Cohomologie équivariante et quantification géométrique

Paul-Émile Paradan

COHOMOLOGIE ÉQUIVARIANTE ET QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE

PAUL-ÉMILE PARADAN

UMR 5582, Institut Fourier, B.P. 74, 38402, Saint-Martin-d'Hères cedex, France
e-mail: Paul-Emile.Paradan@ujf-grenoble.fr

Summary

In this paper I summarize the work I have done to realize the program of Witten called *non abelian localization*. This work deals first with problems of localization in equivariant cohomology. The second part of this paper concerns the Guillemin-Sternberg problem -Quantization commutes with reduction- in the geometric quantization procedure.

Résumé

Mes travaux de recherches concernent les différentes théories cohomologiques associées aux actions de groupes de Lie compacts sur des variétés différentiables: cohomologie équivariante, K-théorie équivariante, et la théorie des opérateurs transversalement elliptiques. Ils se situent au carrefour entre la géométrie symplectique et la théorie des représentations. Le fil conducteur de ma recherche a été le programme de *localisation non-abélienne* de Witten. Dans ce mémoire, je rappelle les techniques mises en oeuvre pour réaliser ce programme, et les résultats qui en découlent.

Mots clés: cohomologie équivariante, localisation, actions hamiltoniennes, application moment, réduction symplectique, quantification géométrique, symboles transversalement elliptiques.

1991 Mathematics Subject Classification: 58F05; 58F06; 57S15; 19L47.

Publications, prépublications et travaux en cours

0. Thèse de Doctorat, Université Paris 7 - Denis Diderot, 1996.
1. Action hamiltonienne et formules de localisation en cohomologie équivariante, *C.R.A.S.* **324**, 1997, p. 491-496.
2. Formules de localisation en cohomologie équivariante, *Compositio Mathematica* **117**, 1999, p. 243-293.
3. The moment map and equivariant cohomology with generalized coefficients, *Topology*, **163**, 2000, p. 401-444.
4. The Fourier transform of semi-simple coadjoint orbits, *Journal of Functional Analysis* **39**, 1999, p. 152-179.
5. Localization of the Riemann-Roch character, *Journal of Functional Analysis* **187**, 2001, p. 442-509.
6. Spin^c-quantization and the K-multiplicities of the discrete series, à paraître aux *Annales Scientifiques de l'E.N.S.*, 41 pages.
7. Notes sur les formules de saut de Guillemin-Kalkman. A paraître aux *C.R.A.S.*.
8. Geometric quantization and the orbit method. En préparation.
9. Déformation à la Witten de l'opérateur de Dolbeault-Dirac sur les espaces symétriques hermitiens non-compacts. En préparation.

Contents

1. Cohomologie équivariante et localisation 3
2. Actions hamiltoniennes et réduction symplectique 11
3. Quantification géométrique et K-multiplicités 19
4. Travaux en cours et projets 35
References 37

1. Cohomologie équivariante et localisation

La "cohomologie équivariante" est née dans les années 50 après les travaux de Borel et de H. Cartan [15]. Une version topologique du théorème de localisation apparaît dans les travaux de Borel [10] et Quillen [52], et en K-théorie équivariante dans ceux de Atiyah et Segal [55]. Il faudra attendre une quinzaine d'années pour que, sur l'impulsion de la formule de Duistermaat-Heckman, on obtienne le théorème de localisation de Berline-Vergne et d'Atiyah-Bott [2, 6]. Berline et Vergne obtiennent une localisation de *l'intégrale* d'une forme équivariante. Un peu plus tard, Atiyah et Bott raffinent cette localisation au niveau de la cohomologie. Ces travaux s'obtiennent dans le cas d'un groupe *abélien.* En 1992, Witten propose une localisation *non-abélienne* dans le cadre Hamiltonien [64]. Mon travail dans ce domaine a été en grande partie consacrée à la réalisation du programme de Witten.

Dans une première partie je rappelle succinctement le modèle de Cartan de la cohomologie équivariante. Avant de décrire les différentes localisations dont j'ai parlé plus haut, j'évoque le travail précurseur de Bott [12] sur les nombres caractéristiques: on verra que la méthode de Bott contient en substance le procédé de localisation de Berline-Vergne.

1.1. **Modèle de Cartan.** Considérons un groupe de Lie compact connexe K, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, agissant de manière $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété différentielle M. On note $\mathcal{A}(M)$ l'algèbre sur $\mathbb{C}$ des formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ et d la dérivation de de Rham. Si ξ est un champ de vecteurs sur M, on note $c(\xi) : \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(M)$ la contraction par ξ. L'action de K sur M détermine un morphisme $X \to X_M$ de $\mathfrak{k}$ dans l'algèbre des champs de vecteurs de M.

On considère l'espace des applications K-équivariantes $\mathfrak{k} \to \mathcal{A}(M),\ X \mapsto \eta(X)$, muni de la dérivation D

$$(D\eta)(X) := (d - c(X_M))(\eta(X)),\ X \in \mathfrak{k}. \tag{1.1}$$

Comme $D^2 = 0$, on peut considérer l'espace de cohomologie $\mathrm{Ker}D/\mathrm{Im}D$.

Le modèle de Cartan [5, 15, 19, 26] considère des applications *polynomiales*, et l'espace de cohomologie associé est noté $\mathcal{H}^*_K(M)$. Cet espace est muni naturellement d'une structure d'algèbre sur $\mathcal{H}^*_K(\cdot) = S(\mathfrak{k}^*)^K$, l'algèbre (sur $\mathbb{C}$) des applications polynomiales K-invariantes sur $\mathfrak{k}$.

On peut aussi considérer des applications $X \mapsto \eta(X)$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$, et on obtient comme espace de cohomologie l'algèbre $\mathcal{H}^\infty_K(M)$. S. Kumar et Vergne [37] ont étudié l'espace de cohomologie $\mathcal{H}^{-\infty}_K(M)$ obtenu en considérant des applications $X \mapsto \eta(X)$ qui sont $\mathcal{C}^{-\infty}$. Rappelons sa construction et les différentes notations.

Soit $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))$ l'espace des fonctions généralisées sur $\mathfrak{k}$ à valeurs dans $\mathcal{A}(M)$. C'est, par définition, l'espace des applications $\mathbb{C}$-linéaires continues de l'espace des densités $\mathcal{C}^\infty$ à support compact de $\mathfrak{k}$ dans $\mathcal{A}(M)$. L'image de la densité $\phi(X)dX$ par

$\eta \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))$ est une forme différentielle sur M notée $< \eta(X), \phi(X)dX >_{\mathfrak{k}}$. La différentielle D définie sur $\mathcal{C}^{\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))$ par (1.1) se prolonge à $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))$, et on montre que $D^2 = 0$ sur le sous-espace $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))^K$ des éléments K-invariants [37]. L'espace de cohomologie associé est appelé la cohomologie K-équivariante à coefficients généralisés de M, et est noté $\mathcal{H}_K^{-\infty}(M)$. On remarque que ce dernier espace ne possède plus de structure multiplicative, mais est muni néanmoins d'une structure de $\mathcal{H}_K^*(M)$-module.

Les espaces de cohomologie $\mathcal{H}_K^-(M)$, pour $- \in \{*, \infty, -\infty\}$, ont des bonnes propriétés fonctorielles. Si $i : N \hookrightarrow M$ est une sous-variété K-stable, on a un morphisme de *restriction* $i^* : \mathcal{H}_K^-(M) \to \mathcal{H}_K^-(N)$. Si de plus le fibré normal $\mathcal{N}$ de N par rapport à M est *orienté*, nous avons un morphisme '*image directe*' $i_* : \mathcal{H}_K^-(N) \to \mathcal{H}_K^-(M)$. Leur composée $i^* \circ i_*$ est le morphisme de multiplication par la classe d'Euler equivariante, $\mathrm{Eul}(\mathcal{N}) \in \mathcal{H}_K^*(N)$. Historiquement, la construction du morphisme image directe i_* dans le modèle de Cartan remonte à l'article de Mathai-Quillen [39], où ils explicitent un représentant de la classe de Thom équivariante.

D'autre part, si $P \to M$ est une fibration K-équivariante *orientée*, on a un morphisme d'*intégration* le long des fibres $\int_{P/M} : \mathcal{H}_K^-(P) \to \mathcal{H}_K^-(M)$. En particulier si M est orientée, on a un morphisme[1] d'intégration $\int_M : \mathcal{H}_K^-(P) \to \mathcal{C}^-(\mathfrak{k})^K$.

Si on considère un sous-groupe de Lie $H \hookrightarrow K$, on a au niveau des coefficients un morphisme de *restriction* $\mathcal{H}_K^-(M) \to \mathcal{H}_H^-(M)$, $\alpha \mapsto \alpha|_H$ pour $- \in \{*, \infty\}$. Pour les coefficients généralisés, les choses se passent de manière *duale*. Kumar et Vergne définissent, lorsque H et K ont le même rang, un morphisme d'*induction* $\mathrm{Ind}_{H}^{K} : \mathcal{H}_H^{-\infty}(M) \to \mathcal{H}_K^{-\infty}(M)$ qui possède la bonne compatibilité par rapport au morphisme de restriction et les structures de module: pour $\alpha \in \mathcal{H}_K^*(M)$ et $\beta \in \mathcal{H}_H^{-\infty}(M)$ on a $\alpha \cdot \mathrm{Ind}_{H}^{K}(\beta) = \mathrm{Ind}_{H}^{K}(\alpha|_H \cdot \beta)$.

Un exemple fondamental de forme équivariante à coefficients généralisés. Supposons que le groupe de Lie compact K agisse librement sur M. Notons $\pi : M \to B$ le fibré principal correspondant. Soit $\sigma \in (\mathcal{A}^1(M) \otimes \mathfrak{k})^K$ une 1-forme de connexion, et $\Omega = d\sigma + \frac{1}{2}[\sigma, \sigma]$ sa courbure. Nous avons l'isomorphisme de Chern-Weil

$$\mathrm{cw} : \mathcal{H}_K^*(M) \to \mathcal{H}^*(B) \ .$$

Considérons sur M la forme équivariante à coefficients généralisés $\delta(X - \Omega)$, qui est définie par la relation: $< \delta(X - \Omega), \phi(X)dX >_{\mathfrak{k}} = \phi(\Omega)\mathrm{vol}(K, dX)$, où $\mathrm{vol}(K, dX)$ est le volume de K pour la mesure de Haar compatible avec dX. Le terme $\phi(\Omega)$ est la valeur de l'opérateur différentiel $e^{\Omega(\frac{\partial}{\partial X}|_0)}$ contre la fonction ϕ. Soient σ_k les composantes de la 1-forme de connexion relativement à une base $E_1, \ldots, E_r$ de $\mathfrak{k}$. S. Kumar et Vergne ont introduit la forme équivariante fermée $\delta(X - \Omega)\frac{\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_r}{\mathrm{vol}(K)}$, avec laquelle ils déterminent l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{kv} : \mathcal{H}^*(B) \quad &\to \quad \mathcal{H}_K^{-\infty}(M) \\ \eta \quad &\mapsto \quad \pi^*(\eta)\delta(X - \Omega)\frac{\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_r}{\mathrm{vol}(K)} \ . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ici $\mathrm{vol}(K)$ est le volume de K pour la mesure de Haar compatible avec la base $E_1, \ldots, E_r$. Les isomorphismes 'cw' et 'kv' sont de plus compatibles: $\eta \wedge \mathrm{kv}(\gamma) = \mathrm{kv}(\mathrm{cw}(\eta) \wedge \gamma)$ pour $\eta \in \mathcal{H}_K^*(M)$ et $\gamma \in \mathcal{H}^*(B)$. On remarque dans ce cas que $\mathrm{kv} \circ \mathrm{cw}$

[1] $\mathcal{C}^*(\mathfrak{k})^K = S(\mathfrak{k}^*)^K$.

est un isomorphisme de $\mathcal{H}^*_K(M)$ sur $\mathcal{H}^{-\infty}_K(M)$, tandis que le morphisme naturel $\mathcal{H}^*_K(M) \to \mathcal{H}^{-\infty}_K(M)$ d'extension des coefficients est le *morphisme nul*.

Convention: Pour une fonction généralisée $f \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{k})$ supportée en 0, on parle de *sa multiplicité par rapport à la masse de Dirac en* 0. C'est la quantité $< f(X), \phi(X)dX >_{\mathfrak{k}} \in \mathbb{C}$, où ϕ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ égale à 1 au voisinage de $0 \in \mathfrak{k}$, et dX est normalisée par la condition $\mathrm{vol}(K, dX) = 1$.

Ici, pour tout $\eta \in \mathcal{H}^*(B)$, la fonction généralisée $\int_M \mathrm{kv}(\eta)$ est supportée en 0, et sa multiplicité par rapport à la masse de Dirac en 0 est égale à $\int_B \eta$.

1.2. **Champs de vecteurs et nombres caractéristiques.** Je reprends ici le titre original de l'article de Bott [12]. Un théorème de Hopf affirme que la caractéristique d'Euler d'une variété compacte est égal au nombre de zéros d'un champ de vecteurs (comptés judicieusement). Dans cet article Bott démontre qu'un principe similaire s'applique aux *nombres de Pontrijagin*.

Soit M une variété riemanienne compacte orientée de dimension $2n$. Les nombres de Pontrijagin s'expriment au moyen des classes de Chern de l'espace tangent complexifié $\mathbf{T}M \otimes \mathbb{C}$. Il sont aussi déterminés par le procédé suivant. Soit ∇ la connexion de Levi-Civita sur M, et $R = \nabla^2$ le tenseur de courbure associé. À chaque application polynomiale homogène[2] $\phi : \mathrm{so}(2n) \to \mathbb{C}$ invariante par rapport à l'action adjointe de $SO(2n)$, on peut associer la forme différentielle fermée $\phi(R)$ ainsi que son intégrale $\phi[M] := \int_M \phi(R)$. Si le degré de l'application polynomiale homogène ϕ est égal à n, $\phi[M]$ est un nombre caractéristique; sinon $\phi[M] = 0$.

Considérons un champ de vecteurs de *Killing* V sur M, tel que l'ensemble des zéros de V, noté M^V, est discret. Dans cet article, Bott montre que les intégrales $\phi[M]$ se localisent sur M^V. Le champ de vecteurs V détermine un action $\mathcal{L}(V)$ sur les sections du fibré tangent $\mathbf{T}M$. Pour chaque $p \in M^V$, cette action se spécialise en un endomorphisme $\mathcal{L}(V)_p$ de l'espace tangent $\mathbf{T}_p(M)$: l'endomorphisme est de plus antisymétrique car V est de Killing. D'une part, l'orientation de M permet de définir une racine carrée de $\det(\mathcal{L}(V)_p)$: le Pfaffien $\det^{1/2}(\mathcal{L}(V)_p)$. D'autre part le polynôme invariant ϕ détermine $\phi(\mathcal{L}(V)_p) \in \mathbb{C}$. La formule de Bott s'énonce ainsi. Pour tout polynôme ϕ de degré *inférieur où égal* à n, on a

$$(1.3) \qquad (-2\pi)^n \sum_{p \in M^V} \frac{\phi(\mathcal{L}(V)_p)}{\det^{1/2}(\mathcal{L}(V)_p)} = \phi[M] \ .$$

Voici une des étapes clef de la démonstration de Bott. Pour chaque ϕ de degré *inférieur où égal* à n, il explicite une forme différentielle de degré $2n-1$ sur l'ouvert $M - M^V$, notée η_ϕ, telle que

$$(1.4) \qquad [\phi(R)]^{\max} = d\eta_\phi \quad \text{sur} \quad M - M^V \ .$$

où $[-]^{\max}$ désigne la composante de degré maximal $2n$. Soit M_ε le complémentaire d'un ε-voisinage de M^V. Alors $\phi[M] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{M_\varepsilon} [\phi(R)]^{\max}$. Mais sur M_ε, le théorème de Stokes combiné avec (1.4) donne $\int_{M_\varepsilon} [\phi(R)]^{\max} = \int_{M_\varepsilon} d\eta_\phi = \int_{\partial M_\varepsilon} \eta_\phi$. On obtient alors $\phi[M] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial M_\varepsilon} \eta_\phi$, et l'expression (1.3) se démontre après le calcul (local) de $\int_{\partial M_\varepsilon} \eta_\phi$.

Nous finissons cette section avec la construction de cette forme η_ϕ. On verra là les prémices, quinze ans auparavant, de la méthode de localisation en cohomologie

[2]Ici $\mathrm{so}(2n)$ est l'algèbre de Lie de $SO(2n)$.

équivariante initiée par Berline-Vergne. Pour construire η_ϕ, Bott introduit $\mu := \mathcal{L}(V) - \nabla_V$ qui est une section du fibré so$(\mathbf{T}M)$, et montre la relation fondamentale

$$\nabla\mu = c(V)R \ . \tag{1.5}$$

En introduisant la 1-forme $\lambda = \frac{(V,-)}{|V|^2}$, Bott définit η_ϕ sur $M - M^V$ de la manière suivante

$$\eta_\phi := -\lambda \sum_{k=0}^{N-1} C_N^k \, \phi(\underbrace{R,\dots,R}_{k \text{ fois}}, \mu, \dots, \mu)\, (d\lambda)^{n-k-1} \tag{1.6}$$

où N est le degré du polynôme ϕ (supposé inférieur à n).

Montrons maintenant comment la preuve de (1.4) devient naturelle dans le contexte équivariant. On considère la sous-algèbre $\mathcal{A}(M)^V$, des formes différentielles invariante pour l'action infinitésimale de V, qui est munie de la dérivation $d_V = d - c(V)$. La forme $\phi(R) \in \mathcal{A}(M)^V$ n'est pas d_V-fermée. Par contre (1.5) montre que la forme $\phi(R+\mu)$ est d_V-fermée. Ensuite on remarque que la forme η_ϕ définie par (1.6) est la composante homogène de degré $2n-1$ de la forme

$$\phi(R+\mu)\frac{\lambda}{d\lambda - 1} \ ,$$

où le dénominateur $d\lambda - 1$ n'est autre que $d_V\lambda$. En utilisant la relation fondamentale $d_V\left(\frac{\lambda}{d_V\lambda}\right) = 1$, remarquée en premier lieu par Berline-Vergne, on voit que

$$d_V\left(\phi(R+\mu)\frac{\lambda}{d_V\lambda}\right) = \phi(R+\mu) \quad \text{sur} \quad M - M^V \ .$$

En prenant les composantes homogènes de degré maximal $2n$ dans cette relation on obtient $d\eta_\phi = [\phi(R+\mu)]^{\max}$. Sachant que pour tout polynôme ϕ de degré *inférieur où égal* à n, $[\phi(R)]^{\max} = [\phi(R+\mu)]^{\max}$, on obtient $d\eta_\phi = [\phi(R)]^{\max}$ sur $M - M^V$. $\square$

1.3. **Localisations de Berline-Vergne et Atiyah-Bott.** Nous avons vu à la section précédente un exemple de localisation à la Berline-Vergne. Revenons maintenant au cas d'une variété compacte orientée M munie d'une action d'un groupe de Lie compact K. Soit η une forme équivariante fermée à coefficients polynômiaux (on peut prendre indifféremment $\mathcal{C}^\infty$).

N. Berline et M. Vergne localisent l'intégrale $\int_M \alpha(X)$ sur la sous-variété M^X des zéros du champ de vecteurs X_M [6]. On travaille à $X \in \mathfrak{k}$ fixé et on procède comme ci-dessus. La forme $\eta(X)$ est fermée pour la dérivation $d_V = d - c(X_M)$. Au moyen d'une structure riemannienne K-invariante, on définit la 1-forme $\lambda = (X_M, -)$ qui satisfait la relation

$$d_V\left(\frac{\lambda}{d_V\lambda}\right) = 1 \quad \text{sur} \quad M - M^X \ ,$$

et on localise sur M^X au moyen de λ.

