



# Méthodes fonctionnelles et numériques pour l'approche de problèmes aux limites non linéaires mixtes elliptiques / hyperboliques

Jean-Sébastien Le Brizaut

► **To cite this version:**

Jean-Sébastien Le Brizaut. Méthodes fonctionnelles et numériques pour l'approche de problèmes aux limites non linéaires mixtes elliptiques / hyperboliques. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2004. tel-00005350

**HAL Id: tel-00005350**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005350>**

Submitted on 27 Apr 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE NANTES  
ECOLE CENTRALE DE NANTES  
LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES JEAN LERAY

---

# Méthodes fonctionnelles et numériques pour l'approche de problèmes aux limites non linéaires mixtes elliptiques / hyperboliques

---

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES  
*ECOLE DOCTORALE STIM*  
**Spécialité : Mathématiques**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Jean-Sébastien LE BRIZAUT**

*le 9 mars 2004, à l'Ecole Centrale de Nantes,  
devant le jury composé de :*

<i>Président</i>	Patrick CHEDMAIL	Professeur • Ecole Centrale de Nantes
<i>Rapporteurs</i>	Mohamed AMARA	Professeur • Université de Pau
	Marie-Noëlle LEROUX	Professeur • Université de Bordeaux 1
<i>Examineurs</i>	Jean-Pierre PUEL	Professeur • Université de Versailles et Ecole Polytechnique
	François JAUBERTEAU	Professeur • Université de Nantes
	Marc POGU	Professeur • Ecole Centrale de Nantes

**Directeur de Recherche : Pr. Marc POGU**

à Emmanuelle,  
à Pierre-Louis, Marc-Antoine, Anne-Blanche.

## Remerciements

Les travaux présentés dans cette synthèse ont été réalisés à :

- l'Ecole Centrale de Nantes, de 1994 à 1996 au Service de Mathématiques, puis depuis 1996 au Département Informatique et Mathématiques,
- Laboratoire de Mathématiques Jean Leray UMR CNRS 6629 depuis 1998.

Merci à Patrick CHEDMAIL, Professeur et Directeur de l'Ecole Centrale de Nantes, d'avoir accepté d'être membre de ce jury d'Habilitation à Diriger des Recherches, même si c'était en temps que « naïf », et d'avoir présidé ce jury. Connaissant (un peu) ce que peut représenter la charge que représente la direction d'un établissement comme Centrale Nantes, je ne peux que t'être extrêmement reconnaissant d'avoir consacré du temps à cette synthèse. Merci Patrick !

Merci à Mohamed AMARA, Professeur à l'Université de Pau et Directeur du Laboratoire de Mathématiques Appliquées, d'avoir accepté d'être rapporteur de ce travail. J'ai pu découvrir, lors de nos conversations, avant la soutenance et le jour celle-ci, un homme chaleureux, direct et franc. Je ne vous connaissais qu'au travers de vos travaux antérieurs mais j'espère que l'avenir nous donnera l'occasion de nous rencontrer à nouveau.

Merci à Marie-Noëlle LEROUX, Professeur à l'Université de Bordeaux 1, d'avoir accepté d'être rapporteur de ce travail. Merci d'avoir trouvé une solution pour surmonter les difficultés d'un déplacement en voiture de Bordeaux à Nantes pour participer à cette soutenance.

Merci à Jean-Pierre PUEL, Professeur à l'Université de Versailles et responsable de l'équipe « Equations aux dérivées partielles » du CMAPX de l'Ecole Polytechnique d'avoir su trouver le temps nécessaire à l'étude de ce dossier. Merci à vous d'avoir souligné les manques de ce dossier, je ne pourrais qu'améliorer la présentation de mes travaux en tenant compte de vos remarques.

Merci à François JAUBERTEAU, Professeur à l'Université de Nantes et responsable de notre équipe « Mathématiques Appliquées » au sein du Laboratoire, d'avoir accepté d'être membre du jury de cette H.D.R., après une réflexion de dix secondes autour du café que nous prenions ensemble lors d'une de mes visites au Laboratoire. Merci à toi pour tout ce que tu m'as apporté lors de nos conversations, particulièrement pour l'aspect numérique de mes travaux.

