ un poids normal, semifini, fidèle sur N ; on note $\mathcal{N}_\psi$, $\mathcal{M}_\psi$, H_ψ, π_ψ, Λ_ψ, J_ψ, Δ_ψ,... les objets canoniques de la théorie de Tomita-Takesaki construits à partir de ψ.

2.1.1 Définition — On introduit l'**algèbre involutive de Tomita** pour ψ définie et notée par :

$$\mathcal{T}_\psi = \{x \in \mathcal{N}_\psi \cap \mathcal{N}_\psi^* |\ x \text{ est analytique par rapport à } \sigma^\psi \text{ et } \sigma_z^\psi(x) \in \mathcal{N}_\psi \cap \mathcal{N}_\psi^* \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}\}$$

On dispose alors, d'après ([Str81], 2.12), du résultat d'approximation suivant :

2.1.2 Lemme — *Pour tout $x \in \mathcal{N}_\psi$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}_\psi$ telle que :*

i) $||x_n|| \leq ||x||$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x pour la topologie forte ;
iii) $(\Lambda_\psi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\Lambda_\psi(x)$ pour la topologie de la norme de H_ψ.

De plus, si $x \in \mathcal{N}_\psi \cap \mathcal{N}_\psi^*$, on a :

*iv) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x pour la topologie *-forte ;*
iiv) $(\Lambda_\psi(x_n^*))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\Lambda_\psi(x^*)$ pour la topologie de la norme de H_ψ.

2.2 Les poids opératoriels de Haagerup [Str81], [Tak03].

On rappelle ici les définitions élémentaires concernant les poids opératoriels pour fixer les notations. On renvoie à [Str81], à [Tak03] et à [EN96] (définitions et propriétés).

2.2.1 Définition — Soit M une algèbre de von Neumann. La **partie étendue positive** $\overline{M}^+$ de M est l'ensemble des fonctions $m : M_*^+ \to [0, +\infty]$ telles que :

i) $m(\phi + \psi) = m(\phi) + m(\psi) \quad (\phi, \psi \in M_*^+)$;
ii) $m(\lambda\phi) = \lambda m(\phi) \quad (\phi \in M_*^+, \lambda \geq 0)$;
iii) m est semicontinue inférieurement.

2.2.2 DÉFINITION — Soient M une algèbre de von Neumann et $N \subseteq M$ une sous algèbre de von Neumann. Un **poids opératoriel** sur M à valeurs dans N est une application $T : M^+ \to \overline{N}^+$ telle que :

i) $T(a + b) = T(a) + T(b) \quad (a, b \in M+)$;
ii) $T(\lambda a) = \lambda T(a) \quad (a \in M^+, \lambda \geq 0)$;
iii) $T(y^* a y) = y^* T(a) y \quad (a \in M^+, y \in N)$.

On définit alors l'ensemble $\mathcal{N}_T = \{x \in M \,/\, T(x^*x) \in N^+\}$ puis l'ensemble $\mathcal{M}_T = \mathcal{N}_T^* \mathcal{N}_T$ de manière tout à fait analogue au cas des poids. On définit aussi la normalité, la semifinitude et la fidélité...

Dans les conditions de la définition précédente et en supposant le poids opératoriel T normal, semifini et fidèle, si ψ désigne un poids normal, semifini et fidèle sur N, alors on peut définir un poids $\psi \circ T$ normal, semifini et fidèle sur M de manière naturelle.

On rappelle alors le théorème 10.6 de [EN96] :

2.2.3 PROPOSITION — *Soient $N \subseteq M$ une inclusion d'algèbres de von Neumann, T un poids opératoriel sur M à valeurs dans N normal semifini et fidèle et ψ un poids normal, semifini et fidèle sur N. Alors on a :*

i) pour tous $x \in \mathcal{N}_T$ et $a \in \mathcal{N}_\psi$, xa appartient à $\mathcal{N}_T \cap \mathcal{N}_{\psi\circ T}$; de plus, l'application qui à $\Lambda_\psi(a)$ associe $\Lambda_{\psi\circ T}(xa)$ peut être prolongée en un élément $\Lambda_T(x)$ de $Hom_{N^o}(H_\psi, H_{\psi\circ T})$; de plus, Λ_T est un morphisme de $M - N$-bimodules de $\mathcal{N}_T$ dans $Hom_{N^o}(H_\psi, H_{\psi\circ T})$;

ii) l'idéal $\mathcal{N}_T \cap \mathcal{N}_{\psi\circ T}$ est faiblement dense dans M et l'espace $\Lambda_{\psi\circ T}(\mathcal{N}_T \cap \mathcal{N}_{\psi\circ T})$ est dense dans $H_{\psi\circ T}$; le sous espace $\Lambda_{\psi\circ T}(\mathcal{N}_T \cap \mathcal{N}_{\psi\circ T} \cap \mathcal{N}_T^* \cap \mathcal{N}_{\psi\circ T}^*)$ est un cœur pour $\Delta_{\psi\circ T}^{1/2}$; le sous espace $\Lambda_T(\mathcal{N}_T)$ est dense dans $Hom_{N^o}(H_\psi, H_{\psi\circ T})$ pour la s-topologie définie dans ([BDH88], 1.3) ;

iii) pour tous $x \in \mathcal{N}_T$ et $z \in \mathcal{N}_T \cap \mathcal{N}_{\psi\circ T}$, on a $T(x^*z) \in \mathcal{N}_\psi$ et $\Lambda_T(x)^* \Lambda_{\psi\circ T}(z) = \Lambda_\psi(T(x^*z))$;

iv) Pour tous $x, y \in \mathcal{N}_T$, on a $\Lambda_T(y)^* \Lambda_T(x) = \pi_\psi(T(x^*y))$ et $||\Lambda_T(x)|| = ||T(x^*x)||^{1/2}$. De plus, Λ_T est injective.

On rappelle aussi le lemme 10.12 de [EN96] :

2.2.4 PROPOSITION — *Soient $N \subseteq M$ une inclusion d'algèbres de von Neumann, T un poids opératoriel sur M à valeurs dans N normal semifini et fidèle, ψ un poids normal, semifini et fidèle sur N et $x \in \mathcal{M}_T \cap \mathcal{M}_{\psi\circ T}$. Alors les éléments x_n définis par :*

$$x_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} \sigma_t^{\psi\circ T}(x)\, dt$$

appartiennent à $\mathcal{M}_T \cap \mathcal{M}_{\psi\circ T}$, sont analytiques par rapport à $\psi \circ T$ et convergent fortement vers x en étant bornés en norme par $||x||$. De plus, $\Lambda_{\psi\circ T}(x_n)$ convergent vers $\Lambda_{\psi\circ T}(x_)$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sigma_z^{\psi\circ T}(x_n)$ appartiennent à $\mathcal{M}_T \cap \mathcal{M}_{\psi\circ T}$.

2.2.5 Définition — On introduit l'**algèbre involutive de Tomita** pour $\psi \circ T = \Phi$ et T définie et notée par :

$$\mathcal{T}_{\Phi,T} = \{x \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_\Phi^* \cap \mathcal{N}_T \cap \mathcal{N}_T^* |\, x \text{ analytique suivant } \sigma^\Phi \text{ et } \forall z \in \mathbb{C}\ \sigma_z^\Phi(x) \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_\Phi^* \cap \mathcal{N}_T \cap \mathcal{N}_T^*\}$$

D'après les rappels précédents, les résultats du lemme 2.1.2 sont vérifiés avec cette nouvelle algèbre de Tomita pour Φ et T.

2.3 La théorie spatiale [Co80], [Sau83b], [Tak03].

Soit α une représentation normale et non dégénérée de N sur un espace de Hilbert H. On peut considérer de cette manière H comme un N-module à gauche, on écrit alors ${}_\alpha H$.

2.3.1 Définition — [Co80] Un élément ξ de ${}_\alpha H$ est borné pour ψ s'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $y \in \mathcal{N}_\psi$, on a $||\alpha(y)\xi|| \leq C||\Lambda_\psi(y)||$. L'ensemble des **éléments bornés** pour ψ se note $D({}_\alpha H, \psi)$.

Si $\xi \in D({}_\alpha H, \psi)$, il existe un opérateur borné $R^{\alpha,\psi}(\xi) : H_\psi \to H$, défini, pour tout $y \in \mathcal{N}_\psi$, par la formule $R^{\alpha,\psi}(\xi)\Lambda_\psi(y) = \alpha(y)\xi$.

Cet opérateur appartient à $Hom_N(H_\psi, H)$, c'est pourquoi, pour tous $\xi, \eta \in D({}_\alpha H, \psi)$, on a $\theta^{\alpha,\psi}(\xi,\eta) = R^{\alpha,\psi}(\xi)R^{\alpha,\psi}(\eta)^* \in \alpha(N)'$.

De plus, d'après [Co80] (lemme 2), $D({}_\alpha H, \psi)$ est dense dans H, stable par $\alpha(N)'$, et l'espace vectoriel engendré par les opérateurs $\theta^{\alpha,\psi}(\xi,\eta)$ est un idéal dense (faiblement) dans $\alpha(N)'$.

Avec les mêmes hypothèses, on a $< \xi, \eta >_{\alpha,\psi} = R^{\alpha,\psi}(\eta)^* R^{\alpha,\psi}(\xi)^* \in \pi_\psi(N)'$.

D'après la théorie de Tomita-Takesaki, cette dernière algèbre est égale à $J_\psi \pi_\psi(N) J_\psi$ et donc est anti-isomorphe à N (i.e isomorphe à l'algèbre de von Neumann opposée N^o). On considère $< \xi, \eta >_{\alpha,\psi}$ comme un élément de N^o et alors l'espace vectoriel engendré par ces opérateurs est faiblement dense dans N^o.

Il existe une famille $(\eta_i)_{i\in I}$ d'éléments de $D({}_\alpha H, \psi)$ telle que $\sum_{i\in I} \theta^{\alpha,\psi}(\eta_i,\eta_i) = 1$ d'après [Co80] (proposition 3). Une telle famille est appelée une (N,ψ)-**base** de ${}_\alpha H$. D'après [EN96] (proposition 2.2), il est possible de construire une (N,ψ)-base de ${}_\alpha H$ telle que les opérateurs $R^{\alpha,\psi}(\xi_i)$ soient des isométries partielles de support final $\theta^{\alpha,\psi}(\eta_i,\eta_i)$ deux à deux orthogonaux et telle que, si $i \neq j$, alors $< \eta_i, \eta_j >_{\alpha,\psi} = 0$. Par la suite, toutes les (N,ψ)-bases de ${}_\alpha H$ considérées seront ainsi.

Supposons maintenant qu'il existe une antireprésentation β de N sur H normale et non dégénérée. On peut considérer de cette manière H comme un N-module à droite, on écrit alors H_β. On peut aussi considérer β comme une représentation de N^o normale et non dégénérée et voir H comme un N^o-module à gauche. On peut définir sur N^o un poids ψ^o normal, semifini, fidèle ; on a alors $\mathcal{N}_{\psi^o} = \mathcal{N}_\psi^*$ et l'application de H_{ψ^o} dans H_ψ définie, pour tout $x \in \mathcal{N}_\psi$, par la formule $(\Lambda_{\psi^o}(x^*) \mapsto J_\psi \Lambda_\psi(x))$ permet d'identifier les espaces de Hilbert H_{ψ^o} et H_ψ.

Grâce à ces remarques, l'ensemble $D(H_\beta, \psi^o)$ des éléments de H_β bornés pour ψ^o est donné par $\{\xi \in H \,|\exists C < \infty, ||\beta(y^*)\xi|| \leq C||\Lambda_\psi(y)||, \forall y \in \mathcal{N}_\psi\}$ et, pour tous $\xi \in D(H_\beta, \psi^o)$ et $y \in \mathcal{N}_\psi$, l'opérateur borné $R^{\beta,\psi^o}(\xi)$ est donné par la formule $R^{\beta,\psi^o}(\xi)J_\psi\Lambda_\psi(y) = \beta(y^*)\xi$.

Cet opérateur appartient à $Hom_{N^o}(H_\psi, H)$. De plus, $D(H_\beta, \psi^o)$ est dense dans H, stable par $\beta(N)'$. Pour tous $\xi, \eta \in D(H_\beta, \psi^o)$, l'opérateur $\theta^{\beta,\psi^o}(\xi,\eta) = R^{\beta,\psi^o}(\xi)R^{\beta,\psi^o}(\eta)^* \in \beta(N)'$ et l'espace vectoriel engendré par ces opérateurs est un idéal dense dans $\beta(N)'$; aussi le produit scalaire à valeurs opératoriels $< \xi, \eta >_{\beta,\psi^o}$ appartient à $\pi_\psi(N)$ qu'on identifie à N et l'espace vectoriel engendré par ces opérateurs est un idéal dense dans N. En fait, d'après [Co80] (lemme

4), on sait que $< \xi, \eta >_{\beta,\psi^o} \in \mathcal{M}_\psi$ et d'après [Sau83b] (lemme 1.5), on a $\Lambda_\psi(< \xi, \eta >_{\beta,\psi^o}) = R^{\beta,\psi^o}(\eta)^*\xi$. Une (N^o, ψ^o)-base de H_β est une famille $(\xi_i)_{i\in I}$ d'éléments de H_β bornés pour ψ^o telle que :

$$\sum_{i\in I} \theta^{\beta,\psi^o}(\xi_i, \xi_i) = 1. \tag{2.3.1}$$

On a alors, pour tout $\xi \in D(H_\beta, \psi^o)$, $\xi = \sum_{i\in I} R^{\beta,\psi^o}(\xi_i)\Lambda_\psi(< \xi, \xi_i >_{\beta,\psi^o})$. Il est possible de choisir les ξ_i de telle sorte que les $R^{\beta,\psi^o}(\xi_i)$ deviennent des isométries partielles de support final $\theta^{\beta,\psi^o}(\xi_i, \xi_i)$, deux à deux orthogonaux et que $< \xi_i, \xi_j >_{\beta,\psi^o} = 0$ si $i \neq j$. Les (N^o, ψ^o)-bases de H_β seront toujours choisies ainsi. Dans ces conditions, on a alors :

$$R^{\beta,\psi^o}(\xi_i) = \theta^{\beta,\psi^o}(\xi_i, \xi_i)R^{\beta,\psi^o}(\xi_i) = R^{\beta,\psi^o}(\xi_i) < \xi_i, \xi_i >_{\beta,\psi^o}$$

2.3.2 Proposition — *([Eno02], proposition 2.10) Soient $N \subseteq M$ une inclusion d'algèbres de von Neumann, et T un poids opératoriel normal, semifini et fidèle de M vers N. Alors il existe une famille $(e_i)_{i\in I}$ dans $\mathcal{N}_T \cap \mathcal{N}_T^* \cap \mathcal{N}_{\psi\circ T} \cap \mathcal{N}_{\psi\circ T}^*$ telle que $\Lambda_T(e_i)$ sont des isométries partielles vérifiant $T(e_j^* e_i) = 0$ si $i \neq j$ et de support final $\Lambda_T(e_i)\Lambda_T(e_i)^*$ des projections deux à deux orthogonales de somme égale à 1. De plus, on a, pour tout $i \in I$, $e_i = e_i T(e_i^* e_i)$, et, pour tout $x \in \mathcal{N}_T$:*

$$\Lambda_T(x) = \sum_{i\in I} \Lambda_T(e_i)T(e_i^* x) \quad \textit{et} \quad x = \sum_{i\in I} e_i T(e_i^* x)$$

ces deux sommes étant faiblement convergentes. Une telle famille sera appelée une base pour (T, ψ^o). Enfin, la famille $(\Lambda_{\psi\circ T}(e_i))_{i\in I}$ est une (N^o, ψ^o)-base de $(H_{\psi\circ T})_s$ où s désigne l'antireprésentation qui à $y \in N$ associe $J_{\psi\circ T} y^* J_{\psi\circ T}$.

2.4 Le produit tensoriel relatif [Co80], [Sau83b], [Tak03].

En utilisant les notations du paragraphe précédent, on appelle K un autre espace de Hilbert sur lequel il existe une représentation γ normale et non dégénérée de N. En suivant [Sau83b], on peut considérer le complété séparé du produit tensoriel $D(H_\beta, \psi^o) \odot K$ muni du pré-produit scalaire donné, pour tous $\xi_1, \xi_2 \in D(H_\beta, \psi^o)$ et $\eta_1, \eta_2 \in K$, par :

$$(\xi_1 \odot \eta_1 | \xi_2 \odot \eta_2) = (\gamma(< \xi_1, \xi_2 >_{\beta,\psi^o})\eta_1 | \eta_2)$$

où on a identifié N et $\pi_\psi(N)$.

2.4.1 Définition — On appelle **produit tensoriel relatif** de H par K au-dessus de (N, ψ) l'espace de Hilbert obtenu dans la construction précédente, et on le note $H \;{}_\beta\!\underset{\psi}{\otimes}_\gamma\; K$.

L'image de $\xi \odot \eta$ dans $H \;{}_\beta\!\underset{\psi}{\otimes}_\gamma\; K$ est notée $\xi \;{}_\beta\!\underset{\psi}{\otimes}_\gamma\; \eta$. Il faut garder à l'esprit que, si on part d'un autre poids ψ' normal, semifini et fidèle, on obtient un autre espace de Hilbert, qui est isomorphe canoniquement avec le premier ([Sau83b], proposition 2.6). Cependant cet isomorphisme n'envoie pas $\xi \;{}_\beta\!\underset{\psi}{\otimes}_\gamma\; \eta$ sur $\xi \;{}_\beta\!\underset{\psi'}{\otimes}_\gamma\; \eta$.

Pour tout $\xi \in D(H_\beta, \psi^o)$, on définit l'application linéaire bornée :

$$\lambda_\xi^{\beta,\gamma} : K \to H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K$$
$$\eta \mapsto \xi \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \eta$$

On a la relation $(\lambda_\xi^{\beta,\gamma})^* \lambda_\xi^{\beta,\gamma} = \gamma(< \xi, \xi >_{\beta,\psi^o})$. D'après [Sau83b] (définition 2.1), le produit tensoriel relatif est aussi défini, si $\xi_1, \xi_2 \in H$ et $\eta_1, \eta_2 \in D({}_\gamma K, \psi)$, par la formule suivante :

$$(\xi_1 \odot \eta_1 | \xi_2 \odot \eta_2) = (\beta(< \eta_1, \eta_2 >_{\gamma,\psi})\xi_1 | \xi_2)$$

Cette remarque permet de définir la volte :

$$\sigma_\psi : H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K \to K \underset{\psi^o}{{}_\gamma\otimes_\beta} H$$
$$\xi \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \eta \mapsto \eta \underset{\psi^o}{{}_\gamma\otimes_\beta} \xi$$

pour tout $\xi \in D(H_\beta, \psi)$ (resp. $\xi \in H$) et tout $\eta \in K$ (resp. $\eta \in D({}_\gamma K, \psi)$).

On définit, à partir de là, une volte au niveau opératoriel :

$$\varsigma_\psi : \mathcal{L}(H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K) \to \mathcal{L}(K \underset{\psi^o}{{}_\gamma\otimes_\beta} H)$$
$$X \mapsto \sigma_\psi X \sigma_\psi^*.$$

Si on part d'un autre poids ψ' normal, semifini et fidèle, on obtient des algèbres de von Neumann $\mathcal{L}(H \underset{\psi'}{{}_\beta\otimes_\gamma} K)$, (resp. $\mathcal{L}(K \underset{\psi'^o}{{}_\gamma\otimes_\beta} H)$), isomorphes de manière canonique aux algèbres de von Neumann $\mathcal{L}(H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K)$, (resp. $\mathcal{L}(K \underset{\psi^o}{{}_\gamma\otimes_\beta} H)$). Ces isomorphismes échangent ς_ψ et $\varsigma_{\psi'}$, c'est pourquoi l'homomorphisme ς_ψ peut être noté ς_N sans référence au poids sur N.

Pour tout $\eta \in D({}_\gamma K, \psi)$, on définit l'application linéaire bornée :

$$\rho_\eta^{\beta,\gamma} : H \to H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K$$
$$\xi \mapsto \xi \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \eta.$$

On a la relation $(\rho_\eta^{\beta,\gamma})^* \rho_\eta^{\beta,\gamma} = \beta(< \eta, \eta >_{\gamma,\psi})$. D'après [Sau83b] (remarque 2.2), on sait que, si $\xi \in H$, $\eta \in D({}_\gamma K, \psi)$ et $y \in \mathcal{D}(\sigma_{-i/2}^\psi)$, alors d'une part $\gamma(\sigma_{-i/2}^\psi(y))$ laisse stable $D({}_\gamma K, \psi)$ et d'autre part, on a :

$$\beta(y)\xi \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \eta = \xi \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \gamma(\sigma_{-i/2}^\psi(y))\eta. \tag{2.4.1}$$

On démontre ici une proposition utile concernant les produits tensoriels relatifs.

2.4.2 Lemme — *Soit $\eta \in K$. On suppose que, pour tous $\xi' \in D(H_\beta, \psi^o)$, on a $\xi' \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \eta = 0$. Alors $\eta = 0$.*

Démonstration : Pour tous $\xi, \xi' \in D(H_\beta, \psi^o)$, on a :

$$\gamma(< \xi', \xi >_{\beta,\psi^o})\eta = (\lambda_\xi^{\beta,\gamma})^* \lambda_{\xi'}^{\beta,\gamma} \eta = (\lambda_\xi^{\beta,\gamma})^* (\xi' \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \eta) = 0$$

Un argument de densité et de non dégénérescence permet de conclure que $\eta = 0$. ∎

2.4.3 PROPOSITION — *On suppose ici $H \neq \{0\}$. Soit K' un sous espace vectoriel fermé de K tel que $\gamma(N)K' \subseteq K'$. Alors :*

$$H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K = H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K' \quad \Rightarrow \quad K = K'$$

DÉMONSTRATION : Soit $\eta \in K'^{\perp}$. Pour tous $\xi, \xi' \in D(H_\beta, \psi^o)$ et tout $k \in K'$, on a $(\xi \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} k | \xi' \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \eta) = (\gamma(<\xi, \xi'>_{\beta,\nu^o})k|\eta) = 0$. On en déduit que, pour tout $\xi' \in D(H_\beta, \psi^o)$, on a $\xi' \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \eta \in (H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K')^\perp = (H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K)^\perp = \{0\}$. D'après le lemme précédent, on a $\eta = 0$ et, par suite, $K = K'$.

■

Soient $x \in \beta(N)' \subseteq \mathcal{L}(H)$ et $y \in \gamma(N)' \subseteq \mathcal{L}(K)$. D'après [Sau83a], 2.3 et 2.6, il est possible de définir naturellement un opérateur $x \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} y$ sur $H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K$. Si on part d'un autre poids ψ' normal, semifini et fidèle, l'isomorphisme canonique entre $H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K$ et $H \underset{\psi'}{{}_\beta\otimes_\gamma} K$ envoie $x \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} y$ sur $x \underset{\psi'}{{}_\beta\otimes_\gamma} y$, c'est pourquoi on note cet opérateur $x \underset{N}{{}_\beta\otimes_\gamma} y$ sans référence au poids ψ.

Supposons qu'il existe, en plus, une algèbre de von Neumann P et une antireprésentation ϵ normale et non dégénérée de P sur K telle que $\epsilon(P)' \subseteq \gamma(N)$. K est alors muni d'une structure de $N-P$-bimodule, qu'on note ${}_\gamma K_\epsilon$. Si $y \in P$, alors, d'après ce qui précède, on peut définir l'opérateur $1_H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \epsilon(y)$ sur $H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K$ et, de cette manière, on définit une antireprésentation normale et non dégénérée de P sur $H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K$, notée encore ϵ. Si H est un $Q-N$-bimodule, alors $H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K$ devient un $Q-P$-bimodule (fusion des bimodules de Connes).

Soient ν un poids normal, semifini et fidèle sur P et ${}_\zeta L$ un P-module à gauche. Il est possible de définir les espaces de Hilbert $(H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K) \underset{\nu}{{}_\epsilon\otimes_\zeta} L$ et $H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} (K \underset{\nu}{{}_\epsilon\otimes_\zeta} L)$. On montre que ces deux $\beta(N)' - \zeta(P)'^o$-bimodules sont isomorphes. (La preuve donnée dans [Val96], lemme 2.1.3, pour le cas $N = P$ abélien est valide avec ces hypothèses plus générales). On parle d'associativité du produit tensoriel relatif et on note alors $H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K \underset{\nu}{{}_\epsilon\otimes_\zeta} L$.

Si on rappelle l'identification canonique de $H_\psi \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K$ et K, en tant que N-modules à gauche, donnée par $(\Lambda_\psi(y) \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \eta \mapsto \gamma(y)\eta)$ pour tout $y \in \mathcal{N}_\psi$, alors, d'après [EN96], 3.10, on a $\lambda_\xi^{\beta,\gamma} = R^{\beta,\psi^o}(\xi) \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} 1_K$ et par conséquent :

$$\lambda_\xi^{\beta,\gamma}(\lambda_\xi^{\beta,\gamma})^* = \theta^{\beta,\nu^o}(\xi,\xi) \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} 1_K. \tag{2.4.2}$$

On rappelle ici la proposition 2.3 de [Eno02] :

2.4.4 PROPOSITION — *Soit $(\xi_i)_{i\in I}$ une (N^o, ψ^o)-base de H_β. Alors :*

i) pour tout $\xi \in D(H_\beta, \psi^o)$ et tout $\eta \in K$, on a :

$$\xi \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \eta = \sum_{i\in I} \xi_i \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \gamma(<\xi, \xi_i>_{\beta,\psi^o})\eta\,;$$

ii) on a la décomposition suivante :

$$H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K = \bigoplus_{i \in I} (\xi_i \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \gamma(<\xi_i, \xi_i>_{\beta,\psi^o})K)$$

Le présent alinéa détaille le cas de la dimension finie. Si H et K sont de dimension finie, $H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K$ s'identifie avec un sous-espace de $H \otimes K$. D'après [EV00], 2.4, la projection orthogonale sur $H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K$ appartient alors à $\beta(N) \otimes \gamma(N)$. On suppose, de plus, que N est de dimension finie. On note Tr la trace canonique sur K qui vaut 1 sur les projecteurs minimaux et $\tau = \mathrm{Tr} \circ \gamma$. D'après [EV00], 2.4, il existe une projection $e_{\beta,\gamma}$ appartenant à $\beta(N) \otimes \gamma(N)$ telle qu'il existe $n_o \in Z(N)^+$ et $(id \otimes \mathrm{Tr})(e_{\beta,\gamma}) = \beta(n_o)$. Soit d désigne la dérivée de Radon-Nikodym de ψ par rapport à la trace τ. D'après [EV00], 2.4, et la proposition 2.7 de [Sau83b], pour tous $\xi, \eta \in H$:

$$I^\psi_{\beta,\gamma} : \xi \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \eta \mapsto \xi \underset{\tau}{{}_\beta\otimes_\gamma} \gamma(d)^{1/2}\eta \mapsto e_{\beta,\gamma}(\beta(n_o)^{-1/2}\xi \otimes \gamma(d)^{1/2}\eta)$$

définit une application qui est un isomorphisme isométrique de $\beta(N)' - \gamma(N)'^o$-bimodules entre $H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K$ et un sous-espace de $H \otimes K$, de support final $e_{\beta,\gamma}$.

2.5 Le produit fibré [Val96], [EV00].

On utilise les notations précédentes. Soient M_1 une algèbre de von Neumann sur H telle que $\beta(N) \subseteq M_1$ et M_2 une algèbre de von Neumann sur K telle que $\gamma(N) \subseteq M_2$. On note $M_1' \underset{N}{{}_\beta\otimes_\gamma} M_2'$ l'algèbre de von Neumann engendrée par les éléments $x \underset{N}{{}_\beta\otimes_\gamma} y$ avec $x \in M_1'$ et $y \in M_2'$.

2.5.1 Définition — On appelle **produit fibré** de M_1 par M_2 au-dessus de N le commutant de l'algèbre $M_1' \underset{N}{{}_\beta\otimes_\gamma} M_2'$ dans $\mathcal{L}(H \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} K)$. L'algèbre de von Neumann ainsi obtenue est noté $M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} M_2$.

Il est facile de vérifier que, si P_1 et P_2 sont des algèbres de von Neumann vérifiant les mêmes relations avec N, on a :

$$\begin{aligned}
&i) \quad (M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} M_2) \cap (P_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} P_2) = (M_1 \cap P_1) \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} (M_2 \cap P_2)\,; \\
&ii) \quad \varsigma_N(M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} M_2) = M_2 \underset{N^o}{{}_\gamma\star_\beta} M_1\,; \\
&iii) \quad (M_1 \cap \beta(N)') \underset{N}{{}_\beta\otimes_\gamma} (M_2 \cap \gamma(N)') \subseteq M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} M_2\,; \\
&iv) \quad M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} \gamma(N) = (M_1 \cap \beta(N)') \underset{N}{{}_\beta\otimes_\gamma} 1.
\end{aligned}$$

Plus généralement, si β est un antihomomorphisme de N dans une algèbre de von Neumann M_1 normal, non dégénéré et involutif et si γ est un homomorphisme de N dans une algèbre de von Neumann M_2 normal, non dégénéré et involutif, il est possible de définir une algèbre de von Neumann $M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} M_2$ sans référence à un espace de Hilbert spécifique.

De plus, si β' est un anti-homomorphisme de N dans une algèbre de von Neumann P_1 normal, non dégénéré, involutif et si γ' est un homomorphisme de N dans une algèbre de von Neumann

P_2 normal, non dégénéré et involutif, si Φ est un homomorphisme normal et involutif de M_1 dans P_1 tel que $\Phi \circ \beta = \beta'$ et si Ψ est un homomorphisme normal et involutif de M_2 dans P_2 tel que $\Psi \circ \gamma = \gamma'$, il est possible de définir, d'après [Sau83a], 1.2.4, un homomorphisme normal et involutif $\Phi \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} \Psi : M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} M_2 \to P_1 \underset{N}{{}_{\beta'}\star_{\gamma'}} P_2$.

Dans le cas où ${}_\gamma K_\epsilon$ est un $N - P^o$-bimodule, ${}_\zeta L$ est un P-module, si $\gamma(N) \subseteq M_2$, $\epsilon(P) \subseteq M_2$ et si $\zeta(P) \subseteq M_3$ avec M_3 une algèbre de von Neumann sur L, on construit $M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} (M_2 \underset{N}{{}_\epsilon\star_\zeta} M_3)$ et $(M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} M_2) \underset{N}{{}_\epsilon\star_\zeta} M_3$. L'associativité du produit tensoriel relatif induit un isomorphisme entre ces produits fibrés et on note ainsi $M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} M_2 \underset{N}{{}_\epsilon\star_\zeta} M_3$ sans parenthèses.

Si M_1 et M_2 sont de dimension finie, alors on a $M_1' \underset{N}{{}_\beta\otimes_\gamma} M_2' = (I^\psi_{\beta,\gamma})^*(M_1' \otimes M_2')I^\psi_{\beta,\gamma}$ et $M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} M_2 = (I^\psi_{\beta,\gamma})^*(M_1 \otimes M_2)I^\psi_{\beta,\gamma}$ qui s'identifie à l'algèbre réduite de $M_1 \otimes M_2$ par $e_{\beta,\gamma}$ d'après [EV00], 2.4.

2.6 Les tranches [Eno00].

Dans ce paragraphe, on définit les applications tranches pour les produits fibrés en généralisant ce qui est bien connu pour les produits tensoriels usuels.

2.6.a Pour les formes normales

Soient $A \in M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} M_2$ et $\xi_1, \xi_2 \in D(H_\beta, \psi^o)$. On définit un élément de M_2 par :

$$(\omega_{\xi_1,\xi_2} \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} id)(A) = (\lambda^{\beta,\gamma}_{\xi_2})^* A \lambda^{\beta,\gamma}_{\xi_1}$$

de sorte qu'on a $((\omega_{\xi_1,\xi_2} \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} id)(A)\eta_1|\eta_2) = (A(\xi_1 \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \eta_1)|\xi_2 \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \eta_2)$ pour tous $\eta_1, \eta_2 \in K$. De même, on définit un opérateur de M_1 par :

$$(id \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} \omega_{\eta_1,\eta_2})(A) = (\rho^{\beta,\gamma}_{\eta_2})^* A \rho^{\beta,\gamma}_{\eta_1}$$

pour tous $\eta_1, \eta_2 \in D({}_\gamma K, \psi)$. On dispose d'une formule de Fubini i.e, pour tous $\xi_1, \xi_2 \in D(H_\beta, \psi^o)$ et $\eta_1, \eta_2 \in D({}_\gamma K, \psi)$, on a :

$$\omega_{\eta_1,\eta_2}((\omega_{\xi_1,\xi_2} \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} id)(A)) = \omega_{\xi_1,\xi_2}((id \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} \omega_{\eta_1,\eta_2})(A))$$

De manière équivalente ([Eno00], proposition 3.3), pour tous $\omega_1 \in M_{1*}^+$ et $k_1 \in \mathbb{R}^+$ tels que $\omega_1 \circ \beta \leq k_1\psi$ et pour tous $\omega_2 \in M_{2*}^+$ et $k_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que $\omega_2 \circ \gamma \leq k_2\psi$, on a :

$$\omega_2((\omega_1 \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} id)(A)) = \omega_1((id \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} \omega_2)(A))$$

2.6.b Pour les espérances conditionnelles

Si P_2 est une algèbre de von Neumann telle que $\gamma(N) \subseteq P_2 \subseteq M_2$ et si E est une espérance conditionnelle de M_2 sur P_2 normale et fidèle, on peut définir une espérance conditionnelle normale et fidèle $(id \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} E)$ de $M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} M_2$ vers $M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} P_2$ telle que, pour tout $A \in M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} M_2$ et tous $\omega \in M_{1*}^+$ et $k_1 \in \mathbb{R}^+$ tels que $\omega \circ \beta \leq k_1\psi$, on a :

$$(\omega \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} id)(id \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} E)(A) = E((\omega \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} id)(A))$$

2.6.c Pour les poids

Si ϕ_1 est un poids opératoriel normal et semifini sur M_1^+ et si A est un élément positif dans $M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} M_2$, on peut définir un élément de la partie étendue positive de M_2, noté $(\phi_1 \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} id)(A)$, tel que, pour tout $\eta \in D({}_\gamma L^2(M_2), \psi)$, on a $||((\phi_1 \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} id)(A))^{1/2}\eta||^2 = \phi_1((id \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} \omega_\eta)(A))$. De plus, si ϕ_2 est un poids normal et semifini sur M_2^+, on a :

$$\phi_2((\phi_1 \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} id)(A)) = \phi_1((id \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} \phi_2)(A))$$

Si $(\omega_i)_{i\in I}$ est une famille croissante de formes normales telles que $\phi_1 = sup_{i\in I}\omega_i$, alors on a $(\phi_1 \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} id)(A) = sup_i(\omega_i \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} id)(A)$.

2.6.d Pour les poids opératoriels

Soit P_1 une algèbre de von Neumann telle que $\beta(N) \subseteq P_1 \subseteq M_1$ et soient Φ_i $(i = 1, 2)$ des poids opératoriels normaux, semifinis, fidèles de M_i^+ vers $\overline{P_i}^+$ (suivant les notations de [Str81]). Pour tout opérateur positif $A \in M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} M_2$, il existe, d'après [Eno00], un élément $(\Phi_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} id)(A)$ de la partie étendue positive de $P_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} M_2$ tel que, pour tout $\xi \in L^2(P_1)$ et $\eta \in D({}_\gamma K, \psi)$, on a :

$$||((\Phi_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} id)(A))^{1/2}(\xi \underset{\psi}{{}_\beta\otimes_\gamma} \eta)||^2 = ||[\Phi_1((id \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} \omega_{\eta,\eta})(A))]^{1/2}\xi||^2$$

Si ϕ_1 est un poids normal et semifini sur P_1, on a :

$$(\phi_1 \circ \Phi_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} id)(A) = (\phi_1 \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} id)(\Phi_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} id)(A)$$

On définit, de même, un élément $(id \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} \Phi_2)(A)$ de la partie étendue positive de $M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} P_2$ et on a :

$$(id \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} \Phi_2)((\Phi_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} id)(A)) = (\Phi_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} id)((id \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} \Phi_2)(A))$$

Remarque — On a vu qu'on pouvait identifier $M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} \gamma(N)$ et $M_1 \cap \beta(N)'$. Il est facile de vérifier, avec cette identification, que la tranche $id \underset{\psi}{{}_\beta\star_\gamma} \psi \circ \gamma^{-1}$ (on suppose ici γ injective) est l'injection de $M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} \gamma(N)$ dans M_1. On peut voir sur cet exemple que, si ϕ_1 est un poids normal, semifini et fidèle sur M_1, alors $\phi_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\gamma} id$ (qui est égal à $\phi_{1|M_1\cap\beta(N)'}$) n'est pas semifini en général.

Chapitre 3

UNITAIRE PSEUDO-MULTIPLICATIF FONDAMENTAL

Dans toute la suite, on désigne par N et M des algèbres de von Neumann, α (resp. β) une représentation (resp. antireprésentation) normale, non dégénérée et fidèle de N dans M. On suppose que $\alpha(N) \subseteq \beta(N)'$.

Dans ce chapitre, on rappelle les définitions de bimodule de Hopf et des poids opératoriels invariants. Dans le cas d'un bimodule de Hopf, s'il existe un poids opératoriel invariant à gauche et un poids opératoriel invariant à droite, on construit un unitaire pseudo-multiplicatif fondamental.

3.1 Définitions.

3.1.1 Définition — On appelle **bimodule de Hopf** de base N, tout quintuplet $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ où Γ désigne un homomorphisme involutif, injectif et normal de M dans $M \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} M$ tel que, pour tout $x \in N$, on a :

i) $\Gamma(\beta(x)) = 1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \beta(x)$;

ii) $\Gamma(\alpha(x)) = \alpha(x) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1$;

iii) Γ satisfait la relation $(\Gamma \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id) \circ \Gamma = (id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma) \circ \Gamma$.

Remarque — Le fait que Γ est un morphisme de bimodule permet de définir les opérateurs $(\Gamma \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id) \circ \Gamma$ et $(id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma) \circ \Gamma$.

Le quintuplet $(N^o, M, \beta, \alpha, \varsigma_N \circ \Gamma)$ est un bimodule de Hopf appelé le symétrisé. On remarque que, si N est abélien, $\alpha = \beta$ et $\Gamma = \varsigma_N \circ \Gamma$, alors le quintuplet $(N, M, \alpha, \alpha, \Gamma)$ est égal à son symétrisé : on dit alors qu'il s'agit d'un bimodule de Hopf symétrique.

3.1.2 Définition — Soit $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ un bimodule de Hopf. On dit qu'un poids opératoriel

T_L normal, semifini et fidèle de M^+ dans $\overline{\alpha(N)}^+$ est **invariant à gauche** si :

$$(id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} T_L)\Gamma(x) = T_L(x) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1 \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{M}_{T_L}^+$$

De même, on dit qu'un poids opératoriel T_R normal, semifini et fidèle de M^+ dans $\overline{\beta(N)}^+$ est **invariant à droite** si :

$$(T_R \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma(x) = 1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} T_R(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{M}_{T_R}^+$$

On renvoie au dernier chapitre pour la présentation d'exemples. Dans cette partie, on se donne un bimodule de Hopf $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ muni de deux poids opératoriels T_L (resp. T_R) normaux, semifinis et fidèles de M^+ dans $\overline{\alpha(N)}^+$ (resp. $\overline{\beta(N)}^+$) invariants à gauche (resp. droite).

3.1.3 DÉFINITION — On appelle **coinvolution** de M tout *-anti-automorphisme R de M tel que $R \circ \alpha = \beta$, $R^2 = id$ et $\varsigma_{N^o} \circ (R \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} R) \circ \Gamma = \Gamma \circ R$.

REMARQUE — Si T_L est un poids opératoriel normal, semifini et fidèle de M^+ vers $\overline{\alpha(N)}^+$ invariant à gauche et si R est une coinvolution de M, alors $R \circ T_L \circ R$ est un poids opératoriel normal, semifini et fidèle de M^+ vers $\overline{\beta(N)}^+$ invariant à droite. Ce point est très utile pour l'étude des exemples. On note aussi que, R est un anti-isomorphisme de bimodule de Hopf entre le bimodule et son symétrisé.

Soit μ un poids normal, fidèle, semifini sur N. On note :

$$\Phi = \mu \circ \alpha^{-1} \circ T_L \text{ et } \Psi = \mu \circ \beta^{-1} \circ T_R$$

On observe que, dans ces conditions, on a, pour tout $x \in M^+$:

$$(id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \Phi)\Gamma(x) = T_L(x) \text{ et } (\Psi \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma(x) = T_R(x)$$

Si H désigne un espace de Hilbert sur lequel M agit, alors N agit aussi sur H par α et β. On note encore α (resp. β) la (resp. anti-) représentation de N sur H.

3.2 Construction de l'isométrie fondamentale.

3.2.1 DÉFINITION — On définit les applications $\hat{\beta}$ et $\hat{\alpha}$ par :

$$\begin{array}{rclcrcl} \hat{\beta} : N & \to & \mathcal{L}(H_\Phi) & \qquad \text{et} \qquad & \hat{\alpha} : N & \to & \mathcal{L}(H_\Psi) \\ x & \mapsto & J_\Phi \alpha(x^*) J_\Phi & & x & \mapsto & J_\Psi \beta(x^*) J_\Psi \end{array}$$

Alors $\hat{\beta}$ (resp. $\hat{\alpha}$) est une antireprésentation (resp. représentation) normale, non dégénérée et fidèle de N dans $\mathcal{L}(H_\Phi)$ (resp. $\mathcal{L}(H_\Psi)$).

3.2.2 PROPOSITION — *On a $\Lambda_\Phi(\mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi) \subseteq D((H_\Phi)_{\hat{\beta}}, \mu^o)$ et alors, pour tout $a \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi$, on a $R^{\hat{\beta},\mu^o}(\Lambda_\Phi(a)) = \Lambda_{T_L}(a)$.*

De même, on a $\Lambda_\Psi(\mathcal{N}_{T_R} \cap \mathcal{N}_\Psi) \subseteq D({}_{\hat{\alpha}}(H_\Psi), \mu)$ *et alors, pour tout* $b \in \mathcal{N}_{T_R} \cap \mathcal{N}_\Psi$*, on a* $R^{\hat{\alpha},\mu}(\Lambda_\Psi(b)) = \Lambda_{T_R}(b)$.

Remarque — On identifie, d'une part, H_μ et $H_{\mu\circ\alpha^{-1}}$ et, d'autre part, H_μ et $H_{\mu\circ\beta^{-1}}$.

Démonstration : Soit $y \in \mathcal{N}_\mu$ analytique pour μ, on a :

$$\hat{\beta}(y^*)\Lambda_\Phi(a) = \Lambda_\Phi(a\sigma^\Phi_{-i/2}(\alpha(y^*))) = \Lambda_\Phi(a\sigma^{\mu\circ\alpha^{-1}}_{-i/2}(\alpha(y^*)))$$

$$= \Lambda_\Phi(a\alpha(\sigma^\mu_{-i/2}(y^*))) = \Lambda_{T_L}(a)\Lambda_\mu(\sigma^\mu_{-i/2}(y^*)) = \Lambda_{T_L}(a)J_\mu\Lambda_\mu(y)$$

Le lemme 2.1.2 permet d'obtenir $\hat{\beta}(y^*)\Lambda_\Phi(a) = \Lambda_{T_L}(a)J_\mu\Lambda_\mu(y)$ pour tout $y \in \mathcal{N}_\mu$. La première partie de la proposition est alors démontrée. La démonstration de la seconde partie de la proposition est analogue. ■

3.2.3 Proposition — *On a* $J_\Phi D((H_\Phi)_{\hat{\beta}}, \mu^o) = D({}_\alpha(H_\Phi), \mu)$ *et, pour tout* $\eta \in D((H_\Phi)_{\hat{\beta}}, \mu^o)$*, on a* $R^{\alpha,\mu}(J_\Phi\eta) = J_\Phi R^{\hat{\beta},\mu^o}(\eta)J_\mu$.

On a aussi $J_\Psi D({}_{\hat{\alpha}}(H_\Psi), \mu) = D((H_\Phi)_\beta, \mu^o)$ *et on a* $R^{\beta,\mu^o}(J_\Psi\xi) = J_\Psi R^{\hat{\alpha},\mu}(\xi)J_\mu$ *pour tout* $\xi \in D((H_\Phi)_\beta, \mu^o)$.

Démonstration : Aisée. ■

3.2.4 Corollaire — *On a, d'une part,* $\Lambda_\Phi(\mathcal{T}_{\Phi,T_L}) \subseteq D((H_\Phi)_{\hat{\beta}}, \mu^o) \cap D({}_\alpha(H_\Phi), \mu)$ *et, d'autre part,* $\Lambda_\Psi(\mathcal{T}_{\Psi,T_R}) \subseteq D({}_{\hat{\alpha}}(H_\Psi), \mu) \cap D((H_\Psi)_\beta, \mu^o)$.

Démonstration : Conséquences faciles des deux propositions précédentes. ■

Remarque — Les propositions précédentes ne font pas intervenir l'invariance à gauche ou à droite des poids opératoriels.

3.2.5 Proposition — *On a* $(\omega_{v,\xi} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)) \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi$ *pour tout* $a \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi$ *et tous* $v, \xi \in D(H_\beta, \mu^o)$.

Démonstration : Dans les conditions de l'énoncé, on calcule :

$$\begin{aligned}
(\omega_{v,\xi} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))^*(\omega_{v,\xi} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)) &= (\lambda^{\beta,\alpha}_v)^*\Gamma(a^*)\lambda^{\beta,\alpha}_\xi(\lambda^{\beta,\alpha}_\xi)^*\Gamma(a)\lambda^{\beta,\alpha}_v \\
&\leq \|\lambda^{\beta,\alpha}_\xi(\lambda^{\beta,\alpha}_\xi)^*\|(\omega_{v,v} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a^*a)) \\
&= \|(\lambda^{\beta,\alpha}_\xi)^*\lambda^{\beta,\alpha}_\xi\|(\omega_{v,v} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a^*a)) \\
&\leq \|R^{\beta,\mu^o}(\xi)\|^2(\omega_{v,v} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a^*a))
\end{aligned}$$

Alors, d'une part, on obtient :

$$\begin{aligned}
T_L((\omega_{v,\xi} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))^*(\omega_{v,\xi} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))) &\leq \|R^{\beta,\mu^o}(\xi)\|^2 T_L((\omega_{v,v} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a^*a))) \\
&= \|R^{\beta,\mu^o}(\xi)\|^2(\omega_{v,v} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} T_L)(\Gamma(a^*a)) \\
&\leq \|R^{\beta,\mu^o}(\xi)\|^2(\lambda_v^{\beta,\alpha})^*(T_L(a^*a) \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)\lambda_v^{\beta,\alpha} \\
&\qquad \text{d'après l'invariance à gauche de } T_L, \\
&\leq \|R^{\beta,\mu^o}(\xi)\|^2||T_L(a^*a)||\|\alpha(< v, v >_{\beta,\mu^o})\|1 \\
&\leq \|R^{\beta,\mu^o}(\xi)\|^2\|T_L(a^*a)\|\|R^{\beta,\mu^o}(v)\|^2 1
\end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que $(\omega_{v,\xi} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)) \in \mathcal{N}_{T_L}$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi(((\omega_{v,\xi} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))^*(\omega_{v,\xi} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))) &\leq \|R^{\beta,\mu^o}(\xi)\|^2\Phi((\omega_{v,v} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a^*a))) \\
&= \|R^{\beta,\mu^o}(\xi)\|^2\omega_{v,v}((id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \Phi)(\Gamma(a^*a))) \\
&= \|R^{\beta,\mu^o}(\xi)\|^2(T_L(a^*a)v|v) \\
&\qquad \text{d'après l'invariance à gauche de } T_L \\
&\leq \|R^{\beta,\mu^o}(\xi)\|^2\|T_L(a^*a)\|\|v\|^2 < +\infty
\end{aligned}$$

Ainsi $(\omega_{v,\xi} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)) \in \mathcal{N}_\Phi$. ■

3.2.6 Proposition — *Pour tous $v, w \in H$ et $a, b \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$, on a l'égalité :*

$$(v \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a)|w \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(b)) = (T_L(b^*a)v|w)$$

Pour tous $v, w \in H$ et $c, d \in \mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}$, on a :

$$(\Lambda_\Psi(c) \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} v|\Lambda_\Psi(d) \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} w) = (T_R(d^*c)v|w)$$

Démonstration : On calcule le produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned}
(v \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a)|w \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(b)) &= (\alpha(< \Lambda_\Phi(a), \Lambda_\Phi(b) >_{\hat\beta,\mu^o})v|w) \\
&\qquad \text{d'après la définition du produit scalaire,} \\
&= (\alpha(\Lambda_{T_L}(b)^*\Lambda_{T_L}(a))v|w) \\
&\qquad \text{d'après la proposition 3.2.2,} \\
&= (\alpha(\pi_\mu(\alpha^{-1}(T_L(b^*a))))v|w) \\
&\qquad \text{d'après la proposition 2.2.3,} \\
&= (T_L(b^*a)v|w) \\
&\qquad \text{car on a identifié } \pi_\mu(N) \text{ et } N.
\end{aligned}$$

La proposition concernant le poids opératoriel invariant à droite se démontre de manière très similaire. ■

3.2.7 Lemme — *Soient $a \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$ et $v \in D(H_\beta, \mu^o)$. Alors :*

i) la somme $\sum_{i\in I} \xi_i \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))$ converge pour toute (N^o,μ^o)-base $(\xi_i)_{i\in I}$ de H_β ;

ii) la somme définie précédemment est un vecteur de $H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_\Phi$ indépendant de la (N^o,μ^o)-base de H_β choisie.

Démonstration : On sait que, pour tout $i \in I$, $(\omega_{v,\xi_i} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)) \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$, d'après la proposition 3.2.5, et d'autre part on a $< \xi_i, \xi_j >_{\beta,\mu^o} = 0$ quand $i \neq j$ d'après les propriétés des (N^o,μ^o)-bases de H_β. Par conséquent les vecteurs $\xi_i \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))$ sont orthogonaux deux à deux. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in I} ||\xi_i \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))||^2\\
&= \sum_{i\in I} (\alpha(< \xi_i, \xi_i >_{\beta,\mu^o})\Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))|\Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))))\\
&\qquad \text{par définition du produit scalaire,}\\
&= \Phi((\lambda_v^{\beta,\alpha})^*\Gamma(a^*)[\sum_{i\in I} \lambda_{\xi_i}^{\beta,\alpha}(\lambda_{\xi_i}^{\beta,\alpha})^*\lambda_{\xi_i}^{\beta,\alpha}(\lambda_{\xi_i}^{\beta,\alpha})^*]\Gamma(a)\lambda_v^{\beta,\alpha})\\
&\qquad \text{d'après la normalité de } \Phi,\\
&= \Phi((\omega_{v,v} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a^*a)))\\
&\qquad \text{d'après les propriétés des } (N^o,\mu^o)\text{-bases de } H_\beta,\\
&= ((id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \Phi)(\Gamma(a^*a))v|v)\\
&= (T_L(a^*a)v|v) < \infty\\
&\qquad \text{d'après l'invariance à gauche de } T_L.
\end{aligned}$$

On en déduit que la somme $\sum_{i\in I} \xi_i \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))$ converge et définit alors un vecteur de $H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_\Phi$ dans la décomposition de la proposition 2.4.4. On prouve, maintenant, la seconde partie du lemme. Soient $b \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi$ et $w \in D(H_\beta, \mu^o)$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
&(\sum_{i\in I} \xi_i \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))))|w \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \Lambda_\Phi(b))\\
&= \sum_{i\in I} (\alpha(< \xi_i, w >_{\beta,\mu^o})\Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))|\Lambda_\Phi(b))\\
&\qquad \text{d'après la définition du produit scalaire,}\\
&= \sum_{i\in I} \Phi(b^*\alpha(< \xi_i, w >_{\beta,\mu^o})(\omega_{v,\xi_i} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))\\
&= \Phi(b^*\lambda_w^{\beta,\alpha}[\sum_{i\in I} \lambda_{\xi_i}^{\beta,\alpha}(\lambda_{\xi_i}^{\beta,\alpha})^*]\Gamma(a)\lambda_v^{\beta,\alpha})\\
&\qquad \text{d'après la normalité de } \Phi\\
&= \Phi(b^*(\omega_{v,w} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))\\
&\qquad \text{d'après les propriétés des } (N^o,\mu^o)\text{-bases de } H_\beta.
\end{aligned}$$

Comme $D(H_\beta,\mu^o)\odot\Lambda_\Phi(\mathcal{N}_{T_L}\cap\mathcal{N}_\Phi)$ est dense dans $H\ {}_\beta\!\underset{\mu}{\otimes}_\alpha H_\Phi$ et que la dernière expression est indépendante de la (N^o,μ^o)-base, on en déduit le résultat annoncé. ■

Théorème 1 — *Soit H un espace de Hilbert sur lequel M agit. Il existe une unique application isométrique $U_H : H\ {}_\alpha\!\underset{\mu^o}{\otimes}_{\hat\beta} H_\Phi \to H\ {}_\beta\!\underset{\mu}{\otimes}_\alpha H_\Phi$ telle que, pour toute (N^o,μ^o)-base $(\xi_i)_{i\in I}$ de H_β, tout $a\in\mathcal{N}_{T_L}\cap\mathcal{N}_\Phi$ et tout $v\in D(H_\beta,\mu^o)$, on a :*

$$U_H(v\ {}_\alpha\!\underset{\mu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\Lambda_\Phi(a))=\sum_{i\in I}\xi_i\ {}_\beta\!\underset{\mu}{\otimes}_\alpha\Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i}\ {}_\beta\!\underset{\mu}{\star}_\alpha id)(\Gamma(a)))).$$

Démonstration : Grâce au lemme 3.2.7, on peut définir l'application :

$$\begin{aligned}\tilde U :\ & D(H_\beta,\mu^o)\times\Lambda_\Phi(\mathcal{N}_T\cap\mathcal{N}_\Phi)\to H\ {}_\beta\!\underset{\mu}{\otimes}_\alpha H_\Phi\\ & (v,\Lambda_\Phi(a))\mapsto\sum_{i\in I}\xi_i\ {}_\beta\!\underset{\mu}{\otimes}_\alpha\Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i}\ {}_\beta\!\underset{\mu}{\star}_\alpha id)(\Gamma(a))))\end{aligned}$$

Soient $b\in\mathcal{N}_{T_L}\cap\mathcal{N}_\Phi$ et $w\in D(H_\beta,\mu^o)$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}&(\tilde U(v,\Lambda_\Phi(a))|\tilde U(w,\Lambda_\Phi(b)))\\
&=\sum_{i,j\in I}(\alpha(<\xi_i,\xi_j>_{\beta,\mu^o})\Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i}\ {}_\beta\!\underset{\mu}{\star}_\alpha id)(\Gamma(a)))|\Lambda_\Phi((\omega_{w,\xi_i}\ {}_\beta\!\underset{\mu}{\star}_\alpha id)(\Gamma(b))))\\
&\quad\text{d'après la définition du produit scalaire,}\\
&=\sum_{i\in I}(\Lambda_\Phi(\alpha(<\xi_i,\xi_i>_{\beta,\mu^o})(\omega_{v,\xi_i}\ {}_\beta\!\underset{\mu}{\star}_\alpha id)(\Gamma(a)))|\Lambda_\Phi((\omega_{w,\xi_i}\ {}_\beta\!\underset{\mu}{\star}_\alpha id)(\Gamma(b))))\\
&\quad\text{d'après les propriétés des } (N^o,\mu^o)\text{-bases de } H_\beta,\\
&=\sum_{i\in I}\Phi((\lambda_w^{\beta,\alpha})^*\Gamma(b^*)\lambda_{\xi_i}^{\beta,\alpha}\alpha(<\xi_i,\xi_i>_{\beta,\mu^o})(\lambda_{\xi_i}^{\beta,\alpha})^*\Gamma(a)\lambda_v^{\beta,\alpha})\\
&=\Phi((\lambda_w^{\beta,\alpha})^*\Gamma(b^*)[\sum_{i\in I}\lambda_{\xi_i}^{\beta,\alpha}(\lambda_{\xi_i}^{\beta,\alpha})^*\lambda_{\xi_i}^{\beta,\alpha}(\lambda_{\xi_i}^{\beta,\alpha})^*]\Gamma(a)\lambda_v^{\beta,\alpha})\\
&\quad\text{d'après la normalité de } \Phi,\\
&=\Phi((\omega_{v,w}\ {}_\beta\!\underset{\mu}{\star}_\alpha id)(\Gamma(b^*a)))\\
&\quad\text{d'après les propriétés des } (N^o,\mu^o)\text{-bases de } H_\beta,\\
&=\omega_{v,w}((id\ {}_\beta\!\underset{\mu}{\star}_\alpha \Phi)(\Gamma(b^*a)))\\
&=\omega_{v,w}(T_L(b^*a))\\
&\quad\text{d'après l'invariance à gauche de } \Phi,\\
&=(T_L(b^*a)v|w)\end{aligned}$$

On obtient alors, d'après la proposition 3.2.6, l'égalité suivante :

$$(\tilde U((v,\Lambda_\Phi(a))|\tilde U((w,\Lambda_\Phi(b))))=(v\ {}_\alpha\!\underset{\mu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\Lambda_\Phi(a)|w\ {}_\alpha\!\underset{\mu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\Lambda_\Phi(b))$$

Cette relation permet de prouver aisément qu'on peut définir, à partir de $\tilde{U}$, une application U_H remplissant les conditions du théorème. L'indépendance de U_H vis-à-vis de la (N^o, μ^o)-base provient du lemme 3.2.7. ■

3.2.8 DÉFINITION — On appelle **isométrie fondamentale** l'opérateur U_H.

Il est possible de définir une version « à droite »de U_H i.e définie à partir du poids opératoriel invariant à droite :

THÉORÈME 2 — *Soit H un espace de Hilbert sur lequel M agit. Il existe une unique application isométrique $U'_H : H_\Psi \underset{\mu^o}{{}_{\hat{\alpha}}\otimes_\beta} H \to H_\Psi \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H$ telle que, pour toute (N,μ)-base $(\eta_i)_{i\in I}$ de ${}_\alpha H$, tout $a \in \mathcal{N}_{T_R} \cap \mathcal{N}_\Psi$ et tout $v \in D({}_\alpha H, \mu)$, on a :*

$$U'_H(\Lambda_\Psi(a) \underset{\mu^o}{{}_{\hat{\alpha}}\otimes_\beta} v) = \sum_{i\in I} \Lambda_\Psi((id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{v,\eta_i})(\Gamma(a))) \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_i.$$

3.3 Relations entre l'isométrie fondamentale et le coproduit.

La proposition suivante est une reformulation plus pratique de la définition de l'isométrie fondamentale.

3.3.1 PROPOSITION — *On a $(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi) U_H \rho^{\alpha,\hat{\beta}}_{\Lambda_\Phi(x)} = \Gamma(x)\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)}$ pour tous $e, x \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$ et on a $(J_\Psi f J_\Psi \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1) U'_H \lambda^{\hat{\alpha},\beta}_{\Lambda_\Psi(y)} = \Gamma(y)\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Psi\Lambda_\Psi(f)}$ pour tous $f, y \in \mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}$.*

DÉMONSTRATION : Soit $v \in D(H_\beta, \mu^o)$ et soit $(\xi_i)_{i\in I}$ une (N^o, μ^o)-base de H_β. On a alors :

$$\begin{aligned}
&(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi) U_H (v \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} \Lambda_\Phi(x)) \\
&= \sum_{i\in I} \xi_i \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi \Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(x))) && \text{par définition de } U, \\
&= \sum_{i\in I} \xi_i \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\omega_{v,\xi_i} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(x)) J_\Phi \Lambda_\Phi(e) \\
&= \Gamma(x)(v \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi\Lambda_\Phi(e)) && \text{d'après la décomposition 2.4.4.}
\end{aligned}$$

Comme $\Lambda_\Phi(x) \in D((H_\Phi)_{\hat{\beta}}, \mu^o)$ d'après la proposition 3.2.2, l'application :

$$\begin{aligned} H &\to H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} H_\Phi && \text{est continue.} \\ v &\mapsto v \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} \Lambda_\Phi(x) \end{aligned}$$

De même, comme $J_\Phi\Lambda_\Phi(e) \in D({}_\alpha(H_\Phi), \mu)$ d'après les propositions 3.2.2 et 3.2.3, l'application :

$$\begin{aligned} H &\to H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_\Phi \\ v &\mapsto v \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi\Lambda_\Phi(e) \end{aligned} \qquad \text{est continue.}$$

La densité de $D(H_\beta, \mu^o)$ dans H entraîne alors que l'égalité démontrée précédemment est vérifiée pour tout $v \in H$. La seconde relation est de démonstration analogue. ■

3.3.2 Proposition — *On a* $(\lambda_w^{\beta,\alpha})^* U_H(v \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a)) = \Lambda_\Phi((\omega_{v,w} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))$ *pour tous* $v, w \in D(H_\beta, \mu^o)$ *et tout* $a \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$.

De manière analogue, on a $(\rho_{w'}^{\beta,\alpha})^* U'_H(\Lambda_\Psi(b) \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} v') = \Lambda_\Psi((id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{v',w'})(\Gamma(b)))$ *pour tous* $v', w' \in D({}_\alpha H, \mu)$ *et tout* $b \in \mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}$.

Démonstration : Soit $e \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$. On calcule :

$$\begin{aligned} J_\Phi e J_\Phi (\lambda_w^{\beta,\alpha})^* U_H(v \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a)) &= (\lambda_w^{\beta,\alpha})^*(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi) U_H \rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(a)} v \\ &= (\lambda_w^{\beta,\alpha})^* \Gamma(a) \rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)} v \\ &\qquad \text{d'après la proposition 3.3.1,} \\ &= (\omega_{v,w} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)) J_\Phi\Lambda_\Phi(e) \\ &= J_\Phi e J_\Phi \Lambda_\Phi((\omega_{v,w} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))) \end{aligned}$$

En faisant tendre e vers 1, on obtient la première formule. La démonstration de la seconde formule est tout à fait analogue. ■

3.3.3 Corollaire — *On a la relation* $(\omega_{v,w} * id)(U_H)\Lambda_\Phi(a) = \Lambda_\Phi((\omega_{v,w} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))$ *où* $(\omega_{v,w} * id)(U_H)$ *désigne l'opérateur* $(\lambda_w^{\beta,\alpha})^* U_H \lambda_v^{\alpha,\hat\beta}$ *de* $\mathcal{L}(H_\Phi)$ *pour tout* $a \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi$, *tout* $v \in D({}_\alpha H, \mu) \cap D(H_\beta, \mu^o)$ *et tout* $w \in D(H_\beta, \mu^o)$.

Démonstration : Immédiate d'après la proposition précédente. ■

Une autre conséquence importante de la proposition 3.3.1 est l'information structurelle qu'elle apporte quant à l'algèbre engendrée par la « jambe »droite de U'_H.

3.3.4 Corollaire — *On a* $(id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e),\eta})(\Gamma(x)) = (id * \omega_{\Lambda_\Phi(x), J_\Phi e^* J_\Phi \eta})(U_H)$ *pour tous* $e, x \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$ *et tout* $\eta \in D({}_\alpha H_\Phi, \mu^o)$.

On a aussi $(\omega_{J_\Psi\Lambda_\Psi(f),\xi} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(y)) = (\omega_{\Lambda_\Psi(y), J_\Psi f^* J_\Psi \xi} * id)(U'_H)$ *pour tous* $f, y \in \mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}$ *et tout* $\xi \in D((H_\Psi)_\beta, \mu^o)$.

Démonstration : Immédiate d'après la proposition 3.3.1. ■

3.3.5 Corollaire — *On a* $(\omega_{\Lambda_\Psi(a),J_\Psi\Lambda_\Psi(b)} * id)(U'_H)^* = (\omega_{\Lambda_\Psi(a^*),J_\Psi\Lambda_\Psi(b^*))} * id)(U'_H)$ *pour tous* $a,b \in \mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R} \cap \mathcal{N}_\Psi^* \cap \mathcal{N}_{T_R}^*$.

Démonstration : D'après le corollaire 3.3.4, on a, pour tout $e \in \mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}$:

$$\begin{aligned}(\omega_{\Lambda_\Psi(a),J_\Psi\Lambda_\Psi(e^*b)} * id)(U'_H)^* &= (\omega_{J_\Psi\Lambda_\Psi(e),J_\Psi\Lambda_\Psi(b)} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))^* \\ &= (\omega_{J_\Psi\Lambda_\Psi(b),J_\Psi\Lambda_\Psi(e)} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a^*)) \\ &= (\omega_{\Lambda_\Psi(a^*),J_\Psi\Lambda_\Psi(b^*e)} * id)(U'_H).\end{aligned}$$

Soit $(u_k)_{k\in K}$ une famille d'éléments de $\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_\Psi^*$ convergente *-fortement vers 1. Pour tout indice $k \in K$, on pose :

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} \sigma_t^\Psi(u_k)\ dt$$

On a alors, pour tout $k \in K$, e_k et $\sigma_{-i/2}^\Psi(e_k^*)$ bornés et, de plus les deux familles convergent *-fortement vers 1. Or $J_\Psi\Lambda_\Psi(b^*e_k) = \sigma_{-i/2}^\Psi(e_k^*)J_\Psi\Lambda_\Psi(b^*)$ si bien que $J_\Psi\Lambda_\Psi(b^*e_k)$ converge vers $J_\Psi\Lambda_\Psi(b^*)$. On va justifier le passage à la limite dans l'égalité obtenue plus haut ; le résultat en découlera.

