

Analyse mathématique de la supraconductivité dans un domaine à coins: méthodes semi-classiques et numériques

Virginie Bonnaillie

▶ **To cite this version:**

Virginie Bonnaillie. Analyse mathématique de la supraconductivité dans un domaine à coins: méthodes semi-classiques et numériques. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2003. Français. NNT : . tel-00005430

HAL Id: tel-00005430
https://theses.hal.science/tel-00005430

Submitted on 23 Mar 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° D'ORDRE : 7392

UNIVERSITÉ PARIS XI
U. F. R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI, ORSAY

Spécialité : MATHÉMATIQUES

par

VIRGINIE BONNAILLIE

Sujet :

ANALYSE MATHÉMATIQUE DE LA SUPRACONDUCTIVITÉ DANS UN DOMAINE À COINS : MÉTHODES SEMI-CLASSIQUES ET NUMÉRIQUES

Soutenue le 11 Décembre 2003 devant la Commission d'examen

M. François Alouges	Directeur de thèse
Mme Christine Bernardi	Rapporteur
M. Fabrice Béthuel	Examinateur
Mme Catherine Bolley	Examinateur
Mme Monique Dauge	Examinateur
M. Bernard Helffer	Directeur de thèse
M. Jean-Claude Saut	Président
M. Peter Sternberg	Rapporteur

Remerciements

Que toutes les personnes qui ont contribué à cette thèse et m'ont aidée d'une façon ou d'une autre à mener à bien ce travail trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Je commencerais par remercier vivement mes directeurs de thèse, François Alouges et Bernard Helffer, pour leur disponibilité, leurs conseils et leur investissement dans ce travail. Ils m'ont proposé un sujet original mêlant des aspects mathématiques très variés me permettant ainsi de travailler sur plusieurs thèmes et d'avancer régulièrement. Je voudrais remercier Bernard Helffer pour l'intérêt qu'il porte depuis des années à ce sujet, son attention et ses relectures précises et précieuses (grâce aux bonnes conditions de voyage de certaines compagnies de transport...) ; François Alouges pour son optimisme à toute épreuve m'interdisant tout défaitisme, son enthousiasme, sa gentillesse, son écoute et ses idées constructives.

Je suis très reconnaissante envers Christine Bernardi et Peter Sternberg d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Je remercie chaleureusement Christine Bernardi pour la relecture attentive de ce travail et ses conseils notamment pour l'annexe qui m'ont permis de rendre plus clairs ces résultats et Peter Sternberg pour l'attention qu'il a portée à ce sujet tout au long de ma thèse.

Je remercie sincèrement Fabrice Béthuel, Catherine Bolley, Monique Dauge et Jean-Claude Saut de m'avoir fait le plaisir de participer au jury. J'exprime toute ma gratitude à Monique Dauge, Soeren Fournais et Geneviève Raugel pour l'aide qu'ils m'ont apportée, à Ari Laptev et Heinz Siedentop pour leur accueil chaleureux à Stockholm et Münich.

Je remercie tous les membres du Département de Mathématique de l'Université Paris XI, en particulier ceux de l'équipe Analyse Numérique - EDP, qui, durant ces deux années, m'ont encouragée et soutenue. Je suis reconnaissante envers les secrétaires, notamment Danièle Le Meur et Françoise Vasseur, pour leur efficacité et leur sympathie. Un grand merci aussi à Jacques pour sa disponibilité lors des problèmes informatiques et aux doctorants, Antoine, Benoît, Christophe, Fatima, Ludovic, Morgan, Olivier, Rémi et Sylvain pour leur aide et leur amitié.

Ce travail n'aurait pu aboutir sans le soutien permanent et les encouragements de ma famille et de mes amis. Que mes parents trouvent ici l'expression de mes remerciements pour leurs efforts et sacrifices. Je voudrais les remercier de m'avoir appris la valeur du travail, fait confiance et offert les opportunités pour réaliser mes projets. Je tiens également à remercier mes frère, soeurs, beaux-frères et belle-soeur pour leur présence (à distance) et leur soutien constant et mes neveux, Margaux, Simon, Hugo, Cyril, Antoine, Charles, Baptiste, Grégoire, Madeline, Victor et Louis, pour la bouffée d'oxygène qu'ils m'offrent dès que nous nous retrouvons.

Mes derniers remerciements vont à Tony pour avoir partagé ce travail au quotidien à mes côtés, relu toute cette thèse et toujours cru en moi. Ta patience et ton calme sont une aide précieuse...

A Antoine, Hugo, Madeline,
mes filleuls,

A mes parents,

A Tony,

Mathematical analysis of superconductivity in a domain with corners : semi-classical and numerical methods.

Abstract :

Superconducting theory, modelized by Ginzburg and Landau, motivates works about Schrödinger operator with magnetic field. The aim of this thesis is to analyze the geometry influence on the superconductivity emergence by extending results for regular domains to domains with corners. Semi-classical analysis leads to deal with three model operators : the Neumann realization of the Schrödinger operator with constant magnetic field in the plane, the half-plane and angular sectors. The study of the two first is well known and we concentrate on the third.

After determination of the bottom of the essential spectrum, we show that the bottom of the spectrum is an eigenvalue for a sector with an acute angle. We give an explicit asymptotics of the lowest eigenvalue as the angle tends to 0 and clarify the localization of the ground state using Agmon's techniques.

Then we illustrate and estimate the behavior of eigenvectors and eigenvalues thanks to numerical tools based on finite elements method. Due to the ground state localization, the discretized problem is badly conditioned; nevertheless the analysis of the operator properties and of the drawbacks of classical methods lead us to implement a robust and efficient algorithm computing the ground state. To improve numerical results, we construct a posteriori error estimates for this eigenvalue problem and use the mesh-refinement techniques to localize the eigenstate associated to general domains and to study the variation of the bottom of the spectrum according to the angle of the sector.

Keywords : Schrödinger operator with magnetic field in a domain with corners, spectral theory, semi-classical analysis, Agmon estimates, finite elements, a priori and a posteriori error estimates, mesh refinement.

Classification A. M. S. : 35J10, 35J20, 35P15, 35Q40, 65N15, 65N25, 65N30, 81Q10

Analyse mathématique de la supraconductivité dans un domaine à coins : méthodes semi-classiques et numériques.

Résumé :

La théorie de la supraconductivité, modélisée par Ginzburg et Landau, motive les travaux relatifs à l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique. L'objet de cette thèse est d'analyser l'influence de la géométrie du domaine sur l'apparition de la supraconductivité en étendant les résultats existant pour des domaines réguliers à des domaines à coins. L'analyse semi-classique conduit à étudier trois opérateurs modèles : la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant sur le plan, le demi-plan et les secteurs angulaires. L'étude des deux premiers est bien connue et nous nous concentrons sur le dernier.

Après avoir déterminé le bas du spectre essentiel, nous montrons que le bas du spectre est une valeur propre pour un secteur d'angle aigu. Nous explicitons le développement limité de la plus petite valeur propre quand l'angle du secteur tend vers 0 et précisons la localisation de l'état fondamental grâce aux techniques d'Agmon.

Nous illustrons et estimons ensuite le comportement des vecteurs et valeurs propres à l'aide d'outils numériques basés sur la méthode des éléments finis. La localisation de l'état fondamental rend le problème discret très mal conditionné mais l'analyse des propriétés de l'opérateur et des défauts des méthodes classiques permet malgré tout de mettre en œuvre un algorithme robuste et efficace calculant l'état fondamental. Afin d'améliorer les résultats numériques, nous construisons des estimateurs a posteriori pour ce problème aux valeurs propres et utilisons les techniques de raffinement de maillages pour localiser l'état propre dans des domaines généraux et étudier la variation du bas du spectre en fonction de l'angle du secteur.

Mots clés : Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique dans un domaines à coins, théorie spectrale, analyse semi-classique, estimations d'Agmon, éléments finis, estimateur d'erreur a priori et a posteriori, raffinement de maillages.

Classification A. M. S. : 35J10, 35J20, 35P15, 35Q40, 65N15, 65N25, 65N30, 81Q10

Table des matières

1 Introduction **1**

1.1 La supraconductivité 1

1.2 La théorie de Ginzburg-Landau 2

1.3 Liens avec l'opérateur de Schrödinger et objectifs 5

1.4 Organisation de la thèse 8

1.4.1 Première partie : Analyse spectrale des opérateurs modèles 8

1.4.2 Deuxième partie : Analyse asymptotique dans les secteurs de petit angle . . . 10

1.4.3 Troisième partie : Modélisation numérique 10

1.4.4 Quatrième partie : Asymptotique à grand champ magnétique pour les domaines à coins 12

I Analyse spectrale des opérateurs modèles **13**

2 Étude de l'opérateur $H(\zeta) = D_t^2 + (t-\zeta)^2$ sur $\mathbb{R}^+$ **15**

2.1 Notations 15

2.2 Régularité 17

2.3 Comportement de la première valeur propre 21

2.4 Estimation du premier élément propre 25

2.5 Estimation de $\phi(0)$ 28

2.6 Estimation d'erreurs à l'aide de gaussiennes 29

2.7 Construction d'un quasi-mode par différence finie 32

2.8 Estimations de la seconde valeur propre 37

3 Spectre essentiel **41**

3.1 Propriétés élémentaires de l'opérateur de Schrödinger 41

3.1.1 Stabilité du spectre 41

3.1.2 Remarques de localisation 44

3.2 Généralisation du Lemme de Persson 45

3.3 Bas du spectre essentiel pour un secteur angulaire de $\mathbb{R}^2$ 49

4 Majorations du bas du spectre pour les secteurs angulaires **53**

4.1 Remarque relative aux demi-secteurs 53

4.2 Secteurs d'angle $\frac{\alpha}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$ 54

4.3 Majoration de $\mu(\alpha)$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ 54

II Analyse asymptotique dans les secteurs de petit angle **59**

5 Changement de variables ou de jauge **61**
5.1 Passage aux coordonnées polaires . . . 61
5.2 Changement de jauge . . . 63
5.3 Domaine indépendant de α . . . 64

6 Analyse des deux formes principales **67**
6.1 Présentation . . . 67
6.2 Définition du nouvel opérateur L^{moy} . . . 67
6.2.1 Domaines de forme ℓ^{moy} . . . 67
6.2.2 Propriétés de l'opérateur L^{moy} . . . 70
6.2.3 État fondamental de l'opérateur L^{moy} et applications . . . 72
6.3 Rappels sur la réalisation de Neumann de $-\partial_\eta^2$ sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ . . . 74

7 Construction d'une solution formelle **77**
7.1 Présentation du problème . . . 77
7.2 Coefficients constants . . . 78
7.3 Coefficients de α^2 . . . 79
7.4 Algorithme pour la détermination des coefficients . . . 80
7.5 Forme particulière des coefficients u_k . . . 83

8 Majoration de l'asymptotique de $\mu(\alpha)$ **85**

9 Décroissance exponentielle à l'infini des premiers vecteurs propres **89**
9.1 Décroissance à l'aide des estimations du spectre essentiel . . . 89
9.2 Décroissance à l'aide des estimations de la valeur propre . . . 92

10 Minoration de l'état fondamental **97**
10.1 Minoration de $\mu(\alpha)$ au premier ordre . . . 97
10.1.1 Opérateur moyenné $L^{\mathrm{moy},T}$ . . . 97
10.1.2 Opérateur P_α^T sur un secteur tronqué . . . 98
10.1.3 Opérateur régularisé $P^{T,\rho}$ . . . 100
10.1.4 Synthèse de ces constructions . . . 102
10.1.5 Comportement des vecteurs propres . . . 103
10.2 Estimation de la seconde valeur propre . . . 105
10.2.1 Quelques estimations des deuxièmes valeurs propres . . . 105
10.2.2 Comparaison de ν_2 et λ_2^{moy} . . . 105
10.2.3 Comparaison de $\lambda_2(\alpha)$ et $\lambda_2^T(\alpha)$ . . . 107
10.2.4 Minoration de $\mu_2(\alpha)$ et de l'écart entre $\lambda_2(\alpha)$ et $\lambda(\alpha)$ . . . 108

11 Premiers termes du développement limité de $\mu(\alpha)$ **109**
11.1 Détermination des coefficients à l'aide de Maple . . . 109
11.2 Utilisation des premiers termes du développement limité . . . 110
11.3 Estimations de $\mu(\alpha)$ . . . 111

III Modélisation numérique **113**

12 Analyse numérique du problème **115**
12.1 Introduction . . . 115

12.2 Recherche de valeur propre généralisée . . . 117
12.3 Méthode numérique standard . . . 119
12.4 Une approche différente du problème . . . 125
12.5 Une méthode plus robuste . . . 135

13 Raffinement de maillages 147
13.1 Construction d'estimateurs a posteriori . . . 147
13.2 Applications au raffinement de maillage . . . 148
13.3 Comparaison avec un raffinement de maillages uniforme . . . 159
13.4 Estimation numérique de $\mu(\alpha)$ . . . 165
13.5 Localisation de l'état propre dans un domaine quelconque . . . 168

IV Asymptotique à grand champ magnétique pour les domaines à coins 179

14 Estimations d'énergie 181
14.1 Localisation par partition de l'unité et changements de variables et de jauge . . . 181
14.1.1 Localisation grâce aux partitions de l'unité . . . 181
14.1.2 Changement de variables . . . 182
14.1.3 Changement de jauge . . . 184
14.2 Minoration du bas du spectre . . . 186
14.3 Majoration du bas du spectre . . . 188
14.3.1 Contribution des sommets . . . 189
14.3.2 Contribution du bord régulier . . . 191
14.3.3 Contribution de l'intérieur . . . 195
14.3.4 Généralisation de la majoration . . . 197

15 Localisation de l'état fondamental 201
15.1 Présentation . . . 201
15.2 Décroissance à l'intérieur . . . 202
15.3 Décroissance sur le bord . . . 204
15.4 Localisation pour les polygones réguliers . . . 206

16 Simplicité de la première valeur propre de $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ 213
16.1 Domaine particulier . . . 213
16.2 Simplicité de la première valeur propre de $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ . . . 215
16.3 Développement limité semi-classique pour l'état fondamental . . . 218

17 Conclusion 223

A A posteriori error estimator 225
A.1 Introduction . . . 225
A.2 Notation and results . . . 226
A.2.1 Physical problem . . . 226
A.2.2 Notation . . . 228
A.2.3 Main result . . . 228
A.2.4 Scheme of the proof of Theorem A.2 . . . 229
A.3 A priori estimates and applications . . . 229
A.3.1 A priori estimates . . . 229
A.3.2 Study of the functional F . . . 232

A.4 Adaptation of Verfürth's techniques 236
A.4.1 Shape functions and associated properties 236
A.4.2 Preliminary lemmas 237
A.4.3 Proof of Theorem A.2 243
A.5 Conclusion 244

Chapitre 1

Introduction

1.1 La supraconductivité

Le phénomène de la supraconductivité est découvert en 1911 lorsque le physicien hollandais Onnes étudie la résistivité du mercure à la température de liquéfaction de l'hélium et s'aperçoit que celle-ci est nulle. La supraconductivité est ainsi la propriété que possèdent certains matériaux de laisser passer le courant sans dissipation d'énergie lorsqu'ils sont maintenus en dessous d'une température critique T_C.

En outre, les matériaux supraconducteurs présentent une autre propriété lorsqu'ils sont soumis à un champ magnétique extérieur. En effet, les premières expériences ont montré que la supraconductivité est détruite lorsque le matériau est soumis à un champ extérieur trop intense. Par contre, lorsque le champ externe n'est pas trop élevé, en plus d'être supraconducteur, le matériau repousse le champ extérieur. Ce phénomène est appelé EFFET MEISSNER. L'expérience a montré que le comportement des supraconducteurs soumis à un champ magnétique intermédiaire est essentiellement de deux types selon la nature du matériau. Ces comportements sont schématisés aux Figures 1.1 et 1.2.

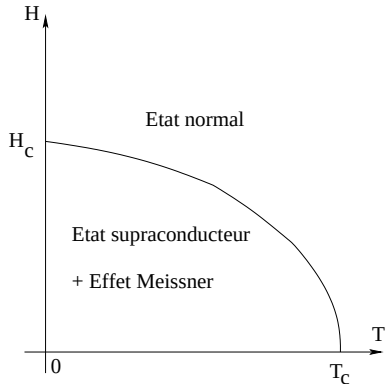


FIG. 1.1 – Supraconducteur de type I.

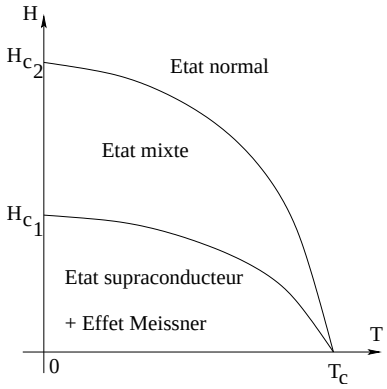


FIG. 1.2 – Supraconducteur de type II.

Les supraconducteurs de type I ne possèdent qu'un champ critique et lorsque l'intensité du champ magnétique externe augmente, ils passent directement de l'état supraconducteur avec effet Meissner à l'état normal pour lequel la supraconductivité est détruite.
Les supraconducteurs de type II possèdent deux champs critiques H_{C_1} et H_{C_2}. Ils se comportent comme les supraconducteurs de type I lorsque le champ magnétique extérieur est soit plus faible

que H_{C_1}, soit plus intense que H_{C_2}, étant alors supraconducteur et repoussant les lignes de champ magnétique dans le premier cas et se trouvant dans l'état normal dans le second cas. Pour un champ extérieur d'intensité comprise entre H_{C_1} et H_{C_2}, le matériau est supraconducteur mais se laisse pénétrer ponctuellement à travers des tubes, appelés vortex, par le champ extérieur. Cette phase est appelée état mixte.

De telles propriétés, décrites plus en détail dans les ouvrages de physique tels que [48, 88, 89, 99, 50] justifient pleinement l'intérêt croissant porté à la supraconductivité et promet de nombreuses applications technologiques dont certaines sont déjà commercialisées. Nous pouvons citer l'exemple du train Yamanashi lancé sur des aimants supraconducteurs de fortes puissances ce qui élimine la friction avec les rails. D'autres applications ont trait au domaine médical et notamment aux Images à Résonance Magnétique IRM. Toutefois les faibles températures critiques des supraconducteurs limitent leurs utilisations et incitent les physiciens à chercher de nouveaux matériaux dont la température critique soit plus élevée.

1.2 La théorie de Ginzburg-Landau

Plusieurs physiciens ont essayé de modéliser et de décrire ce phénomène : London en 1935, Ginzburg et Landau en 1952 [50], puis Bardeen, Cooper et Schrieffer en 1957. Nous nous limiterons à la modélisation de Ginzburg-Landau qui décrit de façon phénoménologique la supraconductivité. Cette modélisation, confortée par la théorie macroscopique de Gorkov, s'appuie sur la théorie générale de transitions de phase du second ordre développée par Landau en 1937. Elle suppose l'existence d'un paramètre d'ordre ψ tendant vers 0 à la transition de phase, d'une écriture de l'énergie libre selon les puissances de ψ et la régularité selon la température T des coefficients de cette écriture.

Nous considérons un échantillon Ω supraconducteur, supposé sans trou, et le soumettons à un champ magnétique $\mathcal{H}$. Alors, après renormalisation, l'énergie libre de ce matériau est donnée par la fonctionnelle de Ginzburg-Landau :

$$\mathcal{G}(\psi, \mathcal{A}) = \int_\Omega \left(|(\nabla - i\kappa\mathcal{A})\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2}(|\psi|^2 - 1)^2 \right) \, dx + \kappa^2 \int_\Omega |\mathrm{rot}\, \mathcal{A} - \mathcal{H}|^2 \, dx. \tag{1.1}$$

Le premier terme $\displaystyle\int_\Omega \left(|(\nabla - i\kappa\mathcal{A})\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2}(|\psi|^2 - 1)^2 \right) \, dx$ représente l'énergie associée aux électrons supraconducteurs et le deuxième terme $\kappa^2 \displaystyle\int_\Omega |\mathrm{rot}\, \mathcal{A} - \mathcal{H}|^2 \, dx$ l'énergie magnétique.
La constante κ est une caractéristique physique. Comme nous l'avons mentionné à la Section 1.1, nous distinguons deux types de supraconducteurs. Cette distinction apparaît au niveau de la caractéristique κ :

- κ petit : le supraconducteur est de type I,
- κ grand : le supraconducteur est de type II.

Nous nous intéressons au comportement des supraconducteurs de type II et considérons :

κ grand.

Nous supposons que Ω est un domaine borné simplement connexe à bord lipschitzien de $\mathbb{R}^2$. La réduction d'un problème de $\mathbb{R}^3$ à un échantillon de $\mathbb{R}^2$ dans l'écriture de la fonctionnelle (1.1) peut avoir deux interprétations physiques :

- Le domaine Ω est la section d'un cylindre infiniment long dans $\mathbb{R}^3$;
- Le domaine Ω est le domaine «limite» d'un film de fine épaisseur dans $\mathbb{R}^3$.

La fonctionnelle de Ginzburg-Landau dépend de deux paramètres ψ et $\mathcal{A}$ et est définie pour $\psi \in H^1(\Omega, \mathbb{C})$, $\mathcal{A} \in H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. La fonction ψ définie sur Ω à valeurs complexes est appelée paramètre d'ordre, son module $|\psi|^2$ rend compte de la densité des paires d'électrons supraconducteurs et la phase de la circulation de courant. Ainsi, $|\psi| \simeq 0$ correspond à l'état normal quand le matériau n'est pas supraconducteur et $|\psi| \simeq 1$ à la phase supraconductrice.
Le champ de vecteurs $\mathcal{A}$, défini sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est le potentiel magnétique induit. Son champ magnétique associé est $B = \operatorname{rot} \mathcal{A}$.

Remarquons que la fonctionnelle de Ginzburg-Landau est invariante de jauge au sens où pour toute fonction $\phi \in H^2(\Omega)$:

$$\mathcal{G}(\psi e^{i\kappa\phi}, \mathcal{A} + \nabla\phi) = \mathcal{G}(\psi, \mathcal{A}). \tag{1.2}$$

Ainsi, la résolution du problème ne pourra être effectuée qu'à changement de jauge près.

Les états physiquement stables sont les minimiseurs de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau. Les quantités ayant un sens physique sont celles qui sont invariantes de jauge : l'amplitude $|\psi|^2$, l'intensité du champ magnétique B, l'énergie $\mathcal{G}$, le courant supraconducteur j :

$$j := -\frac{i}{2\kappa}\left(\overline{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\overline{\psi}\right) - |\psi|^2\mathcal{A} = -\frac{i}{2\kappa}\left(\overline{\psi}(\nabla - i\kappa\mathcal{A})\psi - \psi\overline{(\nabla - i\kappa\mathcal{A})\psi}\right).$$

Il est aisé de remarquer que lorsque $\psi = 0$, alors $j = 0$, ce qui traduit le fait que lorsque la supraconductivité est détruite, $\psi = 0$ et il n'y a pas de courant supraconducteur. Par contre, la supraconductivité ($|\psi| \simeq 1$) engendre un courant supraconducteur et ainsi $|j| \neq 0$.
Les points critiques de la fonctionnelle $\mathcal{G}$ sont solutions des équations d'Euler (cf [62, 48]) :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -(\nabla - i\kappa\mathcal{A})^2\psi &=& \kappa^2(1-|\psi|^2)\psi, & \text{sur } \Omega, \\ \operatorname{rot}^2\mathcal{A} &=& -\dfrac{i}{2\kappa}(\overline{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\overline{\psi}) - |\psi|^2\mathcal{A} + \operatorname{rot}\mathcal{H}, & \text{sur } \Omega, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu} - i\kappa\mathcal{A}\psi\cdot\nu &=& 0, & \text{sur } \Gamma', \\ \operatorname{rot}\mathcal{A} - \mathcal{H} &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{1.3}$$

en notant Γ' les points du bord où la normale unitaire extérieure ν est définie et :

$$\operatorname{rot}^2\mathcal{A} = (\partial_2(\operatorname{rot}\mathcal{A}), -\partial_1(\operatorname{rot}\mathcal{A})).$$

En se limitant à des champs magnétiques extérieurs uniformes, constants et normaux à la section Ω du cylindre, nous pouvons supposer que le champ $\mathcal{H}$ est de la forme $\mathcal{H}(x) = \sigma H_e(x)$ où H_e est un champ fixé constant égal à 1 et σ est l'intensité du champ appliqué. Nous déterminons alors un unique champ de vecteurs $\mathbf{F}$ défini sur $\overline{\Omega}$ vérifiant :

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{rot}\mathbf{F} = H_e \quad \text{et} \quad \operatorname{div}\mathbf{F} = 0 & \text{dans} & \Omega, \\ \mathbf{F}\cdot\nu = 0 & \text{sur} & \Gamma'. \end{array}$$

Nous pouvons affiner les transitions de phase proposées ci-avant et discerner trois champs critiques $H_{C_1}(\kappa)$, $H_{C_2}(\kappa)$ et $H_{C_3}(\kappa)$ correspondant aux effets suivants :

- $\sigma < H_{C_1}(\kappa)$:
  Lorsque $\sigma = 0$, le couple $(\psi, \mathcal{A}) = (1, 0)$ est un point critique qui minimise la fonctionnelle $\mathcal{G}$. Cet état traduit l'état supraconducteur du matériau. Pour $\sigma < H_{C_1}(\kappa)$, le seul minimiseur $(\psi, \mathcal{A})$ de $\mathcal{G}$ vérifie $|\psi| \simeq 1$. Dans ce cas, l'échantillon est dans la phase supraconductrice, il laisse passer le courant sans résistance électrique et repousse les lignes de champ.

- $H_{C_1}(\kappa) < \sigma < H_{C_2}(\kappa)$:
  Cette phase correspond à l'état mixte. Les phases normale et supraconductrice coexistent. Quand σ augmente de $H_{C_1}(\kappa)$ à $H_{C_2}(\kappa)$, le champ magnétique pénètre le matériau par des vortex de plus en plus denses.
- $H_{C_2}(\kappa) < \sigma < H_{C_3}(\kappa)$:
  La supraconductivité a disparu à l'intérieur et subsiste à la surface du matériau. Le minimiseur $(\psi, \mathcal{A})$ de $\mathcal{G}$ est tel que $|\psi| > 0$ à la surface du matériau tandis que $|\psi| \simeq 0$ à l'intérieur.
- $\sigma > H_{C_3}(\kappa)$:
  Il est évident que $(0, \sigma\mathbf{F})$ est un point critique pour la fonctionnelle $\mathcal{G}$. Cet état correspond physiquement à l'état normal où la supraconductivité est détruite. Giorgi et Phillips [51] ont établi que lorsque σ est grand, cette solution $(0, \sigma\mathbf{F})$ est effectivement l'unique minimiseur.

Revenons au champ critique $H_{C_3}(\kappa)$ afin d'en donner une définition mathématique. Appliquant un champ magnétique extérieur d'intensité σ et abaissant progressivement cette intensité, nous souhaitons déterminer à partir de quelle intensité la supraconductivité apparaît. Ceci revient donc à déterminer quand la solution normale n'est plus un minimiseur. Nous définissons naturellement :

$$H_{C_3}(\kappa) = \inf\{\sigma > 0 |\ (0, \sigma\mathbf{F}) \text{ est un minimiseur global de } \mathcal{G}.\} \tag{1.4}$$

Afin de déterminer quand apparaît la supraconductivité, il est nécessaire de préciser le comportement asymptotique de $H_{C_3}(\kappa)$ pour κ grand. De plus, en abaissant le champ extérieur en dessous de ce champ critique $H_{C_3}(\kappa)$, l'expérience physique montre que la supraconductivité apparaît à la surface de l'échantillon, il est alors intéressant de retrouver ce résultat et d'en quantifier la localisation. Les physiciens De Gennes [48], Ginzburg et Landau [50], Saint-James et De Gennes [88], Saint-James, Sarma et Thomas [89], Tinkham [99] ou Berger et Rubinstein [87, 13, 14] expliquent ce phénomène. Les résultats des expériences sont justifiés par les travaux plus rigoureux d'Almog [5, 4], Bauman, Phillips et Tang [12], Bernoff et Sternberg [17], Lu et Pan [78, 77], Del Pino, Felmer et Sternberg [43].
Citons ici un résultat de Helffer et Pan [61] précisant l'apparition de la nucléation et l'asymptotique du champ critique pour des domaines réguliers, complété par Pan [83], Pan et Kwek [84], Sandier et Serfaty [90, 91, 93, 92].

Théorème 1.1. *Pour tout domaine simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de bord régulier et de courbure c, il existe une constante universelle $C_1 > 0$ telle que, pour κ grand :*

$$H_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Theta_0} + \frac{C_1}{\Theta_0^{3/2}} c_{max} + \mathcal{O}(\kappa^{-1/3}), \tag{1.5}$$

où $c_{max} = \max_{x \in \partial\Omega} c(x)$ et Θ_0 défini à la Proposition 2.12. De plus, si l'intensité du champ extérieur est proche du champ critique $H_{C_3}(\kappa)$ sans le dépasser :

$$\frac{\kappa}{\Theta_0} + o(1) < \sigma < H_{C_3}(\kappa),$$

alors la supraconductivité apparaît à la surface de l'échantillon. En effet, il existe C, $\delta > 0$ et κ_0 tels que le minimiseur $(\psi_{\kappa,\sigma}, \mathcal{A}_{\kappa,\sigma})$ de $\mathcal{G}$ vérifie pour tout $x \in \Omega$ et tout $\kappa \geq \kappa_0$:

$$|\psi_{\kappa,\sigma}(x)| \leq C e^{-\delta\kappa\ d(x,\partial\Omega)} ||\psi_{\kappa,\sigma}||_{L^\infty(\Omega)}.$$

Plus précisément, la localisation a lieu aux points de courbure maximale.

1.3 Liens avec l'opérateur de Schrödinger et objectifs

Remarquons qu'au voisinage du champ critique $H_{C_3}(\kappa)$, le module $|\psi|$ du paramètre d'ordre est très petit, nous pouvons donc linéariser les équations d'Euler (1.3) au voisinage de l'état normal $(\psi, \mathcal{A}) = (0, \sigma\mathbf{F})$ et obtenons ainsi :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -(\nabla - i\kappa\mathcal{A})^2\psi & = & \kappa^2\psi, & \text{sur } \Omega, \\ \operatorname{rot}^2\mathcal{A} & = & \operatorname{rot}\mathcal{H}, & \text{sur } \Omega, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu} - i\kappa\mathcal{A}\psi\cdot\nu & = & 0, & \text{sur } \Gamma', \\ \operatorname{rot}\mathcal{A} - \mathcal{H} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{1.6}$$

Nous avons choisi un champ extérieur de la forme $\mathcal{H} = \sigma\operatorname{rot}\mathbf{F}$, alors, le changement de paramètre

$$h = \frac{1}{\kappa\sigma}, \tag{1.7}$$

transforme les équations de (1.6) en :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\left(h\nabla - i\dfrac{\mathcal{A}}{\sigma}\right)^2\psi & = & \dfrac{1}{\sigma^2}\psi, & \text{sur } \Omega, \\ \operatorname{rot}\mathcal{A} & = & \sigma\operatorname{rot}\mathbf{F}, & \text{sur } \overline{\Omega}, \\ \left(\left(h\nabla - i\dfrac{\mathcal{A}}{\sigma}\right)\psi\right)\cdot\nu & = & 0, & \text{sur } \Gamma'. \end{array}\right. \tag{1.8}$$

Ainsi l'étude de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique et paramètre semi-classique $h \to 0$ permettra d'obtenir des informations sur les minimiseurs de la fonctionnelle $\mathcal{G}$. En effet, regarder la limite quand $\kappa \to +\infty$ revient dans (1.8) à étudier le comportement quand $h \to 0$.
Le résultat suivant confirme le rapport étroit entre le champ critique $H_{C_3}(\kappa)$ et le bas du spectre de la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger $-(\nabla - i\mathcal{A})^2$ noté pour le moment $\mu_1(\mathcal{A})$.

Lemme 1.2. *(cf [58])*
- *Si $\mu_1(\kappa\sigma\mathbf{F}) < \kappa^2$, alors $\mathcal{G}$ a un minimiseur non trivial.*
- *Inversement, si $\mathcal{G}$ a un minimiseur non trivial $(\psi_{\kappa,\sigma}, \mathcal{A}_{\kappa,\sigma})$, alors $\mu_1(\kappa\mathcal{A}_{\kappa,\sigma}) < \kappa^2$.*

Comme le montrent la linéarisation (1.6) de l'équation d'Euler au voisinage de la solution normale et le Lemme 1.2, l'étude de l'opérateur de Schrödinger joue un rôle fondamental pour déterminer les propriétés du champ critique et la localisation du minimiseur de $\mathcal{G}$. Dans cette thèse, nous nous concentrerons donc sur cet opérateur et présenterons des résultats de localisation de l'état fondamental.

Présentons le cadre de notre étude. Considérons un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ que nous supposerons simplement connexe à bord lipschitzien et nous noterons Γ' l'ensemble des points du bord où la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$, ν, est définie. Le but est de déterminer le bas du spectre de la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger défini par :

$$P_{h,\mathcal{A},\Omega} = -\nabla_{h,\mathcal{A}}^2, \text{ avec } \nabla_{h,\mathcal{A}} = h\nabla - i\mathcal{A}, \tag{1.9}$$

sur le domaine :

$$\mathcal{D}^N(P_{h,\mathcal{A},\Omega}) := \{u \in L^2(\Omega) |\ \nabla_{h,\mathcal{A}}u \in L^2(\Omega),\ -\nabla_{h,\mathcal{A}}^2 u \in L^2(\Omega),\ \nu\cdot\nabla_{h,\mathcal{A}}u_{|_{\Gamma'}} = 0\}. \tag{1.10}$$

Le champ de vecteurs $\mathcal{A}$ est un potentiel magnétique régulier dont le champ magnétique associé est $B = \operatorname{rot}\mathcal{A}$ et h est un paramètre positif.

Notant que $P_{h,\mathcal{A},\Omega} = h^2 P_{1,\frac{\mathcal{A}}{h},\Omega}$, nous mettons en évidence le lien entre le paramètre semi-classique h petit et le potentiel magnétique $\dfrac{\mathcal{A}}{h}$ intense.
Définissons sur $H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) |\ \nabla_{h,\mathcal{A}} u \in L^2(\Omega)\}$ la forme quadratique associée à l'opérateur $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ par :

$$\forall u \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega),\ q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) = \int_\Omega |(h\nabla - i\mathcal{A})u|^2\, dx. \tag{1.11}$$

Nous noterons $a_{h,\mathcal{A},\Omega}$ la forme sesquilinéaire associée. Les potentiels à champ magnétique constant vont servir de modèle pour l'étude des opérateurs à champ magnétique variable comme nous le préciserons par la suite. Nous choisissons un représentant particulier :

$$\mathcal{A}_0 := \frac{1}{2}(x_2, -x_1). \tag{1.12}$$

Nous omettrons les paramètres h, B et $\mathcal{A}$ dans les notations lorsque $h = 1$, $B = 1$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$.
L'invariance de jauge mentionnée à la Proposition 3.1 montre que le spectre de $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ ne dépend que du champ magnétique et non du potentiel magnétique choisi. Nous noterons donc $\mu(h, B, \Omega)$ le bas du spectre de $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ quel que soit le choix du potentiel $\mathcal{A}$ tel que $\operatorname{rot}\mathcal{A} = B$. D'après le principe du min-max rappelé au Théorème 2.2, son expression est donnée par :

$$\mu(h, B, \Omega) := \inf_{\psi \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega), \psi \neq 0} \frac{||\nabla_{h,\mathcal{A}}\psi||^2_{L^2(\Omega)}}{||\psi||^2_{L^2(\Omega)}}. \tag{1.13}$$

Nous pouvons donner une version semi-classique du Lemme 1.2 et la condition «$\mu_1(\kappa\sigma F) < \kappa^2$» devient «$\mu(h, 1, \Omega) < \frac{1}{\sigma^2}$», ce qui donne $\frac{1}{\sigma^2}$ de l'ordre de h, donc σ de l'ordre de κ.

Comme nous l'avons déjà évoqué, les problèmes liés à la supraconductivité et à l'opérateur de Schrödinger ont été étudiés par de nombreux physiciens ou mathématiciens. Les physiciens Saint-James et De Gennes [88] ont étudié dès 1963 le cas du demi-plan. Les travaux de Bauman, Phillips et Tang [12], Bernoff et Sternberg [17], Helffer et Pan [61], Lu et Pan [78, 79, 77], Del Pino, Felmer et Sternberg [43] ont apporté des réponses plus rigoureuses. Erdös [44] s'est consacré plus spécifiquement au cas du disque. Helffer et Morame [59, 60] ont étudié l'influence de la géométrie du bord sur le comportement de l'état fondamental pour des domaines réguliers.

L'étude des domaines à coins est apparue beaucoup plus récemment avec Jadallah [68, 69] et Pan [83] pour l'étude mathématique des angles droits. Les physiciens Brosens, Devreese, Fomin, Moshchalkov, Schweigert, Peeters dans [34, 47, 94] proposent une majoration non optimale de l'énergie, basée sur des calculs numériques sans démonstration rigoureuse.
À notre connaissance, aucune étude mathématique n'a été faite sur un domaine lipschitzien quelconque. Cette thèse s'attache à déterminer l'influence d'un coin sur la localisation de la supraconductivité et propose une étude systématique pour tout angle. Les techniques utilisées proviennent de la théorie spectrale et des méthodes semi-classiques mais aussi de l'analyse numérique avec la méthode des éléments finis, les raffinements localisés et les estimations d'erreurs a priori et a posteriori.

Ce travail fait suite plus spécifiquement au résultat de Helffer et Morame [59, 60] qui permet de déduire le Théorème 1.1 :

Théorème 1.3. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière C^∞. Considérons un potentiel magnétique $\mathcal{A}$ de champ associé b constant, notons c la courbure du bord, alors :*

$$hb\Theta_0 - 2M_3 c_{\max} b^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(h^{\frac{5}{3}}) \leq \mu(h, b, \Omega) \leq hb\Theta_0 + \mathcal{O}(h^{\frac{5}{4}}). \tag{1.14}$$

De plus, l'état fondamental est exponentiellement localisé aux points de courbure maximale du bord du domaine.

Face à ce résultat, il est naturel de se demander comment la présence d'un coin influence la localisation de l'état fondamental et l'asymptotique de la valeur propre. En effet, la notion de courbure n'a pas de sens pour des domaines à coins encore qu'on puisse penser que le cas du coin correspond à courbure $+\infty$ dans le cas d'un coin convexe et à $-\infty$ dans le cas d'un coin rentrant. Pour regarder où importe la géométrie du domaine, esquissons les idées principales pour établir le Théorème 1.3. Ceci permettra de déduire notre plan de travail.
En utilisant le principe du min-max, il suffit d'estimer la forme quadratique $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)$ pour en déduire une majoration du bas du spectre. D'après l'expérience des physiciens, la localisation a lieu en certains points du bord, il semble donc nécessaire de «découper» le domaine en morceaux afin d'analyser localement la contribution de chaque partie. Donnons-nous alors une partition de l'unité $(\chi_j^h)_j$ telle que le support de chaque fonction est inclus dans une boule $\mathcal{B}(z_j, h^\rho)$. Nous pouvons récrire la forme quadratique en tenant compte de cette partition :

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) = \sum_j q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) - h^2 \sum_j ||u\ |\nabla \chi_j^h|\ ||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Le terme $h^2||u\ |\nabla\chi_j^h|\ ||^2_{L^2(\Omega)}$ produit une erreur de l'ordre $h^{2-2\rho}$. Pour estimer la contribution du terme $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u)$, un changement de variables permet de se ramener à l'étude de l'opérateur de Schrödinger sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Comme le support est de taille h^ρ, un développement de Taylor permet d'approcher le potentiel magnétique $\mathcal{A}$ par le potentiel magnétique $B(z_j)\mathcal{A}_0$, modulo une erreur d'approximation.

L'objectif essentiel de ce travail est d'obtenir des résultats similaires pour des domaines lipschitzien et donc de comprendre l'influence d'un coin sur la localisation de la supraconductivité.
L'analyse dans le cas semi-classique pour un domaine régulier nécessite l'étude de deux modèles :
- l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant sur $\mathbb{R}^2$: $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}^2}$,
- l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$: $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}$.

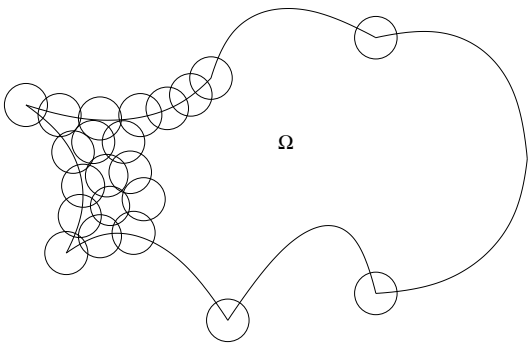


FIG. 1.3 – Domaine d'étude.

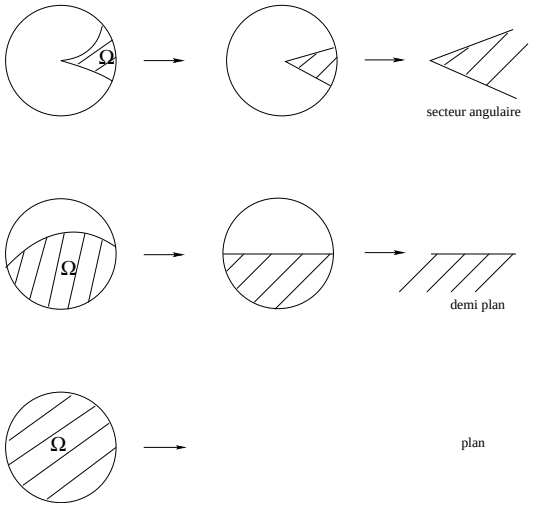


FIG. 1.4 – Domaines modèles.

Pour traiter le cas d'un domaine polygonal curviligne, en reprenant cette même idée de localisation à l'aide de partition de l'unité illustrée aux Figures 1.3 et 1.4, il est naturel d'ajouter un troisième opérateur modèle :

l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant sur un secteur angulaire, $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$,

en définissant le secteur angulaire Ω_α par :

$$\forall \alpha \in]0, 2\pi], \ \Omega_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 |\ x_1 > 0, |x_2| < \tan \frac{\alpha}{2} x_1 \right\}. \tag{1.15}$$

Avec cette notation, $\Omega_\pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et $\Omega_{2\pi} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^- \times \{0\}$. Nous définissons également le bas du spectre sur le secteur :

$$\mu(\alpha) = \mu(1, 1, \Omega_\alpha) = \inf_{\phi \in H^1_{\mathcal{A}_0}(\Omega_\alpha), \phi \neq 0} \frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0} \phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}}{||\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}}. \tag{1.16}$$

Il s'agit donc d'étudier les trois opérateurs modèles $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}^2}$, $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}$ et $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$.

1.4 Organisation de la thèse

1.4.1 Première partie : Analyse spectrale des opérateurs modèles

Les opérateurs $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}^2}$ et $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}$ ont été étudiés depuis longtemps. Nous pouvons citer les travaux de Landau pour $\mathbb{R}^2$ et pour $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ceux de Bolley-Helffer [20], Dauge-Helffer [41, 42], Helffer-Morame [60], Lu-Pan [78, 79, 77], Del Pino-Felmer-Sternberg [43], ... Mais des problèmes d'approximations numériques nous conduisent à préciser quelques aspects de leur étude.
Le spectre de l'opérateur $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}^2}$ est donné par :

$$\sigma(P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}^2}) = \{2k + 1, k = 0, 1, \ldots\}. \tag{1.17}$$

De plus, chacune des valeurs propres de $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}^2}$ est de multiplicité infinie.
Par le biais d'une transformation de jauge, nous ramenons l'étude de $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}$ au nouvel opérateur :

$$(D_{x_1} - x_2)^2 + D^2_{x_2} \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \text{ avec condition de Neumann en } x_2 = 0.$$

Maintenant, nous effectuons une transformation de Fourier partielle selon la première coordonnée. L'opérateur $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}$ est ainsi unitairement équivalent à :

$$(\xi_1 - x_2)^2 + D^2_{x_2}.$$

Ainsi, l'étude de $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}$ se ramène à celle de la famille d'opérateurs $H(\zeta) = D_t^2 + (t-\zeta)^2$ à laquelle le Chapitre 2 est consacré. Nous rappelons à la Section 2.2, et plus particulièrement au Théorème 2.6, des résultats de régularité du premier élément propre relatifs à une famille d'opérateurs auto-adjoints dépendant d'un paramètre. Ces résultats sont déjà établis dans [20, 41, 42] mais nous en proposons une démonstration élémentaire basée sur la méthode de GRUSHIN [53] et le théorème des fonctions implicites et redémontrons aussi la formule de FEYNMANN-HEILMAN. Nous discutons ensuite la monotonie du bas du spectre de l'opérateur $H(\zeta)$ par rapport à ζ à la Section 2.2 et montrons ainsi que :

$$\sigma(P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}) = [\Theta_0, +\infty[, \tag{1.18}$$

où Θ_0 est défini à la Proposition 2.12. De plus, Θ_0 est un élément du spectre essentiel. Ce réel Θ_0 joue aussi un rôle fondamental pour l'étude du secteur angulaire comme nous le verrons ci-après, il est donc intéressant d'en avoir une valeur approchée suffisamment précise. La suite du Chapitre 2 est consacrée à la construction d'un quasi-mode pour l'opérateur $H(\zeta_0)$ (avec les notations de la Proposition 2.12). La Section 2.4 donne des estimations du premier élément propre et mesure l'erreur commise en approchant la fonction propre ϕ associée à Θ_0 par un quasi-mode. Nous construisons des quasi-modes de deux façons différentes : la première à la Section 2.6 à l'aide d'une gaussienne, la seconde à la Section 2.7 grâce à une fonction polynomiale par morceaux déduite d'une méthode

de différences finies : de façon heuristique, nous construisons une suite de valeurs approchées de ϕ, interpolons de manière quadratique et justifions a posteriori la démarche en mesurant l'écart avec les éléments propres. Nous nous servons de ces constructions pour estimer Θ_0 et $\phi(0)$ par l'intermédiaire du Lemme 2.23. En effet, il est intéressant d'obtenir une valeur précise de $\phi(0)$ car le Théorème 1.3 mentionne une constante M_3 dans l'expression (1.14) qui vaut $\frac{\phi(0)^2}{6}$ (cf [60], p.673), mais l'intérêt principal vient de la construction à la Section 4.3 d'une fonction test sur un secteur angulaire dont l'énergie s'exprime à l'aide de $\phi(0)$.

Les opérateurs $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}^2}$ et $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}$, dont le spectre est donné respectivement aux relations (1.17) et (1.18), présentent deux comportements très différents, le bas du spectre de l'un étant une valeur propre alors que celui du second est un élément du spectre essentiel. Regardant le demi-plan comme un secteur angulaire d'angle π, nous pouvons nous interroger sur la monotonie de $\mu(\alpha)$ par rapport à α mais aussi sur le rôle de $\mu(\pi) = \Theta_0$ pour les secteurs angulaires quelconques. En outre, Θ_0 est un élément du spectre essentiel de $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}$, ce réel Θ_0 reste-t-il un élément du spectre essentiel pour $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$? Pour répondre à cette question, le Chapitre 3 propose une généralisation du Lemme de Persson [85] au Théorème 3.11. Ce résultat exprime le bas du spectre essentiel comme limite quand $r \to +\infty$ du bas du spectre sur le domaine tronqué d'une boule de rayon r, pour ne garder que la «contribution à l'infini». Nous appliquons ce théorème au secteur angulaire et montrons à la Proposition 3.15 que le bas du spectre essentiel de l'opérateur $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$ est exactement Θ_0. Ce résultat est très utile car nous serons assurés que le bas du spectre de $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$ est une valeur propre si nous trouvons une fonction normalisée dont l'énergie est strictement majorée par Θ_0.

Nous allons donc essayer de préciser la nature du bas du spectre. Comme nous l'avons déjà mentionné, à notre connaissance, seuls Jadallah [68, 69, 70] et Pan [83] ont apporté une contribution à l'étude de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant pour des domaines non réguliers en analysant le quart de plan. Jadallah [68, 69, 70] montre que le bas du spectre de la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger dans un quart de plan pour un champ magnétique d'amplitude 1, est majoré par 0.5772 en construisant une fonction de la forme $e^{-\frac{\rho^2}{2}s(\phi)}e^{i\left(\rho p(\phi)+\frac{1}{2}\rho^2 g(\phi)+\frac{1}{3}\rho^3 q(\phi)\right)}$ et adaptant les coefficients de manière à majorer l'énergie associée par 0.5772. Jadallah montre également qu'il existe une fonction propre minimisant le quotient de Rayleigh dans le quart de plan et que cette fonction décroit exponentiellement avec l'éloignement de l'angle droit. Nous allons retrouver ces résultats au prochain paragraphe par une autre méthode. Pour démontrer ces résultats, Jadallah se base sur la construction d'une suite de minimiseurs associés au problème variationnel sur des carrés de plus en plus grands et qui tendent à la limite vers le quart de plan. Toutefois, pour la réalisation de Neumann sur des carrés, il n'y a aucune raison a priori pour que l'état fondamental se localise dans un coin en priorité. Il est même assez naturel de penser que l'état fondamental est localisé aux quatre sommets. Nous développerons cette idée à la Section 15.4 en analysant la localisation de l'état fondamental sur des polygones réguliers. Pour éviter ce problème, Jadallah résout un problème mixte en imposant des conditions de Dirichlet sur les deux côtés autres que $\{x_1 = 0\}$, $\{x_2 = 0\}$, propose des estimations sur le comportement des fonctions propres et passe à la limite sur la taille des côté des carrés.

Pan démontre également que le bas du spectre pour le quart de plan est strictement inférieur à Θ_0 dans [83]. La technique utilisée n'est plus de construire un état dont l'énergie est strictement inférieure à Θ_0 mais de construire une fonction test d'énergie égale à Θ_0 mais qui ne vérifie pas les conditions de Neumann.

Après quelques remarques immédiates sur la comparaison de $\mu(\alpha)$ et de $\mu\left(\frac{\alpha}{p}\right)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ aux Propositions 4.1 et 4.3, le Chapitre 4 et particulièrement la Section 4.3, est consacré à la majoration

du bas du spectre $\mu(\alpha)$ pour des angles voisins de $\frac{\pi}{2}$. Nous reprenons à cet effet une idée de Pan pour établir la Proposition 4.5 et construire, à l'aide de la fonction propre ϕ de l'opérateur $D_t^2+(t-\zeta_0)^2$ ou d'un quasi-mode, une fonction d'énergie voisine de Θ_0. L'idée essentielle de ce résultat est de ramener l'étude de secteur Ω_α à celle du quart de plan Q par un changement de variables et de découpler les variables au maximum. Nous en déduisons un intervalle $]\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\frac{\pi}{2}]$ sur lequel μ est strictement majoré par Θ_0, donc est une valeur propre. Notons que l'énergie des fonctions tests utilisées dépend de $\phi(0)$ et justifie ainsi l'étude du Chapitre 2.

1.4.2 Deuxième partie : Analyse asymptotique dans les secteurs de petit angle

Nous complétons cette étude en estimant le bas du spectre pour les secteurs de petit angle à la Partie II. Pour regarder le comportement vis-à-vis de α, au lieu d'étudier l'opérateur fixe $-\nabla^2_{\mathcal{A}_0}$, sur le domaine dépendant de α, nous nous ramenons par changement de variables et de jauge (cf Chapitre 5) à un opérateur P_α dépendant de α sur un domaine fixe $\Omega^0:=\mathbb{R}^+\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$. Ce faisant, nous obtenons deux expressions de la dérivée de μ aux Propositions 5.1 et 5.5 qui ne peuvent toutefois pas montrer la monotonie de μ. Nous allons déterminer un développement limité du bas du spectre de cet opérateur, $P_\alpha=2(D_t-\eta)t(D_t-\eta)+\frac{1}{\alpha^2 t}D_\eta^2$. La singularité en α dans P_α est détruite par les fonctions indépendantes de η. Ces fonctions jouent donc un rôle primordial et nous pouvons dissocier deux opérateurs composant P_α : D_η^2 et $L^{\mathrm{moy}}=2D_ttD_t+\frac{t}{12}$ qui apparaît naturellement en considérant l'action de P_α sur les fonctions indépendantes de η. Le Chapitre 6 analyse chacun de ces opérateurs. Munis de ces résultats, le Chapitre 7 donne la construction explicite d'une solution formelle $U^{(\infty)}=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2k}u_k$ et $\mu^{(\infty)}=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2k}m_k$ tels que $P_\alpha U^{(\infty)}\equiv\mu^{(\infty)}U^{(\infty)}$ (cf Proposition 7.1). Le Chapitre 8 utilise cette construction pour donner une majoration de $\mu(\alpha)$ au Théorème 8.1 en estimant le quotient de Rayleigh de la somme partielle de $U^{(\infty)}$. Ceci permet de déduire un intervalle $]0,\alpha_0[$ sur lequel μ est une valeur propre. Pour montrer que cette solution formelle donne effectivement l'asymptotique de $\mu(\alpha)$, il reste à établir la minoration. Après avoir précisé le comportement du vecteur propre au Chapitre 9 (cf Théorème 9.1) en utilisant les techniques d'Agmon, nous déterminons, au Chapitre 10, le premier terme du développement limité par comparaison avec d'autres opérateurs (cf Section 10.1, Théorème 10.1) et montrons que la seconde valeur propre est suffisamment éloignée de la première (cf Section 10.2, Proposition 10.7) de telle sorte que le candidat $\mu^{(\infty)}$ est nécessairement le développement limité de la première valeur propre. Cette démonstration est assez technique mais repose sur la comparaison d'opérateurs.
Le Chapitre 11 donne l'expression des premiers termes du développement limité et résume les informations obtenues sur la localisation du bas du spectre $\mu(\alpha)$ en fonction de l'angle aux Figures 11.1 et 11.2. Si nous admettons la précision de certains calculs numériques (que nous avons contrôlée avec le plus grand soin), nous avons ainsi établi que $\mu(\alpha)$ est une valeur propre pour tout angle $\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}]$.

1.4.3 Troisième partie : Modélisation numérique

Toutefois, la monotonie de μ par rapport à l'angle reste une question ouverte. Pour essayer de comprendre le comportement de μ mais aussi visualiser la localisation de l'état propre, la Partie III propose une approche numérique basée sur la méthode des éléments finis.

Hornberger et Smilansky [65] ont étudié numériquement ce problème pour des domaines réguliers à l'aide des méthodes intégrales. Cette technique est propre au cas régulier ; d'après les auteurs, elle peut éventuellement se généraliser au cas non régulier mais nous avons préféré la méthode des éléments finis qui paraît plus naturelle.

Le problème numérique est particulièrement difficile car nous verrons au Théorème 9.1 que le premier vecteur propre de $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$ décroît exponentiellement avec l'éloignement du coin. La localisation peut présenter certains avantages car il suffit de restreindre les calculs dans la zone de localisation. Mais une concentration de l'état fondamental de petite amplitude et située au bord du domaine, dans un coin si le domaine est polygonal, rend plus difficile le traitement numérique. Cette propriété de localisation est également établie à la Partie IV dans le cas d'un domaine quelconque avec une concentration dans le plus petit angle. Le problème numérique associé devient ainsi très mal conditionné. De plus, le problème est invariant de jauge et possède des propriétés particulières vis-à-vis des transformations de domaine évoquées à la Section 3.1, il semble donc très pertinent de construire des solutions numériques respectant ces propriétés.

Comme nous le soulignerons au Chapitre 12, la méthode standard mentionnée à la Section 12.3, consistant à construire les matrices de masse et de rigidité et d'estimer les valeurs propres généralisées est en échec. Les vecteurs propres ne sont pas réels et comme nous l'avons signalé précédemment, la phase est mal déterminée à l'intérieur du domaine où le module est exponentiellement petit loin des coins. Un défaut latent de cette méthode classique est qu'elle ne respecte pas l'invariance par translation : ceci produit des oscillations de phase en liaison avec la taille du potentiel magnétique si nous choisissons une mauvaise jauge. Notons que nous proposons un algorithme à la Section 12.2 pour déterminer les valeurs propres généralisées.

Comme la phase joue un rôle particulier visible sous l'effet d'une translation (cf Proposition 3.4), nous allons proposer une nouvelle formulation du problème à la Section 12.4 en décomposant le vecteur propre sous la forme $\rho(x)e^{i\theta(x)}$. Cette formulation respecte l'invariance de jauge et les propriétés de transformations de domaine. Comme nous l'avons déjà souligné, le module est exponentiellement petit, ce qui rend la détermination de phase particulièrement difficile. Ainsi, la Section 12.4 présente des simulations numériques montrant les limites de l'Algorithme 12.8 dues au mauvais conditionnement du problème car la détermination de la phase est effectuée après celle du module.
La Section 12.5 construit l'Algorithme 12.9, beaucoup plus robuste pour la détermination du module et de la phase. L'idée est de déterminer une première phase très régulière par un problème de minimisation puis de déterminer le module. Ainsi, aux itérations suivantes, la phase ne variera qu'aux endroits où le module n'est pas négligeable. L'étape d'initialisation est fondamentale car elle permet de contourner le problème du mauvais conditionnement. De plus, cette méthode reste valable pour des champs magnétiques très élevés.

Du fait de la localisation exponentielle du vecteur propre, nous exploitons l'idée que toute l'information du problème est concentrée dans un voisinage du coin. Ainsi, le raffinement uniforme n'est ni optimal ni rentable. Un raffinement localisé permettrait de gagner en temps de calcul et aussi en précision. De plus, une mesure locale de l'erreur entre la solution numérique et la solution exacte donne un bon critère pour effectuer un raffinement adapté au problème. Cette mesure est donnée par la construction d'estimateurs a posteriori développée en Annexe A. Pour établir le Théorème A.2, nous nous basons essentiellement sur les travaux de Verfürth [100]. Notons que les lemmes classiques (Lemme de Céa, ...) ne sont pas appliquables ici car le problème n'est pas linéaire. Nous avons donc établi une nouvelle estimation a priori au Théorème A.4 pour adapter les techniques de Verfürth. Pour établir ces nouvelles estimations a priori, nous supposons la simplicité de la première valeur propre et justifions cette hypothèse au Chapitre 16.

Ces estimateurs d'erreurs a posteriori permettent d'utiliser l'Algorithme 12.9 couplé avec un raffinement de maillages adapté aux valeurs des estimateurs locaux. Le Chapitre 13 explique et

donne des exemples de ces techniques de raffinement. La Section 13.3 montre la pertinence d'un raffinement localisé en comparant les résultats avec un raffinement uniforme.
Munis de ces techniques, nous pouvons estimer $\mu(\alpha)$ en fonction de α comme précisé à la Section 13.4. Ce faisant, nous justifions la troncature choisie pour approcher le secteur angulaire et vérifions que sur ce domaine numérique, les propriétés de linéarité par rapport au champ magnétique sont conservées. La Figure 13.27 reprend les estimations obtenues théoriquement et ajoute les estimations numériques. Notons que les résultats numériques concordent tout à fait avec les résultats théoriques. Nous retrouvons l'asymptote $\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ quand $\alpha \to 0$.

La Section 13.5 propose d'utiliser cette technique de raffinement localisé sur des domaines quelconques. Nous proposons notamment l'exemple d'une demi-ellipse collée à un demi-cercle, domaine régulier présentant un point de courbure maximal où la localisation a lieu. Néanmoins, il semble que la précision sur la valeur propre est plus importante que celle donnée par les estimateurs.

Les simulations numériques suggèrent l'idée largement admise dans la littérature physique [47, 94] que μ est strictement croissante de $]0, \pi]$ sur $]0, \Theta_0]$, mais aucune démonstration mathématique de ce résultat n'existe.

1.4.4 Quatrième partie : Asymptotique à grand champ magnétique pour les domaines à coins

Ayant ainsi étudié l'opérateur $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$ et reprenant les résultats sur les opérateurs $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}^2}$ et $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}$, nous pouvons généraliser le Théorème 1.3 au cas d'un domaine polygonal curviligne avec un nombre fini de sommets et établir une estimation du bas du spectre de $P_{h,B,\Omega}$ et de la localisation de l'état fondamental. La Partie IV donne les détails de la démonstration de ces résultats. Elle mentionne également la localisation répartie sur chaque sommet d'un polygone régulier à la Section 15.4. De plus, la non régularité du bord permet d'établir, au Chapitre 16, des résultats de simplicité de la première valeur propre, ce qui permet en particulier de justifier les hypothèses faites en Annexe A pour construire les estimateurs a posteriori et devrait aussi ouvrir des perspectives plus favorables pour l'étude des bifurcations pour le problème de la supraconductivité associé.

Première partie

Analyse spectrale des opérateurs modèles

Cette première partie se concentre sur l'étude de Θ_0, valeur du bas du spectre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique d'intensité 1 sur le demi-plan. Elle permet en particulier de déterminer une valeur numérique plus précise de Θ_0.

Comme nous l'avons mentionné en introduction, le bas du spectre de l'opérateur $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}$ est lié à celui de la famille d'opérateurs $H(\zeta) = D_t^2 + (t-\zeta)^2$. De nombreux articles analysent la famille d'opérateurs $H(\zeta)$ et nous rappelons au Chapitre 2 quelques résultats en proposant des démonstrations plus élémentaires que celles trouvées dans la littérature. Nous précisons le comportement de la fonction propre de $H(\zeta_0)$ avec $\zeta_0 = \sqrt{\Theta_0}$ en construisant des quasi-modes à l'aide de gaussienne à la Section 2.6 ou de la méthode des différences finies à la Section 2.7. Ces techniques permettent d'obtenir une valeur approchée de Θ_0 à 10^{-5} près.

L'étude de Helffer-Morame [60] a montré que le bas du spectre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant égal à 1 sur le demi-plan, Θ_0, est un élément du spectre essentiel. Le Chapitre 3.11 généralise le Lemme de Persson et caractérise le bas du spectre essentiel pour un opérateur de Schrödinger. Nous pouvons ainsi montrer que le bas du spectre essentiel de $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$ pour un secteur angulaire Ω_α vaut encore Θ_0.

Cette information donne un critère pour savoir si le bas du spectre est une valeur propre. En effet, à l'aide du principe du min-max, il suffira de construire sur un secteur angulaire une fonction dont le quotient de Rayleigh est strictement majoré par Θ_0 pour être assuré que le bas du spectre sur ce secteur est une valeur propre. Le Chapitre 4 utilise cet argument pour proposer quelques majorations du bas du spectre, $\mu(\alpha)$, et montre au Corollaire 4.6 que $\mu(\alpha)$ est une valeur propre au voisinage de $\frac{\pi}{2}$.

Chapitre 2

Étude de l'opérateur $H(\zeta) = D_t^2 + (t-\zeta)^2$ sur $\mathbb{R}^+$

2.1 Notations

Dans ce chapitre, nous allons rappeler des résultats sur la réalisation de Neumann ou de Dirichlet de la famille d'opérateurs $H(\zeta)$ sur $\mathbb{R}^+$. Ces résultats sont présentés dans [20, 41, 42] et nous proposons ici d'autres démonstrations ; nous donnerons notamment une démonstration élémentaire pour la régularité du premier vecteur propre, basée sur le théorème des fonctions implicites. Le résultat donné à la Section 2.2 s'étend à une famille d'opérateurs plus générale que $H(\zeta)$.
Nous rappelerons ensuite le comportement du bas du spectre de $H(\zeta)$ dans la Section 2.3. Les Sections 2.4, 2.6 et 2.7 sont consacrées à la construction de quasi-modes, soit à l'aide de gaussiennes, soit à partir d'une méthode numérique et nous proposerons un contrôle de l'écart entre la solution exacte et la solution approchée en Section 2.4.

Nous noterons q_ζ^D et q_ζ^N les formes quadratiques associées aux réalisations de Dirichlet et de Neumann de l'opérateur $H(\zeta)$. Ces formes sont définies par :

$$\begin{aligned} \forall u \in B^1(\mathbb{R}^+) \cap H_0^1(\mathbb{R}^+),\ q_\zeta^D(u) &= \int_0^\infty |D_t u(t)|^2 + (t-\zeta)^2 |u(t)|^2\ dt, \\ \forall u \in B^1(\mathbb{R}^+),\ q_\zeta^N(u) &= \int_0^\infty |D_t u(t)|^2 + (t-\zeta)^2 |u(t)|^2\ dt, \end{aligned}$$

où les domaines $B^k(\mathbb{R}^+)$ sont définis pour tout entier naturel k par :

$$B^k(\mathbb{R}^+) = \{u \in H^k(\mathbb{R}^+) | t^j u \in L^2(\mathbb{R}^+), \forall j \leq k\}.$$

Les réalisations de Neumann et Dirichlet de l'opérateur $H(\zeta)$ sont définies sur les domaines respectifs $\mathcal{D}^N(H(\zeta))$ et $\mathcal{D}^D(H(\zeta))$ avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^N(H(\zeta)) &= \{u \in B^2(\mathbb{R}^+) |\ u'(0) = 0\}, \\ \mathcal{D}^D(H(\zeta)) &= B^2(\mathbb{R}^+) \cap H_0^1(\mathbb{R}^+). \end{aligned}$$

Nous omettrons les exposants D et N s'il n'y a pas d'ambiguité.

Remarque 2.1.

- *Notons que les domaines $\mathcal{D}^N(H(\zeta))$ et $\mathcal{D}^D(H(\zeta))$ sont indépendants du paramètre ζ. Pour justifier le domaine de définition des opérateurs, il suffit de déterminer les domaines des réalisations de Neumann et Dirichlet de $H(0)$, de considérer l'opérateur $H(\zeta)$ comme une perturbation de $H(0)$ et d'appliquer ensuite le théorème de Kato-Rellich (cf [57]).*

– *Grâce au changement de variable $t \leftarrow t - \zeta$, l'étude de l'opérateur $H(\zeta)$ sur $\mathbb{R}^+$ se ramène à celle de l'opérateur :*

$$H := D_t^2 + t^2 \text{ sur l'intervalle }]-\zeta, +\infty[. \tag{2.1}$$

Les domaines des réalisations de Neumann et de Dirichlet de l'opérateur H valent respectivement :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^N(H) &= \{u \in B^2(]-\zeta,+\infty[) |\ u'(-\zeta) = 0\}, \\ \mathcal{D}^D(H) &= \{u \in B^2(]-\zeta,+\infty[) |\ u(-\zeta) = 0\}. \end{aligned}$$

Rappelons deux théorèmes importants concernant le spectre d'un opérateur auto-adjoint (cf [57]) proposant des critères d'existence de valeur propre dans un intervalle donné :

Théorème 2.2 (Principe du min-max). *Soit P un opérateur auto-adjoint semi-borné de domaine $\mathcal{D}(P) \subset \mathcal{H}$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert. Pour tout entier $n \geq 1$, nous définissons :*

$$\mu_n(P) = \sup_{\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}} \inf_{\psi \in [\mathrm{span}(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}]^\perp \cap \mathcal{D}(P) \setminus \{0\}} \frac{\langle P\psi, \psi\rangle_{\mathcal{H}}}{||\psi||^2_{\mathcal{H}}}, \tag{2.2}$$

où $\langle .,. \rangle_{\mathcal{H}}$ et $||\ ||_{\mathcal{H}}$ désignent le produit scalaire et la norme pour $\mathcal{H}$. Alors :

– *Soit $\mu_n(P)$ est la n-ième plus petite valeur propre et P a un spectre discret sur $]-\infty, \mu_n(P)]$.*

– *Soit $\mu_n(P)$ est le bas du spectre essentiel. Alors $\mu_j(P) = \mu_n(P)$ pour tout $j \geq n$.*

Théorème 2.3 (Théorème spectral). *Soit P un opérateur auto-adjoint semi-borné de domaine $\mathcal{D}(P) \subset \mathcal{H}$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert. Notons $\sigma(P)$ le spectre de P, alors pour tout réel λ :*

$$d(\lambda, \sigma(P))||\psi||_{\mathcal{H}} \leq ||(P-\lambda)\psi||_{\mathcal{H}},\ \forall \psi \in \mathcal{D}(P). \tag{2.3}$$

Le corollaire suivant est plus souvent utilisé :

Corollaire 2.4. *Supposons les mêmes hypothèses qu'au Théorème 2.3. Soient $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et $\psi \in \mathcal{D}(P)$ tels qu'il existe $\varepsilon > 0$:*

$$||(P-\lambda_0)\psi||_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon,\ ||\psi||_{\mathcal{H}} = 1.$$

Alors il existe $\lambda \in \sigma(P)$ tel que $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$.

Une application immédiate du principe du min-max permet de comparer les bas des spectres des réalisations de Neumann et Dirichlet.

Proposition 2.5. *Notons respectivement $\mu(\zeta)$ et $\lambda(\zeta)$ les bas des spectres des réalisations de Neumann et Dirichlet de l'opérateur $H(\zeta)$. Alors, λ est décroissante et :*

$$\forall \zeta \in \mathbb{R},\ \mu(\zeta) \leq \lambda(\zeta). \tag{2.4}$$

Démonstration : La preuve est élémentaire, il suffit de ramener l'étude par changement de variables à l'opérateur H défini en (2.1) et de remarquer que d'une part, une fonction de $C_0^\infty(]-\zeta,+\infty[)$ se prolonge en une fonction de $C_0^\infty(]-\xi,+\infty[)$ par 0 sur $]-\xi,-\zeta[$ quand $\xi > \zeta$ et d'autre part, $C_0^\infty(]-\zeta,+\infty[) \subset \mathcal{D}^N(H)$. L'application du principe du min-max à l'opérateur H achève la démonstration. □

2.2 Régularité

Commençons par un résultat général sur la régularité des éléments propres d'un opérateur auto-adjoint. La méthode utilisée ici est appelée MÉTHODE DE GRUSHIN [53], c'est une variante de la méthode dite de la PROJECTION DE FESHBACH [45, 46]. Nous allons obtenir une condition nécessaire et suffisante pour avoir une valeur propre et un vecteur propre d'un opérateur dépendant d'un paramètre ζ proche de ζ_0 ayant des informations sur l'opérateur $H(\zeta_0)$, nous montrerons la régularité de la valeur propre et du vecteur propre associé et nous justifierons également la FORMULE DE FEYNMANN-HEILMAN [67] donnant l'expression de la dérivée de la valeur propre selon le paramètre.

Théorème 2.6. *Soit $H(\zeta)$ une famille d'opérateurs auto-adjoints différentiables selon le paramètre $\zeta \in \mathbb{R}$, définis sur $\mathbb{R}^+$ et dont le domaine $\mathcal{D}(H)$ est indépendant de ζ . Notons $\mu(\zeta)$ la première valeur propre et $u(\zeta)$ un vecteur propre normalisé associé. Supposons qu'en $\zeta_0 \in \mathbb{R}$, la valeur propre $\mu(\zeta_0)$ est simple. Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\zeta \in]\zeta_0 - \eta, \zeta_0 + \eta[$ et tout $\mu \in]\mu(\zeta_0) - \eta, \mu(\zeta_0) + \eta[$:*

$$\mu \in \sigma(H(\zeta)) \iff \mu = \mu(\zeta),$$

où $\mu \in C^\infty(]\zeta_0 - \eta, \zeta_0 + \eta[)$. Le vecteur propre associé $u(\zeta)$ est également C^∞. De plus, nous avons la formule dite de FEYNMANN-HEILMAN *:*

$$\mu'(\zeta_0) = u^*(\zeta_0)\partial_\zeta H(\zeta_0)u(\zeta_0). \tag{2.5}$$

Démonstration : La preuve, basée sur le théorème des fonctions implicites, se décompose en quatre étapes.

Première étape : Décomposition de $\mathcal{D}^N(H)$ selon le premier vecteur propre $u(\zeta_0)$
Notons $u^*(\zeta_0)$ la projection sur le vecteur $u(\zeta_0)$. Montrons que $M_0 := \begin{pmatrix} H(\zeta_0) - \mu(\zeta_0) & u(\zeta_0) \\ u^*(\zeta_0) & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.
Soit $(f, c) \in L^2(\mathbb{R}^+) \times \mathbb{C}$, cherchons à résoudre $M_0 \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ c \end{pmatrix}$, avec $u \in \mathcal{D}^N(H)$, $z \in \mathbb{C}$. Écrivons coordonnées par coordonnées les équations vérifiées par u, z :

$$\begin{aligned} (H(\zeta_0) - \mu(\zeta_0))\ u\ + z\ u(\zeta_0) &= f & (2.6)\\ u^*(\zeta_0)u &= c. & (2.7) \end{aligned}$$

L'équation (2.6) détermine z en lui appliquant $u^*(\zeta_0)$:

$$z = u^*(\zeta_0)f, \tag{2.8}$$

Récrivons les équations (2.6) et (2.7) connaissant désormais z :

$$\begin{cases} (H(\zeta_0) - \mu(\zeta_0))\ u &= f - (u^*(\zeta_0)f)\ u(\zeta_0) \\ u^*(\zeta_0)u &= c. \end{cases} \tag{2.9}$$

La première équation de (2.9) détermine u sur $(u(\zeta_0))^\perp$ (car $u(\zeta_0)$ est un vecteur propre de l'opérateur $H(\zeta_0)$ pour la valeur propre simple $\mu(\zeta_0)$), la deuxième sur $\mathrm{Im}(u^*(\zeta_0))$. Ainsi, u est entièrement déterminé sur $\mathcal{D}^N(H)$ et donc M_0 est inversible. Notons R_0 son inverse, qui est continue sur $L^2(\mathbb{R}^+) \times \mathbb{C}$,

$$R_0 = \begin{pmatrix} E_0 & E_0^+ \\ E_0^- & E_0^{+-} \end{pmatrix}.$$

Les coefficients de R_0 sont entièrement déterminés par les équations (2.9) :

$$E_0 = ((H(\zeta_0) - \mu(\zeta_0))_{|u(\zeta_0)^\perp})^{-1} \tag{2.10}$$
$$E_0^+ = u(\zeta_0) \tag{2.11}$$
$$E_0^- = u^*(\zeta_0) \tag{2.12}$$
$$E_0^{+-} = 0. \tag{2.13}$$

Deuxième étape : inverse au voisinage de (ζ, μ)
Montrons que la matrice M_0 reste inversible en perturbant légèrement ses coefficients. Pour cela, nous allons utiliser les séries de Neumann. Considérons la matrice :

$$M(\zeta, \mu) = \begin{pmatrix} H(\zeta) - \mu & u(\zeta_0) \\ u^*(\zeta_0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons récrire $M(\zeta, \mu)$ comme :

$$\begin{aligned} M(\zeta, \mu) &= M_0 + \begin{pmatrix} (H(\zeta) - H(\zeta_0)) - (\mu - \mu(\zeta_0)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= M_0 \left(\mathrm{Id} + R_0 \begin{pmatrix} (H(\zeta) - H(\zeta_0)) - (\mu - \mu(\zeta_0)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Or les applications $(\zeta, \mu) \mapsto H(\zeta)$ et $(\zeta, \mu) \mapsto \mu$ sont continues au voisinage de $(\zeta_0, \mu(\zeta_0))$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|\zeta - \zeta_0| \leq \varepsilon$ et $|\mu - \mu(\zeta_0)| \leq \varepsilon$, alors $M(\zeta, \mu)$ est inversible et son inverse est donné par la série de Neumann :

$$M(\zeta, \mu)^{-1} = \sum_{j \in \mathbb{N}} (-1)^j \left(R_0 \begin{pmatrix} (H(\zeta) - H(\zeta_0)) - (\mu - \mu(\zeta_0)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^j R_0. \tag{2.14}$$

Notons $R(\zeta, \mu) = \begin{pmatrix} E(\zeta, \mu) & E^+(\zeta, \mu) \\ E^-(\zeta, \mu) & E^{+-}(\zeta, \mu) \end{pmatrix}$ l'inverse de $M(\zeta, \mu)$ et étudions la régularité de R.

Lemme 2.7. *L'inverse de $M(\zeta, \mu)$ est une application infiniment dérivable au voisinage du point $(\zeta_0, \mu(\zeta_0))$.*

Démonstration : L'application de $]\zeta_0 - \varepsilon, \zeta_0 + \varepsilon[\times]\mu(\zeta_0) - \varepsilon, \mu(\zeta_0) + \varepsilon[$ dans $\mathcal{D}^N(H) \times \mathbb{C}$ définie par :

$$T(\zeta, \mu) = R_0 \begin{pmatrix} r(\zeta, \mu) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } r(\zeta, \mu) := (H(\zeta) - H(\zeta_0)) - (\mu - \mu(\zeta_0)) \tag{2.15}$$

est infiniment dérivable. Or :

$$M(\zeta, \mu)^{-1} = \sum_{j \in \mathbb{N}} (-1)^j T(\zeta, \mu)^j R_0. \tag{2.16}$$

Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Donnons les relations de dérivation pour $r(\zeta, \mu)$:

$$\partial_\zeta r(\zeta, \mu) = \partial_\zeta H(\zeta) \tag{2.17}$$
$$\partial_\mu r(\zeta, \mu) = -1. \tag{2.18}$$

À la vue de la relation (2.16), nous allons estimer le terme $T(\zeta, \mu)^j$:

$$\begin{aligned} \left(R_0 \begin{pmatrix} r(\zeta, \mu) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^j &= \left(\begin{pmatrix} E_0 & u(\zeta_0) \\ u^*(\zeta_0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(\zeta, \mu) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^j \\ &= \begin{pmatrix} (E_0\, r(\zeta, \mu))^j & 0 \\ (u^*(\zeta_0)\, r(\zeta, \mu))(E_0\, r(\zeta, \mu))^{j-1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Donc

$$M(\zeta,\mu)^{-1} = \sum_{j\in\mathbb{N}} (-1)^j \begin{pmatrix} (E_0\ r(\zeta,\mu))^j & 0 \\ (u^*(\zeta_0)\ r(\zeta,\mu))(E_0\ r(\zeta,\mu))^{j-1} & 0 \end{pmatrix} R_0. \tag{2.20}$$

La relation (2.20) et les relations de dérivation (2.17) et (2.18) montrent que le terme général de la série définissant $M(\zeta,\mu)^{-1}$ est infiniment dérivable et que la série des dérivées converge uniformément sur un voisinage de taille ε de $(\zeta_0,\mu(\zeta_0))$, donc l'application $M(\zeta,\mu)^{-1}$ définie sur $]\zeta_0-\varepsilon,\zeta_0+\varepsilon[\times]\mu(\zeta_0)-\varepsilon,\mu(\zeta_0)+\varepsilon[$ est de classe C^∞. □

Lemme 2.8. *μ est une valeur propre de $H(\zeta)$ si et seulement si $E^{+-}(\zeta,\mu)=0$.*
De plus, au voisinage de $(\zeta_0,\mu(\zeta_0))$, si μ est une valeur propre, alors $E^+(\zeta,\mu)$ est un vecteur propre associé.

Démonstration : Donnons les équations vérifiées par les coefficients de $R(\zeta,\mu)$:

$$\begin{aligned} (H(\zeta)-\mu)E(\zeta,\mu) + u(\zeta_0)E^-(\zeta,\mu) &= \mathrm{Id} && (2.21)\\ u^*(\zeta_0)E^+(\zeta,\mu) &= 1 && (2.22)\\ (H(\zeta)-\mu)E^+(\zeta,\mu) + u(\zeta_0)E^{+-}(\zeta,\mu) &= 0 && (2.23)\\ u^*(\zeta_0)E(\zeta,\mu) &= 0. && (2.24) \end{aligned}$$

Supposons que $E^{+-}(\zeta,\mu)\neq 0$, alors (2.23) permet d'exprimer $u(\zeta_0)$ comme suit :

$$u(\zeta_0) = -\frac{(H(\zeta)-\mu)E^+(\zeta,\mu)}{E^{+-}(\zeta,\mu)}. \tag{2.25}$$

Reportons cette expression dans (2.21), alors :

$$(H(\zeta)-\mu)\left(E(\zeta,\mu) - \frac{E^+(\zeta,\mu)}{E^{+-}(\zeta,\mu)}\right) = \mathrm{Id}. \tag{2.26}$$

En conséquence, si $E^{+-}(\zeta,\mu)\neq 0$, alors $H(\zeta)-\mu$ est inversible, donc μ n'est pas valeur propre de $H(\zeta)$.

Réciproquement, supposons que $E^{+-}(\zeta,\mu)=0$. Si de plus, $E^+(\zeta,\mu)$ est nul, alors $E^-(\zeta,\mu)$ l'est aussi car $E^-(\zeta,\mu)$ est l'adjoint de $E^+(\zeta,\mu)$. Ceci est impossible car $R(\zeta,\mu)$ est inversible, donc $E^+(\zeta,\mu)$ est non nul. Ainsi, $E^+(\zeta,\mu)$ est vecteur propre d'après l'équation (2.23). □

Troisième étape : Étude de l'équation $E^{+-}(\zeta,\mu)=0$.
Montrons qu'au voisinage de ζ_0, nous pouvons trouver les valeurs propres associées à l'opérateur $H(\zeta)$ en regardant l'équation $E^{+-}(\zeta,\mu)=0$ par application du Lemme 2.8. Exprimons le coefficient $E^{+-}(\zeta,\mu)$ à l'aide de la série de Neumann. Reprenons le calcul (2.20) de $M(\zeta,\mu)^{-1}$ en développant le produit :

$$\begin{aligned} &\left(R_0\begin{pmatrix} r(\zeta,\mu) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^j R_0 = \\ &\begin{pmatrix} (E_0\ r(\zeta,\mu))^j E_0 & (E_0\ r(\zeta,\mu))^j u(\zeta_0) \\ (u^*(\zeta_0) r(\zeta,\mu))(E_0\ r(\zeta,\mu))^{j-1}E_0 & (u^*(\zeta_0) r(\zeta,\mu))(E_0\ r(\zeta,\mu))^{j-1}u(\zeta_0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Par identification des coefficients de $M(\zeta,\mu)^{-1}$ et de ceux de la série de Neumann (2.14), l'expression de $E^{+-}(\zeta,\mu)$ est donnée par :

$$E^{+-}(\zeta,\mu) = \sum_{j\geq 1} (-1)^j (u^*(\zeta_0) r(\zeta,\mu))(E_0\ r(\zeta,\mu))^{j-1} u(\zeta_0). \tag{2.28}$$

Le Lemme 2.7 montre que $M(\zeta,\mu)^{-1}$ est C^∞ au voisinage de $(\zeta_0, \mu(\zeta_0))$, donc en particulier, $E^{+-}(\zeta,\mu)$ l'est aussi. Regardons l'expression de la dérivée de $E^{+-}(\zeta,\mu)$ par rapport à μ dans le but d'appliquer le théorème des fonctions implicites. Comme la convergence de la série définissant $E^{+-}(\zeta,\mu)$ est normale, la dérivée de $E^{+-}(\zeta,\mu)$ est la série des dérivées terme à terme. Les relations de dérivation (2.17) et (2.18) estimées au point $(\zeta_0, \mu(\zeta_0))$ permettent de déduire les expressions des dérivées de $E^{+-}(\zeta,\mu)$ en $(\zeta_0, \mu(\zeta_0))$:

$$\partial_\zeta E^{+-}(\zeta_0, \mu(\zeta_0)) = -u^*(\zeta_0)\partial_\zeta r(\zeta_0, \mu(\zeta_0))u(\zeta_0), \tag{2.29}$$

$$\partial_\mu E^{+-}(\zeta_0, \mu(\zeta_0)) = 1. \tag{2.30}$$

En particulier, la différentielle $\partial_\mu E^{+-}(\zeta_0, \mu(\zeta_0))$ est inversible et de plus, $E^{+-}(\zeta_0, \mu(\zeta_0)) = E_0^{+-} = 0$; le théorème des fonctions implicites peut donc s'appliquer et il existe $\eta > 0$ et une application μ de classe C^∞ sur $]\zeta_0 - \eta, \zeta_0 + \eta[$ telle que :

$$\forall \zeta \in]\zeta_0 - \eta, \zeta_0 + \eta[,\ \forall \mu \in]\mu(\zeta_0) - \eta, \mu(\zeta_0) + \eta[,\ E^{+-}(\zeta,\mu) = 0 \Longleftrightarrow \mu = \mu(\zeta).$$

Par conséquent, $\mu(\zeta)$ est une valeur propre C^∞ au voisinage de ζ_0 et en utilisant le Lemme 2.8, $E^+(\zeta, \mu(\zeta))$ est un vecteur propre C^∞ au voisinage de ζ_0.

Quatrième étape : Justifions la formule de Feynmann-Heilman
Par construction de la fonction μ, nous avons $E^{+-}(\zeta, \mu(\zeta)) = 0$. Différencions cette relation par rapport à ζ, puis prenons la valeur en $(\zeta_0, \mu(\zeta_0))$, il vient :

$$\partial_\zeta E^{+-}(\zeta_0, \mu(\zeta_0)) + \mu'(\zeta_0)\partial_\mu E^{+-}(\zeta_0, \mu(\zeta_0)) = 0. \tag{2.31}$$

Utilisons les relations (2.29) et (2.30), alors :

$$\mu'(\zeta_0) = u^*(\zeta_0)\partial_\zeta H(\zeta_0)u(\zeta_0). \tag{2.32}$$

□

Remarque 2.9. *Nous pouvons obtenir un résultat semblable si la première valeur propre n'est pas simple, il suffit de remplacer la matrice M_0 par la matrice :* $\begin{pmatrix} H(\zeta_0) - \mu(\zeta_0) & u_1(\zeta_0) & \dots & u_N(\zeta_0) \\ u_1^*(\zeta_0) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N^*(\zeta_0) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.
La condition du Lemme 2.8 devient une condition de nullité sur le déterminant $E^{+-}(\zeta,\mu)$.

Appliquons ce Théorème 2.6 pour justifier la régularité des fonctions μ et u.

Proposition 2.10. *Les fonctions $\zeta \mapsto \mu(\zeta)$ et $\zeta \mapsto \lambda(\zeta)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.*
Notons $u(\zeta)$ un vecteur propre normalisé associé à la valeur propre $\mu(\zeta)$ (respectivement $\lambda(\zeta)$), alors les fonctions μ et u (respectivement λ et u) sont de classe C^∞ sur $]0,\infty[$. De plus :

$$\mu'(\zeta) = 2\int_0^\infty (\zeta - t)|u(\zeta,t)|^2\, dt. \tag{2.33}$$

Cette relation reste valable dans le cas de la réalisation de Dirichlet.

Démonstration : Nous établirons le résultat pour la réalisation de Neumann, la preuve étant similaire pour la réalisation de Dirichlet.

Nous pouvons appliquer le Théorème 2.6 qui justifie que μ et u sont infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et la formule (2.5) de Feynmann-Heilman conduit à la relation (2.33) car $\partial_\zeta H(\zeta) = -2(t-\zeta)$, ainsi :

$$\mu'(\zeta_0) = -2\int_{\mathbb{R}^+} (t-\zeta_0)|u(\zeta_0)|^2(t)\ dt. \tag{2.34}$$

□

Remarque 2.11. *L'application de principe du min-max permet de montrer que la fonction μ est localement lipschitzienne.*

2.3 Comportement de la première valeur propre

Par prolongement des fonctions du domaine de forme, il est en général facile de prouver que le bas du spectre de la réalisation de Dirichlet d'un opérateur est monotone. Par contre, cet argument ne s'applique plus pour la réalisation de Neumann. En fait, le bas du spectre de la réalisation de Neumann n'est généralement pas monotone.
Intéressons-nous maintenant plus spécifiquement au comportement de μ et λ.

Proposition 2.12. *La fonction λ est strictement décroissante de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]1,+\infty[$ et $\lambda(0) = 3$.*
Il existe un réel $\zeta_0 > 0$ tel que la fonction μ est strictement décroissante de $]-\infty,\zeta_0[$ dans $]\Theta_0,+\infty[$ et strictement croissante de $[\zeta_0,+\infty[$ dans $[\Theta_0,1[$. De plus, $\mu(0) = 1$ et si l'on note ϕ le vecteur propre positif normalisé, associé à $H(\zeta_0)$, nous avons les relations :

$$\int_0^\infty (|\phi(t)|^2 + (t-\zeta_0)^2|\phi(t)|^2)\ dt = \Theta_0, \tag{2.35}$$

$$\Theta_0 = \zeta_0^2, \tag{2.36}$$

$$|\phi(0)|^2 = \frac{\mu''(\zeta_0)}{2\zeta_0}, \tag{2.37}$$

$$\int_0^\infty (t-\zeta_0)|\phi(t)|^2\ dt = 0. \tag{2.38}$$

Démonstration : Nous avons démontré à la Proposition 2.5 la décroissance de λ. Pour montrer que cette décroissante est stricte, il suffit d'étudier la quantité $(\lambda(\zeta+h)-\lambda(\zeta))\,\langle u_{\zeta+h}, u_\zeta\rangle_{L^2(]-\zeta,+\infty[)}$ comme nous le ferons pour la preuve du Lemme 2.19. Nous établissons ainsi :

$$\lambda'(\zeta) = -(u'_\zeta(-\zeta))^2 < 0.$$

Nous allons démontrer les autres propriétés de la proposition par plusieurs lemmes successifs en suivant la démonstration de Dauge-Helffer [41]. □

Lemme 2.13. $\lim_{\zeta\to-\infty} \mu(\zeta) = +\infty$ *et* $\lim_{\zeta\to-\infty} \lambda(\zeta) = +\infty$.

Démonstration : Soit $\zeta < 0$. Il suffit d'écrire : $D_t^2 + (t-\zeta)^2 \geq D_t^2 + t^2 + \zeta^2 \geq \zeta^2$. □

Lemme 2.14. $\zeta \mapsto \mu(\zeta)$ *est une fonction décroissante de ζ sur l'intervalle $]-\infty,0]$.*

Démonstration : Soient $u \in B^2(\mathbb{R}^+)$ tel que $u'(0) = 0$ et $\zeta, \xi \in \mathbb{R}^2$ tels que $\zeta \leq \xi \leq 0$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $(t-\zeta)^2 \geq (t-\xi)^2$, ce qui implique que $\langle H(\zeta)u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)} \geq \langle H(\xi)u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)}$. Le principe du min-max permet d'achever la preuve du lemme. □

Lemme 2.15. *$\mu(0) = 1$ et $\lambda(0) = 3$.*

Démonstration : L'opérateur $H(0) = D_t^2 + t^2$ est défini sur $]0, +\infty[$. Notons $\tilde{H} = D_t^2 + t^2$ la réalisation de l'oscillateur harmonique sur $\mathbb{R}$. Comparons le spectre de $H(0)$ avec le spectre de $\tilde{H}$ restreint aux fonctions paires. Alors la plus petite valeur propre de la réalisation de Neumann de $\tilde{H}$, restreinte aux fonctions paires est $\mu_1(\tilde{H}) = 1$, cette valeur propre est de multiplicité 1 et un vecteur propre associé est $\tilde{u}(t) = \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$. Notons u la restriction de $\tilde{u}$ à $]0, +\infty[$. Alors $u \in \mathcal{D}^N(H(0))$ et u vérifie la condition de Neumann sur $\mathbb{R}^+$. Donc

$$1 = \mu_1(\tilde{H}) \geq \mu(0). \tag{2.39}$$

Soit maintenant u un vecteur propre pour la condition de Neumann dans $\mathbb{R}^+$, alors $u'(0) = 0$, car $u \in \mathcal{D}^N(H(0))$. Prolongeons u à $\mathbb{R}$ par parité, notons $\tilde{u}$ ce prolongement. Alors $\tilde{u} \in \mathcal{D}^N(\tilde{H}) = B^2(\mathbb{R})$. En effet, en notant $(\tilde{u}'')$ la dérivée de la distribution, la formule des sauts donne :

$$\tilde{u}'' \quad = \quad (\tilde{u}'') + [\tilde{u}'(0^+) - \tilde{u}'(0^-)]\delta + [\tilde{u}(0^+) - \tilde{u}(0^-)]\delta',$$

mais, nous prolongeons par parité donc $\tilde{u}(0^+) = \tilde{u}(0^-)$ et comme nous étudions la réalisation de Neumann, alors $\tilde{u}'(0^+) = \tilde{u}'(0^-)$, donc $\tilde{u}' \in L^2(\mathbb{R})$. Les termes $\tilde{u}$, $t\tilde{u}$, $t^2\tilde{u}$, $\tilde{u}'$, $t\tilde{u}'$ ne posent pas d'autres problèmes d'intégrabilité. L'application du principe du min-max à l'opérateur $\tilde{H}$ donne :

$$\mu_1(\tilde{H}) \quad \leq \quad \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\tilde{u}'(x)|^2 + x^2|\tilde{u}(x)|^2 \, dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\tilde{u}(x)|^2 \, dx} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty |u'(x)|^2 + x^2|u(x)|^2 \, dx}{\displaystyle\int_0^\infty |u(x)|^2 \, dx} = \mu(0). \tag{2.40}$$

Pour justifier $\lambda(0) = 3$, il suffit de considérer l'oscillateur harmonique sur $\mathbb{R}$ restreint aux fonctions impaires. □

Lemme 2.16. *$\mu'(0) < 0$*

Démonstration : Notons u_0 un vecteur propre de norme 1 associé à $\mu(0)$. Alors, d'après (2.33),

$$\mu'(0) = -2 \int_{]0,+\infty[} t|u_0(t)|^2 \, dt < 0. \tag{2.41}$$

En particulier, (2.41) indique que μ est strictement décroissante au voisinage de 0, donc il existe ε_0 assez petit, positif tel que $\forall\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,\ \mu(\varepsilon) < 1$. □

Lemme 2.17. $\lim_{\zeta \to +\infty} \lambda(\zeta) = 1$.

Démonstration : Comme λ est décroissante, alors $\lambda(\zeta) \geq 1$ car la plus petite valeur propre de l'oscillateur harmonique sur $\mathbb{R}$ vaut 1. Montrons l'inégalité inverse. Pour cela, nous utilisons un vecteur propre de l'opérateur H défini sur $\mathbb{R}$ et tronquons ce vecteur afin d'obtenir un élément de l'espace $\mathcal{D}^D(H(\zeta))$.

Soit $u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, alors $||u||_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. Soit χ une fonction infiniment dérivable telle que :

$$0 \leq \chi \leq 1 \text{ et } \chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Nous définissons une translatée-dilatée de χ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\chi_\zeta(x) := \chi(\zeta(x+\zeta))$.
La comparaison des normes $||\chi_\zeta u||_{L^2(\mathbb{R})}$ et $||u||_{L^2(\mathbb{R})}$ conduit à la minoration :

$$||\chi_\zeta u||^2_{L^2(\mathbb{R})} \geq 1 - C \frac{\exp\left(\frac{-\zeta^2}{2}\right)}{\zeta}. \tag{2.42}$$

Estimons le quotient de Rayleigh, alors il existe une constante C telle que :

$$\begin{aligned} \frac{\langle H(\chi_\zeta u), \chi_\zeta u\rangle}{||\chi_\zeta u||^2_{L^2(\mathbb{R})}} &= 1 + \frac{2}{||\chi_\zeta u||^2_{L^2(\mathbb{R})}} \int_{-\zeta}^{-\zeta+\frac{1}{\zeta}} \chi_\zeta u (D_x \chi_\zeta)(D_x u) \; + \frac{1}{||\chi_\zeta u||^2_{L^2(\mathbb{R})}} \int_{-\zeta}^{-\zeta+\frac{1}{\zeta}} \chi_\zeta |u|^2 (D_x^2 \chi_\zeta) \\ &\leq 1 + C\ \zeta^2 \exp\left(-\zeta^2\right). \end{aligned}$$

Par application du principe du min-max, nous déduisons $\lambda(\zeta) \leq 1 + C\ \zeta^2 \exp\left(-\zeta^2\right)$. □

Lemme 2.18. $\lim\limits_{\zeta \to +\infty} \mu(\zeta) = 1$

Démonstration : D'après la Proposition 2.5 et le Lemme 2.17, $\mu \leq \lambda$ et $\lim\limits_{\zeta \to +\infty} \lambda(\zeta) = 1$, ainsi :

$$\lim_{\zeta \to +\infty} \mu(\zeta) \leq 1. \tag{2.43}$$

Montrons maintenant la minoration. Soit u_ζ un vecteur propre normalisé associé à $\mu(\zeta)$. Nous allons tronquer la fonction u_ζ afin de nous ramener au spectre de l'opérateur de Dirichlet à l'aide d'une fonction χ infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$0 \leq \chi \leq 1 \text{ et } \chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Nous définissons la translatée de χ par $\chi_\zeta(x) := \chi(x+\zeta)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme u_ζ est normalisée, alors il existe ζ_0 tel que :

$$\forall \zeta \geq \zeta_0,\ ||\chi_\zeta u_\zeta||^2_{L^2(\mathbb{R})} \geq ||u_\zeta||^2_{L^2(\mathbb{R})} - \varepsilon = 1 - \varepsilon. \tag{2.44}$$

Par construction, $\chi_\zeta u_\zeta \in \mathcal{D}^D(H)$, donc :

$$\langle H(\chi_\zeta u_\zeta), \chi_\zeta u_\zeta\rangle \geq \lambda(\zeta) ||\chi_\zeta u_\zeta||^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2.45}$$

Estimons le quotient de Rayleigh pour la fonction $\chi_\zeta\ u_\zeta$:

$$\frac{\langle H(\chi_\zeta u_\zeta), \chi_\zeta u_\zeta\rangle}{||\chi_\zeta u_\zeta||^2_{L^2(\mathbb{R})}} = \mu(\zeta) + 2\ \mathrm{Re}\ \frac{\displaystyle\int_{-\zeta}^{-\zeta+1} (D_t \chi_\zeta)(D_t u_\zeta)\overline{\chi_\zeta u_\zeta}\ dt}{||\chi_\zeta u_\zeta||^2_{L^2(\mathbb{R})}} + \frac{\displaystyle\int_{-\zeta}^{-\zeta+1} |u_\zeta|^2 (D_t^2 \chi_\zeta)\overline{\chi_\zeta}\ dt}{||\chi_\zeta u_\zeta||^2_{L^2(\mathbb{R})}}. \tag{2.46}$$

Par hypothèse sur la fonction de troncature, il existe $\zeta_1 \geq \zeta_0$ tel que

$$\forall \zeta \geq \zeta_1,\ \left| 2 \int_{-\zeta}^{-\zeta+1} (D_t \chi_\zeta(t))(D_t u_\zeta(t)) \chi_\zeta(t) u_\zeta(t)\ dt \right| + \left| \int_{-\zeta}^{-\zeta+1} |u_\zeta|^2 (D_t^2 \chi_\zeta)\overline{\chi_\zeta}\ dt \right| \leq \varepsilon. \tag{2.47}$$

Reportons les estimations (2.47) et (2.44) dans (2.46) et utilisons (2.45), il vient :

$$\lambda(\zeta) \leq \mu(\zeta) + \frac{\varepsilon}{||u_\zeta||^2_{L^2(\mathbb{R})} - \varepsilon}. \tag{2.48}$$

En passant à la limite quand ζ tend vers l'infini, nous trouvons la minoration voulue. □

Lemme 2.19. *La fonction μ admet un unique minimum local sur $\mathbb{R}$.*
Ce minimum est atteint en $\zeta_0 > 0$ et $\mu(\zeta_0) < 1$.

Démonstration : Nous suivons la démonstration de Dauge-Helffer [41, 42]. Soient $h > 0$,u_ζ et $u_{\zeta+h}$ les vecteurs propres normalisés associés aux valeurs propres $\mu(\zeta)$ et $\mu(\zeta+h)$ pour l'opérateur H. D'après la Proposition 2.10, les fonctions μ et $\zeta \mapsto u_\zeta$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Calculons la dérivée de μ. Pour se faire, commençons par évaluer $(\mu(\zeta+h)-\mu(\zeta))\,\langle u_{\zeta+h}, u_\zeta\rangle_{L^2(]-\zeta,+\infty[)}$ en remarquant que $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\mu(\xi) \in \mathbb{R}$ et $\mu(\xi)u_\xi = Hu_\xi$:

$$\begin{aligned}
(\mu(\zeta+h)-\mu(\zeta))\,\langle u_{\zeta+h}, u_\zeta\rangle_{L^2(]-\zeta,+\infty[)} &= \langle Hu_{\zeta+h}, u_\zeta\rangle_{L^2(]-\zeta,+\infty[)} - \langle u_{\zeta+h}, Hu_\zeta\rangle_{L^2(]-\zeta,+\infty[)} \\
&= \int_{-\zeta}^{+\infty} \left\{(-u''_{\zeta+h} + t^2 u_{\zeta+h})\overline{u_\zeta} - u_{\zeta+h}\overline{(-u''_\zeta + t^2 u_\zeta)}\right\} dt \\
&= -\int_{-\zeta}^{+\infty} u''_{\zeta+h}(t)\overline{u_\zeta(t)}\, dt + \int_{-\zeta}^{+\infty} u_{\zeta+h}(t)\overline{u''_\zeta(t)}\, dt \\
&= u'_{\zeta+h}(-\zeta)\overline{u_\zeta(-\zeta)} - u_{\zeta+h}(-\zeta)\overline{u'_\zeta(-\zeta)} \\
&= u'_{\zeta+h}(-\zeta)\overline{u_\zeta(-\zeta)}.
\end{aligned}$$

Les deux dernières égalités s'obtiennent par intégration par parties en notant que $u'_\zeta(-\zeta) = 0$. Remarquons que $u_\zeta(-\zeta)$ ne peut pas s'annuler car nous savons déjà que $u'_\zeta(-\zeta) = 0$ et si, en plus, nous avions $u_\zeta(-\zeta) = 0$, alors u_ζ serait identiquement nulle, ce qui ne peut être.
Faisons un développement limité de $u'_{\zeta+h}(-\zeta)$ en nous rappellant que $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $u'_\xi(-\xi) = 0$:

$$\begin{aligned}
u'_{\zeta+h}(-\zeta) &= u'_{\zeta+h}(-\zeta-h) + hu''_{\zeta+h}(-\zeta-h) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= hu''_{\zeta+h}(-\zeta-h) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= h((\zeta+h)^2 - \mu(\zeta+h))u_{\zeta+h}(-\zeta-h) + \mathcal{O}(h^2),
\end{aligned}$$

car $u''_\xi(-\xi) + \xi^2 u_\xi(-\xi) = \mu(\xi)u_\xi(-\xi)$. Nous en déduisons ainsi :

$$\frac{\mu(\zeta+h)-\mu(\zeta)}{h}\,\langle u_{\zeta+h}, u_\zeta\rangle_{L^2(]-\zeta,+\infty[)} = ((\zeta+h)^2 - \mu(\zeta+h))u_{\zeta+h}(-\zeta-h)u_\zeta(-\zeta) + \mathcal{O}(h), \tag{2.49}$$

donc, en prenant la limite quand $h \to 0$ dans (2.49), il vient :

$$\mu'(\zeta) = \mu'(\zeta)||u_\zeta||^2_{L^2(]-\zeta,+\infty[)} = (\zeta^2 - \mu(\zeta))|u_\zeta(-\zeta)|^2. \tag{2.50}$$

Or si la fonction μ admet un minimum local en un point ζ, sa dérivée s'annule en ce point. D'après la relation ci-dessus, μ' s'annule en ζ si et seulement si $\mu(\zeta) = \zeta^2$. Dérivons l'équation (2.50) en un point où la dérivée s'annule :

$$\mu''(\zeta) = (2\zeta - \mu'(\zeta))|u_\zeta(-\zeta)|^2 = 2\zeta(u_\zeta(-\zeta))^2 > 0.$$

Il y a ainsi un seul minimum local qui est, de fait, un minimum global. Comme μ est strictement décroissante au voisinage de zéro, le minimum global est atteint en $\zeta_0 > 0$ et $\mu(\zeta_0) < \mu(0) = 1$.
De plus, comme $\mu'(\zeta_0) = 0$, (2.38) se déduit de la formule (2.33).
Nous précisons ainsi le comportement de la fonction μ sur $\mathbb{R}$: μ est strictement décroissante sur $]-\infty\ ,\ \zeta_0]$ et strictement croissante sur $[\zeta_0, +\infty[$, et, en particulier, $\lim_{\zeta\to+\infty} \mu(\zeta) = 1^-$. □

2.4 Estimation du premier élément propre

Rappelons deux résultats importants qui estiment l'écart entre la valeur propre Θ_0 et l'énergie associée à un quasi-mode et d'autre part, entre la fonction propre ϕ et ce quasi-mode ϕ_{app} en commençant par rappeler le Théorème 1.15 de [54] donnant l'INÉGALITÉ DE TEMPLE :

Théorème 2.20 (Inégalité de Temple). *Soit A un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et $\psi \in \mathcal{D}(A)$ normalisé. Supposons que λ est la seule valeur propre de A dans l'intervalle $\alpha < \lambda < \beta$. Définissons $\eta = \langle \psi, A\psi \rangle_{\mathcal{H}}$ et $\varepsilon^2 = ||[A-\eta]\psi||^2_{\mathcal{H}} = ||A\psi||^2_{\mathcal{H}} - \eta^2$. Si $\varepsilon^2 < (\beta-\eta)(\eta-\alpha)$, alors :*

$$\eta - \frac{\varepsilon^2}{\beta-\eta} \leq \lambda \leq \eta + \frac{\varepsilon^2}{\eta-\alpha}.$$

Démonstration : Soient E_1 et E_2 tels que $\alpha \leq E_1 \leq \lambda \leq E_2 \leq \beta$. Calculons $\langle (A-E_2)\psi, (A-E_1)\psi \rangle_{\mathcal{H}}$ en utilisant les notations du Théorème 2.20 :

$$\begin{aligned} \langle (A-E_2)\psi, (A-E_1)\psi \rangle_{\mathcal{H}} &= E_1E_2 - (E_1+E_2)\eta + \langle A\psi, A\psi \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= E_1E_2 - (E_1+E_2)\eta + \langle (A-\eta)\psi, (A-\eta)\psi \rangle_{\mathcal{H}} + \eta^2 \\ &= E_1E_2 - (E_1+E_2)\eta + \varepsilon^2 + \eta^2 \\ &= \varepsilon^2 - (E_2-\eta)(\eta-E_1). \end{aligned} \tag{2.51}$$

Or $\langle (A-E_2)\psi, (A-E_1)\psi \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$ car il n'y a qu'une valeur propre λ sur $]\alpha, \beta[$, ainsi :

$$(E_2-\eta)(\eta-E_1) \leq \varepsilon^2. \tag{2.52}$$

- Choisissons $E_1 = \alpha$ et $E_2 = \lambda$, alors par application du principe du min-max, $\alpha < \lambda \leq \eta$, donc (2.52) conduit à :
$$\lambda \leq \eta + \frac{\varepsilon^2}{\eta-\alpha}.$$
- Choisissons $E_1 = \lambda$ et $E_2 = \beta$, alors (2.52) permet d'écrire :
$$\lambda \geq \eta - \frac{\varepsilon^2}{\eta-\beta}.$$

□

Citons maintenant la Proposition 4.1.1, p. 30 de [56] :

Théorème 2.21. *Soit A un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact, $\psi_1, \ldots, \psi_N \in \mathcal{H}$ des éléments linéairement indépendants de $\mathcal{D}(A)$ et $\mu_1, \ldots, \mu_N$ tels que :*

$$A\psi_j = \mu_j\psi_j + r_j \text{ avec } ||r_j||_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon. \tag{2.53}$$

Soit $a > 0$, supposons que $\sigma(A) \cap (I + \mathcal{B}(0,2a) \setminus I) = \emptyset$. Alors, si E est l'espace engendré par $\psi_1, \ldots, \psi_N$ et si F est l'espace associé à $\sigma(A) \cap I$, nous avons :

$$d(E,F) \leq \frac{\varepsilon\sqrt{N}}{a\sqrt{\lambda_S^{\min}}}, \tag{2.54}$$

où $\lambda_S^{\min}$ est la plus petite valeur propre de $S = (\langle \psi_j, \psi_k \rangle_{\mathcal{H}})$ et d la distance définie par :

$$d(E,F) = ||\Pi_E - \Pi_F\Pi_E||_{\mathcal{H}},$$

en notant respectivement Π_E, Π_F les projections orthogonales sur E et F.

Nous allons appliquer cette proposition avec $N = 1$, $A = H(\zeta_0)$, E l'espace engendré par ϕ_{app}, noté $< \phi_{\text{app}} >$, F l'espace engendré par ϕ, noté $< \phi >$ et $\psi_1 = \phi_{\text{app}}$. Remarquons que l'expression de la distance $d(E,F)$ est liée à la norme $||\phi - \phi_{\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)}$ en se rappelant que ϕ et ϕ_{app} sont normalisés :

$$\begin{aligned} d(E,F) &= ||\phi_{\text{app}} - \langle \phi_{\text{app}}, \phi \rangle \phi||_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \sqrt{||\phi_{\text{app}} - \langle \phi_{\text{app}}, \phi \rangle \phi||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}} \\ &= \sqrt{1 + |\langle \phi_{\text{app}}, \phi \rangle|^2 - 2|\langle \phi_{\text{app}}, \phi \rangle|^2} = \sqrt{1 - |\langle \phi_{\text{app}}, \phi \rangle|^2}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$d(E,F) = \frac{||\phi_{\text{app}} - \phi||_{L^2(\mathbb{R}^+)}}{\sqrt{2}}. \tag{2.55}$$

Nous pouvons estimer Θ_0 et ϕ à l'aide de quasi-modes pour un opérateur $H(\zeta)$ quand ζ est proche de ζ_0 comme le montre le théorème suivant :

Théorème 2.22. *Soient $\zeta_{\text{app}} \in \mathbb{R}$ et $\phi_{\text{app}} \in \mathcal{D}(H(\zeta_{\text{app}}))$ normalisé tels que :*

$$H(\zeta_{\text{app}})\phi_{\text{app}} = \Theta_{\text{app}}\phi_{\text{app}} + r_{\text{app}} \text{ avec } ||r_{\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \varepsilon_{\text{app}}, \tag{2.56}$$

Notons $\mu_2(\zeta_0)$ la deuxième valeur propre associée à l'opérateur $H(\zeta_0)$ et définissons :

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^2_{\text{app}} &= \varepsilon^2_{\text{app}} + 4\varepsilon_{\text{app}}(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)\sqrt{\Theta_{\text{app}}} + 2(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2(\varepsilon_{\text{app}} + 2\Theta_{\text{app}}) \\ &\quad + 4(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^3\sqrt{\Theta_{\text{app}}} + (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^4, \qquad (2.57) \\ \hat{\varepsilon}^2_{\text{app}} &= \tilde{\varepsilon}^2_{\text{app}} + 4\varepsilon_{\text{app}}\sqrt{\Theta_{\text{app}}}(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0) + 2(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2(6\Theta_{\text{app}} + \varepsilon_{\text{app}}) \\ &\quad + 12\sqrt{\Theta_{\text{app}}}(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^3 + 3(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^4. \qquad (2.58) \end{aligned}$$

Alors, nous pouvons estimer la différence $\Theta_{\text{app}} - \Theta_0$:

$$\begin{cases} \Theta_0 - \Theta_{\text{app}} \geq -2\sqrt{\Theta_{\text{app}}}(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0) - \dfrac{\hat{\varepsilon}^2_{\text{app}}}{\mu_2(\zeta_0) - (\sqrt{\Theta_{\text{app}}} + (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0))^2} \\ \Theta_0 - \Theta_{\text{app}} \leq (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2 + 2\sqrt{\Theta_{\text{app}}}(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0), \end{cases} \tag{2.59}$$

ainsi que la norme de $\phi - \phi_{\text{app}}$:

$$||\phi - \phi_{\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq 2\sqrt{2}\frac{\tilde{\varepsilon}_{\text{app}}}{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0}, \tag{2.60}$$

$$||(\phi - \phi_{\text{app}})'||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq 4\sqrt{\Theta_{\text{app}}}(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0) + (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2 + \frac{4\sqrt{2}\Theta_0\tilde{\varepsilon}_{\text{app}}}{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0} + \frac{\hat{\varepsilon}^2_{\text{app}}}{\mu_2(\zeta_0) - (\sqrt{\Theta_{\text{app}}} + \zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2}. \tag{2.61}$$

Démonstration : Estimons $\Theta_{\text{app}} - \Theta_0$ grâce au Théorème 2.20 en choisissant $A = H(\zeta_0)$, $\psi = \phi_{\text{app}}$. Comme Θ_0 est la première valeur propre pour l'opérateur $H(\zeta_0)$, nous pouvons choisir $\alpha = -\infty$ et $\beta = \mu_2(\zeta_0)$. Rappelons la relation :

$$H(\zeta_0) = H(\zeta_{\text{app}}) + 2(t - \zeta_{\text{app}})(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0) + (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2.$$

Estimons maintenant η :

$$\begin{aligned} \eta &= \langle \phi_{\text{app}}, H(\zeta_0)\phi_{\text{app}} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\ &= \langle \phi_{\text{app}}, H(\zeta_{\text{app}})\phi_{\text{app}} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)} + (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)\int_{\mathbb{R}^+} (2(t - \zeta_{\text{app}}) + (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0))|\phi_{\text{app}}(t)|^2\, dt \\ &= \Theta_{\text{app}} + (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2 + 2(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)\int_{\mathbb{R}^+} (t - \zeta_{\text{app}})|\phi_{\text{app}}(t)|^2\, dt \qquad (2.62) \\ &\leq (\sqrt{\Theta_{\text{app}}} + (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0))^2. \qquad (2.63) \end{aligned}$$

Ceci nous permet, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, de déduire un encadrement de η :

$$-2(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)\sqrt{\Theta_{\text{app}}} \leq \eta-\Theta_{\text{app}} \leq (\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^2+2(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)\sqrt{\Theta_{\text{app}}}. \tag{2.64}$$

Estimons le reste ε^2, en utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 &= \int_{\mathbb{R}^+} |((H(\zeta_{\text{app}})-\Theta_{\text{app}})+2(t-\zeta_{\text{app}})(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)+(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^2+(\Theta_{\text{app}}-\eta))\phi_{\text{app}}(t)|^2\,dt \\
&\leq ||r_{\text{app}}||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}+4(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^2\Theta_{\text{app}}+(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^4+(\Theta_{\text{app}}-\eta)^2 \\
&\quad +2||r_{\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)}\left(2(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)\sqrt{\Theta_{\text{app}}}+(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^2+(\Theta_{\text{app}}-\eta)\right) \\
&\quad +4(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^3\sqrt{\Theta_{\text{app}}}+4(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)\sqrt{\Theta_{\text{app}}}(\Theta_{\text{app}}-\eta)+2(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^2(\Theta_{\text{app}}-\eta).
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Considérons l'encadrement (2.64) de $\eta-\Theta_{\text{app}}$, alors, appliquant l'hypothèse $||r_{\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \varepsilon_{\text{app}}$:

$$\begin{aligned}
&(\Theta_{\text{app}}-\eta)^2+2(\Theta_{\text{app}}-\eta)\left(||r_{\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)}+2(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)\sqrt{\Theta_{\text{app}}}+(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^2\right) \\
\leq\ & 4(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^2\Theta_{\text{app}}+4(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^3\sqrt{\Theta_{\text{app}}}+(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^4 \\
&+4\varepsilon_{\text{app}}(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)\sqrt{\Theta_{\text{app}}}+2\varepsilon_{\text{app}}(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^2 \\
&+8(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^2\Theta_{\text{app}}+4(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^3\sqrt{\Theta_{\text{app}}} \\
&+4(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^3\sqrt{\Theta_{\text{app}}}+2(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^4 \\
\leq\ & 4\varepsilon_{\text{app}}\sqrt{\Theta_{\text{app}}}(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)+2(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^2(6\Theta_{\text{app}}+\varepsilon_{\text{app}}) \\
&+12\sqrt{\Theta_{\text{app}}}(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^3+3(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^4.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Reportons la majoration (2.66) dans (2.65) en se rappelant les définitions de $\tilde{\varepsilon}_{\text{app}}$ et $\hat{\varepsilon}_{\text{app}}$ données en (2.57) et (2.58), il vient :

$$\varepsilon^2 \leq \hat{\varepsilon}^2_{\text{app}}. \tag{2.67}$$

La condition $\varepsilon^2 < (\beta-\eta)(\eta-\alpha)$ est vérifiée, nous déduisons donc un encadrement pour $\Theta_0-\Theta_{\text{app}}$:

$$\eta-\frac{\varepsilon^2}{\beta-\eta} \leq \Theta_0 \leq \eta+\frac{\varepsilon^2}{\eta-\alpha}.$$

Grâce aux estimations (2.67), (2.63) et (2.64), cet encadrement s'écrit :

$$-2\sqrt{\Theta_{\text{app}}}(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)-\frac{\hat{\varepsilon}^2_{\text{app}}}{\mu_2(\zeta_0)-(\sqrt{\Theta_{\text{app}}}+\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^2} \leq \Theta_0-\Theta_{\text{app}} \leq (\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^2+2\sqrt{\Theta_{\text{app}}}(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0). \tag{2.68}$$

Pour estimer la norme de la différence entre le vecteur propre ϕ et la fonction ϕ_{app}, utilisons le Théorème 2.21 avec $A=H(\zeta_0)$, $\phi=\phi_{\text{app}}$, $\mu_1=\Theta_{\text{app}}$, alors :

$$H(\zeta_0)\phi_{\text{app}} = \Theta_{\text{app}}\phi_{\text{app}}+\tilde{r}_{\text{app}} \text{ avec } \tilde{r}_{\text{app}}=(H(\zeta_0)-H(\zeta_{\text{app}}))\phi_{\text{app}}+r_{\text{app}}. \tag{2.69}$$

D'après les estimations précédentes, notamment (2.65), nous avons :

$$\begin{aligned}
||\tilde{r}_{\text{app}}||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} &= \int_{\mathbb{R}^+} |(H(\zeta_0)-H(\zeta_{\text{app}}))\phi_{\text{app}}(t)+r_{\text{app}}(t)|^2\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} |2(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)(t-\zeta_{\text{app}})+(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^2)\phi_{\text{app}}(t)+r_{\text{app}}(t)|^2\,dt \\
&\leq ||r_{\text{app}}||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}+4(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^2\Theta_{\text{app}}+(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^4 \\
&\quad +2||r_{\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)}(2(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)\sqrt{\Theta_{\text{app}}}+(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^2)+4(\zeta_{\text{app}}-\zeta_0)^3\sqrt{\Theta_{\text{app}}} \\
&\leq \tilde{\varepsilon}^2_{\text{app}},
\end{aligned} \tag{2.70}$$

en utilisant la définition (2.57) de $\tilde{\varepsilon}_{\text{app}}$. Par conséquent, utilisant la relation (2.55) et le Théorème 2.21 avec $a = \dfrac{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0}{2}$, il vient :

$$||\phi - \phi_{\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq 2\sqrt{2}\frac{||\tilde{r}_{\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)}}{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0} \leq 2\sqrt{2}\frac{\tilde{\varepsilon}_{\text{app}}}{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0}. \tag{2.71}$$

Il reste maintenant à estimer la norme $||\phi' - \phi'_{\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)}$. Pour cela, considérons la forme quadratique $q_{\zeta_0}(\phi - \phi_{\text{app}})$. Une intégration par parties permet d'écrire :

$$\langle H(\zeta_0)(\phi - \phi_{\text{app}}), \phi - \phi_{\text{app}}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)} = ||\phi' - \phi'_{\text{app}}||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \int_0^\infty (t-\zeta_0)^2 |\phi - \phi_{\text{app}}|(t)^2 \, dt. \tag{2.72}$$

Mais, nous avons également :

$$\langle H(\zeta_0)(\phi_{\text{app}} - \phi), \phi_{\text{app}} - \phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \langle H(\zeta_0)(\phi_{\text{app}}), \phi_{\text{app}}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)} - \Theta_0 + 2\Theta_0\left(1 - \langle \phi_{\text{app}}, \phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)}\right). \tag{2.73}$$

Estimons chacun des termes de cette expression. Grâce à (2.71) et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$1 - \langle \phi_{\text{app}}, \phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \langle \phi_{\text{app}}, \phi_{\text{app}} - \phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq ||\phi_{\text{app}} - \phi||_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq 2\sqrt{2}\frac{\tilde{\varepsilon}_{\text{app}}}{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0}. \tag{2.74}$$

Reprenons le premier terme de (2.73) en utilisation la définition de η et l'encadrement (2.64) :

$$\langle H(\zeta_0)(\phi_{\text{app}}), \phi_{\text{app}}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)} - \Theta_0 = \eta - \Theta_0 \leq (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2 + 2\sqrt{\Theta_{\text{app}}}(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0) + (\Theta_{\text{app}} - \Theta_0). \tag{2.75}$$

De (2.68), (2.72), (2.73) et (2.75), nous déduisons :

$$\begin{aligned} ||(\phi - \phi_{\text{app}})'||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} &\leq (\eta - \Theta_0) + 4\sqrt{2}\frac{\Theta_0||\tilde{r}_{\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)}}{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0} \\ &\leq (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2 + 2\sqrt{\Theta_{\text{app}}}(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0) + (\Theta_{\text{app}} - \Theta_0) + 4\sqrt{2}\frac{\Theta_0\tilde{\varepsilon}_{\text{app}}}{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0} \\ &\leq (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2 + 4\sqrt{\Theta_{\text{app}}}(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0) + \frac{\tilde{\varepsilon}^2_{\text{app}}}{\mu_2(\zeta_0) - (\sqrt{\Theta_{\text{app}}} + (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0))^2} \\ &\quad + 4\sqrt{2}\frac{\Theta_0\tilde{\varepsilon}_{\text{app}}}{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0}. \end{aligned} \tag{2.76}$$

□

2.5 Estimation de $\phi(0)$

Nous allons construire, à la Section 4.3, une fonction test à partir de la fonction ϕ dont l'énergie dépend de $\phi(0)$. L'estimation de cette énergie nécessite donc de connaître assez précisément $\phi(0)$.