Merci à Marc POGU. Exprimer ici ma reconnaissance à Marc est quasi impossible ! Il a su, pendant quinze ans, me former à une démarche scientifique rigoureuse, au cours de ma thèse d'Université dans un premier temps, aidé en cela par Jacques BURGER,

Didier DELAUNAY et Yvon JARNY. Il m'a accompagné ensuite lors des travaux de recherche menés depuis mon recrutement en qualité de Maître de Conférences en 1994. Il a su influencer sur mes recherches, particulièrement sur le plan fonctionnel ; il a su me conforter lorsque je doutais et je ne peux que louer ses qualités humaines et scientifiques qui feront toujours de lui un Homme très important dans ma vie. Merci Marc !

Merci à tous les collègues de Centrale Nantes et plus particulièrement à Jean-Luc, Jean-Claude et Jean-François. Merci à ceux du Département Informatique et Mathématiques, avec une pensée particulière pour Raymond, Jean-Yves, Michel et Guillaume (sans oublier le retraité Jean-Claude). Les aspects positifs (ou négatifs !) de nos confrontations ont largement contribué à ma vie d'enseignant - chercheur à Centrale Nantes.

Pardon à Emmanuelle, Pierre-Louis, Marc-Antoine et Anne-Blanche. Ils ont le malheur de partager ma vie et cette H.D.R. n'aurait pas eu lieu sans eux (et pour eux). Ils ont supporté mes sautes d'humeur, mes déprimés et, heureusement, mes joies. Ils savent que, sans eux, ce travail n'aurait jamais été mené à bien. Merci à mon épouse et à nos trois petits monstres !

## SOMMAIRE

Introduction	p.06
1/ Problème aux limites sans contrainte	p.09
2/ Problème aux limites avec contrainte	p.19
3/ Projets de recherche	p.24
Bibliographie	p.26
Liste des publications	p.30

## Introduction

Les travaux présentés dans cette synthèse en vue d'une Habilitation à Diriger des Recherches concernent des problèmes aux limites non linéaires mixtes elliptiques hyperboliques auxquels on adjoint une contrainte inégalité. Une liste d'exemples conduisant à de tels problèmes peut être trouvée en [KEYF00]. Ici nous considérons le cas significatif présenté par le problème aux limites résultant du modèle de Karman et Guderley (voir par exemple [GUDE57], [COLE86] ou [RAMM90]) avec condition d'entropie [BRIS79]. Cette dernière résulte de l'application du second principe de la thermodynamique lorsque certaines inconnues d'origine mécanique sont supposées bornées (voir par exemple [GITT91] ou [LEBR99]). Ce modèle a l'avantage de s'énoncer simplement tout en présentant un terme non linéaire conduisant aux difficultés fondamentales des problèmes mixtes non linéaires. Le problème aux limites résultant de ce modèle est mal posé : à présent, il n'existe pas, à notre connaissance, de cadre fonctionnel assurant l'existence de solutions, notion à rapprocher de celle de [AUBI94]). De plus, des essais numériques montrent que plusieurs solutions peuvent exister [HAFE99].

Différentes méthodes d'approche de systèmes de type mixte elliptique hyperbolique ont été et sont proposées. Beaucoup concernent des résultats numériques, moins des résultats fonctionnels et peu la relation entre l'approche fonctionnelle et l'approche numérique. Sans être exhaustifs, nous mentionnons maintenant certaines méthodes d'approche. Des études numériques intensives utilisant des éléments finis dans le cadre de méthodes variationnelles sont un moyen naturel pour traiter des problèmes mixtes non linéaires, on pourra consulter [AMAR83], [BILL86] ou [FEIS98] et les bibliographies associées. Sur le plan fonctionnel, citons les travaux de [GAMB96] et [CANI00] fondés sur des arguments provenant essentiellement de l'étude de systèmes non linéaires hyperboliques, ceux de [NECA89], [GITT91], [MALE96] et [GITT00] pour l'approche de problèmes mixtes non linéaires à partir de résultats de compacité par compensation [MURA81]. Pour des résultats portant sur la relation entre l'approche numérique et l'approche fonctionnelle, citons [BRIS79].