Soient $\xi, \eta \in D({}_\alpha H, \mu)$, on a :

$$\begin{aligned}((\omega_{\Lambda_\Psi(a),J_\Psi\Lambda_\Psi(b)} * id)(U'_H)^*\xi|\eta) &= (J_\Psi\Lambda_\Psi(b) \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi|U'_H(\Lambda_\Psi(a) \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \eta)) \\ &= \lim_{k\in K}(J_\Psi\Lambda_\Psi(e_k^*b) \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi|U'_H(\Lambda_\Psi(a) \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \eta)) \\ &\qquad \text{car } e_k^* \xrightarrow{\ s\ } 1, \\ &= \lim_{k\in K}((\omega_{\Lambda_\Psi(a),J_\Psi\Lambda_\Psi(e_k^*b)} * id)(U'_H)^*\xi|\eta) \\ &= \lim_{k\in K}((\omega_{\Lambda_\Psi(a^*),J_\Psi\Lambda_\Psi(b^*e_k)} * id)(U'_H)\xi|\eta) \\ &\qquad \text{d'après l'égalité précédente,} \\ &= \lim_{k\in K}(U'_H(\Lambda_\Psi(a) \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \xi)|J_\Psi\Lambda_\Psi(b^*e_k) \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta) \\ &\qquad \text{car } J_\Psi\Lambda_\Psi(b^*e_k) \to J_\Psi\Lambda_\Psi(b^*), \\ &= (U'_H(\Lambda_\Psi(a^*) \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \xi)|J_\Psi\Lambda_\Psi(b^*) \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta) \\ &= ((\omega_{\Lambda_\Psi(a^*),J_\Psi\Lambda_\Psi(b^*)} * id)(U'_H)\xi|\eta)\end{aligned}$$

Les deux opérateurs étant bornés, la densité de $D({}_\alpha H, \mu)$ dans H permet de conclure. ■

3.4 Relations de commutation.

L'étude se poursuit par l'établissement de relations de commutation qui serviront notamment à justifier la cohérence de la définition d'un unitaire pseudo-multiplicatif. On établit les formules pour U_H mais on dispose de formules analogues pour la « version à droite »U'_H.

3.4.1 Lemme — *Soient* $\xi \in D(H_\beta, \mu^o)$ *et* $\eta \in D({}_\alpha H, \mu)$, *alors :*

i) pour tout $a \in \alpha(N)'$, *on a* $\lambda^{\beta,\alpha}_{\xi} \circ a = (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} a)\lambda^{\beta,\alpha}_{\xi}$;

ii) pour tout $b \in \beta(N)'$, *on a* $\lambda^{\beta,\alpha}_{b\xi} = (b \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)\lambda^{\beta,\alpha}_{\xi}$;

iii) pour tout $x \in \mathcal{D}(\sigma^{\mu}_{-i/2})$, *on a* $\lambda^{\beta,\alpha}_{\beta(x)\xi} = \lambda^{\beta,\alpha}_{\xi} \circ \alpha(\sigma^{\mu}_{-i/2}(x))$;

iv) pour tout $x \in \mathcal{D}(\sigma^{\mu}_{i/2})$, *on a* $\rho^{\beta,\alpha}_{\alpha(x)\eta} = \rho^{\beta,\alpha}_{\eta} \circ \beta(\sigma^{\mu}_{i/2}(x))$.

Démonstration : Les démonstrations sont assez immédiates. Reste à noter que les deux dernières égalités représentent en fait la même relation compte-tenu de $\sigma^{\mu^o}_t = \sigma^{\mu}_{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\rho^{\beta,\alpha}_{\eta} = \sigma_{\mu^o}\lambda^{\alpha,\beta}_{\eta}$ pour tout $\eta \in D({}_\alpha H, \mu)$, où σ_{μ^o} désigne la volte de $H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} H$ dans $H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H$. ■

On attire l'attention sur le fait que $\alpha(N)$ et $\beta(N)$ sont inclus dans $\hat{\beta}(N)'$. Ainsi la cohérence des relations de la proposition suivante est vérifiée.

3.4.2 Proposition — *Pour tout* $n \in N$, *on a :*

i) $U_H(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \alpha(n)) = (\alpha(n) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)U_H$;

ii) $U_H(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \beta(n)) = (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \beta(n))U_H$;

iii) $U_H(\beta(n) \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1) = (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \hat\beta(n))U_H$.

Démonstration :

i) On a, pour tous $n \in N$ et $e, x \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi$:

$$
\begin{aligned}
(\alpha(n) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi)U_H\rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(x)} &= (\alpha(n) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)\Gamma(x)\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)} \\
&\qquad \text{d'après la proposition 3.3.1,} \\
&= \Gamma(\alpha(n)x)\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)} \\
&= (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi)U_H\rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(\alpha(n)x)} \\
&\qquad \text{d'après la proposition 3.3.1,} \\
&= (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi)U_H(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \alpha(n))\rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(x)}
\end{aligned}
$$

Des arguments standards de densité permettent de conclure.

ii) La seconde égalité se prouve d'une manière analogue au i)

iii) Pour tous $n \in \mathcal{T}_\mu$ et $e, x \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi$, comme $\beta(\mathcal{T}_\mu)$ laisse stable $D(H_\beta, \mu^o)$, on a :

$$
\begin{aligned}
(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi \hat\beta(n)) U_H \rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(x)} &= \Gamma(x)\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e\alpha(n^*))} \\
&\quad \text{d'après la proposition 3.3.1,} \\
&= \Gamma(x)\rho^{\beta,\alpha}_{\alpha(\sigma^\mu_{-i/2}(n))J_\Phi\Lambda_\Phi(e)} \\
&= \Gamma(x)\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)}\beta(n) \\
&\quad \text{d'après le lemme 3.4.1,} \\
&= (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi) U_H \rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(x)}\beta(n) \\
&\quad \text{d'après la proposition 3.3.1,} \\
&= (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi) U_H (\beta(n) \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)\rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(x)}
\end{aligned}
$$

La densité des éléments analytiques pour μ dans N et la normalité de β et $\hat\beta$ permettent de conclure.

■

3.4.3 Proposition — *On a* $U_H(m \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1) = (m \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)U_H$ *pour tout* $m \in M'$.

Démonstration : Pour tous $e, x \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi$ et tout $m \in M' \subseteq \alpha(N)' \cap \beta(N)'$, on a :

$$
\begin{aligned}
(m \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi) U_H \rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(x)} &= (m \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)\Gamma(x)\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)} \\
&\quad \text{d'après la proposition 3.3.1,} \\
&= \Gamma(x)(m \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)} \\
&= \Gamma(x)\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)} m \\
&= (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi) U_H \rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(x)} m \\
&\quad \text{d'après la proposition 3.3.1,} \\
&= (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi) U_H (m \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)\rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(x)}
\end{aligned}
$$

ce qui démontre la proposition. ■

Par conséquent, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

3.4.4 Corollaire — *Pour tout* $x \in N$, *on a les relations de commutation :*

i) $U_{H_\Phi}(\hat\beta(x) \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1) = (\hat\beta(x) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)U_{H_\Phi}$;

ii) $U_{H_\Psi}(\hat\alpha(x) \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1) = (\hat\alpha(x) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)U_{H_\Psi}$.

3.4.5 Proposition — *On a* $\Gamma(x)U_H = U_H(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} x)$ *pour tout* $x \in M$.

DÉMONSTRATION : Pour tous $e, x, y \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_{\Phi}$ et tout $x \in m$, on a :

$$\begin{aligned}(1 \underset{N}{{}_{\beta}\otimes_{\alpha}} J_{\Phi} e J_{\Phi}) \Gamma(x) U_H \rho^{\alpha,\hat{\beta}}_{\Lambda_{\Phi}(y)} &= \Gamma(x)(1 \underset{N}{{}_{\beta}\otimes_{\alpha}} J_{\Phi} e J_{\Phi}) U_H \rho^{\alpha,\hat{\beta}}_{\Lambda_{\Phi}(y)} \\ &= \Gamma(xy) \rho^{\beta,\alpha}_{J_{\Phi}\Lambda_{\Phi}(e)} \\ &\qquad \text{d'après la proposition 3.3.1,} \\ &= (1 \underset{N}{{}_{\beta}\otimes_{\alpha}} J_{\Phi} e J_{\Phi}) U_H \rho^{\alpha,\hat{\beta}}_{\Lambda_{\Phi}(xy)} \\ &\qquad \text{d'après la proposition 3.3.1,} \\ &= (1 \underset{N}{{}_{\beta}\otimes_{\alpha}} J_{\Phi} e J_{\Phi}) U_H (1 \underset{N^o}{{}_{\alpha}\otimes_{\hat{\beta}}} x) \rho^{\alpha,\hat{\beta}}_{\Lambda_{\Phi}(y)}\end{aligned}$$

■

3.5 Unitarité de l'isométrie fondamentale.

Pour prouver l'unitarité de U_H (et de U'_H), on s'appuie sur une formule de réciprocité, qui met en jeu, à la fois, le poids opératoriel invariant à gauche et le poids opératoriel à droite.

3.5.a Premier résultat technique

Le premier résultat intermédiaire dont on a besoin en 3.5.c fait intervenir, outre le proposition 3.3.1, le résultat 3.5.1 suivant, qui explicite certaines fonctions θ définies au chapitre 2.3.

3.5.1 PROPOSITION — *Pour tous $c \in \mathcal{N}_{\Psi} \cap \mathcal{N}_{T_R}$, $m \in (\mathcal{N}_{\Psi} \cap \mathcal{N}_{T_R})^*$ et $v \in D(H_{\beta}, \mu^o)$, on a :*

$$\theta^{\beta,\mu^o}(v, J_{\Psi}\Lambda_{\Psi}(c)) m = (\lambda^{\hat{\alpha},\beta}_{\Lambda_{\Psi}(m^*)})^* \rho^{\hat{\alpha},\beta}_v J_{\Psi} c^* J_{\Psi}$$

DÉMONSTRATION : Soit $x \in \mathcal{N}_{\Psi} \cap \mathcal{N}_{T_R}$. On a, d'une part,

$$\begin{aligned}\theta^{\beta,\mu^o}(v, J_{\Psi}\Lambda_{\Psi}(c)) m \Lambda_{\Psi}(x) &= R^{\beta,\mu^o}(v) R^{\beta,\mu^o}(J_{\Psi}\Lambda_{\Psi}(c))^* \Lambda_{\Psi}(mx) \\ &= R^{\beta,\mu^o}(v) J_{\mu} \Lambda_{T_R}(c)^* J_{\Psi} \Lambda_{\Psi}(mx) \\ &\qquad \text{d'après les propositions 3.2.2 et 3.2.3.}\end{aligned}$$

D'autre part, si $c \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}$, on a :

$$\begin{aligned}(\lambda^{\hat{\alpha},\beta}_{\Lambda_{\Psi}(m^*)})^* \rho^{\hat{\alpha},\beta}_v J_{\Psi} c^* J_{\Psi} \Lambda_{\Psi}(x) &= (\lambda^{\hat{\alpha},\beta}_{\Lambda_{\Psi}(m^*)})^* (J_{\Psi} c^* J_{\Psi} \Lambda_{\Psi}(x) \underset{\mu^o}{{}_{\hat{\alpha}}\otimes_{\beta}} v) \\ &= T_R(mx\sigma^{\Psi}_{-i/2}(c)) v \\ &\qquad \text{d'après la proposition 3.2.6,} \\ &= R^{\beta,\mu^o}(v) J_{\mu} \Lambda_{\mu}(\beta^{-1}(T_R(\sigma^{\Psi}_{i/2}(c^*) x^* m^*))) \\ &\qquad \text{d'après la définition de } R^{\beta,\mu^o}(v), \\ &= R^{\beta,\mu^o}(v) J_{\mu} \Lambda_{T_R}(c)^* J_{\Psi} \Lambda_{\Psi}(mx)\end{aligned}$$

L'égalité $(\lambda^{\hat{\alpha},\beta}_{\Lambda_{\Psi}(m^*)})^* \rho^{\hat{\alpha},\beta}_v J_{\Psi} c^* J_{\Psi} \Lambda_{\Psi}(x) = R^{\beta,\mu^o}(v) J_{\mu} \Lambda_{T_R}(c)^* J_{\Psi} \Lambda_{\Psi}(mx)$ reste vérifiée pour tout $c \in \mathcal{N}_{\Psi} \cap \mathcal{N}_{T_R}$ par normalité. La proposition en découle immédiatement. ■

3.5.2 Corollaire — *Pour tout* $a \in (\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R})^*(\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L})$, *tous* $e \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}, c \in \mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}$, *tous* $\xi \in H_\Psi, \eta \in D({}_\alpha(H_\Phi), \mu)$ *et tous* $u \in H, v \in D(H_\beta, \mu^o)$, *on a :*

$$(v \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Psi\Lambda_\Psi(c)})^* U_{H_\Psi}(\xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} \Lambda_\Phi(a)) | u \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e^* J_\Phi \eta)$$

$$= (J_\Psi c^* J_\Psi \xi \underset{\mu^o}{{}_{\hat{\alpha}}\otimes_\beta} v | \Lambda_\Psi((id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{\eta, J_\Phi\Lambda_\Phi(e)})(\Gamma(a^*))) \underset{\mu^o}{{}_{\hat{\alpha}}\otimes_\beta} u)$$

Démonstration : Le corollaire provient du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
&(v \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Psi\Lambda_\Psi(c)})^* U_{H_\Psi}(\xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} \Lambda_\Phi(a)) | u \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e^* J_\Phi \eta)\\
&= ((\rho^{\beta,\alpha}_\eta)^* \lambda^{\beta,\alpha}_v (\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Psi\Lambda_\Psi(c)})^* (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e^* J_\Phi) U_{H_\Psi}(\xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} \Lambda_\Phi(a)) | u)\\
&= ((\rho^{\beta,\alpha}_\eta)^* \lambda^{\beta,\alpha}_v (\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Psi\Lambda_\Psi(c)})^* \Gamma(a) \rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)} \xi | u)\\
&\qquad \text{d'après la proposition 3.3.1,}\\
&= \theta^{\beta,\mu^o}(v, J_\Psi\Lambda_\Psi(c)) (\rho^{\beta,\alpha}_\eta)^* \Gamma(a) \rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)} \xi | u)\\
&\qquad \text{d'après la relation 2.4.2,}\\
&= ((\lambda^{\hat{\alpha},\beta}_{\Lambda_\Psi((id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{\eta, J_\Phi\Lambda_\Phi(e)})(\Gamma(a^*)))})^* \rho^{\hat{\alpha},\beta}_v J_\Psi c^* J_\Psi \xi | u)\\
&\qquad \text{d'après la proposition 3.5.1,}\\
&= (J_\Psi c^* J_\Psi \xi \underset{\mu^o}{{}_{\hat{\alpha}}\otimes_\beta} v | \Lambda_\Psi((id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{\eta, J_\Phi\Lambda_\Phi(e)})(\Gamma(a^*))) \underset{\mu^o}{{}_{\hat{\alpha}}\otimes_\beta} u)
\end{aligned}$$

■

3.5.b Second résultat technique

Le second résultat technique, indépendant du résultat de la section précédente, fait intervenir la proposition 3.3.1 et la propriété de coproduit Γ. Ici, $\mathcal{H}$ désigne un autre espace de Hilbert sur lequel M agit.

3.5.3 Lemme — *Soient* $a, e \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$, $\xi \in D(\mathcal{H}_\beta, \mu^o)$, $\eta \in D({}_\alpha H, \mu)$, *et* $\zeta \in \mathcal{H}$. *On a alors :*

$$(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi) U_H(\eta \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} [(\lambda^{\beta,\alpha}_\xi)^* U_{\mathcal{H}}(\zeta \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} \Lambda_\Phi(a))])$$

$$= (\lambda^{\beta,\alpha}_\xi \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)^* (id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma)(\Gamma(a))(\zeta \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi\Lambda_\Phi(e))$$

DÉMONSTRATION : Supposons que $\zeta \in D(\mathcal{H}_\beta, \mu^o)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi) U_H(\eta \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} [(\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^* U_{\mathcal{H}}(\zeta \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))]) \\
&= (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi) U_H(\eta \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((\omega_{\zeta,\xi} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))) \\
&\qquad \text{d'après la proposition 3.3.2,} \\
&= \Gamma((\omega_{\zeta,\xi} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))(\eta \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi \Lambda_\Phi(e)) \\
&\qquad \text{d'après la proposition 3.3.1,} \\
&= (\lambda_\xi^{\beta,\alpha} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)^* (id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma)(\Gamma(a))(\zeta \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi \Lambda_\Phi(e))
\end{aligned}$$

On obtient ainsi l'égalité de l'énoncé pour tout $\zeta \in D(\mathcal{H}_\beta, \mu^o)$.

L'application de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H} \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} H_\Phi$ qui à ζ associe $\eta \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} [(\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^* U_{\mathcal{H}}(\zeta \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))]$ est continue car $\eta \in D({}_\alpha H, \mu)$ et $\Lambda_\Phi(a) \in D((H_\Phi)_{\hat\beta}, \mu^o)$. De la même manière, l'application de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H} \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} H_\Phi$ qui à ζ associe $\zeta \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi\Lambda_\Phi(e)$ est continue car $\eta \in D({}_\alpha H, \mu)$ et $J_\Phi \Lambda_\Phi(e) \in D({}_\alpha(H_\Phi), \mu)$. La densité de $D(\mathcal{H}_\beta, \mu^o)$ dans $\mathcal{H}$ permet alors de conclure. ■

3.5.4 LEMME — *La somme* $\sum_{i\in I} \eta_i \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} [(\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^* U_{\mathcal{H}}((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^* \Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))]$ *converge pour tous* $\xi \in D(\mathcal{H}_\beta, \mu^o)$, $\Xi \in \mathcal{H} \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H$, $a \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$ *et toute* (N,μ)*-base* $(\eta_i)_{i\in I}$ *de* ${}_\alpha H$.

DÉMONSTRATION : Les vecteurs $\eta_i \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} [(\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^* U_{\mathcal{H}}((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^* \Xi \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \Lambda_\Phi(a))]$ sont orthogonaux d'après les propriétés des (N,μ)-bases de ${}_\alpha H$. On calcule alors, pour tout $i \in I$:

$$\begin{aligned}
&||\eta_i \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} [(\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^* U_{\mathcal{H}}((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^* \Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))]||^2 \\
&= (\hat\beta(<\eta_i,\eta_i>_{\alpha,\mu})(\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^* U_{\mathcal{H}}((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^* \Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))|(\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^* U_{\mathcal{H}}((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^* \Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))) \\
&= ((\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^*(1 \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \hat\beta(<\eta_i,\eta_i>_{\alpha,\mu})) U_{\mathcal{H}}((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^* \Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))|(\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^* U_{\mathcal{H}}((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^* \Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))) \\
&\qquad \text{d'après le lemme 3.4.1,} \\
&= ((\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^* U_{\mathcal{H}}(\beta(<\eta_i,\eta_i>_{\alpha,\mu})(\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^* \Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))|(\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^* U_{\mathcal{H}}((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^* \Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))) \\
&\qquad \text{d'après la proposition 3.4.2,} \\
&= (\lambda_\xi^{\beta,\alpha}(\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^* U_{\mathcal{H}}((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^* \Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))|U_{\mathcal{H}}((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^* \Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))) \\
&\qquad \text{d'après les propriétés des } (N,\mu)\text{-bases de } {}_\alpha H.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
&||\eta_i \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} [(\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^* U_{\mathcal{H}}((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^*\Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))]||^2\\
&\leq ||R^{\beta,\alpha}(\xi)||^2((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^*\Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a)|(\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^*\Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))\\
&\qquad \text{car } U_{\mathcal{H}} \text{ est une isométrie,}\\
&= ||R^{\beta,\alpha}(\xi)||^2(T_L(a^*a)(\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^*\Xi|(\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^*\Xi)\\
&\qquad \text{d'après la proposition 3.2.6,}\\
&\leq ||R^{\beta,\alpha}(\xi)||^2||T(a^*a)||((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^*\Xi|(\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^*\Xi)
\end{aligned}$$

Par suite, d'après les propriétés des (N,μ)-bases de ${}_\alpha H$, on obtient :

$$\sum_{i\in I}||\eta_i \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} [(\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^* U_{\mathcal{H}}((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^*\Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))]||^2 \leq ||R^{\beta,\alpha}(\xi)||^2||T(a^*a)||||\Xi||^2 < \infty$$

On en déduit la convergence de la somme. ∎

3.5.5 Proposition — *Soient* $a, e \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$, $\Xi \in \mathcal{H} \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H$, $\xi \in D(\mathcal{H}_\beta, \mu^o)$, $\eta \in D({}_\alpha(H_\Phi), \mu)$ *et* $(\eta_i)_{i\in I}$ *une* (N,μ)*-base de* ${}_\alpha H$. *On a :*

$$\begin{aligned}
&(\rho_{J_\Phi e J_\Phi \eta}^{\beta,\alpha})^* U_H(\sum_{i\in I}\eta_i \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} [(\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^* U_{\mathcal{H}}((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^*\Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))])\\
&\qquad = (\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^*\Gamma((id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e),\eta})(\Gamma(a)))\Xi
\end{aligned}$$

Démonstration : La somme $\sum_{i\in I}\eta_i \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} [(\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^* U_{\mathcal{H}}((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^*\Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))]$ converge d'après le lemme 3.5.4. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in I}(\rho_\eta^{\beta,\alpha})^*(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi)U_H(\eta_i \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} [(\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^* U_{\mathcal{H}}((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^*\Xi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))])\\
&= \sum_{i\in I}(\rho_\eta^{\beta,\alpha})^*(\lambda_\xi^{\beta,\alpha} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)^*(id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma)(\Gamma(a))((\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^*\Xi \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_i \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi\Lambda_\Phi(e))\\
&\qquad \text{d'après le lemme 3.5.3,}\\
&= (\rho_\eta^{\beta,\alpha})^*(\lambda_\xi^{\beta,\alpha} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)^*(\Gamma \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))([\sum_{i\in I}\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha}(\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^*]\Xi \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi\Lambda_\Phi(e)))\\
&\qquad \text{d'après la coassociativité de } \Gamma,\\
&= (\rho_\eta^{\beta,\alpha})^*(\lambda_\xi^{\beta,\alpha} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)^*(\Gamma \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))(\Xi \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi\Lambda_\Phi(e)))\\
&\qquad \text{d'après les propriétés des } (N,\mu)\text{-bases de } {}_\alpha H,\\
&= (\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^*(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \rho_\eta^{\beta,\alpha})^*(\Gamma \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))(\Xi \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi\Lambda_\Phi(e)))\\
&= (\lambda_\xi^{\beta,\alpha})^*\Gamma((id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e),\eta})(\Gamma(a)))\Xi
\end{aligned}$$

∎

Muni de ces résultats, que l'on applique avec $\mathcal{H} = H_\Psi$, on est en mesure de prouver maintenant une formule de réciprocité.

3.5.c Formule de réciprocité

Notations : Pour toute famille $(e_k)_{k\in K}$ dans $\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}$ qui tend vers 1 en croissant, la famille $(\omega_{J_\Psi \Lambda_\Psi(e_k)})_{k\in K}$ tend en croissant vers Ψ. Alors, pour tout $x \in \mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}$, on a :

$$(\omega_{J_\Psi \Lambda_\Psi(e_k)} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(x)) \xrightarrow{w} (\Psi \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(x))$$

On note $\zeta_k = J_\Psi\Lambda_\Psi(e_k^* e_k) \in D((H_\Psi)_\beta, \mu^o)$ pour tout $k \in K$.

3.5.6 Proposition — *(Formule de réciprocité entre U_H et U'_H)*

Pour tout $a \in (\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R})^*(\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}))$, tous $e \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}, b \in \mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}, c \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}$, tous $v \in D(H_\beta, \mu^o), \eta \in D({}_\alpha(H_\Phi), \mu)$ et toute (N, μ)-base de ${}_\alpha H$, $(\eta_i)_{i\in I}$, on a :

$$(\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi e^* J_\Phi \eta})^* U_H(\sum_{i\in I} \eta_i \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} [(\lambda^{\beta,\alpha}_{\zeta_k})^* U_{H_\Psi}([(\rho^{\beta,\alpha}_{\eta_i})^* U'_H(J_\Psi c^* J_\Psi \Lambda_\Psi(b) \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} v)] \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))])$$

$$\underset{k}{\rightharpoonup} (\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi e^* J_\Phi \eta})^*(v \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Psi \Lambda_\Psi(c)})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(b) \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a)))$$

Remarque — La convergence, qui intervient dans la proposition, est la convergence faible dans l'espace de Hilbert H.

Démonstration : Pour tout $u \in H$, on a, d'après la proposition 3.5.5 :

$$(U_H(\sum_{i\in I} \eta_i \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} [(\lambda^{\beta,\alpha}_{\zeta_k})^* U_{H_\Psi}([(\rho^{\beta,\alpha}_{\eta_i})^* U'_H(\Lambda_\Psi(bc) \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} v)] \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))])|u \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e^* J_\Phi \eta)$$

$$= (\Gamma((id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e),\eta})(\Gamma(a)))U'_H(\Lambda_\Psi(bc) \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} v)|\zeta_k \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} u)$$

$$= (U'_H(\Lambda_\Psi((id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e),\eta})(\Gamma(a))bc) \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} v)|\zeta_k \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} u)$$

d'après la version à droite de la proposition 3.4.5,

$$= ((\omega_{J_\Psi\Lambda_\Psi(e_k)} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma((id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e),\eta})(\Gamma(a))bc))v|u)$$

d'après la proposition 3.3.1

$$\to ((\Psi \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma((id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e),\eta})(\Gamma(a)))bc)v|u)$$

$$= (T_R((id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e),\eta})(\Gamma(a))bc)v|u)$$

d'après l'invariance à droite de T_R,

$$= (\Lambda_\Psi(bc) \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} v|\Lambda_\Psi((id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{\eta,J_\Phi\Lambda_\Phi(e)})(\Gamma(a^*)))) \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} u)$$

d'après la proposition 3.2.6,

$$= (v \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(c^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(b) \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))|u \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e^* J_\Phi \eta)$$

d'après la proposition 3.5.2.

■

Notations : Soit $(\eta_i)_{i\in I}$ une (N,μ)-base de ${}_\alpha H$. Pour toute partie finie $J \subset I$, on note P_J la projection $\sum_{i\in J} \theta^{\alpha,\mu}(\eta_i,\eta_i) \in \alpha(N)'$ de sorte que :

$$\sum_{i\in J} \rho^{\beta,\alpha}_{\eta_i}(\rho^{\beta,\alpha}_{\eta_i})^* = 1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} P_J$$

Pour tout $e \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$, on note aussi $P^e_J = 1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e^* J_\Phi P_J J_\Phi e J_\Phi = \sum_{i\in J} \rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi e^* J_\Phi \eta_i}(\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi e^* J_\Phi \eta_i})^*$.

3.5.7 Corollaire — *On a, pour tous $a \in (\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R})^*(\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L})$, $b \in \mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}, c \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}$, $v \in D(H_\beta,\mu^o)$, $e \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$ et toute partie finie $J \subset I$:*

$$P^e_J U_H (\sum_{i\in I} \eta_i \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} [(\lambda^{\beta,\alpha}_{\zeta_k})^* U_{H_\Psi}([(\rho^{\beta,\alpha}_{\eta_i})^* U'_H (J_\Psi c^* J_\Psi \Lambda_\Psi(b) \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} v)] \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))])$$

$$\underset{k}{\rightharpoonup} P^e_J (v \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Psi \Lambda_\Psi(c)})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(b) \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a)))$$

Remarque — La convergence, qui intervient dans le corollaire, est la convergence faible dans l'espace de Hilbert $H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_\Phi$.

Démonstration : On applique à la formule de réciprocité $\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi e^* J_\Phi \eta}$ qui est un opérateur linéaire continu de H dans $H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_\Phi$, et donc aussi continu de H faible dans $H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_\Phi$ faible. Puis, on passe à des sommes finies. ■

Notations : Si F désigne un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E, $[F]$ désigne le sous-espace vectoriel fermé de E engendré par F

On introduit le sous-espace vectoriel fermé de H_Φ suivant :

$$\mathcal{H}_\Phi = [(\lambda^{\beta,\alpha}_w)^* U_{H_\Psi}(v \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a)) | v \in H_\Psi, w \in J_\Psi \Lambda_\Psi(\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}), a \in (\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R})^* \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}]$$

D'après la troisième relation du lemme 3.4.1 (resp. la proposition 3.4.2), α (resp. $\hat\beta$) est alors une (resp. anti-) représentation non dégénérée de N sur $\mathcal{H}_\Phi$.

3.5.8 Lemme — *Soient $a \in (\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R})^*(\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_T)$, $b \in \mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}$, $c \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}$, $v \in D(H_\beta,\mu^o)$ et $(\eta_i)_{i\in I}$ une (N,μ)-base de ${}_\alpha H$. On note :*

$$\Xi_k = (\sum_{i\in I} \eta_i \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} [(\lambda^{\beta,\alpha}_{\zeta_k})^* U_{H_\Psi}([(\rho^{\beta,\alpha}_{\eta_i})^* U'_H (J_\Psi c^* J_\Psi \Lambda_\Psi(b) \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} v)] \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))]$$

pour tout $k \in K$. La famille $(\Xi_k)_{k\in K}$ est bornée.

Démonstration : Soit $\Xi = v \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Psi \Lambda_\Psi(c)})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(b) \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))$. On sait que $P^e_J U_H \Xi_k$ converge faiblement vers $P^e_J \Xi$ d'après le corollaire précédent, donc :

$$\lim_{J,||e||\le 1} \lim_k P^e_J U_H \Xi_k = \Xi$$

Par conséquent, il existe C tel que :

$$\sup_{J,||e||\leq 1} \sup_k ||P_J^e U_H \Xi_k|| \leq C$$

et par interversion des bornes supérieures, on trouve :

$$C \geq \sup_k \sup_{J,||e||\leq 1} ||P_J^e U_H \Xi_k|| = \sup_k ||U_H \Xi_k|| = \sup_k ||\Xi_k||$$

■

3.5.9 Corollaire — *Soient $a \in (\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R})^*(\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_T)$, $b \in \mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}$, $c \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}$, $v \in D(H_\beta, \mu^o)$ et $(\eta_i)_{i\in I}$ une (N,μ)-base de ${}_\alpha H$. On note :*

$$\Xi_k = (\sum_{i\in I} \eta_i \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} [(\lambda_{\zeta_k}^{\beta,\alpha})^* U_{H_\Psi}([(\rho_{\eta_i}^{\beta,\alpha})^* U'_H(J_\Psi c^* J_\Psi \Lambda_\Psi(b) \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} v)] \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))]$$

pour tout $k \in K$, et on note :

$$\Xi = v \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\lambda_{J_\Psi \Lambda_\Psi(c)}^{\beta,\alpha})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(b) \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))$$

Alors, $U_H \Xi_k \underset{k}{\rightharpoonup} \Xi$.

Démonstration : Soient $\Theta \in H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_\Phi$ et $\epsilon > 0$. Alors, il existe $e \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$ de norme inférieure à 1 et $J \subset I$ partie finie tels que $||(1 - P_J^e)\Theta|| \leq \epsilon$. D'après le corollaire 3.5.7, il existe k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$, on a $|(P_J^e U_H \Xi_k - P_J^e \Xi|\Theta)| \leq \epsilon$. On a alors :

$$\begin{aligned}
|(U_H\Xi_k - \Xi|\Theta)| &\leq |(U_H\Xi_k - P_J^e U_H \Xi_k|\Theta)| + |(P_J^e U_H \Xi_k - P_J^e\Xi|\Theta)| + |(P_J^e\Xi - \Xi|\Theta)| \\
&\leq |(U_H\Xi_k|(1 - P_J^e)\Theta)| + \epsilon + |(\Xi|(1 - P_J^e)\Theta)| \\
&\leq |(U_H\Xi_k|(1 - P_J^e)\Theta)| + \epsilon + |(\Xi|(1 - P_J^e)\Theta)| \\
&\leq (sup_{k\in k}||\Xi_k|| + ||\Xi|| + 1)\epsilon
\end{aligned}$$

■

3.5.10 Corollaire — *On a l'inclusion $H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \mathcal{H}_\Phi \subseteq U_H(H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \mathcal{H}_\Phi)$.*

Démonstration : D'après le corollaire précédent, on sait que Ξ appartient à l'adhérence faible de $U_H(H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \mathcal{H}_\Phi)$ qui coïncide avec son adhérence forte. Or U_H est une isométrie, donc l'adhérence forte de $U_H(H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \mathcal{H}_\Phi)$ est exactement égale à $U_H(H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \mathcal{H}_\Phi)$. Le résultat en découle. ■

Théorème 3 — *$U_H : H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} H_\Phi \rightarrow H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_\Phi$ est un unitaire.*

Démonstration du théorème :

On a, d'après le corollaire précédent :

$$H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \mathcal{H}_\Phi \subseteq U_H(H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \mathcal{H}_\Phi) \subseteq U_H(H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} H_\Phi) \subseteq H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_\Phi. \tag{3.5.1}$$

D'autre part, en utilisant une (N^o, μ^o)-base de $(H_\Psi)_\beta$ comme dans la proposition 2.3.2, on a, pour tous $v \in H_\Psi$ et $a \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi$:

$$U_{H_\Psi}(v \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\phi(a)) = \sum_i \xi_i \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\lambda^{\beta,\alpha}_{\xi_i})^* U_{H_\Psi}(v \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\phi(a))$$

et donc $U_{H_\Psi}(H_\Psi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} H_\Phi) \subseteq H_\Psi \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \mathcal{H}_\Phi$. L'inclusion réciproque est la relation (3.5.1) appliquée à H_Ψ. Par conséquent, on a :

$$U_{H_\Psi}(H_\Psi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} H_\Phi) = U_{H_\Psi}(H_\Psi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \mathcal{H}_\Phi)$$

D'après le théorème 1, U_{H_Ψ} est une isométrie, donc $H_\Psi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} H_\Phi = H_\Psi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \mathcal{H}_\Phi$, et d'après la proposition 2.4.3, on déduit que :

$$\mathcal{H}_\Phi = H_\Phi. \tag{3.5.2}$$

Grâce à l'inclusion (3.5.1), on conclut alors que $U_H(H \underset{\mu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} H_\Phi) = H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_\Phi$. ■

3.5.11 Corollaire — *On a les égalités entre espaces de Hilbert suivantes :*

$$\begin{aligned} H_\Phi &= [\Lambda_\Phi((\omega_{v,w} \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} id)(\Gamma(a)))| v, w \in D(H_\beta, \mu^o), a \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}] \\ &= [(\lambda^{\beta,\alpha}_w)^* U_H(v \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))| v \in H, w \in D(H_\beta, \mu^o), a \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}] \\ &= [(\omega_{v,w} * id)(U_H)\xi | v \in D({}_\alpha H, \mu), w \in D(H_\beta, \mu^o), \xi \in H_\Phi] \end{aligned}$$

Démonstration : La seconde égalité est conséquence du corollaire 3.3.3. La dernière est claire. On prouve que le dernier sous espace est H_Φ. Soit $\eta \in H_\Phi$ orthogonal à :

$$[(\omega_{v,w} * id)(U_H)\xi | v \in D({}_\alpha H, \mu), w \in D(H_\beta, \mu^o), \xi \in H_\Phi]$$

Alors, pour tous $v \in D({}_\alpha H, \mu), w \in D(H_\beta, \mu^o)$ et $\xi \in H_\Phi$, on a :

$$(U_H(v \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \xi)| w \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta) = ((\omega_{v,w} * id)(U_H)\xi | \eta) = 0$$

D'après le théorème précédent, U_H est unitaire donc, en particulier, U_H est surjectif. Par conséquent, $w \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta = 0$ pour tout $w \in D(H_\beta, \mu^o)$. D'après le lemme 2.4.2, on a $\eta = 0$, ce qui suffit pour conclure. ■

3.5.12 Corollaire — *On a* $\Gamma(x) = U_H(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} x)U_H^*$ *pour tout* $x \in M$.

Démonstration : Claire d'après l'unitarité de U_H et d'après la proposition 3.4.5 ■

3.6 Pseudo-multiplicativité.

On s'intéresse maintenant à $W = U^*_{H_\Phi}$. On dispose donc déjà des quatre relations de commutations du paragraphe 3.4 et l'objectif est, en fait, de prouver que W est un unitaire pseudo-multiplicatif selon la définition de M. Enock et J.M Vallin ([EV00], définition 5.6) :

3.6.1 DÉFINITION — On appelle **unitaire pseudo-multiplicatif** au-dessus de N pour $\alpha, \hat{\beta}, \beta$ tout unitaire V de $H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H$ dans $H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} H$ qui vérifie les relations de commutations suivantes :

$$\left.\begin{array}{rl} \text{i)} & (1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} \alpha(x))V = V(\alpha(x) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)\,; \\ \text{ii)} & (1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} \beta(x))V = V(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \beta(x))\,; \\ \text{iii)} & (\beta(x) \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} 1)V = V(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \hat{\beta}(x))\,; \\ \text{iv)} & (\hat{\beta}(x) \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} 1)V = V(\hat{\beta}(x) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1) \end{array}\right. \qquad \text{pour tout } x \in N,$$

et la formule :

$$(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} V)(V \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1) = (V \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} 1)(\sigma_{\mu^o} \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} V)\sigma_{2\mu}(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \sigma_{\mu^o})(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} V)$$

où le premier σ_{μ^o} désigne la volte de $H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} H$ dans $H \underset{\mu}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_\alpha} H$, la seconde désigne celle de $H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} H$ dans $H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H$ et, quant à $\sigma_{2\mu}$, c'est la volte de $H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H \underset{\mu}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_\alpha} H$ dans $H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} (H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H)$. Cette dernière volte « tourne » autour du second produit tensoriel relatif. De plus, les parenthèses, qui ont été rajoutées, ont pour rôle de souligner le fait que la représentation ou l'antireprésentation (ici $\hat{\beta}$) agit sur la jambe la plus éloignée, et donc que le produit tensoriel relatif n'est pas, dans ce cas, associatif.

On va s'assurer ici de la cohérence d'une telle formule. Le premier membre de l'égalité agit de la manière suivante :

$$H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H \xrightarrow[\text{sur sa jambe droite}]{V \text{ entrelace } \beta} H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H \xrightarrow[\text{sur sa jambe gauche}]{V \text{ entrelace } \hat{\beta}} H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} H.$$

Le second membre quant à lui agit par :

$$\begin{tikzcd}
H \underset{\mu}{_\beta\otimes_\alpha} H \underset{\mu}{_\beta\otimes_\alpha} H \arrow[r, "\substack{V \text{ entrelace } \alpha \\ \text{sur sa jambe}}", "\substack{\text{gauche avec } \alpha \\ \text{sur sa jambe droite}}"'] & H \underset{\mu}{_\beta\otimes_\alpha} (H \underset{\mu^o}{_\alpha\otimes_{\hat\beta}} H) \arrow[d] \\
H \underset{\mu^o}{_\alpha\otimes_{\hat\beta}} (H \underset{\mu}{_\beta\otimes_\alpha} H) \arrow[d, "\substack{V \text{ entrelace } \hat\beta \\ \text{sur sa jambe}}"', "\substack{\text{droite avec } \beta \\ \text{sur sa jambe gauche}}"] & H \underset{\mu}{_\beta\otimes_\alpha} H \underset{\mu}{_{\hat\beta}\otimes_\alpha} H \arrow[l] \\
H \underset{\mu^o}{_\alpha\otimes_\beta} H \underset{\mu^o}{_\alpha\otimes_{\hat\beta}} H \arrow[r] & (H \underset{\mu}{_\beta\otimes_\alpha} H) \underset{\mu^o}{_\alpha\otimes_{\hat\beta}} H \arrow[d, "\substack{V \text{ entrelace } \alpha \\ \text{sur sa jambe}}"', "\substack{\text{gauche avec } \alpha \\ \text{sur sa jambe droite}}"] \\
 & H \underset{\mu^o}{_\alpha\otimes_{\hat\beta}} H \underset{\mu^o}{_\alpha\otimes_{\hat\beta}} H.
\end{tikzcd}$$

On rappelle que, suivant ([Eno02], 3.5), si on utilise un autre poids normal semifini et fidèle pour la construction des produits tensoriels relatifs, alors les isomorphismes canoniques de bimodules transforment l'unitaire pseudo-multiplicatif en un autre unitaire pseudo-multiplicatif. La relation pentagonale provient essentiellement de la coassociativité du coproduit. On détermine donc $(id \underset{N}{_\beta\star_\alpha} \Gamma) \circ \Gamma$ et $(\Gamma \underset{N}{_\beta\star_\alpha} id) \circ \Gamma$ en fonction de U_H dans les propositions 3.6.4 et 3.6.6 qui suivent. Dans la suite, $\mathcal{H}$ désigne un autre espace de Hilbert sur lequel M agit.

3.6.2 Lemme — *On a, pour tous $\xi_1 \in D({}_\alpha\mathcal{H}, \mu)$ et $\xi_2' \in D(H_\beta, \mu^o)$:*

i) $\lambda_{\xi_1}^{\alpha,\hat\beta}(\lambda_{\xi_2'}^{\beta,\alpha})^* = (\lambda_{\xi_2'}^{\beta,\alpha})^* \sigma_{2\mu^o}(1 \underset{N^o}{_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \sigma_\mu)\lambda_{\xi_1}^{\alpha,\hat\beta}$;

ii) $U_{\mathcal{H}}\lambda_{\xi_1}^{\alpha,\hat\beta}(\lambda_{\xi_2'}^{\beta,\alpha})^* U_H = (\lambda_{\xi_2'}^{\beta,\alpha})^*(1 \underset{N}{_\beta\otimes_\alpha} U_{\mathcal{H}})\sigma_{2\mu^o}(1 \underset{N^o}{_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \sigma_\mu)(1 \underset{N^o}{_\alpha\otimes_\beta} U_H)\lambda_{\xi_1}^{\alpha,\beta}$.

Démonstration : i) est de démonstration aisée et ii) découle de i). ∎

3.6.3 Proposition — *Les deux égalités suivantes sont vérifiées :*

i) Pour tous $\xi_1 \in D({}_\alpha\mathcal{H}, \mu), \xi_1' \in D({}_\alpha H, \mu), \xi_2 \in D(\mathcal{H}_\beta, \mu^o), \xi_2' \in D(H_\beta, \mu^o)$ et pour tous $\eta_1, \eta_2 \in H_\Phi$, on a :

$$((1 \underset{N}{_\beta\otimes_\alpha} U_{\mathcal{H}})\sigma_{2\mu^o}(1 \underset{N^o}{_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \sigma_\mu)(1 \underset{N^o}{_\alpha\otimes_\beta} U_H)(\sigma_\mu \underset{N^o}{_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)([\xi_1' \underset{\mu}{_\beta\otimes_\alpha} \xi_1] \underset{\mu^o}{_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \eta_1) | \xi_2' \underset{\mu}{_\beta\otimes_\alpha} \xi_2 \underset{\mu}{_\beta\otimes_\alpha} \eta_2)$$

$$= ((\omega_{\xi_1,\xi_2} * id)(U_{\mathcal{H}})(\omega_{\xi_1',\xi_2'} * id)(U_H)\eta_1 | \eta_2)$$

ii) Pour tous $a \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$, $\xi_1 \in \mathcal{H}$ et $\xi_1', \xi_2' \in D(H_\beta, \mu^o)$, on a :

$$(\lambda_{\xi_2'}^{\beta,\alpha})^*(1 \underset{N}{_\beta\otimes_\alpha} U_{\mathcal{H}})\sigma_{2\mu^o}(1 \underset{N^o}{_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \sigma_\mu)(1 \underset{N^o}{_\alpha\otimes_\beta} U_H)(\sigma_\mu \underset{N^o}{_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)([\xi_1' \underset{\mu}{_\beta\otimes_\alpha} \xi_1] \underset{\mu^o}{_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))$$

$$= U_{\mathcal{H}}(\xi_1 \underset{N^o}{_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((\omega_{\xi_1',\xi_2'} \underset{\mu}{_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))))$$

Démonstration : On démontre d'abord la première égalité. Dans les conditions de l'énoncé, on calcule :

$$
\begin{aligned}
&((1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} U_{\mathcal{H}})\sigma_{2\mu^o}(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \sigma_\mu)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} U_H)(\sigma_\mu \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)([\xi'_1 \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi_1] \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \eta_1)|\xi'_2 \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi_2 \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_2)\\
&= ((\lambda^{\beta,\alpha}_{\xi'_2})^*(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} U_{\mathcal{H}})\sigma_{2\mu^o}(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \sigma_\mu)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} U_H)\lambda^{\alpha,\beta}_{\xi_1}(\xi'_1 \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \eta_1)|\xi_2 \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_2)\\
&= (U_{\mathcal{H}}\lambda^{\alpha,\hat\beta}_{\xi_1}(\lambda^{\beta,\alpha}_{\xi'_2})^* U_H(\xi'_1 \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \eta_1)|\xi_2 \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_2)\\
&\qquad \text{d'après le lemme précédent,}\\
&= ((\lambda^{\beta,\alpha}_{\xi_2})^* U_{\mathcal{H}}(\xi_1 \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} (\omega_{\xi'_1,\xi'_2} * id)(U_H)\eta_1|\eta_2)\\
&= ((\omega_{\xi_1,\xi_2} * id)(U_{\mathcal{H}})(\omega_{\xi'_1,\xi'_2} * id)(U_H)\eta_1|\eta_2)
\end{aligned}
$$

On prouve alors la seconde égalité. Soit $\xi_1 \in D({}_\alpha\mathcal{H}, \mu)$. On calcule :

$$
\begin{aligned}
&(\lambda^{\beta,\alpha}_{\xi'_2})^*(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} U_{\mathcal{H}})\sigma_{2\mu^o}(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \sigma_\mu)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} U_H)(\sigma_\mu \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)([\xi'_1 \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi_1] \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))\\
&= (\lambda^{\beta,\alpha}_{\xi'_2})^*(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} U_{\mathcal{H}})\sigma_{2\mu^o}(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \sigma_\mu)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} U_H)\lambda^{\alpha,\beta}_{\xi_1}(\xi'_1 \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))\\
&= U_{\mathcal{H}}\lambda^{\alpha,\hat\beta}_{\xi_1}(\lambda^{\beta,\alpha}_{\xi'_2})^* U_H(\xi'_1 \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))\\
&\qquad \text{d'après le lemme précédent,}\\
&= U_{\mathcal{H}}(\xi_1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((\omega_{\xi'_1,\xi'_2} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))))\\
&\qquad \text{d'après la proposition 3.3.2.}
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi l'égalité souhaitée pour tout $\xi_1 \in D({}_\alpha\mathcal{H}, \mu)$. Par continuité, elle reste vérifiée pour tout $\xi_1 \in \mathcal{H}$. ■

3.6.4 Proposition — *Pour tous $a, b \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$, on a :*

$$
(id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma)(\Gamma(a))\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(b)}
$$

$$
= (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi b J_\Phi)(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} U_{\mathcal{H}})\sigma_{2\mu^o}(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \sigma_\mu)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} U_H)(\sigma_\mu \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)\rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(a)}
$$

DÉMONSTRATION : Soient $\xi_1 \in \mathcal{H}$ et $\xi'_1, \xi'_2 \in D(H_\beta, \mu^o)$. On calcule alors :

$$(\lambda^{\beta,\alpha}_{\xi'_2})^*(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi b J_\Phi)(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} U_{\mathcal{H}})\sigma_{2\mu^o}(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \sigma_\mu)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} U_H)(\sigma_\mu \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)\rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(a)}(\xi'_1 \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi_1)$$

$$= (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi b J_\Phi)(\lambda^{\beta,\alpha}_{\xi'_2})^*(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} U_{\mathcal{H}})\sigma_{2\mu^o}(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \sigma_\mu)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} U_H)(\sigma_\mu \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)\rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(a)}(\xi'_1 \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi_1)$$

$$= (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi b J_\Phi)U_{\mathcal{H}}(\xi_1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((\omega_{\xi'_1,\xi'_2} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))))$$

d'après la proposition précédente,

$$= \Gamma((\omega_{\xi'_1,\xi'_2} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(b)}\xi_1$$

d'après la proposition 3.3.1,

$$= (\lambda^{\beta,\alpha}_{\xi'_2})^*(id \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma)(\Gamma(a))\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(b)}(\xi'_1 \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi_1)$$

La proposition en découle facilement. ■

3.6.5 LEMME — *On a* $(\Gamma \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id)(X) = (U_H \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} X)(U_H^* \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)$ *pour tout* $X \in M \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} M \subset (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \hat\beta(N))'$.

DÉMONSTRATION : D'après le corollaire 3.5.12, Γ est implémenté par U_H ; le lemme en découle. ■

3.6.6 PROPOSITION — *Pour tous* $a, b \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$, *on a :*

$$(\Gamma \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(b)}$$

$$= (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi b J_\Phi)(U_H \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} W^*)(U_H^* \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)\rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(a)}$$

DÉMONSTRATION : La proposition provient du calcul suivant :

$$(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi b J_\Phi)(U_H \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} W^*)(U_H^* \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)\rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(a)}$$

$$= (U_H \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi b J_\Phi)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} W^*)\rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(a)}U_H^*$$

$$= (U_H \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi b J_\Phi)W^*\rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(a)})U_H^*$$

$$= (U_H \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Gamma(a)\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(b)})U_H^*$$

d'après la proposition 3.3.1,

$$= (U_H \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Gamma(a))(U_H^* \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(b)}$$

$$= (\Gamma \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(b)}$$

d'après le lemme précédent.

■

3.6.7 Corollaire — *La relation suivante est vérifiée :*

$$(U_H^* \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(\sigma_{\mu^o} \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} U_H^*)\sigma_{2\mu}(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \sigma_{\mu^o})(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} W)$$

$$= (1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} W)(U_H^* \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)$$

Démonstration : D'après la relation de coproduit et les égalités obtenues dans les propositions 3.6.4 avec $\mathcal{H} = H_\Phi$ et 3.6.6, on obtient facilement la relation :

$$(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} W^*)\sigma_{2\mu^o}(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \sigma_\mu)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} U_H)$$

$$= (U_H \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} W^*)(U_H^* \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(\sigma_{\mu^o} \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)$$

Le passage à l'adjoint termine la preuve. ■

Théorème 4 — *W est un unitaire pseudo-multiplicatif au-dessus de N pour $\alpha, \hat\beta, \beta$.*

Démonstration : W est un unitaire de $H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H$ dans $H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} H$ qui vérifie les quatre relations de commutation nécessaires. Le corollaire précédent appliqué dans le cas où $H = H_\Phi$ termine la preuve. ■

Les résultats analogues pour la version à droite s'énoncent ainsi :

Théorème 5 — *Si $W' = U'_{H_\Psi}$, alors la relation suivante est vérifiée :*

$$(W' \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(\sigma_\mu \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} U'_H)\sigma_{2\mu^o}(1 \underset{N^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \sigma_\mu)(1 \underset{N^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} U'_H)$$

$$= (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} U'_H)(W' \underset{N^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} 1)$$

En particulier, si $H = H_\Psi$, W' est un unitaire pseudo-multiplicatif au-dessus de N^o pour $\beta, \alpha, \hat\alpha$.

Démonstration : Il suffit, par exemple, d'appliquer les résultats précédents au bimodule de Hopf symétrisé. ■

3.7 Algèbre de von Neumann engendrée par “la jambe droite” de l'unitaire fondamental.

3.7.1 Définition — On appelle $A(U'_H)$ (resp. $\mathcal{A}(U'_H)$) la fermeture faible de l'espace vectoriel engendré (resp. l'algèbre de von Neumann engendrée) par les opérateurs $(\omega_{v,w} * id)(U'_H)$ avec $v \in D({}_{\hat{\alpha}}(H_\Psi), \mu)$ et $w \in D((H_\Psi)_\beta, \mu^o)$.

3.7.2 Proposition —

i) $A(U'_H)$ *est une algèbre non dégénérée involutive i.e* $A(U'_H) = \mathcal{A}(U'_H)$ *;*

ii) *On a* $\alpha(N) \cup \beta(N) \subseteq A(U'_H) = \mathcal{A}(U'_H) \subseteq M \subseteq \hat{\alpha}(N)'$ *;*

iii) *Soit* $x \in \mathcal{L}(H)$*. Alors* $x \in \mathcal{A}(U'_H)'$ *si et seulement si* $x \in \alpha(N)' \cap \beta(N)'$ *et vérifie :*

$$U'_H(1 \underset{N^o}{{}_{\hat{\alpha}}\otimes_\beta} x) = (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} x)U'_H$$

En fait, on montrera plus loin l'égalité $A(U'_H) = \mathcal{A}(U'_H) = M$.

Démonstration : Il s'agit en fait de résultats obtenus dans [EV00] (théorème 6.1) pour le second et le troisième points. Quant au premier, il résulte de [Eno02] (proposition 3.6) et du corollaire 3.3.5, qui prouve que $A(U'_H)$ est involutive. ∎

On énonce alors un théorème rassemblant les résultats de cette section :

Théorème 6 — *Soient* $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ *un bimodule de Hopf,* T_L *(resp.* T_R*) un poids opératoriel normal, semifini et fidèle invariant à gauche (resp. à droite). Alors, pour tout poids* μ *normal, semifini et fidèle sur* N*, si* $\Phi = \mu \circ \alpha^{-1} \circ T_L$*, l'application suivante :*

$$v \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} \Lambda_\Phi(a) \mapsto \sum_{i \in I} \xi_i \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))$$

pour tout $v \in D((H_\Phi)_\beta, \mu^o)$*, tout* $a \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi$*, toute* (N^o, μ^o)*-base* $(\xi_i)_{i \in I}$ *de* $(H_\Phi)_\beta$ *et où* $\hat{\beta}(x) = J_\Phi \alpha(x^*) J_\Phi$*, se prolonge en un opérateur unitaire* W^* *de* $H_\Phi \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} H_\Phi$ *dans* $H_\Phi \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_\Phi$*.* W *est alors un unitaire pseudo-multiplicatif au-dessus de* N *pour* $\alpha, \hat{\beta}, \beta$*. De plus, pour tout* $x \in M$*, on a* $\Gamma(x) = W^*(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} x)W$*.*

On dispose de résultats analogues avec des constructions à partir de T_R*.*

Chapitre 4

CONSTRUCTION DE L'ANTIPODE

Dans ce qui suit, on ajoute une hypothèse supplémentaire naturelle, qui lie le poids opératoriel invariant à gauche avec l'antireprésentation de la base et le poids invariant à droite avec la représentation de la base. À l'aide de ces hypothèses, on construit une antipode non bornée, dont la décomposition polaire conduit à une coinvolution et à un groupe à un paramètre d'automorphismes (« groupe d'échelle »).

4.1 Définition de la structure de groupoïde quantique mesuré.

4.1.1 Définition — On dit qu'un poids opératoriel T_L normal, semifini et fidèle de M^+ dans $\overline{\alpha(N)}^+$ est β-**adapté** s'il existe un poids ν_L normal, semifini et fidèle sur N tel que $\sigma_t^{T_L}(\beta(n)) = \beta(\sigma_{-t}^{\nu_L}(n))$ pour tous $n \in N$ et $t \in \mathbb{R}$. On dit alors que T_L est β-adapté par rapport à ν_L.

De même, on dit qu'un poids opératoriel T_R normal, fidèle, semifini de M^+ dans $\overline{\beta(N)}^+$ est α-**adapté** s'il existe un poids ν_R normal, semifini et fidèle sur N tel que $\sigma_t^{T_R}(\alpha(n)) = \alpha(\sigma_t^{\nu_R}(n))$ pour tous $n \in N$ et $t \in \mathbb{R}$. On dit alors que T_R est α-adapté par rapport à ν_R.

4.1.2 Définition — On dit qu'un bimodule de Hopf $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ muni d'un poids opératoriel T_L de M^+ dans $\overline{\alpha(N)}^+$ normal, semifini, fidèle, invariant à gauche et d'un poids opératoriel T_R de M^+ dans $\overline{\beta(N)}^+$ normal, semifini, fidèle, invariant à droite est un **groupoïde quantique mesuré** s'il existe un poids ν normal, semifini et fidèle sur N tel que T_L est β-adapté par rapport à ν et T_R est α-adapté par rapport à ν. On note alors $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ le groupoïde quantique mesuré et on dit, dans ces conditions, que le poids ν est un **poids quasi-invariant**.

Remarque — Si T_L est un poids opératoriel de M^+ vers $\overline{\alpha(N)}^+$ normal, semifini et fidèle est β-adapté pour ν et si R est une coinvolution de M, alors $R \circ T_L \circ R$ est un poids opératoriel normal, semifini et fidèle de M^+ vers $\overline{\beta(N)}^+$ α-adapté par rapport au même poids ν.

4.1.3 Lemme — *Pour tout poids μ normal, semifini et fidèle sur N et tout poids opératoriel T_L, β-adapté par rapport au poids ν, il existe un poids opératoriel S^μ de M vers $\beta(N)$ normal, semifini, fidèle et α-adapté par rapport à μ tel que $\mu \circ \alpha^{-1} \circ T_L = \nu \circ \beta^{-1} \circ S^\mu$. De même, pour* *tout poids χ normal, semifini et fidèle sur N et tout poids opératoriel T_R, α-adapté par rapport au poids ν, il existe un poids opératoriel S_χ de M vers $\alpha(N)$ normal, semifini, fidèle et β-adapté par rapport à μ tel que $\chi \circ \beta^{-1} \circ T_R = \nu \circ \beta^{-1} \circ S_\chi$.*

DÉMONSTRATION : Pour tout $n \in N$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\sigma_t^{\mu\circ\alpha^{-1}\circ T_L}(\beta(n)) = \sigma_t^{\nu\circ\beta^{-1}}(\beta(n))$. D'après le théorème de Haagerup, on peut conclure à l'existence de S^μ dont le caractère adapté est clair. Le reste du lemme est de démonstration analogue. ■

On désigne par $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ un groupoïde quantique mesuré. On dispose du groupoïde quantique mesuré opposé $(N^o, M, \beta, \alpha, \varsigma_N \circ \Gamma, \nu^o, T_R, T_L)$. On note :

$$\Phi = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L \quad \text{et} \quad \Psi = \nu \circ \beta^{-1} \circ T_R$$

On note $S^\nu = S_L$ et $S_\nu = S_R$. On a alors $\Lambda_\Phi(\mathcal{T}_{\Phi,S_L}) \subseteq J_\Phi\Lambda_\Phi(\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{S_L}) \subseteq D((H_\Phi)_\beta, \nu^o)$ d'après les propositions 3.2.2 et 3.2.3 et, pour tout $a \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{S_L}$, on a $R^{\beta,\nu^o}(J_\Phi\Lambda_\Phi(a)) = J_\Phi\Lambda_{S_L}(a)J_\nu$.

4.2 L'opérateur G.

On construit ici un opérateur non borné sur H_Φ fermé dont la décomposition polaire va fournir les éléments nécessaires à la construction de l'antipode. On dispose des lemmes suivants :

4.2.1 LEMME — *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, tout $x \in \mathcal{D}(\sigma^\nu_{-i\lambda})$ et tous $\xi, \xi' \in \Lambda_\Phi(\mathcal{T}_{\Phi,T_L})$, on a, d'une part :*

$$\begin{aligned} \alpha(x)\Delta_\Phi^\lambda &\subseteq \Delta_\Phi^\lambda \alpha(\sigma^\nu_{i\lambda}(x)) \\ R^{\alpha,\nu}(\Delta_\Phi^\lambda \xi)\Delta_\nu^\lambda &\subseteq \Delta_\Phi^\lambda R^{\alpha,\nu}(\xi) \\ \textit{et } \sigma^\nu_{i\lambda}(<\Delta_\Phi^\lambda\xi, \xi'>_{\alpha,\nu}) &= <\xi, \Delta_\Phi^{\overline{\lambda}}\xi'>_{\alpha,\nu} \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

et, d'autre part :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(x)\Delta_\Phi^\lambda &\subseteq \Delta_\Phi^\lambda \hat{\beta}(\sigma^\nu_{i\lambda}(x)) \\ R^{\hat{\beta},\nu^o}(\Delta_\Phi^\lambda \xi)\Delta_\nu^\lambda &\subseteq \Delta_\Phi^\lambda R^{\hat{\beta},\nu^o}(\xi) \\ \textit{et } \sigma^\nu_{i\lambda}(<\Delta_\Phi^\lambda\xi, \xi'>_{\hat{\beta},\nu^o}) &= <\xi, \Delta_\Phi^{\overline{\lambda}}\xi'>_{\hat{\beta},\nu^o}\ . \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

DÉMONSTRATION : Aisée. ■

4.2.2 LEMME — *[Sau86] Il est possible de définir, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, un opérateur $\Delta_\Phi^\lambda \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_\beta\ \Delta_\Phi^\lambda$ fermé qui opère de manière naturelle sur les tenseurs élémentaires.*

DÉMONSTRATION : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On définit l'opérateur linéaire Δ_λ sur le produit tensoriel algébrique $\Lambda_\Phi(\mathcal{T}_{\Phi,S_L}) \odot \mathcal{D}(\Delta_\Phi^\lambda) \subseteq D({}_\alpha H_\Phi, \nu) \odot H_\Phi$ par la formule :

$$\Delta_\lambda(\xi \odot \eta) = \Delta_\Phi^\lambda \xi \odot \Delta_\Phi^\lambda \eta$$

Pour tout $\xi, \xi' \in \Lambda_\Phi(\mathcal{T}_{\Phi,S_L})$, $\eta \in \mathcal{D}(\Delta_\Phi^\lambda)$ et $\eta' \in \mathcal{D}(\Delta_\Phi^{\overline{\lambda}})$, on calcule :

$$\begin{aligned}(\Delta_\lambda(\xi \odot \eta)|\xi' \odot \eta') &= (\hat{\beta}(< \Delta_\Phi^\lambda \xi, \xi' >_{\alpha,\nu})\Delta_\Phi^\lambda \eta|\eta') \\ &= (\Delta_\Phi^\lambda \hat{\beta}(\sigma_{i\lambda}^\nu(< \Delta_\Phi^\lambda \xi, \xi' >_{\alpha,\nu}))\eta|\eta') \qquad \text{relations (4.2.1)} \\ &= (\hat{\beta}(< \xi, \Delta_\Phi^{\overline{\lambda}} \xi' >_{\alpha,\nu})\eta|\Delta_\Phi^{\overline{\lambda}}\eta') \qquad \text{relations (4.2.1)} \\ &= (\xi \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat{\beta}}\ \eta|\Delta_\Phi^{\overline{\lambda}}\xi' \ {}_\alpha\underset{\nu}{\otimes}_{\hat{\beta}}\ \Delta_\Phi^{\overline{\lambda}}\eta').\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, Δ_λ passe au quotient pour donner alors un opérateur $\tilde{\Delta}_\lambda$ densément défini dans $H_\Phi \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat{\beta}}\ H_\Phi$. De plus, les égalités précédentes prouvent que $\tilde{\Delta}_{\overline{\lambda}} \subseteq \tilde{\Delta}_\lambda^*$. Ainsi, $\tilde{\Delta}_\lambda^*$ est densément défini, ce qui signifie que $\tilde{\Delta}_\lambda$ est fermable. L'opérateur recherché désigne cette fermeture. On renvoie à l'article [Sau86] pour le détail des idées dans un cadre plus général. ∎

Comme, pour tout $x \in N$, on a $J_\Phi \alpha(x) = \hat{\beta}(x^*)J_\Phi$, on peut définir, d'après [Sau83a], un opérateur antilinéaire unitaire :

$$J_\Phi \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat{\beta}}\ J_\Phi : H_\Phi \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat{\beta}}\ H_\Phi \to H_\Phi \ {}_{\hat{\beta}}\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ H_\Phi$$

dont l'adjoint est $J_\Phi \ {}_{\hat{\beta}}\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ J_\Phi$. Aussi, par composition, on voit qu'il est possible de définir de manière naturelle un opérateur antilinéaire et fermé :

$$S_\Phi \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat{\beta}}\ S_\Phi : H_\Phi \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat{\beta}}\ H_\Phi \to H_\Phi \ {}_{\hat{\beta}}\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ H_\Phi$$

De la même manière, si $F_\Phi = S_\Phi^*$, alors on peut définir un opérateur antilinéaire et fermé $F_\Phi \ {}_{\hat{\beta}}\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ F_\Phi : H_\Phi \ {}_{\hat{\beta}}\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ H_\Phi \to H_\Phi \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat{\beta}}\ H_\Phi$ et on a $(S_\Phi \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat{\beta}}\ S_\Phi)^* = F_\Phi \ {}_{\hat{\beta}}\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ F_\Phi$.