Commençons par rappeler une majoration de la valeur d'une fonction en un point à l'aide de la norme de la fonction et de sa dérivée. Ceci permettra d'estimer l'erreur commise sur la valeur de $\phi(0)$ en l'approchant par la valeur en 0 d'un quasi-mode.

Lemme 2.23. *Pour toute fonction $u \in H^1(\mathbb{R}^+)$,*

$$|u(0)| \leq \sqrt{2}\sqrt{||u||_{L^2(\mathbb{R}^+)}}\sqrt{||u'||_{L^2(\mathbb{R}^+)}}. \tag{2.77}$$

Démonstration : Il suffit d'écrire :

$$u(0)^2 = 2\int_0^\infty u(t)u'(t)\ dt,$$

et d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Appliquons le Lemme 2.23 avec $u = \phi - \phi_{\text{app}}$, alors :

$$|\phi(0) - \phi_{\text{app}}(0)| \leq \sqrt{2}\sqrt{||\phi - \phi_{\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)}}\sqrt{||(\phi - \phi_{\text{app}})'||_{L^2(\mathbb{R}^+)}}. \tag{2.78}$$

Reprenant les estimations du Théorème 2.22 et la majoration (2.78), nous déduisons le théorème :

Théorème 2.24. *Sous les hypothèses du Théorème 2.22, nous estimons la différence* $\phi(0)-\phi_{\text{app}}(0)$ *:*

$$|\phi(0) - \phi_{\text{app}}(0)|^2 \leq 4\sqrt{2}\frac{\tilde{\varepsilon}_{\text{app}}}{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0}$$
$$\times \left(4\sqrt{\Theta_{\text{app}}}(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0) + (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2 + \frac{\hat{\varepsilon}^2_{\text{app}}}{\mu_2(\zeta_0) - (\sqrt{\Theta_{\text{app}}} + \zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2} + 4\sqrt{2}\frac{\Theta_0\tilde{\varepsilon}_{\text{app}}}{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En vue d'appliquer le Théorème 2.24, nous allons commencer par construire un quasi-mode. Donnons deux constructions et deux estimations. La première est liée aux gaussiennes et la seconde provient d'une discrétisation de l'équation $H(\zeta)\phi = \mu(\zeta)\phi$ à l'aide des différences finies.

2.6 Estimation d'erreurs à l'aide de gaussiennes

Définissons u_ρ sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$u_\rho(t) := C_\rho e^{-\rho t^2}, \tag{2.79}$$

où C_ρ est une constante de normalisation. Par le calcul de gaussiennes,

$$\int_0^\infty e^{-2\rho t^2}dt = \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-2\rho r^2}r dr\ d\theta} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sqrt{\rho}}, \tag{2.80}$$

nous déduisons la valeur de C_ρ :

$$C_\rho := \rho^{\frac{1}{4}}\left(\frac{8}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{2.81}$$

Cherchons ρ et ζ qui minimisent le quotient de Rayleigh $\dfrac{q_\zeta(u_\rho)}{||u_\rho||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}}$. Estimons $q_\zeta(u_\rho)$:

$$\begin{aligned} q_\zeta(u_\rho) &= \int_0^\infty (4\rho^2t^2 + (t-\zeta)^2)|u_\rho(t)|^2dt \\ &= \rho + \frac{1}{4\rho} + \zeta^2 - \zeta\frac{C_\rho^2}{2\rho} = \frac{1}{4\rho} + \rho + \zeta^2 - \zeta\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\rho}}. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Comme u_ρ est normalisé, pour minimiser le quotient de Rayleigh associé à la fonction u_ρ, nous devons minimiser en ζ et ρ la fonction :

$$f(\zeta,\rho) := \rho + \frac{1}{4\rho} + \zeta^2 - \zeta\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}. \tag{2.83}$$

Remarquons que nous pouvons récrire la fonction f comme :

$$f(\zeta,\rho) = \left(\zeta - \sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}}\right)^2 + \rho + \frac{1}{4\rho} - \frac{1}{2\pi\rho}. \tag{2.84}$$

Nous choisissons donc $\zeta = \sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}}$ et déterminons ρ en minimisant $\rho + \frac{1}{4\rho} - \frac{1}{2\pi\rho}$. Alors :

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2}{\pi}} \text{ et } \zeta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}. \tag{2.85}$$

Ceci permet de déduire une majoration de Θ_0 :

$$\Theta_0 \quad \leq \quad q_\zeta(u_\rho) = 2\rho = \sqrt{1-\frac{2}{\pi}}. \tag{2.86}$$

Nous notons :

$$\Theta_{\text{app}} := 2\rho = \sqrt{1-\frac{2}{\pi}} \text{ et } \zeta_{\text{app}} := \sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}} = \frac{1}{(\pi(\pi-2))^{\frac{1}{4}}}. \tag{2.87}$$

Les estimations de Θ_{app} et ζ_{app} donnent :

$$\Theta_{\text{app}} \simeq 0.6028,\ \zeta_{\text{app}} \simeq 0.7267 \text{ et } \zeta_{\text{app}}^2 \simeq 0.5280.$$

Rappelons quelques calculs élémentaires :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^\infty t|u_\rho(t)|^2\,dt & = & \displaystyle\frac{C_\rho^2}{4\rho} = \frac{1}{(\pi(\pi-2))^{\frac{1}{4}}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty t^2|u_\rho(t)|^2\,dt & = & \displaystyle\frac{1}{4\rho} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\pi-2}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty t^3|u_\rho(t)|^2\,dt & = & \displaystyle\frac{C_\rho^2}{8\rho^2} = \frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{(\pi-2)^{\frac{3}{4}}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty t^4|u_\rho(t)|^2\,dt & = & \displaystyle\frac{3}{16\rho^2} = \frac{3\pi}{4(\pi-2)}. \end{array}\right. \tag{2.88}$$

Ces calculs d'intégrales permettent de remarquer que :

$$\int_0^\infty (t-\zeta_{\text{app}})|u_\rho(t)|^2\,dt = 0, \tag{2.89}$$

et de déduire la valeur de η en utilisant (2.62) :

$$\eta = \Theta_{\text{app}} + (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2. \tag{2.90}$$

Définissons r_{ζ_0} par :

$$r_{\zeta_0} := H(\zeta_0)u_\rho - \Theta_{\text{app}}u_\rho. \tag{2.91}$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$r_{\zeta_0}(t) \quad = \quad ((1-4\rho^2)t^2 - 2t\zeta_0 + \zeta_0^2)\ u_\rho(t) = \left(\frac{2}{\pi}t^2 - 2t\zeta_0 + \zeta_0^2\right)\ u_\rho(t), \tag{2.92}$$

L'expression de $||r_{\zeta_0}||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}$ est explicite :

$$\begin{aligned}
||r_{\zeta_0}||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} &= \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi}t^2 - 2t\zeta_0 + \zeta_0^2\right)^2 |u_\rho(t)|^2\, dt \\
&= \frac{3}{4\pi^2\rho^2} - \frac{\zeta_0 C_\rho^2}{\pi\rho^2} + \frac{\zeta_0^2}{\rho}\left(1+\frac{1}{\pi}\right) - \zeta_0^3\frac{C_\rho^2}{\rho} + \zeta_0^4 \\
&= \frac{4}{\pi^2}\frac{3\pi}{4(\pi-2)} - 2\pi\zeta_0\frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{(\pi-2)^{\frac{3}{4}}} + 4\zeta_0^2\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\pi-2}} - 4\zeta_0^3\frac{1}{(\pi(\pi-2))^{\frac{1}{4}}} + \zeta_0^4. \\
&= \frac{\zeta_0^4\pi(\pi-2) - 4\zeta_0^3(\pi(\pi-2))^{\frac{3}{4}} + 2\zeta_0^2(1+\pi)\sqrt{\pi(\pi-2)} - 8\zeta_0(\pi(\pi-2))^{\frac{1}{4}} + 3}{\pi(\pi-2)}.
\end{aligned}$$

Approximativement, $||r_{\zeta_0}||_{L^2(\mathbb{R}^+)} \simeq 0.3001$. Appliquons le Théorème 2.20 en remarquant, grâce aux relations (2.91) et (2.90) que :

$$\varepsilon^2 := ||H(\zeta_0)u_\rho - \eta u_\rho||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \left|\left|r_{\zeta_0} - (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2 u_\rho\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}$$

Nous obtenons ainsi un encadrement de Θ_0 :

$$\Theta_{\text{app}} + (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2 - \frac{\varepsilon^2}{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_{\text{app}} - (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2} \leq \Theta_0 \leq \Theta_{\text{app}} + (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2. \tag{2.93}$$

Le Théorème 2.21 et la relation (2.55) impliquent :

$$||\phi - u_\rho||_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{2\sqrt{2}||r_{\zeta_0}||_{L^2(\mathbb{R}^+)}}{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0}. \tag{2.94}$$

Reprenons les relations (2.76) et (2.89) afin de majorer la norme de $\phi' - u'_\rho$:

$$\begin{aligned}
||(\phi - u_\rho)'||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} &\leq (\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2 + \Theta_{\text{app}} - \Theta_0 + \Theta_0\frac{4\sqrt{2}||r_{\zeta_0}||_{L^2(\mathbb{R}^+)}}{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0} &(2.95)\\
&= \frac{\pi-1}{\sqrt{\pi(\pi-2)}} - \frac{2\zeta_0}{(\pi(\pi-2))^{\frac{1}{4}}} + \Theta_0\frac{4\sqrt{2}||r_{\zeta_0}||_{L^2(\mathbb{R}^+)}}{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0}. &(2.96)
\end{aligned}$$

Appliquons la relation (2.78) :

$$|\phi(0) - u_\rho(0)|^2 \leq \frac{4\sqrt{2}||r_{\zeta_0}||_{L^2(\mathbb{R}^+)}}{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0}\sqrt{(\zeta_{\text{app}} - \zeta_0)^2 + \Theta_{\text{app}} - \Theta_0 + \Theta_0\frac{4\sqrt{2}||r_{\zeta_0}||_{L^2(\mathbb{R}^+)}}{\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0}}. \tag{2.97}$$

Estimons numériquement les résultats obtenus en considérant $\mu_2(\zeta_0) = 3.3$ selon l'estimation que nous présenterons à la Proposition 2.27, $\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0 \geq 2.5$, $\Theta_0 = 0.59010$ et $\zeta_0 = \sqrt{0.59010}$ selon les estimations de [88]. La relation (2.93) conduit à l'encadrement :

$$0.5707 \leq \Theta_0 \leq 0.6045. \tag{2.98}$$

Estimons maintenant les normes L^2 et H^1 de la différence $\phi - u_\rho$ grâce aux relations (2.94) et (2.95) :

$$\begin{aligned}
||\phi - u_\rho||_{L^2(\mathbb{R}^+)} &\leq 0.3395, \\
||\phi' - u'_\rho||_{L^2(\mathbb{R}^+)} &\leq 0.6443.
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Reportons ces estimations dans (2.97), nous déduisons un encadrement de $\phi(0)$ avec le calcul $u_\rho(0) \simeq 0.9360$:

$$0.2745 \leq \phi(0) \leq 1.5975. \tag{2.100}$$

Cette estimation est beaucoup trop grossière pour nous donner une estimation fiable de $\phi(0)$. Nous allons maintenant présenter une construction d'un quasi-mode en utilisant la méthode des différences finies afin d'améliorer les estimations obtenues.

2.7 Construction d'un quasi-mode par différence finie

Nous allons suivre une démarche heuristique afin d'obtenir une suite de valeurs approchées de ϕ en certains points puis utiliserons ces valeurs pour construire une fonction test dont l'énergie est proche de Θ_0.

Nous savons d'après la Proposition 2.12 que la plus petite valeur propre $\mu(\zeta)$ associée à la famille d'opérateurs $H^N(\zeta) = D_t^2 + (t-\zeta)^2$ sur $\mathbb{R}^+$ est strictement décroissante sur $]-\infty, \zeta_0[$ et strictement croissante sur $[\zeta_0, +\infty[$. De plus, $\mu(\zeta_0) = \Theta_0 = \zeta_0^2$.
Nous allons construire une suite de quasi-modes dont l'énergie décroit vers cette valeur limite Θ_0. Notons ϕ_ζ un vecteur propre normalisé associé à $\mu(\zeta)$. Nous savons que ϕ_ζ décroit comme $t \mapsto \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ pour t tendant vers l'infini, nous déduisons alors qu'il existe une constante C telle que pour $a > 0$:

$$\int_a^\infty |\phi_\zeta(t)|^2 dt \leq \frac{C}{a} \int_a^\infty t e^{-t^2}\ dt = \frac{C}{2} \frac{\exp\left(-a^2\right)}{a}. \tag{2.101}$$

Ainsi, pour déterminer la norme L^2 de ϕ_ζ avec une précision de n décimales, il suffira de calculer $\int_0^a |\phi_\zeta(t)|^2\ dt$ avec a tel que :

$$\frac{e^{-a^2}}{a} \leq \frac{2}{C} 10^{-n}. \tag{2.102}$$

Il suffit donc de choisir a tel que $a^2 + \ln a \geq n + \ln \frac{C}{2}$. Omettant la constante C, il semble raisonnable de considérer une longueur $a \simeq \sqrt{n}$, même si moralement la longueur a doit tendre vers l'infini pour retrouver le problème sur la demi-droite.
Utilisant la décroissance de ϕ_ζ, nous déterminons un quasi-mode $\phi_{\zeta,\text{app}}$ satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} H(\zeta)\phi_{\zeta,\text{app}}(t) & = & \zeta^2 \phi_{\zeta,\text{app}}(t), \quad \forall t \in]0, a[, \\ \phi_{\zeta,\text{app}}(0) & = & 1, \\ \phi'_{\zeta,\text{app}}(0) & = & 0. \end{array} \right. \tag{2.103}$$

Nous résolvons (2.103) à l'aide d'un schéma aux différences finies. Notons h le pas du schéma et n la partie entière de $\frac{a}{h}$. Pour tout entier $j \in [0, n]$, nous notons ϕ_j^ζ la valeur de $\phi_{\zeta,\text{app}}$ au point jh et $I_j = [jh, (j+1)h]$. Nous utilisons les discrétisations usuelles :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi'_{\zeta,\text{app}}(jh) & \simeq & \dfrac{\phi_{j+1}^\zeta - \phi_j^\zeta}{h}, \\ \phi''_{\zeta,\text{app}}(jh) & \simeq & \dfrac{\phi_{j+1}^\zeta - 2\phi_j^\zeta + \phi_{j-1}^\zeta}{h^2}. \end{array} \right. \tag{2.104}$$

La combinaison de (2.103) et (2.104) déterminent les deux premiers termes de la suite $(\phi_j^\zeta)_j$ et les suivants sont déterminés pas à pas :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi_0^\zeta & = & 1, \\ \phi_1^\zeta & = & 1, \\ \phi_{j+1}^\zeta & = & (2 + jh^3(jh - 2\zeta))\phi_j^\zeta - \phi_{j-1}^\zeta, \ \forall j = 1, \ldots, n-1. \end{array} \right. \tag{2.105}$$

Le changement de variables $x = t - \zeta$ amène à considérer l'équation différentielle du second ordre :

$$u''(x) - x^2 u(x) - \zeta^2 u(x) = 0. \tag{2.106}$$

D'après la théorie des équations différentielles et des opérateurs de Sturm-Liouville (cf [49, 55, 97, 41, 42]), il existe deux fonctions u_ζ^+ et u_ζ^- qui constituent une base de solutions fondamentales pour

(2.106) et toute solution de (2.106) est combinaison linéaire de u_ζ^+ et u_ζ^-. Nous choisissons pour u_ζ^- une solution telle que $u_\zeta^-(x) \simeq \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. Précisons le comportement asymptotique de u_ζ^+. Nous cherchons un développement asymptotique de la forme : $u_\zeta^+(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) x^\rho(1+o(1))$, le calcul de la dérivée seconde de u_ζ^+ :

$$u_\zeta^{+\prime\prime}(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)(x^{\rho+1} + \rho x^{\rho-1} + \ldots),$$

montre que $\rho = -\frac{1+\zeta^2}{2}$. Ainsi, $\phi_{\zeta,\text{app}}$, solution du problème (2.103) est une combinaison linéaire d'une exponentielle croissante, notée f_ζ^+, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et d'une exponentielle décroissante, f_ζ^-, tendant vers 0 en $+\infty$ où les fonctions f_ζ^+ et f_ζ^- se déduisent de u_ζ^+ et u_ζ^- par changement de variables. Ainsi :

$$\phi_{\zeta,\text{app}} = a_\zeta f_\zeta^- + b_\zeta f_\zeta^+. \tag{2.107}$$

Cette remarque va nous permettre de localiser la valeur propre Θ_0 car pour $\zeta = \zeta_0$, nous avons $b_{\zeta_0} = 0$. Par conséquent, il s'agit de déterminer le plus petit ζ pour lequel il n'y a pas «explosion» de la fonction $\phi_{\zeta,\text{app}}$.
Comme nous savons que le vecteur propre associé à la première valeur propre Θ_0 reste de signe constant, ne s'annule pas et tend vers 0 à l'infini, ceci donne un critère pour sélectioner les fonctions $(\phi_{\zeta,\text{app}})$ construites à partir des suites (ϕ_j^ζ) qui peuvent constituer un quasi-mode adéquat.
En effet, si pour une valeur donnée de ζ, nous construisons une suite (ϕ_j^ζ) qui prend des valeurs positives et négatives, ce qui conduira à construire une fonction $\phi_{\zeta,\text{app}}$ telle que $b_\zeta < 0$, alors $\zeta > \zeta_0$ et l'énergie associée à la fonction $\phi_{\zeta,\text{app}}$ est strictement supérieure à Θ_0.
Donnons un lemme qui permet de mieux comprendre l'influence d'une frontière libre :

Lemme 2.25. *Soit a un réel strictement positif, notons $\mu^{N,N}(\zeta,a)$ et $\mu^{N,D}(\zeta,a)$ la plus petite valeur propre associée à l'opérateur $H(\zeta)$ avec condition de Neumann en 0 et respectivement de Neumann et Dirichlet en $t=a$.*
Alors $\mu^{N,D}(\zeta,a)$ est décroissante avec a et donc :

$$\mu^{N,D}(\zeta,a) \geq \mu(\zeta) \geq \Theta_0. \tag{2.108}$$

$\mu^{N,N}(\zeta,a)$ est croissante pour a assez grand et :

$$\mu^{N,N}(\zeta,a) \leq \mu(\zeta). \tag{2.109}$$

Démonstration : La décroissance de $a \mapsto \mu^{N,D}(\zeta,a)$ est évidente, il suffit de prolonger par 0 une fonction du domaine de forme sur l'intervalle $[a,b[$ avec $b \geq a$ et d'utiliser le principe du min-max . Intéressons-nous à la croissance de $\mu^{N,N}(\zeta,a)$. Pour cela, nous reprenons la même démonstration que pour le Lemme 2.19 pour déterminer la dérivée de $\mu^{N,N}(\zeta,a)$ par rapport à a, il vient :

$$\partial_a \mu^{N,N}(\zeta,a) = ((a-\zeta)^2 - \mu^{N,N}(\zeta,a))|u_{\zeta,a}(a)|^2, \tag{2.110}$$

où $u_{\zeta,a}$ est un vecteur propre normalisé associé à $\mu^{N,N}(\zeta,a)$. Par conséquent, la dérivée est positive pour a assez grand et la croissance s'en suit. □

En utilisant la discrétisation (2.105), nous obtenons deux comportements différents selon que $\zeta < \zeta_0$ ou $\zeta > \zeta_0$ comme le montrent les Figures 2.1 et 2.2. Considérons le profil de la Figure 2.1. Notons a l'abscisse du point où la suite atteint son minimum. Sur l'intervalle $[0,a]$, la fonction ϕ constitue donc un quasi-mode associée à la valeur propre $\mu^{N,N}(\zeta,a)$ et nous avons $\mu^{N,N}(\zeta,a) \leq \Theta_{\text{app}}$ si

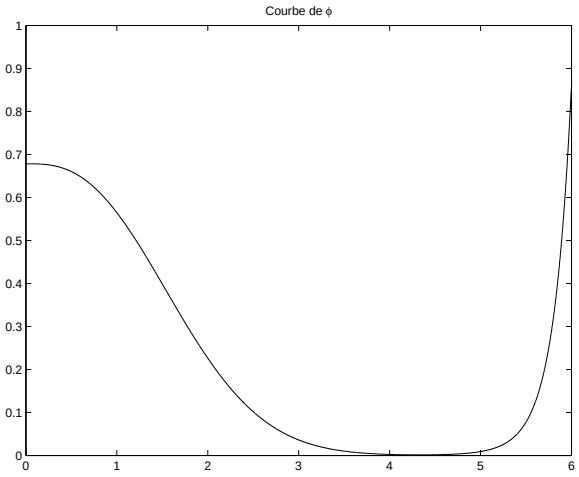


FIG. 2.1 – Profil de la suite (ϕ_j^ζ) à termes strictement positifs.

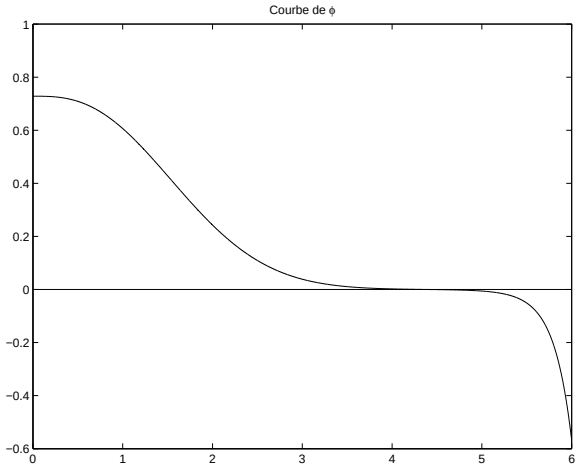


FIG. 2.2 – Profil de la suite (ϕ_j^ζ) à termes strictement positifs et négatifs.

l'énergie Θ_{app} est calculée sur l'intervalle $[0, a]$. Comme nous ne savons pas comparer $\mu^{N,N}(\zeta, a)$ et Θ_0, nous allons modifier la suite au delà du point a et obtenir une condition de Dirichlet au point $a' > a$.

Regardons maintenant le profil de la Figure 2.2. Notons a l'abscisse du point où la suite s'annule. Sur l'intervalle $[0, a]$, la fonction ϕ constitue donc un quasi-mode associée à la valeur propre $\mu^{N,D}(\zeta, a)$ et nous avons $\mu^{N,D}(\zeta, a) \leq \Theta_{\text{app}}$ si l'énergie Θ_{app} est calculée sur l'intervalle $[0, a]$. Grâce au Lemme 2.25, nous obtenons une majoration de Θ_0.

Néanmoins, les profils où la suite reste positive semblent correspondre davantage à la fonction propre car celle-ci ne s'annule pas.

Nous avons donc deux distinctions :

- Soit la suite (ϕ_j^ζ) prend des termes positifs et négatifs, alors nous déterminons le premier indice j_0 tel que $\phi_{j_0}^\zeta < 0$, nous imposons la condition de Dirichlet $\phi_{j_0}^\zeta = 0$ et nous restreignons la fonction à l'intervalle $[0, j_0 h]$. Nous noterons encore n le nombre l'éléments de la suite (ϕ_j^ζ).
- Soit la suite (ϕ_j^ζ) n'a que des termes strictement positifs. Nous allons en fait «tronquer» la fonction afin d'imposer une condition de Dirichlet au point a. Pour cela, nous déterminons l'indice j_0 où la suite (ϕ_j^ζ) atteint son minimum et nous modifions les valeurs (ϕ_j^ζ) pour $j \geq j_0$, en prenant :

$$\forall j = j_0, \ldots, n, \ \phi_j^\zeta = \frac{n-j}{n-j_0} \phi_{j_0}^\zeta. \tag{2.111}$$

  Si $j_0 = n$, nous imposons juste $\phi_n^\zeta = 0$.

Si nous interpolons leurs valeurs $(\phi_j^\zeta)_j$ par une fonction linéaire par morceaux, cette fonction n'appartient pas à $H^2(\mathbb{R}^+)$ et par conséquence, n'est pas dans le domaine $\mathcal{D}(H(\zeta))$. Donc, nous interpolons les valeurs $(\phi_j^\zeta)_j$ par une fonction polynomiale de degré 2 par morceaux, $\phi_{\zeta,\text{app}}$, définie par :

$$\forall j = 0, \ldots, n-1, \forall t \in I_j, \ \phi_{\zeta,\text{app}}(t) = \alpha_j (t - jh)^2 + \tau_j (t - jh) + \gamma_j, \tag{2.112}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} \tau_0 & = & 0, & \tau_{j+1} & = & 2\dfrac{\phi_{j+1}^\zeta - \phi_j^\zeta}{h} - \tau_j, \\ & & & \alpha_j & = & \dfrac{\phi_{j+1}^\zeta - \phi_j^\zeta}{h^2} - \dfrac{\tau_j}{h}, \\ & & & \gamma_j & = & \phi_j^\zeta. \end{array} \right. \tag{2.113}$$

Notons que $\tau_j = \phi'_{\zeta,\text{app}}(jh)$. Avec cette construction, $\phi_{\zeta,\text{app}}$ est continue, sa dérivée est continue, linéaire par morceaux et sa dérivée seconde est constante sur chaque intervalle I_j, $j = 0, \ldots, n-1$.

Le calcul de la norme de $\phi_{\zeta,\text{app}}$ et de l'énergie associée à cette fonction sont explicites. En effet, après le changement de variables $x = t - jh$:

$$\begin{aligned} ||\phi_{\zeta,\text{app}}||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^h |\alpha_j x^2 + \tau_j x + \gamma_j|^2 \, dx \\ &= h \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{h^4}{5}\alpha_j^2 + \frac{h^3}{2}\alpha_j\tau_j + \frac{h^2}{3}(\tau_j^2 + 2\alpha_j\gamma_j) + h\tau_j\gamma_j + \gamma_j^2 \right). \end{aligned} \tag{2.114}$$

Calculons maintenant l'énergie associée à cette fonction test $\phi_{\zeta,\text{app}}$:

$$||\phi'_{\zeta,\text{app}}||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^h |2\alpha_j x + \tau_j|^2 \, dx h \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{4}{3}h^2\alpha_j^2 + 2h\alpha_j\tau_j + \tau_j^2 \right). \tag{2.115}$$

Pour calculer la seconde contribution pour l'énergie provenant de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} (t-\zeta)^2 |\phi_{\zeta,\text{app}}(t)|^2 \, dt$, nous définissons $\delta_j = hj - \zeta$. Un changement de variables conduit à :

$$\begin{aligned} ||(t-\zeta_0)\phi_{\zeta,\text{app}}||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^h |(x+\delta_j)(\alpha_j u^2 + \tau_j u + \gamma_j|^2 \, dx \\ &= h \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{h^6}{7}\alpha_j^2 + \frac{h^5}{3}\alpha_j(\tau_j + \alpha_j\delta_j) + \frac{h^4}{5}((\tau_j + \alpha_j\delta_j)^2 + 2\alpha_j(\gamma_j + \tau_j\delta_j)) \right. \\ &\quad + \frac{h^3}{2}(\alpha_j\gamma_j\delta_j + (\tau_j + \alpha_j\delta_j)(\gamma_j + \tau_j\delta_j)) \\ &\quad + \frac{h^2}{3}((\gamma_j + \tau_j\delta_j)^2 + 2\gamma_j\delta_j(\tau_j + \alpha_j\delta_j)) \\ &\quad \left. + h\gamma_j\delta_j(\gamma_j + \tau_j\delta_j) + \gamma_j^2\delta_j^2 \right). \end{aligned} \tag{2.116}$$

Le grand avantage des expressions (2.114), (2.115) et (2.116) est que les calculs sont exacts. Si nous choisissons pour ζ un rationnel, alors le résultat de chacun de ces calculs est encore un rationnel. Notons $\Theta_{\zeta,\text{app}}$ la valeur du quotient de Rayleigh évalué en $\phi_{\zeta,\text{app}}$:

$$\Theta_{\zeta,\text{app}} = \frac{||\phi'_{\zeta,\text{app}}||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} + ||(t-\zeta)\phi_{\zeta,\text{app}}||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}}{||\phi_{\zeta,\text{app}}||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}}. \tag{2.117}$$

Remarquons que le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty (t-\zeta)|\phi_{\zeta,\text{app}}(t)|^2 \, dt$ est explicite et vaut :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (t-\zeta)|\phi_{\zeta,\text{app}}(t)|^2 \, dt &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^h (x+\delta_j)|\alpha_j x^2 + \tau_j x + \gamma_j|^2 \, dx \\ &= h \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{h^5}{6}\alpha_j^2 + \frac{h^4}{5}\alpha_j(2\tau_j + \alpha_j\delta_j) + \frac{h^3}{4}(\tau_j^2 + 2\alpha_j\gamma_j + 2\alpha_j\tau_j\gamma_j) \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^2}{3}(2\tau_j\gamma_j + \tau_j^2\delta_j + 2\alpha_j\gamma_j\delta_j) + \frac{h}{2}(\gamma_j^2 + 2\tau_j\gamma_j\delta_j) + \gamma_j^2\delta_j^2 \right). \end{aligned} \tag{2.118}$$

En regardant la formule (2.33), l'intégrale $\int_0^\infty (t-\zeta)|\phi_{\zeta,\text{app}}(t)|^2\,dt$ mesure en quelque sorte $\mu'(\zeta_{\text{app}})$. Comme $\mu'(\zeta_0)$ est nul, une condition pour avoir un ζ_{app} proche de ζ_0 et construire un bon quasi-mode est que cette intégrale soit très petite et que $\mu'(\zeta)$ tende vers 0 quand a tend vers l'infini.
En vue d'appliquer le Théorème 2.22, nous devons estimer le reste $||r_\zeta||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}$ avec :

$$r_\zeta := (H(\zeta) - \Theta_{\zeta,\text{app}})\phi_{\zeta,\text{app}}. \tag{2.119}$$

Remarquons tout d'abord que pour tout $j = 0, \ldots, n-1$ et tout $t \in I_j$:

$$r_\zeta(t) = -2\alpha_j + ((t-\zeta)^2 - \Theta_{\zeta,\text{app}})(\alpha_j t^2 + \tau_j t + \gamma_j). \tag{2.120}$$

Comme en (2.114), (2.115) et (2.116), le calcul de la norme $||r||_{L^2(\mathbb{R}^+)}$ est explicite. Définissons, pour $j = 1, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned}
r_{0,j} &= \gamma_j(\delta_j^2 - \Theta_{\zeta,\text{app}}) - 2\alpha_j,\\
r_{1,j} &= 2\gamma_j\delta_j + \tau_j\ (\delta_j^2 - \Theta_{\zeta,\text{app}}),\\
r_{2,j} &= \gamma_j + 2\tau_j\delta_j + \alpha_j(\delta_j^2 - \Theta_{\zeta,\text{app}}),\\
r_{3,j} &= \tau_j + 2\alpha_j\delta_j,
\end{aligned}$$

alors, après changement de variables :

$$\begin{aligned}
||r_\zeta||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \sum_{j=0}^{n-1} \Bigg(& \frac{h^9}{9}\alpha_j^2 + \frac{h^8}{4}\alpha_j r_{3,j} + \frac{h^7}{7}(2\alpha_j r_{2,j} + r_{3,j}^2) + \frac{h^6}{3}(\alpha_j r_{1,j} + r_{3,j}r_{2,j})\\
& + \frac{h^5}{5}(2\alpha_j r_{0,j} + r_{2,j}^2) + \frac{h^4}{2}(r_{3,j}r_{0,j} + r_{2,j}r_{1,j}) + \frac{h^3}{3}(2r_{2,j}r_{0,j} + r_{1,j}^2)\\
& + h^2 r_{1,j}r_{0,j} + h r_{0,j}^2 \Bigg).
\end{aligned} \tag{2.121}$$

Nous avons expliqué la façon d'interpoler les suites (ϕ_j^ζ) et les critères pour localiser Θ_0. Donnons maintenant l'algorithme qui permet de déterminer Θ_0 avec précision.

Algorithme 2.26.

---

1. *Nous initialisons une valeur de Θ_0 avec n décimales.*
2. *Nous construisons la suite (ϕ_j^ζ) déterminée par (2.105) en respectant le critère (2.111) pour $\zeta = \sqrt{\Theta_0}$.*
3. *Tant que la suite (ϕ_j^ζ) n'a que des termes strictement positifs,*
   (a) *nous lui associons la fonction $\phi_{\zeta,\text{app}}$ à l'aide des relations (2.112) et (2.113),*
   (b) *nous calculons la norme L^2 de $\phi_{\zeta,\text{app}}$ à l'aide de (2.114) et en déduisons la valeur de $\phi_{\zeta,\text{app}}(0)$ en renormalisant $\phi_{\zeta,\text{app}}$,*
   (c) *nous calculons l'énergie $\Theta_{\zeta,\text{app}}$ associée à la fonction $\phi_{\zeta,\text{app}}$ grâce aux relations (2.115), (2.116) et (2.117),*
   (d) *nous calculons le reste $||r_\zeta||_{L^2(\mathbb{R}^+)} = ||(H(\zeta) - \Theta_{\zeta,\text{app}})\phi_{\zeta,\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)}$ par la relation (2.121),*
   (e) *nous incrémentons $\zeta^2 = \Theta_0$ de $10^{-(n+1)}$.*
4. *Nous retournons à l'étape 1 avec la dernière valeur de Θ_0 à $n+1$ décimales pour laquelle la suite $(\phi_j^{\sqrt{\Theta_0}})$ n'a que des termes positifs.*

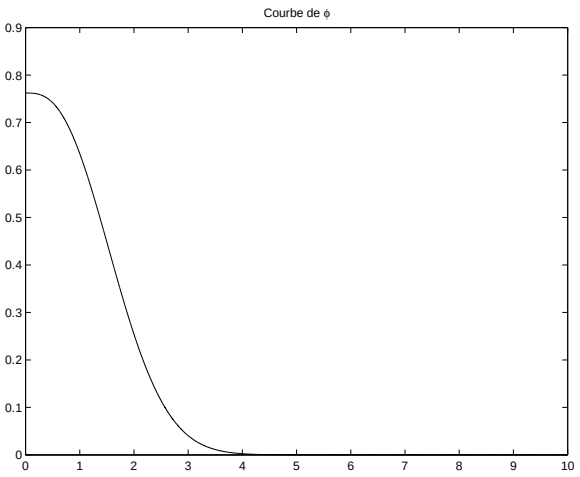


FIG. 2.3 – Profil de la fonction construite à partir d'une suite à termes strictement positifs.

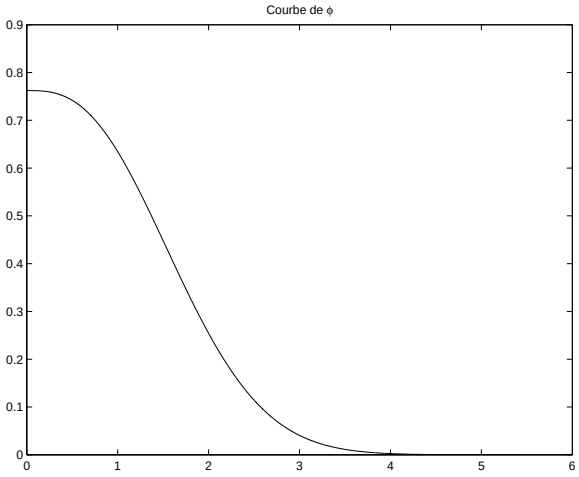


FIG. 2.4 – Profil de la fonction construite à partir d'une suite prenant des valeurs négatives.

À l'aide de cet algorithme, nous avons précisé les décimales de Θ_0. Les Figures 2.3 et 2.4 montrent deux profils obtenus par la discrétisation (2.105). Pour la Figure 2.3, $\zeta = \sqrt{0.5901061}$, la suite initiale admettait un minimum strictement positif, correspondant à un coefficient $b_\zeta > 0$ dans (2.107), elle vérifiait des conditions de bord du type Neumann-Neumann et nous l'avons modifié de manière à obtenir une condition de Dirichlet.
Pour la Figure 2.4, $\zeta = \sqrt{0.5901062}$, la suite initiale devenait négative, ce qui correspondait à $b_\zeta < 0$ dans (2.107). Dans le Tableau 2.1, nous présentons partiellement les résultats obtenus par cette méthode en prenant un pas $h = \frac{1}{1000}$ et une longueur $a = 10$. La dernière ligne avant d'ajouter une décimale à ζ^2 correspond à une fonction $\phi_{\zeta,\text{app}}$ construite à partir d'une suite ayant des termes négatifs.
Par la suite, nous prendrons comme valeur de référence pour la fonction test ϕ_{app} que l'on a construite :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \zeta_{\text{app}} & = & 0.768183701, \\ \Theta_{\text{app}} & = & 0.590106125, \\ \phi_{\text{app}}(0) & = & 0.873043038, \\ \displaystyle\int_0^\infty (t-\zeta_{\text{app}})|\phi_{\text{app}}(t)|^2\,dt & = & 10^{-11}, \\ ||r_{\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)} & = & 2.07\ 10^{-3}. \end{array}\right. \tag{2.122}$$

Remarquons que nous avons allégé les notations en remplaçant les indices «ζ, app» par «app».

2.8 Estimations de la seconde valeur propre

Le Théorème 2.22 fait intervenir l'écart entre la première valeur propre et la seconde. Il s'agit donc d'estimer la deuxième valeur propre. Comme nous n'avons pas besoin d'une précision très importante, nous pouvons considérer la matrice A_ζ provenant de la discrétisation (2.105) pour ζ associé aux valeurs de référence (2.122), en rappelant que le pas de discrétisation est noté h, le

ζ^2	$\Theta_{\zeta,\mathrm{app}}$	$\phi_{\zeta,\mathrm{app}}(0)$	$\|\|r_{\zeta,\mathrm{app}}\|\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$
0.590	0.5932456852670082	0.8729080726253620	7.828967528858459
0.591	0.5910012857115640	0.8735844053400856	4.807412200712196
0.5901	0.5902728375631251	0.8730355212751598	1.859663997470614
0.5902	0.5901998344281739	0.8731059738173611	8.846370842784566e-01
0.59011	0.5901099240997547	0.8730458427135716	2.473009613459737e-01
0.590101	0.5902177506723484	0.8730379704727702	1.489520163705195
0.590102	0.5901905006620808	0.8730391892906680	1.286068218574237
0.590104	0.5901635204930050	0.8730404029699753	1.072904913770298
0.590105	0.5901368962230475	0.8730416099078846	0.7652539317986102
0.590106	0.5901109953029460	0.8730428043793262	0.3081293924696512
0.590107	0.5901069255074696	0.8730436497778891	1.054696828995575e-01
0.5901061	0.5901085040505266	0.8730429222783364	0.2272662986395110
0.5901062	0.5901061262509513	0.8730430386891964	4.779161688970666e-03
0.59010611	0.5901082573664618	0.8730429340327422	0.2156507234175355
0.59010612	0.5901080117570698	0.8730429457731109	0.2046608670989829
0.59010613	0.5901077660011254	0.8730429575105761	0.1809813091243599
0.59010614	0.5901075219180538	0.8730429692260689	0.1680878345172961
0.59010615	0.5901072788453032	0.8730429809398509	0.1542085575293023
0.59010616	0.5901070371122583	0.8730429926287046	0.1407770042310304
0.59010617	0.5901067968830588	0.8730430042940887	0.1236540877128084
0.59010618	0.5901065582165603	0.8730430159427802	9.337415458496112e-02
0.59010619	0.5901063230434505	0.8730430275526612	6.592962996146058e-02
0.59010620	0.5901061262509513	0.8730430386891964	4.779161688970666e-03
0.590106191	0.5901062998591846	0.8730430287067820	6.211456332166160e-02
0.590106192	0.5901062765522729	0.8730430298712399	5.786467564581505e-02
0.590106193	0.5901062536187134	0.8730430310198027	5.336702120429186e-02
0.590106194	0.5901062305140143	0.8730430321798996	4.830240934087172e-02
0.590106195	0.5901062076304571	0.8730430333356302	4.589862396208849e-02
0.590106196	0.5901061847899054	0.8730430344893685	3.464453348108101e-02
0.590106197	0.5901061622256089	0.8730430356416928	2.855716645652448e-02
0.590106198	0.5901061400643784	0.8730430367835175	1.695328064073501e-02
0.590106199	0.5901061252506952	0.8730430378446176	3.435092432631228e-03
0.5901061981	0.5901061378923063	0.8730430368979111	1.971327489821197e-02
0.5901061982	0.5901061356539389	0.8730430370157682	1.814312979849753e-02
0.5901061983	0.5901061334270354	0.8730430371322838	1.582740490592955e-02
0.5901061984	0.5901061312604363	0.8730430372468467	1.112031629942542e-02
0.5901061985	0.5901061290928760	0.8730430373617293	1.148693299227712e-02
0.5901061986	0.5901061270293176	0.8730430374719115	6.122673913206593e-03
0.5901061987	0.5901061249721004	0.8730430375843450	2.067533109298426e-03
0.5901061988	0.5901061250497996	0.8730430376730045	2.350502266719815e-03

TAB. 2.1 – Estimations liées au quasi-mode construit à partir de l'Algorithme 2.26.

nombre de points de discrétisation, n et l'indice d'une ligne de A_ζ, j, alors :

$$A_\zeta = \begin{pmatrix} \frac{1}{h^2}+\zeta^2 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+((j-1)h-\zeta)^2 & -\frac{1}{h^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2}+((n-1)h-\zeta)^2 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons une deuxième valeur propre $\mu_{2,\text{app}}(\zeta_0) = 3.316$. La Figure 2.5 donne la deuxième fonction propre et nous voyons clairement son unique zéro. De plus, nous pouvons calculer la norme du reste pour ce vecteur propre défini aux points jh interpolé en une fonction polynomiale de degré 2 par morceaux u_{app}, à l'aide des relations (2.112) et (2.113) en remplaçant ϕ_j^ζ par la j-ième coordonnée du vecteur propre. Nous avons alors :

$$||(H(\zeta) - \mu_2(\zeta_{\text{app}}))u_{\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)} = 0.65.$$

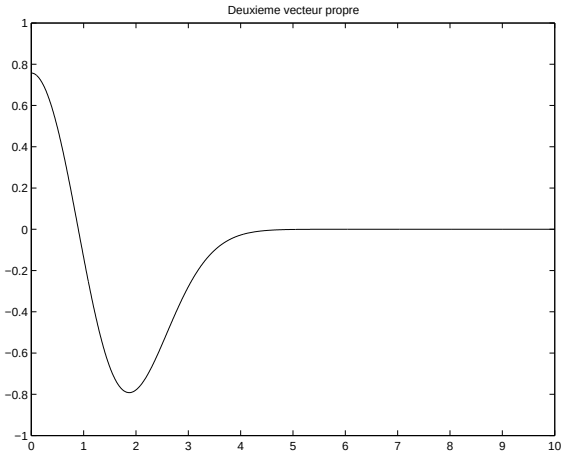


FIG. 2.5 – Profil de la deuxième fonction propre

Une deuxième méthode consiste à reprendre le problème (2.103) en remplaçant la première relation par :

$$H(\zeta)u = \mu_{2,\text{app}}(\zeta_0)u,$$

ce qui transforme le système discrétisé (2.105) en :

$$\begin{cases} u_0 &= 1, \\ u_1 &= 1, \\ u_{j+1} &= (2 + h^2((jh-\zeta)^2 - \mu_2(\zeta_{\text{app}})))u_j - u_{j-1}, \ \forall j = 1, \dots, n-1. \end{cases} \tag{2.123}$$

Nous allons déterminer la valeur de $\mu_{2,\text{app}}(\zeta_0)$ en regardant les annulations de la suite (u_j) construite. En effet, pour la première valeur propre, la fonction propre ne s'annule pas, pour la deuxième, elle s'annule une seule fois et pour la troisième, elle s'annule deux fois. Il s'agit donc de déterminer la valeur limite de $\mu_{2,\text{app}}(\zeta_0)$ pour laquelle il n'y a qu'un zéro. De cette manière, nous trouvons également $\mu_{2,\text{app}}(\zeta_0) \simeq 3.32$.

Nous pouvons ainsi en déduire une minoration de l'écart entre les deux premières valeurs propres Θ_0 et $\mu_2(\zeta_0)$.

Résultat numérique 2.27.

- $\mu_2(\zeta_0) \geq 3.3$.
- $\mu_2(\zeta_0) - \Theta_0 > 3.3 - 0.6 = 2.7$.

Grâce aux constructions précédentes, nous déduisons :

Résultat numérique 2.28.

$$0.59009 \leq \Theta_{\text{app}} - 10^{-5} \leq \Theta_0 \leq \Theta_{\text{app}} \leq 0.5901063, \tag{2.124}$$

$$0.858 \leq \phi(0) \leq 0.888. \tag{2.125}$$

Démonstration : Appliquons numériquement les résultats des Théorèmes 2.22 et 2.24 à l'aide des estimations (2.122) provenant du quasi-mode construit par différences finies ainsi que l'estimation du Résultat numérique 2.27. L'estimation de $\Theta_0 = 0.59010$ donnée par De Gennes [88] et la majoration de Θ_0 que nous avons obtenue permettent d'encadrer ζ_0 en notant que $\sqrt{0.5901} \simeq 0.7681796$ par défaut et $\sqrt{0.5901062} \simeq 0.768183702$ par excès. Par suite, les valeurs de référence associées au quasi-mode construit à l'aide de la méthode des différences finies et données en (2.122) conduisent aux estimations de $\zeta_{\text{app}} - \zeta_0$, ε_{app}, $\tilde{\varepsilon}_{\text{app}}$ et $\hat{\varepsilon}_{\text{app}}$ suivantes :

$$\begin{aligned} |\zeta_{\text{app}} - \zeta_0| &\leq 5\ 10^{-6}, \\ 0 \leq \varepsilon_{\text{app}} &\leq 2.07\ 10^{-3}, \\ 0 \leq \tilde{\varepsilon}_{\text{app}} &\leq 2.08\ 10^{-3}, \\ 0 \leq \hat{\varepsilon}_{\text{app}} &\leq 2.0910^{-3}. \end{aligned}$$

Ces majorations et la relation (2.59) permettent de déterminer cinq décimales de Θ_0 :

$$0.59009 \leq \Theta_{\text{app}} - 10^{-5} \leq \Theta_0 \leq \Theta_{\text{app}} \leq 0.5901063, \tag{2.126}$$

en adéquation avec les résultats de [88]. Les relations (2.60) et (2.61) donnent les majorations :

$$\begin{aligned} ||\phi - \phi_{\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)} &\leq 2.2\ 10^{-3}, \\ ||\phi' - \phi'_{\text{app}}||_{L^2(\mathbb{R}^+)} &\leq 5.08\ 10^{-2}. \end{aligned}$$

Utilisons l'estimation de $\phi(0) - \phi_{\text{app}}(0)$ du Théorème 2.24, alors :

$$0.858 \leq \phi(0) \leq 0.888. \tag{2.127}$$

□

Chapitre 3

Spectre essentiel

3.1 Propriétés élémentaires de l'opérateur de Schrödinger

3.1.1 Stabilité du spectre

Commençons par rappeler quelques propriétés usuelles de stabilité du spectre de $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ défini en (1.9).

Proposition 3.1 (Changement de jauge). *Soit $\phi \in H^2(\Omega)$. Alors, les opérateurs $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ et $P_{h,\mathcal{A}+\nabla\phi,\Omega}$ sont unitairement équivalents et ont ainsi le même spectre. De plus, u est un vecteur propre pour $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ si et seulement si $e^{i\frac{\phi}{h}}u$ est un vecteur propre pour $P_{h,\mathcal{A}+\nabla\phi,\Omega}$ et les valeurs propres associées sont identiques.*

Démonstration : Soit $\phi \in H^2(\Omega)$. Définissons la transformation unitaire U de $\mathcal{D}^N(P_{h,\mathcal{A},\Omega})$ à valeurs dans $\mathcal{D}^N(P_{h,\mathcal{A}+\nabla\phi,\Omega})$ qui à $u \in \mathcal{D}^N(P_{h,\mathcal{A},\Omega})$ associe la fonction $v \in \mathcal{D}^N(P_{h,\mathcal{A}+\nabla\phi,\Omega})$ définie par $v = e^{i\frac{\phi}{h}}u$. Ainsi, $UP_{h,\mathcal{A},\Omega} = P_{h,\mathcal{A}+\nabla\phi,\Omega}U$ et les deux opérateurs sont unitairement équivalents. □

Proposition 3.2 (Contribution des sous-domaines). *Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$. Alors pour tous ouverts disjoints $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ tels que $\overline{\Omega} = \overline{\bigcup_{k=1}^{N} \Omega_k}$, nous avons :*

$$\inf(\mu(\Omega_1), \ldots, \mu(\Omega_N)) \leq \mu(\Omega). \tag{3.1}$$

Démonstration : Effectuons une récurrence et commençons par traiter le cas de deux ouverts.
Raisonnons par l'absurde : supposons que $\mu(\Omega_1) > \mu(\Omega)$ et $\mu(\Omega_2) > \mu(\Omega)$.
Considérons un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\varepsilon + \mu(\Omega) < \inf(\mu(\Omega_1), \mu(\Omega_2)). \tag{3.2}$$

Par application du Principe du min-max 2.2 et définition de la borne inférieure, il existe une fonction normalisée $u \in H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)$ telle que :

$$\mu(\Omega) \leq \int_\Omega |\nabla_{\mathcal{A}} u|^2 \, dx \leq \mu(\Omega) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.3}$$

Si $\displaystyle\int_{\Omega_1} |u|^2 dx = 0$ alors u est nulle presque partout sur Ω_1, donc :

$$\mu(\Omega_2) \leq \frac{\displaystyle\int_{\Omega_2} |\nabla_{\mathcal{A}} u|^2 \, dx}{\displaystyle\int_{\Omega_2} |u|^2 \, dx} = \frac{\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla_{\mathcal{A}} u|^2 \, dx}{\displaystyle\int_{\Omega} |u|^2 \, dx} = \mu(\Omega). \tag{3.4}$$

Ceci est en contradiction avec l'hypothèse initiale.
Comme les rôles joués par Ω_1 et Ω_2 sont symétriques, nous supposons désormais $\int_{\Omega_1} |u|^2 dx$ et $\int_{\Omega_2} |u|^2 dx$ strictement positives. Par application du principe du min-max, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} |\nabla_{\mathcal{A}} u|^2 dx &\geq \mu(\Omega_1) \int_{\Omega_1} |u|^2 dx > (\mu(\Omega) + \varepsilon) \int_{\Omega_1} |u|^2 dx, \\ \text{et} \quad \int_{\Omega_2} |\nabla_{\mathcal{A}} u|^2 \, dx &\geq \mu(\Omega_2) \int_{\Omega_2} |u|^2 dx > (\mu(\Omega) + \varepsilon) \int_{\Omega_2} |u|^2 dx. \end{aligned}$$

Ajoutons ces deux relations :

$$\int_{\Omega} |\nabla_{\mathcal{A}} u|^2 dx > (\mu(\Omega) + \varepsilon) \int_{\Omega} |u|^2 dx = \mu(\Omega) + \varepsilon. \tag{3.5}$$

Ceci est en contradiction avec le choix de ε et u de la relation (3.3).
Supposons l'inégalité (3.1) démontrée pour N sous-domaines ($N \geq 2$). Donnons-nous $N+1$ sous-domaines disjoints de Ω tels que $\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{N+1} \overline{\Omega_k}$. Par hypothèse de récurrence, nous avons :

$$\inf(\mu(\Omega_1), \ldots, \mu(\Omega_{N-1}), \mu(\mathrm{int}(\overline{\Omega_N \cup \Omega_{N+1}}))) \leq \mu(\Omega). \tag{3.6}$$

En outre, $\inf(\mu(\Omega_N), \mu(\Omega_{N+1})) \leq \mu(\mathrm{int}(\overline{\Omega_N \cup \Omega_{N+1}}))$, ce qui nous fournit le résultat attendu. □
Regardons maintenant l'effet de la dilatation d'un domaine.

Remarque 3.3 (Domaines invariants par dilatation). *Pour des domaines Ω invariants par dilatation, le spectre de l'opérateur $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ avec $\mathcal{A}$ un potentiel magnétique à champ constant strictement positif B, se déduit de celui de $P_{1,\mathcal{A}_0,\Omega}$ par multiplication par hB.*

Démonstration : Considérons v une fonction du domaine de l'opérateur $\mathcal{D}^N(P_{1,\mathcal{A}_0,\Omega})$ et associons à v la fonction u de $\mathcal{D}^N(P_{h,\mathcal{A},\Omega})$ définie pour tout $x \in \Omega$ par $u(x) = v\left(\sqrt{\frac{B}{h}} x\right)$. Le changement de variables $y := \sqrt{\frac{B}{h}} x$ conduit à :

$$\left(h\nabla - iB \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}\right)^2 u(x) = hB \left(\nabla - i \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}\right)^2 v(y).$$

Ainsi, connaissant le spectre de $P_{1,\mathcal{A}_0,\Omega}$, nous déduisons celui de $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}$ en multipliant par hB. □
Intéressons-nous à l'effet de quelques transformations du domaine sur le bas du spectre.

Proposition 3.4 (Translation). *La réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger pour un champ magnétique constant, sur un domaine Ω est unitairement équivalent à celle obtenue sur le domaine Ω_t déduit de Ω par translation de vecteur t. De plus, u est un vecteur propre pour $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}$ si et seulement si $e^{i\frac{B}{2h}\cdot\wedge t}\, u(.-t)$ est un vecteur propre pour $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega_t}$ et les valeurs propres associées sont identiques.*

Démonstration : Translatons Ω d'un vecteur $t = (t_1, t_2)$, nous obtenons le domaine Ω_t :

$$\Omega_t := \{y \in \mathbb{R}^2 |\ y - t \in \Omega\}.$$

Définissons une transformation unitaire U_t sur $L^2(\Omega)$ à valeurs dans $L^2(\Omega_t)$ par :

$$\forall u \in L^2(\Omega), \forall y \in \Omega_t,\ (U_t u)(y) = e^{i\frac{B}{2h} y \wedge t}\, u(y - t). \tag{3.7}$$

Alors, il est facile de voir que pour toutes fonctions $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$:

$$P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega_t}(U_t u) = U_t P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega} u. \tag{3.8}$$

Donc les opérateurs $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}$ et $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega_t}$ sont unitairement équivalents. □

Proposition 3.5 (Rotation). *Le bas du spectre de la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger à champ magnétique constant, sur un domaine Ω reste inchangé si nous effectuons une rotation sur le domaine Ω. Les vecteurs propres se déduisent par changement de variables.*

Démonstration : Par changement de jauge, nous pouvons choisir le potentiel $\mathcal{A} = B\mathcal{A}_0$. Considérons $u \in H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)$ et notons u_1 la fonction u exprimée en coordonnées polaires. Remarquons que :

$$|(h\nabla - i\mathcal{A})u|^2 = |h\partial_\rho u_1|^2 + \frac{1}{\rho^2}\left|\left(h\partial_\phi + i\frac{B\rho^2}{2}\right)u_1\right|^2. \tag{3.9}$$

Considérons une rotation d'angle α du domaine Ω : $\Omega_r := \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 |\ (\rho, \theta-\alpha) \in \Omega\}$. Effectuons le changement de variables : $\theta = \phi + \alpha$. Définissons la fonction v_1 sur Ω_r en coordonnées polaires par $v_1(\rho,\theta) = u_1(\rho, \theta-\alpha)$. Notons v la fonction v_1 exprimée en coordonnées cartésiennes, alors $||u||_{L^2(\Omega)} = ||v||_{L^2(\Omega_r)}$ et $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) = q_{h,\mathcal{A},\Omega}(v)$. Par application du Principe du min-max 2.2, le bas du spectre de la réalisation de Neumann reste inchangé en effectuant une rotation sur le domaine Ω. En étant un peu plus précis, nous montrons que les opérateurs $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ et $P_{h,\mathcal{A},\Omega_r}$ sont unitairement équivalents. □

Proposition 3.6 (Symétrie). *Considérons un domaine Ω invariant par la symétrie T d'axe $\mathcal{D}$ d'équation $\sin\theta x_1 - \cos\theta x_2 = 0$. Si la réalisation de Neumann de l'opérateur $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}$ admet une plus petite valeur propre, alors il existe un vecteur propre u tel que :*

$$\forall x \in \Omega,\ u(x) = \overline{u(Tx)}. \tag{3.10}$$

Démonstration : Définissons les matrices A_0 telle que $\mathcal{A}_0(x) = A_0\ x$ et M de la symétrie T :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Alors tout point $x \in \Omega$ a pour image le point Mx par la symétrie T. Remarquons aussi que $M\ A_0\ M = -A_0$, ce qui implique que $M\ \mathcal{A}_0(T(x)) = \mathcal{A}_0(x)$. Définissons la transformation antilinéaire et unitaire U_s sur $L^2(\Omega)$ par :

$$\forall x \in \Omega,\ U_s u(x) = \overline{u(T(x))}. \tag{3.12}$$

Le changement de variables $y = Mx$ conduit à :

$$\begin{aligned}(h\nabla_x - iB\mathcal{A}_0(x))(U_s u(x)) &= \overline{(h\nabla_x + iB\mathcal{A}_0(x))(u(y))} \\ &= M\overline{(h\nabla_y - iB\mathcal{A}_0(y))(u(y))}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Par conséquent, en utilisant le fait que la matrice M^2 est l'identité, nous avons :

$$U_s P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega} = P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega} U_s. \tag{3.14}$$

Mais si l'opérateur admet une plus petite valeur propre μ_1 et que u est un vecteur propre normalisé associé, alors $U_s u$ est également un vecteur propre pour la valeur propre μ_1. Décomposons la fonction u sous la forme $u_1 + iu_2$ avec :

$$u_1 = \frac{u + U_s u}{2} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{i(U_s u - u)}{2}. \tag{3.15}$$

Alors, $U_s u_1 = u_1$ et $U_s u_2 = u_2$, par conséquent l'un des deux vecteurs au moins est non nul et est un vecteur propre U_s-invariant pour la valeur propre μ_1. □

Remarque 3.7. *Plaçons-nous dans un cadre plus général. Considérons un domaine Ω invariant par la symétrie T d'axe $\sin\theta(x_1 - x_1^0) - \cos\theta(x_2 - x_2^0) = 0$, ainsi qu'un potentiel magnétique $\mathcal{A}$ à champ constant B. Supposons que la réalisation de Neumann de l'opérateur $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ admet une plus petite valeur propre et considérons une fonction régulière ϕ telle que $\mathcal{A} + \nabla\phi = B\mathcal{A}_0$, alors nous pouvons trouver un vecteur propre u tel que :*

$$\forall x \in \Omega,\ u(x) = e^{-i\frac{B}{2h}(x - T(x)) \wedge x^0}\ e^{i(\phi(x+x^0) - \phi(T(x)+x^0))}\overline{u(Tx)}. \tag{3.16}$$

Remarque 3.8. *Nous allons utiliser cette propriété de symétrie à la Proposition 4.1 pour montrer que le bas du spectre de la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger sur des secteurs angulaires d'angles $\frac{\alpha}{2^k}$ est une valeur propre, ayant des informations sur le spectre pour le secteur angulaire d'angle α.*

3.1.2 Remarques de localisation

Pour justifier le comportement d'un vecteur propre, nous allons localiser l'état fondamental, soit à l'aide d'une fonction de troncature, soit en la multipliant par une exponentielle. Rappelons deux lemmes concernant cet effet localisant.

Lemme 3.9. *Soit $u \in \mathcal{D}^N(P_{h,\mathcal{A},\Omega})$ et ϕ une fonction uniformément lipschitzienne sur Ω, alors :*

$$\mathrm{Re}\left\langle e^{2\frac{\phi}{\sqrt{h}}} P_{h,\mathcal{A},\Omega} u, u \right\rangle_{L^2(\Omega)} = q_{h,\mathcal{A},\Omega}\left(e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u\right) - h|| \ |\nabla\phi|\ e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.17}$$

Démonstration : Soit $u \in \mathcal{D}^N(P_{h,\mathcal{A},\Omega})$ et ϕ une fonction uniformément lipschitzienne sur Ω, alors une intégration par parties permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\langle P_{h,\mathcal{A},\Omega} u, e^{2\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \mathrm{Re}\left\langle \left(\frac{h}{i}\nabla - \mathcal{A}\right) u, \left(\frac{h}{i}\nabla - \mathcal{A}\right) e^{\frac{2\phi}{\sqrt{h}}} u \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\langle \left(\frac{h}{i}\nabla - \mathcal{A}\right) e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u, \left(\frac{h}{i}\nabla - \mathcal{A}\right) e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u \right\rangle_{L^2(\Omega)} - h \left|\left| \ |\nabla\phi| e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u \right|\right|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= q_{h,\mathcal{A},\Omega}\left(e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u\right) - h \left|\left| \ |\nabla\phi|\ e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u \right|\right|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.10. *Soit $\chi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, alors pour tout $u \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega)$:*

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi u) = \int_\Omega |\chi|^2 |(h\nabla - i\mathcal{A})u|^2\ dx + \frac{h}{2}\int_\Omega \nabla|\chi|^2 |u|^2\ dx + h^2 \int_\Omega |\nabla\chi|^2 \nabla|u|^2\ dx. \tag{3.18}$$

De plus, si $u \in \mathcal{D}^N(P_{h,\mathcal{A},\Omega})$, *alors :*

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi u) = \text{ Re } \left\langle \chi^2 P_{h,\mathcal{A},\Omega} u, u \right\rangle_{L^2(\Omega)} + h^2 || \ |\nabla \chi| u||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.19}$$

Soit (χ_j) *une partition réelle quadratique localement finie de l'unité de* $\mathbb{R}^2$, *alors :*

$$\forall u \in H^1_{h,\mathcal{A},\Omega}(\Omega), \ q_{h,\mathcal{A}}(u) = \sum_j q_{h,\mathcal{A}}(\chi_j u) - h^2 \sum_j ||u \ |\nabla \chi_j| \ ||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.20}$$

Démonstration : Remarquons que :

$$\begin{aligned} |(h\nabla - i\mathcal{A})(\chi u)|^2 &= |\chi(h\nabla - i\mathcal{A})u + hu\nabla\chi|^2 \\ &= |\chi|^2 |(h\nabla - i\mathcal{A})u|^2 + 2h \text{ Re } \chi(h\nabla - i\mathcal{A})u\overline{\nabla\chi}\overline{u} + h^2|\nabla\chi|^2|u|^2 \\ &= |\chi|^2|(h\nabla - i\mathcal{A})u|^2 + \frac{h}{2}\nabla|\chi|^2\nabla|u|^2 + h^2|\nabla\chi|^2|u|^2. \end{aligned}$$

Pour justifier (3.19), il suffit de reprendre la démonstration du Lemme 3.9 en remplaçant $e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}}$ par χ, de choisir $\chi = \chi_j$ et de sommer pour tous les indices j :

$$\sum_j q_{h,\mathcal{A}}(\chi_j u) = \sum_j \int_\Omega |\chi_j|^2 \ |h\nabla u - i\mathcal{A}u|^2 \ dx + \sum_j \int_\Omega h^2|u|^2 \ |\nabla\chi_j|^2 \ dx + \frac{h}{2}\int_\Omega \sum_j \nabla|\chi_j|^2\nabla|u|^2 \ dx. \tag{3.21}$$

Mais χ_j est réelle et $\sum_j \nabla|\chi_j|^2 = \nabla \sum_j |\chi_j|^2 = 0$, le dernier terme de (3.21) est donc nul. □

3.2 Généralisation du Lemme de Persson

Nous souhaitons obtenir des renseignements sur le bas du spectre de l'opérateur de Schrödinger avec potentiels magnétique $\mathcal{A}$ régulier et un potentiel V semi-borné inférieurement et infiniment dérivable dans un domaine non borné et plus précisément dans les domaines à coin. Quitte à remplacer V par $V + cst$, nous supposerons $V \geq 1$ sur le domaine Ω.
Étudions la réalisation de Neumann de $-\Delta_\mathcal{A} + V$ à partir de $C_0^\infty(\overline{\Omega})$. La forme associée à $-\nabla^2_\mathcal{A} + V$ est semi-bornée inférieurement et symétrique, le domaine de forme est $H^1_{\mathcal{A},V}(\Omega)$ où :

$$H^1_{\mathcal{A},V}(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) | \ |\nabla_\mathcal{A} u| \in L^2(\Omega), \sqrt{V}u \in L^2(\Omega)\}.$$

La forme sesquilinéaire associée à l'opérateur $-\Delta_\mathcal{A} + V$ permet de définir une norme sur $H^1_{\mathcal{A},V}(\Omega)$ par :

$$\forall u \in H^1_{\mathcal{A},V}(\Omega), \ ||u||^2_{H^1_{\mathcal{A},V}(\Omega)} = ||Vu||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla_\mathcal{A} u||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.22}$$

Notant $H^2_{\mathcal{A},V}(\Omega) := \{u \in H^1_{\mathcal{A},V}(\Omega) | \ |\nabla_\mathcal{A} u|^2 \in L^2(\Omega), \sqrt{V}u \in L^2(\Omega)\}$, l'opérateur $-\Delta_\mathcal{A} + V$ est défini sur $\mathcal{D}^N(-\Delta_\mathcal{A} + V) := \{u \in H^2_{\mathcal{A},V}(\Omega) | \ \nu \cdot \nabla_\mathcal{A} u_{|\Gamma} = 0\}$. Le bas du spectre de $-\Delta_\mathcal{A} + V$ est noté $\mu_1(-\Delta_\mathcal{A} + V)$; son expression est donnée par le principe du min-max rappelé au Théorème 2.2. Nous allons présenter un résultat donnant une expression du bas du spectre essentiel, basé sur les travaux de [85, 1, 57].
Nous notons $C_0^\infty(\overline{\Omega} \cap \complement S_r)$ les restrictions à Ω de fonctions infiniment dérivables à support compact hors de la boule $S_r \cap \Omega$, avec $S_r = \mathcal{B}(0, r)$ la boule de rayon r.

Théorème 3.11. *Soit Ω un domaine non borné de $\mathbb{R}^2$ à bord lipschitzien. Alors le bas du spectre essentiel de la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta_{\mathcal{A}} + V$ est donné par :*

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta_{\mathcal{A}} + V) = \Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V), \tag{3.23}$$

où

$$\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V) = \lim_{r \to +\infty} \Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, r), \tag{3.24}$$

$$\text{et } \Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, r) := \inf_{\phi \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \cap \complement S_r), \phi \neq 0} \left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla_{\mathcal{A}} \phi(x)|^2 + V(x) |\phi(x)|^2 \right) \, dx}{\displaystyle\int_\Omega |\phi(x)|^2 \, dx} \right\}. \tag{3.25}$$

Corollaire 3.12. *Sous les hypothèses du Théorème 3.11, le bas du spectre essentiel s'exprime :*

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta_{\mathcal{A}} + V) = \sup_{\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2} \left[\inf_{||\phi||_{L^2(\Omega)} = 1, \phi \neq 0} \left\{ \int_\Omega \left(|\nabla_{\mathcal{A}} \phi|^2 + V |\phi|^2 \right) \, dx, \ \phi \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \cap \complement \mathcal{K}) \right\} \right],$$

la borne supérieure étant prise sur tous les compacts $\mathcal{K}$ inclus dans $\mathbb{R}^2$.

Remarque 3.13. *La fonction $r \mapsto \Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, r)$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et admet une limite notée $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V)$ dans $]0, +\infty]$.*

Démonstration : Pour justifier la croissance de la fonction $r \mapsto \Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, r)$, il suffit de prolonger une fonction $\phi \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \cap \complement S_r)$ par 0 sur $\Omega \cap \complement S_{r'}$ où $r' < r$.
Distinguons maintenant deux cas selon que $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, .)$ est bornée ou non :
– Si la fonction $r \mapsto \Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, r)$ est bornée, alors elle admet un plus petit majorant noté M. Comme $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, r)$ est positive, M l'est aussi. Donnons-nous $\varepsilon > 0$, alors, par définition de M, il existe $R \in \mathbb{R}^+$ tel que $M - \varepsilon < \Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, R)$. Mais la fonction $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, .)$ est croissante donc pour tout $r > R$:

$$M - \varepsilon < \Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, R) \leq \Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, r) \leq M, \tag{3.26}$$

ce qui signifie en particulier que $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, r)$ converge vers M quand r tend vers $+\infty$.
– Si $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, .)$ n'est pas bornée, alors elle tend vers l'infini.
Donc la limite de $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, r)$, quand $r \to +\infty$, existe (dans $]0, +\infty]$). □

Commençons par citer un lemme relatif aux suites de Weyl qui permettent de caractériser les éléments du spectre essentiel.

Lemme 3.14. *Soit (u_n) une suite de Weyl pour l'opérateur $-\Delta_{\mathcal{A}} + V$, alors pour tout borné K de Ω, la suite (u_n) converge fortement vers 0 dans $L^2(K)$.*

Démonstration : Soit (u_n) une suite de Weyl, elle est donc dans $\mathcal{D}^N(-\Delta_{\mathcal{A}} + V)$ et vérifie :

1. $||u_n||_{L^2(\Omega)} = 1$,
2. $u_n \rightharpoonup 0$,
3. $||(-\Delta_{\mathcal{A}} + V)u_n - \lambda u_n||_{L^2(\Omega)} \to 0$.

Montrons alors que pour tout domaine borné $K \subset \Omega$, la suite u_n converge fortement vers 0 dans $L^2(K)$. Donnons-nous un domaine borné $K \subset \Omega$, alors il existe un réel $r \geq 0$ tel que K soit contenu dans le disque S_r de rayon r de Ω, ce qui implique $\int_K |u_n|^2 \, dx \leq \int_{S_r} |u_n|^2 \, dx$: il suffit ainsi de montrer que u_n converge vers 0 dans $L^2(S_r)$ pour tout $r > 0$.

Selon l'hypothèse (3) relative à la suite u_n, pour n assez grand, $||(-\Delta_{\mathcal{A}}+V)u_n-\lambda u_n||_{L^2(\Omega)} \leq 1$. De plus, la suite u_n est normalisée, comme (1) le rappelle, donc :

$$\langle(-\Delta_{\mathcal{A}}+V)u_n,u_n\rangle-\lambda \;=\; \langle(-\Delta_{\mathcal{A}}+V)u_n-\lambda u_n,u_n\rangle \leq ||(-\Delta_{\mathcal{A}}+V)u_n-\lambda u_n||_{L^2(\Omega)},$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz. Il existe donc un entier N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$,

$$\langle(-\Delta_{\mathcal{A}}+V)u_n,u_n\rangle-\lambda \leq 1. \tag{3.27}$$

Or $u_n \in \mathcal{D}^N(-\Delta_{\mathcal{A}}+V)$, donc par l'intégration par parties :

$$\langle(-\Delta_{\mathcal{A}}+V)u_n,u_n\rangle = ||\nabla_{\mathcal{A}}u_n||^2_{L^2(\Omega)}+\int_\Omega V|u_n|^2\,dx.$$

L'inégalité (3.27) permet de déduire :

$$||\nabla_{\mathcal{A}}u_n||^2_{L^2(\Omega)}+||u_n||^2_{L^2(\Omega)} \leq \lambda+2-\int_\Omega V|u_n|^2\,dx \leq \lambda+2. \tag{3.28}$$

Donc en particulier, pour tout $r \geq 0$,

$$||\nabla_{\mathcal{A}}u_n||^2_{L^2(\Omega\cap S_r)}+||u_n||^2_{L^2(\Omega\cap S_r)} \leq \lambda+2. \tag{3.29}$$

Mais le domaine S_r est borné donc les normes associées aux espaces $H^1(\Omega\cap S_r)$ et $H^1_{\mathcal{A},V}(\Omega\cap S_r)$ sont équivalentes car le potentiel magnétique $\mathcal{A}$ et le potentiel V sont bornés sur ce domaine borné $\Omega\cap S_r$ donc il existe une constante C indépendante de n telle que $||u_n||^2_{H^1(\Omega\cap S_r)} \leq C(\lambda+2)$. Or $S_r\cap\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à bord lipschitzien donc l'injection de $H^1_{\mathcal{A},V}(\Omega\cap S_r)$ dans $L^2(\Omega\cap S_r)$ est compacte, alors il existe une sous-suite $u_{n'}$ de u_n qui converge fortement dans $L^2(\Omega\cap S_r)$. Mais d'après la condition (2) sur la suite de Weyl, la sous-suite $u_{n'}$ converge en outre faiblement vers 0. Par conséquence, $u_{n'}$ converge vers 0 dans $L^2(\Omega\cap S_r)$.
Montrons que la suite u_n toute entière tend vers 0 dans $L^2(\Omega\cap S_r)$ en raisonnant par l'absurde. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait $\varepsilon>0$ et une sous-suite $u_{\phi(n)}$ telle que $||u_{\phi(n)}||_{L^2(\Omega\cap S_r)} \geq \varepsilon$. Mais comme $u_{\phi(n)}$ est une sous-suite de u_n, elle est bornée dans $H^1(\Omega\cap S_r)$ et par injection compacte, elle admet une sous-suite convergeant dans $L^2(\Omega\cap S_r)$ et par convergence faible vers 0, cette limite est nécessairement 0, ce qui contredit le fait que sa norme dans $L^2(\Omega\cap S_r)$ est minorée par $\varepsilon>0$. Ainsi, pour tout domaine borné $K\subset\Omega$, u_n converge vers 0 dans $L^2(K)$. □

Démonstration du Théorème 3.11 : Première inégalité : $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}}+V) \leq \inf\sigma_{ess}(-\Delta_{\mathcal{A}}+V)$.
Soit $\lambda\in\sigma_{ess}(-\Delta_{\mathcal{A}}+V)$, montrons que pour tout $r>0$, $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}}+V,r) \leq \lambda$ en utilisant le Lemme 3.14. Soient $\rho>r>0$ deux réels. Considérons une suite de Weyl associée à l'élément λ du spectre essentiel et localisons cette suite en dehors d'une boule $S_r\cap\Omega$ à l'aide d'une fonction de troncature $\chi\in C^\infty(\Omega,[0,1])$ telle qu'il existe une constante C vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{lcll}\chi(x) & = & 1 & \text{sur } \Omega\cap\complement S_\rho,\\ \chi(x) & = & 0 & \text{sur } \Omega\cap S_r,\\ |\nabla\chi| & \leq & C & \text{sur } \Omega.\end{array}\right. \tag{3.30}$$

Écrivant :

$$\nabla_{\mathcal{A}}(\chi u_n)=\chi\nabla_{\mathcal{A}}u_n+u_n\nabla\chi, \tag{3.31}$$

nous déduisons, par hypothèse sur χ, que $\chi u_n\in H^1_{\mathcal{A},V}(\Omega)$ et $\mathrm{supp}(\chi u_n)\in\Omega\cap\complement S_r$. Montrons que $||\nabla_{\mathcal{A}}(\chi u_n)||^2_{L^2(\Omega)}+\int_\Omega V|\chi u_n|^2\,dx \leq \lambda||\chi u_n||^2_{L^2(\Omega)}+\circ(1)$. Donnons-nous un $\varepsilon\in]0,1[$. Par inégalité triangulaire et grâce à la relation (3.31), nous avons :

$$||\nabla_{\mathcal{A}}(\chi u_n)||_{L^2(\Omega)} \;\leq\; ||\chi\nabla_{\mathcal{A}}u_n||_{L^2(\Omega)}+||u_n|\nabla\chi|\,||_{L^2(\Omega)}. \tag{3.32}$$

Comme χ est constante sur $\Omega \setminus S_\rho$, son gradient y est nul, donc :

$$\int_\Omega |u_n(x)|^2 |\nabla\chi(x)|^2 dx = \int_{S_\rho} |u_n(x)|^2 |\nabla\chi(x)|^2 dx \leq C^2 \int_{S_\rho} |u_n(x)|^2 dx. \tag{3.33}$$

Le Lemme 3.14 montre que u_n converge vers 0 dans $L^2(S_\rho)$, il existe ainsi N_0 tel que pour $n \geq N_0$, $\int_{S_\rho} |u_n|^2 \, dx \leq \frac{\varepsilon}{2C^2}$. Il reste à majorer $\int_\Omega |\chi|^2 \left(|\nabla_{\mathcal{A}} u_n|^2 + V|u_n|^2\right) dx$ par $\int_\Omega \left(|\nabla_{\mathcal{A}} u_n|^2 + V|u_n|^2\right) dx$ et d'utiliser les propriétés (3) et (1) de la suite u_n : il existe un $N_1 \geq N_0$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $||\nabla_{\mathcal{A}}(u_n)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega V|u_n|^2 \, dx \leq \lambda + \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquence, pour $n \geq N_1$:

$$||\nabla_{\mathcal{A}}(\chi u_n)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega V|u_n|^2 \, dx \leq \lambda + \varepsilon. \tag{3.34}$$

Comme nous l'avons vu au Lemme 3.14, u_n converge vers 0 dans $L^2(K)$ pour tout domaine borné $K \subset \Omega$ mais u_n est de norme 1 dans $L^2(\Omega)$, alors $||\chi u_n||_{L^2(\Omega)}$ converge vers 1 donc il existe $N_2 \geq N_1$ tel que pour tout $n \geq N_2$, nous majorons $\frac{1}{||\chi u_n||^2_{L^2(\Omega)}}$ par $1 + \varepsilon$. Reprenons (3.34), alors il existe une constante C indépendante de ε telle que pour $n \geq N_2$:

$$\frac{||\nabla_{\mathcal{A}}(\chi u_n)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega V|\chi u_n|^2 \, dx}{||\chi u_n||^2_{L^2(\Omega)}} \leq \lambda + C\varepsilon. \tag{3.35}$$

L'application du Principe du min-max 2.2 et la définition de $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, r)$ conduisent à :

$$\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, r) \leq \lambda + C\varepsilon. \tag{3.36}$$

Choisissons ε arbitrairement petit, alors $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, r) \leq \lambda$. Il suffit enfin de prendre la limite quand $r \to +\infty$ et de passer à la borne inférieure sur les éléments λ du spectre essentiel. □

Démonstration : Deuxième inégalité : $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_{\mathcal{A}} + V) \leq \Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V)$.
Soit $\mu < \inf \sigma_{ess}(-\Delta_{\mathcal{A}} + V)$. Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R_\varepsilon > 0$ tel que $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}} + V, R_\varepsilon) \geq \mu - \mathcal{O}(\varepsilon)$.
Notons a la forme sesquilinéaire associée à l'opérateur $-\Delta_{\mathcal{A}} + V$.
Soit $E_{]-\infty,\mu]}$ le projecteur spectral. Le choix de μ permet d'éviter le spectre essentiel, donc il existe un système orthonormal fini de vecteurs propres tel que :

$$E_{]-\infty,\mu]} = \sum_i \langle ., \chi_i \rangle \, \chi_i. \tag{3.37}$$

Comme $|E_{]-\infty,\mu]}\chi|^2(x) = \sum_i |\langle \chi, \chi_i \rangle|^2 |\chi_i(x)|^2 \leq ||\chi||^2_{L^2(\Omega)} \sum_i |\chi_i(x)|^2$ pour tout $x \in \Omega$ et que la somme est finie, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe R_ε tel que :

$$\forall \chi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}), \int_{|x| \geq R_\varepsilon} |E_{]-\infty,\mu]}\chi|^2(x) dx \leq \varepsilon ||\chi||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.38}$$

Appliquons la majoration (3.38) aux fonctions $\chi \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \cap \complement S_{R_\varepsilon})$, il vient :

$$||E(\mu)\chi||^2_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon ||\chi||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.39}$$

En utilisant les propriétés des projecteurs spectraux, alors pour tout $\chi \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \cap \complement S_{R_\varepsilon})$:

$$a(\chi, \chi) = a(E(\mu)\chi, E(\mu)\chi) + a((I - E(\mu))\chi, (I - E(\mu))\chi). \tag{3.40}$$

Or, la forme $a(E(\mu)\chi, E(\mu)\chi)$ est positive et l'application du principe du min-max et la définition de $E(\mu)$, permet de minorer $a((I-E(\mu))\chi,(I-E(\mu))\chi)$ par $\mu||(I-E(\mu))\chi||^2$, donc, pour toute fonction $\chi \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \cap \complement S_{R_\varepsilon})$:

$$a(\chi,\chi) \geq \mu||(I-E(\mu))\chi||^2. \tag{3.41}$$

Comparons $||(I-E(\mu))\chi||^2_{L^2(\Omega)}$ et $||\chi||^2_{L^2(\Omega)}$. Nous savons que :

$$||(I-E(\mu))\chi||^2_{L^2(\Omega)} = ||\chi||^2_{L^2(\Omega)} - ||E(\mu)\chi||^2_{L^2(\Omega)},$$

donc en utilisant la relation (3.39), nous minorons $||(I-E(\mu))\chi||^2_{L^2(\Omega)}$ par $(1-\varepsilon)||\chi||^2_{L^2(\Omega)}$. Utilisons cette minoration avec la relation (3.41), alors pour toute fonction $\chi \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \cap \complement S_{R_\varepsilon})$:

$$\frac{a(\chi,\chi)}{||\chi||^2_{L^2(\Omega)}} \geq \mu(1-\varepsilon). \tag{3.42}$$

La définition de $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}}+V, R_\varepsilon)$ donne :

$$\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}}+V) \geq \Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}}+V, R_\varepsilon) \geq \mu(1-\varepsilon). \tag{3.43}$$

Prenons la limite quand $\varepsilon \to 0$, alors $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}}+V) \geq \mu$. Puis faisons tendre μ vers $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_{\mathcal{A}}+V)$, alors :

$$\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}}+V) \geq \inf \sigma_{ess}(-\Delta_{\mathcal{A}}+V).$$

□

3.3 Bas du spectre essentiel pour un secteur angulaire de $\mathbb{R}^2$

Proposition 3.15. *Le bas du spectre essentiel de l'opérateur $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$, pour $\alpha \in]0,2\pi]$, vaut Θ_0, défini à la Proposition 2.12 :*

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}) = \Theta_0 = \mu(\pi). \tag{3.44}$$

Démonstration : La démonstration se base sur le Théorème 3.11 et une partition de l'unité qui ramènera l'étude du spectre essentiel à celle des opérateurs modèles définis sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Nous allons montrer que la suite $\Sigma(P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}, r)$ converge vers Θ_0 quand r tend vers l'infini en deux étapes :

- Nous allons construire une partition de l'unité qui coupe le secteur angulaire Ω_α d'angle α en trois secteurs et étudier la forme sesquilinéaire sur chacun de ces secteurs. Par application du principe du min-max, nous montrerons ainsi que $\Sigma(P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}, r)$ est supérieur à Θ_0 à un terme en $\frac{1}{r^2}$ près.
- Nous construirons ensuite une fonction $\phi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}_\alpha \cap \complement S_r)$ telle que $\frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}}{||\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}} \leq \Theta_0 + \varepsilon$.

Commençons par établir la minoration.
Considérons une fonction $\tilde{\chi}$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$, infiniment dérivable telle que :

$$\begin{cases} \tilde{\chi}(\rho) &= 0 \quad \text{si } \rho \leq 0, \\ \tilde{\chi}(\rho) &= 1 \quad \text{si } \rho \geq 1. \end{cases} \tag{3.45}$$

La multiplication d'une fonction donnée par une dilatée de $\tilde{\chi}$ donne une nouvelle fonction à support en dehors d'un disque et localise ainsi au voisinage de l'infini.
Construisons une partition de l'angle. Soient $(\hat{\chi}_j)_{j=1,2,3} \in C_0^\infty\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],[0,1]\right)$ telles que :

$$\begin{cases} \operatorname{supp}\hat{\chi}_j \subset \left[\frac{j-3}{4},\frac{j-1}{4}\right], \ j=1,2,3, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \hat{\chi}_j^2(\theta) = 1, \ \forall\theta \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]. \end{cases} \tag{3.46}$$

Définissons les fonctions de troncature en coordonnées polaires :

$$\forall(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^+\times\left]-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right[,\ \chi_j^{r,\alpha,\mathrm{pol}}(\rho,\theta)=\tilde{\chi}\left(\frac{\rho}{r}\right)\hat{\chi}_j\left(\frac{\theta}{\alpha}\right),\ j=1,2,3, \tag{3.47}$$

ainsi que les fonctions associées en coordonnées cartésiennes. Pour tout $(x_1,x_2)\in\Omega_\alpha$ de coordonnées polaires (ρ,θ) :

$$\chi_j^{r,\alpha,}(x_1,x_2) \quad = \quad \chi_j^{r,\alpha,\mathrm{pol}}(\rho,\theta). \tag{3.48}$$

Rappelons que nous souhaitons estimer $\inf\limits_{\phi\in C_0^\infty(\overline{\Omega}_\alpha\cap\complement S_r),\phi\neq 0}\dfrac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}}{||\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}}$. Considérons donc, ϕ, une fonction non nulle de $C_0^\infty(\overline{\Omega}_\alpha\cap\complement S_r)$. La construction des fonctions $\tilde{\chi}$ et $\hat{\chi}_j$ montre que :

$$\sum_{j=1}^{3}\left|\chi_j^{r,\alpha}\right|^2\phi=\phi \text{ sur } \overline{\Omega}_\alpha\cap\complement S_r. \tag{3.49}$$

De plus, d'après le Lemme 3.10 :

$$||\nabla_{\mathcal{A}_0}\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}=\sum_{j=1}^{3}||\nabla_{\mathcal{A}_0}(\chi_j^{r,\alpha}\phi)||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}-\sum_{j=1}^{3}||\phi\nabla\chi_j^{r,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}. \tag{3.50}$$

Évaluons chaque terme de (3.50). Pour cela, nous estimons $\int_{\Omega_\alpha}|\phi(x)|^2|\nabla\chi_j^{r,\alpha}(x)|^2\ dx$, pour $j=$ 1, 2, 3. Le changement de variables montre, d'après l'expression (3.47) de $\chi_j^{r,\alpha,\mathrm{pol}}$, que :

$$\begin{aligned}|\nabla\chi_j^{r,\alpha}(x_1,x_2)|^2 &= |\partial_\rho\chi_j^{r,\alpha,\mathrm{pol}}(\rho,\theta)|^2+\frac{1}{\rho^2}|\partial_\theta\chi_j^{r,\alpha,\mathrm{pol}}(\rho,\theta)|^2\\ &= \frac{1}{r^2}\left|\tilde{\chi}'\left(\frac{\rho}{r}\right)\hat{\chi}_j\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)\right|^2+\frac{1}{\alpha^2\rho^2}\left|\tilde{\chi}\left(\frac{\rho}{r}\right)\hat{\chi}_j'\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)\right|^2.\end{aligned} \tag{3.51}$$

Considérons les estimations provenant des hypothèses (3.45) et (3.46) sur les fonctions $\tilde{\chi}$ et $\hat{\chi}_j$, il existe une constante $C_0>0$ indépendante de α et de j telle que :

$$\forall(x_1,x_2)\in\Omega_\alpha,\ |\nabla\chi_j^{r,\alpha}(x_1,x_2)|^2 \quad \leq \quad \frac{C_0}{\alpha^2r^2}. \tag{3.52}$$

Cette estimation permet d'évaluer le second terme de (3.50) :

$$\sum_{j=1}^{3}||\phi\nabla\chi_j^{r,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} \quad \leq \quad \frac{C}{\alpha^2r^2}\int_{\Omega_\alpha}|\phi(x)|^2\ dx. \tag{3.53}$$

Reportant cette estimation dans (3.50), nous obtenons une minoration de $||\nabla_{\mathcal{A}_0}\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}$ par :

$$||\nabla_{\mathcal{A}_0}\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} \quad \geq \quad \sum_{j=1}^{3}||\nabla_{\mathcal{A}_0}(\chi_j^{r,\alpha}\phi)||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}-\frac{C}{\alpha^2r^2}||\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}. \tag{3.54}$$

Nous allons maintenant minorer les termes $||\nabla_{\mathcal{A}_0}(\chi_j^{r,\alpha}\phi)||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}$ pour $j=1,\ 2,\ 3$. La construction des fonctions $\chi_j^{r,\alpha}$ permet de prolonger les fonctions $\chi_j^{r,\alpha}\phi$ et se référer aux modèles sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Définissons la fonction $\chi_1^{r,\alpha}\phi$ sur le demi-plan $\mathcal{P}_1:=\{x\in\mathbb{R}^2|x_2\geq-\tan\frac{\alpha}{2}\ x_1\}$ en la prolongeant par 0 en dehors du support de $\chi_1^{r,\alpha}\phi$. Alors $\chi_1^{r,\alpha}\phi\in C_0^\infty(\overline{\mathcal{P}_1})$ et par rotation d'angle $\frac{\alpha}{2}$, nous nous

ramenons au demi-plan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ et par application du principe du min-max, nous aboutissons à la minoration :

$$\begin{aligned}\frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}(\chi_1^{r,\alpha}\phi)||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}}{||\chi_1^{r,\alpha}\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}} &= \frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}(\chi_1^{r,\alpha}\phi)||^2_{L^2(\mathcal{P}_1)}}{||\chi_1^{r,\alpha}\phi||^2_{L^2(\mathcal{P}_1)}}\\ &\geq \inf_{\psi\in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}),\psi\neq 0}\frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}\psi||^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}}{||\psi||^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}}=\Theta_0. \end{aligned}\tag{3.55}$$

De même, nous prolongeons la fonction $\chi_3^{r,\alpha}\phi$ par zéro au demi-plan $\mathcal{P}_2:=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|\ x_2\leq \tan\frac{\alpha}{2}\ x_1\}$. Par rotation d'angle $\pi-\frac{\alpha}{2}$, nous nous ramènons au demi-plan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ et donc :

$$\begin{aligned}\frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}(\chi_3^{r,\alpha}\phi)||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}}{||\chi_3^{r,\alpha}\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}} &= \frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}(\chi_3^{r,\alpha}\phi)||^2_{L^2(\mathcal{P}_2)}}{||\chi_3^{r,\alpha}\phi||^2_{L^2(\mathcal{P}_2)}}\\ &\geq \inf_{\psi\in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}),\psi\neq 0}\frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}\psi||^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}}{||\psi||^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}}=\Theta_0. \end{aligned}\tag{3.56}$$

Quant à la fonction $\chi_2^{r,\alpha}\phi$, nous la définissons sur $\mathbb{R}^2$ en la prolongeant par zéro en dehors de Ω_α. Comme précédemment, nous déduisons du principe du min-max :

$$\begin{aligned}\frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}(\chi_2^{r,\alpha}\phi)||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}}{||\chi_2^{r,\alpha}\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}} &= \frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}(\chi_2^{r,\alpha}\phi)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{||\chi_2^{r,\alpha}\phi||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}}\\ &\geq \inf_{\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),\psi\neq 0}\frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}\psi||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{||\psi||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}}=1. \end{aligned}\tag{3.57}$$

Regroupons les relations (3.55), (3.56) et (3.57), il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^3||\nabla_{\mathcal{A}_0}(\chi_j^{r,\alpha}\phi)||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} &\geq \Theta_0||\chi_1^{r,\alpha}\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}+||\chi_2^{r,\alpha}\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}+\Theta_0||\chi_3^{r,\alpha}\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}\\ &\geq \Theta_0\int_{\Omega_\alpha}\sum_{j=1}^3|\chi_j^{r,\alpha}|^2\ |\phi|^2\ dx\\ &\geq \Theta_0||\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}. \end{aligned}\tag{3.58}$$

Nous avons utilisé le fait que $\Theta_0<1$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^3|\chi_j^{r,\alpha}|^2=1$. Injectons (3.58) dans (3.54), alors :

$$\forall\phi\in C_0^\infty(\overline{\Omega}_\alpha\setminus S_r),\ \phi\neq 0,\ ||\nabla_{\mathcal{A}_0}\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}\ \geq\ \left(\Theta_0-\frac{C}{\alpha^2r^2}\right)||\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}.\tag{3.59}$$

Nous obtenons ainsi une minoration de $\Sigma(P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha},r)$:

$$\Sigma(P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha},r)=\inf_{\phi\in C_0^\infty(\overline{\Omega}_\alpha\setminus S_r),\phi\neq 0}\frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}}{||\phi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}}\geq\Theta_0-\frac{C}{\alpha^2r^2}.\tag{3.60}$$

Par définition de $\Sigma(P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha})$, nous passons à la limite dans (3.60) et par application le Théorème 3.11, il vient :

$$\inf\sigma_{\text{ess}}(P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha})=\Sigma(P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha})\geq\Theta_0.\tag{3.61}$$

Justifions l'inégalité inverse. Donnons-nous un $\varepsilon > 0$ et $r > 0$. Montrons que $\Sigma(P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}, r) \leq \Theta_0 + \varepsilon$. Il suffira ensuite de faire tendre r vers l'infini et d'appliquer le Théorème 3.11.
Par application du principe du min-max pour l'opérateur $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$ sur le demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, il existe une fonction $\psi_1 \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+})$ telle que :

$$\Theta_0 \leq \frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}\psi_1||^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}}{||\psi_1||^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}} \leq \Theta_0 + \varepsilon. \tag{3.62}$$

Comme ψ_1 est à support compact, il existe une boule $\mathcal{B}(a_0, r_0) \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ en dehors de laquelle ψ_1 est nulle. Mais les Propositions 3.4 et 3.5 montrent que si $\psi_1 \in H^1_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ et si la fonction ψ est définie à partir de la fonction ψ_1 sur $\Omega_\alpha \cap \complement S_r$ par translation et rotation, alors les quotients de Rayleigh sont identiques :

$$\frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}\psi_1||^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}}{||\psi_1||^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)}} = \frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}\psi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}}{||\psi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}}, \tag{3.63}$$

ce qui conduit à l'encadrement :

$$\Sigma(P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}, r) \leq \frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}\psi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}}{||\psi||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}} \leq \Theta_0 + \varepsilon. \tag{3.64}$$

Passons à la limite quand $r \to +\infty$:

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}) = \Sigma(P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}) \leq \Theta_0 + \varepsilon.$$

Comme cette majoration est valable pour tout $\varepsilon > 0$, donc :

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}) \leq \Theta_0. \tag{3.65}$$

Rappelons-nous de (3.61), nous achevons alors la démonstration de la Proposition 3.15. □

Corollaire 3.16. *Soit Ω un ouvert connexe non borné dont le bord se décompose en trois composantes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 tels que :*
- *Γ_1 est borné et lipschitzien,*
- *Γ_2 et Γ_3 sont deux demi-droites non parallèles et non sécantes.*

Alors

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(P_{\mathcal{A}_0,\Omega}) = \Theta_0. \tag{3.66}$$

Démonstration : La démonstration se base comme précédemment sur une partition de l'unité et le Théorème 3.11. En effet, nous choisissons une partition de l'unité telle que le support de chaque fonction soit inclus dans Ω ou qui rencontre le bord en un point anguleux au maximum. Nous nous référons ainsi aux modèles $\mathbb{R}^2$ et, par difféomorphisme, aux secteurs angulaires étudiés à la proposition précédente. Donc :

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(P_{\mathcal{A}_0,\Omega}) = \Theta_0.$$

□

Chapitre 4

Majorations du bas du spectre pour les secteurs angulaires

4.1 Remarque relative aux demi-secteurs

Nous allons utiliser la Proposition 3.6 pour montrer que le bas du spectre est atteint pour certains domaines particuliers.

Remarque 4.1. *Soit Ω_α un secteur angulaire d'angle α pour lequel $\mu(\alpha) < \Theta_0$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mu\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$ est une valeur propre strictement inférieure à Θ_0, pour tout entier k positif.*

Démonstration : Nous avons vu à la Proposition 3.15 que le bas du spectre essentiel pour un secteur angulaire valait Θ_0. Donc si $\mu(\alpha) < \Theta_0$, $\mu(\alpha)$ est une valeur propre. D'après le Principe du min-max 2.2, il existe $u \in H^1_{\mathcal{A}}(\Omega_\alpha)$ telle que :

$$\mu(\alpha) = \frac{q_{\Omega_\alpha}(u)}{||u||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}}. \tag{4.1}$$

Appliquons la Proposition 3.6, choisissons un vecteur propre u tel que $u(x_1, x_2) = \overline{u(x_1, -x_2)}$ et calculons $q_{\Omega_\alpha}(u)$ sur un demi-secteur. Notons $\Omega^+_\alpha := \{x \in \Omega_\alpha |\ x_2 > 0\}$, alors :

$$||u||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} = 2\int_{\Omega^+_\alpha} |u|^2\, dx, \qquad q_{\Omega_\alpha}(u) = 2\int_{\Omega^+_\alpha} |\nabla_{\mathcal{A}} u|^2\, dx.$$

Ceci implique :

$$\mu(\alpha) = \frac{q_{\Omega^+_\alpha}(u)}{||u||^2_{L^2(\Omega^+_\alpha)}}. \tag{4.2}$$

Par application du principe du min-max et de la Proposition 4.2, il vient :

$$\frac{q_{\Omega^+_\alpha}(u)}{||u||^2_{L^2(\Omega^+_\alpha)}} \geq \mu\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{4.3}$$

Nous pouvons ainsi majorer $\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ par $\mu(\alpha)$. Mais, d'après la Proposition 3.15, nous savons que le bas du spectre essentiel pour le domaine $\Omega_{\frac{\alpha}{2}}$ est Θ_0 et $\mu(\alpha) < \Theta_0$, donc a fortiori, $\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \Theta_0$.
Si nous avons montré que $\mu\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) < \Theta_0$, il suffit de reprendre ce que nous venons de faire en remplaçant α par $\frac{\alpha}{2^k}$ et le résultat est démontré pour $\frac{\alpha}{2^{k+1}}$. □

Corollaire 4.2. *Pour tout entier $k > 0$, le bas du spectre de la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger pour un champ magnétique d'intensité 1, sur un secteur angulaire d'angle $\frac{\pi}{2^k}$, est une valeur propre.*

Démonstration : Jadallah [68, 69] a construit[1] une fonction u telle que $\frac{q_{\Omega_{\pi/2}}}{||u||^2_{L^2(\Omega_{\pi/2})}} = 0.57723$, donc par application du principe du min-max, $\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 0.57723$. Mais $\Theta_0 \simeq 0.59$, donc $\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est une valeur propre et $\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) < \Theta_0$. Il reste à appliquer la Proposition 4.1. □

4.2 Secteurs d'angle $\frac{\alpha}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$

Nous pouvons donner un résultat plus général en utilisant l'invariance du bas du spectre par rotation du domaine et comportement du bas du spectre vis-à-vis des sous-domaines :

Remarque 4.3. $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mu\left(\frac{\alpha}{p}\right) \leq \mu(\alpha)$.

Démonstration : Partageons le secteur angulaire en p sous secteurs d'angle $\frac{\alpha}{p}$, $U_1, \ldots, U_p$. La Proposition 3.2 donne la majoration suivante :

$$\inf(\mu(U_1), \ldots, \mu(U_p)) \leq \mu(\Omega_\alpha). \tag{4.4}$$

La Proposition 3.5 précise que le spectre est inchangé par rotation sur le domaine, donc :

$$\mu(U_1) = \ldots = \mu(U_p) = \mu\left(\frac{\alpha}{p}\right). \tag{4.5}$$

Reportons dans (4.4), nous avons ainsi la majoration de $\mu\left(\frac{\alpha}{p}\right)$ par $\mu(\alpha)$. □

Remarque 4.4. *Nous en déduisons immédiatement que le bas du spectre est une valeur propre pour les secteurs d'angle $\frac{\pi}{2p}$ pour tout entier $p > 0$.*

4.3 Majoration de $\mu(\alpha)$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$

Nous allons reprendre l'idée de Pan [83] pour établir une majoration du bas du spectre, $\mu(\alpha)$, de la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger à champ magnétique constant d'intensité 1 sur les secteurs angulaires d'angle α proche de $\frac{\pi}{2}$. Pan a développé cette idée pour le quart de plan. Cette idée consiste à construire un quasi-mode dont le quotient de Rayleigh vaut exactement Θ_0 mais cette fonction ne vérifie pas les conditions de Neumann au bord, ce qui permet d'affirmer que le bas du spectre est strictement inférieur à Θ_0.

Proposition 4.5. *Utilisant les notations précédentes (notamment du Chapitre 2), nous avons :*

$$\mu(\alpha) \leq \frac{\Theta_0}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{4\sin\alpha}(\phi(0))^4, \tag{4.6}$$

$$\mu(\alpha) \leq \frac{\Theta_{\text{app}}}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{4\sin\alpha}(\phi_{\text{app}}(0))^4 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\int_0^\infty (t - \zeta_{\text{app}})|\phi_{\text{app}}(t)|^2\, dt\right)^2. \tag{4.7}$$

[1] Il est difficile de savoir en quel sens la précision du calcul y a été contrôlée.

Démonstration : Les coordonnées polaires associées à ce secteur Ω_α vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 &=& \rho\cos\theta \\ x_2 &=& \rho\sin\theta \end{array} \right. , \ \rho\in]0,\infty[, \ \theta\in\left]-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right[. \tag{4.8}$$

Nous allons construire un quasi-mode u dont le quotient de Rayleigh vaut exactement les majorants des expressions (4.6) ou (4.7). Considérons la fonction u définie sur Ω_α par :

$$u(\rho,\theta) = e^{-i\gamma\rho\sin\theta}\ \tilde{\phi}\left(\tau\rho\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)\right)\ \tilde{\phi}\left(\tau\rho\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\right), \tag{4.9}$$

où γ et τ sont des réels strictement positifs à déterminer. Nous choisirons pour la fonction $\tilde{\phi}$ soit la fonction propre normalisée associée à la valeur propre Θ_0 pour l'opérateur $H(\zeta_0)$ pour justifier la relation (4.6), soit la fonction ϕ_{app} construite à la Section 2.7 pour établir la relation (4.7). Remarquons que la fonction u vérifie la symétrie $\overline{u(\rho,-\theta)} = u(\rho,\theta)$ observée précédemment lors de la Proposition 3.6.
Effectuons un changement de variables pour ramener le secteur à un quart de plan :

$$\left\{ \begin{array}{rcccccl} y_1 &=& \tau\rho\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right) &=& \tau\rho\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta\right) &=& \tau\left(\sin\frac{\alpha}{2}x_1+\cos\frac{\alpha}{2}\right) \\ y_2 &=& \tau\rho\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right) &=& \tau\rho\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta\right) &=& \tau\left(\sin\frac{\alpha}{2}x_1-\cos\frac{\alpha}{2}\right). \end{array} \right. \tag{4.10}$$

Ainsi $(y_1,y_2)\in Q:=(\mathbb{R}^+)^2$ si et seulement si $(x_1,x_2)\in\Omega_\alpha$ et le changement de variables s'écrit :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} & -\cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Le déterminant de ce changement de variables vaut $-\tau\sin\alpha$ et l'expression de la fonction u dans les nouvelles coordonnées est :

$$\tilde{u}(y_1,y_2) = \exp\left(-i\frac{\gamma}{2\tau\cos\frac{\alpha}{2}}(y_1-y_2)\right)\tilde{\phi}(y_1)\tilde{\phi}(y_2). \tag{4.12}$$

Afin de calculer $q_{\Omega_\alpha}(u)$, nous allons évaluer $\partial_{x_1}u$, $\partial_{x_2}u$, x_2u et x_1u.

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}u(x_1,x_2) &= \partial_{y_1}\tilde{u}(y_1,y_2)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\partial_{y_2}\tilde{u}(y_1,y_2)\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \tau\sin\frac{\alpha}{2}\left(\partial_{y_1}\tilde{u}(y_1,y_2)+\partial_{y_2}\tilde{u}(y_1,y_2)\right) \\ &= \tau\sin\frac{\alpha}{2}e^{-i\frac{\gamma}{2\tau\cos\frac{\alpha}{2}}(y_1-y_2)}(\tilde{\phi}'(y_1)\tilde{\phi}(y_2)+\tilde{\phi}(y_1)\tilde{\phi}'(y_2)). \qquad (4.13) \\ i\frac{x_2}{2}u(x_1,x_2) &= i\frac{y_1-y_2}{4\tau\cos\frac{\alpha}{2}}\tilde{u}(y_1,y_2). \qquad (4.14) \\ \partial_{x_2}u(x_1,x_2) &= \partial_{y_1}\tilde{u}(y_1,y_2)\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\partial_{y_2}\tilde{u}(y_1,y_2)\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \tau\cos\frac{\alpha}{2}(\partial_{y_1}\tilde{u}(y_1,y_2)-\partial_{y_2}\tilde{u}(y_1,y_2)) \\ &= \tau\cos\frac{\alpha}{2}e^{-i\frac{\gamma}{2\tau\cos\frac{\alpha}{2}}(y_1-y_2)}\left(\frac{-i\gamma}{\tau\cos\frac{\alpha}{2}}\tilde{\phi}(y_1)\tilde{\phi}(y_2)+\tilde{\phi}'(y_1)\tilde{\phi}(y_2)-\tilde{\phi}(y_1)\tilde{\phi}'(y_2)\right). \qquad (4.15) \\ i\frac{x_1}{2}u(x_1,x_2) &= i\frac{y_1+y_2}{4\tau\sin\frac{\alpha}{2}}\tilde{u}(y_1,y_2). \qquad (4.16) \end{aligned}$$

Les expressions (4.13) et (4.14) permettent de calculer $\left|\left(\partial_{x_1}-\frac{i}{2}x_2\right)u\right|^2$:

$$\left|\left(\partial_{x_1}-i\frac{x_2}{2}\right)u(x_1,x_2)\right|^2 = \left(\frac{y_1-y_2}{4\tau\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2\tilde{\phi}(y_1)^2\tilde{\phi}(y_2)^2+\tau^2\sin^2\frac{\alpha}{2}(\tilde{\phi}'(y_1)\tilde{\phi}(y_2)+\tilde{\phi}(y_1)\tilde{\phi}'(y_2))^2. \tag{4.17}$$

Les expressions (4.15) et (4.16) permettent de calculer $\left|\left(\partial_y + \frac{i}{2}x\right) u\right|^2$:

$$\left|\left(\partial_{x_2} + i\frac{x_1}{2}\right) u(x_1,x_2)\right|^2 = \left(\gamma - \frac{y_1+y_2}{4\tau\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \tilde\phi(y_1)^2\tilde\phi(y_2)^2 + \tau^2\cos^2\frac{\alpha}{2}(\tilde\phi'(y_1)\tilde\phi(y_2) - \tilde\phi(y_1)\tilde\phi'(y_2))^2. \tag{4.18}$$

Regroupons les expressions (4.17) et (4.18) :

$$\begin{aligned} |(\nabla - i\mathcal{A}_0)u(x_1,x_2)|^2 &= \left(\left(\frac{y_1-y_2}{4\tau\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{y_1+y_2}{4\tau\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right)\tilde\phi(y_1)^2\tilde\phi(y_2)^2 \\ &+ \tau^2(\tilde\phi'(y_1)^2\tilde\phi(y_2)^2 + \tilde\phi(y_1)^2\tilde\phi'(y_2)^2) - 2\tau^2\cos\alpha\tilde\phi'(y_1)\tilde\phi(y_1)\tilde\phi'(y_2)\tilde\phi(y_2). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Ayant choisi la fonction $\tilde\phi$ vérifiant :

$$\int_0^\infty |D_t\tilde\phi(t)|^2 + (t-\tilde\zeta)^2|\tilde\phi(t)|^2\,dt = \tilde\Theta, \tag{4.20}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} \tilde\zeta &=& \zeta_0 & \text{et} & \tilde\Theta &=& \Theta_0 & \text{si} & \tilde\phi &=& \phi, \\ \tilde\zeta &=& \zeta_{\text{app}} & \text{et} & \tilde\Theta &=& \Theta_{\text{app}} & \text{si} & \tilde\phi &=& \phi_{\text{app}}, \end{array}\right. \tag{4.21}$$

il est naturel de faire apparaître les termes $y_1-\tilde\zeta$ et $y_2-\tilde\zeta$. Pour le terme en y_1-y_2, nous récrivons $y_1-y_2 = (y_1-\tilde\zeta)-(y_2-\tilde\zeta)$. Pour le terme de la forme $\tilde\gamma-(y_1+y_2)$, nous répartissons le coefficient γ dans le terme y_1+y_2 (en écrivant $\tilde\gamma-(y_1+y_2) = (\frac{\tilde\gamma}{2}-y_1)+(\frac{\tilde\gamma}{2}-y_2)$) et choisissons γ pour retrouver les termes $y_1-\tilde\zeta$ et $y_2-\tilde\zeta$:

$$\gamma = \frac{\tilde\zeta}{2\tau\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{4.22}$$

Reportons cette expression dans (4.19), nous trouvons alors :

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_1-y_2}{4\tau\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{y_1+y_2}{4\tau\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 &= \left(\frac{(y_1-\tilde\zeta)-(y_2-\tilde\zeta)}{4\tau\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 + \left(\frac{(y_1-\tilde\zeta)+(y_2-\tilde\zeta)}{4\tau\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{(y_1-\tilde\zeta)^2+(y_2-\tilde\zeta)^2+2\cos\alpha(y_1-\tilde\zeta)(y_2-\tilde\zeta)}{(2\tau\sin\alpha)^2}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Injectant cette expression (4.23) dans (4.19), nous choisissons τ tel que $\left(\frac{1}{2\tau\sin\alpha}\right)^2 = \tau^2$, soit :

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2\sin\alpha}}. \tag{4.24}$$

Se souvenant que le changement de variable est de déterminant $-\tau\sin\alpha$, nous obtenons une nouvelle expression de la forme $q_{\Omega_\alpha}(u)$ où nous pouvons séparer les variables pour calculer les intégrales :

$$\begin{aligned} q_{\Omega_\alpha}(u) &= \int_{\Omega_\alpha} |(\nabla - i\mathcal{A})u(x)|^2\,dx \\ &= \frac{\tau^2}{\tau\sin\alpha}\left(\int_0^\infty ((y_1-\tilde\zeta)^2\tilde\phi(y_1)^2 + \tilde\phi'(y_1)^2)\,dy_1 \int_0^\infty |\tilde\phi(y_2)|^2\,dy_2\right. && (4.25) \\ &\quad \left. + \int_0^\infty ((y_2-\tilde\zeta)^2\tilde\phi(y_2)^2 + \tilde\phi'(y_2)^2)\,dy_2 \int_0^\infty |\tilde\phi(y_1)|^2\,dy_1\right) && (4.26) \\ &\quad + \frac{2\tau^2\cos\alpha}{\tau\sin\alpha}\left(\int_0^\infty (y_1-\tilde\zeta)\tilde\phi(y_1)^2\,dy_1 \int_0^\infty (y_2-\tilde\zeta)\tilde\phi(y_2)^2\,dy_2\right. && (4.27) \\ &\quad \left. - \frac{1}{4}\int_0^\infty (\tilde\phi(y_1)^2)'\,dy_1 \int_0^\infty (\tilde\phi(y_2)^2)'\,dy_2\right). \end{aligned}$$

Nous tenons en compte de (4.20) et simplifions (4.25) et (4.26) à l'aide de $\tilde{\Theta}$. L'expression de $q_{\Omega_\alpha}(u)$ devient :

$$q_{\Omega_\alpha}(u) = \frac{2\tau^2}{\tau \sin\alpha}\tilde{\Theta} - \frac{\tau^2 \cos\alpha}{2\tau \sin\alpha}(\tilde{\phi}(0))^4 + \frac{2\tau^2 \cos\alpha}{\tau \sin\alpha}\left(\int_0^\infty (y_1 - \tilde{\zeta})\tilde{\phi}(y_1)^2 \, dy_1\right)^2. \tag{4.28}$$

Estimons maintenant $||u||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}$:

$$||u||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} = \frac{1}{\tau \sin\alpha}||\tilde{u}||^2_{L^2(Q)} = \frac{1}{\tau \sin\alpha}. \tag{4.29}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\frac{q_{\Omega_\alpha}(u)}{||u||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}} &= 2\tau^2\tilde{\Theta} - \frac{\tau^2\cos\alpha}{2}(\tilde{\phi}(0))^4 + \frac{2\tau^2\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\int_0^\infty (y_1 - \tilde{\zeta})\tilde{\phi}(y_1)^2 \, dy_1\right)^2 \\ &= \frac{\tilde{\Theta}}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{4\sin\alpha}(\tilde{\phi}(0))^4 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\int_0^\infty (y_1 - \tilde{\zeta})\tilde{\phi}(y_1)^2 \, dy_1\right)^2. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Par application du principe du min-max, nous avons ainsi :

$$\mu(\alpha) \leq \frac{\tilde{\Theta}}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{4\sin\alpha}(\tilde{\phi}(0))^4 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\int_0^\infty (y_1 - \tilde{\zeta})\tilde{\phi}(y_1)^2 \, dy_1\right)^2. \tag{4.31}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer, grâce à la relation (2.38) que le terme $\int_0^\infty (y_1 - \tilde{\zeta})\tilde{\phi}(y_1)^2 \, dy_1$ est nul avec le choix $\tilde{\phi} = \phi$ et $\tilde{\zeta} = \zeta_0$ comme mentionné en (4.21). □

Nous pouvons estimer le voisinage de $\frac{\pi}{2}$ sur lequel nous sommes assurés d'avoir une valeur propre :

Corollaire 4.6. *$\mu(\alpha)$ est une valeur propre pour tout $\alpha \in \left]\alpha_{\min}, \frac{\pi}{2}\right]$ où :*

$$\alpha_{\min} = \min\left(\frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{(\phi(0))^4}{4\Theta_0}\right), \arctan\left(\frac{16\Theta_{\text{app}}\Theta_0 - (\phi_{\text{app}}(0)^4 - 8\mu'_{\text{app}})\Lambda}{4(\Theta_0\Lambda + \Theta_{\text{app}}(\phi_{\text{app}}(0)^4 - 8\mu'_{\text{app}}))}\right)\right),$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mu'_{\text{app}} &=& \int_0^\infty (t - \zeta_{\text{app}})|\phi_{\text{app}}(t)|^2 \, dt, \\ \Lambda &=& \sqrt{(\phi_{\text{app}}(0)^4 - 8\mu'_{\text{app}})^2 - 16(\Theta^2_{\text{app}} - \Theta_0^2)}. \end{array}\right. \tag{4.32}$$

Numériquement, μ est une valeur propre sur $]1.0882, \frac{\pi}{2}]$.

Démonstration : D'après la Proposition 3.15, nous sommes assurés que $\mu(\alpha)$ est une valeur propre dès que $\mu(\alpha) < \Theta_0$. Reprenons les majorations de la Proposition 4.5. Commençons par considérer (4.6). Pour que $\mu(\alpha)$ soit une valeur propre, il suffit donc de chercher les angles α tels que $\frac{\Theta_0}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{4\sin\alpha}\phi(0)^4 < \Theta_0$. Or :

$$\frac{\Theta_0}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{4\sin\alpha}\phi(0)^4 < \Theta_0 \iff \Theta_0(1 - \sin\alpha) < \frac{\phi(0)^4}{4}\cos\alpha.$$

Remarquons que $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ et $\cos\alpha = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$, ainsi :

$$\frac{\Theta_0}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{4\sin\alpha}\phi(0)^4 < \Theta_0 \iff \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) < \frac{\phi(0)^4}{4\Theta_0}.$$

Par conséquent, μ est une valeur propre sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{\phi(0)^4}{4\Theta_0}\right), \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, l'énergie associée au quasi-mode u définie en (4.9) vaut Θ_0 mais la fonction u ne vérifie pas les

conditions de Neumann, donc $\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est une valeur propre.

Reprenons maintenant la relation (4.7). Pour que $\mu(\alpha)$ soit une valeur propre, il suffit donc de chercher les angles α tels que :

$$\frac{\Theta_{\rm app}}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{4\sin\alpha}\phi_{\rm app}(0)^4 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\int_0^\infty (t-\zeta_{\rm app})|\phi_{\rm app}(t)|^2\,dt < \Theta_0,$$

ce qui équivaut, avec les notations (4.32), à $\alpha \in]\alpha_0, \alpha_1[$ où :

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \arctan\left(\frac{16\Theta_{\rm app}\Theta_0 - (\phi_{\rm app}(0)^4 - 8\mu'_{\rm app})\Lambda}{4(\Theta_0\Lambda + \Theta_{\rm app}(\phi_{\rm app}(0)^4 - 8\mu'_{\rm app}))}\right),\\
\alpha_1 &= \arctan\left(\frac{16\Theta_{\rm app}\Theta_0 + (\phi_{\rm app}(0)^4 - 8\mu'_{\rm app})\Lambda}{4(\Theta_{\rm app}(\phi_{\rm app}(0)^4 - 8\mu'_{\rm app}) - \Theta_0\Lambda)}\right).
\end{aligned}$$

Utilisons les estimations (2.122) ainsi que la Proposition 2.28 pour estimer $\alpha_{\min}$. Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{\phi(0)^4}{4\Theta_0}\right) \leq \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{0.858^4}{4\ 0.590106125}\right) \simeq 1.120.$$

Nous pouvons également majorer α_0 par 1.0882 et minorer α_1 par 1.5707. L'union de ces intervalles $]\alpha_0, \alpha_1[$ et $\left]\frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{\phi(0)^4}{4\Theta_0}\right), \frac{\pi}{2}\right[$ vaut donc $]1.0882, \frac{\pi}{2}]$ sur lequel nous sommes assurés que μ est une valeur propre. □

Deuxième partie

Analyse asymptotique dans les secteurs de petit angle

Pour déterminer l'asymptotique du bas du spectre $\mu(\alpha)$ pour de petits angles α, le Chapitre 5 ramène l'étude de l'opérateur $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$ sur le domaine dépendant de α à celle d'un opérateur P_α défini par sa forme sesquilinéaire associée a_α en (5.15) sur un domaine Ω^0 indépendant de α, défini en (5.13).