Notre propos n'est pas de développer de telles études mais plutôt de les compléter en fournissant une méthode d'analyse assurant la cohérence entre les résultats fonctionnels et numériques. Rappelons l'origine du modèle de Karman et Guderley. Les écoulements plan étudiés ici sont régis par les équations fondamentales assurant la conservation de la masse, des quantités de mouvement et de l'énergie, couplées au second principe de la thermodynamique (voir [GUDE57], [COLE86] ou [POGU92b] par exemple). Quand on suppose que le tourbillon est négligé de sorte que l'écoulement devient isentropique, on est amené à ne considérer que la fonction  $\Phi$  solution de l'équation par rapport au potentiel complet. L'écoulement est supposé symétrique par rapport à l'axe  $x_1$ . Introduisons la demi épaisseur  $\delta$  du profil, la nombre de Mach  $M$  et la vitesse à l'infini  $v_\infty = (0, u_\infty)$ . Le couple  $(\delta, M)$  est pris au voisinage de  $(0, 1)$  avec  $u_\infty$  constant. La différence  $\nabla u = \nabla \Phi - v_\infty$  est supposée suffisamment petite. Dans ces conditions, suivant [MURM74] et [VAND75],  $u$  satisfait le problème aux limites :

$$\begin{cases} \partial_1(\alpha(\partial_1 u)) + \partial_2^2 u = 0 & (\Omega) \\ \partial_2 u = g & (\Gamma) \\ u = 0 & (\Gamma') \end{cases} \quad (S)$$

où les données géométriques sont :

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in \mathbb{R}^2, x_1 \in ]-1,1[, x_2 \in ]0,1[ \} \\ \Gamma &= \{x = (x_1, 0), x_1 \in ]-1,1[ \} \\ \Gamma' &= \partial\Omega - \Gamma, \end{aligned}$$

et les données fonctionnelles :

$$\alpha(s) = (k - ls)$$

$$g(s) = \begin{cases} \sqrt{M}(-4s) & \text{si } s \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{où : } \begin{aligned} k &= 6,25 \left(\frac{1}{M} - M\right) \\ l &= 1,2 \\ M &\in ]0,1[ \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que l'écoulement est stationnaire, l'utilisation du second principe de la thermodynamique conduit à :

$$\Delta\Phi \leq 0.$$

En cohérence avec les approximations précédentes, on suppose que certains termes sont bornés (voir par exemple [GITT91] ou [LEBR99]) et on obtient :

$$\Delta u \leq C \quad (CE)$$

où C est inconnu a priori.

Cette inégalité avait déjà été utilisée dans [BRIS79].

Dans cette synthèse, on s'intéresse au problème aux limites (S) associé à la contrainte (CE).

On commence par traiter (S) sans contrainte dans le paragraphe 1/. En raison du terme non linéaire  $\alpha$ , des propriétés de compacité, monotonie, convexité et contraction ne sont pas assurées a priori. Cette situation défavorable conduit d'abord à construire une approche du problème puis à établir des résultats fonctionnels et numériques. Suivant [POGU92], les relations sont cherchées dans un espace de Sobolev. Celui-ci contient des fonctions à dérivée discontinue ce qui permet éventuellement de prendre en compte les chocs. L'utilisation d'une formulation variationnelle et de la formule de Green généralisée ramènent le problème à montrer qu'une projection adaptée s'annule. L'introduction d'une norme adaptée conduit à minimiser une fonctionnelle en u. Cette procédure a été introduite en [POGU92], [LEBR97] et [LEBR01]. On utilise des solutions généralisées à  $\varepsilon$  près correspondant aux quasi minima d'Ekeland (pour cette notion, voir [AUBI82], [HERO99]). L'intérêt de ces méthodes à  $\varepsilon$  près est d'assurer une cohérence entre le cadre fonctionnel dans les espaces de Sobolev et celui de la dimension finie (en considérant les éléments finis par exemple) bien que le problème soit mal posé (théorèmes 1 et 2, comparables à certains des résultats de [NEUB97] et [BOBY99]). Ceci est confirmé par les essais numériques (figure 1) ; on y utilise des méthodes d'optimisation en dimension finie (paragraphe 1/3/). Mentionnons que d'autres auteurs utilisent l'optimisation afin d'approcher une solution de (S) : voir par



exemple [BRIS79], [BERG97], [BOCH98] et plus récemment [GIT00]. Dans ces travaux, les fonctionnelles introduites sont différentes de celles considérées ici et l'intérêt des solutions généralisées à  $\varepsilon$  près n'est pas développé par les mêmes arguments.