4.2.3 Lemme — *Pour tous $c \in (\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L})^*(\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R})$, $e \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$ et toute famille $(e_k)_{k\in K}$ d'éléments de $\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}$ telle que $e_k \xrightarrow{w} 1$, on a :*

$$(\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Psi\Lambda_\Psi(e_k)})^*(1 \ {}_\beta\underset{N}{\otimes}_\alpha\ J_\Phi e J_\Phi)U_{H_\Psi}\rho^{\alpha,\hat{\beta}}_{\Lambda_\Phi(c^*)} \xrightarrow{w} (\lambda^{\hat{\alpha},\beta}_{\Lambda_\Psi(c)})^* U'^*_{H_\Phi}\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)}$$

Démonstration : Pour tout $k \in K$, on a :

$$\begin{aligned}(\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Psi\Lambda_\Psi(e_k)})^*(1 \ {}_\beta\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ J_\Phi e J_\Phi)U_{H_\Psi}\rho^{\alpha,\hat{\beta}}_{\Lambda_\Phi(c^*)} &= (\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Psi\Lambda_\Psi(e_k)})^*\Gamma(c^*)\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)} \\ &\qquad \text{d'après la proposition 3.3.1,} \\ &= \left(\Gamma(c)\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Psi\Lambda_\Psi(e_k)}\right)^* \rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)} \\ &= \left((J_\Psi e_k J_\Psi \ {}_\beta\underset{N}{\otimes}_\alpha\ 1)U'_{H_\Phi}\lambda^{\hat{\alpha},\beta}_{\Lambda_\Psi(c)}\right)^* \rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)} \\ &\qquad \text{d'après la proposition 3.3.1,} \\ &= (\lambda^{\hat{\alpha},\beta}_{\Lambda_\Psi(c)})^* U'^*_{H_\Phi}(J_\Psi e_k^* J_\Psi \ {}_\beta\underset{N}{\otimes}_\alpha\ 1)\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)} \\ &= (\lambda^{\hat{\alpha},\beta}_{\Lambda_\Psi(c)})^* U'^*_{H_\Phi}\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)} J_\Psi e_k^* J_\Psi\end{aligned}$$

Le résultat en découle. ∎

4.2.4 Lemme — *Pour tous* $c \in (\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L})^*(\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R})$, $e \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$, $\eta \in H_\Psi$, $v \in H_\Phi$ *et toute famille* $(e_k)_{k\in K}$ *d'éléments de* $\in \mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}$ *telle que* $e_k \xrightarrow{w} 1$, *la famille suivante :*

$$((U_{H_\Psi}(\eta \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(c^*))|J_\Psi\Lambda_\Psi(e_k) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e^* J_\Phi v))_{k\in K}$$

converge vers $(\eta|(\rho_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)})^* U'_{H_\Phi}(\Lambda_\Psi(c) \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} v))$.

Démonstration : On applique le lemme précédent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(U_{H_\Psi}(\eta \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(c^*))|J_\Psi\Lambda_\Psi(e_k) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e^* J_\Phi v) &= ((\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Psi\Lambda_\Psi(e_k)})^*(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e J_\Phi) U_{H_\Psi} \rho^{\alpha,\hat\beta}_{\Lambda_\Phi(c^*)}\eta|v) \\ &\xrightarrow[k]{} ((\lambda^{\hat\alpha,\beta}_{\Lambda_\Psi(c)})^* U'^*_{H_\Phi} \rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)}\eta|v) \\ &= (\eta|(\rho_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)})^* U'_{H_\Phi}(\Lambda_\Psi(c) \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} v))\end{aligned}$$

■

4.2.5 Proposition — *Soient* $(\eta_i)_{i\in I}$ *une* (N,ν)*-base de* ${}_\alpha H$, $\Xi \in H_\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H$, $u \in D({}_\alpha H, \nu)$, $c \in (\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L})^*(\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R})$, $h \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$ *et* $e \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi^* \cap \mathcal{N}_{T_L}^*$. *On a alors :*

$$\lim_k \lim_{J\subset I, J finie} \sum_{i\in J} (\eta_i \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} h^*(\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e_k)})^* U_{H_\Psi}((\rho^{\beta,\alpha}_{\eta_i})^*\Xi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(c^*))|u \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} J_\Phi\Lambda_\Phi(e^*))$$

existe et, est égale à $((\rho^{\beta,\alpha}_u)^*\Xi|(\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)})^* U'_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(c) \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \Lambda_\Phi(h)))$.

Démonstration : On a, pour tout $i \in I$ et tout $k \in K$:

$$(\eta_i \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} h^*(\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e_k)})^* U_{H_\Psi}((\rho^{\beta,\alpha}_{\eta_i})^*\Xi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(c^*))|u \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} J_\Phi\Lambda_\Phi(e^*))$$

$$= (\hat\beta(<\eta_i, u>_{\alpha,\nu})(\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e_k)})^* U_{H_\Psi}((\rho^{\beta,\alpha}_{\eta_i})^*\Xi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(c^*))|g J_\Phi\Lambda_\Phi(e^*))$$

d'après la définition du produit scalaire,

$$= ((\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e_k)})^*(1 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \hat\beta(<\eta_i, u>_{\alpha,\nu}) U_{H_\Psi}((\rho^{\beta,\alpha}_{\eta_i})^*\Xi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(c^*))|J_\Phi e^* J_\Phi\Lambda_\Phi(h)))$$

d'après le lemme 3.4.1,

$$= ((\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e_k)})^* U_{H_\Psi}(\beta(<\eta_i, u>_{\alpha,\nu})(\rho^{\beta,\alpha}_{\eta_i})^*\Xi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(c^*))|J_\Phi e^* J_\Phi\Lambda_\Phi(h))$$

d'après la relation de commutation de la proposition 3.4.2,

D'où :

$$\sum_{i\in I} (\eta_i \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} h^*(\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e_k)})^* U_{H_\Psi}((\rho^{\beta,\alpha}_{\eta_i})^*\Xi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(c^*))|u \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} J_\Phi\Lambda_\Phi(e^*))$$

$$= (U_{H_\Psi}((\rho^{\beta,\alpha}_u)^*\Xi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(c^*))|J_\Phi\Lambda_\Phi(e_k) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi e^* J_\Phi\Lambda_\Phi(h))$$

d'après les propriétés des (N,ν)-bases de ${}_\alpha H$, et d'après le lemme 4.2.4, on a :

$$\lim_k \sum_{i\in I}(\eta_i \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} h^*(\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e_k)})^* U_{H_\Psi}((\rho^{\beta,\alpha}_{\eta_i})^*\Xi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(c^*))|u \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} J_\Phi\Lambda_\Phi(e^*))$$
$$= ((\rho^{\beta,\alpha}_u)^*\Xi|(\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)})^* U'_{H_\Phi}(\Lambda_\Psi(c) \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \Lambda_\Phi(h)))$$

■

4.2.6 Proposition — *Pour tous $a,c\in(\mathcal{N}_\Phi\cap\mathcal{N}_{T_L})^*(\mathcal{N}_\Psi\cap\mathcal{N}_{T_R})$, $b,d\in\mathcal{T}_{\Psi,T_R}$ et $g,h\in\mathcal{T}_{\Phi,S_L}$, on a :*

$$U^*_{H_\Phi}\Gamma(g^*)(\Lambda_\Phi(h) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U^*_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((cd)^*))) \in \mathcal{D}(S_\Phi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} S_\Phi)$$

et alors, on a :

$$\sigma_\nu(S_\Phi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} S_\Phi) U^*_{H_\Phi}\Gamma(g^*)(\Lambda_\Phi(h) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U^*_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((cd)^*)))$$
$$= U^*_{H_\Phi}\Gamma(h^*)(\Lambda_\Phi(g) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(c) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((ab)^*)))$$

Démonstration : On désigne par Ξ_1 le vecteur $U'_{H_\Phi}(\Lambda_\Psi(ab) \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \Lambda_\Phi(h))$ et par Ξ_2 le vecteur $U'_{H_\Phi}(\Lambda_\Psi(cd) \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \Lambda_\Phi(g))$. Alors, pour tous $e,f\in\mathcal{N}_{T_L}\cap\mathcal{N}_\Phi\cap\mathcal{N}^*_{T_L}\cap\mathcal{N}^*_\Phi$ on calcule le produit scalaire de $F_\Phi J_\Phi\Lambda_\Phi(e^*) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} F_\Phi J_\Phi\Lambda_\Phi(f)$ par le vecteur :

$$U^*_{H_\Phi}\Gamma(g^*)(\Lambda_\Phi(h) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((cd)^*)))$$

Cette quantité est égal au produit scalaire de $J_\Phi\Lambda_\Phi(e) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} J_\Phi\Lambda_\Phi(f^*)$ par le vecteur :

$$U^*_{H_\Phi}\Gamma(g^*)(\Lambda_\Phi(h) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((cd)^*)))$$

ce qui est égal à :

$$\lim_k\sum_i(J_\Phi\Lambda_\Phi(e) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} J_\Phi\Lambda_\Phi(f^*)|\eta_i \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} g^*(\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Psi\Lambda_\Psi(e_k)})^* U_{H_\Psi}((\rho^{\beta,\alpha}_{\eta_i})^*\Xi_1 \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((cd)^*)))$$

d'après le corollaire 3.5.9,

$$= ((\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(f)})^*\Xi_2|(\rho^{\beta,\alpha}_{J_\Phi\Lambda_\Phi(e)})^*\Xi_1)$$

d'après la proposition précédente avec $\Xi=\Xi_1$,

$$= \lim_k\sum_i(\eta_i \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} h^*(\lambda^{\beta,\alpha}_{J_\Psi\Lambda_\Psi(e_k)})^* U_{H_\Psi}((\rho^{\beta,\alpha}_{\eta_i})^*\Xi_2 \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((ab)^*))|J_\Phi\Lambda_\Phi(f) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} J_\Phi\Lambda_\Phi(e^*))$$

d'après la proposition précédente avec $\Xi=\Xi_2$.

Cette dernière quantité est égal au produit scalaire du vecteur :

$$U^*_{H_\Phi}\Gamma(h^*)(\Lambda_\Phi(g) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(c) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((ab)^*)))$$

par le vecteur $J_\Phi\Lambda_\Phi(f) \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\ J_\Phi\Lambda_\Phi(e^*)$ d'après la proposition 3.5.9, et qui, finalement, est égal au produit scalaire du vecteur :

$$\sigma_{\nu^o}U^*_{H_\Phi}\Gamma(h^*)(\Lambda_\Phi(g) \ {}_\beta\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))})^*U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(c) \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\ \Lambda_\Phi((ab)^*)))$$

par le vecteur $J_\Phi\Lambda_\Phi(e^*) \ {}_{\hat\beta}\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ J_\Phi\Lambda_\Phi(f)$.

Comme l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $J_\Phi\Lambda_\Phi(e^*) \ {}_{\hat\beta}\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ J_\Phi\Lambda_\Phi(f)$ avec $e, f \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}^*_{T_L} \cap \mathcal{N}^*_\Phi$ forme un cœur pour $F_\Phi \ {}_{\hat\beta}\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ F_\Phi$, on a :

$$U^*_{H_\Phi}\Gamma(g^*)(\Lambda_\Phi(h) \ {}_\beta\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^*U^*_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(a) \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\ \Lambda_\Phi((cd)^*))) \in \mathcal{D}(S_\Phi \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\ S_\Phi)$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}(S_\Phi \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\ S_\Phi)U^*_{H_\Phi}\Gamma(g^*)(\Lambda_\Phi(h) \ {}_\beta\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^*U^*_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(a) \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\ \Lambda_\Phi((cd)^*)))\\ = \sigma_{\nu^o}U^*_{H_\Phi}\Gamma(h^*)(\Lambda_\Phi(g) \ {}_\beta\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))})^*U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(c) \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\ \Lambda_\Phi((ab)^*)))\end{aligned}$$

■

4.2.7 PROPOSITION — *Il existe un unique opérateur G antilinéaire densément défini sur H_Φ fermé tel que l'espace vectoriel engendré par :*

$$\{(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^*U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(a) \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\ \Lambda_\Phi((cd)^*))|a, c \in (\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L})^*(\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}), b, d \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}\}$$

soit un cœur pour G et que :

$$\begin{aligned}G(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^*U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(a) \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\ \Lambda_\Phi((cd)^*))\\ = (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))})^*U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(c) \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\ \Lambda_\Phi((ab)^*))\end{aligned}$$

pour tous $a, c \in (\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L})^*(\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R})$ et $b, d \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}$. De plus, G est involutive c'est-à-dire $G\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G)$ et $G^2 = id_{|\mathcal{D}(G)}$.

DÉMONSTRATION : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient $k_n \in \mathbb{N}$, $a(n,l), c(n,l) \in (\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L})^*(\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R})$ et $b(n,l), d(n,l) \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}$ et soit $w \in H_\Phi$ tels que :

$$v_n = \sum_{l=1}^{k_n}(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b(n,l)^*))})^*U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(a(n,l)) \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\ \Lambda_\Phi((c(n,l)d(n,l))^*)) \to 0$$

$$w_n = \sum_{l=1}^{k_n}(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d(n,l)^*))})^*U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(c(n,l)) \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\ \Lambda_\Phi((a(n,l)b(n,l))^*)) \to w$$

On a $U^*_{H_\Phi}\Gamma(g^*)(\Lambda_\Phi(h) \ {}_\beta\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ v_n) \in \mathcal{D}(S_\Phi \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\ S_\Phi)$ pour tous $g, h \in \mathcal{T}_{\Phi,S_L}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la proposition précédente et on a :

$$\sigma_\nu(S_\Phi \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\ S_\Phi)U^*_{H_\Phi}\Gamma(g^*)(\Lambda_\Phi(h) \ {}_\beta\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ v_n) = U^*_{H_\Phi}\Gamma(h^*)(\Lambda_\Phi(g) \ {}_\beta\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ w_n)$$

Comme $\Lambda_\Phi(g)$ et $\Lambda_\Phi(h)$ sont dans $D((H_\Phi)_\beta, \nu^o)$, on obtient :

$$\sigma_\nu(S_\Phi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} S_\Phi)U^*_{H_\Phi}\Gamma(g^*)\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Phi(h)}v_n = U^*_{H_\Phi}\Gamma(h^*)\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Phi(g)}w_n$$

La fermeture de $S_\Phi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} S_\Phi$ entraîne que $U^*_{H_\Phi}\Gamma(h^*)\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Phi(g)}w = 0$ et donc $\Gamma(h^*)\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Phi(g)}w = 0$. Or $\mathcal{T}_{\Phi,S_L}$ est dense dans M donc, on obtient que $\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Phi(g)}w = 0$ pour tout $g \in \mathcal{T}_{\Phi,S_L}$. Maintenant, on calcule :

$$\begin{aligned} 0 = ||\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Phi(g)}w||^2 &= (\alpha(< \Lambda_\Phi(g), \Lambda_\Phi(g) >_{\beta,\nu^o})w|w) \\ &= (S_L(\sigma^\Phi_{i/2}(g)\sigma^\Phi_{-i/2}(g^*))w|w) \\ &\qquad \text{d'après la proposition 3.2.3.} \end{aligned}$$

Par densité de $\mathcal{T}_{\Phi,S_L}$, on obtient $||w||^2 = 0$ i.e $w = 0$. Ainsi la formule :

$$(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^*U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((cd)^*)) \mapsto (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))})^*U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(c) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((ab)^*))$$

définit bien un opérateur non borné sur H_Φ, qui est fermable. G désigne alors la fermeture de cet opérateur. G est densément défini d'après la relation (3.5.2). ■

Grâce à la décomposition polaire de l'opérateur fermé G, on peut donner les définitions suivantes :

4.2.8 Définition —

i) On définit $D = G^*G$ qui est donc un opérateur strictement positif (i.e positif, auto adjoint et injectif) agissant sur H_Φ ;
ii) On définit aussi l'opérateur anti-unitaire I sur H_Φ tel que $G = ID^{1/2}$.

Comme G est involutive, on a $I = I^*$, $I^2 = 1$ et $IDI = D^{-1}$.

4.3 Une relation de commutation fondamentale.

On établit une relation de commutation entre G et des éléments de la forme $(\omega_{v,w} * id)(U'_{H_\Phi})$. On rappelle que $W' = U'_{H_\Psi}$.

4.3.1 Lemme — *Soit ξ_i une (N^o, ν^o)-base pour $(H_\Psi)_\beta$.*

i) on a $W'(w' \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} w) = \sum_i \xi_i \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\omega_{w',\xi_i} * id)(W')w$ pour tout $w' \in D({}_{\hat\alpha}H_\Psi, \nu)$ et tout $w \in H_\Psi$, et, si $\delta_i = (\omega_{w',\xi_i} * id)(W')w$, alors $\alpha(< \xi_i, \xi_i >_{\beta,\nu^o})\delta_i = \delta_i$. De plus, si $w \in D({}_{\hat\alpha}(H_\Psi), \nu)$, alors $\delta_i \in D({}_{\hat\alpha}(H_\Psi), \nu)$.

ii) Si $v, v' \in D((H_\Psi)_\beta, \nu^o)$, alors, pour tout $i \in I$, il existe $\zeta_i \in D((H_\Psi)_\beta, \nu^o)$ tel que $\alpha(< \xi_i, \xi_i >_{\beta,\nu^o})\zeta_i = \zeta_i$ et $W'(v' \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} v) = \sum_i \xi_i \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \zeta_i$.

Démonstration : Il s'agit du lemme 3.4 de [Eno02]. ■

Remarque — Si $v, v' \in \Lambda_\Psi(\mathcal{T}_{\Psi,T_R}) \subseteq D({}_{\hat\alpha}H, \nu) \cap D(H_\beta, \nu^o)$, alors $\zeta_i \in D({}_{\hat\alpha}H, \nu) \cap D(H_\beta, \nu^o)$ avec les notations du lemme précédent.

4.3.2 Lemme — *Soient $v, v' \in D(H_\beta, \nu^o)$ et soient $w, w' \in D({}_{\hat\alpha}H, \nu)$. On a la relation suivante :*

$$(\omega_{v,w} * id)(U'^*_H)(\omega_{v',w'} * id)(U'^*_H) = \sum_i (\omega_{\zeta_i,\delta_i} * id)(U'^*_H)$$

avec les notations précédentes. (La somme converge faiblement.)

Démonstration : Il s'agit de la proposition 3.6 de [Eno02] qui stipule, de plus que la convergence est normique, mais , pour la compréhension du lecteur, on donne ici une preuve du lemme. Pour tous $\xi, \eta \in H$, on a :

$$((\omega_{v,w} * id)(U'^*_H)(\omega_{v',w'} * id)(U'^*_H)\xi|\eta) = (U'^*_H(v \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} (\omega_{v',w'} * id)(U'^*_H)\xi)|w \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \eta)$$

$$= ((1 \underset{N^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} U'^*_H)\sigma_{2\nu}(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \sigma_{\nu^o})(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_{\hat\alpha}} U'^*_H)(v \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_{\hat\alpha}} v' \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi)|w' \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} w \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \eta)$$

$$= ((W'^* \underset{N^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} 1)(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} U'^*_H)(W' \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(\sigma_\nu \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(v \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_{\hat\alpha}} v' \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi)|w' \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} w \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \eta)$$

d'après le théorème 6,

$$= ((1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} U'^*_H)(W'(v' \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} v) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi)|W'(w' \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} w) \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \eta)$$

$$= \sum_{i,j\in I} (\xi_i \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} U'^*_H(\zeta_i \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi)|\xi_j \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta_j \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \eta)$$

d'après le lemme précédent,

$$= \sum_{i\in I} ((\alpha(<\xi_i, \xi_i>_{\beta,\nu^o}) \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} 1)U'^*_H(\zeta_i \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi)|\delta_i \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \eta)$$

$$= \sum_{i\in I} (U'^*_H(\alpha(<\xi_i, \xi_i>_{\beta,\nu^o})\zeta_i \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi)|\delta_i \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} \eta) = (\sum_{i\in I} (\omega_{\zeta_i,\delta_i} * id)(U'^*_H)\xi|\eta)$$

car, pour tout $i \in I$, $\alpha(<\xi_i, \xi_i>_{\beta,\nu^o})\zeta_i = \zeta_i$. ∎

4.3.3 Lemme — *Pour tous $a, c \in (\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L})^*(\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R})$ et $b, d, a', b', c', d' \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}$, on a :*

$$(\omega_{\Lambda_\Psi(a'b'),\Lambda_\Psi(c'd')} * id)(U'^*_{H_\Phi})(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((cd)^*))$$

$$= \sum_{i\in I} (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b'^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi((\omega_{\Lambda_\Psi(ab),\xi_i} * id)(W')a') \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((c'd')^*(\omega_{\xi_i,\Lambda_\Psi(cd)} * id)(W'^*)))$$

Démonstration : On se place dans les conditions de l'énoncé. On suppose, en plus, que $a \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}$. On a alors :

$$(\omega_{\Lambda_\Psi(a'b'),\Lambda_\Psi(c'd')} * id)(U'^*_{H_\Phi})(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((cd)^*))$$

$$= (\omega_{\Lambda_\Psi(a'b'),\Lambda_\Psi(c'd')} * id)(U'^*_{H_\Phi})\Lambda_\Phi((\omega_{\Lambda_\Psi(a),\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))} \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} id)(\Gamma((cd)^*)))$$

d'après la proposition 3.3.2,

$$= (\omega_{\Lambda_\Psi(a'b'),\Lambda_\Psi(c'd')} * id)(U'^*_{H_\Phi})\Lambda_\Phi((\omega_{\Lambda_\Psi(ab),\Lambda_\Psi(cd)} * id)(U'^*_{H_\Phi}))$$

d'après la proposition 3.3.4,

$$= \sum_{i\in I} \Lambda_\Phi((\omega_{(\omega_{\Lambda_\Psi(ab),\xi_i} * id)(W')\Lambda_\Psi(a'b'),(\omega_{\Lambda_\Psi(cd),\xi_i} * id)(W')\Lambda_\Psi(c'd')} * id)(U'^*_{H_\Phi}))$$

d'après le lemme 4.3.2 et la fermeture de Λ_Φ,

$$= \sum_{i\in I} \Lambda_\Phi((\omega_{(\omega_{\Lambda_\Psi(ab),\xi_i} * id)(W')a',\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b'^*))} \ {}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha \ id)(\Gamma((c'd')^*(\omega_{\xi_i,\Lambda_\Psi(cd)} * id)(W'^*))))$$

d'après la proposition 3.3.4,

$$= \sum_{i\in I} (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b'^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi((\omega_{\Lambda_\Psi(ab),\xi_i} * id)(W')a') \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat\beta} \ \Lambda_\Phi((c'd')^*(\omega_{\xi_i,\Lambda_\Psi(cd)} * id)(W'^*)))$$

d'après la proposition 3.3.2. Un argument de densité permet d'obtenir le résultat. ■

4.3.4 Proposition — *On a, pour tous $v, w \in \Lambda_\Psi(\mathcal{T}_{\Psi,T_R}\mathcal{T}_{\Psi,T_R}) \subseteq D({}_{\hat\alpha}(H_\Psi),\nu) \cap D((H_\Psi)_\beta,\nu^o)$:*

$$(\omega_{v,w} * id)(U'^*_{H_\Phi})G \subseteq G(\omega_{w,v} * id)(U'^*_{H_\Phi}) \tag{4.3.1}$$

$$\text{et } (\omega_{v,w} * id)(U'_{H_\Phi})G^* \subseteq G^*(\omega_{v,w} * id)(U'_{H_\Phi}). \tag{4.3.2}$$

Démonstration : Soient $a, c \in (\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L})^*(\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R})$ et soient $b, d, a', b', c', d' \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}$. Par définition de G,

$$(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(c) \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat\beta} \ \Lambda_\Phi((ab)^*)) \in \mathcal{D}(G)$$

et on peut calculer :

$$(\omega_{\Lambda_\Psi(a'b'),\Lambda_\Psi(c'd')} * id)(U'^*_{H_\Phi})G(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(c) \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat\beta} \ \Lambda_\Phi((ab)^*))$$

$$= (\omega_{\Lambda_\Psi(a'b'),\Lambda_\Psi(c'd')} * id)(U'^*_{H_\Phi})(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(a) \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat\beta} \ \Lambda_\Phi((cd)^*))$$

par définition de G,

$$= \sum_{i\in I} (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b'^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi((\omega_{\Lambda_\Psi(ab),\xi_i} * id)(W')a') \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat\beta} \Lambda_\Phi((c'd')^*(\omega_{\xi_i,\Lambda_\Psi(cd)} * id)(W'^*)))$$

d'après le lemme précédent. Cette quantité est égale à la somme sur $i \in I$ de :

$$G[(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d'^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi((\omega_{\Lambda_\Psi(cd),\xi_i} * id)(W')c') \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat\beta} \Lambda_\Phi((a'b')^*(\omega_{\xi_i,\Lambda_\Psi(ab)} * id)(W'^*)))]$$

d'après la définition de G. Or G est un opérateur fermé, donc on déduit que :

$$\sum_{i\in I} (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d'^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi((\omega_{\Lambda_\Psi(cd),\xi_i} * id)(W')c') \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat\beta} \ \Lambda_\Phi((a'b')^*(\omega_{\xi_i,\Lambda_\Psi(ab)} * id)(W'^*)))$$

appartient à $\mathcal{D}(G)$ et on a :

$$(\omega_{\Lambda_\Psi(a'b'),\Lambda_\Psi(c'd')} * id)(W'^*)G(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(c) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((ab)^*))$$

$$= G[\sum_{i\in I}(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d'^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi((\omega_{\Lambda_\Psi(cd),\xi_i} * id)(W')c') \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((a'b')^*(\omega_{\xi_i,\Lambda_\Psi(ab)} * id)(W'^*)))]$$

$$= G(\omega_{\Lambda_\Psi(c'd'),\Lambda_\Psi(a'b')} * id)(U'^*_{H_\Phi})(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(c) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((ab)^*))$$

d'après le lemme précédent. Or l'espace vectoriel engendré par :

$$\{(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U_{H_\Psi}(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((cd)^*)) | a,c \in (\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L})^*(\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}), b,d \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}\}$$

est un cœur pour G, donc la première inclusion est vérifiée. La seconde s'obtient par adjonction. ■

Ce dernier résultat et le lemme 3.3.5 entraînent alors une nouvelle inclusion.

4.3.5 Corollaire — *On a l'inclusion* $(\omega_{v,w} * id)(U'_{H_\Phi})D \subseteq D(\omega_{\Delta_\Psi^{-1}v,\Delta_\Psi w} * id)(U'_{H_\Phi})$ *pour tous* $v,w \in \Lambda_\Psi(\mathcal{T}_{\Psi,T_R}\mathcal{T}_{\Psi,T_R})$*, où* D *a été défini à la définition 4.2.8.*

Démonstration : On a l'inclusion suivante :

$$\begin{aligned}(\omega_{w,v} * id)(U'_{H_\Phi})G &= (\omega_{S_\Psi w,\Delta_\Psi S_\Psi v} * id)U'^*_{H_\Phi}G && \text{par lemme 3.3.5}\\ &\subseteq G(\omega_{\Delta_\Psi S_\Psi v,S_\Psi w} \star id)U'^*_{H_\Phi} && \text{par (4.3.1)}\\ &= G(\omega_{\Delta_\Psi^{-1}v,\Delta_\Psi w} * id)U'^*_{H_\Phi} && \text{par lemme 3.3.5.}\end{aligned}$$

De la même manière, on peut terminer par la séquence d'inclusions :

$$\begin{aligned}(\omega_{v,w} * id)(U'_{H_\Phi})D &= (\omega_{v,w} * id)(U'_{H_\Phi})G^* && \text{par définition 4.2.8}\\ &\subseteq G^*(\omega_{w,v} * id)(U'_{H_\Phi})G && \text{par (4.3.2)}\\ &\subseteq G^*G(\omega_{\Delta_\Psi^{-1}v,\Delta_\Psi w} * id)(U'_{H_\Phi}) && \text{par le calcul précédent}\\ &= D(\omega_{\Delta_\Psi^{-1}v,\Delta_\Psi w} * id)(U'_{H_\Phi}) && \text{par définition 4.2.8.}\end{aligned}$$

■

4.4 Le groupe d'échelle.

Dans ce paragraphe, on commence par donner un sens et on démontre la relation de commutation $U'_{H_\Phi}(\Delta_\Psi \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} D) = (\Delta_\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} D)U'_{H_\Phi}$ puis, grâce à cette formule, on construit le groupe d'échelle τ.

4.4.1 Lemme — *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *et tout* x *analytique par rapport à* ν*, on a :*

i) $\alpha(x)D^\lambda \subseteq D^\lambda\alpha(\sigma^\nu_{-i\lambda}(x))$;

ii) $\beta(x)D^\lambda \subseteq D^\lambda\beta(\sigma^\nu_{-i\lambda}(x))$.

Démonstration : Pour tous $a, c \in (\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L})^*(\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R})$, tous $b, d \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}$ et tout x analytique par rapport à ν, on a :

$$\begin{aligned}
&\beta(x)G(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U_\Psi(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((cd)^*)) \\
&= \beta(x)(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))})^* U_\Psi(\Lambda_\Psi(c) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((ab)^*)) && \text{par définition de } G, \\
&= (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))})^* (1 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \beta(x)) U_\Psi(\Lambda_\Psi(c) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((ab)^*)) && \text{d'après le lemme 3.4.1}, \\
&= (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))})^* U_\Psi(\Lambda_\Psi(c) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(\beta(x)b^*a^*)) && \text{d'après la proposition 3.4.2}, \\
&= G(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\beta(\sigma^\nu_i(x))\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U_\Psi(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((cd)^*)) && \text{par définition de } G, \\
&= G\alpha(\sigma^\nu_{-i/2}(x^*))(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U_\Psi(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((cd)^*)) && \text{d'après le lemme 3.4.1}.
\end{aligned}$$

Or l'espace vectoriel engendré par

$$\{(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U_\Psi(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((cd)^*)) | a, c \in (\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L})^*(\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}), b, d \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}\}$$

est un cœur pour G, donc on a :

$$\beta(x)G \subseteq G\alpha(\sigma^\nu_{-i/2}(x^*))$$

Par adjonction, on obtient la relation $\alpha(x)G^* \subseteq G^*\beta(\sigma^\nu_{i/2}(x^*))$. Maintenant, pour tout x analytique par rapport à ν, on a :

$$\alpha(x)D = \alpha(x)G^*G \subseteq G^*\beta(\sigma^\nu_{i/2}(x^*))G \subseteq D\alpha(\sigma^\nu_{-i}(x))$$

qui permet de conclure facilement. La seconde partie du lemme se démontre de manière tout à fait analogue :

$$\begin{aligned}
&\alpha(x)G(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U_\Psi(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((cd)^*)) \\
&= \alpha(x)(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))})^* U_\Psi(\Lambda_\Psi(c) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((ab)^*)) && \text{par définition de } G, \\
&= (\lambda^{\beta,\alpha}_{\beta(\sigma^\nu_{i/2}(x^*))\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))})^* U_\Psi(\Lambda_\Psi(c) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((ab)^*)) && \text{d'après le lemme 3.4.1}, \\
&= (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(\beta(\sigma^\nu_{-i/2}(x^*))d^*))})^* U_\Psi(\Lambda_\Psi(c) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(b^*a^*)) \\
&= G(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U_\Psi(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(\beta(\sigma^\nu_{-i/2}(x^*))d^*c^*)) && \text{par définition de } G, \\
&= G(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U_\Psi(1 \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \beta(\sigma^\nu_{-i/2}(x^*)))(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(\beta(d^*c^*)) \\
&= G(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* (1 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \beta(\sigma^\nu_{-i/2}(x^*))) U_\Psi(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(\beta(d^*c^*)) && \text{d'après la proposition 3.4.2}, \\
&= G\beta(\sigma^\nu_{-i/2}(x^*))(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U_\Psi(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((cd)^*)) && \text{d'après le lemme 3.4.1}.
\end{aligned}$$

Or l'espace vectoriel engendré par

$$\{(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(b^*))})^* U_\Psi(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi((cd)^*)) | a, c \in (\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L})^*(\mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}), b, d \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}\}$$

est un cœur pour G, donc on a :

$$\alpha(x)G \subseteq G\beta(\sigma^{\nu}_{-i/2}(x^*))$$

Par adjonction, on obtient la relation $\beta(x)G^* \subseteq G^*\alpha(\sigma^{\nu}_{i/2}(x^*))$. Maintenant, pour tout x analytique par rapport à ν, on a :

$$\beta(x)D = \beta(x)G^*G \subseteq G^*\alpha(\sigma^{\nu}_{i/2}(x^*))G \subseteq D\beta(\sigma^{\nu}_{-i}(x))$$

qui permet de conclure facilement. ■

On regroupe des relations analogues aux relations (4.2.1) et (4.2.2) pour le poids Ψ dans le lemme suivant :

4.4.2 Lemme — *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, tout $x \in \mathcal{D}(\sigma^{\nu}_{-i\lambda})$ et tous $\xi, \xi' \in \Lambda_{\Psi}(\mathcal{T}_{\Psi,T_R})$, on a, d'une part :*

$$\begin{aligned} \beta(x)\Delta_{\Psi}^{\lambda} &\subseteq \Delta_{\Psi}^{\lambda}\beta(\sigma^{\nu}_{-i\lambda}(x)) \\ R^{\beta,\nu^o}(\Delta_{\Psi}^{\lambda}\xi)\Delta_{\nu}^{-\lambda} &\subseteq \Delta_{\Psi}^{\lambda}R^{\beta,\nu^o}(\xi) \\ \textit{et } \sigma^{\nu}_{-i\lambda}(<\Delta_{\Psi}^{\lambda}\xi, \xi'>_{\beta,\nu^o}) &= <\xi, \Delta_{\Psi}^{\overline{\lambda}}\xi'>_{\beta,\nu^o} \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

et, d'autre part :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(x)\Delta_{\Psi}^{\lambda} &\subseteq \Delta_{\Psi}^{\lambda}\hat{\alpha}(\sigma^{\nu}_{-i\lambda}(x)) \\ R^{\hat{\alpha},\nu^o}(\Delta_{\Psi}^{\lambda}\xi)\Delta_{\nu}^{-\lambda} &\subseteq \Delta_{\Psi}^{\lambda}R^{\hat{\alpha},\nu^o}(\xi) \\ \textit{et } \sigma^{\nu}_{-i\lambda}(<\Delta_{\Psi}^{\lambda}\xi, \xi'>_{\hat{\alpha},\nu^o}) &= <\xi, \Delta_{\Psi}^{\overline{\lambda}}\xi'>_{\hat{\alpha},\nu^o} \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

4.4.3 Lemme — *Il est possible de définir, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, un opérateur $\Delta_{\Psi}^{\lambda} \ {}_{\beta}\!\underset{\nu}{\otimes}_{\alpha}\ D^{\lambda}$ fermé, qui opère de manière naturelle sur les tenseurs élémentaires.*

Démonstration : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. L'opérateur linéaire S_{λ} défini sur le produit tensoriel algébrique $\Lambda_{\Psi}(\mathcal{T}_{\Psi}) \odot \mathcal{D}(D^{\lambda}) \subseteq D((H_{\Psi})_{\beta}, \nu^o) \odot H_{\Phi}$ par :

$$S_{\lambda}(\xi \odot \eta) = \Delta_{\Psi}^{\lambda}\xi \odot D^{\lambda}\eta$$

passe au quotient et définit un opérateur $\tilde{S}_{\lambda}$ non borné de $H_{\Psi} \ {}_{\beta}\!\underset{\nu}{\otimes}_{\alpha}\ H_{\Phi}$. En effet, pour tous $\xi, \xi' \in \Lambda_{\Psi}(\mathcal{T}_{\Psi,T_R})$, $\eta, \in \mathcal{D}(N^{\lambda})$ et $\eta' \in \mathcal{D}(N^{\overline{\lambda}})$, on calcule :

$$\begin{aligned} (S_{\lambda}(\xi \odot \eta)|\xi' \odot \eta') &= (\alpha(<\Delta_{\Psi}^{\lambda}\xi, \xi'>_{\beta,\nu^o})D^{\lambda}\eta|\eta') \\ &= (D^{\lambda}\alpha(\sigma^{\nu}_{-i\lambda}(<\Delta_{\Psi}^{\lambda}\xi, \xi'>_{\beta,\nu^o}))\eta|\eta') && \text{lemme 4.4.1} \\ &= (\alpha(<\xi, \Delta_{\Psi}^{\overline{\lambda}}\xi'>_{\hat{\alpha},\nu^o})\eta|D^{\overline{\lambda}}) && \text{relations (4.4.1)} \\ &= (\xi \ {}_{\beta}\!\underset{\nu}{\otimes}_{\alpha}\ \eta|\Delta_{\Psi}^{\overline{\lambda}}\xi' \ {}_{\beta}\!\underset{\nu}{\otimes}_{\alpha}\ D^{\overline{\lambda}}\eta'). \end{aligned}$$

$\tilde{S}_{\lambda}$ est fermable car il contient son adjoint $\tilde{S}_{\overline{\lambda}}$. L'opérateur recherché désigne cette fermeture. On renvoie au papier [Sau86] pour le détail des idées dans un cadre plus général. ■

Avec les relations (4.4.2), il est aussi possible de définir, par le même procédé, un opérateur $\Delta_\Psi^\lambda \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} D^\lambda$ fermé dans $H_\Psi \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} H_\Phi$.

4.4.4 Proposition — *La relation de commutation suivante est vérifiée :*

$$U'_{H_\Phi}(\Delta_\Psi \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} D) = (\Delta_\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} D)U'_{H_\Phi} \tag{4.4.3}$$

Démonstration : On a, pour tous $v, w \in \Lambda_\Psi(\mathcal{T}_{\Psi,T_R})$ et $v', w' \in \mathcal{D}(D)$:

$$\begin{aligned}
(U'_{H_\Phi}(v \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} v')|\Delta_\Psi w \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} Dw') &= ((\omega_{v,\Delta_\Psi w} * id)(U'_{H_\Phi})v'|Dw') \\
&= (D(\omega_{\Delta_\Psi^{-1}(\Delta_\Psi v),\Delta_\Psi w} * id)(U'_{H_\Phi})v'|w') \\
&= ((\omega_{\Delta_\Psi v,w} * id)(U'_{H_\Phi})Dv'|w') \\
&\quad \text{d'après le corollaire 4.3.5,} \\
&= (U'_{H_\Phi}(\Delta_\Psi v \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} Dv')|w \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} w')
\end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, on sait que $\Lambda_\Psi(\mathcal{T}_{\Psi,T_R}) \odot \mathcal{D}(D)$ est un cœur pour $\Delta_\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} D$ donc, pour tout $u \in \mathcal{D}(\Delta_\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} D)$, on a :

$$(U'_{H_\Phi}(v \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} v')|(\Delta_\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} D)u) = (U'_{H_\Phi}(\Delta_\Psi v \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} Dv')|u)$$

Or $\Delta_\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} D$ est auto-adjoint donc :

$$(\Delta_\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} D)U'_{H_\Phi}(v \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} v') = U'_{H_\Phi}(\Delta_\Psi v \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} Dv')$$

Comme $\Lambda_\Psi(\mathcal{T}_{\Psi,T_R}) \odot \mathcal{D}(D)$ est un cœur pour $\Delta_\Psi \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} D$ et $\Delta_\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} D$ fermé d'après le lemme précédent, on tire que :

$$U'_{H_\Phi}(\Delta_\Psi \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} D) \subseteq (\Delta_\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} D)U'_{H_\Phi}$$

On obtient $(\Delta_\Psi \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} D)U'^*_{H_\Phi} \subseteq U'^*_{H_\Phi}(\Delta_\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} D)$ car U'_{H_Φ} est unitaire, et par adjonction, on a l'inclusion inverse :

$$(\Delta_\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} D)U'_{H_\Phi} \subseteq U'_{H_\Phi}(\Delta_\Psi \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} D)$$

La proposition en découle. ■

On entame la construction du groupe à un paramètre τ proprement dite. On va démontrer au passage un théorème, stipulant que $A(U'_H) = M$. Il généralise la proposition 1.5 de [KV03].

4.4.5 Définition — Appelons M_R (resp. M_L) la fermeture faible de l'espace vectoriel engendré par $\{(\omega \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(x)) \mid x \in M,\ \omega \in M_*^+$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\omega \circ \beta \leq k\nu\}$ (resp.$\{(id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)(\Gamma(x)) \mid x \in M,\ \omega \in M_*^+$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\omega \circ \alpha \leq k\nu\}$).

D'après le lemme 3.3.4 et la proposition 3.7.2, on a $A(U'_H) = M_R$ et M_R est une sous-algèbre de von Neumann de M. En utilisant la version « à gauche »de la proposition 3.7.2, on obtient que M_L est une sous-algèbre de von Neumann de M. De plus, toujours à cause de la proposition

3.7.2, on sait que $\alpha(N) \subseteq M_R$ et $\beta(N) \subseteq M_L$, donc $M_L \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} M_R$ a un sens. Par définition même, il est facile de voir que, pour tout $x \in M$:

$$\Gamma(x) \in M_L \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} M_R \tag{4.4.4}$$

4.4.6 Lemme — *Il existe un unique groupe à un paramètre fortement continu τ d'automorphismes de M_R tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in M_R$, on a $\tau_t(x) = D^{-it}xD^{it}$.*

Démonstration : La relation de commutation (4.4.3) implique facilement que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $v, w \in \Lambda_\Psi(\mathcal{T}_{\Psi,T_R})$, on a :

$$D^{-it}(\omega_{v,w} * id)(U'_{H_\Phi})D^{it} = (\omega_{\Delta_\Psi^{-it}v,\Delta_\Psi^{it}w} * id)(U'_{H_\Phi})$$

Par suite $D^{-it}M_RD^{it} = M_R$ et lemme en découle. ■

4.4.7 Lemme — *On a $\tau_t(\alpha(n)) = \alpha(\sigma_t^\nu(n))$ pour tout $n \in N$ et tout $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration : Par définition, on a $\tau_t(x) = D^{-it}xD^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in M_R$, donc on a $\tau_t(\alpha(n)) = D^{-it}\alpha(n)D^{it} = \alpha(\sigma_t^\nu(n))$, pour tout $n \in N$, d'après le lemme 4.4.1. ■

4.4.8 Lemme — *On peut définir un automorphisme $\sigma_t^\Psi \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_{-t}$ de $M \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} M_R$ involutif et normal, qui agit de manière naturelle, pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration : D'après le lemme précédent et d'après les relations (4.4.1), on a, pour tout $x \in N$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\tau_t(\alpha(x)) = \alpha(\sigma_t^\nu(x)) \quad \text{et} \quad \sigma_t^\Psi(\beta(x)) = \beta(\sigma_{-t}^\nu(x))$$

D'après le paragraphe 2.5, il est possible de définir un morphisme :

$$\sigma_t^\Psi \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_{-t} \ : M \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} M_R \rightarrow M \underset{N}{{}_{\beta\circ\sigma_{-t}^\nu}\star_{\alpha\circ\sigma_{-t}^\nu}} M_R$$

Il suffit d'observer que l'espace d'arrivée coïncide avec l'espace de départ. Pour tous $\xi \in D(H_\beta, \nu^o)$ et $y \in \mathcal{N}_\nu$, on calcule :

$$\begin{aligned}\beta(\sigma_{-t}^\nu(y^*))\xi = \beta(\sigma_{-t}^\nu(y)^*)\xi &= R^{\beta,\nu^o}(\xi)J_\nu\Lambda_\nu(\sigma_{-t}^\nu(y)) \\ &= R^{\beta,\nu^o}(\xi)J_\nu\Delta_\nu^{-it}\Lambda_\nu(y) = R^{\beta,\nu^o}(\xi)\Delta_\nu^{-it}J_\nu\Lambda_\nu(y)\end{aligned}$$

et on obtient, pour tout $\xi \in D(H_\beta, \nu^o)$:

$$\xi \in D(H_{\beta\circ\sigma_{-t}^\nu}, \nu^o) \text{ et } R^{\beta\circ\sigma_{-t}^\nu,\nu^o}(\xi) = R^{\beta,\nu^o}(\xi)\Delta_\nu^{-it}$$

Reste à constater que les produits scalaires définis sur $H \odot H$ pour la construction de $H \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H$

et de $H \underset{\nu}{{}_{\beta\circ\sigma^\nu_{-t}}\otimes_{\alpha\circ\sigma^\nu_{-t}}} H$ sont identiques. Pour tous $\xi, \xi' \in D(H_\beta, \nu^o)$ et tous $\eta, \eta' \in H$, on a :

$$\begin{aligned}
(\xi \underset{\nu}{{}_{\beta\circ\sigma^\nu_{-t}}\otimes_{\alpha\circ\sigma^\nu_{-t}}} \eta | \xi' \underset{\nu}{{}_{\beta\circ\sigma^\nu_{-t}}\otimes_{\alpha\circ\sigma^\nu_{-t}}} \eta') &= (\alpha(\sigma^\nu_{-t}(<\xi, \xi'>_{\beta\circ\sigma^\nu_{-t},\nu^o}))\eta|\eta') \\
&\quad \text{par définition du produit scalaire,} \\
&= (\alpha(\sigma^\nu_{-t}(\Delta^{it}_\nu <\xi,\xi'>_{\beta,\nu^o} \Delta^{-it}_\nu))\eta|\eta') \\
&= (\alpha(<\xi,\xi'>_{\beta,\nu^o})\eta|\eta') \\
&= (\xi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi' | \eta \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta') \\
&\quad \text{par définition du produit scalaire.}
\end{aligned}$$

■

4.4.9 Proposition — *On a l'égalité $(\sigma^\Psi_t \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_{-t}) \circ \Gamma = \Gamma \circ \sigma^\Psi_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration : D'après la relation (4.4.4), la cohérence de la formule précédente est vérifiée (τ n'est à priori défini que sur M_R). On a, pour tous $x \in M$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(\sigma^\Psi_t \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_{-t}) \circ \Gamma(x) &= (\Delta^{it}_\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} D^{it})\Gamma(x)(\Delta^{-it}_\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} D^{-it}) \\
&= (\Delta^{it}_\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} D^{it}) U'_{H_\Phi}(x \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} 1) U'^*_{H_\Phi}(\Delta^{-it}_\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} D^{-it}) \\
&\quad \text{car } \Gamma \text{ est implémenté par } U'^*_{H_\Phi}, \\
&= U'_{H_\Phi}(\Delta^{it}_\Psi \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} D^{it})(x \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} 1)(\Delta^{-it}_\Psi \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} D^{-it}) U'^*_{H_\Phi} \\
&\quad \text{d'après la relation (4.4.3),} \\
&= U'_{H_\Phi}(\sigma^\Psi_t(x) \underset{\nu^o}{{}_{\hat\alpha}\otimes_\beta} 1) U'^*_{H_\Phi} = \Gamma(\sigma^\Psi_t(x))
\end{aligned}$$

■

On est alors en mesure de prouver qu'on peut reconstruire l'algèbre de von Neumann à partir de l'unitaire fondamental.

Théorème 7 — *Les espaces vectoriels faiblement fermés suivants coïncident :*

i) $M_R = < (\omega \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(x)) \mid x \in M, \omega \in M^+_*, k \in \mathbb{R}^+$ *tel que* $\omega \circ \beta \leq k\nu >^{-w}$ *;*

ii) $A(U'_H) = < (\omega_{v,w} * id)(U'_H) \mid v \in D({}_{\hat\alpha}(H_\Psi), \mu),$ *et* $w \in D((H_\Psi)_\beta, \mu^o) >^{-w}$ *;*

iii) $M_L = < (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)(\Gamma(x)) \mid x \in M, \omega \in M^+_*, k \in \mathbb{R}^+$ *tel que* $\omega \circ \alpha \leq k\nu >^{-w}$ *;*

iv) $A(U_H) = < (id * \omega_{v,w})(U_H) \mid v \in D((H_\Psi), \mu^o)_{\hat\beta},$ *et* $w \in D({}_\alpha(H_\Psi), \mu) >^{-w}$.

où $< F >^{-w}$ *désigne la fermeture faible du sous-espace vectoriel de M engendré par la partie F, et sont égaux à l'algèbre de von Neumann M.*

Démonstration : On a déjà remarqué que le lemme 3.3.4 et la proposition 3.7.2 impliquent que M_R et $A(U'_H)$ sont des algèbres de von Neumann qui coïncident. Pour les mêmes raisons, M_L et $A(U_H)$ sont des algèbres de von Neumann qui coïncident.

On reprend alors la démarche de [KV03]. D'après le lemme 4.4.7, on a $\tau_t(\alpha(n)) = \alpha(\sigma_t^\nu(n))$ donc $M_L =< (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega \circ \tau_t)(\Gamma(x)) \mid x \in M, \omega \in (M_R)_*^+, k \in \mathbb{R}^+$ tels que $\omega \circ \alpha \leq k\nu >^{-w}$. D'après la proposition 4.4.9, on a $\sigma_t^\Psi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)\Gamma(x)) = (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega \circ \tau_t)\Gamma(\sigma_t^\Psi(x))$ c'est pourquoi $\sigma_t^\Psi(M_L) = M_L$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'autre part, d'après la proposition 3.2.5, la restriction de Ψ à M_L est semifinie. D'après le théorème de Takesaki ([Str81], théorème 10.1), il existe une unique espérance conditionnelle normale et fidèle E de M vers M_L satisfaisant $\Psi(x) = \Psi(E(x))$ pour tout $x \in M^+$. De plus, si P désigne la projection orthogonale sur la fermeture de $\Lambda_\Psi(\mathcal{N}_\Psi \cap M_L)$ alors $E(x)P = PxP$.

Ainsi l'image de P contient $\Lambda_\Psi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)\Gamma(x))$ pour tout ω convenable et $x \in \mathcal{N}_\Psi$. La version à « droite »de l'équation (3.5.2) permet de dire que $P = 1$ si bien que E est l'identité et que $M = M_L$.

Si on applique le résultat précédent au groupoïde quantique opposé, on obtient $M = M_R$. ■

4.4.10 Corollaire — *Il existe un unique groupe à un paramètre fortement continu τ d'automorphismes de M tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in M$, on a $\tau_t(x) = D^{-it}xD^{it}$. De plus, on a $\tau_t(\alpha(n)) = \alpha(\sigma_t^\nu(n))$ et $\tau_t(\beta(n)) = \beta(\sigma_t^\nu(n))$ pour tout $n \in N$ et tout $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration : Ce corollaire est une conséquence directe du théorème précédent et du lemme 4.4.6. La première propriété provient du lemme 4.4.7. La seconde est une conséquence de la définition de τ et du lemme 4.4.1. ■

4.4.11 Définition — On appelle **groupe d'échelle** le groupe à un paramètre τ.

4.4.12 Lemme — *On peut construire des automorphismes de $M \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} M$ involutifs et normaux $\tau_t \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_t$ et $\tau_t \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \sigma_t^\Phi$.*

Démonstration : La preuve est tout à fait analogue à la démonstration du lemme 4.4.8. ■

4.4.13 Proposition — *On a $\Gamma \circ \tau_t = (\tau_t \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_t) \circ \Gamma$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION : On calcule, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma)(\sigma_t^\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_{-t}) \circ \Gamma &= (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma)\Gamma \circ \sigma_t^\Psi \\ &\qquad \text{d'après la proposition 4.4.9,} \\ &= (\Gamma \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma \circ \sigma_t^\Psi \\ &\qquad \text{d'après la coassociativité de } \Gamma, \\ &= (\Gamma \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\sigma_t^\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_{-t})\Gamma \\ &\qquad \text{d'après la proposition 4.4.9,} \\ &= (\Gamma \circ \sigma_t^\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_{-t})\Gamma \\ &= (\sigma_t^\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_{-t} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_{-t})(\Gamma \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma \\ &= (\sigma_t^\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} [(\tau_{-t} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_{-t}) \circ \Gamma]) \circ \Gamma \\ &\qquad \text{d'après la coassociativité de } \Gamma\end{aligned}$$

Alors, pour tout $x \in M$, et tous $\omega \in M_*^+$, $k \in \mathbb{R}^+$ tels que $\omega \circ \beta \leq k\nu$, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma \circ \tau_{-t}(((\omega \circ \sigma_t^\Psi) \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma(x)) &= (\omega \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\sigma_t^\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma \circ \tau_{-t}) \circ \Gamma \\ &= (\omega \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\sigma_t^\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} [(\tau_{-t} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_{-t}) \circ \Gamma])(x) \\ &= [(\tau_{-t} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_{-t}) \circ \Gamma](((\omega \circ \sigma_t^\Psi) \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma(x))\end{aligned}$$

Le théorème 7 permet de conclure. ■

4.4.14 PROPOSITION — *Pour tout $x \in \alpha(N)'$, on a $\Gamma(x) = 1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} x \Leftrightarrow x \in \beta(N)$.*
De même, pour tout $x \in \beta(N)'$, on a $\Gamma(x) = x \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1 \Leftrightarrow x \in \alpha(N)$.

DÉMONSTRATION : Soit $x \in \alpha(N)'$ tel que $\Gamma(x) = 1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit, pour la topologie forte :

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int exp(-n^2t^2)\sigma_t^\Psi(x)\ dt \quad \text{analytique pour } \sigma^\Psi,$$

et

$$y_n = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int exp(-n^2t^2)\tau_{-t}(x)\ dt \quad \text{appartient à } \alpha(N)'$$

D'après la proposition 4.4.9, on a $\Gamma(x_n) = 1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} y_n$. Soit $d \in (\mathcal{M}_\Psi \cap \mathcal{M}_{T_R})^+$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $dx_n \in \mathcal{M}_\Psi \cap \mathcal{M}_{T_R}$. Alors, soient $\omega \in M_*^+$ et $k \in \mathbb{R}^+$ tels que $\omega \circ \alpha \leq k\nu$.

Par invariance à droite, on a :

$$\begin{aligned}\omega \circ T_R(dx_n) &= \omega((\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(dx_n))) \\ &= \Psi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)(\Gamma(dx_n))) \\ &= \Psi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} (y_n\omega))(\Gamma(d))) \\ &= \omega((\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(d))y_n) \\ &= \omega(T_R(d)y_n)\end{aligned}$$

On obtient alors $T_R(dx) = T_R(d)x$, pour tout $d \in \mathcal{M}_\Psi \cap \mathcal{M}_{T_R}$, après passage à la limite. De plus, on sait que $T_R(\mathcal{M}_\Psi \cap \mathcal{M}_{T_R})$ est w-dense dans $\beta(N)$, donc on conclut que $x \in \beta(N)$. La réciproque fait partie des axiomes de départ.

Pour obtenir la seconde équivalence, on applique le résultat précédent au groupoïde quantique opposé $(N^o, M, \beta, \alpha, \varsigma_N \circ \Gamma, \nu^o, T_R, T_L)$. D'après la première partie de la proposition, on sait que, pour tout $x \in \beta(N)'$:

$$\Gamma(x) = x \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1 \Leftrightarrow \varsigma_N \circ \Gamma(x) = 1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} x \Leftrightarrow x \in \alpha(N)$$

■

4.5 Définition de l'antipode via sa décomposition polaire.

On aborde maintenant la définition de l'antipode elle-même.

4.5.1 Lemme — *On a $(\omega_{v,w} * id)(U'_{H_\Phi})D^\lambda \subset D^\lambda(\omega_{\Delta_\Psi^{-\lambda}v,\Delta_\Psi^{\lambda}w} * id)(U'_{H_\Phi})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tous $v, w \in \Lambda_\Psi(\mathcal{T}_{\Psi,T_R})$.*

Démonstration : Ce lemme est une conséquence de la relation (4.4.3). ■

4.5.2 Proposition — *Si I désigne la partie unitaire de la décomposition polaire de G, alors, pour tous $v, w \in D((H_\Psi)_\beta, \nu^o)$, on a $I(\omega_{J_\Psi w,v} * id)(U'^*_{H_\Phi})I = (\omega_{J_\Psi v,w} * id)(U'_{H_\Phi})$.*

Démonstration : On a $(\omega_{v,w} * id)(U'_{H_\Phi})D^{1/2} \subseteq D^{1/2}(\omega_{\Delta_\Psi^{-1/2}v,\Delta_\Psi^{1/2}w} \star id)(U'_{H_\Phi})$ pour tous $v, w \in \Lambda_\Psi(\mathcal{T}_{\Psi,T_R})$ d'après le lemme précédent. D'autre part, d'après l'inclusion (4.3.2), on a :

$$\begin{aligned}(\omega_{v,w} * id)(U'_{H_\Phi})D^{1/2} &= (\omega_{v,w} \star id)(U'_{H_\Phi})G^*I \\ &\subseteq D^{1/2}I(\omega_{w,v} * id)(U'_{H_\Phi})I\end{aligned}$$

On obtient alors $I(\omega_{w,v} * id)(U'_{H_\Phi})I = (\omega_{\Delta_\Psi^{-1/2}v,\Delta_\Psi^{1/2}w} * id)(U'_{H_\Phi})$. Par suite, on a :

$$\begin{aligned}I(\omega_{w,v} * id)(U'^*_{H_\Phi})I &= (\omega_{\Delta_\Psi^{1/2}w,\Delta_\Psi^{-1/2}v} * id)(U'^*_{H_\Phi}) \\ &= (\omega_{J_\Psi v,J_\Psi w} * id)(U'_{H_\Phi}) \\ &\qquad \text{d'après le lemme 3.3.5.}\end{aligned}$$

La proposition en découle facilement. ■

4.5.3 Corollaire — *L'application R définie par $R(x) = Ix^*I$ est un *-anti-automorphisme de M et vérifie $R^2 = id$. On rappelle que I est donné par la décomposition polaire de G.*

Démonstration : Ce corollaire découle immédiatement de la proposition précédente et du théorème 7. ■

4.5.4 Définition — On appelle **antipode unitaire** l'unique *-anti-automorphisme R de M donné par $R(x) = Ix^*I$ où I est donné par la décomposition polaire de G.

On est alors en mesure de définir l'antipode en donnant sa décomposition polaire.

4.5.5 Définition — On appelle **antipode** l'application $S = R\tau_{-i/2}$.

La proposition suivante rassemble les propriétés élémentaires vérifiées par l'antipode. Les démonstrations, étant immédiates, ont été omises.

4.5.6 Proposition — *Les propriétés suivantes de l'antipode sont vérifiées :*

i) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\tau_t \circ R = R \circ \tau_t$ et $\tau_t \circ S = S \circ \tau_t$;
ii) $SR = RS$ et $S^2 = \tau_{-i}$;
iii) S est densément définie et avec image dense ;
iv) S est injective et $S^{-1} = R\tau_{i/2} = \tau_{i/2}R$;
v) Pour tout $x \in \mathcal{D}(S)$, $S(x^*) \in \mathcal{D}(S)$ et $S(S(x)^*)^* = x$.

4.6 Caractérisation de l'antipode.

La définition 4.5.5 de l'antipode consiste à donner la décomposition polaire de l'opérateur. Il faut cependant vérifier que cette application correspond à ce qu'on appelle communément « antipode ».

4.6.a Caractérisation usuelle de l'antipode

4.6.1 Proposition — *On a $(\omega_{w,v} * id)(U'_{H_\Phi}) \in \mathcal{D}(S)$ pour tous $v, w \in \Lambda_\Psi(\mathcal{T}_{\Psi,T_R})$ et alors on a $S((\omega_{w,v} * id)(U'_{H_\Phi})) = (\omega_{w,v} * id)(U'^*_{H_\Phi})$. De plus, l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $(\omega_{v,w} * id)(U'_{H_\Phi})$, avec $v, w \in \Lambda_\Psi(\mathcal{T}_{\Psi,T_R})$, est un cœur pour S.*

Démonstration : On a $(\omega_{w,v} \star id)(U'_{H_\Phi}) \in \mathcal{D}(\tau_{-i/2}) = \mathcal{D}(S)$ d'après le lemme 4.5.1,et alors :

$$\begin{aligned} S((\omega_{w,v} * id)(U'_{H_\Phi})) &= R((\omega_{\Delta_\Psi^{-1/2}w,\Delta_\Psi^{1/2}v} * id)(U'_{H_\Phi})) \\ &= (\omega_{S_\Psi v,\Delta_\Psi S_\Psi w} * id)(U'_{H_\Phi}) && \text{d'après la proposition 4.5.2,} \\ &= (\omega_{w,v} * id)(U'^*_{H_\Phi}) && \text{d'après le lemme 3.3.5.} \end{aligned}$$

Le reste de la proposition vient du fait que le sous-espace considéré est inclus dans $\mathcal{D}(\tau_{-i/2})$ d'après le lemme 4.5.1, dense dans M d'après le théorème 7 et stable par τ d'après le lemme 4.4.6. ■

4.6.2 Corollaire — *On a* $(\omega_{\Lambda_\Psi(a),\Lambda_\Psi(b)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(cd)) \in \mathcal{D}(S)$, *pour tous* $a,b,c,d \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}$, *et on a* $S((\omega_{\Lambda_\Psi(a),\Lambda_\Psi(b)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(cd))) = (\omega_{\Lambda_\Psi(c),\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(\sigma^\Psi_i(a)b^*))$.

Démonstration : D'après le lemme 3.3.4, on sait que :

$$(\omega_{\Lambda_\Psi(a),\Lambda_\Psi(b)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(cd)) = (\omega_{\Lambda_\Psi(cd),\Lambda_\Psi(b\sigma^\Psi_{-i}(a^*))} * id)(U'_{H_\Phi})$$

qui est dans l'ensemble de définition de S d'après la proposition précédente. On a alors :

$$\begin{aligned}
S((\omega_{\Lambda_\Psi(a),\Lambda_\Psi(b)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(cd))) &= S((\omega_{\Lambda_\Psi(cd),\Lambda_\Psi(b\sigma^\Psi_{-i}(a^*))} * id)(W')) \\
&= (\omega_{\Lambda_\Psi(cd),\Lambda_\Psi(b\sigma^\Psi_{-i}(a^*))} * id)(W'^*) \\
&\quad \text{par définition de } S, \\
&= (\omega_{\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_i(a)b^*),\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*c^*))} * id)(W') \\
&\quad \text{d'après le lemme 3.3.5}, \\
&= (\omega_{\Lambda_\Psi(c),\Lambda_\Psi(\sigma^\Psi_{-i}(d^*))} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(\sigma^\Psi_i(a)b^*)) \\
&\quad \text{d'après le lemme 3.3.4}.
\end{aligned}$$

■

4.6.b La coinvolution R

Après avoir donné une nouvelle expression de R, on prouve que R est une coinvolution de la structure.

4.6.3 Proposition — *On a* $R((\omega_{J_\Psi\Lambda_\Psi(a)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(b^*b))) = (\omega_{J_\Psi\Lambda_\Psi(b)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a^*a))$ *pour tous* $a,b \in \mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}$.

Démonstration : La proposition provient du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
& R((\omega_{J_\Psi\Lambda_\Psi(a),J_\Psi\Lambda_\Psi(a)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(b^*b))) \\
&= R((\omega_{\Lambda_\Psi(b^*b),J_\Psi\Lambda_\Psi(a^*a)} * id)(U'_{H_\Phi}) && \text{d'après le corollaire 3.3.4}, \\
&= (\omega_{\Lambda_\Psi(a^*a),J_\Psi\Lambda_\Psi(b^*b)} * id)(U'_{H_\Phi}) && \text{d'après la définition de } R, \\
&= (\omega_{J_\Psi\Lambda_\Psi(b),J_\Psi\Lambda_\Psi(b)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a^*a)) && \text{d'après le corollaire 3.3.4}.
\end{aligned}$$

■

Remarque — On remarque le fait que R est indépendant de T_L.

4.6.4 Proposition — *On a* $I\alpha(x^*) = \beta(x)I$ *pour tout* $x \in N$ *et* $R \circ \alpha = \beta$.

Démonstration : D'après le lemme 4.4.1 et sa démonstration, on a, pour tout $x \in \mathcal{T}_{\Psi,T_R}$, d'une part :

$$\begin{aligned}\beta(x)GD^{-1/2} &\subseteq G\alpha(\sigma_{-i/2}((x^*)) \\ &\subseteq GD^{-1/2}\alpha(x^*) \\ &\subseteq I\alpha(x^*)\end{aligned}$$

et, d'autre part $\beta(x)GD^{-1/2} \subseteq \beta(x)I$. Il vient alors $I\alpha(x^*) = \beta(x)I$ et le résultat s'en suit. ∎

On défini, grâce à [Sau83b], un opérateur $I \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} I \in \mathcal{L}(H \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H, H \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} H)$ antilinéaire et unitaire et dont l'adjoint est l'opérateur $I \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} I$. D'après le paragraphe 2.5, il existe un anti-isomorphisme $R \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} R$ de $M \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} M$ dans $M \underset{N^o}{{}_\alpha\star_\beta} M$ et on a, par définition de R :

$$(R \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} R)(X) = (I \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} I)X^*(I \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} I)$$

pour tout $X \in M \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} M$.

Pour la bonne compréhension de la suite, on souligne le fait que, si $\omega \in M_*^+$, alors $\omega \circ R \in M_*^+$ et, si il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\omega \circ \alpha \leq k\nu$, alors $\omega \circ R \circ \beta \leq k\nu$. De même, si $\theta \in M_*^+$ et $k' \in \mathbb{R}^+$ sont tels que $\theta \circ \beta \leq k'\nu$, alors $\theta \circ R \circ \alpha \leq k\nu$. On a alors $\omega R \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \theta R = (\omega \underset{\nu^o}{{}_\alpha\star_\beta} \theta) \circ (R \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} R)$.

4.6.5 Lemme — *Pour tous* $a, x \in \mathcal{N}_{T_R} \cap \mathcal{N}_\Psi$, $\omega \in M_*^+$ *et* $k \in \mathbb{R}^+$ *tels que* $\omega \circ \alpha \leq k\nu$. *Alors, on a* $\omega \circ R((\omega_{J_\Psi\Lambda_\Psi(a)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(x))) = (\Lambda_\Psi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)(\Gamma(a^*a)))|J_\Psi\Lambda_\Psi(x))$.