Le Chapitre 6 étudie l'opérateur associé à la forme ℓ définie en (6.1) et l'opérateur $-\partial_\eta^2$ qui interviennent dans l'expression de P_α. Le Chapitre 7 utilisent l'analyse de ces deux formes pour construire une solution formelle $U^{(\infty)} = \sum_{k\geq 0} \alpha^{2k} u_k$ telle que $P_\alpha U^{(\infty)} = \mu^{(\infty)} U^{(\infty)}$ où le réel $\mu^{(\infty)}$ est également de la forme $\mu^{(\infty)} = \sum_{k\geq 0} \alpha^{2k} m_k$. En outre, nous précisons la régularité et les propriétés des fonctions u_k constituant la solution formelle $U^{(\infty)}$. Le Chapitre 8 justifie la construction formelle de $U^{(\infty)}$ en estimant le quotient de Rayleigh de la somme partielle $U^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{2k} u_k$ et en déduisant une majoration de $\mu(\alpha)$ de la forme $\mu(\alpha) \leq \sum_{k=0}^{n} \alpha^{2k+1} m_k + \mathcal{O}(\alpha^{2k+3})$. Plus précisément, cette construction prouve l'existence d'une valeur propre $\tilde{\mu}(\alpha)$ admettant le développement limité précédent.

Grâce aux techniques d'Agmon, le Chapitre 9 précise le comportement du vecteur propre associé à la valeur propre $\mu(\alpha)$. La localisation du vecteur propre permet, par comparaison de l'opérateur P_α avec des opérateurs de référence moyennés et dans un domaine tronqué, de donner une minoration de $\mu(\alpha)$ au Chapitre 10 et, après contrôle de l'écart, de montrer l'égalité entre $\tilde{\mu}(\alpha)$ et $\mu(\alpha)$.

Le procédé de construction est explicite et les premiers termes des séries formelles $U^{(\infty)}$, $\mu^{(\infty)}$ sont donnés au Chapitre 11. Nous proposons également aux Figures 11.1 et 11.2 une synthèse des estimations de $\mu(\alpha)$ obtenues à ce stade.

Les résultats de cette partie sont annoncés dans la note [25].

Chapitre 5

Changement de variables ou de jauge

Ce chapitre ramène l'étude de l'opérateur $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$ à celle de la forme a_α définie en (5.15) sur un domaine fixe Ω^0 défini en (5.13). Nous proposons également deux expressions de la dérivée de $\mu(\alpha)$ en (5.3) et (5.24) mais qui ne semblent pas suffisantes pour déterminer la monotonie de μ.

5.1 Passage aux coordonnées polaires

Vue la géométrie du secteur angulaire Ω_α, il semble naturel d'utiliser les coordonnées polaires $(\rho,\phi) \in]0,+\infty[\times\,]-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}[$. Nous noterons Ω_α^{pol} le domaine :

$$\Omega_\alpha^{pol} :=]0,+\infty[\times\,\Big]-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\Big[.$$

Donnons la nouvelle expression de la forme quadratique en effectuant le changement de variables. Pour $u \in H^1_{\mathcal{A}_0}(\Omega_\alpha)$, nous notons $u(x_1,x_2) = u_1(\rho,\phi)$, alors :

$$\begin{array}{rcl} \left(D_{x_1} - \frac{x_2}{2}\right) u(x_1,x_2) & = & -i\cos\phi\ \partial_\rho u_1(\rho,\phi) + i\frac{\sin\phi}{\rho}\ \partial_\phi u_1(\rho,\phi) - \frac{\rho\sin\phi}{2}\ u_1(\rho,\phi), \\ \left(D_{x_2} + \frac{x_1}{2}\right) u(x_1,x_2) & = & -i\sin\phi\ \partial_\rho u_1(\rho,\phi) - i\frac{\cos\phi}{\rho}\ \partial_\phi u_1(\rho,\phi) + \frac{\rho\cos\phi}{2}\ u_1(\rho,\phi). \end{array} \tag{5.1}$$

Notons $L^2_\rho\left(\Omega_\alpha^{pol}\right)$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω_α^{pol} pour la mesure à poids $\rho\ d\rho\ d\phi$ et définissons l'espace $\mathcal{V}^N_\rho$ par :

$$\mathcal{V}^N_\rho := \left\{ u\ \in L^2_\rho\left(\Omega_\alpha^{pol}\right) \mid \partial_\rho u \in L^2_\rho(\Omega_\alpha^{pol}),\ \frac{1}{\rho}\left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right) u \in L^2_\rho\left(\Omega_\alpha^{pol}\right) \right\},$$

et la forme quadratique $\hat{q}$ pour $u \in \mathcal{V}^N_\rho$:

$$\hat{q}(u) = \int_{\Omega_\alpha^{pol}} \left(|\partial_\rho u|^2 + \frac{1}{\rho^2}\left|\left(\partial_\phi + i\ \frac{\rho^2}{2}\right) u\right|^2 \right)\ \rho\ d\rho\ d\phi. \tag{5.2}$$

Ainsi $u \in L^2(\Omega_\alpha)$ si et seulement si $u_1 \in L^2_\rho(\Omega_\alpha^{pol})$ et $u \in H^1_{\mathcal{A}_0}(\Omega_\alpha)$ si et seulement si $u_1 \in \mathcal{V}^N_\rho$. Grâce à (5.1), nous avons :

$$\frac{q(u)}{||u||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}} = \frac{\hat{q}(u_1)}{||u_1||^2_{L^2_\rho\left(\Omega_\alpha^{pol}\right)}},$$

Inspirons-nous des travaux de Dauge-Helffer [41, 42] afin d'estimer le comportement de $\mu(\alpha)$ en donnant une expression de sa dérivée à l'aide d'un opérateur de trace. Nous avons utilisé le même style de méthode en dimension 1 lors de la preuve du Lemme 2.19.

Proposition 5.1. *Supposons que le bas du spectre $\mu(\alpha)$ soit une valeur propre pour tout $\alpha \in I$ où I est un intervalle ouvert de $]0, 2\pi[$ et notons u_α un vecteur propre normalisé donné en coordonnées polaires. Alors, μ est dérivable sur I et sa dérivée est donnée pour tout $\alpha \in I$ par :*

$$\mu'(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\left|\partial_\rho u_\alpha\left(\rho, -\frac{\alpha}{2}\right)\right|^2 + \left|\partial_\rho u_\alpha\left(\rho, \frac{\alpha}{2}\right)\right|^2 \right) - \mu(\alpha)\left(\left|u_\alpha\left(\rho, -\frac{\alpha}{2}\right)\right|^2 + \left|u_\alpha\left(\rho, \frac{\alpha}{2}\right)\right|^2 \right) \rho\, d\rho. \tag{5.3}$$

Démonstration : Pour justifier cette proposition, nous allons évaluer la quantité :

$$\left(\mu(\alpha+h) - \mu(\alpha)\right) \langle u_{\alpha+h}, u_\alpha \rangle_{L^2(\Omega_\alpha^{pol})},$$

pour $\alpha \in I$ et $h > 0$ tels que $\alpha + h \in I$. Commençons par estimer le terme $\mu(\alpha+h)\langle u_{\alpha+h}, u_\alpha\rangle_{L^2(\Omega_\alpha^{pol})}$ en utilisant la formule de Green-Riemann :

$$\begin{aligned}
\mu(\alpha+h)\langle u_{\alpha+h}, u_\alpha\rangle_{L^2(\Omega_\alpha^{pol})} &= \int_0^\infty \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \partial_\rho u_{\alpha+h} \overline{\partial_\rho u_\alpha}(\rho,\phi)\ \rho d\rho\, d\phi \\
&\quad - \int_0^\infty \frac{1}{\rho}\left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right) u_{\alpha+h}\left(\rho, \frac{\alpha}{2}\right) \overline{u_\alpha\left(\rho, \frac{\alpha}{2}\right)}\, d\rho \\
&\quad + \int_0^\infty \frac{1}{\rho}\left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right) u_{\alpha+h}\left(\rho, -\frac{\alpha}{2}\right) \overline{u_\alpha\left(\rho, -\frac{\alpha}{2}\right)}\, d\rho \\
&\quad + \int_0^\infty \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\rho}\left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right) u_{\alpha+h} \overline{\left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right) u_\alpha}\, d\phi\, d\rho.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

De la même manière, nous estimons le deuxième terme $\mu(\alpha)\langle u_{\alpha+h}, u_\alpha\rangle_{L^2(\Omega_\alpha^{pol})}$:

$$\begin{aligned}
\mu(\alpha)\langle u_{\alpha+h}, u_\alpha\rangle_{L^2(\Omega_\alpha^{pol})} &= \int_0^\infty \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \partial_\rho u_{\alpha+h} \overline{\partial_\rho u_\alpha}(\rho,\phi)\ \rho d\rho\, d\phi \\
&\quad - \int_0^\infty \frac{1}{\rho} u_{\alpha+h}\left(\rho, \frac{\alpha}{2}\right) \overline{\left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right) u_\alpha\left(\rho, \frac{\alpha}{2}\right)}\, d\rho \\
&\quad + \int_0^\infty \frac{1}{\rho} u_\alpha\left(\rho, -\frac{\alpha}{2}\right) \overline{\left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right) u_\alpha\left(\rho, -\frac{\alpha}{2}\right)}\, d\rho \\
&\quad + \int_0^\infty \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\rho}\left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right) u_{\alpha+h} \overline{\left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right) u_\alpha}\, d\phi\, d\rho.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Or u_α vérifie la condition de Neumann :

$$\left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right) u_\alpha\left(\rho, \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \text{ et } \left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right) u_\alpha\left(\rho, -\frac{\alpha}{2}\right) = 0, \tag{5.6}$$

donc les deuxième et troisième termes de (5.5) sont nuls. Effectuons la différence de (5.4) et (5.5) :

$$\begin{aligned}
\left(\mu(\alpha+h) - \mu(\alpha)\right)\langle u_{\alpha+h}, u_\alpha\rangle_{L^2(\Omega_\alpha^{pol})} &= \int_0^\infty \left(\left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right) u_{\alpha+h}\left(\rho, \frac{\alpha}{2}\right) \overline{u_\alpha\left(\rho, \frac{\alpha}{2}\right)} \right. \\
&\quad \left. - \left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right) u_{\alpha+h}\left(\rho, -\frac{\alpha}{2}\right) \overline{u_\alpha\left(\rho, -\frac{\alpha}{2}\right)} \right) \frac{d\rho}{\rho}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Utilisons la formule de Taylor entre α et $\alpha + h$ en se souvenant de (5.6) :

$$\left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right) u_{\alpha+h}\left(\rho, \frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{h}{2}\left(\partial_\phi^2 + i\frac{\rho^2}{2}\partial_\phi\right) u_{\alpha+h}\left(\rho, \frac{\alpha+h}{2}\right) + \mathcal{O}(h^2), \tag{5.8}$$

$$\left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right) u_{\alpha+h}\left(\rho, -\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{2}\left(\partial_\phi^2 + i\frac{\rho^2}{2}\partial_\phi\right) u_{\alpha+h}\left(\rho, -\frac{\alpha+h}{2}\right) + \mathcal{O}(h^2). \tag{5.9}$$

Or, par hypothèse sur $u_{\alpha+h}$, nous avons :

$$\frac{1}{\rho}\left(\partial_\phi^2 + i\frac{\rho^2}{2}\partial_\phi\right)u_{\alpha+h} = -\rho\mu(\alpha+h)u_{\alpha+h} - \partial_\rho(\rho\partial_\rho u_{\alpha+h}) - \frac{i}{2}\rho\left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{4}\right)u_{\alpha+h}. \tag{5.10}$$

Se servant à nouveau de (5.6) et aussi de (5.10), les relations (5.8) et (5.9) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right)u_{\alpha+h}\left(\rho,\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{h}{2}\Big(\rho\mu(\alpha+h)u_{\alpha+h}\left(\rho,\frac{\alpha+h}{2}\right)\\ &\quad +\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho u_{\alpha+h}\left(\rho,\frac{\alpha+h}{2}\right)\right)\Big) + \mathcal{O}(h^2), \qquad (5.11)\\ \left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right)u_{\alpha+h}\left(\rho,-\frac{\alpha}{2}\right) &= -\frac{h}{2}\Big(\rho\mu(\alpha+h)u_{\alpha+h}\left(\rho,-\frac{\alpha+h}{2}\right)\\ &\quad +\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho u_{\alpha+h}\left(\rho,-\frac{\alpha+h}{2}\right)\right)\Big) + \mathcal{O}(h^2). \qquad (5.12)\end{aligned}$$

Par conséquent, une intégration par parties mène à :

$$\begin{aligned}&\frac{\mu(\alpha+h)-\mu(\alpha)}{h}\left\langle u_{\alpha+h}, u_\alpha\right\rangle_{L^2(\Omega_\alpha^{pol})}\\ =\ &-\frac{\mu(\alpha+h)}{2}\int_0^\infty\left(u_{\alpha+h}\left(\rho,\frac{\alpha+h}{2}\right)\overline{u_\alpha\left(\rho,\frac{\alpha}{2}\right)} + u_{\alpha+h}\left(\rho,-\frac{\alpha+h}{2}\right)\overline{u_\alpha\left(\rho,-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)\rho d\rho\\ &+\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\partial_\rho u_{\alpha+h}\left(\rho,\frac{\alpha+h}{2}\right)\overline{\partial_\rho u_\alpha\left(\rho,\frac{\alpha}{2}\right)} + \partial_\rho u_{\alpha+h}\left(\rho,-\frac{\alpha+h}{2}\right)\overline{\partial_\rho u_\alpha\left(\rho,-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)\ \rho d\rho.\end{aligned}$$

□

Remarque 5.2. *Malheureusement, l'expression (5.3) ne semble pas nous aider pour connaître le signe de $\mu'(\alpha)$ et la question de la monotonie de μ reste ouverte.*

5.2 Changement de jauge

Pour avoir une condition aux bords plus agréable, effectuons le changement de jauge :

$$\psi_1(\rho,\phi) := \exp\left(i\frac{\rho^2}{2}\phi\right)\psi(\rho,\phi), \forall(\rho,\phi)\in\Omega_\alpha^{pol}.$$

Alors ψ et ψ_1 ont le même module et pour tout $(\rho,\phi)\in\Omega_\alpha^{pol}$:

$$\begin{cases}\left(\partial_\phi + i\frac{\rho^2}{2}\right)\psi(\rho,\phi) &= \exp\left(-i\frac{\rho^2}{2}\phi\right)\partial_\phi\psi_1(\rho,\phi),\\ \partial_\rho\psi(\rho,\phi) &= \exp(-i\frac{\rho^2}{2}\phi)\left(\partial_\rho\psi_1(\rho,\phi) - i\ \rho\ \phi\ \psi_1(\rho,\phi)\right),\end{cases}$$

donc $\psi\in\mathcal{V}_\rho^N$ si et seulement si $\psi_1\in\tilde{\mathcal{V}}_\rho^N$ en définissant :

$$\tilde{\mathcal{V}}_\rho^N := \left\{u\in L^2_\rho\left(\Omega_\alpha^{pol}\right)\mid (\partial_\rho - i\ \rho\ \phi)u\in L^2_\rho\left(\Omega_\alpha^{pol}\right),\ \frac{1}{\rho}\partial_\phi u\in L^2_\rho\left(\Omega_\alpha^{pol}\right)\right\}.$$

Définissons une nouvelle forme quadratique $\tilde{q}$ sur $\tilde{\mathcal{V}}_\rho^N$ par :

$$\tilde{q}(\psi_1) := \int_{\Omega_\alpha^{pol}}\left(|(\partial_\rho - i\ \rho\phi)\psi_1|^2 + \frac{1}{\rho^2}\ |\partial_\phi\psi_1|^2\right)\ \rho\ d\rho\ d\phi.$$

Alors $\dfrac{\hat{q}(\psi)}{||\psi||^2_{L^2\left(\Omega_\alpha^{pol}\right)}} = \dfrac{\tilde{q}(\psi_1)}{||\psi_1||^2_{L^2\left(\Omega_\alpha^{pol}\right)}}$.

5.3 Domaine indépendant de α

Au lieu de regarder le comportement de l'état fondamental d'un opérateur fixe dans un secteur angulaire d'angle α quand α tend vers 0, nous effectuons un changement de variables afin de nous ramener à un opérateur dépendant de α sur un domaine fixe tel que le domaine de forme de ce nouvel opérateur est indépendant de α. Considérons donc le changement de variables tel que la mesure ne soit plus à poids :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \eta & = & \frac{\phi}{\alpha}, \\ t & = & \alpha\frac{\rho^2}{2}. \end{array} \right.$$

Ce changement de variables $(x_1, x_2) \to (t, \eta)$ envoie le domaine Ω_α sur le domaine fixe Ω^0 :

$$\Omega^0 :=]0, +\infty[\times \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[. \tag{5.13}$$

Pour $u \in L^2_\rho(\Omega^{pol}_\alpha)$, nous notons $\tilde{u}$ la fonction obtenue par changement de variables, alors :

$$||u||^2_{L^2_\rho(\Omega^{pol}_\alpha)} = ||\tilde{u}||^2_{L^2(\Omega^0)}.$$

Remarquons également que :

$$\begin{array}{rcl} (\partial_\rho - i\ \rho\ \phi)u(\rho,\phi) & = & \sqrt{2\alpha t}(\partial_t - i\ \eta)\tilde{u}(t,\eta), \\ \partial_\phi u(\rho,\phi) & = & \frac{1}{\alpha}\partial_\eta \tilde{u}(t,\eta). \end{array}$$

Définissons la forme quadratique q_α sur $\mathcal{V}^N$ par :

$$q_\alpha(u) = \int_{\Omega^0} \left(2t|D_t u - \eta\ u|^2 + \frac{1}{2\alpha^2 t}|\partial_\eta u|^2 \right)\ dt\ d\eta, \tag{5.14}$$

avec :

$$\mathcal{V}^N := \left\{ u \in L^2(\Omega^0) |\ \frac{1}{\sqrt{t}}\partial_\eta u \in L^2(\Omega^0), \sqrt{t}(\partial_t - i\ \eta)u \in L^2(\Omega^0) \right\}.$$

Notons alors que $u \in \mathcal{V}^N_\rho$ si et seulement si $\tilde{u}_1 \in \mathcal{V}^N$ et nous avons :

$$\hat{q}(u) = \alpha q_\alpha(\tilde{u}_1).$$

Il suffit donc d'étudier la forme q_α. Définissons la forme sesquilinéaire a_α associée à q_α sur $\mathcal{V}^N$ par :

$$\forall u, v \in \mathcal{V}^N,\ a_\alpha(u,v) = \int_{\Omega^0} \left(2t\,(D_t - \eta)\,u\ \overline{(D_t - \eta)\,v} + \frac{1}{2\alpha^2 t}\partial_\eta u \overline{\partial_\eta v} \right)\ dt\ d\eta. \tag{5.15}$$

Par construction de a_α, nous avons, pour tout $u, v \in \mathcal{V}^N_1$, $\tilde{a}_\alpha(u,v) = a_\alpha(\hat{u}_1, \hat{v}_1)$.
Les spectres des deux opérateurs $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$ et P_α sont liés par la relation :

$$\sigma(P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}) = \alpha\sigma(P_\alpha).$$

En particulier :

$$\mu(\alpha) = \alpha\lambda(\alpha). \tag{5.16}$$

De plus, ψ est un état fondamental associé à la première valeur propre de $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$ (s'il existe) si et seulement si ψ_α est l'état fondamental associé à la première valeur propre de P_α. Les fonctions ψ et ψ_α sont liées par la relation :

$$\forall (t,\eta) \in \Omega^0,\ \psi_\alpha(t,\eta) := e^{-i\eta t}\psi\left(\sqrt{\frac{2t}{\alpha}}\cos(\alpha\eta), \sqrt{\frac{2t}{\alpha}}\sin(\alpha\eta) \right). \tag{5.17}$$

Remarque 5.3. *L'expression de la forme a_α permet de voir immédiatement que :*

$$\alpha \mapsto \alpha\mu(\alpha) \text{ est croissante }, \tag{5.18}$$

$$\alpha \mapsto \tfrac{\mu(\alpha)}{\alpha} \text{ est décroissante.} \tag{5.19}$$

Il serait intéressant de montrer la monotonie de μ de $]0,\pi]$ sur $]0,\Theta_0]$.

Remarque 5.4. *Par décroissance de $\alpha \mapsto \frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$, nous déduisons immédiatement que $\mu(\alpha)$ est une valeur propre pour tout $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\frac{\Theta_0}{\mu(\frac{\pi}{2})}\right[$ en utilisant la Proposition 3.15 et la majoration :*

$$\forall \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right], \ \mu(\alpha) \leq \frac{2\alpha}{\pi}\mu\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{5.20}$$

Utilisant la majoration obtenue par Jadallah [68], $\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 0.57723$, nous obtenons numériquement que μ est une valeur propre pour $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, 1.60581\right[$.

Comme nous le savons d'après Dauge-Helffer [41], Helffer-Morame [60], Lu-Pan [79] et comme nous l'avons rappelé en (1.18), $\mu(\pi) = \Theta_0$, alors :

$$\forall \alpha \in]0,\pi], \ \frac{\mu(\alpha)}{\alpha} \geq \frac{\Theta_0}{\pi}. \tag{5.21}$$

Le problème revient donc à déterminer l'état fondamental de la forme a_α sur Ω^0. Définissons la forme sesquilinéaire ℓ sur $\mathcal{V}_\ell^N := \{u \in L^2(\Omega^0) | \sqrt{t}\,(D_t - \eta)\,u \in L^2(\Omega^0)\}$ par :

$$\ell(u,v) := \int_{\Omega^0} 2\,(D_t - \eta)\,u\overline{(D_t - \eta)\,v}\ t\ dt\ d\eta. \tag{5.22}$$

Récrivons le problème aux valeurs propres. Nous cherchons une fonction $\psi \in \mathcal{V}^N$ et une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $v \in \mathcal{V}^N$:

$$\ell(\psi,v) + \frac{1}{\alpha^2}\int_{\Omega^0} \frac{1}{t}\partial_\eta\psi\partial_\eta\overline{v}\ dt\ d\eta \ = \ \lambda\int_{\Omega^0}\psi\overline{v}\ dt\ d\eta. \tag{5.23}$$

De même que nous avons établi la formule de la dérivée de la première valeur propre l'opérateur $H(\zeta)$ lors de la Proposition 2.10, nous pouvons à nouveau démontrer une formule de type Feymann-Heilman à l'aide des relations (5.15) et (5.16) et obtenir :

Proposition 5.5. *Supposons que le bas du spectre $\mu(\alpha)$ soit une valeur propre pour tout $\alpha \in I$ où I est un intervalle ouvert de $]0,2\pi[$ et notons u_α un vecteur propre normalisé donné dans les coordonnées (t,η). Alors, μ est dérivable sur I et sa dérivée est donnée pour tout $\alpha \in I$ par :*

$$\mu'(\alpha) = \int_{\Omega^0}\left(2t|(D_t - \eta)u_\alpha(t,\eta)|^2 - \frac{1}{2\alpha^2 t}|\partial_\eta u_\alpha(t,\eta)|^2\right)\ dt\ d\eta. \tag{5.24}$$

Remarque 5.6. *De nouveau (cf Remarque 5.2), cette expression de la dérivée ne permet pas de conclure sur la monotonie de μ.*

Chapitre 6

Analyse des deux formes principales

6.1 Présentation

Dans l'expression de a_α en (5.15), deux formes (et deux opérateurs) apparaissent et ce chapitre est consacré à l'analyse de chacune d'elles (pour la théorie des opérateurs, nous référons à [33, 21, 23, 75, 76, 82]). La première forme est notée ℓ (avec l'opérateur associé L) et définie ci-après et la seconde est associée à la réalisation de Neumann de $-\partial_\eta^2$ sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$. Définissons la forme sesquilinéaire ℓ sur :

$$\mathcal{V}_\ell^N := \left\{ u \in L^2(\Omega^0) |\ \sqrt{t}(D_t - \eta)u \in L^2(\Omega^0) \right\} ,$$

par :

$$\ell(u,v) = \int_{\Omega^0} 2t(D_t-\eta)u\overline{(D_t-\eta)v}\ dt\ d\eta,\ \forall u,v \in \mathcal{V}_\ell^N. \tag{6.1}$$

Notons $\mathcal{P}\otimes\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ l'espace des fonctions polynomiales en η à coefficients dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$, restriction à $\mathbb{R}^+$ de fonction dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nous définissons l'opérateur :

$$L := 2(D_t-\eta)t(D_t-\eta),$$

sur $\mathcal{P}\otimes\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$, et vérifions :

$$\forall u \in \mathcal{P}\otimes\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+}),\ \forall v \in \mathcal{V}_\ell^N,\ \ell(u,v) = \langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega^0)}. \tag{6.2}$$

La forme q_α contient un terme en $\frac{1}{\alpha^2}$. Quand nous essayons de la minimiser pour α petit, il est naturel d'étudier sa restriction aux fonctions indépendantes de η afin d'annuler la singularité en α.

6.2 Définition du nouvel opérateur $L^{\rm moy}$

6.2.1 Domaines de forme $\ell^{\rm moy}$

Nous définissons donc la forme $\ell^{\rm moy}$ qui apparaît naturellement en restreignant la forme ℓ aux fonctions u indépendantes de η.

$$\forall u,\ v \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+}),\ \ell^{\rm moy}(u,v) \ := \ \int_0^\infty 2\left(D_t u\ \overline{D_t v} + \frac{1}{12} u\overline{v}\right)\ t\ dt. \tag{6.3}$$

Lemme 6.1. *Le domaine de forme de la réalisation de Neumann de $\ell^{\rm moy}$ est :*

$$\mathcal{V}_{\rm moy}^N = \{u \in L^2(\mathbb{R}^+) |\ \sqrt{t}u \in L^2(\mathbb{R}^+),\ \sqrt{t}D_t u \in L^2(\mathbb{R}^+)\}.$$

Le domaine de son extension de Friedrichs (cf [57]) est :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^N_{\rm moy} &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^+)|\ \sqrt{t}u \in L^2(\mathbb{R}^+),\ \sqrt{t}D_t u \in L^2(\mathbb{R}^+),\ \left(D_t t D_t + \frac{t}{12}\right) u \in L^2(\mathbb{R}^+),\\ &\quad (tD_t u(t))_{|_{t=0}} = 0\}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

L'opérateur auto-adjoint $L^{\rm moy}$ défini sur $\mathcal{D}^N_{\rm moy}$ est identique à l'opérateur $L^{\rm moy}$ défini sur $\mathcal{W}^2_1(\mathbb{R}^+)$ en notant :

$$\mathcal{W}^2_1(\mathbb{R}^+) := \{u \in H^1(\mathbb{R}^+)|\ tu \in H^2(\mathbb{R}^+)\}. \tag{6.5}$$

Démonstration :

• *Domaine de forme de $\ell^{\rm moy}$.*

La forme $\ell^{\rm moy}$ est sesquilinéaire, positive donc admet une extension auto-adjointe. Définissons la norme $p_{\rm moy}$ par :

$$p^2_{\rm moy}(u) = \ell^{\rm moy}(u,u) + ||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Déterminons le domaine de forme $\mathcal{V}^N_{\rm moy}$ de $\ell^{\rm moy}$:

$$\mathcal{V}^N_{\rm moy} := \{u \in L^2(\mathbb{R}^+)|\ \text{il existe une suite } (u_n) \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+}) \text{ telle que } u_n \text{ est une suite de Cauchy pour } p_{\rm moy},\ u_n \text{ converge vers } u \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^+)\}.$$

Soit u_n une suite de $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ qui converge vers une fonction u dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ et qui est une suite de Cauchy pour la norme $p_{\rm moy}$. Alors u_n converge vers u dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$, donc $\sqrt{t}D_t u_n$ et $\sqrt{t}u_n$ convergent respectivement vers $\sqrt{t}D_t u$ et $\sqrt{t}u$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$. Comme u_n est une suite de Cauchy pour $p_{\rm moy}$, alors il existe des fonctions $g,\ h \in L^2(\mathbb{R}^+)$ telles que $\sqrt{t}D_t u_n$ et $\sqrt{t}u_n$ convergent respectivement vers g et h dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ donc dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$. Notons V l'espace :

$$V := \{u \in L^2(\mathbb{R}^+)|\ \sqrt{t}u \in L^2(\mathbb{R}^+),\ \sqrt{t}D_t u \in L^2(\mathbb{R}^+)\}.$$

Nous avons ainsi établi que $\mathcal{V}^N_{\rm moy} \subset V$. Il reste à montrer la densité de $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ dans V pour justifier l'égalité. Nous pouvons montrer que les fonctions de $C^\infty_0(\overline{\mathbb{R}^+})$ sont denses dans V en raisonnant par troncature et régularisation, donc $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ est dense dans V. Ainsi :

$$\mathcal{V}^N_{\rm moy} = \{u \in L^2(\mathbb{R}^+)|\ \sqrt{t}u \in L^2(\mathbb{R}^+),\ \sqrt{t}D_t u \in L^2(\mathbb{R}^+)\}.$$

• *Domaine de l'extension de Friedrichs associée à la forme $\ell^{\rm moy}$.*

Par construction, son domaine est :

$$\mathcal{D}^N_{\rm moy} = \{u \in \mathcal{V}^N_{\rm moy}|\ v \mapsto \ell^{\rm moy}(u,v) \text{ est continue pour la topologie induite par } L^2(\mathbb{R}^+)\}.$$

La fonction u est dans $\mathcal{D}^N_{\rm moy}$ si et seulement si il existe $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\ell^{\rm moy}(u,v) = \langle f, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)} \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}^N_{\rm moy}.$$

Si $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$, alors, par intégration par parties, $2\left(D_t t D_t + \frac{t}{12}\right) u = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$, donc a fortiori $2\left(D_t t D_t + \frac{t}{12}\right) u \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Soient $v \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ et $u \in \mathcal{V}^N_{\rm moy}$ tel que $2\left(D_t(tD_t) + \frac{t}{12}\right) u \in L^2(\mathbb{R}^+)$, alors :

$$\ell^{\rm moy}(u,v) = \int_0^\infty 2\left(D_t t D_t + \frac{t}{12}\right) u\ \overline{v(t)}\ dt + \left[2tD_t u(t)\ \overline{v(t)}\right]^\infty_0.$$

Mais comme $2\left(D_t t D_t + \frac{t}{12}\right) u = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$ alors $(tD_t u(t))_{|_{t=0}} = 0$. Nous déduisons ainsi que le domaine de l'extension de Friedrichs est donné par (6.4). L'opérateur auto-adjoint associé à $\ell^{\rm moy}$ est ainsi défini sur $\mathcal{D}^N_{\rm moy}$ par :

$$L^{\rm moy} := 2\left(D_t t D_t + \frac{t}{12}\right). \tag{6.6}$$

Pour tout $u \in \mathcal{D}^N_{\text{moy}}$ et tout $v \in \mathcal{V}^N_{\text{moy}}$, nous avons la relation :

$$\ell^{\text{moy}}(u,v) = \langle L^{\text{moy}} u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)}. \tag{6.7}$$

• $(L^{\text{moy}}, \mathcal{D}^N_{\text{moy}}) = (L^{\text{moy}}, \mathcal{W}^2_1(\mathbb{R}^+))$.
Commençons par montrer l'inclusion : $\mathcal{W}^2_1(\mathbb{R}^+) \subset \mathcal{D}^N_{\text{moy}}$. Soit $u \in \mathcal{W}^2_1(\mathbb{R}^+)$, alors $tu' \in H^1(\mathbb{R}^+)$ donc, en vertu de l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^+) \subset C^0(\overline{\mathbb{R}^+})$, l'application $t \mapsto tu'(t)$ est continue sur $\overline{\mathbb{R}^+}$. Ainsi $tu'(t)$ admet une limite quand t tend vers 0. Si cette limite, notée γ, est non nulle, alors $u'(t)$ est équivalent à $\frac{\gamma}{t}$ en $t = 0$, ce qui contredit le fait que $u \in H^1(\mathbb{R}^+)$. Donc nécessairement $\gamma = 0$. De plus, si $u \in \mathcal{W}^2_1(\mathbb{R}^+)$, alors $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$, $\sqrt{t}u \in L^2(\mathbb{R}^+)$, $\sqrt{t}u' \in L^2(\mathbb{R}^+)$ et $2\left(D_t t D_t + \frac{t}{12}\right) u \in L^2(\mathbb{R}^+)$, donc $u \in \mathcal{D}^N_{\text{moy}}$. L'inclusion $\mathcal{W}^2_1(\mathbb{R}^+) \subset \mathcal{D}^N_{\text{moy}}$ est donc vérifiée.
Notons L^{moy}_w l'opérateur L^{moy} défini sur $\mathcal{W}^2_1(\mathbb{R}^+)$. L'inclusion se traduit au niveau des domaines des opérateurs par :

$$(L^{\text{moy}}_w, \mathcal{W}^2_1(\mathbb{R}^+)) \subset (L^{\text{moy}}, \mathcal{D}^N_{\text{moy}}).$$

Ceci nous donne donc l'inclusion inverse au niveau des domaines des opérateurs adjoints :

$$L^{\text{moy}*} \subset L^{\text{moy}*}_w.$$

Afin de justifier l'inclusion inverse, donnons quelques propriétés de l'opérateur L^{moy}.

Proposition 6.2. *L'opérateur L^{moy}, vu comme un opérateur non borné de $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$, est à résolvante compacte.*

Démonstration : L'opérateur L^{moy} est continu et surjectif de $\mathcal{W}^2_1(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$, donc $(L^{\text{moy}})^{-1}$ est continu de $L^2(\mathbb{R}^+)$ à valeur dans $\mathcal{W}^2_1(\mathbb{R}^+)$. Regardons cet opérateur comme un opérateur de $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. L'injection de $\mathcal{W}^2_1(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ est compacte (comme le rappelle [22] à la Proposition 1.4), donc l'opérateur L^{moy} est bien à résolvante compacte. □
Utilisons les travaux de [22]. Écrivons l'opérateur L^{moy} sous la forme souhaitée dans [22] :

$$L^{\text{moy}} u \;=\; 2D_t t D_t u + \frac{t}{6}u = 2\left(D_t^2(tu) + iD_t u + \frac{t}{12}u\right).$$

Nous allons donc étudier l'opérateur L^{moy}_0 défini par :

$$L^{\text{moy}}_0 u(t) := P^2(D_t)\{tu(t)\} + P^1(D_t)\{u(t)\}, \text{ avec } \left\{\begin{array}{rcl} P^2(\tau) &=& \tau^2 + \frac{1}{12}, \\ P^1(\tau) &=& i\tau. \end{array}\right. \tag{6.8}$$

L'opérateur L^{moy}_0 est auto-adjoint, donc la Proposition 3.1 de [22] montre que l'opérateur L^{moy}_0 en tant qu'opérateur non borné de $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ de domaine $\mathcal{D}(L^{\text{moy}}_0) = \mathcal{W}^2_1(\mathbb{R}^+)$ est auto-adjoint. Résumons les inclusions :

$$\begin{array}{rcl} L^{\text{moy}}_w &\subset& L^{\text{moy}}, \\ L^{\text{moy}*} &\subset& L^{\text{moy}*}_w \\ L^{\text{moy}*}_w &=& L^{\text{moy}}_w. \end{array}$$

Ainsi $(L^{\text{moy}}_w, \mathcal{W}^2_1(\mathbb{R}^+)) = (L^{\text{moy}}, \mathcal{D}^N_{\text{moy}})$ et nous noterons $L^{\text{moy}}_w = L^{\text{moy}}$. □

6.2.2 Propriétés de l'opérateur L^{moy}

Pour préciser les propriétés d'isomorphisme de l'opérateur L^{moy}, nous rappelons un théorème de [22] (p. 456-460) avec les notations :

$$\forall 0 \leq k \leq m,\ \mathcal{W}_k^m(\Omega^0) := \{u \in H^{m-k}(\Omega^0) |\ t^k u \in H^m(\Omega^0)\}. \tag{6.9}$$

Théorème 6.3. *Soit L un opérateur de la forme :*

$$Lu(t) = P^2(D_t)\{tu(t)\} + P^1(D_t)\{u(t)\}, \tag{6.10}$$

tel que :

1. *$P^1(D_t) = p_1^1 D_t + p_0^1$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 à coefficients constants complexes,*
2. *$P^2(D_t) = D_t^2 + p_1^2 D_t + p_0^2$ est un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients constants complexes, le polynôme $P^2(\tau)$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.*
3. *Les racines τ_+ et τ_- de $P^2(\tau) = 0$ satisfont $\text{Im}\ \tau_+ > 0$ et $\text{Im}\ \tau_- < 0$.*

Introduisons la condition algébrique :

(C) Il existe un entier $n \geq 1$ tel que $P^1(\tau_+) = in(\tau_+ - \tau_-)$.

Alors pour tout entier $p \geq 0$ tel que $p > -\text{Re}\,(ip_1^1) - \frac{3}{2}$:

- *Si (C) n'est pas vérifiée, alors l'opérateur L est un isomorphisme de $\mathcal{W}_1^{p+2}(\mathbb{R}^+)$ sur $H^p(\mathbb{R}^+)$.*
- *Si (C) est vérifiée, alors l'opérateur L est linéaire continu surjectif de $\mathcal{W}_1^{p+2}(\mathbb{R}^+)$ sur un sous-espace fermé de codimension 1 dans $H^p(\mathbb{R}^+)$ et son noyau dans $\mathcal{W}_1^{p+2}(\mathbb{R}^+)$ est de dimension 1.*

Ce résultat permet de justifier la proposition suivante :

Proposition 6.4 (Étude de l'opérateur L^{moy}). *Pour tout entier p, l'opérateur L^{moy} est un isomorphisme de $\mathcal{W}_1^{p+2}(\mathbb{R}^+)$ sur $H^p(\mathbb{R}^+)$. Le spectre de l'opérateur L^{moy}, en tant qu'opérateur non borné de $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ coïncide avec son spectre ponctuel et est discret. Il est formé de valeurs propres $(\lambda_n^{\text{moy}})_{n\geq 1}$ où $\lambda_n^{\text{moy}} = \frac{2n-1}{\sqrt{3}}$. Le sous-espace propre, associé à chaque λ_n^{moy}, est de dimension 1 et est inclus dans $\mathcal{W}_1^\infty(\mathbb{R}^+) = \{u \in H^\infty(\mathbb{R}^+) |\ tu \in H^\infty(\mathbb{R}^+)\}$.*

Démonstration :

• *Isomorphisme*

Utilisons à nouveau les travaux de [22] avec l'opérateur L_0^{moy} en reprenant les notations de la démonstration du Lemme 6.1. Les solutions de $P^2(\tau) = 0$ sont $\tau_- = -\frac{i}{2\sqrt{3}}$ et $\tau_+ = \frac{i}{2\sqrt{3}}$, alors : $i(\tau_+ - \tau_-) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $P^1(\tau_+) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$, donc la condition (C) n'est pas vérifiée. En outre, $ip_1^1 = -1$, donc $-\text{Re}\,(-1) - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ et grâce au Théorème 6.3, l'opérateur L_0^{moy} est un isomorphisme de $\mathcal{W}_1^{p+2}(\mathbb{R}^+)$ sur $H^p(\mathbb{R}^+)$ pour tout entier p. Comme L^{moy} diffère de l'opérateur L_0^{moy} à un coefficient mutiplicateur près, L^{moy} est ainsi un isomorphisme de $\mathcal{W}_1^{p+2}(\mathbb{R}^+)$ sur $H^p(\mathbb{R}^+)$ pour tout entier p.

• *Spectre de L_0^{moy} :*

λ est un élément du spectre de L_0^{moy} si et seulement si $L_0^{\text{moy}} - \lambda$ vérifie la condition (C). Le spectre est donc formé des valeurs propres $\lambda_n^{0,\text{moy}} = P^1(\tau_+) - in(\tau_+ - \tau_-) = \frac{2n-1}{2\sqrt{3}}$, avec $n \geq 1$.

Pour déterminer la dimension des espaces propres associés à chaque valeur propre, nous réutilisons le Théorème 6.3, avec l'opérateur $L_0^{\text{moy}} - \lambda_n^{0,\text{moy}}$: cet opérateur $L_0^{\text{moy}} - \lambda_n^{0,\text{moy}}$ est linéaire, continu, surjectif de $\mathcal{W}_1^{p+2}(\mathbb{R}^+)$ sur un sous-espace fermé de codimension 1 dans $H^p(\mathbb{R}^+)$ et son noyau dans $\mathcal{W}_1^{p+2}(\mathbb{R}^+)$ est de dimension 1. Mais le noyau contient le vecteur propre, donc l'espace propre associé à chaque $\lambda_n^{0,\text{moy}}$ est de dimension 1 et est inclus dans $\mathcal{W}_1^\infty(\mathbb{R}^+)$.

• *Application à l'opérateur L^{moy} :*
La démonstration de la Proposition 6.4 s'achève en écrivant $L^{\text{moy}} = 2L_0^{\text{moy}}$ donc les valeurs propres sont $\lambda_n^{\text{moy}} = \frac{2n-1}{\sqrt{3}}$, pour $n \geq 1$ et la dimension de chaque sous-espace propre vaut 1. □

Corollaire 6.5. *Notons $(\lambda_1^{\text{moy}}, u_1^{\text{moy}})$ l'état fondamental de l'opérateur L^{moy}. Soit $f \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ orthogonale à u_1^{moy}, alors il existe une fonction $u \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ telle que :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}})u & = & f, \\ \displaystyle\int_0^\infty u(t)\overline{u_1^{\text{moy}}(t)}\, dt & = & 0. \end{array} \right. \tag{6.11}$$

De plus, si u est déterminée par (6.11), alors pour toute fonction $v \in \mathcal{V}^N_{\text{moy}}$, nous avons :

$$\ell^{\text{moy}}(u,v) - \lambda_1^{\text{moy}} \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega^0)} = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega^0)}\,. \tag{6.12}$$

Démonstration : D'après le Théorème 6.3 appliqué avec l'opérateur $T = \frac{1}{2}(L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}})$, l'opérateur $L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}}$ est linéaire, continu, surjectif de $\mathcal{W}_1^{p+2}(\mathbb{R}^+)$ sur un sous-espace fermé de codimension 1 dans $H^p(\mathbb{R}^+)$ et son noyau dans $H^p(\mathbb{R}^+)$ est de dimension 1. Nous savons que $u_1^{\text{moy}} \in \mathcal{W}_1^\infty(\mathbb{R}^+)$ est non nul et est dans le noyau de $L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}}$, $L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}}$ est linéaire, continu, surjectif de $\mathcal{W}_1^{p+2}(\mathbb{R}^+)$ sur le sous-espace orthogonal à u_1^{moy}, noté $< u_1^{\text{moy}} >^\perp$, et son noyau dans $\mathcal{W}_1^{p+2}(\mathbb{R}^+)$ est engendré par u_1^{moy}. Nous avons donc résolu le problème suivant : soit $p \in \mathbb{N}$, $f \in H^p(\mathbb{R}^+)$, orthogonale à u_1^{moy} dans $L^2(\mathbb{R}^+)$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{W}_1^{p+2}(\mathbb{R}^+)$, orthogonale à u_1^{moy} telle que $(L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}})u = f$.
Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq 0$ que $t^n u \in \mathcal{W}_1^\infty(\mathbb{R}^+)$:

- D'après ce qui précède, $u \in \mathcal{W}_1^\infty(\mathbb{R}^+)$.
- Soit n un entier positif. Supposons que pour tout $m \leq n$, nous avons démontré que $t^m u \in \mathcal{W}_1^\infty(\mathbb{R}^+)$.
- Montrons alors que $t^{n+1}u \in \mathcal{W}_1^\infty(\mathbb{R}^+)$. Par hypothèse de récurrence, $t^n u \in \mathcal{W}_1^\infty(\mathbb{R}^+)$ donc $t^n u \in \mathcal{D}^N_{\text{moy}}$ et nous pouvons calculer $(L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}})(t^n u)$:

$$\begin{array}{rcl} (L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}})(t^n u) & = & 2D_t(tD_t t^n u) + \dfrac{t}{6} t^n u - \lambda_1^{\text{moy}} t^n u \\ & = & t^n (L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}})u - 4nit^n D_t u - 2n^2 t^{n-1} u \\ & = & t^n f - 4nit^n D_t u - 2n^2 t^{n-1} u. \end{array}$$

  Or, par hypothèses sur f, $t^n f \in H^\infty(\mathbb{R}^+)$. Par hypothèse de récurrence, $t^n D_t u \in H^\infty(\mathbb{R}^+)$ et $t^{n-1}u \in H^\infty(\mathbb{R}^+)$, donc $(L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}})(t^n u) \in H^\infty(\mathbb{R}^+)$. Mais $L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}}$ est continu, surjectif de $\mathcal{W}_1^\infty(\mathbb{R}^+)$ sur le sous-espace fermé $< u_1^{\text{moy}} >^\perp$ de $H^\infty(\mathbb{R}^+)$ et son noyau dans $\mathcal{W}_1^\infty(\mathbb{R}^+)$ est $< u_1^{\text{moy}} >^\perp$, donc $t^n u \in \mathcal{W}_1^\infty(\mathbb{R}^+)$, ce qui nous informe que $t^{n+1}u \in \mathcal{W}_1^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Ainsi, pour tout entier n, $t^n u \in \mathcal{W}_1^\infty(\mathbb{R}^+)$, donc $u \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$.
Soit $v \in \mathcal{V}^N$, par construction de u :

$$\langle (L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}})u, v\rangle_{L^2(\Omega^0)} = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega^0)}\,. \tag{6.13}$$

Les termes de bord donnés par l'intégration par parties de $\langle L^{\text{moy}} u, v\rangle_{L^2(\Omega^0)}$ sont nuls car $u \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$, ainsi :

$$\langle (L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}})u, v\rangle_{L^2(\Omega^0)} \;=\; \ell^{\text{moy}}(u,v) - \langle \lambda_1^{\text{moy}} u, v\rangle_{L^2(\Omega^0)}\,. \tag{6.14}$$

Donc, pour tout $v \in \mathcal{V}^N$, $\ell^{\text{moy}}(u,v) - \langle \lambda_1^{\text{moy}} u, v\rangle_{L^2(\Omega^0)} = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega^0)}$. Ceci achève la démonstration du Corollaire 6.5. □

6.2.3 État fondamental de l'opérateur L^{moy} et applications

Précisons l'état fondamental de l'opérateur L^{moy}.

Lemme 6.6. *La plus petite valeur propre de l'opérateur L^{moy} est simple et vaut :*

$$\lambda_1^{\text{moy}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Une fonction propre normalisée associée est :

$$u_1^{\text{moy}}(t) = \frac{1}{3^{1/4}} \exp\left(-\frac{t}{2\sqrt{3}}\right). \tag{6.15}$$

Démonstration : La première valeur propre a été calculée à la Proposition 6.4 : $\lambda_1^{\text{moy}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et cette valeur propre est simple. Cherchons des réels $\beta,\ \lambda$ tels que $L^{\text{moy}}u = \lambda u$, avec $u(t) = e^{-\beta t}$, alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ 2\beta(1-\beta t) + \frac{t}{6} = \lambda \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & 2\beta, \\ -\beta^2 + \frac{1}{12} & = & 0. \end{array} \right.$$

Mais la solution u provenant du choix $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$ n'est pas dans le domaine de l'opérateur. Donc :

$$\beta = \frac{1}{2\sqrt{3}},\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ u(t) = \frac{1}{3^{1/4}} \exp\left(-\frac{t}{2\sqrt{3}}\right),$$

en multipliant la fonction u par une constante de normalisation.
L'expression de cette fonction u_1^{moy} dans le domaine $\mathbb{R}^+ \times]-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}[$, en coordonnées polaires, est :

$$\tilde{u}_1^{\text{moy}}(\rho,\phi) = \frac{1}{3^{1/4}} e^{-i\frac{\rho^2\phi}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha\rho^2}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - i\right)\right).$$

□

Le vecteur propre u_1^{moy} permet de donner une majoration de μ :

Théorème 6.7. *Pour $\alpha < \sqrt{3}\Theta_0$, le bas du spectre $\mu(\alpha)$ de $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$ est une valeur propre telle que :*

$$0 < \mu(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\sqrt{3}}. \tag{6.16}$$

En particulier, la plus petite valeur propre $\mu(\alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers 0.

Démonstration : La fonction u_1^{moy} est dans le domaine de forme de q_α et :

$$q_\alpha(u_1^{\text{moy}}) = \ell^{\text{moy}}(u_1^{\text{moy}}, u_1^{\text{moy}}) = \lambda_1^{\text{moy}} ||u_1^{\text{moy}}||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \lambda_1^{\text{moy}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{6.17}$$

Or le bas du spectre $\mu(\alpha)$ de l'opérateur de Schrödinger se déduit de celui, $\lambda(\alpha)$, de la forme a_α en multipliant par α :

$$\mu(\alpha) = \alpha\ \lambda(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\sqrt{3}}. \tag{6.18}$$

Le Lemme de Persson 3.11 nous assure que le bas du spectre est une valeur propre dès que $\mu(\alpha) < \Theta_0$. Donc, si $\alpha < \sqrt{3}\Theta_0$, $\mu(\alpha)$ est une valeur propre.
De plus, $\mu(\alpha)$ est positif, majoré par $\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ pour $\alpha < \sqrt{3}\Theta_0$, donc tend vers 0 quand α tend vers 0. □

Nous allons maintenant nous intéresser à la solution du problème (6.11) dans le cas particulier où f est de la forme Pu_1^{moy} avec P un polynôme.

Lemme 6.8. *Soit $P = \sum_{k=0}^{n} p_k t^k$ un polynôme de degré n tel que $\sum_{k=0}^{n} (\sqrt{3})^k\ k!\ p_k = 0$.*
Définissons le polynôme $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ de degré n par ses coefficients $\tilde{p}_k$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{p}_1 & = & -\frac{p_0}{2}, \\ \tilde{p}_k & = & \frac{1}{2k^2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(k-1)\tilde{p}_{k-1} - p_{k-1}\right),\ \forall k = 2, \ldots, n, \\ \tilde{p}_0 & = & -\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{3})^k\ k!\ \tilde{p}_k. \end{array} \right. \tag{6.19}$$

Alors la fonction $\tilde{u} = \tilde{P} u_1^{\text{moy}}$ est l'unique solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}})\tilde{u} & = & P u_1^{\text{moy}}, \\ \int_0^{\infty} \tilde{u}(t)\ \overline{u_1^{\text{moy}}(t)}\ dt & = & 0. \end{array} \right. \tag{6.20}$$

Démonstration : Commençons par remarquer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_0^{\infty} t^k |u_1^{\text{moy}}(t)|^2\ dt = k!(\sqrt{3})^k. \tag{6.21}$$

À l'aide de la relation (6.21), nous déduisons que la condition $\sum_{k=0}^{n} (\sqrt{3})^k\ k!\ p_k = 0$ signifie exactement que $P u_1^{\text{moy}}$ est orthogonal à u_1^{moy}. Nous savons d'après le Corollaire 6.5 que le problème :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}})u & = & P u_1^{\text{moy}}, \\ \int_0^{\infty} u(t)\overline{u_1^{\text{moy}}(t)}\ dt & = & 0, \end{array} \right.$$

admet une unique solution. Cherchons cette solution $\tilde{u}$ sous la forme $\tilde{u} = \tilde{P} u_1^{\text{moy}}$ afin de simplifier le problème (6.20). En utilisant l'expression de u_1^{moy} donnée en (6.15), nous obtenons facilement :

$$(L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}})(\tilde{P}\ u_1^{\text{moy}}) = u_1^{\text{moy}} \left(-2\partial_t \tilde{P} + \frac{2}{\sqrt{3}} t \partial_t \tilde{P} - 2t\partial_t^2 \tilde{P} \right).$$

Après simplification par u_1^{moy}, le problème (6.20) se ramène donc à déterminer $\tilde{P}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left(-2\partial_t \tilde{P} + \frac{2}{\sqrt{3}} t \partial_t \tilde{P} - 2t\partial_t^2 \tilde{P}\right) & = & P, \\ \int_0^{\infty} \tilde{P}(t) |u_1^{\text{moy}}(t)|^2\ dt & = & 0, \end{array} \right. \tag{6.22}$$

À la vue de la première équation de (6.22), il est évident que $\tilde{P}$ est un poynôme en t.
Écrivons le polynôme $\tilde{P}$ sous la forme $\tilde{P}(t) = \sum_{k=0}^{m} \tilde{p}_k t^k$. Nous avons alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\left(-2\partial_t \tilde{P} + \frac{2}{\sqrt{3}} t \partial_t \tilde{P} - 2t\partial_t^2 \tilde{P} \right)(t) = -2 \sum_{k=1}^{m} k \tilde{p}_k t^{k-1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^{m} k \tilde{p}_k t^k - 2 \sum_{k=2}^{m} k(k-1) \tilde{p}_k t^{k-1}.$$

Regroupons les termes selon leur degré, nous nous ramenons à un problème d'algèbre élémentaire :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ -2\tilde{p}_1 + \sum_{k=1}^{m-1} \left(-2(k+1)^2 \tilde{p}_{k+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} k \tilde{p}_k \right) t^k + \frac{2}{\sqrt{3}} m \tilde{p}_m t^m = \sum_{k=0}^{n} p_k t^k.$$

Nous en déduisons donc tout d'abord que les deux polynômes $\tilde{P}$ et P sont de même degré, donc $m = n$ et nous pouvons déterminer de manière unique tous les coefficients de la façon suivante :

$$\tilde{p}_1 = -\frac{p_0}{2}, \tag{6.23}$$

$$\forall k = 2, \dots, m-1,\ \tilde{p}_k = \frac{1}{2k^2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(k-1)\tilde{p}_{k-1} - p_{k-1}\right), \tag{6.24}$$

$$\tilde{p}_m = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{p_m}{m}. \tag{6.25}$$

Vérifions la compatibilité des relations (6.24) pour $k = m$ et (6.25). Grâce à l'hypothèse d'orthogonalité de la fonction Pu_1^{moy}, il vient donc :

$$(\sqrt{3})^m\ m!\ p_m = -\sum_{k=0}^{m-1} (\sqrt{3})^k\ k!\ p_k.$$

Remplaçons chaque terme p_k pour $k = 0, \dots, m-1$ par son expression à l'aide des coefficients $\tilde{p}_j$, donnée en (6.23), (6.24), il vient :

$$\begin{aligned}(\sqrt{3})^m\ m!\ p_m &= 2\tilde{p}_1 + 2\sum_{k=2}^{m} k^2\ (k-1)!\ (\sqrt{3})^{k-1}\tilde{p}_k - \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{m-1} k\ k!\ (\sqrt{3})^k\tilde{p}_k \\ &= 2m\ m!\ (\sqrt{3})^{m-1}\ \tilde{p}_m.\end{aligned}$$

Ainsi $\tilde{p}_m = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{p_m}{m}$ et la condition (6.25) est redondante avec l'expression (6.24) pour $k = m$.
Il reste à déterminer $\tilde{p}_0$ par la condition d'orthogonalité qui s'écrit, grâce à la Remarque 6.21 :

$$\sum_{k=0}^{n} (\sqrt{3})^k\ k!\ \tilde{p}_k = 0 \text{ donc } \tilde{p}_0 = -\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{3})^k\ k!\ \tilde{p}_k.$$

□

Terminons ces quelques remarques par le calcul de $L(Pu_1^{\text{moy}})$ où P est un polynôme.

Remarque 6.9. *Soit P un polynôme selon les variables t et η, alors $L(Pu_1^{\text{moy}})$ est défini sur $\mathbb{R}^+ \times \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ et s'exprime sous la forme $L(Pu_1^{\text{moy}}) = \tilde{P}u_1^{\text{moy}}$ où $\tilde{P}$ est le polynôme :*

$$\tilde{P} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}P - \frac{t}{6}P + \frac{2}{\sqrt{3}}t\partial_t P - 2t\partial_t^2 P\right) + 2i\eta\left(P - \frac{t}{\sqrt{3}}P + 2t\partial_t P\right) + 2\eta^2 tP. \tag{6.26}$$

Notons que si P est un polynôme dont les coefficients d'ordre pairs en η sont réels et d'ordre impairs en η sont imaginaires purs, alors il en est de même pour le polynôme Q.

6.3 Rappels sur la réalisation de Neumann de $-\partial_\eta^2$ sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

Lemme 6.10. *Soit P un polynôme tel que $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P(\eta)\ d\eta = 0$. Alors il existe un unique polynôme S solution du problème :*

$$\begin{cases} -\partial_\eta^2 S = P, \\ \partial_\eta S|_{\eta=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = 0, \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(\eta)\ d\eta = 0. \end{cases} \tag{6.27}$$

De plus, si $P(t,\eta)=\sum_{k=0}^{n}(p_k^e(t)(i\eta)^{2k}+p_k^o(t)(i\eta)^{2k+1})$, *alors* S *est explicite :*

$$S(\eta)=\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k^e(t)}{(2k+1)(2k+2)}\left(-(i\eta)^{2k+2}+\frac{i^{2k+2}}{(2k+3)2^{2k+2}}\right)+2t\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k^o(t)}{2k+2}\left(-\frac{(i\eta)^{2k+3}}{2k+3}+\frac{i^{2k+3}\eta}{2^{2k+2}}\right). \tag{6.28}$$

Remarque 6.11. *L'expression (6.28) montre que* S *a la même parité que* P.
De même, si les coefficients de $i\eta$ *dans* P *sont réels, alors il en va de même de ceux de* S.

Démonstration :
Étape 1 :
Le problème (6.27) est juste un cas particulier de l'étude du problème de Neumann pour l'opérateur $-\partial_\eta^2$. Considérons l'opérateur $-\partial_\eta^2$ défini sur $\mathcal{S}(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right])$ et q_η la forme sesquilinéaire associée :

$$\forall u,v\in\mathcal{S}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right),\ q_\eta(u,v)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\partial_\eta u(\eta)\ \overline{\partial_\eta v(\eta)}\ d\eta. \tag{6.29}$$

Cette forme est positive donc admet une extension auto-adjointe. Son domaine de forme est donné par $\mathcal{V}_\eta=H^1\left(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\right)$ et le domaine de l'opérateur auto-adjoint associé vaut :

$$\mathcal{D}_\eta=\left\{u\in H^2\left(\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\right)\mid \partial_\eta u_{|_{\eta=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}=0\right\}.$$

Par intégration par parties, pour tout $u\in\mathcal{D}_\eta$ et tout $v\in\mathcal{V}_\eta$, $q_\eta(u,v)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-\partial_\eta^2 u(\eta)\overline{v(\eta)}\ d\eta$. La plus petite valeur propre de l'opérateur $-\partial_\eta^2$ est nulle et son sous-espace propre associé est constitué des fonctions constantes. Ainsi, l'opérateur $-\partial_\eta^2$ est continu et surjectif de $\mathcal{D}_\eta$ sur le sous-espace de $L^2\left(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\right)$ des fonctions orthogonales aux fonctions constantes, et son noyau est le sous-espace propre associé à la valeur propre nulle, c'est-à-dire les fonctions constantes. Donc, pour toute fonction $f\in L^2\left(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\right)$ telle que $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(\eta)\ d\eta=0$, le problème :

$$\left\{\begin{array}{rcl}-\partial_\eta^2 u&=&f,\\ \partial_\eta u_{|_{\eta=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}&=&0,\end{array}\right. \tag{6.30}$$

admet une solution $u\in\mathcal{D}_\eta$. Cette solution est unique en ajoutant la condition d'orthogonalité par rapport aux fonctions constantes.

Étape 2 :
Remarquons que lorsque f est polynomiale, les calculs sont explicites. Pour mettre en évidence le comportement de la solution en fonction de la parité de P, décomposons le polynôme P :

$$P(t,\eta)=\sum_{k=0}^{n}\left(p_k^e(t)(i\eta)^{2k}+p_k^o(t)(i\eta)^{2k+1}\right).$$

La condition $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}P(\eta)\ d\eta=0$ s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k^e}{2k+1}\left(\frac{i}{2}\right)^{2k+1}=0.$$

Commençons par donner une primitive de la première équation de (6.27), alors :

$$\partial_\eta S(\eta) \;=\; -\sum_{k=0}^{n}\left(ip_k^e\frac{(i\eta)^{2k+1}}{2k+1}+ip_k^o\frac{(i\eta)^{2k+2}}{2k+2}\right)+C, \tag{6.31}$$

où C est une constante arbitraire. Il vient alors :

$$\partial_\eta S_{|_{\eta=\frac{1}{2}}} = -i\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{p_k^e}{2k+1}\left(\frac{i}{2}\right)^{2k+1}+\frac{p_k^o}{2k+2}\left(\frac{i}{2}\right)^{2k+2}\right)+C,$$

et

$$\partial_\eta S_{|_{\eta=-\frac{1}{2}}} = -i\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{p_k^e}{2k+1}\left(\frac{i}{2}\right)^{2k+1}+\frac{p_k^o}{2k+2}\left(\frac{i}{2}\right)^{2k+2}\right)+C.$$

Par hypothèse, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k^e}{2k+1}\left(\frac{i}{2}\right)^{2k+1}$ est nul, donc $\partial_\eta S_{|_{\eta=-\frac{1}{2}}} = \partial_\eta S_{|_{\eta=\frac{1}{2}}}$. Pour remplir la deuxième condition, il faut choisir $C = i\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k^o}{2k+2}\left(\frac{i}{2}\right)^{2k+2}$ et $\partial_\eta S$ est uniquement déterminée par :

$$\partial_\eta S(\eta) = -i\sum_{k=0}^{n}\left(p_k^e\frac{(i\eta)^{2k+1}}{2k+1}+p_k^o\frac{(i\eta)^{2k+2}}{2k+2}-\frac{p_k^o}{2k+2}\left(\frac{i}{2}\right)^{2k+2}\right). \tag{6.32}$$

Intégrons à nouveau cette relation. La constante d'intégration est déterminée par la troisième relation de (6.27), donc S est unique et se calcule explicitement :

$$S(\eta) = -\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k^e(t)}{(2k+1)(2k+2)}\left((i\eta)^{2k+2}-\frac{i^{2k+2}}{(2k+3)2^{2k+2}}\right)-2t\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k^o(t)}{2k+2}\left(\frac{(i\eta)^{2k+3}}{2k+3}-\frac{i^{2k+3}\eta}{2^{2k+2}}\right).$$

□

Corollaire 6.12. *Soit f un polynôme en η à coefficients dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ tel que pour tout $t\in\overline{\mathbb{R}^+}$, $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t,\eta)\,d\eta = 0$. Soit $u = u^0+\tilde{u}$ où la fonction u^0 dépend uniquement de t et $u^0\in\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ et la fonction $\tilde{u}$ est un polynôme en η à coefficients dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ et est uniquement déterminée par les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} -\partial_\eta^2\tilde{u} &= 2tf,\\ \partial_\eta\tilde{u}_{|_{\eta=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} &= 0,\\ \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\tilde{u}(t,\eta)\,d\eta &= 0. \end{cases} \tag{6.33}$$

Alors, pour tout $v\in\mathcal{V}^N$:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t}\partial_\eta\tilde{u}\partial_\eta\overline{v}\,d\eta\,dt = \int_0^\infty\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\overline{v}\,d\eta\,dt. \tag{6.34}$$

De plus, si f est de la forme $P(t,\eta)u_1^{\text{moy}}$ avec P un polynôme dont les coefficients de $(i\eta)$ sont réels, alors il en va de même pour $\tilde{u}$.

Démonstration : Il suffit de reprendre la démonstration du Lemme 6.10 et le résultat se lit sur la formule (6.28) en remplaçant les coefficients p_k^e, p_k^o par des coefficients $2tp_k^e(t), 2tp_k^o(t)\in\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$. La Remarque 6.11 permet d'achever la preuve du Corollaire 6.12. □

Chapitre 7

Construction d'une solution formelle

7.1 Présentation du problème

Nous allons approcher un élément propre associé au bas du spectre par un développement selon les puissances de α^2. Ainsi, nous cherchons deux suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{P}\otimes\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+}))^{\mathbb{N}}$ et $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si nous définissons :

$$U^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{2k} u_k \text{ et } \mu^{(n)}(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{2k} m_k, \tag{7.1}$$

alors, modulo un reste en $\mathcal{O}_n(\alpha^{2n+2})$, nous avons :

$$a_\alpha(U^{(n)}, v) \equiv \mu^{(n)}(\alpha) \left\langle U^{(n)}, v \right\rangle_{L^2(\Omega^0)}, \ \forall v \in \mathcal{V}^N.$$

Pour l'instant, nous déterminons une solution formelle $U^{(\infty)}, \mu^{(\infty)}(\alpha)$ en injectant $U^{(\infty)}, \mu^{(\infty)}(\alpha)$ dans la relation (5.23). Nous en déduisons des équations en annulant les coefficients de α^{2k} pour $k \geq -1$.
L'annulation du coefficient de $\frac{1}{\alpha^2}$ conduit à la relation :

$$\forall v \in \mathcal{V}^N, \ \int_{\Omega^0} \frac{1}{t} \partial_\eta u_0 \ \partial_\eta \overline{v} \ dt \ d\eta = 0. \tag{7.2}$$

En particulier, cette relation doit rester vraie pour $v = u_0$, nous déduisons que $\displaystyle\int_{\Omega^0} |\partial_\eta u_0|^2 \frac{1}{t} \ dt \ d\eta$ est nul, donc $\partial_\eta u_0$ est nul presque partout sur Ω^0, par conséquent u_0 est uniquement fonction de la variable t et la relation (7.2) est bien vérifiée pour toute fonction $v \in \mathcal{V}^N$. Le Corollaire 6.12 permet de choisir un élément $u_0 \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$. Ainsi :

$$u_0 \equiv u_0(t) \text{ et } u_0 \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+}). \tag{7.3}$$

L'annulation du coefficient de α^{2k} pour $k \geq 0$ s'écrit :

$$\ell(u_k, v) + \frac{1}{2} \int_{\Omega^0} \frac{1}{t} \partial_\eta u_{k+1} \partial_\eta \overline{v} \ dt \ d\eta = \int_{\Omega^0} \left(\sum_{j=0}^{k} m_j u_{k-j} \right) \overline{v} \ dt \ d\eta, \forall v \in \mathcal{V}^N. \tag{7.4}_k$$

Commençons par regarder l'annulation des coefficients constants afin de dégager une stratégie pour calculer chaque terme du développement limité de manière récursive.

7.2 Coefficients constants

Nous reprenons la relation $(7.4)_0$ et résolvons donc le problème :

$$\forall v \in \mathcal{V}^N,\ \ell(u_0, v) + \frac{1}{2}\int_{\Omega^0} \partial_\eta u_1 \partial_\eta \overline{v}\ \frac{1}{t}\ dt\ d\eta = m_0 \int_{\Omega^0} u_0 \overline{v}\ dt\ d\eta. \tag{7.5}$$

Nous suivons la démarche suivante :

- Restreindre cette relation aux fonctions de la seule variable t.
- Déterminer une fonction u_0 et un réel m_0 en résolvant le problème spectral $L^{\text{moy}} u_0 = m_0 u_0$.
- Reprendre la relation initiale et obtenir des précisions sur la fonction u_1.
- Déterminer une fonction u_1 et un réel m_1 en regardant les coefficients de α^2.

Restreignons la relation (7.5) aux fonctions de $\mathcal{V}^N_{\text{moy}}$, nous obtenons la nouvelle relation :

$$\forall v \in \mathcal{V}^N_{\text{moy}},\ \ell^{\text{moy}}(u_0, v) = m_0 \langle u_0, v\rangle_{L^2(\Omega^0)}, \tag{7.6}$$

ce qui signifie que nous pouvons choisir pour (m_0, u_0) l'état fondamental $(\lambda_1^{\text{moy}}, u_1^{\text{moy}})$ associé à l'opérateur L^{moy}, déterminé au Lemme 6.6. Il reste maintenant à revenir à la relation (7.5), u_0 et m_0 étant connus, donc à déterminer une fonction u_1 telle que pour tout $v \in \mathcal{V}^N$:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega^0} \partial_\eta u_1 \partial_\eta \overline{v}\ \frac{1}{t}\ dt\ d\eta = \langle \lambda_1^{\text{moy}} u_1^{\text{moy}}, v\rangle_{L^2(\Omega^0)} - \ell(u_1^{\text{moy}}, v). \tag{7.7}$$

Le Lemme 6.6 donne l'expression de u_1^{moy} donc $u_1^{\text{moy}} \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$, et pour toute fonction $v \in \mathcal{V}^N_\ell$, $\ell(u_1^{\text{moy}}, v) = \langle L u_1^{\text{moy}}, v\rangle_{L^2(\Omega^0)}$. Définissons la fonction v_0 par :

$$v_0(t,\eta) := ((\lambda_1^{\text{moy}} - L) u_1^{\text{moy}})(t,\eta),\ \forall (t,\eta) \in \Omega^0.$$

La Remarque 6.9 avec le polynôme $P = 1$ montre que $L u_1^{\text{moy}}$ a bien un sens et v_0 est un polynôme en η à coefficients dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$.

Par construction de la fonction u_1^{moy}, nous savons que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} v_0(t,\eta)\ d\eta = 0$.

Reprenant (7.7), nous devons donc déterminer u_1 vérifiant :

$$\forall v \in \mathcal{V}^N,\ \frac{1}{2}\int_{\Omega^0} \partial_\eta u_1 \frac{1}{t}\ \partial_\eta \overline{v}\ d\eta\ dt\ = \int_{\Omega^0} v_0\ \overline{v}\ d\eta\ dt. \tag{7.8}$$

Utilisons le Corollaire 6.12 et choisissons alors une fonction u_1 décomposée sous la forme $u_1(t,\eta) = u_1^0(t) + \tilde{u}_1(t,\eta)$, où $u_1^0 \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ est libre et $\tilde{u}_1$ est un polynôme en η à coefficients dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ uniquement déterminé par les conditions :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\partial_\eta^2 \tilde{u}_1(t,\eta) & = & 2t(\lambda_1^{\text{moy}} u_1^{\text{moy}}(t) - (L u_1^{\text{moy}})(t,\eta)) \\ \partial_\eta \tilde{u}_1|_{\eta=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} & = & 0, \\ \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{u}_1(t,\eta)\ d\eta & = & 0. \end{array}\right. \tag{7.9}$$

Pour déterminer le terme m_1 et la fonction u_1^0, nous regardons les coefficients de α^2.

7.3 Coefficients de α^2

La relation $(7.4)_1$ s'écrit :

$$\forall v \in \mathcal{V}^N,\ \ell(u_1,v) + \frac{1}{2}\int_{\Omega^0} \frac{1}{t}\partial_\eta u_2 \partial_\eta \overline{v}\ dt\ d\eta = \int_{\Omega^0} (\lambda_1^{\text{moy}} u_1 + m_1 u_1^{\text{moy}})\overline{v}\ dt\ d\eta. \tag{7.10}$$

Cette relation doit être en particulier vérifiée pour $v = u_1^{\text{moy}}$, ce qui conduit à la relation :

$$\ell(u_1, u_1^{\text{moy}}) = \lambda_1^{\text{moy}} \langle u_1, u_1^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega^0)} + m_1. \tag{7.11}$$

La décomposition de u_1 et les propriétés de la fonction u_1^{moy} conduisent à l'égalité :

$$\begin{aligned} m_1 &= \ell(u_1^0, u_1^{\text{moy}}) + \ell(\tilde{u}_1, u_1^{\text{moy}}) - \lambda_1^{\text{moy}} \left\langle u_1^0, u_1^{\text{moy}} \right\rangle_{L^2(\Omega^0)} - \lambda_1^{\text{moy}} \langle \tilde{u}_1, u_1^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega^0)} \\ &= \left\langle u_1^0, (L - \lambda_1^{\text{moy}}) u_1^{\text{moy}} \right\rangle_{L^2(\Omega^0)} + \langle \tilde{u}_1, L u_1^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega^0)} - \lambda_1^{\text{moy}} \langle \tilde{u}_1, u_1^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega^0)}. \end{aligned}$$

La fonction u_1^0 ne dépend que de la variable t, donc $\left\langle u_1^0, (L - \lambda_1^{\text{moy}}) u_1^{\text{moy}} \right\rangle_{L^2(\Omega^0)} = 0$. De plus, par choix de la fonction $\tilde{u}_1$, nous avons $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{u}_1(t,\eta)\ d\eta = 0$, donc $\langle \tilde{u}_1, u_1^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega^0)} = 0$. L'expression de m_1 se simplifie et devient :

$$m_1 = \langle \tilde{u}_1, L u_1^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega^0)}. \tag{7.12}$$

Reprenons la relation (7.10) en se restreignant aux fonctions de $\mathcal{V}^N_{\text{moy}}$. Utilisons la décomposition de la fonction u_1 et les propriétés de $\tilde{u}_1$, alors u_0^1 doit vérifier la relation :

$$\forall v \in \mathcal{V}^N_{\text{moy}},\ \ell(\tilde{u}_1, v) + \ell^{\text{moy}}(u_1^0, v) = \int_0^\infty (\lambda_1^{\text{moy}} u_1^0 + m_1 u_1^{\text{moy}})\overline{v}\ dt, \tag{7.13}$$

car $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{u}_1\ d\eta = 0$. La régularité de $\tilde{u}_1$ justifie que $\ell(\tilde{u}_1, v) = \langle L\tilde{u}_1, v \rangle_{L^2(\Omega^0)} = \displaystyle\int_0^\infty (\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} L\tilde{u}_1\ d\eta)\overline{v}\ dt$, pour tout $v \in \mathcal{V}^N_{\text{moy}}$. Définissons la fonction $v_1(t) := \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} L\tilde{u}_1(t,\eta)\ d\eta$. D'après la Remarque 6.9, il est clair que $v_1 \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$. Récrivons la relation (7.13) :

$$\forall v \in \mathcal{V}^N_{\text{moy}},\ \ell^{\text{moy}}(u_1^0, v) - \lambda_1^{\text{moy}} \left\langle u_1^0, v \right\rangle_{L^2(\Omega^0)} = \langle m_1 u_1^{\text{moy}} - v_1, v \rangle_{L^2(\Omega^0)}. \tag{7.14}$$

Utilisons le Corollaire 6.5 avec $f = m_1 u_1^{\text{moy}} - v_1$, élément de $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ orthogonal à u_1^{moy} par construction de m_1 et de v_1. Donc il existe une fonction $u_1^0 \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}}) u_1^0 &=& m_1 u_1^{\text{moy}} - v_1, \\ \displaystyle\int_0^\infty u_1^0 \overline{u_1^{\text{moy}}}\ dt &=& 0. \end{array} \right. \tag{7.15}$$

De plus, par le Corollaire 6.5, nous savons que la fonction u_1^0 vérifie :

$$\forall v \in \mathcal{V}^N_{\text{moy}},\ \ell^{\text{moy}}(u_1^0, v) - \lambda_1^{\text{moy}} \left\langle u_1^0, v \right\rangle_{L^2(\Omega^0)} = \langle m_1 u_1^{\text{moy}} - v_1, v \rangle_{L^2(\Omega^0)}. \tag{7.16}$$

Revenons à la relation (7.10) pour déterminer $\tilde{u}_2$. Nous avons désormais déterminé m_1 et u_1^0 ; l'inconnue restante est la fonction $\tilde{u}_2$ vérifiant pour tout $v \in \mathcal{V}^N$:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega^0} \frac{1}{t}\partial_\eta u_2 \partial_\eta \overline{v}\ dt\ d\eta = \int_{\Omega^0} (\lambda_1^{\text{moy}} u_1 + m_1 u_1^{\text{moy}})\overline{v}\ dt\ d\eta - \ell(u_1, v). \tag{7.17}$$

Mais comme $u_1 = \tilde{u}_1 + u_1^0$ est régulier, alors pour tout $v \in \mathcal{V}^N$, $\ell(u_1, v) = \langle Lu_1, v\rangle_{L^2(\Omega^0)}$. Nous cherchons donc $\tilde{u}_2$ satisfaisant la relation suivante pour tout $v \in \mathcal{V}^N$:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega^0} \frac{1}{t}\partial_\eta \tilde{u}_2 \partial_\eta \overline{v}\; dt\; d\eta = \langle m_0 u_1 + m_1 u_0 - Lu_1, v\rangle_{L^2(\Omega^0)}\,.$$

Utilisons le Lemme 6.12 avec $f = m_0u_1 + m_1u_0 - Lu_1$. Nous devons calculer $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t,\eta)\; d\eta$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t,\eta)\; d\eta &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} m_0u_1 + m_1u_0 - Lu_1 d\eta \\ &= m_0u_1^0 + m_1u_0 \; - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} L\tilde{u}_1\; d\eta - L^{\mathrm{moy}}u_1^0 \;=\; 0, \end{aligned} \tag{7.18}$$

en utilisant le fait que $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{u}_1\; d\eta = 0$ et l'expression de $(L^{\mathrm{moy}} - \lambda_1^{\mathrm{moy}})u_1^0$ donnée en (7.15). Le Corollaire 6.5 montre que la fonction $\tilde{u}_2$ est uniquement déterminée par les conditions :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_\eta^2 \tilde{u}_2 &=& 2t\,(Lu_1 - m_0u_1 - m_1u_0)\,, \\ \partial_\eta \tilde{u}_{2|_{\eta=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} &=& 0, \\ \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{u}_2\; d\eta &=& 0. \end{array}\right.$$

Cette construction de la fonction u_1 et du réel m_1 permet d'initialiser une récurrence pour calculer les termes successifs du développement limité de la fonction $U^{(\infty)}$ et du réel $\mu^{(\infty)}(\alpha)$.

7.4 Algorithme pour la détermination des coefficients

Proposition 7.1. *Nous déterminons récursivement des coefficients $u_j \in \mathcal{P}\otimes\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ et $m_j \in \mathbb{R}$ tels que, formellement :*

$$P_\alpha\left(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{2j}u_j\right) \equiv \left(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{2j}m_j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{2j}u_j\right). \tag{7.19}$$

Pour tout $j \geq 1$, nous choisissons m_j et $u_j = u_j^0 + \tilde{u}_j$, avec $u_j^0 \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$, uniquement déterminés par les relations :

$$m_j = \langle \tilde{u}_j, Lu_1^{\mathrm{moy}}\rangle_{L^2(\Omega^0)}\,. \tag{7.20}_j$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\partial_\eta^2\tilde{u}_j &=& 2t\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} m_{j-1-i}u_i - Lu_{j-1}\right), \\ \partial_\eta\tilde{u}_{j|_{\eta=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = 0 \quad et \quad \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{u}_j\; d\eta &=& 0. \end{array}\right. \tag{7.21}_j$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} (L^{\mathrm{moy}} - \lambda_1^{\mathrm{moy}})u_j^0 &=& -\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} L\tilde{u}_j\; d\eta + \sum_{i=1}^{j} m_i u_{j-i}^0, \\ \displaystyle\int_0^\infty u_j^0(t)\;\overline{u_1^{\mathrm{moy}}(t)}\; dt &=& 0. \end{array}\right. \tag{7.22}_j$$

Démonstration : Pour justifier la Proposition 7.1, nous développons la relation (7.19) selon les puissances de α^2 et annulons les coefficients de α^{2k} pour $k \geq -1$. Pour $k \geq 0$, cette condition d'annulation est décrite par la relation $(7.4)_k$. Nous avons déjà étudié les cas $k = -1$, $k = 0$ et $k = 1$. Notons $\mathcal{P}(k)$ pour $k \geq 1$ la propriété :

$\mathcal{P}(k)$: «l'annulation des coefficients de α^{2k}, donnée par la relation $(7.4)_k$, détermine les fonctions u_k^0, $\tilde{u}_{k+1}$ et le réel m_k en résolvant $(7.20)_k$, $(7.22)_k$ et $(7.21)_{k+1}$. »

Démontrons maintenant que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

• Initialisons la récurrence :
Nous avons fait l'étude de l'annulation des coefficients de α^2 décrite par $(7.4)_1$. Le réel m_1 est déterminé par la relation (7.12), la fonction u_1^0 par (7.13) et $\tilde{u}_2$ par (7.19). Ces trois relations sont exactement les relations $(7.20)_1$, $(7.22)_1$ et $(7.21)_2$.
La relation de récurrence est donc bien démontrée au rang $n = 1$.

• Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(j)$ est vraie pour tout $j \leq k$. Ainsi, nous avons déterminé u_0, m_0, $\tilde{u}_1$ et par récurrence, les fonctions u_j^0, $\tilde{u}_{j+1}$ et les réels m_j satisfaisant les conditions $(7.22)_j$, $(7.21)_j$ et $(7.20)_j$ pour $j = 1, \ldots, k$. Écrivons la relation $(7.4)_{k+1}$ obtenue en annulant les coefficients de α^{2k+2} :

$$\forall v \in \mathcal{V}^N,\ \ell(u_{k+1}, v) + \frac{1}{2}\int_{\Omega^0} \frac{1}{t}\partial_\eta u_{k+2}\partial_\eta \overline{v}\ dt\ d\eta \ = \ \int_{\Omega^0} \sum_{j=0}^{k+1} m_j u_{k+1-j}\ \overline{v}\ dt\ d\eta. \tag{7.23}$$

Cette relation doit être vraie en prenant $v = u_1^{\text{moy}}$, donc :

$$\ell(u_{k+1}, u_1^{\text{moy}}) \ = \ \int_{\Omega^0} \sum_{j=0}^{k+1} m_j u_{k+1-j}\ \overline{u_1^{\text{moy}}}\ dt\ d\eta, \tag{7.24}$$

car u_1^{moy} est une fonction de t uniquement. De plus, les propriétés de la fonction u_1^{moy} justifie la formule d'intégration $\ell(u_{k+1}, u_1^{\text{moy}}) = \langle u_{k+1}, Lu_1^{\text{moy}}\rangle_{L^2(\Omega^0)}$. Par l'hypothèse de récurrence, nous avons décomposé les fonctions $u_1, \ldots, u_{k+1}$ sous la forme $u_i = u_i^0 + \tilde{u}_i$ où $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{u}_i\ d\eta = 0$ et u_i^0 est une fonction de $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$, orthogonale à u_1^{moy}. Grâce à la décomposition de u_{k+1}, nous pouvons écrire :

$$\langle u_{k+1}, Lu_1^{\text{moy}}\rangle_{L^2(\Omega^0)} = \langle \tilde{u}_{k+1}, Lu_1^{\text{moy}}\rangle_{L^2(\Omega^0)} + \int_0^\infty u_{k+1}^0 \overline{L^{\text{moy}} u_1^{\text{moy}}}\ dt.$$

Par construction de la fonction u_1^{moy}, nous avons $\displaystyle\int_0^\infty u_{k+1}^0 \overline{L^{\text{moy}} u_1^{\text{moy}}}\ dt = \lambda_1^{\text{moy}} \int_0^\infty u_{k+1}^0 \overline{u_1^{\text{moy}}}\ dt$.
Utilisons ces résultats pour simplifier (7.24) :

$$\begin{aligned}\langle \tilde{u}_{k+1}, Lu_1^{\text{moy}}\rangle_{L^2(\Omega^0)} &= \int_0^\infty u_{k+1}^0 \overline{(\lambda_1^{\text{moy}} - L^{\text{moy}})u_1^{\text{moy}}}\ dt + \int_{\Omega^0} \sum_{j=1}^{k} m_j u_{k+1-j}\ \overline{u_1^{\text{moy}}}\ dt\ d\eta + m_{k+1} \\ &= m_{k+1}.\end{aligned}$$

Nous retrouvons exactement la relation $(7.20)_{k+1}$.
Restreignons maintenant la relation (7.23) aux fonctions de $\mathcal{V}^N_{\text{moy}}$, alors :

$$\begin{aligned}\forall v \in \mathcal{V}^N_{\text{moy}},\ \ell(u_{k+1}^0, v) &= -\ell^{\text{moy}}(\tilde{u}_{k+1}, v) + \int_0^\infty \sum_{j=0}^{k+1} m_j \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u_{k+1-j}\ d\eta\ \overline{v}\ dt \\ &= -\ell(\tilde{u}_{k+1}, v) + \int_0^\infty \sum_{j=0}^{k+1} m_j u_{k+1-j}^0\ \overline{v}\ dt,\end{aligned} \tag{7.25}$$

car nous avons décomposé les fonctions $u_1, \dots, u_{k+1}$ sous la forme $u_i = u_i^0 + \tilde{u}_i$ où $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{u}_i \, d\eta$ est nul. Définissons la fonction v_{k+1} sur $\overline{\mathbb{R}^+}$ par $v_{k+1} := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} L\tilde{u}_{k+1} \, d\eta$. Comme $\tilde{u}_{k+1}$ est un polynôme en η à coefficients dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$, alors $v_{k+1} \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ et pour tout $v \in \mathcal{V}^N_{\text{moy}}$, nous pouvons intégrer par parties et obtenir la relation $\ell(\tilde{u}_{k+1}, v) = \langle v_{k+1}, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)}$. Appliquons le Corollaire 6.5 avec $f = -v_{k+1} + \sum_{j=0}^{k} m_{k+1-j} u_j^0$. Nous savons que $-v_{k+1} + \sum_{j=0}^{k} m_{k+1-j} u_j^0 \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$, il reste à vérifier la condition d'orthogonalité :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t)\overline{u_1^{\text{moy}}(t)} \, dt &= \int_0^\infty \left(-v_{k+1} + \sum_{j=0}^{j} m_{k+1-j} u_j^0 \right) \overline{u_1^{\text{moy}}(t)} \, dt \\ &= \langle \tilde{u}_{k+1}, L u_1^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega^0)} + \sum_{j=0}^{k} m_{k+1-j} \left\langle u_j^0, u_1^{\text{moy}} \right\rangle_{L^2(\Omega^0)} = 0, \end{aligned}$$

car les fonctions u_j^0 sont orthogonales à u_1^{moy} et $\langle \tilde{u}_{k+1}, L u_1^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega^0)} = m_{k+1}$. Donc il existe une fonction $u_{k+1}^0 \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}}) u_{k+1}^0 &=& f, \\ \displaystyle\int_0^\infty u_{k+1}^0(t) \, \overline{u_1^{\text{moy}}(t)} \, dt &=& 0. \end{array} \right. \tag{7.26}$$

Comme $u_{k+1}^0 \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$, alors pour tout $v \in \mathcal{V}^N_{\text{moy}}$, $\ell(u_{k+1}^0, v) = \left\langle L^{\text{moy}} u_{k+1}^0, v \right\rangle_{L^2(\Omega^0)}$. Nous avons ainsi construit une fonction $u_{k+1}^0 \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ qui vérifie (7.25).
La détermination de u_{k+1}^0 est exactement donnée par la relation $(7.22)_{k+1}$.
Revenons à la relation (7.23) pour déterminer $\tilde{u}_{k+2}$:

$$\forall v \in \mathcal{V}^N, \ \ell(u_{k+1}, v) + \frac{1}{2} \int_{\Omega^0} \frac{1}{t} \partial_\eta \tilde{u}_{k+2} \partial_\eta \overline{v} \, dt \, d\eta = \int_{\Omega^0} \left(\sum_{j=0}^{k+1} m_k u_{k+1-j} \right) \overline{v} \, dt \, d\eta. \tag{7.27}$$

Par hypothèse de récurrence, u_{k+1} est régulière, donc pour tout $v \in \mathcal{V}^N$, $\ell(u_{k+1}, v) = \langle L u_{k+1}, v \rangle_{L^2(\Omega^0)}$.
Nous devons ainsi chercher u_{k+2} telle que pour tout $v \in \mathcal{V}^N$:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega^0} \frac{1}{t} \partial_\eta u_{k+2} \partial_\eta \overline{v} \, dt \, d\eta = \left\langle \sum_{j=0}^{k+1} m_j u_{k+1-j} - L u_{k+1}, v \right\rangle_{L^2(\Omega^0)}.$$

Utilisons le Lemme 6.12 avec $f = \sum_{j=0}^{k+1} m_j u_{k+1-j} - L u_{k+1}$. Nous devons vérifier les hypothèses de ce Lemme et calculer $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t,\eta) \, d\eta$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t,\eta) \, d\eta &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{k+1} m_j u_{k+1-j} - L u_{k+1} \, d\eta \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} m_j u_{k+1-j}^0 - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} L\tilde{u}_{k+1} \, d\eta - L^{\text{moy}} u_{k+1}^0 = 0, \end{aligned} \tag{7.28}$$

en utilisant le fait que $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{u}_j \, d\eta = 0$ et l'expression de $(L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}})u_{k+1}^0$ donnée en (7.26). Le Corollaire 6.5 détermine de manière unique la fonction $\tilde{u}_{k+2}$ par les conditions :

$$\begin{cases} \partial_\eta^2 \tilde{u}_{k+2} &= 2t\left(Lu_{k+1} - \displaystyle\sum_{j=0}^{k+1} m_j u_{k+1-j}\right), \\ \partial_\eta \tilde{u}_{k+2}|_{\eta=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &= 0, \\ \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{u}_{k+2} \, d\eta &= 0. \end{cases}$$

Cette condition est exactement $(7.21)_{k+1}$.
La propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est donc vraie.
L'hypothèse de récurrence est donc bien vérifiée à tout ordre. □

Remarque 7.2. *La Proposition 7.1 donne un algorithme explicite pour déterminer m_j, $\tilde{u}_j$ et u_j^0 pour tout entier j. Nous pouvons utiliser Maple pour résoudre les relations $(7.20)_j$, $(7.21)_j$ et $(7.22)_j$ comme nous le ferons au Chapitre 11.*

7.5 Forme particulière des coefficients u_k

Nous pouvons déterminer une expression explicite pour tous les coefficient donnés par la Proposition 7.1 et les relations $(7.20)_j$, $(7.21)_j$, $(7.22)_j$.
Avant cela, faisons une remarque simple sur u_1^{moy}.

Remarque 7.3. *L'application*

$$\Phi : P \mapsto (u_1^{\text{moy}})^{-1} L(Pu_1^{\text{moy}})$$

est bien définie de $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^+ \times \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\right)$ à valeurs dans $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^+ \times \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\right)$.
Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k(t)(i\eta)^k$ avec $p_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$, alors $\Phi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \tilde{p}_k(t)(i\eta)^k$ avec $\tilde{p}_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ tel que, pour $k = 0, \ldots, n$:

$$\tilde{p}_k = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{t}{6}\right) p_k + \frac{2t}{\sqrt{3}} p_k' - 2tp_k'' + 2\left(1 - \frac{t}{\sqrt{3}} p_{k-1}\right) + 4tp_{k-1}' - 2tp_{k-2},$$

avec la convention $p_{-1} = 0$ et $p_{-2} = 0$.
Nous déduisons immédiatement que si p_k est réel pour tout $k \leq n$, alors $\tilde{p}_k$ est réel.

Tenant compte de la Remarque 7.3 et des deux Lemmes 6.8 et 6.10, le résultat suivant en résulte facilement :

Proposition 7.4. *Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, nous considérons $\tilde{u}_k$ et u_k^0 déterminés par les relations $(7.21)_k$ et $(7.22)_k$. Alors il existe deux polynômes $\tilde{P}_k \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^+ \times \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\right)$ et $P_k^0 \in \mathcal{P}\left(\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\right)$ tels que :*

$$\tilde{u}_k = \tilde{P}_k u_1^{\text{moy}} \text{ et } u_k^0 = P_k^0 u_1^{\text{moy}},$$

et $\tilde{P}_k$ est de la forme $\tilde{P}_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \tilde{p}_j(t)(i\eta)^j$ avec $\tilde{p}_j \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ réel.

Démonstration : Ce résultat se prouve par récurrence sur k.
Pour $k=1$, la Proposition 7.1 donne l'expression de u_1^0 et de $\tilde{u}_1$ par les relations $(7.21)_1$ et $(7.22)_1$. Ainsi $\tilde{u}_1$ est l'unique solution du problème :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\partial_\eta^2 \tilde{u}_1 & = & 2t(\lambda_1^{\rm moy} - L)u_1^{\rm moy}, \\ \partial_\eta \tilde{u}_{1|_{\eta=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = 0 & et & \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{u}_1 \, d\eta = 0. \end{array}\right. \tag{7.29}$$

La Remarque 7.3 avec $P=1$ montre qu'il existe un polynôme $\tilde{Q} = \displaystyle\sum_{k\geq 0} \tilde{q}_k (i\eta)^k$ tel que $\tilde{q}_k$ est réel et $(\lambda_1^{\rm moy} - L)u_1^{\rm moy} = \tilde{Q} u_1^{\rm moy}$. Ainsi, il suffit d'utiliser le Lemme 6.10 avec $P=\tilde{Q}$ pour obtenir l'existence d'un polynôme $\tilde{P}_1$ tel que $\tilde{u}_1 = \tilde{P}_1 u_1^{\rm moy}$. La Remarque 6.11 précise la parité des coefficients de $(i\eta)$ dans $\tilde{P}_1$.
La fonction u_1^0 est uniquement déterminée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (L^{\rm moy} - \lambda_1^{\rm moy})u_1^0 & = & \displaystyle -\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} L\tilde{u}_1 \, d\eta + m_1 u_1^{\rm moy}, \\ \displaystyle\int_0^\infty u_1^0(t)\, \overline{u_1^{\rm moy}(t)}\, dt & = & 0. \end{array}\right. \tag{7.30}$$

Mais nous avons vu que $\tilde{u}_1 = \tilde{P}_1 u_1^{\rm moy}$, donc, grâce à la Remarque 7.3, il existe un polynôme Q tel que $L(\tilde{P}_1 u_1^{\rm moy}) = Q u_1^{\rm moy}$. Le Lemme 6.10 montre l'existence d'un polynôme P_1^0 tel que $u_1^0 = P_1^0 u_1^{\rm moy}$.

Soit $k \geq 1$. Nous supposons que, pour tout $j \leq k$, les fonctions $\tilde{u}_j$ et u_j^0 s'écrivent :

$$\tilde{u}_j = \tilde{P}_j u_1^{\rm moy} \text{ et } u_j^0 = P_j^0 u_1^{\rm moy},$$

où $\tilde{P}_j$ et P_j^0 sont des polynômes tels que les coefficients de $(i\eta)$ dans $\tilde{P}_j$ sont réels.
La fonction $\tilde{u}_{k+1}$ est uniquement déterminée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\partial_\eta^2 \tilde{u}_{k+1} & = & \displaystyle 2t\left(\sum_{j=0}^{k} m_{k-j}u_j - Lu_k\right), \\ \partial_\eta \tilde{u}_{k+1|_{\eta=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = 0 & et & \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{u}_{k+1} \, d\eta = 0. \end{array}\right. \tag{7.31}$$

Par raisonnement par récurrence et la Remarque 7.3, il existe un polynôme $\tilde{Q}$ à coefficients en $(i\eta)$ réels tel que $\tilde{Q} = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} m_{k-j}u_j - Lu_k$. Il suffit d'appliquer le Lemme 6.10 avec $P=\tilde{Q}$ pour justifier l'existence d'un polynôme $\tilde{P}_{k+1}$ tel que $\tilde{u}_{k+1} = \tilde{P}_{k+1} u_1^{\rm moy}$. La Remarque 6.11 affirme que les coefficients de $(i\eta)$ dans $\tilde{P}_{k+1}$ sont réels.
La fonction u_{k+1}^0 est uniquement déterminée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (L^{\rm moy} - \lambda_1^{\rm moy})u_{k+1}^0 & = & \displaystyle -\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} L\tilde{u}_{k+1} \, d\eta + \sum_{j=1}^{k+1} m_j u_{k+1-j}^0, \\ \displaystyle\int_0^\infty u_{k+1}^0(t)\, \overline{u_1^{\rm moy}(t)}\, dt & = & 0. \end{array}\right. \tag{7.32}$$

Par raisonnement par récurrence, construction de $\tilde{u}_{k+1}$ et la Remarque 7.3, il existe un polynôme Q tel que $L(\tilde{P}_{k+1} u_1^{\rm moy}) = Q_{k+1} u_1^{\rm moy}$. Le Lemme 6.10 justifie l'existence d'un polynôme P_{k+1}^0 tel que $u_{k+1}^0 = P_{k+1}^0 u_1^{\rm moy}$. □

Chapitre 8

Majoration de l'asymptotique de $\mu(\alpha)$

Ce chapitre reprend la solution formelle construite au Chapitre 7 et estime son quotient de Rayleigh afin d'en déduire une majoration du bas du spectre à l'aide du Principe du min-max 2.2.

Théorème 8.1. *Soit n un entier positif et m_k les réels déterminés par la Proposition 7.1, pour $k \leq n$. Définissons :*

$$\mu^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{2k} m_k. \tag{8.1}$$

Alors, il existe $\alpha_0 > 0$ et une constante positive c tels que :

$$\forall \alpha \in]0, \alpha_0], \ \mu(\alpha) \leq \alpha \mu^{(n)} + c\alpha^{2n+3}. \tag{8.2}$$

De plus, il existe une valeur propre $\tilde{\mu}(\alpha)$ telle que :

$$\tilde{\mu}(\alpha) = \alpha \mu^{(n)} + \mathcal{O}(\alpha^{2n+1}) \text{ pour } \alpha \to 0. \tag{8.3}$$

Démonstration : Reprenons les fonctions u_k et les réels m_k, pour $k \geq 0$ déterminés par la Proposition 7.1 afin de construire un développement limité de la valeur propre. Définissons :

$$U^{(n)} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \alpha^{2k} u_k. \tag{8.4}$$

Nous voulons majorer le quotient de Rayleigh évalué en $U^{(n)}$: $\dfrac{a_\alpha(U^{(n)}, U^{(n)})}{||U^{(n)}||^2_{L^2(\Omega^0)}}$. Soit $v \in \mathcal{V}^N$, alors la Proposition 7.1, l'annulation du coefficient de α^{2k} pour $k \leq n$ donnée en $(7.4)_k$ et la définition de u_0 conduisent aux égalités :

$$\begin{aligned} a_\alpha(U^{(n)}, v) &= \frac{1}{\alpha^2} \int_{\Omega^0} \frac{1}{2t} \partial_\eta u_1^{\text{moy}} \partial_\eta \overline{v} \ dt \ d\eta + \alpha^{2n} \ell(u_n, v) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{2k} \left(\ell(u_k, v) + \frac{1}{2t} \partial_\eta u_{k+1} \partial_\eta \overline{v} \ dt \ d\eta \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{2k} \int_{\Omega^0} \left(\sum_{j=0}^{k} m_j u_{k-j} \right) \overline{v} \ dt \ d\eta + \alpha^{2n} \ell(u_n, v). \end{aligned} \tag{8.5}$$

Nous souhaitons comparer $a_\alpha(U^{(n)}, U^{(n)})$ avec $\mu^{(n)} \left\langle U^{(n)}, U^{(n)} \right\rangle_{L^2(\Omega^0)}$, donc, dans l'expression (8.5), nous récrivons la somme $\sum_{j=0}^{k} m_j u_{k-j}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^{2k} \sum_{j=0}^{k} m_j u_{k-j} = \mu^{(n)} U^{(n)} - \alpha^{2n+2} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{2k} \sum_{j=k+1}^{n} m_{k+n+1-j} u_j. \tag{8.6}$$

Reportons cette relation dans (8.5), il vient :

$$\begin{aligned} a_\alpha(U^{(n)}, v) &= \mu^{(n)} \left\langle U^{(n)}, v \right\rangle_{L^2(\Omega^0)} - \sum_{j=0}^{n} m_j \left\langle u_{n-j}, v \right\rangle_{L(\Omega^0)} + \alpha^{2n} \ell(u_n, v) \\ &\quad - \alpha^{2n+2} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{2k} \sum_{j=k+1}^{n} m_{k+n+1-j} \left\langle u_j, v \right\rangle_{L^2(\Omega^0)}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Comme nous souhaitons établir un développement limité au voisinage de 0, nous supposons $\alpha < 1$. Nous estimons le reste dans (8.7) en majorant α par 1, m_j par $\sup_{k=0,\dots,n} |m_k|$ et $||u_j||_{L^2(\Omega^0)}$ par $\sup_{k=0,\dots,n} ||u_k||_{L^2(\Omega^0)}$. Nous définissons donc une constante C indépendante de α :

$$C := n^2 \sup_{k=0,\dots,n} |m_k| \sup_{k=0,\dots,n} ||u_k||_{L^2(\Omega^0)}.$$

Insérons l'expression (8.6) dans (8.5), nous déduisons la majoration pour tout $v \in \mathcal{V}^N$:

$$\begin{aligned} \left| a_\alpha(U^{(n)}, v) - \mu^{(n)} \left\langle U^{(n)}, v \right\rangle_{L^2(\Omega^0)} \right| &\leq \alpha^{2n} \left| \ell(u_n, v) - \sum_{j=0}^{n} m_j \left\langle u_{n-j}, v \right\rangle_{L^2(\Omega^0)} \right| \\ &\quad + C\alpha^{2n+2} ||v||_{L^2(\Omega^0)}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Dans le but d'appliquer le principe du min-max, nous choisissons $v = U^{(n)}$ dans (8.8) et estimons $\ell(u_n, v) - \sum_{j=0}^{n} m_j \left\langle u_{n-j}, v \right\rangle_{L^2(\Omega^0)}$. Nous remarquons que :

$$\ell(u_n, U^{(n)}) = \ell(u_n, u_1^{\text{moy}}) + \sum_{k=1}^{n} \alpha^{2k} \ell(u_n, u_k) = m_n + \sum_{k=1}^{n} \alpha^{2k} \ell(u_n, u_k),$$

selon $(7.20)_n$, l'orthogonalité de u_n^0 avec u_1^{moy} et $\ell(\tilde{u}_n, u_1^{\text{moy}}) = \langle \tilde{u}_n, L u_1^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega^0)}$. En outre, comme u_1^{moy} est normalisé, nous déduisons :

$$\ell(u_n, U^{(n)}) - \sum_{j=0}^{n} \left\langle u_{n-j}, U^{(n)} \right\rangle_{L^2(\Omega^0)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha^{2k} \left(\ell(u_n, u_k) - \sum_{j=0}^{n} m_j \left\langle u_{n-j}, u_k \right\rangle_{L^2(\Omega^0)} \right). \tag{8.9}$$

Grâce à l'expression de u_k donnée à la Proposition 7.1 et aux Remarques 6.21 et 6.9, il existe une constante c_n ne dépendant que de n telle que :

$$\left| \ell(u_n, U^{(n)}) - \sum_{j=0}^{n} m_j \left\langle u_{n-j}, U^{(n)} \right\rangle_{L^2(\Omega^0)} \right| \leq c_n \alpha^2. \tag{8.10}$$

Nous utilisons cette majoration (8.10) et l'expression (8.8), il existe donc une constante C_n telle que :

$$\left| a_\alpha(U^{(n)}, U^{(n)}) - \mu^{(n)} \left\langle U^{(n)}, U^{(n)} \right\rangle_{L^2(\Omega^0)} \right| \leq C_n \alpha^{2n+2}. \tag{8.11}$$

Pour appliquer le principe du min-max, il reste à minorer $||U^{(n)}||_{L^2(\Omega^0)}$:

$$||U^{(n)}||_{L^2(\Omega^0)} \geq 1 - \sup_{k=0,\dots,n} ||u_k||_{L^2(\Omega^0)} \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}.$$

Donc il existe $\alpha_0 < 1$ et une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout $\alpha \in]0, \alpha_0[$:

$$||U^{(n)}||_{L^2(\Omega^0)} \geq C_0 > 0. \tag{8.12}$$

De (8.11) et (8.12), nous voyons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $\alpha \in]0, \alpha_0[$:

$$\frac{a_\alpha(U^{(n)}, U^{(n)})}{||U^{(n)}||^2_{L^2(\Omega^0)}} \leq \mu^{(n)} + c\alpha^{2n+2}. \tag{8.13}$$

Par application du principe du min-max et changement de variables, nous établissons la majoration :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists \alpha_0,\ \exists c > 0\ s.t.\ \forall \alpha \in]0, \alpha_0[,\ \mu(\alpha) \leq \alpha \mu^{(n)} + c\alpha^{2n+3}.$$

Reprenons les changements de variables effectués pour passer de la forme a à la forme a_α définie en (5.15). Considérons la fonction $V^{(n)}$ définie sur Ω_α par :

$$V^{(n)}(x_1, x_2) = U^{(n)}(t, \eta). \tag{8.14}$$

Alors :

$$\frac{a(V^{(n)}, V^{(n)})}{||V^{(n)}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}} = \alpha \frac{a_\alpha(U^{(n)}, U^{(n)})}{||U^{(n)}||^2_{L^2(\Omega^0)}}, \tag{8.15}$$

ce qui permet d'écrire l'estimation :

$$\frac{a(V^{(n)}, V^{(n)})}{||V^{(n)}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}} \leq \alpha \mu^{(n)} + c\alpha^{2n+3}. \tag{8.16}$$

D'après la Proposition 3.15, le bas du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger vaut Θ_0. Nous avons construit une fonction $V^{(n)}$ vérifiant (8.16), donc il existe un réel α_1 tel que $0 < \alpha_1 < \alpha_0$ et pour tout $\alpha \leq \alpha_1$, $\alpha(\mu^{(n)} + c\alpha^{2n+2}) < \Theta_0$. Pour de tels angles, $\mu(\alpha)$ est donc une valeur propre.

Reprenons la relation (8.8). Nous savons que grâce à la relation $(7.21)_{n+1}$:

$$\ell(u_n, v) - \sum_{j=0}^{n} m_j \langle u_{n-j}, v \rangle_{L^2(\Omega^0)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^0} \frac{1}{t} \partial_\eta^2 \tilde{u}_{n+1} \overline{v}\ dt\ d\eta.$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le Théorème spectral 2.3 et la relation (8.12), alors :

$$d\left(\mu^{(n)}, \sigma(P_\alpha)\right) \leq \mathcal{O}(\alpha^{2n}).$$

Par conséquent, il existe une valeur propre $\tilde{\mu}(\alpha)$ de $P_{\mathcal{A}_0, \Omega_\alpha}$ avec l'asymptotique $\alpha\mu^{(n)} + \mathcal{O}(\alpha^{2n+1})$. □

Remarque 8.2. *En considérant $\mu^{(n+1)}$ dans le Théorème 8.1, nous pouvons montrer qu'il existe une valeur propre avec le développement limité $\alpha\mu^{(n)} + \mathcal{O}(\alpha^{2n+3})$.*

Chapitre 9

Décroissance exponentielle à l'infini des premiers vecteurs propres

Nous utilisons une méthode due à Agmon [1] (cf aussi la présentation dans [2, 3]) qui précise la localisation des vecteurs propres de la réalisation de l'opérateur de Schrödinger pour certains domaines. Cette méthode se base sur deux idées :

- La première idée est d'estimer la forme $q_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}(e^\phi u)$ à l'aide de $\left\langle e^{2\phi} P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha} u, u\right\rangle_{L^2(\Omega_\alpha)}$ et d'un terme de la forme $|\nabla\phi|^2 e^{2\phi}|u|^2$. Le choix de la fonction ϕ permet de montrer que u est exponentiellement petit sur une partie du domaine.
- La deuxième idée consiste à utiliser une partition de l'unité et à contrôler la contribution de l'infini et du voisinage de l'origine.

La Section 9.1 propose une décroissance des états propres performante pour $|x| \geq \frac{C}{\alpha}$. Nous verrons au chapitre suivant que cette estimation n'est pas suffisante pour justifier que le développement limité de $\mu(\alpha)$ à l'ordre $2n+2$ est $\alpha\mu^{(n)}$. Nous proposons donc une nouvelle estimation de la décroissance à la Section 9.1 à l'aide d'un contrôle différent de la contribution à l'infini.

9.1 Décroissance à l'aide des estimations du spectre essentiel

Théorème 9.1. *Soit Ω_α un secteur d'angle α. Supposons que $\mu_k(\alpha)$ est la $k-$ème valeur propre pour la réalisation de Neumann sur ce domaine et que $\mu_k(\alpha) < \Theta_0$. Notons $u_{k,\alpha}$ un vecteur propre normalisé associé à la valeur propre $\mu_k(\alpha)$. Pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < \Theta_0 - \mu_k(\alpha)$, il existe une constante $C_{\varepsilon,\alpha}$ telle que :*

$$\left|\left|e^\phi u_{k,\alpha}\right|\right|_{H^1_{\mathcal{A}_0}(\Omega_\alpha)} \leq C_{\varepsilon,\alpha}, \tag{9.1}$$

où la fonction ϕ est définie sur Ω_α par :

$$\forall x \in \Omega_\alpha,\ \ \phi(x) = \sqrt{\Theta_0 - \mu_k(\alpha) - \varepsilon}\ |x|. \tag{9.2}$$

Démonstration : Commençons par établir l'estimation de la norme L^2. D'après le Lemme 3.9, la relation suivante est valable pour la k-ième fonction propre et la fonction ϕ construite précédemment :

$$\text{Re}\ \left\langle e^{2\phi} P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha} u_{k,\alpha}, u_{k,\alpha}\right\rangle_{L^2(\Omega_\alpha)} + ||\ |\nabla\phi|\ e^\phi u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} \ = \ ||\nabla_{\mathcal{A}_0}(e^\phi u_{k,\alpha})||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}. \tag{9.3}$$

Par hypothèse sur la fonction $u_{k,\alpha}$, nous avons :

$$\text{Re}\ \left\langle e^{2\phi} P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha} u_{k,\alpha}, u_{k,\alpha}\right\rangle_{L^2(\Omega_\alpha)} \ = \ \mu_k(\alpha)\ ||e^\phi u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}. \tag{9.4}$$

Soient χ_1 et χ_2 deux fonctions infiniment dérivables sur $\overline{\Omega_\alpha}$ à support respectifs dans $\overline{\Omega_\alpha} \cap \mathcal{B}(0,2)$ et $\overline{\Omega_\alpha} \setminus \mathcal{B}(0,1)$ et telles que $|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 = 1$ sur $\overline{\Omega_\alpha}$. Nous définissons pour tout $x \in \Omega_\alpha$ et $R > 0$:

$$\chi_j^R(x) = \chi_j\left(\frac{|x|}{R}\right), \text{ alors } |\nabla\chi_j^R(x)|^2 = \frac{1}{R^2}\left|(\nabla\chi_j)\left(\frac{x}{R}\right)\right|^2 \leq \frac{C}{R^2}. \tag{9.5}$$

Estimons maintenant $||\nabla_{\mathcal{A}_0}(e^\phi u_{k,\alpha})||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}$ à l'aide du Lemme 3.10 :

$$q_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}(e^\phi u_{k,\alpha}) = \sum_{j=1}^{2} q_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}(\chi_j^R e^\phi u_{k,\alpha}) - \frac{1}{R^2}\sum_{j=1}^{2} ||e^\phi u_{k,\alpha}\ |\nabla\chi_j^R|\ ||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}. \tag{9.6}$$

Reportons les relations (9.4) et (9.6) dans (9.3), il vient :

$$\int_{\Omega_\alpha} (\mu_k(\alpha) + |\nabla\phi|^2)e^{2\phi}|u_{k,\alpha}|^2 dx = \sum_{j=1}^{2} q_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}(\chi_j^R e^\phi u_{k,\alpha}) - \frac{1}{R^2}\sum_{j=1}^{2} ||e^\phi u_{k,\alpha}\ |\nabla\chi_j^R|\ ||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}. \tag{9.7}$$

Par construction de la fonction ϕ, le gradient $\nabla\phi$ s'exprime $|\nabla\phi|^2 = \Theta_0 - \mu_k(\alpha) - \varepsilon$. Reportons cette estimation dans (9.7), il vient :

$$(\Theta_0 - \varepsilon)||e^\phi u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} = \sum_{j=1}^{2} q_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}(\chi_j^R e^\phi u_{k,\alpha}) - \frac{1}{R^2}\sum_{j=1}^{2} ||e^\phi u_{k,\alpha}\ |\nabla\chi_j^R|\ ||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}. \tag{9.8}$$

Soit $R_0 = \sqrt{\frac{2C}{\varepsilon}}$ où C apparaît en (9.5). L'hypothèse sur la partition d'unité implique que pour tout $R \geq R_0$:

$$\frac{1}{R^2}\sum_{j=1}^{2} ||e^\phi u_{k,\alpha}\ |\nabla\chi_j^R|\ ||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} \leq \frac{\varepsilon}{2}||e^\phi u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}. \tag{9.9}$$

Reportons la relation (9.9) dans (9.8) pour tout $R > R_0$:

$$\frac{\varepsilon}{2}||e^\phi u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} \leq \Theta_0||e^\phi u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} - \sum_{j=1}^{2} q_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}(\chi_j^R e^\phi u_{k,\alpha}). \tag{9.10}$$

La fonction $\chi_2^R e^\phi u_{k,\alpha}$ est à support en dehors de $\mathcal{B}(0,R)$; ainsi, l'application du min-max sur le domaine $\Omega_\alpha \cap \complement\mathcal{B}(0,R)$ et la définition de $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}_0}, R)$ donnent la minoration :

$$q_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}(\chi_2^R e^\phi u_{k,\alpha}) \geq \Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}_0}, R)||\chi_2^R e^\phi u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}. \tag{9.11}$$

Mais $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}_0}, R)$ converge en croissant vers $\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}_0}) = \Theta_0$ et nous avons vu lors de la démonstration du Lemme de Persson, à la relation (3.60) qu'il existait c indépendante de α telle que pour tout R :

$$\Sigma(-\Delta_{\mathcal{A}_0}, R) = \inf_{\phi\in C_0^\infty(\overline{\Omega}\setminus S_R),\phi\neq 0} \frac{||\nabla_{\mathcal{A}_0}\phi||^2_{L^2(\Omega)}}{||\phi||^2_{L^2(\Omega)}} \geq \Theta_0 - \frac{c}{\alpha^2 R^2}. \tag{9.12}$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}(\chi_2^R e^\phi u_{k,\alpha}) &\geq \left(\Theta_0 - \frac{c}{\alpha^2 R^2}\right)\ ||\chi_2^R e^\phi u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} \\ &\geq \left(\Theta_0 - \frac{c}{\alpha^2 R^2}\right)\int_{\complement\mathcal{B}(0,2R)} e^{2\phi}|u_{k,\alpha}|^2\ dx. \end{aligned} \tag{9.13}$$

Estimons, grâce à la minoration (9.13), le terme $\Theta_0||e^{\phi}u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} - \sum_{j=1}^{2} q_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}(\chi_j^R e^{\phi}u_{k,\alpha})$, majorant dans (9.10), en séparant ce qui est localisé au voisinage de 0 et ce qui est à l'infini :

$$\begin{aligned}\Theta_0||e^{\phi}u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} - \sum_{j=1}^{2} q_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}(\chi_j^R e^{\phi}u_{k,\alpha}) &\leq \Theta_0\left(\int_{\mathcal{B}(0,2R)} e^{2\phi}|u_{k,\alpha}|^2\,dx + \int_{\complement\mathcal{B}(0,2R)} e^{2\phi}|u_{k,\alpha}|^2\,dx\right)\\ &\quad - \left(\Theta_0 - \frac{c}{\alpha^2R^2}\right)\int_{\complement\mathcal{B}(0,2R)} e^{2\phi}|u_{k,\alpha}|^2dx - q_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}(\chi_1^R e^{\phi}u_{k,\alpha})\\ &\leq \frac{c}{\alpha^2R^2}\int_{\complement\mathcal{B}(0,2R)} e^{2\phi}|u_{k,\alpha}|^2dx + \Theta_0\int_{\mathcal{B}(0,2R)} e^{2\phi}|u_{k,\alpha}|^2dx,\end{aligned}$$

car $q_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}(\chi_1^R e^{\phi}u_{k,\alpha})$ est positif. Reportons cette dernière relation dans (9.10), il vient ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2}\int_{\complement\mathcal{B}(0,2R)} e^{2\phi}|u_{k,\alpha}|^2dx &\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_\alpha} e^{2\phi}|u_{k,\alpha}|^2dx\\ &\leq \frac{c}{\alpha^2R^2}\int_{\complement\mathcal{B}(0,2R)} e^{2\phi}|u_{k,\alpha}|^2\,dx + \Theta_0\int_{\mathcal{B}(0,2R)} e^{2\phi}|u_{k,\alpha}|^2\,dx. \quad (9.14)\end{aligned}$$

Notons $R_1 := \max\left(R_0, \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{\varepsilon}}\right) = \sqrt{\frac{2C'(\alpha)}{\varepsilon}}$ avec $C'(\alpha) = \max\left(2\frac{c}{\alpha^2}, C\right)$. Alors, pour tout $R \geq R_1$:

$$\frac{\varepsilon}{4}\int_{\complement\mathcal{B}(0,2R)} e^{2\phi}|u_{k,\alpha}|^2dx \leq \Theta_0\int_{\mathcal{B}(0,2R)} e^{2\phi}|u_{k,\alpha}|^2\,dx. \quad (9.15)$$

Nous pouvons majorer strictement Θ_0 par 1, $e^{2\phi(x)}$ par $e^{4R\sqrt{\Theta_0-\mu_k(\alpha)-\varepsilon}}$ pour tout $x \in \mathcal{B}(0,2R)$, l'estimation (9.15) se simplifie à l'aide de ces majorations et devient :

$$\int_{\complement\mathcal{B}(0,2R)} e^{2\phi}|u_{k,\alpha}|^2dx \leq \frac{4}{\varepsilon}e^{4R\sqrt{\Theta_0-\mu_k(\alpha)-\varepsilon}}\int_{\mathcal{B}(0,2R)} |u_{k,\alpha}|^2dx. \quad (9.16)$$

En se rappelant que $u_{k,\alpha}$ est un vecteur propre normalisé, nous pouvons majorer $\int_{\mathcal{B}(0,2R)} |u_{k,\alpha}|^2\,dx$ par 1 et déduire ainsi une majoration de la norme de $e^{\phi}u_{k,\alpha}$:

$$\int_{\Omega_\alpha} e^{2\phi}|u_{k,\alpha}|^2dx \leq \left(\frac{4}{\varepsilon}+1\right)e^{4R\sqrt{\Theta_0-\mu_k(\alpha)-\varepsilon}}. \quad (9.17)$$

Cette dernière relation est valable pour tout $R \geq \sqrt{\frac{2C'(\alpha)}{\varepsilon}}$, donc en particulier pour $R = \sqrt{\frac{2C'(\alpha)}{\varepsilon}}$ et donne :

$$\int_{\Omega_\alpha} e^{2\phi}|u_{k,\alpha}|^2dx \leq \left(\frac{4}{\varepsilon}+1\right)e^{4\sqrt{2C'(\alpha)\left(\frac{\Theta_0-\mu_k(\alpha)}{\varepsilon}-1\right)}}. \quad (9.18)$$

Il reste maintenant à contrôler la norme de $\nabla_{\mathcal{A}_0}(e^{\phi}u_{k,\alpha})$. À cet effet, reprenons les relations (9.3) et (9.4), alors :

$$||\nabla_{\mathcal{A}_0}(e^{\phi}u_{k,\alpha})||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} = (\Theta_0-\varepsilon)||e^{\phi}u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}. \quad (9.19)$$

Or nous venons d'estimer $||e^{\phi}u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}$, ce qui permet d'achever la preuve. □

Corollaire 9.2. *Sous les mêmes hypothèse qu'au Théorème 9.1 :*

$$||e^{\phi}u_{k,\alpha}||_{H^1(\Omega_\alpha)} \leq C_{\varepsilon,\alpha}.$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que :

$$||\nabla(e^{\phi}u_{k,\alpha})||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} \leq 2||\nabla_{\mathcal{A}_0}(e^{\phi}u_{k,\alpha})||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} + 2||\ |\mathcal{A}_0|\ e^{\phi}u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $|\mathcal{A}_0(x)|\ e^{\phi}(x) = |x|e^{\sqrt{\Theta_0-\mu_k(\alpha)-\varepsilon}|x|}$. Choisissons $\varepsilon_1 \in]0,\varepsilon[$, alors, pour $|x|$ assez grand :

$$|\mathcal{A}_0(x)|\ e^{\phi(x)} \leq e^{\sqrt{\Theta_0-\mu_k(\alpha)-\varepsilon_1}|x|}.$$

Le Théorème 9.1 avec cet ε_1 montre la convergence de $||\ |\mathcal{A}_0|\ e^{\phi}u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}$ car, à distance finie, $\mathcal{A}_0$ est bornée. □

9.2 Décroissance à l'aide des estimations de la valeur propre

Fixons $\varepsilon_0 > 0$. Pour tout $\alpha > 0$, nous définissons R par :

$$R := \frac{\varepsilon_0}{\alpha}. \tag{9.20}$$

Notons $\Omega^{NDN}_{\alpha,\varepsilon_0}$ le domaine représenté à la Figure 9.1 ainsi que les bords Γ_j, $j = 1,2$:

$$\Omega^{NDN}_{\alpha,\varepsilon_0} := \{x \in \mathbb{R}^2 |\ (x_1 + R, x_2) \in \Omega_\alpha \setminus \mathcal{B}(0,R)\}. \tag{9.21}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &:= \left\{\left(x\cos\frac{\alpha}{2} - R, x\sin\frac{\alpha}{2}\right) |\ x \geq R\right\} \cup \left\{\left(x\cos\frac{\alpha}{2} - R, -x\sin\frac{\alpha}{2}\right) |\ x \geq R\right\}, \\
\Gamma_2 &:= \left\{(R(\cos\theta - 1), R\sin\theta)|\ \theta \in \left]-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right[\right\}.
\end{aligned}$$

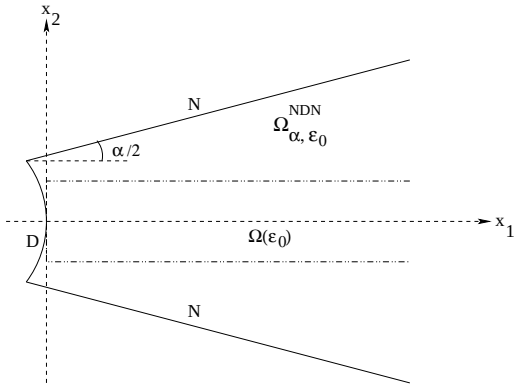


FIG. 9.1 – Domaine $\Omega^{NDN}_{\alpha,\varepsilon_0}$.