Dans le paragraphe 2/, on considère (S) avec la contrainte (CE). Le paramètre  $C$  est recherché dans un intervalle réel suffisamment grand a priori. La contrainte (CE) est également transformée par la formule de Green généralisée ce qui conduit à une contrainte égalité. Afin de traiter à la fois (S) et (CE), une fonctionnelle pénalisée est minimisée. Comme dans le paragraphe 1/, on obtient une relation avec le problème en dimension finie (théorème 5). L'utilisation d'une méthode du gradient portant sur le couple  $(u, C)$  et de la pénalisation par un terme prenant en compte le caractère mixte fournit un moyen de détermination approchée de  $(u, C)$ . Ceci répond en partie à la question concernant l'arbitraire sur  $C$  posée en [PIRO88].

# 1/ Problème aux limites sans contrainte

## 1/1/ Position du problème

On considère le problème aux limites :

$$\begin{cases} \partial_1(\alpha(\partial_1 u)) + \partial_2^2 u = 0 & (\Omega) & (1) \\ \partial_2 u = g & (\Gamma) & (2) \\ u = 0 & (\Gamma') & (3) \end{cases}$$

où les données géométriques sont :

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in \mathbb{R}^2, x_1 \in ]-1,1[, x_2 \in ]0,1[ \} \\ \Gamma &= \{x = (x_1, 0), x_1 \in ]-1,1[ \} \\ \Gamma' &= \partial\Omega - \Gamma, \end{aligned}$$

et les données fonctionnelles :

$$\alpha(s) = (k - ls)s$$

$$g(s) = \begin{cases} \sqrt{M}(-4s) & \text{si } s \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{où : } \begin{cases} k = 6,25 \left(\frac{1}{M} - M\right) \\ l = 1,2 \\ M \in ]0,1[ \end{cases}$$

L'inconnue est une fonction  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Introduisons le champ :

$$\begin{aligned} q_1 &= \partial_1 u \\ q_2 &= \partial_2 u \end{aligned}$$

le système par rapport à  $q$  obtenu de (1) est mixte :

$$\begin{cases} \text{elliptique} & \text{si } q_1 < u_c \\ \text{hyperbolique} & \text{si } q_1 > u_c \end{cases} \quad (4)$$

où :

$$u_c = \frac{k}{2l}$$

Plus généralement, on peut se donner  $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ .

## 1/2/ Méthodes fonctionnelles

### 1/2/1/ Formulation en projection

On cherche  $u \in H^1(\Omega)$ . En tenant compte du terme non linéaire de (1) et des conditions (2-3), on introduit les espaces :

$$\begin{aligned} V &= \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma'\} \\ U &= \{u \in V, \partial_1 u \in L^4(\Omega)\} \end{aligned}$$

Si (1-3) admet une solution  $u \in U$  alors, en utilisant la formule de Green généralisée, elle satisfait l'équation variationnelle :

$$(\alpha(\partial_1 u), \partial_1 v)_0 + (\partial_2 u, \partial_2 v)_0 = -\langle g, v \rangle \quad \forall v \in V \quad (5)$$

où :

$(\cdot, \cdot)_0$  désigne le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne la dualité  $(H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma))$

Introduisons la fonction  $u_g \in V$  solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u_g = 0 & (\Omega) \\ \partial_2 u_g = -g & (\Gamma) \\ u_g = 0 & (\Gamma') \end{cases}$$

On en déduit que (5) équivaut à :

$$(S(u), \nabla v)_0 = 0 \quad \forall v \in V$$

où 
$$S(u) = \begin{pmatrix} \alpha(\partial_1 u) \\ \partial_2 u \end{pmatrix} - \nabla u_g.$$