Démonstration : Soit $b \in \mathcal{N}_{T_R} \cap \mathcal{N}_\Psi$. On calcule :

$$\begin{aligned}\omega \circ R((\omega_{J_\Psi\Lambda_\Psi(a)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(b^*b))) &= \omega((\omega_{J_\Psi\Lambda_\Psi(b)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a^*a))) \\ &\qquad \text{d'après la proposition 4.6.3,} \\ &= \omega_{J_\Psi\Lambda_\Psi(b)}((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)(\Gamma(a^*a))) \\ &= ((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)(\Gamma(a^*a))J_\Psi\Lambda_\Psi(b)|J_\Psi\Lambda_\Psi(b)) \\ &= (J_\Psi b J_\Psi \Lambda_\Psi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)(\Gamma(a^*a)))|J_\Psi\Lambda_\Psi(b)) \\ &= (\Lambda_\Psi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)(\Gamma(a^*a)))|J_\Psi\Lambda_\Psi(b^*b))\end{aligned}$$

Le lemme en découle par linéarité et normalité. ∎

4.6.6 Proposition — *On a :*

$$\varsigma_{N^o} \circ (R \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} R) \circ \Gamma = \Gamma \circ R$$

DÉMONSTRATION : Soient $a, b \in \mathcal{N}_{T_R} \cap \mathcal{N}_\Psi$, $\omega, \theta \in M_*^+$ et $k, k' \in \mathbb{R}^+$ tels que $\omega \circ \alpha \leq k\nu$ et $\theta \circ \beta \leq k'\nu$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
&(\theta \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)(\Gamma \circ R((\omega_{J_\Psi \Lambda_\Psi(a)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(b^*b)))) \\
&= (\theta \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)(\Gamma((\omega_{J_\Psi \Lambda_\Psi(b)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a^*a)))) && \text{d'après la proposition 4.6.3,} \\
&= (\omega_{J_\Psi \Lambda_\Psi(b)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \theta \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)(id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma)(\Gamma(a^*a)) \\
&= (\omega_{J_\Psi \Lambda_\Psi(b)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \theta \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)(\Gamma \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a^*a)) && \text{d'après la coassociativité de } \Gamma, \\
&= (\omega_{J_\Psi \Lambda_\Psi(b)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \theta)[\Gamma((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)(\Gamma(a^*a)))] \\
&= (\Lambda_\Psi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \theta \circ R)(\Gamma(b^*b)))|J_\Psi \Lambda_\Psi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)(\Gamma(a^*a)))) && \text{d'après le lemme précédent,} \\
&= (\Lambda_\Psi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)(\Gamma(a^*a)))|J_\Psi \Lambda_\Psi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \theta \circ R)(\Gamma(b^*b)))) \\
&= (\omega_{J_\Psi \Lambda_\Psi(a)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega \circ R)[\Gamma((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \theta \circ R)(\Gamma(b^*b)))] && \text{d'après le lemme précédent,} \\
&= (\omega_{J_\Psi \Lambda_\Psi(a)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega \circ R \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \theta \circ R)(\Gamma \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(b^*b)) \\
&= (\omega_{J_\Psi \Lambda_\Psi(a)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega \circ R \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \theta \circ R)(id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma)(\Gamma(b^*b)) && \text{d'après la coassociativité de } \Gamma, \\
&= (\omega \circ R \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \theta \circ R)(\Gamma((\omega_{J_\Psi \Lambda_\Psi(a)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(b^*b)))) \\
&= (\omega \underset{\nu^o}{{}_\alpha\star_\beta} \theta)(R \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} R)(\Gamma((\omega_{J_\Psi \Lambda_\Psi(a)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(b^*b)))) \\
&= (\theta \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)\varsigma_{N^o}(R \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} R)(\Gamma((\omega_{J_\Psi \Lambda_\Psi(a)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(b^*b))))
\end{aligned}$$

La proposition en découle grâce au théorème 7. ■

4.6.c Invariance à gauche forte par rapport à l'antipode

Dans ce paragraphe, on désigne par T' un poids opératoriel de M^+ dans $\overline{\alpha(N)}^+$ normal, semifini et invariant à gauche. On note $\Phi' = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T'$, $\mathcal{J}$ l'opérateur antilinéaire et ∇ l'opérateur modulaire associés par la théorie de Tomita au poids Φ', κ son groupe modulaire et $V = (U_{T'})^*_{H_\Phi}$ c'est-à-dire l'unitaire fondamental associé à T'. La proposition suivante correspond à l'invariance à gauche forte par rapport à l'antipode.

4.6.7 PROPOSITION — *Les éléments de la forme $(id * \omega_{v,w})(V)$ sont dans le domaine de S pour tous $v, w \in \Lambda_{\Phi'}(\mathcal{T}_{\Phi',T'})$ et on a $S((id * \omega_{v,w})(V)) = (id * \omega_{v,w})(V^*)$.*

DÉMONSTRATION : Pour tout ω convenable, on a $(id * \omega)(V) = (\omega \circ R * id)(U'_{H_\Phi})$ d'après la définition de R et le corollaire 3.3.4. Alors, si $\overline{\omega}(x) = \overline{\omega(x^*)}$, on a :

$$\begin{aligned}
S((id * \omega)(V)) &= S((\omega \circ R * id)(U'_{H_\Phi})) \\
&= (\omega \circ R * id)(U'^*_{H_\Phi}) \\
&\qquad \text{d'après la proposition 4.6.1,} \\
&= [(\overline{\omega} \circ R * id)(U'_{H_\Phi})]^* \\
&= [(id * \overline{\omega})(V)]^* = (id * \omega)(V^*)
\end{aligned}$$

■

4.6.8 Lemme — *On a* $(\omega_{v,w} * id)(V)^* = (\omega_{ID^{-1/2}v, ID^{1/2}w} * id)(V)$ *pour tout* $v \in \mathcal{D}(D^{1/2})$ *et* $w \in \mathcal{D}(D^{1/2})$.

Démonstration : On a $(id * \omega_{w',v'})(V) \in \mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(\tau_{-i/2})$ pout tous $v', w' \in \Lambda_{\Phi'}(\mathcal{T}_{\Phi',T'})$ d'après la proposition 4.6.7 et comme τ est implémenté par D^{-1} on a :

$$\begin{aligned}(id * \omega_{w',v'})(V)D^{1/2} &\subseteq D^{1/2}\tau_{-i/2}((id * \omega_{w',v'})(V))\\ &= D^{1/2}R(S((id * \omega_{w',v'})(V)))\\ &= D^{1/2}I[(id * \omega_{w',v'})(V^*)]^*I\\ &= D^{1/2}I(id * \omega_{v',w'})(V)I.\end{aligned}$$

Pour tous $v \in \mathcal{D}(D^{1/2})$ et $w \in \mathcal{D}(D^{1/2})$, on a alors :

$$\begin{aligned}((\omega_{ID^{-1/2}v, ID^{1/2}w} * id)(V)w'|v') &= ((id * \omega_{w',v'})(V)D^{1/2}Iv|D^{-1/2}Iw)\\ &= (D^{1/2}I(id * \omega_{v',w'})(V)v|D^{-1/2}Iw)\\ &= (w|(id * \omega_{v',w'})v)\\ &= ((\omega_{v,w} * id)(V)^*w', v')\end{aligned}$$

ce qui suffit pour déduire notre proposition. ■

4.6.9 Proposition — *Les relations suivantes sont vérifiées :*

i) $(I \underset{N^o}{{}_\alpha\!\otimes_\epsilon} \mathcal{J})V = V^*(I \underset{N}{{}_\beta\!\otimes_\alpha} \mathcal{J})$;

ii) $(D^{-1} \underset{\nu^o}{{}_\alpha\!\otimes_\epsilon} \nabla)V = V(D^{-1} \underset{\nu}{{}_\beta\!\otimes_\alpha} \nabla)$;

iii) $(\tau_t \underset{N}{{}_\beta\!\star_\alpha} \kappa_t) \circ \Gamma = \Gamma \circ \kappa_t$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

où $\epsilon(n) = \mathcal{J}\alpha(n^*)\mathcal{J}$ *pour tout* $n \in N$ *et où* κ_t *désigne le groupe modulaire de* $\nu \circ \alpha^{-1} \circ T'_L$.

Démonstration : On définit X l'opérateur fermé dans $H_{\Phi'}$ tel que $\Lambda_{\Phi'}(\mathcal{N}_{\Phi'} \cap \mathcal{N}_{\Phi'}^*)$ soit un cœur pour X et $X\Lambda_{\Phi'}(x) = \Lambda_{\Phi'}(x^*)$ pour tout $x \in \mathcal{N}_{\Phi'} \cap \mathcal{N}_{\Phi'}^*$ ($X = S_{\Phi'}$ d'après les notations de Tomita-Takesaki). Alors par définition, on a $\nabla = X^*X$ et $X = \mathcal{J}\nabla^{1/2}$. De plus, pour tout $x \in M$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\kappa_t(x) = \nabla^{it}x\nabla^{-it}$.

Avant tout, on vérifie la légitimité de telles relations. Il suffit, en fait, d'établir un certain nombre de commutations. On renvoie aux lemmes 4.2.2 et 4.4.3 et en général à [Sau86].

Pour tout $x \in \mathcal{T}_\nu$ et tout $y \in \mathcal{N}_{\Phi'} \cap \mathcal{N}_{\Phi'}^*$, on peut écrire :

$$X\alpha(x)\Lambda_{\Phi'}(y) = X\Lambda_{\Phi'}(\alpha(x)y)$$

$$= \Lambda_{\Phi'}(y^*\alpha(x^*)) = \hat{\alpha}(\sigma^\nu_{-i/2}(x))X\Lambda_{\Phi'}(y)$$

d'où $\hat{\alpha}(\sigma^\nu_{-i/2}(x))X \subseteq X\alpha(x)$ et par adjonction $\alpha(x)X^* \subseteq X^*\hat{\alpha}(\sigma^\nu_{i/2}(x)$. On a alors :

$$\alpha(x)\nabla = \alpha(x)X^*X \subseteq X^*\hat{\alpha}(\sigma^\nu_{i/2}(x)X \subseteq \nabla\alpha(\sigma^\nu_i(x))$$

et comme on sait déjà que :

$$\beta(x)D^{-1} \subseteq D^{-1}\beta(\sigma_i^{\nu}(x)),$$

cela suffit pour justifier les termes de la seconde relation. Par ailleurs, on sait que $I\beta(x) = \alpha(x^*)I$ et $\mathcal{J}\alpha(x) = \epsilon(x^*)\mathcal{J}$ et cela permet de définir les termes de la première relation. Enfin pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\tau_t \circ \beta = \beta \circ \sigma_t^{\nu} \quad \text{ et } \kappa_t(\alpha(x)) = \nabla^{it}\alpha(x)\nabla^{-it} = \alpha(\sigma_t^{\nu}(x))$$

ce qui termine nos vérifications.

Soient $v, w \in \Lambda_{\Phi}(\mathcal{T}_{\Phi,S_L})$. Pour tout $y \in \mathcal{N}_{T'} \cap \mathcal{N}_{\Phi'} \cap \mathcal{N}_{T'}^* \cap \mathcal{N}_{\Phi'}^*$, on a, par invariance à gauche de T' (d'après la proposition 3.2.2), $(\omega_{v,w} \underset{\nu}{{}_{\beta}\star_{\alpha}} id)(\Gamma(y)) \in \mathcal{N}_{T'} \cap \mathcal{N}_{\Phi'} \cap \mathcal{N}_{T'}^* \cap \mathcal{N}_{\Phi'}^*$. L'analogue du corollaire 3.3.3 s'écrit $(\omega_{v,w} \star id)(V^*)\Lambda_{\Phi'}(y) = \Lambda_{\Phi'}((\omega_{v,w} \underset{\nu}{{}_{\beta}\star_{\alpha}} id)(\Gamma(y)))$ d'où l'on tire que $(\omega_{v,w} * id)(V^*)\Lambda_{\Phi'}(y) \in \mathcal{D}(X)$. Alors on calcule :

$$X(\omega_{v,w} * id)(V^*)\Lambda_{\Phi'}(y) = X\Lambda_{\Phi'}((\omega_{v,w} \underset{\nu}{{}_{\beta}\star_{\alpha}} id)(\Gamma(y))) = \Lambda_{\Phi'}((\omega_{w,v} \underset{\nu}{{}_{\beta}\star_{\alpha}} id)(\Gamma(y^*)))$$

$$(\omega_{w,v} * id)(V^*)\Lambda_{\Phi'}(y^*) = (\omega_{w,v} * id)(V^*)X\Lambda_{\Phi'}(y)$$

Et comme $\Lambda_{\Phi'}(\mathcal{N}_{T'} \cap \mathcal{N}_{\Phi'} \cap \mathcal{N}_{T'}^* \cap \mathcal{N}_{\Phi'}^*)$ est un cœur pour X, ceci implique :

$$(\omega_{w,v} * id)(V^*)X \subseteq X(\omega_{v,w} * id)(V^*). \tag{4.6.1}$$

En prenant l'adjoint, on trouve :

$$(\omega_{w,v} * id)(V)X^* \subseteq X^*(\omega_{v,w} * id)(V). \tag{4.6.2}$$

Grâce à l'inclusion (4.6.2) et au lemme précédent, on a :

$$\begin{aligned}(\omega_{v,w} * id)(V)\nabla &= (\omega_{v,w} * id)(V)X^*X \\ &\subseteq X^*(\omega_{v,w} * id)(V)X \\ &= X^*[(\omega_{ID^{-1/2}w,ID^{1/2}v} * id)(V)]^*X.\end{aligned}$$

En utilisant cette fois-ci l'inclusion (4.6.1) et le lemme précédent, on a :

$$\begin{aligned}(\omega_{v,w} * id)(V)\nabla &\subseteq X^*X[(\omega_{ID^{1/2}v,ID^{-1/2}w} * id)(V)]^* \\ &= \nabla(\omega_{D^{1/2}IID^{1/2}v,D^{-1/2}IID^{-1/2}w} * id)(V) \\ &= \nabla(\omega_{Dv,N^{-1}w} * id)(V)\end{aligned}$$

si bien que l'on tire $(\omega_{v,w} * id)(V)\nabla \subseteq \nabla(\omega_{Dv,D^{-1}w} * id)(V)$ pour tout $v \in \mathcal{D}(D)$ et $w \in \mathcal{D}(D^{-1})$. Comme pour la relation (4.4.3), on déduit que $(D^{-1} \underset{\nu^o}{{}_{\alpha}\otimes_{\epsilon}} \nabla)V = V(D^{-1} \underset{\nu}{{}_{\beta}\otimes_{\alpha}} \nabla)$.

Démontrons la première relation. Grâce à l'inclusion (4.6.1), pour tout $v \in \mathcal{D}(N^{-1/2})$ et tout $w \in \mathcal{D}(D^{1/2})$, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\omega_{w,v} * id)(V^*)\mathcal{J}\nabla^{1/2} &= \mathcal{J}(\omega_{w,v} * id)(V^*)X \\ &\subseteq \mathcal{J}X(\omega_{v,w} * id)(V^*) \\ &= \nabla^{1/2}(\omega_{v,w} * id)(V^*)\end{aligned} \tag{4.6.3}$$

Pour tous $p, q \in \mathcal{D}(\nabla^{1/2})$, on a, en utilisant la seconde relation déjà vérifiée :

$$\begin{aligned}
((\omega_{v,w} * id)(V^*)p, \nabla^{1/2}q) &= (V^*(v \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\epsilon} p)|w \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \nabla^{1/2}q) \\
&= (V^*(v \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\epsilon} p)|D^{-1/2}(D^{1/2}w) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \nabla^{1/2}q) \\
&= ((D^{-1/2} \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \nabla^{1/2})V^*(v \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\epsilon} p)|D^{1/2}w \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} q) \\
&= (V^*(D^{-1/2}v \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\epsilon} \nabla^{1/2}p)|D^{1/2}w \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} q) \\
&= ((\omega_{D^{-1/2}v,D^{1/2}w} * id)(V^*)\nabla^{1/2}p|q).
\end{aligned}$$

Comme $\nabla^{1/2}$ est auto-adjoint, on obtient l'inclusion :

$$(\omega_{D^{-1/2}v,D^{1/2}w} * id)(V^*)\nabla^{1/2} \subseteq \nabla^{1/2}(\omega_{v,w} * id)(V^*)$$

En utilisant le lemme précédent, on a aussi :

$$(\omega_{D^{-1/2}v,D^{1/2}w} * id)(V^*) = (\omega_{D^{1/2}w,D^{-1/2}v} * id)(V)^*$$

$$(\omega_{ID^{-1/2}D^{1/2}w,ID^{1/2}D^{-1/2}v} \star id)(V) = (\omega_{Iw,Iv} * id)(V)$$

C'est pourquoi $(\omega_{Iw,Iv} * id)(V)\nabla^{1/2} \subseteq \nabla^{1/2}(\omega_{v,w} * id)(V^*)$. Maintenant $\nabla^{1/2}$ est à image dense, et cette inclusion, avec (4.6.3), implique $(\omega_{Iw,Iv} * id)(V) = \mathcal{J}(\omega_{v,w} * id)(V^*)\mathcal{J}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&((I \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \mathcal{J})V^*(I \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \mathcal{J})(v \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} q)|w \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\epsilon} q) \\
&= (Iw \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \mathcal{J}q|V^*(Iv \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\epsilon} \mathcal{J}p)) \\
&= (V(Iw \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \mathcal{J}q)|Iv \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\epsilon} \mathcal{J}p) \\
&= ((\omega_{Iw,Iv} \star id)(V)\mathcal{J}q, \mathcal{J}p) \\
&= (\mathcal{J}(\omega_{v,w} * id)(V^*)q|\mathcal{J}p) \\
&= (p|(\omega_{v,w} \star id)(V^*)q) \\
&= ((\omega_{v,w} * id)(V)p|q) \\
&= (V(v \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} q)|w \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\epsilon} q)
\end{aligned}$$

La véracité de la première relation est donc prouvée. Il reste à démontrer la dernière égalité. On sait que $\Gamma(a) = V^*(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_\epsilon} a)V$ pour tout $a \in M$; aussi $\kappa_t(a) = \nabla^{it}a\nabla^{-it}$ et $\tau_t(a) = D^{-it}aD^{it}$ pour tout $a \in M$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors on déduit l'égalité de la même manière que la proposition 4.4.9 à partir de la relation $(D^{-1} \underset{\nu}{{}_\alpha\otimes_\epsilon} \nabla)V = V(D^{-1} \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \nabla)$. ■

Appliqués en particulier à $T' = T_L$, ces résultats donnent l'invariance à gauche forte pour T_L par rapport à l'antipode. Dans ce cas $V = W^*$, $\mathcal{J} = J_\Phi$ et $\nabla = \Delta_\Phi$ d'où les propositions suivantes :

4.6.10 Proposition — *On a $(id * \omega_{v,w})(W) \in \mathcal{D}(S)$ pour tous $v, w \in \Lambda_\Phi(\mathcal{T}_{\Phi,S_L})$ et alors on a $S((id * \omega_{v,w})(W)) = (id * \omega_{v,w})(W^*)$.*

4.6.11 Proposition — *On a $(\omega_{v,w} * id)(W^*)^* = (\omega_{ID^{-1/2}v,ID^{1/2}w} * id)(W^*)$ pour tout $v \in \mathcal{D}(D^{1/2})$ et tout $w \in \mathcal{D}(D^{1/2})$.*

4.6.12 PROPOSITION — *Les relations suivantes sont vérifiées :*

i) $(I \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} J_\Phi)W^* = W(I \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi)$;

ii) $(D^{-1} \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \Delta_\Phi)W^* = W^*(D^{-1} \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \Delta_\Phi)$;

iii) $(\tau_t \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \sigma_t^\Phi) \circ \Gamma = \Gamma \circ \sigma_t^\Phi$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

On énonce ici deux théorèmes regroupant les résultats de ce chapitre :

THÉORÈME 8 — *Soient* $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ *un groupoïde quantique mesuré et* W *l'unitaire pseudo-multiplicatif associé. Alors la fermeture faible de l'espace vectoriel engendré par les opérateurs de la forme* $(id * \omega_{v,w})(W)$ *pour tous* $v \in D({}_\alpha H_\Phi, \nu)$ *et* $w \in D((H_\Phi)_{\hat\beta}, \nu^o)$ *est égale à l'algèbre de von Neumann* M.

THÉORÈME 9 — *Soient* $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ *un groupoïde quantique mesuré et* W *l'unitaire pseudo-multiplicatif associé. Si on note* $\Phi = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L$ *alors, il existe une antipode* S *non bornée, vérifiant :*

i) pour tout $x \in \mathcal{D}(S)$, $S(x)^* \in \mathcal{D}(S)$ *et* $S(S(x)^*)^* = x$;

ii) pour tous $v, w \in \Lambda_\Phi(\mathcal{T}_{\Phi,S_L})$, $(id * \omega_{v,w})(W) \in \mathcal{D}(S)$ *et* $S((id * \omega_{v,w})(W)) = (id * \omega_{v,w})(W^*)$;

S *admet une décomposition polaire de la forme* $S = R\tau_{i/2}$, *où* R *est une coinvolution de* M *vérifiant* $R^2 = id$, $R \circ \alpha = \beta$ *et* $\varsigma_{N^o} \circ (R \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} R) \circ \Gamma = \Gamma \circ R$, *et où* τ *est un groupe à un paramètre d'automorphismes (groupe d'échelle) tel que* $\tau_t \circ \alpha = \alpha \circ \sigma_t^\nu$, $\tau_t \circ \beta = \beta \circ \sigma_t^\nu$ *et qui vérifie* $\Gamma \circ \tau_t = (\tau_t \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_t) \circ \Gamma$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$. S, R *et* τ *sont indépendants de* T_L *et de* T_R.

De plus, le poids opératoriel normal, semifini et fidèle $R \circ T_L \circ R$ *est invariant à droite et* α*-adapté pour* ν.

Chapitre 5

UNICITÉ DU POIDS OPERATORIEL DE HAAR, MODULE ET OPÉRATEUR D'ÉCHELLE

Dans cette partie, le poids quasi-invariant ν est fixé. On établit l'unicité du poids opératoriel invariant à gauche adapté par rapport à ν à un élément du centre de la base près. On dispose d'un résultat analogue pour le poids opératoriel invariant à droite. On construit un module et un opérateur d'échelle qui relient le poids invariant à gauche T_L et le poids invariant $R \circ T_L \circ R$. Leurs propriétés permettent de démontrer que l'unitaire pseudo-multiplicatif fondamental vérifie une condition de maniabilité (analogue à celle de Woronowicz). On étudie aussi à quelles conditions un autre poids ν' sur N sera quasi-invariant.

5.1 Relations de commutation.

Dans ce paragraphe, on désigne par T' un poids opératoriel de M^+ dans $\overline{\alpha(N)}^+$ normal, semifini, invariant à gauche et β-adapté par rapport à ν. On note $\Phi' = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T'$.

5.1.1 Lemme — *Si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit $\kappa_t = \sigma_t^{\Phi'} \tau_{-t}$, alors κ laisse invariant Ψ. De même, si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit $\kappa'_t = \sigma_t^{\Psi} \tau_t$, alors κ' laisse invariant Φ.*

Démonstration : On sait que $\kappa_t \circ \alpha = \alpha$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et on a :

$$\Gamma \circ \kappa_t = \Gamma \circ \sigma_t^{\Phi'} \circ \tau_{-t} = (\tau_t \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \sigma_t^{\Phi'})\Gamma \circ \tau_{-t}$$

$$= (\tau_t \tau_{-t} \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \sigma_t^{\Phi'} \tau_{-t})\Gamma = (id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \kappa_t)\Gamma$$

Pour tout $a \in \mathcal{M}_{T_R}^+$, on déduit, grâce à la propriété d'invariance à droite de T_R, que :

$$T_R \circ \kappa_t(a) = (\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma(\kappa_t(a)) = \kappa_t((\Psi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma(a)) = \kappa_t \circ T_R(a)$$

Pour tout $a \in \mathcal{M}_{T_R} \cap \mathcal{M}_\Psi^+$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \kappa_t(a) = \nu \circ \beta^{-1} \circ T_R \circ \kappa_t(a) &= \nu \circ \beta^{-1} \circ \kappa_t \circ T_R(a) \\
&\quad \text{d'après ce qui précède,} \\
&= \nu \circ \beta^{-1} \circ \sigma_t^{\Phi'} \circ \tau_{-t} \circ T_R(a) \\
&= \nu \circ \sigma_{-t}^{\nu} \circ \beta^{-1} \circ \tau_{-t} \circ T_R(a) \\
&\quad \text{car } T' \text{ est } \beta\text{-adapté par rapport à } \nu, \\
&= \nu \circ \sigma_{-2t}^{\nu} \circ T_R(a) \\
&\quad \text{d'après la relation de commutation entre } \tau \text{ et } \beta, \\
&= \nu \circ \beta^{-1} \circ T_R(a) = \Psi(a)
\end{aligned}$$

On sait que $\kappa'_t \circ \beta = \beta$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et on a :

$$\Gamma \circ \kappa'_t = \Gamma \circ \sigma_t^\Psi \circ \tau_t = (\sigma_t^\Psi \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_{-t}) \circ \Gamma \circ \tau_t = (\sigma_t^\Psi \tau_t \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_{-t}\tau_t) \circ \Gamma = (\kappa'_t \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id) \circ \Gamma$$

Pour tout $a \in \mathcal{M}_{T_L}^+$, on déduit, grâce à la propriété d'invariance à gauche de T_L, que :

$$T_L \circ \kappa'_t(a) = (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \Phi)\Gamma(\kappa'_t(a)) = \kappa'_t((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \Phi)\Gamma(a)) = \kappa'_t \circ T_L(a)$$

Pour tout $a \in \mathcal{M}_{T_L} \cap \mathcal{M}_\Phi^+$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi \circ \kappa'_t(a) = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L \circ \kappa'_t(a) &= \nu \circ \alpha^{-1} \circ \kappa'_t \circ T_L(a) \\
&\quad \text{d'après ce qui précède,} \\
&= \nu \circ \alpha^{-1} \circ \sigma_t^{\Psi} \circ \tau_t \circ T_L(a) \\
&= \nu \circ \sigma_t^{\nu} \circ \alpha^{-1} \circ \tau_t \circ T_L(a) \\
&\quad \text{car } T_R \text{ est } \alpha\text{-adapté par rapport à } \nu, \\
&= \nu \circ \sigma_{2t}^{\nu} \circ \alpha^{-1} \circ T_L(a) \\
&\quad \text{d'après la relation de commutation entre } \tau \text{ et } \alpha, \\
&= \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L(a) = \Phi(a)
\end{aligned}$$

■

5.1.2 Proposition — *Les groupes d'automorphismes $\sigma^{\Phi'}$ et τ d'une part, et les groupes d'automorphismes σ^Ψ et τ d'autre part, commutent.*

Démonstration : D'après le lemme précédent, κ laisse invariant Ψ. On sait alors que, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a $\sigma_s^\Psi \circ \sigma_t^{\Phi'} \circ \tau_{-t} = \sigma_t^{\Phi'} \circ \tau_{-t} \circ \sigma_s^\Psi$. Par suite :

$$\begin{aligned}
(id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \kappa_t)\Gamma = \Gamma \circ \kappa_t &= \Gamma \circ \sigma_{-s}^\Psi \circ \kappa_t \circ \sigma_s^\Psi \\
&= (\sigma_{-s}^\Psi \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_s)\Gamma \circ \kappa_{-t} \circ \sigma_s^{\Psi_R} \\
&\quad \text{d'après la relation de commutation entre } \Gamma \text{ et } \sigma^\Psi, \\
&= (\sigma_{-s}^\Psi \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_s \circ \kappa_t)\Gamma \circ \sigma_s^\Psi \\
&= (id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_s \circ \kappa_t \circ \tau_{-s})\Gamma \\
&\quad \text{d'après la relation de commutation entre } \Gamma \text{ et } \sigma^\Psi.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $a \in M$ et tout $\omega \in M_*^+$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ satisfaisant $\omega \circ \beta \leq k\nu$, on obtient :

$$\sigma_t^{\Phi'} \tau_{-t}((\omega \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma(a)) = \tau_s \sigma_t^{\Phi'} \tau_{-t} \tau_{-s}((\omega \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma(a))$$

et donc, d'après le théorème 7 , on a :

$$\sigma_t^{\Phi'} \circ \tau_{-t} = \tau_s \circ \sigma_t^{\Phi'} \circ \tau_{-t} \circ \tau_{-s} = \tau_s \circ \sigma_t^{\Phi'} \circ \tau_{-s} \circ \tau_{-t}$$

d'où l'on tire immédiatement la commutation entre $\sigma^{\Phi'}$ et τ.

D'après le lemme précédent, κ' laisse invariant Φ. On sait alors que, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a $\sigma_s^{\Phi} \circ \sigma_t^{\Psi} \circ \tau_t = \sigma_t^{\Psi} \circ \tau_t \circ \sigma_s^{\Phi}$. Par suite :

$$\begin{aligned}
(\kappa'_t \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id) \circ \Gamma = \Gamma \circ \kappa'_t &= \Gamma \circ \sigma_s^{\Phi} \circ \kappa'_t \circ \sigma_{-s}^{\Phi} \\
&= (\tau_s \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \sigma_s^{\Phi}) \circ \Gamma \circ \kappa'_t \circ \sigma_{-s}^{\Phi} \\
&\quad \text{d'après la relation de commutation entre } \Gamma \text{ et } \sigma^{\Phi}, \\
&= (\sigma_s^{\Psi} \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_s \circ \kappa'_t) \circ \Gamma \circ \sigma_{-s}^{\Phi} \\
&= (id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_s \circ \kappa'_t \circ \tau_{-s}) \circ \Gamma \\
&\quad \text{d'après la relation de commutation entre } \Gamma \text{ et } \sigma^{\Phi}.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $a \in M$ et tout $\omega \in M_*^+$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ satisfaisant $\omega \circ \alpha \leq k\nu$, on obtient :

$$\sigma_t^{\Psi} \tau_t((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)\Gamma(a)) = \tau_s \sigma_t^{\Psi} \tau_t \tau_{-s}((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega)\Gamma(a))$$

et donc :

$$\sigma_t^{\Psi} \circ \tau_t = \tau_s \circ \sigma_t^{\Psi} \circ \tau_t \circ \tau_{-s} = \tau_s \circ \sigma_t^{\Psi} \circ \tau_{-s} \circ \tau_t$$

d'où l'on tire immédiatement la commutation entre σ^{Ψ} et τ. ■

5.1.3 Corollaire — *Si T' est β-adapté par rapport à ν, en posant $\Phi' = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T'$, les groupes d'automorphismes $\sigma^{\Phi'}$ et σ^{Ψ} commutent.*

Démonstration : Il suffit de calculer, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Gamma \circ \sigma_s^{\Phi'} \circ \sigma_t^{\Psi} &= (\tau_s \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \sigma_s^{\Phi'}) \circ \Gamma \circ \sigma_t^{\Psi} \\
&\quad \text{d'après la proposition 4.6.12}, \\
&= (\tau_s \sigma_t^{\Psi} \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \sigma_s^{\Phi'} \tau_{-t}) \circ \Gamma \\
&\quad \text{d'après la proposition 4.4.9}, \\
&= (\sigma_t^{\Psi} \tau_s \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_{-t} \sigma_s^{\Phi'}) \circ \Gamma \\
&\quad \text{par commutation}, \\
&= (\sigma_t^{\Psi} \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_{-t}) \circ \Gamma \circ \sigma_s^{\Phi'} \\
&\quad \text{d'après la proposition 4.6.12}, \\
&= \Gamma \circ \sigma_t^{\Psi} \circ \sigma_s^{\Phi'} \\
&\quad \text{d'après la proposition 4.4.9}.
\end{aligned}$$

L'injectivité de Γ permet de conclure. ■

5.2 Un premier résultat d'unicité du poids opératoriel invariant à gauche.

Soient T_1 et T_2 deux poids opératoriels normaux semifinis et fidèles invariants à gauche de M vers $\alpha(N)$ tels que $T_1 \leq T_2$. Pour tout $i \in \{1,2\}$, on note $\Phi_i = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_i$ et $\hat{\beta}_i(n) = J_{\Phi_i}\alpha(n^*)J_{\Phi_i}$.

On définit, de manière analogue à U_H une isométrie $(U_2)_H$ par la formule :

$$(U_2)_H(v \;{}_{\alpha}\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_2}\; \Lambda_{\Phi_2}(a)) = \sum_{i \in I} \xi_i \;{}_{\beta}\underset{\nu}{\otimes}{}_{\alpha}\; \Lambda_{\Phi_2}((\omega_{v,\xi_i} \;{}_{\beta}\underset{\nu}{\star}{}_{\alpha}\; id)(\Gamma(a)))$$

pour tout $v \in D(H_\beta, \nu^o)$ et tout $a \in \mathcal{N}_{\Phi_2} \cap \mathcal{N}_{T_2}$. On sait alors que $(U_2)_H$ est unitaire et que $\Gamma(x) = (U_2)_H(1 \;{}_{\alpha}\underset{N^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_2}\; x)(U_2)_H^*$ pour tout $x \in M$.

Comme $T_1 \leq T_2$, il existe $F \in \mathcal{L}(H_{\Phi_2}, H_{\Phi_1})$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{N}_{\Phi_2} \cap \mathcal{N}_{T_2}$, on a $F\Lambda_{\Phi_2}(x) = \Lambda_{\Phi_1}(x)$. Il est facile de vérifier que, pour tout $n \in N$, on a $F\hat{\beta}_2(n) = \hat{\beta}_1(n)F$. Si on note $P = F^*F$, alors on a que $P \in M' \cap \hat{\beta}_2(N)'$ et donc $J_{\Phi_2}PJ_{\Phi_2} \in M \cap \alpha(N)'$.

5.2.1 Lemme — *On a* $\Gamma(J_{\Phi_2}PJ_{\Phi_2}) = 1 \;{}_{\beta}\underset{N}{\otimes}{}_{\alpha}\; J_{\Phi_2}PJ_{\Phi_2}$.

Démonstration : On a, pour tous $v, w \in D(H_\beta, \nu^o)$ et tous $a, b \in \mathcal{N}_{\Phi_2} \cap \mathcal{N}_{T_2}$:

$$\begin{aligned}
&((1 \;{}_{\beta}\underset{N}{\otimes}{}_{\alpha}\; P)(U_2)_H(v \;{}_{\alpha}\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_2}\; \Lambda_{\Phi_2}(a)) | (U_2)_H(w \;{}_{\alpha}\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_2}\; \Lambda_{\Phi_2}(b))) \\
&= (\sum_{i \in I} \xi_i \;{}_{\beta}\underset{\nu}{\otimes}{}_{\alpha}\; \Lambda_{\Phi_1}((\omega_{v,\xi_i} \;{}_{\beta}\underset{\nu}{\star}{}_{\alpha}\; id)(\Gamma(a))) | \sum_{i \in I} \xi_i \;{}_{\beta}\underset{\nu}{\otimes}{}_{\alpha}\; \Lambda_{\Phi_1}((\omega_{w,\xi_i} \;{}_{\beta}\underset{\nu}{\star}{}_{\alpha}\; id)(\Gamma(b)))) \\
&= ((U_1)_H(v \;{}_{\alpha}\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_1}\; \Lambda_{\Phi_1}(a)) | (U_1)_H(w \;{}_{\alpha}\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_1}\; \Lambda_{\Phi_1}(b)))
\end{aligned}$$

où $(U_1)_H$ est défini de manière analogue à $(U_2)_H$. Par densité, on obtient, pour tous $v, w \in H$ et tous $a, b \in \mathcal{N}_{\Phi_2} \cap \mathcal{N}_{T_2}$:

$$\begin{aligned}
&((1 \;{}_{\beta}\underset{N}{\otimes}{}_{\alpha}\; P)(U_2)_H(v \;{}_{\alpha}\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_2}\; \Lambda_{\Phi_2}(a)) | (U_2)_H(w \;{}_{\alpha}\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_2}\; \Lambda_{\Phi_2}(b))) \\
&= ((U_1)_H(v \;{}_{\alpha}\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_1}\; \Lambda_{\Phi_1}(a)) | (U_1)_H(w \;{}_{\alpha}\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_1}\; \Lambda_{\Phi_1}(b))) \\
&= (v \;{}_{\alpha}\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_1}\; \Lambda_{\Phi_1}(a) | w \;{}_{\alpha}\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_1}\; \Lambda_{\Phi_1}(b)) \\
&= ((1 \;{}_{\alpha}\underset{N^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_2}\; P)(v \;{}_{\alpha}\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_2}\; \Lambda_{\Phi_2}(a)) | w \;{}_{\alpha}\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_2}\; \Lambda_{\Phi_2}(b))
\end{aligned}$$

d'où $(U_2)_H^*(1 \;{}_{\beta}\underset{N}{\otimes}{}_{\alpha}\; P)(U_2)_H = 1 \;{}_{\alpha}\underset{N^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_2}\; P$. En spécifiant l'espace $H = H_\Phi$, la proposition 4.6.9 permet d'obtenir la formule suivante :

$$(U_2)_H(1 \;{}_{\alpha}\underset{N^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_2}\; J_{\Phi_2}PJ_{\Phi_2})(U_2)_H^* = 1 \;{}_{\beta}\underset{N}{\otimes}{}_{\alpha}\; J_{\Phi_2}PJ_{\Phi_2}$$

et comme $J_{\Phi_2}PJ_{\Phi_2} \in M$, on a $\Gamma(J_{\Phi_2}PJ_{\Phi_2}) = 1 \;{}_{\beta}\underset{N}{\otimes}{}_{\alpha}\; J_{\Phi_2}PJ_{\Phi_2}$. ■

5.2.2 Proposition — *Soient T_1 et T_2 deux poids opératoriels normaux, semifinis et fidèles invariants à gauche de M vers $\alpha(N)$ tels que $T_1 \leq T_2$. Alors il existe $p \in N$ injectif tel que $0 \leq p \leq 1$ et, pour tous $x, y \in \mathcal{N}_{\Phi_2} \cap \mathcal{N}_{T_2}$, on a $(\Lambda_{\Phi_1}(x)|\Lambda_{\Phi_1}(y)) = (J_{\Phi_2}\beta(p)J_{\Phi_2}\Lambda_{\Phi_2}(x)|\Lambda_{\Phi_2}(y))$.*

Démonstration : C'est une conséquence du lemme précédent et de la proposition 4.4.14. ■

5.2.3 Proposition — *Si T_1 et T_2 deux poids opératoriels normaux, semifinis et fidèles invariants à gauche tels que $T_1 \leq T_2$ et T_1 et T_2 sont β-adaptés par rapport à ν, en posant $\Phi_i = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_i$ pour $i = 1, 2$, il existe $p \in Z(N)$ injectif tel que $0 \leq p \leq 1$ et $\Phi_1 = (\Phi_2)_{\beta(p)}$ au sens de [Str81].*

Démonstration : Par hypothèse, T_1 et T_2 sont β-adaptés par rapport à ν donc les groupes modulaires σ^{T_1} et σ^{T_2} coïncident sur $\beta(N)$. Pour tous $x, y \in \mathcal{N}_{\Phi_2} \cap \mathcal{N}_{T_2}$ et $n \in \mathcal{T}_\nu$, on a :

$$\begin{aligned}
(PJ_{\Phi_2}\beta(n)J_{\Phi_2}\Lambda_{\Phi_2}(x)|\Lambda_{\Phi_2}(y)) &= (P\Lambda_{\Phi_2}(x\sigma^{T_2}_{-i/2}(\beta(n))|\Lambda_{\Phi_2}(y)) \\
&= (\Lambda_{\Phi_1}(x\sigma^{T_1}_{-i/2}(\beta(n))|\Lambda_{\Phi_1}(y)) \\
&\qquad \text{car } \sigma^{T_1} \text{ et } \sigma^{T_2} \text{ coïncident sur } \beta(N), \\
&= \Phi_1(y^* x\sigma^{T_1}_{-i/2}(\beta(n))) \\
&= \Phi_1(\sigma^{T_1}_{i/2}(\beta(n))y^* x) \\
&\qquad \text{d'après les conditions KMS}, \\
&= (\Lambda_{\Phi_1}(x)|\Lambda_{\Phi_1}(y\sigma^{T_1}_{-i/2}(\beta(n^*)))) \\
&= (P\Lambda_{\Phi_2}(x)|\Lambda_{\Phi_2}(y\sigma^{T_2}_{-i/2}(\beta(n^*)))) \\
&\qquad \text{car } \sigma^{T_1} \text{ et } \sigma^{T_2} \text{ coïncident sur } \beta(N), \\
&= (J_{\Phi_2}\beta(n)J_{\Phi_2}P\Lambda_{\Phi_2}(x)|\Lambda_{\Phi_2}(y))
\end{aligned}$$

On en déduit que $P \in (J_{\Phi_2}\beta(N)J_{\Phi_2})'$. La proposition précédente et l'injectivité de β permettent de conclure que $p \in Z(N)$. On sait que $0 \leq P \leq 1$ et que P est injectif à image dense donc il en est de même pour p. Enfin, d'après la proposition précédente et la proposition 3.13 de [Str81], on sait que $\beta(p)$ coïncide avec le prolongement analytique en $-i$ du cocycle $[D\Phi_1 : D\Phi_2]$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $[D\Phi_1 : D\Phi_2]_t = \beta(p)^{it}$. Or, comme $p \in Z(N)$ et T_2 est β-adapté par rapport à ν, $\beta(p)$ est dans le centralisateur de Φ_2 et on a $\Phi_1 = (\Phi_2)_{\beta(p)}$. ■

5.2.4 Lemme — *Soient T et T' des poids opératoriels β-adaptés par rapport à ν. Alors, si $T + T'$ est semifini, $T + T'$ est β-adapté par rapport à ν.*

Démonstration : Comme T et T' sont des poids opératoriels β-adapté par rapport à ν, il existe, d'après le lemme 4.1.3, S et S' normaux, semifinis et fidèles de M vers $\beta(N)$ tels que :

$$\nu \circ \alpha^{-1} \circ T = \nu \circ \beta^{-1} \circ S \quad \text{et} \quad \nu \circ \alpha^{-1} \circ T' = \nu \circ \beta^{-1} \circ S'$$

d'où $\nu \circ \alpha^{-1} \circ (T + T') = \nu \circ \beta^{-1} \circ (S + S')$. Comme $T + T'$ est semifini, $\nu \circ \alpha^{-1} \circ (T + T')$ est semifini donc $\nu \circ \beta^{-1} \circ (S + S')$ est semifini, et par suite, $S + S'$ est également semifini. On en déduit alors, pour tout $n \in N$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\sigma_t^{T+T'}(\beta(n)) = \sigma_t^{\nu\circ\alpha^{-1}\circ(T+T')}(\beta(n)) = \sigma_t^{\nu\circ\beta^{-1}\circ(S+S')}(\beta(n)) = \sigma_t^{\nu\circ\beta^{-1}}(\beta(n)) = \beta(\sigma^\nu_{-t}(n))$$

■

On a besoin ici d'un lemme technique qui apparaît dans [Kus97] :

5.2.5 Lemme — *Si ϕ et η sont deux poids normaux semifinis et fidèles sur M et qu'il existe un opérateur λ strictement positif affilié à $(M^{\phi})^{+}$ satisfaisant $||\Lambda_{\eta}(\sigma_t^{\phi}(x))|| = ||\lambda^{\frac{t}{2}}\Lambda_{\eta}(x)||$ pour tout $x \in \mathcal{N}_{\eta}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{N}_{\eta} \cap \mathcal{N}_{\phi}$ est un cœur pour Λ_{η} et Λ_{ϕ}.*

Démonstration : On peut définir, pour tout $t \in \mathbb{R}$, des unitaires T_t tels que $T_t\Lambda_{\eta}(a) = \lambda^{-t/2}\Lambda_{\eta}(\sigma_t^{\phi}(a))$, de plus, il existe T strictement positif tel que $T^{it} = T_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La suite de la preuve est identique à [KV99] (proposition 1.14). ■

5.2.6 Proposition — *Soit T_1 un poids opératoriel normal, semifini et fidèle invariant à gauche et β-adapté par rapport à ν tel qu'il existe un opérateur λ strictement positif affilié à $(M^{\Phi})^{+}$ satisfaisant $||\Lambda_1(\sigma_t^{\Phi}(x))|| = ||\lambda^{\frac{t}{2}}\Lambda_1(x)||$ pour tout $x \in \mathcal{N}_{\Phi_1}$ et tout $t \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un opérateur q strictement positif affilié au centre de N tel que $\Phi_1 = (\Phi)_{\beta(q)}$.*

Démonstration : On pose $T_2 = T_L + T_1$. Comme $||\Lambda_1(\sigma_t^{\Phi}(x))|| = ||\lambda^{\frac{t}{2}}\Lambda_1(x)||$ pour tout $x \in \mathcal{N}_{\Phi_1}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a, d'après le lemme précédent, T_2 normal, semifini et fidèle. Il est facile de vérifier que T_2 est invariant à gauche et d'après le lemme 5.2.4, T_2 est β-adapté par rapport à ν. Comme $T_1 \leq T_2$, on conclut, d'après la proposition 5.2.3, qu'il existe $p \in N$ injectif et compris entre 0 et 1 tel que $\Phi_1 = (\Phi_2)_{\beta(p)}$. Comme $T_L \leq T_2$ et $T_2 = T_L + T_1$, on a $\Phi = (\Phi_2)_{\beta(1-p)}$. D'après [Str81], on a $[D\Phi_1 : D\Phi_2]_t = \beta(p)^{it}$ et $[D\Phi : D\Phi_2]_t = \beta(1-p)^{it}$. On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$[D\Phi_1 : D\Phi]_t = [D\Phi_1 : D\Phi_2]_t[D\Phi_2 : D\Phi]_t = \beta(\frac{p}{1-p})^{it}$$

alors l'élément recherché est $q = \frac{p}{1-p}$. ■

Il est clair qu'un résultat analogue est vérifié pour les poids opératoriels invariants à droite. Dès qu'on disposera d'un module, on montrera que tout poids opératoriel invariant à gauche vérifie une relation d'invariance relative par rapport à σ^{Φ} comme dans la proposition précédente.

5.3 Module et opérateur d'échelle.

Dorénavant, on étudie le groupe quantique mesuré $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, R \circ T_L \circ R)$. On considère les poids normaux, semifinis et fidèles sur M suivant : $\Phi = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L$ et $\Phi \circ R$. On rappelle alors que $\sigma_t^{\Phi \circ R} = R \circ \sigma_{-t}^{\Phi} \circ R$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On sait d'après le corollaire 5.1.3, que les groupes modulaires associés à Φ et $\Phi \circ R$ commutent donc, d'après [Vae01a] (proposition 2.5), il existe un opérateur strictement positif δ affilié à M et un opérateur strictement positif λ affilié au centre de M tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $[D\Phi \circ R : D\Phi]_t = \lambda^{\frac{1}{2}it^2}\delta^{it}$. Les groupes modulaires de Φ et $\Phi \circ R$ sont reliés par l'égalité $\sigma_t^{\Phi \circ R}(x) = \delta^{it}\sigma_t^{\Phi}(x)\delta^{-it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in M$.

5.3.1 Définition — On appelle **opérateur d'échelle** l'élément λ strictement positif affilié à $Z(M)$ et **module** l'élément δ strictement positif affilié à M tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$[D\Phi \circ R : D\Phi]_t = \lambda^{\frac{1}{2}it^2}\delta^{it}$$

Dans ce paragraphe, on établit les propriétés de l'opérateur d'échelle et du module, en particulier, la compatibilité de ces objets avec la structure de bimodule de Hopf.

5.3.2 Lemme — *Soit h un élément strictement positif affilié au centre de N. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :*

$$[D\nu_h \circ \alpha^{-1} \circ T_L \circ R : D\nu_h \circ \alpha^{-1} \circ T_L]_t = \lambda^{\frac{1}{2}it^2}\beta(h^{it})\delta^{it}\alpha(h^{-it})$$

Démonstration : On procède au calcul suivant :

$$\begin{aligned}
&[D\nu_h \circ \alpha^{-1} \circ T_L \circ R : D\nu_h \circ \alpha^{-1} \circ T_L]_t \\
&= [D\nu_h \circ \alpha^{-1} \circ T_L \circ R : D\Phi \circ R]_t [D\Phi \circ R : D\Phi]_t [D\Phi : D\nu_h \circ \alpha^{-1} \circ T_L]_t \\
&= \beta([D\nu_h : D\nu]^*_{-t})\lambda^{\frac{1}{2}it^2}\delta^{it}\alpha([D\nu : D\nu_h]_t) \\
&= \lambda^{\frac{1}{2}it^2}\beta(h^{it})\delta^{it}\alpha(h^{-it})
\end{aligned}$$

■

5.3.3 Proposition — *L'opérateur d'échelle ne dépend pas du poids quasi-invariant mais du groupe modulaire associé. Le module dépend du poids quasi-invariant. Si $\dot{\delta}$ désigne la classe de δ pour la relation d'équivalence $\delta_1 \sim \delta_2$ si, et seulement si il existe h strictement positif affilié au centre de N tel que $\delta_2^{it} = \beta(h^{it})\delta_1^{it}\alpha(h^{-it})$, alors $\dot{\delta}$ ne dépend plus du poids quasi-invariant mais du groupe modulaire associé.*

Démonstration : Si ν' est poids normal, semifini et fidèle sur N tel que $\sigma^{\nu'} = \sigma^{\nu}$ alors il existe h strictement positif affilié au centre de N tel que $\nu' = \nu_h$. La proposition découle du lemme précédent. ■

5.3.4 Lemme — *Pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a :*

$$[D\Phi \circ \sigma_s^{\Phi\circ R} : D\Phi]_t = \lambda^{ist}$$

Démonstration : Le lemme provient du calcul du cocycle suivant :

$$\begin{aligned}
[D\Phi \circ \sigma_s^{\Phi\circ R} : D\Phi]_t &= [D\Phi \circ \sigma_s^{\Phi\circ R} : D\Phi \circ R \circ \sigma_s^{\Phi\circ R}]_t [D\Phi \circ R : D\Phi]_t \\
&= \sigma_{-s}^{\Phi\circ R}([D\Phi : D\Phi \circ R]_t)[D\Phi \circ R : D\Phi]_t \\
&= \delta^{-is}\sigma_{-s}^{\Phi}(\lambda^{-\frac{it^2}{2}}\delta^{-it})\delta^{is}\lambda^{\frac{it^2}{2}}\delta^{it} \\
&= \delta^{-is}\lambda^{-\frac{it^2}{2}}\lambda^{ist}\delta^{-it}\delta^{is}\lambda^{\frac{it^2}{2}}\delta^{it} = \lambda^{ist}
\end{aligned}$$

■

5.3.5 Proposition — *On a $R(\lambda) = \lambda$, $R(\delta) = \delta^{-1}$ et $\tau_t(\delta) = \delta$, $\tau_t(\lambda) = \lambda$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION : La partie de la proposition concernant l'antipode unitaire est une conséquence immédiate de l'unicité de la décomposition du cocycle de Radon-Nikodym. On effectue alors le calcul suivant, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\tau_s([D\Phi \circ R : D\Phi]_t) &= [D\Phi \circ R \circ \tau_{-s} : D\Phi \circ \tau_{-s}]_t \\
&= [D\Phi \circ \sigma_s^{\Phi\circ R} \circ R : D\Phi \circ \sigma_s^{\Phi\circ R}]_t \\
&\quad \text{car } \Phi \circ \tau_{-s} = \Phi \circ \sigma_s^{\Phi\circ R} \text{ d'après le lemme 5.1.1,} \\
&= [D\Phi \circ \sigma_s^{\Phi\circ R} \circ R : D\Phi \circ R]_t [D\Phi \circ R : D\Phi]_t [D\Phi : D\Phi \circ \sigma_s^{\Phi\circ R}]_t \\
&= R([D\Phi \circ \sigma_s^{\Phi\circ R} : D\Phi]_{-t}^*)[D\Phi \circ R : D\Phi]_t [D\Phi \circ \sigma_s^{\Phi\circ R} : D\Phi]_t^* \\
&= R(\lambda^{ist})\lambda^{-\frac{it^2}{2}}\delta^{it}\lambda^{-ist} = \lambda^{-\frac{it^2}{2}}\delta^{it} \\
&\quad \text{d'après le lemme précédent et la première partie de la proposition.}
\end{aligned}$$

■

5.3.6 COROLLAIRE — *Le module δ est affilié à $M \cap \alpha(N)' \cap \beta(N)'$.*

DÉMONSTRATION : Par définition, on a $\lambda^{\frac{it^2}{2}}\delta^{it} = [D\Phi \circ R : D\Phi]_t = [DR \circ T_L \circ R : DS_L]_t$ qui appartient à $M \cap \beta(N)'$ car $\Phi = \nu \circ \beta^{-1} \circ S_L$. Comme λ est affilié au centre de M, on en déduit que δ est affilié à $M \cap \beta(N)'$. Enfin, comme $R(\delta) = \delta$, on tire que δ est affilié à $M \cap \alpha(N)' \cap \beta(N)'$.
■

5.3.7 LEMME — *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\tau_{-t} \circ T_L \circ \tau_t$ est poids opératoriel normal, semifini et fidèle de M vers $\alpha(N)$ invariant à gauche. De plus, $\tau_{-t} \circ T_L \circ \tau_t$ est β-adapté pour ν.*

DÉMONSTRATION : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\nu \circ \alpha^{-1} \circ \tau_{-t} \circ T_L \circ \tau_t = \Phi \circ \tau_t$. On a :

$$\begin{aligned}
(id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \nu \circ \alpha^{-1} \circ \tau_{-t} \circ T_L \circ \tau_t) \circ \Gamma &= (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \Phi \circ \tau_t) \circ \Gamma \\
&= \tau_{-t} \circ (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \Phi) \circ \Gamma \circ \tau_t = \tau_{-t} \circ T_L \circ \tau_t
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in N$, on a :

$$\begin{aligned}
\sigma_s^{\Phi\circ\tau_t}(\beta(n)) &= \tau_{-t} \circ \sigma_s^{\Phi} \circ \tau_t(\beta(n)) = \tau_{-t} \circ \sigma_s^{\Phi}(\beta(\sigma_{-t}^{\nu}(n))) \\
&= \tau_{-t}(\beta(\sigma_{-(s+t)}^{\nu}(n))) = \beta(\sigma_{-s}^{\nu}(n))
\end{aligned}$$

■

5.3.8 PROPOSITION — *L'opérateur d'échelle λ est affilié à l'hypercentre $Z(M) \cap \alpha(N) \cap \beta(N)$. Plus précisément, il existe q strictement positif affilié à $Z(N)$ tel que $\lambda = \alpha(q) = \beta(q)$.*

DÉMONSTRATION : D'après le lemme précédent, $\tau_s \circ T_L \circ \tau_{-s}$ est invariant à gauche et β-adapté par rapport à ν. De plus, comme σ^{Φ} et τ commutent, $\Phi \circ \tau_{-s}$ est laissé invariant par σ^{Φ}. On est dans les conditions de la proposition 5.2.6 et on obtient un élément strictement positif q_s affilié au centre de N tel que :

$$[D\Phi \circ \tau_{-s} : D\Phi]_t = \beta(q_s)^{it}$$

D'après le lemme 5.3.4, on a :

$$[D\Phi \circ \sigma_s^{\Phi\circ R} : D\Phi]_t = \lambda^{ist}$$

On sait que $\sigma_s^{\Phi\circ R}\circ\tau_s$ laisse invariant Φ d'après le lemme 5.1.1, donc $\Phi\circ\tau_{-s} = \Phi\circ\sigma_s^{\Phi\circ R}$. Par suite, on obtient, pour tous $s,t\in\mathbb{R}$, $\lambda^{ist} = \beta(q_s)^{it}$. On en déduit facilement qu'il existe q strictement positif affilié au centre de N tel que $\lambda = \beta(q)$. Enfin, comme $R(\lambda) = \lambda$, il vient $\lambda = \alpha(q)$. ∎

5.3.9 Lemme — *On a, pour tous $a,b\in\mathcal{N}_\Phi\cap\mathcal{N}_{T_L}$ et tout $t\in\mathbb{R}$:*

$$i)\ \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(\lambda^{\frac{t}{2}}\tau_t(a))} = \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(a)}\circ\tau_{-t}\ ;$$
$$ii)\ \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(b)}\circ\sigma_t^{\Phi\circ R} = \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(\lambda^{\frac{t}{2}}\sigma_{-t}^{\Phi\circ R}(b))}.$$

Démonstration : La première relation est une conséquence du fait que τ est implémenté par P. La seconde se déduit du calcul suivant qui repose sur l'expression de $\Delta_{\Phi\circ R}$ en fonction de δ et Δ_Φ d'après la proposition 2.4 de [Vae01a] :

$$\begin{aligned}
(\sigma_t^{\Phi\circ R}(x)J_\Phi\Lambda_\Phi(b)|J_\Phi\Lambda_\Phi(b)) &= (x\Delta_{\Phi\circ R}^{-it}J_\Phi\Lambda_\Phi(b)|\Delta_{\Phi\circ R}^{-it}J_\Phi\Lambda_\Phi(b))\\
&= (xJ_\Phi\delta^{it}J_\Phi\delta^{-it}\Delta_\Phi^{-it}J_\Phi\Lambda_\Phi(b)|J_\Phi\delta^{it}J_\Phi\delta^{-it}\Delta_\Phi^{-it}J_\Phi\Lambda_\Phi(b))\\
&= (x\delta^{-it}J_\Phi\Lambda_\Phi(\sigma_{-t}^\Phi(b))|\delta^{-it}J_\Phi\Lambda_\Phi(\sigma_{-t}^\Phi(b)))\\
&= (xJ_\Phi\Lambda_\Phi(\lambda^{\frac{t}{2}}\sigma_{-t}^\Phi(b)\delta^{it})|J_\Phi\Lambda_\Phi(\lambda^{\frac{t}{2}}\sigma_{-t}^\Phi(b)\delta^{it}))\\
&\qquad \text{car } \sigma_{-i/2}^\Phi(\delta^{it}) = \lambda^{\frac{t}{2}}\delta^{it},\\
&= (xJ_\Phi\Lambda_\Phi(\lambda^{\frac{t}{2}}\delta^{-it}\sigma_{-t}^\Phi(b)\delta^{it})|J_\Phi\Lambda_\Phi(\lambda^{\frac{t}{2}}\delta^{-it}\sigma_{-t}^\Phi(b)\delta^{it}))\\
&= (xJ_\Phi\Lambda_\Phi(\lambda^{\frac{t}{2}}\sigma_{-t}^{\Phi\circ R}(b))|J_\Phi\Lambda_\Phi(\lambda^{\frac{t}{2}}\sigma_{-t}^{\Phi\circ R}(b)))
\end{aligned}$$

∎

5.3.10 Proposition — *On a $\Gamma\circ\tau_t = (\sigma_t^\Phi \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \sigma_{-t}^{\Phi\circ R})\circ\Gamma$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.*

Démonstration : Pour tous $a,b\in\mathcal{N}_\Phi\cap\mathcal{N}_{T_L}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, on calcule :

$$\begin{aligned}
(id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(b)})(\sigma_{-t}^\Phi \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \sigma_t^{\Phi\circ R})\Gamma(\tau_t(a^*a)) &= \sigma_{-t}^\Phi(id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(b)}\circ\sigma_t^{\Phi\circ R})\Gamma(\tau_t(a^*a))\\
&= \sigma_{-t}^\Phi(id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(\lambda^{\frac{t}{2}}\sigma_{-t}^{\Phi\circ R}(b))})\Gamma(\tau_t(a^*a))\\
&= \sigma_{-t}^\Phi R(id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(\tau_t(a))})\Gamma(\lambda^t\sigma_{-t}^{\Phi\circ R}(b^*b))\\
&= R\sigma_t^{\Phi\circ R}(id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(\lambda^{\frac{t}{2}}\tau_t(a))})\Gamma(\sigma_{-t}^{\Phi\circ R}(b^*b))\\
&= R\sigma_t^{\Phi\circ R}(id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(a)}\circ\tau_{-t})\Gamma(\sigma_{-t}^{\Phi\circ R}(b^*b))\\
&= R(id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(a)})\Gamma(b^*b)\\
&= (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_{J_\Phi\Lambda_\Phi(b)})\Gamma(a^*a)
\end{aligned}$$

d'où on tire que $(\sigma_{-t}^\Phi \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \sigma_t^{\Phi\circ R})\circ\Gamma\circ\tau_t = \Gamma$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. ∎

On peut définir un opérateur $\delta^{it} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{it} \in (M \cap \beta(N)') \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} (M \cap \alpha(N)') \subset M \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} M$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'après le paragraphe 2.5, car δ est affilié à $M \cap \alpha(N)' \cap \beta(N)'$. On montre maintenant que δ est un cocaractère dans le sens où $\Gamma(\delta) = \delta \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta$.

5.3.11 Lemme — *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les opérateurs $\Gamma(\delta^{it})$ et $\delta^{it} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{it}$ commutent.*

Démonstration : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\sigma^{\Phi}_{-t}\sigma^{\Phi\circ R}_{t} \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \sigma^{\Phi}_{-t}\sigma^{\Phi\circ R}_{t}) \circ \Gamma = (\sigma^{\Phi}_{-t} \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \sigma^{\Phi}_{-t}\sigma^{\Phi\circ R}_{t}\tau_t) \circ \Gamma \circ \sigma^{\Phi\circ R}_{t}$$

$$= (\sigma^{\Phi}_{-t}\tau_t \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \sigma^{\Phi\circ R}_{t}\tau_t) \circ \Gamma \circ \sigma^{\Phi}_{-t}\sigma^{\Phi\circ R}_{t} = (\sigma^{\Phi}_{-t} \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \sigma^{\Phi\circ R}_{t}) \circ \Gamma \circ \tau_t\sigma^{\Phi}_{-t}\sigma^{\Phi\circ R}_{t} = \Gamma \circ \sigma^{\Phi}_{-t}\sigma^{\Phi\circ R}_{t}$$

Or, pour tout $x \in M$, on sait que $\sigma^{\Phi}_{-t}\sigma^{\Phi\circ R}_{t}(x) = \delta^{it}x\delta^{-it}$, c'est pourquoi on obtient :

$$(\delta^{it} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{it})\Gamma(x)(\delta^{-it} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{-it}) = \Gamma(\delta^{it}x\delta^{-it})$$

En particulier, pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\delta^{it} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{it})\Gamma(\delta^{is})(\delta^{-it} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{-it}) = \Gamma(\delta^{it}\delta^{is}\delta^{-it}) = \Gamma(\delta^{is})$$

et le lemme en découle. ■

On utilise le résultat technique 7.6 de [KV00] qu'on énonce dans le lemme suivant :

5.3.12 Lemme — *Il existe un sous espace C de M tel que, pour tout $c \in C$:*

i) $c \in \mathcal{T}_{\Phi\circ R}$;

ii) $\delta^{-1/2}\sigma^{\Phi\circ R}_{-i/2}(c^*)$ *est borné et* $\delta^{-1/2}\sigma^{\Phi\circ R}_{-i/2}(c^*) \in \mathcal{D}(\sigma^{\Phi\circ R}_{i/2}) \cap \mathcal{N}_{\Phi\circ R}$;

iii) $\delta^{-1/2}c^*$ *est borné et* $\delta^{-1/2}c^* \in \mathcal{N}^*_{\Phi\circ R}$;

iv) $\sigma^{\Phi\circ R}_{i/2}(\delta^{-1/2}\sigma^{\Phi\circ R}_{-i/2}(c^*)) = \lambda^{-i/4}\delta^{-1/2}c^*$;

v) $\Lambda_{\Phi\circ R}(C)$ *est un cœur pour* $\delta^{-1/2}$;

vi) $c \in \mathcal{N}_\Phi$, $\Phi(c^*c) = \Phi \circ R((\delta^{-1/2}\sigma^{\Phi\circ R}_{-i/2}(c^*))^*\delta^{-1/2}\sigma^{\Phi\circ R}_{-i/2}(c^*))$;

vii) $T_L(c^*c) = S_R(\delta^{-1/2}c^*c\delta^{-1/2})$

où S_R vérifie $\nu \circ \beta^{-1} \circ T_R = \Phi \circ R = \nu \circ \alpha^{-1} \circ S_R$.