Notons $\mu^{NDN}(\alpha,\varepsilon_0)$ le bas du spectre de l'opérateur $P := D^2_{x_1} + (D_{x_2} - x_1)^2$ avec condition de Neumann sur les bords Γ_1 et de Dirichlet sur le bord Γ_2 ainsi que q la forme quadratique associée à P. Définissons le domaine :

$$\Omega(\varepsilon_0) :=]0, +\infty[\times \left]-\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon_0}{4}\right[. \tag{9.22}$$

Proposition 9.3. *Il existe $\mu^{NDN}(\varepsilon_0) > 0$ et $\alpha_0 > 0$ tels que :*

$$\forall \alpha \in]0, \alpha_0], \ \mu^{NDN}(\alpha, \varepsilon_0) \geq \mu^{NDN}(\varepsilon_0). \tag{9.23}$$

Commençons par énoncer un lemme concernant le bas du spectre de la réalisation de Neumann de l'opérateur $D_{x_1}^2 + (D_{x_2} - x_1)^2$ sur $\Omega(\varepsilon_0)$, noté $P_{\tilde{\mathcal{A}},\Omega(\varepsilon_0)}$ avec $\tilde{\mathcal{A}} = (0, x_1)$.

Lemme 9.4. *Le bas du spectre de $P_{\tilde{\mathcal{A}},\Omega(\varepsilon_0)}$, noté $\lambda(\Omega(\varepsilon_0))$, est strictement positif.*

Démonstration : D'après le Corollaire 3.12, nous déduisons que le bas du spectre essentiel de $P_{\tilde{\mathcal{A}},\Omega(\varepsilon_0)}$ s'exprime :

$$\begin{aligned} \inf \sigma_{ess}(P_{\tilde{\mathcal{A}},\Omega(\varepsilon_0)}) &= \sup_{r>0} \inf_{||u||_{L^2(\Omega(\varepsilon_0))}=1} \left\{ \int_{\Omega(\varepsilon_0)} |\nabla_{\tilde{\mathcal{A}}} u|^2 dx, \ u \in C_0^\infty \left( ]r, +\infty[\times \left] -\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon_0}{4} \right[\right) \right\} \\ &\geq \inf_{||u||_{L^2(\Omega(\varepsilon_0))}=1} \left\{ \int_{\Omega(\varepsilon_0)} |\nabla_{\tilde{\mathcal{A}}} u|^2 dx, \ u \in H^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(\Omega(\varepsilon_0)) \right\} =: \mu(\Omega(\varepsilon_0)). \end{aligned} \tag{9.24}$$

Cette dernière relation s'obtient facilement en prolongeant par zéro pour $x_1 \leq r$ les fonctions vérifiant la condition de Dirichlet en $x_1 = r$. Montrons que $\mu(\Omega(\varepsilon_0)) > 0$. Définissons $\phi(x) = x_1 x_2$ pour tout $x \in \Omega(\varepsilon_0)$, alors, par changement de jauge :

$$\mu(\Omega(\varepsilon_0)) = \inf_{||u||_{L^2(\Omega(\varepsilon_0))}=1} \left\{ \int_{\Omega(\varepsilon_0)} |\nabla_{\tilde{\mathcal{A}}+\nabla\phi} u|^2 dx, \ u \in H^1_{\tilde{\mathcal{A}}+\nabla\phi}(\Omega(\varepsilon_0)) \right\}. \tag{9.25}$$

Effectuons une transformation de Fourier à l'opérateur $P_{\tilde{\mathcal{A}}+\nabla\phi}$ selon la variables x_1 et définissons le réel $\mu(\xi_1)$ pour tout $\xi_1 \in \mathbb{R}$ par :

$$\mu(\xi_1) := \inf_{u \in C_0^\infty([-\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon_0}{4}]), u \neq 0} \frac{\displaystyle\int_{-\frac{\varepsilon_0}{4}}^{\frac{\varepsilon_0}{4}} (\xi_1 - x_2)^2 |u(x_2)|^2 + |D_{x_2} u(x_2)|^2 \, dx_2}{\displaystyle\int_{-\frac{\varepsilon_0}{4}}^{\frac{\varepsilon_0}{4}} |u(x_2)|^2 \, dx_2}. \tag{9.26}$$

Il est facile de voir que $\lim_{\xi_1 \to \pm\infty} \mu(\xi_1) = +\infty$. En outre, $\mu(\xi_1)$ est strictement positive pour tout $\xi_1 \in \mathbb{R}$ et continue, donc il existe $\underline{\mu} > 0$ qui minore $\mu(\xi_1)$ pour tout $\xi_1 \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $\mu(\Omega(\varepsilon_0)) \geq \underline{\mu} > 0$ et a fortiori, reprenant (9.24), le bas du spectre essentiel de $P_{\tilde{\mathcal{A}},\Omega(\varepsilon_0)}$ est supérieur à $\underline{\mu}$ donc strictement positif.
Supposons que la plus petite valeur propre de $P_{\tilde{\mathcal{A}},\Omega(\varepsilon_0)}$ est nulle. Alors, il existe $u \in \mathcal{D}^N(P_{\tilde{\mathcal{A}},\Omega(\varepsilon_0)})$ normalisé tel que :

$$\begin{aligned} D_{x_1} u &= 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega(\varepsilon_0)), \\ (D_{x_2} - x_1) u &= 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega(\varepsilon_0)). \end{aligned}$$

Si nous dérivons la première relation par rapport à x_2 et la première par rapport à x_1 et soustrayons les deux relations, alors $u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega(\varepsilon_0))$, ce qui contraire à l'hypothèse de normalisation de u. Ainsi, la première valeur propre de $P_{\tilde{\mathcal{A}},\Omega(\varepsilon_0)}$ est strictement positive, donc $\lambda(\Omega(\varepsilon_0)) > 0$. □
Utilisons le Lemme 9.4 pour justifier la Proposition 9.3.
Démonstration : Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite $v_{\alpha_n} \in H^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(\Omega^{NDN}_{\alpha_n,\varepsilon_0})$ telle que $||v_{\alpha_n}||_{L^2(\Omega^{NDN}_{\alpha_n,\varepsilon_0})} = 1$ et $\lim_{\alpha_n \to 0} q(v_{\alpha_n}) = 0$. Par positivité de la forme quadratique, nous avons :

$$q(v_{\alpha_n}) \geq \int_{\Omega(\varepsilon_0)} |D_{x_1} v_{\alpha_n}|^2 + |(D_{x_2} - x_1) v_{\alpha_n}|^2 dx. \tag{9.27}$$

D'après le Lemme 9.4 et le principe du min-max, nous pouvons minorer $q(v_{\alpha_n})$ comme suit :

$$q(v_{\alpha_n}) \geq \int_{\Omega(\varepsilon_0)} |D_{x_1} v_{\alpha_n}|^2 + |(D_{x_2} - x_1) v_{\alpha_n}|^2 dx \geq \lambda(\Omega(\varepsilon_0)) ||v_{\alpha_n}||^2_{L^2(\Omega(\varepsilon_0))}. \tag{9.28}$$

Par hypothèse, $\lim_{\alpha_n \to 0} q(v_{\alpha_n}) = 0$ donc $\lim_{\alpha_n \to 0} ||v_{\alpha_n}||_{L^2(\Omega(\varepsilon_0))} = 0$ car $\lambda(\Omega(\varepsilon_0)) > 0$.
Soit χ_1 une fonction de troncature définie sur $\mathbb{R}$, infiniment dérivable, telle que $0 \leq \chi_1 \leq 1$ et :

$$\chi_1(x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_2 \geq \frac{\varepsilon_0}{4}, \\ 0 & \text{si} \quad x_2 \leq -\frac{\varepsilon_0}{4}. \end{cases} \tag{9.29}$$

Définissons également $\chi_2 = \sqrt{1 - \chi_1^2}$. Par conséquent, reprenons le Lemme 3.10 :

$$q(v_{\alpha_n}) = q(\chi_1 v_{\alpha_n}) + q(\chi_2 v_{\alpha_n}) - ||D_{x_2}\chi_1 \ v_{\alpha_n}||^2_{L^2(\Omega^{NDN}_{\alpha_n,\varepsilon_0})} - ||D_{x_2}\chi_2 \ v_{\alpha_n}||^2_{L^2(\Omega^{NDN}_{\alpha_n,\varepsilon_0})}. \tag{9.30}$$

Remarquons que $(D_{x_2}\chi_j)_{j=1,2}$ est nul en dehors de $]-\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon_0}{4}[$ et définissons $a = \frac{\varepsilon_0}{4} \tan\frac{\alpha_n}{2}$ ainsi que $\Omega_2(\varepsilon_0) := \Omega^{NDN}_{\alpha_n,\varepsilon_0} \cap]-a, 0] \times]-\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon_0}{4}[$. Par conséquent, il existe une constante $c > 0$ telle que pour $j = 1, 2$:

$$||D_{x_2}\chi_j \ v_{\alpha_n}||^2_{L^2(\Omega^{NDN}_{\alpha_n,\varepsilon_0})} \leq \frac{c}{\varepsilon_0^2} ||v_{\alpha_n}||^2_{L^2(\Omega(\varepsilon_0) \cup \Omega_2(\varepsilon_0))}. \tag{9.31}$$

Nous savons que $\lim_{\alpha_n \to 0} ||v_{\alpha_n}||_{L^2(\Omega(\varepsilon_0))} = 0$, il reste à estimer $||v_{\alpha_n}||^2_{L^2(\Omega_2(\varepsilon_0))}$ en utilisant une inégalité de type Poincaré car v_{α_n} s'annule sur le bord Γ_2. Pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega_2(\varepsilon_0)$, nous considérons $(x_1^0, x_2) \in \Gamma_2 \cap \overline{\Omega_2(\varepsilon_0)}$ le point de Γ_2 de même ordonnée que (x_1, x_2). Alors $v_{\alpha_n}(x_1^0, x_2) = 0$, donc :

$$v_{\alpha_n}(x_1, x_2) = \int_{x_1^0}^{x_1} \partial_{y_1} v_{\alpha_n}(y_1, x_2) dy_1. \tag{9.32}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de déduire :

$$|v_{\alpha_n}(x_1, x_2)|^2 = \int_{x_1^0}^{x_1} dy_1 \int_{x_1^0}^{x_1} |\partial_{y_1} v_{\alpha_n}(y_1, x_2)|^2 dy_1. \tag{9.33}$$

Comme $(x_1, x_2) \in \Omega_2(\varepsilon_0)$, alors $\int_{x_1^0}^{x_1} dy_1 \leq a$ et $x_1 \leq 0$. Intégrons $|v_{\alpha_n}|^2$ sur $\Omega_2(\varepsilon_0)$, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2(\varepsilon_0)} |v_{\alpha_n}(x_1, x_2)|^2 \ dx_1 \ dx_2 &\leq a \int_{\Omega_2(\varepsilon_0)} \int_{x_1^0}^{0} |\partial_{y_1} v_{\alpha_n}(y_1, x_2)|^2 dy_1 \ dx_1 \ dx_2 \\ &\leq a^2 \int_{\Omega_2(\varepsilon_0)} |\partial_{y_1} v_{\alpha_n}(y_1, x_2)|^2 dy_1 \ dx_2 \\ &\leq a^2 q(v_{\alpha_n}). \end{aligned} \tag{9.34}$$

Les relations (9.28) et (9.34) montrent qu'il existe α_0 et $C(\varepsilon_0) > 0$ tels que pour tout $\alpha_n \leq \alpha_0$:

$$||v_{\alpha_n}||^2_{L^2(\Omega(\varepsilon_0) \cup \Omega_2(\varepsilon_0))} \leq C(\varepsilon_0) q(v_{\alpha_n}). \tag{9.35}$$

Soit $\varepsilon > 0$, reprenons (9.30), (9.31) et (9.35), alors il existe $\alpha_1 \leq \alpha_0$ tel que pour tout $\alpha_n \leq \alpha_0$:

$$q(v_{\alpha_n}) \geq q(\chi_1 v_{\alpha_n}) + q(\chi_2 v_{\alpha_n}) - \varepsilon. \tag{9.36}$$

Nous prolongeons respectivement les fonctions $\chi_1 v_{\alpha_n}$ et $\chi_2 v_{\alpha_n}$ par zéro sur les demi-plans $P_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 | x_2 \leq \tan\frac{\alpha_n}{2}(x_1 + R)\}$ et $P_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 | x_2 \geq -\tan\frac{\alpha_n}{2}(x_1 + R)\}$. Alors $\chi_1 v_{\alpha_n} \in H^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(P_1)$

et $\chi_2 v_{\alpha_n} \in H^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(P_2)$. Par changement de jauge et invariance par translation de domaine, nous déduisons :

$$q(\chi_1 v_{\alpha_n}) \geq \Theta_0 ||\chi_1 v_{\alpha_n}||^2_{L^2(P_1)} \text{ et } q(\chi_2 v_{\alpha_n}) \geq \Theta_0 ||\chi_2 v_{\alpha_n}||^2_{L^2(P_2)}. \tag{9.37}$$

Ainsi :

$$q(v_{\alpha_n}) \geq \Theta_0 ||v_{\alpha_n}||^2_{L^2(\Omega^{NDN}_{\alpha_n,\varepsilon_0})} - \varepsilon. \tag{9.38}$$

Nous déduisons alors que $||v_{\alpha_n}||^2_{L^2(\Omega^{NDN}_{\alpha_n,\varepsilon_0})} \leq \dfrac{q(v_{\alpha_n})+\varepsilon}{\Theta_0}$, ce qui contredit le fait que v_{α_n} est normalisé. □

Théorème 9.5. *Soit $\varepsilon_0 > 0$. Notons $\mu^{NDN}(\varepsilon_0) > 0$ et $\alpha_0 > 0$ tels que :*

$$\forall \alpha \in]0, \alpha_0], \ \mu^{NDN}(\alpha, \varepsilon_0) \geq \mu^{NDN}(\varepsilon_0). \tag{9.39}$$

Soit $u_{k,\alpha}$ un vecteur propre normalisé associé à la k-ième valeur propre $\mu_k(\alpha)$ pour $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$. Alors il existe $\alpha_1 \leq \alpha_0$ tel que pour $\alpha \in]0, \alpha_1]$ et la définition (9.20) de R :

$$\int_{\Omega_\alpha} e^{\sqrt{2\mu^{NDN}(\varepsilon_0)}|x|} |u_{k,\alpha}(x)|^2 \, dx \leq 4e^{2R\sqrt{2\mu^{NDN}(\varepsilon_0)}}. \tag{9.40}$$

Démonstration : Nous allons reprendre des arguments similaires à ceux de la preuve du Théorème 9.1. Définissons la fonction ϕ sur Ω_α par :

$$\phi(x) := \sqrt{\frac{\mu^{NDN}(\varepsilon_0)}{2}}|x|. \tag{9.41}$$

Reprenons la relation (9.7), alors, par hypothèse sur les fonctions χ^R_j, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\left(\mu_k(\alpha) + \frac{\mu^{NDN}(\varepsilon_0)}{2} + \frac{c}{R^2}\right) ||e^\phi u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} \geq \sum_{j=1}^{2} q_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}(\chi^R_j e^\phi u_{k,\alpha}). \tag{9.42}$$

Par définition de $\mu^{NDN}(\alpha, \varepsilon_0)$, changement de jauge et invariance du problème par translation (cf Propositions 3.1 et 3.4), nous avons :

$$q_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}(\chi^R_2 e^\phi u_{k,\alpha}) \geq \mu^{NDN}(\alpha, \varepsilon_0) ||\chi^R_2 e^\phi u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)}. \tag{9.43}$$

En outre, $||\chi^R_2 e^\phi u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha)} \geq ||e^\phi u_{k,\alpha}||^2_{L^2(\Omega_\alpha \setminus \mathcal{B}(0,2R))}$. Les relations (9.42), (9.43), les hypothèses sur les fonctions χ^R_j montrent que :

$$\begin{aligned}\left(\mu^{NDN}(\alpha,\varepsilon_0) - \frac{c}{R^2} - \mu_k(\alpha) - \frac{\mu^{NDN}(\varepsilon_0)}{2}\right) \int_{\Omega_\alpha \setminus \mathcal{B}(0,2R)} e^{2\phi(x)} |u_{k,\alpha}(x)|^2 \, dx \\ \leq \left(\frac{c}{R^2} + \mu_k(\alpha) + \frac{\mu^{NDN}(\varepsilon_0)}{2}\right) \int_{\Omega_\alpha \cap \mathcal{B}(0,2R)} e^{2\phi(x)} |u_\alpha(x)|^2 \, dx.\end{aligned} \tag{9.44}$$

Selon (9.39), $\mu^{NDN}(\alpha, \varepsilon_0) - \mu^{NDN}(\varepsilon_0) \geq 0$ pour $\alpha \in]0, \alpha_0]$. De plus, $\mu_k(\alpha)$ tend vers 0 avec α. Par conséquent, se souvenant que $R = \frac{\varepsilon_0}{\alpha}$ selon (9.20), il existe $\alpha_1 \leq \alpha_0$ tel que pour tout $\alpha \in]0, \alpha_1]$, $\frac{c}{R^2} + \mu_k(\alpha) \leq \dfrac{\mu^{NDN}(\varepsilon_0)}{4}$ et alors :

$$\int_{\Omega_\alpha \setminus \mathcal{B}(0,2R)} e^{2\phi(x)} |u_{k,\alpha}(x)|^2 \, dx \leq 3 \int_{\Omega_\alpha \cap \mathcal{B}(0,2R)} e^{2\phi(x)} |u_{k,\alpha}(x)|^2 \, dx. \tag{9.45}$$

Or, pour tout $x \in \Omega_\alpha \cap \mathcal{B}(0,2R)$, $\phi(x) \leq R\sqrt{2\mu^{NDN}(\varepsilon_0)}$, ainsi :

$$\int_{\Omega_\alpha} e^{2\phi(x)} |u_{k,\alpha}(x)|^2 \, dx \leq 4e^{2R\sqrt{2\mu^{NDN}(\varepsilon_0)}}. \tag{9.46}$$

□

Corollaire 9.6. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $\alpha_0 > 0$ tels que :*

$$\forall \alpha \leq \alpha_0, \ \forall T \geq \frac{\varepsilon}{\alpha}, \int_{]T,+\infty[\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[} |u_{k,\alpha}|^2 \, dt \, d\eta \leq e^{-\frac{\delta}{\alpha}}, \tag{9.47}$$

en notant $u_{k,\alpha}$ le k-ième vecteur propre normalisé associé à P_α.

Démonstration : Reprenons le résultat du Théorème 9.5 en choisissant $\varepsilon_0 = \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{2}}$, $\tilde{\delta} = \sqrt{\dfrac{\mu^{NDN}(\varepsilon_0)}{2}}$, alors il existe α_0 tel que par changement de variables et de jauge, la relation (9.40) montre que pour $\alpha \leq \alpha_0$:

$$\int_{\Omega^0} e^{2\tilde{\delta}\sqrt{\frac{2t}{\alpha}}} |u_{k,\alpha}(t,\eta)|^2 \, dt \, d\eta \leq 4e^{4\tilde{\delta}\frac{\varepsilon_0}{\alpha}}. \tag{9.48}$$

Soit $T > 0$, alors :

$$\int_{]T,+\infty[\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[} |u_{k,\alpha}(t,\eta)|^2 \, dt \, d\eta \leq 4e^{4\tilde{\delta}\frac{\varepsilon_0}{\alpha}} e^{-2\tilde{\delta}\sqrt{\frac{2T}{\alpha}}} = 4e^{-2\frac{\tilde{\delta}}{\alpha}(\sqrt{2T\alpha}-2\varepsilon_0)}. \tag{9.49}$$

Choisissons $T \geq \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$, alors :

$$\int_{]T_0,+\infty[\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[} |u_{k,\alpha}(t,\eta)|^2 \, dt \, d\eta \leq 4e^{-\frac{\tilde{\delta}}{\alpha}\sqrt{\varepsilon}\sqrt{2}}. \tag{9.50}$$

□

Chapitre 10

Minoration de l'état fondamental

Le Théorème 8.1 montre qu'il existe un élément du spectre dont le développement limité est $\alpha\mu^{(n)}+\mathcal{O}(\alpha^{2n+3})$ avec $\mu^{(n)}$ défini en (8.1). Pour justifier qu'il s'agit du bas du spectre, nous établirons une minoration de $\mu(\alpha)$ et de l'écart $\mu_2(\alpha)-\mu(\alpha)$ où $\mu_2(\alpha)$ est le deuxième élément du spectre de $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$, ce qui montrera que $\alpha\mu^{(n)}+\mathcal{O}(\alpha^{2n+3})$ est nécessairement l'asymptotique de $\mu(\alpha)$.

10.1 Minoration de $\mu(\alpha)$ au premier ordre

Théorème 10.1. *Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\alpha_0>0$ tel que pour $\alpha\leq\alpha_0$:*

$$\mu(\alpha)\geq\frac{\alpha}{\sqrt{3}}-\varepsilon\alpha. \tag{10.1}$$

La démonstration du Théorème 10.1 se décompose en plusieurs étapes car nous ne savons pas minorer directement le bas du spectre de P_α. Nous approcherons donc le bas du spectre de P_α par celui d'autres opérateurs en contrôlant l'erreur commise.
Le terme singulier de P_α, $\frac{1}{2\alpha^2 t}D_\eta^2$, tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Nous tronquons donc le domaine Ω^0 en $t=T$ et comparons P_α et l'opérateur P_α^T, défini à la Section 10.1.2 à partir de P_α restreint au domaine tronqué Ω_T défini en (10.5), avec une condition de Dirichlet en $t=T$. Nous pouvons majorer $\frac{1}{t}$ par $\frac{1}{T}$ pour $t\in]0,T[$ et donc comparer P_α^T et l'opérateur régularisé $P_{T,\rho}:=2(D_t-\eta)t(D_t-\eta)+\frac{\rho}{2}D_\eta^2$ défini à la Section 10.1.3.
Nous avons vu le rôle important des fonctions indépendantes de η aux Chapitres 6 et 7 et défini l'opérateur moyen L^{moy} à partir de P_α. Par conséquent, si nous étudions l'opérateur $P_{T,\rho}$ au lieu de P_α, il est assez naturel de considérer l'opérateur $L^{\mathrm{moy},T}$, déduit de L^{moy} en imposant une condition de Dirichlet en $t=T$. Contrôlant les erreurs d'approximation, il suffit donc de comparer les bas des spectres de $P_{T,\rho}$ et de $L^{\mathrm{moy},T}$.

10.1.1 Opérateur moyenné $L^{\mathrm{moy},T}$

Nous montrons que la première valeur propre de L^{moy} est très proche de celle de l'opérateur obtenu en tronquant le domaine. Nous définissons la forme sesquilinéaire $\ell^{\mathrm{moy},T}$ à partir de la forme ℓ^{moy}, restreinte au domaine $]0,T[$ et aux fonctions de $\mathcal{V}^N_{\mathrm{moy},T}$:

$$\mathcal{V}^N_{\mathrm{moy},T} \;:=\; \{u\in L^2(]0,T[)|\ \sqrt{t}D_t u\in L^2(]0,T[),\ u_{|_{t=T}}=0\}.$$

Nous réalisons l'opérateur $L^{\mathrm{moy},T}$ à partir de $\ell^{\mathrm{moy},T}$ sur $\mathcal{D}^N(L^{\mathrm{moy},T})$. Le bas du spectre vaut alors :

$$\lambda_1^{\mathrm{moy},T} \;:=\; \inf_{u\in\mathcal{V}^N_{\mathrm{moy,T}},u\neq 0}\frac{\ell^{\mathrm{moy},T}(u,u)}{||u||^2_{L^2(]0,T[)}}. \tag{10.2}$$

Proposition 10.2. *Il existe une constante $\tilde{c}$ telle que pour tout $T \geq 1$:*

$$\lambda_1^{\text{moy}} \leq \lambda_1^{\text{moy},T} \leq \lambda_1^{\text{moy}} + \tilde{c}e^{-\frac{T}{2\sqrt{3}}}. \tag{10.3}$$

Démonstration : Rappelons que le vecteur propre normalisé associé à l'opérateur L^{moy} se calcule explicitement et vaut :

$$u_1^{\text{moy}}(t) = \frac{1}{3^{1/4}} e^{-\frac{t}{4\sqrt{3}}}, \ \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Définissons la fonction v_{moy}^T à partir du vecteur propre u_1^{moy}, associé à la valeur propre λ_1^{moy}, à l'aide de la fonction de troncature χ_T par :

$$v_{\text{moy}}^T := \chi_T \ u_1^{\text{moy}},$$

en choisissant $\chi_T(t) = \chi\left(\frac{t}{T}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+, [0,1])$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, $\text{supp}\,\chi \subset [0,1]$. De la même manière que nous avons établi le Lemme 3.10, nous montrons, en tenant compte du changement de métrique, que pour tout $u \in \mathcal{D}^N(L^{\text{moy},T})$:

$$\ell^{\text{moy},T}(\chi_T u, \chi_T u) \ = \ \text{Re}\,\left\langle \chi_T^2 \ L^{\text{moy}} u, u \right\rangle_{L^2(]0,T[)} + \frac{1}{T^2} || \ |\nabla \chi_T| \sqrt{t} u||^2_{L^2(]0,T[)}. \tag{10.4}$$

Choisissons $u = u_1^{\text{moy}}$ dans (10.4). Par hypothèse sur u_1^{moy}, $L^{\text{moy}} u_1^{\text{moy}} = \lambda_1^{\text{moy}} u_1^{\text{moy}}$. Comme précédemment, nous majorons $|\nabla \chi_T|^2$ par $\frac{c}{T^2}$. De plus, $|\nabla \chi_T|$ est nul en dehors de $[\frac{T}{2}, T]$, ce qui conduit à la majoration :

$$\ell^{\text{moy},T}(v_{\text{moy}}^T, v_{\text{moy}}^T) \leq \lambda_1^{\text{moy}} ||v_{\text{moy}}^T||^2_{L^2(]0,T[)} + \frac{c}{T^2} ||\sqrt{t} u_1^{\text{moy}}||^2_{L^2(]\frac{T}{2},T[)}.$$

Majorons $\sqrt{t}$ par $\sqrt{T}$. La norme $||u_1^{\text{moy}}||^2_{L^2(]\frac{T}{2},T[)}$ vaut $\left(e^{-\frac{T}{2\sqrt{3}}} - e^{-\frac{T}{\sqrt{3}}}\right)$ et ainsi :

$$\ell^{\text{moy},T}(v_{\text{moy}}^T, v_{\text{moy}}^T) \leq \lambda_1^{\text{moy}} ||v_{\text{moy}}^T||^2_{L^2(]0,T[)} + \frac{c}{T} e^{-\frac{T}{2\sqrt{3}}},$$

$$1 - e^{-\frac{T}{2\sqrt{3}}} \leq ||v_{\text{moy}}^T||^2_{L^2(]0,T[)} \leq 1.$$

Par application du principe du min-max et inclusion des domaines de forme, il existe une constante $\tilde{c}$ indépendante de T telle que pour tout $T \geq 1$, la relation (10.3) est vérifiée. □

10.1.2 Opérateur P_α^T sur un secteur tronqué

Comme le terme $\frac{1}{t\alpha^2}$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini mais diverge quand α tend vers 0, nous allons utiliser un nouvel opérateur issu de l'opérateur P_α mais restreint à un domaine borné. Notons $\lambda^T(\alpha)$ le bas du spectre de la réalisation de Neumann de l'opérateur P_α^T associé à la forme a_α, restreinte au domaine tronqué Ω_T avec une condition de Dirichlet sur le bord $t = T$:

$$\begin{aligned} \Omega_T \ &:= \ ]0,T[\times \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \\ \mathcal{V}_{T,0}^N \ &:= \ \left\{ u \in L^2(\Omega_T) | \ \frac{1}{\sqrt{t}} \partial_\eta u \in L^2(\Omega_T), \ \sqrt{t} D_t u \in L^2(\Omega_T), \ u_{|_{t=T}} = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{10.5}$$

Alors :

$$\lambda^T(\alpha) = \inf_{u \in \mathcal{V}_{T,0}^N, u \neq 0} \frac{q_\alpha^T(u)}{||u||^2_{L^2(\Omega_T)}} \text{ avec } q_\alpha^T(u) = \int_{\Omega_T} \left(2t|(D_t - \eta)u|^2 + \frac{1}{2\alpha^2 t} |D_\eta u|^2 \right) \ dt \ d\eta. \tag{10.6}$$

Nous allons montrer que $\lambda(\alpha)$ est exponentiellement proche de $\lambda^T(\alpha)$:

Proposition 10.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $\alpha_0 > 0$ tels que :*

$$\forall \alpha \leq \alpha_0,\ \forall T \geq \frac{\varepsilon}{\alpha},\ \lambda(\alpha) \leq \lambda^T(\alpha) \leq \lambda(\alpha) + e^{-\frac{\delta}{\alpha}}. \tag{10.7}$$

Démonstration : Le prolongement d'une fonction de $\mathcal{V}^N_{T,0}$ par 0 pour définir une fonction de $\mathcal{V}^N$ conduit à la minoration :

$$\lambda^T(\alpha) \geq \lambda(\alpha). \tag{10.8}$$

Majorons $\lambda^T(\alpha)$ en fonction de $\lambda(\alpha)$ afin de mesurer l'erreur commise par troncature. Considérons une fonction de troncature χ, définie sur $\overline{\mathbb{R}^+}$, réelle, infiniment dérivable, à support dans $[0,1]$ et valant 1 sur $[0, \frac{1}{2}]$. Soit $T > 0$, définissons la fonction de troncature χ_T sur $\overline{\mathbb{R}^+}$ par :

$$\forall t \in \overline{\mathbb{R}^+},\ \chi_T(t) = \chi\left(\frac{t}{T}\right). \tag{10.9}$$

Définissons la fonction v^T_α à partir du vecteur propre u_α, associé à la valeur propre $\lambda(\alpha)$:

$$v^T_\alpha := \chi_T\ u_\alpha. \tag{10.10}$$

Notons que $v^T_\alpha \in \mathcal{V}^N_{T,0}$. La démonstration du Lemme 3.10 permet d'écrire :

$$q^T_\alpha(v^T_\alpha) \quad = \quad \text{Re}\ \left\langle \chi^2_T\ P_\alpha u_\alpha, u_\alpha \right\rangle_{L^2(\Omega_T)} + ||\ |\nabla \chi_T|\ \sqrt{t}\ u_\alpha||^2_{L^2(\Omega_T)}. \tag{10.11}$$

Par hypothèse sur u_α, $P_\alpha u_\alpha = \lambda(\alpha) u_\alpha$. Par construction de χ_T, il existe une constante $c > 0$ indépendante de α et de T qui majore $T^2||\ |\nabla \chi_T|^2||_{L^\infty(\Omega_T)}$. De plus, $|\nabla \chi_T|$ est nul en dehors de $[\frac{T}{2}, T] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Ceci conduit à la majoration :

$$q^T_\alpha(v^T_\alpha) \quad \leq \quad \lambda(\alpha)||v^T_\alpha||^2_{L^2(\Omega_T)} + \frac{c}{T}||u_\alpha||^2_{L^2(]\frac{T}{2},T[\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)}. \tag{10.12}$$

Contrôlons $||u_\alpha||^2_{L^2(]\frac{T}{2},T[\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)}$ avec le Corollaire 9.6 ; il existe $\delta > 0$ et $\alpha_0 > 0$ tels que :

$$\forall \alpha \leq \alpha_0,\ \forall T \geq \frac{\varepsilon}{\alpha},\ ||u_\alpha||^2_{L^2(]\frac{T}{2},T[\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)} \leq e^{-\frac{\delta}{\alpha}}. \tag{10.13}$$

De manière similaire, nous déduisons une estimation de $||v^T_\alpha||^2_{L^2(\Omega_T)}$:

$$1 - e^{-\frac{\delta}{\alpha}} \leq ||v^T_\alpha||^2_{L^2(\Omega_T)} \leq 1. \tag{10.14}$$

Il suffit d'appliquer le principe du min-max rappelé en (10.6) pour aboutir à la relation (10.7) (avec un δ plus petit). □

Nous allons maintenant estimer $\lambda^T(\alpha)$. L'expression de a_α et la définition de l'espace $\mathcal{V}^N_{T,0}$ permettent de minorer $\lambda^T(\alpha)$ comme suit :

$$\lambda^T(\alpha) \geq \inf_{u \in \mathcal{V}^N_{T,0}, u \neq 0} \frac{\displaystyle\int_{\Omega_T} \left(2t|(D_t - \eta)u|^2 + \frac{1}{2\alpha^2 T}|D_\eta u|^2 \right)\ dt\ d\eta}{||u||^2_{L^2(\Omega_T)}}. \tag{10.15}$$

Ceci nous conduit à définir un nouvel opérateur qui ne possède pas de singularité en $\frac{1}{t}$.

10.1.3 Opérateur régularisé $P^{T,\rho}$

Nous considérons ainsi le problème spectral associé à un nouvel opérateur $P^{T,\rho}$. Notons $a^{T,\rho}$ la forme sesquilinéaire définie sur l'espace $\mathcal{V}_T^{N,D}$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_T^{N,D} &:= \left\{u \in L^2(\Omega_T)|\ (D_t-\eta)u \in L^2(\Omega_T),\ D_\eta u \in L^2(\Omega_T),\ u_{|t=T}=0\right\}, \\ a^{T,\rho}(u,v) &:= \int_{\Omega_T}\left(2t(D_t-\eta)u\overline{(D_t-\eta)v}+\frac{\rho}{2}D_\eta u\overline{D_\eta v}\right)\ dt\ d\eta. \end{aligned} \tag{10.16}$$

Notons $\nu(T,\rho)$ le bas du spectre de l'extension auto-adjointe $P^{T,\rho}$ associée à $a^{T,\rho}$. L'opérateur $P^{T,\rho}$ est défini sur le domaine $\mathcal{D}^{N,D}(P^{T,\rho})$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{N,D}(P^{T,\rho}) &:= \Big\{u \in \mathcal{V}_T^{N,D}|\ (D_t-\eta)t(D_t-\eta)u \in L^2(\Omega_T),\ D_\eta^2 u \in L^2(\Omega_T), \\ &\qquad tD_t u_{|t=0}=0,\ D_\eta u_{|\eta=\pm\frac{1}{2}}=0\Big\}, \\ P^{T,\rho} &:= 2(D_t-\eta)t(D_t-\eta)+\frac{\rho}{2}D_\eta^2. \end{aligned} \tag{10.17}$$

Alors $\nu(T,\rho)$ s'exprime à l'aide du principe du min-max par :

$$\nu(T,\rho) = \inf_{u\in\mathcal{V}_T^{N,D},u\neq 0}\frac{a^{T,\rho}(u,u)}{||u||^2_{L^2(\Omega_T)}}. \tag{10.18}$$

Nous allons montrer que :

Proposition 10.4. *Supposons $T \geq 1$ et qu'il existe une constante M telle que $\frac{T}{\rho} \leq M$, alors il existe une constante $\hat{C}$ indépendante de T et de ρ telle que :*

$$\nu(T,\rho) \leq \lambda_1^{\mathrm{moy},T} \leq \nu(T,\rho)+\hat{C}\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{10.19}$$

Démonstration : L'inclusion $\mathcal{V}^N_{\mathrm{moy},T} \subset \mathcal{V}_T^{N,D}$ permet d'écrire :

$$\nu(T,\rho) \leq \lambda_1^{\mathrm{moy},T},\ \forall\rho \geq 0. \tag{10.20}$$

Notons $u_{T,\rho}$ un vecteur propre normalisé associé à la valeur propre $\nu(T,\rho)$. Cherchons des informations sur les normes des dérivées. En regardant (10.20) et (10.3), nous pouvons majorer $\nu(T,\rho)$ par $C' := \lambda_1^{\mathrm{moy}}+\tilde{c}$, donc :

$$\int_{\Omega_T}\left(2t|(D_t-\eta)u_{T,\rho}(t,\eta)|^2+\frac{\rho}{2}|D_\eta u_{T,\rho}(t,\eta)|^2\right)\ dt\ d\eta \quad = \quad \nu(T,\rho) \leq C'.$$

Alors :

$$||D_\eta u_{T,\rho}||_{L^2(\Omega_T)} \leq \frac{\sqrt{2}C'}{\sqrt{\rho}}. \tag{10.21}$$

Comme nous avons défini L^{moy} pour la majoration, nous utilisons l'opérateur de projection Π_0 :

$$\Pi_0 : L^2(\Omega_T) \to L^2(\Omega_T),\ f \mapsto \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t,\eta)\ d\eta. \tag{10.22}$$

Nous écrivons $u_{T,\rho}$ comme somme de deux fonctions $u^0_{T,\rho}$ et $u^1_{T,\rho}$ définies par :

$$u^0_{T,\rho} := \Pi_0 u_{T,\rho}, \qquad u^1_{T,\rho}(t,\eta) := u_{T,\rho}-u^0_{T,\rho}. \tag{10.23}$$

L'image de $L^2(\Omega_T)$ s'identifie avec $L^2(]0,T[)$ par l'application $\Pi_0 : L^2(]0,T[)$ s'injecte dans $L^2(\Omega_T)$ en définissant $g \mapsto i(g) = g$. Nous omettrons désormais la référence à l'injection i. Par définition de $u^0_{T,\rho}$ et $u^1_{T,\rho}$, il est facile de voir que :

$$||D_\eta u^1_{T,\rho}||_{L^2(\Omega_T)} \leq \frac{\sqrt{2}C'}{\sqrt{\rho}}, \tag{10.24}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u^1_{T,\rho}(t,\eta)\ d\eta = 0, \tag{10.25}$$

$$D_\eta u^1_{T,\rho}|_{\eta=\pm\frac{1}{2}} = 0. \tag{10.26}$$

La plus petite valeur propre strictement positive de la réalisation de Neumann de l'opérateur $-\partial^2_\eta$ sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ vaut π^2. Par construction de $u^1_{T,\rho}$ et comme le montre la relation (10.25), $u^1_{T,\rho}$ est orthogonale aux fonctions constantes qui forment le sous-espace propre associé à la valeur propre nulle, alors :

$$||D_\eta u^1_{T,\rho}||_{L^2(\Omega_T)} \geq \pi||u^1_{T,\rho}||_{L^2(\Omega_T)}. \tag{10.27}$$

Par conséquent, en utilisant (10.24) et en prenant $C'' = \frac{\sqrt{\sqrt{2}C'}}{\pi}$, nous avons :

$$||u^1_{T,\rho}||_{L^2(\Omega_T)} \leq \frac{C''}{\sqrt{\rho}}. \tag{10.28}$$

Mais, commme $||u^0_{T,\rho}||^2_{L^2(\Omega_T)} = 1 - ||u^1_{T,\rho}||^2_{L^2(\Omega_T)}$, la relation (10.28) conduit à l'encadrement :

$$1 - \frac{\tilde{C}''}{\rho} \leq ||u^0_{T,\rho}||_{L^2(\Omega_T)} \leq 1. \tag{10.29}$$

Rappelons la relation vérifiée par $(\nu(T,\rho), u_{T,\rho})$:

$$2(D_t - \eta)t(D_t - \eta)u_{T,\rho} + \frac{\rho}{2}D^2_\eta u_{T,\rho} = \nu(T,\rho)u_{T,\rho}. \tag{10.30}$$

Appliquons l'opérateur Π_0 à la relation (10.30) en utilisant la décomposition de $u_{T,\rho}$ et les propriétés de $u^1_{T,\rho}$:

$$L^{\mathrm{moy,T}}u^0_{T,\rho} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2(D_t - \eta)t(D_t - \eta)u^1_{T,\rho}\ d\eta = \nu(T,\rho)u^0_{T,\rho}. \tag{10.31}$$

Développons l'expression de $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2(D_t - \eta)t(D_t - \eta)u^1_{T,\rho}\ d\eta$:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2(D_t - \eta)t(D_t - \eta)u^1_{T,\rho}\ d\eta = 2\left(i\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \eta u^1_{T,\rho}\ d\eta - 2tD_t\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \eta u^1_{T,\rho}\ d\eta + t\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \eta^2 u^1_{T,\rho}\ d\eta\right). \tag{10.32}$$

Effectuons le produit scalaire $\nu(T,\rho)\left\langle u^0_{T,\rho}, u^0_{T,\rho}\right\rangle_{L^2(]0,T[)}$ en utilisant les relations (10.31) et (10.32) :

$$\begin{aligned}\nu(T,\rho)||u^0_{T,\rho}||^2_{L^2(]0,T[)} &= \left\langle L^{\mathrm{moy},T}u^0_{T,\rho}, u^0_{T,\rho}\right\rangle_{L^2(]0,T[)} + 2i\int_0^T \Pi_0(\eta u^1_{T,\rho})\ \overline{u^0_{T,\rho}}\ dt \\ &\quad -4\int_0^T tD_t\Pi_0(\eta u^1_{T,\rho})\ \overline{u^0_{T,\rho}}dt + 2\int_0^T t\Pi_0(\eta^2 u^1_{T,\rho})\ \overline{u^0_{T,\rho}}dt.\end{aligned} \tag{10.33}$$

Une majoration brutale conduit à :

$$\begin{aligned}\left\langle L^{\mathrm{moy},T}u^0_{T,\rho},u^0_{T,\rho}\right\rangle_{L^2(]0,T[)} &\leq \nu(T,\rho)||u^0_{T,\rho}||^2_{L^2(]0,T[)}+2\left|\int_{\Omega_T}\eta u^1_{T,\rho}\,\overline{u^0_{T,\rho}}\,dt\,d\eta\right| \\ &\quad +4\left|\int_{\Omega_T}\eta tD_tu^1_{T,\rho}\overline{u^0_{T,\rho}}\,dt\,d\eta\right|+2\left|\int_{\Omega_T}\eta^2tu^1_{T,\rho}\overline{u^0_{T,\rho}}\,dt\,d\eta\right|. \quad (10.34)\end{aligned}$$

Estimons chaque élément de cette relation (10.34) :

- $\left|\int_{\Omega_T}\eta u^1_{T,\rho}\,\overline{u^0_{T,\rho}}\,dt\,d\eta\right|\leq\frac{1}{2}||u^1_{T,\rho}||_{L^2(\Omega_T)}||u^0_{T,\rho}||_{L^2(\Omega_T)}\leq\frac{1}{2}\frac{C''}{\sqrt{\rho}}$ selon (10.28) et (10.29).
- $\left|\int_{\Omega_T}\eta^2tu^1_{T,\rho}\,\overline{u^0_{T,\rho}}\,dt\,d\eta\right|\leq\frac{\sqrt{T}}{4}||u^1_{T,\rho}||_{L^2(\Omega_T)}||\sqrt{t}u^0_{T,\rho}||_{L^2(\Omega_T)}\leq\frac{\sqrt{T}}{4}\frac{C''}{\sqrt{\rho}}||\sqrt{t}u^0_{T,\rho}||_{L^2(\Omega_T)}$.
- Estimons le dernier terme en effectuant une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega_T}\eta tD_tu^1_{T,\rho}\,\overline{u^0_{T,\rho}}\,dt\,d\eta\right| &\leq \int_{\Omega_T}|\eta u^1_{T,\rho}|\,|u^0_{T,\rho}|\,dt\,d\eta+\int_{\Omega_T}t|\eta|\,|u^1_{T,\rho}|\,|D_tu^0_{T,\rho}|\,dt\,d\eta \\ &\leq \frac{C''}{2\sqrt{\rho}}+\frac{C''\sqrt{T}}{2\sqrt{\rho}}||\sqrt{t}D_tu^0_{T,\rho}||_{L^2(]0,T[)}. \quad (10.35)\end{aligned}$$

Définissons $C(T,\rho):=\left\langle L^{\mathrm{moy},T}u^0_{T,\rho},u^0_{T,\rho}\right\rangle_{L^2(]0,T[)}$. Notons que $||\sqrt{t}u^0_{T,\rho}||_{L^2(]0,T[)}\leq\sqrt{6}\sqrt{C(T,\rho)}$ et $||\sqrt{t}D_tu^0_{T,\rho}||_{L^2(]0,T[)}\leq\sqrt{C(T,\rho)}$, alors la relation (10.34) et les estimations de chaque terme mènent à la majoration :

$$C(T,\rho)\leq\nu(T,\rho)+3\frac{C''}{\sqrt{\rho}}+4C''\sqrt{\frac{T}{\rho}}\sqrt{C(T,\rho)}. \quad (10.36)$$

Si $T\geq 1$ et s'il existe une constante M finie telle que $\frac{T}{\rho}\leq M$, alors $C(T,\rho)$ est fini et il existe une constante $C(\infty)>0$ indépendante de T et de ρ telle que $C(T,\rho)\leq C(\infty)<+\infty$. En utilisant (10.29), ceci conduit à l'encadrement (10.19) de $\lambda_1^{\mathrm{moy},T}$. □

10.1.4 Synthèse de ces constructions

La synthèse des constructions précédentes permet de démontrer le Théorème 10.1.
Montrons que pour tout $\eta>0$, il existe $\alpha_1\leq\alpha_0$ tel que pour tout $\alpha\in]0,\alpha_1]$, $\lambda(\alpha)\geq\lambda_1^{\mathrm{moy}}-\eta$.
Soit $\eta>0$. Reprenons la relation (10.3) et la Proposition 10.4 en choisissant $\varepsilon=\frac{\eta}{2\hat{C}}$ et $T=\frac{\varepsilon}{\alpha}$. Alors :

$$\nu\left(T,\frac{1}{\alpha^2T}\right)\geq\lambda_1^{\mathrm{moy}}-\frac{\eta}{2}. \quad (10.37)$$

La relation (10.15) et la Proposition 10.3 montrent que pour ε choisi précédemment, il existe $\alpha_0>0$ et $\delta>0$ tels que pour tout $\alpha\in]0,\alpha_0]$:

$$\lambda(\alpha)\geq\nu\left(T,\frac{1}{\alpha^2T}\right)-e^{-\frac{\delta}{\alpha}}. \quad (10.38)$$

Il existe $\alpha_1\leq\alpha_0$ tel que pour tout $\alpha\in]0,\alpha_1]$, $e^{-\frac{\delta}{\alpha}}\leq\frac{\eta}{2}$, ainsi, reprenant (10.37) et (10.38), il vient :

$$\lambda(\alpha)\geq\lambda_1^{\mathrm{moy}}-\eta. \quad (10.39)$$

Or, nous savons que $\mu(\alpha)$ et $\lambda(\alpha)$ sont liés par la relation $\mu(\alpha)=\alpha\lambda(\alpha)$, donc :

$$\forall\alpha\leq\alpha_0,\ \mu(\alpha)\geq\alpha\lambda_1^{\mathrm{moy}}-\eta\alpha. \quad (10.40)$$

10.1.5 Comportement des vecteurs propres

Remarquons que lors de la preuve du Théorème 10.1, nous pouvons justifier, en utilisant les mêmes notations, le résultat de convergence suivant :

Proposition 10.5. *Notons $u_1^{T,\rho}$ le premier vecteur propre associé à l'opérateur $P^{T,\rho}$ et définissons pour tout $t \in]0,T[$ la fonction $u^0_{T,\rho}(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u_1^{T,\rho}(t,\eta)\, d\eta$. Notons également $u_1^{\mathrm{moy},T}$ le vecteur propre normalisé associé à l'opérateur $L^{\mathrm{moy},T}$. Alors, il existe $T_0 > 0$, C tel que pour $T \geq T_0$ et $\rho > 0$ avec $\frac{T}{\rho}$ uniformément borné :*

$$||u^0_{T,\rho} - u_1^{\mathrm{moy},T}||^2_{L^2(]0,T[)} \quad \leq \quad C\left(\frac{1}{\rho} + \sqrt{\frac{T}{\rho}}\right). \tag{10.41}$$

Démonstration : Décomposons le vecteur $u^0_{T,\rho}$ selon la base des vecteurs propres associés à $L^{\mathrm{moy},T}$:

$$u^0_{T,\rho} \quad = \quad \alpha_0 u_1^{\mathrm{moy},T} + \tilde{u}^0_{T,\rho}, \tag{10.42}$$

où $\tilde{u}^0_{T,\rho}$ est orthogonale à la première fonction propre $u_1^{\mathrm{moy},T}$ de $L^{\mathrm{moy},T}$. Estimons le produit scalaire $\left\langle L^{\mathrm{moy},T} u^0_{T,\rho}, u^0_{T,\rho} \right\rangle_{L^2(]0,T[)}$. En utilisant la relation (10.34) et les estimations de chaque terme établies juste après, il existe une constante A indépendante de T et de ρ telle que pour T, ρ vérifiant $T \geq 1$ et $\frac{T}{\rho}$ uniformément borné, alors :

$$\left\langle L^{\mathrm{moy},T} u^0_{T,\rho}, u^0_{T,\rho} \right\rangle_{L^2(]0,T[)} \quad \leq \quad \nu(T,\rho)||u^0_{T,\rho}||^2_{L^2(]0,T[)} + A\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Reprenons la relation (10.20) et injectons cette inégalité dans la dernière relation en utilisant la décomposition de $u^0_{T,\rho}$ pour exprimer la norme, il vient :

$$\left\langle L^{\mathrm{moy},T} u^0_{T,\rho}, u^0_{T,\rho} \right\rangle_{L^2(]0,T[)} \quad \leq \quad \lambda_1^{\mathrm{moy},T}(\alpha_0^2 + ||\tilde{u}^0_{T,\rho}||^2_{L^2(]0,T[)}) + A\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{10.43}$$

Utilisons le principe du min-max et la décomposition de $u^0_{T,\rho}$ pour minorer $\left\langle L^{\mathrm{moy},T} u^0_{T,\rho}, u^0_{T,\rho} \right\rangle_{L^2(]0,T[)}$ et notons $\lambda_2^{\mathrm{moy},T}$ la deuxième valeur propre de l'opérateur $L^{\mathrm{moy},T}$, alors :

$$\left\langle L^{\mathrm{moy},T} u^0_{T,\rho}, u^0_{T,\rho} \right\rangle_{L^2(]0,T[)} \quad \geq \quad \lambda_1^{\mathrm{moy},T}\alpha_0^2 + \lambda_2^{\mathrm{moy},T}||\tilde{u}^0_{T,\rho}||^2_{L^2(]0,T[)}. \tag{10.44}$$

Rassemblons les relations (10.43) et (10.44), alors :

$$\left(\lambda_2^{\mathrm{moy},T} - \lambda_1^{\mathrm{moy},T}\right)||\tilde{u}^0_{T,\rho}||^2_{L^2(]0,T[)} \quad \leq \quad A\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{10.45}$$

L'inclusion de domaines permet de minorer $\lambda_2^{\mathrm{moy},T}$ par λ_2^{moy} et en reprenant (10.3), il vient :

$$\lambda_2^{\mathrm{moy}} - \lambda_1^{\mathrm{moy}} - \tilde{c}e^{-\frac{T}{2\sqrt{3}}} \quad \leq \quad \lambda_2^{\mathrm{moy},T} - \lambda_1^{\mathrm{moy},T}.$$

Ainsi, il existe T_0 indépendant de ρ tel que pour tout $T \geq T_0$, la relation (10.45) conduit à :

$$||\tilde{u}^0_{T,\rho}||^2_{L^2(]0,T[)} \quad \leq \quad \tilde{A}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \text{ avec } \tilde{A} = \frac{2A}{\lambda_2^{\mathrm{moy}} - \lambda_1^{\mathrm{moy}}}. \tag{10.46}$$

Cette dernière relation montre que $||\tilde{u}^0_{T,\rho}||^2_{L^2(]0,T[)}$ tend vers 0 quand ρ tend vers l'infini.
Par l'hypothèse sur la décomposition de $u^0_{T,\rho}$, nous avons : $\alpha_0^2 = ||u^0_{T,\rho}||^2_{L^2(]0,T[)} - ||\tilde{u}^0_{T,\rho}||^2_{L^2(0,T)}$.
Reprenons les relations (10.29) et (10.46), alors :

$$1 - \frac{\tilde{C}''}{\rho} - \tilde{A}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \leq \alpha_0^2 \leq 1. \tag{10.47}$$

Donc :

$$||u^0_{T,\rho} - u_1^{\mathrm{moy},T}||^2_{L^2(]0,T[)} = (1-\alpha_0)^2 + ||\tilde{u}^0_{T,\rho}||^2_{L^2(]0,T[)} \leq \frac{C}{\rho} + C\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{10.48}$$

Cette dernière relation apporte le résultat voulu. □

Proposition 10.6. *Notons u_1^{moy} le vecteur propre normalisé associé à la valeur propre λ_1^{moy}, $u_1^{\mathrm{moy},T}$ le vecteur propre normalisé associé à la valeur propre $\lambda^{\mathrm{moy},T}$ et $\tilde{u}_1^{\mathrm{moy},T}$ son prolongement par 0 pour $t \geq T$. Alors :*

$$||u_1^{\mathrm{moy}} - \tilde{u}_1^{\mathrm{moy},T}||_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{T}{4\sqrt{3}}}\right) \text{ pour } T \to +\infty. \tag{10.49}$$

Démonstration : Décomposons la fonction $\tilde{u}_1^{\mathrm{moy},T}$ sous la forme :

$$\tilde{u}_1^{\mathrm{moy},T} = a_0 u_1^{\mathrm{moy}} + v_1,$$

où v_1 est orthogonale à u_1^{moy}, alors nous avons :

$$||\tilde{u}_1^{\mathrm{moy},T}||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = 1 = a_0^2 + ||v_1||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

En outre,

$$\lambda_1^{\mathrm{moy},T} = \left\langle L^{\mathrm{moy}}\tilde{u}_1^{\mathrm{moy},T}, \tilde{u}_1^{\mathrm{moy},T}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)} \geq a_0^2\lambda_1^{\mathrm{moy}} + \lambda_2^{\mathrm{moy}}||v_1||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}. \tag{10.50}$$

Par conséquent :

$$(\lambda_2^{\mathrm{moy}} - \lambda_1^{\mathrm{moy},T})||v_1||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq a_0^2(\lambda_1^{\mathrm{moy},T} - \lambda_1^{\mathrm{moy}}) \leq \lambda_1^{\mathrm{moy},T} - \lambda_1^{\mathrm{moy}}.$$

Utilisant la Proposition 10.2, nous en déduisons :

$$(\lambda_2^{\mathrm{moy}} - \lambda_1^{\mathrm{moy}} - \tilde{c}e^{-\frac{T}{2\sqrt{3}}})||v_1||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \tilde{c}e^{-\frac{T}{2\sqrt{3}}}.$$

Or, nous savons que $\lambda_2^{\mathrm{moy}} - \lambda_1^{\mathrm{moy}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, donc :

$$||v_1||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{\tilde{c}e^{-\frac{T}{2\sqrt{3}}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} - \tilde{c}e^{-\frac{T}{2\sqrt{3}}}}.$$

Donc $||v_1||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{T}{2\sqrt{3}}}\right)$ et $a_0 = 1 + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{T}{2\sqrt{3}}}\right)$ quand T tend vers l'infini. Il suffit maintenant d'écrire :

$$||u_1^{\mathrm{moy}} - \tilde{u}_1^{\mathrm{moy},T}||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = (1-a_0)^2||\tilde{u}_1^{\mathrm{moy},T}||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} + ||v_1||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{T}{2\sqrt{3}}}\right).$$

□

Nous ne nous servirons pas des estimations obtenues sur les premières valeurs propres mais reprendrons les mêmes techniques pour les secondes valeurs propres.

10.2 Estimation de la seconde valeur propre

La majoration du bas du spectre du Chapitre 8 donne l'existence d'une valeur propre avec le développement limité $\alpha\mu^{(n)} + \mathcal{O}(\alpha^{2n+3})$, nous avons en outre montré à la section précédente que le premier terme du développement limité de $\mu(\alpha)$ était minoré par $\frac{\alpha}{\sqrt{3}} - \varepsilon\alpha$. Si l'écart entre les deux premières valeurs propres de P_α est suffisamment grand, alors le Théorème spectral 2.3 montrera que le développement limité obtenu par la solution formelle est celui de $\mu(\alpha)$. Commençons par donner un résultat sur la minoration de la deuxième valeur propre et l'écart entre les deux premières valeurs propres :

Proposition 10.7. *Quand α tend vers 0, le nombre de valeurs propres de l'opérateur $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$ tend vers l'infini. Si nous notons $\mu(\alpha)$, $\mu_2(\alpha)$ les deux premières valeurs propres pour $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$ et par λ_1^{moy}, λ_2^{moy} les deux plus petites valeurs propres de L^{moy}, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α_0 telle que pour tout $\alpha \in]0, \alpha_0]$:*

$$\mu_2(\alpha) \geq \alpha\lambda_2^{\text{moy}} - \varepsilon\alpha, \tag{10.51}$$

$$\frac{\mu_2(\alpha) - \mu(\alpha)}{\alpha} \geq (\lambda_2^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}}) - \varepsilon. \tag{10.52}$$

Comme pour la détermination du premier terme du développement limité, nous utilisons plusieurs opérateurs.

10.2.1 Quelques estimations des deuxièmes valeurs propres

Rappelons l'expression du second élément du spectre à l'aide du principe du min-max :

$$\lambda_2(\alpha) = \sup_{v \in L^2(\Omega)} \inf_{u \in \mathcal{V}^N, u \perp v} \frac{q_\alpha(u)}{||u||^2_{L^2(\Omega)}}. \tag{10.53}$$

Les expressions sont similaires pour $\lambda_2^T(\alpha)$, λ_2^{moy}, $\lambda_2^{\text{moy},T}$ et $\nu_2(T,\rho)$. L'indice 2 indique qu'il s'agit du deuxième élément du spectre. Par inclusion de domaines, nous établissons :

$$\lambda_2^{\text{moy}} \geq \lambda_2(\alpha), \tag{10.54}$$

$$\lambda_2^T(\alpha) \geq \lambda_2(\alpha), \tag{10.55}$$

$$\lambda_2^{\text{moy},T} \geq \lambda_2^{\text{moy}}, \tag{10.56}$$

$$\lambda_2^{\text{moy},T} \geq \nu_2(T,\rho), \tag{10.57}$$

$$\lambda_2^T(\alpha) \geq \nu_2\left(T, \frac{1}{\alpha^2 T}\right). \tag{10.58}$$

En utilisant la relation (10.54), le réel $\lambda_2(\alpha)$ peut être majoré par une constante indépendante de α, ce qui implique que $\mu_2(\alpha) = \alpha\lambda_2(\alpha)$ tend vers 0 avec α donc il existe α_1 tel que pour tout $\alpha \leq \alpha_1$, $\mu_2(\alpha) < \Theta_0$. Ceci nous assure que $\mu_2(\alpha)$ est une valeur propre pour des angles assez petits.

10.2.2 Comparaison de ν_2 et λ_2^{moy}

Proposition 10.8. *Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $\alpha_0 > 0$ et une constante $c > 0$ indépendante de ε telles que pour tout $\alpha \leq \alpha_0$ et $T = \frac{\varepsilon}{\alpha}$:*

$$\nu_2\left(T, \frac{1}{\alpha^2 T}\right) \geq \lambda_2^{\text{moy}} - c\varepsilon. \tag{10.59}$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$; notons $T = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ pour tout $\alpha > 0$.
Considérons $u_{1,T}$ et $u_{2,T}$ les vecteurs propres normalisés associés aux valeurs propres $\nu\left(T, \frac{1}{\alpha^2 T}\right)$ et $\nu_2\left(T, \frac{1}{\alpha^2 T}\right)$ et définissons $u^0_{1,T} := \Pi_0 u_{1,T}$, $u^0_{2,T} := \Pi_0 u_{2,T}$ et $u^1_{1,T} = u_{1,T} - u^0_{1,T}$, $u^1_{2,T} = u_{2,T} - u^0_{2,T}$. Selon la relation (10.29) avec $\rho = \frac{1}{\alpha^2 T} = \frac{1}{\alpha\varepsilon}$, il existe une constante C' indépendante de α et de T telle que :

$$||u^1_{1,T}||_{L^2(]0,T[)} \leq C'\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\alpha}, \qquad ||u^1_{2,T}||_{L^2(]0,T[)} \leq C'\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\alpha}, \tag{10.60}$$

$$1 - C'\varepsilon\alpha \leq ||u^0_{1,T}||_{L^2(]0,T[)} \leq 1, \qquad 1 - C'\varepsilon\alpha \leq ||u^0_{2,T}||_{L^2(]0,T[)} \leq 1. \tag{10.61}$$

Décomposons $u^0_{2,T}$ selon la base des vecteurs propres de $L^{\mathrm{moy},T}$:

$$u^0_{2,T} \;=\; a_1 u_1^{\mathrm{moy},T} + \tilde{u}^0_{2,T}. \tag{10.62}$$

Notons que $a_1^2 + ||\tilde{u}^0_{2,T}||^2_{L^2(]0,T[)} \leq 1$, donc $|a_1| \leq 1$. Évaluons le produit scalaire $\left\langle u^0_{2,T}, u^0_{1,T}\right\rangle_{L^2(]0,T[)}$ en sachant que $\langle u_{2,T}, u_{1,T}\rangle_{L^2(\Omega_T)} = 0$:

$$\left\langle u^0_{2,T}, u^0_{1,T}\right\rangle_{L^2(]0,T[)} \;=\; \left\langle u^1_{2,T}, u^1_{1,T}\right\rangle_{L^2(\Omega_T)} - \left\langle u^1_{2,T}, u_{1,T}\right\rangle_{L^2(\Omega_T)} - \left\langle u_{2,T}, u^1_T\right\rangle_{L^2(\Omega_T)}. \tag{10.63}$$

Utilisons la décomposition de $u^0_{2,T}$, le fait que $u_1^{\mathrm{moy},T}$ est normalisé et que $\tilde{u}^0_{2,T}$ est orthogonal à $u_1^{\mathrm{moy},T}$ pour donner une autre expression du produit scalaire $\left\langle u^0_{2,T}, u^0_{1,T}\right\rangle_{L^2(]0,T[)}$:

$$\left\langle u^0_{2,T}, u^0_{1,T}\right\rangle_{L^2(]0,T[)} \;=\; a_1 + \left\langle a_1 u_1^{\mathrm{moy},T} + \tilde{u}^0_{2,T}, u^0_{1,T} - u_1^{\mathrm{moy},T}\right\rangle_{L^2(]0,T[)}. \tag{10.64}$$

La relation (10.41) précise que $||u^0_{1,T} - u_1^{\mathrm{moy},T}||_{L^2(]0,T[)} \leq \tilde{C}\varepsilon$. En outre, les relations (10.60) permettent de majorer les quantités $\left|\left\langle u^1_{2,T}, u_{1,T}\right\rangle_{L^2(\Omega_T)}\right|$ et $\left|\left\langle u_{2,T}, u^1_{1,T}\right\rangle_{L^2(\Omega_T)}\right|$ par $C'\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\alpha}$ ainsi que $\left|\left\langle u^1_{2,T}, u^1_{1,T}\right\rangle_{L^2(\Omega_T)}\right|$ par $C'^2\varepsilon\alpha$. Reportons ces estimations dans (10.63) et (10.64) en se rappelant que $|a_1| \leq 1$, alors :

$$|a_1| \leq 2\tilde{C}\varepsilon + 2C'\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\alpha} + C'^2\varepsilon\alpha. \tag{10.65}$$

Donc il existe $\alpha_0 > 0$ et une constante C_1 telle que pour tout $\alpha \leq \alpha_0$:

$$|a_1| \;\leq\; C_1\varepsilon. \tag{10.66}$$

Cette relation signifie que le vecteur $u^0_{2,T}$ associé à $\nu_2\left(T, \frac{1}{\alpha^2 T}\right)$ est «presque» orthogonale à $u_1^{\mathrm{moy},T}$. En outre, en reprenant (10.61) et (10.66), il existe une constante $\hat{C}$ telle que :

$$1 - \hat{C}^2\varepsilon^2 \leq ||\tilde{u}^0_{2,T}||^2_{L^2(]0,T[)} = ||u^0_{2,T}||^2_{L^2(]0,T[)} - a_1^2 \leq 1. \tag{10.67}$$

Comme nous l'avons fait pour $\left\langle L^{\mathrm{moy},T} u^0_T, u^0_T\right\rangle_{L^2(]0,T[)}$, nous encadrons $\left\langle L^{\mathrm{moy},T} u^0_{2,T}, u^0_{2,T}\right\rangle_{L^2(]0,T[)}$:

$$\left\langle L^{\mathrm{moy},T} u^0_{2,T}, u^0_{2,T}\right\rangle_{L^2(]0,T[)} \;\leq\; \nu_2\left(T, \frac{1}{\alpha^2 T}\right) ||u^0_{2,T}||^2_{L^2(]0,T[)} + C\varepsilon, \tag{10.68}$$

et aussi :

$$\left\langle L^{\mathrm{moy},T} u^0_{2,T}, u^0_{2,T}\right\rangle_{L^2(]0,T[)} \;\geq\; a_1^2\lambda_1^{\mathrm{moy},T} + \lambda_2^{\mathrm{moy},T} ||\tilde{u}^0_{2,T}||^2_{L^2(]0,T[)}. \tag{10.69}$$

Regroupons les relations (10.68), (10.69) ; utilisons (10.61), (10.66), (10.67), ainsi que (10.56), alors :

$$\nu_2\left(T, \frac{1}{\alpha^2 T}\right) \;\geq\; \lambda_2^{\mathrm{moy}} - c\varepsilon. \tag{10.70}$$

□

10.2.3 Comparaison de $\lambda_2(\alpha)$ et $\lambda_2^T(\alpha)$

Proposition 10.9. *Pour tout* $\varepsilon \in \left]0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right[$, *il existe* α_0, $\delta > 0$ *et* $C > 0$ *tels que pour* $\alpha \in]0, \alpha_0[$ *et* $T = \frac{\varepsilon}{\alpha}$:

$$0 \leq \lambda_2^T(\alpha) - \lambda_2(\alpha) \leq Ce^{-\frac{\delta}{\alpha}}. \tag{10.71}$$

Démonstration : Comme nous l'avons fait pour la première valeur propre, montrons que $\lambda_2(\alpha)$ est proche de $\lambda_2^T(\alpha)$ en utilisant le Théorème spectral 2.3. Reprenons la fonction de troncature précédente χ_T. Définissons $v_\alpha^T = \chi_T u_{2,\alpha}$ et estimons $||(P_\alpha^T - \lambda_2(\alpha))v_\alpha^T||_{L^2(\Omega_T)}$. Soit $(t,\eta) \in \Omega_T$, alors :

$$\begin{aligned} P_\alpha^T v_\alpha^T(t,\eta) &= P_\alpha v_\alpha^T(t,\eta) \\ &= \chi_T P_\alpha u_{2,\alpha}(t,\eta) + [P_\alpha, \chi_T]u_{2,\alpha}(t,\eta) \\ &= \lambda_2(\alpha)v_\alpha^T(t,\eta) + (8tD_t u_{2,\alpha} - 4(i+t\eta)u_{2,\alpha})D_t\chi_T(t,\eta) + 4tu_{2,\alpha}D_t^2\chi^T(t,\eta). \end{aligned}$$

Par hypothèse sur χ_T, il existe une constante C indépendante de T telle que $|D_t\chi_T| \leq \frac{C}{T^2}$ et $|D_t^2\chi_T| \leq \frac{C}{T^4}$, en outre, les dérivées de χ_T sont à support dans $]\frac{T}{2}, T[$. Le Corollaire 9.6 montre qu'il existe $\delta > 0$ et $\alpha_0 > 0$ tels que pour tout $\alpha \leq \alpha_0$ et $T = \frac{\varepsilon}{\alpha}$:

$$||u_{2,\alpha}||_{L^2(]\frac{T}{2},T[\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)} \leq e^{-\frac{\delta}{\alpha}}. \tag{10.72}$$

Par conséquent, une intégration par parties permet d'estimer le terme $||tD_t u_{2,\alpha} D_t\chi_T||$:

$$||(P_\alpha^T - \lambda_2(\alpha))v_\alpha^T||_{L^2(\Omega_T)} \leq Ce^{-\frac{\delta}{\alpha}}. \tag{10.73}$$

De plus, commme $||v_\alpha^T||^2_{L^2(\Omega_T)} \geq ||u_{2,\alpha}^T||^2_{L^2(\Omega_{\frac{T}{2}})} = 1 - ||u_{2,\alpha}^T||^2_{L^2(]\frac{T}{2},+\infty[\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)}$, en utilisant (10.72), il existe une constante c telle que :

$$||v_\alpha^T||_{L^2(\Omega_T)} \geq 1 - ce^{-\frac{\delta}{\alpha}}. \tag{10.74}$$

Utilisons le Théorème spectral 2.3 et les relations (10.73) et (10.74), il existe alors $\alpha_1 \leq \alpha_0$, une constante $\tilde{c}$ et pour $T = \frac{\varepsilon}{\alpha}$, un élément $\lambda_k^T(\alpha)$ du spectre de P_α^T tel que pour tout $\alpha \leq \alpha_1$:

$$|\lambda_k^T(\alpha) - \lambda_2(\alpha)| \leq \tilde{c}e^{-\frac{\delta}{\alpha}}. \tag{10.75}$$

Montrons que nécessairement $k \geq 2$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc $k = 1$. Par inclusion des domaines de forme, nous avons $\lambda_1^T(\alpha) \leq \lambda_1^{\text{moy},T}$, ainsi :

$$\lambda_2(\alpha) - \lambda_1^{\text{moy},T} \leq \tilde{c}e^{-\frac{\delta}{\alpha}}.$$

Mais d'après la relation (10.58), nous déduisons :

$$\nu_2\left(T, \frac{1}{\alpha^2 T}\right) - \lambda_1^{\text{moy},T} \leq \tilde{c}e^{-\frac{\delta}{\alpha}}.$$

L'application des Propositions 10.8, 10.2 conduisent à la majoration :

$$\lambda_2^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}} \leq \tilde{c}e^{-\frac{\delta}{\alpha}} + Ce^{-\frac{T}{2\sqrt{3}}} + c\varepsilon = \tilde{c}e^{-\frac{\delta}{\alpha}} + Ce^{-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{3}\alpha}} + c\varepsilon. \tag{10.76}$$

L'estimation de l'écart entre λ_1^{moy} et λ_2^{moy} valant $\frac{2}{\sqrt{3}}$ montre que (10.76) ne peut avoir lieu dès que $\varepsilon < \frac{2}{\sqrt{3}}$ (sinon il existe $\alpha_2 \leq \alpha_1$ tel que pour tout $\alpha \leq \alpha_2$, $\tilde{c}e^{-\frac{\delta}{\alpha}} + Ce^{-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{3}\alpha}} + c\varepsilon < \frac{2}{\sqrt{3}}$). Donc $k \geq 2$ et alors $\lambda_k^T(\alpha) \geq \lambda_2^T(\alpha)$. Se souvenant de (10.55), nous aboutissons à (10.71). □

10.2.4 Minoration de $\mu_2(\alpha)$ et de l'écart entre $\lambda_2(\alpha)$ et $\lambda(\alpha)$

Démontrons maintenant la Proposition 10.7.
Soit $\eta > 0$. Appliquons la Proposition 10.8 avec $\varepsilon = \frac{\eta}{2c}$. Alors, reprenant la relation (10.56), il existe α_0 tel que pour tout $\alpha \in]0, \alpha_0]$ et $T = \frac{\varepsilon}{\alpha}$:

$$\nu_2\left(T, \frac{1}{\alpha^2 T}\right) \geq \lambda_2^{\text{moy}} - \frac{\eta}{2}. \tag{10.77}$$

Avec ce choix de ε, la Proposition 10.9 et la relation (10.58) montrent qu'il existe $\alpha_1 \leq \alpha_0$ tel que pour tout $\alpha \in]0, \alpha_1]$:

$$\lambda_2(\alpha) \quad \geq \quad \nu_2\left(T, \frac{1}{\alpha^2 T}\right) - \frac{\eta}{2}. \tag{10.78}$$

Reprenons les minorations (10.77) et (10.78), alors, pour tout $\alpha \in]0, \alpha_1]$:

$$\lambda_2(\alpha) \geq \lambda_2^{\text{moy}} - \eta. \tag{10.79}$$

Or $\lambda(\alpha) \leq \lambda_1^{\text{moy}}$, donc nous déduisons :

$$\lambda_2(\alpha) - \lambda(\alpha) \quad \geq \quad (\lambda_2^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}}) - \eta. \tag{10.80}$$

Nous utilisons maintenant cette Proposition 10.7 pour justifier le développement limité de $\mu(\alpha)$:

Théorème 10.10. *Soit n un entier positif. Considérons les m_j, pour $j \leq n$, donnés de manière récursive par la Proposition 7.1, alors $\mu(\alpha)$ admet un développement limité au voisinage de 0 :*

$$\mu(\alpha) \quad = \quad \alpha \sum_{j=0}^{n} m_j \alpha^{2j} + \mathcal{O}_n(\alpha^{2n+3}). \tag{10.81}$$

Démonstration : Reprenons la fonction $U^{(n)}$ et le réel $\mu^{(n)}$ définis en (8.4) et (8.1). Le Théorème 8.1 précise qu'il existe une valeur propre $\mu_N(\alpha)$ de l'opérateur $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$ telle que :

$$|\mu_N(\alpha) - \alpha\mu^{(n)}| \quad \leq \quad C\alpha^{2n+1}. \tag{10.82}$$

Mais si $N \geq 2$, alors par définition :

$$\mu_N(\alpha) - \alpha\mu^{(n)} \quad \geq \quad \mu_2(\alpha) - \alpha\mu^{(n)}. \tag{10.83}$$

D'après la Proposition 10.7 et la construction de $\mu^{(n)}$, choisissons $\varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, il existe alors $\alpha_1 \leq \alpha_0$ tel que pour tout $\alpha \in]0, \alpha_1]$:

$$\mu_2(\alpha) \quad \geq \quad \alpha\lambda_2^{\text{moy}} - \alpha\frac{\varepsilon}{2}, \tag{10.84}$$

$$\alpha\mu^{(n)} \quad \leq \quad \alpha\lambda_1^{\text{moy}} - \alpha\frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.85}$$

Reportons (10.84) et (10.85) dans (10.83), alors, comme $\lambda_2^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$:

$$\mu_N(\alpha) - \alpha\mu^{(n)} \quad \geq \quad \alpha(\lambda_2^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}}) - \alpha\varepsilon \geq \frac{\alpha}{\sqrt{3}}. \tag{10.86}$$

Nous aboutissons alors à une contradiction avec la relation (10.82), donc $N = 1$ et le théorème est justifié. □

Chapitre 11

Premiers termes du développement limité de $\mu(\alpha)$

Le but de ce chapitre est de montrer comment déterminer explicitement les coefficients du développement limité à l'aide de Maple qui est particulièrement adapté pour le calcul formel. Ensuite, nous utiliserons les premiers termes du développement limité afin de construire une nouvelle fonction test normalisée ayant une énergie plus petite et d'obtenir ainsi des informations supplémentaires sur la nature du spectre de l'opérateur pour un secteur dont l'angle est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

11.1 Détermination des coefficients à l'aide de Maple

La Proposition 7.1 donne une expression de tous les coefficients m_j, $\tilde{u}_j$ et u_j^0. Selon la Proposition 7.4, nous savons qu'il existe des polynômes $\tilde{P}_j$ et P_j^0 tels que $\tilde{u}_j = \tilde{P}_j u_0$ et $u_j^0 = P_j^0 u_0$. Nous pouvons donc en déduire un algorithme pour déterminer $\tilde{P}_j$, P_j^0 et m_j de manière récursive et déduire les expressions de ces coefficients par calcul formel résolu par Maple. De cette façon, nous déterminons P_1^0, $\tilde{P}_1$, m_1, ..., P_j^0, $\tilde{P}_j$, m_j pour tout $j \in \mathbb{N}$.
De plus, nous pouvons donner une majoration de l'erreur entre $\mu(\alpha)$ et $\alpha\mu^{(n)}(\alpha)$ en utilisant $U^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \alpha^{2j}(\tilde{P}_j + P_j^0)u_0$ comme fonction test, nous définissons ainsi :

$$e_n := \alpha\left(\frac{q_\alpha(U^{(n)})}{||U^{(n)}||^2_{L^2(\Omega^0)}} - \mu^{(n)}(\alpha)\right), \tag{11.1}$$

nous avons alors la majoration :

$$\mu(\alpha) - \alpha\mu^{(n)}(\alpha) \leq e_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donnons les expressions des premiers termes du développement limité.
Au premier ordre, nous avons :

$$m_0 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad P_0^0(t) = 1, \quad \tilde{P}_0(t,\eta) = 0, \quad e_0 = 0.$$

Au second ordre :

$$\begin{aligned} m_1 &= -\frac{23}{35\sqrt{3}}, \\ \tilde{P}_1(t,\eta) &= \frac{2}{3}it\eta^3 - \frac{1}{6}t^2\eta^2 - \frac{2}{3\sqrt{3}}it^2\eta^3 + \frac{1}{3}t^2\eta^4 - \frac{i}{2}t\eta + \frac{1}{2\sqrt{3}}t^2\eta + \frac{7}{720}t^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1^0(t) &= -\frac{19}{42} + \frac{23}{70\sqrt{3}}t + \frac{11}{210}t^2 - \frac{2}{189\sqrt{3}}t^3 \\ e_1 &= \frac{\alpha^5\sqrt{3}}{1155}\frac{28161000 + 9252463\alpha^2}{44100 + 36571\alpha^4}. \end{aligned}$$

Donnons les expressions des termes au troisième ordre :

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{298}{539}\sqrt{3}, \\ P_2^0(t) &= \frac{811247}{485100} - \frac{31627}{32340\sqrt{3}}t - \frac{35747}{485100}t^2 - \frac{10973}{436590\sqrt{3}}t^3 \\ &\quad + \frac{7253}{1746360}t^4 - \frac{17}{17325\sqrt{3}}t^5 + \frac{2}{107163}t^6, \\ \tilde{P}_2(t,\eta) &= t\left(\frac{i}{56}\eta + \frac{2}{63}\eta^3 - i\frac{2}{15}\eta^5\right) \\ &\quad + t^2\left(\frac{3}{280} + i\frac{271}{840\sqrt{3}}\eta - \frac{17}{84}\eta^2 - i\frac{223}{315\sqrt{3}}\eta^3 + \frac{4}{7}\eta^4 + i\frac{2}{3\sqrt{3}}\eta^5 - \frac{4}{9}\eta^6\right) \\ &\quad + t^3\left(-\frac{451}{21600\sqrt{3}} - i\frac{1993}{10080}\eta + \frac{121}{315\sqrt{3}}\eta^2 + i\frac{2903}{7560}\eta^3\right. \\ &\qquad \left. - \frac{631}{630\sqrt{3}}\eta^4 - i\frac{11}{30}\eta^5 + \frac{28}{45\sqrt{3}}\eta^6 + i\frac{2}{9}\eta^7\right) \\ &\quad + t^4\left(\frac{12547}{7257600} + i\frac{1639}{30240\sqrt{3}}\eta - \frac{953}{30240}\eta^2 - i\frac{2689}{22680\sqrt{3}}\eta^3 + \frac{1223}{15120}\eta^4\right. \\ &\qquad \left. + \frac{13}{90\sqrt{3}}\eta^5 - \frac{1}{18}\eta^6 - \frac{2}{21\sqrt{3}}\eta^7 + \frac{1}{42}\eta^8\right) \\ &\quad + t^5\left(-\frac{1}{9720\sqrt{3}} - \frac{i}{567}\eta + \frac{1}{567\sqrt{3}}\eta^2 + i\frac{4}{1701}\eta^3 - \frac{2}{567\sqrt{3}}\eta^4\right), \end{aligned}$$

$$e_2 = -\frac{2084343127\alpha^7}{165540375\sqrt{3}}\frac{1 - \frac{4345222757204346}{259198489558085}\alpha^2 - \frac{12979510475587361}{4583720657448240}\alpha^4 + \frac{62074497527760923}{11764883020783816}\alpha^6}{1 + \frac{36571}{44100}\alpha^4 - \frac{3725864213}{662161500}\alpha^6 + \frac{416607365958127}{10401232842000}\alpha^8}.$$

Remarquons que les coefficients en $i\eta$ des polynômes $\tilde{P}_k$ sont réels comme le prévoyait la Proposition 7.4.
L'algorithme permet de poursuivre la détermination de chaque coefficient.

11.2 Utilisation des premiers termes du développement limité

En choisissant u_0 comme fonction test, nous avons montré que $\mu(\alpha)$ est une valeur propre pour $\alpha \leq \sqrt{3}\Theta_0$. Pour améliorer cette information, nous allons estimer le quotient de Rayleigh de $u_0 + \beta\alpha^2 u_1$ avec un choix particulier du paramètre β. Selon les calculs précédents et après simplification, nous déduisons :

$$\alpha\frac{q_\alpha(u_0 + \beta\alpha^2 u_1)}{||u_0 + \beta\alpha^2 u_1||^2_{L^2(\Omega^0)}} = f(\alpha,\beta),$$

avec :

$$f(\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{11\sqrt{3}}\frac{485100 - 318780\beta\alpha^2 + 1206881\beta^2\alpha^4}{44100 + 36571\beta^2\alpha^4}. \tag{11.2}$$

Nous choisissons le paramètre β de façon à minimiser $\alpha\dfrac{q_\alpha(u_0+\beta\alpha^2u_1)}{||u_0+\beta\alpha^2u_1||^2_{L^2(\Omega^0)}}$ pour $\alpha=\sqrt{3}\Theta_0$. Nous avons :

$$f(\sqrt{3}\Theta_0,\beta)=\frac{\Theta_0}{11}\frac{53900-106260\Theta_0^2\beta+1206881\Theta_0^4\beta^2}{4900+36571\Theta_0^4\beta^2}.$$

Calculons la dérivée selon β, alors :

$$\partial_\beta f(\sqrt{3}\Theta_0,\beta)=\frac{420\Theta_0^3}{11}\frac{-1239700+18774000\Theta_0^2\beta+1206881\Theta_0^4\beta^2}{(4900+36571\Theta_0^4\beta^2)^2}.$$

Nous choisissons donc :

$$\beta_*=\frac{70}{\Theta_0^2}\left(\frac{\sqrt{20323683139}-134100}{9252463}\right),$$

qui est bien un minimiseur pour $f(\sqrt{3}\Theta_0,\beta)$ car la dérivée seconde de f par rapport à β est positive en ce point $(\sqrt{3}\Theta_0,\beta_*)$. De manière approchée, $\beta_*\simeq 0.183$.
Selon le principe du min-max, nous pouvons majorer le bas du spectre par :

$$\mu(\alpha)\leq f(\alpha,\beta_*). \tag{11.3}$$

Nous avons prouvé au Théorème 3.15 que le bas du spectre essentiel vaut Θ_0, donc nous sommes assurés que $\mu(\alpha)$ est une valeur propre pour tout angle α tel que :

$$f(\alpha,\beta_*)<\Theta_0. \tag{11.4}$$

$f(\alpha,\beta_*)$ est une fraction rationnelle en α dont le dénominateur peut être choisi strictement positif et le numérateur vaut $P\left(\frac{\alpha}{\Theta_0}\right)$ où P est le polynôme :

$$\begin{aligned}P(X) &= 7022840539X^5-2340873139\sqrt{3}X^4-(14045902200+104742\sqrt{20323683139})X^3\\ &\quad+(344758438251+2413800\sqrt{20323683139})(X-\sqrt{3}),\end{aligned}$$

Le polynôme P admet une unique racine réelle, notée r_1. Nous déduisons alors que $\mu(\alpha)$ est une valeur propre pour $\alpha\in]0,\Theta_0 r_1]$. Approximativement, nous estimons que $\mu(\alpha)$ est une valeur propre pour $\alpha\in]0,1.089]$.
Si nous rappelons le Corollaire 4.6, nous voyons que l'intersection entre les deux intervalles où μ est une valeur propre n'est pas vide et nous en déduisons la «Proposition»[1] :

Proposition 11.1. *Le bas du spectre $\mu(\alpha)$ pour la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant égal à 1 est une valeur propre pour tout secteur angulaire d'angle $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\frac{\Theta_0}{\mu(\frac{\pi}{2})}\right]$.*

11.3 Estimations de $\mu(\alpha)$

Regroupons les différentes estimations de $\mu(\alpha)$ que nous avons obtenues et représentons-les aux Figures 11.1 et 11.2 :

[1]Nous mettons des «» pour rappeler qu'il s'agit d'une démonstration dépendant d'un calcul numérique dont la précision n'est pas totalement démontrée.

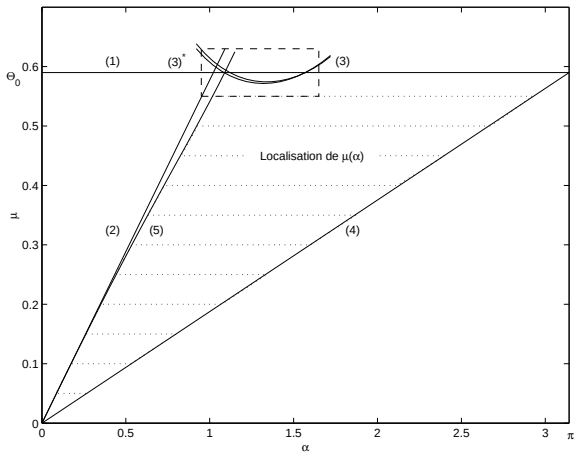


FIG. 11.1 – Localisation de $\mu(\alpha)$,

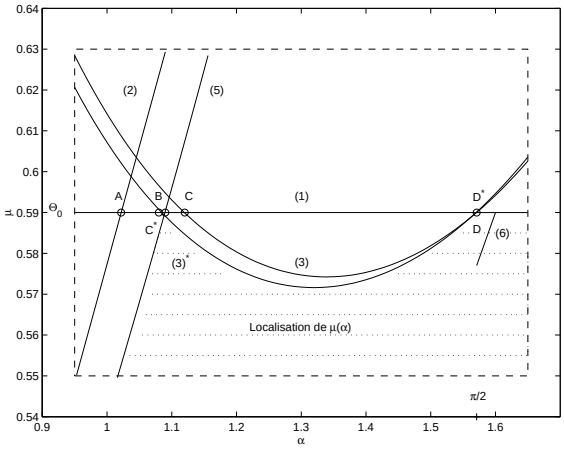


FIG. 11.2 – Zoom de la localisation de $\mu(\alpha)$,

Proposition 3.15 : $\forall \alpha \in]0, 2\pi[, \quad \mu(\alpha) \leq \Theta_0,$ (1)

Proposition 6.7 : $\forall \alpha \in]0, 2\pi[, \quad \mu(\alpha) \leq \dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}.$ (2)

Relation (4.6) : $\forall \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad \mu(\alpha) \leq \dfrac{\Theta_0}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{4\sin\alpha}\phi(0)^4,$ (3)

Relation (4.7) : $\forall \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad \mu(\alpha) \leq \dfrac{\Theta_{\text{app}}}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{4\sin\alpha}\phi_{\text{app}}(0)^4 + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\mathcal{I}^2,$ (3)*

$$\text{avec } \mathcal{I} = \int_0^\infty (x - \zeta_{\text{app}})|\phi_{\text{app}}(t)|^2 \, dt,$$

Relation (5.21) : $\forall \alpha \in]0, \pi[, \quad \mu(\alpha) \geq \Theta_0 \dfrac{\alpha}{\pi},$ (4)

Relation (11.3) : $\forall \alpha \in]0, 2\pi[, \quad \mu(\alpha) \leq f(\alpha, \beta_*)$ avec $f(\alpha, \beta)$ définie en (11.2), (5)

Relation (5.20) : $\forall \alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \quad \mu(\alpha) \leq \dfrac{2\alpha}{\pi}\mu\left(\dfrac{\pi}{2}\right).$ (6)

Notons (α_A, μ_A), (α_B, μ_B), (α_C, μ_C) et $(\alpha_{C^*}, \mu_{C^*})$ les coordonnées du point d'intersection de la droite $\mu = \Theta_0$ et, respectivement, de la courbe $\mu = \dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}$, $\mu = f(\alpha, \beta_*)$ avec le précédent choix de β_*, $\mu = \dfrac{\Theta_0}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{4\sin\alpha}\phi(0)^4$ et $\mu = \dfrac{\Theta_{\text{app}}}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\dfrac{\phi_{\text{app}}(0)^4}{4} - \mathcal{I}^2\right)$, pour les estimations numériques données en (2.122). Nous voyons que $\alpha_A < \alpha_{C^*} < \alpha_B$, ce qui permet de visualiser le fait que $\mu(\alpha)$ est une valeur propre pour $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

Troisième partie

Modélisation numérique

Pour compléter les informations obtenues aux deux premières parties sur le bas du spectre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant sur un secteur angulaire, nous mettons en œuvre une méthode numérique. Le but de cette partie est de déterminer numériquement $\mu(\alpha)$.

Le Chapitre 12 est consacré à l'analyse et à la critique de trois algorithmes permettant de calculer le bas du spectre de $P_{B\mathcal{A}_0,\Omega}$ pour un domaine Ω borné. Nous proposons tout d'abord un algorithme de recherche de valeur propre généralisée et constatons l'inefficacité de la méthode standard consistant à construire les matrices de masse et de rigidité du problème comme nous l'expliquons à la Section 12.3. Considérant les propriétés de l'opérateur $P_{B\mathcal{A}_0,\Omega}$, nous proposons une nouvelle approche du problème numérique en (12.26) et discutons la pertinence de deux nouveaux algorithmes aux Sections 12.4 et 12.5. Ce chapitre permet ainsi de construire une méthode robuste pour déterminer numériquement le bas du spectre de $P_{B\mathcal{A}_0,\Omega}$.

Pour contrôler l'erreur entre la solution numérique et la solution exacte du problème, nous construisons des estimateurs a posteriori. Cette construction est donnée en détail en Annexe A qui fait l'objet d'un article. Les indicateurs d'erreurs permettent d'adapter une technique de raffinement de maillages au Chapitre 13. Nous couplons ainsi la méthode robuste développée à la Section 12.5 et le raffinement de maillages afin d'obtenir les éléments propres avec une bonne précision. Cette technique conduit, à la Section 13.4, à une estimation numérique de $\mu(\alpha)$ concordant avec les résultats théoriques obtenus précédemment. La Section 13.5 propose des estimations numériques du bas du spectre et de l'état fondamental pour quelques domaines à bord régulier ou n'ayant qu'un sommet d'angle minimal.

Les résultats de cette partie sont annoncés dans la note [6].

Chapitre 12

Analyse numérique du problème

12.1 Introduction

Nous avons obtenu des informations sur la localisation du bas du spectre de l'opérateur de Schrödinger à champ magnétique constant dans un secteur angulaire. Ces informations sont illustrées aux Figures 11.1 et 11.2. Les deux expressions de la dérivée de μ, données en (5.3) et (5.24), ne sont pas suffisantes pour préciser sa monotonie. Nous allons donc utiliser une méthode numérique pour prévoir et estimer le comportement de $\mu(\alpha)$ selon l'angle α.

Le Théorème 9.1 a établi que le vecteur propre associé à la valeur propre $\mu(\alpha)$ décroit exponentiellement avec la distance au coin du secteur angulaire. Pour illustrer cette estimation, nous utilisons des outils numériques. Mais, du fait même de la concentration au coin du domaine, un traitement numérique est assez difficile et il faut trouver une méthode qui pallie au mauvais conditionnement du problème.

Les outils numériques permettent également de visualiser la localisation de l'état propre pour des domaines plus généraux. Dans le cas de domaines réguliers, Helffer-Morame ont montré dans [60] que l'état fondamental est localisé aux points du bord de courbure maximale. Pour des domaines non réguliers, il est donc naturel de s'intéresser au rôle et à l'influence de la présence de coins sur la localisation de l'état fondamental. Nous donnerons des éléments de réponse au Chapitre 15 dans le cadre de l'analyse semi-classique. Il suffit de se référer à la Remarque 3.3 pour voir qu'il est équivalent, dans le cas de champ magnétique constant, de prendre un paramètre semi-classique petit ou de considérer un champ magnétique B intense.

Hornberger et Smilansky [65, 66] traitent de manière numérique la détermination des états excités à l'aide d'une méthode d'intégrales de bord et peuvent également déterminer les états fondamentaux. Leur technique est propre aux domaines réguliers mais pourrait probablement se généraliser à des domaines non réguliers. Nous proposons d'utiliser la méthode des éléments finis qui semble plus naturelle.

Deux questions retiendront notre attention lors du traitement numérique :
- Comment agit la valeur de l'angle α d'un secteur Ω_α sur la valeur propre associée à l'opérateur $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$?
- Quelle est l'influence de plusieurs coins pour la détermination de l'état fondamental ?

Pour étudier le comportement de $\mu(\alpha)$ selon α, nous allons privilégier la détermination numérique du bas du spectre de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique constant sur un secteur angulaire. Le domaine de calcul numérique doit être borné. Il faut donc tronquer le secteur angulaire.

Compte-tenu de l'effet des coins sur la localisation de l'état fondamental et sur la valeur de l'énergie, il faut effectuer une troncature régulière à l'aide d'une portion de cercle de manière à ne pas créer de nouveau point singulier. La Figure 12.1 montre la façon d'approcher un secteur par troncature. Nous notons L la longueur du secteur angulaire considéré, auquel est recollée une portion de cercle tangent aux côtés du secteur angulaire. Avec les notations de la Figure 12.1, les points A, B et D ont les mêmes abscisses, A et B sont sur les côtés du secteur avec des ordonnées opposées et D est sur l'axe des abscisse. Alors la longueur L est la distance OD. Nous recollons à cette portion de secteur un cercle tangent au secteur en A et B et de centre C situé sur l'axe des abscisses. Notons Ω_α^L le domaine obtenu.

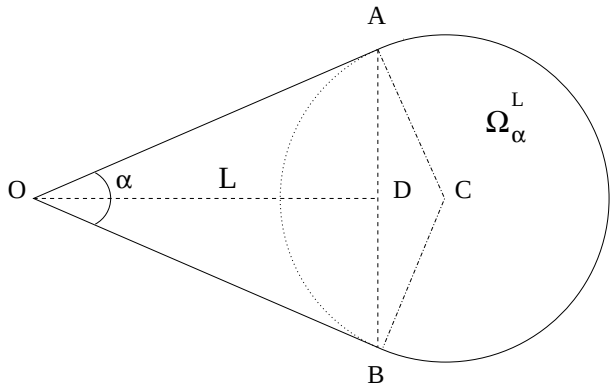


FIG. 12.1 – Troncature du secteur.

Le domaine de travail numérique est donc le domaine Ω_α^L qui tend vers le secteur Ω_α quand L tend vers l'infini. Si la troncature a lieu trop près de l'origine, c'est-à-dire si L est trop petite, il risque d'y avoir une perte d'information en comparant avec l'état fondamental sur le secteur tout entier. D'après le Théorème 9.1, nous savons que l'état fondamental est localisé dans l'angle du secteur et décroit exponentiellement en s'éloignant du coin. Par conséquent, une troncature engendre une perte d'informations d'autant plus petite qu'elle est faite loin du coin et cette perte est exponentiellement petite avec L. Nous effectuons donc l'étude sur un secteur d'une longueur fixe et montrerons, en éloignant progressivement la troncature, ce qui revient à augmenter la longueur L, que la différence entre les énergies calculées sur chacun de ces domaines est de l'ordre de la précision de nos calculs comme le précise le Tableau 13.8.

Dans la suite de ce chapitre, après avoir présenté un algorithme de recherche de valeur propre généralisée, nous proposons et faisons l'analyse critique de plusieurs méthodes numériques pour déterminer l'état fondamental de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant. Grâce à l'invariance de jauge, rappelée à la Proposition 3.1, nous nous restreignons à des champs de la forme $\mathcal{A} = B\mathcal{A}_0$. De plus, Ω est borné, donc le domaine de forme de l'opérateur $-\nabla^2_{B\mathcal{A}_0}$ est $H^1(\Omega)$ et le domaine de la réalisation de Neumann est :

$$\mathcal{D}_\Omega^N := \{u \in H^2(\Omega) |\ \nu \cdot (\nabla - iB\mathcal{A}_0)u_{|\Gamma'} = 0\}.$$

Nous noterons plus simplement $a_{B,\Omega}$ la forme $a_{1,B\mathcal{A}_0,\Omega}$ définie sur $H^1(\Omega)$ par :

$$a_{B,\Omega}(u,v) = \int_\Omega (\nabla - iB\mathcal{A}_0)u \cdot \overline{(\nabla - iB\mathcal{A}_0)v}\ dx. \tag{12.1}$$

Considérons $\mathcal{T}_h^0$ une triangulation de Ω dont le diamètre de chaque élément est majoré par h. Nous noterons $\mathcal{T}_h^j$ une translation de vecteur $(j,0)$ du maillage $\mathcal{T}_h^0$. Le maillage $\mathcal{T}_h^j$ est ainsi un maillage

du domaine Ω translaté de $(j,0)$. Nous noterons $\mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h)$ ou plus simplement $\mathbb{P}^k$ l'espace des éléments finis de degré k, ϕ_i les fonctions de base associées telles que ϕ_i est à support dans l'élément T_i du maillage et *ddl* le nombre de degrés de liberté.

12.2 Recherche de valeur propre généralisée

Comme nous le verrons dans les différentes méthodes utilisées, nous aurons besoin de calculer une valeur propre généralisée. La méthode proposée ici ne semble pas courante dans la littérature et se base sur un algorithme de gradient conjugué (cf [95]).
Considérons A et M deux matrices symétriques définies positives, nous souhaitons déterminer la plus petite valeur propre généralisée associée à A et M ainsi que son vecteur propre associé. Nous cherchons donc le plus petit réel μ et un vecteur x tels que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Ax & = & \mu Mx, \\ \langle Mx, x\rangle_{L^2(\Omega)} & = & 1. \end{array} \right. \tag{12.2}$$

Le problème (12.2) revient donc à minimiser $\langle Ax, x\rangle_{L^2(\Omega)}$ sous la contrainte $\langle Mx, x\rangle_{L^2(\Omega)} = 1$, ou encore, en utilisant le changement d'inconnue $y = M^{\frac{1}{2}}x$, à déterminer y tel que $M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}}y = \mu y$ sous la contrainte $||y|| = 1$.

Proposition 12.1. *Soit x_0 un vecteur tel que $\langle Mx_0, x_0\rangle_{L^2(\Omega)} = 1$. Pour tout entier $n \geq 0$, nous considérons le vecteur w_n solution du problème de minimisation*

$$\min_{w | \langle Mx_n, w\rangle_{L^2(\Omega)} = 0} \langle A(x_n + w), x_n + w\rangle_{L^2(\Omega)}. \tag{12.3}$$

Définissons le vecteur

$$x_{n+1} := \frac{x_n + w_n}{\sqrt{\langle M(x_n + w_n), x_n + w_n\rangle_{L^2(\Omega)}}}. \tag{12.4}$$

Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est normalisée pour ma matrice M, son énergie associée $\langle Ax_n, x_n\rangle_{L^2(\Omega)}$ décroit et converge vers une valeur propre généralisée μ pour les matrices (A, M).
Si la valeur propre μ est simple, alors la suite (x_n) converge vers un vecteur propre normalisé associé. Sinon, il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers un vecteur propre normalisé pour μ.

Démonstration : Soit $n \geq 0$. Considérons le vecteur w_n solution du problème de minimisation (12.3). L'équation d'Euler associée au problème (12.3) conduit à la relation

$$A(x_n + w_n) = \langle A(x_n + w_n), x_n\rangle_{L^2(\Omega)} Mx_n. \tag{12.5}$$

Nous déduisons immédiatement que

$$\langle A(x_n + w_n), w_n\rangle_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{12.6}$$

Montrons que l'énergie associée au vecteur $x_n + w_n$ est inférieure à celle de x_n. Par l'hypothèse d'orthogonalité sur la fonction w_n, nous avons $\langle Mx_n, w_n\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$, donc :

$$\langle M(x_n + w_n), x_n + w_n\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle Mx_n, x_n\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle Mw_n, w_n\rangle_{L^2(\Omega)} = 1 + \langle Mw_n, w_n\rangle_{L^2(\Omega)} \geq 1. \tag{12.7}$$

La définition (12.4) de x_{n+1} et la relation (12.7) mènent ainsi à l'inégalité :

$$\langle Ax_{n+1}, x_{n+1}\rangle_{L^2(\Omega)} \leq \langle A(x_n + w_n), x_n + w_n\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle Ax_n, x_n\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle Aw_n, w_n\rangle_{L^2(\Omega)}. \tag{12.8}$$

En sommant la relation (12.8) et utilisant la décroissance de la suite $(\langle Ax_n, x_n\rangle_{L^2(\Omega)})$, nous déduisons que la série de terme général $(\langle Aw_n, w_n\rangle_{L^2(\Omega)})$ converge, donc $\langle Aw_n, w_n\rangle_{L^2(\Omega)}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. Nous construisons ainsi une suite de vecteurs $(x_n)_n$ normalisés selon la matrice M et dont l'énergie associée décroit. Comme l'énergie est minorée par la plus petite valeur propre généralisée pour (A, M), elle converge vers un réel $E_\infty > 0$. La suite (x_n) est bornée, donc nous pouvons extraire une sous-suite qui converge vers x_∞, vecteur propre pour la valeur propre E_∞, selon (12.5).
Si la valeur propre E_∞ est simple, montrons que toute la suite converge vers le vecteur propre x_∞ en raisonnant par l'absurde. D'après la relation (12.5), toute valeur d'adhérence est vecteur propre généralisé pour les matrices (A, M), donc la suite a au plus deux valeurs d'adhérence. Si la suite (x_n) admet deux valeurs d'adhérence, elle en admet au moins une troisième car $x_{n+1} - x_n$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, ce qui ne peut être. Par conséquent, la suite (x_n) n'a qu'une seule valeur d'adhérence et elle converge vers x_∞, vecteur propre généralisé pour (A, M). □
Précisons la manière de construire w_n. Définissons le projecteur orthogonal Π_n sur $(Mx_n)^\perp$:

$$\Pi_n : w \mapsto w - \frac{\langle Mw, x_n\rangle_{L^2(\Omega)}}{||Mx_n||^2_{L^2(\Omega)}} Mx_n. \tag{12.9}$$

Par construction du projecteur, $\langle \Pi_n w, Mx_n\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$. L'hypothèse sur w_n mène à la relation :

$$A(x_n + w_n) = \tilde{\mu}_n Mx_n \text{ avec } \tilde{\mu}_n = \langle A(x_n + w_n), x_n + w_n\rangle_{L^2(\Omega)}. \tag{12.10}$$

Par conséquent, $\Pi_n A(x_n + w_n) = 0$. Comme $\langle Mx_n, w_n\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$, alors $\Pi_n w_n = w_n$ et nous déduisons l'expression de w_n : $\Pi_n A \Pi_n w_n = -\Pi_n A x_n$. La matrice $\Pi_n A \Pi_n$ est symétrique, définie positive sur $(Mx_n)^\perp$, donc nous pouvons déterminer le vecteur w_n par la méthode du gradient conjugué.
Nous avons ainsi conçu un algorithme pour déterminer une valeur propre généralisée. Notons qu'un vecteur propre est un point critique pour l'Algorithme 12.2 mais nous pensons que les erreurs numériques permettront à l'algorithme de converger vers la plus petite valeur propre.

Algorithme 12.2 (Recherche de valeur propre généralisée).

- *Donnée d'un nombre d'itérations maximal n_{max} et d'un seuil de tolérance d'erreur ε.*
- *Initialisation de l'erreur $\varepsilon_0 = 1$, du compteur $n = 0$, de x_0 vérifiant $\langle Mx_0, x_0\rangle_{L^2(\Omega)} = 1$ et de la valeur propre $\mu_0 = \langle Ax_0, x_0\rangle_{L^2(\Omega)}$.*
- *Tant que le nombre d'itérations n est inférieur à n_{max} et que l'erreur ε_n est supérieure à la tolérance ε :*
  1. *Construction de la matrice du projecteur $\Pi_n : w \mapsto w - \dfrac{\langle Mw, x_n\rangle_{L^2(\Omega)}}{||Mx_n||^2_{L^2(\Omega)}} Mx_n$.*
     (Il est inutile de construire complètement la matrice Π_n, il suffit de savoir calculer le produit de la matrice Π_n par un vecteur.)
  2. *Détermination de w_n, solution de $\Pi_n A \Pi_n w_n = -\Pi_n A x_n$ à l'aide d'un algorithme de gradient conjugué avec une précision ε et un nombre d'itérations limité à n_{max}.*
  3. *Construction de $x_{n+1} = \dfrac{x_n + w_n}{\sqrt{\langle M(x_n + w_n), x_n + w_n\rangle_{L^2(\Omega)}}}$.*
  4. *Calcul de l'énergie : $\mu_{n+1} = \langle Ax_{n+1}, x_{n+1}\rangle_{L^2(\Omega)}$.*
  5. *Calcul de l'erreur : $\varepsilon_{n+1} = \max(|\mu_n - \mu_{n+1}|, ||x_n - x_{n+1}||)$.*
  6. *Incrémentation $n = n + 1$.*

12.3 Méthode numérique standard

La formulation variationnelle du problème revient à chercher $(\mu, u) \in \mathbb{R} \times H^1(\Omega)$ tels que :

$$\mu \text{ minimum et } \forall v \in H^1(\Omega), \left\{ \begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Omega \nabla_{\mathcal{A}} u \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} v}\, dx &=& \mu \displaystyle\int_\Omega u\overline{v}\, dx, \\ \displaystyle\int_\Omega |u|^2\, dx &=& 1. \end{array} \right. \tag{12.11}$$

Le problème discret associé consiste naturellement à déterminer $(\mu_h, u_h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h)$ tels que :

$$\mu_h \text{ minimum et } \forall v_h \in \mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h), \left\{ \begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Omega \nabla_{\mathcal{A}} u_h \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} v_h}\, dx &=& \mu_h \displaystyle\int_\Omega u_h\overline{v_h}\, dx, \\ \displaystyle\int_\Omega |u_h|^2\, dx &=& 1. \end{array} \right. \tag{12.12}$$

L'idée naturelle, mais naïve comme nous le verrons par la suite, est de construire les matrices de masse et de rigidité pour le problème (12.12). Rappelons-en le principe.
Décomposons u_h selon les fonctions de base $(\phi_j)_j$:

$$u_h = \sum_j u_j\ \phi_j, \tag{12.13}$$

avec $u_j \in \mathbb{C}$ et u_h normalisé. Le problème (12.12) revient à trouver les coefficients u_j et le plus petit réel μ_h tels que :

$$\forall k,\ \sum_j u_j \int_\Omega \nabla_{\mathcal{A}}\phi_j \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}}\phi_k}\, dx \ = \ \mu_h \sum_j u_j \int_\Omega \phi_j\ \overline{\phi_k}\, dx. \tag{12.14}$$

Les matrices de masse M et de rigidité A sont déterminées par leurs coefficients $M_{j,k}$ et $A_{j,k}$ qui sont des approximations numériques de $\langle \phi_j, \phi_k \rangle_{L^2(\Omega)}$ et $a_{B,\Omega}(\phi_j, \phi_k)$ (celles-ci sont calculées avec des formules de quadrature d'ordre élevé) :

$$M_{j,k} \simeq \int_\Omega \phi_j \overline{\phi_k}\, dx \quad \text{et} \quad A_{j,k} \simeq \int_\Omega \nabla_{\mathcal{A}}\phi_j \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}}\phi_k}\, dx.$$

Remarque 12.3.

- *Les matrices M et A sont creuses car les coefficients $M_{j,k}$ et $A_{j,k}$ sont nuls dès que les éléments T_j et T_k ne sont pas voisins.*
- *Si la formule d'intégration numérique est au moins d'ordre $2k+2$, alors le calcul des intégrales $\langle \phi_j, \phi_k \rangle_{L^2(\Omega)}$ et $a_{B,\Omega}(\phi_j, \phi_k)$ est exact.*

Pour tout $u_h \in \mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h)$ qui se décompose comme en (12.13) dans la base des $(\phi_j)_j$, nous notons U le vecteur de coordonnées u_j. Avec ces notations, les matrices M et A vérifient :

$$\int_\Omega u_h\overline{v_h}\, dx \ \simeq \ {}^t\overline{V} M U; \tag{12.15}$$

$$a_{B,\Omega}(u_h, v_h) \ \simeq \ {}^t\overline{V} A U. \tag{12.16}$$

Par conséquent, le problème continu consistant à :
trouver $u \in H^1(\Omega)$ et le plus petit $\mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $v \in H^1(\Omega)$, $a_{B,\Omega}(u, v) = \mu \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$,
revient de manière naturelle au problème discret :
trouver $U \in \mathbb{C}^{ddl}$ et le plus petit $\mu_h \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $V \in \mathbb{C}^{ddl}$, ${}^t\overline{V} A U = \mu_h {}^t\overline{V} M A$.
Le problème numérique est donc de déterminer les plus petites valeurs propres et vecteurs propres généralisés de la matrice A pour la matrice M, c'est-à-dire de trouver le plus petit $\mu_h \in \mathbb{R}$ et $U \in \mathbb{C}^{ddl}$ tels que :

$$AU = \mu_h M U \text{ et } {}^t U M U = 1. \tag{12.17}$$

Remarque 12.4. *La formulation (12.17) n'est pas invariante par changement de jauge. En effet, si u est polynomial par morceaux, alors $e^{i\phi}u$, avec ϕ linéaire, n'est pas polynomial par morceaux donc n'est a fortiori pas dans l'espace de discrétisation. Ainsi, le problème discrétisé ne respecte pas l'invariance de jauge.*

L'Algorithme 12.2 permet de déterminer numériquement μ_h et U vérifiant (12.17).
Nous avons établi l'effet d'une translation sur le vecteur propre à la Proposition 3.4. Regardons si cette première méthode respecte l'effet d'une translation.
Considérons le domaine décrit par la Figure 12.1 avec $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et $L = 3$. Un maillage de ce domaine est noté $\mathcal{T}_h^0$ translaté d'un vecteur $(1,0)$ et $(2,0)$ afin d'obtenir les maillages $\mathcal{T}_h^1$ et $\mathcal{T}_h^2$ du domaine Ω_α^L translaté de $(1,0)$ et de $(2,0)$.
Appliquons un champ magnétique d'intensité B constante et déterminons numériquement les états fondamentaux sur ces trois maillages avec une résolution $\mathbb{P}^2$, une formule d'intégration d'ordre 5, une précision de 10^{-4} pour le gradient conjugué et un nombre d'itérations limité à 400 pour le calcul de la valeur propre généralisée.

Commençons par appliquer un champ $B = 50$ Teslas sur des maillages à 138 éléments. Les résultats sont présentés au Tableau 12.1 et aux Figures 12.2 et 12.3.

Maillage à 138 éléments			Maillage à 1328 éléments		
$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$	$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$
27.6519	43.7395	51.1149	21.3263	26.7383	47.5876

TAB. 12.1 – Énergie associée à des maillages translatés, $B = 50$ Teslas.

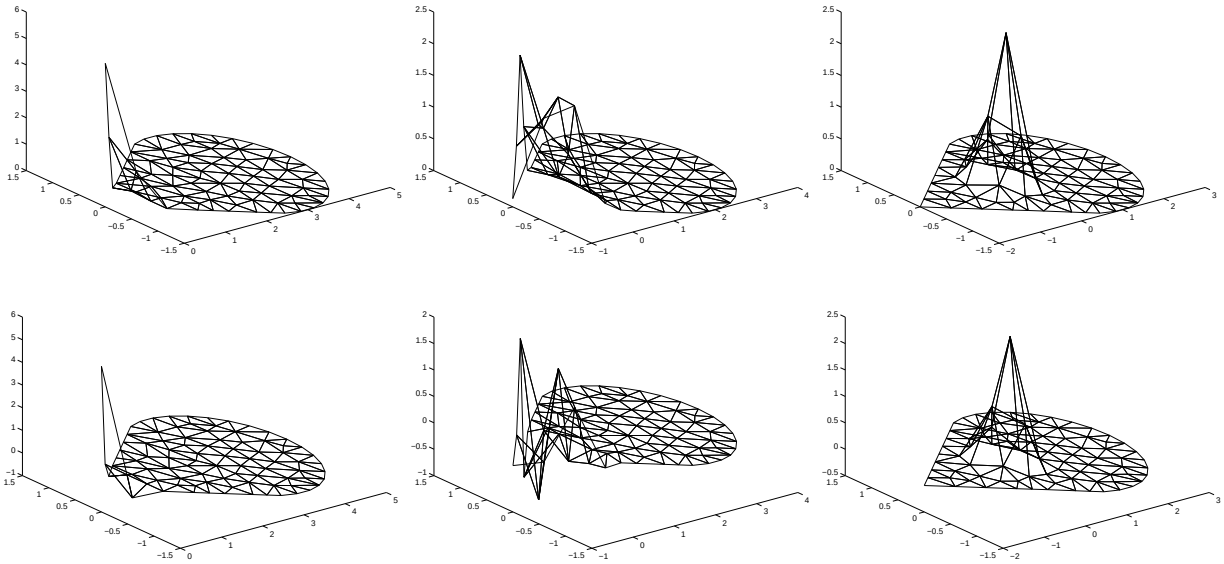


FIG. 12.2 – Modules et parties réelles des états fondamentaux associés à des maillages translatés, $B = 50$ Teslas, maillage à 138 éléments.

Les résultats, présentés à la Figure 12.2 ne sont pas conformes à ceux de la Proposition 3.4. En effet, les valeurs propres et les modules des états fondamentaux devraient être identiques pour

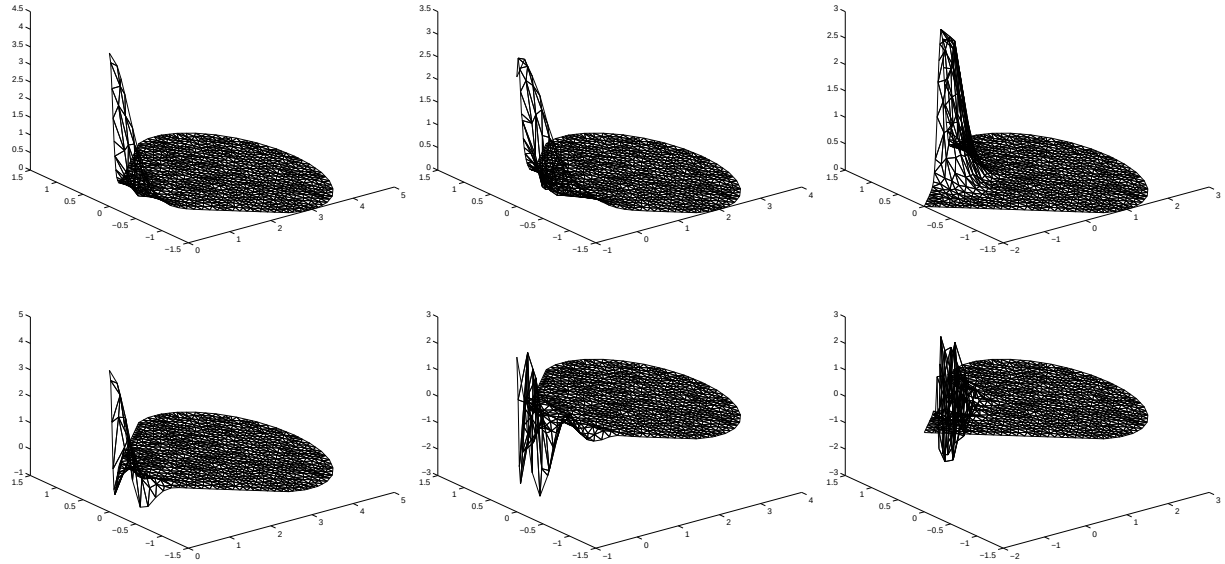


FIG. 12.3 – Modules et parties réelles des états fondamentaux associés à des maillages translatés, $B = 50$ Teslas, maillage à 1328 éléments.

chaque maillage. Cette divergence s'explique par le fait qu'une translation de vecteur t engendre des oscillations de la forme $\frac{B}{2}x \wedge t$. Un maillage trop grossier empêche de capter les oscillations. Une condition sur la taille de la discrétisation est d'être inversement proportionnelle à $B||t||$.
La Figure 12.3 présente les résultats sur un maillage à 1328 éléments, raffiné uniformément. Les modules associés aux maillages sans translation et avec une translation de vecteur $(1, 0)$ sont assez proches. Par contre, pour la translation de vecteur $(2, 0)$, le terme $e^{i\frac{B}{2}x\wedge t}$ est trop grand et les oscillations sont trop importantes. La partie réelle permet de visualiser les oscillations à la Figure 12.3.

Reprenons les deux maillages précédents mais considérons un champ moins intense $B = 10$ Teslas. Le Tableau 12.2 et les Figures 12.4 et 12.5 donnent les valeurs propres, les modules et parties réelles des états fondamentaux sur des maillages translatés.

Maillage à 138 éléments			Maillage à 1328 éléments		
$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$	$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$
4.3306	4.2551	5.4980	4.1860	4.1810	4.2330

TAB. 12.2 – Énergie associée à des maillages translatés, $B = 10$ Teslas

La Figure 12.4 présente les résultats pour le maillage grossier : le même phénomène se produit que pour le maillage fin avec un champ $B = 50$ Teslas. Dès que la translation est trop importante, les oscillations sont trop intenses et les résultats sont erronés. Par contre, sur un maillage fin (Figure 12.5), les modules associés à chaque maillage translatés sont superposables et les énergies sont comparables.