Sur la sous-variété M^X munie du fibré vectoriel normal $\mathcal{N}$, on a une action infinitésimale $\mathcal{L}(X)$. On munit $\mathcal{N}$ d'une métrique euclidienne $\mathcal{L}(X)$ invariante, et d'une connexion euclidienne de courbure $R_\mathcal{N}$. L'élément $\mathcal{L}(X) + R_\mathcal{N}$ admet un Pfaffien $\det^{1/2}(\frac{\mathcal{L}(X)+R_\mathcal{N}}{-2\pi}) \in \mathcal{A}(M^X)$ qui est inversible dans $\mathcal{A}(M^X)$ car sa composante homogène de degré 0 est constante, égale à $\det^{1/2}(\frac{\mathcal{L}(X)}{-2\pi}) \neq 0$. On a le

Théorème 1.1 (Berline-Vergne)**.**

$$\int_M \eta(X) = \int_{M^X} \frac{\eta(X)|_{M^X}}{\det^{1/2}\left(\frac{\mathcal{L}(X)+R_{\mathcal{N}}}{-2\pi}\right)} \ . \tag{1.7}$$

Le cas abélien: Dans le cas où le groupe $K = T$ est un tore, les sous-variétés M^X coïncident, pour X générique, avec la sous-variété M^T des points fixes de l'action de T. On définit la forme d'Euler équivariante $\mathrm{Eul}(\mathcal{N})(X) := \det^{1/2}(\frac{\mathcal{L}(X)+R_{\mathcal{N}}}{-2\pi})$ qui est une forme équivariante fermée sur M^T. Le théorème 1.1 donne dans cette situation

$$\int_M \eta(X) = \int_{M^T} \frac{\eta(X)|_{M^T}}{\mathrm{Eul}(\mathcal{N})(X)} \ . \tag{1.8}$$

Cette égalité peut être comprise comme une égalité de fonctions sur l'ouvert $\{X \in \mathfrak{t}, M^X = M^T\}$, ou bien comme une égalité algébrique dans le corps des fractions $\mathcal{R}$ de $S(\mathfrak{t}^*)$.

Localisation d'Atiyah-Bott: Dans le cas abélien, M. Atiyah et R. Bott obtiennent une localisation directement au niveau de la cohomologie [2]. Pour cela ils montrent que la restriction $i^* : \mathcal{H}^*_T(M) \to \mathcal{H}^*_T(M^T)$ devient un isomorphisme si l'on ignore la torsion: $\mathcal{H}^*_T(M)) \otimes_{S(\mathfrak{t}^*)} \mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^*_T(M^T) \otimes_{S(\mathfrak{t}^*)} \mathcal{R}$.

Cela entraine que le morphisme $I_{\mathrm{alg}} : \mathcal{H}^*_T(M) \to \mathcal{H}^*_T(M) \otimes_{S(\mathfrak{t}^*)} \mathcal{R}$ d'extension des coefficients se factorise de la manière suivante

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^*_T(M) \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[dr, "I_{\mathrm{alg}}"'] & \mathcal{H}^*_T(M^T) \otimes_{S(\mathfrak{t}^*)} \mathcal{R} \arrow[d, "i_*"] \\ & \mathcal{H}^*_T(M) \otimes_{S(\mathfrak{t}^*)} \mathcal{R} \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

où le morphisme Λ est défini par l'équation

$$\Lambda(\eta) = i^*(\eta)\mathrm{Eul}(\mathcal{N})^{-1},$$

pour toute classe $\eta \in \mathcal{H}^*_T(M)$.

L'un des premiers résultats de ma thèse a été la construction d'un inverse $\mathrm{Eul}^{-1}_\beta(\mathcal{N})$ de la classe d'Euler équivariante $\mathrm{Eul}(\mathcal{N})$ dans l'espace de cohomologie $\mathcal{H}^{-\infty}_T(M^T)$. Ici $\beta \in \mathfrak{t}$ est tel que $M^\beta = M^T$, et

$$\mathrm{Eul}^{-1}_\beta(\mathcal{N})(X) = \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Eul}(\mathcal{N})(X + is\beta)} \ .$$

1.4. **Localisations de Bismut et Witten.** On a vu dans les formules précédentes que la 1-forme $\lambda = (\beta_M, -)$ associée au champ de vecteurs β_M joue un grand rôle. Dans le cas d'un groupe compact K, on considère un champ de vecteurs K-invariant $\mathcal{H}$ et la 1-forme $\lambda = (\mathcal{H}, -)$ qui est K-invariante. Le cas précédent correspond à $\mathcal{H} = \beta_M$ (invariant seulement si β est central).

Donnons dans cette section des résultats valables pour une 1-forme K-invariante λ quelconque. Cette forme détermine une application équivariante $\Phi_\lambda : M \to \mathfrak{k}^*$ satisfaisant la relation $D\lambda(X) = d\lambda - \langle \Phi_\lambda, X\rangle$.

Si on reprend la méthode de localisation de Berline-Vergne, on cherche à inverser la forme $D\lambda(X) = d\lambda - \langle \Phi_\lambda, X\rangle$. La question ici est d'inverser sa composante de degré 0, $X \mapsto \langle \Phi_\lambda, X\rangle$, vue comme un élément de $S(\mathfrak{k}^*) \otimes \mathcal{C}^\infty(M)$. Cet inverse n'existe pas dans un espace de la forme $\mathcal{R} \otimes \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, où $\mathcal{R}$ est le corps de fraction et $\mathcal{U}$ est un ouvert invariant de M. Sauf en dimension 1, car dans ce cas $\langle \Phi_\lambda, X\rangle = \langle E^*, X\rangle\langle \Phi_\lambda, E\rangle$ admet pour inverse dans $\mathcal{R} \otimes \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, où $\mathcal{U} = \{\langle \Phi_\lambda, E\rangle \neq 0\}$.

Bismut propose une autre méthode de localisation [13].

Proposition 1.2 (Bismut)**.** *Soit λ une 1-forme K-invariante sur M. Pour toute forme K-équivariante fermée $\eta(X)$, on a*

$$\int_M \eta(X) = \int_M \eta(X) e^{zD\lambda(X)} \quad \text{pour tout} \quad X \in \mathfrak{k},\ z \in \mathbb{C}\ .$$

Bismut utilise cette méthode avec $z = t \in \mathbb{R}$ en utilisant la 1-forme $\lambda = (\beta_M, -)$, tandis que Witten [64] reprend cette technique avec $z = -i\,t$ pour $t \in \mathbb{R}$. Expliquons comment ces deux choix donnent des localisations trés différentes.

Localisation de Bismut: On fixe $\beta \in \mathfrak{k}$. Soient K_β le sous-groupe stabilisateur de β, et M^β la sous-variété de M composée des points où β_M s'annule. On localise avec la 1-forme $\lambda = (\beta_M, -)$ qui est invariante par rapport à K_β. À $X \in \mathfrak{k}_\beta$ fixé, la forme différentielle $e^{t\,D\lambda(X)_m}$, $m \in M$ est égale au produit $e^{t\,d\lambda_m}\, e^{-t\,(\beta_M, X_M)_m}$. La localisation repose sur la décroissance exponentielle, lorsque $t \to +\infty$, de $e^{-t\,(\beta_M, X_M)_m}$ dès que $(\beta_M, X_M)_m > 0$. Grâce à ce procédé, Bismut [13] obtient une extension de (1.7) au cadre non-abélien:

$$\int_M \eta(X) = \int_{M^\beta} \frac{\eta(X)|_{M^\beta}}{\mathrm{Eul}(\mathcal{N})(X)} \tag{1.10}$$

pour X dans un voisinage (assez petit) de β dans $\mathfrak{k}_\beta$.

Localisation de Witten: Le choix de $z = -i\,t$ permet de localiser avec plus de souplesse, avec une 1-forme invariante quelconque. La forme équivariante $e^{-i\,t\,D\lambda(X)} = e^{-i\,t\,d\lambda} e^{i\,t\,\langle \Phi_\lambda, X\rangle}$ est le produit d'un terme polynômial en t avec $\delta_t := e^{i\,t\,\langle \Phi_\lambda, X\rangle} \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{k}, \mathcal{C}^\infty(M))$. Si on se restreint à l'ouvert $M - \{\Phi_\lambda = 0\}$, on remarque que δ_t tend exponentiellement vers 0 dans l'espace des fonctions généralisées sur $\mathfrak{k}$ à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(M - \{\Phi_\lambda = 0\})$. On montre ainsi le

Lemme 1.3 (Witten)**.** *Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ une fonction test, $0 \leq \chi \leq 1$, égale à 1 au voisinage de $\{\Phi_\lambda = 0\}$. Alors pour toute forme equivariante fermée η, on a $\int_M (1-\chi)\eta(X) e^{-i\,t\,D\lambda(X)} \longrightarrow 0$ lorsque $t \to +\infty$. Ainsi*

$$\int_M \eta(X) = \lim_{t \to +\infty} \int_M \chi\, \eta(X) e^{-i\,t\,D\lambda(X)}\ .$$

Ici les convergences sont prises dans l'espace des fonctions généralisées sur $\mathfrak{k}$.

On voit ici les avantages de cette méthode de localisation:

i) elle est globale par rapport au paramètre $X \in \mathfrak{k}$
ii) on peut prendre des formes $\eta(X)$ à coefficients $\mathcal{C}^\infty$
iii) elle s'effectue aussi bien dans le cas non-abélien
iv) on a une certaine souplesse par rapport aux choix de λ.

Néanmoins, cette méthode comporte une sérieuse limitation: l'ensemble $\{\Phi_\lambda = 0\}$ n'est généralement pas une sous-variété.

1.5. **Réalisation du programme de Witten.** Witten a explicité le procédé ci-dessus dans le cadre hamiltonien [64], en se limitant au calcul au niveau d'une composante lisse de $\{\Phi_\lambda = 0\}$. On reparle de cela dans la prochaine section.

Je décris ici mes contributions pour développer ce type de localisation [43, 45, 46]. Les résultats que j'ai obtenus sont au carrefour entre la méthode de Berline-Vergne et le résultat cohomologique de Atiyah-Bott.

Je rappelle brièvement les notations. Soit M une variété (non nécessairement compacte) munie d'une action d'un groupe de Lie compact connexe K. On considère une 1-forme λ sur M, K-invariante, et on note $\Phi_\lambda : M \to \mathfrak{k}^*$ l'application définie par $\langle \Phi_\lambda(m), X\rangle = \lambda(X_M)_m$. Le premier résultat concerne l'inversibilité de la forme équivariante $D\lambda$, où $D\lambda(X) = d\lambda - \langle \Phi_\lambda, X\rangle$.

Lemme 1.4 ([45])**.** *La limite* $\lim_{a\to\infty} i\int_0^a e^{-i\,t\,D\lambda}dt$ *définit une forme équivariante fermée à coefficients généralisés sur* $M - \{\Phi_\lambda = 0\}$*. Cette forme équivariante vérifie* $D\lambda(i\int_0^\infty e^{-i\,t\,D\lambda}dt) = 1$ *sur* $M - \{\Phi_\lambda = 0\}$*: on la note* $[D\lambda]^{-1}$*.*

En se plaçant dans la cadre des formes équivariantes à coefficients généralisés, on obtient donc

$$D([D\lambda]^{-1}\lambda) = 1 \quad \text{sur} \quad M - \{\Phi_\lambda = 0\}. \tag{1.11}$$

Une idée naturelle est d'étendre (1.11) à M. Pour cela considérons une fonction test K-invariante, χ, égale à 1 au voisinage de $\{\Phi_\lambda = 0\}$. La forme $\delta = (1-\chi)[D\lambda]^{-1}\lambda$ est définie sur M, et en développant $D(\delta)$ on obtient

Lemme 1.5 ([45])**.** *La forme K-équivariante* $\mathrm{P}_\lambda := \chi + d\chi[D\lambda]^{-1}\lambda$ *est définie sur M et satisfait la relation*

$$1_M = \mathrm{P}_\lambda + D(\delta) \quad \text{sur} \quad M. \tag{1.12}$$

où 1_M est la fonction constante égale à 1 sur M. Ainsi pour tout $\eta \in \mathcal{H}^*_K(M)$, on a

$$\int_M \eta = \int_M \eta\, \mathrm{P}_\lambda$$

où l'égalité est prise dans l'espace des fonctions généralisées K-invariantes sur $\mathfrak{k}$.

A mon avis l'égalité (1.12) est le paradigme de la localisation. On explicite une forme P_λ à support dans un voisinage de $\{\Phi_\lambda = 0\}$ -aussi petit que l'on désire- qui représente 1 en cohomologie. On peut trouver un exposé détaillé de l'utilisation de ces formes P_λ, lorsque $K = S^1$, dans [63].

Dans la pratique on est amené à considérer chaque 'partie' de P_λ. On appelle *composante* de $\{\Phi_\lambda = 0\}$ toute partie *fermée* de $\{\Phi_\lambda = 0\}$ telle que $\{\Phi_\lambda = 0\} - F$ est *fermée*. Si F est une composante K-invariante de $\{\Phi_\lambda = 0\}$, on peut définir la forme équivariante fermée à coefficients généralisés

$$\mathrm{P}^F_\lambda := \chi^F + d\chi^F[D\lambda]^{-1}\lambda \tag{1.13}$$

au moyen d'une fonction χ^F qui est K-invariante, égale à 1 sur un voisinage de F, et telle que *support*$(\chi^F) \cap \{\Phi_\lambda = 0\} = F$. On montre facilement que la classe de P^F_λ dans $\mathcal{H}^{-\infty}_K(M)$ ne dépend pas du choix de la fonction χ^F. On précise alors le lemme 1.3 comme suit

Lemme 1.6 ([45]). *Soient F une* composante *de $\{\Phi_\lambda = 0\}$ et $\chi^F \in \mathcal{C}^\infty(M)$ une fonction K-invariante, égale à 1 sur un voisinage de F, et telle que support$(\chi^F) \cap \{\Phi_\lambda = 0\} = F$. Alors pour tout $\eta \in \mathcal{H}^*_K(M)$, on a*

$$\lim_{t \to +\infty} \int_M \chi^F \eta \, e^{-i\,t\,D\lambda} = \int_M \eta \, \mathrm{P}^F_\lambda$$

Ici la convergence est prise dans l'espace des fonctions généralisées K-invariantes sur $\mathfrak{k}$.

Lorsque l'ensemble $\{\Phi_\lambda = 0\}$ se décompose en une union disjointe de *composantes*, $\{\Phi_\lambda = 0\} = \cup_i F_i$, la forme P_λ s'exprime comme

$$\mathrm{P}_\lambda = \sum_i \mathrm{P}^{F_i}_\lambda \ . \tag{1.14}$$

On sera souvent amené à étudier chaque composante $\mathrm{P}^{F_i}_\lambda$ séparément.

Considérons le cas d'une composante F lisse. On note i_F l'inclusion de F dans M, et on suppose que le fibré normal correspondant $\mathcal{N}_F$ est *orienté.* On montre de manière élémentaire dans [45] que pour tout $\eta \in \mathcal{H}^*_K(M)$

$$\mathrm{P}^F_\lambda \eta = (i_F)_* \Big(i^*_F(\eta) \Lambda_F \Big) \tag{1.15}$$

où $\Lambda_F \in \mathcal{H}^{-\infty}_K(F)$ est un *inverse* de la classe d'Euler équivariante du fibré $\mathcal{N}_F$. Dans la pratique, pour rendre (1.15) utilisable, on cherche à avoir une expression explicite de la forme équivariante Λ_F, en fonction de λ. Si F est compact, ou si la forme η est à support compact sur M, on peut intégrer l'expression (1.15) :

$$\int_M \mathrm{P}^F_\lambda \eta = \int_F i^*_F(\eta) \Lambda_F \ . \tag{1.16}$$

Ici l'égalité est prise dans l'espace de fonctions généralisées K-invariantes sur $\mathfrak{k}$.

Pour terminer, plaçons nous dans le cas idéal où $\mathcal{C} = \{\Phi_\lambda = 0\}$ est une sous-variété, munie d'un fibré normal $\mathcal{N}_\mathcal{C}$ orienté. On constate que (1.15) et (1.12) donnent une factorisation du morphisme naturel $I : \mathcal{H}^*_K(M) \to \mathcal{H}^{-\infty}_K(M)$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^*_K(M) \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[dr, "I"'] & \mathcal{H}^{-\infty}_K(\mathcal{C}) \arrow[d, "i_*"] \\ & \mathcal{H}^{-\infty}_K(M) \end{tikzcd} \tag{1.17}$$

où $\Lambda : \mathcal{H}^*_K(M) \to \mathcal{H}^{-\infty}_K(\mathcal{C})$ est défini par l'équation: $\Lambda(\eta) = i^*(\eta)\,\Lambda_\mathcal{C}$. Comme tout à l'heure, la forme $\Lambda_\mathcal{C} \in \mathcal{H}^{-\infty}_K(\mathcal{C})$ est un inverse de la classe d'Euler équivariante du fibré normal $\mathcal{N}_\mathcal{C}$. Notre factorisation (1.17) ne requiert pas la compacité de la variété M. On note les fortes analogies entre les factorisation (1.17) et (1.9). Dans le cadre analytique où je travaille, l'espace de cohomologie $\mathcal{H}^{-\infty}_K(M)$ est l'analogue de $\mathcal{H}^*_T(M) \otimes_{S(\mathfrak{t}^*)} \mathcal{R}$. Remarquons que dans certain cas, les morphismes d'extensions des coefficients $I_{\mathrm{alg}} : \mathcal{H}^*_T(M) \to \mathcal{H}^*_T(M) \otimes_{S^*(\mathfrak{t})} \mathcal{R}$ et $I : \mathcal{H}^*_K(M) \to \mathcal{H}^{-\infty}_K(M)$ sont *injectifs*: c'est le cas par exemple si l'action est hamiltonienne, et la variété M est compacte.

Comme dans Atiyah-Bott, notre factorisation donne une localisation des intégrales de formes équivariantes. Pour tout $\eta \in \mathcal{H}^*_K(M)$ à support compact sur M, on a l'égalité suivante de fonctions généralisées K-invariantes sur $\mathfrak{k}$

$$\int_M \eta = \int_{\mathcal{C}} i^*(\eta)\Lambda_{\mathcal{C}} \ . \tag{1.18}$$

J'ai beaucoup étudié cette localisation dans le cadre hamiltonien où l'hypothèse de lissité de $\{\Phi_\lambda = 0\}$ est rarement vérifiée. Je parlerai de cela dans la prochaine section. On va conclure cette section avec l'illustration de ce procédé lorsque l'on localise sur les points fixes.

Localisation sur les points fixes. Nous fixons $\beta \in \mathfrak{k}$, et nous procédons à la localisation avec la 1-forme $\lambda = (\beta_M, -)$ qui est invariante par rapport au sous-groupe stabilisateur K_β. On voit ici que $\{\Phi_\lambda = 0\}$ coïncide avec la sous variété M^β des points où le champ de vecteurs β_M s'annule. Le fibré normal $\mathcal{N}_\beta$ de M^β dans M est naturellement orienté: soit $\mathrm{Eul}(\mathcal{N}_\beta)$ sa classe d'Euler K_β-équivariante. On montre dans [43, 45] que la classe de cohomologie $\Lambda_{M^\beta} \in \mathcal{H}^{-\infty}_{K_\beta}(M^\beta)$ satisfaisant (1.15) est égale à la classe définie par la forme

$$\mathrm{Eul}^{-1}_\beta(\mathcal{N}_\beta) := \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Eul}(\mathcal{N}_\beta)(X + is\beta)} \ . \tag{1.19}$$

La formule intégrale (1.18) donne donc dans ce cas

$$\int_M \eta(X) = \lim_{s\to 0^+} \int_{M^\beta} \frac{\eta(X)|_{M^\beta}}{\mathrm{Eul}(\mathcal{N}_\beta)(X + is\beta)} \tag{1.20}$$

pour toute forme η, K_β-équivariante, à support compact. Cette égalité, qui doit être comprises au sens des fonctions généralisées, améliore l'expression (1.10) de Bismut.