Soit  $P_W$  la projection de  $(L^2(\Omega))^2$  sur le sous-espace  $W = \{\nabla v, v \in V\}$ . On obtient :

**Proposition 1**

Le problème (1-3) admet une solution  $u \in U$  si et seulement si :

$$P_W S(u) = 0 \quad (6)$$

Pour donner un sens au terme non-linéaire en  $\alpha$ , on est amené à chercher  $\partial_1 u$  dans  $L^4(\Omega)$ . Ceci est cohérent avec le cadre fonctionnel de [NECA89] [GITT91] où  $\nabla u \in L^\infty(\Omega)$  et plus récemment de [NEUB97] où  $\nabla u \in L^p(\Omega), p > 2$ .

1/2/2/ Solutions généralisées à  $\varepsilon$  près

Le cadre fonctionnel de la proposition 1 permet de traiter (6) en utilisant la notion de solutions généralisées à  $\varepsilon$  près. Introduisons la fonctionnelle :

$$J(u) = \frac{1}{2} |P_W S(u)|_0^2 \quad (7)$$

et 
$$m = \inf \{J(v); v \in U\}$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , une solution généralisée à  $\varepsilon$  près est une fonction  $u_\varepsilon \in U$  telle que :

$$J(u_\varepsilon) \leq m + \varepsilon. \quad (8)$$

Cette notion est à rapprocher de celle de quasi-minima introduite par exemple dans [AUBI82] et [HERO99]. Puisque  $J$  est positive, les solutions généralisées à  $\varepsilon$  près existent toujours ; la difficulté est d'en construire. L'utilisation de la formule de Green généralisée montre que si  $u_\varepsilon$  est solution de (8), elle satisfait :

$$\begin{cases} \operatorname{div} S(\nabla u_\varepsilon) - \operatorname{div} \eta = 0 & (\Omega) \\ \partial_2 u_\varepsilon - \eta_2 = 0 & (\Gamma') \\ u_\varepsilon = 0 & (\Gamma) \end{cases} \quad (9)$$

où  $|\eta|_0 \leq m + \varepsilon$ . Lorsque  $S$  est remplacée par un prolongement adapté  $Z$  dans (9), on montre en [POGU92] que (9) admet une solution avec  $m=0$ . Réciproquement, le remplacement de  $Z$  par  $S$  reste, à notre connaissance, un problème ouvert. Au paragraphe 1/4/, des essais numériques montrent que  $m$  est proche de 0.

Nous n'avons pas nécessairement l'unicité des solutions généralisées à  $\varepsilon$  près. Introduisons une propriété d'unicité à  $\varepsilon$  près. Soit  $\eta > 0$  suffisamment petit, on considère une partition de  $\Omega$  en  $\omega_i$ ,  $i=1, \dots, N$  telle que :

$$|\omega_i| \leq \eta$$

(où  $||$  désigne l'aire de  $\omega_i$ ) et on introduit les fonctionnelles :

$$I_i(v) = \frac{1}{|\omega_i|} \int_{\omega_i} v \, dx.$$

On pose :

$$K_0 = U.$$

Considérons les bornes inférieures et les ensembles suivants :

$$i = 1, \dots, N$$

$$m_i = \inf \{ I_i(v), v \in K_{i-1} \} \quad (10)$$

$$K_i = \{ v \in K_{i-1}, I_i(v) \leq m_i + \varepsilon \}$$

Soient  $u$  et  $\underline{u}$  deux éléments de  $K_N$ ; comme les  $K_i$  sont emboîtés, on a :

$$i = 1, \dots, N$$

$$I_i(u) \leq m_i + \varepsilon \leq I_i(\underline{u}) + \varepsilon$$

On obtient la :

### Proposition 2

Soient  $u$  et  $\underline{u}$  deux solutions généralisées à  $\varepsilon$  près alors on a :

$$\frac{1}{|\omega_i|} \left| \int_{\omega_i} (u - \underline{u}) \, dx \right| \leq \varepsilon$$

Pour la dimension finie, signalons un résultat d'unicité analogue obtenue en [LEBR02] et mentionnons les résultats de [GIT00] (lemme 4.6 et théorème 4.8).