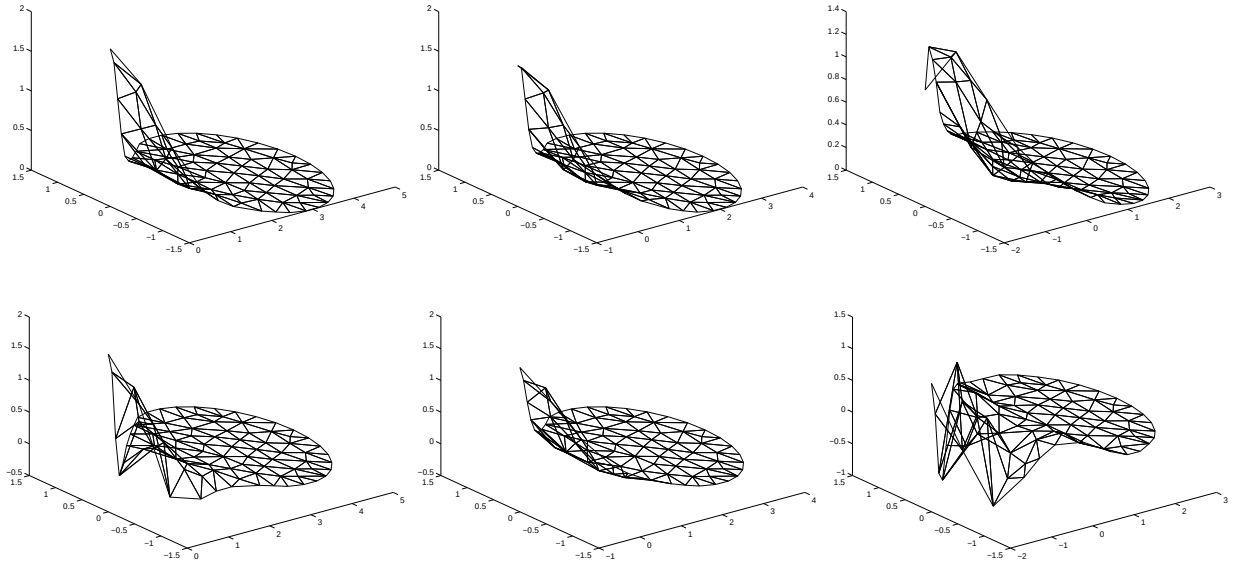


FIG. 12.4 – Modules et parties réelles des états fondamentaux associés à des maillages translatés, $B = 10$ Teslas, maillage à 138 éléments.

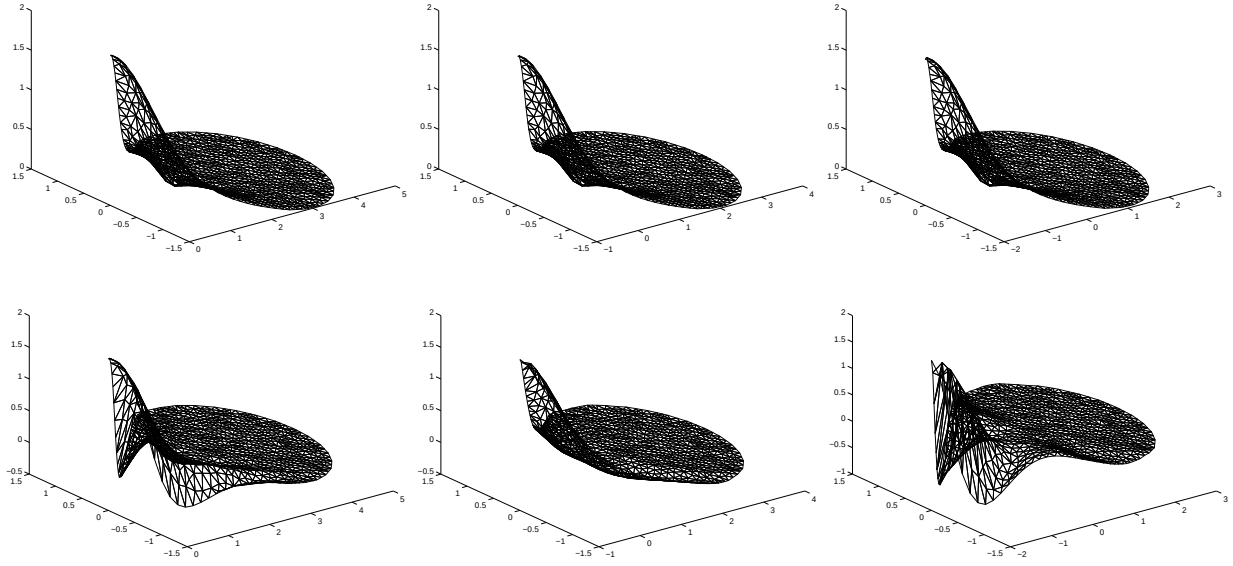


FIG. 12.5 – Modules et parties réelles des états fondamentaux associés à des maillages translatés, $B = 10$ Teslas, maillage à 1328 éléments.

Prenons un champ intermédiaire $B = 30$ Teslas. Les résultats sont présentés au Tableau 12.3 et aux Figures 12.6 et 12.7. Le comportement oscillant est nettement visible.

Maillage à 138 éléments			Maillage à 1328 éléments		
$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$	$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$
14.3868	18.1965	30.2870	12.6555	12.9483	20.3891

TAB. 12.3 – Énergie associée à des maillages translatés, $B = 30$ Teslas.

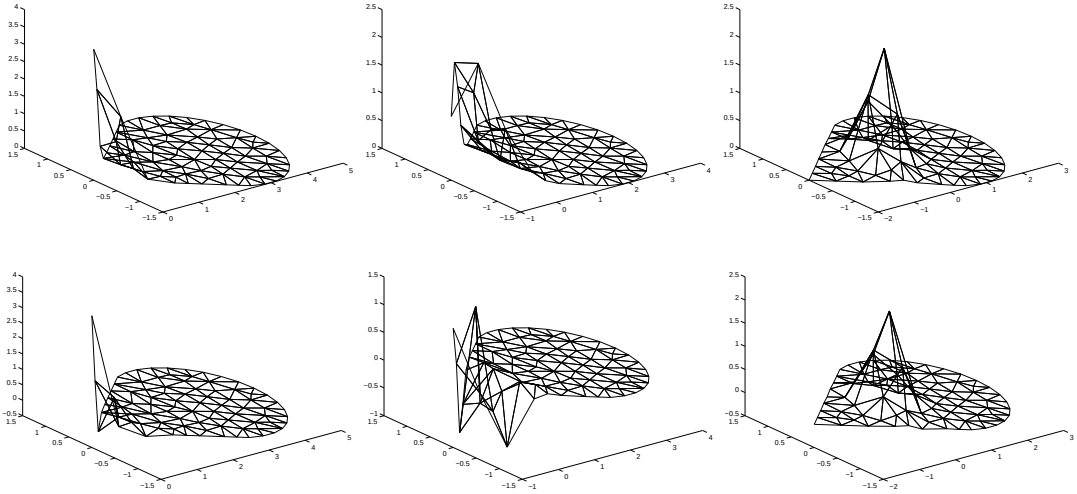


FIG. 12.6 – Modules et parties réelles des états fondamentaux associés à des maillages translatés, $B = 30$ Teslas, maillage à 138 éléments.

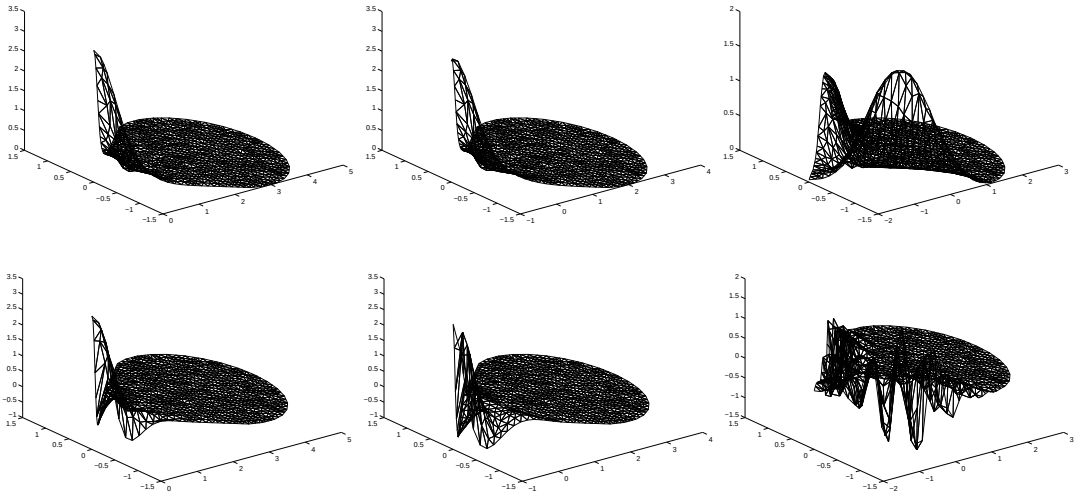


FIG. 12.7 – Modules et parties réelles des états fondamentaux associés à des maillages translatés, $B = 30$ Teslas, maillages à 1328 éléments.

Donnons rapidement des résultats similaires pour un triangle. Le Tableau 12.4 donne les énergies et les Figures 12.8 et 12.9 permettent de visualiser le module de l'état fondamental.

	Maillage à 163 éléments			Maillage à 1583 éléments		
B	$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$	$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$
10	2.0570	2.0424	2.0681	2.0414	2.0412	2.0415
50	25.7975	15.0563	12.5649	21.6893	12.1225	12.0221

TAB. 12.4 – Énergie associée à des maillages translatés

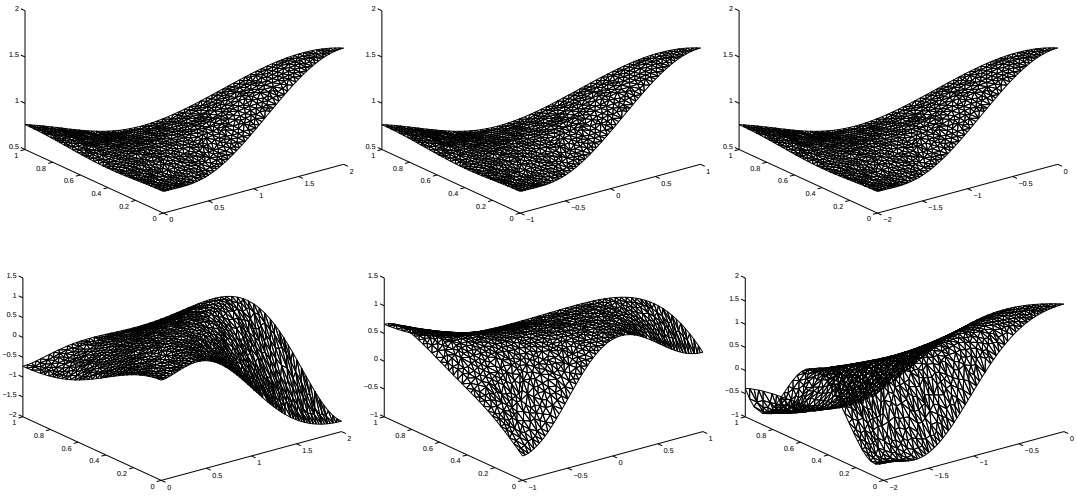


FIG. 12.8 – Modules et parties réelles des états propres sur des domaines translatés, $B = 10$ Teslas.

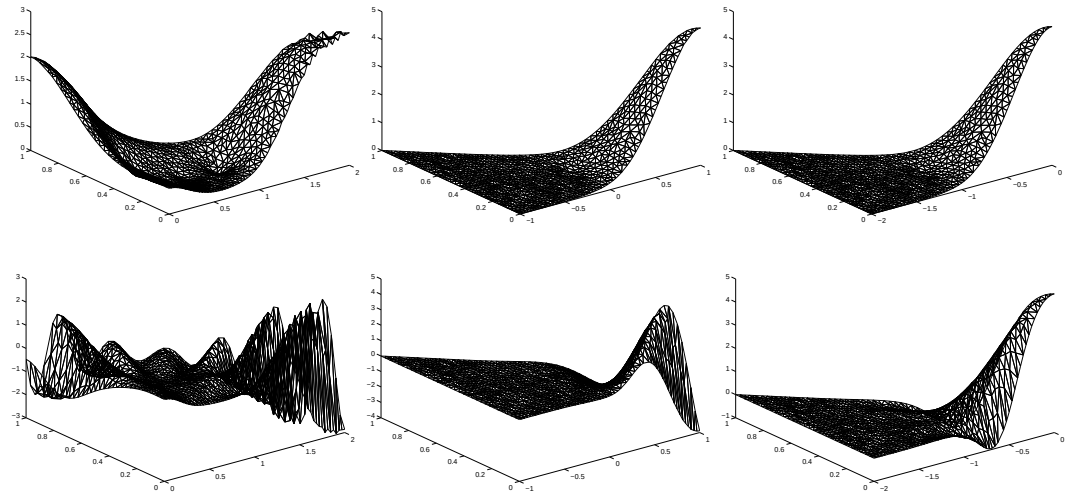


FIG. 12.9 – Modules et parties réelles des états propres sur des domaines translatés, $B = 50$ Teslas.

Si le champ n'est pas trop intense, l'algorithme permet de capter les oscillations (cf Figure 12.8). Par contre, pour un champ plus intense, $B = 50$ Teslas, le résultat est acceptable quand le plus petit angle est proche de l'origine car dans ce cas, le terme $\frac{B}{2}x \wedge t$ est petit. Dès que le plus petit angle du domaine, où l'état devrait se concentrer, est trop éloigné de l'origine, ce qui est le cas du maillage $\mathcal{T}_h^0$ où le plus petit angle a pour coordonnées $(2, 0)$, alors le terme $\frac{B}{2}x \wedge t$ devient conséquent et si le maillage n'est pas assez fin, les oscillations ne sont plus captées et les résultats sont erronés.

Cette méthode n'est donc pas acceptable car elle ne respecte pas les changements de jauge ni les invariances de translation. La solution sur les maillages translatés n'est pas la solution translatée du maillage initial. De plus, il est nécessaire d'avoir un maillage d'une finesse inversement proportionnelle à l'intensité du champ magnétique, ce qui interdit tout raffinement localisé. Or il semble que l'état fondamental soit localisé dans l'angle du secteur et il serait beaucoup plus avantageux de trouver une méthode qui soit invariante par translation et compatible avec un raffinement localisé.

Nous allons donc chercher une approche du problème qui conserve l'invariance du bas du spectre par translation du domaine.

Comme la phase joue un rôle déterminant lors d'un changement de jauge ou d'une translation, nous cherchons une nouvelle formulation du problème en prenant la phase comme inconnue.

12.4 Une approche différente du problème

Nous avons vu que la méthode standard ne permettait pas de déterminer le vecteur propre car une translation de domaine engendre des oscillations qui nécessitent un maillage particulièrement fin pour les capter, nous cherchons une nouvelle formulation en privilégiant la phase. Il est donc naturel de décomposer les fonctions $u \in H^1(\Omega)$ sous la forme :

$$\forall x \in \Omega,\ u(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}. \tag{12.18}$$

Supposons que nous pouvons écrire u sous la forme (12.18) avec $\rho \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $\theta \in H^1(\Omega)$, alors, par changement de jauge (cf Proposition 3.1) :

$$\int_\Omega |(\nabla - iB\mathcal{A}_0)u|^2\ dx = \int_\Omega |(\nabla - i(B\mathcal{A}_0 - \nabla\theta))\rho|^2\ dx = \int_\Omega |\nabla\rho|^2 + |(B\mathcal{A}_0 - \nabla\theta)\rho|^2\ dx. \tag{12.19}$$

Définissons l'opérateur $P^\theta_{B\mathcal{A}_0,\Omega}$ par :

$$P^\theta_{B\mathcal{A}_0,\Omega}\rho = -\nabla^2\rho + |B\mathcal{A}_0 - \nabla\theta|^2\rho. \tag{12.20}$$

Il vient alors :

$$P_{B\mathcal{A}_0,\Omega}(\rho e^{i\theta}) = e^{i\theta}P^\theta_{B\mathcal{A}_0,\Omega}\rho. \tag{12.21}$$

Par conséquent, $u = \rho e^{i\theta}$ est un vecteur propre de phase θ pour l'opérateur $P_{B\mathcal{A}_0,\Omega}$ si et seulement si ρ est un vecteur propre réel pour l'opérateur $P^\theta_{B\mathcal{A}_0,\Omega}$.
Le problème revient donc à déterminer le minimum :

$$\inf_{\theta\in H^1(\Omega),\rho\in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega),\rho\neq 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla\rho|^2 + \rho^2|B\mathcal{A}_0 - \nabla\theta|^2)\ dx}{\displaystyle\int_\Omega |\rho|^2\ dx}. \tag{12.22}$$

Remarque 12.5. *Montrons que si Ω est régulier et si le module ρ du premier vecteur propre de $P_{B\mathcal{A}_0,\Omega}$ est minoré uniformément par une constante strictement positive, alors le problème de minimisation (12.22) est équivalent à celui posé par le Principe du min-max 2.2. Il s'agit donc de comparer $\mu(B,\Omega)$ et $\tilde{\mu}(B,\Omega)$ définis par :*

$$\tilde{\mu}(B,\Omega) := \inf_{\theta\in H^1(\Omega),\rho\in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega),\rho\neq 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla\rho|^2+\rho^2|B\mathcal{A}_0-\nabla\theta|^2)\,dx}{\displaystyle\int_\Omega |\rho|^2\,dx} \tag{12.23}$$

$$\mu(B,\Omega) := \inf_{u\in H^1(\Omega),u\neq 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega |(\nabla - iB\mathcal{A}_0)u|^2\,dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2\,dx}. \tag{12.24}$$

Dès que $\rho\in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ et $\theta\in H^1(\Omega)$, alors $\rho e^{i\theta}\in H^1(\Omega)$, donc de manière évidente :

$$\mu(B,\Omega)\leq\tilde{\mu}(B,\Omega). \tag{12.25}$$

Ainsi, la formulation (12.22) donne une majoration du bas du spectre $\mu(B,\Omega)$.
Notons $u\in H^1(\Omega)$ un vecteur propre normalisé tel que $\displaystyle\int_\Omega |(\nabla - iB\mathcal{A}_0)u|^2\,dx=\mu(B,\Omega)$. Alors $u\in\mathcal{D}(P_{B\mathcal{A}_0,\Omega})\subset H^2(\Omega)$, donc $u\in L^\infty(\Omega)$.
Supposons que $|u|$ soit minoré uniformément par $\rho_0>0$. Montrons que $\frac{u}{|u|}\in H^1(\Omega)$. Pour cela, calculons ∇u à l'aide $\nabla\frac{u}{|u|}$:

$$\nabla u=\nabla\left(\frac{u}{|u|}|u|\right)=|u|\nabla\frac{u}{|u|}+\frac{u}{|u|}\nabla|u|.$$

D'où, en remarquant que $\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{u}}{|u|}\nabla\frac{u}{|u|}\right)=0$ *:*

$$|\nabla u|^2=|u|^2\left|\nabla\frac{u}{|u|}\right|^2+|\nabla|u||^2\geq\rho_0^2\left|\nabla\frac{u}{|u|}\right|^2.$$

Nous avons donc montré que si $u\in H^1(\Omega)$ est minoré uniformément par $\rho_0>0$, alors $\frac{u}{|u|}\in H^1(\Omega)$. D'après les travaux de Bethuel-Zheng [18], Bourgain-Brézis-Mironescu [30, 29, 31], il existe $\phi\in H^1(\Omega)$ tel que $u=|u|e^{i\phi}$. Donc le vecteur propre s'écrit sous la forme (12.18) et alors :

$$\mu(B,\Omega)=\tilde{\mu}(B,\Omega).$$

Reprenons les calculs précédents, nous avons ainsi montré que si le module du vecteur propre est minoré uniformément par une constante strictement positive et si le domaine est régulier, alors la formulation (12.22) est équivalente au problème de minimisation $\displaystyle\inf_{u\in H^1(\Omega),u\neq 0}\frac{\displaystyle\int_\Omega |(\nabla - iB\mathcal{A}_0)u|^2\,dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2\,dx}$.

Bien que l'égalité $\mu(B,\Omega)=\tilde{\mu}(B,\Omega)$ ne soit pas totalement justifiée, nous utilisons la nouvelle approche du problème et nous concentrons sur la formulation disrète (12.26) dérivant naturellement de (12.22) :

$$\inf_{(\rho,\theta)\in\mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h),\rho\neq 0}\frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla\rho|^2+\rho^2|B\mathcal{A}_0-\nabla\theta|^2)\,dx}{\displaystyle\int_\Omega |\rho|^2\,dx}. \tag{12.26}$$

Nous montrerons la performance et la robustesse de cette nouvelle formulation (12.26) afin de valider ce choix.

La Section 3.1 propose quelques propriétés élémentaires de bas du spectre de l'opérateur $P_{B\mathcal{A}_0,\Omega}$ notamment les effets de changements de jauge ou de translations de domaine. Il semble donc pertinent de choisir une méthode numérique qui respecte ces propriétés, la formulation (12.26) présente donc un premier avantage important comme le souligne la proposition suivante.

Proposition 12.6. *La formulation (12.26) est invariante par changement de jauge si la jauge est dans l'espace de discrétisation de la phase. Elle est de plus invariante par translation ou rotation du domaine pour toute discrétisation contenant les fonctions linéaires.*

Démonstration :

1. Justifions l'invariance de jauge pour toute jauge dans l'espace de discrétisation de la phase. En effet, si nous considérons un potentiel magnétique de la forme $B\mathcal{A}_0 + \nabla\phi$ avec $\phi \in \mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h)$, la Proposition 3.1 montre que le vecteur associé à l'opérateur $P_{B\mathcal{A}_0+\nabla\phi,\Omega}$ est $u_\phi := e^{i\phi}u$ où u est l'état fondamental associé à l'opérateur $P_{B\mathcal{A}_0,\Omega}$. La formulation (12.26) ne voit pas les changements de jauge au sens où nous avons :
$$(B\mathcal{A}_0 + \nabla\phi) - \nabla(\theta + \phi) = B\mathcal{A}_0 - \nabla\phi.$$
2. La formulation (12.26) est invariante par rotation du domaine. La Proposition 3.5 mentionne qu'une rotation d'angle α du domaine Ω laisse le spectre invariant et $u = \rho e^{i\theta}$ est un vecteur propre pour le domaine initial si et seulement si $u_\alpha := \rho e^{i(\theta-\alpha)}$ est un vecteur propre sur le domaine après rotation d'angle α. Or $\nabla(\theta - \alpha) = \nabla\theta$, donc la formulation (12.26) ne voit pas les rotations de domaines.
3. Si la discrétisation des phases θ contient les fonctions linéaires, alors la formulation (12.26) est invariante par translation. En effet, la Proposition 3.4 annonce que u est un vecteur propre pour l'opérateur $P_{B\mathcal{A}_0,\Omega}$ si et seulement si $v : x \mapsto e^{i\frac{B}{2}x\wedge t}u(x-t)$ est un vecteur propre pour l'opérateur $P_{B\mathcal{A}_0,\Omega_t}$ où Ω_t est le domaine déduit de Ω par translation de vecteur t. Or :
$$\nabla\left(\frac{B}{2}x \wedge t + \theta\right) = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} t_2 \\ -t_1 \end{pmatrix} + \nabla\theta.$$
Donc si la discrétisation en θ contient les fonctions linéaires, c'est-à-dire si $k \geq 1$, le problème de minimisation (12.26) est invariant par translation car :
$$\inf_{\theta\in\mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h)} \int_\Omega |B\mathcal{A}_0 - \nabla\theta|^2 \, dx = \inf_{\theta\in\mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h)} \int_\Omega \left| B\mathcal{A}_0 - \nabla\left(\frac{B}{2}x \wedge t + \theta\right)\right|^2 \, dx.$$

□

Remarque 12.7. *Supposons que l'état fondamental u s'annule et que ses zéros sont isolés, notés $(x_i)_{i=1,\dots,N}$, ceci engendre des problèmes de détermination de la phase. Dans ce cas :*
$$\operatorname{rot}(B\mathcal{A}_0 - \nabla\theta) = B + 2\pi\sum_{i=1}^{N} d_i\delta_{x_i},$$
où $d_i \in \mathbb{Z}$ est le degré de la singularité.
Le problème devient beaucoup plus difficile numériquement et nous ne le traiterons pas.
Toutefois, à la vue de la construction du quasi-mode sur un secteur angulaire Ω_α pour α petit que nous avons faite à la Proposition 7.1, il semble raisonnable de penser que le vecteur propre ne s'annule pas dans un petit voisinage du sommet.

Déduisons-en alors un algorithme pour calculer l'état fondamental.

Algorithme 12.8.

Initialisation :

1. *Assemblage des matrices de masse M et de rigidité A associées au maillage $\mathcal{T}_h$ du domaine et à l'opérateur $P_{B\mathcal{A}_0,\Omega}$.*
2. *Détermination de la plus petite valeur propre généralisée et de son vecteur propre associés aux matrices (A, M) à l'aide de l'Algorithme 12.2.*
3. *Calcul du module du premier vecteur propre, noté ρ.*

Itération :

1. *Détermination de la phase θ du premier vecteur propre par minimisation de la fonctionnelle J_ρ, ρ étant connu, avec J_ρ définie par :*

$$J_\rho(\theta) = ||\rho\nabla\theta||^2_{L^2(\Omega)} - 2B\int_\Omega \rho^2 \mathcal{A}_0 \cdot \nabla\theta \, dx. \tag{12.27}$$

2. *Construction du nouvel opérateur $P^\theta_{B\mathcal{A}_0,\Omega}$ par le biais de sa matrice de rigidité A_θ. Calcul des éléments propres généralisés associés à (M, A_θ).*

Critère d'arrêt :
Réitération avec le nouveau couple (ρ, θ) jusqu'à ce que la phase ou la valeur propre soit déterminée avec la précision requise.

Présentons les résultats de cet algorithme sur les maillages précédents. Appliquons un champ magnétique de 10 Teslas et déterminons numériquement l'état fondamental à l'aide de l'Algorithme 12.8 avec une formule d'intégration d'ordre 5, une approximation $\mathbb{P}^2(\mathcal{T}_h)$, une précision de 10^{-6} pour le gradient conjugué, un nombre d'itérations limité à 800 pour le gradient conjugué et l'Algorithme de recherche de valeur propre généralisée 12.2 et une précision de 10^{-3} pour la valeur propre.

Le Tableau 12.5 donne les valeurs propres estimées pour deux maillages de tailles différentes et sur des maillages translatés. Les Figures 12.10 et 12.12 présentent à la première colonne les résultats pour le maillage initial $\mathcal{T}_h^0$, à la deuxième colonne les résultats pour le maillage $\mathcal{T}_h^1$ translaté d'un vecteur $(1, 0)$ du maillage $\mathcal{T}_h^0$ et la troisième colonne pour le maillage $\mathcal{T}_h^2$ translaté de $(2, 0)$. Les lignes de ces figures illustrent respectivement le module et la phase de l'état fondamental calculés à l'aide de l'Algorithme 12.8 ainsi que l'évolution de l'énergie selon le nombre d'itérations.

Maillage à 138 éléments			Maillage à 1328 éléments		
$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$	$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$
4.2116	4.2120	4.2143	4.2208	4.2163	4.2269

TAB. 12.5 – Énergie estimée sur des maillages translatés, $B = 10$ Teslas.

Analysons davantage les résultats obtenus pour le maillage $\mathcal{T}_h^2$ translaté de $(2, 0)$ pour le maillage à 138 éléments (cf Figure 12.10). L'énergie est plus lente à converger car le vecteur propre était initialement localisé au centre du domaine et pour minimiser l'énergie, il s'est concentré au sommet. Ceci annonce un premier défaut de l'algorithme dû à la difficulté pour l'état de se concentrer au

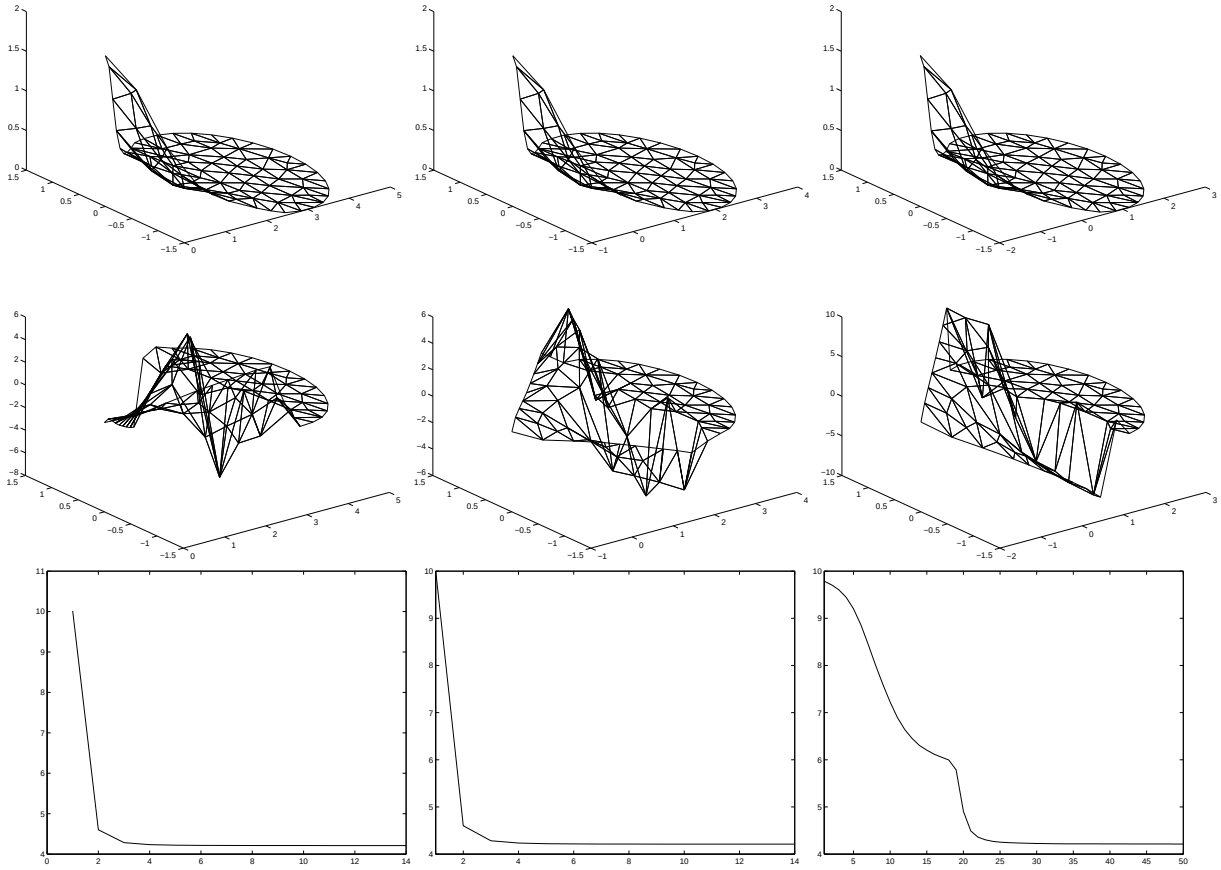


FIG. 12.10 – États propres sur des maillages translatés, $B = 10$ Teslas, maillage à 138 éléments.

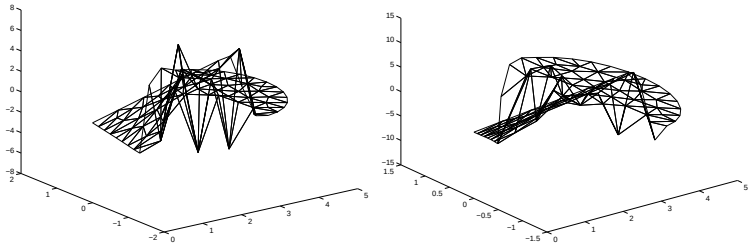


FIG. 12.11 – Différence de phases pour les états propres associés à des maillages translatés, $B = 10$ Teslas, maillage à 138 éléments.

sommet. En effet, la première étape de l'Algorithme 12.8 revient juste à appliquer la méthode standard décrite à la Section 12.3. Or nous avons vu son inefficacité pour des champs magnétiques trop intenses. Par conséquent, cet algorithme risque d'être coûteux en temps afin de délocaliser l'état de son endroit initial si cette localisation ne permet pas de minimiser l'énergie. Nous avons toujours le problème initial de la mauvaise détermination de l'état propre lorsque la phase est trop oscillante. Cette difficulté est visible au niveau de la phase qui reste assez mal déterminée et l'effet de la translation sur la phase n'est pas nettement visible. La Figure 12.11 donne la différence de phases

entre celles associées au maillage non translaté et au maillage translaté respectivement de $(1,0)$ et de $(2,0)$ mais la mauvaise précision de la phase ne permet pas d'y visualiser les résultats de la Proposition 3.4 qui précise qu'en effectuant une translation de vecteur t du domaine, la différence de phase entre les états fondamentaux vaut exactement $\frac{B}{2}x \wedge t$. Ainsi, si $B = 10$ et $t = (1,0)$, alors $\frac{B}{2}x \wedge t = -5x_2$ et si $t = (2,0)$, $\frac{B}{2}x \wedge t = -10x_2$. La différence de phase est donc constante selon les abscisses et linéaire selon les ordonnées.

Présentons les résultats sur un maillage à 1328 éléments au Tableau 12.5 et Figure 12.12 et 12.13.

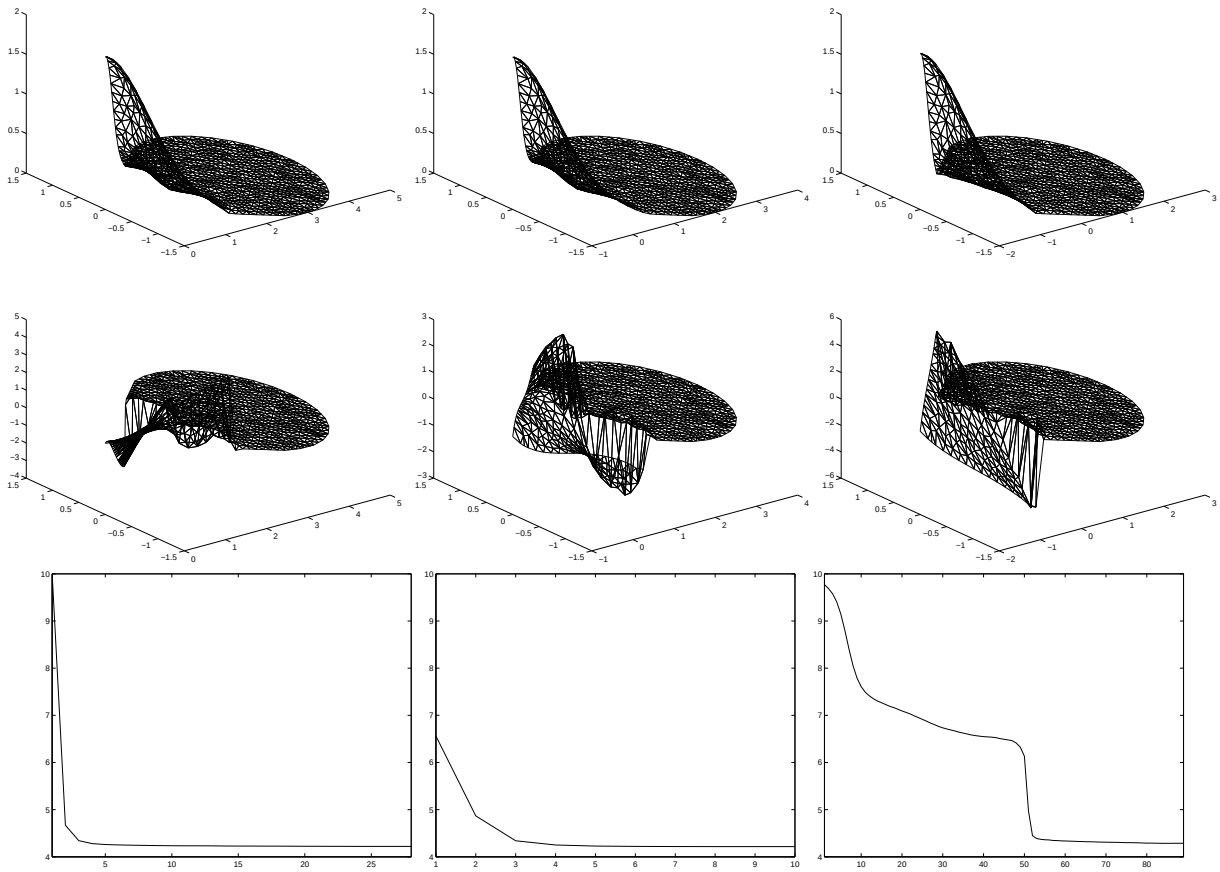


FIG. 12.12 – États propres sur des maillages translatés, $B = 10$ Teslas, maillage à 1328 éléments.

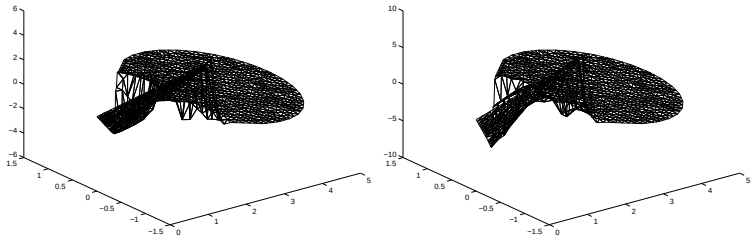


FIG. 12.13 – Différence de phases des états propres, $B = 10$ Teslas, maillage à 1328 éléments.

La convergence est beaucoup plus lente et l'énergie calculée plus élevée. Cela s'explique simplement par le fait que les algorithmes de gradient conjugué n'ont pas convergé avec le nombre d'itérations limité. La Figure 12.13 donne la différence de phase comme précédemment.

Toutefois, les résultats sont meilleurs que ceux obtenus par la méthode standard comme le montre la comparaison des résultats du Tableau 12.2 et des Figures 12.4, 12.5 avec ceux du Tableau 12.5 et des Figures 12.10, 12.12. Le module de l'état fondamental est presque le même sur les trois maillages translatés avec la même énergie pour cette nouvelle méthode alors que les résultats divergeaient déjà beaucoup par la méthode standard de la Section 12.3.

Appliquons un champ magnétique plus intense $B = 30$ Teslas et présentons les résultats au Tableau 12.6 et Figure 12.14.

$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$
12.9934	12.9952	12.9989

TAB. 12.6 – Énergie associée à des maillages à 138 éléments translatés, $B = 30$ Teslas.

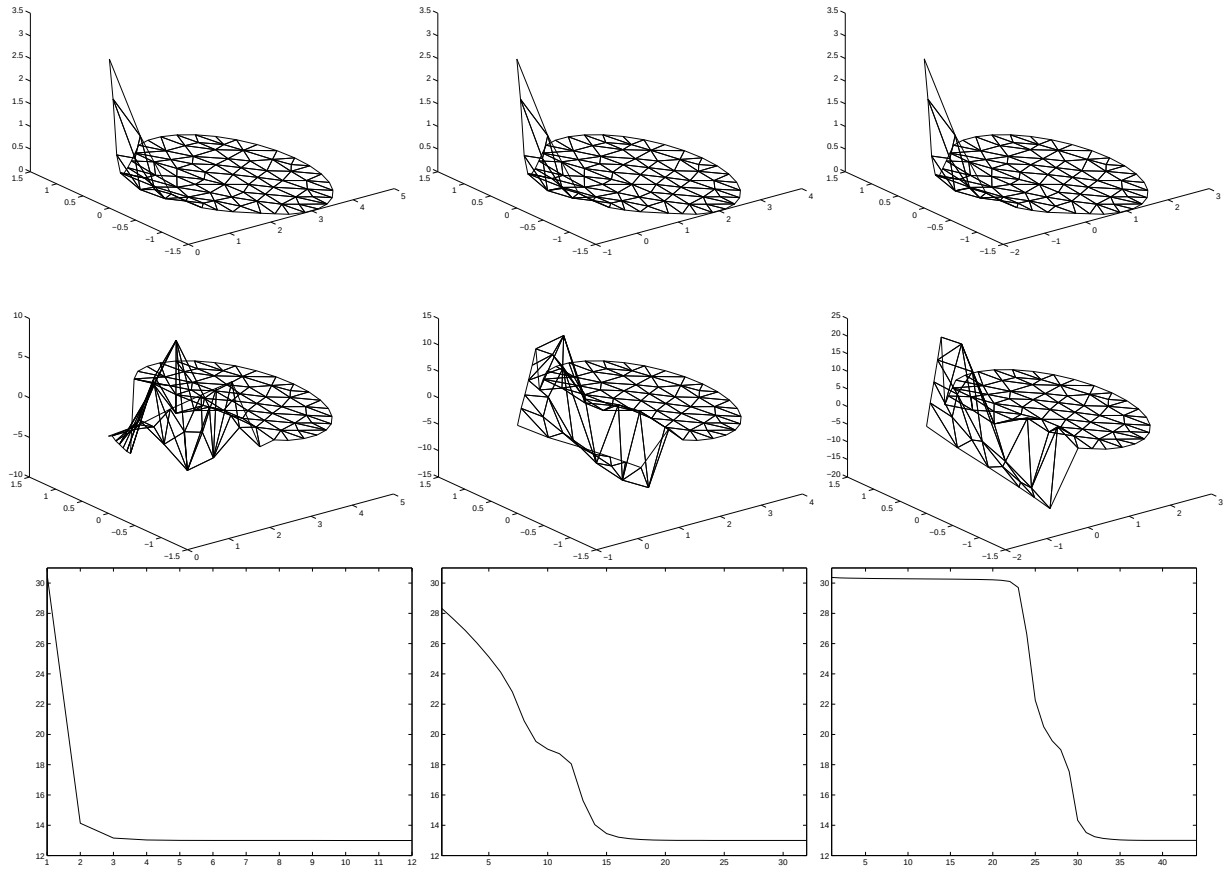


FIG. 12.14 – États propres sur des maillages translatés, $B = 30$ Teslas, maillage à 138 éléments.

La difficulté de convergence de l'énergie apparaît dès la translation de vecteur $(1,0)$. La Figure 12.15 donne la différence de phases entre celles associées au maillage non translaté et au maillage respectivement translaté de $(1,0)$ et $(2,0)$.

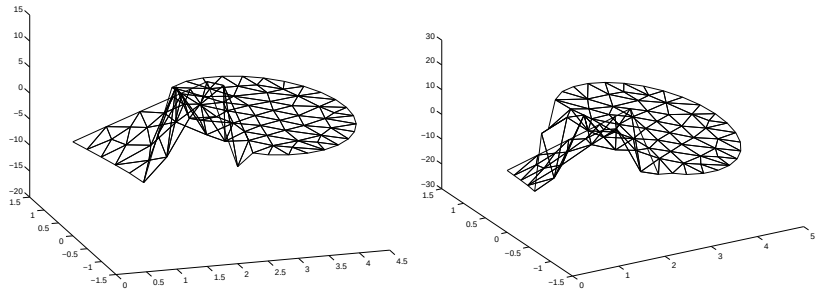


FIG. 12.15 – Différence de phases pour les états propres associés à des maillages translatés, $B = 30$ Teslas, maillage à 138 éléments.

Si nous augmentons davantage le champ magnétique, l'algorithme ne converge plus car, reprenant l'expression (12.27) de la fontionnelle J_ρ, nous avons $J_\rho(\theta) = ||\rho\nabla\theta||^2_{L^2(\Omega)} - 2B\int_\Omega \rho^2 \mathcal{A}_0 \cdot \nabla\theta \, dx$. Or si le champ magnétique est intense, la localisation dans le secteur est plus accentuée (cf Théorème 9.1) donc ρ décroit exponentiellement vite en s'éloignant du coin. Ceci explique pourquoi la phase reste mal déterminée. Le problème semble mal conditionné et il faut envisager un préconditionnement.

Donnons l'exemple du triangle sur lequel l'effet de la translation est beaucoup plus visible. Commençons par appliquer un champ $B = 10$ Teslas. Les illustrations du calcul numérique sont données à la Figure 12.16. Le calcul numérique donne la même valeur $\mu_h = 2.0414$ sur les trois maillages translatés. Visualisons l'effet de la translation à la Figure 12.17. Les figures représentent la différence de phases entre les maillages maillages $\mathcal{T}_h^0$ et $\mathcal{T}_h^1$ puis $\mathcal{T}_h^0$ et $\mathcal{T}_h^2$.

La Figure 12.17 montre que chaque différence est constante selon des abscisses et linéaire selon les ordonnées. Notons θ_0, θ_1 et θ_2 les phases associées aux états propres calculés respectivement sur le maillage initial $\mathcal{T}_h^0$, le maillage $\mathcal{T}_h^1$ translaté de $(1,0)$ et le maillage $\mathcal{T}_h^2$ translaté de $(2,0)$.
La Proposition 3.4 montre que la différence de phase vaut exactement $-\frac{B}{2}x \wedge t$. Or le champ magnétique B est de 10 Teslas donc :

$$\partial_{x_1}(\theta_0 - \theta_1) = 0, \qquad \partial_{x_2}(\theta_0 - \theta_1) = 5, \tag{12.28}$$

$$\partial_{x_1}(\theta_0 - \theta_2) = 0, \qquad \partial_{x_2}(\theta_0 - \theta_2) = 10. \tag{12.29}$$

Nous retrouvons ces valeurs théoriques sur les calculs numériques et représentation des différences de phase de la Figure 12.17.

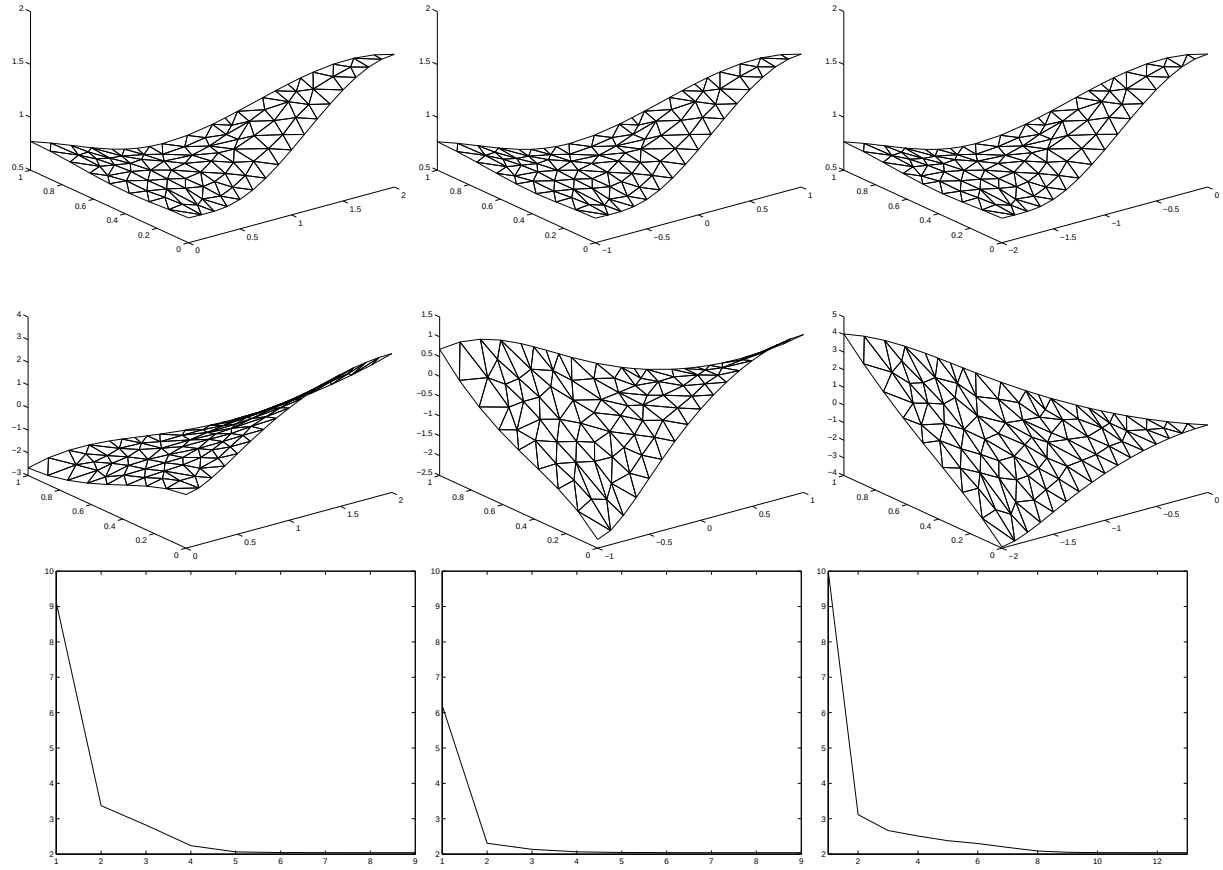


FIG. 12.16 – Modules, arguments du premier vecteur propre et convergence de la valeur propre, $B = 10$ Teslas, maillage à 138 éléments.

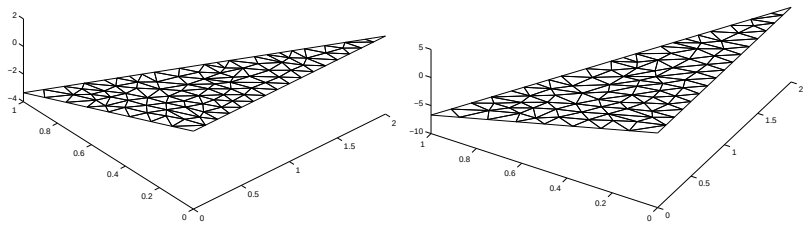


FIG. 12.17 – Différences de phases des états propres calculés sur des maillages translatés, $B = 10$ Teslas, maillage à 138 éléments.

Prenons un champ magnétique plus intense, $B = 30$ Teslas. Alors, il faut préconditionner le problème par ρ^2. La valeurs propres calculées sont données au Tableau 12.7. Les modules et phases des états fondamentaux ainsi que la convergence de la valeur propre sont représentés à la Figure 12.18. La phase commence à être mal déterminée. Visualisons toutefois l'effet de la translation à la Figure 12.19 qui représente graphiquement le coefficient $\frac{B}{2} x \wedge t$.

$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$
7.2729	7.2730	7.2734

TAB. 12.7 – Énergie associée sur des maillages à 1583 éléments translatés, $B = 30$ Teslas.

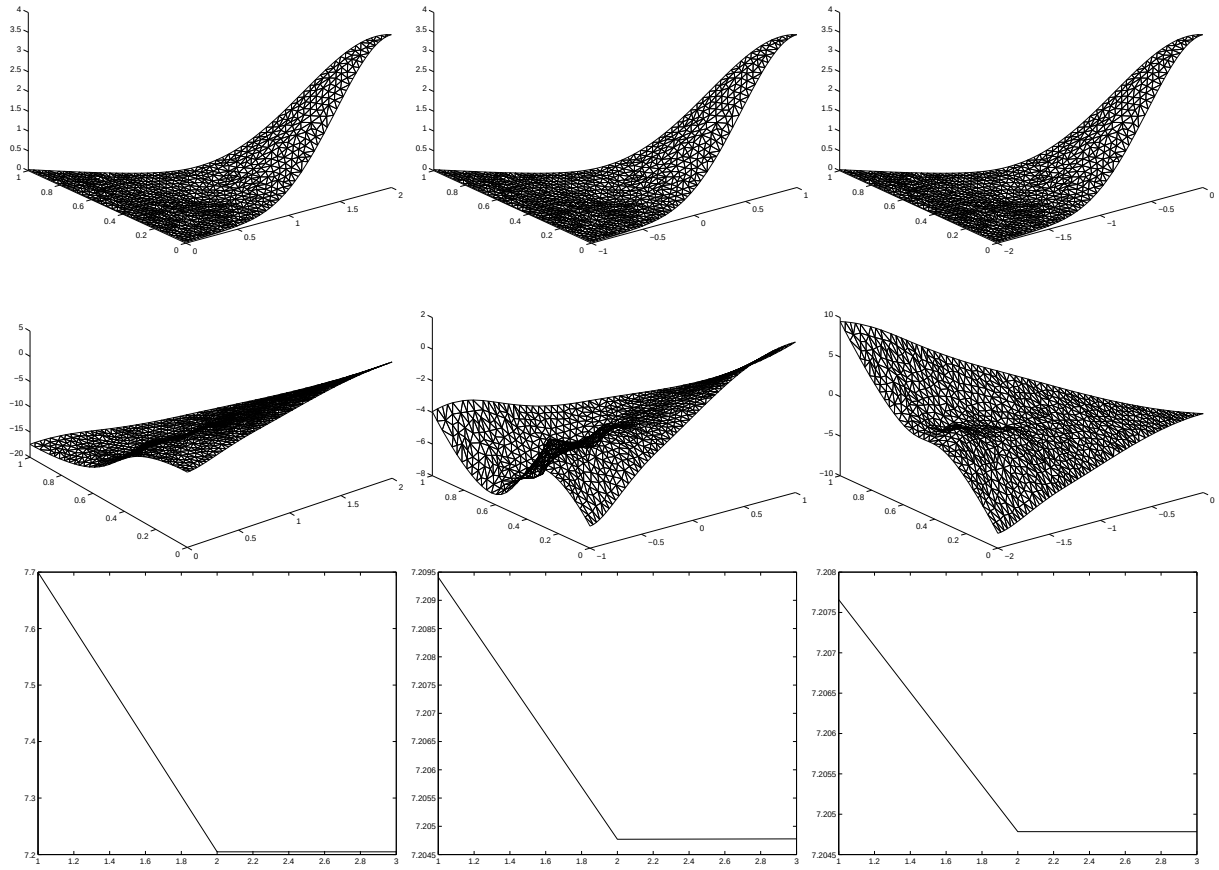


FIG. 12.18 – Modules, arguments du premier vecteur propre et convergence de la valeur propre, $B = 30$ Teslas, maillage à 1583 éléments.

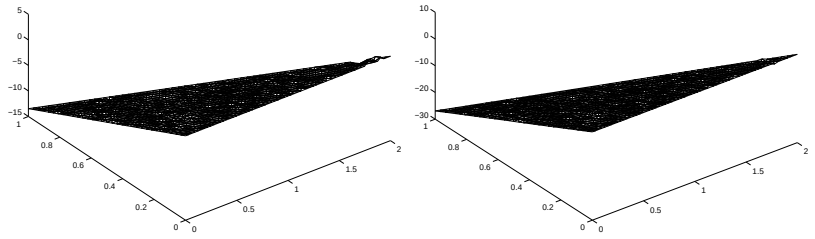


FIG. 12.19 – Différences de phases des états propres calculés sur des maillages translatés, $B = 30$ Teslas, maillage à 1583 éléments.

Si nous souhaitons une précision plus importante sur la phase, le problème devient très mal conditionné et l'algorithme ne converge plus.

Proposons une critique de l'algorithme. Lorsque l'intensité du champ magnétique augmente, le module du vecteur propre devient de plus en plus petit à l'intérieur du domaine. Pour déterminer la phase θ, nous minimisons la fonctionnelle $J_\rho(\theta) = \int_\Omega \rho^2(|\nabla\theta|^2 - 2B\mathcal{A}_0 \cdot \nabla\theta)\ dx$. Mais si le module ρ devient trop petit, la phase ne peut plus être déterminée par minimisation. Le problème persiste avec préconditionnement.

Cette méthode n'est donc pas assez satisfaisante. Remarquons que nous sommes intéressés par la valeur de l'énergie et la localisation du module. Nous n'avons donc pas besoin de connaître avec précision la phase et nous allons aborder le problème de minimisation (12.26) différemment.

12.5 Une méthode plus robuste

La plus grosse difficulté est de déterminer la phase une fois déterminé le module qui est, comme nous l'avons vu, très petit à l'intérieur du domaine. Reprenons la formulation (12.26). Nous faisons donc le cheminement inverse de l'Algorithme 12.8. Nous initialisons le calcul de la phase θ du problème de minimisation $J_\rho(\theta)$ à partir d'un module ρ aléatoire. Ceci engendre une première phase θ très régulière. Ensuite, nous déterminons le vecteur propre ρ associé à l'opérateur $P^\theta_{B\mathcal{A}_0,\Omega}$. À l'aide de ce nouveau ρ, nous résolvons le problème de minimisation de $J_\rho(\theta)$. Le gros avantage est que quand le module ρ est petit, il n'y a pas de problème de détermination de phase car elle a été déterminée lors de l'étape d'initialisation. En fait, la minimisation de la phase va essentiellement s'effectuer aux degrés de liberté où ρ n'est pas trop petit comme nous l'expliquerons par la suite.

Algorithme 12.9.

---

1. *Calcul de la matrice de masse M.*
2. *Choix initial d'un vecteur ρ normalisé et d'un vecteur θ.*
3. *Détermination de θ qui minimise, à l'aide d'une méthode de gradient conjugué, la fonctionnelle :*
$$J_\rho(\theta) = \int_\Omega \rho^2(|\nabla\theta|^2 - 2B\mathcal{A}_0 \cdot \nabla\theta)\ dx.$$
4. *Calcul, d'après la relation (12.19), de l'énergie associée à la fonction $\rho e^{i\theta}$:*
$$\mu_h = \int_\Omega |\nabla\rho|^2 + |(B\mathcal{A}_0 - \nabla\theta)\rho|^2\ dx.$$
5. *Détermination de (μ_h, ρ), état fondamental pour $P^\theta_{B\mathcal{A}_0,\Omega} = -\nabla^2 + (B\mathcal{A}_0 - \nabla\theta)^2$.*
6. *Réitération avec le nouveau couple (ρ, θ) jusqu'à ce que l'énergie μ_h converge.*

Reprenons les mêmes exemples que précédemment. Appliquons un champ $B = 10$ Teslas au secteur angulaire maillé grossièrement avec 138 éléments puis plus finement avec 1328 éléments. Nous effectuons une approximation $\mathbb{P}^2(\mathcal{T}_h)$ avec une formule d'intégration d'ordre 5, en prenant comme critére d'arrêt un écart entre deux valeurs propres consécutives inférieur à 10^{-4}.

Maillage à 138 éléments			Maillage à 1328 éléments		
$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$	$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$
4.2137	4.2153	4.2149	4.2144	4.2238	4.2166

TAB. 12.8 – Énergies pour des maillages translatés, $B = 10$ Teslas.

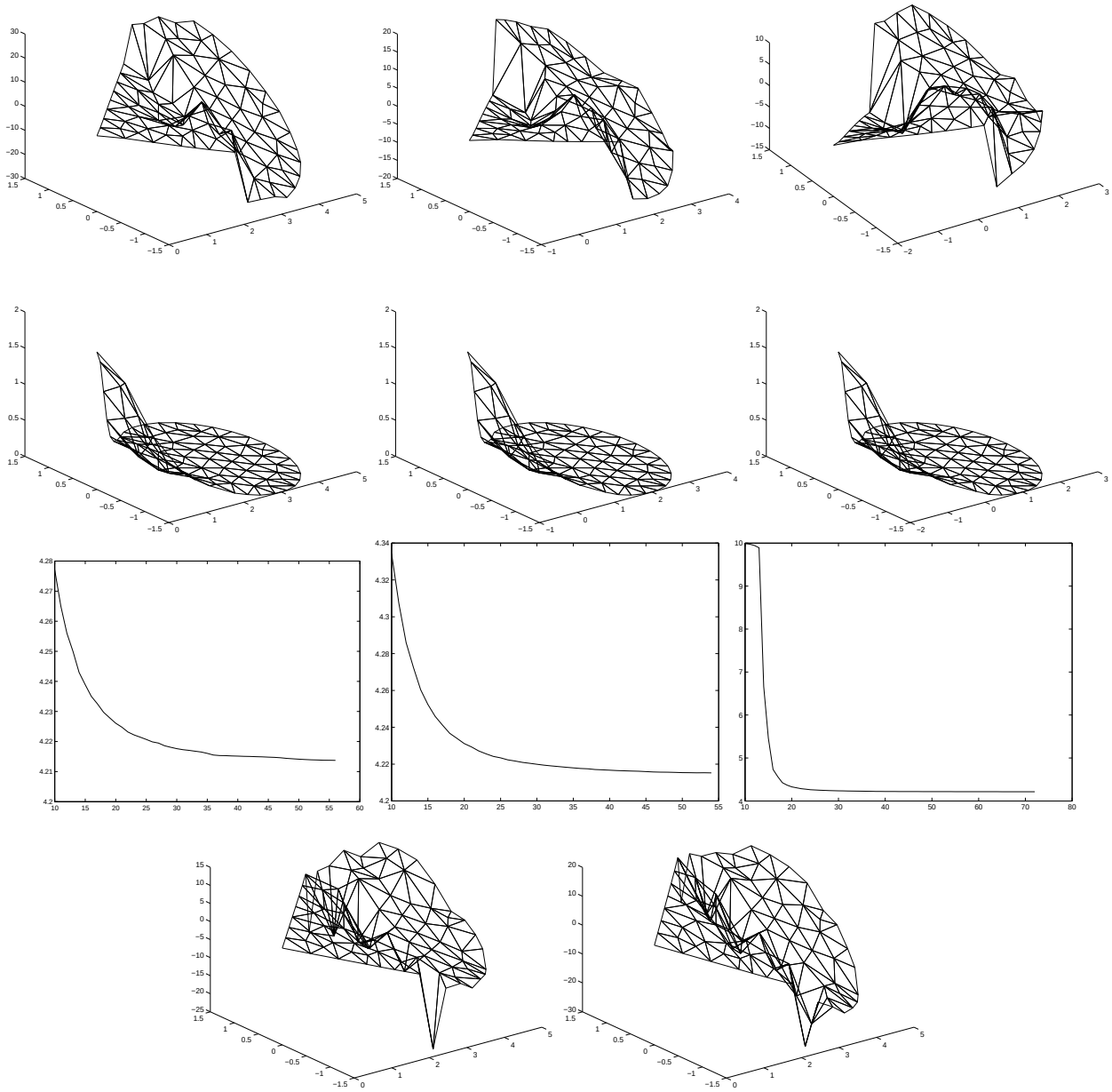


FIG. 12.20 – Phases, modules du vecteur propre, convergence de la valeur propre et différence de phases sur des maillages translatés, $B = 10$ Teslas.

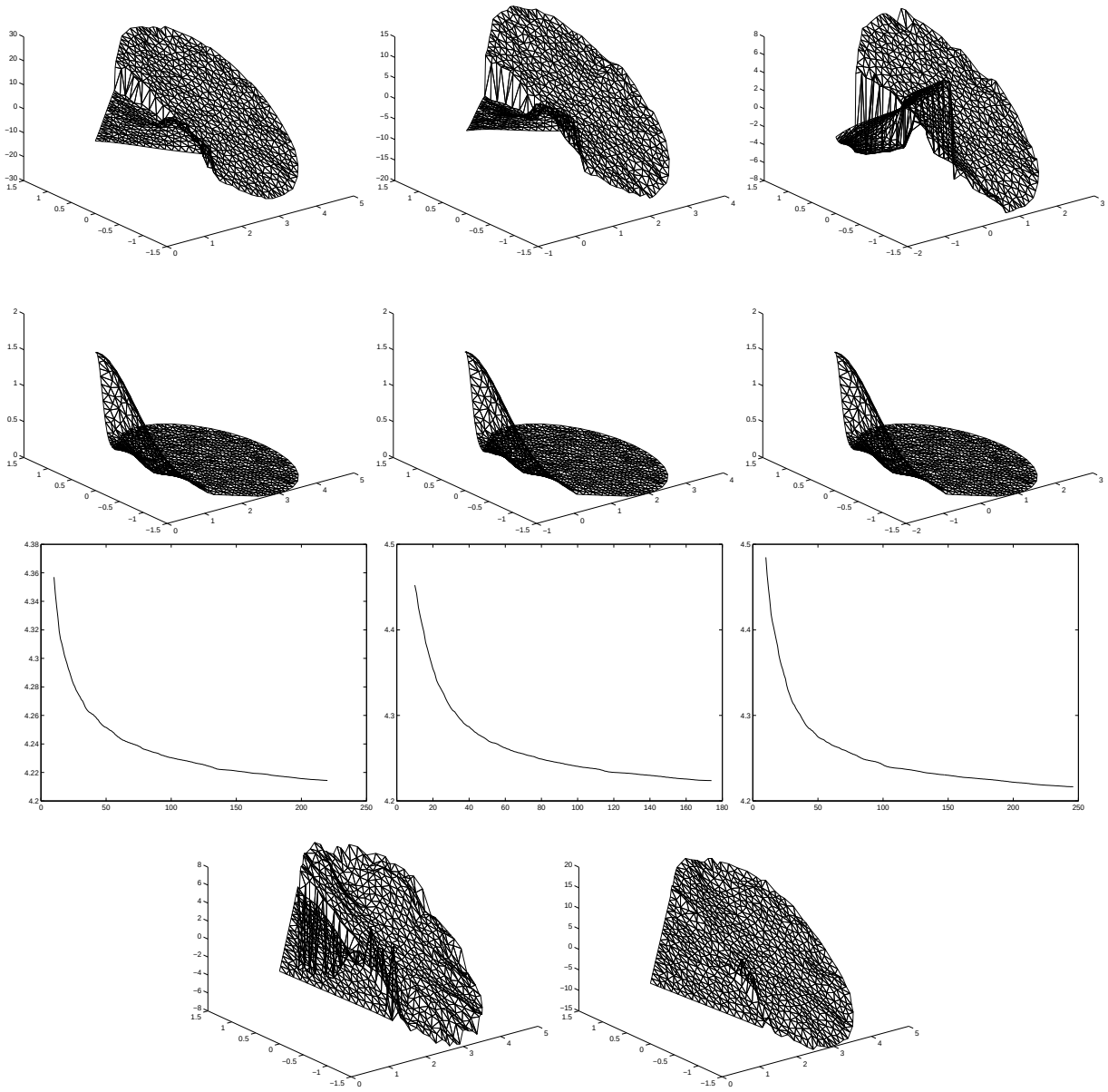


FIG. 12.21 – Phases, modules du vecteur propre, convergence de la valeur propre et différence de phases sur des maillages translatés, $B = 10$ Teslas.

Notons $(\rho_k, \theta_k, \mu_h^k)_{k=0,1,2}$ le module, l'argument et la valeur propre calculés sur le maillage $\mathcal{T}_h^k$. Les résultats numériques associés à chaque maillage sont rapportés au Tableau 12.8 qui donne les estimations d'énergies (μ_h^k). Les Figures 12.20 et 12.21 représentent les phases $(\theta_k)_k$ et modules $(\rho_k)_k$ des vecteurs propres calculés ainsi que la convergence de la valeur propre en fonction des itérations. La dernière ligne illustre les différences de phases respectives $\theta_0 - \theta_1$ et $\theta_0 - \theta_2$.

Expliquons en détail ce que produit l'Algorithme 12.9 au cours des itérations.
À la première itération, nous calculons une phase très régulière et comme nous avons initialisé une valeur aléatoire de ρ, il n'y a pas de problème de détermination de la phase par minimisation de la fonctionnelle J_ρ. Ce premier calcul est donc aussi précis que voulu.
Nous calculons ensuite l'état fondamental ρ associé à l'opérateur $P^{\theta}_{B\mathcal{A}_{0,\Omega}}$ à l'aide de l'Algorithme 12.2.

Nous déterminons à nouveau θ par la minimisation de la fonctionnelle J_ρ. Nous appliquons une méthode de gradient conjugué en initialisant θ à la phase θ calculée précédemment. La contribution dans la fonctionnelle $J_\rho(\theta)$ des endroits où ρ est très petit est elle même très petite, donc il n'y a pas de problème de minimisation dans cette partie du domaine. En effet, si nous notons Ω_ε la zone où $\rho < \varepsilon$, alors :

$$J_\rho(\theta) = \int_\Omega \rho^2(|\nabla\theta|^2 - 2B\mathcal{A}_0 \cdot \nabla\theta)\ dx = \int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} \rho^2(|\nabla\theta|^2 - 2B\mathcal{A}_0 \cdot \nabla\theta)\ dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \qquad (12.30)$$

Autrement dit, la phase θ reste quasiment constante aux endroits où le module ρ est très petit. Seules interviennent les zones où le module n'est pas négligeable. Le problème de minimisation se réduit à ces zones $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Par conséquent, seules les valeurs de la phase θ dont les coordonnées sont dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ vont être modifiées de façon à réaliser le minimum. C'est pourquoi, au fil des itérations, les valeurs de la phase restent constantes loin du coin et se «tordent» au niveau de l'angle de façon à minimiser J_ρ.

Il est important de noter que la phase peut être très oscillantes dans la région où ρ est petit, ceci ne posera pas de problème pour la détermination du module. Seule la détermination de la phase dans la région où le module est localisé doit être précise.

Les représentations des différences de phases des Figures 12.20 et 12.21 illustrent vaguement le terme $-\frac{B}{2}x\wedge t$. Pour la translation $(1,0)$, ce terme vaut $5x_2$ et pour la translation $(2,0)$, il vaut $10x_2$. Nous montrerons les résultats sur un domaine triangulaire où l'effet d'une translation est nettement plus visible.
Les valeurs propres μ_h^k sont très proches l'une de l'autre. Toutefois les valeurs propres calculées sur le maillage plus fin sont parfois plus élevées parce que l'algorithme du gradient conjugué utilisé à deux reprises pour la minimisation de la fonctionnelle J_ρ et le calcul de la valeur propre généralisée n'a pas convergé avec le nombre d'itérations donné.

Augmentons le champ magnétique à $B = 30$, $B = 50$ et $B = 100$ Teslas. Notons que les méthodes précédentes montraient déjà leurs limites pour $B = 30$ Teslas. Les résultats numériques sont décrits au Tableau 12.9 et aux Figures 12.22, 12.23, 12.24, 12.25, 12.26 et 12.27 avec les mêmes conventions que précédemment pour $B = 10$ Teslas. Nous ne représentons plus la convergence de la valeur propre ni la différence des phases.

	Maillage à 138 éléments			Maillage à 1328 éléments		
B	$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$	$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$
30	12.9965	12.9964	12.9954	12.6075	12.6084	12.6092
50	22.6233	22.6232	22.6233	21.0096	21.0101	21.0107
100	49.1604	49.1604	49.1605	42.1852	42.1857	42.1858

TAB. 12.9 – Énergies pour des maillages translatés.

Les différences entre les valeurs propres estimées sur un maillage grossier et un maillage fin ont deux explications :

- Les valeurs propres sur le maillage fin sont plus élevées lorsque le gradient conjugué n'a pas convergé pour le nombre d'itérations donné.
- Les valeurs propres sur le maillage grossier deviennent très largement supérieures aux valeurs propres calculées sur le maillage fin quand le champ magnétique B augmente car la taille du maillage est trop importante pour contenir toutes les informations que des localisations aussi

ponctuelles requièrent. Toutefois, les valeurs propres restent concordantes en comparant les résultats sur des maillages translatés de même taille ce qui renforce l'idée que la différence d'estimation entre maillage fin et large est uniquement due à la perte d'information provenant de la taille du maillage.

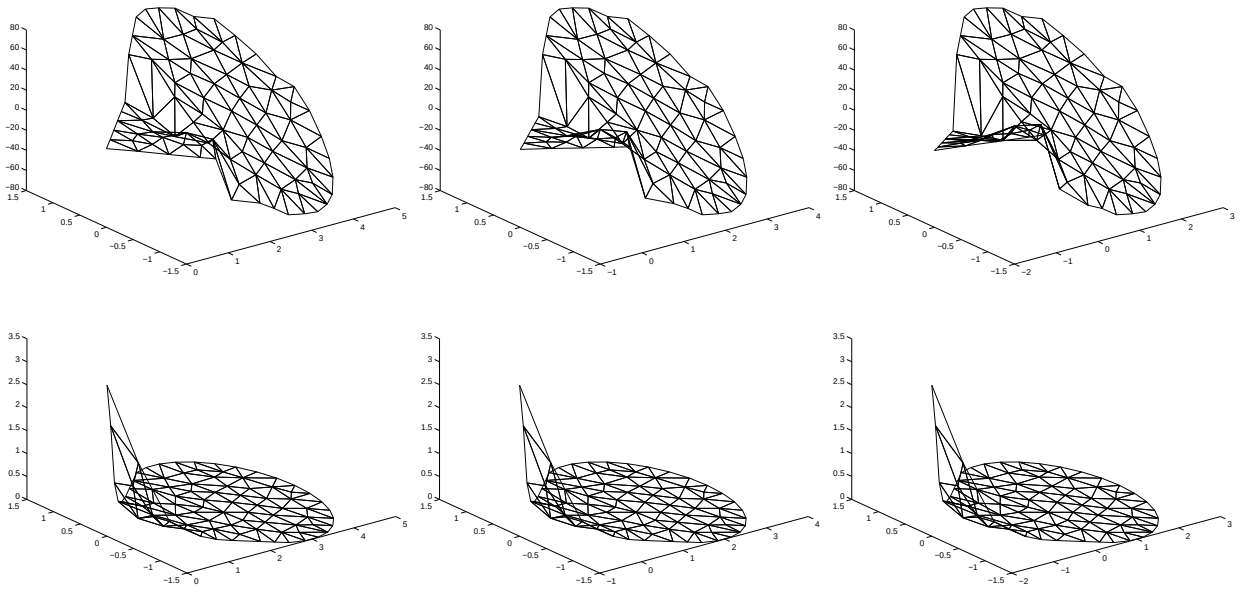


FIG. 12.22 – Arguments et modules du vecteur propre sur des maillages translatés, $B = 30$ Teslas.

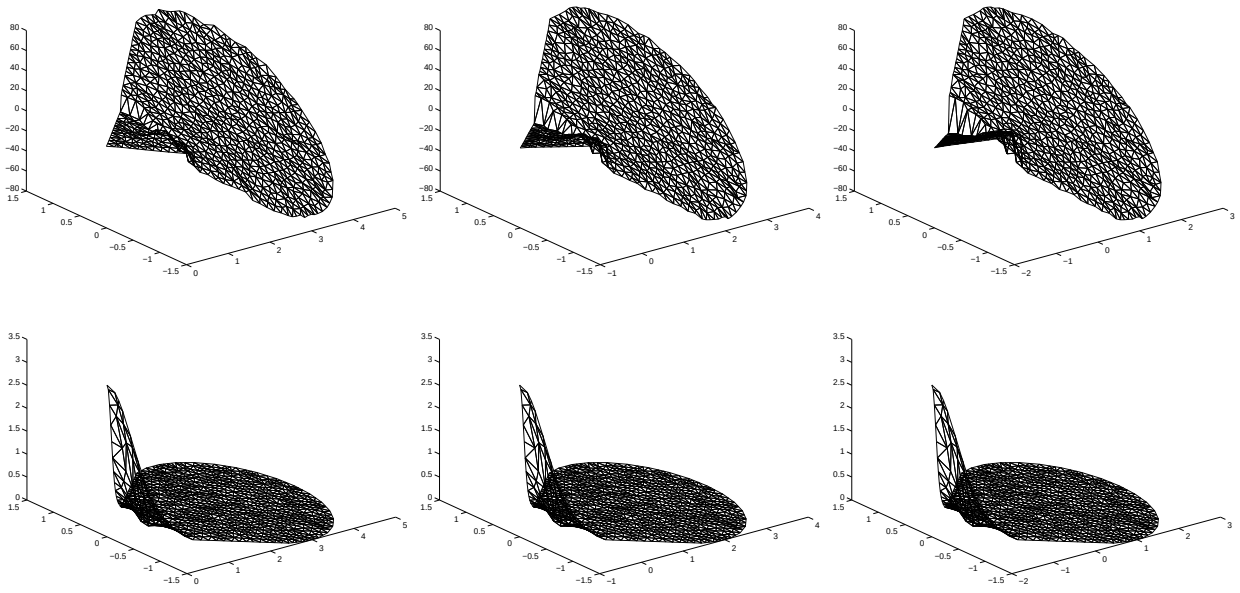


FIG. 12.23 – Arguments et modules du vecteur propre sur des maillages translatés, $B = 30$ Teslas.

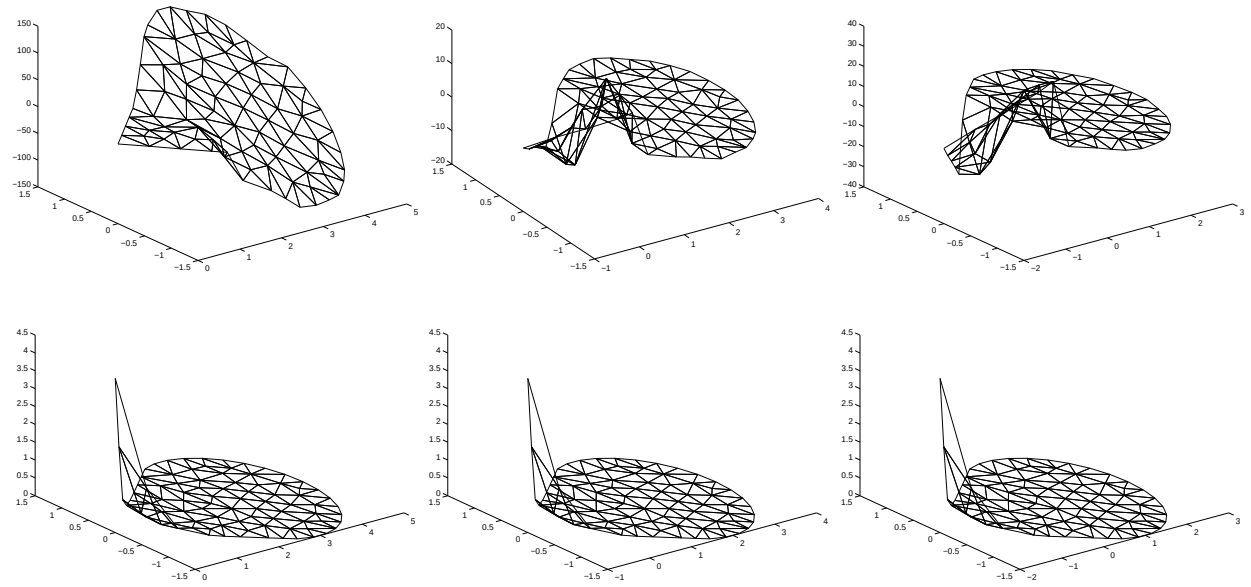


FIG. 12.24 – Arguments et modules du vecteur propre sur des maillages translatés, $B = 50$ Teslas.

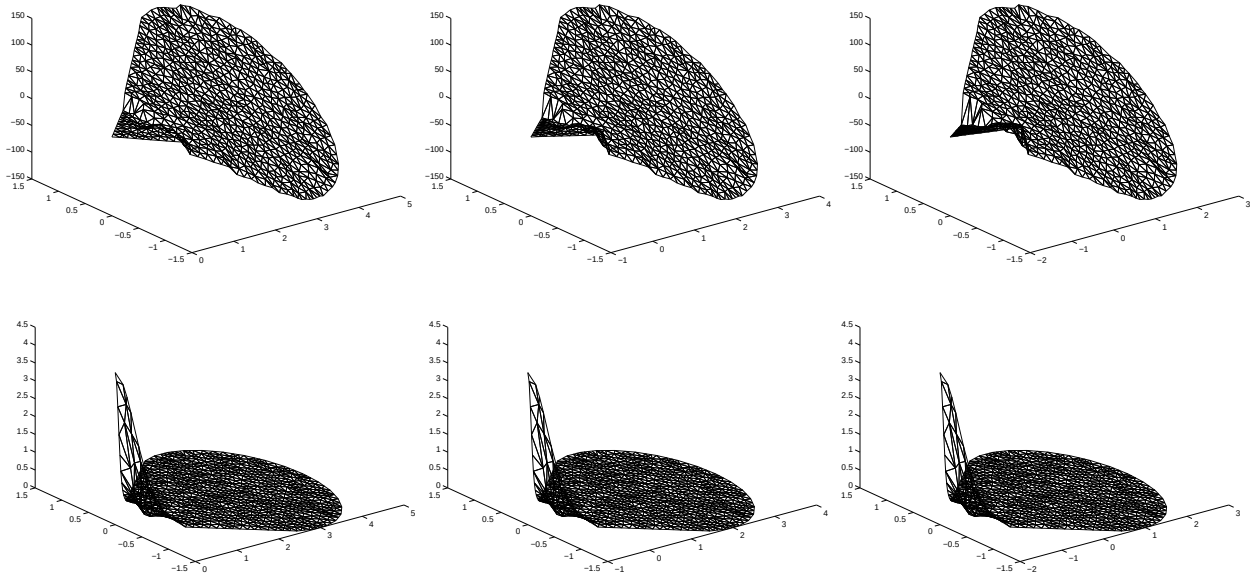


FIG. 12.25 – Arguments, modules du vecteur propre sur des maillages translatés, $B = 50$ Teslas.

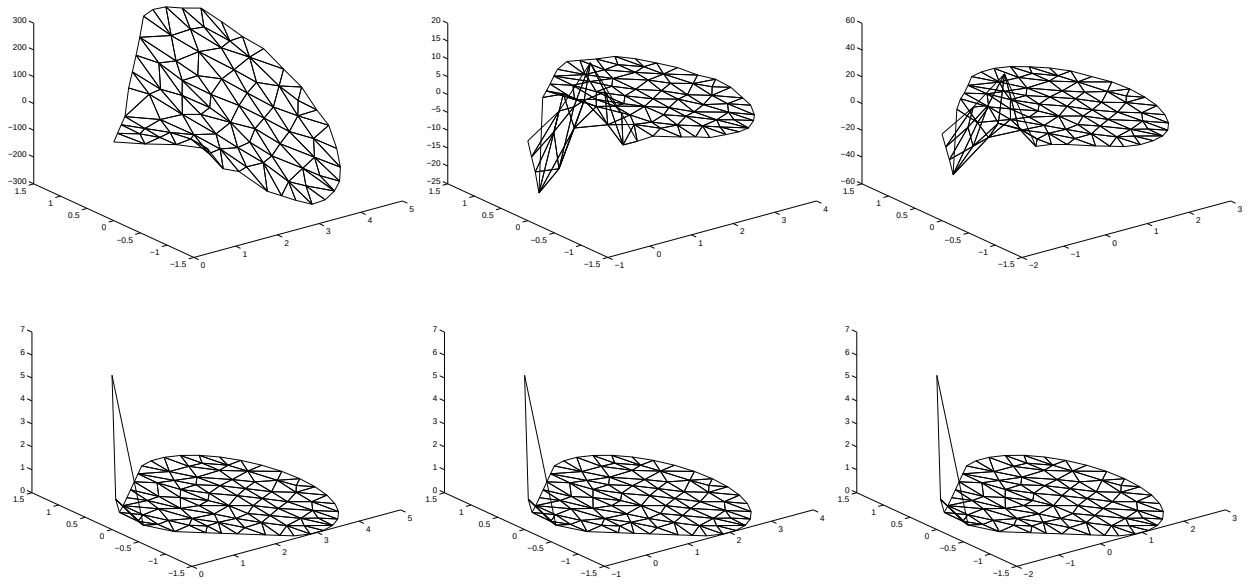


FIG. 12.26 – Arguments et modules du vecteur propre sur des maillages translatés, $B = 100$ Teslas.

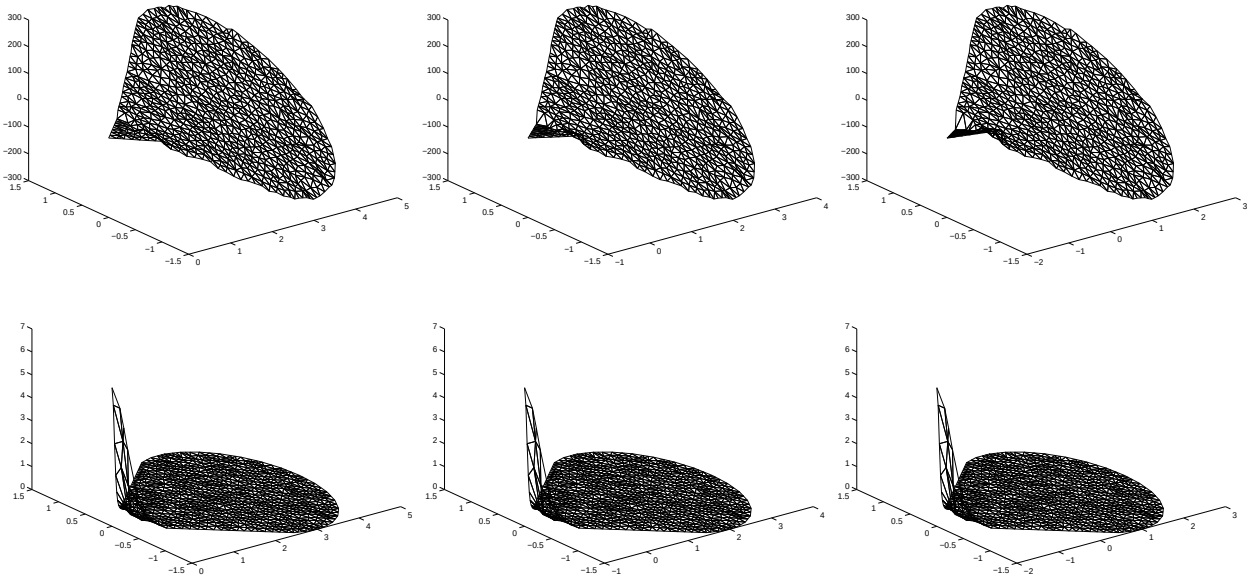


FIG. 12.27 – Arguments et modules du vecteur propre sur des maillages translatés, $B = 100$ Teslas.

Notons qu'en augmentant le champ magnétique, l'état fondamental se localise de plus en plus vite dans le coin du secteur comme le prévoit la théorie. Cette méthode est donc beaucoup plus robuste que les précédentes pour lesquelles les résultats n'étaient plus cohérents dès $B = 50$ Teslas.

Reprenons l'exemple du triangle. Considérons uniquement le maillage à 163 éléments. Nous appliquons des champs $B = 10, 30, 50, 100$ et 1000 Teslas. Les estimations d'énergies sont regroupées au Tableau 12.10. Pour chaque champ magnétique, nous notons encore $(\rho_k, \theta_k, \mu_h^k)_{k=0,1,2}$ le module, l'argument et la valeur propre calculés sur les maillages $\mathcal{T}_h^k$. Les Figures 12.28, 12.29, 12.30 et 12.31 illustrent les résultats pour les champs respectifs $B = 10$, 50, 100 et 1000 Teslas. La première ligne represente respectivement θ_0, θ_1, θ_2, la deuxième ρ_0, ρ_1, ρ_2 et la troisième donne les différences de phases $\theta_0 - \theta_1$ et $\theta_0 - \theta_2$. L'effet de la translation du domaine sur la différence de phases des états propres calculées sur chaque domaine est bien mis en évidence. Comme le précise la Proposition 3.4, la différence de phase vaut $\frac{B}{2} x \wedge t$. Ainsi, les translations $(1, 0)$ et $(2, 0)$ engendrent une différence de phases constantes selon les abscisses et linéaires selon les ordonnées avec une pente de $\frac{B}{2} t_1$ où t_1 vaut respectivement 1 et 2. Les Figures 12.28, 12.29, 12.30 et 12.31 mettent nettement en évidence cette différence de phases.
De plus, le module associé à chaque champ magnétique se concentre de plus en plus dans l'angle le plus petit du domaine. Cette localisation est particulièrement concentrée pour le champ $B = 1000$ Teslas : l'état propre est localisé sur 3 éléments du maillage.

B	$\mathcal{T}_h^0$	$\mathcal{T}_h^1$	$\mathcal{T}_h^2$
10	2.0414	2.0414	2.0414
30	7.2163	7.2159	7.2141
50	12.0298	12.0298	12.0295
100	24.0935	24.0935	24.0932
1000	248.4943	248.4936	248.4942

TAB. 12.10 – Énergie associée sur des maillages translatés.

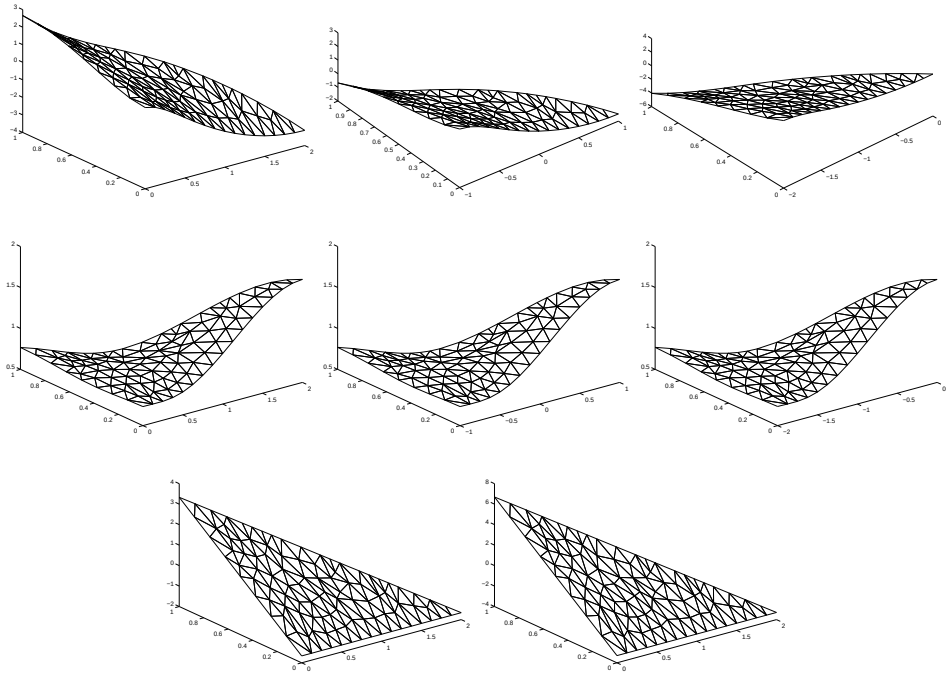


FIG. 12.28 – Arguments, modules et différence de phases du vecteur propre sur des maillages translatés, $B = 10$ Teslas.

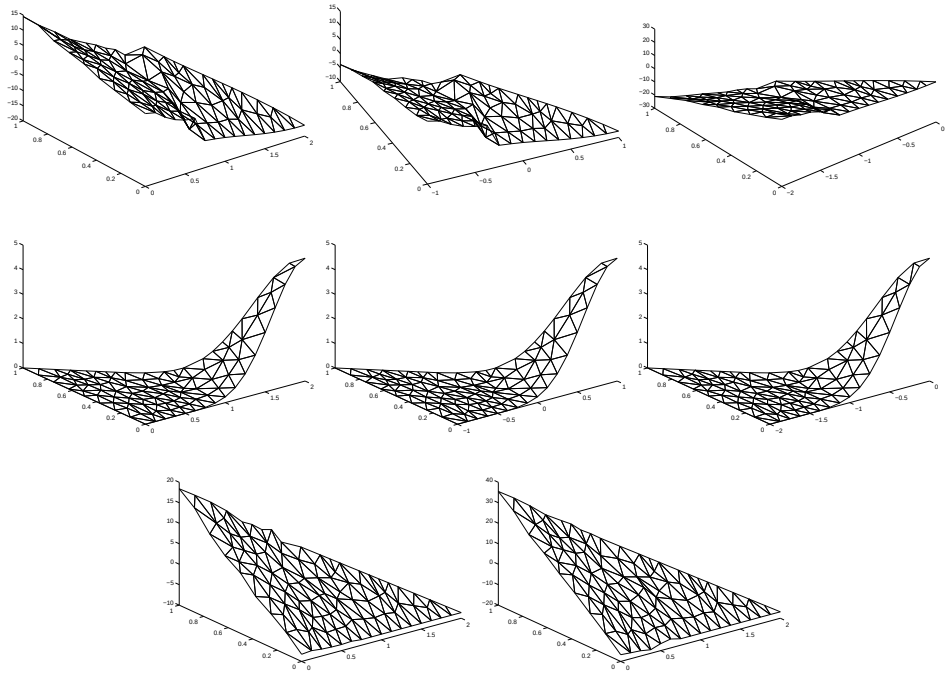


FIG. 12.29 – Arguments, modules et différence de phases du vecteur propre sur des maillages translatés, $B = 50$ Teslas.

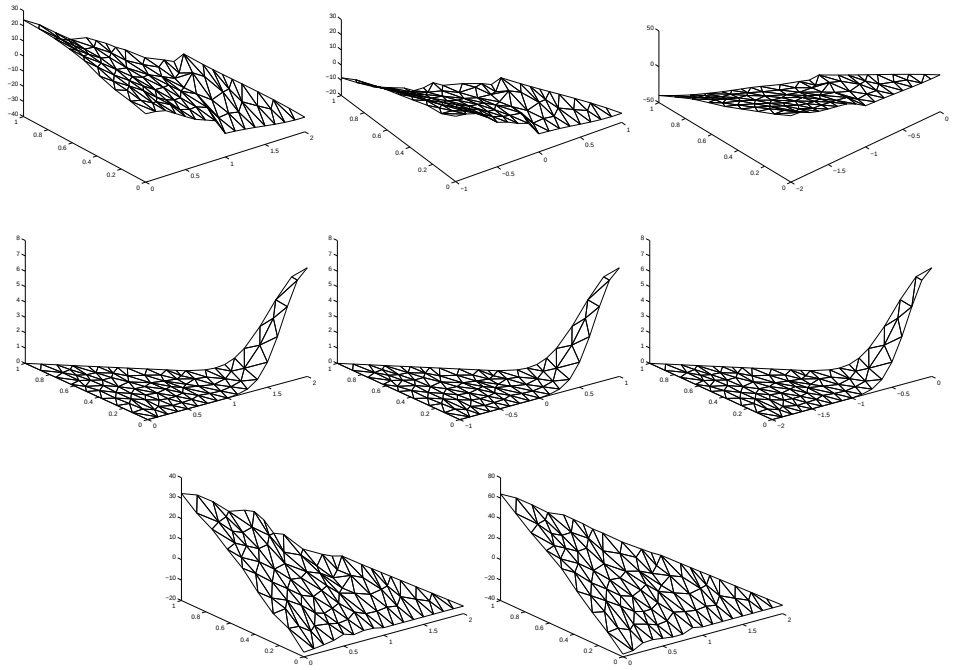


FIG. 12.30 – Arguments, modules et différence de phases du vecteur propre sur des maillages translatés, $B = 100$ Teslas.

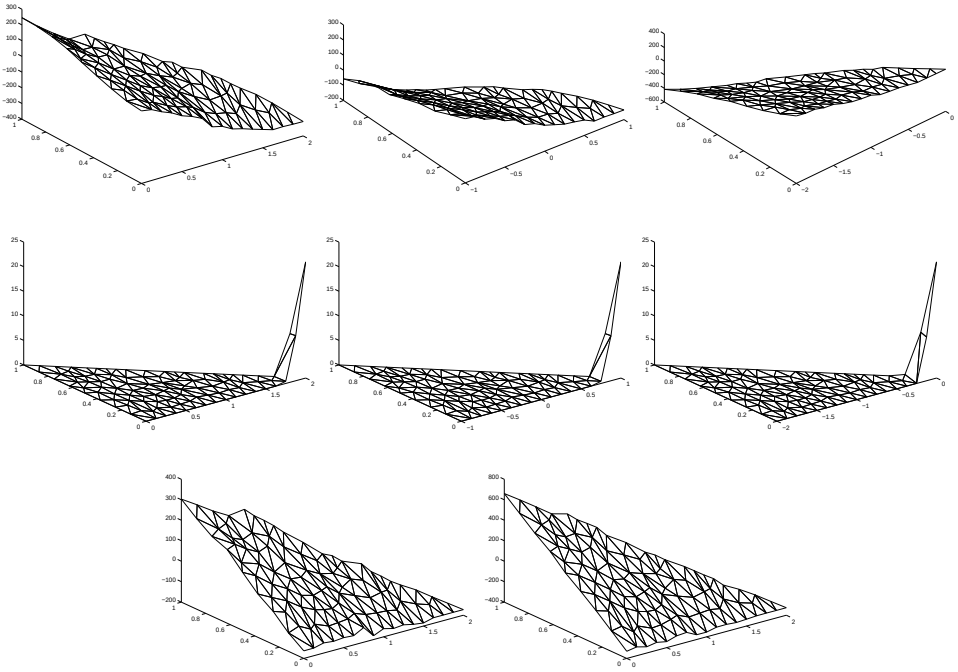


FIG. 12.31 – Arguments, modules et différence de phases du vecteur propre sur des maillages translatés, $B = 1000$ Teslas.

Nous avons ainsi déterminé un algorithme invariant par translation, rotation et par changement de jauge si la jauge est dans l'espace de discrétisation de la phase. En outre, cet algorithme est particulièrement robuste et performant car les résultats restent tout à fait cohérents pour des champs magnétiques très intenses et donnent une localisation très concentrée (uniquement sur 3 ou 4 éléments pour les Figures 12.31 et 12.26).

Afin de valider ce modèle, il faut estimer l'erreur commise entre la solution exacte et la solution calculée numériquement. Pour cela, nous allons construire des estimateurs a posteriori locaux qui présentent l'avantage de donner les erreurs en chaque éléments du maillage.

De plus, nous avons constaté que les énergies calculées sur un maillage grossier différaient peu des énergies calculées sur un maillage raffiné quand le champ magnétique n'est pas trop intense et toute l'information est contenue au niveau de la localisation dans l'angle. Ceci suggère d'utiliser un raffinement localisé afin de déterminer avec précision le comportement du vecteur propre au niveau de sa concentration et de mailler grossièrement l'intérieur du domaine pour optimiser le temps de calcul. Les estimateurs a posteriori permettront d'effectuer des raffinements localisés en nous indiquant les zones où le calcul manque de précision.

Chapitre 13

Raffinement de maillages

13.1 Construction d'estimateurs a posteriori

Il est important de pouvoir évaluer l'erreur commise en approchant l'état fondamental. Pour estimer l'écart entre l'état fondamental exact et celui calculé par la méthode numérique, nous utilisons un estimateur a posteriori. Mentionnons brièvement les résultats obtenus. Cette étude se base sur les travaux de Verfürth [100] et les démonstrations des résultats suivants sont données en Annexe A qui fait l'objet d'un article.

Commençons par rappeler le principe et l'intérêt des estimateurs a posteriori.
Nous souhaitons déterminer un critère qui permet de savoir, uniquement à l'aide des calculs numériques de la solution et des données du problème, si la solution numérique approche la solution exacte avec une précision requise. Pour ce faire, nous construisons un estimateur a posteriori qui estime localement, en chaque élément du maillage, l'erreur commise. Le grand intérêt est donc de localiser exactement l'endroit où le calcul n'est pas assez précis et donc de permettre de raffiner le maillage à ce niveau. Présentons maintenant ces estimateurs.

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de Ω. Pour tout élément $T \in \mathcal{T}_h$, nous noterons $\mathcal{E}(T)$, l'ensemble des arêtes du triangle T, $\mathcal{E}_{h,\Omega}$, l'ensemble des arêtes internes, ω_T, l'ensemble des éléments ayant une arête commune avec T. Supposons la triangulation régulière : l'angle minimal de tout triangle de $\mathcal{T}_h$ est minoré de manière uniforme par une constante strictement positive indépendante de h. Alors, pour tout $T, T' \in \mathcal{T}_h$ sans sommet commun, et tout $E \in \mathcal{E}(T)$, $\frac{h_T}{h_E}$ et $\frac{h_T}{h_{T'}}$ sont bornés uniformément. Soit (μ_h, u_h) une solution du problème approché. Définissons l'estimateur a posteriori η_T pour tout élément T de la triangulation $\mathcal{T}_h$:

$$\eta_T^2 := h_T^2 \int_T \left| -\nabla_{B\mathcal{A}_0}^2 u_h - \mu_h u_h \right|^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E \int_E \left| [n_E \cdot \nabla_{B\mathcal{A}_0} u_h]_E \right|^2 . \tag{13.1}$$

- La première intégrale estime l'erreur commise sur la valeur propre.
- La deuxième mesure le défaut de la condition de Neumann au passage de chaque arête.

Théorème 13.1. *Soient μ et μ_h les plus petites valeurs propres des opérateurs continus et discrets de vecteurs propres normalisés associés $u \in H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)$ et $u_h \in \mathbb{P}^2$. Il existe alors h_0 et des constantes c_1, c_2 ne dépendant que du paramètre de régularité telles que les estimations a posteriori suivantes soient vérifiées pour tout $h \leq h_0$:*

$$|\mu - \mu_h| + ||u - u_h||_{H^1_{B\mathcal{A}_0}(\Omega)} \quad \leq \quad c_1 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2} , \tag{13.2}$$

$$\left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2} \leq c_2 \left\{ |\mu - \mu_h| + ||u - u_h||_{H^1_{B\mathcal{A}_0}(\Omega)} \right\}. \tag{13.3}$$

Démonstration : La preuve de ce théorème fait l'objet de l'article [28] présenté en Annexe A. Mentionnons les étapes de la démonstration.
Nous commençons par donner une estimation a priori de l'écart entre la solution numérique et la solution exacte du problème. Les techniques classiques telles que le lemme de Céa ne sont pas appliquables ici car le problème n'est pas linéaire. Nous proposons une estimation obtenue à l'aide de la décomposition dans une base orthonormée de vecteurs propres. Cette estimation fait l'objet de la section A.3.
Munie de cette relation, nous adaptons les techniques de Verfürth [100] (cf section A.4). □

Les estimateurs permettent d'améliorer les résultats numériques obtenus par l'Algorithme 12.9 en combinant celui-ci avec des techniques de raffinement de maillages. En effet, le Théorème 13.1 établit une «équivalence de normes» entre la norme de la différence entre la solution exacte et la solution numérique $|\mu - \mu_h| + ||u - u_h||_{H^1_{B\mathcal{A}_0}(\Omega)}$ et la norme des estimateurs $\left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2}$. Par conséquent, si l'estimateur a posteriori η_T est «grand» pour un éléments T du maillage, l'écart entre la solution exacte et la solution numérique sera «grand» également. Cette remarque permet de mettre en place un raffinement de maillage.

13.2 Applications au raffinement de maillage

Exprimons plus mathématiquement cette notion. Reprenons le Théorème 13.1 et la relation (13.3). Donnons-nous une tolérance d'erreur ε entre la solution exacte et la solution numérique.
Si, en un élément T du maillage, l'estimateur d'erreur locale η_T est supérieur à ε, alors :

$$\varepsilon \leq \eta_T \leq \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2} \leq c_2 \left(|\mu - \mu_h| + ||u - u_h||_{H^1_{B\mathcal{A}_0}(\Omega)} \right).$$

Modulo la constante c_2, l'écart entre la solution numérique et la solution exacte sera donc supérieur à ε.
Or, $\eta_T > \varepsilon$ signifie que la solution numérique u_h est mal calculée sur l'élément T. Nous allons donc raffiner cet élément ainsi que tous les éléments $\tilde{T}$ tels que $\eta_{\tilde{T}} > \varepsilon$ et recommencer le calcul numérique sur le nouveau maillage.
Le critère de raffinement $\eta_{\tilde{T}} < \varepsilon$ n'est pas suffisant, il faut que l'ensemble des erreurs η_T soit inférieur à ε. Pour essayer de prendre en compte de manière uniforme les contributions d'erreurs de chaque élément, nous prendrons le critère suivant :

$$\eta_T < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\text{Card } T}}, \tag{13.4}$$

où Card T est le nombre d'éléments du maillage. Si tous les éléments T du maillage vérifient la condition (13.4), alors la somme des erreurs $\left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2}$ est majorée par ε. Nous avons ainsi obtenu un nouvel algorithme de calcul :

Algorithme 13.2.

- *Donnée d'un maillage initial $\mathcal{T}_{h,0}$, d'un seuil de tolérance ε pour les estimateurs a posteriori.*
- *Calcul d'une solution numérique $(\mu_{h,0}, u_{h,0} = \rho_{h,0} e^{i\theta_{h,0}})$ à l'aide de l'Algorithme 12.9.*
- *Calcul des estimateurs d'erreur a posteriori $(\eta_T)_{T\in\mathcal{T}_{h,0}}$ grâce à l'expression (13.1).*
  Calcul de la norme $\eta := \left\{ \sum_{T\in\mathcal{T}_{h,0}} \eta_T^2 \right\}^{1/2}$.
- *Tant que $\eta > \varepsilon$:*
  - *Construction d'un nouveau maillage $\mathcal{T}_{h,1}$ à partir du maillage $\mathcal{T}_{h,0}$ en raffinant les éléments $T \in \mathcal{T}_{h,0}$ tels que $\eta_T > \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\text{Card } T}}$.*
  - *Interpolation du module $\rho_{h,0}$ et de l'argument $\theta_{h,0}$ de la solution $u_{h,0}$ donnée sur le maillage $\mathcal{T}_{h,0}$ au nouveau maillage $\mathcal{T}_{h,1}$.*
  - *Calcul des états propres sur le nouveau maillage $\mathcal{T}_{h,1}$ en initialisant l'Algorithme 12.9 avec les interpolations de $\rho_{h,0}$ et $\theta_{h,0}$.*
- *Si $\eta < \varepsilon$, la solution numérique a la précision requise.*

Reprenons l'exemple du secteur angulaire. Considérons un secteur angulaire d'angle $\frac{\pi}{3}$ tronqué de manière régulière par une portion de cercle. Nous appliquons un champ $B = 30$ Teslas, utilisons une approximation $\mathbb{P}^2$, une formule d'intégration d'ordre 5. Nous souhaitons une précision de 10^{-3} pour le gradient conjugué et la recherche de valeur propre. Pour obtenir cette précision, nous seuillons le nombre d'itérations proportionnellement au nombre de raffinements effectués en se limitant à 200 itérations pour le premier maillage.
Le Tableau 13.1 mentionne, pour chaque raffinement localisé, le nombre d'éléments du maillage, le nombre d'inconnues, la valeur de l'estimateur global η et la valeur propre calculée.

raffinement	nombre d'éléments	nombre d'inconnues	η	μ_h
1	38	101	38.993385	15.572444
2	102	235	22.828768	13.815911
3	206	459	9.037603	12.826912
4	394	855	5.857042	12.670129
5	800	1699	2.240146	12.638226
6	1726	3593	0.792354	12.628898
7	3807	7826	0.272165	12.627361
8	8219	16742	0.104900	12.626788
9	15517	31446	0.060877	12.626605

TAB. 13.1 – Estimations pour un maillage raffiné localement.

L'évolution de l'estimateur d'erreur et de la valeur propre au cours des itérations est illustrée à la Figure 13.1. Représentons aux Figures 13.2, 13.3, 13.4, 13.5, 13.6, 13.7, 13.8 et 13.9, les solutions obtenues à chaque raffinement. Ces figures donnent le maillage raffiné, la convergence de la valeur

propre, la phase et le module calculés sur ce maillage à l'aide de l'Algorithme 12.9.
La Figure 13.2 montre que la convergence de la valeur propre n'est pas toujours décroissante car les algorithmes n'ont pas convergé avec le nombre d'itérations autorisées.
Le dessin de la phase provient de l'interpolation assez grossière utilisée. Décrivons l'interpolation utilisée. Considérons $\mathcal{T}_{h,0}$ un maillage donné, θ_0 une fonction définie sur ce maillage et $\mathcal{T}_{h,1}$ un maillage raffiné à partir de $\mathcal{T}_{h,0}$, nous définissons θ_1 l'interpolée de θ_0 sur le maillage $\mathcal{T}_{h,1}$ de la façon suivante : la valeur de θ_1 en un degré de liberté d'un élément T_1 du maillage raffiné est donnée par la valeur de θ_0 en un sommet de l'élément $T_0 \in \mathcal{T}_{h,0}$ tel que $T_1 \subset T_0$. Cette interpolation, très simple, devient très mauvaise dès que la fonction varie beaucoup sur un élément.

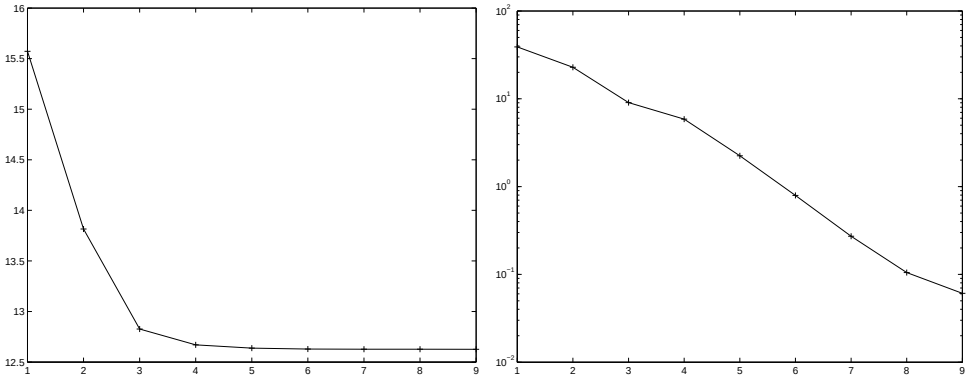


FIG. 13.1 – Convergence de la valeur propre et comportement de l'estimateur d'erreurs au cours des raffinements localisés, $B = 30$ Teslas.

Le raffinement local s'effectue prinicipalement au sommet du secteur tronqué et secondairement sur le bord du domaine. L'intérieur est maillé plus grossièrement. Ceci semble naturel et concorde avec les résultats de Helffer-Morame [60] dans le cas de domaines réguliers. En effet, ils démontrent que l'état propre est localisé sur le bord du domaine et particulièrement aux points de courbure maximale. À la vue des résultats numériques et comme nous le présenterons dans le cadre semi-classique à la Partie IV, ce résultat s'étend à des domaines à coin et les sommets jouent le rôle des points de courbure maximale. Il semble ainsi que pour des domaines à coin, l'état fondamental se localise sur le bord du domaine et plus précisément dans les plus petits angles ; autrement dit, l'état propre décroit exponentiellement avec l'éloignement du plus petit angle du domaine et cette décroissance est plus rapide à l'intérieur que sur le bord du domaine.

Reprenons maintenant l'effet d'une translation en reprenant les exemples du Chapitre 12. Nous avons vu que la méthode de la Section 12.5 dont l'Algorithme 12.9 conservait les propriétés théoriques de la Proposition 3.4 d'une translation du domaine. Vérifions que le raffinement de maillage adapté donné par l'Algorithme 13.2 reste en accord avec cette proposition.

Commençons par l'exemple du triangle et reprenons les notations du Chapitre 12. Appliquons un champ $B = 10$ Teslas. Les résultats numériques sont donnés au Tableau 13.2, la Figure 13.10 donne les courbes de convergence des valeurs propres et estimateurs d'erreurs pour chaque domaine. La Figure 13.11 représente les modules et arguments calculés numériquement. Le Tableau 13.3 et la Figure 13.12 donnent les résultats pour un champ d'intensité $B = 50$ Teslas.

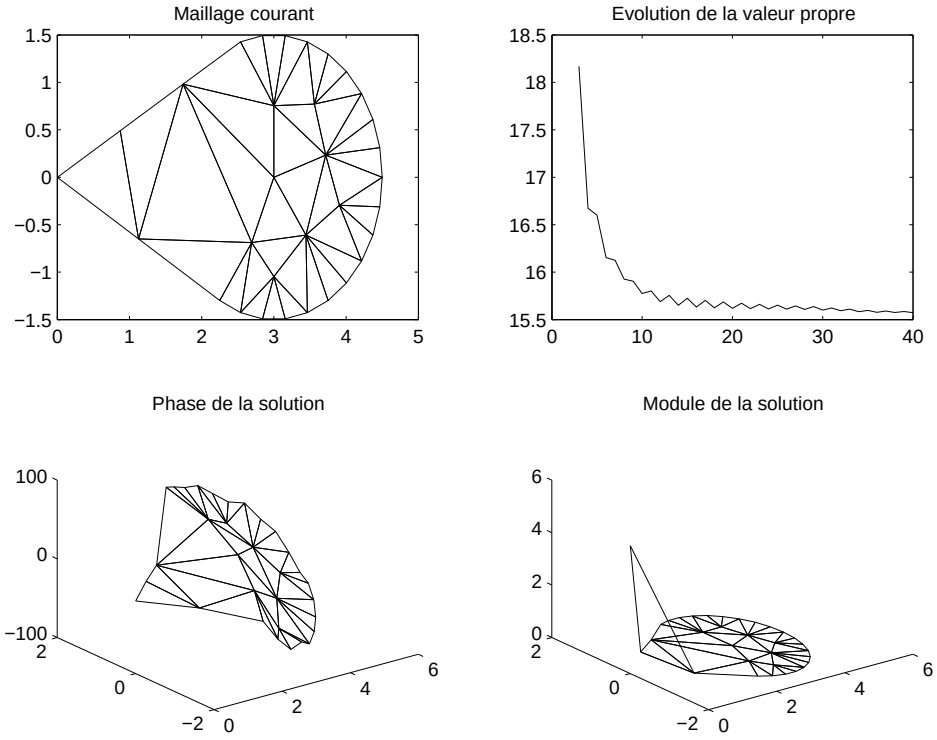


FIG. 13.2 – Maillage initial.

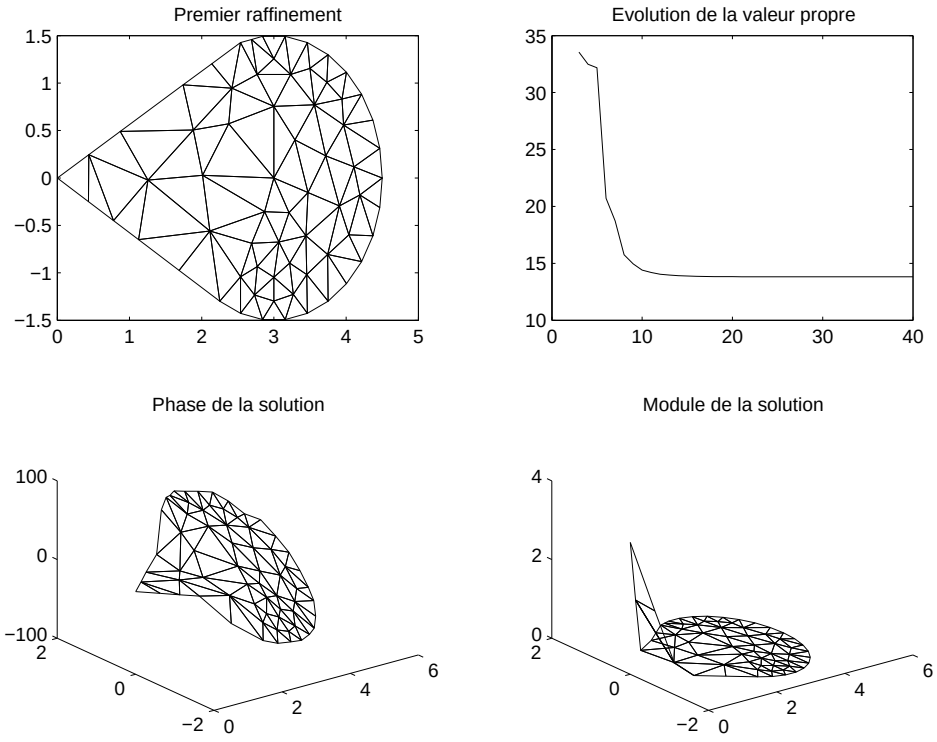


FIG. 13.3 – Premier raffinement.

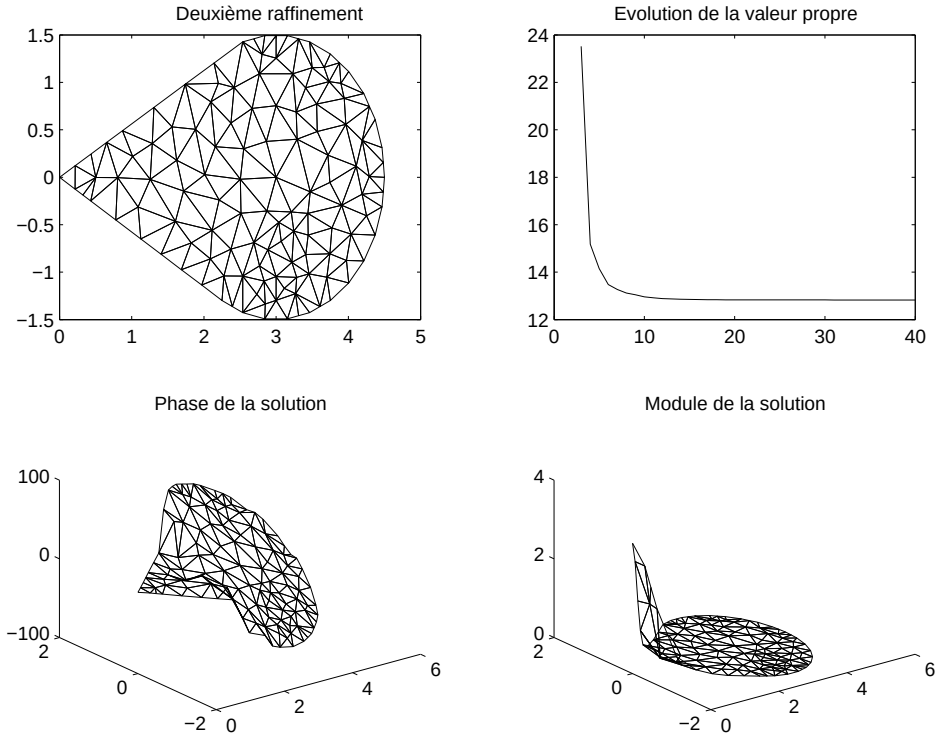


FIG. 13.4 – Deuxième raffinement.

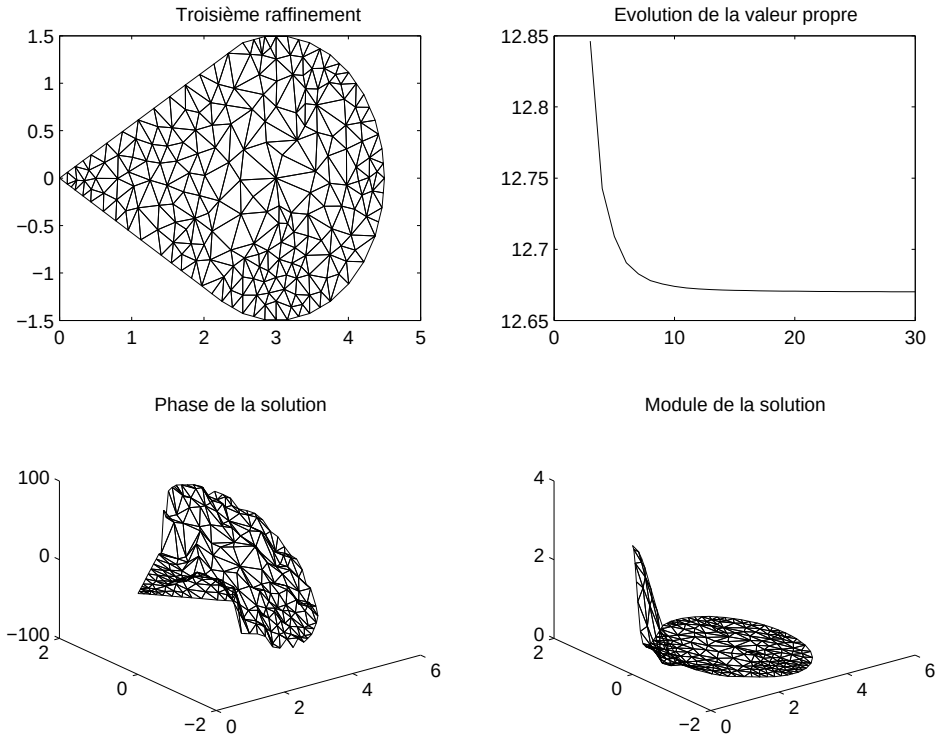


FIG. 13.5 – Troisième raffinement.