Polarisation des poids: La limite (1.19) doit être comprise comme le procédé de polarisation des poids de Guillemin-Lerman-Sternberg [28], effectué directement au niveau des formes différentielles. Considérons l'exemple d'un fibré vectoriel orienté $\mathcal{E} \to M$ muni de l'action d'un tore T tel que $\mathcal{E}^T = M$. Pour tout $\beta \in \mathfrak{t}$ tel que $\mathcal{E}^\beta = M$, on peut définir $\mathrm{Eul}^{-1}_\beta(\mathcal{E})$ par (1.19). On polarise les poids $\{\pm\alpha_1, \cdots, \pm\alpha_p\}$ de l'action de T sur les fibres de $\mathcal{E}$ en convenant que $\alpha^+_k(\beta) > 0 \ \forall k = 1, \ldots, p$. Soit C_β le cône convexe de $\mathfrak{t}^*$ engendré par les α^+_k. On montre dans [43, 45], que la transformée de Fourier $\mathcal{F}(\mathrm{Eul}^{-1}_\beta(\mathcal{E}))$ est supportée par le cône C_β. Si de plus l'action de T sur $\mathcal{E}$ est effective, c'est une mesure *continue, localement polynomiale* de C_β dans $\mathcal{A}(M)$.

2. Actions hamiltoniennes et réduction symplectique

Soit (M, ω) une variété symplectique compacte munie d'une action d'un groupe de Lie compact K. On suppose que la forme symplectique est K-invariante. L'action est dite hamiltonienne si il existe une *application moment* $\Phi : M \to \mathfrak{k}^*$: l'application Φ est équivariante et satisfait les relations

$$d\langle \Phi, X\rangle + \omega(X_M, -) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{k} \ . \tag{2.21}$$

Dans ce cas la forme équivariante fermée $\omega_{\mathfrak{k}}(X) := \omega - \langle \Phi, X\rangle$ est un antécédent de ω à travers l'application $\mathcal{H}^*_K(M) \to \mathcal{H}^*(M), \eta(X) \mapsto \eta(0)$: c'est la *forme symplectique équivariante*.

Dans cette section, on fixe un produit scalaire K-invariant sur $\mathfrak{k}^*$, ce qui permet entre autre d'identifier $\mathfrak{k}$ avec $\mathfrak{k}^*$. Considérons la fonction $\|\Phi\|^2 : M \to \mathbb{R}$. Witten propose dans [64] de localiser *l'intégration* des formes équivariantes sur l'ensemble $\mathrm{Cr}(\|\Phi\|^2)$ des points critiques de la fonction $\|\Phi\|^2$. Pour cela il utilise la 1-forme

$$\lambda = (\mathcal{H}, -) \tag{2.22}$$

où $\mathcal{H}$ est le champ de vecteurs hamiltonien de $\|\Phi\|^2$. Dans ce contexte, l'application $\Phi_\lambda : M \to \mathfrak{k}^*$ définie par $D\lambda(X) = d\lambda - \langle \Phi_\lambda, X\rangle$ vérifie $\{\Phi_\lambda = 0\} = \mathrm{Cr}(\|\Phi\|^2)$. Witten effectua la localisation sur la composante $\Phi^{-1}(0)$ de $\mathrm{Cr}(\|\Phi\|^2)$ lorsque 0 est une valeur régulière de Φ. Ce résultat a été ensuite (re-)démontré par Jeffrey et Kirwan [32]. Donnons-en un bref aperçu.

Si 0 est une valeur régulière de Φ, on peut considérer la *réduction symplectique* en 0, $\mathcal{M}_0 := \Phi^{-1}(0)/K$, qui est une[3] V-variété symplectique. Nous avons dans ce contexte deux morphismes. Le morphisme de Kirwan $\mathrm{Kir}_0 : \mathcal{H}^*_K(M) \to \mathcal{H}^*(\mathcal{M}_0)$ est le composé du morphisme de restriction $\mathcal{H}^*_K(M) \to \mathcal{H}^*_K(\Phi^{-1}(0))$ avec l'isomorphisme de Chern-Weil $\mathcal{H}^*_K(\Phi^{-1}(0)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^*(\mathcal{M}_0)$. Nous avons aussi l'isomorphisme de Kumar-Vergne $\mathrm{kv} : \mathcal{H}^*(\mathcal{M}_0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-\infty}_K(\Phi^{-1}(0))$ définie à la fin de la section 1.1 (voir 1.2). Soit $\eta(X)$ une forme K-équivariante fermée sur M *à coefficients polynomiaux*, et considérons la forme $\eta(X)e^{i\omega_{\mathfrak{k}}(X)}$. La formule de Jeffrey-Kirwan-Witten assure que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\int_M \eta\, e^{i\omega_{\mathfrak{k}}}\right) = \\ (2i\pi)^{\dim K}\, \mathcal{F}\left(\int_{\Phi^{-1}(0)} \mathrm{kv}\circ \mathrm{Kir}_0(\eta\, e^{i\omega_{\mathfrak{k}}})\right) \quad \text{au voisinage de } 0,\end{aligned} \tag{2.23}$$

où $\mathcal{F}$ désigne la transformation de Fourier. La fonction généralisée $\int_{\Phi^{-1}(0)} \mathrm{kv} \circ \mathrm{Kir}_0(\eta\, e^{i\omega_{\mathfrak{k}}})$ est supportée en 0, et sa *multiplicité*[4] *par rapport à la masse de Dirac en* 0 est égale à

$$\frac{1}{|S|}\int_{\mathcal{M}_0} \mathrm{Kir}_0(\eta\, e^{i\omega_{\mathfrak{k}}})$$

où $|S|$ est le cardinal du stabilisateur générique pour l'action de K sur $\Phi^{-1}(0)$. Ainsi le terme de gauche de (2.23) est un mesure polynomiale $P(\xi)d\xi$ avec $P(0) = cst \int_{\mathcal{M}_0} \mathrm{Kir}_0(\eta\, e^{i\omega_{\mathfrak{k}}})$.

Ma thèse a consisté dans la réalisation de la localisation *complète* sur $\mathrm{Cr}(\|\Phi\|^2)$ lorsque K est abélien. Dans [45], je mets en place le procédé général de localisation que j'ai expliqué à la section 1.5, au moyen duquel j'étend le résultat de ma thèse en une localisation cohomologique. Je complète le programme de Witten dans [46], en obtenant des formules d'induction lorsque le groupe est non-abélien.

Dans cette premiere sous-section, je vais résumer les résultats obtenus dans le cadre abélien [43, 45]. Je terminerai avec les résultats que j'ai obtenus dans le cas d'un groupe non-abélien.

[3] "Orbifold" en anglais.

[4] Voir la "convention" que j'ai prise à la fin de la section 1.1.

2.1. **Le cas abélien.** Dans cette partie, nous supposons que $K = T$ est un tore, et on note Φ_T l'application moment. On procède à la localisation au moyen de la 1-forme $\lambda^T = (\mathcal{H}^T, -)$, où $\mathcal{H}^T$ est le hamiltonien de la fonction $\|\Phi_T\|^2$. Dans ce cas $\{\Phi_{\lambda^T} = 0\} = \mathrm{Cr}(\|\Phi_T\|^2)$ se décompose sous la forme

$$\mathrm{Cr}(\|\Phi_T\|^2) = \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}^T} M^\beta \cap \Phi_T^{-1}(\beta)$$

où $\mathcal{B}^T$ est un sous-ensemble fini de $\mathfrak{t} \simeq \mathfrak{t}^*$. D'après (1.13) et (1.14), la forme P_{λ^T} s'écrit

$$\mathrm{P}_{\lambda^T} = \sum_\beta \mathrm{P}^T_\beta\ , \tag{2.24}$$

où chaque forme équivariante P^T_β est supportée sur un voisinage (petit) de $M^\beta \cap \Phi_T^{-1}(\beta)$. En général les sous-ensembles $M^\beta \cap \Phi_T^{-1}(\beta)$ ne sont pas lisses. Pour remédier à cela on considère les applications $\Phi_T - \varepsilon$ et les 1-formes λ^T_ε correspondantes. On aura deux points de vue: l'un *local* et l'autre *global*. Du point de vue local, on cherche, en prenant ε petit, à obtenir une 'désingularisation' de $M^\beta\cap\Phi_T^{-1}(\beta)$. Un lemme de déformation [45, 46] donne alors une expression cohomologique de P^T_β correspondant à cette déformation.

Dans l'autre point de vue, on considère des ε généraux tel que $\mathrm{Cr}(\|\Phi_T - \varepsilon\|^2)$ est lisse, et on obtient une formule cohomologique globale du type (1.17).

Dans ma thèse j'obtiens une décomposition de $\mathrm{Cr}(\|\Phi_T - \varepsilon\|^2)$ paramétrée par une collection $\mathcal{A}$ de sous-espaces affines de $\mathfrak{t}^*$ définie de la manière suivante. La variété M étant compacte, l'action de T sur M possède un nombre fini de types d'orbites: soient $T_1, \dots, T_r$ les sous-groupes de T, stabilisateurs de points de M. Pour chaque $l = 1, \dots, r$ on note $Z^k_l, k = 1, \dots, n_l$ les composantes connexes de M^{T_l} qui ont pour stabilisateur générique le sous-groupe T_l. Les Z^k_l sont des sous-variétés symplectiques T-invariantes de M. Le théorème de convexité d'Atiyah-Guillemin-Sternberg assure que les $\Phi_T(Z^k_l)$ sont des polytopes convexes de $\mathfrak{t}^*$. La collection $\mathcal{A}$ est l'ensemble des sous-espaces affines de $\mathfrak{t}^*$ engendrés par les polytopes $\Phi_T(Z^k_l)$. Pour chaque $\Delta \in \mathcal{A}$, on note T_Δ le sous-tore de T d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_\Delta := \{X \in \mathfrak{t}, \langle a - b, X\rangle = 0\ \forall a, b \in \Delta\}$.

Proposition 2.1 ([43]). *Pour tout $\varepsilon \in \mathfrak{t}^*$, les points critiques de $\|\Phi_T - \varepsilon\|^2$ se mettent sous la forme*

$$\mathrm{Cr}(\|\Phi_T - \varepsilon\|^2) = \bigcup_{\Delta\in\mathcal{A}} M^{T_\Delta} \cap \Phi_T^{-1}(\beta(\varepsilon, \Delta)) \tag{2.25}$$

où $\beta(\varepsilon, \Delta)$ est le projeté orthogonal de ε sur Δ. Pour ε générique, l'ensemble $\mathrm{Cr}(\|\Phi_T - \varepsilon\|^2)$ est une sous-variété de M, la réunion (2.25) est disjointe, et le groupe T/T_Δ agit localement librement sur $C^\varepsilon_\Delta := M^{T_\Delta} \cap \Phi_T^{-1}(\beta(\varepsilon, \Delta))$.

Résulat local. Considérons une composante critique $M^\beta \cap \Phi_T^{-1}(\beta)$ munie d'un voisinage $\mathcal{U}$ tel que $\mathrm{Cr}(\|\Phi_T\|^2) \cap \mathcal{U} = M^\beta \cap \Phi_T^{-1}(\beta)$. Maintenant effectuons la déformation $\Phi_T \to \Phi_T - \varepsilon$. Pour $\mathcal{U}$ convenablement choisi on voit que

$$\mathrm{Cr}(\|\Phi_T - \varepsilon\|^2) \cap \mathcal{U} = \bigcup_{\beta(0,\Delta)=\beta} C^\varepsilon_\Delta$$

pour tout ε suffisamment petit. Ici l'union est restreinte aux sous-espaces affines Δ tels que la projection orthogonale de 0 sur Δ est égale à β. Si ε est de plus générique, l'union précédente est disjointe, et on définit pour chaque Δ la forme $\mathrm{P}^{\varepsilon}_{\Delta}$, qui est supportée au voisinage de C^{ε}_{Δ} (voir (1.13)). Grâce à un lemme de déformation (Proposition 2.6 dans [46]), on a

$$\mathrm{P}^{T}_{\beta} = \sum_{\beta(0,\Delta)=\beta} \mathrm{P}^{\varepsilon}_{\Delta} \qquad \text{dans} \quad \mathcal{H}^{-\infty}_{T}(M). \tag{2.26}$$

Nous donnons maintenant l'expression de la localisation obtenue avec chaque forme $\mathrm{P}^{\varepsilon}_{\Delta}$. Fixons ε générique, que l'on ne suppose plus être petit. Pour chaque Δ, le quotient $\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\Delta} := C^{\varepsilon}_{\Delta}/(T/T_{\Delta})$ est une V-variété munie d'une action triviale du tore T_{Δ}. Dans ce contexte, nous avons deux morphismes. Le premier est celui de Kirwan

$$\mathrm{Kir}_{\Delta} : \mathcal{H}^{*}_{T}(M) \to \mathcal{H}^{*}_{T_{\Delta}}(\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\Delta})$$

qui est le composé de la restriction $\mathcal{H}^{*}_{T}(M) \to \mathcal{H}^{*}_{T}(C^{\varepsilon}_{\Delta})$ et de l'isomorphisme de Chern-Weil $\mathcal{H}^{*}_{T}(C^{\varepsilon}_{\Delta}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{*}_{T_{\Delta}}(\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\Delta})$. L'autre est l'isomorphisme de Kumar-Vergne (voir (1.2)).

$$\mathrm{kv}_{\Delta} : \mathcal{H}^{-\infty}_{T_{\Delta}}(\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\Delta}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-\infty}_{T}(C^{\varepsilon}_{\Delta}) \ .$$

Soient $\beta_{\Delta} := \beta(\varepsilon, \Delta) - \varepsilon \in \mathfrak{t}_{\Delta}$ et N_{Δ} le fibré normal de $M^{T_{\Delta}}$ dans M restreint à C^{ϵ}_{Δ}. Considérons le V-fibré vectoriel $\mathcal{E}_{\Delta} := N_{\Delta}/(T/T_{\Delta})$ sur $\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\Delta}$. Ces données nous permettent de définir $\mathrm{Eul}^{-1}_{\beta_{\Delta}}(\mathcal{E}_{\Delta}) \in \mathcal{H}^{-\infty}_{T_{\Delta}}(\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\Delta})$.

On montre dans [46] que la forme $\mathrm{P}^{\varepsilon}_{\Delta}$ est déterminée par la relation

$$\frac{1}{(2i\pi)^{\dim \Delta}}\ \mathrm{P}^{\varepsilon}_{\Delta}\, \eta = (i_{\Delta})_{*} \Big(\mathrm{kv}_{\Delta}\Big(\mathrm{Kir}_{\Delta}(\eta)\mathrm{Eul}^{-1}_{\beta_{\Delta}}(\mathcal{E}_{\Delta})\Big)\Big) \tag{2.27}$$

pour tout $\eta \in \mathcal{H}^{*}_{T}(M)$. Ici i_{Δ} désigne l'inclusion de C^{ε}_{Δ} dans M. Il faut comprendre cette formule comme un *mélange* du cas où Δ est un point, et celui où $\Delta = \mathfrak{t}^{*}$.

• $\Delta = \{p\}$ est un sommet du polytope $\Phi_{T}(M)$. Dans ce cas $C^{\varepsilon}_{\Delta} = \phi^{-1}_{T}(p)$ est une composante connexe F de M^{T}, et le tore T_{Δ} est égal à T. L'expression (2.27) devient

$$\mathrm{P}^{\varepsilon}_{\{p\}}\eta = (i_{F})_{*}\Big(i^{*}_{F}(\eta)\mathrm{Eul}^{-1}_{\beta_{p}}(\mathcal{N}_{F})\Big) \ ,$$

avec $\beta_{p} = p - \varepsilon$.

• $\Delta = \mathfrak{t}^{*}$. Ici $C^{\varepsilon}_{\Delta} = \phi^{-1}_{T}(\varepsilon)$ et $\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\Delta}$ correspond à la variété réduite $\mathcal{M}_{\varepsilon} := \phi^{-1}_{T}(\varepsilon)/T$. L'expression (2.27) correspond dans ce cas à la localisation de Jeffrey-Kirwan-Witten

$$\frac{1}{(2i\pi)^{\dim T}}\ \mathrm{P}^{\varepsilon}_{\mathfrak{t}^{*}}\, \eta = (i_{\varepsilon})_{*} \circ \mathrm{kv}_{\varepsilon} \circ \mathrm{Kir}_{\varepsilon}(\eta) \ . \tag{2.28}$$

Il est intéressant de visualiser le morphisme $(i_{\varepsilon})_{*} \circ \mathrm{kv}_{\varepsilon} \circ \mathrm{Kir}_{\varepsilon}$:

$$\mathcal{H}^{*}_{T}(M) \xrightarrow{\mathrm{Kir}_{\varepsilon}} \mathcal{H}^{*}(\mathcal{M}_{\varepsilon}) \xrightarrow{\mathrm{kv}_{\varepsilon}} \mathcal{H}^{-\infty}_{T}(\Phi^{-1}_{T}(\varepsilon)) \xrightarrow{(i_{\varepsilon})_{*}} \mathcal{H}^{-\infty}_{T}(M) \ . \tag{2.29}$$

Résultat gobal. Pour ε générique, l'expression (2.27) obtenue pour chaque Δ définit une localisation globale au niveau de la cohomologie (voir 1.17). On a la factorisation suivante

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_T^*(M) \arrow[r, "\mathbf{kir}"] \arrow[dr, "I"'] & \oplus_\Delta \mathcal{H}_{T_\Delta}^*(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon) \arrow[d, "\mathbf{j}"] \\ & \mathcal{H}_T^{-\infty}(M) \end{tikzcd} \tag{2.30}$$

où $\mathbf{kir} := \oplus \mathrm{Kir}_\Delta$, et le morphisme $\mathbf{j}$ est défini par

$$\mathbf{j}(\eta) = i_* \left(\sum_\Delta (2i\pi)^{\dim \Delta} \ \mathrm{kv}_\Delta \left(\eta \, \mathrm{Eul}_{\beta_\Delta}^{-1}(\mathcal{E}_\Delta) \right) \right) \ .$$

Rappelons que le morphisme I d'extension des coefficients est injectif, ce qui entraine que $\mathbf{kir}$ est aussi injectif.

Dans la prochaine sous-section, on va voir que notre *résultat local* permet d'obtenir assez facilement les formules de saut de V. Guillemin et J. Kalkman [50].

2.2. **Les formules de saut de Guillemin-Kalkman.** On travaille dans les mêmes conditions qu'à la section précédente. Par commodité, on suppose que l'action de T sur M est effective. On se fixe pour cette section une forme $\eta \in \mathcal{H}_T^*(M)$. A chaque valeur $\xi \in \mathfrak{t}^*$ régulière de Φ_T, on peut associer

$$I(\xi) := \frac{1}{|S_\xi|} \int_{\mathcal{M}_\xi} \mathrm{Kir}_\xi(\eta)$$

où $|S_\xi|$ est le cardinal du stabilisateur générique de T sur $\Phi^{-1}(\xi)$. On va voir que notre technique de localisation permet de retrouver les propriétés de $\xi \to I(\xi)$: tout d'abord le fait que cet application est localement constante, et ensuite les formules de saut de Guillemin-Kalkman.

Tout d'abord intégrons (2.28), en prenant $\varepsilon = \xi$. La fonction généralisée $\int_M \mathrm{P}_{\mathfrak{t}^*}^\xi \eta$ est égale à $(2i\pi)^{\dim T} \int_{\Phi_T^{-1}(\xi)} \mathrm{kv}_\xi \circ \mathrm{Kir}_\xi(\eta)$. On a remarqué à la fin de la section 1.1 que cette dernière fonction généralisée est supportée en 0, et que sa multiplicité par rapport à la masse de Dirac en 0 est égale à $\frac{(2i\pi)^{\dim T}}{|S_\xi|} \int_{\mathcal{M}_\xi} \mathrm{Kir}_\xi(\eta)$. Nous avons donc une caractérisation de $I(\xi)$, comme la multiplicité par rapport à la masse de Dirac en 0 de la fonction généralisée $\frac{1}{(2i\pi)^{\dim T}} \int_M \mathrm{P}_{\mathfrak{t}^*}^\xi \eta$.