Démonstration : Les résultats i) à vi) sont empruntés à [KV00]. Cela repose essentiellement sur le fait que le cocycle de Radon-Nikodym de $\Phi \circ R$ par rapport à Φ est de la forme $\lambda^{\frac{it^2}{2}}\delta^{it}$. vii) est un corollaire de vi). ■

5.3.13 Proposition — *Pour tous $v \in \mathcal{D}(\delta^{-1/2}) \cap D((H_{\Phi\circ R})_\beta, \nu^o)$ et $a \in \mathcal{N}_{\Phi\circ R} \cap \mathcal{N}_{S_R}$, on a $\Phi\circ R((\omega_v \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))) = (S_R(a)\delta^{-1/2}v|\delta^{-1/2}v)$ où S_R vérifie $\nu\circ\beta^{-1}\circ T_R = \Phi\circ R = \nu\circ\alpha^{-1}\circ S_R$.*

Démonstration : Soient $c \in C$ et $d \in \mathcal{N}_{\Phi\circ R} \cap \mathcal{N}_{T_R}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\Phi \circ R((\omega_{J_{\Phi\circ R}\Lambda_{\Phi\circ R}(c)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(d^*d))) &= \Phi((\omega_{J_{\Phi\circ R}\Lambda_{\Phi\circ R}(d)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(c^*c))) \\
&\quad \text{d'après la proposition 4.6.3,} \\
&= (T_L(c^*c)J_{\Phi\circ R}\Lambda_{\Phi\circ R}(d)|J_{\Phi\circ R}\Lambda_{\Phi\circ R}(d)) \\
&\quad \text{d'après l'invariance à gauche de } T_L, \\
&= (S_R(\delta^{-1/2}c^*c\delta^{-1/2})J_{\Phi\circ R}\Lambda_{\Phi\circ R}(d)|J_{\Phi\circ R}\Lambda_{\Phi\circ R}(d)) \\
&\quad \text{d'après les propriétés des éléments de } C, \\
&= ||\Lambda_{\Phi\circ R}(c\delta^{-1/2}) \underset{\nu}{{}_\varepsilon\otimes_\alpha} J_{\Phi\circ R}\Lambda_{\Phi\circ R}(d)||^2 \\
&\quad \text{où } \varepsilon(x) = J_{\Phi\circ R}\alpha(x^*)J_{\Phi\circ R}, \\
&= ||J_{\Phi\circ R}\Lambda_{\Phi\circ R}(c\delta^{-1/2}) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\varepsilon} \Lambda_{\Phi\circ R}(d)||^2 \\
&= (S_R(d^*d)J_{\Phi\circ R}\Lambda_{\Phi\circ R}(c\delta^{-1/2})|J_{\Phi\circ R}\Lambda_{\Phi\circ R}(c\delta^{-1/2})) \\
&= (S_R(d^*d)\Lambda_{\Phi\circ R}(\sigma^{\Phi\circ R}_{-i/2}(\delta^{-1/2}c^*))|\Lambda_{\Phi\circ R}(\sigma^{\Phi\circ R}_{-i/2}(\delta^{-1/2}c^*))) \\
&= (S_R(d^*d)\delta^{-1/2}\lambda^{i/4}J_{\Phi\circ R}\Lambda_{\Phi\circ R}(c)|\delta^{-1/2}\lambda^{i/4}J_{\Phi\circ R}\Lambda_{\Phi\circ R}(c)) \\
&\quad \text{d'après les propriétés des éléments de } C, \\
&= (S_R(d^*d)\delta^{-1/2}J_{\Phi\circ R}\Lambda_{\Phi\circ R}(c)|\delta^{-1/2}J_{\Phi\circ R}\Lambda_{\Phi\circ R}(c))
\end{aligned}$$

La proposition en découle grâce à des arguments de continuité. ■

5.3.14 Corollaire — *Pour tous* $v \in \mathcal{D}(\delta^{-1/2}) \cap D((H_{\Phi\circ R})_\beta, \nu^o)$ *et* $a \in \mathcal{N}_{\Phi\circ R} \cap \mathcal{N}_{S_R}$*, on a* $S_R((\omega_v \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))) = \alpha(< S_R(a)\delta^{-1/2}v, \delta^{-1/2}v >_{\beta,\nu^o})$.

Démonstration : C'est une conséquence de la proposition précédente et de la formule $\nu \circ \alpha^{-1}(< x\xi, \eta >_{\beta,\nu^o}) = (x\xi|\eta)$ pour tout $x \in \beta(N)'$ et tous $\xi, \eta \in D(H_\beta, \nu^o)$. ■

On désignera, par la suite, $\Gamma^{(2)}$ l'homomorphisme involutif de M dans $M \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} M \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} M$ donné par $(\Gamma \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id) \circ \Gamma = (id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma) \circ \Gamma$.

5.3.15 Lemme — *Pour tous* $v \in \mathcal{D}(\delta^{-1/2} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{-1/2}) \cap D((H_{\Phi\circ R} \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_{\Phi\circ R})_\beta, \nu^o)$ *et pour tout* $a \in \mathcal{M}_{\Phi\circ R} \cap \mathcal{N}_{S_R}$*, on a :*

$$\Phi \circ R((\omega_v \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma^{(2)}(a))) = ((S_R(a) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(\delta^{-1/2} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{-1/2})v|(\delta^{-1/2} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{-1/2})v)$$

Démonstration : Soient $\xi, \eta \in \mathcal{D}(\delta^{-1/2})) \cap D((H_{\Phi\circ R})_\beta, \nu^o)$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\Phi \circ R((\omega_{\xi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma^{(2)}(a))) &= \Phi \circ R((\omega_\eta \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma((\omega_\xi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))))) \\
&= (S_R((\omega_\xi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))\delta^{-1/2}\eta|\delta^{-1/2}\eta) \\
&\quad \text{d'après la proposition précédente,} \\
&= (\alpha(< S_R(a)\delta^{-1/2}\xi, \delta^{-1/2}\xi >_{\beta,\nu^o} \delta^{-1/2}\eta|\delta^{-1/2}\eta) \\
&\quad \text{d'après le corollaire précédent,} \\
&= ((S_R(a) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(\delta^{-1/2}\xi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{-1/2}\eta)|\delta^{-1/2}\xi \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{-1/2}\eta)
\end{aligned}$$

or $\mathcal{D}(\delta^{-1/2})) \cap D((H_{\Phi\circ R})_\beta, \nu^o) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \mathcal{D}(\delta^{-1/2})) \cap D((H_{\Phi\circ R})_\beta, \nu^o)$ est un cœur pour l'opérateur $\delta^{-1/2} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{-1/2}$, donc le lemme en découle. ■

5.3.16 Lemme — *Pour tous $v \in \mathcal{D}(\Gamma(\delta^{-1/2})) \cap D((H_{\Phi\circ R} \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_{\Phi\circ R})_\beta, \nu^o)$ et $a \in \mathcal{N}_{\Phi\circ R} \cap \mathcal{N}_{S_R}$, on a $\Phi \circ R((\omega_v \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma^{(2)}(a))) = ((S_R(a) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(\Gamma(\delta^{-1/2})v|(\Gamma(\delta^{-1/2})v)$.*

Démonstration : Soit $(\eta_i)_{i\in I}$ une $D(H_\beta, \nu^o)$-base de H_β. On pose $w_i = (\lambda^{\alpha,\hat{\beta}}_{\eta_i})^* W v$ pour tout $i \in I$. Pour tout $x \in M$, on a :

$$\omega_v(\Gamma(x)) = ((1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} x)Wv|Wv) = \sum_{i\in i}((\lambda^{\alpha,\hat{\beta}}_{\eta_i})^*(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} x)Wv|(\lambda^{\alpha,\hat{\beta}}_{\eta_i})^*Wv) = \sum_{i\in I}\omega_{w_i}(x)$$

On remarque que $Wv \in \mathcal{D}(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{-1/2})$ et $w_i \in \mathcal{D}(\delta^{-1/2})$ à cause de $v \in \mathcal{D}(\Gamma(\delta^{-1/2}))$ et

$\Gamma(x) = W^*(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} x)W$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\Phi \circ R((\omega_v \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma^{(2)}(a))) &= \Phi \circ R((\omega_v \circ \Gamma \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))\\
&= \sum_{i\in I} \Phi \circ R((\omega_{w_i} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))\\
&\quad \text{par normalité,}\\
&= \sum_{i\in I} (S_R(a)\delta^{-1/2}w_i|\delta^{-1/2}w_i)\\
&\quad \text{d'après la proposition précédente,}\\
&= \sum_{i\in I} (S_R(a)\delta^{-1/2}(\lambda^{\alpha,\hat\beta}_{\eta_i})^* Wv|\delta^{-1/2}(\lambda^{\alpha,\hat\beta}_{\eta_i})^* Wv)\\
&= \sum_{i\in I} (\lambda^{\alpha,\hat\beta}_{\eta_i} S_R(a)(\lambda^{\alpha,\hat\beta}_{\eta_i})^*(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \delta^{-1/2})Wv|(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \delta^{-1/2})Wv)\\
&= ((1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} S_R(a))(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \delta^{-1/2})Wv|(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \delta^{-1/2})Wv)\\
&\quad \text{d'après les propriétés des bases,}\\
&= (W^*(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} S_R(a))(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \delta^{-1/2})Wv|W^*(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \delta^{-1/2})Wv)\\
&\quad \text{car } W \text{ est un unitaire,}\\
&= ((S_R(a) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(\Gamma(\delta^{-1/2})v|(\Gamma(\delta^{-1/2})v)
\end{aligned}$$

La proposition en découle grâce à des arguments de continuité. ■

5.3.17 PROPOSITION — *On a :*

$$\Gamma(\delta) = \delta \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta$$

DÉMONSTRATION : Si $v \in \mathcal{D}(\delta^{-1/2} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{-1/2}) \cap \mathcal{D}(\Gamma(\delta^{-1/2})) \cap D((H_{\Phi\circ R} \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_{\Phi\circ R})_\beta, \nu^o)$, alors on a $||(\delta^{-1/2} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{-1/2})v||^2 = ||\Gamma(\delta^{-1/2})v||^2$ d'après les lemmes précédents. Or, les opérateurs commutent donc il existe un sous espace qui est un cœur pour $\delta^{-1/2} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{-1/2}$ et $\Gamma(\delta^{-1/2})$. D'après l'égalité précédente, on obtient donc que les deux opérateurs ont même domaine et, par suite, qu'ils sont égaux. ■

5.4 Unicité du poids opératoriel invariant à gauche.

THÉORÈME 10 — *Soit T' un poids opératoriel invariant à gauche et β-adapté par rapport à ν. Alors il existe h strictement positif affilié à $Z(N)$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$\nu \circ \alpha^{-1} \circ T' = (\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L)_{\beta(h)} \textit{ et } [DT' : DT_L]_t = \beta(h^{it})$$

DÉMONSTRATION : On note $\Phi' = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T'$. D'après la proposition 4.6.9, on a :

$$\Gamma \circ \sigma^{\Phi}_{-s} \circ \sigma^{\Phi'}_{s} = (\tau_{-s} \underset{N}{{}_{\beta}\star_{\alpha}} \sigma^{\Phi}_{-s}) \circ \Gamma \circ \sigma^{\Phi'}_{s} = (id \underset{N}{{}_{\beta}\star_{\alpha}} \sigma^{\Phi}_{-s} \circ \sigma^{\Phi'}_{s}) \circ \Gamma$$

Pour tout $a \in \mathcal{M}^{+}_{T_R}$, on déduit, grâce à la propriété d'invariance à droite de T_R, que :

$$T_R \circ \sigma^{\Phi}_{-s}\sigma^{\Phi'}_{s}(a) = (\Phi \circ R \underset{\nu}{{}_{\beta}\star_{\alpha}} id)\Gamma(\sigma^{\Phi}_{-s}\sigma^{\Phi'}_{s}(a)) = \sigma^{\Phi}_{-s}\sigma^{\Phi'}_{s}((\Phi \circ R \underset{\nu}{{}_{\beta}\star_{\alpha}} id)\Gamma(a)) = \sigma^{\Phi}_{-s}\sigma^{\Phi'}_{s} \circ T_R(a)$$

et comme, T et T' sont α-adaptés par rapport à ν, on obtient $\Phi \circ R$ est invariant par $\sigma^{\Phi}_{-s}\sigma^{\Phi'}_{s}$ et donc $\sigma^{\Phi \circ R}_{t}$ et $\sigma^{\Phi}_{-s}\sigma^{\Phi'}_{s}$ commutent. Or, $\sigma^{\Phi \circ R}_{t}$ et σ^{Φ}_{-s} commutent donc $\sigma^{\Phi \circ R}_{t}$ et $\sigma^{\Phi'}_{s}$.

Soient $s, t \in \mathbb{R}$. En utilisant $\tau_t(\delta) = \delta$ et $\Gamma(\delta) = \delta \underset{N}{{}_{\beta}\otimes_{\alpha}} \delta$, on obtient :

$$\Gamma(\sigma^{\Phi'}_{t}(\delta^{is})) = (\tau_t \underset{N}{{}_{\beta}\star_{\alpha}} \sigma^{\Phi'}_{t})(\Gamma(\delta^{is})) = \delta^{is} \underset{N}{{}_{\beta}\otimes_{\alpha}} \sigma^{\Phi'}_{t}(\delta^{is})$$

d'où $\Gamma(\sigma^{\Phi'}_{t}(\delta^{is})\delta^{-is}) = 1 \underset{N}{{}_{\beta}\otimes_{\alpha}} \sigma^{\Phi'}_{t}(\delta^{is})\delta^{-is}$ et $\sigma^{\Phi'}_{t}(\delta^{is})\delta^{-is} \in \beta(N)$. Comme T' est α-adapté par rapport à ν, on a $\sigma^{T'}_{t}(\beta(N)) = \beta(\sigma^{\nu}_{t}(N)) = \beta(N)$ et $\sigma^{\Phi'}_{t}(M \cap \beta(N)') = M \cap \beta(N)'$. On en déduit que $\sigma^{\Phi'}_{t}(\delta^{is})\delta^{-is} \in \beta(Z(N))$ et on montre facilement qu'il existe k strictement positif affilié à $Z(N)$ tel que $\sigma^{\Phi'}_{t}(\delta^{is}) = \beta(k^{ist})\delta^{is}$.

Vu que $\sigma^{\Phi}_{t} = \delta^{-it}\sigma^{\Phi \circ R}_{t}\delta^{it}$ et que $\sigma^{\Phi'}$ et $\sigma^{\Phi \circ R}$ commutent, on obtient la relation suivante $\sigma^{\Phi'}_{s}\sigma^{\Phi}_{t}(x) = \sigma^{\Phi}_{t}(\beta(k^{-ist})\sigma^{\Phi'}_{s}(x)\beta(k^{ist}))$. D'où :

$$\begin{aligned}\Phi \circ \sigma^{\Phi'}_{s} \circ \sigma^{\Phi}_{s}(x^*x) &= \Phi \circ \sigma^{\Phi}_{t}(\beta(k^{-ist})\sigma^{\Phi'}_{s}(x^*x)\beta(k^{ist}))\\ &= \Phi(\beta(k^{-ist})\sigma^{\Phi'}_{s}(x^*x)\beta(k^{ist}))\\ &= \Phi \circ \sigma^{\Phi'}_{s}(x^*x)\\ &\quad \text{car } \sigma^{T}_{t}(\beta(k)) = \beta(\sigma^{\nu}_{-t}(k)) = \beta(k)\end{aligned}$$

Or $\sigma^{\Phi'}_{-s} \circ T_L \circ \sigma^{\Phi'}_{s}$ est invariant à gauche, donc d'après la proposition 5.2.6, il existe q_s affilié au centre de N tel que $\Phi \circ \sigma^{\Phi'}_{s} = \Phi_{\beta(q_s)}$. Par des arguments standards, on sait qu'il existe q strictement positif et affilié au centre de N tel que $\Phi \circ \sigma^{\Phi'}_{s} = \Phi_{\beta(q^{-s})}$ et $[D\Phi \circ \sigma^{\Phi'}_{s} : D\Phi]_s = \beta(q^{-s})$.

Alors, d'après la proposition 5.2.6, il existe h affilié au centre de N tel que $\Phi = \Phi_{\beta(h)}$ avec $[DT' : DT_L]_t = \beta(h^{it})$. ■

On dispose d'un résultat analogue pour les poids opératoriels invariants à droite.

5.4.1 COROLLAIRE — *Il existe h strictement positif affilié au centre de N tel que :*

$$T_R = (R \circ T_L \circ R)_{\alpha(h)}$$

DÉMONSTRATION : T_R et $R \circ T_L \circ R$ sont dans les hypothèses du théorème précédent. ■

5.5 Maniabilité de l'unitaire fondamental.

Dans ce paragraphe, on introduit un dernier objet fondamental de la structure : l'opérateur de manipulation. On prouve alors la maniabilité de l'unitaire fondamental dans un sens analogue à la définition de [Wor96].

5.5.1 LEMME — *Il existe un opérateur P sur H_Φ strictement positif tel que, pour tout $x \in \mathcal{N}_\Phi$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $P^{it}\Lambda_\Phi(x) = \lambda^{\frac{t}{2}}\Lambda_\Phi(\tau_t(x))$.*

DÉMONSTRATION : D'après les propriétés modulaires de $\Phi \circ R = \Phi_\delta$, ([Vae01a], 5.3), on a :

$$\Lambda_\Phi(\sigma_t^{\Phi\circ R}(x)) = \delta^{it} J_\Phi \lambda^{\frac{t}{2}} \delta^{it} J_\Phi \Delta_\Phi^{it} \Lambda_\Phi(x)$$

et comme λ est affilié au centre de M, on obtient $||\Lambda_\Phi(\sigma_t^{\Phi\circ R}(x))|| = ||\lambda^{\frac{t}{2}}\Lambda_\Phi(x)||$ pour tout $x \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$ et tout $t \in \mathbb{R}$. Or, on sait que $\kappa'_t = \sigma_t^{\Phi\circ R} \circ \tau_t$ laisse invariant Φ , pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $||\Lambda_\Phi(x)|| = ||\lambda^{\frac{t}{2}}\Lambda_\Phi(\tau_t(x))||$. Il existe ainsi un opérateur P_t sur H_Φ tel que $P_t\Lambda_\Phi(x) = \lambda^{\frac{t}{2}}\Lambda_\Phi(\tau_t(x))$ pour tout $x \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on vérifie alors que $P_sP_t = P_{st}$ grâce à la relation $\tau_t(\lambda) = \lambda$. On en déduit l'existence d'un opérateur P qui satisfait les conditions de l'énoncé. ■

5.5.2 DÉFINITION — On appelle **opérateur de manipulation** l'opérateur P sur H_Φ strictement positif tel que $P^{it}\Lambda_\Phi(x) = \lambda^{\frac{t}{2}}\Lambda_\Phi(\tau_t(x))$, pour tout $x \in \mathcal{N}_\Phi$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

5.5.3 PROPOSITION — *On a $P^{it}xP^{-it} = \tau_t(x)$ pour tout $x \in M$ et tout $t \in \mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION : Claire. ■

Comme conséquences immédiates, on obtient les deux premières relations de commutation de la proposition suivante. La troisième relation est de démonstration aisée.

5.5.4 PROPOSITION — *Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in N$, on a :*

$$P^{it}\alpha(n) = \alpha(\sigma_t^\nu(n))P^{it},\ P^{it}\beta(n) = \beta(\sigma_t^\nu(n))P^{it} \ \text{ et } \ P^{it}\hat{\beta}(n) = \hat{\beta}(\sigma_t^\nu(n))P^{it}$$

Grâce à ces relations, on peut définir de manière licite, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les opérateurs $P^{it} \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} P^{it}$ sur $H_\Phi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_\Phi$ et $P^{it} \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} P^{it}$ sur $H_\Phi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} H_\Phi$, qui agissent de manière naturelle sur les tenseurs élémentaires.

THÉORÈME 11 — *L'unitaire W vérifie une relation de maniabilité semblable à celle définie par Woronowicz. Plus précisément, on a :*

i) $(\sigma_\nu W^*\sigma_\nu(q \underset{\nu}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_\alpha} v)|p \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} w) = (\sigma_{\nu^o}W\sigma_{\nu^o}(J_\Phi p \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} P^{-1/2}v)|J_\Phi q \underset{\nu}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_\alpha} P^{1/2}w)$ *pour tous* $v \in \mathcal{D}(P^{-\frac{1}{2}})$, $w \in \mathcal{D}(P^{\frac{1}{2}})$ *et* $p, q \in D({}_\alpha H_\Phi, \nu) \cap D((H_\Phi)_{\hat{\beta}}, \nu^o)$ *;*

ii) $W(P^{it} \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} P^{it}) = (P^{it} \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} P^{it})W$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION : Soient $p, q \in D({}_\alpha H_\Phi, \nu) \cap D((H_\Phi)_{\hat{\beta}}, \nu^o)$, $v \in \mathcal{D}(D^{1/2})$ et $w \in \mathcal{D}(D^{-1/2})$. On sait que :

$$(I(id * \omega_{q,p})(W)Iv|w) = ((id * \omega_{p,q})(W)D^{1/2}v|D^{-1/2}w)$$

Comme $(id * \omega_{p,q})(W) \in M$ et τ est implémenté par D^{-1}, $(id * \omega_{p,q})(W) \in \mathcal{D}(\tau_{-i/2})$ et on a :

$$\tau_{-i/2}((id * \omega_{p,q})(W)) = I(id * \omega_{q,p})(W)I$$

Comme τ est aussi implémenté par P, on obtient :

$$(I(id * \omega_{q,p})(W)Iv|w) = ((id * \omega_{p,q})(W)P^{1/2}v|P^{-1/2}w)$$

pour tous $v \in \mathcal{D}(P^{1/2})$ et $w \in \mathcal{D}(P^{-1/2})$.

La proposition 4.6.12 permet alors de réécrire cette formule :

$$(\sigma_\nu W^* \sigma_\nu (q \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} v)|p \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} w) = (\sigma_{\nu^o} W \sigma_{\nu^o}(J_\Phi p \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} P^{-1/2}v)|J_\Phi q \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} P^{1/2}w)$$

Il suffit maintenant de prouver que $W^*(P^{it} \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} P^{it}) = (P^{it} \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} P^{it})W^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On remarquera, avant d'entamer le calcul, que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la relation de commutation entre P^{it} et β, entraîne que P^{it} laisse stable $D((H_\Phi)_\beta, \nu^o)$ et transforme une (N^o, ν^o)-base de $(H_\Phi)_\beta$ en une (N^o, ν^o)-base de $(H_\Phi)_\beta$.

Soit $(\xi)_{i\in I}$ une (N^o, ν^o)-base de $(H_\Phi)_\beta$. Soient $v \in D((H_\Phi)_\beta, \nu^o)$ et $a \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi$. On calcule :

$$\begin{aligned}(P^{it} \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} P^{it})W^*(v \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a)) &= \sum_{i\in I} P^{it}\xi_i \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \lambda^{t/2}\Lambda_\Phi(\tau_t((\omega_{v,\xi_i} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))))\\ &= \sum_{i\in I} P^{it}\xi_i \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \Lambda_\Phi((\omega_{P^{it}v,P^{it}\xi_i} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(\lambda^{t/2}\tau_t(a))))\\ &\quad \text{car } \lambda^{t/2} \in \beta(Z(N)),\\ &= W^*(P^{it}v \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \lambda^{t/2}\Lambda_\Phi(\tau_t(a)))\\ &= W^*(P^{it} \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} P^{it})(v \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a))\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat. ■

Suivant [Eno02], définition 4.1, on donne ici la définition d'un unitaire pseudo-multiplicatif faiblement régulier.

5.5.5 Définition — Un unitaire pseudo-multiplicatif $\mathcal{W}$ pour $\alpha, \beta, \hat\beta$ est **faiblement régulier** si la fermeture faible de l'espace vectoriel engendré par les opérateurs de la forme $(\lambda_v^{\alpha,\beta})^*\mathcal{W}\rho_w^{\hat\beta,\alpha}$ où $v, w \in D({}_\alpha H, \nu)$ est égal à $\alpha(N)'$.

5.5.6 Proposition — *L'opérateur $\widehat{W} = \sigma_\nu W^* \sigma_\nu$ de $H_\Phi \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} H_\Phi$ dans $H_\Phi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} H_\Phi$ est un unitaire pseudo-multiplicatif au-dessus de N pour $\alpha, \beta, \hat\beta$ faiblement régulier au sens de ([Eno02], définition 4.1).*

Démonstration : D'après [EV00], on sait que $\widehat{W}$ est un unitaire pseudo-multiplicatif. On sait aussi que $< (\lambda_v^{\alpha,\beta})^*\widehat{W}\rho_w^{\hat\beta,\alpha} >^{-w} \subset \alpha(N)'$. Pour tous $v \in \mathcal{D}(P^{-\frac{1}{2}})$, $w \in \mathcal{D}(P^{\frac{1}{2}})$ et tous $p, q \in D({}_\alpha H_\Phi, \nu) \cap D((H_\Phi)_{\hat\beta}, \nu^o)$, on a, d'une part, d'après le théorème 11 :

$$((\lambda_p^{\alpha,\beta})^*\widehat{W}\rho_v^{\hat\beta,\alpha}q|w) = (\sigma_{\nu^o} W \sigma_{\nu^o}(J_\Phi p \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} P^{-1/2}v)|J_\Phi q \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} P^{1/2}w)$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
(R^{\alpha,\nu}(v)R^{\alpha,\nu}(p)^*q|w) &= (R^{\alpha,\nu}(v)J_\nu R^{\hat\beta,\nu^o}(J_\Phi p)^* J_\Phi q|w)\\
&= (R^{\alpha,\nu}(v)J_\nu\Lambda_\nu(< J_\Phi q, J_\Phi p >_{\hat\beta,\nu_L^o})|w)\\
&= (P^{-1/2}R^{\alpha,\nu}(v)J_\nu\Lambda_\nu(< J_\Phi q, J_\Phi p >_{\hat\beta,\nu_L^o})|P^{1/2}w)\\
&= (R^{\alpha,\nu}(P^{-1/2}v)\Delta_\nu^{-1/2}J_\nu\Lambda_\nu(< J_\Phi q, J_\Phi p >_{\hat\beta,\nu_L^o})|P^{1/2}w)\\
&= (R^{\alpha,\nu}(P^{-1/2}v)\Lambda_\nu(< J_\Phi p, J_\Phi q >_{\hat\beta,\nu_L^o})|P^{1/2}w)\\
&= (\alpha(< J_\Phi p, J_\Phi q >_{\hat\beta,\nu_L^o})P^{-1/2}v|P^{1/2}w)\\
&= (J_\Phi p \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} P^{-1/2}v|J_\Phi q \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} P^{1/2}w)
\end{aligned}$$

Il existe $\Xi \in H_\Phi \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} H_\Phi$ tel que $\sigma_{\nu^o}W\sigma_{\nu^o}\Xi = J_\Phi p \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} P^{-1/2}v$ car W est surjectif. Par définition du produit tensoriel relatif, il existe une famille $(\sum_{k=1}^{n(i)} J_\Phi p_k^i \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} P^{-1/2}v_k^i)_{i\in I}$ qui converge vers Ξ. Par suite, la famille $((\sum_{k=1}^{n(i)}(\lambda_{p_k^i}^{\alpha,\beta})^*\widehat{W}\rho_{v_k^i}^{\hat\beta,\alpha}q|w))_{i\in I}$ converge vers :

$$(\sigma_{\nu^o}W\sigma_{\nu^o}\Xi|J_\Phi q \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} P^{1/2}w) = (J_\Phi p \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} P^{-1/2}v|J_\Phi q \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} P^{1/2}w) = (R^{\alpha,\nu}(v)R^{\alpha,\nu}(p)^*q|w)$$

On a alors $\alpha(N)' =< R^{\alpha,\nu}(v)R^{\alpha,\nu}(p)^* >^{-w} \subset < (\omega_{v,p} * id)(\widehat{W}\sigma_{\nu^o}) >^{-w}$. ■

5.5.7 Corollaire — *Si $\hat M$ désigne la fermeture faible de l'espace vectoriel engendré par les éléments $(\omega_{\xi,\eta} * id)(W)$ où $\xi \in D((H_\Phi)_\beta, \nu^o)$ et $\eta \in D({}_\alpha H_\Phi, \nu)$, alors $\hat M$ est une algèbre de von Neumann.*

Démonstration : Il s'agit d'une conséquence du fait $\hat W$ est faiblement régulier et de la proposition 3.2 de [Eno02]. ■

5.6 Changement de poids quasi-invariant.

On étudie, dans ce paragraphe, dans quelle mesure la structure de groupoïde quantique mesuré dépend du poids quasi-invariant.

Soit ν' un poids normal, semifini et fidèle sur N tel qu'il existe h et k strictement positifs affiliés à N commutant fortement et $[D\nu' : D\nu]_t = k^{\frac{it^2}{2}}h^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'après la proposition 5.1 de [Vae01a], c'est équivalent à $\sigma_t^\nu(h^{is}) = k^{ist}h^{is}$ pour tous $s,t \in \mathbb{R}$ et $\nu' = \nu_h$ au sens de [Vae01a]. Cette hypothèse est vérifiée, en particulier, quand σ^ν et $\sigma^{\nu'}$ commutent auquel cas k est affilié au centre de N.

5.6.1 Proposition — *Il existe un poids opératoriel T'_L de M vers $\alpha(N)$ normal, semifini, fidèle et β-adapté par rapport à ν' tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :*

$$[DT'_L : DT_L]_t = \beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{it})$$

Démonstration : D'après le lemme 4.1.3, il existe un poids opératoriel S_L de M vers $\beta(N)$ normal, semifini et fidèle tel que $\nu\circ\alpha^{-1}\circ T_L = \nu\circ\beta^{-1}\circ S_L$ de sorte que S_L est α-adapté par rapport à ν d'après le lemme 4.1.3. Par suite, il existe un poids opératoriel T'_L normal, semifini et fidèle tel que $\nu' \circ \beta^{-1} \circ S = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T'_L$ de sorte que T'_L est β-adapté par rapport à ν' d'après le lemme 4.1.3.

On calcule alors le cocycle de Radon-Nikodym pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}[DT'_L : DT_L]_t &= [D\nu \circ \alpha^{-1} \circ T'_L : D\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L]_t \\ &= [D\nu' \circ \beta^{-1} \circ S : D\nu \circ \beta^{-1} \circ S]_t \\ &= \beta([D\nu' : D\nu]^*_{-t}) = \beta(k^{\frac{-it^2}{2}} h^{it})\end{aligned}$$

■

5.6.2 Corollaire — *On a :*

$$\nu \circ \alpha^{-1} \circ T'_L = (\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L)_{\beta(h)} \qquad et \qquad \nu' \circ \alpha^{-1} \circ T'_L = (\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L)_{\alpha(h)\beta(h)}$$

Démonstration : Claire d'après la proposition 5.1 de [Vae01a] et le fait que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $[D\nu' \circ \alpha^{-1} \circ T'_L : D\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L]_t = \alpha(k^{\frac{it^2}{2}})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}})\alpha(h^{it})\beta(h^{it})$. ■

5.6.3 Proposition — *T'_L est invariant à gauche.*

Démonstration : Soit $a \in \mathcal{M}^+_{T'_L}$. On a :

$$\begin{aligned}(id \underset{\nu'}{{}_\beta\star_\alpha} \nu' \circ \alpha^{-1} \circ T'_L)(\Gamma(a)) &= (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \nu \circ \alpha^{-1} \circ T'_L)(\Gamma(a)) \\ &= (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} (\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L)_{\beta(h)})(\Gamma(a)) \\ &= (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L)(\Gamma(\beta(h^{1/2})a\beta(h^{1/2}))) \\ &= T_L(\beta(h^{1/2})a\beta(h^{1/2})) = T'(a) \\ &\quad \text{d'après l'invariance à gauche de } T_L.\end{aligned}$$

■

5.6.4 Proposition — *Il existe un poids opératoriel T'_R normal, semifini, fidèle, invariant à droite et α-adapté par rapport à ν' tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :*

$$[DT'_R : DT_R]_t = \alpha(k^{\frac{it^2}{2}} h^{it})$$

De plus, on a :

$$\nu \circ \beta^{-1} \circ T'_R = (\nu \circ \beta^{-1} \circ T_R)_{\alpha(h)} \qquad et \qquad \nu' \circ \beta^{-1} \circ T'_R = (\nu \circ \beta^{-1} \circ T_R)_{\alpha(h)\beta(h)}$$

Démonstration : Analogue à ce qui précède à partir du poids opératoriel T_R. La dernière partie provient de l'égalité $[D\nu' \circ \beta^{-1} \circ T'_R : D\nu \circ \beta^{-1} \circ T_R]_t = \alpha(k^{\frac{it^2}{2}})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}})\alpha(h^{it})\beta(h^{it})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. ■

5.6.5 Lemme — *L'application $I_\nu^{\nu'}$ définie par la formule suivante :*

$$I_\nu^{\nu'}(\xi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta) = \beta(k^{-i/8})\xi \underset{\nu'}{{}_\beta\otimes_\alpha} \alpha(h^{1/2})\eta$$

pour tout $\xi \in H$ et tout $\eta \in D({}_\alpha H, \nu) \cap \mathcal{D}(\alpha(h^{1/2}))$, est un isomorphisme de $\beta(N)' - \alpha(N)'^o$-bimodules de $H \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H$ sur $H \underset{\nu'}{{}_\beta\otimes_\alpha} H$.

Démonstration : Pour tout $x \in \mathcal{N}_{\nu'}$, on a :

$$\alpha(x)\alpha(h^{1/2})\eta = \alpha(xh^{1/2})\eta = R^{\alpha,\nu}(\eta)\Lambda_\nu(xh^{1/2}) = R^{\alpha,\nu}(\eta)\Lambda_{\nu'}(x)$$

On en déduit que $\alpha(h^{1/2})\eta \in D({}_\alpha H, \nu)$ et on a $R^{\alpha,\nu'}(\alpha(h^{1/2})\eta) = R^{\alpha,\nu}(\eta)$. L'existence de $I_\nu^{\nu'}$ provient alors de la relation :

$$\begin{aligned}
&(\beta(k^{-i/8})\xi_1 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \alpha(h^{1/2})\eta_1 | \beta(k^{-i/8})\xi_2 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \alpha(h^{1/2})\eta_2) \\
&= (\beta(J_{\nu'} < \alpha(h^{1/2})\eta_1, \alpha(h^{1/2})\eta_2 >^*_{\alpha,\nu'} J_{\nu'})\beta(k^{-i/8})\xi_1 | \beta(k^{-i/8})\xi_2) \\
&= (\beta(k^{-i/8} J_\nu k^{-i/8} J_\nu k^{i/8} J_\nu < \eta_1, \eta_2 >^*_{\alpha,\nu} J_\nu k^{-i/8} J_\nu k^{i/8} J_\nu k^{i/8})\xi_1 | \xi_2) \\
&\qquad \text{car } J_{\nu'} = J_\nu k^{-i/8} J_\nu k^{i/8} J_\nu \text{ d'après la proposition 2.5 de [Vae01a],} \\
&= (\beta(J_\nu < \eta_1, \eta_2 >^*_{\alpha,\nu} J_\nu)\xi_1 | \xi_2) \\
&= (\xi_1 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_1 | \xi_2 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_2)
\end{aligned}$$

■

Remarque — Pour tout $\xi \in D(H_\beta, \nu^o)$ et tout $\eta \in D({}_\alpha H, \nu)$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
I_\nu^{\nu'}(\xi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta) &= \beta(k^{-i/8})\xi \underset{\nu'}{{}_\beta\otimes_\alpha} \alpha(h^{1/2})\eta = \xi \underset{\nu'}{{}_\beta\otimes_\alpha} \alpha(k^{-i/8}h^{1/2})\eta \\
&= \beta(\sigma^\nu_{i/2}(h^{1/2}))\xi \underset{\nu'}{{}_\beta\otimes_\alpha} \alpha(k^{-i/8})\eta = \beta(\sigma^\nu_{i/2}(k^{-i/8}h^{1/2}))\xi \underset{\nu'}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta \\
&= \beta(k^{i/8})\xi \underset{\nu'}{{}_\beta\otimes_\alpha} \alpha(\sigma^\nu_{-i/2}(h^{1/2}))\eta = \beta(k^{i/8}h^{1/2})\xi \underset{\nu'}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta
\end{aligned}$$

5.6.6 Proposition — *Pour tout groupoïde quantique mesuré $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$, il existe un groupoïde quantique mesuré $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu', T'_L, T'_R)$ dont les objets fondamentaux R', τ', λ', δ' et P' s'expriment grâce aux relations suivantes :*

i) $R' = R$;

ii) $\tau'_t = Ad_{\alpha(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})\beta(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})} \circ \tau_t = Ad_{\alpha([D\nu':D\nu]^*_t)\beta([D\nu':D\nu]_t)} \circ \tau_t$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$;

iii) $\lambda' = \lambda$;

iv) $\delta' = \delta$;

v) $P'^{it} = \alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})J_\Phi \alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})J_\Phi P^{it}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration : L'existence du groupoïde quantique mesuré $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu', T'_L, T'_R)$ provient des propositions précédentes. On appelle $\Phi' = \nu' \circ \alpha^{-1} \circ T'_L$ et $\Psi' = \nu' \circ \beta^{-1} \circ T'_R$. Soient $x, y \in \mathcal{N}_{T'_R} \cap \mathcal{N}_{\Psi'}$ et $z \in M$. À l'aide de la proposition 2.5 de [Vae01a], on a les relations :

$$J_{\Psi'}\Lambda_{\Psi'}(x) = J_\Psi \alpha(k^{-i/8})\beta(k^{i/8}) J_\Psi \alpha(k^{i/8})\beta(k^{-i/8}) J_\Psi \Lambda_\Psi(x\alpha(h^{1/2})\beta(h^{1/2}))$$
$$\omega_{J_{\Psi'}\Lambda_{\Psi'}(x)}(z) = \omega_{\alpha(k^{i/8})\beta(k^{-i/8})J_\Psi\Lambda_\Psi(x\alpha(h^{1/2})\beta(h^{1/2}))}(z)$$

On vérifie alors que $\lambda^{\beta,\alpha,\nu'}_{\alpha(k^{i/8})\beta(k^{-i/8})J_\Psi\Lambda_\Psi(x\alpha(h^{1/2})\beta(h^{1/2}))} = I_\nu^{\nu'} \lambda^{\beta,\alpha,\nu}_{\alpha(k^{i/8})J_\Psi\Lambda_\Psi(x\alpha(h^{1/2}))}$. On procède au calcul suivant :

$$\begin{aligned}
R((\omega_{J_{\Psi'}\Lambda_{\Psi'}(x)} \underset{\nu'}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(y^*y))) &= R((\omega_{\alpha(k^{i/8})\beta(k^{-i/8})J_\Psi\Lambda_\Psi(x\alpha(h^{1/2})\beta(h^{1/2}))} \underset{\nu'}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(y^*y)))\\
&= R((\omega_{\alpha(k^{i/8})J_\Psi\Lambda_\Psi(x\alpha(h^{1/2}))} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(y^*y)))\\
&= R((\omega_{J_\Psi\Lambda_\Psi(x\alpha(k^{-i/8}h^{1/2}))} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(y^*y)))\\
&= (\omega_{J_\Psi\Lambda_\Psi(y)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(\alpha(k^{i/8}h^{1/2})x^*x\alpha(k^{-i/8}h^{1/2})))\\
&\qquad \text{par définition de } R,\\
&= (\omega_{\alpha(k^{-i/8}h^{1/2})J_\Psi\Lambda_\Psi(y)} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(x^*x))\\
&= (\omega_{\alpha(k^{i/8})J_\Psi\Lambda_\Psi(y\alpha(h^{1/2}))} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(x^*x))\\
&= (\omega_{J_{\Psi'}\Lambda_{\Psi'}(y)} \underset{\nu'}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(x^*x))\\
&= R'((\omega_{J_{\Psi'}\Lambda_{\Psi'}(x)} \underset{\nu'}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(y^*y)))\\
&\qquad \text{par définition de } R'.
\end{aligned}$$

On en déduit que $R = R'$. Pour tous $a \in M$, $\xi \in D(H_\beta, \nu'^o)$ et $t \in \mathbb{R}$, on calcule :

$$\begin{aligned}
&\tau_t((\omega_\xi \underset{\nu'}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))\\
&= \tau_t(\alpha(k^{-i/8}h^{-1/2})(\omega_\xi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a))\alpha(k^{i/8}h^{-1/2}))\\
&= \alpha(\sigma_t^\nu(k^{-i/8}h^{-1/2}))\tau_t((\omega_\xi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))\alpha(\sigma_t^\nu(k^{i/8}h^{-1/2}))\\
&= \alpha(k^{-t/2-i/8}h^{-1/2})(\omega_{\Delta_\Psi^{-it}\xi} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(\sigma^\Psi_{-t}(a)))\alpha(k^{-t/2+i/8}h^{-1/2})\\
&= Ad_{\alpha(k^{-t/2+i/8}h^{-1/2})}((\omega_{\alpha(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\Delta_{\Psi'}^{-it}\xi} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(Ad_{\alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{-it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})} \circ \sigma^{\Psi'}_{-t}(a))))\\
&\qquad \text{d'après la proposition 2.4 et le corollaire 2.6 de [Vae01a],}\\
&= \beta(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})Ad_{\alpha(k^{-t/2+i/8}h^{-1/2})}((\omega_{\beta(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\Delta_{\Psi'}^{-it}\xi} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(\sigma^{\Psi'}_{-t}(a))))\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})\\
&= \alpha(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})\beta(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})(\omega_{\Delta_{\Psi'}^{-it}\xi} \underset{\nu'}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(\sigma^{\Psi'}_{-t}(a)))\alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})\\
&= \alpha(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})\beta(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\tau'_t((\omega_\xi \underset{\nu'}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))\alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})
\end{aligned}$$

On en déduit que $\tau'_t(z) = \alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})\tau_t(z)\alpha(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})\beta(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})$ pour tout $z \in M$

et tout $t \in \mathbb{R}$. Maintenant, on calcule le cocycle de Radon-Nikodym suivant pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&[D\nu' \circ \alpha^{-1} \circ T' \circ R : D\nu' \circ \alpha^{-1} \circ T']_t \\
&= [D\nu'\alpha^{-1}T'R : D\nu\alpha^{-1}TR]_t[D\nu\alpha^{-1}TR : D\nu\alpha^{-1}T]_t[D\nu\alpha^{-1}T : D\nu'\alpha^{-1}T']_t \\
&= \alpha([D\nu' : D\nu]_t)\beta([D\nu' : D\nu]^*_{-t})\lambda^{\frac{it^2}{2}}\delta^{it}\alpha([D\nu : D\nu']_t)\beta([D\nu : D\nu']^*_{-t}) \\
&= \lambda^{\frac{it^2}{2}}\delta^{it}
\end{aligned}$$

Enfin, on exprime l'opérateur de manipulation P' en fonction de P. On calcule, pour tout $x \in \mathcal{N}_{T'_L} \cap \mathcal{N}_{\Phi'}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&P'^{it}\Lambda_{\Phi'}(x) \\
&= \lambda'^{t/2}\Lambda_{\Phi'}(\tau'_t(x)) \\
&= \lambda^{t/2}\Lambda_{\Phi}(\alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})\tau_t(x)\alpha(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})\beta(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\alpha(h^{1/2})\beta(h^{1/2})) \\
&\quad \text{d'après ce qui précède,} \\
&= \lambda^{t/2}\alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})J_{\Phi}\sigma_{-i/2}(\alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it}))J_{\Phi}\Lambda_{\Phi}(\tau_t(x)\alpha(h^{1/2})\beta(h^{1/2})) \\
&= \lambda^{t/2}\alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})J_{\Phi}\alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})\alpha(k^{t/2})\beta(k^{t/2})J_{\Phi}\Lambda_{\Phi}(\tau_t(x)\alpha(h^{1/2})\beta(h^{1/2})) \\
&= \lambda^{t/2}\alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})J_{\Phi}\alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})J_{\Phi}\Lambda_{\Phi}(\tau_t(x\alpha(h^{1/2})\beta(h^{1/2}))) \\
&= \alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})J_{\Phi}\alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})J_{\Phi}P^{it}\Lambda_{\Phi'}(x)
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

À l'aide de ces formules, on vérifie que $\tau'_t(\alpha(n)) = \alpha(\sigma_t^{\nu'}(n))$, $\tau'_t(\beta(n)) = \beta(\sigma_t^{\nu'}(n))$ et P' implémente τ'.

5.6.7 PROPOSITION — *Soit $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ un groupoïde quantique mesuré et soit $\tilde{T_L}$ un autre poids opératoriel invariant à gauche et β-adapté par rapport à ν. Alors les objets fondamentaux $\tilde{R}$, $\tilde{\tau}$, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\delta}$ et $\tilde{P}$ du groupoïde quantique mesuré $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, \tilde{T_L}, T_R)$ s'expriment grâce aux relations suivantes :*

i) $\tilde{R} = R$;

ii) $\tilde{\tau} = \tau$;

iii) $\tilde{\lambda} = \lambda$;

iv) $\tilde{\delta} = \delta\alpha(h)\beta(h^{-1})$ *où h affilié au centre de N tel que* $\tilde{T_L} = (T_L)_{\beta(h)}$;

v) $\tilde{P} = P$.

DÉMONSTRATION : D'après le théorème d'unicité du poids opératoriel invariant à gauche et β-adapté par rapport à ν, il existe h strictement positif affilié au centre de N tel que $\nu \circ \alpha^{-1} \circ \tilde{T_L} = (\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L)_{\beta(h)}$ et tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $[D\tilde{T_L} : DT_L]_t = \beta(h^{it})$. On a déjà remarqué que R et τ sont indépendants du poids opératoriel invariant à gauche et β-adapté par rapport à

ν. On calcule alors le cocycle de Radon-Nydodim suivant :

$$\begin{aligned}
[D\nu\beta^{-1}R\tilde{T}_LR : D\nu\alpha^{-1}\tilde{T}_L]_t &= [D\nu\beta^{-1}R\tilde{T}_LR : D\nu\beta^{-1}RT_LR]_t[D\Psi : D\Phi]_t[D\nu\alpha^{-1}T_L : D\nu\alpha^{-1}\tilde{T}_L]_t \\
&= R([D\tilde{T}_L : DT_L]^*_{-t})[D\Psi : D\Phi]_t[DT_L : D\tilde{T}_L]_t \\
&= \alpha(h^{it})\lambda^{\frac{it^2}{2}}\delta^{it}\beta(h^{-it}) \\
&= \lambda^{\frac{it^2}{2}}\delta^{it}\alpha(h^{it})\beta(h^{-it}) \\
&\qquad \text{car } \alpha \text{ et } \beta \text{ commutent et } \delta \text{ est affilié à } \alpha(N)'\cap\beta(N)'
\end{aligned}$$

et on obtient les points iii) et iv). Enfin, si on note $\tilde{\Phi} = \nu\circ\alpha^{-1}\circ\tilde{T}_L$, on a, pour tout $t\in\mathbb{R}$ et tout $x\in\mathcal{N}_{\tilde{T}_L}\cap\mathcal{N}_{\tilde{\Phi}}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^{it}\Lambda_{\tilde{\Phi}}(x) &= \tilde{\lambda}^{t/2}\Lambda_{\tilde{\Phi}}(\tilde{\tau}_t(x)) \\
&= \lambda^{t/2}\Lambda_{\Phi}(\tau_t(x)\beta(h^{1/2})) \\
&= \lambda^{t/2}\Lambda_{\Phi}(\tau_t(x\beta(h^{1/2})) \quad \text{car } h \text{ est affilié au centre de } N, \\
&= P^{it}\Lambda_{\Phi}(x\beta(h^{1/2})) \\
&= P^{it}\Lambda_{\tilde{\Phi}}(x)
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Théorème 12 — *Soient $(N,M,\alpha,\beta,\Gamma,\nu,T_L,T_R)$ et $(N,M,\alpha,\beta,\Gamma,\nu',T'_L,T'_R)$ deux groupoïdes quantiques mesurés tels qu'il existe h et k strictement positifs affiliés à N commutant fortement et $[D\nu' : D\nu]_t = k^{\frac{it^2}{2}}h^{it}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Alors les relations suivantes expriment le lien entre les objets fondamentaux de ces deux structures :*

i) $R' = R$;

ii) $\tau'_t = Ad_{\alpha(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})\beta(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})}\circ\tau_t = Ad_{\alpha([D\nu':D\nu]^*_t)\beta([D\nu':D\nu]_t)}\circ\tau_t$ *pour tout* $t\in\mathbb{R}$;

iii) $\lambda' = \lambda$;

iv) $\dot{\delta}' = \dot{\delta}$ *où* $\dot{\delta}$ *et* $\dot{\delta}'$ *ont été définis dans la proposition 5.3.3* ;

v) $P'^{it} = \alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})J_\Phi\alpha(k^{\frac{it^2}{2}}h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}}h^{-it})J_\Phi P^{it}$ *pour tout* $t\in\mathbb{R}$.

Démonstration : On applique successivement les deux propositions précédentes. ■

Remarque — On retrouve la proposition 5.3.3 à partir du théorème précédent.

On regroupe maintenant les résultats du chapitre dans deux théorèmes :

Théorème 13 — *Soit $(N,M,\alpha,\beta,\Gamma,\nu,T_L,T_R)$ un groupoïde quantique mesuré. Si T' est un poids opératoriel invariant à gauche et β-adapté par rapport à ν, alors il existe h strictement positif affilié à $Z(N)$ tel que, pour tout $t\in\mathbb{R}$:*

$$\nu\circ\alpha^{-1}\circ T' = (\nu\circ\alpha^{-1}\circ T_L)_{\beta(h)}$$

On dispose d'un résultat analogue avec les poids opératoriels invariants à droite.

THÉORÈME 14 — *Soit le groupoïde quantique mesuré $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, R \circ T_L \circ R)$. Alors, il existe un élément δ strictement positif affilié à $M \cap \alpha(N)' \cap \beta(N)'$ qu'on appelle module et il existe un opérateur λ strictement positif affilié à $Z(M) \cap \alpha(N) \cap \beta(N)$ qu'on appelle opérateur d'échelle tels que $[D\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L \circ R : D\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L]_t = \lambda^{\frac{it^2}{2}} \delta^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

De plus, on a, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$:

i)
$$\begin{aligned}
&[D\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L \circ \tau_s : D\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L]_t = \lambda^{-ist}\\
&[D\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L \circ R \circ \tau_s : D\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L \circ R]_t = \lambda^{-ist}\\
&[D\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L \circ \sigma_s^{\nu\circ\alpha^{-1}\circ T_L \circ R} : D\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L]_t = \lambda^{ist}\\
&[D\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L \circ R \circ \sigma_s^{\nu\circ\alpha^{-1}\circ T_L} : D\nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L \circ R]_t = \lambda^{-ist}
\end{aligned}$$

ii) $R(\lambda) = \lambda$, $R(\delta) = \delta^{-1}$, $\tau_t(\delta) = \delta$ *et* $\tau_t(\lambda) = \lambda$;

iii) δ *est un cocaractère i.e* $\Gamma(\delta) = \delta \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta$.

Si ν' est un poids normal, semifini et fidèle sur N et h, k des opérateurs strictement positifs affiliés à N commutant fortement et vérifiant $[D\nu' : D\nu]_t = k^{\frac{it^2}{2}} h^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors il existe $\tilde{T}_L$ invariant à gauche et β-adapté par rapport à ν'. De plus, si $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu', T'_L, T'_R)$ désigne un autre groupoïde quantique mesuré, alors les relations suivantes expriment le lien entre les objets fondamentaux des deux structures :

i) $R' = R$;

ii) $\tau'_t = Ad_{\alpha(k^{\frac{-it^2}{2}} h^{-it})\beta(k^{\frac{it^2}{2}} h^{it})} \circ \tau_t = Ad_{\alpha([D\nu':D\nu]_t^*)\beta([D\nu':D\nu]_t)} \circ \tau_t$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$;

iii) $\lambda' = \lambda$;

iv) $\dot{\delta}' = \dot{\delta}$ *où* $\dot{\delta}$ *et* $\dot{\delta}'$ *ont été définis dans la proposition 5.3.3* ;

v) $P'^{it} = \alpha(k^{\frac{it^2}{2}} h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}} h^{-it}) J_\Phi \alpha(k^{\frac{it^2}{2}} h^{it})\beta(k^{\frac{-it^2}{2}} h^{-it}) J_\Phi P^{it}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Chapitre 6

LE GROUPOÏDE QUANTIQUE DUAL

Soit $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ un groupoïde quantique mesuré. Dans ce chapitre, on construit, en utilisant le module et l'opérateur d'échelle, un objet dual grâce à une hypothèse supplémentaire vérifiée dans de nombreux exemples et, en particulier, si la base est semifinie. Cet objet dual est un groupoïde quantique mesuré si, et seulement si N est semifinie. Dans ce cas, on obtient un théorème de bidualité et des relations entre M et $\hat{M}$ analogues aux relations de Heisenberg. Les cas des groupoïdes quantiques commutant et opposé sont définis et étudiés.

6.1 Structure d'algèbre sur le prédual.

On définit une multiplication sur une sous algèbre de M_*. Dans le cas des groupes, cela correspond au produit de convolution. Il faut souligner le fait que, comme l'antipode peut être non bornée, une structure involutive pourra être définie éventuellement sur une sous algèbre encore plus petite. on reformule ici des idées de J.M Vallin dans [Val00].

6.1.1 Définition — Soit $\mu \in M_*^+$. Soit $\omega \in M_*^+$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\omega \circ \beta \leq k\nu$. On définit alors la forme normale produit $\omega\mu$ par la formule suivante :

$$\omega\mu(x) = \mu((\omega \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(x)))$$

pour tout $x \in M$.

Dans les conditions de la définition précédente, on sait qu'il existe $\xi' \in H$ tel que $\mu = \omega_{\xi'}$ et qu'il existe $\xi \in D(H_\beta, \nu^o)$ tel que $\omega = \omega_\xi$. Alors, pour tout $x \in M$, on a :

$$\omega\mu(x) = (\Gamma(x)(\xi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi')|\xi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi')$$

6.1.2 Proposition — *Le sous espace de M_*, noté M_*^R, engendré par les formes normales positives ω telles qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\omega \circ \beta \leq k\nu$, est stable pour le produit défini précédemment.*

Si, de plus, on définit, pour tout $\omega = \omega_\xi \in (M_*^R)^+$,

$$||\omega|| = \inf\{k \in \mathbb{R}^+ \,|\, \omega \circ \beta \leq k\nu\} = ||R^{\beta,\nu^o}(\xi)||^2$$

on obtient l'inégalité $||\omega\mu|| \leq ||\omega||||\mu||$ pour tout $\omega, \mu \in (M_*^R)^+$.

Démonstration : On se place dans les conditions précédentes. On suppose, de plus, que $\mu \in M_*^R$. Alors $\xi' \in D(H_\beta, \nu^o)$. Soit $n \in N$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\omega\mu(\beta(n^*n)) &= (\Gamma(\beta(n^*n))(\xi \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi')|\xi \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi') \\
&= ((1 \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \beta(n^*n))(\xi \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi')|\xi \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi') \\
&\qquad \text{par définition de } \Gamma, \\
&= (\alpha(<\xi, \xi>_{\beta,\nu^o})\beta(n^*n)\xi'|\xi') \\
&\qquad \text{par définition du produit scalaire,} \\
&= (\alpha(<\xi, \xi>_{\beta,\nu^o})\beta(n^*)\xi'|\beta(n^*)\xi') \\
&\qquad \text{car } \beta(N) \subseteq \alpha(N)', \\
&\leq ||R^{\beta,\nu^o}(\xi)||^2 \mu \circ \beta(n^*n) \\
&\leq k||R^{\beta,\nu^o}(\xi)||^2 \nu(n^*n)
\end{aligned}$$

Ainsi $\omega\mu \in M_*^R$ et le reste de la proposition en découle facilement. ■

D'après la proposition précédente, il existe un vecteur $\eta \in D(H_\beta, \nu^o)$ tel que $\omega\mu = \omega_\eta$. Le lemme suivant est alors vérifié :

6.1.3 Lemme — *Soit $\chi \in M_*^+$ et soit ξ' un vecteur lui correspondant. Alors pour tout $x \in M$, on a $\omega_\eta\chi(x) = ((\Gamma \;{}_\beta\underset{\nu}{\star}{}_\alpha\; id)(\Gamma(x))(\xi \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi' \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi'')|\xi \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi' \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi'')$.*

Démonstration : Soit $\zeta \in D({}_\alpha H, \nu)$. Alors, par définition, on a, pour tout $x \in M$,

$$\begin{aligned}
\omega_\eta\omega_\zeta(x) &= \omega_\zeta((\omega_\eta \;{}_\beta\underset{\nu}{\star}{}_\alpha\; id)(\Gamma(x))) = \omega_\eta((id \;{}_\beta\underset{\nu}{\star}{}_\alpha\; \omega_\zeta)(\Gamma(x))) \\
&= (\Gamma((id \;{}_\beta\underset{\nu}{\star}{}_\alpha\; \omega_\zeta)(\Gamma(x)))(\xi \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi')|\xi \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi') \\
&= ((\Gamma \;{}_\beta\underset{\nu}{\star}{}_\alpha\; id)(\Gamma(x))(\xi \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi' \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \zeta)|\xi \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi' \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \zeta)
\end{aligned}$$

Or, l'application :

$$\begin{array}{ccccc}
H & \rightarrow & H \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; H & \rightarrow & H \;{}_\alpha\underset{\nu}{\otimes}{}_\beta\; H \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; H \\
\zeta & \mapsto & \xi' \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \zeta & \mapsto & \xi \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; (\xi' \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \zeta)
\end{array} \quad \text{est continue.}$$

Par conséquent la relation $\omega_\eta\omega_\zeta(x) = ((\Gamma \;{}_\beta\underset{\nu}{\star}{}_\alpha\; id)(\Gamma(x))(\xi \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi' \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \zeta)|\xi \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi' \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \zeta)$ reste vérifiée pour tous ζ ; le lemme en découle. ■

6.1.4 Proposition — *M_*^R est une sous algèbre de M_*.*

Démonstration : D'après ce qui précède, il reste à prouver l'associativité du produit. Soient alors, ω, μ, χ trois formes normales positives de M_*^R et soient ξ, ξ', ξ'' les trois vecteurs de $D(H_\beta, \nu^o)$ correspondants. Alors, pour tout $x \in M$, on a, d'après le lemme précédent,

$$(\omega\mu)\chi(x) = ((\Gamma \;{}_\beta\underset{\nu}{\star}{}_\alpha\; id)(\Gamma(x))(\xi \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi' \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi'')|\xi \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi' \;{}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha\; \xi'')$$

$$= ((id \underset{\nu}{_\beta\star_\alpha} \Gamma)(\Gamma(x))(\xi \underset{\nu}{_\beta\otimes_\alpha} \xi' \underset{\nu}{_\beta\otimes_\alpha} \xi'')|\xi \underset{\nu}{_\beta\otimes_\alpha} \xi' \underset{\nu}{_\beta\otimes_\alpha} \xi'')$$

d'après la co-associativité de Γ, (on utilise aussi implicitement l'associativité du produit tensoriel relatif),

$$= (\Gamma((\omega_\xi \underset{\nu}{_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(x)))(\xi' \underset{\nu}{_\beta\otimes_\alpha} \xi'')|\xi' \underset{\nu}{_\beta\otimes_\alpha} \xi'')$$

$$= \mu\chi((\omega_\xi \underset{\nu}{_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(x))) = \omega(\mu\chi)(x)$$

La proposition en résulte. ■

Remarques —

i) En général, M_*^R n'a pas de structure d'algèbre de Banach.

ii) On peut définir une structure d'algèbre, de manière analogue, sur le sous espace de M_*, noté M_*^L, engendré par les formes normales positives ω telles qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\omega \circ \alpha \leq k\nu$.

Pour tout $\omega \in M_*$, on définit, pour tout $x \in M$, $\omega^*(x) = \overline{\omega \circ R(x^*)}$.

6.1.5 Proposition — *$M_*^{\beta,\alpha} = M_*^L \cap M_*^R$ est une sous-algèbre involutive de M_*.*

Démonstration : Comme R est un anti-homomorphisme involutif tel que $R \circ \alpha = \beta$, $M_*^{\beta,\alpha}$ est stable par involution. On déduit facilement, du fait que R est une coinvolution, que $(\omega\mu)^* = \mu^*\omega^*$ pour tout $\omega, \mu \in M_*^{\beta,\alpha}$. ■

On définit aussi un produit pour des espérances conditionnelles sur M.

6.1.6 Définition — Soit F une espérance conditionnelle sur M sur $\beta(N)$. Soit E une espérance conditionnelle normale et fidèle de M sur $\beta(N)$. On définit alors l'espérance conditionnelle produit EF par la formule suivante :

$$EF(x) = F((\nu \circ \beta^{-1} \circ E \underset{\nu}{_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(x)))$$

pour tout $x \in M$.

On observe que :

$$\nu \circ \beta^{-1} \circ (EF) = (\nu \circ \beta^{-1} \circ E)(\nu \circ \beta^{-1} \circ F)$$

D'après ce qui a été fait pour les formes normales, il est clair que le produit défini précédemment, entre des espérances conditionnelles de M sur $\beta(N)$ normales et fidèles, est associatif.

Remarque — De la même manière, on peut définir un produit associatif pour des espérances conditionnelles de M sur $\alpha(N)$ normales et fidèles.

6.2 Bimodule de Hopf dual.

On suppose à partir de ce moment que l'hypothèse suivante est vérifiée :

$$D(H_\beta, \nu^o) \cap J_\Phi\Lambda_\Phi(\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}) \text{ est dense dans } H$$

REMARQUE — L'hypothèse est vérifiée dès que $\Lambda_\Phi(\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_{S_L})$ est dense faiblement dans H car $J_\Phi\Lambda_\Phi(\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{S_L}) \subset D(H_\beta, \nu^o)$. C'est le cas, en particulier, si T_L est borné.

REMARQUE — L'hypothèse implique que $D({}_\alpha H, \nu) \cap D(H_\beta, \nu^o)$ est dense dans H et donc $M_*^{\beta,\alpha}$ dense dans M_* car $J_\Phi\Lambda_\Phi(\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}) \subset D({}_\alpha H, \nu)$.

On s'assure maintenant que cette hypothèse est vérifiée dans le cas où la base est semifinie. C'est en fait sous cette hypothèse que la théorie de la dualité des groupoïdes quantiques mesurés est totalement cohérente.

6.2.1 LEMME — *Pour tout $x \in \mathcal{N}_\Phi$, il existe une suite (f_n) de $\mathcal{N}_\nu$ qui tend en croissant vers 1 telle que $x\beta(f_n) \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{S_L}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\Lambda_\Phi(x\beta(f_n))$ tend en norme vers $\Lambda_\Phi(x)$.*

DÉMONSTRATION : $S_L(x^*x)$ appartient à l'extension positive de $\beta(N)$ donc admet une decomposition spectrale de la forme :

$$S_L(x^*x) = \int_0^\infty t\, d\beta(e_t) + \infty(1 - \beta(e))$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$n\nu(1-e) \le \nu \circ \beta^{-1} \circ S(x^*x) = \Phi(x) < +\infty$$

donc $\nu(1-e) = 0$ et comme ν est fidèle $e = 1$. Par suite, on a :

$$S_L(x^*x) = \int_0^\infty t\, d\beta(e_t)$$

On a aussi :

$$S_L((x\beta(e_n))^* x\beta(e_n)) = \beta(e_n)S_L(x^*x)\beta(e_n) = \int_0^n t\, d\beta(e_t)$$

donc $x\beta(e_n) \in \mathcal{N}_S$.

Soit $f_n = \int_{1/n}^n de_t$. La suite (f_n) tend en croissant vers $e = 1$. On a alors :

$$S_L(x^*x) \ge \int_{1/n}^n t\, d\beta(e_t) \ge \frac{\beta(f_n)}{n}$$

donc $n\Phi(x^*x) \ge \nu(f_n)$ et $f_n \in \mathcal{N}_\nu$.

Par suite, $x\beta(f_n) = x\beta(e_n)\beta(f_n) \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{S_L}$.

Enfin, on a :

$$\begin{aligned} ||\Lambda_\Phi(x - x\beta(f_n))||^2 &= \Phi((x - x\beta(f_n))^*(x - x\beta(f_n))) \\ &= \nu((1-f_n)\beta^{-1} \circ S_L(x^*x)(1-f_n)) \\ &= \nu(\beta^{-1} \circ S_L(x^*x) - \int_{1/n}^n t\, de_t) \to 0 \end{aligned}$$

■

6.2.2 Lemme — *Pour tout $x \in \mathcal{N}_{T_L}$ et tout $y \in M \cap \alpha(N)'$ analytique par rapport à Φ, on a $xy \in \mathcal{N}_{T_L}$.*

Démonstration : Pour tout $n \in \mathcal{N}_\nu$, on a $x\alpha(n) \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$. D'après la théorie des poids, comme y est analytique par rapport à Φ, on obtient $xy\alpha(n) = x\alpha(n)y \in \mathcal{N}_\Phi$ et on a :

$$\Lambda_\Phi(xy\alpha(n)) = J_\Phi\sigma^\Phi_{-i/2}(y^*)J_\Phi\Lambda_\Phi(x\alpha(n)) = J_\Phi\sigma^\Phi_{-i/2}(y^*)J_\Phi\Lambda_{T_L}(x)\Lambda_\nu(n)$$

Par suite $xy \in \mathcal{N}_{T_L}$ et on a $\Lambda_{T_L}(xy) = J_\Phi\sigma^\Phi_{-i/2}(y^*)J_\Phi\Lambda_{T_L}(x)$. ■

6.2.3 Corollaire — *L'hypothèse supplémentaire $D(H_\beta, \nu^o) \cap J_\Phi\Lambda_\Phi(\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L})$ dense dans H est vérifiée, si la base N est semifinie.*

Démonstration : Dans le cas où ν est une trace, f_n est analytique par rapport à ν, donc $\beta(f_n)$ est analytique par rapport à Φ et on obtient des éléments $x\beta(f_n) \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_{S_L}$.

Dans le cas où la base N est semifinie, il existe d strictement positif affilié à N tel que $\nu = Tr(d.)$ où Tr est une trace normale, semifinie et fidèle sur N. La densité d admet la décomposition spectrale suivante :

$$d = \int_0^\infty t\, dg_t$$

On note $h_n = \int_{1/n}^n dg_t$ qui tend en croissant vers 1 et on considère $\alpha(h_m)x\beta(f_n) \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_{S_L}$. On a alors :

$$\begin{aligned} ||\Lambda_\Phi(x - \alpha(h_m)x\beta(f_n))|| &\leq ||\Lambda_\Phi(x - \alpha(h_m)x)|| + ||\Lambda_\Phi(\alpha(h_m)x - \alpha(h_m)x\beta(f_n))|| \\ &\leq ||\Lambda_\Phi((1 - \alpha(h_m))x)|| + ||\Lambda_\Phi(x - x\beta(f_n))|| \to 0 \end{aligned}$$

d'après le lemme 6.2.1 et car h_m tend vers 1 en croissant.