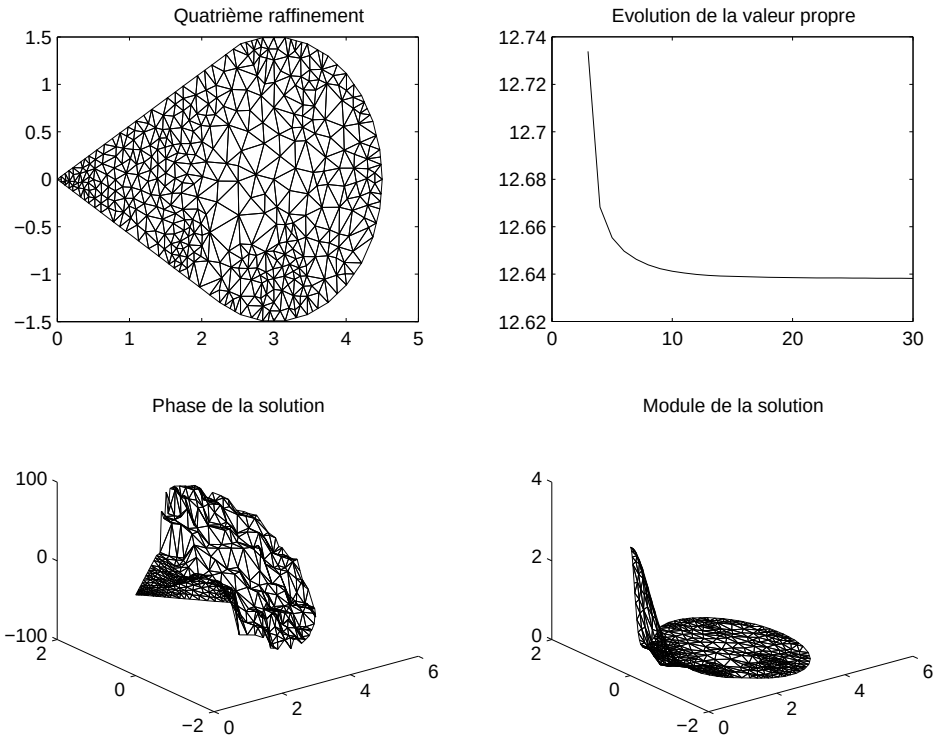


FIG. 13.6 – Quatrième raffinement.

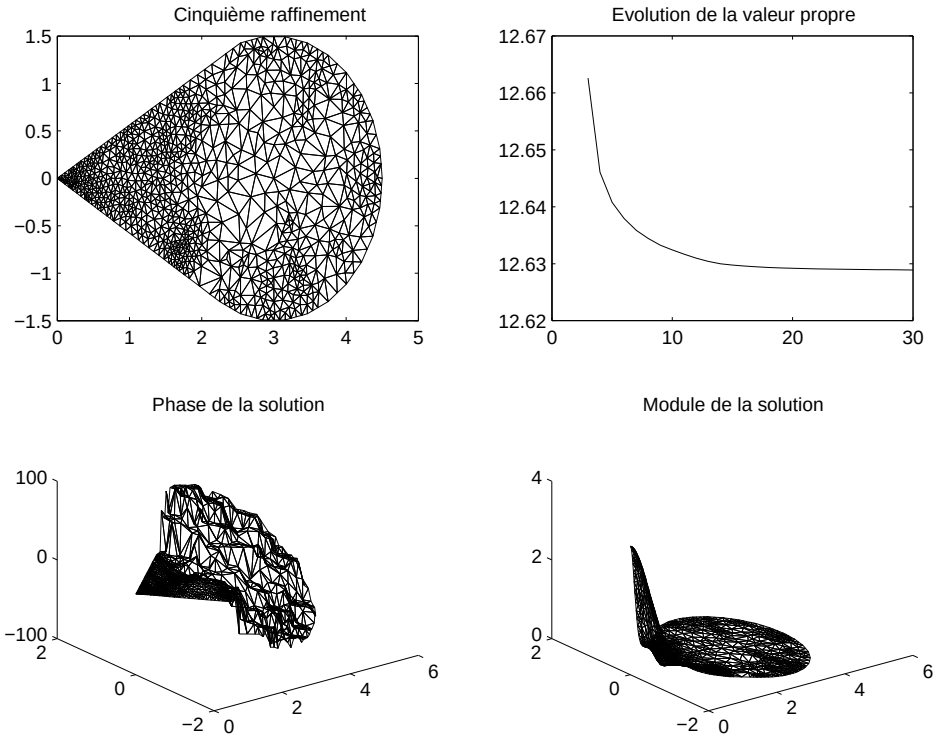


FIG. 13.7 – Cinquième raffinement.

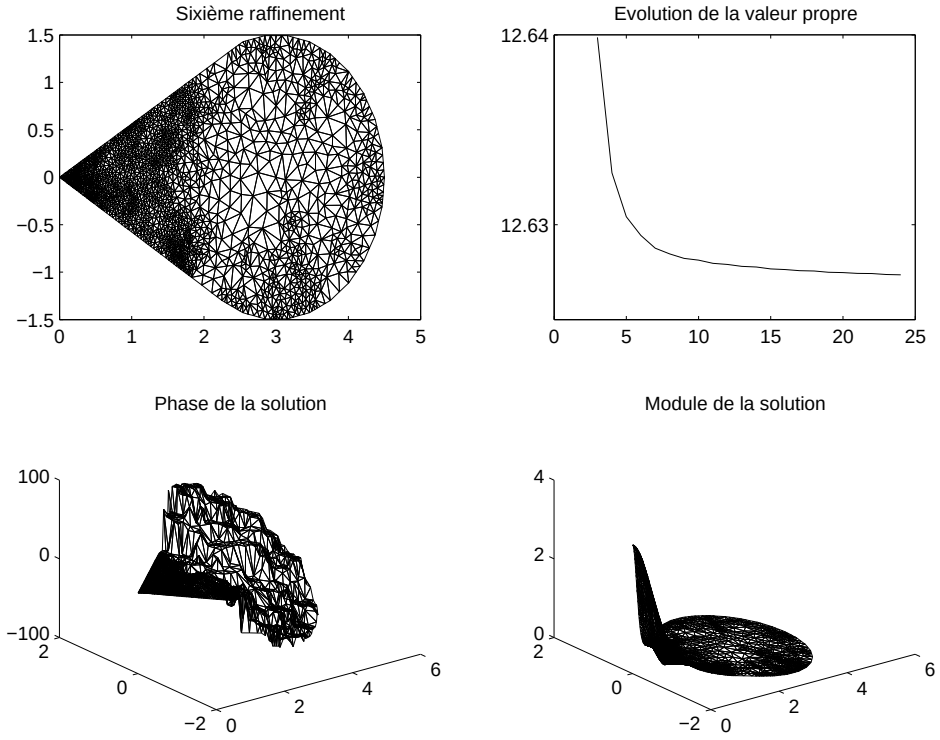


FIG. 13.8 – Sixième raffinement.

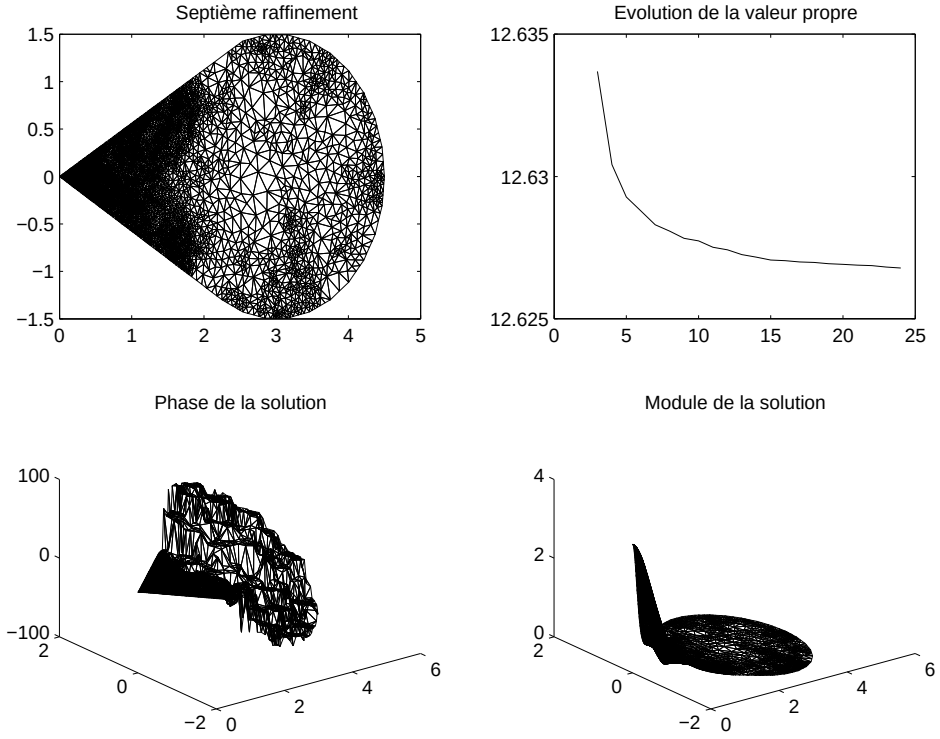


FIG. 13.9 – Septième raffinement.

	raffinement	nombre d'éléments	nombre d'inconnues	η	μ_h
$\mathcal{T}_h^0$	1	163	372	1.168925	2.041564
	2	482	1045	0.329242	2.041205
	3	1176	2489	0.106249	2.041153
	4	2354	4909	0.045770	2.041146
$\mathcal{T}_h^1$	1	163	372	0.826858	2.041527
	2	442	961	0.109108	2.041219
	3	906	1935	0.050529	2.041156
$\mathcal{T}_h^2$	1	163	372	3.599589	2.041479
	2	495	1064	0.440350	2.041174
	3	1428	2981	0.152688	2.041145
	4	3427	7034	0.059953	2.041141

TAB. 13.2 – Méthode de raffinement adapté sur des domaines translatés, $B = 10$ Teslas.

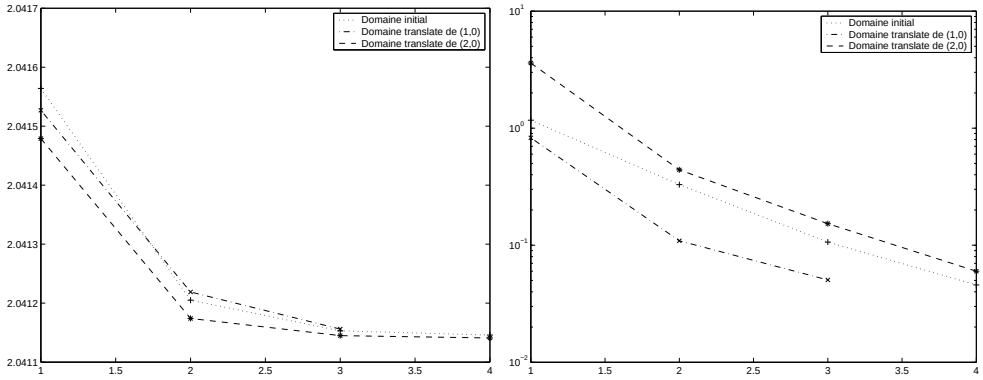


FIG. 13.10 – Comparaison de convergence sur des domaines translatés, $B = 10$ Teslas.

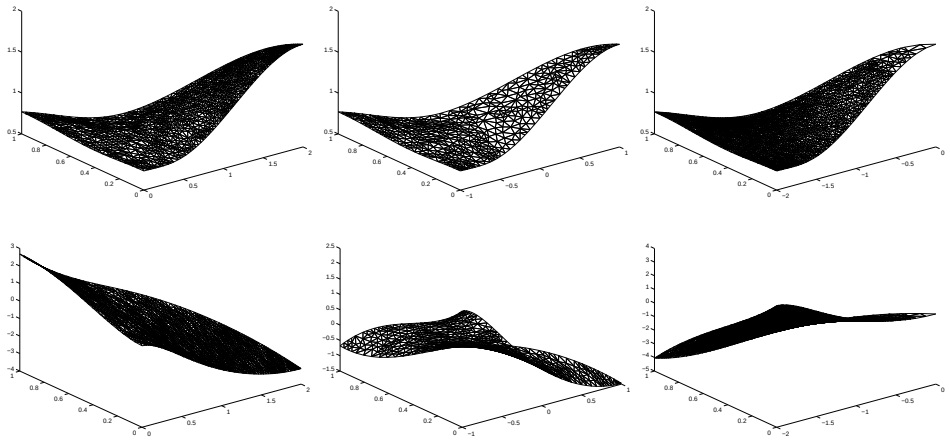


FIG. 13.11 – Modules et phases pour des domaines translatés, $B = 10$ Teslas.

	raffinement	nombre d'éléments	nombre d'inconnues	η	μ_h
$\mathcal{T}_h^0$	1	3	12	262.086287	13.202949
	3	23	64	122.998366	12.223680
	5	191	446	35.893436	12.018062
	6	550	1209	10.203401	12.014173
	7	1587	3354	2.766665	12.014093
	8	4482	9261	0.893997	12.014222
	9	11798	24051	0.318784	12.014427
$\mathcal{T}_h^1$	1	3	12	34.737910	13.202537
	3	22	61	19.988556	12.223230
	5	175	398	2.373939	12.016305
	6	493	1068	0.837109	12.013544
	7	1275	2680	0.301925	12.013299
	8	2926	6051	0.106554	12.013069
$\mathcal{T}_h^2$	1	3	12	48.553076	13.201298
	3	29	80	15.851469	12.217716
	5	197	462	2.264669	12.017391
	6	524	1153	0.754572	12.014109
	7	1382	2919	0.256103	12.013840
	8	3458	7143	0.104408	12.016798

TAB. 13.3 – Méthode de raffinement adapté sur des domaines translatés, $B = 50$ Teslas.

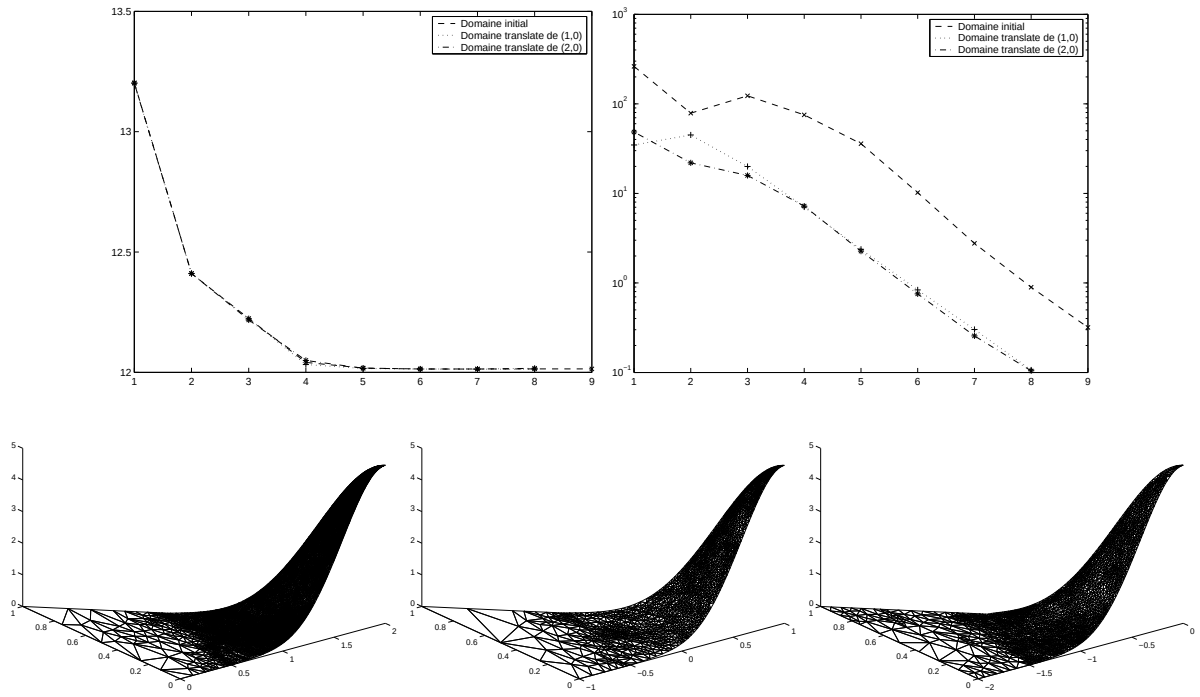


FIG. 13.12 – Comparaison de convergence et modules des états fondamentaux pour des domaines translatés, $B = 50$ Teslas.

Reprenons maintenant l'exemple du secteur angulaire pour un champ $B = 10$ Teslas. Les résultats numériques sont donnés au Tableau 13.4 et Figure 13.13.

	raffinement	nombre d'éléments	nombre d'inconnues	η	μ_h
$\mathcal{T}_h^0$	1	46	120	15.215786	4.552592
	3	277	609	2.105893	4.193782
	4	686	1456	0.766860	4.187680
	5	1793	3719	0.252199	4.185689
	6	4243	8677	0.094167	4.185354
$\mathcal{T}_h^1$	1	46	120	7.908436	4.552419
	3	278	608	0.989488	4.192943
	4	673	1425	0.344241	4.187215
	5	1608	3342	0.117039	4.185014
	6	3138	6448	0.056726	4.185071
$\mathcal{T}_h^2$	1	46	120	35.876423	4.552458
	3	258	568	6.427819	4.202484
	4	575	1223	2.353766	4.196257
	5	1298	2708	0.710766	4.193429
	6	2785	5727	0.244450	4.192656
	7	5822	11878	0.093527	4.192523

TAB. 13.4 – Méthode de raffinement adapté sur des domaines translatés, $B = 10$ Teslas.

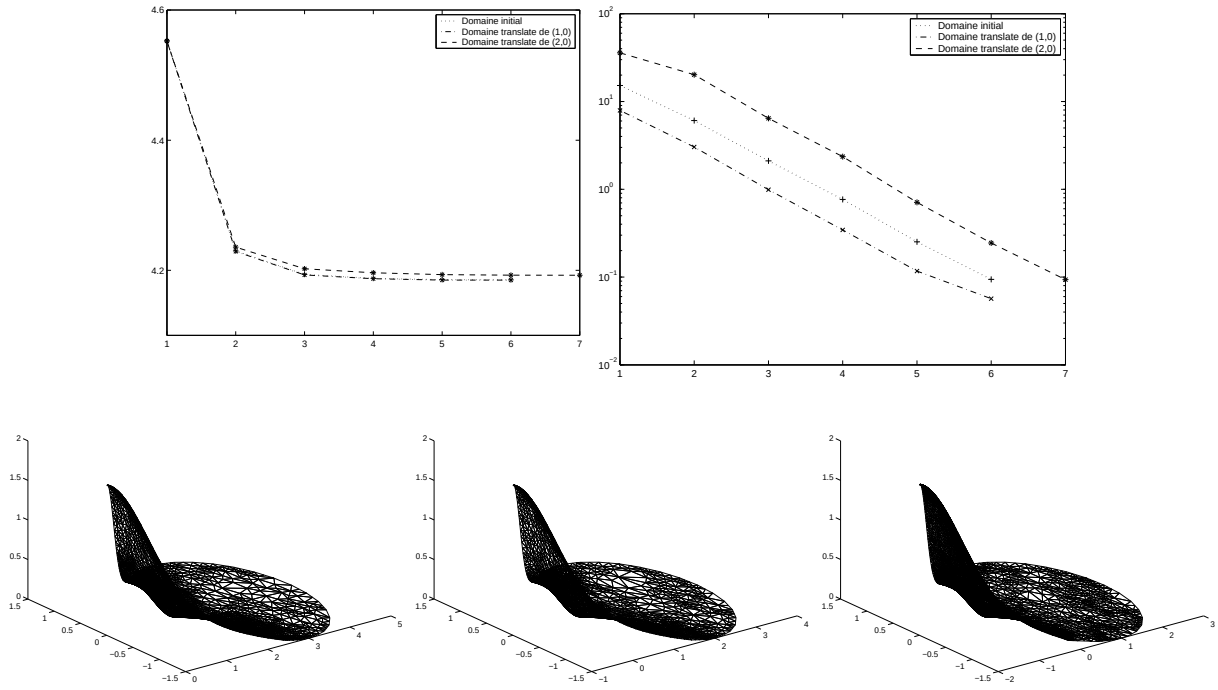


FIG. 13.13 – Comparaison de convergence et modules des états fondamentaux pour des domaines translatés, $B = 10$ Teslas.

	raffinement	nombre d'éléments	nombre d'inconnues	η	μ_h
$\mathcal{T}_h^0$	1	46	119	68.543904	25.386867
	3	209	464	11.072079	21.305702
	5	924	1949	1.916424	20.936193
	6	2070	4277	0.611482	20.927274
	7	4753	9712	0.214392	20.924749
$\mathcal{T}_h^1$	1	46	119	90.235415	25.386869
	3	187	418	39.960178	21.306047
	5	832	1761	5.817248	20.933972
	6	1692	3513	1.829678	20.925067
	7	3401	6984	0.578329	20.921944
	8	6766	13779	0.204180	20.921244
$\mathcal{T}_h^2$	1	46	119	633.122996	25.386867
	3	185	414	103.013897	21.306879
	5	837	1772	63.846558	20.935280
	7	4261	8722	5.806855	20.923204
	8	9328	18941	1.778011	20.921732
	9	23584	47619	0.577784	20.924083
	10	51881	104444	0.204525	20.925244

TAB. 13.5 – Méthode de raffinement adapté sur des domaines translatés, $B = 50$ Teslas.

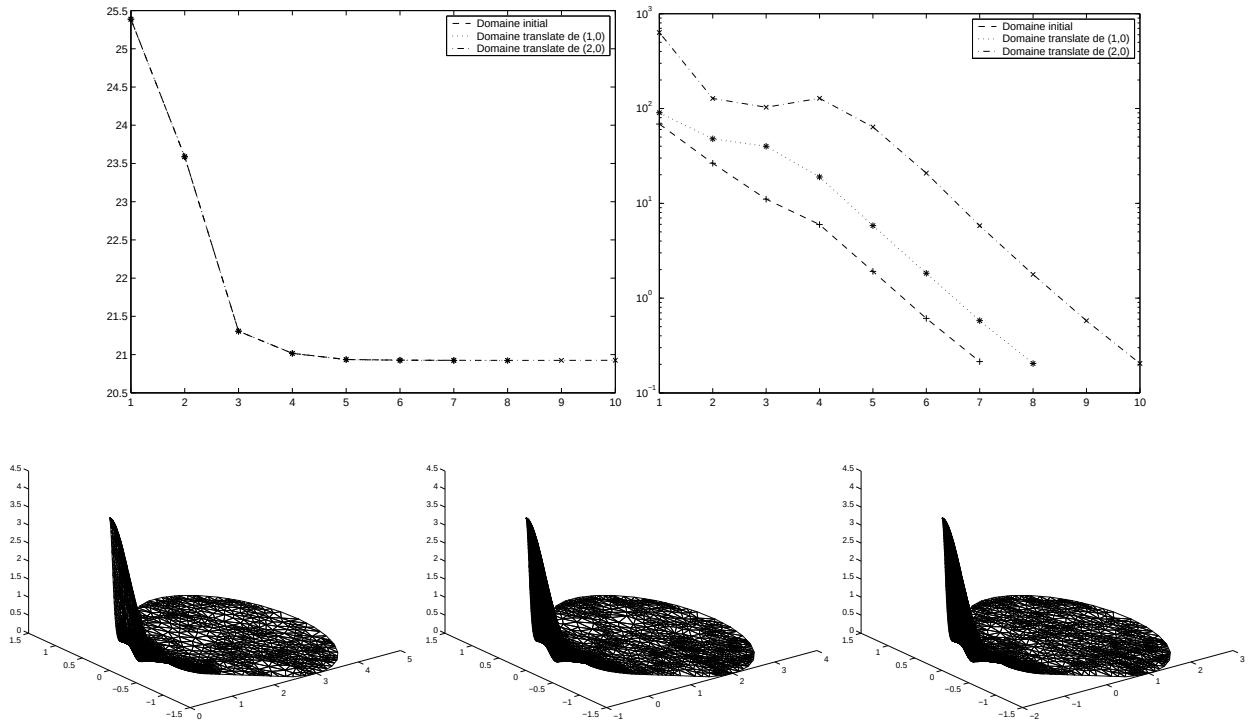


FIG. 13.14 – Comparaison de convergence et modules des états fondamentaux pour des domaines translatés, $B = 50$ Teslas.

L'Algorithme 13.2 respecte donc bien l'effet d'une translation du domaine : la solution calculée sur un domaine translatée est bien la translatée de la solution calculée sur le domaine initial. Notons que la convergence est plus rapide lorsque le coin de plus petit angle est situé à l'origine car la phase, $\frac{B}{2}x \wedge t$, est alors peu oscillante et plus facile à capter.

13.3 Comparaison avec un raffinement de maillages uniforme

Au lieu de faire un raffinement localisé dans l'Algorithme 13.2, regardons les résultats obtenus en raffinant uniformément le maillage à chaque itération. Reprenons l'exemple du secteur angulaire d'angle $\frac{\pi}{3}$ tronqué de manière régulière, appliquons un champ $B = 30$ Teslas et utilisons une approximation $\mathbb{P}^2$, une formule d'intégration d'ordre 5, une précision de 10^{-3} pour le gradient conjugué. Le Tableau 13.6 donne les estimations à chaque raffinement uniforme.

raffinement	nombre d'éléments	nombre d'inconnues	η	μ_h
1	38	101	39.711605	15.569330
2	48	125	22.754814	13.816984
3	70	171	14.493879	13.440501
4	193	428	8.227542	12.826351
5	522	1113	4.960995	12.687395
6	1349	2790	2.059195	12.641156
7	3593	7350	0.772448	12.630521
8	9583	19448	0.279150	12.627457

TAB. 13.6 – Estimations pour un maillage raffiné uniformément.

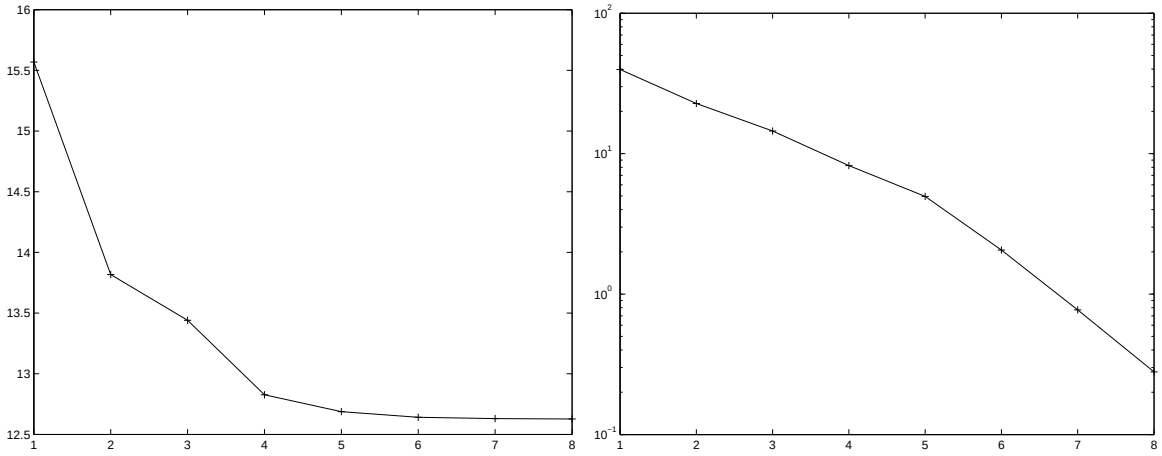


FIG. 13.15 – Convergence de la valeur propre et comportement de l'estimateur d'erreurs au cours des raffinements uniformes.

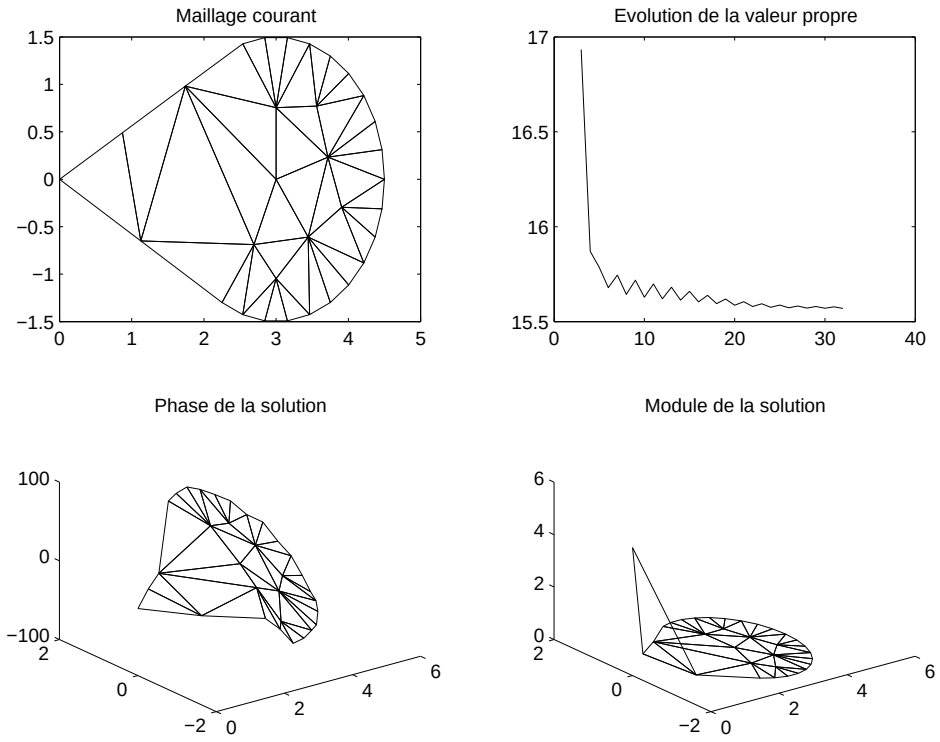


FIG. 13.16 – Maillage initial.

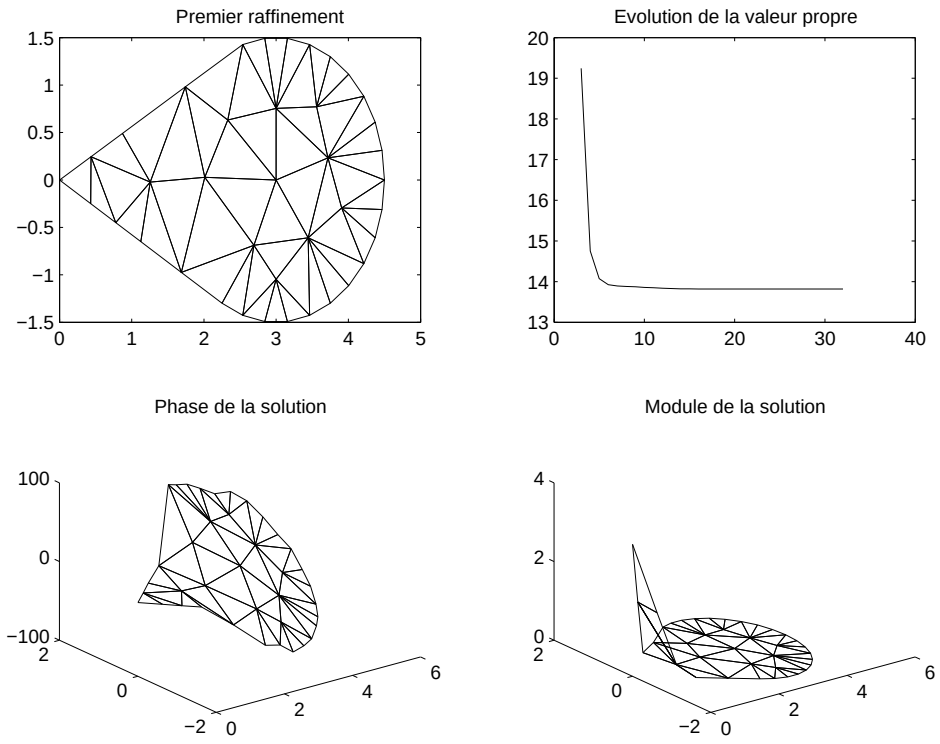


FIG. 13.17 – Premier raffinement.

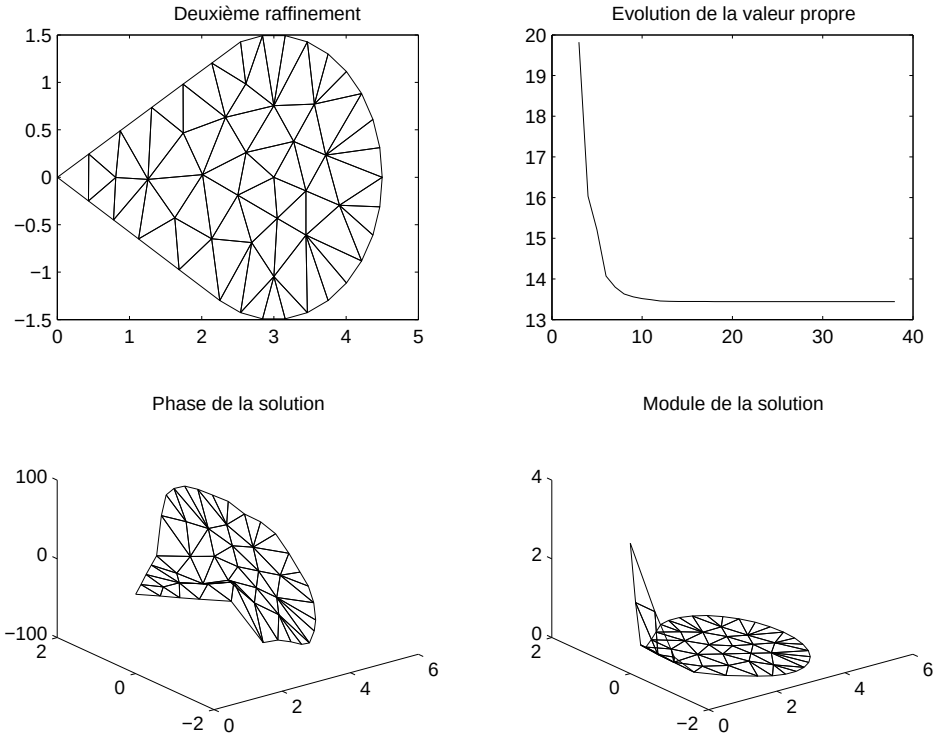


FIG. 13.18 – Deuxième raffinement.

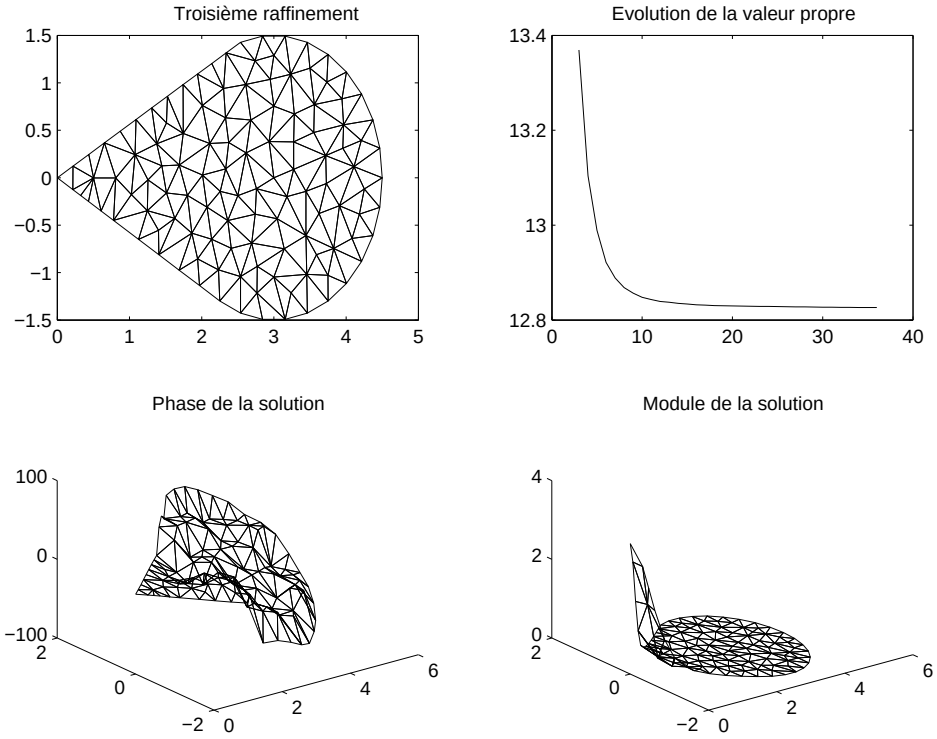


FIG. 13.19 – Troisième raffinement.

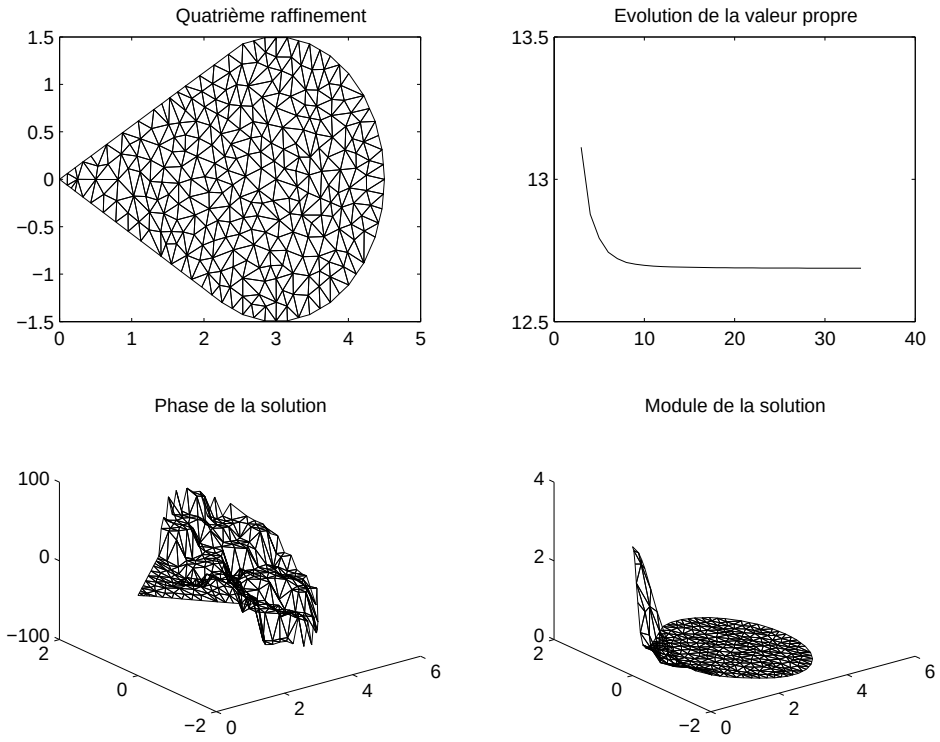


FIG. 13.20 – Quatrième raffinement.

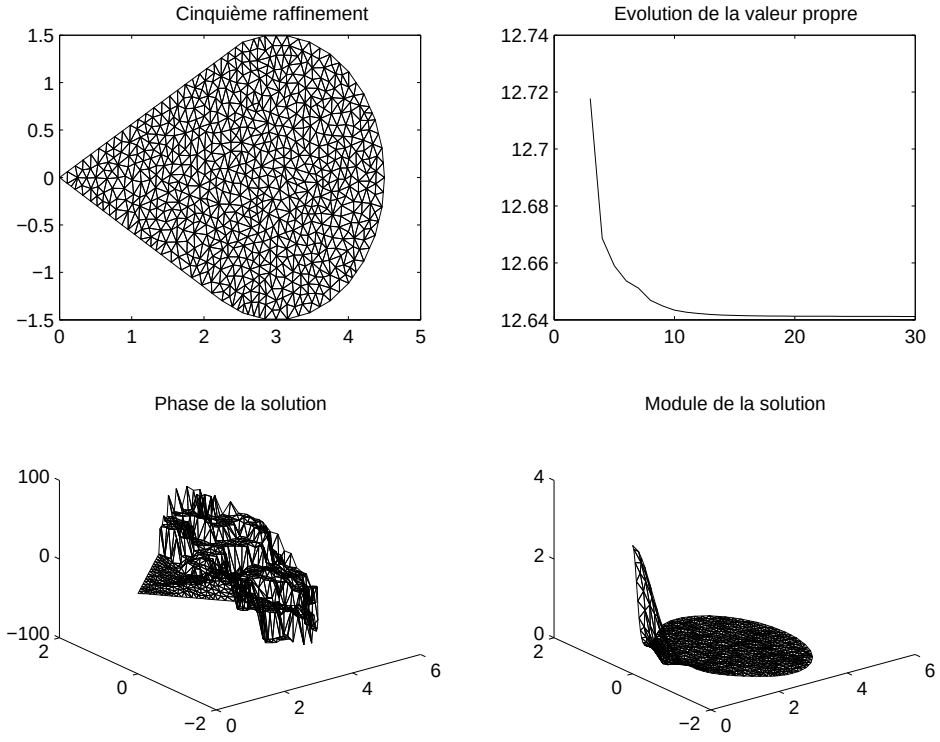


FIG. 13.21 – Cinquième raffinement.

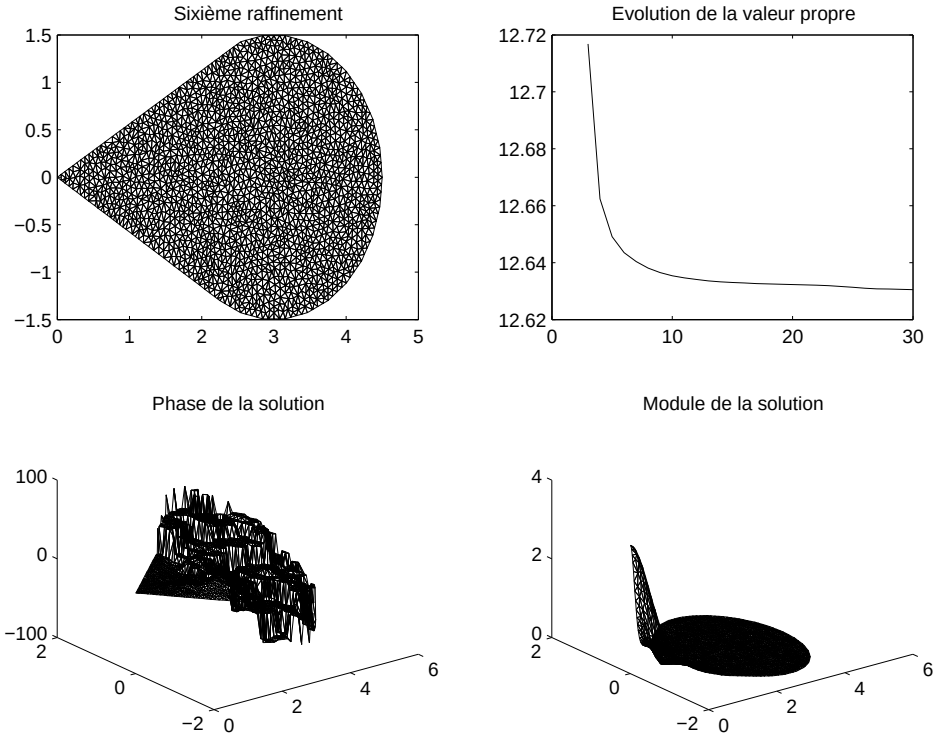


FIG. 13.22 – Sixième raffinement.

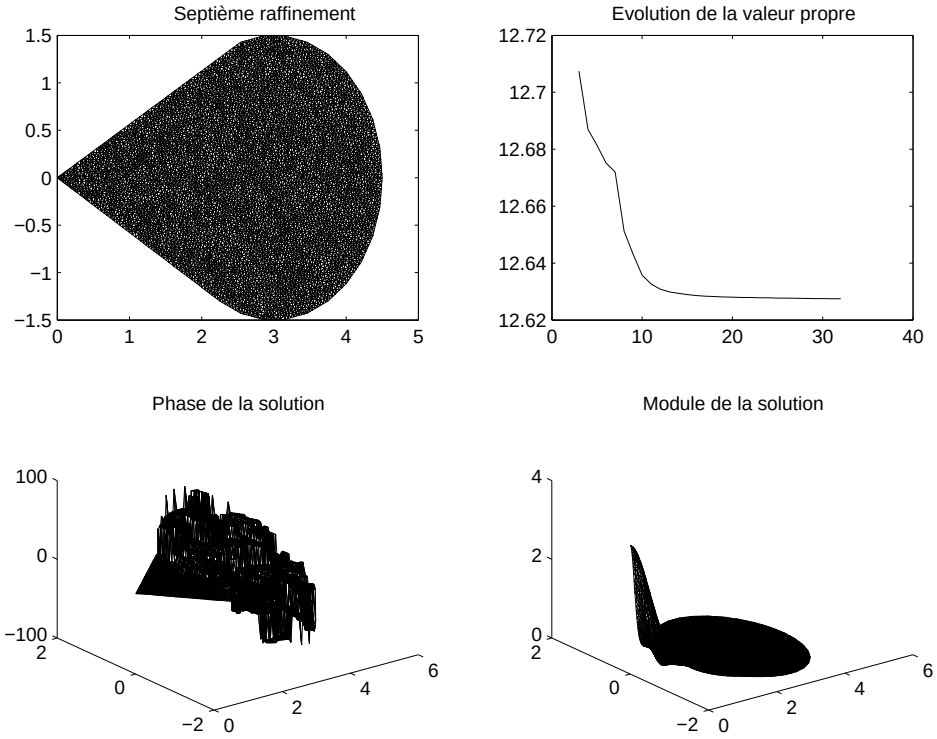


FIG. 13.23 – Septième raffinement.

Comparons les résultats entre la solution donnée par l'Algorithme 13.2 avec un raffinement local et la solution obtenue par un raffinement uniforme à chaque itération. Les convergences des valeurs propres et des estimateurs d'erreurs sont regroupées à la Figure 13.24.

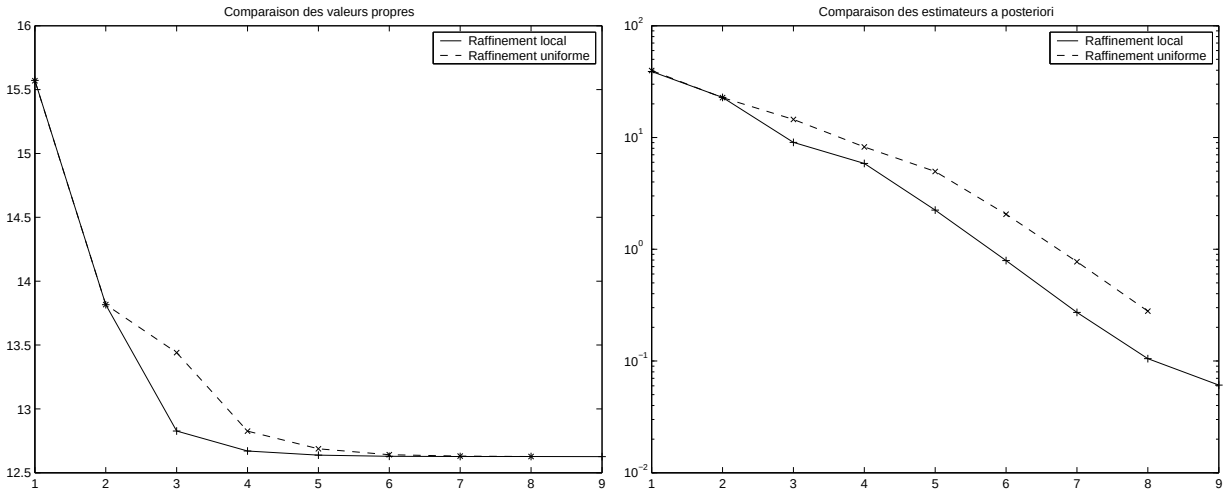


FIG. 13.24 – Comparaison de convergence entre raffinement local et uniforme, $B = 30$ Teslas.

Pour les premiers raffinements, les deux méthodes sont comparables puis la convergence est beaucoup plus rapide en utilisant un raffinement localisé. Remarquons notamment que les estimateurs d'erreurs sur les maillages raffinés uniformément sont du même ordre que ceux obtenus sur des maillages raffinés localement avec deux fois moins d'éléments.

Présentons au Tableau 13.7 et à la Figure 13.25, la comparaison entre les méthodes de raffinements uniforme et adapté, en demandant une précision de 10^{-4} pour les algorithmes pour un champ $B = 100$ Teslas.

Raffinement uniforme				Raffinement adapté			
nombre éléments	nombre inconnues	η	μ_h	nombre éléments	nombre inconnues	η	μ_h
49	128	34.991228	47.940496	49	128	34.986807	47.940487
71	174	21.908672	47.174134	123	284	13.941710	43.036317
189	418	21.194727	44.782769	258	575	9.329434	42.342831
517	1102	14.456221	42.631534	522	1129	6.596768	42.147602
1341	2772	8.903879	42.335228	1161	2456	2.671001	42.101837
3595	7348	4.157598	42.163657	2617	5420	0.916694	42.089301
9563	19404	1.560718	42.101186	6049	12372	0.310959	42.085453
				12903	26200	0.125129	42.083751

TAB. 13.7 – Caractéristiques des raffinements uniformes et adaptés, $B = 100$ Teslas.

En augmentant le champ magnétique, l'avantage de la méthode avec raffinement adapté est encore plus marquant.

Remarquons qu'il semble que la précision sur la valeur propre soit plus importante que celle

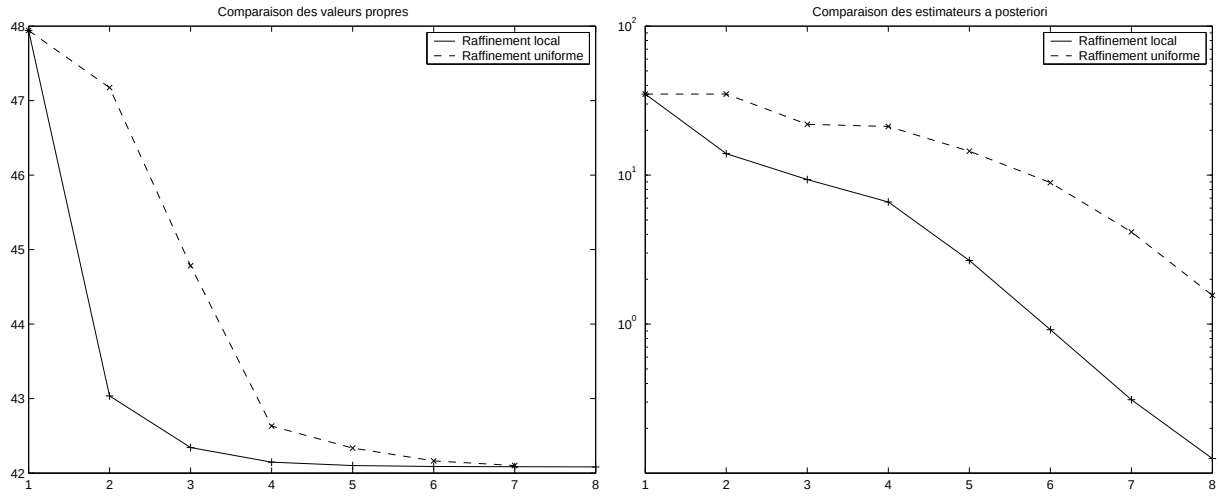


FIG. 13.25 – Comparaison de convergence des valeurs propres et des estimateurs d'erreurs entre raffinement local et raffinement uniforme, $B = 100$ Teslas.

donnée par l'estimateur : il semble que l'écart entre la valeur propre réelle et la valeur propre numérique soir de l'ordre de η^2 et non de η.

La méthode de raffinement de maillage adapté est donc particulièrement pertinente et performante car elle permet de localiser les zones où l'information du problème est contenue et donc d'économiser un temps de calcul important.

13.4 Estimation numérique de $\mu(\alpha)$

L'objectif de la méthode numérique est d'étudier le comportement du bas du spectre $\mu(\alpha)$ de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant d'intensité 1 sur un secteur angulaire d'angle α. Nous avons des informations par les estimations théoriques et la localisation est synthétisée à la Section 11.3 et aux Figures 11.1 et 11.2. Afin de préciser cette localisation, nous utilisons les outils numériques que nous venons de développer.
Comme nous l'avons mentionné en introduction du Chapitre 12 à la Section 12.1, nous devons travailler avec un domaine borné pour appliquer la méthode numérique. Utilisant le Théoème 9.1, nous savons que l'état fondamental est exponentiellement décroissant avec l'éloignement du coin du secteur. La Figure 12.1 montre la façon d'approcher un secteur par troncature.

Regardons l'influence de la longueur L sur le bas du spectre, noté $\mu(1, 10, \Omega_\alpha^L)$, de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant $B = 10$ Teslas sur le domaine Ω_α^L. D'après le Théorème 9.1, ces valeurs $\mu(1, B, \Omega_\alpha^L)$ doivent être presque égales à $B\mu(\alpha)$ pour L assez grand. Appliquons l'Algorithme 13.2 sur le domaine Ω_α^L avec $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et en variant la longueur L de 3 à 12. Le Tableau 13.8 donne les estimations numériques obtenues sur chaque domaine. À un facteur 10^{-2} près, nous obtenons les mêmes valeurs propres, ce qui justifie la troncature à la longueur $L = 3$.

Nous déduisons de la Remarque 3.3 que sur un domaine invariant par dilatation, le bas du spectre de l'opérateur $-\nabla^2_{B\mathcal{A}_0}$ est linéaire selon l'intensité du champ B. Or le secteur angulaire Ω_α est invariant par dilatation, donc, avec les notations précédentes :

$$\mu(1, B, \Omega_\alpha) = B\mu(\alpha). \tag{13.5}$$

L	$\mu\left(1,B,\Omega_\alpha^L\right)$	η
3	4.210210	8.692934e-02
4	4.209743	6.859190e-02
5	4.210368	5.960120e-02
6	4.212980	8.724359e-02
7	4.211606	5.510494e-02

L	$\mu\left(1,B,\Omega_\alpha^L\right)$	η
8	4.210667	7.760738e-02
9	4.211533	7.891650e-02
10	4.209843	5.263493e-02
11	4.212832	7.823086e-02
12	4.214231	7.113600e-02

TAB. 13.8 – Effet de la longueur de troncature, $B = 10$ Teslas, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Numériquement, nous ne calculons pas $\mu(\alpha)$ mais $\mu\left(1,B,\Omega_\alpha^L\right)$. Regardons si la relation (13.5) reste valable en remplaçant le domaine Ω_α par Ω_α^L. Appliquons l'Algorithme 13.2 au domaine Ω_α^L avec un angle $\alpha = \frac{\pi}{3}$, une longueur $L = 3$ et un champ B qui varie de 10 à 100 Teslas. Les résultats numériques sont donnés au Tableau 13.9 et la Figure 13.26 montrent que la valeur propre reste linéaire par rapport au champ magnétique sur un secteur tronqué.

B	$\mu\left(1,B,\Omega_\alpha^L\right)$	η
10	4.210321	1.028763e-01
20	8.420078	1.592870e-01
30	12.629303	1.147825e-01
40	16.837936	1.362848e-01
50	21.048137	1.698584e-01

B	$\mu\left(1,B,\Omega_\alpha^L\right)$	η
60	25.257497	1.992841e-01
70	29.466119	1.155900e-01
80	33.673688	1.301665e-01
90	37.884002	1.463756e-01
100	42.093906	1.454220e-01

TAB. 13.9 – Linéarité par rapport au champ B, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $L = 3$.

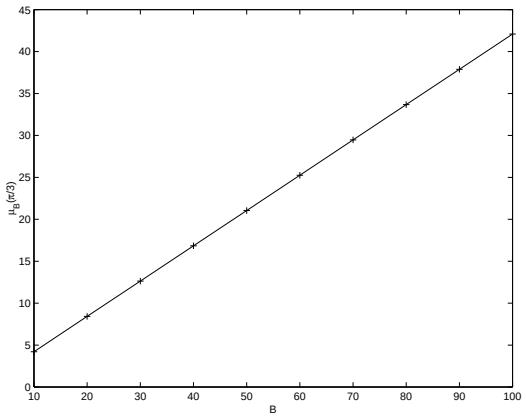


FIG. 13.26 – Linéarité selon le champ magnétique.

Nous utilisons ces deux résultats pour donner une estimation de $\mu(\alpha)$. Nous ferons les calculs avec un champ $B = 10$ Teslas pour lequel nous avons vu que le bas du spectre restait presque constant selon l'endroit de la troncature.

Nous allons ainsi estimer $\mu(\alpha)$ en évaluant numériquement $\mu(1,B,\Omega_\alpha^L)$ avec $B = 10$ Teslas et $L = 3$ à l'aide de l'Algorithme 13.2. Le Tableau 13.10 regroupe les valeurs calculées. La Figure 13.27 complète la Figure 11.1 en y ajoutant les estimations numériques.

angle	valeur propre
0.216770	1.163281
0.276460	1.516657
0.336150	1.819787
0.395841	2.099811
0.455531	2.365336
0.515221	2.614952
0.574911	2.849356
0.634602	3.069188
0.694292	3.272993
0.753982	3.465656
0.813672	3.644322
0.873363	3.810177
0.933053	3.965025
0.992743	4.110520
1.052434	4.245068
1.112124	4.370848
1.171814	4.487640

angle	valeur propre
1.231504	4.598354
1.291195	4.699306
1.350885	4.794468
1.410575	4.884436
1.470265	4.965702
1.529956	5.041289
1.570796	5.090822
1.589646	5.115938
1.623156	5.150248
1.649336	5.178721
1.675516	5.204923
1.709026	5.239050
1.780236	5.321830
1.832596	5.346868
1.888097	5.390835
2.067168	5.500348
2.094395	5.507900

TAB. 13.10 – Estimations du bas du spectre selon l'angle.

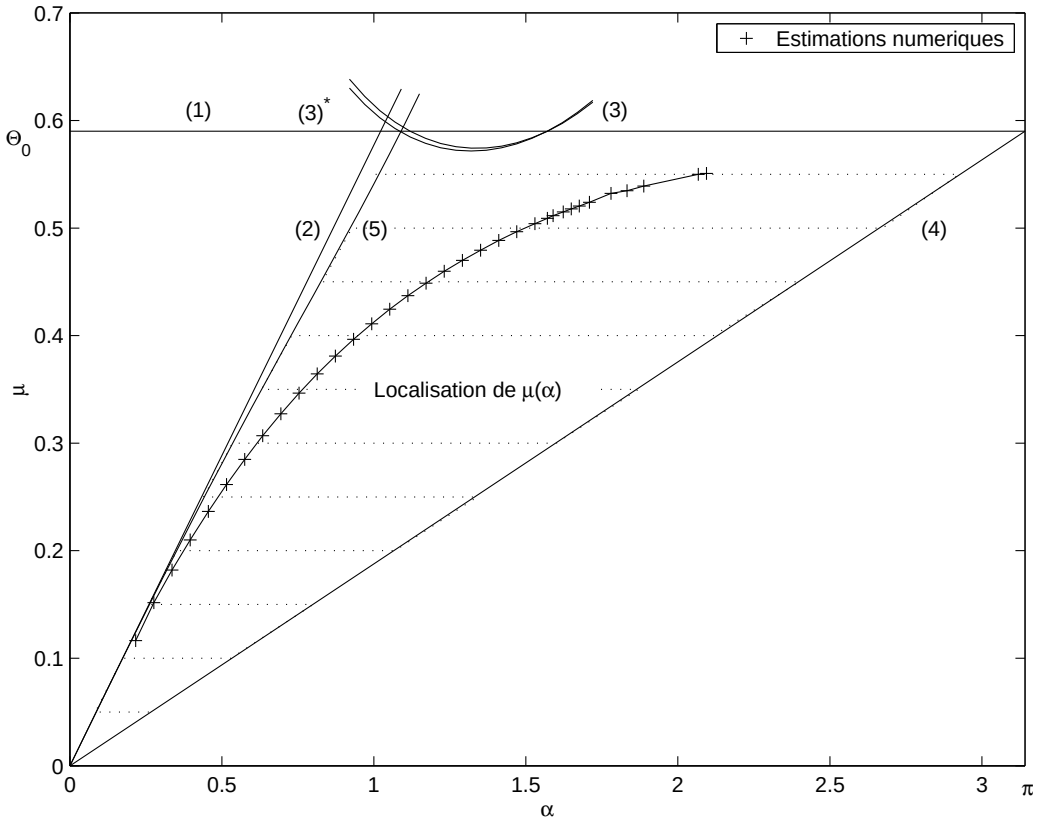


FIG. 13.27 – Localisation et estimations numériques de $\mu(\alpha)$.

Les estimations numériques concordent très bien avec les résultats théoriques. Pour les petits angles, l'asymptote $\mu = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ est respectée. De plus, ceci conforte la conjecture de la croissance de $\mu(\alpha)$ pour $\alpha \in]0, \pi]$. Cette conjecture est présente dans la littérature physique [47, 94] mais ne semble pas démontrée jusqu'à présent.

Notons une limite des estimations numériques pour des angles proches de π. Dans ce cas, la convergence de la méthode est beaucoup plus lente et difficile.

13.5 Localisation de l'état propre dans un domaine quelconque

Nous utilisons l'Algorithme 13.2 sur divers domaines avec un seul coin d'angle minimal et nous appliquons un champ $B = 10$ Teslas. Pour les calculs numériques sur ces différents domaines, nous prenons une approximation $\mathbb{P}^2$, une formule d'intégration d'ordre 5.

Pour évaluer la robustesse de la méthode proposée, nous appliquons l'Algorithme 13.2 aux maillages courants de la Figure 13.28.

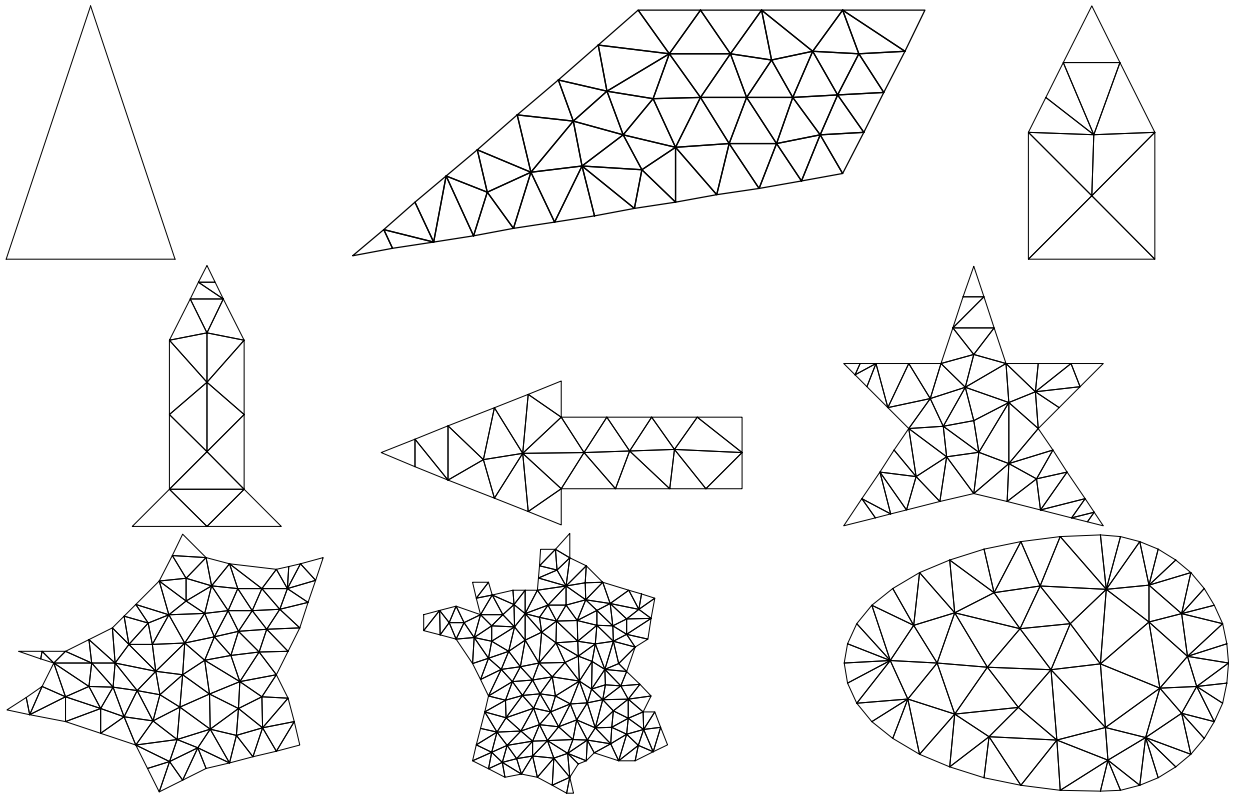


FIG. 13.28 – Maillages initiaux.

Chacune des pages suivantes présente les résultats numériques pour les maillages courants de la Figure 13.28. Les tableaux résument les données numériques associées à la solution calculée à chaque raffinement. Les figures présentent les convergences de la valeur propre numérique et des estimateurs a posteriori ainsi que le module de l'état fondamental .

Commençons par un triangle isocèle.

raffinement	nombre d'éléments	nombre d'inconnues	η	μ_h
1	1	6	308.875800	2.732378
2	7	24	59.346408	3.270049
3	21	60	35.294362	3.147853
4	68	167	16.370363	3.106369
5	201	456	5.455219	3.102015
6	580	1249	1.812983	3.101103
7	1553	3252	0.611276	3.101415
8	3983	8180	0.214650	3.101855

TAB. 13.11 – Données numériques pour le triangle isocèle.

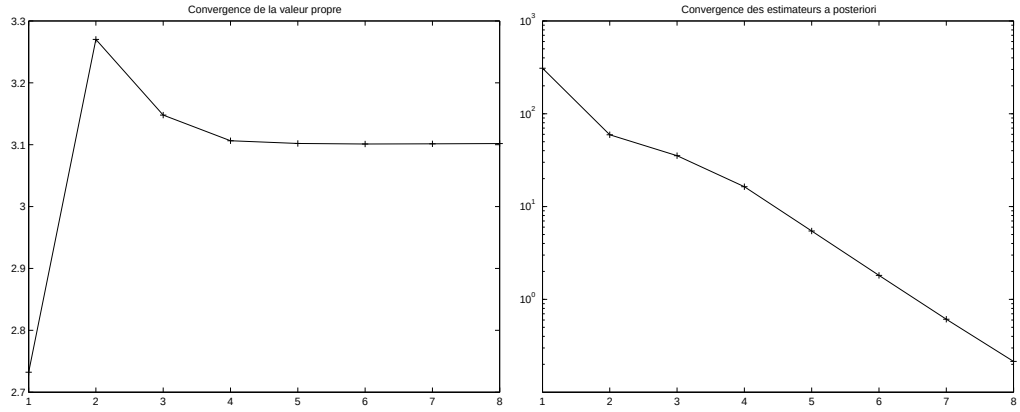


FIG. 13.29 – Convergence de la valeur propre et des estimateurs d'erreurs.

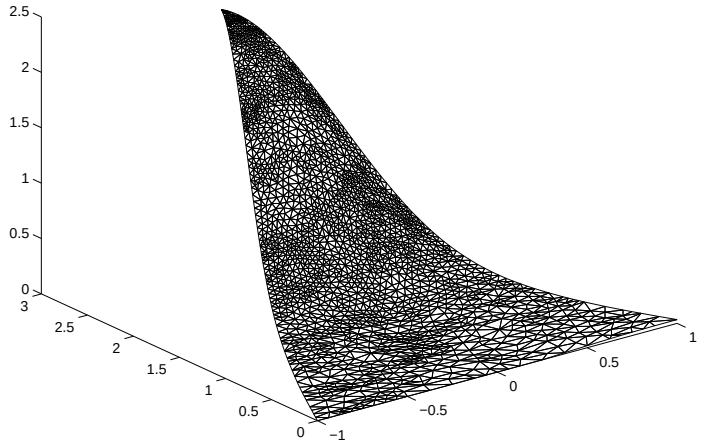


FIG. 13.30 – Module de l'état fondamental.

Prenons maintenant l'exemple d'un quadrilatère.

raffinement	nombre d'éléments	nombre d'inconnues	η	μ_h
1	68	165	19.152135	2.835027
2	129	304	11.394829	2.793167
3	243	550	3.762476	2.736650
4	510	1115	1.356777	2.731465
5	1061	2246	0.434595	2.730693
6	2317	4824	0.148194	2.730754
7	4863	9996	0.058738	2.730782

TAB. 13.12 – Résultats numériques pour le quadrilatère.

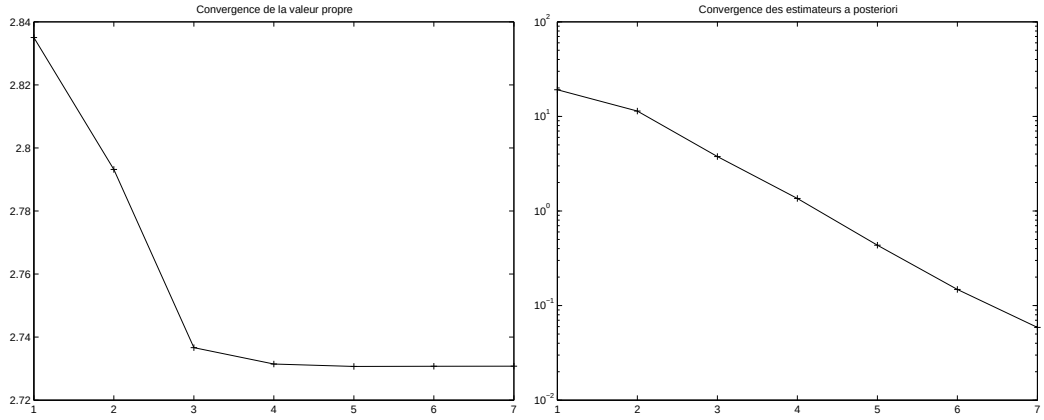


FIG. 13.31 – Convergence de la valeur propre et des estimateurs d'erreurs.

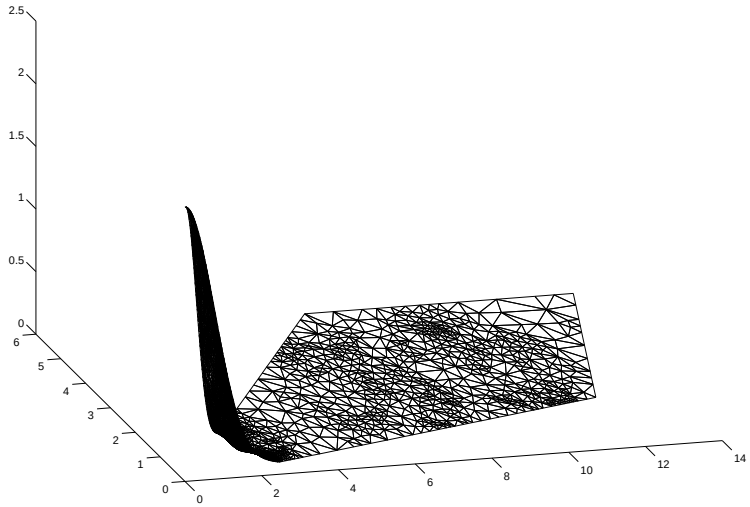


FIG. 13.32 – Module de l'état fondamental sur un quadrilatère.

Considérons un domaine à 5 côtés.

raffinement	nombre d'éléments	nombre d'inconnues	η	μ_h
1	10	29	7.351830	4.276573
2	29	74	3.174105	3.997307
3	83	194	1.248583	3.961637
4	237	518	0.505628	3.952690
5	679	1434	0.187081	3.950364
6	1604	3323	0.080873	3.949768

TAB. 13.13 – Résultats numériques sur un pentagone.

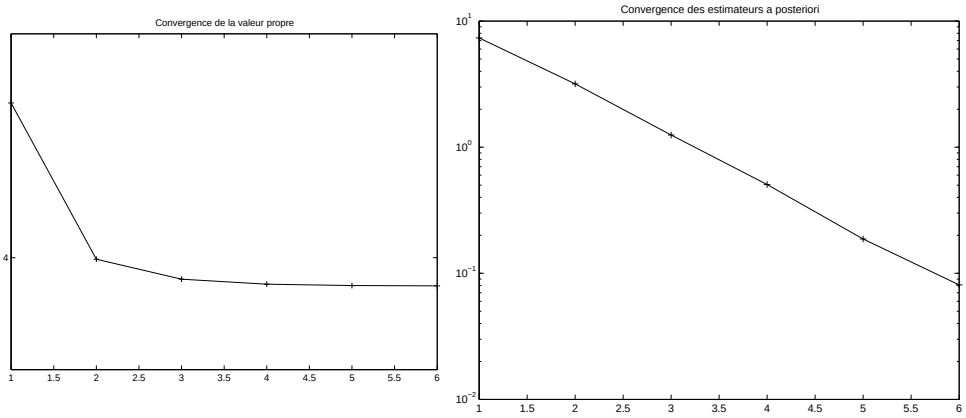


FIG. 13.33 – Convergence de la valeur propre et des estimateurs d'erreurs.

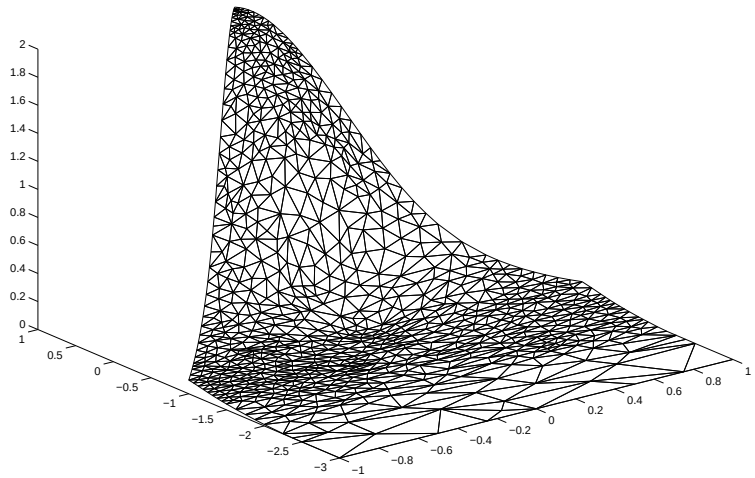


FIG. 13.34 – Module de l'état propre pour un pentagone.

raffinement	nombre d'éléments	nombre d'inconnues	η	μ_h
1	18	51	1158.880844	4.182646
2	33	88	16.149858	4.146704
3	76	183	6.843731	3.975409
4	184	415	2.626246	3.959261
5	502	1077	0.981198	3.950636
6	1332	2781	0.349618	3.950036
7	3261	6698	0.121670	3.949378
8	6429	13088	0.063152	3.948942

TAB. 13.14 – Résultats numériques à chaque raffinement.

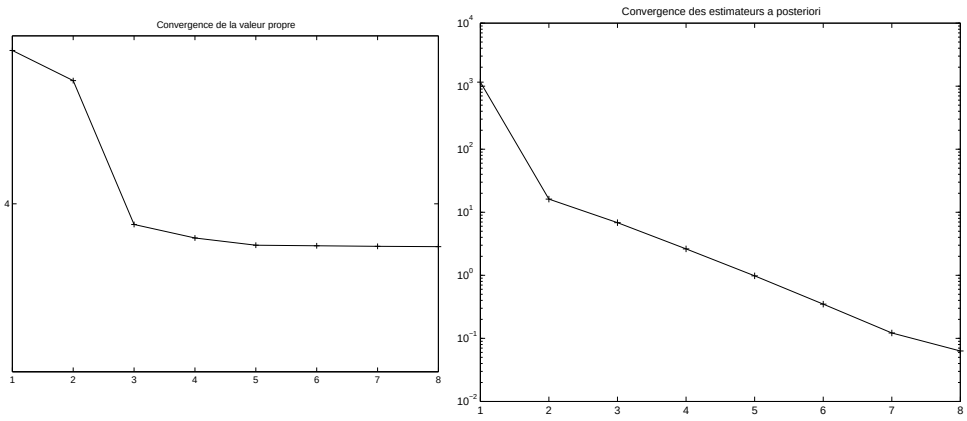


FIG. 13.35 – Convergence de la valeur propre et des estimateurs d'erreurs.

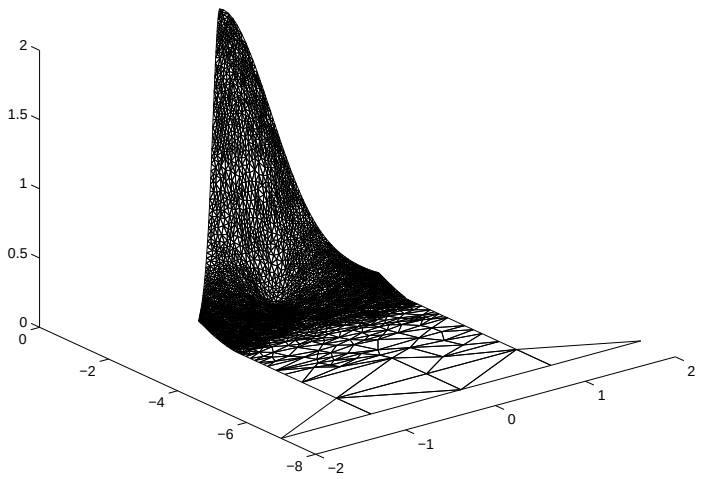


FIG. 13.36 – Localisation de l'état fondamental.

raffinement	nombre d'éléments	nombre d'inconnues	η	μ_h
1	30	83	18.999110	3.767658
2	58	151	12.903821	3.572054
3	126	301	4.879399	3.505253
4	270	605	1.889506	3.493238
5	621	1336	0.656407	3.489856
6	1483	3094	0.232998	3.489374
7	3259	6702	0.089702	3.489386

TAB. 13.15 – Résultats numériques selon le raffinement.

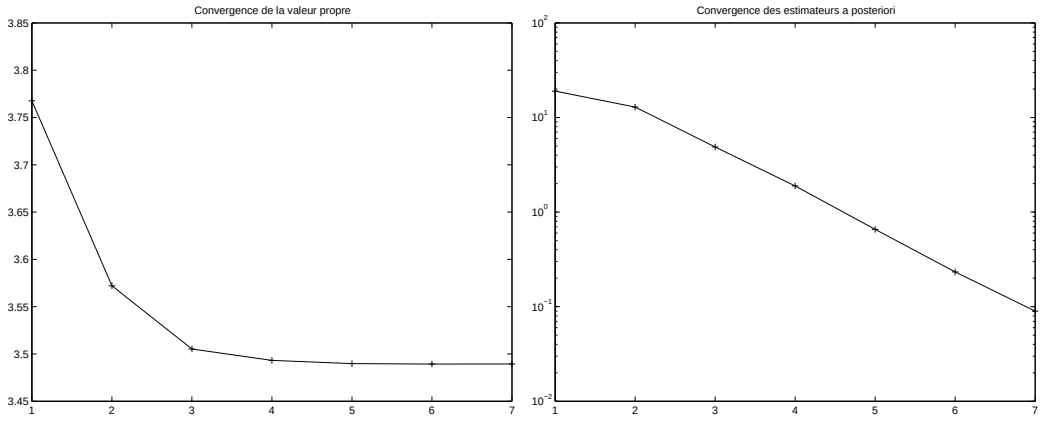


FIG. 13.37 – Convergence de la valeur propre et des estimateurs d'erreurs.

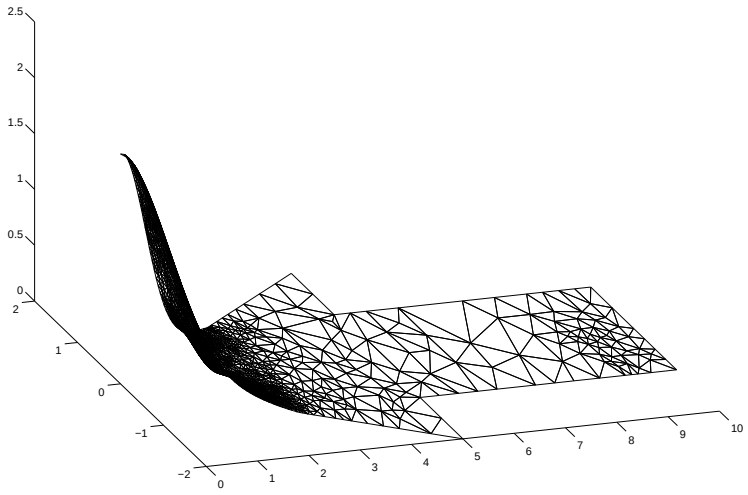


FIG. 13.38 – Localisation de l'état fondamental.

raffinement	nombre d'éléments	nombre d'inconnues	η	μ_h
1	61	162	18.613669	3.272972
2	134	333	9.898006	3.204738
3	271	646	4.250593	3.109048
4	547	1244	1.332782	3.103143
5	1158	2511	0.480967	3.103391
6	2472	5213	0.168166	3.103409
7	4901	10152	0.067385	3.103463

TAB. 13.16 – Données numériques associées au domaine en forme d'étoile.

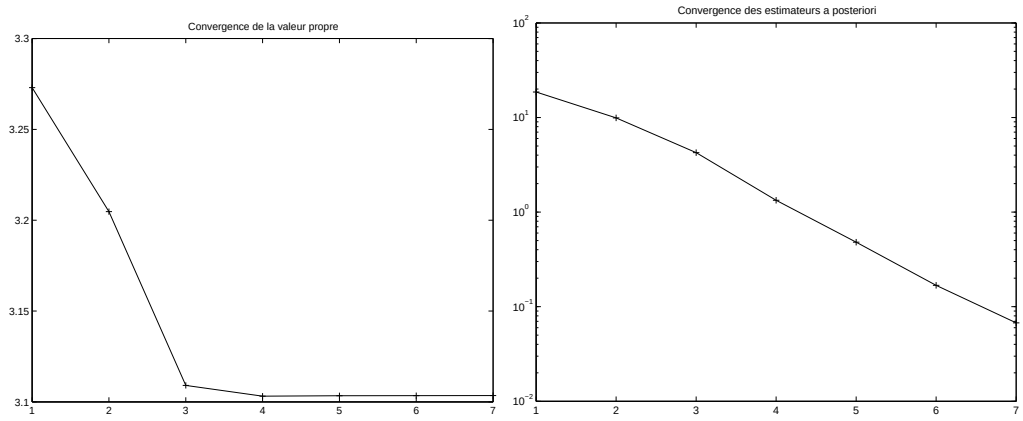


FIG. 13.39 – Convergence de la valeur propre et des estimateurs d'erreurs.

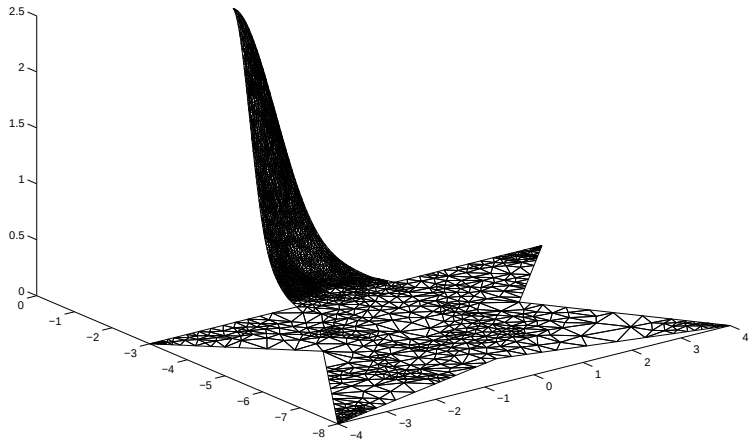


FIG. 13.40 – Localisation de l'état propre.

raffinement	nombre d'éléments	nombre d'inconnues	η	μ_h
1	126	293	24.244864	2.103733
2	259	584	10.091428	2.065490
3	491	1090	3.723521	2.032816
4	939	2022	1.289144	2.023636
5	1813	3834	0.486839	2.022026
6	3576	7439	0.207868	2.024557
7	6436	13235	0.121855	2.023883

TAB. 13.17 – Données numériques pour un domaine quelconque.

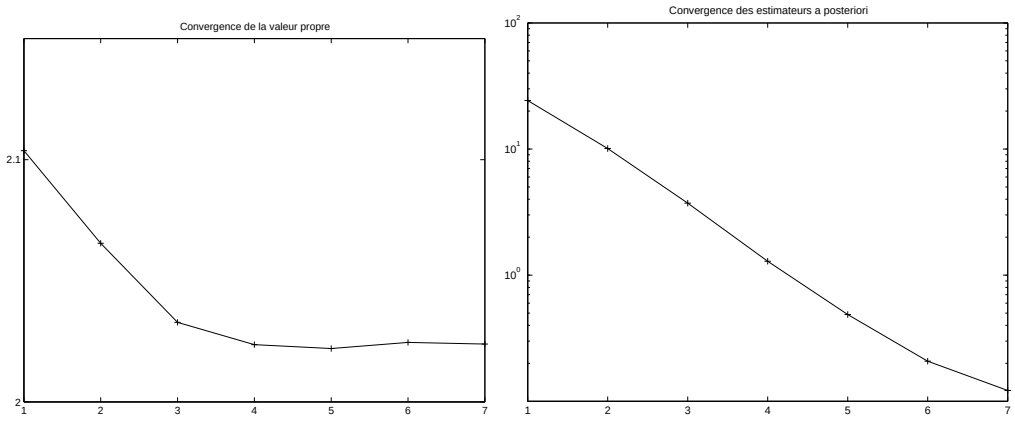


FIG. 13.41 – Convergence de la valeur propre et des estimateurs d'erreurs.

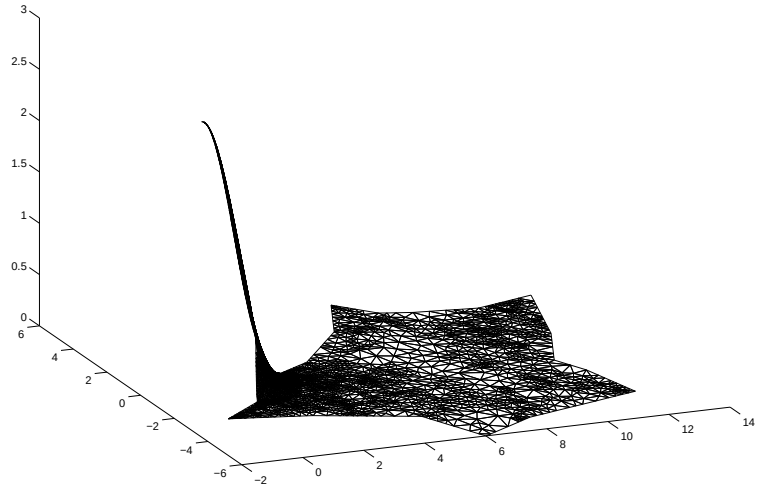


FIG. 13.42 – Localisation de l'état fondamental.

raffinement	nombre d'éléments	nombre d'inconnues	η	μ_h
1	220	497	1503.590682	5.601086
2	386	847	13.156766	3.672363
3	672	1441	6.679298	3.504339
4	1135	2404	2.629922	3.482447
5	2001	4182	1.029691	3.479574
6	3626	7501	0.341722	3.479124
7	6905	14140	0.131965	3.479168

TAB. 13.18 – Données numériques à chaque raffinement.

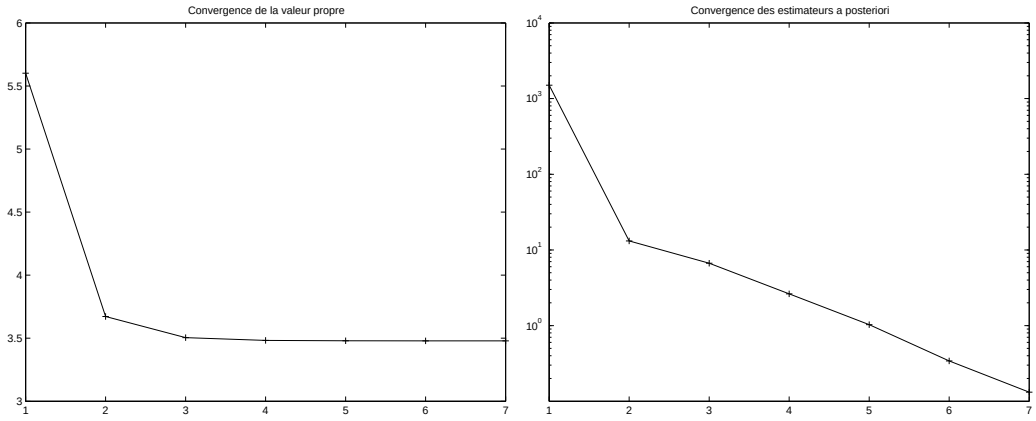


FIG. 13.43 – Convergence de la valeur propre et des estimateurs d'erreurs.

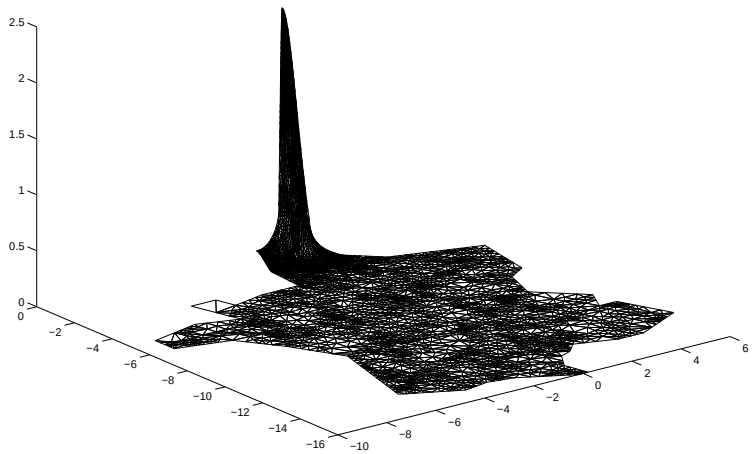


FIG. 13.44 – Localisation de l'état fondamental.

raffinement	nombre d'éléments	nombre d'inconnues	η	μ_h
1	76	195	112.528040	5.658344
2	157	358	76.093477	5.521041
3	368	795	45.994217	5.492665
4	909	1908	15.710266	5.484079
5	2222	4583	4.878483	5.482254
6	5675	11566	1.545591	5.480994
7	13849	28024	0.516508	5.529037
8	27234	54919	0.287226	5.573177

TAB. 13.19 – Données numériques à chaque raffinement.

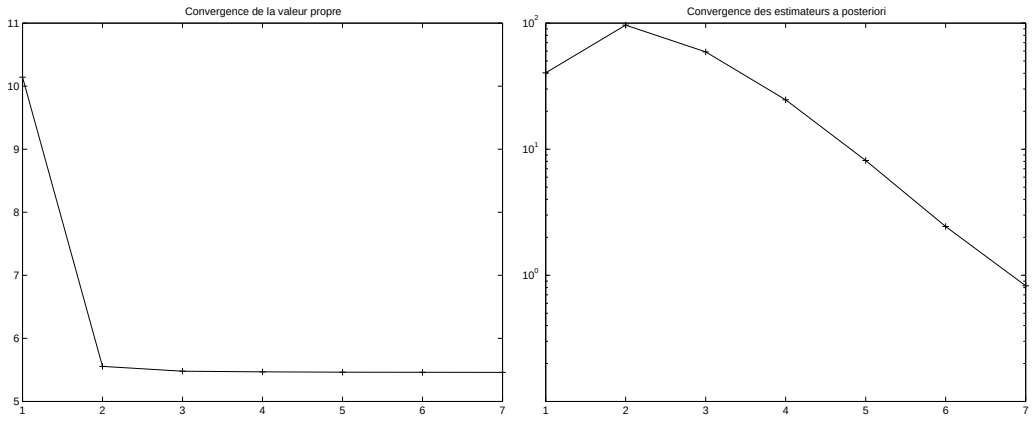


FIG. 13.45 – Convergence de la valeur propre et des estimateurs d'erreurs.

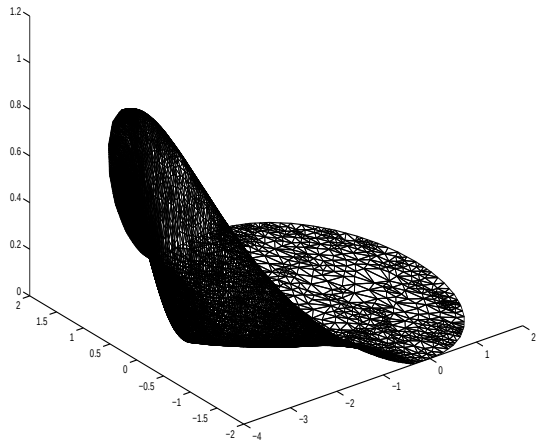


FIG. 13.46 – Localisation de l'état fondamental pour un domaine régulier dont le bord présente un seul point de courbure maximale.

Dans ce dernier exemple, la convergence des estimateurs d'erreurs est difficile à améliorer mais l'algorithme a déjà convergé pour la valeur propre. Ce domaine, raccordement d'une demi-ellipse et d'un demi-cercle, permet d'illustrer le résultat de Helffer-Morame [60] qui montre la localisation de l'état fondamental aux points de courbure maximale pour les domaines réguliers. De plus, la décroissance est plus rapide vers l'intérieur du domaine que sur le bord du domaine.

Nous avons ainsi trouvé une méthode robuste, performante qui tient compte de la géométrie du domaine et raffine les endroits pertinents du domaine. Comme nous l'avons souligné au début de la Section 12.4, nous n'avons pas justifié l'équivalence des deux problèmes de minimisation (12.23) et (12.24) ; toutefois les résultats numériques et les mesures d'erreurs laissent penser que $\mu(B,\Omega) = \tilde{\mu}(B,\Omega)$ et justifient pleinement l'intérêt porté à la formulation (12.26).

Notons toutefois qu'il semble que la convergence de la valeur propre soit de l'ordre de η^2 et non η. Ceci concorderait avec les estimations de Heuveline-Rannacher [64] qui proposent une autre forme d'estimateurs basés sur la méthode de Galerkin.

Quatrième partie

Asymptotique à grand champ magnétique pour les domaines à coins

---

Cette partie est consacrée à la généralisation des résultats de Helffer-Morame [60] sur les estimations d'énergie et la localisation de l'état fondamental pour l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique variable sur un domaine régulier. Nous avons rappelé une partie de ces résultats au Théorème 1.3. En introduction, nous avons expliqué brièvement la démarche de Helffer-Morame pour obtenir les estimations pour un domaine régulier et vu la nécessité d'étudier l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant sur un secteur angulaire pour généraliser les résultats à un domaine à coins. Les Figures 1.3 et 1.4 schématisent les domaines modèles à étudier.

Nous utilisons l'étude précédente sur l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant sur un secteur angulaire pour analyser le bas du spectre de $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ sous les hypothèses :

- $(\mathcal{H}_1)$ Le domaine Ω est un polygone curviligne borné de $\mathbb{R}^2$ (cf Définition 1.4.5.1, p. 34 [52]). Le bord Γ de Ω est de classe C^∞ sauf aux sommets $S_1, \ldots, S_N$. Nous notons α_j l'angle en S_j.
- $(\mathcal{H}_2)$ Le potentiel magnétique $\mathcal{A}$ est à rotationnel B strictement positif.

Nous définissons :

- $(\mathcal{H}_3)$ $b = \inf_{x\in\overline{\Omega}} B(x)$ et $b' = \inf_{x\in\partial\Omega} B(x)$.

Le Chapitre 14 étend l'estimation d'énergie (1.14) à des domaines à coins et met en évidence l'influence d'un coin sur le niveau d'énergie. Le Chapitre 15 est consacré à la localisation de l'état fondamental et montre notamment la concentration exponentielle de premier vecteur propre dans les coins de plus petit angle pour un champ magnétique constant. Une démarche heuristique est également présentée pour préciser la localisation dans un polygone régulier. Le Chapitre 16 propose un résultat de simplicité de $\mu(h, B, \Omega)$ en supposant le minimum $\min(\mu(\alpha_j), j = 1, \ldots, N)$ atteint en un unique sommet et le champ magnétique constant. Nous présentons un calcul formel suggérant l'existence d'un développement en puissance de $h^{\frac{1}{2}}$ de $\mu(h, B, \Omega)$.

Chapitre 14

Estimations d'énergie

14.1 Localisation par partition de l'unité et changements de variables et de jauge

Pour justifier les estimations d'énergies que nous allons proposer, nous utilisons différentes techniques présentées ci-après.

14.1.1 Localisation grâce aux partitions de l'unité

Soit (χ_j) une partition réelle localement finie de l'unité de $\mathbb{R}^2$ dont les supports sont inclus dans les boules $\mathcal{B}(z_j, 1)$ et telle que :

$$\sum_j \chi_j^2 = 1, \qquad \sum_j |\nabla \chi_j|^2 \leq C. \tag{14.1}$$

Soit ρ un paramètre tel que $0 \leq \rho \leq 1$. Un changement d'échelle et une restriction de la partition de $\mathbb{R}^2$ à Ω, polygone curviligne borné de $\mathbb{R}^2$ de sommets $S_1, \ldots, S_N$, donnent une partition de l'unité sur Ω vérifiant les conditions de la proposition suivante :

Proposition 14.1. *Soit $0 \leq \rho \leq 1$. Il existe une constante C telle que pour tout ε_0, il existe une partition χ_j^h réelle de Ω satisfaisant :*

$$\sum_j |\chi_j^h|^2 = 1, \tag{14.2}$$

$$\sum_j |\nabla \chi_j^h|^2 \leq C\varepsilon_0^{-2} h^{-2\rho}, \tag{14.3}$$

$$\mathrm{supp}(\chi_j^h) \subset \mathcal{B}(z_j, \varepsilon_0 h^\rho) \text{ avec } \begin{cases} \text{soit } \mathrm{supp}(\chi_j^h) \cap \partial\Omega = \emptyset, \\ \text{soit } \mathrm{supp}(\chi_j^h) \cap \{S_k, k = 1, \ldots, N\} = \emptyset \text{ et } z_j \in \partial\Omega, \\ \text{soit } z_j = S_j. \end{cases} \tag{14.4}$$

(en changeant les indices j de la partition, nous supposons que $z_j = S_j$ pour $j = 1, \ldots, N$).

Notons une propriété qui découle immédiatement de la dérivée de l'équation (14.2) :

$$\sum_j \chi_j^h (\nabla \chi_j^h) = 0. \tag{14.5}$$

Grâce à la propriété (14.4), nous découpons les fonctions en une partie faisant intervenir le bord, l'autre l'intérieur du domaine. Nous séparons les indices en trois parties :

$$smt := \{j |\ z_j = S_j\}, \quad bd := \{j |\ z_j \in \partial\Omega \setminus \{S_k, k = 1, \ldots, N\}\}, \quad int := \{j |\ z_j \in \Omega\}. \tag{14.6}$$

Nous avons ainsi :

$$\sum_j = \sum_{int} + \sum_{bd} + \sum_{smt}.$$

Cette séparation des indices et le Lemme 3.10 conduisent à la relation suivante valable pour tout $u \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega)$:

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) = \sum_{smt} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) + \sum_{int} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) + \sum_{bd} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) - h^2 \sum_j || \, |\nabla \chi_j^h| u||^2_{L^2(\Omega)}. \quad (14.7)$$

14.1.2 Changement de variables

Lemme 14.2. *Soit ε assez petit pour que $\Omega \cap \mathcal{B}(z,\varepsilon)$ ne rencontre aucun sommet, alors il existe des constantes C, C_1 et h_0 telles que pour tout point régulier $z \in \partial\Omega \setminus \{S_1,\dots,S_N\}$ et tout $h \in]0,h_0]$, la forme $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)$ peut se récrire pour une fonction $u \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega)$ à support dans un voisinage $\Omega \cap \mathcal{B}(z,\varepsilon)$ du point z :*

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \sum_{1\le k,l\le 2} g_{k,l}(\tilde{x}) \left(h\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_k} - i\tilde{A}_k\tilde{u}\right) \overline{\left(h\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_l} - i\tilde{A}_l\tilde{u}\right)} \sqrt{\det\, g(\tilde{x})}\, d\tilde{x}, \quad (14.8)$$

où $\tilde{u}$ et $\tilde{\mathcal{A}}$ se déduisent de u et $\mathcal{A}$ par changement de variables, $g(\tilde{x}) = d\psi d\psi^t(\tilde{x})$ en désignant par ψ le changement de variables envoyant un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ sur un voisinage de z dans Ω et $g_{k,l}$ les coefficients de la matrice g.
De plus, si u est une fonction à support dans $\mathcal{B}(z,\varepsilon_0 h^\rho)$, alors :

$$(1 - C_1\varepsilon_0 h^\rho) q_{h,\tilde{\mathcal{A}},\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}(u) \le q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) \le (1 + C_1\varepsilon_0 h^\rho) q_{h,\tilde{\mathcal{A}},\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}(u). \quad (14.9)$$

Démonstration : Soit z un point de $\overline{\Omega} \setminus \{S_1,\dots,S_N\}$ et ψ un C^∞ difféomorphisme d'un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ dans un voisinage de z dans Ω tel que :

$$\psi(0,0) = z, \quad (14.10)$$

$$d\psi_{(0,0)} = id. \quad (14.11)$$

Notons (x_1,x_2) les coordonnées dans Ω et $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$ les coordonnées dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, alors $(x_1,x_2) = \psi(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$. Le changement de variables donne un nouveau potentiel magnétique $\tilde{\mathcal{A}}$ vérifiant :

$$A_1 dx_1 + A_2 dx_2 = \tilde{A}_1 d\tilde{x}_1 + \tilde{A}_2 d\tilde{x}_2. \quad (14.12)$$

Récrivons maintenant la forme quadratique $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)$ dans le nouveau repère.

$$\begin{aligned} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) &= \int_\Omega \left|h\frac{\partial u}{\partial x_1} - iA_1 u\right|^2 (x)\, dx + \int_\Omega \left|h\frac{\partial u}{\partial x_2} - iA_2 u\right|^2 (x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \left\{ \left|h\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1}\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_1} + h\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_2}\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_1} - i\tilde{A}_1\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_1}\tilde{u} - i\tilde{A}_2\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_1}\tilde{u}\right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left|h\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1}\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_2} + h\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_2}\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_2} - i\tilde{A}_1\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_2}\tilde{u} - i\tilde{A}_2\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_2}\tilde{u}\right|^2 \right\} |J_\psi(\tilde{x})|\, d\tilde{x}, \end{aligned} \quad (14.13)$$

en effectuant un changement de variables et en utilisant (14.12). Notons $g(\tilde{x})$ la matrice :

$$g(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_2}\right)^2 & \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_1}\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_2}\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_1}\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_2}\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_2} & \left(\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_2}\right)^2 \end{pmatrix}. \quad (14.14)$$

Reprenons le calcul de $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)$ en développant le carré du module puis en regroupant les termes, alors, pour toute fonction $v \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega)$, la forme $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(v)$ se récrit :

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(v) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \sum_{1\leq k,l\leq 2} g_{k,l}(\tilde{x}) \left(h\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_k} - i\tilde{A}_k\tilde{v}\right) \overline{\left(h\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_l} - i\tilde{A}_l\tilde{v}\right)} \sqrt{\det\, g(\tilde{x})}\, d\tilde{x}. \quad (14.15)$$

Supposons maintenant que u est à support dans une boule $\mathcal{B}(z, \varepsilon_0 h^\rho)$. Grâce aux relations (14.10) et (14.11), nous effectuons un développement limité de $g_{k,l}$ et $\sqrt{\det\, g(\tilde{x})}$ quand h tend vers 0 afin d'approcher $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)$ par $q_{h,\tilde{\mathcal{A}},\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}(\tilde{u})$. Les hypothèses (14.10) et (14.11) montre que $g(0,0) = 1$ et $\det\, g(0,0) = 1$. Appliquons la formule de Taylor à l'ordre 1. Les dérivées de g et de $\det\, g$ ne font apparaître que des dérivées d'ordre 2 de ψ. Il existe alors une constante C_1 qui ne dépend que des normes infinies de ψ, de ses dérivées premières et secondes telles que :

$$|g_{k,l}(\tilde{x}) - \delta_{k,l}| \leq C_1\varepsilon_0 h^\rho \quad (14.16)$$

$$|\sqrt{\det\, g(\tilde{x})} - 1| \leq C_1\varepsilon_0 h^\rho. \quad (14.17)$$

Cette constante C_1 dépend a priori du point z mais le bord du domaine est compact et nous avons supposé qu'en chaque sommet S_j, le bord du domaine est l'intersection de deux courbes C^∞ prolongeables de manière C^∞ au-delà du sommet S_j. Donc nous pouvons choisir la constante C_1 indépendamment du point z. Il suffit de reporter ces développements limités dans (14.15) pour aboutir à (14.9). □

Lemme 14.3. *Il existe des constantes C, C_1 et h_0 telles que pour un sommet S_j de Ω, nous récrivons la forme $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)$ pour une fonction $u \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega)$ à support dans $\overline{\Omega} \cap \mathcal{B}(S_j, \varepsilon)$ avec $\varepsilon < d(S_j, S_k)$ pour tout sommet $S_k \neq S_j$:*

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) = \int_{\Omega_{\alpha_j}} \sum_{1\leq k,l\leq 2} g_{k,l}(\tilde{x}) \left(h\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_k} - i\tilde{A}_k\tilde{u}\right) \overline{\left(h\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_l} - i\tilde{A}_l\tilde{u}\right)} \sqrt{\det\, g(\tilde{x})}\, d\tilde{x}, \quad (14.18)$$

où $\tilde{u}$, $\tilde{\mathcal{A}}$ se déduisent de u, $\mathcal{A}$ par changement de variables et la matrice g de coefficients $g_{k,l}$ vient du changement de variables envoyant un voisinage de 0 dans Ω_{α_j} sur un voisinage de S_j dans Ω. De plus, si u est une fonction à support dans $\mathcal{B}(S_j, \varepsilon_0 h^\rho)$, alors :

$$(1 - C_1\varepsilon_0 h^\rho) q_{h,\tilde{\mathcal{A}},\Omega_{\alpha_j}}(u) \leq q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) \leq (1 + C_1\varepsilon_0 h^\rho) q_{h,\tilde{\mathcal{A}},\Omega_{\alpha_j}}(u). \quad (14.19)$$

Démonstration : Soit S_j un sommet de Ω. Choisissons un repère tel qu'au voisinage de S_j, origine du nouveau repère, il existe deux fonctions C^∞, ψ_1, ψ_2, définies sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ (ε assez petit pour que $\Omega \cap \mathcal{B}(S_j, \varepsilon)$ ne rencontre aucun sommet) vérifiant :

$$\psi_1(0) = 0, \psi_2(0) = 0, \quad (14.20)$$

$$\psi_1'(0) = -\tan\frac{\alpha_j}{2}\, x_1, \psi_2'(0) = \tan\frac{\alpha_j}{2}\, x_1, \quad (14.21)$$

$$\Omega \cap \mathcal{B}(0,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geq 0, \psi_1(x_1) < x_2 < \psi_2(x_1). \quad (14.22)$$

Définissons l'application Ψ au voisinage de $(0,0)$ dans Ω_{α_j} par :

$$\Psi(x_1, x_2) = \left(\frac{\psi_2(x_1) - \psi_1(x_1)}{2\tan\frac{\alpha_j}{2}}, x_2 - \frac{\psi_2(x_1) + \psi_1(x_1)}{2}\right) =: (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2). \quad (14.23)$$

Remarquons que ce C^∞-difféomorphisme envoie un voisinage du point $(0,0)$ de Ω sur un voisinage du point $(0,0)$ dans Ω_{α_j}. En calculant la différentielle $d\Psi_x$, nous déduisons :

$$g(x) := d\Psi_x \, d\Psi_x^t = \begin{pmatrix} \left|\frac{\psi_2'(x_1)-\psi_1'(x_1)}{2\tan\frac{\alpha_j}{2}}\right|^2 & \frac{|\psi_1'(x_1)|^2-|\psi_2'(x_1)|^2}{4\tan\frac{\alpha_j}{2}} \\ \frac{|\psi_1'(x_1)|^2-|\psi_2'(x_1)|^2}{4\tan\frac{\alpha_j}{2}} & 1 \end{pmatrix}. \tag{14.24}$$

Notons G l'inverse de g, alors, le changement de variables Ψ^{-1} permet d'exprimer la forme $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)$:

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(v) = \int_{\Omega_{\alpha_j}} \sum_{1\le k,l\le 2} G_{k,l}(\tilde{x}) \left(h\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_k} - i\tilde{A}_k\tilde{v}\right) \overline{\left(h\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}_l} - i\tilde{A}_l\tilde{v}\right)} \sqrt{\det G(\tilde{x})}\, d\tilde{x}. \tag{14.25}$$

Supposons maintenant que u est à support dans une boule $\mathcal{B}(z,\varepsilon_0 h^\rho)$. Les relations (14.20) et (14.21) permettent d'effectuer un développement limité de $G_{k,l}$ et $\sqrt{\det G(\tilde{x})}$ quand h tend vers 0 afin d'approcher $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)$ par $q_{h,\tilde{\mathcal{A}},\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}(\tilde{u})$. Pour cela, nous calculons le déterminant de g :

$$\det g(x) = \left|\frac{\psi_2'(x_1)-\psi_1'(x_1)}{2\tan\frac{\alpha_j}{2}}\right|^2 - \left(\frac{|\psi_1'(x_1)|^2-|\psi_2'(x_1)|^2}{4\tan\frac{\alpha_j}{2}}\right)^2. \tag{14.26}$$

Remarquons que $g(0,0)=1$ et $\det g(0,0)=1$. Appliquons la formule de Taylor à l'ordre 1. Soit $x_1 \in]0,\varepsilon[$, il existe deux points $y_1, \tilde{y}_1 \in]0,\varepsilon[$ tels que :

$$\psi_1'(x_1) = -\tan\frac{\alpha_j}{2} + x_1\psi_1''(y_1) \text{ et } \psi_2'(x_1) = \tan\frac{\alpha_j}{2} + x_1\psi_2''(\tilde{y}_1). \tag{14.27}$$

Du calcul de $\psi_2'(x_1)-\psi_1'(x_1)$ et $|\psi_1'(x_1)|^2-|\psi_2'(x_1)|^2$, nous déduisons qu'il existe une constante C_1 ne dépendant que de ψ_1 et ψ_2 telle que :

$$|G_{k,l}(x)-\delta_{k,l}| \le C_1\varepsilon_0 h^\rho \tag{14.28}$$

$$|\sqrt{\det G(x)}-1| \le C_1\varepsilon_0 h^\rho. \tag{14.29}$$

Cette constante C_1 dépend a priori du sommet S_j mais comme le nombre de sommets est fini, nous pouvons choisir la constante C_1 indépendamment du sommet S_j. Le report de ces développements limités dans (14.25) conduit à (14.19). □

14.1.3 Changement de jauge

Donnons-nous un point $z \in \overline{\Omega}$. Pour alléger les notations, nous définissons :

$$\forall x \in \Omega,\ \delta x_k := x_k - z_k,\ k=1,2, \tag{14.30}$$

ainsi que le potentiel linéaire associé à ce point :

$$\forall x \in \Omega, \mathcal{A}^{lin}(x) := \frac{1}{2}B(z)\begin{pmatrix} \delta x_2 \\ -\delta x_1 \end{pmatrix}. \tag{14.31}$$

Nous effectuons un changement de jauge de manière à ce que la partie linéaire du nouveau potentiel permette de retrouver le potentiel $\mathcal{A}_0$ étudié dans la partie précédente.
Le potentiel $\mathcal{A}^{lin}$ défini en (14.31) a donc même champ magnétique que la partie linéaire, notée $\mathcal{A}^{(1)}$,

du développement de Taylor de $\mathcal{A}$. En se référant au développement limité de $\mathcal{A}$, nous déterminons l'expression de $\mathcal{A}^{(1)}$ par ses composantes $A_1^{(1)}$ et $A_2^{(1)}$:

$$A_1^{(1)} = A_1(z) + \frac{\partial A_1}{\partial x_1}(z)\ \delta x_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_2}(z)\ \delta x_2, \tag{14.32}$$

$$A_2^{(1)} = A_2(z) + \frac{\partial A_2}{\partial x_1}(z)\ \delta x_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}(z)\ \delta x_2. \tag{14.33}$$

Nous définissons également la différence $\mathcal{A}' := \mathcal{A} - \mathcal{A}^{(1)}$. D'après l'estimation du reste d'un développement de Taylor de degré 1 et les définitions des potentiels $\mathcal{A}^{(1)}$ et $\mathcal{A}'$:

$$|\mathcal{A} - \mathcal{A}^{(1)}| = |\mathcal{A}'| \leq \tilde{C}|x - z|^2, \tag{14.34}$$

en prenant comme constante $\tilde{C} := \sup_{x\in\overline{\Omega}} \sup_{j,k} \left(\left| \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_j \partial x_k}(x) \right|, \left| \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_j \partial x_k}(x) \right| \right)$. Soit ϕ un polynôme de degré au plus 2 tel que :

$$\mathcal{A}^{(1)}(x) - d\phi(x) = \mathcal{A}^{lin}(x) = \frac{1}{2} B(z) \begin{pmatrix} \delta x_2 \\ -\delta x_1 \end{pmatrix}. \tag{14.35}$$

Nous pouvons choisir pour le polynôme ϕ :

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2) &= A_1(z)\delta x_1 + A_2(z)\delta x_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\partial_{x_1} A_1(z)(\delta x_1)^2 + \partial_{x_2} A_2(z)(\delta x_2)^2 + (\partial_{x_2} A_1(z) + \partial_{x_1} A_2(z))\, \delta x_1 \delta x_2 \right). \end{aligned}$$

Définissons désormais $\mathcal{A}_{new} := \mathcal{A} - d\phi$. Par construction des potentiels $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{lin}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}_{new}$ et du polynôme ϕ :

$$\mathcal{A}_{new} = \mathcal{A} - d\phi = (\mathcal{A}^{(1)} - d\phi) + (\mathcal{A} - \mathcal{A}^{(1)}) = \mathcal{A}^{lin} + \mathcal{A}'. \tag{14.36}$$

Ainsi, selon (14.34) :

$$\mathcal{A}_{new}(z) = 0, \tag{14.37}$$

$$|\mathcal{A}'| = |\mathcal{A}_{new} - \mathcal{A}^{lin}| \leq \tilde{C}|x - z|^2. \tag{14.38}$$

Pour toute fonction $v \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega)$, nous définissons la fonction $v_{\phi,h} \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega)$:

$$v_{\phi,h} = e^{-i\frac{\phi}{h}} v \quad \text{alors} \quad q_{h,\mathcal{A},\Omega}(v) = q_{h,\mathcal{A}_{new},\Omega}(v_{\phi,h}). \tag{14.39}$$

Décomposons $\mathcal{A}_{new}$ sous la forme $\mathcal{A}^{lin} + \mathcal{A}'$ et tenons compte du changement de jauge :

$$\begin{aligned} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(v) &= \int_\Omega \left(\left| (h\partial_{x_1} - iA_1^{lin}) v_\phi \right|^2 + \left| (h\partial_{x_2} - iA_2^{lin}) v_\phi \right|^2 \right) dx \\ &\quad + 2\ \mathrm{Re}\, i \int_\Omega \left((h\partial_{x_1} - iA_1^{lin}) v_\phi \overline{A_1' v_\phi} + (h\partial_{x_2} - iA_2^{lin}) v_\phi \overline{A_2' v_\phi} \right) dx \\ &\quad + \int_\Omega \left(|A_1' v_\phi|^2 + |A_2' v_\phi|^2 \right) dx. \end{aligned} \tag{14.40}$$

14.2 Minoration du bas du spectre

Proposition 14.4. *Considérons un domaine Ω et un potentiel $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$. Alors, avec les notations $(\mathcal{H}_3)$, il existe $h_0 > 0$ et $C_0 > 0$ tels que pour $h \leq h_0$:*

$$\mu(h, B, \Omega) \geq h \ \inf\left(b, \Theta_0 b', \inf_{j=1,\ldots,N} \mu(\alpha_j) B(S_j)\right) - C_0 h^{5/4}. \tag{14.41}$$

Démonstration : Le principe du min-max 2.2 exprime $\mu(h, B, \Omega)$ à l'aide du quotient de Rayleigh $R_{h,\mathcal{A},\Omega}$:

$$\mu(h, \mathcal{A}, \Omega) = \inf_{u \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega), u \neq 0} R_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) \quad \text{avec} \quad R_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) = \frac{q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)}{||u||^2_{L^2(\Omega)}}. \tag{14.42}$$

Nous allons donc minorer $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)$ pour toute fonction u de $H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega)$. Pour cela, nous utilisons une partition de l'unité qui permet de localiser les estimations à effectuer et distingue la contribution de l'intérieur du domaine et du voisinage du bord.
Rappelons la relation (14.7) valable pour tout $u \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega)$:

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) = \sum_{smt} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) + \sum_{int} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) + \sum_{bd} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) - h^2 \sum_j || \ |\nabla \chi_j^h| u||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{14.43}$$

Grâce à cette écriture (14.43), deux types d'erreurs apparaissent : les erreurs d'approximation qui sont d'autant meilleures que la localisation est importante (ce qui suggère une partition très fine), et les erreurs de localisation dues au dernier terme de (14.43) (qui sont à l'opposé des précédentes). Pour minorer $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)$ où $u \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega)$, nous étudions chacun des termes de (14.43).

• **Étude du terme $h^2 \sum_j || \ |\nabla \chi_j^h| \ u||^2_{L^2(\Omega)}$:**

Par hypothèse sur la partition de l'unité (et notamment la relation (14.3)), il vient :

$$h^2 \sum_j || \ |\nabla \chi_j^h| \ u||^2_{L^2(\Omega)} \ \leq \ h^2 ||u||^2_{L^2(\Omega)} \left|\left| \sum_j |\nabla \chi_j^h|^2 \right|\right|_{\infty,\Omega} \leq C \varepsilon_0^{-2} h^{2-2\rho} ||u||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{14.44}$$

L'erreur est donc d'autant plus faible que le support des fonctions de la partition est dans des boules de rayons pas trop petits. Pour que l'erreur soit acceptable, il faut que $2 - 2\rho > 1$, soit $\rho < 1/2$.