L'application I est localement constante. Considérons une valeur régulière $\xi \in \mathfrak{t}^*$ de Φ. Quitte à modifier Φ_T en $\Phi_T - \xi$, on peut supposer que $\xi = 0$. Le seul sous-espace affine Δ qui contient la valeur régulière 0 est $\mathfrak{t}^*$.

Nous procédons à la déformation de 0 en une valeur proche ξ', et utilisons la relation (2.26) avec $\beta = 0$:

$$\mathrm{P}_{\mathfrak{t}^*}^0 = \mathrm{P}_{\mathfrak{t}^*}^{\xi'} \qquad \text{dans} \ \ \mathcal{H}_T^{-\infty}(M) \ ,$$

ce qui démontre que $I(0) = I(\xi')$.

Les formules de saut. Considérons un hyperplan $\Delta_o \in \mathcal{B}$ séparant deux régions de valeurs régulières de Φ. Dans ce cas le sous-tore T_{Δ_o} est de dimension 1. Soit $a \in \Delta_o$ tel que $C_{\Delta_o}^a := \Phi^{-1}(a) \cap M^{T_{\Delta_o}}$ est une sous variété munie d'une action localement libre de T/T_{Δ_o}. Quitte à modifier Φ_T en $\Phi_T - a$, on peut supposer que $a = 0$. Les seuls sous-espaces affines Δ qui contiennent 0 sont Δ_o et $\mathfrak{t}^*$.

Nous utilisons la relation (2.26) avec $\beta = 0$, et l'appliquons à des valeurs régulières de Φ, $\xi_\pm$, proches de $a(= 0)$, qui sont de chaque côté de Δ_o, et qui se projètent toutes deux sur a. Ceci donne $\mathrm{P}^{\xi_+}_{\mathfrak{t}^*} + \mathrm{P}^{\xi_+}_{\Delta_o} = \mathrm{P}^{\xi_-}_{\mathfrak{t}^*} + \mathrm{P}^{\xi_-}_{\Delta_o}$ dans $\mathcal{H}^{-\infty}_T(M)$. Les relations (2.27) donnent après intégration

$$\begin{aligned}(2.31)\qquad \int_{\phi^{-1}(\xi_+)} \mathrm{kv}_{\mathfrak{t}^*} \circ \mathrm{Kir}_{\xi_+}(\eta) \; - \; \int_{\phi^{-1}(\xi_-)} \mathrm{kv}_{\mathfrak{t}^*} \circ \mathrm{Kir}_{\xi_-}(\eta) \\ = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^a_{\Delta_o}} \mathrm{kv}_{\Delta_o} \Big(\mathrm{Kir}_{\Delta_o}(\eta) \Big[\mathrm{Eul}^{-1}_{\beta}(\mathcal{E}_{\Delta_o}) - \mathrm{Eul}^{-1}_{-\beta}(\mathcal{E}_{\Delta_o}) \Big] \Big)\end{aligned}$$

où $\beta = \xi_+ - \xi_-$ est un vecteur non-nul de $\mathfrak{t}_{\Delta_o}$.

Dans notre situation, $\mathfrak{t}_{\Delta_o}$ est de dimension 1. De plus, la forme d'Euler équivariante $\mathrm{Eul}(\mathcal{E}_{\Delta_o})$, vue comme un polynôme sur $\mathfrak{t}_{\Delta_o}$ à valeur dans $\mathcal{A}(\mathcal{M}^a_{\Delta_o})$, est inversible de manière $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathfrak{t}_{\Delta_o} - \{0\}$. Comme $\mathrm{Eul}^{-1}_{\pm\beta}(\mathcal{E}_{\Delta_o})$ sont deux inverses de $\mathrm{Eul}(\mathcal{E}_{\Delta_o})$, on en conclut que $\mathrm{Eul}^{-1}_{\beta}(\mathcal{E}_{\Delta}) - \mathrm{Eul}^{-1}_{-\beta}(\mathcal{E}_{\Delta})$ est une fonction généralisée supportée en 0. On peut alors définir une application *résidu*

$$(2.32)\qquad \mathrm{Res}_{\Delta_o} : \mathcal{H}^*_{T_{\Delta_o}}(\mathcal{M}^a_{\Delta_o}) \to \mathcal{H}^*(\mathcal{M}^a_{\Delta_o})$$

de la manière suivante. Pour toute forme η, son résidu $\mathrm{Res}_{\Delta_o}(\eta)$ est la composante par rapport à la masse de Dirac en 0 de la fonction généralisée $(2i\pi)^{-1}\eta\,(\mathrm{Eul}^{-1}_{\beta}(\mathcal{E}_{\Delta_o}) - \mathrm{Eul}^{-1}_{-\beta}(\mathcal{E}_{\Delta_o}))$.

En considérant les multiplicités par rapport à la masse de Dirac en 0 dans l'égalité (2.31), on obtient la formule de saut de Guillemin-Kalkman [27]

$$I(\xi_+) - I(\xi_-) = \frac{1}{|S_\Delta|} \int_{\mathcal{M}^a_{\Delta_o}} \mathrm{Res}_{\Delta_o}\left(\mathrm{Kir}_{\Delta_o}(\eta)\right).$$

2.3. **Le cas non-abélien.** Dans cette partie on considère l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie compact K. Soit T un tore maximal de K, et W le groupe de Weyl. On note respectivement Φ_K et Φ_T les applications moments pour les actions de K et T sur M. Rappelons que Φ_T est le composé de Φ_K avec la projection $\mathfrak{k}^* \to \mathfrak{t}^*$.

Dans le contexte non-abélien, on ne peut plus espérer 'désingulariser' les points critiques de $\|\Phi_K\|^2$, en prenant $\Phi_K - \varepsilon$, car cette dernière application n'est généralement plus K-équivariante. Dans [46], on a contourné cette difficulté en démontrant une propriété d'*induction*.

Les points critiques de $\|\Phi_K\|^2$ admettent la décomposition disjointe [35]

$$(2.33)\qquad \mathrm{Cr}(\|\Phi_K\|^2) = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}^K} K(M^\beta \cap \Phi_K^{-1}(\beta))$$

où $\mathcal{B}^K$ est une partie finie d'une chambre de Weyl $\mathfrak{t}^*_+$. Pour les points critiques de $\|\Phi_T\|^2$, on a de même $\mathrm{Cr}(\|\Phi_T\|^2) = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}^T} M^\beta \cap \Phi_T^{-1}(\beta)$. Cette denière décomposition est équivariante par rapport au groupe de Weyl. Ainsi $\mathcal{B}^T = W.(\mathcal{B}^T \cap \mathfrak{t}^*_+)$, et $\mathcal{B}^K \subset \mathcal{B}^T \cap \mathfrak{t}^*_+$.

Pour chaque $\beta \in \mathcal{B}^K$, on définit la forme équivariante fermée P^K_β définie avec la 1-forme (2.22), et supportée sur voisinage de $K(M^\beta \cap \Phi_K^{-1}(\beta))$ (voir (1.13)). Ici le lemme (1.5) donne la partition

$$(2.34)\qquad 1_M = \sum_{\beta \in \mathcal{B}^K} \mathrm{P}^K_\beta \qquad \text{dans} \quad \mathcal{H}^{-\infty}_K(M)\ .$$

On procède de même avec le tore T. Pour chaque $\beta \in \mathcal{B}^T$, on définit $\mathrm{P}^T_\beta \in \mathcal{H}^{-\infty}_T(M)$ supportée sur un voisinage de $M^\beta \cap \Phi_T^{-1}(\beta)$.

Soit $\mathrm{Ind}_T^K : \mathcal{H}^{-\infty}_T(M) \longrightarrow \mathcal{H}^{-\infty}_K(M)$ le morphisme d'induction défini par Kumar-Vergne dans [37]. Lorsque $M = \{.\}$, c'est le morphisme d'induction usuel Ind_T^K : $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}) \longrightarrow \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{k})^K$. Dans la suite, le polynôme $Y \in \mathfrak{t} \mapsto \det_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t}}(ad(Y))$ est noté $\Pi^2_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t}}$. La formule intégrale de Weyl s'exprime au moyen de Ind_T^K sous la forme suivante: $f = |W|^{-1}\mathrm{Ind}_T^K(\Pi^2_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t}} f|_{\mathfrak{t}})$ pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{k})^K$.

Ce morphisme d'induction est 'fonctoriel' de la manière suivante. Si M est orientée, le diagramme suivant est commutatif.

(2.35)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^{-\infty}_T(M) \arrow[r, "\mathrm{Ind}_T^K"] \arrow[d, "\int_M"'] & \mathcal{H}^{-\infty}_K(M) \arrow[d, "\int_M"'] \\
\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}) \arrow[r, "\mathrm{Ind}_T^K"] & \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{k})^K.
\end{tikzcd}$$

L'un des résultat principaux de [46] est la relation d'induction suivante. Pour chaque $\beta \in \mathcal{B}^K$, on note W_β le sous-groupe des éléments de W laissant β fixe, et $|W_\beta|$ son cardinal.

Proposition 2.2. [46] *Les formes équivariantes* $(\mathrm{P}^T_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}^T}$, *et* $(\mathrm{P}^K_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}^K}$ *satisfont les relations suivantes: pour tout* $\beta \in \mathcal{B}^K$ *on a*

$$\mathrm{P}^K_\beta = \frac{1}{|W_\beta|}\mathrm{Ind}_T^K\left(\Pi^2_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t}}\,\mathrm{P}^T_\beta\right) \quad \text{dans} \quad \mathcal{H}^{-\infty}_K(M)\ .$$

Sinon, pour $\beta \in \mathcal{B}^T$ *tel que* $\beta \notin W.\mathcal{B}^K$, *on a* $\mathrm{Ind}_T^K\left(\Pi^2_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t}}\,\mathrm{P}^T_\beta\right) = 0$ *dans* $\mathcal{H}^{-\infty}_K(M)$.

Le cas $\beta = 0$ est particulièrement intéressant. L'égalité $\mathrm{Ind}_T^K(\Pi^2_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t}}\,\mathrm{P}^T_0) = |W|\mathrm{P}^K_0$ montre que pour tout $\eta \in \mathcal{H}^*_K(M)$, on a l'égalité de fonctions généralisées suivante

$$|W|\int_M \mathrm{P}^K_0\eta = \mathrm{Ind}_T^K\left(\Pi^2_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t}}\int_M \mathrm{P}^T_0\eta|_{\mathfrak{t}}\right)\ .$$

Supposons que 0 est une valeur régulière de Φ_K et de Φ_T. Alors les deux termes de l'égalité précédente sont des fonctions généralisées supportées en 0. Si on prend les multiplicités de la masse de Dirac en 0, on obtient

$$\frac{|W|}{|S^K|}\int_{\mathcal{M}^K_0}\mathrm{Kir}^K_0(\eta) = \frac{1}{|S^T|}\int_{\mathcal{M}^T_0}\mathrm{Kir}^T_0(\Pi^2_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t}}\eta|_{\mathfrak{t}}) \tag{2.36}$$

Cette dernière relation a aussi été obtenue par Martin [38] avec des techniques différentes.

Nous terminons cette section en donnant une application de la proposition 2.2.

Les fonctions de partition de Witten. Dans [64], Witten introduit les fonctions de partition Z définies par

$$Z(u) := \int_{\mathfrak{k}} e^{-u\|X\|^2/2}\left(\int_M \eta e^{i\omega_{\mathfrak{k}}}\right)(X)dX\ , \quad u > 0,$$

où η est une forme K-équivariante fermée à coefficients *polynômiaux*, et $\omega_{\mathfrak{k}}$ est la forme symplectique équivariante.

En supposant que 0 est une valeur régulière de Φ_K, Witten donne les premiers termes du développement asymptotique de $Z(u)$ lorsque $u \to 0^+$: $Z(u) = Z_0(u) + \mathcal{O}(e^{-\rho/u})$ avec $\rho > 0$ et $Z_0(u)$ est un polynôme. Il obtient une expression explicite de $Z_0(u)$ sous la forme suivante

$$Z_0(u) = cst \int_{\mathcal{M}_0^K} \mathrm{Kir}_0(\eta e^{i\omega_{\mathfrak{k}}}) e^{-u\|\Omega\|^2/2}.$$

Dans cette expression Ω est la courbure du fibré principal $\Phi_K^{-1}(0) \to \mathcal{M}_0^K$. Jeffrey et Kirwan ont donné une démonstration (rigoureuse) de cette formule dans [32]. Pour le reste $\mathcal{O}(e^{-\rho/u})$, Witten conjectura une expression de la forme $\sum_F Z_F(u)$, paramétrée par les composantes de $\mathrm{Cr}(\|\Phi_K\|^2)$.

Dans [46], j'obtiens le développement asymptotique complet de $Z(u)$, *sans supposer que* 0 *est une valeur régulière de* Φ_K. Rappelons qu'un ensemble fini $\mathcal{B}^K \subset \mathfrak{t}^*$ paramètre $\mathrm{Cr}(\|\Phi_K\|^2)$.

Proposition 2.3 ([46])**.** *La fonction* $Z(u)$ *admet la décomposition suivante*

$$Z(u) = u^{-N} \sum_{\beta \in \mathcal{B}^K} e^{-\frac{\|\beta\|^2}{2u}} h_\beta(\sqrt{u}), \quad u > 0.$$

Dans cette expression les fonctions $h_\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *sont* $\mathcal{C}^\infty$*,et la fonction* h_0 *est* toujours polynomiale. *Si* 0 *est une valeur régulière de* Φ_K*, la fonction* $Z_0(u) = u^{-N} h_0(\sqrt{u})$ *est polynomiale. L'entier* N *est égal à* $\dim K + d(\eta)$*, où* $d(\eta)$ *est le degré (en X) de* η*.*

2.4. **Mesures de Duistermaat-Heckman et orbites coadjointes.** Nous travaillons toujours dans le contexte d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie compact K sur une variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$. Nous supposons ici que l'application moment Φ est propre. Un invariant intéressant est l'image directe $\mathrm{DH}(M) := \Phi_*(\frac{\omega^n}{n!})$ de la mesure de Liouville par l'application moment: c'est une mesure K-invariante sur $\mathfrak{k}^*$ supportée par $\Phi(M)$. Lorsque M est compacte, $\mathrm{DH}(M)$ s'exprime comme la transformée de Fourier

$$\mathrm{DH}(M) = \frac{1}{i^n} \mathcal{F}\left(\int_M e^{i\omega_{\mathfrak{k}}} \right) , \tag{2.37}$$

où $\omega_{\mathfrak{k}}$ est l'application moment équivariante.

Cas abélien.

Dans [20], Duistermaat et Heckman montrent que pour $K = T$ abélien et M compacte, la mesure $\mathrm{DH}(M)$ est polynomiale sur chaque sous-polytope de $\Phi(M)$ qui est composé de valeurs régulières de Φ. Si on utilise la formule de Berline-Vergne dans (2.37), et un vecteur $\beta \in \mathfrak{t}$ tel que $M^\beta = M^T$, on obtient

$$\mathrm{DH}(M) = \sum_{F \subset M^T} \delta_{\Phi(F)} * \mathrm{DH}_\beta^F \tag{2.38}$$

Dans cette expression on somme sur les composantes connexes de M^T, $*$ est le produit de convolution et $\delta_{\Phi(F)}$ est la mesure de Dirac en $\Phi(F)$. Chaque terme DH_β^F est une mesure localement polynomiale supportée par le cône $\sum \mathbb{R}\alpha_i^+$, où α_i^+ sont les poids polarisés par β, de l'action de T sur $\mathbf{T}M|_F$.

Prato et Wu ont montré que l'expression (2.38) est encore valable lorsque M est *non-compacte* si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(1) la fonction $\langle \Phi, \beta \rangle$ est propre et bornée inférieurement

(2) l'ensemble des points fixes M^T est fini.

Dans [46], je montre que la deuxième condition n'est pas nécessaire, c'est à dire que d'une part on peut autoriser des sous-variétés de points fixes, et d'autre part l'ensemble M^T peut avoir un nombre de composantes connexes infini.

Un cas non-abélien: les orbites coadjointes de groupes réels semi-simples.

Un exemple important d'action hamiltonienne sur des variétés non-compactes, mais possédant une application moment *propre* est le suivant. Soit G un groupe réel semi-simple connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Ici K désigne un sous-groupe compact maximal de G. Soit $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ une orbite coadjointe de G, munie de la forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau. On note $\Phi_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \mathfrak{k}^*$ l'application moment relative à l'action de K: c'est le composé de l'inclusion $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ avec la projection $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{k}^*$.

On remarque tout d'abord que l'application moment $\Phi_{\mathcal{O}}$ est *propre* si et seulement si $\mathcal{O}$ est *fermée* dans $\mathfrak{g}^*$ [47]. Dans ce cas l'égalité (2.37) est encore valable, parce que l'intégrale

$$F_{\mathcal{O}}(X) = \int_{\mathcal{O}} e^{i\omega_{\mathfrak{k}}(X)}$$

définit une fonction généralisée *tempérée*. La fonction généralisée $F_{\mathcal{O}}$ a été calculée dans plusieurs situations:

i) Lorsque $\mathcal{O}$ est elliptique régulière, Rossmann [53] a calculé $F_{\mathcal{O}}(X)$ pour tout élément régulier de $\mathfrak{k}$ (i.e. là où $F_{\mathcal{O}}$ est lisse).

ii) Lorsque $\mathcal{O}$ est régulière (i.e. de dimension maximale), $F_{\mathcal{O}}$ a été calculé par Sengupta [56].

iii) Lorsque $\mathcal{O}$ est elliptique, $F_{\mathcal{O}}$ a été calculé par Duflo-Vergne [18].

Dans [47], j'ai complété le tableau en calculant la fonction généralisée $F_{\mathcal{O}}$ dans le cas général. Je ne vais pas donner le résultat mais donner un de ses corollaires.

La fonction $\|\Phi_{\mathcal{O}}\|^2$ a pour points critiques une K-orbite composée des points qui réalisent le minimum de $\|\Phi_{\mathcal{O}}\|^2$: notons la $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$. Un théorème (local) de forme normale définit une variété symplectique $\widetilde{\mathcal{O}}$, munie d'une action hamiltonienne de K avec application moment propre, qui est d'autre part un fibré vectoriel au dessus de $\mathcal{C}$. Le modèle pour un voisinage de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{O}$ est le voisinage de la section nulle du fibré vectoriel $\widetilde{\mathcal{O}} \to \mathcal{C}$. Notre calcul de $F_{\mathcal{O}}$ montre que

$$\mathrm{DH}(\mathcal{O}) = \mathrm{DH}(\widetilde{\mathcal{O}}) .$$

Ce résultat est assez surprenant car le *modèle local* $\widetilde{\mathcal{O}}$ se révèle être suffisant pour calculer l'invariant *global* $\mathrm{DH}(\mathcal{O})$.

3. Quantification géométrique et K-multiplicités

Soient (M, ω) une variété symplectique compacte, munie de l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie compact connexe K. L'objet de la quantification géométrique est de *quantifier* l'action de K sur M, c'est à dire de lui associer une représentation $\mathcal{Q}(M)$ du groupe K. Ici nous considérons des quantifications où $\mathcal{Q}(M)$ est une *différence* de deux représentations de K: $\mathcal{Q}(M)$ appartient à l'anneau $R(K)$ des des représentations de K. Nous considérons ici deux types de quantifications qui utilisent toutes deux la notion de fibré en droites de Kostant-Souriau.

On appelle *fibré de Kostant-Souriau* un fibré en droites hermitien (L, h) muni d'une connection hermitienne ∇ dont la courbure est $-i\omega$. Un tel fibré existe si et seulement si la forme symplectique ω est *intégrale* c'est à dire si

$$\left[\frac{\omega}{2\pi}\right] \in \mathcal{H}^2(M, \mathbb{Z}). \tag{3.39}$$

Si L est un fibré de Kostant-Souriau, on a une action de $\mathfrak{k}$ sur les sections de $L \to M$ donnée par la formule de Kostant

$$\mathcal{L}(X) = \nabla_{X_M} + i\langle \Phi, X\rangle, \quad X \in \mathfrak{k}. \tag{3.40}$$

Nous supposerons ici que l'action hamiltonienne de K sur M se relève en une action sur le fibré L, laissant les structures (h, ∇) invariantes.