Selon le choix de  $\eta$  et celui de  $\varepsilon$ , la mise en œuvre numérique de l'algorithme (10) peut être longue.

### 1/2/3/ Passage en dimension finie

Introduisons la norme de  $U$  :

$$\|v\|_4 = |v|_0 + |\partial_1 v|_{L^4(\Omega)} + |\partial_2 v|_0.$$

Proposition 3

Il existe une base dénombrable dense pour  $(U, \|\cdot\|_4)$ .

Démonstration :

Soit  $u \in U$ , pour  $\varepsilon > 0$ , par troncature et convolution (voir par exemple [GILB83]), il existe une fonction  $v_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$  telle que :

$$v_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma' \text{ avec } \|u - v_\varepsilon\|_4 \leq \varepsilon.$$

A  $v_\varepsilon$  fixé, il existe  $w_\varepsilon$  polynôme de degré 1 par morceaux tel que :

$$\|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_4 \leq \varepsilon.$$

Dans ces conditions, une base dénombrable peut par exemple être fournie par une méthode des éléments finie P1D2 ■

Notons  $(e_i)$  une base dénombrable de  $U$ ,  $V_n$  est le sous-espace de dimension finie engendré par  $(e_1, \dots, e_n)$ . On introduit :

$$m_n = \inf\{J(v), v \in V_n\}.$$

Proposition 4

On a :  $m_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m$ .

Démonstration :

Soit  $n_1 < n$ , on a :  $V_{n_1} \subset V_n$  d'où :

$$\inf\{J(v), v \in V_n\} \leq \inf\{J(v), v \in V_{n_1}\}$$

c'est à dire :  $m_n \leq m_{n_1}$ .

De même, on a :  $V_n \subset U$

d'où :  $m \leq m_n$ .

Quand  $n$  augmente, la suite  $m_n$  est décroissante minorée par  $m$  d'où :

$$m_n \rightarrow \alpha$$

avec :  $m_n \geq \alpha$

et  $\alpha \geq m$ .

Supposons  $\alpha > m$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$m < m + \varepsilon < \alpha$$

Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists u_\varepsilon \in U$  tel que  $m \leq J(u_\varepsilon) \leq m + \varepsilon$ .

La proposition 3 entraîne :

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists u_n \in V_n \text{ tel que } u_\varepsilon = u_n + \theta \text{ où } \|\theta\|_4 \leq \varepsilon_1$$

Par composition de fonctions continues, il suffit de montrer que :

$$U, \|\cdot\|_4 \rightarrow [L^2(\Omega)]^2, \|\cdot\|_0$$

$$v \mapsto S(v)$$

est continue. Il vient :

$$S(u) - S(v) = \begin{cases} k\partial_1(u-v) - l[(\partial_1 u)^2 - (\partial_1 v)^2] \\ \partial_2(u-v) \end{cases} \quad (i)$$

Par utilisation de l'inégalité de Cauchy Schwartz, on a :

$$\left| (\partial_1 u)^2 - (\partial_1 v)^2 \right|_0 \leq \|\partial_1(u-v)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_1(u+v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (ii)$$

On déduit de (i) et (ii) que S est continue. On obtient :

$$J(u_n) = J(u_\varepsilon) + r(\varepsilon_1) \quad \text{où } r(\varepsilon_1) \xrightarrow{\varepsilon_1 \rightarrow 0} 0.$$

et  $J(u_n) \leq m + \varepsilon + r(\varepsilon_1)$ .

On choisit  $\varepsilon_1$  suffisamment petit de telle sorte que :

$$\alpha \leq J(u_n) \leq m + \varepsilon + r(\varepsilon_1) < \alpha$$

d'où la contradiction ■

### Théorème 1

Le problème (U,J) a une solution à  $\varepsilon$  près :

$$\exists u_\varepsilon \in U : J(u_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

si et seulement si, pour n suffisamment grand, le problème  $(V_n, J)$  a une solution à  $\varepsilon$  près :

$$\exists u_n \in V_n : J(u_n) \leq \varepsilon$$

Ce résultat étend ceux obtenus en [POGU92b].