D'après une remarque précédente, la condition supplémentaire est alors vérifiée. ■

6.2.4 Définition — On pose $\hat{M}$ la fermeture faible de l'espace vectoriel engendré par les éléments $(\omega_{\xi,\eta} * id)(W)$ où $\xi \in D((H_\Phi)_\beta, \nu^o)$ et $\eta \in D({}_\alpha H_\Phi, \nu)$.

6.2.5 Définition — On définit une application $\hat{\Gamma}$ de $\hat{M}$ dans $\mathcal{L}(H_\Phi \underset{\nu}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_\alpha} H_\Phi)$ telle que, pour tout $x \in \hat{M}$, on a $\hat{\Gamma}(x) = \sigma_{\nu^o} W(x \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)W^*\sigma_\nu$.

6.2.6 Proposition — *Le quintuplet $(N, \hat{M}, \alpha, \hat{\beta}, \hat{\Gamma})$ est un bimodule de Hopf qu'on appelle* ***bimodule de Hopf dual****.*

Démonstration : D'après le corollaire 5.5.7, $\hat{M}$ est une algèbre de von Neumann. Le reste de la proposition provient des théorèmes 6.2 et 6.3 de [EV00] appliqués à $\hat{W}$. ■

6.2.7 LEMME — *Soient $\xi \in D({}_\alpha H, \nu)$ et $\eta \in D(H_{\hat{\beta}}, \nu^o)$. Pour tous $\Xi, \Xi' \in H \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} H$, on a :*

$$((1 \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} (id * \omega_{\xi,\eta})(W))\Xi|\Xi') = ((1 \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} W)\Xi \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi|\Xi' \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} \eta)$$

DÉMONSTRATION : Démonstration aisée. ■

6.2.8 PROPOSITION — *L'application contractante $\hat{\pi}$ de $M_*^{\beta,\alpha}$ dans $\hat{M}$ qui à ω associe $(\omega * id)(W)$ est injective et multiplicative.*

DÉMONSTRATION : $\hat{\pi}$ est injective d'après la version à gauche du théorème 7. Soient $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ des éléments de $D({}_\alpha H, \nu) \cap D(H_\beta, \nu^o)$. Alors, pour tout $\xi \in D({}_\alpha H, \nu)$ et tout $\eta \in D(H_{\hat{\beta}}, \nu^o)$, on a :

$$((\omega_{\xi_1,\xi_2} * id)(W)(\omega_{\eta_1,\eta_2} * id)(W)\xi|\eta)$$
$$= ((\sigma_{\nu^o} \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} W)\sigma_{2\nu}(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \sigma_{\nu^o})(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} W)(\xi_1 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_1 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi)|[\xi_2 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_2] \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} \eta)$$

d'après la proposition 3.6.3,

$$= ((W^* \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} W)(W \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(\xi_1 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_1 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi)|[\xi_2 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_2] \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} \eta)$$

d'après la relation de pseudo-multiplicativité de W,

$$= ((1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} W)W(\xi_1 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_1) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \xi|W(\xi_2 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_2) \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} \eta)$$
$$= ((1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} (id * \omega_{\xi,\eta})(W))W(\xi_1 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_1)|W(\xi_2 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_2))$$

d'après le lemme précédent,

$$= (\Gamma((id * \omega_{\xi,\eta})(W))(\xi_1 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_1)|(\xi_2 \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_2))$$

car Γ est implémentée par W,

$$= (\omega_{\xi_1,\xi_2}\omega_{\eta_1,\eta_2})((id * \omega_{\xi,\eta})(W))$$

par définition du produit,

$$= (((\omega_{\xi_1,\xi_2}\omega_{\eta_1,\eta_2}) * id)(W)\xi|\eta)$$

On conclut que $\hat{\pi}$ est multiplicative. ■

On introduit alors le sous-ensemble $\mathcal{I}$ de $M_*^{\beta,\alpha}$ de la manière suivante :

$$\mathcal{I} = \{\omega \in M_*^{\beta,\alpha} | \exists k \geq 0 \text{ tel que } |\omega(x^*)| \leq k||\Lambda_\Phi(x)|| \text{ pour tout } x \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}\}$$

REMARQUE — Si $\omega_{\xi,\eta} \in M_*^{\beta,\alpha}$, alors $\xi, \eta \in D({}_\alpha H, \nu) \cap D(H_\beta, \nu^o)$. De plus, si η appartient à $D({}_{id}(H_\Phi), \Phi) = J_\Phi\Lambda_\Phi(\mathcal{N}_\Phi)$, alors, on a :

$$|\omega_{\xi,\eta}(x^*)| = (\xi|x\eta)| \leq ||\xi||||x\eta|| \leq k||\xi||||\Lambda_\Phi(x)||$$

Par suite, $\mathcal{I}$ est dense dans $M_*^{\beta,\alpha}$ (et donc dans M_*) d'après l'hypothèse supplémentaire introduite au début du chapitre.

D'après le théorème de Riesz, si $\omega \in \mathcal{I}$, alors pour tout $x \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$, il existe $\xi(\omega) \in H$ tel que :

$$\omega(x^*) = (\xi(\omega)|\Lambda_\Phi(x))$$

Par la suite, pour toute forme ω, on note $\overline{\omega}(x) = \overline{\omega(x^*)}$.

6.2.9 Proposition — *L'ensemble $\mathcal{I}$ est un idéal à gauche de $M_*^{\beta,\alpha}$ tel que $\xi(\omega\mu) = \hat{\pi}(\omega)\xi(\mu)$ pour tout $\omega \in M_*^{\beta,\alpha}$ et tout $\mu \in \mathcal{I}$.*

Démonstration : Pour tout $x \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$, on calcule :

$$\begin{aligned}\omega\mu(x^*) &= (\omega \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \mu)\Gamma(x^*) = \mu((\omega \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma(x^*)) \\ &= \mu(((\overline{\omega} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma(x))^*) = (\xi(\mu)|\Lambda_\Phi((\overline{\omega} \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma(x))) \\ &= (\xi(\mu)|(\overline{\omega} * id)(W^*)\Lambda_\Phi(x)) = ((\omega * id)(W)\xi(\mu)|\Lambda_\Phi(x))\end{aligned}$$

La proposition en découle. ■

On définit, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\omega \in M_*$, $\rho_t^*(\omega)(x) = \omega(\delta^{-it}\tau_{-t}(x))$. L'application ρ est une représentation de M_* car $\tau_t(\delta) = \delta$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, ρ_t est un automorphisme de l'algèbre $M_*^{\beta,\alpha}$ car $\Gamma(\delta) = \delta \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta$ et $\Gamma \circ \tau_t = (\tau_t \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_t) \circ \Gamma$.

6.2.10 Lemme — *Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\omega \in \mathcal{I}$, on a $\rho_t(\omega) \in \mathcal{I}$ et $\xi(\rho_t(\omega)) = P^{it}J_\Phi\delta^{it}J_\Phi\xi(\omega)$.*

Démonstration : Soit $x \in \mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}$. Alors on a :

$$\rho_t(\omega)(x^*) = \omega(\delta^{-it}\tau_{-t}(x^*)) = \omega((\tau_{-t}(x)\delta^{it})^*) = (\xi(\omega)|\Lambda_\Phi(\tau_{-t}(x)\delta^{it}))$$

$$= (\xi(\omega)|J_\Phi\delta^{-it}J_\Phi\lambda^{\frac{-t}{2}}\Lambda_\Phi(\tau_{-t}(x))) = (\xi(\omega)|J_\Phi\delta^{-it}J_\Phi P^{-it}\Lambda_\Phi(x)) = (P^{it}J_\Phi\delta^{it}J_\Phi\xi(\omega)|\Lambda_\Phi(x))$$

ce qui implique le résultat. ■

6.2.11 Proposition — *Il existe un unique groupe à un paramètre $\widehat{\sigma}$ sur $\widehat{M}$ fortement continu tel que $\widehat{\sigma}_t(\hat{\pi}(\omega)) = \hat{\pi}(\rho_t(\omega))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\omega \in M_*^{\beta,\alpha}$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \widehat{M}$, on a :*

$$\widehat{\sigma}_t(x) = P^{it}J_\Phi\delta^{it}J_\Phi x J_\Phi\delta^{-it}J_\Phi P^{-it}$$

Démonstration : Pour tout $\omega \in M_*^{\alpha,\beta}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on évalue $P^{it}J_\Phi\delta^{it}J_\Phi\hat{\pi}(\omega)J_\Phi\delta^{-it}J_\Phi P^{-it}$. Soit $\mu \in \mathcal{I}$. On a alors :

$$\begin{aligned}P^{it}J_\Phi\delta^{it}J_\Phi\hat{\pi}(\omega)J_\Phi\delta^{-it}J_\Phi P^{-it}\xi(\mu) &= P^{it}J_\Phi\delta^{it}J_\Phi\hat{\pi}(\omega)\xi(\rho_{-t}(\mu)) \\ &= P^{it}J_\Phi\delta^{it}J_\Phi\hat{\pi}(\omega(\rho_{-t}(\mu))) \\ &= \xi((\rho_t(\omega))\mu) = \hat{\pi}(\rho_t(\omega))\xi(\mu)\end{aligned}$$

On en déduit que $\widehat{\sigma}_t$ défini par $\widehat{\sigma}_t(x) = P^{it}J_\Phi\delta^{it}J_\Phi xJ_\Phi\delta^{-it}J_\Phi P^{-it}$ est un automorphisme de $\widehat{M}$ qui satisfait les conditions de l'énoncé. Il s'agit d'un groupe à un paramètre car $J_\Phi\delta^{it}J_\Phi$ et P^{it} commutent d'après la relation $\tau_t(\delta) = \delta$. ■

Si, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\omega \in M_*$, on note $\tau_t^*(\omega) = \omega \circ \tau_t$ et $\delta_t^*(\omega) = \omega\delta^{it}$, alors τ^* et δ^* commutent et laissent invariant $M_*^{\beta,\alpha}$.

6.2.12 Lemme — *On a* $(\omega R * id)(W^*) = (\tau^*_{-i/2}(\omega) * id)(W)$, *pour tout* $\omega \in \mathcal{D}(\tau^*_{-i/2})$.

Démonstration : On sait que $(id * \mu)(W) \in \mathcal{D}(S)$ et $S((id * \mu)(W) = (id * \mu)(W^*)$ d'après le théorème 9. Donc $(id*\mu)(W) \in \mathcal{D}(\tau_{-i/2})$ et $\tau_{-i/2}((id*\mu)(W)) = R((id*\mu)(W^*))$. en appliquant ω à l'équation précédente, on obtient le résultat. ∎

Comme $\Psi = \Phi \circ R$, il existe $\mathcal{J}$ anti-unitaire de H_Ψ dans H_Φ tel que $\mathcal{J}\Lambda_\Psi(x) = \Lambda_\Phi(R(x^*))$ pour tout $x \in \mathcal{N}_\Psi \cap \mathcal{N}_{T_R}$.

6.2.13 Proposition — *Pour tout* $\omega \in \mathcal{I}$ *et tout* $\mu \in \mathcal{D}(\rho_{i/2})$, *la forme* $\omega\mu$ *appartient à* $\mathcal{I}$ *et* $\xi(\omega\mu) = \mathcal{J}^*\hat{\pi}(\rho_{i/2}(\mu))^*\mathcal{J}\xi(\omega)$.

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $e_n = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\int \exp(-n^2t^2)\delta^{it}dt$ de sorte que e_n est analytique pour σ^Φ, $\mathcal{N}_\Phi e_n \subset \mathcal{N}_\Phi$ et $\mathcal{N}_\Phi\delta^{-\frac{1}{2}}e_n \subset \mathcal{N}_\Psi$. Il suffit de montrer la proposition pour tout $\mu \in \mathcal{D}(\tau^*_{-i/2}\delta_{i/2})$. On peut alors calculer, pour tout $x \in \mathcal{N}_\Phi$:

$$\begin{aligned}
\Lambda_\Phi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \overline{\mu})\Gamma(xe_n)) &= \Lambda_\Psi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \overline{\mu})\Gamma(xe_n)\delta^{-\frac{1}{2}}) \\
&= \Lambda_\Psi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \overline{\mu})\Gamma(xe_n\delta^{-\frac{1}{2}})(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta^{-\frac{1}{2}})) \\
&\quad \text{car } \Gamma(\delta) = \delta \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \delta.
\end{aligned}$$

On peut poursuivre alors le calcul par :

$$\begin{aligned}
\Lambda_\Phi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \overline{\mu})\Gamma(xe_n)) &= \Lambda_\Psi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \overline{\delta^*_{-i/2}(\mu)})\Gamma(x\delta^{-\frac{1}{2}}e_n)) \\
&= \mathcal{J}^*\Lambda_\Phi(R((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \delta^*_{-i/2}(\mu))\Gamma((x\delta^{-\frac{1}{2}}e_n)^*))) \\
&= \mathcal{J}^*\Lambda_\Phi((\delta^*_{-i/2}(\mu) \circ R \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma(R(x\delta^{-\frac{1}{2}}e_n)^*)) \\
&= \mathcal{J}^*(\delta^*_{-i/2}(\mu) \circ R * id)(W^*)\Lambda_\Phi(R(x\delta^{-\frac{1}{2}}e_n)^*)) \\
&= \mathcal{J}^*(\delta^*_{-i/2}(\mu) \circ R * id)(W^*)\mathcal{J}\Lambda_\Psi(x\delta^{-\frac{1}{2}}e_n)) \\
&= \mathcal{J}^*(\tau^*_{-i/2}\delta^*_{-i/2}(\mu) * id)(W)\mathcal{J}\Lambda_\Phi(xe_n)) \\
&\quad \text{d'après le lemme précédent,} \\
&= \mathcal{J}^*(\rho_{i/2}(\mu) * id)(W)\mathcal{J}\Lambda_\Phi(xe_n))
\end{aligned}$$

Maintenant, on a :

$$\begin{aligned}
(\omega\mu)((xe_n)^*) = (\omega \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \mu)\Gamma((xe_n)^*) &= \omega((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \mu)\Gamma((xe_n)^*)) \\
&= (\xi(\omega)|\Lambda_\Phi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \overline{\mu})\Gamma(xe_n))) \\
&= (\xi(\omega)|\mathcal{J}^*\hat{\pi}(\rho_{i/2}(\mu))\mathcal{J}\Lambda_\Phi(xe_n)) \\
&= (\mathcal{J}^*\hat{\pi}(\rho_{i/2}(\mu))^*\mathcal{J}\xi(\omega)|\Lambda_\Phi(xe_n))
\end{aligned}$$

Comme $(xe_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et $(\Lambda_\Phi(xe_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\Lambda_\Phi(x)$, on obtient :

$$(\omega\mu)(x^*) = (\mathcal{J}^*\hat{\pi}(\rho_{i/2}(\mu))^*\mathcal{J}\xi(\omega)|\Lambda_\Phi(x))$$

donc $\omega\mu \in \mathcal{I}$ et $\xi(\omega\mu) = \mathcal{J}^*\hat{\pi}(\rho_{i/2}(\mu))^*\mathcal{J}\xi(\omega)$. ∎

6.2.14 Corollaire — *Il existe un unique opérateur $\hat{\Lambda}$ de $\mathcal{D}(\hat{\Lambda}) \subset \hat{M}$ dans H_Φ densément défini, fermé et tel que $\hat{\pi}(\mathcal{I})$ est un cœur pour $\hat{\Lambda}$ et $\hat{\Lambda}(\hat{\pi}(\omega)) = \xi(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathcal{I}$.*

Démonstration : Soit $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{I}$ et soit $w \in H_\Phi$ tels que $(\hat{\pi}(\omega_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers w. Si $\mu \in \mathcal{D}(\rho_{i/2})\cap\mathcal{I}$, alors on a, d'après la proposition précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\hat{\pi}(\omega_n)\xi(\mu) = \mathcal{J}^*\hat{\pi}(\rho_{i/2}(\mu))^*\mathcal{J}\xi(\omega_n)$$

qui donne, à la limite, $0 = \mathcal{J}^*\hat{\pi}(\rho_{i/2}(\mu))^*\mathcal{J}w$. Comme on vérifie aisément que $\rho_{i/2}(\mathcal{D}(\rho_{i/2}) \cap \mathcal{I})$ dense dans $\mathcal{I}$ et comme $\hat{M}$ est non dégénérée, on obtient $w = 0$. L'opérateur défini par la formule de la proposition est donc fermable et sa fermeture satisfait les conditions souhaitées. ∎

6.2.15 Proposition — *Il existe un unique poids $\hat{\Phi}$ normal, semifini et fidèle sur $\hat{M}$ tel que $(H_\Phi, \iota, \hat{\Lambda})$ soit une construction GNS pour $\hat{\Phi}$. De plus, $\hat{\sigma}$ est le groupe modulaire de $\hat{\Phi}$ et la fermeture de $PJ_\Phi\delta J_\Phi$ (P et $J_\Phi\delta J_\Phi$ commutent) coïncide avec l'opérateur modulaire de $\hat{\Phi}$.*

Démonstration : Comme $\hat{\pi}$ est multiplicative et comme $\mathcal{I}$ est un idéal, on a, pour tout $x \in \hat{\pi}(M_*^{\beta,\alpha})$ et tout $y \in \hat{\pi}(\mathcal{I})$, $xy \in \hat{\pi}(\mathcal{I})$ et, par définition, $\hat{\Lambda}(xy) = x\hat{\Lambda}(y)$. En utilisant la fermeture de $\hat{\Lambda}$, on montre alors que $\mathcal{D}(\hat{\Lambda})$ est un idéal à gauche dans $\hat{M}$ et que $\hat{\Lambda}(xy) = x\hat{\Lambda}(y)$ pour tout $x \in \hat{M}$ et tout $y \in \mathcal{D}(\hat{\Lambda})$.

D'après la proposition 6.2.11, pour tout $x \in \hat{\pi}(\mathcal{I})$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\hat{\sigma}_t(x) \in \mathcal{D}(\hat{\Lambda})$ et : $\hat{\Lambda}(\hat{\sigma}_t(x)) = P^{it}J_\Phi\delta^{it}J_\Phi\hat{\Lambda}(x)$. En utilisant de nouveau la fermeture de $\hat{\Lambda}$, on obtient que, pour tout $x \in \mathcal{D}(\hat{\Lambda})$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\hat{\sigma}_t(x) \in \mathcal{D}(\hat{\Lambda})$ et :

$$\hat{\Lambda}(\hat{\sigma}_t(x)) = P^{it}J_\Phi\delta^{it}J_\Phi\hat{\Lambda}(x)$$

On a $x\hat{\pi}(\omega) \in \mathcal{D}(\hat{\Lambda})$ et $\hat{\Lambda}(x\hat{\pi}(\omega)) = \mathcal{J}^*\hat{\pi}(\rho_{i/2}(\omega))^*\mathcal{J}\hat{\Lambda}(x) = \mathcal{J}^*\hat{\sigma}_{i/2}(\hat{\pi}(\rho_{i/2})))^*\mathcal{J}\hat{\Lambda}(x)$ pour tout $\omega \in \mathcal{D}(\rho_{i/2})$ tout $x \in \hat{\pi}(\mathcal{I})$ d'après la proposition 6.2.13. Comme $\hat{\pi}(\mathcal{D}(\rho_{i/2}))$ est dense dans $\mathcal{D}(\hat{\sigma}_{i/2})$ et invariant par $\hat{\sigma}$, on a $\hat{\pi}(\mathcal{D}(\rho_{i/2}))$ est un cœur pour $\hat{\sigma}$. La fermeture de $\hat{\Lambda}$ permet de conclure que, pour tout $x \in \mathcal{D}(\hat{\Lambda})$ et tout $y \in \mathcal{D}(\hat{\sigma}_{i/2})$, on a $xy \in \mathcal{D}(\hat{\Lambda})$ et

$$\hat{\Lambda}(xy) = \mathcal{J}^*\hat{\sigma}_{i/2}(y)^*\mathcal{J}\hat{\Lambda}(x)$$

On sait alors, d'après la proposition 5.14 de [Kus97], qu'il existe un poids normal et semifini $\hat{\Phi}$ sur $\hat{M}$ tel que $(H_\Phi, \iota, \hat{\Lambda})$ est une construction GNS pour $\hat{\Phi}$ et $\hat{\sigma}$ est le groupe modulaire de $\hat{\Phi}$. De plus, grâce à l'équation précédente, on a :

$$\hat{\Lambda}(xy) = \mathcal{J}^*\hat{\sigma}_{i/2}(y)^*\mathcal{J}\hat{\Lambda}(x)$$

pour tout $x \in \mathcal{N}_{\hat{\Phi}}$ et tout $y \in \mathcal{D}(\hat{\sigma}_{i/2}) \cap \mathcal{N}_{\hat{\Phi}}$. On déduit facilement de cette relation la fidélité du poids $\hat{\Phi}$. ∎

Théorème 15 — *Il existe un unique poids opératoriel normal, semifini et fidèle $\widehat{T_L} : \hat{M} \to \alpha(N)$ tel que $\hat{\Phi} = \nu \circ \alpha^{-1} \circ \widehat{T_L}$ et $\sigma_t^{\widehat{T_L}}(\hat{\beta}(n)) = \hat{\beta}(\sigma_t^\nu(n))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in N$.*

Démonstration : On sait déjà que $\alpha(N) \subseteq M \cap \hat{M}$, donc d'après le théorème précédent, on a, pour tout $n \in N$:

$$\sigma_t^{\hat{\Phi}}(\alpha(n)) = P^{it} J_\Phi \delta^{it} J_\Phi \alpha(n) J_\Phi \delta^{-it} J_\Phi P^{-it} = P^{it}\alpha(n)P^{-it}$$
$$= \tau_t(\alpha(n)) = \alpha(\sigma_t^\nu(n)) = \sigma_t^{\nu\circ\alpha^{-1}}(\alpha(n))$$

Ainsi, le théorème provient du théorème d'existence de poids opératoriel de Haagerup. On vérifie alors, pour tout $n \in N$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\sigma_t^{\hat{\Phi}}(\hat{\beta}(n)) = P^{it} J_\Phi \delta^{it} \alpha(n^*) \delta^{-it} J_\Phi P^{-it} = P^{it} J_\Phi \alpha(n^*) J_\Phi P^{-it}$$
$$= P^{it}\hat{\beta}(n)P^{-it} = \hat{\beta}(\sigma_t^\nu(n))$$

■

6.2.16 Définition — On dit qu'un poids opératoriel T_L normal, semifini et fidèle de M^+ dans $\overline{\alpha(N)}^+$ est **β-anti-adapté** s'il existe un poids ν_L normal, semifini et fidèle sur N tel que $\sigma_t^{T_L}(\beta(n)) = \beta(\sigma_t^{\nu_L}(n))$ pour tout $n \in N$ et $t \in \mathbb{R}$. On dit alors que T_L est β-anti-adapté par rapport à ν_L. De même, on dit qu'un poids opératoriel T_R normal, fidèle, semifini de M^+ dans $\overline{\beta(N)}^+$ est **α-anti-adapté** s'il existe un poids ν_R normal, semifini et fidèle sur N tel que $\sigma_t^{T_R}(\alpha(n)) = \alpha(\sigma_{-t}^{\nu_R}(n))$ pour tout $n \in N$ et $t \in \mathbb{R}$. On dit alors que T_R est α-anti-adapté par rapport à ν_R.

Avec cette définition, le théorème précédent assure que $\widehat{T_L}$ est un poids opératoriel $\hat{\beta}$-anti-adapté par rapport à ν.

6.2.17 Lemme — *On a $\hat{\Lambda}(\mathcal{N}_{\widehat{T_L}} \cap \mathcal{N}_{\hat{\Phi}}) \subseteq D((H_\Phi)_\beta, \nu^o)$ et alors, pour tout $x \in \mathcal{N}_{\widehat{T_L}} \cap \mathcal{N}_{\hat{\Phi}}$, on a $R^{\beta,\nu^o}(\hat{\Lambda}(x)) = \Lambda_{\widehat{T_L}}(x)$.*

Démonstration : Conséquence de la proposition 3.2.2 et du fait que $\hat{J}\alpha(n^*)\hat{J} = \beta(n)$ pour tout $n \in N$, par définition du poids dual. ■

6.2.18 Lemme — *On a $(\omega_{\eta,\xi}\ {}_{\hat{\beta}}\otimes_\alpha^{\ \nu}\ id)(\hat{\Gamma}(x)) \in \mathcal{N}_{\hat{\Phi}} \cap \mathcal{N}_{\widehat{T_L}}$ pour tout $\xi \in D((H_\Phi)_{\hat{\beta}}, \nu^o)$, tout $\eta \in D((H_\Phi)_{\hat{\beta}}, \nu^o) \cap D({}_\alpha H_\Phi, \nu^o)$ et tout $x \in \mathcal{N}_{\hat{\Phi}} \cap \mathcal{N}_{\widehat{T_L}}$ et alors, on a :*

$$\hat{\Lambda}((\omega_{\eta,\xi}\ {}_{\hat{\beta}}\underset{\nu}{\otimes}_\alpha\ id)(\hat{\Gamma}(x))) = (id * \omega_{\eta,\xi})(W)\hat{\Lambda}(x)$$

DÉMONSTRATION : On calcule, pour tout $\omega \in \mathcal{I}$:

$$\begin{aligned}
(\omega_{\eta,\xi} \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} id)(\hat\Gamma(\hat\pi(\omega))) &= (\omega_{\eta,\xi} \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} id)(\hat\Gamma((\omega * id)(W))) \\
&= (\omega_{\eta,\xi} \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} id)(\sigma_{\nu^o} W((\omega * id)(W) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)W^*\sigma_\nu) \\
&= (\omega * id * \omega_{\eta,\xi})((1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} W)(W \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} W^*)) \\
&= (\omega * \omega_{\eta,\xi} * id)((W \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(\sigma_{\nu^o} \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} W)\sigma_{2\nu}(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \sigma_{\nu^o})) \\
&\qquad \text{d'après la relation pentagonale,} \\
&= \hat\pi((id * \omega_{\eta,\xi})(W)\omega)
\end{aligned}$$

Ainsi, par définition, pour tout $\omega \in \mathcal{I}$, on a $(\omega_{\eta,\xi} \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} id)(\hat\Gamma(\hat\pi(\omega))) \in \mathcal{N}_{\hat\Phi} \cap \mathcal{N}_{\widehat{T_L}}$ et on obtient :

$$\hat\Lambda((\omega_{\eta,\xi} \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} id)(\hat\Gamma(\hat\pi(\omega)))) = (id * \omega_{\eta,\xi})(W)\hat\Lambda(\hat\pi(\omega))$$

La fermeture de $\hat\Lambda$ implique la proposition. ■

6.2.19 PROPOSITION — *$\widehat{T_L}$ est invariant à gauche.*

DÉMONSTRATION : Soient $(\xi_i)_{i\in I}$ une (N^o,ν^o)-base de $(H_\Phi)_{\hat\beta}$. Pour tous $x \in \mathcal{N}_{\hat\Phi} \cap \mathcal{N}_{\widehat{T_L}}$ et $\eta \in D((H_\Phi)_{\hat\beta}, \nu^o) \cap D({}_\alpha H_\Phi, \nu)$, on a :

$$\begin{aligned}
\hat\Phi((\omega_\eta \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\star_\alpha} id)(\widehat\Gamma(x^*x))) &= \sum_{i\in I} \hat\Phi((\omega_{\eta,\xi_i} \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\star_\alpha} id)(\widehat\Gamma(x))^*(\omega_{\eta,\xi_i} \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\star_\alpha} id)(\widehat\Gamma(x))) \\
&= \sum_{i\in I} ||\hat\Lambda((\omega_{\eta,\xi_i} \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\star_\alpha} id)(\widehat\Gamma(x))||^2 \\
&= \sum_{i\in I} ||(id * \omega_{\eta,\xi_i})(W)\hat\Lambda(x)||^2 \\
&= ((\rho_\eta^{\beta,\alpha})^*\rho_\eta^{\beta,\alpha}\hat\Lambda(x)|\hat\Lambda(x)) \\
&= ||\hat\Lambda(x) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta||^2 \\
&= (\alpha(<\hat\Lambda(x), \hat\Lambda(x)>_{\beta,\nu^o} \eta|\eta) \\
&= (\widehat{T_L}(x^*x)\eta|\eta) \\
&\qquad \text{d'après le lemme précédent.}
\end{aligned}$$

■

6.2.20 PROPOSITION — *L'unitaire $\sigma_\nu W^*\sigma_\nu$ est l'unitaire fondamental associé à $\hat\Phi$.*

DÉMONSTRATION : $\hat W$ désignera l'unitaire fondamentale associée à $\hat\Phi$. On a alors, pour tous

$\xi \in D({}_\alpha H_\Phi, \nu) \cap D((H_\Phi)_{\hat\beta}, \nu^o)$, $\eta \in D((H_\Phi)_{\hat\beta}, \nu^o)$ et tout $x \in \mathcal{N}_{\hat\Phi} \cap \mathcal{N}_{\widehat{T_L}}$:

$$\begin{aligned}(\omega_{\xi,\eta} * id)(\hat W^*)\hat\Lambda(x) &= \hat\Lambda((\omega_{\xi,\eta} \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\star_\alpha} id)(\hat\Gamma(x)))\\ &\quad \text{d'après le corollaire 3.3.3,}\\ &= (id * \omega_{\xi,\eta})(W)\hat\Lambda(x)\\ &\quad \text{d'après le lemme 6.2.18,}\\ &= (\omega_{\xi,\eta} * id)(\sigma_{\nu^o} W \sigma_{\nu^o})\hat\Lambda(x)\end{aligned}$$

Donc, on a $\hat W = \sigma_\nu W^* \sigma_\nu$. ■

On construit, maintenant, le poids opératoriel invariant à droite qui est la seule donnée manquante pour affirmer que $\hat M$ possède une structure de groupoïde quantique naturelle. Dans ce but, on construit la coinvolution duale $\hat R$. On a besoin de l'expression de R indépendante de Ψ suivante :

6.2.21 Lemme — *on a $R((id * \omega_{J_\Phi\eta, J_\Phi\xi})(W)) = (id * \omega_{\xi,\eta})(W)$ pour tout $\xi \in D({}_\alpha(H_\Phi), \nu)$ et tout $\eta \in D((H_\Phi)_\beta, \nu^o)$.*

Démonstration : Pour tous $v, w \in H_\Phi$, on a :

$$\begin{aligned}(I(id * \omega_{J_\Phi\xi, J_\Phi\eta})(W^*)Iv|w) &= ((id * \omega_{J_\Phi\eta, J_\Phi\xi})(W)Iw|Iv)\\ &= (W(Iw \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi\eta)|Iv \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} J_\Phi\xi)\\ &= (W(I \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} J_\Phi)(w \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} J_\Phi\eta)|(I \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi)(v \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi\xi))\\ &= ((I \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi)W^*(I \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi)(v \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi\xi)|w \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} J_\Phi\eta)\\ &= (W(v \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi\xi)|w \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} J_\Phi\eta)\\ &\quad \text{d'après la proposition 4.6.12,}\\ &= ((id * \omega_{\xi,\eta})(W)v|w)\end{aligned}$$

■

6.2.22 Proposition — *Pour tout $\omega \in M_*^{\alpha,\beta}$, on a $\omega \circ R \in M_*^{\alpha,\beta}$ et on a $J_\Phi\hat\pi(\omega \circ R)^* J_\Phi = \hat\pi(\omega)$.*

Démonstration : Pour tout $\xi \in D({}_\alpha(H_\Phi), \nu)$ et tout $\eta \in D((H_\Phi)_\beta, \nu^o)$, on a :

$$\begin{aligned}(J_\Phi\hat\pi(\omega \circ R)^* J_\Phi\xi|\eta) &= (\hat\pi(\omega \circ R)J_\Phi\eta|J_\Phi\xi) = ((\omega \circ * id)(W)J_\Phi\eta|J_\Phi\xi)\\ &= \omega \circ R((id * \omega_{J_\Phi\eta, J_\Phi\xi}(W)) = \omega((id * \omega_{\xi,\eta})(W)) = (\hat\pi(\omega)\xi|\eta)\\ &\quad \text{d'après le lemme précédent.}\end{aligned}$$

■

6.2.23 Corollaire — *Il existe un unique anti-automorphisme $\hat R$ de $\hat M$ tel que, pour tout $\omega \in M_*^{\alpha,\beta}$, on a $\hat R(\hat\pi(\omega)) = \hat\pi(\omega \circ R)$. De plus, on a $\hat R(x) = J_\Phi x^* J_\Phi$ pour tout $x \in \hat M$.*

6.2.24 Proposition — *On a la formule* $\varsigma_{N^o} \circ (\hat{R} \underset{N}{{}_{\hat\beta}\star_\alpha} \hat{R}) \circ \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma} \circ \hat{R}$.

Démonstration : Pour tout $\omega \in M_*^{\alpha,\beta}$, on calcule :

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}(\hat{\pi}(\omega)) &= \hat{W}^*(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} (\omega * id)(W))\hat{W} \\
&= \sigma_{\nu^o} W((\omega * id)(W) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)W^*\sigma_\nu \\
&= \sigma_{\nu^o}(\omega * id * id)((1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} W)(W \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} W^*))\sigma_\nu \\
&= \sigma_{\nu^o}(\omega * id * id)((W \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(\sigma_{\nu^o} \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} W)\sigma_{2\nu}(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \sigma_{\nu^o}))\sigma_\nu \\
&\qquad W \text{ est un unitaire pseudo-multiplicatif,} \\
&= (\omega * id * id)((1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \sigma_{\nu^o})(W \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(\sigma_{\nu^o} \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} W)\sigma_{2\nu})
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\hat{\Gamma} \circ \hat{R}(\hat{\pi}(\omega)) = \hat{\Gamma}(\hat{\pi}(\omega \circ R))$$

$$= (\omega \circ R * id * id)((1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \sigma_{\nu^o})(W \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(\sigma_{\nu^o} \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} W)\sigma_{2\nu})$$

Or, d'après la proposition 4.6.12, on sait que $W = (I \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi)W^*(I \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi)$ et donc :

$$(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \sigma_{\nu^o})(W \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(\sigma_{\nu^o} \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} W)\sigma_{2\nu}$$

$$= (I \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} J_\Phi \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} J_\Phi)[(W \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(\sigma_{\nu^o} \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} W)\sigma_{2\nu}(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \sigma_{\nu^o})]^*(I \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi \underset{N}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} J_\Phi)$$

et par suite, on a :

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma} \circ \hat{R}(\hat{\pi}(\omega)) &= (\hat{R} \underset{N^o}{{}_\alpha\star_\beta} \hat{R})((\omega * id)[(W \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(\sigma_{\nu^o} \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} 1)(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} W)\sigma_{2\nu}(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \sigma_{\nu^o})]) \\
&\qquad \text{car } R \text{ est implémenté par } I \text{ et } \hat{R} \text{ est implémenté par } J_\Phi, \\
&= (\hat{R} \underset{N^o}{{}_\alpha\star_{\hat\beta}} \hat{R}) \circ \varsigma_N \circ \hat{\Gamma}(\hat{\pi}(\omega)) \\
&\qquad \text{d'après le calcul précédent,} \\
&= \varsigma_{N^o} \circ (\hat{R} \underset{N}{{}_{\hat\beta}\star_\alpha} \hat{R}) \circ \hat{\Gamma}(\hat{\pi}(\omega))
\end{aligned}$$

Le résultat en découle par normalité de $\hat{\Gamma}$ et par définition de $\hat{M}$.

■

6.2.25 Corollaire — $\hat{R}$ *est une coinvolution.*

6.2.26 Corollaire — $\widehat{T_R} = \hat{R} \circ \widehat{T_L} \circ \hat{R}$ *est un poids opératoriel normal, semifini, fidèle, invariant à droite et anti-adapté par rapport à* ν.

THÉORÈME 16 — *Pour tout groupoïde quantique mesuré* $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ *vérifiant l'hypothèse* $D(H_\beta, \nu^o) \cap J_\Phi \Lambda_\Phi(\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L})$ *dense dans* H, *il existe un objet* $(N, \hat{M}, \alpha, \hat{\beta}, \widehat{\Gamma}, \nu, \widehat{T_L}, \widehat{T_R})$ *qu'on appelle* **objet dual** *tel que :*

i) $(N, \hat{M}, \alpha, \hat{\beta}, \widehat{\Gamma})$ *est un bimodule de Hopf ;*

ii) $\widehat{T_L}$ *(resp.* $\widehat{T_R}$*) est un poids opératoriel invariant à gauche (resp. droite) ;*

iii) $\widehat{T_L}$ *(resp.* $\widehat{T_R}$*) est* β*-(resp.* α*-)anti-adapté par rapport à* ν *i.e* $\sigma_t^{\widehat{T_L}}(\hat{\beta}(n)) = \hat{\beta}(\sigma_t^\nu(n))$ *(resp.* $\sigma_t^{\widehat{T_R}}(\alpha(n)) = \alpha(\sigma_{-t}^\nu(n))$*) ;*

iv) $D(H_{\hat{\beta}}, \nu^o) \cap J_{\hat{\Phi}} \Lambda_{\hat{\Phi}}(\mathcal{N}_{\hat{\Phi}} \cap \mathcal{N}_{\widehat{T_L}})$ *dense dans* H.

THÉORÈME 17 — *Pour tout groupoïde quantique mesuré* $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$, *le bimodule de Hopf sous-jacent à l'objet dual muni des poids opératoriels de Haar* $\widehat{T_L}$ *et* $\widehat{T_R}$ *est un groupoïde quantique mesuré si, et seulement si la base* N *est semifinie. Dans ce cas, on appelle ce groupoïde quantique mesuré* **groupoïde quantique dual** *et on note* $\hat{\nu}$ *le poids quasi-invariant.*

DÉMONSTRATION : Le quintuplet $(N, \hat{M}, \alpha, \hat{\beta}, \hat{\Gamma})$ muni des poids opératoriels $\widehat{T_L}$ et $\widehat{T_R}$ est un groupoïde quantique mesuré si, et seulement si il existe un poids sur N normal, semifini et fidèle $\widehat{\nu}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\sigma_t^\nu = \sigma_{-t}^{\widehat{\nu}}$. Dans ces conditions, $\hat{\nu}$ est invariant par σ^ν, donc il existe h strictement positif et affilié au centralisateur de ν tel que $[D\hat{\nu} : D\nu]_t = h^{it}$. Par suite, pour tout $x \in N$, on a $\sigma_{-t}^\nu(x) = h^{it}\sigma_t^\nu(x)h^{-it}$ et donc $\sigma_{-2t}^\nu(x) = h^{it}xh^{-it}$. Ainsi σ_t^ν est intérieur pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc N est semifinie d'après le théorème 3.14 de [Tak03]. Réciproquement, si N est semifinie, il existe une trace tr normale, semifinie et fidèle sur N et il existe h strictement positif tel que $\nu = tr(h.)$. Alors $\hat{\nu} = tr(h^{-1}.)$ satisfait les conditions. ■

6.3 Théorème de bidualité.

On se place dans le cas où la base N est semifinie. On peut construire le groupoïde quantique dual de $(N, \hat{M}, \alpha, \hat{\beta}, \hat{\Gamma})$ qu'on note $(N, \hat{\hat{M}}, \alpha, \hat{\hat{\beta}}, \hat{\hat{\Gamma}})$ et qu'on appelle groupoïde quantique bidual. On sait, d'après la proposition 6.2.20, que l'unitaire fondamental associé au groupoïde quantique dual est $\sigma_\nu W^* \sigma_\nu$. La définition du groupoïde quantique dual permet alors d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 18 — *Le groupoïde quantique mesuré* $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ *et son groupoïde quantique mesuré bidual* $(N, \hat{\hat{M}}, \alpha, \hat{\hat{\beta}}, \hat{\hat{\Gamma}}, \hat{\hat{\nu}}, \widehat{\widehat{T_L}}, \widehat{\widehat{T_R}})$ *coïncident. De plus,* $\hat{\hat{\Lambda}} = \Lambda_\Phi$.

DÉMONSTRATION : Comme l'unitaire fondamental associé au groupoïde quantique dual est $\sigma_\nu W^* \sigma_\nu$, on déduit que le groupoïde quantique mesuré et son bidual ont le même unitaire fondamental et donc la même structure de bimodule de Hopf sous-jacente. Comme $\nu = tr(h.)$ et $\hat{\nu} = tr(h^{-1}.)$ pour un certain h strictement positif, on tire $\nu = \hat{\hat{\nu}}$.

On note $\hat{\hat{\pi}}(\omega) = (\omega * id)(\widehat{W}) = (id * \omega)(W^*)$. Soit $\omega \in \hat{\mathcal{I}}$. On note $a = \hat{\hat{\pi}}(\omega)$. Alors, pour tout

$\Theta \in \mathcal{I}$, on a :

$$\omega(\hat{\pi}(\Theta)^*) = \omega((\Theta * id)(W)^*) = \omega((\overline{\Theta} * id)(W^*)) = \overline{\Theta}((id * \omega)(W^*))$$

$$= \overline{\Theta(a^*)} = \overline{(\xi(\Theta)|\Lambda_\Phi(a))} = (\Lambda_\Phi(a)|\hat{\Lambda}(\hat{\pi}(\Theta)))$$

Comme $\hat{\pi}(\mathcal{I})$ est un cœur pour $\hat{\Lambda}$ ceci implique $\omega(x^*) = (\Lambda_\Phi(a)|\hat{\Lambda}(x))$ pour tout $x \in \mathcal{N}_{\hat{\Phi}}$. Par définition de $\hat{\hat{\Lambda}}$, on obtient $\hat{\hat{\Lambda}}(\hat{\hat{\pi}}(\omega)) = \Lambda_\Phi(a) = \Lambda_\Phi(\hat{\hat{\pi}}(\omega))$. Comme $\hat{\hat{\pi}}(\hat{\mathcal{I}})$ est un cœur pour $\hat{\hat{\Lambda}}$ et comme Λ_Φ est fermée, on obtient $\hat{\hat{\Lambda}}(y) = \Lambda_\Phi(y)$ pour tout $y \in \mathcal{N}_{\hat{\hat{\Phi}}}$. ■

On veut maintenant identifier les objets fondamentaux de la structure duale.

6.3.1 Proposition — *On a $(\omega * id)(W^*) \in \mathcal{D}(\widehat{S})$ et $\widehat{S}((\omega * id)(W^*)) = (\omega * id)(W)$ pour tout $\omega \in M_*^{\alpha,\beta}$. De plus, l'ensemble des éléments de la forme $(\omega * id)(W^*)$ est un cœur pour $\widehat{S}$.*

Démonstration : L'unitaire fondamental de la structure duale est égal à $\widehat{W} = \sigma_\nu W^* \sigma_\nu$. La proposition est donc une conséquence du théorème 9. ■

Si, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\omega \in M_*$, on note $\tau_t^*(\omega) = \omega \circ \tau_t$, alors τ^* laisse stable $\mathcal{I}$ et on a, pour tout $\omega \in \mathcal{I}$, $\xi(\tau_t^*(\omega)) = \lambda^{-\frac{t}{2}} P^{-it}\xi(\omega)$.

6.3.2 Lemme — *L'application $\tau_t^* : M_*^{\alpha,\beta} \to M_*^{\alpha,\beta}$ est multiplicative pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration : Soient $\omega, \mu \in M_*^{\alpha,\beta}$. On a alors :

$$\tau_t^*(\omega\mu) = (\omega \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \mu)\Gamma \circ \tau_t = (\omega\tau_t \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \mu\tau_t)\Gamma = (\tau_t^*\omega)(\tau_t^*\mu)$$

■

6.3.3 Proposition — *Il existe un unique groupe à un paramètre $\widehat{\tau}_t$ sur $\widehat{M}$ tel que, pour tout $\omega \in M_*^{\alpha,\beta}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{\tau}_t(\hat{\pi}(\omega)) = \hat{\pi}(\omega\tau_{-t})$. De plus, on a $\widehat{\tau}_t(x) = P^{it}xP^{-it}$ pour tout $x \in \widehat{M}$ et tout $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration : Pour tout $\omega \in M_*^{\alpha,\beta}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on évalue $P^{it}\hat{\pi}(\omega)P^{-it}$. Soit $\mu \in \mathcal{I}$. On a alors :

$$\begin{aligned} P^{it}\hat{\pi}(\omega)P^{-it}\xi(\mu) &= P^{it}\hat{\pi}(\omega)\lambda^{\frac{t}{2}}\xi(\tau_t^*\mu) \\ &= \lambda^{\frac{t}{2}} P^{it}\hat{\pi}(\omega)\xi(\tau_t^*\mu) \\ &\qquad \text{car } \lambda \text{ commute avec } P \text{ et car } \hat{\pi}(\omega) \in \beta(N)', \\ &= \xi(\tau_{-t}^*(\omega)\mu) = \hat{\pi}(\tau_{-t}^*(\omega))\xi(\mu) \end{aligned}$$

On en déduit que $\widehat{\tau}_t$ défini par $\widehat{\tau}_t(x) = P^{it}xP^{-it}$ est un automorphisme de $\widehat{M}$ qui satisfait les conditions de l'énoncé. ■

6.3.4 Proposition — *On a $P^{it}\widehat{\Lambda}(x) = \lambda^{-\frac{t}{2}}\widehat{\Lambda}(\widehat{\tau}_t(x))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathcal{N}_{\widehat{\Phi}}$.*

Démonstration : Si $x \in \hat{\pi}(\mathcal{I})$ alors $\widehat{\tau}_t(x) \in \hat{\pi}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}(\widehat{\Lambda})$ et on a $\widehat{\Lambda}(\widehat{\tau}_t(x)) = \lambda^{\frac{t}{2}} P^{it} \widehat{\Lambda}(x)$ d'après le lemme précédent. La fermeture de l'opérateur $\widehat{\Lambda}$ permet de conclure pour tout $x \in \mathcal{N}_{\widehat{\Phi}}$. ■

6.3.5 Proposition — *On a $R(x) = \hat{J} x^* \hat{J}$ pour tout $x \in M$ et on a $\hat{R}(x) = J_\Phi x^* J_\Phi$ pour tout $x \in \hat{M}$.*

Démonstration : La seconde égalité a déjà était prouvée dans le corollaire 6.2.23. Le théorème de bidualité assure alors la première. ■

Théorème 19 — *Pour tout groupoïde quantique mesuré $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$, les objets fondamentaux du groupoïde quantique dual $(N, \widehat{M}, \alpha, \hat{\beta}, \hat{\Gamma}, \hat{\nu}, \widehat{T_L}, \widehat{T_R})$ sont décrits par :*

i) $\hat{W} = \sigma_\nu W^* \sigma_\nu$ *l'unitaire fondamental ;*
ii) $\widehat{R}(x) = J_\Phi x^* J_\Phi$ *l'antipode unitaire ;*
iii) $\widehat{\tau}(x) = P^{it} x P^{-it}$ *le groupe d'échelle ;*
iv) $\hat{\lambda} = \lambda^{-1}$ *l'opérateur d'échelle ;*
v) $\hat{\delta} = P^{-1} J_\Phi \delta J_\Phi \delta^{-1} \Delta_\Phi^{-1}$ *le module ;*
vi) $\hat{P} = P$ *l'opérateur de manipulation.*

Démonstration : Le premier point a déjà été prouvé. On prouve le troisième point. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \widehat{M}$, on calcule :

$$\begin{aligned}
\widehat{\Gamma}(\widehat{\sigma}_t(x)) &= \sigma_{\nu^o} W(\widehat{\sigma}_t(x) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1) W^* \sigma_{\nu^o} \\
&= \sigma_{\nu^o} W(P^{it} J_\Phi \delta^{it} J_\Phi x J_\Phi \delta^{-it} J_\Phi P^{-it} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} P^{it} P^{-it}) W^* \sigma_{\nu^o} \\
&= (P^{it} \underset{N}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_\alpha} P^{it}) \sigma_{\nu^o} W(J_\Phi \delta^{it} J_\Phi x J_\Phi \delta^{-it} J_\Phi \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1) W^* \sigma_{\nu^o} (P^{-it} \underset{N}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_\alpha} P^{-it}) \\
&\qquad \text{d'après la relation de maniabilité,} \\
&= (P^{it} \underset{N}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_\alpha} P^{it} J_\Phi \delta^{it} J_\Phi) \sigma_{\nu^o} W(x \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1) W^* \sigma_{\nu^o} (P^{-it} \underset{N}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_\alpha} P^{-it} J_\Phi \delta^{-it} J_\Phi) \\
&\qquad \text{d'après la proposition 3.4.3,} \\
&= (\widehat{\tau}_t \underset{N}{{}_{\hat{\beta}}\star_\alpha} \widehat{\sigma}_t) \widehat{\Gamma}(x)
\end{aligned}$$

On conclut alors d'une manière standard grâce à la proposition 4.6.12. Alors le quatrième point et le dernier point en découlent à cause de la proposition précédente.

On démontre alors le second point. Soit $\omega \in \mathcal{D}(\tau^*_{-i/2})$ alors, d'après la définition de $\hat{R}$, le lemme 6.2.12 et l'expression de $\widehat{\tau}_t$, on a $\hat{R}((\omega * id)(W^*)) = (\omega \circ R * id)(W^*) = (\tau^*_{-i/2}(\omega) * id)(W) = \widehat{\tau_{i/2}}(\omega * id)(W)$. On en déduit que $\hat{R} = \widehat{\tau_{i/2}} \circ \hat{S}$ ce qui implique, par unicité de la décomposition polaire, que $\hat{R}$ est l'antipode unitaire.

On sait que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\delta^{it} = P^{-it} J_\Phi \hat{\Delta}^{it} J_\Phi$ d'après la proposition 6.2.15. D'après le théorème de bidualité, on obtient $\hat{\delta}^{it} = P^{-it} \hat{J} \Delta^{it} \hat{J}$. Or, d'après la proposition 6.3.5, $\hat{J}$ implémente R sur M, le théorème découle de la proposition 2.4 de [Vae01a]. ■

Remarque — On vérifie aisément que $\hat{\delta}$ est affilié à $\alpha(N)'$ si, et seulement si N est semifinie.

6.4 Relations de Heisenberg.

On rappelle que $\alpha(N) \cup \beta(N) \subseteq M \subseteq \hat{\beta}(N)'$ et $\alpha(N) \cup \beta(\hat{N}) \subseteq M \subseteq \beta(N)'$.

6.4.1 Proposition — *On a* $W(x \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} y) = (x \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} y)W$ *pour tous* $x \in M'$ *et* $y \in \hat{M}'$.

Démonstration : Claire d'après la proposition 3.4.3 et d'après la définition de $\hat{M}$. ■

6.4.2 Proposition — *(Relations de Heisenberg) Les égalités suivantes sont vérifiées :*

$$i) M \cap \hat{M} = \alpha(N) \qquad ii) M' \cap \hat{M}' = J_\Phi \beta(N) J_\Phi$$
$$iii) M \cap \hat{M}' = \beta(N) \qquad iv) M' \cap \hat{M} = \hat{\beta}(N)$$

Démonstration : On commence par montrer iii). On sait déjà que $M \cap \hat{M}' \subseteq \beta(N)$. Réciproquement, soit $m \in M \cap \hat{M}'$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(m) &= W^*(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} m)W && \text{car } m \in M,\\
&= W^*W(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} m) && \text{car } m \in \hat{M}',\\
&= 1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} m && \text{car } W \text{ est unitaire}
\end{aligned}$$

donc $m \in \beta(N)$ d'après la proposition 4.4.14, ce qui prouve iii).

En appliquant R à la relation iii), on obtient la relation i) d'après la proposition 6.3.5. En appliquant $\hat{R}$ à la relation i), on obtient la relation iv) et en appliquant $\hat{R}$ à la relation i), on obtient la relation ii) d'après la proposition 6.3.5. ■

6.5 Morphismes de bimodules de Hopf.

6.5.1 Définition — On appelle **morphisme de bimodules de Hopf** de $(N, M_1, \alpha_1, \beta_1, \Gamma_1)$ dans $(N, M_2, \alpha_2, \beta_2, \Gamma_2)$ tout morphisme π d'algèbres de von Neumann de M_1 dans M_2 tel que :

i) $\pi \circ \alpha_1 = \alpha_2$ et $\pi \circ \beta_1 = \beta_2$;

ii) $\Gamma_2 \circ \pi = (\pi \underset{N}{{}_{\beta_1}\star_{\alpha_1}} \pi) \circ \Gamma$.

De même, on appelle **antimorphisme de bimodules de Hopf** de $(N, M_1, \alpha_1, \beta_1, \Gamma_1)$ dans $(N^o, M_2, \beta_2, \alpha_2, \Gamma_2)$ tout antimorphisme j d'algèbres de von Neumann de M_1 dans M_2 tel que :

i) $j \circ \alpha_1 = \beta_2$ et $j \circ \beta_1 = \alpha_2$;

ii) $\Gamma_2 \circ j = (j \underset{N}{{}_{\beta_1}\star_{\alpha_1}} j) \circ \Gamma_1$.

6.5.2 DÉFINITION — Pour tout bimodule de Hopf $(N, M_1, \alpha_1, \beta_1, \Gamma_1)$ et tout isomorphisme d'algèbres de von Neumann π entre M_1 et M_2, $(N, M_2, \pi \circ \alpha_1, \pi \circ \beta_1, (\pi \underset{N}{{}_{\beta_1}\star_{\alpha_1}} \pi) \circ \Gamma \circ \pi^{-1})$ est un bimodule de Hopf qu'on appelle bimodule de Hopf image par π. De même, si j est un anti-isomorphisme d'algèbres de von Neumann entre M_1 et M_2 et si $(N, M_1, \alpha_1, \beta_1, \Gamma_1)$ est un bimodule de Hopf, le quintuplet $(N^o, M_2, j \circ \alpha_1, j \circ \beta_1, (j \underset{N}{{}_{\beta_1}\star_{\alpha_1}} j) \circ \Gamma \circ j^{-1})$ est un bimodule de Hopf qu'on appelle bimodule de Hopf image par j.

6.5.3 PROPOSITION — *Soit π un isomorphisme de bimodule de Hopf entre $(N, M_1, \alpha_1, \beta_1, \Gamma_1)$ dans $(N, M_2, \alpha_2, \beta_2, \Gamma_2)$. Si $(N, M_1, \alpha_1, \beta_1, \Gamma_1, \nu, T_L, T_R)$ est un groupoïde quantique mesuré alors $(N, M_2, \alpha_2, \beta_2, \Gamma_2, \nu, \pi \circ T_L \circ \pi^{-1}, \pi \circ T_R \circ \pi^{-1})$ est un groupoïde quantique mesuré. De plus, on a :*

$$R_2 = \pi R_1 \pi^{-1}, \tau_2 = \pi \tau_1 \pi^{-1}, \lambda_2 = \pi(\lambda_1) \text{ et } \delta_2 = \pi(\delta_1)$$

On note $\Phi^1 = \nu \circ \alpha_1^{-1} \circ T_L$ et $\Phi^2 = \Phi^1 \circ \pi^{-1}$. Si I désigne l'unitaire de H_{Φ^1} sur H_{Φ^2} qui à $\Lambda_{\Phi^1}(a)$ associe $\Lambda_{\Phi^2}(\pi(a))$, pour tout $a \in \mathcal{N}_{\Phi^1}$, alors les unitaires fondamentaux des deux structures vérifient :

$$W_2 = (I \underset{N^o}{{}_{\alpha_1}\otimes_{\hat{\beta}_1}} I) W_1 (I^* \underset{N}{{}_{\beta_2}\otimes_{\alpha_2}} I^*)$$

DÉMONSTRATION : On vérifie facilement que $(N, M_2, \alpha_2, \beta_2, \Gamma_2, \nu, \pi \circ T_L \circ \pi^{-1}, \pi \circ T_R \circ \pi^{-1})$ est un groupoïde quantique mesuré. On identifie alors les objets fondamentaux de la structure. Pour tout $v \in D((H_{\Phi^1})_{\beta_1}, \nu^o)$, tout $a \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_{\Phi^1}$ et toute (N^o, ν^o)-base $(\xi_i)_{i \in I}$ de $(H_{\Phi^1})_{\beta_1}$, on a :

$$\begin{aligned}
& W_1^*(I^* \underset{N^o}{{}_{\alpha_2}\otimes_{\hat{\beta}_2}} I^*)(Iv \underset{\nu^o}{{}_{\alpha_2}\otimes_{\hat{\beta}_2}} \Lambda_{\Psi^2}(\pi(a)) \\
&= W_1^*(v \underset{\nu^o}{{}_{\alpha_1}\otimes_{\hat{\beta}_1}} \Lambda_{\Psi^1}(a)) \\
&= \sum_{i \in I} \xi_i \underset{\nu}{{}_{\beta_1}\otimes_{\alpha_1}} \Lambda_{\Phi^1}((\omega_{v,\xi_i} \underset{\nu}{{}_{\beta_1}\star_{\alpha_1}} id)\Gamma_1(a)) && \text{par définition de } W_1, \\
&= \sum_{i \in I} \xi_i \underset{\nu}{{}_{\beta_1}\otimes_{\alpha_1}} \Lambda_{\Phi^1}((\omega_{v,\xi_i} \underset{\nu}{{}_{\beta_1}\star_{\alpha}} id)(\pi^{-1} \underset{N}{{}_{\beta_1}\star_{\alpha_1}} \pi^{-1})\Gamma_2(\pi(a)))) \\
&= (I^* \underset{N}{{}_{\beta_2}\otimes_{\alpha_2}} I^*) \sum_{i \in I} I\xi_i \underset{\nu}{{}_{\beta_2}\otimes_{\alpha_2}} \Lambda_{\Phi^2}((\omega_{Iv,I\xi_i} \underset{\nu}{{}_{\beta_2}\star_{\alpha_2}} id)\Gamma_2(a)) \\
&= (I^* \underset{N}{{}_{\beta_2}\otimes_{\alpha_2}} I^*) W_2^*(Iv \underset{\nu^o}{{}_{\alpha_2}\otimes_{\hat{\beta}_2}} \Lambda_{\Psi^2}(\pi(a))) && \text{par définition de } W_2.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $W_2 = (I \underset{N^o}{{}_{\alpha_1}\otimes_{\hat{\beta}_1}} I) W_1 (I^* \underset{N}{{}_{\beta_2}\otimes_{\alpha_2}} I^*)$.

Pour tous $a, b \in \mathcal{N}_{jT_Lj} \cap \mathcal{N}_{\Phi \circ j}$, on a :

$$\begin{aligned}
R_2((id \ {}_{\beta_2}\underset{\nu}{\otimes}{}_{\alpha_2} \ \omega_{J_{\Phi^2}\Lambda_{\Phi^2}(\pi(a))})\Gamma_2(\pi(b^*)\pi(b))) &= (id \ {}_{\beta_2}\underset{\nu}{\otimes}{}_{\alpha_2} \ \omega_{J_{\Phi^2}\Lambda_{\Phi^2}(\pi(b))})\Gamma_2(\pi(a^*a)) \\
&= (id \ {}_{\beta_2}\underset{\nu}{\otimes}{}_{\alpha_2} \ \omega_{J_{\Phi^2}\Lambda_{\Phi^2}(\pi(b))})(\pi \ {}_{\beta_1}\underset{N}{\star}{}_{\alpha_1} \ \pi)\Gamma_1(a^*a) \\
&= \pi((id \ {}_{\beta_1}\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\alpha_1} \ \omega_{J_{\Phi^1}\Lambda_{\Phi^1}(b)})\Gamma_1(a^*a)) \\
&= \pi R_1((id \ {}_{\beta_1}\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\alpha_1} \ \omega_{J_{\Phi^1}\Lambda_{\Phi^1}(a)})\Gamma_1(b^*b)) \\
&= \pi R_1 \pi^{-1}((id \ {}_{\beta_2}\underset{\nu}{\otimes}{}_{\alpha_2} \ \omega_{J_{\Phi^2}\Lambda_{\Phi^2}(\pi(a))})\Gamma_2(\pi(b^*)\pi(b)))
\end{aligned}$$

d'où, on tire facilement que $R_2 = \pi \circ R_1 \circ \pi^{-1}$.

Les expressions qu'on a obtenues pour les unitaires fondamentaux permettent de montrer facilement que $S_2 = \pi \circ S_1 \circ \pi^{-1}$ et on en déduit que $\tau_2 = \pi \circ \tau_1 \circ \pi^{-1}$.

Enfin, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
[D\Phi^2 \circ R_2 : D\Phi^2]_t &= [D\Phi^1 \circ R_1 \circ \pi^{-1} : D\Phi^1 \circ \pi^{-1}]_t \\
&= \pi([D\Phi^1 \circ R_1 : D\Phi^1]_t) \\
&= \pi(\lambda_1)^{\frac{it^2}{2}} \pi(\delta_1)^{it}
\end{aligned}$$

et donc on a $\delta_2 = \pi(\delta_1)$ et $\lambda_2 = \pi(\lambda_1)$. ■

6.5.4 Proposition — *Soit j un anti-isomorphisme de bimodule de Hopf entre $(N, M_1, \alpha_1, \beta_1, \Gamma_1)$ dans $(N^o, M_2, \beta_2, \alpha_2, \Gamma_2)$. Si $(N^o, M_1, \alpha_1, \beta_1, \Gamma_1, \nu, T_L, T_R)$ est un groupoïde quantique mesuré alors $(N, M_2, \alpha_2, \beta_2, \Gamma_2, \nu^o, jT_Lj^{-1}, jT_Rj^{-1})$ est un groupoïde quantique mesuré. De plus, on a :*

$$R_2 = jR_1j^{-1}, \tau_t^2 = j\tau_{-t}^1 j^{-1}, \lambda_2 = j(\lambda_1^{-1}) \text{ et } \delta_2 = j(\delta_1)$$

On note $\Phi^1 = \nu \circ \alpha_1^{-1} \circ T_L$ et $\Phi^2 = \Phi^1 \circ j^{-1}$. Si J désigne l'unitaire de H_{Φ^1} sur H_{Φ^2} qui à $\Lambda_{\Phi^1}(a)$ associe $J_{\Phi^2}\Lambda_{\Phi^2}(j(a^*))$, pour tout $a \in \mathcal{N}_{\Phi^1}$, alors les unitaires fondamentaux des deux structures vérifient :

$$W_2 = (J \ {}_{\alpha_1}\underset{N^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}_1} \ J)W_1(J^* \ {}_{\alpha_2}\underset{N^o}{\otimes}{}_{\beta_2} \ J^*)$$

Démonstration : La preuve est tout-à-fait analogue à la précédente. ■

6.6 Groupoïdes quantiques mesurés opposé et commutant.

Dans ce paragraphe, on se donne un groupoïde quantique mesuré $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$. On note $\Phi = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L$.

6.6.1 Définition — On appelle **groupoïde quantique opposé** l'image par la coinvolution R du bimodule de Hopf et on note $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, T_L, T_R)^{\mathrm{op}}$. Le bimodule de Hopf sous-jacent est le symétrisé $(N^o, M, \beta, \alpha, \varsigma_N \circ \Gamma)$.

Remarque — Si N est abélien, $\alpha = \beta$, $\Gamma = \varsigma_N \circ \Gamma$ et $T_L = T_R$ alors le groupoïde quantique

$(N, M, \alpha, \alpha, \Gamma, T_L, T_L)$ est égal à son opposé : on dit alors qu'il s'agit d'un groupoïde quantique symétrique.

Remarque — R fournit une correspondance bijective entre les isomorphismes de bimodules de Hopf et les anti-isomorphismes de bimodules de Hopf. Ainsi un anti-isomorphisme d'un premier bimodule de Hopf vers un second est un isomorphisme du symétrisé du premier bimodule sur le second.

On note j le *-anti-isomorphisme canonique entre M et M' provenant de la théorie de Tomita, trivial sur le centre de M et donné par $j(x) = J_\Phi x^* J_\Phi$. On a alors $j \circ \alpha = \hat{\beta}$ et on note $j \circ \beta = \varrho$. On peut alors construire un opérateur unitaire $j \underset{N^o}{{}_\varrho\star_{\hat{\beta}}} j$ de $M' \underset{N^o}{{}_\varrho\star_{\hat{\beta}}} M'$ dans $M \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} M$ dont l'adjoint est $j \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} j$.

6.6.2 Définition — On appelle **groupoïde quantique commutant** l'image par j du bimodule de Hopf. On le note $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, T_L, T_R)^c$. Le bimodule de Hopf sous-jacent de cette structure est égal à $(N^o, M', \hat{\beta}, \varrho, (j \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} j) \circ \Gamma \circ j)$. On note $\Gamma^c = (j \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} j) \circ \Gamma \circ j$.

On décrit alors les objets fondamentaux des deux structures.

6.6.3 Proposition — *On a les relations suivantes :*

i) $W^{op} = \sigma_{\nu^o} W'^* \sigma_{\nu^o}$, $R^{op} = R$, $\tau_t^{op} = \tau_{-t}$, $\delta^{op} = \delta^{-1}$ *et* $\lambda^{op} = \lambda^{-1}$ *;*

ii) $W^c = (J_\Phi \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} J_\Phi) W (J_\Phi \underset{N^o}{{}_\varrho\otimes_{\hat{\beta}}} J_\Phi)$, $R^c = jRj$, $\tau_t^c = j\tau_{-t}j$, $\delta^c = j(\delta)$ *et* $\lambda^c = \lambda^{-1}$.