Une des étapes de la quantification est le choix d'une polarisation. Ici nous considérerons des polarisations totalement complexes, i.e. provenant d'une structure presque complexe J sur M, que nous ne supposerons pas intégrables à priori.

La quantification de type kählérien. Une structure presque complexe K-invariante J définit un caractère de Riemann-Roch

$$RR^{K,J}(M, -) : \mathbf{K}_K(M) \to R(K)\ . \tag{3.41}$$

Ici $\mathbf{K}_K(M)$ désigne la $\mathbf{K}$-théorie des fibrés vectoriels complexes équivariants sur M. Si (M, J) est une variété complexe, et si $E \to M$ est un fibré vectoriel holomorphe, nous avons $RR^{K,J}(M, E) = \sum_j (-1)^j \mathcal{H}^j(M, \mathcal{O}(E))$, où $\mathcal{H}^*(M, \mathcal{O}(E))$ est le groupe de cohomologie sur M du faisceau $\mathcal{O}(E)$ des sections holomorphes de E. Je donne une définition topologique du morphisme $RR^{K,J}(M, -)$ à la section 3.5.

Pour la quantification de type kählérien on choisit une structure presque complexe K-invariante J qui est *compatible* avec ω: $\omega(-, J-)$ définit une structure riemanienne sur M.

Définition 3.1. *Une variété K-hamiltonienne compacte (M, ω) est $\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}$-*préquantifiée *si elle possède un fibré de Kostant-Souriau L équivariant. Dans ce cas, la quantification de type kählérien de l'action hamiltonienne de K sur (M, ω) est*

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(M) := RR^{K,J}(M, L) \in R(K), \tag{3.42}$$

où J est une structure presque complexe invariante compatible avec ω.

Remarque 3.2. *La quantification $\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(M)$ ne dépend pas du choix du fibré L de Kostant-Souriau, sachant que la classe de Chern (équivariante) de L est fixé.*

La quantification Spin^c**.** Le cadre ici a beaucoup de similitude avec ce que l'on appelle communément la correction métaplectique. Considérons une structure presque complexe équivariante J *quelconque*, et le fibré en droites complexes $\kappa := \det_{\mathbb{C}}^{-1}(TM)$ correspondant. L'hypothèse de travail est que

$$\left[\frac{\omega}{2\pi}\right] + \frac{1}{2}\mathrm{c}_1(\kappa) \quad \in \mathcal{H}^2(M, \mathbb{Z}). \tag{3.43}$$

où c_1 désigne la première classe de Chern.

Définition 3.3. *Nous noterons $\tilde{L}$ le fibré en droites complexes qui a pour première classe de Chern $\left[\frac{\omega}{2\pi}\right] + \frac{1}{2}\mathrm{c}_1(\kappa)$. Un tel fibré sera appelé fibré de Kostant-Souriau* tordu.

Si le fibré κ admet une racine carrée $\kappa^{1/2}$, les conditions (3.39) et (3.43) coïncident et on a $\tilde{L} = L \otimes \kappa^{1/2}$, où L est un fibré de Kostant-Souriau sur (M, ω). Dans tout les cas le produit

$$L_{2\omega} := \tilde{L}^2 \otimes \kappa^{-1} \tag{3.44}$$

est un fibré de Kostant-Souriau sur $(M, 2\omega)$. Comme tout à l'heure, on a une action de $\mathfrak{k}$ sur les sections de $\tilde{L} \to M$. Nous parlerons de fibré de Kostant-Souriau tordu équivariant lorsque l'action de K sur M se relève au fibré $\tilde{L}$.

La condition (3.43) peut se réécrire en terme de structures Spin^c. La structure presque complexe J détermine une structure Spin^c qui a pour fibré canonique le fibré κ^{-1}. Si on tord cette structure Spin^c par le fibré en droites $\tilde{L}$, on obtient une nouvelle structure Spin^c qui a pour fibré canonique le fibré de Kostant-Souriau $L_{2\omega}$ définie en (3.44). Réciproquement, l'existence de cette dernière structure Spin^c implique l'existence d'un fibré Kostant-Souriau *tordu* $\tilde{L}$.

Définition 3.4. *Une variété K-hamiltonienne compacte (M, ω) est* Spin^c-préquantifiée *si elle possède une structure* Spin^c *équivariante, de fibré canonique un fibré de Kostant-Souriau sur $(M, 2\omega)$. Comme on l'a brièvement rappelé cette condition est équivalente à l'existence d'un fibré de Kostant-Souriau* tordu *équivariant $\tilde{L}$, associé à une structure presque complexe invariante J. Dans ce cas la quantification* Spin^c *de l'action hamiltonienne de K sur (M, ω) est*

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{spin}}(M) := \varepsilon\, RR^{K,J}(M, \tilde{L}) \ \in \ R(K), \tag{3.45}$$

où $\varepsilon = \pm$ est le rapport entre les orientations de M induites par la structure presque complexe et la forme symplectique.

Remarque 3.5. *La quantification peut être aussi définie comme l'indice équivariant de l'opérateur de Dirac associé à la structure* Spin^c *qui a pour fibré canonique le fibré de Kostant-Souriau $L_{2\omega}$ définie en (3.44).*

Remarque 3.6. *Comme tout à l'heure, la quantification $\mathcal{Q}_{\mathrm{spin}}(M)$ ne dépend pas du choix du couple $(J, \tilde{L})$.*

3.1. **La quantification commute à la réduction.** Dans [29] Guillemin et Sternberg obtiennent le résultat suivant. Soient (M, J, ω) une variété kählérienne compacte telle que ω est entière. Soit L le fibré de Kostant-Souriau holomorphe associé. Soit K un groupe de Lie compact connexe agissant de manière holomorphe sur $L \to M$: l'action de K sur (M, ω) est alors hamiltonienne, d'application moment Φ. Supposons que K agisse librement sur $\Phi^{-1}(0)$. Alors la variété réduite $\mathcal{M}_0 := \Phi^{-1}(0)/K$ est une variété kählérienne (lisse) munie d'une forme symplectique canonique ω_0, et le fibré en droites $\mathcal{L}_0 := L|_{\Phi^{-1}(0)}/K$ est un fibré de Kostant-Souriau holomorphe sur $(\mathcal{M}_0, \omega_0)$. Guillemin et Sternberg montrent que l'opération de restriction induit un isomorphisme

$$[\Gamma_{\mathrm{hol}}(M, L)]^K \simeq \Gamma_{\mathrm{hol}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}_0)\ . \tag{3.46}$$

où $[-]^K$ désigne le sous-espace des vecteurs K-invariants. Si le fibré L est suffisamment ample, on sait d'après le théorème d'annulation de Kodaira que les autres groupes de cohomologie $\mathcal{H}^j(M, \mathcal{O}(L))$ s'annulent. L'équation (3.46) devient alors

$$[\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(M)]^K = \mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{M}_0) \ . \tag{3.47}$$

Ici l'égalité est prise dans $\mathbb{Z}$. Guillemin et Sternberg conjecturent alors que (3.47) est encore vraie dans le cadre symplectique: c'est alors pendant une quinzaine d'année la conjecture intitulée "*La quantification commute à la réduction*".

Notons $\pi \in \mathcal{C}^\infty(K)$ la trace de la représentation virtuelle $\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(M)$. Ce que l'on cherche ici est la valeur de l'entier $[\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(M)]^K$, qui n'est autre que l'intégrale $\int_K \pi(k)dk$, où dk est la mesure de Haar sur K normalisée par $\int_K dk = 1$.

L'idée naturelle pour aborder ce problème est d'utiliser la formule de Atiyah-Bott-Segal-Singer [3] pour l'indice équivariant. Dans la forme donnée par Berline-Vergne [5], cette formule de l'indice donne pour tout $k \in K$

$$\pi(ke^X) = \int_{M^k} \eta_k(X), \quad X \in \{a \in \mathfrak{k}, k \cdot a = a\}, \tag{3.48}$$

où $\eta_k(X)$ est une forme caractéristique équivariante sur la sous-variété M^k des points fixés par k. On remarque rapidement que (3.48) est difficilement utilisable pour calculer l'intégrale $\int_K \pi(k)dk$. Il faut en fait attendre la "localisation non-abélienne" de Witten, pour que de nombreux mathématiciens[5] s'attaquent à cette conjecture. Elle sera finalement complètement démontrée par Meinrenken et Meinrenken-Sjamaar [41, 42]. Rappelons quelques faits concernant le travail effectué pour démontrer cette conjecture. On pourra trouver d'autres explications et références dans [57, 62].

Tout d'abord la démonstration de (3.47) s'est révélée beaucoup plus difficile lorsque le groupe K est non-abélien. Dans le cas abélien Duistermaat, Guillemin, Meinrenken, Vergne et Wu ont apporté différentes preuves [25, 40, 21, 61]. Lorsque le groupe est non-abélien, voici les travaux qui démontrent (3.47) lorsque 0 est une valeur régulière de l'application moment.

- dans [41] Meinrenken utilise la technique de coupure symplectique non-abélienne développée par Woodward,
- dans [33] Jeffrey et Kirwan démontrent (3.47) sous une forme asymptotique (en remplacant L par $L^{\otimes k}$), mais en ne faisant aucune hypothèse de positivité sur la structure presque complexe,
- dans [59] Tian et Zhang démontrent (3.47) par une approche analytique inspirée des travaux de Bismut et Lebeau.

Finalement Meinrenken et Sjamaar obtiennent (3.47) dans le cas général où 0 n'est pas forcément une valeur régulière de l'application moment [42]. Dans le même temps, Tian et Zhang adaptent leur technique pour traiter le cas non-régulier[6] [60].

Pour donner un sens à (3.47) dans le cas non-régulier, Meinrenken et Sjamaar définissent $\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{M}_0)$ au moyen d'une désingularisation de $\mathcal{M}_0$. Ils peuvent alors calculer les K-multiplicités de $\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(M)$ grâce au "shifting trick".

---

[5] et mathématiciennes !

[6] Néanmoins ils ne traitent que le cas où le stabilisateur générique de K sur M est fini.

On paramètre le dual unitaire de K par l'ensemble Λ^*_+ des poids dominants d'une chambre de Weyl. Pour chaque $\mu \in \Lambda^*_+$ l'orbite coadjointe $K \cdot \mu$ munie de sa forme de Kirillov-Kostant-Souriau est préquantifiée et

$$V_\mu := \mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(K \cdot \mu)$$

est la représentation irréductible de K de plus haut poids μ. On voit aussi que la représentation duale V^*_μ s'identifie avec $\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(\overline{K \cdot \mu})$, où $\overline{K \cdot \mu}$ est l'orbite coadjointe munie de l'opposée de la forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau. Pour chaque $\mu \in \Lambda^*_+$, la multiplicité de V_μ dans $\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(M)$ est alors

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(M) \otimes V^*_\mu\right]^K &= \left[\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(M) \otimes \mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(\overline{K \cdot \mu})\right]^K \\ &= \left[\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(M \times \overline{K \cdot \mu})\right]^K \\ &= \mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}\left((M \times \overline{K \cdot \mu})_0\right) \end{aligned} \tag{3.49}$$

Ici la réduction symplectique en 0, $(M \times \overline{K \cdot \mu})_0$, s'identifie à la réduction symplectique $\mathcal{M}_\mu := \Phi^{-1}(\mu)/K_\mu$ qui est $\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}$-préquantifiée par $\mathcal{L}_\mu := \left(L|_{\Phi^{-1}(\mu)} \otimes \mathbb{C}_{-\mu}\right)/K_\mu$. Le théorème "La quantification commute à la réduction" prend alors la forme finale suivante.

Théorème 3.7 ([41, 42])**.** *Pour toute variété K-hamiltonienne (M, ω) $\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}$-préquantifiée, on a*

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(M) = \sum_{\mu \in \Lambda^*_+} \mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{M}_\mu)\, V_\mu \ . \tag{3.50}$$

Mon travail dans le domaine de la quantification a commencé en 1999 (un peu après la bataille). Dans [61], Vergne reprend une idée d'Atiyah de localisation **K**-théorique, pour démontrer (3.47) dans le cas d'une action du cercle. J'ai développé ce procédé de localisation pour les actions d'un groupe de Lie compact connexe quelconque [48]. Cette technique me permet alors de redémontrer le théorème 3.7, mais aussi d'apporter une généralisation dans un cadre non-symplectique.

Dans [49], je reprends cette méthode de localisation **K**-théorique pour démontrer que le slogan "la quantification commute à la réduction" est vrai dans le cadre de la quantification Spin^c. Dans ce même article je montre que ce résultat est encore valable dans certains cas où la variété M est non-compacte: ce sont les orbites coadjointes qui paramètrent la *série discrète* d'un groupe de Lie réel semi-simple.

Dans la prochaine sous-section, je résume les différents résultats obtenus. Ensuite, je donne un bref apercu sur ce procédé de localisation **K**-théorique.

3.2. **Résultats sur la quantification de type kählérien.** J'ai redémontré dans [49], le théorème "la quantification commute à la réduction" dans le cadre hamiltonien, lorsque 0 n'est pas forcément une valeur régulière de l'application moment. Néanmoins l'essentiel de cet article est consacré à l'étude de la validité de (3.47) en dehors du cadre symplectique. Soit M une variété différentiable munie

- d'une action d'un groupe de Lie compact connexe K,
- d'une structure presque complexe J qui est K-invariante,
- d'une 2-forme fermée, K-invariante et *intégrable*.

Contrairement à la section précédente, on ne fait *aucune hypothèse* sur le caractère *non-dégénéré* de la 2-forme en question, ni sur une *compatibilité* de J avec la 2-forme. Soit $L \to M$ le fibré en droites complexes associé à cette 2-forme: cette dernière est notée dorénavant ω^L. *On suppose dans cette partie que l'action de K sur M se relève au fibré vectoriel L.*

On munit le fibré L d'une structure hermitienne et d'une connexion hermitienne ∇^L, tous deux K-invariants, tels que $(\nabla^L)^2 = -i\omega^L$. Ces données déterminent une application équivariante $\Phi^L : M \to \mathfrak{k}^*$ satisfaisant

$$\mathcal{L}^L(X) - \nabla^L_{X_M} = \imath\langle \Phi^L, X\rangle, \quad X \in \mathfrak{k} \ . \tag{3.51}$$

La formule de Bianchi équivariante (voir Prop. 7.4 dans [5]) donne

$$d\langle \Phi^L, X\rangle = -\omega^L(X_M, -).$$

Ainsi l'application Φ^L est une *application moment abstraite* au sens de Karshon: elle est équivariante, et pour tout $X \in \mathfrak{k}$, la fonction $\langle \Phi^L, X\rangle$ is locallement constante sur la sous-variété M^X [34]. On remarque ici que la donnée de (L, ω^L, Φ^L) est une généralisation de la quantification de Kostant-Souriau au cadre non-symplectique. Comme tout à l'heure, on s'intéresse à la multiplicité $\left[RR^{K,J}(M, L)\right]^K \in \mathbb{Z}$.

Nous supposons ici que 0 est *une valeur régulière de* Φ^L: alors $\mathcal{Z} := (\Phi^L)^{-1}(0)$ est une sous-variété de M munie d'une action (localement) libre de K. On considère le quotient $\mathcal{M}_0 := \mathcal{Z}/K$ qui est une V-variété différentiable munie du V-fibré en droites complexes $L_0 := (L|_{\mathcal{Z}})/K$.

Théorème 3.8 ([49]). *La structure presque complexe J détermine une structure* Spin^c *sur $\mathcal{M}_0$: soit $\mathcal{Q}(\mathcal{M}_0, -) : \mathbf{K}(\mathcal{M}_0) \to \mathbb{Z}$ le morphisme déterminé par cette structure* Spin^c. *On a*

$$\left[RR^{K,J}(M, L^{\otimes k})\right]^K = \mathcal{Q}\Big(\mathcal{M}_0, (L_0)^{\otimes k}\Big), \quad k \in \mathbb{N} - \{0\}, \tag{3.52}$$

si l'une des deux conditions est satisfaite:

(i) $K = T$ is a tore,

(ii) $k \in \mathbb{N}$ est assez grand, de telle manière que la boule $\{\xi \in \mathfrak{k}^*, \parallel \xi \parallel \leq \frac{1}{k} \parallel \theta \parallel\}$ est contenue dans l'ensemble des valeurs régulières de Φ^L. Ici θ est la somme des racines positives de K et $\parallel \cdot \parallel$ est une norme euclidienne K-invariante sur $\mathfrak{k}^*$.

Ce théorème montre que le slogan “la quantification commute à la réduction” est un phénomène assez général lorsque 0 est une valeur régulière: il est toujours vrai dans le cas abélien, et dans le cas général il est vrai de façon asymptotique. Dans le cas abélien, un résultat similaire[7] a été obtenu par Ginzburg, Guillemin et Karshon [23].

L'équation (3.52) peut être réécrite lorsque J induit une structure presque complexe J_0 on $\mathcal{M}_0$. C'est le cas lorsque on a la décomposition

$$\mathbf{T}M|_{\mathcal{Z}} = \mathbf{T}\mathcal{Z} \oplus J(\mathfrak{k}_{\mathcal{Z}}) \quad \text{avec} \quad \mathfrak{k}_{\mathcal{Z}} := \{X_{\mathcal{Z}}, X \in \mathfrak{k}\} \ . \tag{3.53}$$

Cette dernière condition est toujours satisfaite dans le cadre hamiltonien lorsque J est compatible avec la forme symplectique. La condition (3.53) apparaît déjà dans les travaux de Jeffrey-Kirwan [33], and Cannas da Silva-Karshon-Tolman [14]. Considérons pour tout $z \in \mathcal{Z}$, l'endomorphisme $\mathcal{D}_z : \mathfrak{k} \to \mathfrak{k}^*$ définit par $\mathcal{D}_z(X) =$

[7]Leurs hypothèses de travail sont néanmoins différentes: ils supposent que le lieu des points fixes est fini, et travaille avec une structure presque complexe stable.

$-d\Phi^L|_z(J(X_{\mathcal{Z}}|_z))$. Alors (3.53) est équivalent à $\det(\mathcal{D}_z) \neq 0$, $\forall z \in \mathcal{Z}$. Soit $J_{\mathcal{D}}$ la structure complexe sur le fibré trivial $(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}^*) \times \mathcal{Z}$ définie par la matrice $J_{\mathcal{D}} := \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{D}^{-1} \\ \mathcal{D} & 0 \end{pmatrix}$. On une autre struture complexe $J_{\mathbb{C}}$ sur $(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}^*) \times \mathcal{Z}$, définie par $J_{\mathbb{C}} := \begin{pmatrix} 0 & -I^{-1} \\ I & 0 \end{pmatrix}$, où $I : \mathfrak{k} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{k}^*$ est un isomorphisme induit par un produit scalaire invariant sur $\mathfrak{k}$. Le fibré trivial $(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}^*) \times \mathcal{Z}$ est munit de deux modules de cliffords irréductibles,

$$\wedge^{\bullet}_{J_{\mathcal{D}}}(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}^*) \times \mathcal{Z} \quad \text{et} \quad \wedge^{\bullet}_{J_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}^*) \times \mathcal{Z} .$$

On note $\mathbb{L} \to \mathcal{M}_0$ le fibré en droites complexes défini par

$$\pi^*(\mathbb{L}) := \mathrm{Hom}_{Clifford}\Big(\wedge^{\bullet}_{J_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}^*) \times \mathcal{Z} \,,\, \wedge^{\bullet}_{J_{\mathcal{D}}}(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}^*) \times \mathcal{Z}\Big) .$$

Ici $\pi : \mathcal{Z} \to \mathcal{M}_0$ désigne le quotient par K.

Proposition 3.9 ([49])**.** *Si l'hypothèse (3.53) est vérifiée, l'égalité (3.52) devient*

$$\big[RR^{K,J}(M, L^{\otimes k})\big]^K = \pm RR^{J_0}\Big(\mathcal{M}_0, (L_0)^{\otimes k} \otimes \mathbb{L}\Big). \tag{3.54}$$

où $\pm$ est le signe du déterminant de $\mathcal{D}$.