• **Étude du terme $\sum_{int} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u)$:**

Soit $v \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, alors par définition des commutateurs et du rotationnel de $\mathcal{A}$, nous avons :

$$[hD_{x_1} - A_1, hD_{x_2} - A_2]v = i \ h \ B \ v. \tag{14.45}$$

Cette relation sur les commutateurs, la densité de $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ (restriction à Ω des fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$) dans $H^1(\Omega)$ (cf [52]), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la majoration $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$ conduisent à une minoration de la forme $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u)$, pour tout $u \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega) = H^1(\Omega)$:

$$h \int_\Omega B(x) \ |\chi_j^h(x)|^2 |u(x)|^2 \ dx \leq q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u). \tag{14.46}$$

Par sommation sur les termes intérieurs,

$$\sum_{int} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) \geq h \sum_{int} \int_\Omega B(x) |\chi_j^h u(x)|^2 dx. \tag{14.47}$$

• **Étude des termes $\sum_{bd} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u)$ et $\sum_{smt} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u)$:**

Pour estimer $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u)$, avec $j \in smt \cup bd$, nous nous ramenons localement à l'étude du demi-plan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ ou des secteurs angulaires selon que $j \in bd$ ou $j \in smt$. Soit z un point du bord $\partial\Omega$ de coordonnées (z_1, z_2). Reprenons les changements de variables de la Section 14.1.2 et les changements de jauge de la Section 14.1.3 afin d'étudier $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(v)$ avec v à support dans $\mathcal{B}(z, \varepsilon_0 h^\rho)$. Alors nous pourrons minorer le terme $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u)$ où $u_j := \chi_j^h u$ est à support dans $\mathcal{B}(z_j, \varepsilon_0 h^\rho)$. Selon la définition 14.39 de $v_{\phi,h}$, nous obtenons la relation (14.40) mais le terme $\int_\Omega \left(|A_1' v_\phi|^2 + |A_2' v_\phi|^2\right)\, dx$ dans (14.40) est positif. Cette positivité permet de minorer $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(v)$:

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(v) \geq q_{h,\mathcal{A}^{lin},\Omega}(v_\phi) - 2\ \mathrm{Im} \int_\Omega \left((h\partial_{x_1} - iA_1^{lin})v_\phi \overline{A_1' v_\phi} + (h\partial_{x_2} - iA_2^{lin})v_\phi \overline{A_2' v_\phi}\right)\, dx. \quad (14.48)$$

Majorons maintenant le terme $\left|\int_\Omega (h\partial_{x_k} - iA_k^{lin})v_\phi \overline{A_k' v_\phi}\, dx\right|$ en utilisant une inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité $2|ab| \leq \eta|a|^2 + \frac{1}{\eta}|b|^2$ avec $\eta = h^{2\theta}$, il vient :

$$\left|\int_\Omega (h\partial_{x_k} - iA_k^{lin})v_\phi\ \overline{A_k' v_\phi}\, dx\right| \leq \frac{h^{2\theta}}{2}\int_\Omega \left|(h\partial_{x_k} - iA_k^{lin})v_\phi\right|^2 dx + \frac{h^{-2\theta}}{2}\int_\Omega \left|A_k' v_\phi\right|^2 dx. \quad (14.49)$$

En outre, la relation (14.38) et la taille du support de v conduisent à la majoration :

$$\int_\Omega \left(|A_1' v_\phi|^2 + |A_2' v_\phi|^2\right)\, dx \leq \tilde{C}^2 \int_\Omega |x-z|^4 |v(x)|^2\, dx \leq \tilde{C}^2 \varepsilon_0^4 h^{4\rho} ||v||^2_{L^2(\Omega)}. \quad (14.50)$$

Regroupons ces différentes inégalités (14.49), (14.50) dans (14.48) pour obtenir :

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(v) \geq (1 - h^{2\theta}) q_{h,\mathcal{A}^{lin},\Omega}(v_\phi) - \tilde{C}^2 \varepsilon_0^4 h^{4\rho-2\theta} ||v||^2_{L^2(\Omega)}. \quad (14.51)$$

Les changements de variable de la Section 14.1.2 dont les effets sont mentionnés aux Lemmes 14.2 et 14.3 avec en particulier les relations (14.9) et (14.19), permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} q_{h,\mathcal{A}^{lin},\Omega}(v_\phi) &\geq (1 - C_1\varepsilon_0 h^\rho) q_{h,\mathcal{A}^{lin},\Omega_\alpha}(v_\phi) \\ &\geq (1 - C_1\varepsilon_0 h^\rho)\ h\ \mu(\alpha)\ B(z) \int_\Omega |v(x)|^2\, dx. \end{aligned} \quad (14.52)$$

Reprenons maintenant les relations (14.51) et (14.52) en remplaçant v par la fonction $\chi_j^h u$ qui est à support dans la boule $\mathcal{B}(z_j, \varepsilon_0 h^\rho)$, il existe alors une constante $C > 0$ telle que :

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) \geq (1 - Ch^{2\theta} - C\varepsilon_0 h^\rho) h\mu(\alpha_j) B(z_j) \int_\Omega |\chi_j^h u|^2\, dx - C\varepsilon_0^4 h^{4\rho-2\theta} ||\chi_j^h u||^2. \quad (14.53)$$

• **Minoration de $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)$:**

À l'aide des minorations (14.44), (14.47) et (14.53), cherchons une minoration de $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)$ pour $u \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega)$. Notons que $\mu(\pi) = \Theta_0$ afin d'évaluer (14.53) pour les éléments du bord qui ne sont pas des sommets. Il existe une constante C positive telle que pour tout $u \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega)$, nous avons :

$$\begin{aligned} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) &= \sum_{int} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) + \sum_{bd} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) + \sum_{smt} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) - h^2 \sum_j ||\ |\nabla \chi_j^h| u||^2 \\ &\geq h \sum_{int} \int B(x) |\chi_j^h u|^2\, dx - C\varepsilon_0^{-2} h^{2-2\rho} ||u||^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(1-Ch^{2\theta}-C\varepsilon_0 h^{\rho})h\Theta_0\sum_{bd}B(z_j)\int_{\Omega}|\chi_j^h u|^2\,dx\\
&-C\varepsilon_0^4 h^{4\rho-2\theta}\sum_{bd}||\chi_j^h u||^2\\
&+(1-Ch^{2\theta}-C\varepsilon_0 h^{\rho})h\sum_{smt}\mu(\alpha_j)B(S_j)\int_{\Omega}|\chi_j^h u|^2\,dx\\
&-C\varepsilon_0^4 h^{4\rho-2\theta}\sum_{smt}||\chi_j^h u||^2. \qquad (14.54)
\end{aligned}
$$

Appliquons cette relation (14.54) avec $\rho=\frac{3}{8}$, $\theta=\frac{1}{8}$ et $\varepsilon_0=1$, alors il existe alors $C_0>0$ et h_0 telles que, pour tout $h\in]0,h_0]$:

$$
\forall u\in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega),\ q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)\geq\left(h\min\left(b,\Theta_0 b',\inf_{j=1,\dots,N}\mu(\alpha_j)B(S_j)\right)-C_0h^{5/4}\right)\ ||u||^2. \qquad (14.55)
$$

Il reste à appliquer le principe du min-max pour obtenir (14.41). □

14.3 Majoration du bas du spectre

Nous proposons maintenant une majoration de l'état fondamental du bas du spectre et nous obtenons ainsi un développement limité au premier ordre en h pour l'état fondamental de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique et dans un domaine à bord lipschitzien.

Proposition 14.5. *Considérons un domaine Ω et un potentiel $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$. Supposons que pour tout $k=1,\dots,N$, $\mu(\alpha_k)<\Theta_0$. Alors, avec les notations $(\mathcal{H}_3)$, il existe $h_1>0$ et $C_0>0$ tels que pour tout $h\in]0,h_0]$:*

$$
\mu(h,B,\Omega)\leq h\ \inf\left(b,\Theta_0 b',\inf_{j=1,\dots,N}\mu(\alpha_j)B(S_j)\right)+C_0h^{\frac{4}{3}}. \qquad (14.56)
$$

Démonstration : Nous démontrons la Proposition 14.5 en montrant successivement les contributions des sommets, du bord régulier du domaine et de l'intérieur :

1. Contribution d'un sommet S_j d'angle α_j : $\mu(h,B,\Omega)\leq h\mu(\alpha_j)B(S_j)+C_0h^{4/3}$,
2. Contribution du bord régulier : $\mu(h,B,\Omega)\leq h\Theta_0 b'+C_0h^{4/3}$,
3. Contribution de l'intérieur : $\mu(h,B,\Omega)\leq hb+C_0h^{4/3}$.

Considérons χ une fonction de localisation à support dans $\mathcal{B}(0,1)$ telle que :

$$
\chi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2,[0,1])\text{ et }\chi=1\text{ dans }\mathcal{B}\left(0,\frac{1}{2}\right). \qquad (14.57)
$$

Considérons un point particulier $x_0\in\overline{\Omega}$ et définissons pour $x\in\Omega$,

$$
\chi_t(x):=\chi\left(\frac{x-x_0}{t}\right). \qquad (14.58)
$$

La fonction χ_t avec $t=h^{\gamma}$ va permettre de localiser au voisinage du point x_0.

□

14.3.1 Contribution des sommets

Soit $x_0 = S_j$ un sommet de Ω d'angle α_j tel que $\mu(\alpha_j) < \Theta_0$, montrons la majoration :

$$\mu(h, B, \Omega) \leq hB(S_j)\mu(\alpha_j) + Ch^{4/3}. \tag{14.59}$$

Nous redressons le bord du domaine au voisinage de ce point x_0 afin de nous ramener au modèle du secteur angulaire d'angle α_j comme lors de la minoration. Le Lemme 14.3 et en particulier la relation (14.19) permettent de majorer $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(v)$ pour toute fonction $v \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega)$ comme suit :

$$q_{h,\tilde{\mathcal{A}},\Omega}(\chi_{h^\gamma} v) \leq (1 + C_1 h^\gamma) q_{h,\mathcal{A},\Omega_{\alpha_j}}(\chi_{h^\gamma} v). \tag{14.60}$$

Rappelons l'abus de notation dans cette expression où nous notons de la même façon les fonctions avant et après le changement de variables. Il suffit donc d'estimer $q_{h,\mathcal{A},\Omega_{\alpha_j}}(\chi_{h^\gamma} v)$.
Notons v_0 un vecteur propre normalisé associé à la valeur propre $\mu(\alpha_j)$. En utilisant la Remarque 3.3, nous définissons la fonction v_h normalisée, associée à la valeur propre $hB(S_j)\mu(\alpha_j)$ pour l'opérateur $P_{h,B(S_j)\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_j}}$ par :

$$\forall x \in \Omega_{\alpha_j},\ v_h(x) = \sqrt{\frac{B(S_j)}{h}} v_0\left(\sqrt{\frac{B(S_j)}{h}} x\right).$$

Le changement de jauge conduit à définir la fonction normalisée $v_{\phi,h}$ par :

$$v_{\phi,h} = e^{i\frac{\phi}{h}} v_h. \tag{14.61}$$

Ainsi :

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega_{\alpha_j}}(\chi_{h^\gamma} v_{\phi,h}) = q_{h,\mathcal{A}_{new},\Omega_{\alpha_j}}(\chi_{h^\gamma} v_h). \tag{14.62}$$

Utilisons la décomposition $\mathcal{A}_{new} = \mathcal{A}' + \mathcal{A}^{lin}$, alors, en reprenant la relation (14.40), il vient :

$$\begin{aligned} q_{h,\mathcal{A},\Omega_{\alpha_j}}(\chi_{h^\gamma} v_{\phi,h}) &= q_{h,\mathcal{A}^{lin},\Omega_{\alpha_j}}(\chi_{h^\gamma} v_h) + \int_{\Omega_{\alpha_j}} \left(|A'_1 \chi_{h^\gamma} v_h|^2 + |A'_2 \chi_{h^\gamma} v_h|^2\right) dx \\ &\quad + 2 \text{ Re } i \int_{\Omega_{\alpha_j}} \sum_{j=1}^{2} (h\partial_{x_j} - iA^{lin}_j)(\chi_{h^\gamma} v_h)\overline{A'_j \chi_{h^\gamma} v_h}\, dx. \end{aligned}$$

Par construction de la fonction χ_{h^γ} et des potentiels $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}^{lin}$, rappelée en (14.35) et (14.38), il existe une constante uniforme C telle que :

$$\begin{aligned} q_{h,\mathcal{A},\Omega_{\alpha_j}}(\chi_{h^\gamma} v_{\phi,h}) &\leq q_{h,\mathcal{A}^{lin},\Omega_{\alpha_j}}(\chi_{h^\gamma} v_h) + C \int_{\Omega_{\alpha_j}} |x|^4 |\chi_{h^\gamma} v_h(x)|^2\, dx \\ &\quad + C \sqrt{\int_{\Omega_{\alpha_j}} |x|^4 |\chi_{h^\gamma} v_h(x)|^2\, dx} \sqrt{q_{h,\mathcal{A}^{lin},\Omega_{\alpha_j}}(\chi_{h^\gamma} v_h)}. \end{aligned} \tag{14.63}$$

Nous estimons $q_{h,\mathcal{A}^{lin},\Omega_{\alpha_j}}(\chi_{h^\gamma} v_h)$ en utilisant la relation (3.19) du Lemme 3.10, ainsi :

$$q_{h,\mathcal{A}^{lin},\Omega_{\alpha_j}}(\chi_{h^\gamma} v_h) = \text{ Re } \left\langle \chi^2_{h^\gamma} P_{h,\mathcal{A}^{lin},\Omega_{\alpha_j}} v_h, v_h \right\rangle_{L^2(\Omega_{\alpha_j})} + h^{2-2\gamma} \int_{\Omega_{\alpha_j}} \left|\nabla \chi\left(\frac{x}{h^\gamma}\right)\right|^2 |v_h(x)|^2\, dx. \tag{14.64}$$

Rappelons que $P_{h,\mathcal{A}^{lin},\Omega_{\alpha_j}} v_h = hB(S_j)\mu(\alpha_j) v_h$, il existe donc une constante uniforme C telle que :

$$q_{h,\mathcal{A}^{lin},\Omega_{\alpha_j}}(\chi_{h^\gamma} v_h) \leq hB(S_j)\mu(\alpha_j) ||\chi_{h^\gamma} v_h||^2_{L^2(\Omega_{\alpha_j})} + Ch^{2-2\gamma}. \tag{14.65}$$

Reportons (14.65) dans (14.63) en supposant $\gamma < \frac{1}{2}$, il vient :

$$\begin{aligned} q_{h,\mathcal{A},\Omega_{\alpha_j}}(\chi_{h^\gamma} v_{\phi,h}) &\leq hB(S_j)\mu(\alpha_j)||\chi_{h^\gamma} v_h||^2_{L^2(\Omega_{\alpha_j})} + Ch^{2-2\gamma} \\ &\quad +C\int_{\Omega_{\alpha_j}} |x|^4 |\chi_{h^\gamma}(x) v_h(x)|^2 \, dx \\ &\quad +C_1\sqrt{h}\sqrt{\int_{\Omega_{\alpha_j}} |x|^4 |\chi_{h^\gamma}(x) v_h(x)|^2 \, dx}. \end{aligned} \tag{14.66}$$

Estimons $\int_{\Omega_{\alpha_j}} |x|^4 |\chi_{h^\gamma}(x) v_h(x)|^2 \, dx$ en utilisant le changement de variable $y = \sqrt{\frac{B(S_j)}{h}} x$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\alpha_j}} |x|^4 |\chi_{h^\gamma}(x) v_h(x)|^2 \, dx &= \int_{\Omega_{\alpha_j}} |x|^4 |\chi_{h^\gamma}(x)|^2 \left| v_0\left(\sqrt{\frac{B(S_j)}{h}} x\right)\right|^2 \frac{B(S_j)}{h} \, dx \\ &= \int_{\Omega_{\alpha_j}} \frac{h^2}{B(S_j)^2} |y|^4 \left|\chi\left(\frac{h^{\frac{1}{2}-\gamma}}{\sqrt{B(S_j)}} y\right)\right|^2 |v_0(y)|^2 \, dy \\ &\leq \frac{h^2}{B(S_j)^2} \int_{\Omega_{\alpha_j}} |y|^4 |v_0(y)|^2 \, dy. \end{aligned} \tag{14.67}$$

Or d'après le Théorème 9.1, nous savons que $y \mapsto e^{\sqrt{\Theta_0 - \mu(\alpha_j) - \varepsilon}|y|} v_0(y)$ est de carré intégrable sur Ω_{α_j} pour tout ε tel que $\Theta_0 - \mu(\alpha_j) - \varepsilon > 0$, nous déduisons donc que $|y|^2 v_0(y)$ l'est également. Reprenant (14.66) et (14.67), il existe ainsi une constante uniforme C telle que :

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega_{\alpha_j}}(\chi_{h^\gamma} v_{\phi,h}) \leq hB(S_j)\mu(\alpha_j)||\chi_{h^\gamma} v_h||^2_{L^2(\Omega_{\alpha_j})} + Ch^{2-2\gamma} + Ch^2 + Ch^{\frac{3}{2}}. \tag{14.68}$$

Il reste à minorer la norme de $\chi_{h^\gamma} v_h$ par une constante strictement positive. Remarquons que :

$$||\chi_{h^\gamma} v_h||^2_{L^2(\Omega_{\alpha_j})} \geq ||v_h||^2_{L^2(\mathcal{B}(0,h^\gamma/2)\cap\Omega_{\alpha_j})} = 1 - ||v_h||^2_{L^2(\complement\mathcal{B}(0,h^\gamma/2)\cap\Omega_{\alpha_j})}. \tag{14.69}$$

Le changement de variables $y = \sqrt{\frac{B(S_j)}{h}} x$ et le Théorème 9.1 permettent de minorer (14.69) car :

$$\begin{aligned} ||v_h||^2_{L^2(\complement\mathcal{B}(0,\frac{h^\gamma}{2})\cap\Omega_{\alpha_j})} &= \int_{|y|\geq\frac{\sqrt{B(S_j)}}{2}h^{\gamma-\frac{1}{2}}} |v_0(y)|^2 \, dy. \\ &\leq \int_{|y|\geq\frac{\sqrt{B(S_j)}}{2}h^{\gamma-\frac{1}{2}}} \frac{e^{2\sqrt{\Theta_0-\mu(\alpha_j)-\varepsilon}|y|}}{e^{\sqrt{B(S_j)}\sqrt{\Theta_0-\mu(\alpha_j)-\varepsilon}h^{\gamma-\frac{1}{2}}}} |v_0(y)|^2 \, dy \\ &\leq C_\varepsilon e^{-\sqrt{B(S_j)}\sqrt{\Theta_0-\mu(\alpha_j)-\varepsilon}h^{\gamma-\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \tag{14.70}$$

Choisissons, par exemple, $\varepsilon = \dfrac{\Theta_0 - \mu(\alpha)}{2}$, il existe alors C_1 et C_2 strictement positives telles que :

$$\int_{|y|\geq\frac{\sqrt{B(S_j)}}{2}h^{\gamma-\frac{1}{2}}} |v_0(y)|^2 \, dy \leq C_1 \, e^{-C_2 h^{\gamma-\frac{1}{2}}}. \tag{14.71}$$

Ce terme est exponentiellement petit si $\gamma < \frac{1}{2}$. Il reste à reporter (14.71) dans (14.69) pour obtenir :

$$||\chi_{h^\gamma} v_h||^2_{L^2(\Omega_{\alpha_j})} \geq 1 - C_1 \, e^{-C_2 h^{\gamma-\frac{1}{2}}}. \tag{14.72}$$

Regroupons les relations (14.68) et (14.72) afin d'appliquer le Principe du min-max 2.2, il vient :

$$\frac{q_{h,\mathcal{A},\Omega_{\alpha_j}}(\chi_{h^\gamma} v_{\phi,h})}{||\chi_{h^\gamma} v_h||^2_{L^2(\Omega_{\alpha_j})}} \leq hB(S_j)\mu(\alpha_j) + C\frac{h^{2-2\gamma} + h^2 + h^{\frac{3}{2}}}{1 - C_1\ e^{-C_2 h^{\gamma-\frac{1}{2}}}}. \tag{14.73}$$

Prenons en considération l'erreur commise lors du changement de variables pour se ramener à l'étude du secteur angulaire, rappelée en (14.60), nous déduisons :

$$\begin{aligned}\frac{q_{h,\tilde{\mathcal{A}},\Omega}(\chi_{h^\gamma} v_h)}{||\chi_{h^\gamma} v_h||^2_{L^2(\Omega)}} &\leq (1 + C_1 h^\gamma)\left(hB(S_j)\mu(\alpha_j) + C\frac{h^{2-2\gamma} + h^2 + h^{\frac{3}{2}}}{1 - C_1\ e^{-C_2 h^{\gamma-\frac{1}{2}}}}\right) \\ &\leq hB(S_j)\mu(\alpha_j) + \tilde{C}(h^{\gamma+1} + h^{\frac{3}{2}} + h^{2-2\gamma}). \end{aligned} \tag{14.74}$$

En choisissant $\gamma = \frac{1}{3}$ correspondant à la condition $\gamma + 1 = 2 - 2\gamma$ qui optimise le reste dans l'estimation (14.74), nous obtenons :

$$\mu(h, B, \Omega) \leq hB(S_j)\mu(\alpha_j) + Ch^{\frac{4}{3}}. \tag{14.75}$$

14.3.2 Contribution du bord régulier

Nous allons maintenant établir la contribution du bord régulier du domaine en montrant :

$$\mu(h, B, \Omega) \leq h\Theta_0 b' + Ch^{\frac{4}{3}}. \tag{14.76}$$

Considérons un point $x_0 \in \partial\Omega$ tel que $B(x_0) = b'$. Deux cas sont possibles :

1. Soit x_0 est un sommet S_j d'angle α_j, alors nous avons établi en (14.75) que :

$$\mu(h, B, \Omega) \leq hB(S_j)\mu(\alpha_j) + Ch^{\frac{4}{3}}.$$

   Or, $B(S_j) = b'$ et par hypothèse, $\mu(\alpha_j) < \Theta_0$, donc :

$$\mu(h, B, \Omega) \leq hb'\Theta_0 + Ch^{\frac{4}{3}}.$$

2. Soit x_0 n'est pas un sommet, alors, par un changement de variables, nous nous ramenons à l'étude du demi-plan et obtenons, comme dans [60], la majoration :

$$\mu(h, B, \Omega) \leq hb'\Theta_0 + Ch^{\frac{3}{2}}. \tag{14.77}$$

Nous reprenons la démonstration de (14.77) car nous utiliserons cette preuve pour généraliser la Proposition 14.5 à la Section 14.3.4. Quitte à effectuer une rotation du domaine Ω, nous supposons qu'au voisinage du point x_0, le bord du domaine Ω à pour équation $x_2 = f(x_1)$ avec f régulière telle que $f'(x_1^0) = 0$, en notant (x_1^0, x_2^0) les coordonnées du point x_0. Définissons la fonction ψ au voisinage du point $(0,0)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$:

$$\psi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (\tilde{x}_1 + x_1^0, \tilde{x}_2 + x_2^0 + f(\tilde{x}_1 + x_1^0) - f(x_1^0)). \tag{14.78}$$

Le calcul de la différentielle de ψ conduit à :

$$g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = d\psi^t d\psi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & f'(\tilde{x}_1 + x_1^0) \\ f'(\tilde{x}_1 + x_1^0) & 1 + |f'(\tilde{x}_1 + x_1^0)|^2 \end{pmatrix}. \tag{14.79}$$

La matrice g a pour déterminant 1. Utilisons la formule de changement de variables donnée au Lemme 14.2 pour une fonction v à support dans un voisinage de x_0, alors :

$$\begin{aligned} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(v) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \Big(\Big|(h\partial_{\tilde{x}_1} - i\tilde{A}_1)\tilde{v}(\tilde{x})\Big|^2 + (1+|f'(\tilde{x}_1+x_1^0)|^2)\Big|(h\partial_{\tilde{x}_2} - i\tilde{A}_2)\tilde{v}(\tilde{x})\Big|^2 \\ &\quad +2\,\mathrm{Re}\, f'(\tilde{x}_1+x_1^0)(h\partial_{\tilde{x}_1} - i\tilde{A}_1)\tilde{v}(\tilde{x})\,\overline{(h\partial_{\tilde{x}_2} - i\tilde{A}_2)\tilde{v}(\tilde{x})}\Big)\, d\tilde{x}. \end{aligned} \tag{14.80}$$

Après un éventuel changement de jauge, nous pouvons supposer que $\tilde{\mathcal{A}}$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{\mathcal{A}}(0,0) &=& 0, \\ \tilde{\mathcal{A}} &=& \tilde{\mathcal{A}}^{lin} + \tilde{\mathcal{A}}' \text{ avec } \tilde{\mathcal{A}}^{lin}(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} b'\tilde{x}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{A}_2'(\tilde{x}) = 0. \end{array} \right. \tag{14.81}$$

En effet, par définition du champ magnétique $\tilde{B}$, associé au potentiel $\tilde{\mathcal{A}}$, nous avons :

$$\tilde{B} = \mathrm{rot}\,\tilde{\mathcal{A}} = \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial \tilde{x}_2},$$

donc :

$$b' = \tilde{B}(0,0) = \mathrm{rot}\,\tilde{\mathcal{A}}(0,0) = \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial \tilde{x}_2}(0,0).$$

Donnons quelques précisions supplémentaires sur le comportement du potentiel $\tilde{\mathcal{A}}'$. Comme le champ magnétique $\tilde{B}$ atteint un minimum sur le bord du domaine, alors :

$$\frac{\partial \tilde{B}}{\partial \tilde{x}_1}(0,0) = 0.$$

L'écriture du développement de Taylor à l'ordre 1 de $\tilde{B}$, montre qu'il existe une constante uniforme C telle que :

$$\left| \tilde{B}(\tilde{x}) - b' - \tilde{x}_2 \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \tilde{x}_2}(0,0) \right| \leq C|\tilde{x}|^2. \tag{14.82}$$

Mais $\tilde{B}(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial \tilde{x}_2}$ et par intégration selon la variable $\tilde{x}_2$ en notant que $\tilde{A}_1(0,0) = 0$, nous déduisons :

$$\left| \tilde{A}_1(\tilde{x}) - b'\tilde{x}_2 - \frac{\tilde{x}_2^2}{2}\frac{\partial \tilde{B}}{\partial \tilde{x}_2}(0,0) \right| \leq C|\tilde{x}_2||\tilde{x}|^2. \tag{14.83}$$

Cette relation (14.83) montre ainsi, en utilisant (14.81), que :

$$\left| \tilde{A}_1'(\tilde{x}) - \frac{\tilde{x}_2^2}{2}\frac{\partial \tilde{B}}{\partial \tilde{x}_2}(0,0) \right| \leq C|\tilde{x}_2||\tilde{x}|^2. \tag{14.84}$$

Utilisant la décomposition $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}}^{lin} + \tilde{\mathcal{A}}'$ et nous aidant de (14.40), (14.80) devient :

$$\begin{aligned} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(v) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \Big(|(h\nabla - i\mathcal{A}^{lin})\tilde{v}(\tilde{x})|^2 \\ &\quad +2\,\mathrm{Re}\, i(h\partial_{\tilde{x}_1} - i\tilde{A}_1^{lin})\tilde{v}(\tilde{x})\overline{\tilde{A}_1'\tilde{v}(\tilde{x})} + |\tilde{A}_1'\tilde{v}|^2 \ + |f'(\tilde{x}_1+x_1^0)|^2|h\partial_{\tilde{x}_2}\tilde{v}|^2 \\ &\quad +2\,\mathrm{Re}\, f'(\tilde{x}_1+x_1^0)(h\partial_{\tilde{x}_1} - i\tilde{A}_1)\tilde{v}(\tilde{x})\overline{h\partial_{\tilde{x}_2}\tilde{v}(\tilde{x})}\Big) d\tilde{x}. \end{aligned} \tag{14.85}$$

Nous omettrons désormais les *tilde* pour alléger les notations. Définissons la fonction v par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+,\ v(x) = h^{-\frac{1}{8}} e^{i\sqrt{\frac{b'}{h}}\zeta_0 x_1} \left(\frac{b'}{h}\right)^{\frac{1}{4}} \phi\left(\sqrt{\frac{b'}{h}}x_2\right)\ \chi(x_2)\ g(h^{-\frac{1}{4}}x_1), \tag{14.86}$$

où $\chi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}^+, [0,1])$ est telle que $\chi(x_2) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & 0 \le x_2 \le \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ 0 & \text{si} & x_2 \ge \varepsilon_0, \end{array} \right\}$ et $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est telle que $\mathrm{supp}\, g \subset]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g^2 = 1$. La fonction ϕ et le réel ζ_0 sont définis par la Proposition 2.12. Estimons $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(v)$ en utilisant (14.85).

• $(h\partial_{x_1} - iA_1^{\ell in})v = i(\sqrt{hb'}\zeta_0 - b'x_2)v + he^{i\sqrt{\frac{b'}{h}}\zeta_0 x_1} \left(\frac{b'}{h}\right)^{\frac{1}{4}} \phi\left(\sqrt{\frac{b'}{h}}x_2\right)\chi(x_2)h^{-\frac{1}{8}}h^{-\frac{1}{4}}g'(h^{-\frac{1}{4}}x_1)$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} |(h\partial_{x_1} - iA_1^{\ell in})v|^2\ dx &= hb'\int_0^\infty (\zeta_0 - y_2)^2 |\phi(y_2)|^2 \chi^2\left(\sqrt{\frac{h}{b'}}y_2\right)\ dy_2 \\ &\quad + h^2 h^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |g'(y_1)|^2\ dy_1 \int_0^\infty |\phi(y_2)|^2 \chi^2\left(\sqrt{h}b'y_2\right)\ dy_2 \\ &\le hb'\int_0^\infty (\zeta_0 - y_2)^2 |\phi(y_2)|^2\ dy_2 + Ch^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \tag{14.87}$$

en effectuant le changement de variables :

$$y_1 = h^{-\frac{1}{4}}x_1,\ y_2 = \sqrt{\frac{b'}{h}}x_2, \tag{14.88}$$

et tenant compte des hypothèses sur les fonctions χ et g.

• $h\partial_{x_2}v = he^{i\sqrt{\frac{b'}{h}}\zeta_0 x_1} h^{-\frac{1}{8}} g(h^{-\frac{1}{4}}x_1) \left(\frac{b'}{h}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\left(\frac{b'}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \phi'\left(\sqrt{\frac{b'}{h}}x_2\right)\chi(x_2) + \phi\left(\sqrt{\frac{b'}{h}}x_2\right)\chi'(x_2)\right)$.

Ainsi, en effectuant le même changement de variables (14.88) que précédemment :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} |h\partial_{x_2}v|^2\ dx &= h^2 \int_0^\infty \left|\sqrt{\frac{b'}{h}}\phi'(y_2)\chi\left(\sqrt{\frac{h}{b'}}y_2\right) + \phi(y_2)\chi'\left(\sqrt{\frac{h}{b'}}y_2\right)\right|^2\ dy_2 \\ &\le hb'\int_0^\infty |\phi'(y_2)|^2\ dy_2 + c_1 h^{\frac{3}{2}} + c_2 h^2 \\ &\le hb'\int_0^\infty |\phi'(y_2)|^2\ dy_2 + Ch^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{14.89}$$

Des deux inégalités (14.87) et (14.89), nous déduisons qu'il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} |(h\nabla - i\mathcal{A}^{\ell in})v|^2 dx \le hb'\int_{\mathbb{R}^+} \left((\zeta_0 - y_2)^2|\phi(y_2)|^2 + |\phi'(y_2)|^2\right) dy_2 + Ch^{\frac{3}{2}} \le hb'\Theta_0 + Ch^{\frac{3}{2}}. \tag{14.90}$$

• D'après l'hypothèse faite en (14.84) sur le potentiel $\mathcal{A}'$, nous avons, en reprenant (14.88) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} |\mathcal{A}'v|^2 dx &\le C\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} (x_1^2 x_2 + x_2^2)^2 \sqrt{\frac{b'}{h}} \left|\phi\left(\sqrt{\frac{b'}{h}}x_2\right)\right|^2 |\chi(x_2)|^2 h^{-\frac{1}{4}} |g(h^{-\frac{1}{4}}x_1)|^2 dx \\ &\le C\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \left(h^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{h}{b'}}y_1^2 y_2 + \frac{h}{b'}y_2^2\right)^2 |\phi(y_2)|^2 g^2(y_1)\ dy_1\ dy_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \tilde{C}h^2\int_0^\infty (y_2+y_2^2)^2|\phi(y_2)|^2dy_2 \\ &\leq C'h^2, \end{aligned} \tag{14.91}$$

car la fonction $t\mapsto t^k\phi(t)$ est de carré intégrable pour tout entier naturel k.

• Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les relations (14.87) et (14.91), nous déduisons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \text{Re } i(h\partial_{x_1}-iA_1^{\ell in})v(x)\overline{A_1'v(x)}dx &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}|(h\partial_{x_1}-iA_1^{\ell in})v|^2dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}|A_1'v|^2dx} \\ &\leq Ch^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{14.92}$$

• Par hypothèse sur la fonction f et utilisation de la formule de Taylor, il existe une constante c telle que $|f'(x_1+x_1^0)|\leq c|x_1|$. Ainsi, en utilisant à nouveau le changement de variables (14.88) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}|f'(x_1+x_1^0)|^2|h\partial_{x_2}v|^2dx &\leq \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} Ch^2\sqrt{h}y_1^2g^2(y_1)\left(\frac{b'}{h}|\phi'(y_2)|^2+|\phi(y_2)|^2\right)\,dy_1\,dy_2 \\ &\leq \tilde{C}h^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{14.93}$$

• Estimons le dernier terme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}$ Re $f'(x_1+x_1^0)(h\partial_{x_1}-iA_1)v(x)\overline{h\partial_{x_2}v(x)}$ en utilisant la décomposition $A_1=A_1^{\ell in}+A_1'$. Par hypothèse sur A_1' et le changement de variables (14.88), nous déduisons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}|f'(x_1+x_1^0)A_1'v(x)\overline{h\partial_{x_2}v(x)}|dx &\leq C\sqrt{\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}x_1^2|A_1'v|^2dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}|h\partial_{x_2}v|^2dx} \\ &\leq ch^{\frac{1}{2}}\sqrt{\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}h^{\frac{5}{2}}y_1^2(y_1^2y_2+y_2^2)^2|\phi(y_2)|^2g^2(y_1)\,dy} \\ &\leq C'h^{\frac{1}{2}}h^{\frac{5}{4}}=ch^{\frac{7}{4}}. \end{aligned} \tag{14.94}$$

Le changement de variables (14.88) conduit à l'estimation :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}\text{Re } f'(x_1+x_1^0)(h\partial_{x_1}-ibx_2)v(x)\overline{h\partial_{x_2}v(x)}dx \\ =\ &\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}h^{\frac{1}{4}}y_1\sqrt{hb'}h|\zeta_0-y_2|\left(\frac{b'}{h}\right)^{\frac{1}{4}}|\phi(y_2)||\phi'(y_2)|\left|\chi\left(\sqrt{\frac{h}{b'}}y_2\right)\right|^2 g^2(y_1)\,dy_1\,dy_2 \\ &+\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}h^{\frac{1}{4}}y_1\sqrt{hb'}h|\zeta_0-y_2||\phi(y_2)|^2\chi\left(\sqrt{\frac{h}{b'}}y_2\right)\left|\chi'\left(\sqrt{\frac{h}{b'}}y_2\right)\right| g^2(y_1)\,dy_1\,dy_2 \\ &+\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}h^{\frac{1}{4}}y_1h^2h^{-\frac{1}{4}}|g(y_1)||g'(y_1)|\left(\frac{b'}{h}\right)^{\frac{1}{4}}|\phi(y_2)||\phi'(y_2)|\left|\chi\left(\sqrt{\frac{h}{b'}}y_2\right)\right|^2 dy_1\,dy_2 \\ &+\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}h^{\frac{1}{4}}y_1h^2h^{-\frac{1}{4}}|g(y_1)||g'(y_1)||\phi(y_2)|^2\chi\left(\sqrt{\frac{h}{b'}}y_2\right)\left|\chi'\left(\sqrt{\frac{h}{b'}}y_2\right)\right| dy_1\,dy_2. \end{aligned} \tag{14.95}$$

Grâce aux hypothèses sur g, χ et les propriétés d'intégrabilité de la fonction ϕ, il est facile de voir que les deux derniers termes de (14.95) sont majorés par $Ch^{\frac{7}{4}}$. De plus, comme $|ab|\leq\frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2)$ et g est à support dans $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, il vient :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}h^{\frac{1}{4}}y_1\sqrt{hb'}h|\zeta_0-y_2|\left(\frac{b'}{h}\right)^{\frac{1}{4}}|\phi(y_2)||\phi'(y_2)|\left|\chi\left(\sqrt{\frac{h}{b'}}y_2\right)\right|^2 g^2(y_1)\,dy_1\,dy_2 \\ \leq\ &h\frac{\sqrt{hb'}}{2}\int_0^\infty(|\zeta_0-y_2|^2|\phi(y_2)|^2+|\phi'(y_2)|^2)dy_2\leq\Theta_0\frac{\sqrt{b'}}{2}h^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{14.96}$$

Comme $t \mapsto t^k\phi(t)$ est de carré intégrable pour tout entier naturel k et que χ et g sont à support compact, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} h^{\frac{1}{4}} y_1 \sqrt{hb'} h|\zeta_0 - y_2||\phi(y_2)|^2 \chi\left(\sqrt{\frac{h}{b'}}y_2\right)\left|\chi'\left(\sqrt{\frac{h}{b'}}y_2\right)\right| g^2(y_1)\, dy_1\, dy_2 \leq Ch^{\frac{7}{4}}. \tag{14.97}$$

Reportons (14.96) et (14.97) dans (14.95), il vient :

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \text{Re}\, f'(x_1 + x_1^0)(h\partial_{x_1} - ibx_2)v(x)\overline{h\partial_{x_2}v(x)}dx \leq c(h^{\frac{3}{2}} + h^{\frac{7}{4}} + h^2) \leq Ch^{\frac{3}{2}}. \tag{14.98}$$

Reportons les relations (14.90), (14.91), (14.92), (14.93), (14.94) et (14.98) dans (14.85), nous obtenons la majoration de la forme sesquilinéaire sur le domaine Ω initial :

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(v) \quad \leq \quad hb'\Theta_0 + Ch^{\frac{3}{2}}. \tag{14.99}$$

Minorons maintenant la norme de v en effectuant à nouveau le changement de variables (14.88) :

$$||v||^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)} \quad = \quad \int_0^\infty |\phi(y_2)|^2 \left|\chi\left(\sqrt{\frac{b'}{h}}y_2\right)\right|^2 dy_2 \geq \int_0^{\sqrt{\frac{b'}{h}}\frac{\varepsilon_0}{2}} |\phi(y_2)|^2\, dy_2. \tag{14.100}$$

Or $\phi \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ donc il existe h_0 et une constante C tel que pour tout $h \in]0, h_0]$, nous avons :

$$||v||^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)} \geq 1 - Ch^2. \tag{14.101}$$

Il reste à appliquer le principe du min-max, ce qui achève la démonstration de la contribution du bord régulier donnée en (14.77).

14.3.3 Contribution de l'intérieur

Nous montrons maintenant que :

$$\mu(h, B, \Omega) \leq hb + \mathcal{O}(h^{\frac{4}{3}}). \tag{14.102}$$

Considérons $x_0 \in \overline{\Omega}$ tel que $b = B(x_0)$. Alors, trois cas sont possibles :

1. Soit x_0 est un sommet S_j d'angle α_j. Dans ce cas, nous avons démontré en (14.75) que $\mu(h, B, \Omega) \leq hB(x_0)\mu(\alpha_j) + \mathcal{O}(h^{\frac{4}{3}})$. Mais $B(x_0) = b$ et $\mu(\alpha_j) < 1$, il vient alors :

$$\mu(h, B, \Omega) \leq hb + \mathcal{O}(h^{\frac{4}{3}}).$$

2. Soit x_0 est un point régulier du bord du domaine, alors nous avons démontré en (14.77) que $\mu(h, B, \Omega) \leq hb'\Theta_0 + \mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})$. Mais $B(x_0) = b \leq b'$ et $\Theta_0 < 1$, il vient alors :

$$\mu(h, B, \Omega) \leq hb + \mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}}).$$

3. Soit $x_0 \in \Omega$, montrons dans ce cas :

$$\mu(h, B, \Omega) \leq hb + \mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}}). \tag{14.103}$$

Supposons donc $x_0 \in \Omega$ et $B(x_0) = b$. Nous localisons dans un voisinage de x_0 une fonction propre de la réalisation de Neumann de $P_{h,\mathcal{A}^{lin},\mathbb{R}^2}$.
Il existe $h_0 > 0$ tel que $\mathcal{B}(x_0, h_0^\gamma) \subset \Omega$. Reprenons les fonctions χ et χ_t définies en (14.57) et (14.58) avec $t = h^\gamma$ et $h \leq h_0$. Définissons :

$$\forall x \in \Omega,\ u(x) = \sqrt{\frac{b}{4\pi h}} \exp\left(\frac{-b|x-x_0|^2}{4h}\right), \tag{14.104}$$

$$\tilde{u}(x) = \exp\left(i\frac{\phi(x)}{h}\right) u(x). \tag{14.105}$$

Rappelons le résultat du calcul d'une intégrale gaussienne :

$$\int_{\mathcal{B}(x_0,R)} |u(x)|^2\ dx = 1 - \exp\left(-\frac{bR^2}{4h}\right). \tag{14.106}$$

Les inclusions $\mathcal{B}(x_0, h^\gamma) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ et la relation (14.106) permettent d'encadrer $||u||^2_{L^2(\Omega)}$ et ainsi :

$$||u||_{L^2(\Omega)} = 1 + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{bh^{2\gamma-1}}{4}\right)\right). \tag{14.107}$$

Le développement limité (14.107) explique la raison du choix $\gamma \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Donnons des propriétés d'intégrabilité liées à la fonction u, aisément justifiées par le calcul de gaussiennes :

Remarque 14.6.

$$\int_\Omega |x-x_0|^3 |u(x)|^2\ dx \leq 6\sqrt{\pi}\left(\frac{h}{b}\right)^{3/2}. \tag{14.108}$$

$$\int_\Omega |x-x_0|^4 |u(x)|^2\ dx \leq 2\left(\frac{4h}{b}\right)^2. \tag{14.109}$$

Nous utilisons les potentiels définis précédemment avec $z = x_0$. Afin d'obtenir l'estimation (14.103), nous utilisons le principe du min-max et évaluons $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_{h^\gamma}\tilde{u})$ en notant que $\chi_{h^\gamma}\tilde{u} \in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega)$. Par changement de jauge, nous avons :

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_{h^\gamma}\tilde{u}) = q_{h,\mathcal{A}_{new},\Omega}(\chi_{h^\gamma}u). \tag{14.110}$$

Utilisons la décomposition $\mathcal{A}_{new} = \mathcal{A}^{lin} + \mathcal{A}'$, alors :

$$q_{h,\mathcal{A}_{new},\Omega}(\chi_{h^\gamma}u) = q_{h,\mathcal{A}^{lin},\Omega}(\chi_{h^\gamma}u) + ||\ |\mathcal{A}'|\chi_{h^\gamma}u||^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega \mathcal{A}' \cdot \mathcal{A}^{lin}|\chi_{h^\gamma}u|^2\ dx. \tag{14.111}$$

La relation (3.19) du Lemme 3.10 et la construction de la fonction u conduisent à :

$$q_{h,\mathcal{A}^{lin},\Omega}(\chi_{h^\gamma}u) = hb||\chi_{h^\gamma}u||^2_{L^2(\Omega)} + h^{2-2\gamma}\int_\Omega \left|\nabla\chi\left(\frac{x-x_0}{h^\gamma}\right)\right|^2 |u(x)|^2\ dx. \tag{14.112}$$

La fonction $x \to \nabla\chi\left(\frac{x-x_0}{h^\gamma}\right)$ est nulle en dehors de la couronne centrée en x_0 et de rayons $\frac{h^\gamma}{2}$ et h^γ. Utilisant (14.106) avec $R = \frac{h^\gamma}{2}$, nous déduisons de (14.112) :

$$q_{h,\mathcal{A}^{lin},\Omega}(\chi_{h^\gamma}u) \leq hb||\chi_{h^\gamma}u||^2_{L^2(\Omega)} + Ch^{2-2\gamma}\exp\left(-\frac{b}{16}h^{2\gamma-1}\right). \tag{14.113}$$

Comme nous l'avons rappelé en (14.38), nous savons qu'il existe une constante C uniforme telle que $|\mathcal{A}'|$ soit majoré sur Ω par $C|x-x_0|^2$. Par construction de $\mathcal{A}^{lin}$, nous pouvons majorer $|\mathcal{A}' \cdot \mathcal{A}^{lin}|$ par $C\frac{b}{2}|x-x_0|^3$. Ainsi, en majorant uniformément B sur Ω et en reprenant (14.113), il existe une contante c indépendante de h telle que :

$$q_{h,\mathcal{A}_{new},\Omega}(u) \leq hb||\chi_{h^\gamma}u||^2_{L^2(\Omega)} + Ch^{2-2\gamma}\exp\left(-\frac{b}{16}h^{2\gamma-1}\right) + c\int_\Omega (|x-x_0|^4+|x-x_0|^3)|u|^2dx. \quad (14.114)$$

À la vue de la Remarque (14.6), nous avons alors :

$$q_{h,\mathcal{A}_{new},\Omega}(u) \quad \leq \quad hb + c'h^{3/2}. \quad (14.115)$$

L'estimation (14.107) de la norme de u permet d'estimer $||\chi_{h^\gamma}u||_{L^2(\Omega)}$ et d'obtenir la majoration (14.103). Ceci achève la démonstration de la Proposition 14.5.

14.3.4 Généralisation de la majoration

Nous montrons dans ce paragraphe que si nous omettons l'hypothèse «pour tout sommet S_j, $\mu(\alpha_j) < \Theta_0$», nous obtenons une majoration moins forte :

$$\mu(h,B,\Omega) \leq h\inf\left(b, \Theta_0 b', \inf_{j=1,\ldots,N}\mu(\alpha_j)B(S_j)\right) + Ch^{\frac{9}{8}}. \quad (14.116)$$

Notons également que cette hypothèse «pour tout sommet S_j, $\mu(\alpha_j) < \Theta_0$» n'est pas restrictive car nous émettons la conjecture que μ est strictement croissante de $]0,\pi]$ vers $]0,\Theta_0]$.

Démonstration de (14.116) : Considérons donc un sommet S_j tel que $\mu(\alpha_j) = \Theta_0$ et montrons que :

$$\mu(h,B,\Omega) \leq h\mu(\alpha_j)B(S_j) + \ \mathcal{O}(h^{9/8}). \quad (14.117)$$

Considérons un point T_j sur le bord du domaine tel que T_j ne soit pas un sommet et $d(S_j,T_j) = h^{\frac{1}{4}}$. Si h est assez petit, un tel point T_j existe bien. Pour le point T_j, nous pouvons reprendre l'étude de la contribution du bord régulier du domaine donnée à la Section 14.3.2 et procédons de même. Le seul changement est qu'il faut choisir une fonction-test dont le support ne rencontre aucun sommet ni le bord du domaine. Il faut donc choisir une fonction test dont le support est de taille dépendant de h. D'après la relation (14.9) :

$$(1-C_1\varepsilon_0 h^\rho)q_{h,\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\Omega}}(\tilde{u}) \leq q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) \leq (1+C_1\varepsilon_0 h^\rho)q_{h,\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\Omega}}(\tilde{u}),$$

il suffit d'étudier $q_{h,\tilde{\mathcal{A}},\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}(\tilde{u})$ pour en déduire une valeur approchée de l'ordre de h^ρ de $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)$ pour une fonction u à support dans une boule de rayon h^ρ. De la même manière que nous avons définie la fonction v en (14.86), nous choisissons :

$$\forall x \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+,\ v(x) = e^{i\sqrt{\frac{B(T_j)}{h}}\zeta_0 x_1}\left(\frac{B(T_j)}{h}\right)^{\frac{1}{4}}\phi\left(\sqrt{\frac{B(T_j)}{h}}\right)\ g_2\left(\frac{x_2}{h^{\frac{3}{8}}}\right)\ h^{-\frac{3}{16}}g_1(h^{-\frac{3}{8}}x_1), \quad (14.118)$$

où $g_1 \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[,\mathbb{R})$ de L^2 norme égal à 1, $g_2 \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}^+)$ telle que :

$$\begin{cases} g_2(x_2) = 1 & \text{si} \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}, \\ \qquad 0 & \text{si} \quad x_2 \geq 1, \end{cases}$$

et ϕ, ζ_0 définies par la Proposition 2.12. Nous devons donc estimer $q_{h,\mathcal{A},\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}(v)$. De la même façon qu'à la Section 14.3.2, nous pouvons supposer que le potentiel magnétique vérifie :

$$\mathcal{A}(0,0) = 0 \text{ et } \mathcal{A} = \mathcal{A}^{lin} + \mathcal{A}', \tag{14.119}$$

avec :

$$\mathcal{A}^{lin}(x) = (B(T_j)x_2, 0),\ A_2'(x) = 0 \text{ et } |A_1(x)| \leq C|x|^2. \tag{14.120}$$

Alors :

$$q_{h,\mathcal{A},\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}(v) = q_{h,\mathcal{A},\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}(v) + \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} |A_1'|^2|v|^2\ dx + 2\ \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} (h\partial_{x_1} - A_1^{lin})v\overline{A_1'v}\ dx. \tag{14.121}$$

Reprenons les calculs de la Section 14.3.2, en particulier les relations (14.87) et (14.89), il vient :

$$\begin{aligned} \bullet\ (h\partial_{x_1} - iA_1^{lin})v &= i(\sqrt{hB(T_j)}\zeta_0 - B(T_j)x_2)v \\ &\quad + he^{i\sqrt{\frac{B(T_j)}{h}}\zeta_0 x_1} \left(\frac{B(T_j)}{h}\right)^{\frac{1}{4}} \phi\left(\sqrt{\frac{B(T_j)}{h}}x_2\right) \chi(x_2)h^{-\frac{3}{16}}h^{-\frac{3}{8}}g'(h^{-\frac{3}{8}}x_1)\ . \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} |(h\partial_{x_1} - iA_1^{lin})v|^2\ dx &\leq hB(T_j)\int_0^\infty (\zeta_0 - y_2)^2|\phi(y_2)|^2\ dy_2 + Ch^2h^{-\frac{3}{4}} \\ &\leq hB(T_j)\int_0^\infty (\zeta_0 - y_2)^2|\phi(y_2)|^2\ dy_2 + Ch^{\frac{5}{4}}. \end{aligned} \tag{14.122}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ h\partial_{x_2}v &= he^{i\sqrt{\frac{B(T_j)}{h}}\zeta_0 x_1}h^{-\frac{1}{8}}g_1\left(h^{-\frac{1}{4}}x_1\right)\left(\frac{B(T_j)}{h}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\left(\frac{B(T_j)}{h}\right)^{\frac{1}{2}}\phi'\left(\sqrt{\frac{B(T_j)}{h}}x_2\right)g_2\left(\frac{x_2}{h^{\frac{3}{8}}}\right)\right. \\ &\quad \left. + \phi\left(\sqrt{\frac{B(T_j)}{h}}x_2\right)h^{-\frac{3}{8}}g_2'\left(\frac{x_2}{h^{\frac{3}{8}}}\right)\right). \end{aligned}$$

Ainsi, en effectuant le changement de variables (14.88) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} |h\partial_{x_2}v|^2\ dx &\leq hB(T_j)\int_0^\infty |\phi'(y_2)|^2\ dy_2 + c_1h^{\frac{9}{8}} + c_2h^{\frac{5}{4}} \\ &\leq hB(T_j)\int_0^\infty |\phi'(y_2)|^2\ dy_2 + Ch^{\frac{9}{8}}. \end{aligned} \tag{14.123}$$

Des deux inégalités (14.122) et (14.123), nous déduisons qu'il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} |(h\nabla - i\mathcal{A}^{lin})v|^2 dx &\leq hB(T_j)\int_{\mathbb{R}^+} \left((\zeta_0 - y_2)^2|\phi(y_2)|^2 + |\phi'(y_2)|^2\right) dy_2 + Ch^{\frac{9}{8}} \\ &\leq hB(T_j)\Theta_0 + Ch^{\frac{9}{8}}. \end{aligned} \tag{14.124}$$

Estimons les deux derniers termes :

• Comme la fonction v est à support dans un rectangle de côté $h^{\frac{3}{8}}$, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} |A_1'|^2|v|^2\ dx \leq Ch^{\frac{3}{2}}. \tag{14.125}$$

• L'inégalité de Cauchy-Schwarz conduit à :

$$2\ \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} (h\partial_{x_1} - A_1^{lin})v\overline{A_1'v}\ dx \leq C\sqrt{h}h^{\frac{3}{4}} = Ch^{\frac{5}{4}}. \tag{14.126}$$

Reportons les relations (14.124), (14.125) et (14.126) dans (14.121) :

$$q_{h,\mathcal{A},\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}(v) \quad \leq \quad hB(T_j)\Theta_0 + Ch^{\frac{9}{8}}. \tag{14.127}$$

Minorons maintenant la norme de v en effectuant à nouveau le changement de variables (14.88) :

$$||v||^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)} = \int_0^\infty |\phi(y_2)|^2 \left| g_2\left(\frac{h^{\frac{1}{8}}}{b'}y_2\right)\right|^2 \, dy_2 \geq \int_0^{\frac{\sqrt{b'h^{-\frac{1}{8}}}}{2}} |\phi(y_2)|^2 \, dy_2. \tag{14.128}$$

Or $\phi \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ donc il existe h_0 et une constante C tel que pour tout $h \in]0, h_0]$, nous avons :

$$||v||^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)} \geq 1 - Ch^2. \tag{14.129}$$

Appliquons le principe du min-max et tenant compte de l'erreur commise lors du changement de variables :

$$\mu(h, B, \Omega) \quad \leq \quad \frac{h\Theta_0 B(T_j) + Ch^{\frac{9}{8}}}{1 - Ch^2} = h\Theta_0 B(T_j) + \tilde{C}h^{\frac{9}{8}}. \tag{14.130}$$

Mais, en écrivant le développement de Taylor de B, il existe une constante uniforme β telle que :

$$B(T_j) \leq B(S_j) + \beta|T_j - S_j| \leq B(S_j) + \beta h^{\frac{1}{4}}. \tag{14.131}$$

Injectons (14.131) dans (14.130), il vient :

$$\mu(h, B, \Omega) \quad \leq \quad h\Theta_0(B(S_j) + \beta h^{\frac{1}{4}}) + \tilde{C}h^{\frac{9}{8}} = B(S_j) + \mathcal{O}(h^{\frac{9}{8}}). \tag{14.132}$$

Ceci nous donne le résultat souhaité. □

Chapitre 15

Localisation de l'état fondamental

15.1 Présentation

Pour la localisation à l'intérieur du domaine, nous reprenons les arguments de Helffer-Morame [60] basés sur les techniques d'Agmon [1, 2, 3].
Afin d'estimer la décroissance de l'état fondamental, nous choisissons dans la relation (14.54) $\theta = \frac{1}{8}$.
Nous fixerons par la suite les paramètres ρ et ε_0. Rappelons les définitions $(\mathcal{H}_3)$:

$$b = \inf_{x\in\overline{\Omega}} B(x) \text{ et } b' = \inf_{x\in\partial\Omega} B(x). \tag{15.1}$$

Notons B_* la quantité :

$$B_*:= \min\left(b, \Theta_0 b', \mu(\alpha_1)B(S_1), \ldots, \mu(\alpha_N)B(S_N)\right). \tag{15.2}$$

Reprenons la relation (14.54) en choisissant $u = e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}}u_h$ et $\theta = \frac{1}{8}$, il vient :

$$\begin{aligned} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) \quad \geq \quad & h\sum_{int}\int B(x)|\chi_j^h u|^2\ dx - \frac{C}{\varepsilon_0^2}h^{2-2\rho}||u||^2_{L^2(\Omega)} \\ & +(1-Ch^{\frac{1}{4}}-C\varepsilon_0 h^{\rho})h\Theta_0\sum_{bd}B(z_j)\int_\Omega|\chi_j^h u|^2\ dx \\ & +(1-Ch^{\frac{1}{4}}-C\varepsilon_0 h^{\rho})h\sum_{smt}\mu(\alpha_j)B(S_j)\int_\Omega|\chi_j^h u|^2\ dx \\ & -C\varepsilon_0^4 h^{4\rho-\frac{1}{4}}\sum_{bd}||\chi_j^h u||^2_{L^2(\Omega)} - C\varepsilon_0^4 h^{4\rho-\frac{1}{4}}\sum_{smt}||\chi_j^h u||^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{15.3}$$

Considérons une fonction ϕ ayant un gradient continu presque partout sur Ω.
Utilisons le Lemme 3.9 en choisissant pour la fonction u l'état fondamental u_h, il vient :

$$\text{Re}\left\langle e^{2\frac{\phi}{\sqrt{h}}}P_{h,\mathcal{A},\Omega}u_h, u_h\right\rangle_{L^2(\Omega)} \quad = \quad q_{h,\mathcal{A},\Omega}\left(e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}}u_h\right) - h||\ |\nabla\phi|\ e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}}u_h||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{15.4}$$

Mais, par définition de u_h, nous avons $P_{h,\mathcal{A},\Omega}u_h = \mu(h,B,\Omega)u_h$ donc :

$$\mu(h,B,\Omega)\left|\left|e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}}u_h\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} = q_{h,\mathcal{A},\Omega}\left(e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}}u_h\right) - h||\ |\nabla\phi|\ e^{\phi}u_h||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{15.5}$$

La Proposition 14.5 donne une majoration de $\mu(h,B,\Omega)$ par $hB_*+C_0h^{\frac{5}{4}}$. Reportons cette majoration dans (15.5), alors :

$$h\left(B_*+C_0h^{\frac{1}{4}}\right)\left|\left|e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}}u_h\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} \geq q_{h,\mathcal{A},\Omega}\left(e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}}u_h\right) - h||\ |\nabla\phi|\ e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}}u_h||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{15.6}$$

La relation (15.3), estimée pour $u=e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}}u_h$ permet de déduire différentes formes d'estimations selon les choix des paramètres ρ et ε_0.

15.2 Décroissance à l'intérieur

Nous allons choisir les valeurs des paramètres $\rho=\frac{1}{2}$ et ε_0 grand. Commençons par un lemme nous donnant une minoration de la forme $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)$.

Lemme 15.1. *Choisissons $\rho=\frac{1}{2}$. Il existe des constantes C, h_0 et pour tout $\varepsilon_0>0$, une constante $C(\varepsilon_0)$ telles que, pour tout $h\in]0,h_0]$ et tout $u\in H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega)$:*

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u)\geq h\sum_{int}\int_\Omega B(x)|\chi_j^h u|^2dx - C(\varepsilon_0)h\sum_{bd\cup smt}\int_\Omega|\chi_j^h u|^2dx - \frac{Ch}{\varepsilon_0^2}\sum_{bd\cup smt}\int_\Omega|\chi_j^h u|^2dx. \tag{15.7}$$

Démonstration : Récrivons la relation (15.3) en prenant $\rho=\frac{1}{2}$, alors :

$$\begin{aligned} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) \quad \geq \quad & h\sum_{int}\int B(x)|\chi_j^h u|^2\ dx - \frac{C}{\varepsilon_0^2}h||u||^2_{L^2(\Omega)} \\ & +(1-Ch^{\frac{1}{4}}-C\varepsilon_0h^{\frac{1}{2}})h\Theta_0\sum_{bd}B(z_j)\int_\Omega|\chi_j^h u|^2\ dx \\ & +(1-Ch^{\frac{1}{4}}-C\varepsilon_0h^{\frac{1}{2}})h\sum_{smt}\mu(\alpha_j)B(S_j)\int_\Omega|\chi_j^h u|^2\ dx \\ & -C\varepsilon_0^4h^{\frac{7}{4}}\sum_{bd}||\chi_j^h u||^2_{L^2(\Omega)} - C\varepsilon_0^4h^{\frac{7}{4}}\sum_{smt}||\chi_j^h u||^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{15.8}$$

Nous récrivons la norme $||u||^2_{L^2(\Omega)}$ à l'aide de la partition de l'unité et obtenons le lemme en choisissant :

$$h_0\leq\frac{1}{C^4}\text{ et }C(\varepsilon_0)=\frac{C}{\varepsilon_0^2}+C\varepsilon_0\sup_j(\Theta_0B(z_j),\mu(\alpha_j)B(S_j))+C\varepsilon_0^4h_0^{\frac{3}{4}}.$$

□

Utilisons ce lemme pour justifier la proposition :

Proposition 15.2. *Avec les notations (15.1), supposons vérifiée la condition :*

$$\inf\left(\Theta_0b',\inf_{j=1,\ldots,N}\mu(\alpha_j)B(S_j)\right)<b. \tag{15.9}$$

Si u_h est l'état fondamental associé à $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$, il existe alors des constantes $C>0$, $\delta>0$ telles que :

$$\left|\left|e^{\delta\frac{d(x,\partial\Omega)}{\sqrt{h}}}u_h\right|\right|_{H^1(\Omega)}\leq C||u_h||_{L^2(\Omega)}. \tag{15.10}$$

Démonstration : Établissons le résultat pour la norme L^2. Nous appliquons le Lemme 15.1 avec $u = e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h$, alors :

$$\begin{aligned} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h) \quad \geq \quad & h \sum_{int} \int_\Omega B(x) \left| \chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h \right|^2 dx \\ & -C(\varepsilon_0) h \sum_{bd \cup smt} \int_\Omega |\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h|^2 dx - \frac{Ch}{\varepsilon_0^2} \sum_{bd \cup smt} \int_\Omega \left| \chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h \right|^2 dx. \quad (15.11) \end{aligned}$$

Définissons la fonction ϕ par :

$$\forall x \in \Omega, \ \phi(x) = \delta \max(d(x, \partial\Omega), \sqrt{h}), \tag{15.12}$$

nous préciserons δ ensuite. Notons que $|\nabla \phi| \leq |\delta|$. Combinons les relations (15.6) et (15.11), alors, utilisant les définitions de b et de B_* :

$$\left(b - B_* - C_0 h^{\frac{1}{4}} - \frac{C}{\varepsilon_0^2} - \delta^2 \right) \sum_{int} \int_\Omega \left| \chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h \right|^2 dx \leq \tilde{C}(\varepsilon_0) \sum_{bd \cup smt} \int_\Omega \left| \chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h \right|^2 dx. \tag{15.13}$$

Par hypothèse, $b > B*$, choisissons donc :

$$\delta < \sqrt{b - B*},$$

ainsi que h_0 assez petit et ε_0 grand, alors il existe une constante C telle que pour tout $h \in]0, h_0]$:

$$\sum_{int} \int_\Omega \left| \chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h \right|^2 dx \leq C \sum_{bd \cup smt} \int_\Omega \left| \chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h \right|^2 dx. \tag{15.14}$$

Comme $e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}}$ est majoré uniformément sur $\bigcup_{bd \cup smt} \operatorname{supp} \chi_j^h$, ceci conduit à :

$$\left|\left| \left| e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h \right| \right|\right|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{C} ||u_h||_{L^2(\Omega)}. \tag{15.15}$$

Le Lemme 3.9 permet d'écrire :

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega} \left(e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h \right) = \ \mathrm{Re} \left\langle e^{2\frac{\phi}{\sqrt{h}}} P_{h,\mathcal{A},\Omega} u_h, u_h \right\rangle_{L^2(\Omega)} + h || \ |\nabla \phi| \ e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h ||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Par hypothèse sur les fonctions u_h et ϕ, nous avons alors :

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega} \left(e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h \right) \leq (\mu(h, B, \Omega) + h\delta^2) ||e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Grâce à la majoration de $\mu(h, B, \Omega)$ donnée à la Proposition 14.5, il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega} \left(e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h \right) \leq Ch ||e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Il suffit de reprendre (15.15) pour déduire une estimation H^1 de $e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h$.

□

15.3 Décroissance sur le bord

Théorème 15.3. *Supposons* $\inf_{j=1,\dots,N}(\mu(\alpha_j)B(S_j)) < \min(b, \Theta_0 b')$ *avec les notations (15.1). Notons* $\mathcal{N}'$ *l'ensemble des sommets de* Ω *où le minimum* B_* *est atteint et soit* u_h *l'état fondamental associé à l'opérateur* $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$. *Alors il existe des constantes* $C > 0,\ \delta > 0$ *et* h_0 *telles que pour tout* $h \in]0, h_0]$:

$$\left|\left| e^{\delta \frac{d(x,\mathcal{N}')}{\sqrt{h}}} u_h \right|\right|_{H^1_{h,\mathcal{A}}(\Omega)} \leq C \exp\left(\frac{\delta}{h^{\frac{1}{8}}}\right) \ ||u_h||_{L^2(\Omega)}. \tag{15.16}$$

Démonstration : Commençons par établir le résultat pour la norme L^2 au lieu de $H^1_{h,\mathcal{A}}$. Choisissons $\varepsilon_0 = 1$ et $\rho = \frac{3}{8}$, $u = e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h$ dans (15.3), la relation s'écrit alors :

$$\begin{aligned} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h) \ \geq \ & h \sum_{int} \int B(x) |\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h|^2 \, dx - C h^{\frac{5}{4}} ||e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h||^2_{L^2(\Omega)} \\ & + (1 - C h^{\frac{1}{4}} - C h^{\frac{3}{8}}) h \Theta_0 \sum_{bd} B(z_j) \int_\Omega |\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h|^2 \, dx \\ & + (1 - C h^{\frac{1}{4}} - C h^{\frac{3}{8}}) h \sum_{smt} \mu(\alpha_j) B(S_j) \int_\Omega |\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h|^2 \, dx \\ & - C h^{\frac{5}{4}} \sum_{bd} ||\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h||^2_{L^2(\Omega)} - C h^{\frac{5}{4}} \sum_{smt} ||\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h||^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{15.17}$$

Reportons la dernière minoration (15.17) dans (15.6), divisons par h et regroupons les termes en tenant compte de la partition de l'unité :

$$||e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h||^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{int} ||\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h||^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{bd} ||\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h||^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{smt} ||\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Alors, par compacité du bord du domaine et régularité du champ magnétique B, il existe $h_0 > 0$ et une constante c telle que pour tout $h \in]0, h_0]$:

$$\begin{aligned} & \sum_{int} \int \left(B(x) - B_* - |\nabla \phi|^2 - c h^{\frac{1}{4}} \right) |\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h|^2 \, dx \\ + \ & \sum_{bd} \int_\Omega \left(\Theta_0 B(z_j) - B_* - |\nabla \phi|^2 - c h^{\frac{1}{4}} \right) |\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h|^2 \, dx \\ + \ & \sum_{smt} \int_\Omega \left(\mu(\alpha_j) B(z_j) - B_* - |\nabla \phi|^2 - c h^{\frac{1}{4}} \right) |\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h|^2 \, dx \ \leq 0. \end{aligned} \tag{15.18}$$

Notons :

$$smt_* := \{ j |\ \mu(\alpha_j) B(S_j) = B_* \}. \tag{15.19}$$

Par hypothèse, nous avons donc :

$$\forall j \in smt_*,\ \mu(\alpha_j) B(S_j) < \inf \left(b, \Theta_0 b', \inf_{k \in smt \setminus smt_*} \mu(\alpha_k) B(S_k) \right).$$

Nous allons séparer les indices de smt entre smt_* et $smt \setminus smt_*$ pour lesquels la quantité $\mu(\alpha_j)B(S_j) - B_*$ reste strictement positive, la relation (15.18) devient :

$$\sum_{int} \int \left(B(x) - B_* - |\nabla \phi|^2 - c h^{\frac{1}{4}} \right) |\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h|^2 \, dx$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{bd} \int_\Omega \left(\Theta_0 B(z_j) - B_* - |\nabla\phi|^2 - ch^{\frac{1}{4}}\right) |\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h|^2 \, dx \\
&+ \sum_{smt\setminus smt_*} \int_\Omega \left(\mu(\alpha_j) B(z_j) - B_* - |\nabla\phi|^2 - ch^{\frac{1}{4}}\right) |\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h|^2 \, dx \\
\leq \quad & \sum_{smt_*} \int_\Omega \left(|\nabla\phi|^2 + ch^{\frac{1}{4}}\right) |\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h|^2 \, dx. \qquad (15.20)
\end{aligned}
$$

Choisissons maintenant la fonction ϕ sur Ω définie par :

$$\forall x \in \Omega, \ \phi(x) = \delta \max\left(d\left(x, \mathcal{N}'\right), h^{\frac{3}{8}}\right), \qquad (15.21)$$

où δ est un paramètre strictement positif. Nous remarquons qu'avec ce choix de ϕ, $|\nabla\phi| \leq \delta$ et $\nabla\phi$ est nul dans $\bigcup_{j\in smt_*} \mathcal{B}(S_j, h^{\frac{3}{8}})$ car la fonction y est constante, égale à $\delta h^{\frac{3}{8}}$. Pour avoir une estimation intéressante à partir de (15.20), nous choisissons δ vérifiant :

$$\delta^2 < \inf\left(b - B_*, \Theta_0 b' - B_*, \min_{j\in smt\setminus smt_*} (\mu(\alpha_j) B(S_j) - B_*)\right). \qquad (15.22)$$

Utilisons ce choix de δ dans (15.20) et notons que $B \geq b$ sur Ω, $B(z_j) \geq b'$, pour tout $j \in bd$, alors il existe une constante C telle que pour tout $h \in]0, h_1]$:

$$\sum_{int\cup bd\cup smt\setminus smt_*} \int \left|\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h\right|^2 \, dx \quad \leq \quad Ch^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{2\delta}{h^{\frac{1}{8}}}\right) \sum_{smt_*} \int_\Omega |\chi_j^h u_h|^2 \, dx. \qquad (15.23)$$

Notons :

$$\mathcal{V}' := \bigcup_{j\in smt_*} \mathcal{B}(S_j, h^{\frac{3}{8}}), \qquad (15.24)$$

alors par définition de la partition de l'unité, nous avons les majorations :

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega\setminus\mathcal{V}'} \left|e^{\frac{\delta d(x,\mathcal{N}')}{\sqrt{h}}} u_h(x)\right|^2 \, dx \quad &\leq \quad \sum_{int\cup bd\cup smt\setminus smt_*} \int \left|\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h\right|^2 \, dx, \\
\sum_{smt_*} \int_\Omega \left|\chi_j^h e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h\right|^2 \, dx \quad &\leq \quad \exp\left(\frac{2\delta}{h^{\frac{1}{8}}}\right) \int_{\mathcal{V}'} |u_h|^2 \, dx. \qquad (15.25)
\end{aligned}
$$

Reportons ces majorations dans (15.23), nous en déduisons :

$$\int_{\Omega\setminus\mathcal{V}'} |e^{\frac{\delta d(x,\mathcal{N}')}{\sqrt{h}}} u_h|^2 \, dx \leq Ch^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{2\delta}{h^{\frac{1}{8}}}\right) \int_{\mathcal{V}'} |u_h|^2 \, dx. \qquad (15.26)$$

Il reste à ajouter l'intégrale $\int_{\mathcal{V}'} \left|e^{\frac{\delta d(x,\mathcal{N}')}{\sqrt{h}}} u_h\right|^2 \, dx$ de part et d'autre pour obtenir l'estimation L^2 :

$$\int_\Omega \left|e^{\frac{\delta d(x,\mathcal{N}')}{\sqrt{h}}} u_h\right|^2 \, dx \leq 2Ch^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{2\delta}{h^{\frac{1}{8}}}\right) \int_{\mathcal{V}'} |u_h|^2 \, dx \leq 2C \exp\left(\frac{2\delta}{h^{\frac{1}{8}}}\right) \int_{\mathcal{V}'} |u_h|^2 \, dx. \qquad (15.27)$$

Ajoutons maintenant la norme du gradient. D'après le Lemme 3.9, nous pouvons écrire :

$$
\begin{aligned}
q_{h,\mathcal{A},\Omega}\left(e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h\right) \quad &= \quad \mathrm{Re}\left\langle e^{2\frac{\phi}{\sqrt{h}}} P_{h,\mathcal{A},\Omega} u_h, u_h \right\rangle + h \left|\left| \, |\nabla\phi| \, e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h \right|\right|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \quad \mu(h, B, \Omega) \left|\left| e^{i\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h \right|\right|^2_{L^2(\Omega)} + h \left|\left| \, |\nabla\phi| \, e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}} u_h \right|\right|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Par l'estimation de $\mu(h, B, \Omega)$ obtenue à la Proposition 14.5 et par hypothèse sur ϕ, il existe ainsi une constante C telle que :

$$\left|\left|\nabla_{h,\mathcal{A}}\left(e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}}u_h\right)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} \leq Ch\left|\left|e^{\frac{\phi}{\sqrt{h}}}u_h\right|\right|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{15.28}$$

Il suffit d'ajouter cette relation à l'estimation (15.27) pour obtenir le résultat souhaité. □

Corollaire 15.4. *Sous les mêmes hypothèses qu'au Théorème 15.3, considérons $\mathcal{V}$ un voisinage de $\mathcal{N}'$, alors, supposant u_h normalisée :*

$$||u_h||_{L^2(\mathcal{V})} = 1 + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{h}}}\right).$$

Cette estimation est encore valable pour la norme attachée à $H^1_{h,\mathcal{A},\Omega}$.

Démonstration : Soit r tel que $\bigcup_{S\in\mathcal{N}'} \mathcal{B}(S,r) \subset \mathcal{V}$. Alors :

$$||u_h||^2_{L^2(\mathcal{V})} \geq 1 - ||u_h||^2_{L^2(\Omega\setminus\bigcup_{S\in\mathcal{N}'}\mathcal{B}(S,r))}.$$

Or d'après le Théorème 15.3, nous avons :

$$||u_h||^2_{L^2\left(\Omega\setminus\bigcup_{S\in\mathcal{N}'}\mathcal{B}(S,r)\right)} \leq e^{-\frac{2\delta r}{\sqrt{h}}}\left|\left|e^{\frac{\delta d(x,\mathcal{N}')}{\sqrt{h}}}u_h\right|\right|^2_{L^2\left(\Omega\setminus\bigcup_{S\in\mathcal{N}'}\mathcal{B}(S,r)\right)} \leq Ce^{-\frac{2\delta r}{\sqrt{h}}}e^{2\frac{\delta}{h^{1/8}}}.$$

Ainsi :

$$1 - \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{h}}}\right) \leq ||u_h||^2_{L^2(\mathcal{V})} \leq 1.$$

□

15.4 Localisation pour les polygones réguliers

Intéressons-nous à la localisation de l'état fondamental associé à un polygone régulier. De tels domaines ne possèdent que des angles de même mesure et nous montrerons de manière heuristique comment l'invariance de ces domaines par rotation permet de construire un état fondamental associé à la plus petite valeur propre et dont l'intensité est répartie sur chaque sommet. Les résultats que nous établissons ici reposent sur les techniques développées par Helffer-Sjöstrand (cf Helffer [56] ou [63]) pour analyser l'effet tunnel.
Insistons sur le fait que nous suivrons une démarche heuristique et ajouterons des hypothèses qui semblent physiquement naturelles mais que nous ne savons pas justifier mathématiquement.
Nous considérons la fonction propre associée au secteur d'angle α_n, angle au sommet du polygone à n côtés, noté P^n. Grâce à cette fonction, nous construisons n fonctions localisées chacune en un sommet du polygone. Nous estimons la distance entre le sous-espace E engendré par ces n fonctions et l'espace F des n premiers vecteurs propres à l'aide du Théorème 2.21. Nous projetons les n fonctions de E sur F et déduisons une base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$ à l'aide du procédé de Gram-Schmidt. Il reste à analyser la matrice $(\langle(P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}e_j, e_k\rangle)_{1\leq j,k\leq n}$ et regarder la localisation du premier vecteur propre.

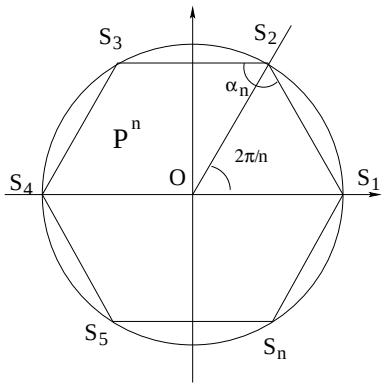


FIG. 15.1 – Polygone régulier P^n, $n = 6$.

Considérons le domaine P^n qui est le polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité et supposons pour l'instant $n \geq 4$. Nous notons $S_1, \ldots, S_n$ les sommets du polygone et α_n l'angle $\widehat{S_1S_2S_3}$, cet angle vaut $\frac{n-2}{n}\pi$. L'angle $\widehat{S_jOS_{j+1}}$ vaut donc $\frac{2\pi}{n}$ pour tout $j = 1, \ldots, n$ avec la convention que $S_{n+1} = S_1$. Notons g la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et G la matrice associée :

$$G = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}.$$

Considérons une fonction $u \in \mathcal{D}^N(P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n})$ où B est un champ magnétique constant strictement positif et comparons $P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}(g * u)$ avec $g * (P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}u)$ en définissant :

$$\forall x \in P^n,\ g * u(x) := u(g(x)). \tag{15.29}$$

Par définition de g et G, pour tout $x \in P^n$, $g(x) = G\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, par conséquent, notant $y = g(x)$, nous calculons facilement :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{2\pi}{n}y_1 + \cos\frac{2\pi}{n}y_2 \\ -\cos\frac{2\pi}{n}y_1 - \sin\frac{2\pi}{n}y_2 \end{pmatrix} = {}^tG\begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}, \tag{15.30}$$

$$\nabla_x u(g(x)) = {}^tG\nabla_y u(y) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n}\partial_{y_1}u(y) + \sin\frac{2\pi}{n}\partial_{y_2}u(y) \\ -\sin\frac{2\pi}{n}\partial_{y_1}u(y) + \cos\frac{2\pi}{n}\partial_{y_2}u(y) \end{pmatrix}. \tag{15.31}$$

Nous déduisons ainsi :

$$\left(h\nabla - i\frac{B}{2}\mathcal{A}_0\right)^2 (g * u)(x) = g * \left(\left(h\nabla - i\frac{B}{2}\mathcal{A}_0\right)^2 u\right)(x). \tag{15.32}$$

La relation (15.32) justifie immédiatement :

$$\forall k = 0, \ldots, n,\ P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}(g^k * u) = g^k * (P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}u), \tag{15.33}$$

où g^k désigne la rotation d'angle $\frac{2k\pi}{n}$. Supposons que $\mu(\alpha_n)$ est une valeur propre et considérons u_1^0 un vecteur propre normalisé associé à $\mu(\alpha_n)$ pour l'opérateur $P_{\Omega_{\alpha_n}}$. Définissons la fonction u_1 déduite de u_1^0 par translation de OS_1, rotation d'angle π et dilatation afin que u_1 soit une fonction propre normalisée pour l'opérateur $P_{h,b\mathcal{A}_0,\Omega_{S_nS_1S_2}}$ pour la valeur propre $hB\mu(\alpha_n)$ où $\Omega_{S_nS_1S_2}$ désigne

le secteur de sommet S_1 d'angle au sommet α_n. Considérons $\chi_\varepsilon^0 \in C_0^\infty([0,\infty[,[0,1])$ dont le support est inclus dans $\left[0, 1-\frac{\varepsilon}{2}\right]$ et telle que $\chi_\varepsilon^0 = 1$ sur $[0, 1-\varepsilon]$. Définissons la fonction χ_ε sur P^n par :

$$\forall x \in P^n,\ \chi_\varepsilon(x) := \chi_\varepsilon^0\left(\frac{|x-S_1|}{|S_1-S_2|}\right). \tag{15.34}$$

La fonction χ_ε permet de localiser la fonction propre u_1 au voisinage de S_1. Définissons les fonctions $\tilde{u}_k$ sur P^n par :

$$\tilde{u}_k = g^{k-1} * (\chi_\varepsilon u_1),\ \forall k = 1, \ldots, n. \tag{15.35}$$

Les fonctions $\tilde{u}_k$ sont localisées au sommet S_k. La construction de la fonction u_1 et le Théorème 9.1 montrent alors que pour tout $\delta \in \left]0, \sqrt{\Theta_0 - \mu(\alpha_n)}\right[$, il existe des constantes h_0 et C telles que pour tout $h \in]0, h_0]$:

$$||u_1 - \tilde{u}_1||_{L^2(P^n)} \leq Ce^{-\frac{\delta(1-\varepsilon)d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}, \tag{15.36}$$

$$P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}(\tilde{u}_1) = hB\mu(\alpha_n)\tilde{u}_1 + r_1 \text{ avec } ||r_1||_{L^2(P^n)} \leq Ce^{-\frac{\delta(1-\varepsilon)d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}. \tag{15.37}$$

Les relations (15.36), (15.37) et le Théorème spectral 2.3 montrent alors que :

$$d\left(\sigma(P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}), hB\mu(\alpha_n)\right) = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\delta(1-\varepsilon)d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}\right). \tag{15.38}$$

La relation (15.33) et la construction des fonctions $\tilde{u}_k$ montrent que pour tout $k = 1, \ldots, n$ et $h \in]0, h_0]$:

$$||g^{k-1} * u_1 - \tilde{u}_k||_{L^2(P^n)} \leq Ce^{-\frac{\delta(1-\varepsilon)d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}, \tag{15.39}$$

$$P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}(\tilde{u}_k) = hB\mu(\alpha_n)\tilde{u}_k + r_k \text{ avec } ||r_k||_{L^2(P^n)} \leq Ce^{-\frac{\delta(1-\varepsilon)d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}. \tag{15.40}$$

Notons F l'espace propre associé aux n premières valeurs propres $\mu(h,B,P^n), \ldots, \mu_n(h,B,P^n)$ et E l'espace engendré par les fonctions $g^{k-1} * (\chi_\varepsilon u_1)$, pour $k = 1, \ldots, n$:

$$E = \text{span}(\chi_\varepsilon u_1, g * (\chi_\varepsilon u_1), \ldots, g^{n-1} * (\chi_\varepsilon u_1)) = \text{span}(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n),$$

ainsi que S la matrice :

$$S = \left(\langle \tilde{u}_j, \tilde{u}_k \rangle_{L^2(P^n)}\right)_{1\leq j,k\leq n} = \left(\left\langle g^j * (\chi_\varepsilon u_1), g^k * (\chi_\varepsilon u_1)\right\rangle_{L^2(P^n)}\right)_{1\leq j,k\leq n}. \tag{15.41}$$

Remarquons, en utilisant (15.39), que pour tout $j = 1, \ldots, n$:

$$S_{j,j} = 1 + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{2\delta(1-\varepsilon)d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}\right). \tag{15.42}$$

Par localisation du support $g^k * \chi_\varepsilon$ et décroissance de la fonction propre u_1 exprimée au Théorème 9.1, nous avons également pour tout $j \neq k$:

$$|S_{j,k}| = \left|\int_{P^n} \tilde{u}_j \overline{\tilde{u}_k}\, dx\right| \leq \int_{P^n} \left|e^{\frac{\delta d(S_j,x)}{\sqrt{h}}}\tilde{u}_j\right| \left|e^{\frac{\delta d(S_j,x)}{\sqrt{h}}}\tilde{u}_k\right| e^{-\frac{\delta d(S_j,S_k)}{\sqrt{h}}}\, dx \leq Ce^{-\frac{\delta d(S_j,S_k)}{\sqrt{h}}}. \tag{15.43}$$

Par conséquent, pour tout $\delta' \in \left]0, \sqrt{\Theta_0 - \mu(\alpha_n)}\right[$, nous pouvons construire une fonction de troncature χ_ε tel qu'il existe h_0 vérifiant pour tout $h \in]0, h_0[$:

$$S = \text{Id}_n + \mathcal{O}\left(e^{-\delta'\frac{d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}\right), \tag{15.44}$$

en notant Id_n la matrice identité de taille n. Supposons que la valeur propre $\mu(\alpha_n)$ est simple. Notons $c = \frac{\mu_2(\alpha_n)-\mu(\alpha_n)}{2}$ et $J(h)$ l'intervalle $]hB(\mu(\alpha_n) - c), hB(\mu(\alpha_n) + c)[$. Effectuons l'hypothèse :

$$\exists h_0 > 0, \exists C > 0 |\ \forall h \in]0, h_0],\ \mathrm{Card}\{\lambda \in \sigma(P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n})|\ \lambda \leq hB(\mu(\alpha_n) + c)\} \leq Ch^{-2}. \quad (15.45)$$

Cette estimation résulte des travaux de Robert [86], Combes-Seiler-Schrader [36] et nous l'admettrons.
Alors, il existe nécessairement un intervalle de taille h^4 de $J(h)$ ne contenant ni $hB\mu(\alpha_n)$ ni aucune valeur propre de $P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}$. Si ce n'était en effet pas le cas, alors en coupant l'intervalle $J(h)$ en sous-intervalles de taille h^4, chacun de ces sous-intervalles contiendrait au moins une valeur propre de $P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}$. Or, $J(h)$ se décompose en $\frac{2Bc}{h^3}$ intervalles de taille h^4, ce qui donnerait au moins $\frac{2Bc}{h^3}$ valeurs propres en dessous de $hB(\mu(\alpha_n) + c)$, ce qui contredit (15.45). Nous pouvons même affirmer qu'il existe de l'ordre de $\frac{1}{h}$ intervalles sans valeurs propres. Reprenant les notations du Théorème 2.21, il existe un intervalle $I(h)$ contenant $hB\mu(\alpha_n)$ tel que :

$$\sigma(P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}) \cap (I(h) + \mathcal{B}(0, h^4) \setminus I(h)) = \emptyset,$$

alors, reprenant (15.40) :

$$d(E, F) \leq \frac{2e^{-\delta(1-\varepsilon)\frac{d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}\sqrt{n}}{h^4\sqrt{\lambda_S^{\min}}}, \quad (15.46)$$

où $\lambda_S^{\min}$ est la plus petite valeur propre de la matrice S. Comme la relation (15.46) est valable pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ et tout $\delta \in \left]0, \sqrt{\Theta_0 - \mu(\alpha_n)}\right[$, alors pour tout $\tilde{\delta} \in \left]0, \sqrt{\Theta_0 - \mu(\alpha_n)}\right[$:

$$d(E, F) = \mathcal{O}\left(e^{-\tilde{\delta}\frac{d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}\right). \quad (15.47)$$

Pour tout $k = 1, \ldots, n$, définissons la projection de $\tilde{u}_k$ sur F :

$$v_k := \Pi_F(g^{k-1} * (\chi_\varepsilon u_1)) = \Pi_F \tilde{u}_k,\ \forall k = 1, \ldots, n. \quad (15.48)$$

La relation (15.47) et la définition de la distance d impliquent alors :

$$\forall k = 1, \ldots, n,\ ||v_k - \tilde{u}_k||^2_{L^2(P^n)} = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{2\tilde{\delta}d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}\right). \quad (15.49)$$

Remarquons l'égalité pour tout $j, k = 1, \ldots, n$:

$$\langle v_j, v_k\rangle_{L^2(P^n)} = \langle \tilde{u}_j, \tilde{u}_k\rangle_{L^2(P^n)} + \langle v_j - \tilde{u}_j, v_k - \tilde{u}_k\rangle_{L^2(P^n)}.$$

Nous déduisons alors de (15.49) :

$$\forall j, k = 1, \ldots, n,\ \langle v_j, v_k\rangle_{L^2(P^n)} = \langle \tilde{u}_j, \tilde{u}_k\rangle_{L^2(P^n)} + \mathcal{O}\left(e^{-2\frac{\tilde{\delta}d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}\right). \quad (15.50)$$

Pour estimer $\langle P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n} v_j, v_k\rangle_{L^2(P^n)}$, nous calculons :

$$\langle P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n} v_j, v_k\rangle_{L^2(P^n)} = \langle P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}\tilde{u}_j, \tilde{u}_k\rangle_{L^2(P^n)} - \langle v_j - \tilde{u}_j, P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}(v_k - \tilde{u}_k)\rangle_{L^2(P^n)}. \quad (15.51)$$

La définition (15.48) permet d'estimer $P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}(v_k - \tilde{u}_k)$ à l'aide de (15.40) :

$$\begin{aligned} P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}(v_k - \tilde{u}_k) &= P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}((\Pi_F - \mathrm{Id})\tilde{u}_k) \\ &= (\Pi_F - \mathrm{Id})P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}(\tilde{u}_k) \\ &= hB\mu(\alpha_n)(v_k - \tilde{u}_k) + (\Pi_F - \mathrm{Id})r_k. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité permet d'estimer $\langle P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n} v_j, v_k\rangle_{L^2(P^n)}$ à l'aide de $\langle P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}\tilde{u}_j, \tilde{u}_k\rangle_{L^2(P^n)}$:

$$\langle P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n} v_j, v_k\rangle_{L^2(P^n)} = \langle P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}\tilde{u}_j, \tilde{u}_k\rangle_{L^2(P^n)} + \mathcal{O}\left(e^{-2\frac{\tilde{\delta}d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}\right). \tag{15.52}$$

La relation (15.40) conduit à :

$$\langle P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}\tilde{u}_j, \tilde{u}_k\rangle_{L^2(P^n)} = hB\mu(\alpha_n)\,\langle \tilde{u}_j, \tilde{u}_k\rangle_{L^2(P^n)} + \langle r_j, \tilde{u}_k\rangle_{L^2(P^n)}. \tag{15.53}$$

Reportons cette relation dans (15.52) en se souvenant de (15.50) :

$$\langle P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n} v_j, v_k\rangle_{L^2(P^n)} = hB\mu(\alpha_n)\,\langle v_j, v_k\rangle_{L^2(P^n)} + \langle r_j, \tilde{u}_k\rangle_{L^2(P^n)} + \mathcal{O}\left(e^{-2\frac{\tilde{\delta}d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}\right). \tag{15.54}$$

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de construire une base orthonormée de F à partir des fonctions $v_1,\dots,v_n$. Notons $(e_1,\dots,e_n)$ cette base, alors :

$$\forall k = 1,\dots,n,\ e_k = \sum_{j=1}^{n} (V^{-\frac{1}{2}})_{k,j} v_j \text{ avec } V := \left(\langle v_j, v_k\rangle_{L^2(P^n)}\right)_{1\le j,k\le n}. \tag{15.55}$$

Les relations (15.50) et (15.44) conduisent à l'estimation de la matrice V :

$$V = \mathrm{Id}_n + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\tilde{\delta}d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}\right). \tag{15.56}$$

Nous en déduisons :

$$\forall j = 1,\dots,n,\ e_j = v_j + \mathcal{O}\left(e^{-\tilde{\delta}\frac{d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}\right) = \tilde{u}_j + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\tilde{\delta}d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}\right). \tag{15.57}$$

Notons que l'orthonormalisation respecte l'effet de la fonction g :

$$\forall k = 1,\dots,n,\ g^{k-1} * e_1 = e_k. \tag{15.58}$$

Définissons la matrice hermitienne M :

$$M := \left(\langle (P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n} - hB\mu(\alpha_n))e_j, e_k,\rangle_{L^2(P^n)}\right)_{1\le j,k\le n}. \tag{15.59}$$

La matrice M renseigne sur le spectre de l'opérateur $P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}$ comme le précise la proposition suivante :

Proposition 15.5. *Soit P^n un polygone régulier d'angle au sommet α_n tel que $\mu(\alpha_n) < \Theta_0$. Notons F l'espace propre associé aux n plus petites valeurs propres de $P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}$, alors pour tout $\tilde{\delta} \in]0, \sqrt{\Theta_0 - \mu(\alpha_n)}[$, il existe h_0 tel que pour tout $h \in]0, h_0[$:*

$$d\left(\sigma(P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n|_F}), hB\mu(\alpha_n)\right) = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\tilde{\delta}d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}\right). \tag{15.60}$$

En outre, il existe une base orthonormée de F telle que dans cette base, le spectre de $P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n|_F}$ est décrit par celui de la matrice $M = (m_{j,k})_{1\le j,k\le n}$ définie en (15.59) telle que $M = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\tilde{\delta}d(S_1,S_2)}{\sqrt{h}}}\right)$ et dont les coefficients vérifient les propriétés suivantes pour tout $j,k \in 1,\dots,n$, avec la convention $m_{j,k+n} = m_{j,k}$:

- $m_{j,k} = m_{1,k-j+1}$;

- $m_{j,k} = \overline{m_{k,j}}$;
- $m_{j,k} = m_{j,2j-k}$.

Sous des hypothèses supplémentaires, nous précisons maintenant le spectre de M de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_3 & \dots & a_n & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix},$$

où les coefficients sont des complexes tels que a_1 est réel, pour tout $j = 2, \dots, n$, $a_j = \overline{a_{n+2-j}}$. Définissons les vecteurs X_k pour $k = 1, \dots, n$:

$$X_k = \left(e^{\frac{2ik(j-1)\pi}{n}}\right)_{j=1,\dots,n}. \tag{15.61}$$

Un simple calcul montre que les vecteurs $(X_k)_{k=1,\dots,n}$ forment une base de vecteurs propres pour la matrice M, associés aux valeurs propres $\lambda_k = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{\frac{2ik(j-1)\pi}{n}}$. Par propriétés de la matrice M, nous simplifions l'expression de λ_k :

$$\lambda_k \quad = \quad \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} a_j e^{\frac{2ik(j-1)\pi}{n}}. \tag{15.62}$$

Effectuons une translation de manière à ce que $a_1 = 0$. Supposons que les coefficients dominants dans la matrice M sont les coefficients sur- et sous-diagonaux :

$$|a_2| >> \max(|a_3|, \dots, |a_{n-1}|). \tag{15.63}$$

Cette hypothèse est naturelle car l'influence des fonctions e_j est sans doute beaucoup plus importante sur les voisins les plus proches et décroit exponentiellement avec les voisins suivants. Cette hypothèse n'est pas justifiée mathématiquement. Nous considérons donc la nouvelle matrice N :

$$N = |a_2| \begin{pmatrix} 0 & e^{it} & 0 & \dots & 0 & e^{-it} \\ e^{-it} & 0 & e^{it} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{-it} & 0 & e^{it} \\ e^{it} & 0 & \dots & 0 & e^{-it} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de N' valent :

$$\lambda_k = |a_2| e^{it} e^{\frac{2ik\pi}{n}} + e^{-it} e^{-\frac{2ik\pi}{n}} = 2|a_2| \cos\left(t + \frac{2k\pi}{n}\right), \ k = 0, \dots, n-1. \tag{15.64}$$

Les vecteurs propres associés sont les X_k. Les états propres, en particulier celui de la plus petite valeur propre, est localisé sur chaque sommet car aucune composante n'est nulle. Les valeurs propres λ_k sont simples sauf si $t \in \left\{\frac{1}{n}\pi, \dots, \frac{2n-3}{n}\pi\right\}$ modulo 2π, auquel cas il existe une valeur propre λ_k double.

Considérons la plus petite valeur propre λ_k et supposons qu'elle est simple. Alors, récrivant le vecteur propre X_k dans la base des $(e_j)_j$, nous définissons :

$$\psi_k := \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{2ik(j-1)\pi}{n}} e_j. \tag{15.65}$$

Alors, reprenant (15.57), ψ_k est réparti sur tous les sommets S_j, ce qui laisse présumer que l'état fondamental vit sur chaque sommet avec une décroissance exponentielle en s'éloignant des coins si nous supposons que l'écart entre les deux premières valeurs propres de N est supérieur à l'erreur d'approximation de M par la matrice N.

Supposons que la plus petite valeur propre λ_k est double (donc $t \in \left\{\frac{1}{n}\pi, \ldots, \frac{2n-3}{n}\pi\right\}$ modulo 2π) ; soient k et k' tels que :

$$\lambda_k = \lambda_{k'}. \tag{15.66}$$

Nous avons deux fonctions propres $\psi_k = \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{2ik(j-1)\pi}{n}} e_j$ et $\psi_{k'} = \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{2ik'(j-1)\pi}{n}} e_j$. Montrons que toute combinaison linéaire de ψ_k et $\psi_{k'}$ annule au plus une composante. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors ψ_k et $\psi_{k'}$ se récrivent à l'aide de ω :

$$\psi_k = \sum_{j=1}^{n} \omega^{k(j-1)} e_j \text{ et } \psi_{k'} = \sum_{j=1}^{n} \omega^{k'(j-1)} e_j.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $\psi_k - \alpha\psi_{k'}$ vaut :

$$\psi_k - \alpha\psi_{k'} = \sum_{j=1}^{n} (\omega^{k(j-1)} - \alpha\omega^{k'(j-1)}) e_j. \tag{15.67}$$

Alors, de manière évidente, il existe au plus une composante nulle dans $\psi_k - \alpha\psi_{k'}$. Par conséquent, l'état fondamental de $P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}$ est réparti sur au moins $n-1$ sommets. Nous déduisons ainsi le résultat :

Résultat heuristique 15.6. *Reprenons les hypothèses et notations de la Proposition 15.5. Supposons que la matrice M vérifie les conditions :*

- $m_{1,1} = 0$;
- $|m_{1,2}| >> \max(|m_{1,3}|, \ldots, |m_{1,n-1}|)$;
- $m_{1,2} = \rho e^{it}$.

Alors :

$$\sigma\left(P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}{}_{|_F}\right) = \left\{2\rho\cos\left(t + \frac{2k}{n}\pi\right),\ k = 0, \ldots, 2n-3\right\}.$$

Une base de vecteurs propres est donnée par les fonctions $X_k = \left(e^{\frac{2ik(j-1)\pi}{n}}\right)_{j=1,\ldots,n}$.

Si la plus petite valeur propre de M est simple et que la seconde est «suffisamment» éloignée de la première, alors l'état fondamental de $P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}$ est réparti sur les n sommets et décroit exponentiellement en s'éloignant des sommets.

Si la plus petite valeur propre de M est double, alors nous pouvons construire un état propre de $P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}$ réparti sur $n-1$ sommets, mais pas moins.

Chapitre 16

Simplicité de la première valeur propre de $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$

16.1 Domaine particulier

Proposition 16.1. *Soit Ω un domaine vérifiant les conditions $(\mathcal{H}_1)$. Nous supposons de plus qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\Omega \cap \mathcal{B}(S_1, \varepsilon) = \Omega_{\alpha_1} \cap \mathcal{B}(0, \varepsilon)$, à translation et rotation près.*
Supposons :

- $\mu(\alpha_1) < \inf\left(1, \Theta_0, \inf_{k=2,\ldots,N} \mu(\alpha_k)\right)$,
- $\mu(\alpha_1)$ *est simple.*

Alors, si B est un champ magnétique constant, il existe h_0 tel que pour tout $h \in]0, h_0]$, la valeur propre associé à l'opérateur $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}$, $\mu(h, B, \Omega)$, est simple.

Remarque 16.2.

- *Les hypothèses sur le sommet S_1 reviennent à dire que localement dans le voisinage de ce sommet, le domaine Ω est un secteur angulaire. De plus, d'après les résultats de localisation de la Section 15 et en particulier le Théorème 15.3, l'état fondamental de l'opérateur $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}$ est localisé au sommet S_1.*
- *L'hypothèse de simplicité de $\mu(\alpha_1)$ est vérifiée pour les angles α_1 petits comme nous l'avons établi à la Proposition 10.7. Il est connu que la première valeur propre du Laplacien est simple mais nous savons (cf Avron-Herbst-Simon [7, 8, 9], Bauman-Phillips-Tang [12], Helffer [56], Lavine-O'Carroll [74]) que la multiplicité peut être grande pour l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique.*

Démonstration : Pour simplifier les notations, nous supposons que $\Omega \cap \mathcal{B}(S_1, \varepsilon) = \Omega_{\alpha_1} \cap \mathcal{B}(0, \varepsilon)$. Nous allons comparer les états propres des opérateurs $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_1}}$ et $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}$ et montrer qu'un vecteur propre de l'un fournit un quasi-mode pour l'autre.

La Remarque 3.3 montre que la première valeur propre de $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_1}}$ vaut $hB\mu(\alpha_1)$ et le vecteur propre associé se déduit de celui de $P_{1,\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_1}}$ par changement de variables. Notons $u_{\alpha_1,h,B}$ un vecteur propre normalisé pour l'opérateur $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_1}}$. Alors :

$$P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_1}} u_{\alpha_1,h,B} = hB\mu(\alpha_1) u_{\alpha_1,h,B}.$$

Soit $\chi \in C_0^\infty([0,\infty[, [0,1])$ telle que $\chi = 1$ sur $[0, \frac{1}{2}]$. Définissons la dilatée de χ : $\chi_\varepsilon(.) = \chi\left(\frac{.}{\varepsilon}\right)$ et la fonction :

$$x \in \Omega \mapsto \chi_\varepsilon(|x|) u_{\alpha_1,h,B}(x),$$

que nous noterons par abus de notation $\chi_\varepsilon u_{\alpha_1,h,B}$. Choisissons ε assez petit de telle sorte que $\Omega \cap \operatorname{supp}\chi_\varepsilon = \Omega_{\alpha_1} \cap \operatorname{supp}\chi_\varepsilon$. Comme nous l'avons déjà calculé à plusieurs reprises, le Théorème 9.1 et la Remarque 3.3 permettent de connaître le comportement du vecteur $u_{\alpha_1,h,B}$ et ainsi, pour tout $\delta \in]0, \sqrt{B(\Theta_0 - \mu(\alpha_1))}[$, il existe h_0 tel que pour tout $h \in]0, h_0]$:

$$||\chi_\varepsilon u_{\alpha_1,h,B}||_{L^2(\Omega)} = 1 + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\delta}{\sqrt{h}}\frac{\varepsilon}{2}}\right). \tag{16.1}$$

De plus, nous avons :

$$P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}(\chi_\varepsilon u_{\alpha_1,h,B}) \quad = \quad hB\mu(\alpha_1)\chi_\varepsilon u_{\alpha_1,h,B} + [P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}, \chi_\varepsilon]u_{\alpha_1,h,B}.$$

Le Théorème 9.1 et la Remarque 3.3 montent que $||[P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}, \chi_\varepsilon]u_{\alpha_1,h,B}||_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\delta}{\sqrt{h}}\frac{\varepsilon}{2}}\right)$, et permettent de déduire :

$$\frac{||(P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega} - hB\mu(\alpha_1))(\chi_\varepsilon u_{\alpha_1,h,B})||_{L^2(\Omega)}}{||\chi_\varepsilon u_{\alpha_1,h,B}||_{L^2(\Omega)}} = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\delta}{\sqrt{h}}\frac{\varepsilon}{2}}\right). \tag{16.2}$$

Le Théorème spectral 2.3 affirme donc qu'il existe une valeur propre λ de $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}$ telle que :

$$|\lambda - hB\mu(\alpha_1)| \leq \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\delta}{\sqrt{h}}\frac{\varepsilon}{2}}\right). \tag{16.3}$$

Nous allons maintenant montrer qu'il existe une valeur propre de $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_1}}$ exponentiellement proche de la plus petite valeur propre de $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}$. Soit $\lambda(h)$ une valeur propre de $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}$ telle que $\lambda(h) \in \mathcal{B}\left(hB\mu(\alpha_1), C_0 e^{-\frac{\delta}{\sqrt{h}}\frac{\varepsilon}{2}}\right)$ avec C_0 assez grand. Notons u_h un vecteur propre normalisé associé et définissons $v_h := \chi_\varepsilon u_h$. Commençons par établir une estimation de la norme L^2 de v_h. Comme $v_h = u_h$ au voisinage du sommet, le Corollaire 15.4 montre qu'il existe $\tilde{\delta} > 0$ et $h_0 > 0$ telles que pour tout $h \in]0, h_0]$:

$$||v_h||_{L^2(\Omega)} = 1 + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{h}}}\right). \tag{16.4}$$

Comme précédemment, nous calculons $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_1}} v_h$. Si le support de χ_ε est assez petit, nous avons :

$$P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_1}} v_h = P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega} v_h = \lambda(h) v_h + [P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}, \chi_\varepsilon]u_h. \tag{16.5}$$

Le Corollaire 15.4 montre que $||[P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}, \chi_\varepsilon]u_h||_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{h}}}\right)$. Par conséquent :

$$\frac{||(P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega} - \lambda(h))v_h||_{L^2(\Omega)}}{||v_h||_{L^2(\Omega)}} = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{h}}}\right). \tag{16.6}$$

D'après le Théorème spectral 2.3, il existe donc une valeur propre μ de $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_1}}$ telle que :

$$|\mu - \lambda(h)| = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{h}}}\right). \tag{16.7}$$

Il reste à montrer que les deux estimations (16.3) et (16.7) permettent de conclure à la simplicité de la première valeur propre de $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}$.
Comme $\lambda(h) \in \mathcal{B}\left(hB\mu(\alpha_1), C_0 e^{-\frac{\delta}{\sqrt{h}}\frac{\varepsilon}{2}}\right)$, les deux estimations (16.3) et (16.7) montrent alors qu'il existe des constante C et d telles que :

$$|hB\mu(\alpha_1) - \mu| \leq Ce^{-\frac{d}{\sqrt{h}}}. \tag{16.8}$$

L'hypothèse de simplicité de $\mu(\alpha_1)$ implique qu'il existe une constante $\tilde{C} > 0$ telle que :

$$hB\mu_2(\alpha_1) - hB\mu(\alpha_1) > \tilde{C}Bh. \tag{16.9}$$

La combinaison des deux relations (16.8) et (16.9) montre qu'il existe $h_1 \leq h_0$ tel que pour tout $h \in]0, h_1]$, $\mu = hB\mu(\alpha_1)$. Supposons que la valeur propre $\lambda(h)$ est double, notons u_h^j, $j = 1,\ 2$ les vecteurs propres normalisés associés, $v_h^j = \chi_\varepsilon u_h^j$ les fonctions tronquées et E_j les espaces engendrés par v_h^j. Reprenons les calculs précédents avec $v_h = v_h^1$ puis $v_h = v_h^2$, alors :

$$P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_1}} v_h^j \quad = \quad \lambda(h) v_h^j + r_h^j \text{ avec } ||r_h^j||_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{h}}}\right). \tag{16.10}$$

Notons F l'espace engendré par le premier vecteur propre de $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}$ noté ψ_1. Le Théorème 2.21 et la relation (2.55) montrent que pour $\delta' \in]0, \tilde{\delta}[$:

$$||v_h^1 - \psi_1||_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\delta'}{\sqrt{h}}}\right) \text{ et } ||v_h^2 - \psi_1||_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\delta'}{\sqrt{h}}}\right).$$

Cette relation permet de majorer la norme $||v_h^1 - v_h^2||_{L^2(\Omega)}$ par $\mathcal{O}\left(e^{-\frac{\delta'}{\sqrt{h}}}\right)$, ce qui ne peut être. Donc la première valeur propre pour $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}$ est simple. □

16.2 Simplicité de la première valeur propre de $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$

Comme nous l'avons vu dans la démonstration de la simplicité de la Proposition 16.1, nous utilisons des minorations de l'écart entre les deux premières valeurs propres sur le secteur angulaire pour justifier la simplicité de la première valeur propre. Pour démontrer la simplicité dans un cadre plus général, nous aurons besoin d'une minoration de l'écart entre les deux valeurs propres sur un domaine quelconque. Pour établir ce résultat, nous nous inspirons des travaux de Simon [98] (cf aussi la présentation dans [39]) qui considérait le problème de l'équation de Schrödinger.

Proposition 16.3. *Soit Ω un domaine vérifiant l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$. Notons $\mu_2(h, B, \Omega)$ la deuxième valeur propre de l'opérateur $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ avec champ magnétique $B = \operatorname{rot} \mathcal{A}$ et e_n la n-ième valeur propre de $\bigoplus_j P_{B(S_j)\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_j}}$ comptée avec multiplicité. Supposons :*

- $\mu(\alpha_1) < \Theta_0$,
- $B(S_1)\mu(\alpha_1) < \inf(b, \Theta_0 b', \inf(B(S_j)\mu(\alpha_j), j = 2, \ldots, N))$.

Alors :

$$\liminf_{h\to 0} \frac{\mu_2(h, B, \Omega)}{h} \geq e_2.$$

Démonstration : Reprenons la partition de l'unité définie à la Proposition 14.1 avec les notations (14.6) et définissons :

$$\chi_0^h := \sqrt{\sum_{j \in bd \cup int} |\chi_j^h|^2}.$$

Ainsi la partition $(\chi_j^h)_{j=0,\ldots,N}$ est telle que :

- Pour tout $j = 1, \ldots, N$, $\operatorname{supp} \chi_j^h \subset \mathcal{B}(S_j, h^\rho)$.
- $\operatorname{supp} \chi_0^h \cap \{S_1, \ldots, S_N\} = \emptyset$.

Il existe alors $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in]0, h_0]$, les fonctions $(\chi_j^h)_{j=1,\ldots,N}$ sont à support disjoint. La relation (14.7) s'écrit alors :

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) = \sum_{j=0}^{N} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) - h^2 \sum_{j=0}^{N} || \ |\nabla \chi_j^h| \ u||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{16.11}$$

Supposons u normalisée et choisissons comme précédemment $\rho = \frac{3}{8}$; alors l'hypothèse sur la fonction χ conduit à :

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) = \sum_{j=0}^{N} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) + \mathcal{O}(h^{2-2\rho})||u||^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{j=0}^{N} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) + \mathcal{O}(h^{\frac{5}{4}})||u||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{16.12}$$

Estimons chaque terme $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u)$ pour $j = 0, \ldots, N$. Pour le bord régulier ($j = 0$), la Proposition 14.4, avec les définitions (15.1), mène à la minoration :

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_0^h u) \geq (h \inf(b, \Theta_0 b') - \mathcal{O}(h^{\frac{5}{4}}))||\chi_0^h u||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{16.13}$$

Considérons le changement de variables donné par un C^1-difféomorphisme g qui envoie localement Ω_{α_j} sur $\Omega \cap \mathcal{B}(S_j, \varepsilon)$. À translation et rotation près, ce changement de variables (déjà mentionné à la Section 14.1.2) ramène l'étude de $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ à celle de $P_{h,B(S_j)\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_j}}$ pour $1 \leq j \leq N$ en reprenant (14.25) et notant $\tilde{\chi}_j^h \tilde{u}$ la fonction déduite de $\chi_j^h u$ par changement de variables, nous avons alors :

$$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) = \int_{\Omega_{\alpha_j}} \sum_{1 \leq k,l \leq 2} g_{k,l}(h\partial_k - i\tilde{A}_k)(\tilde{\chi}_j^h \tilde{u})\overline{(h\partial_l - i\tilde{A}_l)(\tilde{\chi}_j^h \tilde{u})}\sqrt{\det g}\ dx. \tag{16.14}$$

Après un éventuel changement de jauge, nous pouvons supposer que $\tilde{\mathcal{A}} = B(S_j)\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}'$ avec $\mathcal{A}' = \mathcal{O}(x^2)$ (cf sous-section 14.1.3). Reprenons l'estimation de (16.14), alors :

$$\begin{aligned} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) &= q_{h,B(S_j)\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_j}}(\tilde{\chi}_j^h \tilde{u}) \\ &+ \int_{\Omega_{\alpha_j}} \sum_{1 \leq k,l \leq 2} \left(\sqrt{\det g}\ g_{k,l} - \delta_{k,l}\right)(h\partial_k - i\tilde{A}_k)(\tilde{\chi}_j^h \tilde{u})\overline{(h\partial_l - i\tilde{A}_l)(\tilde{\chi}_j^h \tilde{u})}\ dx \qquad (16.15) \\ &+ \int_{\Omega_{\alpha_j}} \left(|(h\nabla - i\tilde{\mathcal{A}})(\tilde{\chi}_j^h \tilde{u})|^2 - |(h\nabla - iB(S_j)\mathcal{A}_0)(\tilde{\chi}_j^h \tilde{u})|^2\right)\ dx. \qquad (16.16) \end{aligned}$$

Estimons le terme (16.15). Reprenons les relations (14.28) et (14.29), alors il existe une constante C tel que pour tout $x \in \mathcal{B}(0, h^{\frac{3}{8}})$:

$$|\sqrt{\det g(x)}\ g_{k,l}(x) - \delta_{k,l}| \leq Ch^{\frac{3}{8}}. \tag{16.17}$$

Comme le support de $\tilde{\chi}_j^h$ est inclus dans $\mathcal{B}(0, h^{\frac{3}{8}})$, alors, notant $C_j = (h\partial_j - i\tilde{A}_j)(\tilde{\chi}_j^h \tilde{u})$ pour $j = 1, 2$, d'après (16.17), il existe alors $h_0 > 0$ et C tels que pour tout $h \in]0, h_0[$:

$$\begin{aligned} \left|\int_{\Omega_{\alpha_j}} \sum_{1 \leq k,l \leq 2} \left(\sqrt{\det g}\ g_{k,l} - \delta_{k,l}\right) C_k \overline{C_l}\ dx\right| &\leq Ch^{\frac{3}{8}} \int_{\Omega_{\alpha_j}} \sum_{k,l} g_{k,l} C_k \overline{C_l}\ \sqrt{\det g}\ dx \\ &\leq Ch^{\frac{3}{8}} q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j u). \end{aligned} \tag{16.18}$$

Considérons maintenant le terme (16.16). Remarquons que :

$$\begin{aligned}
&|(h\nabla - i\tilde{\mathcal{A}})(\tilde{\chi}_j^h\tilde{u})|^2 - |(h\nabla - iB(S_j)\mathcal{A}_0)(\tilde{\chi}_j^h\tilde{u})|^2 \\
= \;& \mathrm{Re}\left(\overline{i(2h\nabla - i(\tilde{\mathcal{A}} + B(S_j)\mathcal{A}_0))(\tilde{\chi}_j^h\tilde{u})}(B(S_j)\mathcal{A}_0 - \tilde{\mathcal{A}})(\tilde{\chi}_j^h\tilde{u})\right) \\
= \;& 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{i(h\nabla - i\tilde{\mathcal{A}})(\tilde{\chi}_j^h\tilde{u})}\;(B(S_j)\mathcal{A}_0 - \tilde{\mathcal{A}})(\tilde{\chi}_j^h\tilde{u})\right) - |(B(S_j)\mathcal{A}_0 - \tilde{\mathcal{A}})(\tilde{\chi}_j^h\tilde{u})|^2. \quad (16.19)
\end{aligned}$$

Or $B(S_j)\mathcal{A}_0 - \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}' = \mathcal{O}(x^2)$ et $\tilde{\chi}_j^h$ est à support dans $\mathcal{B}(0, h^{\frac{3}{8}})$, alors, reprenant (16.18) et remarquant que $2h^{\frac{3}{4}}|ab| \leq h^{\frac{3}{8}}|a|^2 + h^{\frac{9}{8}}|b|^2$:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Omega_{\alpha_j}} \left(|(h\nabla - i\tilde{\mathcal{A}})(\tilde{\chi}_j^h\tilde{u})|^2 - |(h\nabla - iB(S_j)\mathcal{A}_0)(\tilde{\chi}_j^h\tilde{u})|^2\right)\, dx\right| \\
\leq \;& \mathcal{O}(h^{\frac{3}{8}})\int_{\Omega_{\alpha_j}} \sum_{k,l} g_{k,l}C_k\overline{C_l}\;\sqrt{\det\, g}\; dx + \mathcal{O}(h^{\frac{9}{8}})||\tilde{\chi}_j^h\tilde{u}||^2_{L^2(\Omega_{\alpha_j})} \\
\leq \;& \mathcal{O}(h^{\frac{3}{8}})q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) + \mathcal{O}(h^{\frac{9}{8}})||\tilde{\chi}_j^h\tilde{u}||^2_{L^2(\Omega_{\alpha_j})}. \quad (16.20)
\end{aligned}$$

Reportons (16.18) et (16.20) dans (16.15) et (16.16), il vient :

$$(1 + \mathcal{O}(h^{\frac{3}{8}}))q_{h,\mathcal{A},\Omega}(\chi_j^h u) \geq q_{h,B(S_j)\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_j}}(\tilde{\chi}_j^h\tilde{u}) + \mathcal{O}(h^{\frac{9}{8}})||\tilde{\chi}_j^h\tilde{u}||^2_{L^2(\Omega_{\alpha_j})}. \quad (16.21)$$

Par hypothèse $e_1 = B(S_1)\mu(\alpha_1)$. Notons v_1 un vecteur propre normalisé associé à e_1 pour l'opérateur $\bigoplus_j P_{B(S_j)\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_j}}$. Soit $e \in]e_1, e_2[$, alors, notant Π_1 la projection orthogonale sur v_1, nous avons :

$$q_{h,B(S_1)\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_1}}(\tilde{\chi}_1^h\tilde{u}) \geq hB(S_1)\mu(\alpha_1)||\Pi_1(\tilde{\chi}_1^h\tilde{u})||^2 + he||(\mathrm{Id} - \Pi_1)(\tilde{\chi}_1^h\tilde{u})||^2, \quad (16.22)$$

De plus, pour tout $j = 2, \ldots, N$:

$$q_{h,B(S_j)\mathcal{A}_0,\Omega_{\alpha_j}}(\tilde{\chi}_j^h\tilde{u}) \geq he||\tilde{\chi}_j^h\tilde{u}||^2. \quad (16.23)$$

Reportons (16.13), (16.21), (16.22) et (16.23) dans (16.12), alors :

$$\begin{aligned}
(1 + \mathcal{O}(h^{\frac{3}{8}}))q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) \;\geq\; & \mathcal{O}(h^{\frac{5}{4}})||u||^2_{L^2(\Omega)} + (h\inf(b, \Theta_0 b') - \mathcal{O}(h^{\frac{5}{4}}))||\chi_0^h u||^2_{L^2(\Omega)} \\
& + hB(S_1)\mu(\alpha_1)||\Pi_1(\tilde{\chi}_1^h\tilde{u})||^2_{L^2(\Omega_{\alpha_j})} + he||(\mathrm{Id} - \Pi_1)(\tilde{\chi}_1^h\tilde{u})||^2_{L^2(\Omega_{\alpha_j})} \\
& + he\sum_{j=2}^{N}||\tilde{\chi}_j^h\tilde{u}||^2_{L^2(\Omega_{\alpha_j})} + \mathcal{O}(h^{\frac{9}{8}})\sum_{j=1}^{N}||\tilde{\chi}_j^h\tilde{u}||^2_{L^2(\Omega_{\alpha_j})}. \quad (16.24)
\end{aligned}$$

Les hypothèse du changement de variables (16.17) et la taille du support de χ_j^h conduisent à :

$$||\tilde{\chi}_j^h\tilde{u}||^2_{L^2(\Omega_{\alpha_j})} = (1 + \mathcal{O}(h^{\frac{3}{8}}))||\chi_j^h u||^2_{L^2(\Omega)}. \quad (16.25)$$

Notons (ψ_1, ψ_2) les deux premiers vecteurs propres normalisés pour l'opérateur $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ et choisissons u normalisé, dans l'espace engendré par ψ_1 et ψ_2 tel que $\tilde{u}$ soit orthogonal à v_1, alors, par décroissance de v_1 (cf Théorème 9.1), $||\Pi_1(\tilde{\chi}_1^h\tilde{u})|| = \mathcal{O}(h^{\frac{3}{8}})$, nous déduisons :

$$\begin{aligned}
(1 + \mathcal{O}(h^{\frac{3}{8}}))q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) \;\geq\; & h\inf(b, \Theta_0 b')||\chi_0^h u||^2_{L^2(\Omega)} + he\sum_{j=1}^{N}||\chi_j^h u||^2_{L^2(\Omega)} + \mathcal{O}(h^{\frac{9}{8}})||u||^2_{L^2(\Omega)} \\
\geq\; & he\sum_{j=0}^{N}||\chi_j^h u||^2_{L^2(\Omega)} + \mathcal{O}(h^{\frac{9}{8}})||u||^2_{L^2(\Omega)}. \quad (16.26)
\end{aligned}$$

Par hypothèse sur u, nous avons $q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) \leq \mu_2(h,B,\Omega)$ et $\sum_{j=0}^{N} ||\chi_j^h u||^2 = 1$. La relation (16.26) permet d'écrire $\mu_2(h,B,\Omega) \geq \frac{he+\mathcal{O}(h^{\frac{9}{8}})}{1+\mathcal{O}(h^{\frac{3}{8}})} = he + \mathcal{O}(h^{\frac{9}{8}})$. Ainsi $\liminf_{h\to 0} \frac{\mu_2(h,B,\Omega)}{h} \geq e_2$. □

La Proposition 16.3 apporte un résultat de simplicité du bas du spectre de l'opérateur $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$:

Corollaire 16.4. *Reprenons les mêmes hypothèses qu'à la Proposition 16.3 et supposons que $\mu(\alpha_1)$ est simple, alors la valeur propre $\mu(h,B,\Omega)$ est simple dès que h est suffisamment petit.*

Démonstration : Selon les hypothèses, nous avons $e_2 > e_1$. La Proposition 16.3 indique une minoration de $\mu_2(h,B,\Omega)$:

$$\liminf_{h\to 0} \frac{\mu_2(h,B,\Omega)}{h} \geq e_2.$$

Donc, pour tout $\varepsilon \in]0, e_2 - e_1[$, il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in]0, h_0]$:

$$\mu_2(h,B,\Omega) \geq (e_2 - \varepsilon)h.$$

Or $\mu(h,B,\Omega) \leq hB(S_1)\mu(\alpha_1) + \mathcal{O}(h^{\frac{4}{3}}) = he_1 + \mathcal{O}(h^{\frac{4}{3}})$, donc nous déduisons :

$$\mu_2(h,B,\Omega) - \mu_1(h,B,\Omega) \geq h(e_2 - e_1 - \varepsilon) - \mathcal{O}(h^{\frac{4}{3}}) > 0. \tag{16.27}$$

□

16.3 Développement limité semi-classique pour l'état fondamental

Soit Ω vérifiant la condition $(\mathcal{H}_1)$. Supposons :
- $\mu(\alpha_1) < \inf\left(1, \Theta_0, \inf_{k=2,\ldots,N} \mu(\alpha_k)\right)$,
- $\alpha_1 \notin \pi\mathbb{Q}$,
- $\mu(\alpha_1)$ est simple.