Démonstration : Ces égalités sont une conséquence des propositions 6.5.3 et 6.5.4 à l'exception de la relation entre W^{op} et W'. Pour tout $v \in D({}_\alpha H_\Psi, \nu)$, tout $a \in \mathcal{N}_{T_R} \cap \mathcal{N}_{\Psi_R}$ et toute (N, ν)-base $(\eta_i)_{i \in I}$ de ${}_\alpha H_\Psi$, on a :

$$\begin{aligned}
(W^{\mathrm{op}})^* \sigma_{\nu^o} (\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_{\hat{\alpha}}\otimes_\beta} v) &= (W^{\mathrm{op}})^* (v \underset{\nu^o}{{}_{\hat{\alpha}}\otimes_\beta} \Lambda_\Psi(a)) \\
&= \sum_{i \in I} \eta_i \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} \Lambda_\Psi((\omega_{v,\eta_i} \underset{\nu^o}{{}_\alpha\star_\beta} id)(\varsigma_N \circ \Gamma(a))) \\
&\quad \text{par définition de } W^{\mathrm{op}}, \\
&= \sigma_\nu \sum_{i \in I} \Lambda_\Psi((id \underset{\nu^o}{{}_\alpha\star_\beta} \omega_{v,\eta_i})\Gamma(a)) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \eta_i \\
&= \sigma_\nu W'(\Lambda_\Psi(a) \underset{\nu^o}{{}_{\hat{\alpha}}\otimes_\beta} v) \\
&\quad \text{par définition de } W'.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $W^{\mathrm{op}} = \sigma_{\nu^o} W'^* \sigma_{\nu^o}$. ■

6.6.4 Corollaire — *On a la relation* $W' = (\mathcal{J} \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} \mathcal{J}) \sigma_\nu W^* \sigma_\nu (\mathcal{J}^* \underset{\nu^o}{{}_{\hat{\alpha}}\otimes_\beta} \mathcal{J}^*)$.

Démonstration : C'est une conséquence de la proposition précédente et de la proposition 6.5.4. ■

Remarque — L'application $j \circ R$, implémentée par $J_\Phi \hat{J}$, donne un isomorphisme entre le groupoïde quantique initial et le groupoïde quantique opposé du groupoïde quantique commutant.

6.6.5 Proposition — *On a les égalités suivantes :*

i) $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)^{op\wedge} = (N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)^{\wedge c}$

ii) $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)^{c\wedge} = (N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)^{\wedge op}$

iii) $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)^{c\ op} = (N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)^{op\ c}$

Démonstration : Le groupoïde quantique dual du groupoïde quantique commutant et le groupoïde quantique commutant du groupoïde quantique dual ont la même base N^o. L'algèbre de von Neumann ambiante du premier est engendrée par les opérateurs $(\omega * id)(W^{\mathrm{op}})$ donc est égal à $\mathcal{J}\{(\omega * id)(W)\}''\mathcal{J}^*$ d'après la proposition précédente et son corollaire. Par suite, d'après la proposition 6.2.15, on a $M^{\mathrm{op}} = \hat{J}\{(\omega * id)(W)\}''\hat{J} = \hat{M}'$. La représentation et l'antireprésentation au-dessus de N^o des deux structures sont données par $\hat{\beta}$ et α. Enfin, pour tout $x \in \hat{M}'$, on a :

$$\Gamma^{\mathrm{op}\wedge}(x) = \sigma_\nu W^{\mathrm{op}}(x \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} 1)(W^{\mathrm{op}})^* \sigma_{\nu^o} = W'^*(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} x)W'$$

Le corollaire précédent permet de poursuivre par :

$$\Gamma^{\mathrm{op}\wedge}(x) = \sigma_\nu(\mathcal{J} \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} \mathcal{J})W(\mathcal{J}x\mathcal{J} \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)W^*(\mathcal{J} \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_{\hat{\alpha}}} \mathcal{J})\sigma_{\nu^o}$$

$$= (\mathcal{J} \underset{\nu}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_\alpha} \mathcal{J})\hat{\Gamma}(\mathcal{J}x\mathcal{J})(\mathcal{J} \underset{\nu^o}{{}_{\hat{\alpha}}\otimes_\beta} \mathcal{J}) = \hat{\Gamma}^{\mathrm{c}}(x)$$

car $\mathcal{J}$ et $\hat{J}$ implémentent sur M et $\hat{M}$ les mêmes anti-isomorphismes. i) est alors démontré. ii) découle de i) et du théorème de bidualité.

Le groupoïde quantique opposé du groupoïde quantique commutant et le groupoïde quantique commutant du groupoïde quantique opposé ont la même base N^o et la même algèbre de von Neumann ambiante M'. La représentation et l'antireprésentation des deux structures sont données par ϱ et $\hat{\beta}$. D'après [Vae01a], on a $J_\Psi = \lambda^{i/4} J_\Phi$. On obtient alors, pour tout $x \in M'$:

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mathrm{op}\ \mathrm{c}}(x) &= (J_\Psi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} J_\Psi)\varsigma_N \Gamma(J_\Psi x J_\Psi)(J_\Psi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} J_\Psi)\\ &= \varsigma_{N^o}(J_\Phi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} J_\Phi)\Gamma(J_\Phi x J_\Phi)(J_\Phi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} J_\Phi)\\ &\quad \text{car } \lambda^{i/4} \in Z(M) \cap \alpha(N) \cap \beta(N),\\ &= \Gamma^{\mathrm{c}\ \mathrm{op}}(x)\end{aligned}$$

iii) est alors démontré.

■

Chapitre 7

CAS PARTICULIERS ET EXEMPLES

7.1 Les groupoïdes.

On rappelle, avant tout, les définitions concernant les groupoïdes :

7.1.1 Définition — Un **groupoïde** G est une petite catégorie dans laquelle tout morphisme $\gamma : x \to y$ est un isomorphisme d'inverse γ^{-1}. Soit G^0 l'ensemble des objets de G qu'on identifie à $\{\gamma \in G | \gamma \circ \gamma = \gamma\}$. Pour tout $\gamma \in G$, $\gamma : x \to y$, on note $x = \gamma^{-1}\gamma = s(\gamma)$ qu'on appelle objet source et $y = \gamma\gamma^{-1} = r(\gamma)$ qu'on appelle objet but. Si G^2 désigne l'ensemble des couples (γ_1, γ_2) d'éléments de G tels que $s(\gamma_1) = r(\gamma_2)$, alors la composition des morphismes a un sens pour tout élément de G^2.

Dans [Ren80], J. Renault a défini la structure de groupoïde G localement compact muni d'un système de Haar $\{\lambda^u, u \in G^0\}$ et d'une mesure μ sur G^0 quasi-invariante, on s'y réfère pour les définitions et notations. On note $\nu = \mu \circ \lambda$. On renvoie à [Co79] et [ADR00] pour des discussions sur les mesures transverses.

À partir de ces données, si G est σ-compact, J.M Vallin, dans [Val96], a construit deux bimodules de Hopf co-involutifs sur la même base $N = L^\infty(G^0, \mu)$, prolongeant les travaux de T. Yamanouchi [Yam93]. Les algèbres de von Neumann sous-jacentes sont $L^\infty(G, \nu)$ opérant par multiplication sur $H = L^2(G, \nu)$ et $\mathcal{L}(G)$ générée par la représentation régulière gauche L de G.

On peut définir une représentation α (resp. antireprésentation β) de N dans $L^\infty(G, \nu)$ en posant, pour tout $f \in N$:

$$\alpha(f) = f \circ r \quad \text{et} \quad \beta(f) = f \circ s$$

Pour tous $i, j \in \{\alpha, \beta\}$, on définit une partie $G^2_{i,j}$ de $G \times G$ et une mesure $\nu^2_{i,j}$ telles que :

$$H \underset{N}{{}_i\otimes_j} H \text{ s'identifie à } L^2(G^2_{i,j}, \nu^2_{i,j})$$

Par exemple, $G^2_{\beta,\alpha}$ est égal à G^2 et $\nu^2_{\beta,\alpha}$ à ν^2.

Ainsi, on peut construire un unitaire W_G de $H \underset{\mu}{{}_\alpha\otimes_\alpha} H$ dans $H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H$, défini pour tout $\xi \in H \underset{\mu}{{}_\alpha\otimes_\alpha} H = L^2(G^2_{\alpha,\alpha}, \nu^2_{\alpha,\alpha})$ par :

$$W_G\xi(s,t) = \xi(s, st)$$

pour ν^2-presque tout (s,t) dans G^2.

Ceci amène à définir des coproduits Γ_G et $\widehat{\Gamma_G}$ par les formules :

$$\Gamma_G(f) = W_G(1 \underset{N}{{}_\alpha\otimes_\alpha} f)W_G^* \quad \text{et} \quad \widehat{\Gamma_G}(k) = W_G^*(k \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)W_G$$

pour tout $f \in L^\infty(G,\nu)$ et $k \in \mathcal{L}(G)$, ce qui explicitement donne :

$$\Gamma_G(f)(s,t) = f(st)$$

pour tout $f \in L^\infty(G,\nu)$ et ν^2-presque tout (s,t),

$$\widehat{\Gamma_G}(L(h))\xi(x,y) = \int_G h(s)\xi(s^{-1}x, s^{-1}y)d\lambda^{r(x)}(s)$$

pour tous $\xi \in L^2(G^2_{\alpha,\alpha}, \nu^2_{\alpha,\alpha})$, h continue à support compact dans G et $\nu^2_{\alpha,\alpha}$-presque tout (x,y).

De plus, on peut définir deux co-involutions j_G et $\widehat{j_G}$ par les formules :

$$j_G(f)(x) = f(x^{-1})$$

pour tout $f \in L^\infty(G,\nu)$ et ν-presque tout x,

$$\widehat{j_G}(g) = Jg^*J$$

pour tout $g \in \mathcal{L}(G)$ et où J est l'involution $J\xi = \overline{\xi}$ pour tout $\xi \in L^2(G)$.

Enfin, on définit deux poids opératoriels invariants à gauche P_G et $\widehat{P_G}$:

$$P_G(f)(y) = \int_G f(x)d\lambda^{r(y)}(x) \quad \text{et} \quad \widehat{P_G}(L(f)) = \alpha(f_{|G^0})$$

pour toute f continue à support compact dans G et ν-presque tout $y \in G$.

Théorème 20 — *Soit G groupoïde localement compact et σ-compact muni d'un système de Haar et d'une mesure μ quasi-invariante sur les unités. Alors :*

$(L^\infty(G^0,\mu), L^\infty(G,\nu), \alpha, \beta, \Gamma_G, \mu, P_G, j_G P_G j_G)$ *est un groupoïde quantique mesuré commutatif et*

$(L^\infty(G^0,\mu), \mathcal{L}(G), \alpha, \alpha, \widehat{\Gamma_G}, \mu, \widehat{P_G}, \widehat{j_G}\widehat{P_G}\widehat{j_G})$ *est un groupoïde quantique mesuré symétrique.*

Ces deux structures sont duales l'une de l'autre et l'unitaire $V_G = W_G^*$ coïncide avec l'unitaire fondamental de la structure commutative.

Démonstration : D'après [Val96] (théorèmes 3.2.7 et 3.3.7), $(L^\infty(G^0,\mu), L^\infty(G,\nu), \alpha, \beta, \Gamma_G)$ et $(L^\infty(G^0,\mu), \mathcal{L}(G), \alpha, \alpha, \widehat{\Gamma_G})$ sont des bimodules de Hopf co-involutifs munis de poids opératoriels invariants à gauche ; pour obtenir les poids opératoriels invariants à droite, il suffit de considérer $j_G P_G j_G$ et $\widehat{j_G}\widehat{P_G}\widehat{j_G}$.

Comme $L^\infty(G,\nu)$ est commutative, P_G est trivialement adapté pour μ ; et d'après le théorème 3.3.4 de [Val96], $\sigma_t^{\mu\circ\alpha^{-1}\circ\widehat{P_G}}$ laisse fixe point par point $\alpha(N)$ donc $\widehat{P_G}$ est adapté pour μ. De plus, on est évidemment dans le cas d'une base semifinie.

Enfin, pour tous e, f, g continues à support compact et ν^2-presque tout (s,t) dans G^2, on a :

$$\begin{aligned}
(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} JeJ)W_G(f \underset{\mu}{{}_\alpha\otimes_\alpha} g)(s,t) &= \overline{e(t)}f(s)g(st) \\
&\quad \text{par définition de } W_G, \\
&= \Gamma_G(g)(f \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \overline{e})(s,t) \\
&= (1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} JeJ)U_H(f \underset{\mu}{{}_\alpha\otimes_\alpha} g)(s,t) \\
&\quad \text{d'après la proposition 3.3.1}
\end{aligned}$$

d'où on déduit facilement que $U_H = W_G$. ■

Remarque — Dans la structure commutative, la fonction modulaire $\frac{d\nu^{-1}}{d\nu}$ coïncide avec le module du groupoïde par définition et l'opérateur d'échelle est trivial car les groupes modulaires sont triviaux.

On dispose d'un résultat analogue dans le cas des groupoïdes mesurés au sens de Hahn ([Hah78a] et [Hah78b]) :

Théorème 21 — *À partir de tout groupoïde mesuré G, on construit un groupoïde quantique mesuré commutatif $(L^\infty(G^0,\mu), L^\infty(G,\nu), \alpha, \beta, \Gamma_G, \mu, P_G, j_G P_G j_G)$ et un groupoïde quantique mesuré symétrique $(L^\infty(G^0,\mu), \mathcal{L}(G), \alpha, \alpha, \widehat{\Gamma_G}, \mu, \widehat{P_G}, \widehat{j_G}\widehat{P_G}\widehat{j_G})$ où les objets sont définis de manière analogue au cas localement compact. Ces deux structures sont duales l'une de l'autre et l'unitaire V_G coïncide avec l'unitaire fondamental de la structure commutative.*

Démonstration : Ces résultats se trouvent essentiellement dans [Yam93] pour le cas symétrique. Il suffit d'appliquer à ce cadre, les techniques de [Val96] pour le cas commutatif et les poids opératoriels de Haar. ■

Conjecture — Si $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \mu, T_L, T_R)$ est un groupoïde quantique mesuré tel que M est abélien, alors il existe G groupoïde localement compact tel que $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \mu, T_L, T_R)$ est isomorphe au groupoïde quantique mesuré $(L^\infty(G^0,\mu), L^\infty(G,\nu), \alpha, \beta, \Gamma_G, \mu, P_G, j_G P_G j_G)$.

7.2 Les groupoïdes quantiques finis.

7.2.1 Définition — (C*-algèbres de Hopf faibles [BSz96]) On appelle **C*-algèbre de Hopf faible** ou groupoïde quantique fini tout quadruplet $(M, \Gamma, \kappa, \varepsilon)$ où M est une C*-algèbre de dimension finie munie d'une comultiplication $\Gamma : M \to M \otimes M$, d'une co-unité ε forme linéaire positive et d'une antipode $\kappa : M \to M$ telle que, pour tous $x, y \in M$:

i) Γ est un *-homomorphisme (pas nécessairement unital) ;

ii) L'unité et la co-unité satisfont la relation suivante :

$$(\varepsilon \otimes \varepsilon)((x \otimes 1)\Gamma(1)(1 \otimes y)) = \varepsilon(xy)$$

iii) κ est un antihomomorphisme d'algèbre et de co-algèbre tel que :
- $(\kappa \circ *)^2 = \iota$;
- $(m(\kappa \otimes id) \otimes id)(\Gamma \otimes id)\Gamma(x) = (1 \otimes x)\Gamma(1)$.

où m désigne la multiplication.

On rappelle alors quelques résultats de [NV00], [NV02] et [BNS99]. Si $(M, \Gamma, \kappa, \varepsilon)$ est une C*-algèbre de Hopf faible. On appelle co-unité but (resp. source) l'application $\varepsilon_t = m(id \otimes \kappa)\Gamma$ (resp. $\varepsilon_s = m(\kappa \otimes id)\Gamma$). On a alors la relation $\kappa\varepsilon_t = \varepsilon_s\kappa$. Il existe une unique forme linéaire positive fidèle h, appelée la mesure de Haar normalisée de $(M,\Gamma,\kappa,\varepsilon)$, invariante par κ, telle que $(id\otimes h)(\Gamma(1))=1$ et, pour tous $x,y\in M$, on a :

$$(id\otimes h)((1\otimes y)\Gamma(x))=\kappa((i\otimes h)(\Gamma(y)(1\otimes x)))$$

De plus, l'application $E_h^s=(h\otimes id)\Gamma$ (resp. $E_h^t=(id\otimes h)\Gamma$) est l'espérance conditionnelle à valeurs dans la sous-algèbre de Cartan source $\varepsilon_s(M)$ (resp. but $\varepsilon_t(M)$) telle que $h\circ E_h^s=h$ (resp. $h\circ E_h^t=h$), et c'est un poids opératoriel de Haar source (resp. but). Les sous-algèbres de Cartan source et but commutent.

D'après [Val03] et [Nik02], on peut toujours se ramener au cas où $\kappa^2_{|\varepsilon_t(M)}=id$ grâce à une déformation. **Dans toute la suite, on supposera que cette condition est réalisée.**

Comme $h\circ\kappa=h$ et $\kappa\varepsilon_t=\varepsilon_s\kappa$, on a $h\circ\varepsilon_t=h\circ\varepsilon_s$.

Théorème 22 — *Soient $(M,\Gamma,\kappa,\varepsilon)$ une C^*-algèbre de Hopf faible, h sa mesure de Haar normalisée, E_h^s (resp. E_h^t) l'espérance conditionnelle source (resp. but) et $\varepsilon_t(M)$ sa sous-algèbre de Cartan but. On note $N=\varepsilon_t(M)$, $\alpha=id_{|N}$, $\beta=\kappa_{|N}$, $\tilde\Gamma$ le coproduit Γ qui est considéré à valeurs dans $M\ {}_\beta\!\underset{N}{\star}{}_\alpha\ M\simeq(M\otimes M)_{\Gamma(1)}$ et $\mu=h\circ\alpha=h\circ\beta$. Alors $(N,M,\alpha,\beta,\tilde\Gamma,\mu,E_h^t,E_h^s)$ est un groupoïde quantique mesuré.*

Démonstration : Par définition, α est une représentation de N dans M et, par hypothèse, comme $\kappa^2_{|\varepsilon_t(M)}=id$, β est une antireprésentation de N dans M. α et β commutent car les sous algèbres de Cartan commutent et $\kappa\varepsilon_t=\varepsilon_s\kappa$. Par définition, on a $\tilde\Gamma(1)=1\ {}_\beta\!\underset{N}{\otimes}{}_\alpha\ 1$. Pour tout $n\in N$, il existe $m\in M$ tel que $n=\varepsilon_t(m)$. Donc, on a :

$$\tilde\Gamma(\alpha(n))=\tilde\Gamma(\varepsilon_t(m))=\Gamma(1)(\varepsilon_t(m)\otimes 1)\Gamma(1)=\alpha(n)\ {}_\beta\!\underset{N}{\otimes}{}_\alpha\ 1$$

On vérifie de même que $\tilde\Gamma(\beta(n))=1\ {}_\beta\!\underset{N}{\otimes}{}_\alpha\ \beta(n)$ et $\tilde\Gamma$ est un coproduit. On en déduit que $(N,M,\alpha,\beta,\Gamma)$ est un bimodule de Hopf. Il suffit alors de vérifier que les espérances conditionnelles de Haar sont adaptées. Pour tout $n\in N$ et tout $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$\sigma_t^{E_h^t}(\beta(n))=\sigma_t^{h\circ E_h^t}(\beta(n))=\sigma_t^{h\circ E_h^s}(\beta(n))=\sigma_t^{h_{|\beta(N)}}(\beta(n))=\beta(\sigma_{-t}^{h_{|\beta(N)}\circ\beta}(n))=\beta(\sigma_{-t}^{\mu}(n))$$

donc E_h^t est β-adaptée pour μ. On montre, de même, que E_h^s est α-adaptée pour μ. On peut aussi constater que $E_h^s=\kappa\circ E_h^t\circ\kappa$ ce qui fournit aussi le résultat. ■

Théorème 23 — *Soit $(N,M,\alpha,\beta,\Gamma,\nu,T_L,T_R)$ un groupoïde quantique mesuré tel que M est de dimension finie. Alors il existe $\tilde\Gamma$, κ et ε tels que $(M,\tilde\Gamma,\kappa,\varepsilon)$ est une C^*-algèbre de Hopf faible.*

Démonstration : On identifie, via $I^\nu_{\beta,\alpha}$ (notation du paragraphe 2.4), $L^2(M)\ {}_\beta\!\underset{N}{\otimes}{}_\alpha\ L^2(M)$ et un sous-espace de $L^2(M)\otimes L^2(M)$. On définit $\tilde\Gamma(x)=I^\nu_{\beta,\alpha}\Gamma(x)(I^\nu_{\beta,\alpha})^*$. D'après [Val01] (définition 2.2.3), l'unitaire pseudo-multiplicatif fondamental s'identifie à une isométrie partielle multiplicative sur $L^2(M)\otimes L^2(M)$ de base $(N,\alpha,\hat\beta,\beta)$ par $I=I^\nu_{\alpha,\hat\beta}W(I^\nu_{\beta,\alpha})^*$. I est régulière au sens de [Val01] (définition 2.6.3) d'après la proposition 5.5.6. Par ailleurs, si $H=L^2(M)$, on a $Tr_H(R(x))=Tr_H(x)$ pour tout $x\in M$ car R est implémentée par un anti-unitaire. En particulier $Tr_H\circ\beta=Tr_H\circ\alpha=Tr_H\circ\hat\beta$. La proposition 3.1.3 de [Val01] permet de conclure. ■

Remarque — L'antipode κ et S sont liées par la relation :

$$\kappa(x) = \alpha(n_o^{1/2}d^{1/2})\beta(n_o^{-1/2}d^{-1/2})S(x)\alpha(n_o^{-1/2}d^{-1/2})\beta(n_o^{1/2}d^{1/2})$$

avec les notations du paragraphe 2.4.

7.3 Les groupes quantiques.

On peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 24 — *Les groupoïdes quantiques mesurés dont la base N est égale à $\mathbb{C}$ sont exactement les groupes quantiques localement compacts (dans le cadre des algèbres de von Neumann) introduits par J. Kustermans et S. Vaes dans [KV03]. La dualité obtenue dans ce travail généralise la dualité des groupes quantiques.*

Démonstration : Dans ce cas, la notion de produit tensoriel relatif se réduit au produit tensoriel usuel d'espaces de Hilbert, la notion de produit fibré au produit tensoriel d'algèbres de von Neumann et la notion de poids opératoriel au poids. La semifinitude de la base est une trivialité. ■

7.4 Le cas compact.

On rappelle ici les définitions de [Eno02] au sujet des unitaires pseudo-multiplicatifs de type compact (resp. discret) et on montre que ces objets correspondent exactement aux groupoïdes quantiques mesurés qui possèdent une espérance conditionnelle de Haar.

7.4.1 Définition — Soit W un unitaire pseudo-multiplicatif au-dessus de N pour $\alpha, \beta, \hat{\beta}$. Soit ν un poids normal, semifini et fidèle. Un vecteur ξ est dit **fixe** par W par rapport à ν si :

i) ξ appartient à $D(H_{\hat{\beta}}, \nu^o) \cap D({}_\alpha H, \nu)$;

ii) on a $W(\xi \ {}_{\hat{\beta}}\!\otimes_{\alpha}\!{}_{\nu} \ \eta) = \xi \ {}_{\alpha}\!\otimes_{\beta}\!{}_{\nu^o} \ \eta$ pour tout $\eta \in H$.

7.4.2 Définition — Soit W un unitaire pseudo-multiplicatif au-dessus de N pour $\alpha, \beta, \hat{\beta}$. Soit ν un poids normal, semifini et fidèle et soit ξ un vecteur fixe par W par rapport à ν. On dit que ξ est **normalisé** si :

$$< \xi, \xi >_{\hat{\beta},\nu^o} = < \xi, \xi >_{\alpha,\nu} = 1$$

7.4.3 Définition — Soit W un unitaire pseudo-multiplicatif au-dessus de N pour $\alpha, \beta, \hat{\beta}$. Soit ν un poids normal, semifini et fidèle et soit ξ un vecteur fixe et normalisé par W par rapport à ν. On dit que ξ est **binormalisé** si, de plus, $\xi \in D(H_\beta, \nu^o)$ et on a :

$$< \xi, \xi >_{\beta,\nu^o} = 1$$

7.4.4 Définition — Soit W un unitaire pseudo-multiplicatif au-dessus de N pour $\alpha, \beta, \hat{\beta}$. Soit ν un poids normal, semifini et fidèle. On dit que W est de **type compact** relativement à ν s'il admet un vecteur fixe et binormalisé. On dit que W est de **type discret** relativement à ν si $\hat{W}$ est de type compact.

Si W est de type compact relativement à ν et si ξ est un vecteur fixe et binormalisé associé, alors, on sait, d'après la proposition 5.11 de [Eno02], que ν est une forme normale, positive et fidèle qui est égale à $\omega_\xi \circ \alpha = \omega_\xi \circ \beta = \omega_\xi \circ \hat{\beta}$ sur N qu'on appelle **forme canonique**.

7.4.5 Proposition — *Soit $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ un bimodule de Hopf. On suppose que :*

i) il existe un espérance conditionnelle normale et fidèle de E dans $\alpha(N)$ invariante à gauche ;

ii) il existe un espérance conditionnelle normale et fidèle de F dans $\beta(N)$ invariante à droite ;

iii) il existe un état ν normal fidèle sur N tel que $\nu \circ \alpha^{-1} \circ E = \nu \circ \beta^{-1} \circ F$.

Alors $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, E, F)$ est un groupoïde quantique mesuré. De plus, si R, τ, λ et δ désignent les objets fondamentaux du groupoïde quantique mesuré, on a $F = R \circ E \circ R$ et $\lambda = \delta = 1$. Enfin, le vecteur $\Lambda_{\nu\circ\alpha^{-1}\circ E}(1)$ est cofixe et binormalisé et l'unitaire pseudo-multiplicatif fondamental W est faiblement régulier et de type discret au sens de ([Eno02], paragraphe 5).

Démonstration : Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in N$, on a :

$$\sigma_t^E(\beta(n)) = \sigma_t^{\nu\circ\alpha^{-1}\circ E}(\beta(n)) = \sigma_t^{\nu\circ\beta^{-1}\circ F}(\beta(n)) = \beta(\sigma_{-t}^\nu(n))$$

De même, on a :

$$\sigma_t^F(\alpha(n)) = \sigma_t^{\nu\circ\beta^{-1}\circ F}(\alpha(n)) = \sigma_t^{\nu\circ\alpha^{-1}\circ E}(\alpha(n)) = \alpha(\sigma_t^\nu(n))$$

par suite, $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, E, F)$ est un groupoïde quantique mesuré. R, τ, λ et δ désignent les objets fondamentaux de la structure. D'une part, on a par définition :

$$[D\nu \circ \alpha^{-1} \circ E \circ R : D\nu \circ \alpha^{-1} \circ E]_t = \lambda^{\frac{it^2}{2}}\delta^{it}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}[D\nu \circ \alpha^{-1} \circ E \circ R : D\nu \circ \alpha^{-1} \circ E]_t &= [DR \circ E \circ R : DF]_t && \text{car } \nu \circ \alpha^{-1} \circ E = \nu \circ \beta^{-1} \circ F,\\ &= \alpha(h^{it}) && \text{d'après le théorème d'unicité}\end{aligned}$$

où h est un élément strictement positif affilié au centre de N. On en déduit que $\lambda = 1$ et $\delta = \alpha(h)$. Par suite $\alpha(h^{-1}) = \delta^{-1} = R(\delta) = \beta(h)$. D'après le lemme 5.2 de [Eno00], on obtient $h = 1$.

On note $\Phi = \nu \circ \alpha^{-1} \circ E$. Si $(\xi_i)_{i\in I}$ est une (N^o, ν^o)-base de $(H_\Phi)_\beta$ alors, par définition, on a, pour tout $v \in D(H_\beta, \nu^o)$:

$$\begin{aligned} U_H(v \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat{\beta}} \Lambda_\Phi(1)) &= \sum_{i\in I} \xi_i \ {}_\beta\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha \Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i} \ {}_\beta\!\underset{\nu}{\star}_\alpha id)(\Gamma(1)))\\ &= \sum_{i\in I} \xi_i \ {}_\beta\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha \alpha(< v, \xi_i >_{\beta,\nu^o})\Lambda_\Phi(1)\\ &= v \ {}_\beta\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha \Lambda_\Phi(1)\end{aligned}$$

On a $\Lambda_\Phi(1) \in D((H_\Phi)_{\hat{\beta}}, \nu^o) \cap D({}_\alpha H_\Phi, \nu)$ vérifie $< \Lambda_\Phi(1), \Lambda_\Phi(1) >_{\hat{\beta},\nu^o} = < \Lambda_\Phi(1), \Lambda_\Phi(1) >_{\alpha,\nu} = 1$ donc, par continuité $U_H(v \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} \Lambda_\Phi(1)) = v \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \Lambda_\Phi(1)$ pour tout $v \in H$ i.e $\Lambda_\Phi(1)$ est co-fixe et normalisé pour l'unitaire fondamental.

Comme $\nu \circ \alpha^{-1} \circ E = \Phi = \nu \circ \beta^{-1} \circ F$, on a, d'après la proposition 3.2.2, pour tout $n \in \mathcal{N}_\nu$:

$$\beta(n^*)\Lambda_\Phi(1) = \beta(n^*)J_\Phi\Lambda_\Phi(1) = J_\Phi\Lambda_F(1)\Lambda_\nu(n)$$

donc $\Lambda_\Phi(1)$ est β-borné est $R^{\beta,\nu^o}(\Lambda_\Phi(1)) = J_\Phi\Lambda_F(1)J_\nu$. On en déduit que $\Lambda_\Phi(1)$ est binormalisé et W est de type discret. ■

7.4.6 Corollaire — *Soit W un unitaire pseudo-multiplicatif au-dessus de N pour $\alpha, \beta, \hat{\beta}$ de type compact relativement à la forme canonique ν et faiblement régulier. Si on note ξ un vecteur fixe et binormalisé associé, on désigne par :*

i) $\mathcal{A}$ l'algèbre de von Neumann engendrée par la jambe droite de W ;

ii) $\Gamma(x) = \sigma_{\nu^o}W(x \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} 1)W^*\sigma_\nu$ pour tout $x \in \mathcal{A}$;

iii) $E = (\omega_\xi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id) \circ \Gamma$ et $F = (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_\xi) \circ \Gamma$.

Alors $(N, \mathcal{A}, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, E, F)$ est un groupoïde quantique mesuré. De plus, si R, τ, λ et δ désignent les objets fondamentaux du groupoïde quantique mesuré, on a $F = R \circ E \circ R$, $\lambda = \delta = 1$ et l'unitaire fondamental associé est $\hat{W}$.

Démonstration : D'après ([EV00], 6.3), on sait que $(N, \mathcal{A}, \alpha, \beta, \Gamma)$ est un bimodule de Hopf. D'après le théorème 6.6 de [Eno02], E est une espérance conditionnelle normale et fidèle de $\mathcal{A}$ sur $\alpha(N)$ invariante à gauche. D'après les propositions 6.2 et 6.3 de [Eno02], F est une espérance conditionnelle normale et fidèle de $\mathcal{A}$ sur $\beta(N)$ invariante à droite. De plus, on a clairement l'égalité $\omega_\xi \circ E = \omega_\xi \circ F$ et donc $\nu \circ \alpha^{-1} \circ E = \nu \circ \beta^{-1} \circ F$. On est alors dans les conditions de la proposition précédente et on obtient que $(N, \mathcal{A}, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, E, F)$ est un groupoïde quantique mesuré, $F = R \circ E \circ R$ et $\lambda = \delta = 1$.

Enfin, d'après le corollaire 7.7 de [Eno02], $\hat{W}$ est l'unitaire fondamental associé à cette structure. (En fait, plus précisément, il s'agit de $\sigma_{\nu^o}W_s^*\sigma_\nu$ où W_s désigne la forme standard de W au sens du paragraphe 7 de [Eno02]). ■

La proposition précédente permet aussi d'établir une réciproque au corollaire précédent et ainsi de caractériser le cas compact.

7.4.7 Corollaire — *Soit $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ un bimodule de Hopf. On suppose que :*

i) il existe une coinvolution R ;

ii) il existe un espérance conditionnelle normale et fidèle de E dans $\alpha(N)$ invariante à gauche.

Alors il existe un état ν normal et fidèle sur N tel que $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, E, R \circ E \circ R)$ est un groupoïde quantique mesuré dont l'opérateur d'échelle et le module sont égaux à 1 et dont l'unitaire fondamental est de type discret relativement à ν.

Démonstration : On pose $F = R \circ E \circ R$ qui est une espérance conditionnelle de M sur $\beta(N)$ normale, fidèle et invariante à droite. On pose $\tilde{E} = E_{|\beta(N)} : \beta(N) \to \alpha(Z(N))$ et

$\tilde{F} = F_{|\alpha(N)} : \alpha(N) \to \beta(Z(N))$. On a, pour tout $x \in M$:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}E(x) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1 &= (F \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id)(E(x) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1)\\
&= (F \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id)(id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} E)\Gamma(x)\\
&\qquad \text{d'après l'invariance à gauche de } E,\\
&= (id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} E)(F \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma(x)\\
&= (id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} E)(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} F(x))\\
&\qquad \text{d'après l'invariance à droite de } F,\\
&= 1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \tilde{E}F(x)
\end{aligned}$$

donc, si $\tilde{F}E(x) = \beta(n)$ pour un certain $n \in Z(N)$, alors on a $\tilde{E}F(x) = \alpha(n)$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{E}F(x) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1 = EF(x) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1 &= (id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} E)\Gamma(F(x))\\
&= (id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} E)(1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} F(x))\\
&\qquad \text{d'après l'invariance à droite de } F,\\
&= 1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \tilde{E}F(x)
\end{aligned}$$

d'où on tire $\alpha(n) = \beta(n)$. Donc $\tilde{E}F(x) = \tilde{F}E(x)$ et $EF = FE$ est une espérance conditionnelle normale et fidèle de M sur $\tilde{N} = \alpha(\{n \in Z(N), \alpha(n) = \beta(n)\}) = \beta(\{n \in Z(N), \alpha(n) = \beta(n)\})$. On a alors $R_{|\tilde{N}} = id$.

Soit ω un état fidèle normal et fidèle sur $\tilde{N}$. Comme $R_{|\tilde{N}} = id$, on a $\omega \circ \tilde{E} \circ \beta = \omega \circ \tilde{F} \circ \alpha$ et $\nu = \omega \circ \tilde{E} \circ \beta = \omega \circ \tilde{F} \circ \alpha$ vérifie les hypothèses de la proposition 7.4.5 et le corollaire en découle. ■

7.4.8 Corollaire — *Soit* $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ *un groupoïde quantique mesuré, tel que* T_L *soit une espérance conditionnelle. Alors, il existe un état* ν' *normal et fidèle sur* N *tel que* $\sigma^{\nu'} = \sigma^{\nu}$ *et l'unitaire fondamental est de type discret relativement à* ν'.

Démonstration : Le groupoïde quantique mesuré admet une coinvolution R. On est alors dans les conditions du corollaire précédent donc il existe un état normal et fidèle ν' tel que $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu', T_L, R \circ T_L \circ R)$ est un groupoïde quantique mesuré. Comme T_L est β-adapté par rapport à ν et ν', on en déduit que $\sigma^{\nu'} = \sigma^{\nu}$. On vérifie alors aisément que l'unitaire fondamental associé au groupoïde quantique initial coïncide avec l'unitaire fondamental de cette dernière structure, qui est de type discret par rapport à ν' d'après le corollaire précédent. ■

Remarque — Dans les conditions précédentes, l'hypothèse supplémentaire du chapitre 6 est aisément vérifiée.

7.5 Les inclusions de profondeur 2.

Soit $M_0 \subseteq M_1$ une inclusion d'algèbres de von Neumann. On appelle construction de base les inclusions suivantes :

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2$$

où

$$M_2 = J_1 M_0' J_1 = End_{M_0^o}(L^2(M_1)).$$

Par ce procédé, on construit alors une tour de Jones :

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq ...$$

7.5.1 DÉFINITION — Si $M_0' \cap M_1 \subseteq M_0' \cap M_2 \subseteq M_0' \cap M_3$ est une construction de base, alors l'**inclusion** est dite **de profondeur 2**.

Soit T_1 un poids opératoriel normal, semifini et fidèle de M_1 vers M_0. En utilisant la construction de Haagerup ([Str81], 12.11), il est possible ([EN96], 10.1) de définir un poids opératoriel canonique T_2 normal, semifini et fidèle de M_2 vers M_1 tel que, pour tous $x, y \in \mathcal{N}_{T_1}$, on a :

$$T_2(\Lambda_{T_1}(x)\Lambda_{T_1}(y)^*) = xy^*$$

Si $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ désigne la tour de Jones construite à partir de l'inclusion $M_0 \subset M_1$, alors il est possible de définir, pour tout $i \geq 1$, un poids opératoriel T_i normal, semifini et fidèle de M_i vers M_{i-1} en itérant le processus précédent. Si ψ_0 est un poids normal, semifini et fidèle sur M_0, on définit par récurrence un poids ψ_i normal, semifini et fidèle sur M_i tel que $\psi_i = \psi_{i-1} \circ T_i$.

7.5.2 DÉFINITION — Suivant [EN96] 11.12 et [EV00] 3.6, dans les conditions précédentes, T_1 est dit régulier si les restrictions de T_2 à $M_0' \cap M_2$ et de T_3 à $M_1' \cap M_3$ sont semifinies.

7.5.3 PROPOSITION — *([EV00] 3.2, 3.8, 3.10) Si $M_0 \subset M_1$ est une inclusion munie d'un poids opératoriel T_1 de M_1 vers M_0 normal, semifini, fidèle et régulier, alors il existe une *-représentation naturelle π de $M_0' \cap M_3$ sur $L^2(M_0' \cap M_2)$. De plus, l'inclusion est de profondeur 2 si, et seulement si π est fidèle.*

7.5.4 PROPOSITION — *([Eno00], propositions 4.4 et 4.6) Soit $M_0 \subset M_1$ est une inclusion munie d'un poids opératoriel T_1 de M_1 vers M_0 normal, semifini, fidèle et régulier. On suppose, de plus, qu'il existe un poids normal, semifini et fidèle χ sur $M_0' \cap M_1$ tel que $\sigma_t^{\chi} = \sigma_t^{T_1}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On note χ_2 le poids sur $M_0' \cap M_2$ normal, semifini et fidèle $\chi \circ \tilde{T}_2$ où $\tilde{T}_2$ désigne le poids opératoriel de $M_0' \cap M_2$ vers $M_0' \cap M_1$ normal, semifini, fidèle et restriction de T_2. Alors, il existe h strictement positif sur $L^2(M_0' \cap M_2)$ tel que, pour tout $x \in M_0' \cap M_3$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $h^{it}\pi(x)h^{-it} = \pi(\sigma_t^{\psi_3}(x))$. De plus, $h^{-1}\Delta_{\chi_2}$ est affilié à $\pi((M_0' \cap M_3) \cap (M_0' \cap M_1)' \cap (M_1' \cap M_3)')$.*

7.5.5 LEMME — *Dans les conditions de la propositions précédentes, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in M_1' \cap M_2$:*

$$\sigma_t^{\tilde{T}_2}(x) = \sigma_t^{T_2}(x)$$

Démonstration : L'inclusion $M_0' \cap M_1 \subseteq M_0' \cap M_2 \subseteq M_0' \cap M_3$ est une construction de base d'après l'hypothèse de profondeur 2. Or, l'inclusion $M_0' \cap M_1 \subseteq M_0' \cap M_2$ est munie d'un poids opératoriel $\tilde{T}_2 = S_1$ normal, semifini et fidèle et d'un poids χ normal, semifini et fidèle sur $M_0' \cap M_1$. Ainsi, par la construction canonique, on obtient un poids opératoriel S_2 normal, semifini et fidèle de $M_0' \cap M_3$ vers $M_0' \cap M_2$. On note $\chi_2 = \chi \circ \tilde{T}_2 = \chi \circ S_1$ et $\chi_3 = \chi \circ S_1 \circ S_2$.

Pour tout $x \in M_1' \cap M_3$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\pi(\sigma_t^{\psi_3}(x)) &= h^{it}\pi(x)h^{-it} && \text{d'après la proposition précédente et car } x \in M_0' \cap M_3,\\
&= \Delta_{\chi_2}^{it}\pi(x)\Delta_{\chi_2}^{-it} && \text{d'après la proposition précédente et car } x \in M_1' \cap M_3,\\
&= \pi(\sigma_t^{\chi_3}(x)) && \text{car } \Delta_{\chi_2} \text{ implémente } \sigma^{\chi_3} \text{ d'après [EN96] 10.3,}
\end{aligned}$$

donc σ^{ψ_3} et σ^{χ_3} coïncident sur $M_1' \cap M_3$ d'où on tire, pour tout $x \in M_1' \cap M_2$ et tout $t \in \mathbb{R}$, que :

$$\begin{aligned}
\sigma_t^{T_2}(x) &= \sigma_t^{\psi_2}(x) && \text{par définition de } \sigma^{T_2} \text{ et car } x \in M_1' \cap M_2,\\
&= \sigma_t^{\psi_3}(x) && \text{car } T_3 \text{ est un poids opératoriel de } M_1 \text{ vers } M_2,\\
&= \sigma_t^{\chi_3}(x) && \text{d'après ce qui précède et car } x \in M_1' \cap M_3,\\
&= \sigma_t^{\chi_2}(x) && \text{car } S_2 \text{ est un poids opératoriel de } M_0' \cap M_3 \text{ vers } M_0' \cap M_2,\\
&= \sigma_t^{\tilde{T}_2}(x) && \text{par définition de } \sigma^{\tilde{T}_2} \text{ et car } x \in M_1' \cap M_2
\end{aligned}$$

■

Remarque — Malheureusement, la condition de la proposition précédente ne passe pas à l'inclusion $M_1' \cap M_2$ en général et par conséquent un certain nombre de résultats de [Eno00] doivent être revus. Néanmoins, si M_0 et M_1 sont semifinies, le groupe modulaire σ^{T_1} est intérieur. Si, de plus, $M_0' \cap M_1$ est semifinie, c'est donc le groupe modulaire d'un poids χ normal, semifini et fidèle sur $M_0' \cap M_1$. Avec ces hypothèses, tout poids opératoriel vérifie la condition de la proposition précédente i.e est « adapté » au sens de [Eno00]. Or, il est facile de vérifier que M_1, M_2 et $M_1' \cap M_2$ sont aussi semifinies et donc le poids opératoriel T_2 vérifie les hypothèses précédentes.

Théorème 25 — *Soit $M_0 \subseteq M_1$ une inclusion d'algèbres de von Neumann de profondeur 2 munie d'un poids opératoriel T_1 normal, semifini et fidèle de M_1 vers M_0 tel que :*

i) $T_{2|M_0' \cap M_2}$ et $T_{3|M_1' \cap M_3}$ sont semifinis ;

ii) M_0, M_1 et $M_0' \cap M_1$ sont semifinies.

Alors il existe Γ_1 tel que $(M_0' \cap M_1, M_0' \cap M_2, id, j_1, \Gamma_1)$ est un bimodule de Hopf muni d'un poids opératoriel $T_{2|M_0' \cap M_2}$ invariant à gauche et j_1-anti-adapté et d'une coinvolution j_1 où j_1 est l'anti-isomorphisme canonique de M_1 dans M_1' qui à x associe $J_1 x^* J_1$ avec J_1 donné par la théorie de Tomita sur $L^2(M_1)$. Il existe aussi Γ_2 tel que $(M_0' \cap M_1, M_1' \cap M_3, j_1 \circ j_2, j_1, \Gamma_2)$ est un bimodule de Hopf muni d'un poids opératoriel $T_{3|M_1' \cap M_3}$ invariant à droite et $j_2 \circ j_1$-adapté et d'une coinvolution j_2 où j_2 est l'anti-isomorphisme canonique de M_2 dans M_2' qui à x associe $J_2 x^* J_2$ avec J_1 donné par la théorie de Tomita sur $L^2(M_2)$. On obtient ainsi une structure de groupoïde quantique mesuré sur $M_1' \cap M_3$.

Démonstration : Il s'agit du théorème 8.2 de [Eno00]. D'après la remarque précédente, il existe un poids normal, semifini et fidèle χ sur $M_0' \cap M_1$ tel que $\sigma_t^{\chi} = \sigma_t^{T_1}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il reste à vérifier le caractère adapté de $\tilde{T_2}$ et $\tilde{T_3}$. Pour tout $x \in M_0' \cap M_1$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sigma_t^{\tilde{T_2}}(j_1(x)) &= \sigma_t^{T_2}(j_1(x)) && \text{d'après le lemme précédent et car } j_1(x) \in M_1' \cap M_2,\\
&= \sigma_t^{\psi_2}(j_1(x)) && \text{par définition de } \sigma^{T_2},\\
&= \Delta_1^{it} J_1 x^* J_1 \Delta_1^{-it} && \text{d'après [EN96] 10.3},\\
&= J_1 \Delta_1^{it} x^* \Delta_1^{-it} J_1 &&\\
&= j_1(\sigma_t^{\psi_1}(x)) = j_1(\sigma_t^{T_1}(x)) && \text{car } x \in M_0' \cap M_1,\\
&= j_1(\sigma_t^{\chi}(x)) && \text{par hypothèse}
\end{aligned}$$

Il y a sur ce point une erreur dans [Eno00] 4.1. Ainsi $\tilde{T_2}$ est anti-adapté par rapport à χ et comme $M_0' \cap M_1$ est semifinie, il est donc adapté par rapport à un autre poids. Pour obtenir la fin du théorème, il suffit d'appliquer ce qui précède à l'inclusion $M_1 \subset M_2$. ■

Remarque — On obtient ainsi un certain nombre d'exemples issus de la théorie des sous-facteurs.

7.6 Le groupoïde quantique espace quantique.

7.6.a Le bimodule de Hopf dual-espace quantique

Soit M une algèbre de von Neumann. M agit sur $H = L^2(M) = L^2_\nu(M)$ où ν est poids normal, semifini et fidèle sur M. On note M' le commutant dans $\mathcal{L}(L^2(M))$ de M. On note $Z(M)$ le centre de M et $Z(M)'$ le commutant dans $\mathcal{L}(L^2_\nu(M))$ du centre de M. Soit tr une trace normale, semifinie et fidèle sur $Z(M)$. L'algèbre $M' \underset{Z(M)}{\star} M = M' \underset{Z(M)}{\otimes} M$ agit sur $L^2(M) \underset{tr}{\otimes} L^2(M)$. Il existe un poids opératoriel normal, semifini et fidèle T de M vers $Z(M)$ tel que $\nu = tr \circ T$.

On dispose d'une représentation normale et non dégénérée de M dans $M' \underset{Z(M)}{\otimes} M$ définie par :

$$\begin{aligned}
\alpha : M &\rightarrow M' \underset{Z(M)}{\otimes} M\\
x &\mapsto 1 \underset{Z(M)}{\otimes} x
\end{aligned}$$

On dispose aussi d'une antireprésentation normale et non dégénérée de M dans $M' \underset{Z(M)}{\otimes} M$ définie par :

$$\begin{aligned}
\beta : M &\rightarrow M' \underset{Z(M)}{\otimes} M\\
x &\mapsto j(x) \underset{Z(M)}{\otimes} 1
\end{aligned}$$

où $j(x) = J_\nu x^* J_\nu$ pour tout $x \in \mathcal{L}(L^2_\nu(M))$.

7.6.1 Proposition — *La formule suivante :*

$$\begin{aligned}
I : [L^2(M) \underset{tr}{\otimes} L^2(M)] \ {}_\beta\underset{\nu}{\otimes}_\alpha [L^2(M) \underset{tr}{\otimes} L^2(M)] &\rightarrow L^2(M) \underset{tr}{\otimes} L^2(M) \underset{tr}{\otimes} L^2(M)\\
[\Lambda_\nu(y) \underset{tr}{\otimes} \eta] \ {}_\beta\underset{\nu}{\otimes}_\alpha \Xi &\mapsto \alpha(y)\Xi \underset{tr}{\otimes} \eta
\end{aligned}$$

pour tous $\eta \in L^2(M), \Xi \in L^2(M) \underset{tr}{\otimes} L^2(M)$ *et* $y \in M$, *définit un isomorphisme canonique.*

7.6.2 PROPOSITION — *On a* $I([m \underset{Z(M)}{\otimes} z] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} Z) = (\alpha(M)Z \underset{Z(M)}{\otimes} z)I$, *pour tous* $m \in M$, $z \in Z(M)'$ *et* $Z \in \mathcal{L}(L^2(M)) \underset{Z(M)}{\star} M'$.

DÉMONSTRATION : Vérifications immédiates. ■

On peut alors identifier $(M' \underset{Z(M)}{\otimes} M) \underset{M}{{}_\beta\star_\alpha} (M' \underset{Z(M)}{\otimes} M)$ avec $M' \underset{Z(M)}{\otimes} Z(M) \underset{Z(M)}{\otimes} M$ et donc avec $M' \underset{Z(M)}{\otimes} M$.

On définit un homomorphisme involutif et normal Γ par :

$$\begin{aligned} \Gamma : M' \underset{Z(M)}{\otimes} M &\to (M' \underset{Z(M)}{\otimes} M) \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} (M' \underset{Z(M)}{\otimes} M) \\ n \underset{Z(M)}{\otimes} m &\mapsto I^*(n \underset{Z(M)}{\otimes} 1 \underset{Z(M)}{\otimes} m)I = [1 \underset{Z(M)}{\otimes} m] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [n \underset{Z(M)}{\otimes} 1] \end{aligned}$$

Γ désigne, en fait, l'identité à travers l'isomorphisme décrit précédemment.

7.6.3 PROPOSITION — *Le quintuplet* $(M, M' \underset{Z(M)}{\otimes} M, \alpha, \beta, \Gamma)$ *est un bimodule de Hopf qu'on appelle bimodule de Hopf dual-espace.*

DÉMONSTRATION : D'après la proposition précédente, on a, d'une part :

$$\Gamma(\alpha(m)) = \alpha(m) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [1 \underset{Z(M)}{\otimes} 1] \quad \text{pour tout } m \in M$$

et, d'autre part :

$$\Gamma(\beta(m)) = [1 \underset{Z(M)}{\otimes} 1] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \beta(m) \quad \text{pour tout } m \in M$$

Enfin, pour tout $m \in M$ et tout $n \in M'$, on a :

$$\begin{aligned} (\Gamma \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma(n \underset{Z(M)}{\otimes} m) &= (\Gamma \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)([1 \underset{Z(M)}{\otimes} m] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [n \underset{Z(M)}{\otimes} 1]) \\ &= \Gamma(1 \underset{Z(M)}{\otimes} m) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [n \underset{Z(M)}{\otimes} 1] \\ &= [1 \underset{Z(M)}{\otimes} m] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [1 \underset{Z(M)}{\otimes} 1] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [n \underset{Z(M)}{\otimes} 1] \\ &= [1 \underset{Z(M)}{\otimes} m] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \Gamma(n \underset{Z(M)}{\otimes} 1) \\ (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma)\Gamma(n \underset{Z(M)}{\otimes} m) &= (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma)([1 \underset{Z(M)}{\otimes} m] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [n \underset{Z(M)}{\otimes} 1]) \end{aligned}$$

i.e Γ est un coproduit. ■

L'application $R = \varsigma_{Z(M)} \circ (j \underset{Z(M)}{\otimes} j)$, où $\varsigma_{Z(M)} : M' \underset{Z(M)}{\otimes} M \to M \underset{Z(M)}{\otimes} M'$ désigne la volte, est une co-involution du bimodule de Hopf dual-espace.

THÉORÈME 26 — *Le bimodule de Hopf dual-espace muni du poids opératoriel normal, semifini et* *fidèle* $id \underset{Z(M)}{\star} T$ *et de la coinvolution* $R = \varsigma_{Z(M)} \circ (j \underset{Z(M)}{\otimes} j)$ *est un groupoïde quantique mesuré par rapport au poids quasi-invariant* ν *qu'on appelle groupoïde quantique dual-espace.*

Démonstration : Il suffit de vérifier que $T_R = id \underset{Z(M)}{\star} T$ est invariant à droite et α-adapté par rapport à ν. Soient $m \in M, n \in M'$ et $\xi \in D({}_\alpha(L^2(M) \underset{tr}{\otimes} L^2(M)), \nu^o)$. On a :

$$
\begin{aligned}
\omega_\xi((\nu \circ \beta^{-1} \circ T_R \; {}_\beta\!\underset{\nu}{\star}_\alpha \; id)\Gamma(n \underset{Z(M)}{\otimes} m)) &= \omega_\xi((\nu \circ \beta^{-1} \circ T_R \; {}_\beta\!\underset{\nu}{\star}_\alpha \; id)([1 \underset{Z(M)}{\otimes} m] \; {}_\beta\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha \; [n \underset{Z(M)}{\otimes} 1])) \\
&\quad \text{par définition de } \Gamma, \\
&= \nu \circ \beta^{-1} \circ T_R((id \; {}_\beta\!\underset{\nu}{\star}_\alpha \; \omega_\xi)([1 \underset{Z(M)}{\otimes} m] \; {}_\beta\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha \; [n \underset{Z(M)}{\otimes} 1])) \\
&= \nu \circ \beta^{-1} \circ T_R([1 \underset{Z(M)}{\otimes} m]\beta(< [n \underset{Z(M)}{\otimes} 1]\xi, \xi >_{\alpha,\nu})) \\
&= \nu \circ \beta^{-1} \circ T_R(j(< [n \underset{Z(M)}{\otimes} 1]\xi, \xi >_{\alpha,\nu}) \underset{Z(M)}{\otimes} m) \\
&= \nu(< [n \underset{Z(M)}{\otimes} 1]\xi, \xi >_{\alpha,\nu} T(m)) \\
&\quad \text{par définition de } T_R, \\
&= \nu(< [n \underset{Z(M)}{\otimes} T(m)]\xi, \xi >_{\alpha,\nu}) \\
&= \omega_\xi(n \underset{Z(M)}{\otimes} T(m)) = \omega_\xi(T_R(n \underset{Z(M)}{\otimes} m))
\end{aligned}
$$

ce qui suffit pour prouver l'invariance à droite de T_R. On vérifie alors que T_R est α-adapté par rapport à ν. En effet, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
\sigma_t^{T_R} &= \sigma_t^{\nu' \underset{Z(M)}{\star} \nu}{}_{|(M' \underset{Z(M)}{\otimes} M) \cap \beta(M)'} = \sigma_t^{\nu' \underset{Z(M)}{\star} \nu}{}_{|(M' \underset{Z(M)}{\otimes} M) \cap (M \underset{Z(M)}{\star} \mathcal{L}(L^2(M)))} \\
&= \sigma_t^{\nu' \underset{Z(M)}{\star} \nu}{}_{|Z(M) \underset{Z(M)}{\otimes} M} = (id \underset{Z(M)}{\otimes} \sigma_t^\nu)_{|1 \underset{Z(M)}{\otimes} M} = 1 \underset{Z(M)}{\otimes} \sigma_t^\nu
\end{aligned}
$$

On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in M$, on a :

$$\sigma_t^{T_R} \circ \alpha(x) = 1 \underset{Z(M)}{\otimes} \sigma_t^\nu(x) = \alpha(\sigma_t^\nu(x))$$

$\blacksquare$

Remarque — On vérifie que $\Lambda_\Phi(\mathcal{T}_{\nu,T}) \underset{tr}{\otimes} J_\nu \Lambda_\nu(\mathcal{N}_\nu \cap \mathcal{N}_T)$ est dense dans $D((H \underset{tr}{\otimes} H)_\beta, \nu^o)$. On est donc dans les conditions d'existence du dual.

On va calculer l'unitaire pseudo-multiplicatif associé à la structure à l'aide de la proposition 3.3.1. Tout d'abord, on remarque que $\Phi = \nu' \underset{Z(M)}{\star} \nu = \Psi$ dont on déduit que la structure est unimodulaire i.e $\lambda = \delta = 1$ et aussi que :

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 1 \underset{Z(M)}{\otimes} id & \hat{\alpha} &= id \underset{Z(M)}{\otimes} 1 \\
\beta &= j \underset{Z(M)}{\otimes} 1 & \hat{\beta} &= 1 \underset{Z(M)}{\otimes} j
\end{aligned}
$$

On a alors, par exemple, $D((H \underset{tr}{\otimes} H)_{\hat{\beta},\nu^o}) \supset H \underset{tr}{\otimes} D(H_j, \nu^o) = H \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(\mathcal{N}_\nu)$ et pour tous $\eta \in H$ et $y \in \mathcal{N}_\nu$, on a $R^{\hat{\beta},\nu^o}(\eta \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(y)) = \lambda_\eta^{tr} R^{j,\nu^o}(\Lambda_\nu(y)) = \lambda_\eta^{tr} y$.

On dispose de relations de démonstrations immédiates qu'on donne sous la forme du lemme suivant :

7.6.4 Lemme — *On a* $I\rho^{\beta,\alpha}_{\eta \underset{tr}{\otimes} J_\nu \Lambda_\nu(e)} = \lambda_\eta^{tr} J_\nu e J_\nu \underset{Z(M)}{\otimes} 1$ *et* $I\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\nu(y) \otimes \eta} = \rho_\eta^{tr}(1 \underset{Z(M)}{\otimes} y)$ *pour tous* $\eta \in H$ *et* $e \in \mathcal{N}_\nu$.

7.6.5 Proposition — W^* *est déterminé par la formule suivante :*

$$W^*(\Xi \underset{\nu^o}{{}_\alpha \otimes_{\hat{\beta}}} (\eta \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(m))) = I^*(\eta \underset{tr}{\otimes} (1 \underset{Z(M)}{\otimes} m)\Xi)$$

pour tous $\Xi \in H \underset{tr}{\otimes} H, \eta \in H$ *et* $m \in \mathcal{N}_\nu$.

Démonstration : On va utiliser la proposition 3.3.1. Soient $m, e \in \mathcal{N}_\nu$ et $m', e' \in \mathcal{N}_{\nu'}$. On calcule alors d'une part :

$$\begin{aligned}
I\Gamma(m' \underset{Z(M)}{\otimes} m)\rho^{\beta,\alpha}_{J_{\nu'}\Lambda_{\nu'}(e') \underset{tr}{\otimes} J_\nu \Lambda_\nu(e)} &= (m' \underset{Z(M)}{\otimes} 1 \underset{Z(M)}{\otimes} m) I\rho^{\beta,\alpha}_{J_{\nu'}\Lambda_{\nu'}(e') \underset{tr}{\otimes} J_\nu \Lambda_\nu(e)} && \text{par définition de } \Gamma, \\
&= (m' \otimes 1 \otimes m)\lambda_{J_{\nu'}\Lambda_{\nu'}(e')} J_\nu e J_\nu \underset{Z(M)}{\otimes} 1 && \text{d'après le lemme 7.7.4}, \\
&= \lambda^{tr}_{J_{\nu'}e'J_{\nu'}\Lambda_{\nu'}(m')} J_\nu e J_\nu \underset{Z(M)}{\otimes} m
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
& I([1 \underset{Z(M)}{\otimes} 1] \underset{\nu}{{}_\beta \otimes_\alpha} [J_{\nu'} e' J_{\nu'} \underset{Z(M)}{\otimes} J_\nu e J_\nu]) W^* \rho^{\alpha,\hat{\beta}}_{\Lambda_{\nu'}(m') \underset{tr}{\otimes} \Lambda_{\nu'}(m')} \\
&= (J_{\nu'} e' J_{\nu'} \underset{Z(M)}{\otimes} J_\nu e J_\nu \underset{Z(M)}{\otimes} 1) I W^* \rho^{\alpha,\hat{\beta}}_{\Lambda_{\nu'}(m') \underset{tr}{\otimes} \Lambda_{\nu'}(m')} \qquad \text{d'après la proposition 7.6.2}
\end{aligned}$$

En utilisant la proposition 3.3.1 et en faisant tendre e et e' vers 1, on obtient pour tout $\Xi \in H \underset{tr}{\otimes} H$:

$$W^*(\Xi \underset{\nu^o}{{}_\alpha \otimes_{\hat{\beta}}} (\Lambda_{\nu'}(m') \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(m))) = I^*(\Lambda_{\nu'}(m') \underset{tr}{\otimes} (1 \underset{Z(M)}{\otimes} m)\Xi)$$

Maintenant, si on fixe $\Xi \in D({}_\alpha(H \underset{tr}{\otimes} H), \nu)$, on peut par continuité faire tendre $\Lambda_{\nu'}(m')$ vers $\eta \in H$. On obtient alors pour tout $\Xi \in D({}_\alpha(H \underset{tr}{\otimes} H), \nu)$:

$$W^*(\Xi \underset{\nu^o}{{}_\alpha \otimes_{\hat{\beta}}} (\eta \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(m))) = I^*(\eta \underset{tr}{\otimes} (1 \underset{Z(M)}{\otimes} m)\Xi)$$

Or $\eta \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(m) \in D((H \underset{tr}{\otimes} H)_{\hat{\beta},\nu^o})$, donc par continuité la relation reste vérifiée pour tout $\Xi \in H \underset{tr}{\otimes} H$. ■

Remarque — Si σ_{tr} désigne la volte de $L^2(M) \underset{tr}{\otimes} L^2(M)$, alors on constate que $\sigma_{tr} \circ \hat{\beta} = \beta \circ \sigma_{tr}$. Alors, si on note $I' = (1 \underset{Z(M)}{\otimes} \sigma_{tr}) I (\sigma_{tr} \underset{\nu}{{}_{\hat{\beta}} \otimes_\alpha} [1 \underset{Z(M)}{\otimes} 1]) \sigma_{\nu^o}$, I' est l'identification :

$$I' : [L^2(M) \underset{tr}{\otimes} L^2(M)] \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat{\beta}} [L^2(M) \underset{tr}{\otimes} L^2(M)] \rightarrow L^2(M) \underset{tr}{\otimes} L^2(M) \underset{tr}{\otimes} L^2(M)$$
$$\Xi \ {}_\beta\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha [\eta \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(y)] \mapsto \eta \underset{tr}{\otimes} \alpha(y)\Xi$$

pour tous $\eta \in L^2(M), \Xi \in L^2(M) \underset{tr}{\otimes} L^2(M)$ et $y \in M$. Ainsi, d'après la proposition précédente, $W^* = I^* I'$.

7.6.6 Corollaire — *On a l'égalité suivante :*

$$M' \underset{Z(M)}{\otimes} M = < (id * \omega_{\xi,\eta})(W^*) \,|\, \xi \in D((H \underset{tr}{\otimes} H)_{\hat{\beta}}, \nu^o), \eta \in D({}_\alpha(H \underset{tr}{\otimes} H), \nu) >^{-w}$$

Démonstration : On sait déjà, d'après la proposition 3.4.3, que :

$$< (id * \omega_{\xi,\eta})(W^*) \,|\, \xi \in D((H \underset{tr}{\otimes} H)_{\hat{\beta}}, \nu^o, \eta \in D({}_\alpha(H \underset{tr}{\otimes} H), \nu) >^{-w} \subset M' \underset{Z(M)}{\otimes} M$$

Soient $\eta, \xi \in H$ et $m, e \in \mathcal{N}_\nu$. Alors, pour tous $\Xi_1, \Xi_2 \in H \underset{tr}{\otimes} H$, on a :

$$\begin{aligned}
((id * \omega_{\eta \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(m), \xi \underset{tr}{\otimes} J_\nu \Lambda_\nu(e)})(W^*)\Xi_1|\Xi_2) &= (W^*(\Xi_1 \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat{\beta}} [\eta \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(m)])|\Xi_2 \ {}_\beta\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha [\xi \underset{tr}{\otimes} J_\nu \Lambda_\nu(e)]) \\
&= (I^*(\eta \underset{tr}{\otimes} (1 \underset{Z(M)}{\otimes} m)\Xi_1)|\Xi_2 \ {}_\beta\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha [\xi \underset{tr}{\otimes} J_\nu \Lambda_\nu(e)]) \\
&\quad \text{par définition de } W^*, \\
&= (\eta \underset{tr}{\otimes} (1 \underset{Z(M)}{\otimes} m)\Xi_1 | \xi \underset{tr}{\otimes} (J_\nu e J_\nu \underset{Z(M)}{\otimes} 1)\Xi_2) \\
&\quad \text{d'après le lemme 7.7.4,} \\
&= ((< \eta, \xi >_{tr} J_\nu e^* J_\nu \otimes m)\Xi_1|\Xi_2)
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$(id * \omega_{\eta \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(m), \xi \underset{tr}{\otimes} J_\nu \Lambda_\nu(e)})(W^*) = < \eta, \xi >_{tr} J_\nu e^* J_\nu \underset{Z(M)}{\otimes} m \tag{7.6.1}$$

ce qui permet de prouver l'inclusion réciproque. ■

On calcule maintenant l'opérateur G afin de déterminer l'antipode.