Le théorème 3.8, sous la forme donnée par (3.54), étend le résultat principal de Jeffrey-Kirwan dans [33] au cadre non-symplectique. Elles obtiennent l'égalité (3.54) dans le cadre hamiltonien lorsque J n'est pas supposé compatible avec la forme symplectique (il semble néanmoins qu'elles négligent le facteur $\mathbb{L}$).

Fibrés Φ-positifs

On peut travailler en sens inverse que précédemment. Supposons que $\Phi : M \to \mathfrak{k}^*$ soit une application moment abstraite au sens de Karshon: Φ est équivariante, et pour tout $X \in \mathfrak{k}$, la fonction $\langle \Phi, X\rangle$ est locallement constante sur la sous-variété M^X. Supposons de plus que 0 est une valeur régulière de Φ. Comme tout à l'heure on a une fibré principal $\mathcal{Z} \to \mathcal{M}_0 := \mathcal{Z}/K$ avec $\mathcal{Z} = \Phi^{-1}(0)$, la structure presque complexe J induit une structure Spin^c sur $\mathcal{M}_0$ et on a donc un morphisme $\mathcal{Q}(\mathcal{M}_0, -) : \mathbf{K}(\mathcal{M}_0) \to \mathbb{Z}$. Pour quels fibrés équivariants la relation (3.52) est-elle encore vraie ?

Soit E un fibré vectoriel hermitien K-équivariant sur M. Si $X \in \mathfrak{k}$ et si $m \in M$ est un zéro du champ X_M, alors le groupe à un paramètre $\exp tX$ opère dans la fibre E_m du fibré E au point m. On note $\mathcal{L}^E_m(X)$ l'application infinitésimale de X dans E_m. Alors $i\mathcal{L}^E_m(X)$ est un endomorphisme hermitien de E_m.

Définition 3.10. *Soit $E \to M$ un fibré hermitien K-équivariant.*

- *On dit que E est Φ-positif si pour tout $X \in \mathfrak{k}$ et tout zéro m du champ X_M, l' opérateur $-i\langle \Phi(m), X\rangle \mathcal{L}^E_m(X)$ a toutes ses valeurs propres positives ou nulles.*
- *On dit que E est strictement Φ-positif, si pour tout $X \in \mathfrak{k}$ et tout zéro m du champ X_M, tel que $\langle \Phi(m), X\rangle \neq 0$, l'opérateur $-i\langle \Phi(m), X\rangle \mathcal{L}^E_m(X)$ a toutes ses valeurs propres strictement positives.*

Tian-Zhang introduisent une notion similaire dans le cadre hamiltonien [59]. Tout fibré en droites équivariant L est strictement positif par rapport à l'application moment abstraite Φ^L déterminée par (3.51). Le fibré trivial $M \times \mathbb{C} \to M$ avec une action triviale de K sur $\mathbb{C}$ est un fibré Φ-positif.

Théorème 3.11 ([49]). *Soit J une structure presque complexe équivariante sur M. Pour tout fibré E qui est* Φ-strictement positif, *on a*

$$[RR^{K,J}(M, E^{\otimes k})]^K = \mathcal{Q}\Big(\mathcal{M}_0, (E_0)^{\otimes k}\Big), \quad k \in \mathbb{N} - \{0\}, \tag{3.55}$$

si l'une des deux conditions est satisfaite:
(i) $G = T$ is a tore,
(ii) $k \in \mathbb{N}$ est assez grand.
L'égalité (3.55) est encore vraie pour les fibrés positifs, *lorsque on est dans la cadre hamiltonien: (M, ω) est une variété symplectique, Φ est l'application moment associée à l'action hamiltonienne de K sur (M, ω), J est compatible avec ω, et $0 \in \Phi(M)$.*

Ce théorème généralise un résultat de Tian-Zhang obtenu dans le cadre hamiltonien [59].

Lorsque 0 est une valeur régulière "la quantification commute à la réduction" est un phénomène assez général. La différence entre le cadre général "d'application moment abstraite" et la cadre hamiltonien est nette lorsque 0 n'est plus une valeur régulière. Meinrenken et Sjamaar ont les premiers montré que dans le cadre hamiltonien l'égalité (3.47) est encore vraie quitte à remplacer 0 par une valeur régulière proche de 0. Ceci ne marche plus dans le cadre non-symplectique (voir [23] pour une discussion sur ce problème et quelques éléments de réponse).

3.3. **Résultats sur la quantification** Spin^c.

Avant mon papier [49], le cadre de la quantification Spin^c a déjà été abordé dans les travaux de Cannas da Silva-Karshon-Tolman [14] et de Vergne [61] lorsque le groupe est abélien, et ceux de Jeffrey-Kirwan [33] pour un groupe compact connexe général.

Les résultats de Jeffrey-Kirwan expriment la multiplicité $[\mathcal{Q}_{\mathrm{spin}}(M)]^K$ au moyen de la variété réduite $\mathcal{M}_0 = \Phi^{-1}(0)/K$. Elle obtiennent ce résultat sous la première hypothèse qu'une boule centrée en 0 de taille assez grande est incluse dans l'ouvert des valeurs régulières de Φ, et sous la seconde hypothèse que la décomposition (3.53) existe. Ces résultats souffrent du fait que Jeffrey et Kirwan traitent la situation Spin^c de manière analogue à la quantification de type kählérien. Montrons pourquoi on doit en fait procéder différemment.

Quels modèles ? Revenons au procédé du "shifting trick" que l'on a déjà expliqué (voir (3.49)). Considérons tout d'abord la quantification de type kählérien d'une variété hamiltonienne quantifiée (M, ω, Φ). Pour calculer les K-multiplicités de $\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(M)$, on a recours à des *modèles*. Pour chaque poid dominant $\mu \in \Lambda^*_+$, l'orbite coadjointe $K \cdot \mu$ est l'unique orbite coadjointe $\mathcal{O} \subset \mathfrak{k}^*$ $\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}$-préquantifiée telle que $\mathcal{Q}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{O})$ soit égal à la représentation irréductible de plus haut poid μ (que l'on note V_μ). Pour la quantification de type kählérien, l'orbite coadjointe $K \cdot \mu$ est ainsi *le modèle* de la représentation irréductible V_μ.

Quels sont les modèles pour la quantification Spin^c ? Notons ρ_c la demi-somme des racines positives. Considérons pour chaque poid dominant $\mu \in \Lambda^*_+$, l'orbite coadjointe $K \cdot (\mu + \rho_c)$ qui est une orbite régulière, i.e. isomorphe à K/T. Si on munit $K \cdot (\mu + \rho_c)$ de sa forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau et de l'unique structure complexe invariante compatible, on voit aisément que $K \times_T \mathbb{C}_\mu \to K/T \simeq K \cdot (\mu + \rho_c)$ est un fibré de Kostant-Souriau *tordu* (voir définition 3.4). Et

dans ce cas on a
$$\mathcal{Q}_{\rm spin}\Big(K\cdot(\mu+\rho_c)\Big) = V_\mu\ .$$
L'orbite coadjointe $K\cdot(\mu+\rho_c)$ est, pour la quantification Spin^c, le modèle de la représentation irréductible V_μ. Nous montrons dans [49] que le slogan "la quantification commute à la réduction" est vrai dans le cadre Spin^c.

Théorème 3.12 ([49]). *Soit (M,ω,Φ) une variété K-hamiltonienne* Spin^c *préquantifiée par un fibré de Kostant-Souriau tordu équivariant $\tilde{L}$. On note $L_{2\omega}$ le fibré de Kostant-Souriau sur $(M,2\omega)$ correspondant (voir (3.44)).*

• **La préquantification** Spin^c **est préservée par les réductions symplectiques**. *Soit $\mu\in\Lambda^*_+$ un poids dominant tel que $\mu+\rho_c$ est une valeur régulière de Φ. La V-variété réduite $\mathcal{M}_{\mu+\rho_c}=\phi^{-1}(\mu+\rho_c)/T$ est alors* Spin^c*-préquantifiée par le fibré de Kostant-Souriau tordu $\Big(\tilde{L}|_{\phi^{-1}(\mu+\rho_c)}\times\mathbb{C}_{-\mu}\Big)/T$: on note $\mathcal{Q}_{\rm spin}(\mathcal{M}_{\mu+\rho_c})\in\mathbb{Z}$ la quantification correspondante. Dans le cas général où $\mu+\rho_c$ n'est pas forcément une valeur régulière de Φ, on choisit une valeur régulière $\xi\in\mathfrak{t}^*$ suffisamment proche de $\mu+\rho_c$. La variété réduite $\mathcal{M}_\xi$ est munie alors d'une structure* Spin^c *qui a pour fibré canonique $\left(L_{2\omega}|_{\phi^{-1}(\xi)}\times\mathbb{C}_{-\mu}\right)/T$. L'indice de l'opérateur de Dirac-*Spin^c *correspondant ne dépend pas de ξ: on le note encore $\mathcal{Q}_{\rm spin}(\mathcal{M}_{\mu+\rho_c})\in\mathbb{Z}$.*

• **la quantification commute à la réduction**. *Si les stabilisateurs pour l'action de K sur M sont* **abéliens** *on a*
$$\mathcal{Q}_{\rm spin}(M)=\sum_{\mu\in\Lambda^*_+}\mathcal{Q}_{\rm spin}(\mathcal{M}_{\mu+\rho_c})\,V_\mu\quad\text{dans}\quad R(K). \tag{3.56}$$

La condition "stabilisateurs abéliens" est ici nécessaire. Cela vient du fait qu'il n'y pas unicité des modèles. Considérons par exemple la représentation triviale V_0. Comme on l'a vu l'orbite coadjointe $K\cdot\rho_c$ est Spin^c-préquantifiée et satisfait $\mathcal{Q}_{\rm spin}(K\cdot\rho_c)=V_0$. Mais d'autre orbites coadjointes satisfont les mêmes conditions. On a l'orbite $\{0\}$, mais aussi toutes les orbites $K\cdot(\rho_c-\rho_{c,\sigma})$ où σ est une face ouverte de la chambre de Weyl et $\rho_{c,\sigma}$ est la demi-somme des racines positives qui s'annulent sur σ. Ici le fibré trivial $K\cdot(\rho_c-\rho_{c,\sigma})\times\mathbb{C}\to K\cdot(\rho_c-\rho_{c,\sigma})$ est un fibré de Kostant-Souriau tordu et $\mathcal{Q}_{\rm spin}\left(K\cdot(\rho_c-\rho_{c,\sigma})\right)=V_0$.

Par contre l'orbite $K\cdot\rho_c$ est le seul modèle qui satisfait la condition "stabilisateurs abéliens". Ceci explique la nature de cette condition.

Dans la prochaine section, je rappelle le résultat principal de [49] qui peut être résumé ainsi. Les orbites coadjointes d'un groupe réel semi-simple G qui paramètrent la série discrète de G sont des exemples **non-compacts** de quantification Spin^c où le slogan "la quantification commute à la réduction" est vrai.

3.4. **La série discrète.** Soit G un groupe réel semi-simple connexe de centre fini. Par définition, la série discrète de G est l'ensemble (modulo isomorphisme) des représentations unitaires irréductibles de G qui sont de carré intégrable. Soit K un groupe compact maximal de G, et T un tore maximal de K. Harish-Chandra a montré que la série discrète de G est non-vide si et seulement si T est un sous-groupe de cartan de G. Dans cette section, on suppose donc que T est un sous-groupe de Cartan de G. Soient $\mathfrak{g},\mathfrak{k},\mathfrak{t}$ les algèbres de Lie de G,K,T, et $\mathfrak{g}^*,\mathfrak{k}^*,\mathfrak{t}^*$ leur dual. Un élément $X\in\mathfrak{t}$ est dit *G-régulier* si le sous groupe stabilisateur G_X est égal à T. Soit $\Lambda^*\subset\mathfrak{t}^*$ l'ensemble des poids (réels) de T. On note respectivement $\mathfrak{R}_c\subset\mathfrak{R}\subset\Lambda$

l'ensemble des racines pour l'action de T sur $\mathfrak{k}\otimes\mathbb{C}$ et $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$. On fixe une chambre de Weyl $\mathfrak{t}^*_+$ pour le couple (K,T).

Harish-Chandra paramètre [30] la série discrète de G par un sous ensemble discret $\widehat{G}_d$ composé d'éléments G-réguliers de $\mathfrak{t}^*_+$: pour $\lambda\in\widehat{G}_d$, notons $\mathcal{H}_\lambda$ la représentation de G correspondante. On a en fait un moyen géométrique de définir $\widehat{G}_d$: "un élément G-régulier λ appartient à $\widehat{G}_d$ si et seulement si l'orbite coadjointe $G\cdot\lambda$ est Spin^c-préquantifiée".

Fixons pour le reste de cette section $\lambda\in\widehat{G}_d$ et rappelons la réalisation donnée par Schmid [54] de la représentation $\mathcal{H}_\lambda$ comme Spin^c-quantification de l'orbite coadjointe $G\cdot\lambda$.

Soit $\mathfrak{R}^{+,\lambda}\subset\mathfrak{R}$ l'ensemble de racines positives défini par λ: $\alpha\in\mathfrak{R}^{+,\lambda}\iff(\alpha,\lambda)>0$. Soit ρ la demi-somme des éléments de $\mathfrak{R}^{+,\lambda}$. On travaille avec la structure complexe J sur $G\cdot\lambda$, qui est G-invariante, et qui est déterminée par la condition: $\alpha\in\Lambda^*$ est un poids de l'action de T sur l'espace tangent $(\mathbf{T}_\lambda(G\cdot\lambda),J)$ si et seulement si $\alpha\in\mathfrak{R}^{+,\lambda}$. La condition $\lambda\in\widehat{G}_d$ impose que $\lambda-\rho$ est un poids de T, et on voit alors que le fibré en droites

$$\tilde{L}:=G\times_T\mathbb{C}_{\lambda-\rho}$$

est un fibré de Kostant-Souriau tordu sur $G\cdot\lambda\simeq G/T$. Rappelons que $G\cdot\lambda$ est munie de la forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau, l'action de G sur $G\cdot\lambda$ est hamiltonienne avec pour application moment l'inclusion $G\cdot\lambda\hookrightarrow\mathfrak{g}^*$.

Schmid réalise $\mathcal{H}_\lambda$ comme un espace de cohomologie L^2 à valeurs dans $\tilde{L}$ [54]. Le fibré en droites complexes $\tilde{L}$ possède une structure holomorphe canonique. Soit $\Omega^k(\tilde{L})$ l'espace des formes différentielles sur $G\cdot\lambda$, de type $(0,k)$, et à valeurs dans $\tilde{L}$. Soit $\overline{\partial}_{\tilde{L}}:\Omega^k(\tilde{L})\to\Omega^{k+1}(\tilde{L})$ l'opérateur de Dolbeault. Le choix de métriques G-invariantes sur $G\cdot\lambda$ et $\tilde{L}$ permet de définir l'opérateur $\overline{\partial}^*_{\tilde{L}}$ (adjoint formel de $\overline{\partial}_{\tilde{L}}$) et l'opérateur de Dolbeault-Dirac $\overline{\partial}_{\tilde{L}}+\overline{\partial}^*_{\tilde{L}}$.

La cohomologie L^2 de $\tilde{L}$, que l'on note $\mathrm{H}^*_{(2)}(G\cdot\lambda,\tilde{L})$, est par définition le noyau de l'opérateur $\overline{\partial}_{\tilde{L}}+\overline{\partial}^*_{\tilde{L}}$ sur le sous-espace de $\Omega^*(\tilde{L})$ des éléments de carré intégrable.

Théorème 3.13. *(Schmid). Soit $\lambda\in\widehat{G}_d$.*
(i) Si $k\neq\frac{\dim(G/K)}{2}$, alors $\mathrm{H}^k_{(2)}(G\cdot\lambda,\tilde{L})=0$.
(ii) Si $k=\frac{\dim(G/K)}{2}$, alors $\mathrm{H}^k_{(2)}(G\cdot\lambda,\tilde{L})=\mathcal{H}_\lambda$.

Ainsi la représentation $\mathcal{H}_\lambda$ est la quantification Spin^c de l'action de G sur l'orbite coadjointe $G\cdot\lambda$ comme indice L^2 de l'opérateur de Dolbeault-Dirac $\overline{\partial}_{\tilde{L}}+\overline{\partial}^*_{\tilde{L}}$: ici $(-1)^{\frac{\dim(G/K)}{2}}$ est le rapport entre les orientations de $G\cdot\lambda$ induites par la structure complexe J et la forme symplectique. La restriction $\mathcal{H}_\lambda|_K$ est la quantification Spin^c de l'action de K sur l'orbite coadjointe $G\cdot\lambda$. La représentation $\mathcal{H}_\lambda|_K$ admet une décomposition en représentation irréductibles de K

$$\mathcal{H}_\lambda|_K=\sum_{\mu\in\Lambda^*_+}\mathrm{m}_\mu(\lambda)\,V_\mu\ ,$$

où les multiplicités $\mathrm{m}_\mu(\lambda)$ satisfont les formules combinatoires dites "formules de Blattner" [31]. L'objet de l'article [49] est de montrer que ces K-multiplicités satisfont le principe de Guillemin-Sternberg. L'action de K sur $G\cdot\lambda$ est hamiltonienne avec pour application moment $\Phi:G\cdot\lambda\to\mathfrak{k}$ le composé de l'inclusion $G\cdot\lambda\hookrightarrow\mathfrak{g}^*$

avec la projection $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{k}^*$. L'orbite coadjointe $G \cdot \lambda$ est non-compacte, mais l'application Φ est *propre* [47]. Ainsi les variétés réduites $\Phi^{-1}(\xi)/K_\xi$ sont compactes. La première partie du théorème 3.12 s'applique: la préquantification Spin^c de $G \cdot \lambda$ induit pour tout $\mu \in \Lambda^*_+$ une préquantification Spin^c sur chaque réduction symplectique $(G \cdot \lambda)_{\mu+\rho_c} := \Phi^{-1}(\mu + \rho_c)/T$. Comme ces variétés réduites sont compactes, on peut définir[8] la quantité $\mathcal{Q}_{\mathrm{spin}}((G \cdot \lambda)_{\mu+\rho_c}) \in \mathbb{Z}$ comme l'indice de l'opérateur Spin^c-Dirac associé. Je montre alors que la deuxième partie du théorème 3.12 est encore vraie dans ce cas. Pour cela j'utilise les formules combinatoires de Blattner.

Théorème 3.14 ([49]).

$$\mathcal{H}_\lambda|_K = \sum_{\mu \in \Lambda^*_+} \mathcal{Q}_{\mathrm{spin}}((G \cdot \lambda)_{\mu+\rho_c})\, V_\mu \ . \tag{3.57}$$

3.5. **Localisation K-théorique.** Soit M une variété différentiable compacte munie d'une action d'un groupe de Lie compact connexe K. Supposons M munie d'une structure presque complexe K-invariante J. Soit $\mathbf{K}_K(M)$ la $\mathbf{K}$-théorie des fibrés vectoriels complexes équivariants sur M. La structure presque complexe permet de définir le caractère de Riemann-Roch

$$RR^{K,J}(M,-) : \mathbf{K}_K(M) \longrightarrow R(K) \tag{3.58}$$

Donnons la définition topologique de ce morphisme. Soit $p : \mathbf{T}M \to M$ la projection, et $E^\pm \to M$ des fibrés vectoriels complexes équivariants. Une section K-équivariante $\sigma \in \Gamma(\mathbf{T}M, \hom(p^*E^+, p^*E^-))$ est appelé un *symbole.* L'ensemble des $(m,v) \in \mathbf{T}M$ où $\sigma(m,v) : E^+_m \to E^-_m$ n'est pas inversible est *l'ensemble caractéristique* of σ, que l'on note $\mathrm{Char}(\sigma)$. Un symbole σ est dit elliptique si $\mathrm{Char}(\sigma)$ est compact: il définit alors un élément de la $\mathbf{K}$-théorie équivariante de $\mathbf{T}M$ à support compact, qui est notée $\mathbf{K}_K(\mathbf{T}M)$. Nous avons dans ce cas un morphisme $\mathrm{Indice}^K_M : \mathbf{K}_K(\mathbf{T}M) \to R(K)$ [3, 4].