Nous allons établir formellement que la valeur propre $\mu(h,B,\Omega)$ admet un développement selon les puissances de $h^{\frac{1}{2}}$ pour $h \to 0$.

Pour justifier ce développement formel, nous nous inspirons de la démonstration de simplicité de la valeur propre pour le problème de puits [56]. La non régularité du bord du domaine engendre toutefois des singularités pour les solutions, ce qui amène à écarter certains angles (cf [52], Chap. 4 et 5). Nous allons choisir une jauge pour simplifier la condition de Neumann. À cet effet, rappelons un cas particulier du Théorème 5.1.2.4 de [52], p. 260 :

Théorème 16.5. *Soit Ω un domaine polygonal d'arêtes Γ_j, $j = 1,\ldots,N$, d'angles au sommet α_j et de normale unitaire extérieure ν_j pour Γ_j. Considérons $f \in H^k(\Omega)$ et $g_j \in H^{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ pour $j = 1,\ldots,N$ et $k \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $d = 1,\ldots,k+1$ et tout $j = 1,\ldots,N$, $d\frac{\alpha_j}{\pi}$ n'est pas un entier, alors il existe $u \in H^{k+2}(\Omega)$ tel que :*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & f & sur \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_j} & = & g_j & sur \quad \Gamma_j, \forall j = 1,\ldots,N. \end{array} \right. \tag{16.28}$$

Ce théorème va nous permettre de choisir un potentiel $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A}\cdot\nu = 0$ sur Γ' :

Proposition 16.6. *Soit Ω un domaine polygonal d'arêtes Γ_j, $j = 1, \dots, N$, d'angles aux sommets α_j et de normale unitaire extérieure ν_j pour Γ_j. Considérons $\mathcal{A} \in H^\infty(\overline{\Omega})$. Il existe une fonction $\phi \in H^\infty(\Omega)$ telle que le potentiel magnétique $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} - \nabla\phi$ vérifie :*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tilde{\mathcal{A}} &= 0 \quad sur \quad \Omega, \\ \tilde{\mathcal{A}} \cdot \nu_j &= 0 \quad sur \quad \Gamma_j, \forall j = 1, \dots, N. \end{cases} \tag{16.29}$$

Démonstration : Donnons-nous un potentiel magnétique $\mathcal{A} \in H^\infty(\overline{\Omega})$. Définissons $f := \operatorname{div} \mathcal{A}$, alors $f \in H^\infty(\Omega)$. Définissons également sur chaque arête Γ_j, la fonction $g_j := \mathcal{A} \cdot \nu_j$, alors $g_j \in H^\infty(\Gamma_j)$. D'après le Théorème 16.5, il existe donc une fonction $\phi \in H^\infty(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} \Delta\phi &= \operatorname{div} \mathcal{A} \quad \text{sur} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu_j} &= \mathcal{A} \cdot \nu_j \quad \text{sur} \quad \Gamma_j, \forall j = 1, \dots, N. \end{cases} \tag{16.30}$$

Définissons le potentiel $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} - \nabla\phi$, alors $\tilde{\mathcal{A}} \in H^\infty(\Omega)$, $\operatorname{div} \tilde{\mathcal{A}} = 0$ sur Ω et pour tout $j = 1, \dots, N$, $\tilde{\mathcal{A}} \cdot \nu_j = 0$ sur Γ_j. Le potentiel $\tilde{\mathcal{A}}$ vérifie donc les conditions demandées. □

Revenons au développement formel de la valeur propre $\mu(h, B, \Omega)$ selon les puissances de $h^{\frac{1}{2}}$. D'après le Corollaire 16.4, il existe $\varepsilon > 0$ et $h_0 > 0$ tels que pour tout $h \in]0, h_0]$, il n'y a qu'une seule valeur propre dans $]0, h(B\mu(\alpha_1) + \varepsilon)]$.

Considérons g le changement de variables défini sur $\tilde{\Omega}$ tel que $g(\tilde{\Omega}) = \Omega$ et le voisinage de 0 dans Ω_{α_1} soit envoyé sur un voisinage de S_1 dans Ω. Pour simplifier les notations, nous supposerons $S_1 = 0$ et $\Omega \cap \mathcal{B}(S_1, \varepsilon) = g(\Omega_{\alpha_1} \cap \mathcal{B}(0, \varepsilon)) \cap \mathcal{B}(S_1, \varepsilon)$.
Reprenons les changements de variables de la Section 14.1.2 et en particulier la démonstration du Lemme 14.3, nous sommes amenés à étudier l'opérateur $\tilde{P}$ sur $\tilde{\Omega}$ avec $\tilde{P}$ défini par :

$$\tilde{P} := -\sum_{j,k=1}^{2} \det\, g^{-\frac{1}{4}}(h\partial_j - iA_j) \det\, g^{\frac{1}{2}} g_{j,k} (h\partial_k - iA_k) \det\, g^{-\frac{1}{4}}. \tag{16.31}$$

Nous allons chercher une solution formelle $(\mu(h), u_h)$ telle que : $(\tilde{P} - \mu(h))u_h \equiv \mathcal{O}(h^\infty)u_h$. Écrivons les développements de Taylor du potentiel $\mathcal{A}$ et du changement de variables. Notons $x^n = x_1^{n_1} x_2^{n_2}$ si $x = (x_1, x_2)$ et $n = (n_1, n_2)$, il existe alors des constantes A_k^n, $g_{k,l}^n$ et d_n telles que :

$$\begin{cases} A_k(x) &= \displaystyle\sum_{|n| \geq 1} A_k^n x^n, \\ \sqrt{\det\, g}\, g_{j,k}(x) &= \displaystyle\sum_{|n| \geq 0} g_{k,l}^n x^n, \quad g_{k,l}^0 = \delta_{k,l}, \\ (\det\, g)^{-\frac{1}{4}}(x) &= \displaystyle\sum_{|n| \geq 0} d_n x^n, \qquad d_0 = 1. \end{cases} \tag{16.32}$$

Grâce à la Proposition 16.6, nous supposons, après changement de jauge éventuel, que le potentiel magnétique est tangent au bord de $\tilde{\Omega}$.
Exprimons l'opérateur $\tilde{P}$ à l'aide des développements de Taylor :

$$\tilde{P} = -\sum_{j,k} \left(\sum_{|n| \geq 0} d_n x^n \right) \left(h\partial_j - i \sum_{|n| \geq 1} A_j^n x^n \right) \left(\sum_{|n| \geq 0} g_{j,k}^n x^n \right) \left(h\partial_k - i \sum_{|n| \geq 1} A_k^n x^n \right) \left(\sum_{|n| \geq 0} d_n x^n \right).$$

Effectuons le changement de variables :

$$x = \sqrt{h} y. \tag{16.33}$$

L'étude de l'opérateur $\tilde{P}$ se ramène donc, après division par h à celle de P_h :

$$\begin{aligned} P_h \ := \ & -h\sum_{j,k}\left(\sum_{|n|\geq 0} d_n h^{\frac{|n|}{2}} y^n\right)\left(\partial_j - i\sum_{|n|\geq 1} A_j^n h^{\frac{|n|-1}{2}} y^n\right)\left(\sum_{|n|\geq 0} g_{j,k}^n h^{\frac{|n|}{2}} y^n\right) \\ & \times\left(\partial_k - i\sum_{|n|\geq 1} A_k^n h^{\frac{|n|-1}{2}} y^n\right)\left(\sum_{|n|\geq 0} d_n h^{\frac{|n|}{2}} y^n\right). \end{aligned} \tag{16.34}$$

Du fait de la tangence du potentiel $\mathcal{A}$ au bord de $\tilde{\Omega}$, la condition de Neumann s'exprime :

$$\partial_\nu u_h = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}'. \tag{16.35}$$

Notons $\mathcal{A}^1$ le potentiel magnétique défini par $\mathcal{A}^1 := \left(A_1^{(1,0)} y_1 + A_1^{(0,1)} y_2, A_2^{(1,0)} y_1 + A_2^{(0,1)} y_2\right)$, alors $\operatorname{rot} \mathcal{A}^1 = A_2^{(1,0)} - A_1^{(0,1)} = \operatorname{rot} \mathcal{A} = B$.
La relation (16.32) conduit au développement $P_h = -h(\nabla - i\mathcal{A}^1)^2 + \mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})$. Déterminons une solution formelle sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_h(y) & = & \displaystyle\sum_{j\geq 0} h^{\frac{j}{2}} u_j(y), \\ \mu(h) & = & \displaystyle h\sum_{j\geq 0} h^{\frac{j}{2}} \mu_j. \end{array}\right. \tag{16.36}$$

Avec cette expression (16.36) de u_h, la condition de Neumann (16.35) s'écrit :

$$\sum_{|n|\geq 0} h^{\frac{|n|}{2}} \partial_\nu u_n(y) = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}'. \tag{16.37}$$

Annulons les coefficients des puissances de $h^{\frac{1}{2}}$ dans la relation $P_h u_h \equiv \mu(h) u_h$, avec la condition de Neumann (16.37).
L'annulation du coefficient de h s'exprime :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -(\nabla - i\mathcal{A}^1)^2 u_0(y) & = & \mu_0 u_0(y) & \text{sur } \tilde{\Omega}, \\ \partial_\nu u_0 & = & 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}'. \end{array}\right. \tag{16.38}$$

Nous choisissons pour μ_0 l'état fondamental de la réalisation de Neumann de l'opérateur $-(\nabla - i\mathcal{A}^1)^2$ sur Ω_{α_1} et pour u_0 un vecteur propre normalisé associé. Comme $\operatorname{rot} \mathcal{A}^1 = B$, alors nous déduisons :

$$\mu_0 = B(S_1)\mu(\alpha_1). \tag{16.39}$$

De plus, par changement de jauge éventuel, le comportement de l'état fondamental u_0 est décrit par le Théorème 9.1.
Annulons maintenant le coefficient de $h^{1+\frac{k}{2}}$ avec $k \geq 1$:

$$\left\{\begin{array}{rcll} -(\nabla - i\mathcal{A}^1)^2 u_k(y) & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \mu_j u_{k-j}(y) - \sum_{j=0}^{k-1} L_j^k u_j & \text{sur } \tilde{\Omega}, \\ \partial_\nu u_k & = & 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}'. \end{array}\right. \tag{16.40}$$

Dans la relation (16.40), L_j^k est un opérateur d'ordre 2 obtenu en développant les sommes dans l'expression (16.34) de P_h et en ne gardant que les coefficients d'ordre $h^{\frac{k-j}{2}}$. Le système (16.40)

s'écrit aussi :

$$\left\{\begin{array}{rcll} (-(\nabla - i\mathcal{A}^1)^2 - \mu_0)u_k(y) & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \mu_j u_{k-j}(y) - \sum_{j=0}^{k-1} L_j^k u_j & \text{sur } \tilde{\Omega}, \\ \partial_\nu u_k & = & 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}'. \end{array}\right. \tag{16.41}$$

D'après (16.41), l'annulation des coefficients de $h^{\frac{3}{2}}$ conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{rcll} (-(\nabla - i\mathcal{A}^1)^2 - \mu_0)u_1(y) & = & \mu_1 u_0(y) - L_0^0 u_0(y) & \text{sur } \tilde{\Omega}, \\ \partial_\nu u_1 & = & 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}', \end{array}\right. \tag{16.42}$$

en supposant que $\mu_1 u_0 - L_0^0 u_0$ est dans $L^2(\Omega)$, régulier et à décroissance rapide. De telles conditions vont permettre d'itérer le procédé de construction des coefficients μ_k et des fonctions u_k. Afin de satisfaire la condition d'orthogonalité $\langle \mu_1 u_0 - L_0^0 u_0, u_0 \rangle_{L^2(\Omega)}$, nous choisissons μ_1 :

$$\mu_1 = \int_{\Omega_{\alpha_1}} L_0^0 u_0 \overline{u_0}\, dx. \tag{16.43}$$

Nous choisissons u_1 solution de (16.42) et déterminons récursivement μ_k et u_k tels que :

$$\left(\tilde{P} - \sum_{k=0}^{N} h^{\frac{k}{2}} \mu_k\right) \sum_{k=0}^{N} h^{\frac{k}{2}} u_k = \mathcal{O}(h^{\frac{N+1}{2}}). \tag{16.44}$$

Il reste à justifier l'existence d'une solution au problème :

$$\left\{\begin{array}{rcll} (P_{\mathcal{A},\Omega_{\alpha_1}} - \mu_0)u & = & f & \text{sur } \Omega_{\alpha_1}, \\ \partial_\nu u & = & 0 & \text{sur } \Gamma', \\ \int_{\Omega_{\alpha_1}} u\, \overline{u_0}\, dx & = & 0, & \end{array}\right. \tag{16.45}$$

pour $f \in L^2(\Omega_{\alpha_1})$ tel que $\displaystyle\int_{\Omega_{\alpha_1}} f\overline{u_0}\, dx = 0$, en notant (μ_0, u_0) l'état fondamental associé à $P_{\mathcal{A},\Omega_{\alpha_1}}$ et de déterminer la régularité et décroissance de la solution u (cf [40, 71]).

Il suffira ensuite de tronquer la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} h^{\frac{k}{2}} u_k$ afin de montrer une estimation de la forme :

$$d(\sigma(\tilde{P}), \mu^N(h)) = d(\sigma(P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}), \mu^N(h)) = \mathcal{O}\left(h^{\frac{N+1}{2}}\right),$$

en définissant $\mu^N(h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} h^{\frac{k}{2}} \mu_k$.

Chapitre 17

Conclusion

À l'aide d'outils théoriques et numériques, nous avons rappelé et approfondi, au Chapitre 2 de la première partie, l'étude de la famille d'opérateurs $H(\zeta) = D_t^2 + (t-\zeta)^2$ sur $\mathbb{R}^+$, construisant notamment un quasi-mode en utilisant une méthode des différences finies. Nous avons ainsi obtenu une valeur approchée de Θ_0, bas du spectre de la réalisation de Neumann de $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, à 10^{-5} près. Nous savions, d'après [41], que Θ_0 était le bas du spectre essentiel de $P_{\mathcal{A}_0,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}$ et nous avons établi, en généralisant le Lemme de Persson au Chapitre 3, que Θ_0 restait le bas du spectre essentiel de $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha}$ pour tout secteur angulaire Ω_α, $\alpha \in]0, 2\pi]$. Munis de cette information, nous avons construit au Chapitre 4 des fonctions tests d'énergie inférieure à Θ_0 sur des secteurs d'angle voisin de $\frac{\pi}{2}$, montrant ainsi que $\mu(\alpha)$ est une valeur propre sur $]\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2}]$.

Nous complétons ces résultats dans la deuxième Partie en donnant un développement limité de $\mu(\alpha)$ au voisinage de 0. Ce résultat se base sur l'étude intermédiaire de deux opérateurs et la construction formelle d'une fonction $U^{(\infty)} = \sum_{j\geq 0} \alpha^j u_j$ et d'un réel $\mu^{(\infty)} = \sum_{j\geq 0} \alpha^j m_j$, tels que $P_{\mathcal{A}_0,\Omega_\alpha} U^{(\infty)} - \mu^{(\infty)} U^{(\infty)} \equiv 0$, au sens où les coefficients u_j, m_j sont choisis de manière à annuler chaque puissance de α apparaissant dans (5.23). Cette construction explicite donne un quasi-mode de la fonction propre associée à $\mu(\alpha)$. En outre, nous avons établi le comportement exponentiellement décroissant des états propres. Les résultats de ces deux premières parties montrent ainsi que $\mu(\alpha)$ est une valeur propre pour tout $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

L'étude de la troisième partie a permis de mettre en œuvre une méthode numérique déterminant le bas du spectre de l'opérateur $P_{\mathcal{A}_0,\Omega}$ pour un domaine Ω n'ayant qu'un sommet de plus petit angle. Cette construction présente l'avantage de contrôler l'erreur commise entre la solution numérique et la solution exacte à l'aide d'estimateurs a posteriori (cf Annexe A) et d'utiliser les techniques de raffinement de maillages particulièrement adaptées lorsqu'une quantité est très localisée. La méthode que nous avons proposée ici conforte l'idée de la stricte monotonie du bas du spectre $\mu(\alpha)$ pour $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et est cohérente avec l'asymptotique pour $\alpha \to 0$ démontrée à la Partie II. Nous avons également illustré le comportement exponentiellement décroissant de l'état fondamental pour des domaines à coins.

À l'aide des informations obtenues théoriquement et numériquement sur $\mu(\alpha)$, nous avons déduit, à la Partie IV, le comportement asymptotique de $\mu(h, B, \Omega)$ pour un domaine Ω à coins et précisé la localisation de l'état propre associé. Ce résultat complète ceux de Helffer-Morame [60] qui analysent l'effet de courbure des domaines réguliers. Nous obtenons ainsi la localisation de l'état fondamental au coin d'énergie la plus basse. Notons que les résultats théoriques et numériques nous incitent à penser que μ est une fonction strictement croissante de $]0, \pi]$ sur $]0, \Theta_0]$. Si cette monoto-

nie est justifiée, la localisation de l'état propre associé à $\mu(h, B, \Omega)$, pour l'opérateur $P_{h,B\mathcal{A}_0,\Omega}$ avec $B > 0$ constant, a lieu dans le plus petit angle du domaine Ω. Sous l'hypothèse de simplicité de $\mu(\alpha)$, nous avons établi au Chapitre 16, la simplicité de $\mu(h, B, \Omega)$ pour h assez petit et un développement formel de $\mu(h, B, \Omega)$ selon les puissances de $h^{\frac{1}{2}}$, pour un domaine Ω tel que l'état fondamental n'est localisé qu'en un seul sommet. Pour justifier rigoureusement le développement formel de $\mu(h, B, \Omega)$, il est nécessaire d'analyser davantage la régularité des solutions [40, 71].

Malgré les informations apportées sur $\mu(\alpha)$, nous ne savons pas pour l'instant démontrer sa stricte monotonie de $]0, \pi]$ sur $]0, \Theta_0]$, même si celle-ci est largement admise dans la littérature physique.

Nous avons ébauché une méthode heuristique laissant penser que l'état propre de $P_{h,B\mathcal{A}_0,P^n}$ où P^n est un polygone à n côtés, est réparti «en général» sur chaque sommet. Il serait intéressant d'illustrer numériquement ce résultat et d'étudier la localisation pour des domaines ayant plusieurs sommets d'angle minimal, en admettant la monotonie de μ. Notons toutefois que sauf dans le cas où il y a des symétries, la localisation devient extrêmement instable. Pour l'étude semi-classique de l'opérateur de Schrödinger, nous avons l'effet appelé par B. Simon : «la puce de l'éléphant» illustrant ce phénomène dans un cadre voisin. Lors du traitement numérique, nous devrons construire de nouveaux estimateurs d'erreurs en tenant compte de la multiplicité de la première valeur propre.

Enfin, l'étude de la simplicité développée à la Section 16 peut servir à étudier les branches de bifurcation de l'équation de Ginzburg-Landau (1.1) pour des domaines particuliers en utilisant [19, 37, 38].

Annexe A

A posteriori error estimator

Abstract
The ground state for the Neumann realization of the Schrödinger operator for constant and sufficiently large magnetic field presents a localization in the boundary of the domain and particularly in the corners where the angle is minimum. As the solution decreases exponentially fast away of the corner, it is rather difficult to catch it numerically. A natural idea is to try using a mesh refinement method coupled to a posteriori error estimates. The purpose of this paper is to provide such an estimator adapted to the problem.
Keywords : Eigenvalue problem, a priori error estimate, a posteriori error estimator.

A.1 Introduction

A lot of papers have already been devoted to the Schrödinger operator with magnetic field among which we can quote those of Bernoff-Sternberg [17], Lu-Pan [78, 79], Helffer-Morame [59, 60] in the case of regular domains. Our goal is to establish similar results in a domain with edges. Physicists such as Brosens, Devreese, Fomin, Moshchalkov, Schweigert and Peeters and mathematicians like Jadallah and Pan contribute to the study of this problem in recent literature [34, 68, 70, 83, 94]. A more general theoretical study can be found in [25, 26] where it is proved the ground state is exponentially decreasing outside corners with smallest angle for a constant and large magnetic field and where the behavior is precised according to the smallest angle and given an asymptotics of the eigenvalue for angle tending to 0.
In order to have a deeper understanding of the behavior of the first eigenvalue and eigenvector, we employ numerical tools.
Hornberger and Smilansky [65] use a boundary integral method to compute the first eigenvectors. Their method is readily available for regular domains but may probably be extended in the case of non smooth domains.

Here, we only deal with the finite elements method which is more natural. Since the first eigenvector decreases exponentially fast away of the smallest corner and is localized in a small neighborhood of the boundary, a numerical data processing is quite difficult and the problem is badly conditioned. So it is necessary to find a criterion which permits to know, using only computed numerical solution and data of the problem, if the numerical solution is close to the exact solution with a prescribed accuracy.
The fundamental tool is the a posteriori error estimator which allows to be more specific about local error and permit to adopt adaptive mesh-refinement techniques.

A posteriori error estimators have been studied in several domains. We can quote works of Babuška [10, 11], Bernardi-Métivet [16], Bernardi-Métivet-Verfürth [15], Verfürth [100] who tries to make a more systematic analysis of any problem. He begins with the Poisson equation with mixed boundary conditions and pursues with the nonlinear equation $F(u) = 0$. This permits to determine a posteriori error estimates for quasi-linear equations of second order or some eigenvalue problems for operators such like $-\nabla \cdot (A\nabla) + d$ (cf. Proposition 3.10 and Proposition 3.17 in [100]) but these estimates present a great drawback because they only hold if the numerical solution is sufficiently close to the exact solution. Then, to obtain an efficient estimator, we propose a result where this condition does not appear.
Furthermore, it seems that a posteriori error estimators for eigenvalue problems have not yet been found in generality and we can't deal with an eigenvalue problem as with the problem $F(u) = 0$. As we will see later and particularly in Section A.3, we have to use other methods. In this paper, we propose an a posteriori error estimator in the case of the Neumann realization of the Schrödinger operator with constant magnetic field.

This paper consists of two major parts. In Section A.4, we adapt techniques of Verfürth. In order to do that, we use a functional F whose definition and study are developed in Section A.3.2. To deal with this functional, we need an estimate of the gap between the numerical solution and the exact solution. This point is analyzed in Section A.3 and Theorem A.4 gives the main result. We notice that the classical techniques to obtain a priori estimates are not optimal here because the problem is not linear and particularly, we can't use Céa's Lemma. To this mind, the Section A.3 and more precisely Section A.3.1 consists of an original analysis to the error estimate. The great point to obtain equivalent estimate is the fact that the operator is self-adjoint and we use a decomposition in a orthonormal basis composed of eigenvectors. Lemma A.4 gives a priori estimates but contrary to what is happened in the linear case, estimates of the norm in L^2 and in H^1 of the gap between the exact solution and the numerical solution have the same order. We develop this method in Section A.3.1. Let us begin with some notation in Section A.2.

A.2 Notation and results

A.2.1 Physical problem

Let Ω be a bounded, open and polygonal set in $\mathbb{R}^2$. We denote by Γ the boundary of Ω and ν the unit outer normal where it is well defined. We consider the magnetic potential $\mathcal{A}$ with a constant magnetic field B defined by :

$$\mathcal{A} \;=\; \frac{B}{2}(-x_2, x_1). \tag{A.1}$$

We denote :

$$\nabla_{\mathcal{A}} \;:=\; \frac{\nabla}{i} - \mathcal{A}. \tag{A.2}$$

We are interested in the Neumann realization of the operator $-\nabla_{\mathcal{A}}^2$ from $C_0^\infty(\overline{\Omega})$, which is the restriction to Ω of the functions in $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ with a compact support. We define the sesquilinear form a in the form domain :

$$Y := H^1_{\mathcal{A}}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) | \nabla_{\mathcal{A}} u \in (L^2(\Omega))^2\}, \tag{A.3}$$

by :

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla_{\mathcal{A}} u \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} v}\, dx, \;\; \forall u, \; v \; \in H^1_{\mathcal{A}}(\Omega). \tag{A.4}$$

The sesquilinear form a is semi bounded from below and so a admits a unique self-adjoint extension $-\Delta_{\mathcal{A}} := -\nabla_{\mathcal{A}}^2$ defined on the domain :

$$\mathcal{D}^N(-\Delta_{\mathcal{A}}) := \{u \in H^1_{\mathcal{A}}(\Omega) |\ \nabla^2_{\mathcal{A}} u \in L^2(\Omega),\ \nu \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_{|\partial\Omega} = 0\}.$$

Furthermore, due to integration by parts, the following relation holds :

$$\forall u \in \mathcal{D}^N(-\Delta_{\mathcal{A}}),\ \forall v \in Y,\ \langle -\Delta_{\mathcal{A}} u, v\rangle = a(u,v). \tag{A.5}$$

For every open set ω of Ω, we denote by γ the boundary of ω, $L^2(\omega)$, $H^1_{\mathcal{A}}(\omega)$ and $H^2_{\mathcal{A}}(\omega)$ the Sobolev spaces with the norms :

$$||\phi||_{L^2(\omega)} = \left\{\int_\omega |\phi|^2\ dx\right\}^{1/2}, \tag{A.6}$$

$$||\phi||_{H^1_{\mathcal{A}}(\omega)} = \left\{\int_\omega (|\phi|^2 + |\nabla_{\mathcal{A}}\phi|^2)\ dx\right\}^{1/2}, \tag{A.7}$$

$$||\phi||_{H^2_{\mathcal{A}}(\omega)} = \left\{\int_\omega (|\phi|^2 + |\nabla_{\mathcal{A}}\phi|^2 + |\nabla^2_{\mathcal{A}}\phi|^2)\ dx\right\}^{1/2}. \tag{A.8}$$

As Ω is bounded, the norms $||\ ||_{H^1(\omega)}$ and $||\ ||_{H^1_{\mathcal{A}}(\omega)}$ are equivalent, like the norms $||\ ||_{H^2(\omega)}$ and $||\ ||_{H^2_{\mathcal{A}}(\omega)}$.

Our goal is to determined the ground state for the operator $-\Delta_{\mathcal{A}}$. So, denoting by $X := \mathbb{R} \times Y$, the weak formulation of the problem is :

$$\text{Find } (\lambda, u) \in X \text{ s.t. } \forall (\mu, v) \in X,\ \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla_{\mathcal{A}} u \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} v} &= \lambda \displaystyle\int_\Omega u\overline{v}, \\ \displaystyle\int_\Omega |u|^2 &= 1. \end{cases} \tag{A.9}$$

We can not determine explicitly an exact solution of this problem (A.9), so we look for a numerical solution and want to determine the gap between the exact solution and the approximate solution given by the finite elements method.
We use the same notations as Verfürth [100], p. 7-8. Let $\mathcal{T}_h$, $h > 0$ be a family of triangulations of Ω filling the following conditions :

1. Any two triangles in $\mathcal{T}_h$ share at most a common complete edge or a common vertex.
2. The minimal angle of all triangles in the whole family $\mathcal{T}_h$ is bounded from below by a strictly positive constant.

Let $\mathbb{P}^1(\mathcal{T}_h)$ be the space of all continuous, piecewise linear finite element functions corresponding to $\mathcal{T}_h$, and $Y_h := \mathbb{P}^2(\mathcal{T}_h)$ the space of all continuous, quadratic finite element functions corresponding to $\mathcal{T}_h$. We denote by $X_h := \mathbb{R} \times Y_h$ and consider the following eigenvalue problem :

$$\text{Find } (\lambda_h, u_h) \in X_h \text{ s.t. } \forall (\mu_h, v_h) \in X_h,\ \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla_{\mathcal{A}} u_h \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} v_h} &= \lambda_h \displaystyle\int_\Omega u_h\overline{v}_h, \\ \displaystyle\int_\Omega |u_h|^2 &= 1. \end{cases} \tag{A.10}$$

A.2.2 Notation

For any element T of the triangulation $\mathcal{T}_h$, we denote by $\mathcal{E}(T)$ and $\mathcal{N}(T)$ the set of its edges and vertices respectively and we define :

$$\mathcal{E}_h := \bigcup_{T\in\mathcal{T}_h} \mathcal{E}(T),\ \mathcal{N}_h := \bigcup_{T\in\mathcal{T}_h} \mathcal{N}(T).$$

For $T \in \mathcal{T}_h$ and $E \in \mathcal{E}_h$, we define ρ_T, h_T and h_E their radius of inscribed circle, diameter and length, respectively. We assume $h_T,\ h_E < h$. We remark that if the triangulation satisfies the condition 2, then the ratio $\frac{h_T}{h_E}$ and $\frac{h_T}{h_{T'}}$ are bounded from below independently of h for every $T,\ T' \in \mathcal{T}_h$ such that $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(T') \neq \emptyset$, and for every $E \in \mathcal{E}(T)$.
We split $\mathcal{E}_h$ and $\mathcal{N}_h$ as follow :

$$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_{h,\Omega} \cup \mathcal{E}_{h,\Gamma},\ \mathcal{N}_h = \mathcal{N}_{h,\Omega} \cup \mathcal{N}_{h,\Gamma},$$

with :

$$\mathcal{E}_{h,\Omega} := \{E \in \mathcal{E}_h | E \subset \Omega\},\ \mathcal{E}_{h,\Gamma} := \{E \in \mathcal{E}_h | E \subset \Gamma\},$$
$$\mathcal{N}_{h,\Omega} := \{x \in \mathcal{N}_h | x \in \Omega\},\ \mathcal{N}_{h,\Gamma} := \{x \in \mathcal{N}_h | x \in \Gamma\}.$$

For any $E \in \mathcal{E}_h$, we denote by $\mathcal{N}(E)$ the set of its vertices. For $T \in \mathcal{T}_h$, $E \in \mathcal{E}_h$ and $x \in \mathcal{N}_h$, we define :

$\omega_T := \bigcup_{\mathcal{E}(T)\cap\mathcal{E}(T')\neq\emptyset} T'$: elements with common edges with T,

$\omega_E := \bigcup_{E\in\mathcal{E}(T')} T'$: elements which admit E as edge,

$\omega_x := \bigcup_{x\in\mathcal{N}(T')} T'$: elements which admit x as vertex,

$\tilde{\omega}_T := \bigcup_{\mathcal{N}(T)\cap\mathcal{N}(T')\neq\emptyset} T'$: elements with a common vertex with T,

$\tilde{\omega}_E := \bigcup_{\mathcal{N}(E)\cap\mathcal{N}(T')\neq\emptyset} T'$: elements with a common vertex with E.

For any edge $E \in \mathcal{E}_h$, we associate a unit vector n_E (equal to ν if $E \subset \Gamma$). For any $E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}$ and $\phi \in L^2(\omega_E)$ such that $\phi_{|_{T'}}$ is continuous on T' for any $T' \subset \omega_E$, we denote by $[\phi]_E$ the jump of ϕ across E in the direction n_E.

We now recall a property of the interpolation operator of Clément denoted by I_h and given in [35, 32].

Lemma A.1. *There exists a constant c depending on the regularity parameter of the triangulation, such that for every $u \in H^1(\Omega)$, for every $T \in \mathcal{T}_h$ and for every $E \in \mathcal{E}_h$:*

$$||u - I_h u||_{L^2(T)} \leq c h_T ||u||_{H^1(\tilde{\omega}_T)}, \tag{A.11}$$
$$||u - I_h u||_{L^2(E)} \leq c h_E^{1/2} ||u||_{H^1(\tilde{\omega}_E)}. \tag{A.12}$$

A.2.3 Main result

For any $(\lambda, u),\ (\mu, v) \in X$, we define :

$$||(\lambda, u)||_X := \{|\lambda|^2 + ||u||^2_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)}\}^{1/2}, \tag{A.13}$$

$$\langle F(\lambda, u), (\mu, v)\rangle := \int_\Omega \left(\nabla_{\mathcal{A}} u \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} v} - \lambda u \overline{v}\right) + \mu \left(\int_\Omega |u|^2 - 1\right). \tag{A.14}$$

Our goal is to find $(\lambda, u) \in X$ and $(\lambda_h, u_h) \in X_h$ such that :

$$\forall (\mu, v) \in X, \quad \langle F(\lambda, u), (\mu, v) \rangle = 0, \tag{A.15}$$

$$\forall (\mu_h, v_h) \in X_h, \quad \langle F(\lambda_h, u_h), (\mu_h, v_h) \rangle = 0. \tag{A.16}$$

We introduce the a posteriori error estimator :

$$\eta_T^2 := h_T^2 \int_T \left| -\nabla_{\mathcal{A}}^2 u_h - \lambda_h u_h \right|^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E \int_E \left| [n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E \right|^2 . \tag{A.17}$$

As we see in the following theorem, the estimator η_T has a fundamental role to see if we are close to the exact solution or not and to increase accuracy of the numerical solution :

Theorem A.2. *Let $(\lambda, u) \in X$ be a solution for the problem (A.15) and $(\lambda_h, u_h) \in X_h$ be a solution for the problem (A.16) such that λ and λ_h are the smallest eigenvalues of the continuous and discrete operators. Then, there exist $h_0 > 0$ and constants c_1, c_2 which depend only on the regularity parameter of the triangulation such that for all $h \leq h_0$:*

$$|\lambda - \lambda_h| + ||u - u_h||_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)} \leq c_1 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2}, \tag{A.18}$$

$$\left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2} \leq c_2 \{ |\lambda - \lambda_h| + ||u - u_h||_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)} \}. \tag{A.19}$$

Remark A.3. *Theorem A.2 holds also for a simple eigenvalue λ : there exists $R > 0$ such that if (λ_h, u_h) is a solution of (A.16) with $||(\lambda - \lambda_h, u - u_h)||_X \leq R$, then (A.18) and (A.19) hold.*

A.2.4 Scheme of the proof of Theorem A.2

We want to use the same scheme as Verfürth [100], p. 81-84 for the eigenvalue problem for the operator $-\nabla \cdot (A\nabla) + d$ with a Dirichlet boundary condition. The fundamental point is the study of the functional F and particularly, we have to find a neighborhood of $(\lambda, u) \in X$ on which the differential of F, denoted DF is invertible. We will use DF to estimate the gap between $F(\lambda, u)$ and $F(\lambda_h, u_h)$ and we have first to establish an a priori estimate in Section A.3 of $||u - u_h||$. This is the great difference between our problem and examples presented by Verfürth because our problem is not linear and we can't use classical argument such as Cea's Lemma. The study of the functional F is presented in Section A.3.2 and will be used to follow the same techniques as Verfürth in Section A.4 to propose an a posteriori error estimator.

A.3 A priori estimates and applications

A.3.1 A priori estimates

To obtain a priori estimates, we use the self-adjointness of the operator. The Neumann realization of the Schrödinger operator $-\Delta_{\mathcal{A}}$ with constant magnetic field is self-adjoint with compact resolvent and so we can decompose each function of $\mathcal{D}^N(-\Delta_{\mathcal{A}})$ in an orthogonal basis of eigenvectors. This argument to obtain Theorem A.4 does not seem to be usual and we give further details in the following. The estimate of the gap between $F(\lambda, u)$ and $F(\lambda_h, u_h)$ allows to deduce an estimate of $||(\lambda, u) - (\lambda_h, u_h)||_X$.
We estimate $||u - u_h||_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)}$ and $|\lambda - \lambda_h|$ according to h using a spectral decomposition of the functions :

Theorem A.4. *There exists a constant C such that for solutions (λ, u) and (λ_h, u_h) of problems (A.15) and (A.16) respectively where λ and λ_h are the smallest eigenvalues of the continuous and discrete operators, the following upper bounds hold :*

$$\begin{aligned} ||u - u_h||_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)} &\leq Ch, \\ |\lambda - \lambda_h| &\leq Ch^2. \end{aligned}$$

Proof : We use the same name C for constants even if it can change at each line. As u is an eigenvector of $-\Delta_{\mathcal{A}}$, u is in the domain of the operator, and so, in particular, $u \in H^2_{\mathcal{A}}(\Omega)$. We denote by $\mathcal{I}_h u$ the interpolation of u by a function of $\mathbb{P}_2(\mathcal{T}_h)$. There exists a constant C such that :

$$||u - \mathcal{I}_h u||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 |u|_{H^2(\Omega)}, \tag{A.20}$$

$$||\nabla_{\mathcal{A}}(u - \mathcal{I}_h u)||_{L^2(\Omega)} \leq Ch|u|_{H^2(\Omega)}. \tag{A.21}$$

To justify the second estimate (A.21), we use the equivalence of the norms $H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)$ and $H^1(\Omega)$. The first estimate (A.20) gives the bound :

$$1 - Ch^2 \leq ||\mathcal{I}_h u||_{L^2(\Omega)} \leq 1 + Ch^2. \tag{A.22}$$

We denote by $u_0 = u,\ u_1,\ \ldots$ an orthonormal basis of eigenvectors for $-\Delta_{\mathcal{A}}$, associated to eigenvalues $\lambda_0 = \lambda,\ \lambda_1,\ \ldots$ in increasing order. We decompose $\mathcal{I}_h u$ in this basis :

$$\mathcal{I}_h u = \sum_{i \geq 0} \alpha_i u_i.$$

We express $u - \mathcal{I}_h u$, estimate $||u - \mathcal{I}_h u||_{L^2(\Omega)}$ and $||\nabla_{\mathcal{A}}(u - \mathcal{I}_h u)||_{L^2(\Omega)}$:

$$u - \mathcal{I}_h u = (1 - \alpha_0)u - \sum_{i \geq 1} \alpha_i u_i,$$

$$||u - \mathcal{I}_h u||^2_{L^2(\Omega)} = |1 - \alpha_0|^2 + \sum_{i \geq 1} |\alpha_i|^2, \tag{A.23}$$

$$||\nabla_{\mathcal{A}}(u - \mathcal{I}_h u)||^2_{L^2(\Omega)} = \lambda|1 - \alpha_0|^2 + \sum_{i \geq 1} \lambda_i |\alpha_i|^2. \tag{A.24}$$

Taking into account Relations (A.20) and (A.21), coupled with (A.23) and (A.24), there exists a constant C such that the following upper bounds about the coefficients α_i hold :

$$|1 - \alpha_0|^2 \leq Ch^4, \tag{A.25}$$

$$\sum_{i \geq 1} |\alpha_i|^2 \leq Ch^4, \tag{A.26}$$

$$\lambda|1 - \alpha_0|^2 \leq Ch^2, \tag{A.27}$$

$$\sum_{i \geq 1} \lambda_i |\alpha_i|^2 \leq Ch^2. \tag{A.28}$$

We write now the decomposition of u_h in the basis $(u_i)_{i \geq 0}$:

$$u_h = \sum_{i \geq 0} \beta_i u_i.$$

Multiplicating u by a complex of modulus 1, we may assume β_0 is a nonnegative real number. With this assumption and since $||u_h||^2_{L^2(\Omega)} = 1$, we deduce $0 \leq \beta_0 \leq 1$. The min-max principle leads to :

$$\begin{aligned} \lambda &= \inf_{v \in H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)} \frac{||\nabla_{\mathcal{A}} v||^2_{L^2(\Omega)}}{||v||^2_{L^2(\Omega)}}, \\ \lambda_h &= \inf_{v_h \in \mathbb{P}_2(\mathcal{T}_h)} \frac{||\nabla_{\mathcal{A}} v_h||^2_{L^2(\Omega)}}{||v_h||^2_{L^2(\Omega)}}. \end{aligned}$$

We easily deduce :

$$\lambda \leq \lambda_h = ||\nabla_{\mathcal{A}} u_h||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{||\nabla_{\mathcal{A}} \mathcal{I}_h u||^2_{L^2(\Omega)}}{||\mathcal{I}_h u||^2_{L^2(\Omega)}}. \tag{A.29}$$

We are able to estimate $||\nabla_{\mathcal{A}} \mathcal{I}_h u||^2_{L^2(\Omega)}$ by using Relations (A.21) and (A.25) :

$$\begin{aligned} ||\nabla_{\mathcal{A}} \mathcal{I}_h u||^2_{L^2(\Omega)} &= ||\nabla_{\mathcal{A}} u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla_{\mathcal{A}} (\mathcal{I}_h u - u)||^2_{L^2(\Omega)} + 2 \int_\Omega \nabla_{\mathcal{A}} u \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} (\mathcal{I}_h u - u)}\, dx \\ &= \lambda + ||\nabla_{\mathcal{A}} (\mathcal{I}_h u - u)||^2_{L^2(\Omega)} + 2\lambda\, \overline{\alpha_0 - 1} \\ &\leq \lambda + Ch^2, \end{aligned} \tag{A.30}$$

From the bounds (A.22), (A.29) and (A.30), we get an upper bound of λ_h by $\lambda + Ch^2$

$$\lambda \leq \lambda_h \leq \lambda + Ch^2. \tag{A.31}$$

So we can deduce the bound on the eigenvalues λ and λ_h stated in Theorem A.4.

Let us take again Relation (A.29) and look at the relations obtained with the coefficients β_i. We know that $||\nabla_{\mathcal{A}} u_h||^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i \geq 0} \lambda_i |\beta_i|^2$. Therefore, from (A.22) and (A.29)

$$\lambda_h = \sum_{i \geq 0} \lambda_i |\beta_i|^2 \leq \frac{||\nabla_{\mathcal{A}} (\mathcal{I}_h u)||^2_{L^2(\Omega)}}{||\mathcal{I}_h u||^2_{L^2(\Omega)}} \leq \left(\sum_{i \geq 0} \lambda_i |\alpha_i|^2 \right) (1 + Ch^2). \tag{A.32}$$

Since the eigenvalues λ_i are in increasing order, u_h is normalized and β_0 is a real number, we notice that

$$1 \geq |\beta_0|^2 = \beta_0^2 = 1 - \sum_{i \geq 1} |\beta_i|^2 \geq 1 - \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i \geq 1} \lambda_i |\beta_i|^2. \tag{A.33}$$

We deduce from (A.32) and (A.33) that

$$\beta_0^2 \geq 1 - \frac{1}{\lambda_1} \left((1 + Ch^2) \sum_{i \geq 0} \lambda_i |\alpha_i|^2 - \lambda \beta_0^2 \right) \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} |\alpha_0|^2 \right) - \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i \geq 1} \lambda_i |\alpha_i|^2 + \frac{\lambda}{\lambda_1} \beta_0^2 - ch^2. \tag{A.34}$$

Reporting (A.28) into (A.34), we obtain

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \beta_0^2 \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} |\alpha_0|^2 \right) - Ch^2 = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) + \frac{\lambda}{\lambda_1} (1 - |a_0|^2) - Ch^2. \tag{A.35}$$

It comes immediately by normalization of u_h and Relation (A.25) that :

$$1 \geq \beta_0^2 \geq 1 - Ch^2. \tag{A.36}$$

Since $1 = \sum_{i\geq 0} |\beta_i|^2$, we deduce that :

$$0 \leq 1 - \beta_0 \leq Ch^2 \text{ and } \sum_{i\geq 1} |\beta_i|^2 \leq Ch^2. \tag{A.37}$$

Let us compute $||u - u_h||^2_{L^2(\Omega)}$ by using (A.37) :

$$||u - u_h||^2_{L^2(\Omega)} = |1 - \beta_0|^2 + \sum_{i\geq 1} |\beta_i|^2 \leq 2Ch^2. \tag{A.38}$$

We now compute $||\nabla_{\mathcal{A}}(u - u_h)||^2_{L^2(\Omega)}$ by using that $\sum_{i\geq 0} \lambda_i |\beta_i|^2 = \lambda_h$:

$$||\nabla_{\mathcal{A}}(u - u_h)||^2_{L^2(\Omega)} = \lambda|1 - \beta_0|^2 + \sum_{i\geq 1} \lambda_i |\beta_i|^2 = 2\lambda(1 - \beta_0) + (\lambda_h - \lambda) \leq Ch^2. \tag{A.39}$$

And thus, $||\nabla_{\mathcal{A}}(u - u_h)||_{L^2(\Omega)} \leq Ch$. □

Remark A.5. *It is interesting to note that we have the same power of h for the norms $||u-u_h||_{L^2(\Omega)}$ and $||\nabla_{\mathcal{A}}(u - u_h)||_{L^2(\Omega)}$ in (A.38) and (A.39). This is very different of what happens in linear problems for which the L^2-estimate is better (typically in h^2).*
Let us also note that the a priori estimates of Theorem A.4 hold just for the smallest eigenvalues.

A.3.2 Study of the functional F

Let us give some properties of the functional F :

Lemma A.6. *Let $(\lambda, u) \in X$ be the solution of problem (A.15), then the differential $DF(\lambda, u)$ is an isomorphism from X onto X^*.*

Proof : We begin with the calculus of the differential DF at the point (λ, u). Let $(\mu, v) \in X$ and $(\nu, w) \in X$, then :

$$\langle DF(\lambda, u)(\mu, v), (\nu, w)\rangle = \int_\Omega \nabla_{\mathcal{A}} v \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} w} - (\lambda v + \mu u)\overline{w} + 2\nu u\overline{v}. \tag{A.40}$$

To justify the fact that $DF(\lambda, u)$ is an isomorphism from X onto X^*, we will use the following theorem given in [32] p. 131 :

Theorem A.7. *Let U, V be two Hilbert spaces, then the application $L: U \to V'$ is an isomorphism if and only if the associated sesquilinear form $a: U \times V \to \mathbb{R}$ satisfies the three following conditions :*

1. *Continuity : there exists a constant C such that :*

$$\forall (u, v) \in U \times V,\ |a(u, v)| \leq C||u||_U||v||_V.$$

2. *Inf-Sup condition : there exists a constant $\gamma > 0$ such that :*

$$\inf_{u\in U} \sup_{v\in V} \frac{|a(u, v)|}{||u||_U||v||_V} \geq \gamma.$$

3. *For all $v \in V$, $v \neq 0$, there exists $u \in U$ such that $a(u, v) \neq 0$.*

Let us apply this theorem by choosing $U = V = X$ and for the form a the differential form $DF(\lambda, u)$. We have to verify each condition of Theorem A.7 :

1. Continuity : we consider $(\mu, v), (\nu, w) \in X$ and estimate :

$$\begin{aligned} |\langle DF(\lambda,u)(\mu,v),(\nu,w)\rangle| &= \left|\int_\Omega \nabla_{\mathcal{A}} v \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} w} - (\lambda v + \mu u)\overline{w} + 2\nu u \overline{v}\right| \\ &\leq ||\nabla_{\mathcal{A}} v||_{L^2(\Omega)} ||\nabla_{\mathcal{A}} w||_{L^2(\Omega)} + (\lambda ||v||_{L^2(\Omega)} + |\mu|)||w||_{L^2(\Omega)} + 2|\nu|||v||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (4+\lambda)||(\mu,v)||_X ||(\nu,w)||_X. \end{aligned}$$

The condition *1.* holds.

2. Let us verify the Inf-Sup condition. We want to prove that there exists a strictly positive constant α such that for all $(\mu, v) \in X$, there is $(\nu, w) \in X$ with $\langle DF(\lambda, u)(\mu, v), (\nu, w)\rangle$ bounded from below by $\alpha||(\mu, v)||_X||(\nu, w)||_X$. In order to show this, we establish the lower bound for some $(\nu, w) \in X$, dependent on (μ, v) and so deduce a lower bound by taking the upper limit. We decompose v and w in the form : $v = \alpha u + \tilde{v}$ and $w = \beta u + \tilde{w}$ with $\tilde{v}$ and $\tilde{w}$ in the space orthogonal to u, so, in particular $\int_\Omega u\overline{\tilde{v}} = 0$, $\int_\Omega u\overline{\tilde{w}} = 0$ and since (λ, u) is solution of the problem (A.15), we also deduce that $\int_\Omega \nabla_{\mathcal{A}} u \overline{\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{v}} = 0$ and $\int_\Omega \nabla_{\mathcal{A}} u \overline{\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{w}} = 0$. Thanks to these remarks, we deduce the norm in X of (μ, v) and (ν, w) :

$$\begin{aligned} ||(\mu,v)||_X^2 &= ||\nabla_{\mathcal{A}} v||_{L^2(\Omega)}^2 + ||v||_{L^2(\Omega)}^2 + \mu^2 \\ &= ||\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{v}||_{L^2(\Omega)}^2 + ||\tilde{v}||_{L^2(\Omega)}^2 + (\lambda+1)\alpha^2 + \mu^2, \\ ||(\nu,w)||_X^2 &= ||\nabla_{\mathcal{A}} w||_{L^2(\Omega)}^2 + ||w||_{L^2(\Omega)}^2 + \nu^2 \\ &= ||\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{w}||_{L^2(\Omega)}^2 + ||\tilde{w}||_{L^2(\Omega)}^2 + (\lambda+1)\beta^2 + \nu^2. \end{aligned}$$

We compute the form $\langle DF(\lambda, u)(\mu, v), (\nu, w)\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle DF(\lambda,u)(\mu,v),(\nu,w)\rangle &= \alpha \int_\Omega \left(\nabla_{\mathcal{A}} u \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} w} - \lambda u \overline{w}\right) \\ &\quad + \int_\Omega \nabla_{\mathcal{A}} \tilde{v} \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} w} - (\lambda \tilde{v} + \mu u)\overline{w} + 2\nu\alpha \\ &= 0 + \beta \int_\Omega \left(\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{v} \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} u} - \lambda \tilde{v}\overline{u}\right) \\ &\quad + \int_\Omega \left(\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{v} \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{w}} - (\lambda \tilde{v} + \mu u)\overline{\tilde{w}}\right) - \mu\beta + 2\nu\alpha \\ &= \int_\Omega \left(\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{v} \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{w}} - \lambda \tilde{v}\overline{\tilde{w}}\right) - \mu\beta + 2\nu\alpha. \end{aligned}$$

We choose $(\nu, w) \in X$ such that $\tilde{w} = \tilde{v}$, $\beta = -\mu$ and $\nu = \alpha$ and estimate $\langle DF(\lambda, u)(\mu, v), (\nu, w)\rangle$:

$$\langle DF(\lambda,u)(\mu,v),(\nu,w)\rangle = ||\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{v}||_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda||\tilde{v}||_{L^2(\Omega)}^2 + \mu^2 + 2\alpha^2. \tag{A.41}$$

We bound from below $||\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{v}||_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda||\tilde{v}||_{L^2(\Omega)}^2$ according to $||\tilde{v}||_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)}^2$. Let $\delta \in]0, 1[$ to be determined later. Then :

$$||\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{v}||_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda||\tilde{v}||_{L^2(\Omega)}^2 = \delta||\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{v}||_{L^2(\Omega)}^2 + (1-\delta)\left(||\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{v}||_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\lambda}{1-\delta}||\tilde{v}||_{L^2(\Omega)}^2\right). \tag{A.42}$$

We know that λ is an eigenvalue of $-\Delta_{\mathcal{A}}$, then the second eigenvalue λ_1 is given by the min-max principle :

$$\lambda_1 = \inf_{\phi \in H^1_{\mathcal{A}}(\Omega) \cap <u>^{\perp}, \phi \neq 0} \frac{||\nabla_{\mathcal{A}} \phi||^2_{L^2(\Omega)}}{||\phi||^2_{L^2(\Omega)}}. \tag{A.43}$$

As we have decomposed w so that $\tilde{w} \perp u$, we so bound from below $||\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{v}||^2_{L^2(\Omega)}$:

$$||\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{v}||^2_{L^2(\Omega)} \quad \geq \quad \lambda_1 ||\tilde{v}||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{A.44}$$

We plug the estimate (A.44) into (A.42) :

$$\begin{aligned} ||\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{v}||^2_{L^2} - \lambda ||\tilde{v}||^2_{L^2} &\geq \delta ||\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{v}||^2_{L^2(\Omega)} + (1-\delta) \left(\lambda_1 - \frac{\lambda}{1-\delta} \right) ||\tilde{v}||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \delta ||\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{v}||^2_{L^2(\Omega)} + ((1-\delta)\lambda_1 - \lambda) ||\tilde{v}||^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{A.45}$$

Choosing δ such that $\delta = (1-\delta)\lambda_1 - \lambda$, then

$$\delta = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + 1} > 0,$$

and the lower bound (A.41) becomes :

$$\langle DF(\lambda, u)(\mu, v), (\nu, w) \rangle \quad \geq \quad \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + 1} ||\tilde{v}||^2_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)} + \mu^2 + 2\alpha^2. \tag{A.46}$$

We have now to compare $\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + 1} ||\tilde{v}||^2_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)} + \mu^2 + 2\alpha^2$ with the product of norms of (μ, v) and (ν, w). With the choice on (ν, w), we have :

$$||(\nu, w)||^2_X = ||\tilde{v}||^2_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)} + (\lambda + 1)\mu^2 + \alpha^2.$$

This implies that $||(\nu, w)||_X ||(\mu, v)||_X \leq ||\tilde{v}||^2_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)} + (\lambda+1)(\mu^2 + \alpha^2)$. We take $\gamma = \inf \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + 1}, \frac{1}{\lambda + 1} \right)$, then :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + 1} ||\tilde{v}||^2_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)} + \mu^2 + 2\alpha^2 &\geq \gamma \left(||\tilde{v}||^2_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)} + (\mu^2 + \alpha^2)(\lambda + 1) \right) \\ &\geq \gamma ||(\mu, v)||_X ||(\nu, w)||_X. \end{aligned}$$

We so have proved that for all $(\mu, v) \in X$:

$$\begin{aligned} \sup_{(\nu_1, w_1) \in X} \frac{| \langle DF(\lambda, u)(\mu, v), (\nu_1, w_1) \rangle |}{||(\nu_1, w_1)||_X} &\geq \frac{| \langle DF(\lambda, u)(\mu, v), (\nu, w) \rangle |}{||(\nu, w)||_X} \\ &\geq \gamma ||(\mu, v)||_X, \end{aligned}$$

and the Inf-Sup condition holds.

3. Let us justify the last condition. Let $(\nu, w) \in X$, we decompose w in the form $w = \beta u + \tilde{w}$ such that $\tilde{w} \perp u$ and we consider :

$$(\mu, v) = (-\beta, \nu u + \tilde{w}) \in X.$$

As we have seen in the justification of the Inf-Sup condition, we have :

$$\frac{| \langle DF(\lambda, u)(\mu, v), (\nu, w) \rangle |}{||(\nu, w)||_X ||(\mu, v)||_X} \quad \geq \quad \gamma > 0,$$

so, particularly, $\langle DF(\lambda, u)(\mu, v), (\nu, w) \rangle \neq 0$, and then the third condition holds.
We get that $DF(\lambda, u)$ is an isomorphism from X onto X^* and the proof of Lemma A.6 is achieved. □

Corollary A.8. *Let $(\lambda, u) \in X$ be the solution of problem (A.15), so there exist $R > 0$ and constants $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ such that for any $(\mu, v) \in \mathcal{B}_X((\lambda, u), R)$, the following bound holds :*

$$c_1||F(\mu, v)||_{X^*} \leq ||(\lambda, u) - (\mu, v)||_X \leq c_2||F(\mu, v)||_{X^*}.$$

Proof : First, we show that DF is Lipschitz-continuous in (λ, u). Let (λ_1, u_1), (μ, v), $(\nu, w) \in X$ and estimate $\langle DF(\lambda, u)(\mu, v) - DF(\lambda_1, u_1)(\mu, v), (\nu, w)\rangle$, according to $||(\Delta\lambda, \Delta u)||_X||(\mu, v)||_X||(\nu, w)||_X$ by denoting :

$$(\Delta\lambda, \Delta u) = (\lambda_1 - \lambda, u_1 - u),$$

then :

$$\begin{aligned} |\langle DF(\lambda, u)(\mu, v) - DF(\lambda_1, u_1)(\mu, v), (\nu, w)\rangle| &= \left|\int_\Omega (\lambda_1 - \lambda)v\overline{w} + \mu(u_1 - u)\overline{w} + 2\nu(u - u_1)\overline{v}\right| \\ &\leq 4||(\Delta\lambda, \Delta u)||_X||(\mu, v)||_X||(\nu, w)||_X. \end{aligned}$$

Then, for any $(\lambda_1, u_1) \in X$,

$$\frac{||DF(\lambda, u) - DF(\lambda_1, u_1)||_{\mathcal{L}(X,X^*)}}{||(\lambda, u) - (\lambda_1, u_1)||_X} \leq 4. \tag{A.47}$$

We have already seen that $DF(\lambda, u)$ is an isomorphism, so we can express (λ_1, u_1) with (λ, u) by :

$$\begin{aligned} (\Delta\lambda, \Delta u) &= (\lambda_1, u_1) - (\lambda, u) \\ &= (DF(\lambda, u))^{-1}\left(F(\lambda_1, u_1) + \int_0^1 \left(DF(\lambda, u) - DF((\lambda, u) + t(\Delta\lambda, \Delta u))\right)(\Delta\lambda, \Delta u)\ dt\right). \end{aligned}$$

This expression gives an estimate of the gap between (λ, u) and (λ_1, u_1) according to the triangular inequality and Relation (A.47) :

$$\begin{aligned} ||(\Delta\lambda, \Delta u)||_X &\leq ||(DF(\lambda, u))^{-1}||_{\mathcal{L}(X^*,X)}\left(||F(\lambda_1, u_1)||_X + 4\int_0^1 t\ dt||(\Delta\lambda, \Delta u)||_X^2\right) \\ &\leq ||(DF(\lambda, u))^{-1}||_{\mathcal{L}(X^*,X)}\left(||F(\lambda_1, u_1)||_X + 2||(\Delta\lambda, \Delta u)||_X^2\right). \end{aligned}$$

We take $0 < R < R_1 := \frac{1}{4||DF(\lambda,u)^{-1}||_{\mathcal{L}(X^*,X)}}$, then for all (λ_1, u_1) such that $(\lambda_1, u_1) \in \mathcal{B}_X((\lambda, u), R)$:

$$||(\lambda_1, u_1) - (\lambda, u)||_X \leq \frac{||DF(\lambda, u)^{-1}||_{\mathcal{L}(X^*,X)}||F(\lambda_1, u_1)||_{X^*}}{1 - 2R||DF(\lambda, u)^{-1}||_{\mathcal{L}(X^*,X)}} \leq 2||DF(\lambda, u)^{-1}||_{\mathcal{L}(X^*,X)}||F(\lambda_1, u_1)||_{X^*}. \tag{A.48}$$

We now have to prove the second inequality. Let $(\mu, v) \in X$ with $||(\mu, v)||_X = 1$, then :

$$\begin{aligned} \langle F(\lambda_1, u_1), (\mu, v)\rangle &= \langle DF(\lambda, u)(\Delta\lambda, \Delta u), (\mu, v)\rangle + \\ &\quad \left\langle \int_0^1 \left(DF((\lambda, u) + t(\Delta\lambda, \Delta u)) - DF(\lambda, u)\right)(\Delta\lambda, \Delta u)dt, (\mu, v)\right\rangle. \end{aligned}$$

We deduce an upper bound of $||F(\lambda_1, u_1)||_{X^*}$:

$$\begin{aligned} ||F(\lambda_1, u_1)||_{X^*} &\leq ||DF(\lambda, u)||_{\mathcal{L}(X,X^*)}||(\Delta\lambda, \Delta u)||_X + 4\int_0^1 t\ dt||(\Delta\lambda, \Delta u)||_X^2 \\ &\leq ||DF(\lambda, u)||_{\mathcal{L}(X,X^*)}||(\Delta\lambda, \Delta u)||_X + 2||(\Delta\lambda, \Delta u)||_X^2. \end{aligned}$$

Taking $0 < R < R_2 := \frac{||DF(\lambda,u)||_{\mathcal{L}(X,X^*)}}{2}$, we see that for all (λ_1, u_1) in $\mathcal{B}_X((\lambda, u), R)$:

$$||F(\lambda_1, u_1)||_{X^*} \leq \left(||DF(\lambda, u)||_{\mathcal{L}(X,X^*)} + 2R\right)||(\Delta\lambda, \Delta u)||_X \leq 2||DF(\lambda, u)||_{\mathcal{L}(X,X^*)}||(\Delta\lambda, \Delta u)||_X. \tag{A.49}$$

Choosing $R := \min(R_1, R_2)$, Relations (A.48) and (A.49) justify Corollary A.8 with the choice $c_1 = \frac{1}{2}||DF(\lambda, u)||^{-1}_{\mathcal{L}(X,X^*)}$ and $c_2 = 2||(DF(\lambda, u))^{-1}||_{\mathcal{L}(X^*,X)}$. □

A.4 Adaptation of Verfürth's techniques

A.4.1 Shape functions and associated properties

For every $T \in \mathcal{T}_h$ and $E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}$, we define the triangle-bubble function b_T and the edge-bubble function b_E like Verfürth [100] p. 9. We denote by $\lambda_{T,1}$, $\lambda_{T,2}$ and $\lambda_{T,3}$ the barycentric coordinates of T. We define the triangle-bubble function b_T by :

$$b_T = \begin{cases} 27\lambda_{T,1}\lambda_{T,2}\lambda_{T,3} & \text{on } T \\ 0 & \text{on } \Omega \setminus T. \end{cases} \tag{A.50}$$

Given an $E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}$ such that $\omega_E = T_1 \cup T_2$. We enumerate the vertices of T_1 and T_2 in the such way the vertices of E are numbered first. We define the edge-bubble function b_E by :

$$b_E = \begin{cases} 4\lambda_{T_i,1}\lambda_{T_i,2} & \text{on } T_i,\ i = 1,2 \\ 0 & \text{on } \Omega \setminus \omega_E. \end{cases} \tag{A.51}$$

We can easily prove the following properties about functions b_T and b_E :

Lemma A.9. *Let $T \in \mathcal{T}_h$ and $E \in \mathcal{E}_h$. Then :*

$$\operatorname{supp} b_T \subset T, \quad 0 \le b_T \le 1, \quad \max_{x \in T} b_T(x) = 1, \tag{A.52}$$

$$\operatorname{supp} b_E \subset \omega_E, \quad 0 \le b_E \le 1, \quad \max_{x \in E} b_E(x) = 1, \tag{A.53}$$

$$c_1 h_T^2 \le \int_T b_T = \tfrac{9}{20}|T| \le c_2 h_T^2, \tag{A.54}$$

$$\int_E b_E = \frac{2}{3} h_E, \tag{A.55}$$

$$c_3 h_E^2 \le \int_{T'} b_E = \tfrac{1}{3}|T'| \le c_4 h_E^2, \ \forall T' \subset \omega_E, \tag{A.56}$$

$$||\nabla b_T||_{L^2(T)} \le c_5 h_T^{-1} ||b_T||_{L^2(T)}, \tag{A.57}$$

$$||\nabla b_E||_{L^2(T')} \le c_6 h_E^{-1} ||b_E||_{L^2(T')}, \ \forall T' \subset \omega_E. \tag{A.58}$$

The constants $c_1, \ldots, c_6$ depend only on the smallest angle in the triangulation.

We consider a lifting prolongation operator $P : L^\infty(E) \to L^\infty(T)$ by :

$$Pu(x) := u(x'), \ \forall x \in T, x' \in E \ s.\ t.\ \lambda_j(x') = \lambda_j(x).$$

We now give a particular case of Lemma 3.3 of [100] p. 59 :

Lemma A.10. *There exist constants $c_1, \ldots, c_7$ such that the following inequalities hold for all $T \in \mathcal{T}_h$, $E \in \mathcal{E}(T)$, $u \in \Pi_{0|_T}$ and $\sigma \in \Pi_{1|_E}$:*

$$c_1 ||u||_{L^2(T)} \le \sup_{v \in \Pi_{0|_T}} \frac{\int_T u \overline{b_T v}}{||v||_{L^2(T)}} \le ||u||_{L^2(T)}, \tag{A.59}$$

$$c_2 ||\sigma||_{L^2(E)} \le \sup_{\tau \in \Pi_{1|_E}} \frac{\int_E \sigma \overline{b_E \tau}}{||\tau||_{L^2(E)}} \le ||\sigma||_{L^2(E)}, \tag{A.60}$$

$$c_3 h_T^{-1} ||b_T u||_{L^2(T)} \le ||\nabla(b_T u)||_{L^2(T)} \le c_4 h_T^{-1} ||b_T u||_{L^2(T)}, \tag{A.61}$$

$$c_5 h_T^{-1} ||b_E P\sigma||_{L^2(T)} \le ||\nabla(b_E P\sigma)||_{L^2(T)} \le c_6 h_T^{-1} ||b_E P\sigma||_{L^2(T)}, \tag{A.62}$$

$$||b_E P\sigma||_{L^2(T)} \le c_7 h_T^{1/2} ||\sigma||_{L^2(E)}. \tag{A.63}$$

A.4.2 Preliminary lemmas

We have defined the projector I_h from $H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)$ onto $\mathbb{P}^2(\mathcal{T}_h)$ and we consider $R_h := (0, I_h)$. We denote by :

$$\tilde{Y}_h := span\{b_T v, b_E P\sigma |\ v \in \Pi_{0|_T}, \sigma \in \Pi_{1|_E}, T \in \mathcal{T}_h, E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}\},$$

and $\tilde{X}_h := \mathbb{R} \times \tilde{Y}_h$.

Lemma A.11. *Let $(\lambda_h, u_h) \in X_h$ be the solution of (A.16) and $(\mu, v) \in X$, then :*

$$\langle F(\lambda_h, u_h), (\mu, v)\rangle = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\int_T \left\{-\nabla^2_{\mathcal{A}} - \lambda_h\right\} u_h \overline{v} + \sum_{E\in\mathcal{E}_{h,\Omega}\cap\mathcal{E}(T)} \int_E [n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E \, \overline{v} \right). \tag{A.64}$$

Proof : We estimate $\langle F(\lambda_h, u_h), (\mu, v)\rangle$ for $(\lambda_h, u_h) \in X_h$ the solution of (A.16) and $(\mu, v) \in X$:

$$\begin{aligned} \langle F(\lambda_h, u_h), (\mu, v)\rangle &= \int_\Omega \nabla_{\mathcal{A}} u_h \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} v} - \lambda_h u_h \overline{v} + \mu \left(\int_\Omega |u_h|^2 - 1 \right) \\ &= \int_\Omega \nabla_{\mathcal{A}} u_h \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} v} - \lambda_h u_h \overline{v}, \end{aligned}$$

since $(\lambda_h, u_h) \in X_h$ is solution of (A.16) so $\int_\Omega |u_h|^2 = 1$. An integration by parts on each $T \subset \Omega$ gives :

$$\int_T \nabla_{\mathcal{A}} u_h \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} v} = -\int_T \nabla^2_{\mathcal{A}} u_h \overline{v} + \sum_{E\in\mathcal{E}(T)} \int_E [n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E \, \overline{v}.$$

Furthermore, if $E \in \mathcal{E}_{h,\Gamma}$, then the term $[n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E$ vanishes since we deal with the Neumann realization. Indeed, if u_h is an eigenvector of $-\nabla^2_{\mathcal{A}}$, u_h is in the domain of the self-adjoint extension of $-\nabla^2_{\mathcal{A}}$, so $n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_{h|_E} = 0$. We deduce :

$$\langle F(\lambda_h, u_h), (\mu, v)\rangle = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\int_T \left\{-\nabla^2_{\mathcal{A}} u_h - \lambda_h u_h\right\} \overline{v} + \sum_{E\in\mathcal{E}_{h,\Omega}\cap\mathcal{E}(T)} \int_E [n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E \, \overline{v} \right).$$

□

Lemma A.12. *Let $(\lambda_h, u_h) \in X_h$ be the solution of (A.16), then there exists a constant C only depending on the regularity parameter such that :*

$$||(Id - R_h)^* F(\lambda_h, u_h)||_{X^*} \leq C \left\{ \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2}. \tag{A.65}$$

Proof : We begin with writing the definition of the norm $||.||_{X^*}$:

$$\begin{aligned} ||(Id - R_h)^* F(\lambda_h, u_h)||_{X^*} &= \sup_{||(\mu,v)||_X = 1} \langle F(\lambda_h, u_h), (\mu, v) - R_h(\mu, v)\rangle \\ &= \sup_{||(\mu,v)||_X = 1} \langle F(\lambda_h, u_h), (\mu, v - I_h v)\rangle . \end{aligned} \tag{A.66}$$

We compute the last term of (A.66) by using Lemma A.11 :

$$\langle F(\lambda_h, u_h), (\mu, v - I_h v)\rangle = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \left[\int_T (-\nabla^2_{\mathcal{A}} - \lambda_h) u_h \overline{(v - I_h v)} + \sum_{E\in\mathcal{E}_{h,\Omega}\cap\mathcal{E}(T)} \int_E [n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E \, \overline{(v - I_h v)} \right]. \tag{A.67}$$

We estimate each term with a Cauchy-Schwarz inequality :

$$\left|\int_T (-\nabla_{\mathcal{A}}^2 - \lambda_h) u_h \overline{(v - I_h v)}\right| \leq \left|\left|(-\nabla_{\mathcal{A}}^2 - \lambda_h) u_h\right|\right|_{L^2(T)} ||v - I_h v||_{L^2(T)}, \tag{A.68}$$

$$\int_E [n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E \, \overline{(v - I_h v)} \leq \left(\int_E |[n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E|^2\right)^{\frac{1}{2}} ||v - I_h v||_{L^2(E)}. \tag{A.69}$$

We consider upper bounds (A.11) and (A.12) of Lemma A.1 to evaluate integrals $\int_T |v - I_h v|^2$ and $\int_E |v - I_h v|^2$:

$$||v - I_h v||_{L^2(T)} \leq c_1 h_T ||v||_{H^1(\tilde{\omega}_T)}, \tag{A.70}$$

$$||v - I_h v||_{L^2(E)} \leq c_2 h_E^{1/2} ||v||_{H^1(\tilde{\omega}_E)}. \tag{A.71}$$

We report these inequalities into (A.68) and (A.69) to obtain :

$$\left|\int_T (-\nabla_{\mathcal{A}}^2 - \lambda_h) u_h \overline{(v - I_h v)}\right| \leq c_1 h_T ||v||_{H^1(\tilde{\omega}_T)} || - \nabla_{\mathcal{A}}^2 u_h - \lambda_h u_h||_{L^2(T)}, \tag{A.72}$$

$$\left|\int_E [n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E \, \overline{(v - I_h v)}\right| \leq c_2 h_E^{1/2} ||v||_{H^1(\tilde{\omega}_E)} ||[n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E||_{L^2(E)}. \tag{A.73}$$

We report (A.73) in (A.67) and use the Hölder inequality :

$$\begin{aligned}
\sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega} \cap \mathcal{E}(T)} \int_E [n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E \, \overline{(v - I_h v)} &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega} \cap \mathcal{E}(T)} ||[n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E||_{L^2(E)} \, ||v - I_h v||_{L^2(E)} \\
&\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega} \cap \mathcal{E}(T)} \left(\int_E |[n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E|^2\right)^{1/2} c_2 h_E^{1/2} ||v||_{H^1(\tilde{\omega}_E)} \\
&\leq C_2 \sqrt{\sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega} \cap \mathcal{E}(T)} h_E \int_E |[n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E|^2} \sqrt{\sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega} \cap \mathcal{E}(T)} ||v||^2_{H^1(\tilde{\omega}_E)}}.
\end{aligned}$$

We notice $||v||^2_{H^1(\tilde{\omega}_E)} \leq ||v||^2_{H^1(\Omega)}$ and deduce that there exists a constant c depending on the regularity parameter of the triangulation such that :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega} \cap \mathcal{E}(T)} ||v||^2_{H^1(\tilde{\omega}_E)} \leq c ||v||^2_{H^1(\Omega)}. \tag{A.74}$$

According to the inequality $\sqrt{A} + \sqrt{B} \leq \sqrt{2}\sqrt{A+B}$ used in (A.67) coupled with (A.72), (A.73) and (A.74), there exists a positive constant C independent of the triangulation such that :

$$\begin{aligned}
\langle F(\lambda_h, u_h), (\mu, v - I_h v)\rangle &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T (-\nabla_{\mathcal{A}}^2 u_h - \lambda_h u_h) \overline{(v - I_h v)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega} \cap \mathcal{E}(T)} \int_E [n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E \, \overline{(v - I_h v)}\right) \\
&\leq C ||v||_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \int_T |(-\nabla_{\mathcal{A}}^2 - \lambda_h) u_h|^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega} \cap \mathcal{E}(T)} h_E \int_E |[n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \tilde{C} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2\right)^{\frac{1}{2}} ||v||_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)},
\end{aligned}$$

since the domain Ω is bounded, and the norms $H^1(\Omega)$ and $H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)$ are equivalent. So, we deduce :

$$\langle F(\lambda_h, u_h), (\mu, v - I_h v)\rangle \leq \tilde{C} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} ||v||_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)}. \tag{A.75}$$

Let us come back to the calculation of $||(Id - R_h)^* F(\lambda_h, u_h)||_{X^*}$ from (A.66) and (A.75) :

$$\begin{aligned} ||(Id - R_h)^* F(\lambda_h, u_h)||_{X^*} &\leq \tilde{C} \sup_{||(\mu,v)||_X = 1} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{1/2} ||v||_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)} \\ &\leq \tilde{C} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{A.76}$$

because $||v||_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)} \leq \sqrt{|\mu|^2 + ||v||^2_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)}} = ||(\mu, v)||_X = 1$. This last upper bound achieves the proof of Lemma A.12. □

Lemma A.13. *Let $(\lambda_h, u_h) \in X_h$ be a solution of (A.16), then there exists a constant $\tilde{C}$ depending on the regularity parameter such that :*

$$\eta_T \leq \tilde{C} \sup_{(0,v) \in \tilde{X}_h, \operatorname{supp} v \subset \omega_T} \frac{\langle F(\lambda_h, u_h), (0, v)\rangle}{||(0, v)||_X}. \tag{A.77}$$

Proof : Let us give $T \in \mathcal{T}_h$ and $E \in \mathcal{E}_{h,\Omega} \cap \mathcal{E}(T)$. We recall that :

$$\eta_T^2 = h_T^2 \int_T \left| -\nabla^2_{\mathcal{A}} u_h - \lambda_h u_h \right|^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E \int_E \left| [n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E \right|^2. \tag{A.78}$$

We consider $\omega \in \{T, \omega_E, \omega_T\}$ and denote :

$$\tilde{Y}_{h|_\omega} := \{\phi \in \tilde{Y}_h |\ \operatorname{supp}(\phi) \subset \omega\}.$$

We begin with the study of $|| - \nabla^2_{\mathcal{A}} u_h - \lambda_h u_h||_{L^2(T)}$ by using Lemma A.10. Relation (A.61) gives the following upper bound for all $v \in \Pi_{1|_T}$:

$$c_4^{-1} h_T \leq \frac{||b_T v||_{L^2(T)}}{||\nabla(b_T v)||_{L^2(T)}}. \tag{A.79}$$

Then, for all $v \in \Pi_{1|_T}$:

$$c_1 c_4^{-1} h_T ||(-\nabla^2_{\mathcal{A}} - \lambda_h) u_h||_{L^2(T)} \leq c_1 \frac{||b_T v||_{L^2(T)} ||(-\nabla^2_{\mathcal{A}} - \lambda_h) u_h||_{L^2(T)}}{||\nabla(b_T v)||_{L^2(T)}}. \tag{A.80}$$

Now we use the inequality (A.59) with $u = -\nabla^2_{\mathcal{A}} u_h - \lambda_h u_h$:

$$c_1 ||(-\nabla^2_{\mathcal{A}} - \lambda_h) u_h||_{L^2(T)} \leq \sup_{v \in \Pi_{1|_T}} \frac{\displaystyle\int_T (-\nabla^2_{\mathcal{A}} u_h - \lambda_h u_h) \overline{b_T v}}{||v||_{L^2(\Omega)}}.$$

But, we know that $0 \leq b_T \leq 1$, so $||b_T v||_{L^2(\Omega)} \leq ||v||_{L^2(\Omega)}$. Then :

$$\begin{aligned} c_1 c_4^{-1} h_T || - \nabla^2_{\mathcal{A}} u_h - \lambda_h u_h||_{L^2(T)} &\leq \sup_{v \in \Pi_{1|_T}} \frac{||b_T v||_{L^2(\Omega)}}{||\nabla(b_T v)||_{L^2(T)}} \frac{\int_T (-\nabla^2_{\mathcal{A}} u_h - \lambda_h u_h)\overline{b_T v}}{||v||_{L^2(\Omega)}} \\ &\leq \sup_{v \in \Pi_{1|_T}} ||\nabla(b_T v)||^{-1}_{L^2(T)} \langle F(\lambda_h, u_h), (0, b_T v)\rangle . \end{aligned}$$

According to the construction of functions b_T, we deduce $b_T v \in H^1_0(T)$ and we apply the Poincaré inequality. So there exists a constant C_Ω such that for all $T \in \mathcal{T}_h$ and all function $v \in \Pi_{1|_T}$, the following inequality holds by using also the equivalence between norms $H^1(\Omega)$ and $H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)$:

$$||\nabla(b_T v)||_{L^2(\Omega)} \geq C_\Omega ||b_T v||_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)}.$$

Furthermore, if $v \in \Pi_{1|_T}$, then $b_T v \in \tilde{Y}_{h|_T}$. This leads to the upper bound :

$$c_1 c_4^{-1} h_T || - \nabla^2_{\mathcal{A}} u_h - \lambda_h u_h||_{L^2(T)} \leq C \sup_{\phi \in \tilde{Y}_{h|_T}, ||\phi||_Y = 1} \langle F(\lambda_h, u_h), (0, \phi)\rangle . \tag{A.81}$$

We now estimate the term $||[n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E||_{L^2(E)}$. We look at inequality (A.60) with $\sigma = [n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E$. By the construction of the prolongation operator P, for all function $\sigma \in \Pi_{1|_T}$, the equality $P\sigma_{|_E} = \sigma$ holds. Then :

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma \in \Pi_{1|_T}} \frac{\int_E [n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E \overline{b_E \sigma}}{||\sigma||_{L^2(E)}} &= \sup_{\sigma \in \Pi_{1|_T}} \frac{\int_E [n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E \overline{b_E P\sigma}}{||P\sigma||_{L^2(E)}} \\ &\geq c_2 ||[n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E||_{L^2(E)}. \end{aligned} \tag{A.82}$$

But, according to Lemma A.11 with $\mu = 0$, $v = b_E P\sigma$, we obtain :

$$\int_E [n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E \overline{b_E P\sigma} = \langle F(\lambda_h, u_h), (0, b_E P\sigma)\rangle - \int_{\omega_E} (-\nabla^2_{\mathcal{A}} u_h - \lambda_h u_h)\overline{b_E P\sigma}.$$

Then :

$$c_2 ||[n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E||_{L^2(E)} \leq \sup_{\sigma \in \Pi_{1|_E} \setminus \{0\}} \frac{\left| \langle F(\lambda_h, u_h), (0, b_E P\sigma)\rangle - \int_{\omega_E} (-\nabla^2_{\mathcal{A}} - \lambda_h) u_h \overline{b_E P\sigma} \right|}{||P\sigma||_{L^2(E)}}. \tag{A.83}$$

Relation (A.62) leads to :

$$c_6^{-1} \leq h_T^{-1} ||b_E P\sigma||_{L^2(T)} ||\nabla(b_E P\sigma)||^{-1}_{L^2(T)}. \tag{A.84}$$

Using now (A.63), we deduce :

$$c_7^{-1} ||\sigma||^{-1}_{L^2(E)} = c_7^{-1} ||P\sigma||^{-1}_{L^2(E)} \leq h_T^{1/2} ||b_E P\sigma||^{-1}_{L^2(T)}. \tag{A.85}$$

We group together Relations (A.84) and (A.85) to obtain :

$$c_6^{-1} c_7^{-1} h_E^{1/2} ||\sigma||^{-1}_{L^2(E)} \leq \sqrt{\frac{h_E}{h_T}} ||\nabla(b_E P\sigma)||^{-1}_{L^2(T)}. \tag{A.86}$$

We use this upper bound to study (A.83) which will be multiply by $c_6^{-1}c_7^{-1}h_E^{1/2}$ and we will consider each term separately.
We begin with the term :

$$\sup_{\sigma\in\Pi_{1|_E}\setminus\{0\}} \frac{h_E^{1/2}}{c_6c_7}\frac{\langle F(\lambda_h,u_h),(0,b_EP\sigma)\rangle}{||\sigma||_{L^2(E)}} \leq \sqrt{\frac{h_E}{h_T}} \sup_{\sigma\in\Pi_{1|_E}\setminus\{0\}} \frac{\langle F(\lambda_h,u_h),(0,b_EP\sigma)\rangle}{||\nabla(b_EP\sigma)||_{L^2(T)}}. \quad (A.87)$$

We use the Poincaré inequality on ω_E since $b_EP\sigma \in H_0^1(\omega_E)$, so there exists a constant c independent of E such that :

$$\sup_{\sigma\in\Pi_{1|_E}\setminus\{0\}} \frac{\langle F(\lambda_h,u_h),(0,b_EP\sigma)\rangle}{||\nabla(b_EP\sigma)||_{L^2(T)}} \leq c \sup_{(0,v)\in\tilde{Y}_{h|\omega_E}} \frac{\langle F(\lambda_h,u_h),(0,v)\rangle}{||v||_Y}. \quad (A.88)$$

Look now at the term :

$$c_6^{-1}c_7^{-1}h_E^{1/2} \sup_{\sigma\in\Pi_{1|_E}\setminus\{0\}} ||\sigma||_{L^2(E)}^{-1} \int_{\omega_E} (-\nabla_{\mathcal{A}}^2u_h - \lambda_hu_h)\overline{b_EP\sigma}$$

We know that $0 \leq b_E \leq 1$ so $||b_EP\sigma||_{L^2(E)} \leq ||\sigma||_{L^2(E)}$. We use also Relation (A.63), we deduce that :

$$||b_EP\sigma||_{L^2(\omega_E)} \leq 2c_7\sqrt{h_{T_E}}||\sigma||_{L^2(E)},$$

by defining $h_{T_E} := \sup_{T\in\omega_E} h_T$. Then :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{h_E}}{c_6c_7} \sup_{\sigma\in\Pi_{1|_E}\setminus\{0\}} \frac{\int_{\omega_E}(-\nabla_{\mathcal{A}}^2u_h - \lambda_hu_h)\overline{b_EP\sigma}}{||\sigma||_{L^2(E)}} &\leq 2\frac{\sqrt{h_Eh_{T_E}}}{c_6} \sup_{\sigma\in\Pi_{1|_E}\setminus\{0\}} \frac{\int_{\omega_E}(-\nabla_{\mathcal{A}}^2u_h - \lambda_hu_h)\overline{b_EP\sigma}}{||b_EP\sigma||_{L^2(\omega_E)}} \\ &\leq C \sup_{\phi\in\tilde{Y}_{h|\omega_E},||\phi||_Y=1} \langle F(\lambda_h,u_h),(0,\phi)\rangle . \quad (A.89)\end{aligned}$$

Putting together Relations (A.88) and (A.89), we conclude that :

$$c_2 \sup_{\sigma\in\Pi_{1|_E}\setminus\{0\}} \frac{h_E^{1/2}}{c_6c_7}||[n_E\cdot\nabla_{\mathcal{A}}u_h]_E||_{L^2(E)} \leq \left(c\sqrt{\frac{h_E}{h_T}} + C\right) \sup_{\phi\in\tilde{Y}_{h|\omega_E},||\phi||_Y=1} \langle F(\lambda_h,u_h),(0,\phi)\rangle . \quad (A.90)$$

We just have to put upper bounds (A.90), (A.81) in the expression (A.78) of η_T, so there exists a constant $\tilde{C}$ depending on the regularity parameter such that :

$$\eta_T \leq \tilde{C} \sup_{(0,v)\in\tilde{X}_h,\operatorname{supp} v\subset\omega_T} \frac{\langle F(\lambda_h,u_h),(0,v)\rangle}{||(0,v)||_X}. \quad (A.91)$$

This concludes the proof of Lemma A.13. □

Lemma A.14. *Let $(\lambda_h,u_h)\in X_h$ be a solution of (A.16), then there exists a constant C depending on the regularity parameter such that :*

$$\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\eta_T^2\right)^{1/2} \leq C||F(\lambda_h,u_h)||_{\tilde{X}_h^*}. \quad (A.92)$$

Proof : From the definition of the norm and the assumptions on (λ_h, u_h), we notice that :

$$||F(\lambda_h, u_h)||_{\tilde{X}_h^*} = ||F(\lambda_h, u_h)||_{\tilde{Y}_h^*}.$$

So, for all $\varepsilon > 0$ and all $T \in \mathcal{T}_h$, there exists a function $v_T \in \tilde{Y}_h$ with support included in $\tilde{\omega}_T$ such that :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \langle F(\lambda_h, u_h), (0,v) \rangle & \geq & 0, \\ \sup\limits_{(0,v)\in\tilde{X}_h, \text{supp}\, v \subset \omega_T} \left| \dfrac{\langle F(\lambda_h, u_h), (0,v) \rangle}{||(0,v)||_X} \right|^2 & \leq & \left| \dfrac{\langle F(\lambda_h, u_h), (0,v_T) \rangle}{||(0,v_T)||_X} \right|^2 + \varepsilon. \end{array} \right.$$

We define the function :

$$v := \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \frac{v_T}{||(0,v_T)||_X},$$

then this function v is in $\tilde{Y}_h$ as a linear combination of elements of $\tilde{Y}_h$ and the norm of v in Y is bounded from above by 1 by using the triangular inequality.
We take again the result of Lemma A.13 and sum η_T^2 on elements of $\mathcal{T}_h$, then :

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2 \leq \tilde{C}^2 \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \sup_{(0,v)\in\tilde{X}_h, \text{supp}\, v\subset\omega_T} \left| \frac{\langle F((\lambda_h, u_h)), (0,v) \rangle}{||(0,v)||_X} \right|^2. \tag{A.93}$$

Using the functions v_T :

$$\begin{aligned} \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2 &\leq \tilde{C}^2 \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\left| \frac{\langle F(\lambda_h, u_h), (0,v_T) \rangle}{||(0,v_T)||_X} \right|^2 + \varepsilon \right) \\ &\leq \tilde{C}^2 \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \frac{\langle F(\lambda_h, u_h), (0,v_T) \rangle}{||(0,v_T)||_X} \right)^2 + \tilde{C}^2 N\varepsilon \\ &\leq \tilde{C}^2 | \langle F((\lambda_h, u_h)), (0,v) \rangle |^2 + \tilde{C}^2 N\varepsilon, \end{aligned} \tag{A.94}$$

with N a upper bound of the number of the triangulation's elements. Next, we take the upper limit on $(0,w)$ in $\tilde{X}_h$:

$$\begin{aligned} \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2 &\leq \tilde{C}^2 \sup_{(0,w)\in\tilde{X}_h} \left| \frac{\langle F(\lambda_h, u_h), (0,w) \rangle}{||(0,w)||_X} \right|^2 + \tilde{C}^2 N\varepsilon \\ &\leq \tilde{C}^2 ||F((\lambda_h, u_h))||_{\tilde{X}_h^*}^2 + \tilde{C}^2 N\varepsilon. \end{aligned} \tag{A.95}$$

So, making ε going to 0 leads to :

$$\left\{ \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2} \leq \tilde{C} ||F(\lambda_h, u_h)||_{\tilde{X}_h^*}, \tag{A.96}$$

with $\tilde{C}$ depending on the regularity parameter. □

A.4.3 Proof of Theorem A.2

• We begin with justifying the first inequality (A.18) :
We estimate $\langle F(\lambda_h, u_h), (\mu, v)\rangle$ for $(\mu, v) \in X$ such that $||(\mu, v)||_X = 1$:

$$\langle F(\lambda_h, u_h), (\mu, v)\rangle = \langle F(\lambda_h, u_h), (\mu, v) - R_h(\mu, v)\rangle + \langle F(\lambda_h, u_h), R_h(\mu, v)\rangle\,. \tag{A.97}$$

We estimate the second member (A.97) according to preliminary lemmas.
Lemma A.12 leads to an upper bound of the first term of (A.97) :

$$\langle F(\lambda_h, u_h), (\mu, v) - R_h(\mu, v)\rangle \quad \leq \quad C_1 \left\{ \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2}. \tag{A.98}$$

Furthermore, as (λ_h, u_h) is a solution of problem (A.16), then for $(\mu_h, v_h) \in X_h$,

$$\langle F(\lambda_h, u_h), (\mu_h, v_h)\rangle = 0.$$

But, for all $(\mu, v) \in X$, the operator R_h is defined so as to $R_h(\mu, v)$ is in X_h, so particularly :

$$\forall (\mu, v) \in X,\ \langle F(\lambda_h, u_h), R_h(\mu, v)\rangle = 0. \tag{A.99}$$

We report Relations (A.99) and (A.98) in (A.97) and obtain an estimate valid for all $(\mu, v) \in X$, this leads to the upper bound :

$$||F(\lambda_h, u_h)||_{X^*} \quad \leq \quad C_1 \left\{ \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2}. \tag{A.100}$$

Let R given by Corollary A.8. If λ and λ_h are the smallest eigenvalues of the continuous and discrete operators such that (λ, u) and (λ_h, u_h) are respectively solution of (A.15) and (A.16), then applying Lemma A.4, there exists a constant C such that

$$|\lambda - \lambda_h| \leq Ch^2 \text{ and } ||u - u_h||_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)} \leq Ch. \tag{A.101}$$

So, if h is small enough, $||(\lambda, u) - (\lambda_h, u_h)||_X < R$, then Relation (A.100) and Corollary A.8 lead to :

$$||(\lambda, u) - (\lambda_h, u_h)||_X \quad \leq \quad c \left\{ \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2}. \tag{A.102}$$

But $|\lambda - \lambda_h| + ||u - u_h||_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)} \leq \sqrt{2}||(\lambda, u) - (\lambda_h, u_h)||_X$, and we deduce :

$$|\lambda - \lambda_h| + ||u - u_h||_{H^1_{\mathcal{A}}(\Omega)} \quad \leq \quad \sqrt{2}c \left\{ \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2}. \tag{A.103}$$

• We have now to justify the second estimation (A.19) :
We have seen in Lemma A.14 on Relation (A.92) that :

$$\left\{ \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2} \leq c||F(\lambda_h, u_h)||_{\tilde{X}_h^*}.$$

But $\tilde{X}_h \subset X$ so $||F(\lambda_h, u_h)||_{\tilde{X}_h^*} \leq ||F(\lambda_h, u_h)||_{X^*}$, this leads to the upper bound :

$$\left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2} \leq c||F(\lambda_h, u_h)||_{X^*}. \tag{A.104}$$

Using Corollary A.8 : if $(\mu, v) \in \mathcal{B}_X((\lambda, u), R)$, the following bound holds :

$$c_1||F(\mu, v)||_{X^*} \leq ||(\lambda, u) - (\mu, v)||_X \leq c_2||F(\mu, v)||_{X^*}.$$

Then, according to the a priori estimate (Lemma A.4),

$$||(\lambda, u) - (\lambda_h, u_h)||_X < R$$

if the triangulation is thin enough so :

$$\left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2} \leq \frac{c}{c_1}||(\lambda, u) - (\lambda_h, u_h)||_X.$$

A.5 Conclusion

We have given an a priori error estimate of the gap between the exact solution and the numerical solution. This estimate is useful to construct an a posteriori error estimator as in Theorem A.2. This estimator can be used to improve numerical computations by using adaptative mesh-refinement techniques. We hope to come back in a future paper to propose numerical simulations with this new method, particularly to estimate the monotonicity of the bottom of the spectrum for the Schrödinger operator with a constant magnetic field equal to 1 in an angular sector according to the angle.

Acknowledgment
I am deeply grateful to François Alouges for his support, suggestions and attention to this work. I would like to thank Christine Bernardi for her reading of the manuscript.

Bibliographie

[1] S. Agmon. Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations. *Math. Notes 29* (1982).

[2] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I. *Comm. Pure Appl. Math. 12* (1959), pp. 623–727.

[3] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II. *Comm. Pure Appl. Math. 17* (1964), pp. 35–92.

[4] Y. Almog. The onset of superconductivity in long rectangles. *To appear in Eur. J. App. Math.* (2001).

[5] Y. Almog. The onset of superconductivity in semi-infinite strips. *J. Math. Phys. 41*, 12 (2001), pp. 7889–7905.

[6] F. Alouges et V. Bonnaillie. Analyse numérique de la supraconductivité. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337*, 8 (2003), pp. 543–548.

[7] J. E. Avron, I. W. Herbst and B. Simon. Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions. *Duke Math. J. 45*, 4 (1978), pp. 847–883.

[8] J. E. Avron, I. W. Herbst and B. Simon. Separation of center of mass in homogeneous magnetic fields. *Ann. Physics 114*, 1-2 (1978), pp. 431–451.

[9] J. E. Avron, I. W. Herbst and B. Simon. Schrödinger operators with magnetic fields. III. Atoms in homogeneous magnetic field. *Comm. Math. Phys. 79*, 4 (1981), pp. 529–572.

[10] I. Babŭska. *Feedback, adaptivity, and a posteriori estimates in finite elements : aims, theory, and experience, Accuracy Estimates and Adaptative Refinements in Finite Elements Computation.* Wiley, New-York, 1986.

[11] I. Babŭska and W. C. Rheinboldt. A posteriori error estimates for the finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engrg. 12* (1978), pp. 1597–1615.

[12] P. Bauman, D. Phillips and Q. Tang. Stable nucleation for the Ginzburg-Landau system with an applied magnetic field. *Arch. Rational Mech. Anal. 142* (1998), pp. 1–43.

[13] J. Berger and J. Rubinstein. On the zero set of the wave function in superconductivity. *Comm. Math. Phys. 202* (1999), pp. 621–628.

[14] J. Berger and J. Rubinstein. *Connectivity and superconductivity.* Lect. Notes. Phys., Springer, 2000.

[15] C. Bernardi, B. Métivet et R. Verfürth. Analyse numérique d'indicateurs d'erreur. Tech. Rep. 93025, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1993.

[16] C. Bernardi et B. Métivet. Indicateurs d'erreur pour l'équation de la chaleur. *Rev. Eur. Elem. Finis 9*, 4 (2000), pp. 423–438.

[17] A. Bernoff and P. Sternberg. Onset of superconductivity in decreasing fields for general domains. *J. Math. Phys. 39*, 3 (1998), pp. 1272–1284.

[18] F. Bethuel and X. M. Zheng. Sur la densité des fonctions régulières entre deux variétés dans les espaces de Sobolev. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 303*, 10 (1986), pp. 447–449.

[19] C. Bolley. Modélisation du champ de retard à la condensation d'un supraconducteur par un problème de bifurcation. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. 26*, 2 (1992), pp. 235–287.

[20] C. Bolley and B. Helffer. An application of semi-classical analysis to the asymptotic study of the supercooling field of a superconducting material. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 58*, 2 (1993), pp. 189–233.

[21] P. Bolley et J. Camus. Formule de Green et théorème de trace associés à l'opérateur $\sum_{i,j=0}^{n} D_j(a_{ij}(x)\phi(x)D_i)$. *Publication de l'Université de Rennes* (1972).

[22] P. Bolley et J. Camus. Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable. *J. Math. Pures Appl. 51* (1972), pp. 429–463.

[23] P. Bolley, J. Camus et B. Helffer. Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques. *J. Math. Pures Appl. 55* (1976), pp. 131–171.

[24] V. Bonnaillie. Numerical analysis on the superconductivity in general domains. submitted, Nov. 2003.

[25] V. Bonnaillie. On the fundamental state for a Schrödinger operator with magnetic field in a domain with corners. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336*, 2 (2003), pp. 135–140.

[26] V. Bonnaillie. On the fundamental state for a Schrödinger operator with magnetic field in domains with corners. *Institut Mittag-Leffler, The Royal Swedish Academy of Sciences 14* (2003).

[27] V. Bonnaillie. On the fundamental state for a Schrödinger operator with magnetic field in domains with corners. submitted, Oct. 2003.

[28] V. Bonnaillie. A posteriori error estimate for the eigenvalue problem associated to the Schrödinger operator with magnetic field. submitted, Apr. 2003.

[29] J. Bourgain, H. Brezis and P. Mironescu. Lifting in Sobolev spaces. *J. Anal. Math. 80* (2000), pp. 37–86.

[30] J. Bourgain, H. Brezis and P. Mironescu. On the structure of the Sobolev space $H\mathrm{Sp}\,1/2$ with values into the circle. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 331*, 2 (2000), pp. 119–124.

[31] J. Bourgain, H. Brezis and P. Mironescu. Limiting embedding theorems for $W\mathrm{Sp}\,s,p$ when $s \uparrow 1$ and applications. *J. Anal. Math. 87* (2002), pp. 77–101. Dedicated to the memory of Thomas H. Wolff.

[32] D. Braess. *Finite elements.* Cambridge University Press, 2001.

[33] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle.* Masson, 1993.

[34] F. Brosens, J. T. Devreese, V. M. Fomin and V. V. Moshchalkov. Superconductivity in a wedge : analytical variational results. *Solid State Comm. 111*, 12 (1999), pp. 565–569.

[35] P. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. R-2* (1975), pp. 77–84.

[36] J. M. Combes, R. Schrader and R. Seiler. Classical bounds and limits for energy distributions of Hamilton operators in electromagnetic fields. *Ann Physics 111*, 1 (1978), pp. 1–18.

[37] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz. Bifurcation from simple eigenvalues. *J. Funct. Anal. 8* (1971), pp. 321–340.

[38] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz. Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability. *Arch. Rational Mech. Anal. 52* (1973), pp. 161–180.

[39] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch and B. Simon. *Schrödinger operators with applications to quantum mechanics and global geometry.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.

[40] M. Dauge. *Elliptic boundary value problems on corner domains. Smoothness and asymptotics of solutions*, vol. 1341. Lect. Notes. Math., Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[41] M. Dauge and B. Helffer. Eigenvalues variation I, Neumann problem for Sturm-Liouville operators. *J. Differential Equations 104*, 2 (1993), pp. 243–262.

[42] M. Dauge and B. Helffer. Eigenvalues variation II, multidimensional problems. *J. Differential Equations 104*, 2 (1993), pp. 263–297.

[43] M. del Pino, P.L. Felmer and P. Sternberg. Boundary concentration for eigenvalue problems related to the onset of superconductivity. *Comm. Math. Phys. 210* (2000), pp. 413–446.

[44] L. Erdös. Rayleigh-type isoperimetric inequality with a homogeneous magnetic field. *Calc. Var. Partial Differential Equations 4* (1996), pp. 283–292.

[45] H. Feshbach. Unified theory of nuclear reactions. *Ann. Physics 5* (1958), pp. 357–390.

[46] H. Feshbach. Unified theory of nuclear reactions II. *Ann. Physics 19* (1962), pp. 287–313.

[47] V. M. Fomin, J. T. Devreese and V. V. Moshchalkov. Surface superconductivity in a wedge. *Europhys. Lett. 42* (1998), pp. 553–558.

[48] P. G. De Gennes. *Superconductivity of Metals and Alloys.* Benjamin, New York, 1996.

[49] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag, 1977, ch. 8.

[50] V. Ginzburg and L. Landau. On the theory of superconductivity. *Soviet Phys. JETP 20* (1950), pp. 1064–1082.

[51] T. Giorgi and D. Phillips. The breakdown of superconductivity due to strong fields for the Ginzburg-Landau model. *SIAM J. Math. Anal. 30*, 2 (1999), pp. 341–359.

[52] P. Grisvard. *Elliptic problems im nonsmooth domains.* Pitman, 1985.

[53] V. V. Grushin. On a class of hypoelliptic operators. *Mat. Sb. (N.S.) 12* (1970), pp. 458–475.

[54] E. M. Harrell. Double wells. *Comm. Math. Phys. 75*, 3 (1980), pp. 239–261.

[55] P. Hartmann. *Ordinary Differential Equations.* Wiley, New York, 1964.

[56] B. Helffer. *Semiclassical analysis for the Schrödinger operator and applications*, vol. 1336. Lect. Notes. Math., Springer-Verlag, Berlin-New York, 1988.

[57] B. Helffer. *Spectral theory and applications.* Cours de D.E.A. Université Paris-Sud, Orsay, 1999.

[58] B. Helffer. Bouteilles magnétiques et supraconductivité. In *Séminaire de l'École Polytechnique* (2001).

[59] B. Helffer and A. Mohamed. Semiclassical analysis for the ground state energy of a Schrödinger operator with magnetic wells. *J. Funct. Anal. 138*, 1 (1996), pp. 40–81.

[60] B. Helffer and A. Morame. Magnetic bottles in connection with superconductivity. *J. Funct. Anal. 185* (2001), pp. 604–680.

[61] B. Helffer and X. B. Pan. Upper critical field and location of surface nucleation of superconductivity. *J. Funct. Anal. 138*, 1 (1996), pp. 40–81.

[62] B. Helffer and X. B. Pan. Upper critical field and location of surface nucleation of superconductivity. *Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire 20*, 1 (2003), pp. 145–181.

[63] B. Helffer and J. Sjöstrand. Multiple wells in the semiclassical limit I. *Comm. Partial Differential Equations 9*, 4 (1984), pp. 337–408.

[64] V. Heuveline and R. Rannacher. A posteriori error control for finite element approximations of elliptic eigenvalue problems. *Journ. Adv. Comp. Math. 15* (2001), pp. 1–4.

[65] K. Hornberger and U. Smilansky. The boundary integral method for magnetic billiards. *J. Phys. A : Math. Gen. 33* (2000), pp. 2829–2855.

[66] K. Hornberger and U. Smilansky. Magnetic edge state. *Phys. Rep. 367*, 4 (2002), pp. 249–385.

[67] M. E. H. Ismail and R. Zhang. On the Hellman-Feynman theorem and the variation of zeros of certain special functions. *Adv. in Appl. Math. 9* (1988), pp. 439–446.

[68] H-T. Jadallah. *The Onset of superconductivity in a domain with a corner.* PhD thesis, Indiana University, 2001.

[69] H-T. Jadallah. The onset of superconductivity in a domain with a corner. *J. Math. Phys. 42*, 9 (2001), pp. 4101–4121.

[70] H. T. Jadallah, J. Rubinstein and P. Sternberg. Phase transition for mesoscopic superconductivity samples. *Phys. Rev. Lett. 82*, 14 (1999), pp. 2935–2938.

[71] V. A. Kondratiev. Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trans. Moscow Math. Soc. 16* (1967), pp. 227–313.

[72] P. Lascaux et R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, 1 ed., vol. 2. Dunod, 1987.

[73] P. Lascaux et R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, 2 ed., vol. 1. Dunod, 1998.

[74] R. Lavine and M. O'Carroll. Ground state properties and lower bounds for energy levels of a particle in a uniform magnetic field and external potential. *J. Mathematical Phys. 18*, 10 (1977), pp. 1908–1912.

[75] J-L. Lions. *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles.* Les Presses de l'Université de Montréal, 1965.

[76] J-L. Lions et E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1.* Dunod, 1970.

[77] K. Lu and X-B. Pan. Eigenvalue problems of Ginzburg-Landau operator in bounded domains. *J. Math. Phys. 40*, 6 (1999), pp. 2647–2670.

[78] K. Lu and X-B. Pan. Estimates of the upper critical field for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity. *Phys. D 127* (1999), pp. 73–104.

[79] K. Lu and X-B. Pan. Gauge invariant eigenvalue problems in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^2_+$. *Trans. Amer. Math. Soc. 352* (2000), pp. 1247–1276.

[80] R. Montgomery. Hearing the zero locus of a magnetic field. *Comm. Math. Phys. 168* (1995), pp. 651–675.

[81] V. V. Moshchalkov, X. G. Qiu and V. Bruyndoncx. Paramagnetic Meissner effect rom the self-consistent solution of the Ginzburg-Landau equations. *Phys. Rev. B 55*, 17 (1997), pp. 11793–11801.

[82] J. F. NOURRIGAT. Théorème de traces. *Publication de l'Université de Rennes* (1972).

[83] X. B. PAN. Upper critical field for superconductors with edges and corners. *Cal. Var. Partial Differential Equations 14* (2002), pp. 447–482.

[84] X. B. PAN AND K. H. KWEK. Schrödinger operators with non-degenerately vanishing magnetic fields in bounded domains. *Trans. Amer. Math. Soc. 354*, 10 (2002), pp. 4201–4227.

[85] A. PERSSON. Bounds for the discrete part of the spectrum of a semi-bounded Schrödinger operator. *Math. Scand. 8* (1960), pp. 143–153.

[86] D. ROBERT. *Autour de l'approximation semi-classique*, vol. 68. Progress in Mathematics, Birkhauser-Verlag Basel, 1987.

[87] J. RUBINSTEIN. *Six lectures on superconductivity. Boundaries, Interfaces and Transitions.* M. Delfour Ed. A.M.S., 1998.

[88] D. SAINT-JAMES AND P. G. DE GENNES. Onset of superconductivity in decreasing fields. *Phys. Let. 7*, 5 (1963), pp. 306–308.

[89] D. SAINT-JAMES, G. SARMA AND E. T. THOMAS. *Type II Superconductivity.* Pergamon Press, Oxford, 1969.

[90] E. SANDIER AND S. SERFATY. Global minimizers for the Ginzburg-Landau functional below the first critical magnetic field. *Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire 17*, 1 (2000), pp. 119–145.

[91] E. SANDIER AND S. SERFATY. On the energy of type-II superconductors in the mixed phase. *Reviews in Math. Phys. 12*, 9 (2000), pp. 1219–1157.

[92] E. SANDIER AND S. SERFATY. The decrease of the bulk-superconductivity close to the second critical field in the Ginzburg-Landau model. *SIAM J. Math. Anal. 34*, 4 (2003), pp. 939–956.

[93] E. SANDIER AND S. SERFATY. Ginzburg-Landau minimizers near the first critical magnetic field have bounded vorticity. *Calc. Var. PDE 17*, 1 (2003), pp. 17–28.

[94] V. A. SCHWEIGERT AND F. M. PEETERS. Influence of the confinement geometry on surface superconductivity. *Phys. Rev. B 60*, 5 (1999), pp. 3084–3087.

[95] J. R. SHEWCHUK. An introduction to conjugate gradient method without the agonizing pain. 1994.

[96] J. R. SHEWCHUK. Triangle : Engineering a 2d quality mesh generator and Delaunay triangulator. 1996.

[97] Y. SIBUYA. *Global theory of a second order linear ordinary differential equation with a polynomial coefficient.* North-Holland, 1975.

[98] B. SIMON. Semiclassical analysis of low eigenvalues, I. Non-degenerate minima : asymptotic expansions. *Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Théor. 38*, 3 (1983), pp. 295–307.

[99] M. TINKHAM. *Introduction to superconductivity*, 2 ed. McGraw-Hill, New York, 1996.

[100] R. VERFÜRTH. *A review of a posteriori error estimation and adaptative mesh rafinement technique.* Wiley Teubner, 1996.

[101] L. YING. *Infinite Element methods.* Peking University Press, 1995.

Notations

$\|\|.\|\|$	norme L^2
$\langle .,. \rangle$	produit scalaire L^2
$\mathcal{A}$	potentiel magnétique
$\mathcal{A}_0$	$\frac{1}{2}(x_2, -x_1)$
B	champ magnétique associé à $\mathcal{A}$, $B = \mathrm{rot}\,\mathcal{A}$
$\mathcal{B}(z,r)$	boule centrée en z, de rayin r : $\{x \in \mathbb{R}^2 \|\|x-z\| < r\}$
$B^k(\mathbb{R}^+)$	$\{u \in L^2(\mathbb{R}^+)\|\ \forall j = 0, \cdots, k, t^j u \in L^2(\mathbb{R}^+)\}$
$C_0^\infty(\overline{\Omega})$	restriction à Ω d'une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$
$\mathcal{D}^N(P)$	domaine de la réalisation de Neumann de l'opérateur P
$\mathcal{D}^N(P_{h,\mathcal{A},\Omega})$	$\{u \in L^2(\Omega)\|\ \nabla_{h,\mathcal{A}} u \in L^2(\Omega),\ -\nabla^2_{h,\mathcal{A}} u \in L^2(\Omega),\ \nu \cdot \nabla_{h,\mathcal{A}} u_{\|_{\Gamma'}} = 0\}$
Γ'	points du bord de Ω où la normale ν est définie
$\mathcal{H}$	espace de Hilbert
$H(\zeta)$	$D_t^2 + (t-\zeta)^2$ sur $\mathbb{R}^+$, $\zeta \in \mathbb{R}$
$H^k_{h,\mathcal{A}}(\Omega)$	$\{u \in L^2(\Omega)\|\ \forall j = 0, \cdots, k, (h\nabla - i\mathcal{A})^j u \in L^2(\Omega)\}$
$\lambda(\zeta)$	bas du spectre de la réalisation de Dirichlet de $H(\zeta)$
ℓ	$\ell(u,v) = \int_{\Omega^0} 2\,(D_t - \eta)\, u\overline{(D_t-\eta)\, v t}\, dt\, d\eta$
L	$2(D_t - \eta)t(D_t - \eta)$
ℓ^{moy}	$\ell\mathrm{moy}(u,v) = \int_0^\infty 2\left(D_t u \overline{D_t v} + \frac{1}{12} u\overline{v}\right) t\, dt$
L^{moy}	$2D_t t D_t + \frac{t}{12}$ sur $]0, +\infty[$ avec condition de Neumann en 0
$L^{\mathrm{moy},T}$	$2D_t t D_t + \frac{t}{12}$ sur $]0, T[$ avec condition de Neumann en 0 et de Dirichlet en T
L^{moy}	$2D_t t D_t + \frac{t}{12}$
λ_n^{moy}	n-ème valeur propre de L^{moy}, valant $\frac{2n-1}{\sqrt{3}}$
$\lambda_n^{\mathrm{moy},T}$	n-ème valeur propre de $L^{\mathrm{moy},T}$
$\lambda(\alpha)$	bas du spectre de l'opérateur P_α
	$\mu(\alpha) = \alpha\lambda(\alpha)$
$\lambda^T(\alpha)$	bas du spectre de l'opérateur P_α^T
$\mu(\zeta)$	bas du spectre de la réalisation de Neumann de $H(\zeta)$
$\mu_2(\zeta)$	deuxième valeur propre de la réalisation de Neumann de $H(\zeta)$
$\mu(h,B,\Omega)$	le bas du spectre de $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ pour $\mathcal{A}$ tel que $\mathrm{rot}\,\mathcal{A} = B$
$\mu_n(h,B,\Omega)$	n-ème élément du spectre de $P_{h,\mathcal{A},\Omega}$ pour $\mathcal{A}$ tel que $\mathrm{rot}\,\mathcal{A} = B$
$\mu(\alpha)$	bas du spectre de l'opérateur $P_{1,1,\Omega_\alpha}$
$\mu_n(\alpha)$	n-ème élément du spectre de $P_{1,1,\Omega_\alpha}$ donné par le principe du min-max
$\mu^{NDN}(\alpha,\varepsilon_0)$	bas du spectre de $D_{x_1}^2 + (D_{x_2} - x_1)^2$ sur $\Omega^{NDN}_{\alpha,\varepsilon_0}$ avec condition de Dirichlet sur l'arc de cercle et de Neumann sur les deux demi-droites

$\nu_n(T,\rho)$	n-ième élément du spectre de $P^{T,\rho}$
Ω	ouvert de $\mathbb{R}^2$ simplement connexe à bord lipschitzien
Ω_α	secteur de $\mathbb{R}^2$ d'angle α : $\Omega_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, \lvert x_2\rvert < \tan\frac{\alpha}{2} x_1\}$
Ω_α^L	secteur d'angle α tronqué par un cercle tangent aux points d'abscisse L du bord du secteur Ω_α (cf Figure 12.1)
$\Omega_{\alpha,\varepsilon_0}^{NDN}$	secteur tronqué et translaté représenté à la Figure 9.1 : $\Omega_{\alpha,\varepsilon_0}^{NDN} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1+R, x_2) \in \Omega_\alpha \setminus \mathcal{B}(0,R)\}$ avec $R = \frac{\varepsilon_0}{\alpha}$
$\Omega(\varepsilon_0)$	demi-bande $]0,+\infty[\times\,]-\frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\varepsilon_0}{4}[$
Ω^0	demi-bande $]0,\infty[\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$
Ω_T	demmi-bande tronquée $]0,T[\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$
ϕ	fonction propre normalisée associée à Θ_0 pour l'opérateur $H(\zeta_0)$
ϕ_{app}	quasi-mode pour $H(\zeta_{\text{app}})$, d'énergie Θ_{app}
$\mathcal{P} \otimes \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$	espace des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$
$\mathbb{P}^k$	éléments finis d'ordre k
$P_{h,\mathcal{A},\Omega}$	réalisation de Neumann de $-\nabla_{h,\mathcal{A}}^2 = (h\nabla - i\mathcal{A})^2$ sur Ω
P_α	$2(D_t-\eta)t(D_t-\eta) + \frac{1}{2\alpha^2 t} D_\eta^2$
P_α^T	réalisation de $2(D_t-\eta)t(D_t-\eta) + \frac{1}{2\alpha^2 t} D_\eta^2$ sur Ω_T avec condition de Dirichlet en $t=T$
$P^{T,\rho}$	$2(D_t-\eta)t(D_t-\eta) + \frac{\rho}{2} D_\eta^2$
$q_{h,\mathcal{A},\Omega}$	$q_{h,\mathcal{A},\Omega}(u) = \int_\Omega \lvert(h\nabla - i\mathcal{A})u\rvert^2\, dx.$
q_α	$q_\alpha(u) = \int_{\Omega^0} \left(2t\lvert D_t u - \eta\, u\rvert^2 + \frac{1}{2\alpha^2 t}\lvert\partial_\eta u\rvert^2\right)$
$\sigma(P)$	spectre de l'opérateur P
S_r	$\mathcal{B}(0,r)$
$\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}^+)$	restriction à $\mathbb{R}^+$ d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$
Θ_0	$\inf_{\zeta\in\mathbb{R}} \mu(\zeta) = \mu(\zeta_0)$
$\mathcal{T}_h^0$	maillage d'un domaine dont les éléments sont de taille inférieure à h
$\mathcal{T}_h^1$	maillage déduit de $\mathcal{T}_h^0$ par translation des éléments de $(1,0)$
$\mathcal{T}_h^2$	maillage déduit de $\mathcal{T}_h^0$ par translation des éléments de $(2,0)$
u_1^{moy}	premier vecteur normalisé pour L^{moy}, associé à λ_1^{moy}
$\mathcal{V}^N$	$\left\{u \in L^2(\Omega^0) \mid \frac{1}{\sqrt{t}}\partial_\eta u \in L^2(\Omega^0), \sqrt{t}(\partial_t - i\,\eta)u \in L^2(\Omega^0)\right\}$
$\mathcal{V}_\ell^N$	$\{u \in L^2(\Omega) \mid \sqrt{t}\,(D_t-\eta)\,u \in L^2(\Omega)\}$
$\mathcal{V}_{\text{moy}}^N$	$\{u \in L^2(\mathbb{R}^+) \mid \sqrt{t}u \in L^2(\mathbb{R}^+), \sqrt{t}D_t u \in L^2(\mathbb{R}^+)\}$
$\mathcal{V}_{\text{moy},T}^N$	$\{u \in L^2(]0,T[) \mid \sqrt{t}u \in L^2(]0,T[), \sqrt{t}D_t u \in L^2(]0,T[),\ u_{\lvert t=T} = 0\}$
$\mathcal{V}_{T,0}^N$	$\left\{u \in L^2(\Omega_T) \mid \frac{1}{\sqrt{t}}\partial_\eta u \in L^2(\Omega_T),\ \sqrt{t}D_t u \in L^2(\Omega_T),\ u_{\lvert t=T} = 0\right\}$
$\mathcal{V}_T^{N,D}$	$\left\{u \in L^2(\Omega_T) \mid (D_t-\eta)u \in L^2(\Omega_T),\ D_\eta u \in L^2(\Omega_T),\ u_{\lvert t=T} = 0\right\}$
$\mathcal{W}_k^m(\Omega_0)$	$\{u \in H^{m-k}(\mathbb{R}^+) \mid t^k u \in H^m(\mathbb{R}^+)\}$, $\forall 0 \le k \le m$

Index

A

Agmon 10, 89
asymptotique 7, 10, 12, 87, 97

D

développement limité 97, 105, 108

E

Ecart 105
Etat mixte 2
Etat normal 1
Etat supraconducteur 1
Euler 3, 5

F

Feshbach (projection de) 17
Feynmann-Heilman (formule de) 8, 17, **17**, **20**

G

Ginzburg-Landau 2, 3
Grushin (méthode de) 8, 17

J

jauge 3, 6, 11, 127, 145

L

localisation 44, 89

M

Min-max (Principe du) . . 6, **16**, 21–23, 25, 33, 41–43, 45, 48, 186, 191

P

Persson (généralisation du Lemme de) . 9, 45, 49
polygone 9, 12

S

Spectre essentiel 8, 46, 49
supraconductivité 1

T

Temple (inégalité de) 25
Théorème spectral **16**, 105, 107, 214
translation 11, 42, 116, 120, 121, 125, 127, 145, 150

V

Valeur propre généralisée (algorithme) . . . 118

W

Weyl 46

N° d'impression 2553

4ème trimestre 2003

Analyse mathématique de la supraconductivité dans un domaine à coins : méthodes semi-classiques et numériques.

Résumé :

La théorie de la supraconductivité, modélisée par Ginzburg et Landau, motive les travaux relatifs à l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique. L'objet de cette thèse est d'analyser l'influence de la géométrie du domaine sur l'apparition de la supraconductivité en étendant les résultats existant pour des domaines réguliers à des domaines à coins. L'analyse semi-classique conduit à étudier trois opérateurs modèles : la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant sur le plan, le demi-plan et les secteurs angulaires. L'étude des deux premiers est bien connue et nous nous concentrons sur le dernier.

Après avoir déterminé le bas du spectre essentiel, nous montrons que le bas du spectre est une valeur propre pour un secteur d'angle aigu. Nous explicitons le développement limité de la plus petite valeur propre quand l'angle du secteur tend vers 0 et précisons la localisation de l'état fondamental grâce aux techniques d'Agmon.

Nous illustrons et estimons ensuite le comportement des vecteurs et valeurs propres à l'aide d'outils numériques basés sur la méthode des éléments finis. La localisation de l'état fondamental rend le problème discret très mal conditionné mais l'analyse des propriétés de l'opérateur et des défauts des méthodes classiques permet malgré tout de mettre en œuvre un algorithme robuste et efficace calculant l'état fondamental. Afin d'améliorer les résultats numériques, nous construisons des estimateurs a posteriori pour ce problème aux valeurs propres et utilisons les techniques de raffinement de maillages pour localiser l'état propre dans des domaines généraux et étudier la variation du bas du spectre en fonction de l'angle du secteur.

Mots clés : Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique dans un domaines à coins, théorie spectrale, analyse semi-classique, estimations d'Agmon, éléments finis, estimateur d'erreur a priori et a posteriori, raffinement de maillages.

Classification A. M. S. : 35J10, 35J20, 35P15, 35Q40, 65N15, 65N25, 65N30, 81Q10