7.6.7 Proposition — *G est un opérateur fermé sur $H \underset{tr}{\otimes} H$ qui est égal à $\sigma_{tr} \circ (F_\nu \underset{tr}{\otimes} F_\nu)$ où $F_\nu = S_\nu^*$ provient de la théorie de Tomita.*

Démonstration : Soient $a = J_\nu a_1 J_\nu \underset{Z(M)}{\otimes} a_2, b = J_\nu b_1 J_\nu \underset{Z(M)}{\otimes} b_2, c = J_\nu c_1 J_\nu \underset{Z(M)}{\otimes} c_2$ et

$d = J_\nu d_1 J_\nu \underset{Z(M)}{\otimes} d_2$ des éléments de $M' \underset{Z(M)}{\otimes} M$ analytiques pour $\nu' \underset{Z(M)}{\star} \nu$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{i/2}(b_1))\underset{tr}{\otimes}\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{-i}(b_2^*))})^* W^*([\Lambda_{\nu'}(J_\nu a_1 J_\nu) \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(a_2)] \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat\beta} \ [\Lambda_{\nu'}(J_\nu d_1^* c_1^* J_\nu) \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(d_2^* c_2^*)]) \\
&= (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{i/2}(b_1))\underset{tr}{\otimes}\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{-i}(b_2^*))})^* I^*(\Lambda_{\nu'}(J_\nu d_1^* c_1^* J_\nu) \underset{tr}{\otimes} \Lambda_{\nu'}(J_\nu a_1 J_\nu) \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(d_2^* c_2^* a_2)) \\
&\quad \text{par définition de } W^*, \\
&= \left[\rho^{tr}_{\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{-i}(b_2^*))}(1 \underset{Z(M)}{\otimes} \sigma^\nu_{i/2}(b_1))\right]^* (\Lambda_{\nu'}(J_\nu d_1^* c_1^* J_\nu) \underset{tr}{\otimes} \Lambda_{\nu'}(J_\nu a_1 J_\nu) \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(d_2^* c_2^* a_2)) \\
&\quad \text{d'après le lemme 7.6.4}, \\
&= < d_2^* c_2^* \Lambda_\nu(a_2), \Lambda_\nu(\sigma^\nu_{-i}(b_2^*)) >_{tr} \ \Lambda_{\nu'}(J_\nu d_1^* c_1^* J_\nu) \underset{tr}{\otimes} \sigma^\nu_{-i/2}(b_1^*) \Lambda_{\nu'}(J_\nu a_1 J_\nu) \\
&= < \Lambda_\nu(a_2 b_2), \Lambda_\nu(c_2 d_2) >_{tr} \ J_\nu \Lambda_\nu(d_1^* c_1^*) \underset{tr}{\otimes} J_\nu \Lambda_\nu(a_1 b_1)
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la définition de G, on a :

$$\begin{aligned}
&G\left[< \Lambda_\nu(a_2 b_2), \Lambda_\nu(c_2 d_2) >_{tr} \ J_\nu \Lambda_\nu(d_1^* c_1^*) \underset{tr}{\otimes} J_\nu \Lambda_\nu(a_1 b_1)\right] \\
&= G(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{i/2}(b_1))\underset{tr}{\otimes}\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{-i}(b_2^*))})^* W^*(\Lambda_{\nu'}(J_\nu a_1 J_\nu) \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(a_2) \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat\beta} \ \Lambda_{\nu'}(J_\nu d_1^* c_1^* J_\nu) \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(d_2^* c_2^*)) \\
&= (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{i/2}(d_1))\underset{tr}{\otimes}\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{-i}(d_2^*))})^* W^*(\Lambda_{\nu'}(J_\nu c_1 J_\nu) \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(c_2) \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat\beta} \ \Lambda_{\nu'}(J_\nu b_1^* a_1^* J_\nu) \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(b_2^* a_2^*)) \\
&= < \Lambda_\nu(c_2 d_2), \Lambda_\nu(a_2 b_2) >_{tr} \ J_\nu \Lambda_\nu(b_1^* a_1^*) \underset{tr}{\otimes} J_\nu \Lambda_\nu(c_1 d_1)
\end{aligned}$$

Comme G est fermée, on obtient :

$$G\left[J_\nu \Lambda_\nu(d_1^* c_1^*) \underset{tr}{\otimes} J_\nu \Lambda_\nu(a_1 b_1)\right] = \left[J_\nu \Lambda_\nu(b_1^* a_1^*) \underset{tr}{\otimes} J_\nu \Lambda_\nu(c_1 d_1)\right]$$

donc G coïncide avec $\sigma_{tr}(F_\nu \underset{tr}{\otimes} F_\nu)$. ∎

La décomposition polaire de $G = ID^{1/2}$ vérifie $D = \Delta_\nu^{-1} \underset{tr}{\otimes} \Delta_\nu^{-1}$ et $I = \sigma_{tr}(J_\nu \underset{tr}{\otimes} J_\nu)$. Ainsi, on peut calculer les éléments de la décomposition polaire de l'antipode S : le groupe d'échelle coïncide avec $\tau_t = \sigma^{\nu'}_{-t} \underset{Z(M)}{\star} \sigma^\nu_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et l'antipode unitaire coïncide avec $\varsigma_{Z(M)} \circ (j \underset{Z(M)}{\otimes} j)$. On remarque que τ laisse invariant $\nu' \underset{Z(M)}{\star} \nu$.

7.6.b La structure duale

On peut déterminer la structure duale du groupoïde quantique dual-espace. On rappelle que α est la représentation et $\hat\beta$ est l'antireprésentation qui correspondent.

7.6.8 Proposition — *On a* $(\omega_{\Lambda_\nu(y)\underset{tr}{\otimes}\eta,\zeta\underset{tr}{\otimes}J_\nu\Lambda_\nu(e)} * id)(W) = 1 \underset{Z(M)}{\otimes} J_\nu e^* J_\nu (\rho^{tr}_\zeta)^* \sigma_{tr} \rho^{tr}_\eta y$ *pour tous* $e, y \in \mathcal{N}_\nu$ *et tous* $\eta, \zeta \in H$.

Démonstration : On se place dans les conditions de l'énoncé. Pour tous $\Xi \in H \underset{tr}{\otimes} H, \xi \in H$

et $m \in \mathcal{N}_\nu$, on a :

$$\begin{aligned}
&((\omega_{\Lambda_\nu(y)\underset{tr}{\otimes}\eta,\zeta\underset{tr}{\otimes}J_\nu\Lambda_\nu(e)} * id)(W)\Xi|\xi \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(m))\\
&= ([\Lambda_\nu(y) \underset{tr}{\otimes} \eta] \ {}_{\beta}\underset{\nu}{\otimes}{}_{\alpha} \ \Xi|W^*([\zeta \underset{tr}{\otimes} J_\nu\Lambda_\nu(e)] \ {}_{\alpha}\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat{\beta}} \ [\xi \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(m)]))\\
&= ((1 \underset{Z(M)}{\otimes} y)\Xi \underset{tr}{\otimes} \eta|\xi \underset{tr}{\otimes} \zeta \underset{tr}{\otimes} mJ_\nu\Lambda_\nu(e))\\
&\quad \text{d'après l'expression de } W^*,\\
&= (\Xi \underset{tr}{\otimes} \eta|\xi \underset{tr}{\otimes} y^*\zeta \underset{tr}{\otimes} J_\nu eJ_\nu\Lambda_\nu(m))\\
&= ((1 \underset{Z(M)}{\otimes} \rho^{tr}_\eta)\Xi|(1 \underset{Z(M)}{\otimes} \sigma_{tr}\rho^{tr}_{y^*\zeta}J_\nu eJ_\nu)(\xi \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(m)))\\
&= ((1 \underset{Z(M)}{\otimes} J_\nu e^*J_\nu(\rho^{tr}_\zeta)^*\sigma_{tr}\rho^{tr}_\eta y)\Xi|\xi \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(m))
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ∎

7.6.9 Corollaire — *On a $M' \widehat{\underset{Z(M)}{\otimes}} M = 1 \underset{Z(M)}{\otimes} Z(M)'$ qu'on identifie avec $Z(M)'$.*

Démonstration : On sait que $\alpha(M) \cup \hat{\beta}(M) \subset M' \widehat{\underset{Z(M)}{\otimes}} M$ donc on en déduit que $1 \underset{Z(M)}{\otimes} Z(M)' \subset M' \widehat{\underset{Z(M)}{\otimes}} M$. L'inclusion réciproque provient de la proposition précédente. ∎

Avec l'identification entre $1 \underset{Z(M)}{\otimes} Z(M)'$ et $Z(M)'$, l'objet dual admet pour base M, pour représentation id et pour antireprésentation j. Le coproduit canonique vérifie nécessairement $\widehat{\Gamma}(mn) = m \ {}_{j}\underset{\nu}{\otimes}{}_{id} \ n$ pour tout $m \in M$ et $n \in M'$. Ainsi, si I_ν désigne l'isomorphisme canonique entre $L^2(M) \ {}_{j}\underset{\nu}{\otimes}{}_{id} \ L^2(M)$ et $L^2(M)$ donné par la formule $I_\nu(\Lambda_\nu(x) \ {}_{j}\underset{\nu}{\otimes}{}_{id} \ \eta) = \alpha(x)\eta$ pour tout $x \in \mathcal{N}_\nu$ et tout $\eta \in L^2(M)$, la proposition suivante est de démonstration immédiate :

7.6.10 Proposition — *Pour tous $m \in M$ et $n \in M'$, on a $I_\nu(m \ {}_{\beta}\underset{\nu}{\otimes}{}_{\alpha} \ n) = mnI_\nu$.*

On peut identifier l'algèbre de von Neumann $M' \ {}_{\beta}\underset{M}{\star}{}_{\alpha} \ M$ avec $Z(M)$ et l'algèbre de von Neumann $Z(M)' \ {}_{\beta}\underset{M}{\star}{}_{\alpha} \ Z(M)'$ avec $Z(M)'$. Le coproduit dual désigne alors l'identité à travers cette identification. Il reste à déterminer le poids opératoriel dual.

7.6.11 Lemme — *On a $\hat{\Lambda}((\omega_{\Xi,\Lambda_\nu(m)\underset{tr}{\otimes}J_\nu\Lambda_\nu(e)} * id)(W)) = (m^* \underset{Z(M)}{\otimes} J_\nu e^*J_\nu)\Xi$ pour tous $m, e \in \mathcal{N}_\nu$ et $\Xi \in D((H \underset{tr}{\otimes} H)_\beta, \nu^o)$.*

DÉMONSTRATION : Soient $m_1, m_2 \in \mathcal{N}_\nu$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
&(\hat{\Lambda}((\omega_{\Xi,\Lambda_\nu(m)\underset{tr}{\otimes} J_\nu\Lambda_\nu(e)} * id)(W))|\Lambda_{\nu'}(J_\nu m_1 J_\nu) \underset{Z(M)}{\otimes} \Lambda_\nu(m_2))\\
&= \omega_{\Xi,\Lambda_\nu(m)\underset{tr}{\otimes} J_\nu\Lambda_\nu(e)}(J_\nu m_1^* J_\nu \underset{Z(M)}{\otimes} m_2^*)\\
&\qquad \text{par définition de } \hat{\Lambda},\\
&= ((J_\nu m_1^* J_\nu \underset{Z(M)}{\otimes} m_2^*)\Xi|\Lambda_\nu(m) \underset{tr}{\otimes} J_\nu\Lambda_\nu(e))\\
&= (\Xi|mJ_\nu\Lambda_\nu(m_1) \underset{tr}{\otimes} J_\nu e J_\nu \Lambda_\nu(m_2))\\
&= ((m^* \underset{Z(M)}{\otimes} J_\nu e^* J_\nu)\Xi|\Lambda_{\nu'}(J_\nu m_1 J_\nu) \underset{tr}{\otimes} \Lambda_\nu(m_2))
\end{aligned}$$

■

7.6.12 PROPOSITION — *Le poids opératoriel dual $\widehat{T_R}$ coïncide avec T^{-1} au sens de la proposition 12.11 de [Str81]. De même, le poids opératoriel dual $\widehat{T_L}$ coïncide avec $j \circ T^{-1} \circ j$.*

DÉMONSTRATION : Via l'identification entre $\widehat{M' \underset{Z(M)}{\otimes} M}$ et $Z(M)'$, on a, d'après la proposition 7.6.8 :

$$(\omega_{\Xi,\Lambda_\nu(m)\underset{tr}{\otimes} J_\nu\Lambda_\nu(e)} * id)(W) = J_\nu e^* J_\nu[(\rho^{tr}_\zeta)^*\sigma_{tr}\rho^{tr}_\eta]y$$

Soient $m, e, y \in \mathcal{N}_\nu$ et $\eta \in H$. On calcule d'une part :

$$\begin{aligned}
||\hat{\Lambda}((\omega_{\Lambda_\nu(y)\underset{tr}{\otimes}\eta,\Lambda_\nu(m)\underset{tr}{\otimes} J_\nu\Lambda_\nu(e)} * id)(W))||^2 &= ||m^*\Lambda_\nu(y) \underset{tr}{\otimes} J_\nu e^* J_\nu \eta||^2\\
&\qquad \text{d'après le lemme précédent,}\\
&= (< J_\nu e^* J_\nu\eta, J_\nu e^* J_\nu \eta >_{tr} \Lambda_\nu(m^*y)|\Lambda_\nu(m^*y))
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
&||\hat{\Lambda}((\omega_{\Lambda_\nu(y)\underset{tr}{\otimes}\eta,\Lambda_\nu(m\underset{tr}{\otimes} J_\nu\Lambda_\nu(e)} * id)(W)))||^2\\
&= \hat{\Phi}((\rho^{tr}_{J_\nu e^* J_\nu\eta})^*\sigma_{tr}\rho_{\Lambda^{tr}_\nu(y^*m)}(\rho^{tr}_{\Lambda_\nu(y^*m)})^*\sigma_{tr}\rho^{tr}_{J_\nu e^* J_\nu \eta})\\
&= \hat{\Phi}((\rho^{tr}_{J_\nu e^* J_\nu\eta})^*[\theta^{tr}(\Lambda^{tr}_\nu(y^*m), \Lambda_\nu(y^*m)) \underset{Z(M)}{\otimes} 1]\rho^{tr}_{J_\nu e^* J_\nu\eta})\\
&= \hat{\Phi}(< J_\nu e^* J_\nu\eta, J_\nu e^* J_\nu \eta >_{tr} \theta^{tr}(\Lambda^{tr}_\nu(y^*m), \Lambda_\nu(y^*m)))
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tous $m, y \in \mathcal{N}_\nu$, on a :

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}(\theta^{tr}(\Lambda^{tr}_\nu(y^*m), \Lambda_\nu(y^*m))) &= ||\Lambda_\nu(m^*y)||^2\\
&= ||\Delta_\nu^{-1/2} J_\nu \Lambda_\nu(y^*m)||^2\\
&= \nu'(\theta^\nu(J_\nu\Lambda_\nu(y^*m), J_\nu\Lambda_\nu(y^*m)))\\
&= \nu' \circ T^{-1}(\theta^{tr}(J_\nu\Lambda_\nu(y^*m), J_\nu\Lambda_\nu(y^*m)))\\
&\qquad \text{par définition de } T^{-1},\\
&= \nu \circ j \circ T^{-1} \circ j(\theta^{tr}(\Lambda_\nu(y^*m)), \Lambda_\nu(y^*m)))
\end{aligned}$$

Par suite, $\widehat{T_L} = j \circ T^{-1} \circ j$ et le reste de la proposition en découle. ■

Remarque — Cet exemple est en fait issu de l'inclusion d'algèbres de von Neumann :

$$Z(M) \subset M \subset Z(M)' \subset ..$$

On renvoie à [Eno00].

Remarque — D'après la théorie développée dans ce travail, si la base M est semifinie alors les deux structures précédentes sont en dualité mais elles sont différentes en général.

Par exemple, si M est un facteur, la structure dual-espace admet pour algèbre de von Neumann sous-jacente $\mathcal{L}(H)$ alors que la structure espace admet pour algèbre de von Neumann sous-jacente $M' \otimes M$ et ces algèbres sont, en général, non-isomorphes.

En revanche, si M est abélienne ou si M est un facteur de type I (et par conséquent une somme de facteurs de type I, cf. paragraphe 7.8.a), la structure est auto-duale. Si M est l'algèbre de von Neumann abélienne $L^\infty(X)$, il s'agit du groupoïde espace X

7.7 Le groupoïde quantique des paires.

7.7.a Description de la structure

Soit M une algèbre de von Neumann. M agit sur $H = L^2(M) = L^2_\nu(M)$ où ν est poids normal, semifini et fidèle sur M. On note M' le commutant dans $\mathcal{L}(L^2(M))$ de M. L'algèbre de von Neumann $M' \otimes M$ agit sur $L^2(M) \otimes L^2(M)$.

On dispose d'une représentation normale et non dégénérée de M dans $M' \otimes M$ définie par :

$$\begin{aligned} \alpha : M &\to M' \otimes M \\ x &\mapsto 1 \otimes x \end{aligned}$$

On dispose aussi d'une antireprésentation normale et non dégénérée de M dans $M' \otimes M$ définie par :

$$\begin{aligned} \beta : M &\to M' \otimes M \\ x &\mapsto \beta_\nu(x) \otimes 1 \end{aligned}$$

où $\beta_\nu(x) = J_\nu x^* J_\nu$ pour tout $x \in \mathcal{L}(L^2_\nu(M))$.

7.7.1 Proposition — *La formule suivante :*

$$\begin{aligned} I : [L^2(M) \otimes L^2(M)] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [L^2(M) \otimes L^2(M)] &\to L^2(M) \otimes L^2(M) \otimes L^2(M) \\ [\Lambda_\nu(y) \otimes \eta] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \Xi &\mapsto \alpha(y)\Xi \otimes \eta \end{aligned}$$

pour tous $\eta \in L^2(M), \Xi \in L^2(M) \otimes L^2(M)$ et $y \in M$, définit un isomorphisme canonique.

7.7.2 Proposition — *On a $I([m \otimes x] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [y \otimes n]) = (y \otimes mn \otimes x)I$, pour tous $m \in M, n \in M'$ et $x, y \in \mathcal{L}(L^2(M))$.*

Démonstration : Vérifications immédiates. ∎

On peut alors identifier $(M' \otimes M) \underset{M}{{}_\beta\star_\alpha} (M' \otimes M)$ avec $M' \otimes Z(M) \otimes M$.

On définit un homomorphisme involutif et normal par :

$$\begin{aligned} \Gamma : M' \otimes M &\to (M' \otimes M) \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} (M' \otimes M) \\ n \otimes m &\mapsto I^*(n \otimes 1 \otimes m)I = [1 \otimes m] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [n \otimes 1] \end{aligned}$$

7.7.3 Proposition — *Le quintuplet $(M, M' \otimes M, \alpha, \beta, \Gamma)$ est un bimodule de Hopf qu'on appelle bimodule de Hopf des paires.*

Démonstration : D'après la proposition précédente, on a, d'une part :

$$\Gamma(\alpha(m)) = \alpha(m) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [1 \otimes 1] \quad \text{pour tout } m \in M$$

et, d'autre part :

$$\Gamma(\beta(m)) = [1 \otimes 1] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \beta(m) \quad \text{pour tout } m \in M$$

Enfin, pour tout $m \in M$ et tout $n \in M'$, on a :

$$\begin{aligned} (\Gamma \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)\Gamma(n \otimes m) &= (\Gamma \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)([1 \otimes m] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [n \otimes 1]) \\ &= \Gamma(1 \otimes m) \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [n \otimes 1] \\ &= [1 \otimes m] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [1 \otimes 1] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [n \otimes 1] \\ &= [1 \otimes m] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \Gamma(n \otimes 1) \\ (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma)\Gamma(n \otimes m) &= (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma)([1 \otimes m] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [n \otimes 1]) \end{aligned}$$

i.e Γ est un coproduit. ∎

L'application $R = \varsigma \circ (\beta_\nu \otimes \beta_\nu)$, où $\varsigma : M' \otimes M \to M \otimes M'$ désigne la volte, est une co-involution du bimodule de Hopf des paires.

Théorème 27 — *Le bimodule de Hopf des paires muni des poids opératoriels $\nu' \otimes id$ et $id \otimes \nu$ normaux, semifinis et fidèles et du poids quasi-invariant ν est un groupoïde quantique mesuré qu'on appelle groupoïde quantique des paires.*

Démonstration : Il suffit de vérifier que $T_L = \nu' \otimes id$ est invariant à gauche. Soient

$m \in M, n \in M'$ et $\xi \in D((L^2(M) \otimes L^2(M))_{\beta,\nu^o})$. On a :

$$\begin{aligned}
\omega_\xi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L)\Gamma(n \otimes m)) &= \omega_\xi((id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L)([1 \otimes m] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [n \otimes 1])) \\
&\quad \text{par définition de } \Gamma, \\
&= \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L((\omega_\xi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id)([1 \otimes m] \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} [n \otimes 1])) \\
&= \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L([n \otimes 1]\alpha(< [1 \otimes m]\xi, \xi >_{\beta,\nu^o})) \\
&= \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L(n \otimes < [1 \otimes m]\xi, \xi >_{\beta,\nu^o}) \\
&= \nu'(n)\nu(< [1 \otimes m]\xi, \xi >_{\beta,\nu^o}) \\
&\quad \text{par définition de } T_L, \\
&= \nu'(n)\omega_\xi(1 \otimes m) = \omega_\xi(T_L(n \otimes m))
\end{aligned}$$

ce qui suffit pour prouver l'invariance à gauche de T_L. On vérifie alors que $T_R = R \circ T_L \circ R = id \otimes \nu$ est α-adapté pour ν. En effet, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_t^{T_R} &= \sigma_t^{\nu' \otimes \nu}{}_{|(M' \otimes M) \cap \beta(M)'} \\
&= \sigma_t^{\nu' \otimes \nu}{}_{|Z(M) \otimes M} = id \otimes \sigma_t^\nu{}_{|Z(M) \otimes M}
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in M$, on a :

$$\sigma_t^{T_R} \circ \alpha(x) = 1 \otimes \sigma_t^\nu(x) = \alpha(\sigma_t^\nu(x))$$

■

Remarque — On vérifie que $\Lambda_\Phi(\mathcal{T}_{\nu,T}) \otimes J_\nu \Lambda_\nu(\mathcal{N}_\nu \cap \mathcal{N}_T)$ est dense dans $D((H \otimes H)_\beta, \nu^o)$. On est donc dans les conditions d'existence du dual.

Remarque — Si $M = L^\infty(X)$, on retrouve le groupoïde des paires sur $X \times X$.

On va calculer l'unitaire pseudo-multiplicatif associé à la structure à l'aide de la proposition 3.3.1. Tout d'abord, on remarque que $\Phi = \nu' \otimes \nu = \Psi$ dont on déduit que la structure est unimodulaire i.e $\lambda = \delta = 1$ et aussi que :

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 \otimes id & \hat{\alpha} &= id \otimes 1 \\
\beta &= \beta_\nu \otimes 1 & \hat{\beta} &= 1 \otimes \beta_\nu
\end{aligned}$$

On a alors, par exemple, $D((H \otimes H)_{\hat{\beta},\nu^o}) \supset H \otimes D(H_{\beta_\nu}, \nu^o) = H \otimes \Lambda_\nu(\mathcal{N}_\nu)$ et pour tous $\eta \in H$ et $y \in \mathcal{N}_\nu$, on a $R^{\hat{\beta},\nu^o}(\eta \otimes \Lambda_\nu(y)) = \lambda_\eta R^{\beta_\nu,\nu^o}(\Lambda_\nu(y)) = \lambda_\eta y$.

On dispose de relations de démonstrations immédiates qu'on donne sous la forme du lemme suivant :

7.7.4 Lemme — *On a* $I\rho^{\beta,\alpha}_{\eta \otimes J_\nu \Lambda_\nu(e)} = \lambda_\eta J_\nu e J_\nu \otimes 1$ *et* $I\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\nu(y) \otimes \eta} = \rho_\eta(1 \otimes y)$ *pour tous* $\eta \in H$ *et* $e \in \mathcal{N}_\nu$.

7.7.5 Proposition — W^* *est déterminé par la formule suivante :*

$$W^*(\Xi \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} (\eta \otimes \Lambda_\nu(m))) = I^*(\eta \otimes (1 \otimes m)\Xi)$$

pour tous $\Xi \in H \otimes H, \eta \in H$ *et* $m \in \mathcal{N}_\nu$.

Démonstration : On va utiliser la proposition 3.3.1. Soient $m, e \in \mathcal{N}_\nu$ et $m', e' \in \mathcal{N}_{\nu'}$. On calcule alors d'une part :

$$\begin{aligned} I\Gamma(m' \otimes m)\rho^{\beta,\alpha}_{J_{\nu'}\Lambda_{\nu'}(e') \otimes J_\nu \Lambda_\nu(e)} &= (m' \otimes 1 \otimes m) I \rho^{\beta,\alpha}_{J_{\nu'}\Lambda_{\nu'}(e') \otimes J_\nu \Lambda_\nu(e)} && \text{par définition de } \Gamma, \\ &= (m' \otimes 1 \otimes m)\lambda_{J_{\nu'}\Lambda_{\nu'}(e')} J_\nu e J_\nu \otimes 1 && \text{d'après le lemme précédent,} \\ &= \lambda_{J_{\nu'}e'J_{\nu'}\Lambda_{\nu'}(m')} J_\nu e J_\nu \otimes m \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} & I([1 \otimes 1] \underset{\nu}{{}_\beta \otimes_\alpha} [J_{\nu'}e'J_{\nu'} \otimes J_\nu e J_\nu]) W^* \rho^{\alpha,\hat{\beta}}_{\Lambda_{\nu'}(m') \otimes \Lambda_{\nu'}(m')} \\ = & (J_{\nu'}e'J_{\nu'} \otimes J_\nu e J_\nu \otimes 1) I W^* \rho^{\alpha,\hat{\beta}}_{\Lambda_{\nu'}(m') \otimes \Lambda_{\nu'}(m')} \qquad \text{d'après la proposition 7.7.2} \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 3.3.1 et en faisant tendre e et e' vers 1, on obtient pour tout $\Xi \in H \otimes H$:

$$W^*(\Xi \underset{\nu^o}{{}_\alpha \otimes_{\hat{\beta}}} (\Lambda_{\nu'}(m') \otimes \Lambda_\nu(m))) = I^*(\Lambda_{\nu'}(m') \otimes (1 \otimes m)\Xi)$$

Maintenant, si on fixe $\Xi \in D({}_\alpha(H \otimes H), \nu)$, on peut par continuité faire tendre $\Lambda_{\nu'}(m')$ vers $\eta \in H$. On obtient alors pour tout $\Xi \in D({}_\alpha(H \otimes H), \nu)$:

$$W^*(\Xi \underset{\nu^o}{{}_\alpha \otimes_{\hat{\beta}}} (\eta \otimes \Lambda_\nu(m))) = I^*(\eta \otimes (1 \otimes m)\Xi)$$

Or $\eta \otimes \Lambda_\nu(m) \in D((H \otimes H)_{\hat{\beta},\nu^o})$, donc par continuité la relation reste vérifiée pour tout $\Xi \in H \otimes H$. ■

Remarque — Si σ désigne la volte de $L^2(M) \otimes L^2(M)$ dans $L^2(M) \otimes L^2(M)$, alors on constate que $\sigma \circ \hat{\beta} = \beta \circ \sigma$. Alors, si on note $I' = (1 \otimes \sigma) I (\sigma \underset{\nu}{{}_{\hat{\beta}} \otimes_\alpha} [1 \otimes 1])\sigma_{\nu^o}$, I' est l'identification :

$$\begin{aligned} I' : [L^2(M) \otimes L^2(M)] \underset{\nu^o}{{}_\alpha \otimes_{\hat{\beta}}} [L^2(M) \otimes L^2(M)] &\to L^2(M) \otimes L^2(M) \otimes L^2(M) \\ \Xi \underset{\nu}{{}_\beta \otimes_\alpha} [\eta \otimes \Lambda_\nu(y)] &\mapsto \eta \otimes \alpha(y)\Xi \end{aligned}$$

pour tous $\eta \in L^2(M), \Xi \in L^2(M) \otimes L^2(M)$ et $y \in M$. Ainsi, d'après la proposition précédente, $W^* = I^* I'$.

7.7.6 Corollaire — *On a l'égalité suivante :*

$$M' \otimes M = < (id * \omega_{\xi,\eta})(W^*) \,|\, \xi \in D((H \otimes H)_{\hat{\beta}}, \nu^o), \eta \in D({}_\alpha(H \otimes H), \nu) >^{-w}$$

Démonstration : On sait déjà, d'après la proposition 3.4.3, que :

$$< (id * \omega_{\xi,\eta})(W^*) \,|\, \xi \in D((H \otimes H)_{\hat{\beta}}, \nu^o, \eta \in D({}_\alpha(H \otimes H), \nu) >^{-w} \subset M' \otimes M$$

Soient $\eta, \xi \in H$ et $m, e \in \mathcal{N}_\nu$. Alors, pour tous $\Xi_1, \Xi_2 \in H \otimes H$, on a :

$$
\begin{aligned}
((id * \omega_{\eta\otimes\Lambda_\nu(m),\xi\otimes J_\nu\Lambda_\nu(e)})(W^*)\Xi_1|\Xi_2) &= (W^*(\Xi_1 \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat\beta} \ \eta\otimes\Lambda_\nu(m))|\Xi_2 \ {}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha \ \xi\otimes J_\nu\Lambda_\nu(e)) \\
&= (I^*(\eta\otimes(1\otimes m)\Xi_1)|\Xi_2 \ {}_\beta\underset{\nu}{\otimes}{}_\alpha \ \xi\otimes J_\nu\Lambda_\nu(e)) \\
&\qquad \text{par définition de } W^*, \\
&= (\eta\otimes(1\otimes m)\Xi_1|\xi\otimes(J_\nu e J_\nu\otimes 1)\Xi_2) \\
&\qquad \text{d'après le lemme 7.7.4}, \\
&= (\eta|\xi)((J_\nu e^* J_\nu\otimes m)\Xi_1|\Xi_2)
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
(id * \omega_{\eta\otimes\Lambda_\nu(m),\xi\otimes J_\nu\Lambda_\nu(e)})(W^*) = (\eta|\xi)(J_\nu e^* J_\nu\otimes m) \tag{7.7.1}
$$

et donc, on obtient $M'\otimes M \subset < (id*\omega_{\xi,\eta})(W^*)\,|\,\xi\in D((H\otimes H)_{\hat\beta},\nu^o,\eta\in D({}_\alpha(H\otimes H),\nu) >^{-w}$.
■

On calcule maintenant l'opérateur G afin de déterminer l'antipode.

7.7.7 Proposition — *On a $G=\Sigma(F_\nu\otimes F_\nu)$ où Σ désigne la volte de $H\otimes H$ et $F_\nu=S_\nu^*$ provient de la théorie de Tomita.*

Démonstration : Soient $a=J_\nu a_1 J_\nu\otimes a_2, b=J_\nu b_1 J_\nu\otimes b_2, c=J_\nu c_1 J_\nu\otimes c_2, d=J_\nu d_1 J_\nu\otimes d_2$ des éléments de $M'\otimes M$ analytiques pour $\nu'\otimes\nu$.

On a :

$$
\begin{aligned}
&(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{i/2}(b_1))\otimes\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{-i}(b_2^*))})^* W^*(\Lambda_{\nu'\otimes\nu}(a) \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat\beta} \ \Lambda_{\nu'\otimes\nu}((J_\nu d_1^* J_\nu\otimes d_2^*)c^*)) \\
&= (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{i/2}(b_1))\otimes\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{-i}(b_2^*))})^* I^*(\Lambda_{\nu'}(J_\nu d_1^* c_1^* J_\nu)\otimes(1\otimes d_2^* c_2^*)\Lambda_{\nu'\otimes\nu}(a)) \\
&\qquad \text{par définition de } W^*, \\
&= \left[\rho_{\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{-i}(b_2^*))}(1\otimes\sigma^\nu_{i/2}(b_1))\right]^* (\Lambda_{\nu'}(J_\nu d_1^* c_1^* J_\nu)\otimes(1\otimes d_2^* c_2^*)\Lambda_{\nu'\otimes\nu}(a)) \\
&\qquad \text{d'après le lemme 7.7.4}, \\
&= (d_2^* c_2^*\Lambda_\nu(a_2)|\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{-i}(b_2^*)))\,\Lambda_{\nu'}(J_\nu d_1^* c_1^* J_\nu)\otimes\sigma^\nu_{-i/2}(b_1^*)\Lambda_{\nu'}(J_\nu a_1 J_\nu) \\
&= \nu(d_2^* c_2^* a_2 b_2)\, J_\nu\Lambda_\nu(d_1^* c_1^*)\otimes J_\nu\Lambda_\nu(a_1 b_1)
\end{aligned}
$$

Par conséquent, d'après la définition de G, on a :

$$
\begin{aligned}
&G\left[\nu(d_2^* c_2^* a_2 b_2)\, J_\nu\Lambda_\nu(d_1^* c_1^*)\otimes J_\nu\Lambda_\nu(a_1 b_1)\right] \\
&= G(\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{i/2}(b_1))\otimes\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{-i}(b_2^*))})^* W^*(\Lambda_{\nu'\otimes\nu}(a) \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat\beta} \ \Lambda_{\nu'\otimes\nu}((J_\nu d_1^* J_\nu\otimes d_2^*)c^*)) \\
&= (\lambda^{\beta,\alpha}_{\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{i/2}(d_1))\otimes\Lambda_\nu(\sigma^\nu_{-i}(d_2^*))})^* W^*(\Lambda_{\nu'\otimes\nu}(c) \ {}_\alpha\underset{\nu^o}{\otimes}{}_{\hat\beta} \ \Lambda_{\nu'\otimes\nu}((J_\nu b_1^* J_\nu\otimes b_2^*)a^*)) \\
&= \nu(b_2^* a_2^* c_2 d_2)\, J_\nu\Lambda_\nu(b_1^* a_1^*)\otimes J_\nu\Lambda_\nu(c_1 d_1)
\end{aligned}
$$

Comme G est anti-linéaire, on obtient :

$$
G\left[J_\nu\Lambda_\nu(d_1^* c_1^*)\otimes J_\nu\Lambda_\nu(a_1 b_1)\right] = \left[J_\nu\Lambda_\nu(b_1^* a_1^*)\otimes J_\nu\Lambda_\nu(c_1 d_1)\right]
$$

donc G coïncide avec $\Sigma(F_\nu\otimes F_\nu)$. ■

La décomposition polaire de $G = ID^{1/2}$ vérifie $D = \Delta_\nu^{-1} \otimes \Delta_\nu^{-1}$ et $I = \Sigma(J_\nu \otimes J_\nu)$. Ainsi, on peut calculer les éléments de la décomposition polaire de l'antipode S :

$$\tau_t = \sigma_{-t}^{\nu'} \otimes \sigma_t^\nu \quad \text{et} \quad R = \varsigma \circ (\beta_\nu \otimes \beta_\nu)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. On remarque que τ laisse invariant $\nu' \otimes \nu$ (la structure est unimodulaire).

7.7.8 Corollaire — *On a* $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(\sigma_{i/2}^{\nu'}) \otimes \mathcal{D}(\sigma_{-i/2}^\nu)$ *et pour tous* $e, m \in \mathcal{D}(\sigma_{i/2}^\nu)$, *on a* $S(J_\nu e J_\nu \otimes m^*) = J_\nu \sigma_{i/2}^\nu(m) J_\nu \otimes \sigma_{-i/2}^\nu(e^*)$.

On peut vérifier aussi l'expression de S en fonction de W dans le corollaire suivant :

7.7.9 Corollaire — *On a* $(id * \omega_{\xi,\eta})(W) \in \mathcal{D}(S)$ *et* $S((id * \omega_{\xi,\eta})(W)) = (id * \omega_{\xi,\eta})(W^*)$ *pour tous* $\xi, \eta \in D({}_\alpha(H \otimes H), \nu) \cap D((H \otimes H)_{\hat\beta}, \nu^o)$.

Démonstration : Soient $\zeta, \eta \in H$ et $e, m \in \mathcal{D}(\sigma_{i/2}^\nu)$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} S((id * \omega_{\zeta \otimes J_\nu \Lambda_\nu(e), \eta \otimes \Lambda_\nu(m)})(W)) &= S((\zeta|\eta) J_\nu e J_\nu \otimes m^*) \\ &\quad \text{d'après la relation 7.7.1,} \\ &= (\zeta|\eta) J \sigma_{i/2}^\nu(m) J \otimes \sigma_{-i/2}^\nu(e^*) \\ &\quad \text{d'après l'expression précédente de } S, \\ &= (id * \omega_{\zeta \otimes J_\nu \Lambda_\nu(e), \eta \otimes \Lambda_\nu(m)})(W^*) \\ &\quad \text{d'après la relation 7.7.1.} \end{aligned}$$

La fermeture de S permet de conclure. ■

7.7.b La structure duale

On peut déterminer la structure duale du groupoïde quantique des paires. On rappelle que α est la représentation et $\hat\beta$ est l'antireprésentation qui correspondent.

7.7.10 Proposition — *On a* $(\omega_{\Lambda_\nu(y) \otimes \eta, \zeta \otimes J_\nu \Lambda_\nu(e)} * id)(W) = 1 \otimes J_\nu e^* J_\nu \rho_\zeta^* \Sigma \rho_\eta y$ *pour tous* $e, y \in \mathcal{N}_\nu$ *et tous* $\eta, \zeta \in H$.

Démonstration : On se place dans les conditions de l'énoncé. Pour tous $\Xi \in H \otimes H, \xi \in H$ et $m \in \mathcal{N}_\nu$, on a :

$$\begin{aligned} &((\omega_{\Lambda_\nu(y) \otimes \eta, \zeta \otimes J_\nu \Lambda_\nu(e)} * id)(W) \Xi | \xi \otimes \Lambda_\nu(m)) \\ &= ([\Lambda_\nu(y) \otimes \eta] \ {}_\beta\!\underset{\nu}{\otimes}_\alpha \ \Xi | W^*([\zeta \otimes J_\nu \Lambda_\nu(e)] \ {}_\alpha\!\underset{\nu^o}{\otimes}_{\hat\beta} \ [\xi \otimes \Lambda_\nu(m)])) \\ &= ((1 \otimes y)\Xi \otimes \eta | \xi \otimes \zeta \otimes m J_\nu \Lambda_\nu(e)) \\ &\quad \text{d'après l'expression de } W^*, \\ &= (\Xi \otimes \eta | \xi \otimes y^* \zeta \otimes J_\nu e J_\nu \Lambda_\nu(m)) \\ &= ((1 \otimes \rho_\eta)\Xi | (1 \otimes \Sigma \rho_{y^* \zeta} J_\nu e J_\nu)(\xi \otimes \Lambda_\nu(m))) \\ &= ((1 \otimes J_\nu e^* J_\nu \rho_\zeta^* \Sigma \rho_\eta y)\Xi | \xi \otimes \Lambda_\nu(m)) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

7.7.11 Corollaire — *On a* $\widehat{M' \otimes M} = 1 \otimes \mathcal{L}(H)$.

Démonstration : On rappelle que, par définition,

$$\widehat{M' \otimes M} =< (\omega_{\Xi_1,\Xi_2} * id)(W) \,|\, \Xi_1 \in D((H \otimes H)_\beta, \nu^o), \Xi_2 \in D(_\alpha(H \otimes H), \nu) >^{-w}$$

et on remarque que $\mathcal{L}(H) \otimes 1 \subset \alpha(M)' \cap \beta(M)'$. On prouve, d'abord, que $\widehat{M' \otimes M} \subset 1 \otimes \mathcal{L}(H)$. Soient $\Xi \in H, \eta \in H$ et $m \in \mathcal{N}_\nu$. Pour tout $x \in \mathcal{L}(H)$, on a :

$$\begin{aligned}
&([1 \otimes 1] \underset{\nu}{_\beta\otimes_\alpha} [x \otimes 1])W^*(\Xi \underset{\nu}{_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} [\eta \otimes J_\nu \Lambda_\nu(m)])\\
&= ([1 \otimes 1] \underset{\nu}{_\beta\otimes_\alpha} [x \otimes 1])I^*(\eta \otimes (1 \otimes m)\Xi)\\
&= I^*(x\eta \otimes (1 \otimes m)\Xi)\\
&= W^*(\Xi \underset{\nu}{_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} [x\eta \otimes J_\nu \Lambda_\nu(m)])\\
&= W^*([1 \otimes 1] \underset{\nu}{_\beta\otimes_\alpha} [x \otimes 1])(\Xi \underset{\nu}{_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} [\eta \otimes J_\nu \Lambda_\nu(m)])
\end{aligned}$$

Par suite, on obtient $([1\otimes 1] \underset{\nu}{_\beta\otimes_\alpha} [x\otimes 1])W^* = W^*([1\otimes 1] \underset{\nu}{_\beta\otimes_\alpha} [x\otimes 1])$ pour tout $x \in \mathcal{L}(H)$. D'où on tire que :

$$\widehat{M' \otimes M} \subset (\mathcal{L}(H) \otimes 1)' = 1 \otimes \mathcal{L}(H)$$

On prouve alors l'inclusion inverse. D'après la proposition précédente, on constate que, pour tous $v, w \in H$, on a :

$$\begin{aligned}
(\omega_{\Lambda_\nu(y)\otimes\eta,\zeta\otimes J_\nu\Lambda_\nu(e)} * id)(W)(v \otimes w) &= (1 \otimes J_\nu e^* J_\nu)\rho^*_{y^*\zeta}(1 \otimes \Sigma)\rho_\eta(v \otimes w)\\
&= v \otimes (w|y^*\zeta) J_\nu e^* J_\nu \eta
\end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}
\widehat{M' \otimes M} &\supset< \omega_{\Lambda_\nu(y)\otimes\eta,\zeta\otimes J_\nu\Lambda_\nu(e)} * id)(W) \,|\, \eta, \zeta \in H, e, y \in \mathcal{N}_\nu >^{-w}\\
&=< 1 \otimes p \,|\, p \text{ projection de rang } 1 >^{-w}\\
&= 1 \otimes \mathcal{L}(H)
\end{aligned}$$

■

On vérifie que $(M' \otimes M) \cap \widehat{M' \otimes M} = 1 \otimes M = \alpha(M)$. On peut calculer alors le coproduit dual donné par $\hat{\Gamma}(\hat{m}) = \sigma_{\nu^o} W(\hat{m} \underset{\nu}{_\beta\otimes_\alpha} 1)W^*\sigma_\nu$ pour tout $\hat{m} \in \widehat{M' \otimes M}$. On utilise l'identification suivante :

$$\begin{aligned}
\Phi : 1 \otimes \mathcal{L}(H) &\mapsto \mathcal{L}(H)\\
1 \otimes x &\to x
\end{aligned}$$

qui est implémentée par λ_e où $e \in H$ est un vecteur de norme 1. On sait alors que $\Phi \underset{\nu}{_{\hat{\beta}}\star_\alpha} \Phi$ est l'identification entre $[1 \otimes \mathcal{L}(H)] \underset{\nu}{_{\hat{\beta}}\otimes_\alpha} [1 \otimes \mathcal{L}(H)]$ et $\mathcal{L}(H) \underset{\nu}{_{\beta_\nu}\star_{id}} \mathcal{L}(H) \simeq \mathcal{L}(H)$.

7.7.12 Proposition — *On a* $W^*\sigma_\nu(\lambda_e \underset{\nu}{_{\beta_\nu}\otimes_{id}} \lambda_e) = I^*(\lambda_e \otimes \lambda_e)I_\nu$ *pour tout vecteur* $e \in H$ *de norme* 1.

Démonstration : Soient $m \in \mathcal{N}_\nu$ et $\eta \in H$. On a alors :

$$\begin{aligned}
W^*\sigma_\nu(\lambda_e \underset{\nu}{{}_{\beta_\nu}\otimes_{id}} \lambda_e)(\Lambda_\nu(m) \underset{\nu}{{}_{\beta_\nu}\otimes_{id}} \eta) &= W^*\sigma_\nu([e\otimes\Lambda_\nu(m)] \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} [e\otimes\eta]) \\
&= W^*([e\otimes\eta] \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} [e\otimes\Lambda_\nu(m)]) \\
&= I^*(e\otimes e\otimes m\eta) \\
&= I^*(\lambda_e\otimes\lambda_e)I_\nu(\Lambda_\nu(m) \underset{\nu}{{}_{\beta_\nu}\otimes_{id}} \eta)
\end{aligned}$$

■

7.7.13 Corollaire — *On a* $(\Phi \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\star_\alpha} \Phi)\circ\hat\Gamma\circ\Phi^{-1}(x) = I_\nu^* x I_\nu$ *pour tout* $x\in\mathcal{L}(H)$.

Démonstration : Soient $x\in\mathcal{L}(H)$ et $e\in H$ un vecteur de norme 1. Alors :

$$\begin{aligned}
(\Phi \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\star_\alpha} \Phi)\circ\hat\Gamma\circ\Phi^{-1}(x) &= (\lambda_e^* \underset{\nu}{{}_{\beta_\nu}\otimes_{id}} \lambda_e^*)\sigma_{\nu^o}W([1\otimes x] \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} [1\otimes 1])W^*\sigma_\nu(\lambda_e \underset{\nu}{{}_{\beta_\nu}\otimes_{id}} \lambda_e) \\
&= I_\nu^*(\lambda_e^*\otimes\lambda_e^*)I([1\otimes x] \underset{\nu}{{}_{\hat\beta}\otimes_\alpha} [1\otimes 1])I^*(\lambda_e\otimes\lambda_e)I_\nu \\
&= I_\nu^*(\lambda_e^*\otimes\lambda_e^*)(1\otimes 1\otimes x)(\lambda_e\otimes\lambda_e)I_\nu \\
&= I_\nu^* x I_\nu
\end{aligned}$$

d'après la proposition 7.7.2. ■

On détermine alors le poids dual.

7.7.14 Lemme — *On a* $\hat\Lambda((\omega_{\Xi,\Lambda_\nu(m)\otimes J_\nu\Lambda_\nu(e)} * id)(W)) = (m^*\otimes J_\nu e^* J_\nu)\Xi$ *pour tous* $m,e\in\mathcal{N}_\nu$ *et* $\Xi\in D((H\otimes H)_\beta,\nu^o)$.

Démonstration : Soient $m_1,m_2\in\mathcal{N}_\nu$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
&(\hat\Lambda((\omega_{\Xi,\Lambda_\nu(m)\otimes J_\nu\Lambda_\nu(e)} * id)(W))|\Lambda_{\nu'\otimes\nu}(J_\nu m_1 J_\nu\otimes m_2)) \\
&= \omega_{\Xi,\Lambda_\nu(m)\otimes J_\nu\Lambda_\nu(e)}(J_\nu m_1^* J_\nu\otimes m_2^*) \\
&= ((J_\nu m_1^* J_\nu\otimes m_2^*)\Xi|\Lambda_\nu(m)\otimes J_\nu\Lambda_\nu(e)) \\
&= (\Xi|mJ_\nu\Lambda_\nu(m_1)\otimes J_\nu e J_\nu\Lambda_\nu(m_2)) \\
&= ((m^*\otimes J_\nu e^* J_\nu)\Xi|\Lambda_{\nu'\otimes\nu}(J_\nu m_1 J_\nu\otimes m_2))
\end{aligned}$$

■

7.7.15 Proposition — *On a* $\hat T_L = id\otimes E_{\nu'}$ *où* $E_{\nu'}$ *est le poids opératoriel de* $\mathcal{L}(H)$ *vers* M *obtenu à partir du poids* ν'.

Démonstration : Soient $m,e,y\in\mathcal{N}_\nu$ et $\eta\in H$. On calcule d'une part :

$$\begin{aligned}
||\hat\Lambda((\omega_{\Xi,\Lambda_\nu(m)\otimes J_\nu\Lambda_\nu(e)} * id)(W))||^2 &= ||m^*\Lambda_\nu(y)\otimes J_\nu e^* J_\nu\eta||^2 \\
&\qquad \text{d'après le lemme précédent,} \\
&= ||J_\nu e^* J_\nu\eta||^2||\Lambda_\nu(m^*y)||^2
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
&||\hat{\Lambda}((\omega_{\Xi,\Lambda_\nu(m)\otimes J_\nu\Lambda_\nu(e)} * id)(W))||^2 \\
&= \hat{\Phi}(\rho_\eta^*(1\otimes\Sigma)\rho_{y^*\Lambda_\nu(m)}(1\otimes J_\nu e J_\nu)(1\otimes J_\nu e^* J_\nu)\rho^*_{y^*\Lambda_\nu(m)}(1\otimes\Sigma)\rho_\eta) \\
&\quad \text{d'après la proposition 7.7.10,} \\
&= ||J_\nu e^* J_\nu \eta||^2 \hat{\Phi}(1\otimes(\Lambda_\nu(m^*y)\otimes\Lambda_\nu(m^*y)))
\end{aligned}$$

où $\xi\otimes\xi$ est l'opérateur de $\mathcal{L}(H)$ qui associe à v le vecteur $(v|\xi)\xi$.

On déduit donc que, si $\xi\in\mathcal{D}(S_\nu)$, alors :

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}(1\otimes(\xi\otimes\xi)) = ||S_\nu\xi||^2 &= (\Delta_\nu\xi|\xi) \\
&= (\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\nu'}\xi|\xi) \\
&= \nu(\theta^{\nu'}(\xi,\xi)) \\
&= \nu\circ E_{\nu'}(\xi\otimes\xi) \\
&= \nu\circ\alpha^{-1}\circ\hat{T}_L(1\otimes(\xi\otimes\xi))
\end{aligned}$$

■

On dispose aussi des formules suivantes, pour tous $x\in\mathcal{L}(H)$ et $t\in\mathbb{R}$:

$$\hat{R}(1\otimes x) = 1\otimes J_\nu x^* J_\nu \quad \text{et} \quad \hat{\tau}_t(1\otimes x) = 1\otimes\Delta_\nu^{it}x\Delta_\nu^{-it}$$

Le poids opératoriel invariant à droite est donné par $\hat{T}_R = \hat{R}\circ\hat{T}_L\circ\hat{R} = (id\otimes E_\nu)$.

Remarque — Cet exemple est en fait issu de l'inclusion d'algèbres de von Neumann :

$$\mathbb{C}\subset M\subset\mathcal{L}(L^2(M))\subset\mathcal{L}(L^2(M))\otimes M\subset ..$$

On renvoie à [Eno00].

7.8 Opérations sur les groupoïdes quantiques mesurés.

7.8.a Somme de groupoïdes quantiques mesurés

Le fait qu'une réunion de groupes n'est pas, en général, un groupe entraîne que la somme de deux groupes quantiques localement compacts n'est pas un groupe quantique localement compact. La catégorie des groupoïdes est, quant à elle, stable par réunion et on obtient une propriété correspondant à ce fait au niveau des groupoïdes quantiques mesurés : une somme quelconque de groupoïdes quantiques mesurés est un groupoïde quantique mesuré de manière naturelle.

7.8.1 Proposition — *Soit $(N_i,M_i,\alpha_i,\beta_i,\Gamma_i,\nu_i,T_L^i,T_R^i)_{i\in I}$ une famille de groupoïdes quantiques mesurés. Alors, si on identifie $\bigoplus_{i\in I}M_i \underset{N_i}{{}_{\beta}\star_{\alpha}} M_i$ avec $\left(\bigoplus_{i\in I}M_i\right) \underset{\bigoplus_{i\in I}N_i}{{}_{\beta}\star_{\alpha}} \left(\bigoplus_{i\in I}M_i\right)$, on a :*

$$(\bigoplus_{i\in I}N_i,\bigoplus_{i\in I}M_i,\bigoplus_{i\in I}\alpha_i,\bigoplus_{i\in I}\beta_i,\bigoplus_{i\in I}\Gamma_i,\bigoplus_{i\in I}\nu_i,\bigoplus_{i\in I}T_L^i,\bigoplus_{i\in I}T_R^i)$$

où les opérateurs agissent de manière diagonale, est un groupoïde quantique mesuré.

En particulier, la somme de deux groupes quantiques localement compacts avec des scalaires d'échelle différents (cf. [VV03] pour des exemples) produira un groupoïde quantique mesuré avec un opérateur d'échelle non scalaire.

7.8.b Produit tensoriel de groupoïdes quantiques mesurés

Le produit de deux groupes correspond au produit tensoriel de deux groupes quantiques. De la même manière, on a :

7.8.2 Proposition — *Soient* $(N_1, M_1, \alpha_1, \beta_1, \Gamma_1, \nu_1, T_L^1, T_R^1)$ *et* $(N_2, M_2, \alpha_2, \beta_2, \Gamma_2, \nu_2, T_L^2, T_R^2)$ *deux groupoïdes quantiques mesurés. Alors, si on identifie* $(M_1 \underset{N_1}{{}_{\beta_1}\star_{\alpha_1}} M_1) \otimes (M_2 \underset{N_2}{{}_{\beta_2}\star_{\alpha_2}} M_2)$ *avec* $(M_1 \otimes M_2) \underset{N_1 \otimes N_2}{{}_{\beta_1 \otimes \beta_2}\star_{\alpha_1 \otimes \alpha_2}} (M_1 \otimes M_2)$*, on a :*

$$(N_1 \otimes N_2, M_1 \otimes M_2, \alpha_1 \otimes \alpha_2, \beta_1 \otimes \beta_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2, \nu_1 \otimes \nu_2, T_L^1 \otimes T_L^2, T_R^1 \otimes T_R^2)$$

est un groupoïde quantique mesuré.

Démonstration : Aisée. ■

7.8.c Intégrale directe de groupoïdes quantiques mesurés

Dans ce chapitre X désigne un espace localement compact est σ-compact et μ une mesure de Borel sur X. On renvoie à [Tak03] pour la description de la théorie des intégrales hilbertiennes.

7.8.3 Proposition — *Soit* $(N_p, M_p, \alpha_p, \beta_p, \Gamma_p, \nu_p, T_L^p, T_R^p)_{p \in X}$ *une famille de groupoïdes quantiques mesurés. Si* $\int_X^{\oplus} M_p \underset{N_p}{{}_{\beta}\star_{\alpha}} M_p \, d\mu(p)$ *et* $\left(\int_X^{\oplus} M_p \, d\mu(p)\right) \underset{\int_X^{\oplus} N_p \, d\mu(p)}{{}_{\beta}\star_{\alpha}} \left(\int_X^{\oplus} M_p \, d\mu(p)\right)$ *sont identifiées, on a :*

$$\Big(\int_X^{\oplus} N_p \, d\mu(p), \int_X^{\oplus} M_p \, d\mu(p), \int_X^{\oplus} \alpha_p \, d\mu(p), \int_X^{\oplus} \beta_p \, d\mu(p), \ldots$$
$$\ldots \int_X^{\oplus} \Gamma_p \, d\mu(p), \int_X^{\oplus} \nu_p \, d\mu(p), \int_X^{\oplus} T_L^p \, d\mu(p), \int_X^{\oplus} T_R^p \, d\mu(p)\Big)$$

est un groupoïde quantique mesuré.

Démonstration : Laissée au lecteur. ■

Une intégrale directe de groupes quantiques est donc un groupoïde quantique mesuré. On renvoie à [Bla96] pour des exemples. Dans ce cas, la base est $L^\infty(X)$ et $\alpha = \beta = \hat{\beta}$. L'unitaire fondamental est alors un unitaire d'un espace dans lui-même et peut-être interprété comme un champ d'unitaires multiplicatifs.

Liste des références

[ADR00] C. Anantharaman-Delaroche & J. Renault : *Amenable groupoids*, Monographie de l'Enseignement Mathématique, Genève (2000). [*Cité page 119*]

[BDH88] M. Baillet, Y. Denizeau & J.F Havet : Indice d'une espérance conditionnelle, Compositio Math., **66** (1988), 199-236. [*Cité page 12*]

[Bla96] E. Blanchard, Déformations de $\mathbb{C}^*$-algèbresde Hopf, Bull. Soc. math. France, **124** (1996), 141-215. [*Cité page 146*]

[BNS99] G. Böhm, F. Nill & K. Szlachányi : Weak Hopf algebras I. Integral theory and $\mathbb{C}^*$-structure, J. Algebra, **221** (1999), 385-438. [*Cité pages 8 et 121*]

[BS93] S. Baaj & G. Skandalis : Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de $\mathbb{C}^*$-algèbres, Ann. Sci. ENS, **26** (1993), 425-488. [*Cité pages 7 et 8*]

[BSz96] G. Böhm & K. Szlachányi : A coassociative $\mathbb{C}^*$-quantum group with non integral dimensions, Lett. in Math. Phys, **35** (1996), 437-456. [*Cité pages 8 et 121*]

[Co79] A. Connes : Sur la théorie non commutative de l'intégration, in « Algébres d'Opérateurs », Lecture Notes in Mathematics, N^o **725**, pp. 19-143, Springer-Verlag, Berlin/New-York, 1979. [*Cité page 119*]

[Co80] A. Connes : On the spatial theory of von Neumann algebras, J. Funct. Analysis, **35** (1980), 153-164. [*Cité pages 5, 13, 14 et 15*]

[Co94] A. Connes : « *Non Commutative Geometry* », Academic Press, 1994. [*Cité page 7*]

[EN96] M. Enock & R. Nest : Inclusions of factors, multiplicative unitaries and Kac algebras, J. Funct. Analysis, **137** (1996), 466-543. [*Cité pages 11, 12, 13, 16, 127, 128 et 129*]

[Eno00] M. Enock : Inclusions of von Neumann algebras and quantum groupoïds II, J. Funct. Analysis, **178** (2000), 156-225. [*Cité pages 5, 8, 9, 18, 19, 124, 127, 128, 129, 137 et 145*]

[Eno02] M. Enock : Quantum groupoids of compact type, à paraître au Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu. [*Cité pages 8, 14, 16, 41, 45, 53, 54, 88, 89, 123, 124 et 125*]

[ES89] M. Enock & J.M Schwartz : *Kac algebras and Duality of locally compact Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1989. [*Cité page 7*]

[EV00] M. Enock & J.M. Vallin : Inclusions of von Neumann algebras and quantum groupoids, J. Funct. Analysis, **172** (2000), 249-300. [*Cité pages 5, 17, 18, 40, 45, 88, 101, 125 et 127*]

[Hah78a] P. Hahn : Haar measure for measured groupoids, Trans. Amer. Math. soc., **242** (1978), 1-33. [*Cité pages 7 et 121*]

[Hah78b] P. Hahn : The regular representations of measured groupoids, Trans. Amer. Math. soc., **242** (1978), 35-72. [*Cité pages 7 et 121*]

[KaV74] G.I. Kac & L. Vainerman : Nonunimodular ring-groups and Hopf-von Neumann algebras, Math. USSR, **23** (1974), 185-214. [*Cité page 7*]

[Kus97] J. Kustermans : KMS-weights on $\mathbb{C}^*$-algebras, funct-an/9704008 (1997). [*Cité pages 78 et 105*]

[Kus02] J. Kustermans : Induced corepresentations of locally compact quantum groups, J. Funct. Analysis, **194** (2002), 410-459. [*Cité page 7*]

[KV99] J. Kustermans & S.Vaes : Weight theory for $\mathbb{C}^*$-algebraic quantum groups, preprint University College Cork & KU1 Leuven, 1999, ♯math/99011063. [*Cité page 78*]

[KV00] J. Kustermans & S.Vaes : Locally compact quantum groups, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., **33**(6) (2000), 837-934. [*Cité pages 7 et 82*]

[KV03] J. Kustermans & S.Vaes : Locally compact quantum groups in the von Neumann algebraic setting, Mathematica Scandinava, **92**(1)(2003), 68-92. [*Cité pages 7, 59, 62 et 123*]

[KVD97] J. Kustermans & A. Van Daele : $\mathbb{C}^*$-algebraic quantum groups arising from algebraic quantum groups, Int. J. Math., **8** (1997), 1067-1139, QA/9611023. [*Cité page 10*]

[Mac66] G.W. Mackey : Ergodic theory and virtual groups, Math. Ann., **186** (1996), 187-207. [*Cité page 7*]

[MN91] T. Masuda & Y. Nakagami, An operator algebraic framework for the duality of quantum groups, « Mathematical Physics X », Proc. AMP-91, Univ. Leibzig, 1991, K. Schmüdgen, 291-295, Springer-Verlag, Berlin, 1992. [*Cité page 7*]

[Nik02] D. Nikshych : On the structure of weak Hopf algebras, Advances Math., **170** (2002), 257-286 in section 3. [*Cité pages 8 et 122*]

[Nil98] F. Nill : Axioms of weak Bialgebras, math.QA/9805104 (1998). [*Cité page 8*]

[NV00] D. Nikshych & L. Vainerman : Algebraic versions of a finite dimensional quantum groupoid, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **209** (2000), 189-221. [*Cité pages 8 et 121*]

[NV02] D. Nikshych & L. Vainerman : New directions in Hopf algebras, Cambridge University Press, MSRI Publications, **43** (2002), 211-262. [*Cité pages 8 et 121*]

[Ren80] J. Renault : « A groupoid Approch to $\mathbb{C}^*$-Algebras », Lecture Notes in Math., Vol.793, Springer-Verlag. [*Cité pages 7 et 119*]

[Ren97] J. Renault : The Fourier algebra of a measured groupoid and its multipliers, J. Funct. Analysis, **145** (1997), 455-490. [*Cité page 7*]

[Sau83a] J.L Sauvageot : Produit tensoriel de Z-modules et applications, in Operator Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory, Proceedings Busteni, Romania, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, **1132** (1983), 468-485. [*Cité pages 16, 18 et 49*]

[Sau83b] J.L Sauvageot : Sur le produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert, J. Operator Theory, **9** (1983), 237-352. [*Cité pages 5, 13, 14, 15, 17 et 67*]

[Sau86] J.L Sauvageot : Une relation de chaine pour les dérivées de Radon-Nykodym spatiales, Bull. Soc. math. France, **114** (1986), 105-117. [*Cité pages 48, 49, 58 et 69*]

[Str81] S. Stratila : *Modular theory in operator algebras*, Abacus Press, Turnbridge Wells, England, 1981. [*Cité pages 5, 11, 19, 62, 77, 78, 127 et 136*]

[Tak03] M. Takesaki : *Theory of Operator Algebras II*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 125, Springer 2003. [*Cité pages 5, 11, 13, 14, 15, 110 et 146*]

[Vae01a] S. Vaes : A Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras, J. Operator Theory, **46** (2001), 477-489. [*Cité pages 9, 78, 81, 87, 89, 90, 91, 92, 112 et 117*]

[Vae01b] S. Vaes : The unitary implementation of a locally compact quantum group action, J. Funct. Analysis, **180** (2001), 426-480. [*Cité page 7*]

[Val96] J.M Vallin : Bimodules de Hopf et Poids opératoriels de Haar, J. Operator theory, **35** (1996), 39-65. [*Cité pages 5, 7, 16, 17, 119, 120 et 121*]

[Val00] J.M Vallin : Unitaire pseudo-multiplicatif associé à un groupoïde, applications à la moyennabilité, J. Operator theory, **44** (2000), 347-368. [*Cité pages 8 et 97*]

[Val01] J.M Vallin : Groupoïdes quantiques finis, J. Algebra, **239** (2001), 215-261. [*Cité pages 8 et 122*]

[Val02] J.M Vallin : Multiplicative partial isometries ans finite quantum groupoids, Proceedings of the Meeting of Theorical Physicists and Mathematicians, Strasbourg, IRMA Lectures in Mathematics and Theorical Physics, **2** (2002), 189-227. [*Cité page 8*]

[Val03] J.M Vallin : Communication. [*Cité page 122*]

[VDa95] A. Van Daele : The Haar measure on a compact quantum group, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 3125-3128. [*Cité page 10*]

[VDa98] A. Van Daele : An algebraic framework for group duality, Adv. in Math., **140** (1998), 323-366. [*Cité pages 7 et 10*]

[VDa01] A. Van Daele : The Haar measure on some locally compact quantum groups, math.OA/0109004(2001). [*Cité page 10*]

[VV03] S. Vaes & L. Vainerman : Extensions of locally compact quantum groups and the bicrossed product construction. Advances in Mathematics, **175**(1) (2003), 1-101. [*Cité pages 7, 9 et 146*]

[Wor87] S.L Woronowicz : Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus, Publ. RIMS, Kyoto University, **23** (1987), 117-181. [*Cité page 9*]

[Wor88] S.L Woronowicz : Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ group, Invent. Math., **93** (1988), 35-76. [*Cité page 7*]

[Wor91] S.L Woronowicz : Quantum $E(2)$ group and its Pontryagin dual, Lett. Math. Phys., **23** (1991), 251-263. [*Cité page 9*]

[Wor95] S.L Woronowicz : Compact quantum groups : Les Houches, Session LXIV, 1995, Quantum Symmetries, Elsevier 1998. [*Cité page 7*]

[Wor96] S.L Woronowicz : From multiplicative unitaries to quantum groups, Int. J. Math., **Vol. 7, N^o 1** (1996), 127-149. [*Cité pages 7 et 86*]

[Wor01] S.L Woronowicz : Quantum $az + b$ group on complex plane, International J. Math., **12** (2001), 461-503. [*Cité pages 7 et 9*]

[WZ02] S.L Woronowicz : Quantum $ax + b$ group, à paraître dans Reviews in Mathematical Physics. [*Cité pages 7 et 9*]

[Yam93] T. Yamanouchi : Duality for actions and co-actions of groupoids on von Neumann algebras, Memoirs of the AMS, **484** (1993). [*Cité pages 119 et 121*]

Index

Liste des notations

U

W