La structure presque complexe définit le symbole

$$\mathrm{Thom}_K(\mathbf{T}M) \in \Gamma\left(M, \hom(p^*(\wedge^{pair}_{\mathbb{C}}\mathbf{T}M),\, p^*(\wedge^{impair}_{\mathbb{C}}\mathbf{T}M))\right) \ .$$

En $(m,v) \in \mathbf{T}M$, le morphisme $\mathrm{Thom}_K(\mathbf{T}M)(m,v) : \wedge^{pair}_{\mathbb{C}}\mathbf{T}_mM \longrightarrow \wedge^{impair}_{\mathbb{C}}\mathbf{T}_mM$ correspond à l'action de Clifford de v. L'ensemble caractéristique de $\mathrm{Thom}_K(\mathbf{T}M)$ est M qui est compact: le symbole de $\mathrm{Thom}_K(M)$ est elliptique. Pour tout K-fibré vectoriel complexe E, on peut considérer le "produit" $\mathrm{Thom}_K(\mathbf{T}M) \otimes p^*(E)$ qui est encore un symbole elliptique. L'isomorphisme de Bott-Thom affirme que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Thom}_J : \mathbf{K}_K(M) & \longrightarrow & \mathbf{K}_K(\mathbf{T}M) \\ E & \longmapsto & \mathrm{Thom}_K(\mathbf{T}M) \otimes p^*(E) \ , \end{array} \tag{3.59}$$

est un isomorphisme. La symbole $\mathrm{Thom}_K(\mathbf{T}M)$ est une base pour le $\mathbf{K}_K(M)$-module $\mathbf{K}_K(\mathbf{T}M)$. Le caractère de Riemann-Roch $RR^{K,J}(M,-)$ est défini par le

[8]Par désingularisation si nécessaire.

diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{K}_K(M) \arrow[r, "\mathrm{Thom}_J"] \arrow[dr, "RR^{K,J}"'] & \mathbf{K}_K(\mathbf{T}M) \arrow[d, "\mathrm{Indice}^K_M"] \\ & R(K)\ . \end{tikzcd} \tag{3.60}$$

On fixe une métrique riemanienne, $(-,-)_{M}$, K-invariante sur M. On note $\mathbf{T}_K M$ le sous ensemble de $\mathbf{T}M$ défini par

$$\mathbf{T}_K M \ = \{(m,v) \in \mathbf{T}M,\ (v, X_M(m))_{M} = 0 \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{k}\} \tag{3.61}$$

Suivant Atiyah, un symbole σ est dit *transversalement elliptique* si la restriction de σ à $\mathbf{T}_K M$ est inversible en dehors d'un compact de $\mathbf{T}_K M$, i.e. $\mathrm{Char}(\sigma) \cap \mathbf{T}_K M$ est compact. Un symbole transversalement elliptique σ détermine un élément de $\mathbf{K}_K(\mathbf{T}_K M)$. Nous avons une application de restriction $\mathbf{K}_K(\mathbf{T}M) \to \mathbf{K}_K(\mathbf{T}_K M)$, et Atiyah [1] a montré que le morphisme d'indice défini sur $\mathbf{K}_K(\mathbf{T}M)$ s'étend à $\mathbf{K}_K(\mathbf{T}_K M)$ et satisfait le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{K}_K(\mathbf{T}M) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Indice}^K_M"'] & \mathbf{K}_K(\mathbf{T}_K M) \arrow[d, "\mathrm{Indice}^K_M"] \\ R(K) \arrow[r] & R^{-\infty}(K)\ . \end{tikzcd} \tag{3.62}$$

Ici $R^{-\infty}(K)$ désigne l'ensemble des caractères généralisés de K: un élément $\chi \in R^{-\infty}(K)$ est de la forme $\chi = \sum_{\mu \in \Lambda^*_+} \mathrm{m}_\mu\, \chi^K_\mu$, où $\mu \mapsto \mathrm{m}_\mu, \Lambda^*_+ \to \mathbb{Z}$ a une croissance au plus polynomiale.

Théorème de Bott pour l'indice d'opérateurs homogènes. Un exemple particulièrement instructif est le cas des espaces homogènes $M = K/H$ où H est un sous-groupe fermé de K. Considérons un opérateur différentiel $D : \mathcal{E}^+ \to \mathcal{E}^-$ elliptique K-équivariant sur K/H. Ici les fibrés vectoriels K-équivariants $\mathcal{E}^\pm$ sont de la forme $\mathcal{E}^\pm = K \times_H E^\pm$, où $E^\pm$ sont des H-modules. Considérons la classe définie par le symbole de D, $\sigma(D)$, dans $\mathbf{K}_K(\mathbf{T}_K(K/H))$. L'action de K sur K/H étant transitive, $\mathbf{T}_K(K/H)$ se restreint à K/H (vu comme la section nulle dans $\mathbf{T}(K/H)$). Ainsi l'opérateur nul, $0_D : \mathcal{E}^+ \to \mathcal{E}^-$ est transversalement elliptique et son symbole est cohomologue à $\sigma(D)$ dans $\mathbf{K}_K(\mathbf{T}_K(K/H))$. Si on utilise le diagramme commutatif (3.62), on obtient alors

$$\mathrm{Indice}^K(D) = \mathrm{Indice}^K(0_D) \quad \text{dans} \quad R^{-\infty}(K).$$

Le terme de droite de cette dernière égalité étant égal à $Ker(0_D) - Coker(0_D) = L^2(\mathcal{E}^+) - L^2(\mathcal{E}^-)$, et comme $L^2(\mathcal{E}^\pm) = (L^2(G) \otimes E^\pm)^H = \mathrm{Ind}_H^K(E^\pm)$, on obtient finalement le théorème de Bott [11]

$$\mathrm{Indice}^K(D) = \mathrm{Ind}_H^K(E^+ - E^-) \quad \text{dans} \quad R^{-\infty}(K).$$

Analogies. Pour effectuer la localisation **K**-théorique, nous travaillons de manière similaire que dans le contexte de la cohomologie équivariante:

- Le morphisme Indice^K_M remplace le morphisme d'intégration $\int_M$,

- Le diagramme commutatif (3.62) remplace

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^*_K(M) \arrow[r] \arrow[d, "\int_M"'] & \mathcal{H}^{-\infty}_K(M) \arrow[d, "\int_M"] \\ S(\mathfrak{k}^*)^K \arrow[r] & \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{k})^K \end{tikzcd} ,$$

- Le symbole $\mathrm{Thom}_K(M,J)$ joue le rôle de la classe de cohomologie 1_M.
- La 1-forme équivariante λ sera ici un champ de vecteurs équivariant.

Montrons comment un champ de vecteur K-invariant λ réalise une partition de la base $\mathrm{Thom}_K(\mathbf{T}M)$ dans $\mathbf{K}_K(\mathbf{T}_K M)$. L'idée de cette construction est due à Atiyah [1]. Soit σ_λ le symbole

(3.63) $$\sigma_\lambda(m,v) := \mathrm{Thom}_K(\mathbf{T}M)(m, v - \lambda_m), \quad (m,v) \in \mathbf{T}M.$$

Le symbole σ_λ est elliptique et il est homotope à $\mathrm{Thom}_K(\mathbf{T}M)$: ces deux symboles définissent donc la même classe dans $\mathbf{K}_K(\mathbf{T}M)$. On voit que $\mathrm{Char}(\sigma_\lambda)$ est égal au graphe de λ, et que

$$\mathrm{Char}(\sigma_\lambda) \cap \mathbf{T}_K M = \{(m, \lambda_m) \in \mathbf{T}M, \quad m \in \{\Phi_\lambda = 0\}\}.$$

où $\Phi_\lambda : M \to \mathfrak{k}^*$ est définie par $\langle \Phi_\lambda(m), X\rangle := (\lambda_m, X_M|_m)_M$ for $X \in \mathfrak{k}$.

Considérons un voisinage ouvert K-invariant $\mathcal{U}$ de $C_\lambda := \{\Phi_\lambda = 0\}$, et la restriction $\sigma_\lambda|_{\mathcal{U}}$ qui est un symbole sur $\mathcal{U}$. C'est un symbole transversallement elliptique car $\mathrm{Char}(\sigma_\lambda|_{\mathcal{U}}) \cap \mathbf{T}_K\mathcal{U} \simeq C_\lambda$ est compact. Le théorème d'excision donne

Lemme 3.15 ([48]). *On a*

$$\mathrm{Thom}_K(\mathbf{T}M) = i_*(\sigma_\lambda|_{\mathcal{U}}) \quad \text{dans} \quad \mathbf{K}_K(\mathbf{T}_K M),$$

où $i : \mathcal{U} \hookrightarrow M$ est l'inclusion et $i_* : \mathbf{K}_K(\mathbf{T}_K\mathcal{U}) \to \mathbf{K}_K(\mathbf{T}_K M)$ est le morphisme image directe associé.

Ce lemme est l'analogue du lemme 1.5 en cohomologie équivariante. Dans la pratique on décompose $C_\lambda = \cup_a C^a$ en une union disjointe de composantes K-invariantes fermées, on considère des voisinages ouverts K-invariants $\mathcal{U}^a$ de C^a tels que $\mathcal{U}^a \cap \mathcal{U}^b = \emptyset$ si $a \neq b$. On a alors

(3.64) $$\mathrm{Thom}_K(\mathbf{T}M) = \sum_a i^a_*(\sigma|_{\mathcal{U}^a}) \quad \text{dans} \quad K_K(\mathbf{T}_K M),$$

où $i^a : \mathcal{U}^a \hookrightarrow M$ désigne l'inclusion. Sur chaque ouvert invariant $\mathcal{U}^a$, on a un morphisme canonique $\mathrm{Indice}^K_{\mathcal{U}^a} : K_K(\mathbf{T}_K\mathcal{U}^a) \to R^{-\infty}(K)$.

Définition 3.16. *Pour chaque composante C^a de $\{\Phi_\lambda = 0\}$, on définit le caractère de Riemann-Roch localisé au voisinage de C^a:*

(3.65) $$\begin{array}{rcl} RR^K_{C^a}(M,-) \ : \mathbf{K}_K(M) & \longrightarrow & R^{-\infty}(K) \\ E & \longmapsto & \mathrm{Indice}^K_{\mathcal{U}^a}(\sigma|_{\mathcal{U}^a} \otimes p^*(E)|_{\mathcal{U}^a}). \end{array}$$

Le lemme 3.15 donne la décomposition[9] $RR^K(M,E) = \sum_a RR^K_{C^a}(M,E)$ dans $R^{-\infty}(K)$. Dans [48], on a étudié les morphismes $RR^K_{C^a}(M,E)$ dans certaines situations. Les résultats obtenus sont les analogues de ceux obtenus dans le contexte de la cohomologie équivariante. Voici un bref aperçu des ces résultats.

[9]Pour simplifier la notation, on note $RR^K(M,-)$ au lieu de $RR^{K,J}(M,-)$.

Localisation de $RR^K(M,-)$ sur les points fixes.

Dans cette partie on travaille avec un élément K-invariant, $\beta \neq 0$, de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Notons $\mathbb{T}_\beta$ le tore de K égal à $\overline{\{\exp(t\beta),\, t \in \mathbb{R}\}}$. On utilise les notations suivantes. Pour tout $R(K)$-module A, on note $A\widehat{\otimes}R(\mathbb{T}_\beta)$ le $R(K)\otimes R(\mathbb{T}_\beta)$-module formé des sommes infinies $\sum_\alpha E_\alpha h^\alpha$ où α parcourt l'ensemble des poids de $\mathbb{T}_\beta$, et $E_\alpha \in A$ pour tout α.

Considérons pour l'instant le cas d'un K-fibré vectoriel complexe $V \to N$, avec N compact et tel que $V^\beta = N$. Dans cette situation le symbole $\mathrm{Thom}_K(V) \in \mathbf{K}_K(V)$ est défini de manière analogue à $\mathrm{Thom}_K(\mathbf{T}M)$. Le tiré en arrière de $\mathrm{Thom}_K(V)$ sur N est la classe (d'Euler) $[\wedge^\bullet V] \in \mathbf{K}_K(N)$ qui est égal à la *différence* $[\wedge^{pair}V] - [\wedge^{impair}V]$. L'inverse 'naturel' de $[\wedge^\bullet V]$, l'algèbre symétrique de V, ne désigne pas toujours un élément de $\mathbf{K}_K(N)\widehat{\otimes}R(\mathbb{T}_\beta)$. Par contre on peut définir un inverse *β-orienté* [48]

$$[\wedge^\bullet V]^{-1}_\beta \;\in\; \mathbf{K}_K(N)\widehat{\otimes}R(\mathbb{T}_\beta)\ . \tag{3.66}$$

On a $[\wedge^\bullet V]^{-1}_\beta = \sum_\alpha E_\alpha h^\alpha$ où $E_\alpha \in \mathbf{K}_K(N)$ est non nul seulement si $\alpha = 0$ ou $\langle \alpha, \beta\rangle > 0$. Ici la classe $[\wedge^\bullet V]^{-1}_\beta$ est l'analague $\mathbf{K}$-théorique de l'inverse de la classe d'Euler équivariante $\mathrm{Eul}^{-1}_\beta(V)$ dont on a parlé dans la première section.

On revient au cadre d'une action de K sur une variété M munie d'une structure presque complexe invariante. On va maintenant décrire la localisation du morphisme $RR^K(M,-)$ que l'on obtient si l'on utilise le champ de vecteurs $\lambda = \beta_M$. C'est un analogue global du théorème de localisation d'Atiyah-Segal-Singer pour l'indice équivariant. Comme le tore $\mathbb{T}_\beta$ est dans le centre de K on peut considérer l'action de $K\times\mathbb{T}_\beta$ sur M, et le caractère de Riemann-Roch associé $RR^{K\times\mathbb{T}_\beta}(M,-)$. La structure presque complexe sur M induit une structure presque complexe sur la sous-variété M^β, et structure complexe sur le fibré normal $\mathcal{N}$ de M^β dans M. Le caractère de Riemann-Roch $RR^{K\times\mathbb{T}_\beta}(M^\beta,-) : \mathbf{K}_K(M^\beta) \to R(K)$ s'étend naturellement en un morphisme de $\mathbf{K}_K(M^\beta)\widehat{\otimes}R(\mathbb{T}_\beta)$ dans $R(K)\widehat{\otimes}R(\mathbb{T}_\beta)$.

Théorème 3.17 ([48])**.** *Pour tout $E \in \mathbf{K}_K(M)$, on a*

$$RR^{K\times\mathbb{T}_\beta}(M,E) = RR^{K\times\mathbb{T}_\beta}\left(M^\beta, E|_{M^\beta}\otimes[\wedge^\bullet\overline{\mathcal{N}}]^{-1}_\beta\right) \quad \text{dans} \quad R(K)\widehat{\otimes}R(\mathbb{T}_\beta)\ . \tag{3.67}$$

Ici $\overline{\mathcal{N}}$ est le fibré normal muni de la structure complexe opposée.

Dans mon travail concernant le calcul des K-multiplicités de termes de la forme $RR^K(M,E)$, la formule de localisation (3.67) s'utilise de la manière suivante. Considérons la multiplicité de la représentation triviale $[RR^K(M,E)]^K$. La théorème donne immédiatement

$$[RR^K(M,E)]^K = \left[RR^{K\times\mathbb{T}_\beta}\left(M^\beta, E|_{M^\beta}\otimes[\wedge^\bullet\overline{\mathcal{N}}]^{-1}_\beta\right)\right]^{K\times\mathbb{T}_\beta}.$$

Dans le deuxième terme de cette égalité on utilise maintenant le fait que $\mathbb{T}_\beta$ agit trivialement sur M^β: pour tout fibré vectoriel équivariant $V \to M^\beta$, on a $[RR^K(M^\beta,V)]^{\mathbb{T}_\beta} = RR^K(M^\beta,V^\beta)$, où V^β est le sous-fibré de V où $\mathbb{T}_\beta$ agit trivialement. Le sous-fibré de $E|_{M^\beta}\otimes[\wedge^\bullet\overline{\mathcal{N}}]^{-1}_\beta$ sur lequel $\mathbb{T}_\beta$ agit trivialement est de rang fini: on le note

$$E[\beta] = \left(E|_{M^\beta}\otimes[\wedge^\bullet\overline{\mathcal{N}}]^{-1}_\beta\right)^\beta\ . \tag{3.68}$$

On conclut alors que

$$[RR^K(M,E)]^K = [RR^K(M^\beta, E[\beta])]^K. \tag{3.69}$$

Ainsi $[RR^K(M,E)]^K = 0$ lorsque $E[\beta] = 0$.

Localisation de $RR^K(M,-)$ au moyen d'une application moment abstraite.

Dans cette section, on est toujours dans le cadre d'une action de K sur une variété M munie d'une structure complexe invariante. Soit $\Phi : M \to \mathfrak{k}^*$ une *application moment abstraite* au sens de Karshon: elle est équivariante, et pour tout $X \in \mathfrak{k}$, la fonction $\langle \Phi, X\rangle$ is locallement constante sur la sous-variété M^X. On identifie $\mathfrak{k}$ à $\mathfrak{k}^*$ au moyen d'un produit scalaire invariant. Ici on localise le caractère $RR^K(M,-)$ avec le champ de vecteurs invariant

$$\lambda_m := (\Phi(m)_M)|_m, \quad m \in M. \tag{3.70}$$

La localisation s'effectue sur le sous-ensemble $\{\Phi_\lambda = 0\}$ qui est ici égal à $\{\lambda = 0\}$, et comme dans le cas hamiltonien on a

$$\{\lambda = 0\} = \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}_\Phi} K\left(M^\beta \cap \Phi^{-1}(\beta)\right) \tag{3.71}$$

où $\mathcal{B}_\Phi$ est un sous-ensemble fini d'une chambre de Weyl $\mathfrak{t}^*_+$. D'après la définition 3.16, on a la décomposition

$$RR^K(M,-) = \sum_{\beta\in\mathcal{B}_\Phi} RR^K_\beta(M,-)\ , \tag{3.72}$$

où $RR^K_\beta(M,-) : \mathbf{K}_K(M) \to R^{-\infty}(K)$ est le caractère de Riemann-Roch localisé au voisinage de $K\left(M^\beta \cap \Phi^{-1}(\beta)\right)$ (au moyen du champ de vecteur λ). Pour tout $E \in \mathbf{K}_K(M)$, la multiplicité $[RR^K(M,E)]^K$ vérifie $[RR^K(M,E)]^K = \sum_\beta [RR^K_\beta(M,E)]^K$. Dans la pratique je calcule $RR^K_0(M,E)$ et je montre que dans certains cas $[RR^K_\beta(M,E)]^K = 0$ pour tout $\beta \neq 0$. Je termine cette section en donnant un bref aperçu des résultats obtenus sur ces $RR^K_\beta(M,-)$.

<u>Le cas $\beta = 0$.</u>

Lorsque 0 est une valeur régulière de Φ, je montre dans [48] que la structure presque complexe K-invariante sur M induit une structure Spin^c sur la V-variété $\mathcal{M}_0 := \Phi^{-1}(0)/K$. Soit $\mathcal{Q}(\mathcal{M}_0,-) : \mathbf{K}(\mathcal{M}_0) \to \mathbb{Z}$ le morphisme déterminé par cette structure Spin^c. Dans ce cas, je calcule $RR^K_0(M,-)$. Je montre en particulier que la multiplicité de la représentation triviale dans $RR^K_0(M,E)$ est $\mathcal{Q}(\mathcal{M}_0,\mathcal{E}_0)$ avec $\mathcal{E}_0 := (E|_{\Phi^{-1}(0)})/K$. Un calcul similaire avait été éffectué par Vergne dans le cas d'une action hamiltonienne du cercle [61].

<u>Le cas $\beta \neq 0$ central.</u>

Ici on considère la K-variété des points fixes M^β, munie de la structure presque complexe induite et de l'application moment abstraite $\Phi|_{M^\beta}$. On peut alors définir le caractère de Riemann-Roch $RR^K_\beta(M^\beta,-)$ localisé au voisinage de $M^\beta \cap \Phi^{-1}(\beta)$. Comme pour la localisation sur les points fixes on étend ce morphisme en $RR^{K\times\mathbb{T}_\beta}_\beta(M^\beta,-)$. Je montre alors que

$$RR^{K\times\mathbb{T}_\beta}_\beta(M,E) = RR^{K\times\mathbb{T}_\beta}_\beta\left(M^\beta, E|_{M^\beta} \otimes [\wedge^\bullet \overline{\mathcal{N}}]^{-1}_\beta\right) \tag{3.73}$$

dans $R^{-\infty}(K)\widehat{\otimes}R(\mathbb{T}_\beta)$. Dans cette situation on a un raffinement de (3.69)

$$[RR^K_\beta(M,E)]^K = [RR^K_\beta(M^\beta, E[\beta])]^K,$$

où $E[\beta]$ est le sous-fibré de $E|_{M^\beta}\otimes[\wedge^\bullet\overline{\mathcal{N}}]^{-1}_\beta$ sur lequel $\mathbb{T}_\beta$ agit trivialement. Lorsque E est un fibré strictement Φ-positif (voir définition 3.10) on a $E[\beta]=0$, et donc $[RR^K_\beta(M,E)]^K = 0$.

Le cas $K_\beta \neq K$.

Dans cette situation, j'obtiens des formules d'induction qui me permettent de 'revenir' au cas précédent. Le choix d'une chambre de Weyl détermine naturellement une structure structure complexe sur $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_\beta$.

Nous avons le morphisme d'induction $\mathrm{Ind}^K_{K_\beta} : \mathcal{C}^{-\infty}(K_\beta)^{K_\beta} \to \mathcal{C}^{-\infty}(K)^K$ où $\mathcal{C}^{-\infty}(K_\beta)$ est l'ensemble des fonctions généralisées sur K_β, et les invariants sont pris par rapport à l'action de conjugaison. L'application $\mathrm{Ind}^K_{K_\beta}$ est déterminé par la relation: pour tout $\phi\in\mathcal{C}^{-\infty}(K_\beta)^{K_\beta}$, on a $\int_K \mathrm{Ind}^K_{K_\beta}(\phi)(k)f(k)dk = cst\int_{K_\beta}\phi(h)f(h)dh$ pour tout $f\in\mathcal{C}^\infty(K)^K$, où $cst = \mathrm{vol}(K,dg)/\mathrm{vol}(K_\beta,dh)$. Nous avons aussi le morphisme d'induction holomorphe $\mathrm{Hol}^K_{K_\beta} : R^{-\infty}(K_\beta)\to R^{-\infty}(K)$ déterminé par la relation: $\mathrm{Hol}^K_{K_\beta}(\chi) = \mathrm{Ind}^K_{K_\beta}(\chi\wedge^\bullet_{\mathbb{C}}\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_\beta)$ pour tout $\chi\in R^{-\infty}(K_\beta)$.

Nous pouvons considérer la variété M munie de l'action du sous-groupe K_β, et de l'application moment abstraite $\Phi_{K_\beta} : M \to \mathfrak{k}^*_\beta$ qui est le composé de Φ avec la projection $\mathfrak{k}^*\to\mathfrak{k}^*_\beta$. Nous définissons alors le caractère de Riemann-Roch $RR^{K_\beta}_\beta(M,-)$ localisé au voisinage de $M^\beta\cap(\Phi_{K_\beta})^{-1}(\beta)$. Je montre alors que pour tout $E\in\mathbf{K}_K(M)$ on a

$$RR^K_\beta(M,E) = \mathrm{Hol}^K_{K_\beta}\left(RR^{K_\beta}_\beta(M,E)\ \wedge^\bullet_{\mathbb{C}}\overline{\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_\beta}\right). \tag{3.74}$$

Cette formule d'induction combinée avec (3.73) permet de montrer que $[RR^K_\beta(M,E^{\otimes l})]^K = 0$ pour l assez grand, lorsque E est un fibré strictement Φ-positif.

Lorsque l'application Φ est une (vraie) application moment associée à une *action hamiltonienne* de K sur (M,ω), je raffine (3.74) de la façon suivante. Considérons la face ouverte s de la chambre de Weyl qui contient β et la 'tranche symplectique' $\mathcal{Y}_s$ associée. C'est une sous-variété symplectique de M munie d'une action hamiltonienne de K_β: notons $\Phi_s : \mathcal{Y}_s\to\mathfrak{k}^*_\beta$ l'application moment correspondante. On munit les variétés symplectiques M et $\mathcal{Y}_s$ de structures presque complexe compatibles. Sur $\mathcal{Y}_s$ on considère le caractère de Riemann-Roch $RR^{K_\beta}_\beta(\mathcal{Y}_s,-)$ localisé au voisinage de $\mathcal{Y}^\beta_s\cap(\Phi_s)^{-1}(\beta) = M^\beta\cap\Phi^{-1}(\beta)$. Je montre alors que pour tout $E\in\mathbf{K}_K(M)$ on a

$$RR^K_\beta(M,E) = \mathrm{Hol}^K_{K_\beta}\left(RR^{K_\beta}_\beta(\mathcal{Y}_s, E|_{\mathcal{Y}_s})\right)\ . \tag{3.75}$$

L'expression (3.75) permet de montrer que $[RR^K_\beta(M,E)]^K = 0$ dans l'un des deux cas suivants:

- E est strictement Φ-positif et $0\notin\Phi(M)$,
- E est Φ-positif et $0\in\Phi(M)$.

4. Travaux en cours et projets

En ce moment, je rédige un article de synthèse où je montre les différentes interactions entre la méthode des orbites de Kirillov et le slogan de Guillemin-Sternberg “la quantification commute à la réduction”. Ces deux thèmes ont de fortes interactions. Le premier s'occupe de la quantification des orbites coadjointes de groupes de Lie, tandis que dans le second on s'intéresse à la quantification d'actions hamiltoniennes de groupes de Lie compacts. La problématique est la suivante. Si $\pi_{\mathcal{O}}$ est une représentation irréductible d'un groupe de Lie G associée à une orbite coadjointe $\mathcal{O}$, quelles sont les multiplicités de la restriction $\pi_{\mathcal{O}}|_K$ à un sous-groupe compact K de G ? Est ce que le slogan de Guillemin-Sternberg s'applique ? On a vu à la section 3.4 que la série discrète est un exemple où l'on peut répondre par l'affirmative.

L'autre point que j'aborde dans ce papier concerne les deux types de quantifications introduites à la section 3. Je rappelle que ces deux types de quantifications interviennent dans la méthode des orbites de Kirillov. Par exemple, la quantification Spin^c est celle choisie par Duflo [16, 24]: elle a l'avantage d'avoir une bonne compatibilité par rapport au *caractère infinitésimal*. L'autre exemple fondamental où on voit cette dichotomie est le théorème de Borel-Weil-Bott. Le théorème de Borel-Weil correspond à une quantification de type Kählérien tandis que le théorème de Bott est un exemple de quantification Spin^c.

Un autre problème sur lequel je travaille depuis un moment a un rapport étroit avec la question suivante. Soient G un groupe réel semi-simple, et $V^l := \mathrm{H}^l_{(2)}(G\cdot\lambda, \tilde{L})$ un groupe de cohomologie L^2 introduit par Schmid. Peut-on montrer directement (et géométriquement) que les multiplicités d'un sous-groupe compact maximal $K \subset G$ dans $V^l|_K$ sont *finies*. Par ‘directement’ je veux dire sans utiliser le résultat de Schmid qui dit que V est soit nul, soit une représentation irréductible de G. Je rappelle que ce résultat utilise toute la force de la formule de Plancherel de Harish-Chandra. Une question similaire se pose pour les autres réalisations de la série dicrète: celle de Narasimhan-Okamoto sur les espaces symétriques hermitiens, et celle de Narasimhan sur les espaces symétriques.

Cette question (trop difficile) m'a conduit à la problématique suivante. Si dans la réalisation de Schmid, on effectue un déformation à la Witten sur la métrique du fibré en droites, i.e. on multiplie la métrique G-invariante par un facteur e^{ψ}, où ψ est une fonction K-invariante à valeurs réelle sur l'orbite $G\cdot\lambda$, que peut-on dire des K-multiplicités dans la K-représentation correspondante V^l_{ψ} ?

On peut montrer que ces multiplicités sont finies si ψ a une croissance rapide à l'infini, et dans certains j'arrive à calculer l'indice d'Euler $\sum_l(-1)^l V^l_{\psi}$. Je compte rédiger prochainement ces résultats partiels.

Parmi mes projets de recherche, deux questions se dégagent. La première concerne l'amélioration du théorème 3.12 au cas où les stabilisateurs ne sont pas forcément abéliens. On a vu que le problème provient des *modèles* que j'utilise dans la quantification Spin^c: les orbites $K\cdot(\mu+\rho_c)$. Ces modèles ne sont pas uniques et ne permettent donc pas de prendre en compte les variétés avec des stabilisateurs non-abéliens. Une idée vague me dit que les compactifications magnifiques de De Concini-Procesi pourraient servir dans la construction de nouveaux modèles.

Une autre question m'a été suggérée par M. Duflo. Soient G un groupe réel semi-simple, et $\mathcal{H}_\lambda$ la représentation de la série discrète de G associée à l'orbite $G \cdot \lambda$. Considérons l'action hamiltonienne d'un sous-groupe réductif $H \subset G$ sur $G \cdot \lambda$ et l'application moment correspondante $\Phi_H : \mathcal{O} \to \mathfrak{h}^*$. Quand est ce que la représentation $\mathcal{H}_\lambda|_H$ de H se décompose en une somme discrète de représentations irréductibles de H ($\mathcal{H}_\lambda|_H$ est alors dite admissible) ? Quelle est la relation entre l'image de Φ_H et l'ensemble des représentations irréductibles de H qui interviennent dans $\mathcal{H}_\lambda|_H$? J'ai un premier résultat lorsque H est compact. En utilisant le théorème 3.14, je peux démontrer dans ce cas que la représentation $\mathcal{H}_\lambda|_H$ est admissible si Φ_H est une application *propre*.

References

[1] M.F. Atiyah, *Elliptic operators and compact groups*, Springer, 1974. Lecture notes in Mathematics, **401**.

[2] M. F. Atiyah and R. Bott, The moment map and equivariant cohomology, *Topology*, **23**, 1984, 1-28.

[3] M.F. Atiyah, G.B. Segal, The index of elliptic operators II, *Ann. Math.*, **87**, 1968, p. 531-545.

[4] M.F. Atiyah, I.M. Singer, The index of elliptic operators I,III,IV, *Ann. Math.*, **87,93**, 1968, 1971.

[5] N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Grundlehren, vol. 298, Springer, Berlin, 1991.

[6] N. Berline and M. Vergne, Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **295**, 1982, p. 539-541.

[7] N. Berline and M. Vergne, Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes, *Duke. Math. J.*, **50**, 1983, p. 539-549.

[8] N. Berline and M. Vergne, The Chern character of a transversally elliptic symbol and the equivariant index, *Invent. Math.*, **124**, 1996, p. 11-49.

[9] N. Berline and M. Vergne, L'indice équivariant des opérateurs transversalement elliptiques, *Invent. Math.*, **124**, 1996, p. 51-101.

[10] A. Borel, *Seminar on transformation groups*, Annals of Math. Studies, **124**, Princeton Univ. Press, 1960.

[11] R. Bott, The index theorem for homogeneous differential operators. *Differential and Combinatorial Topology* (A Symposium in Honor of Marston Morse) 1965, p. 167-186. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

[12] R. Bott, Vector fields and characteristic numbers, *Michigan Math. J.*, **14**, 1967, p. 231-244.

[13] J.-M. Bismut, Localization formulas, superconnections, and the index theorem for families, *Comm. Math. Phys.*, **103**, 1983, p. 127-166.

[14] A. Cannas da Silva, Y. Karshon and S. Tolman, Quantization of presymplectic manifolds and circle actions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**, 2000, p. 525-552.

[15] H. Cartan, Notion d'algèbre différentielle; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie (p. 17-27). La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal (p. 57-71), *Colloque de Topologie*, C.B.R.M., Bruxelles, 1950.

[16] M. Duflo, Théorie de Mackey pour les groupes algébriques, *Acta Math.*, **47**, 1982, p. 153-213.

[17] M. Duflo, G. Heckman and M. Vergne, Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner, *Mem. Soc. Math. de France*, **15**, 1984, p. 65-128.

[18] M. Duflo and M. Vergne, Orbites coadjointes et cohomologie équivariante, *The orbit method in representation theory. Birkhäuser, Progress in math.*, **82**, 1990, p. 11-60.

[19] M. Duflo and M. Vergne, Cohomologie équivariante et descente, *Astérisque*, **215**, 1993, p. 5-108.

[20] J. J. Duistermaat and G. J. Heckman, On the variation in the cohomology in the symplectic form of the reduced phase space, *Invent. Math.*, **69**, 1982, p. 259-268; addendum, *ibid.*, **72**, 1983, p. 153-158.

[21] J. J. Duistermaat, V. Guillemin, E. Meinrenken and S. Wu, Symplectic reduction and Riemann-Roch for circle actions, *Math. Res. Letters*, **2**, 1995, p. 259-266.

[22] V. L. Ginzburg, V. Guillemin and Y. Karshon, Assignments and astract moment maps, *J. Differential Geom.*,**52**, (1999), no. 2, p. 259-301.

[23] V. L. Ginzburg, V. Guillemin and Y. Karshon, *Moment maps, cobordisms, and Hamiltonian group actions.* Appendix J by Maxim Braverman, Mathematical Surveys and Monographs, **98**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002 .

[24] A. Guichardet, Théorie de Mackey et méthode des orbites selon M. Duflo, *Expo. Math.*, **3**, (1985), p. 303-346.

[25] V. Guillemin, Reduced phase spaces and Riemann-Roch, *Lie theory and geometry. In honor of Bertram Kostant*, Edited by J.-L. Brylinski, R. Brylinski, V. Guillemin and V. Kac. Progress in Math., **123**, Birkhuser, 1994.

[26] V. Guillemin and S. Sternberg, *Supersymmetry and equivariant de Rham theory.* With an appendix containing two reprints by Henri Cartan. Mathematics Past and Present. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[27] V. Guillemin and J. Kalkman, The Jeffrey-Kirwan localization theorem and residue operations in equivariant cohomology, *J. Reine Angew. Math.*,**470**, (1996), p. 123-142.
[28] V. Guillemin, E. Lerman and S. Sternberg, On the Kostant multiplicity formula, *J. Geom. Phys.*, **5**, 1988, p. 721-750.
[29] V. Guillemin and S. Sternberg, Geometric quantization and multiplicities of group representations, *Invent. Math.*, **67**, 1982, p. 515-538.
[30] Harish-Chandra, Discrete series for semi-simple Lie group, I and II, *Acta Mathematica*, **113** (1965) p. 242-318, and **116** (1966) p. 1-111.
[31] H. Hecht and W. Schmid, A proof of Blattner's conjecture, *Invent. Math.*, **31**, 1975, p. 129-154.
[32] L. Jeffrey and F. Kirwan, Localization for non-abélian group action, *Topology*, **34**, 1995, p. 291-327.
[33] L. Jeffrey and F. Kirwan, Localization and quantization conjecture, *Topology*, **36**, 1997, p. 647-693.
[34] Y. Karshon, Moment map and non-compact cobordism, *J. Diff. Geometry*, **49**, 1998, p. 183-201.
[35] F. Kirwan, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1984.
[36] B. Kostant, Quantization and unitary representations, in *Modern Analysis and Applications*, Lecture Notes in Math., Vol. 170, Springer-Verlag, 1970, p. 87-207.
[37] S. Kumar and M. Vergne, Equivariant cohomology with generalized coefficients, *Astérisque*, 215, 1993, p. 109-204.
[38] S. Martin, Symplectic quotients by a non-abeliean group and by its maximal torus, *Arxiv*, math.SG/0001002.
[39] V. Mathai and D. Quillen, Superconnexions, Thom classes, and equivariant differential forms, *Topology*, **25**, 1986, p. 85-110.
[40] E. Meinrenken, On Riemaan-Roch formulas for multiplicities, *J. Amer. Math. Soc.*, **9**, 1996, p. 373-389.
[41] E. Meinrenken, Symplectic surgery and the Spin^c-Dirac operator, *Advances in Math.*, **134**, 1998, p. 240-277.
[42] E. Meinrenken, R. Sjamaar, Singular reduction and quantization, *Topology*, **38**, 1999, p. 699-762.
[43] P-E. Paradan, Thèse de Doctorat de l'Université Paris 7 Denis Diderot, 1996.
[44] P-E. Paradan, Formules de localisation en cohomologie équivariante, *C.R.A.S.*, **324**, 1997, p. 491-496.
[45] P-E. Paradan, Formules de localisation en cohomologie équivariante, *Compositio Mathematica*, **117**, 1999, p. 243-293.
[46] P-E. Paradan, The moment map and equivariant cohomology with generalized coefficients, *Topology*, **163**, 2000, p. 401-444.
[47] P-E. Paradan, The Fourier transform of semi-simple coadjoint orbits, *J.F.A.*, **39**, 1999, p. 152-179.
[48] P-E. Paradan, Localization of the Riemann-Roch character, *J.F.A.*, **187**, 2001, p. 442-509.
[49] P-E. Paradan, Spin^c-quantization and the K-multiplicities of the discrete series, à paraître aux *Annales Scientifiques de l'E.N.S.*.
[50] P-E. Paradan, Note sur les formules de saut de Guillemin-Kalkman, à paraître aux *C.R.A.S.*.
[51] E. Prato and S. Wu, Duistermaat-Heckman Measures in a non-compact setting, *Compositio Mathematica*, **94**, 1994, p. 113-128.
[52] D. Quillen, The sectrum of an equivariant cohomology ring: I,II. *Annals of Math.*, **94**, 1971, p. 549-602.
[53] W. Rossmann, Kirillov's character formula for reductive group, *Invent. Math.*, **48**, 1978, p. 207-220.
[54] W. Schmid, L^2-cohomology and the discrete series, *Ann. of Math.*, **103**, 1976, p. 375-394.
[55] G. Segal, Equivariant K-Theory, *Publ. Math. IHES*, **34**, 1968, p. 129-151.
[56] I. Sengupta, Projection of orbits and K-multiplicities, *J. of Functional Analysis*, **84**, 1989, p. 215-225.
[57] R. Sjamaar, Symplectic reduction and Riemann-Roch formulas for multiplicities, *Bull. Amer. Math. Soc.* **33**, 1996, p. 327-338.

[58] Y. Tian, W. Zhang, Holomorphic Morse inequalities in singular reduction. *Math. Res. Lett.*,**5**, 1998, no. 3, p. 345-352.

[59] Y. Tian, W. Zhang, An analytic proof of the geometric quantization conjecture of Guillemin-Sternberg, *Invent. Math*, **132**, 1998, p. 229-259.

[60] Y. Tian, W. Zhang, Arxiv 97

[61] M. Vergne, Multiplicity formula for geometric quantization, Part I, Part II, and Part III, *Duke Math. Journal*, **82**, 1996, p. 143-179, p 181-194, p 637-652.

[62] M. Vergne, Quantification géométrique et réduction symplectique, *Séminaire Bourbaki* **888**, 2001.

[63] M. Vergne, Cohomologie équivariante et théorème de Stokes, École dété CIMPA-UNSA-UNESCO-MAROC "Analyse sur les groupes de Lie et théorie des représentations", Kenitra, Maroc, juillet 1999. Notes rédigées par S. Paycha. À paraître: Séminaire et congrès. SMF.

[64] E. Witten, Two dimensional gauge theories revisited, *J. Geom. Phys.* **9**, 1992, p. 303-368.