Lors de mise en œuvre numérique, on est amené à remplacer J par :

$$J_n(v) = \frac{1}{2} \left| P_{V_n} S(\nabla v) \right|_0^2 \quad \forall v \in V_n. \quad (11)$$

Pour cette fonctionnelle, la démonstration du théorème 1 reste une question ouverte.

### 1/2/4/ Formulation en distance

Au lieu de chercher à minimiser la projection, on cherche à minimiser la distance de  $S(v)$  à  $W^\perp$ . On introduit la fonctionnelle sur  $U \times W^\perp$  :

$$I(v, z) = \frac{1}{2} \|S(v) - z\|_0^2 \quad (12)$$

et on pose :  $m = \inf \{ I(v, z), (v, z) \in U \times W^\perp \}$ .

On souhaite déterminer  $(W^\perp)_n$ . Soit  $q \in W^\perp$ , on a :

$$(q, \nabla v)_0 = 0 \quad \forall v \in V.$$

Pour  $\varphi \in D(\Omega)$ , on a :

$$-\text{div } q(\varphi) = (q, \nabla \varphi)_0.$$

On en déduit :  $\text{div } q = 0$  et  $\text{div } q \in L^2(\Omega)$  ;

la formule de Green généralisée s'applique :

$$(q, \nabla v)_0 = \langle q, n, v \rangle - (\text{div } q, v)_0,$$

d'où :

$$\langle q, n, v \rangle = 0.$$

$$\text{De } v=0 \text{ sur } \Gamma', q \text{ satisfait : } \begin{cases} q \in L^2(\Omega) \\ \operatorname{div} q = 0 & (\Omega) \\ q \cdot n = 0 & (\Gamma) \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{Introduisons la notation : } w = {}^t q = \begin{pmatrix} q_2 \\ -q_1 \end{pmatrix},$$

(13) implique :  $\operatorname{rot} w = 0$  dans  $\Omega$ , d'où (voir par exemple [DAUT88], chapitre 9, paragraphe 1, proposition 2, page 253) :  $w = \nabla \underline{v}$  avec  $\underline{v} \in H^1(\Omega)$ .

$$\text{On obtient : } \begin{cases} q = {}^t \nabla \underline{v} & (\Omega) \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0 & (\Gamma) \end{cases}.$$

Réciproquement, a-t-on  ${}^t \nabla \underline{v} \in W^\perp$ , c'est à dire :  $({}^t \nabla v, \nabla v)_0 = 0 \quad \forall v \in V$  ?  
Appliquons la formule de Green généralisée :

$$({}^t \nabla \underline{v}, \nabla v)_0 = \langle {}^t \nabla \underline{v} \cdot n, v \rangle - (\operatorname{div} {}^t \nabla \underline{v}, v)_0 = \langle {}^t \nabla \underline{v} \cdot n, v \rangle_\Gamma = \langle \frac{\partial v}{\partial \tau}, v \rangle_\Gamma = 0.$$

On obtient la :

#### Proposition 5

$$q \in W^\perp \text{ si et seulement si } \begin{cases} q = {}^t \nabla \underline{v} & (\Omega) \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0 & (\Gamma) \end{cases} \text{ avec } \underline{v} \in H^1(\Omega).$$

Introduisons  $V_\Gamma = \left\{ v \in H^1(\Omega), \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0 \text{ } (\Gamma) \right\}$ . Soit  $(e_{n_\Gamma})$  une base dénombrable dense de  $(V_\Gamma, |\cdot|_1)$ , on note  $(V_\Gamma)_n$  le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par  $(e_{1_\Gamma}, \dots, e_{n_\Gamma})$ . On prend :

$$(W^\perp)_n = \left\{ z = {}^t \nabla v, v \in (V_\Gamma)_n \right\}$$

et on pose :  $m_n = \inf \left\{ I(u, z), (u, z) \in V_n \times (W^\perp)_n \right\}$ .

et par des arguments analogues à ceux des paragraphes 1/2/2/ et 1/2/3/, on obtient le :

#### Théorème 2

Le problème  $(U \times W^\perp, I)$  a une solution à  $\varepsilon$  près si et seulement si, pour  $n$  suffisamment grand, le problème  $(V_n \times (W^\perp)_n, I)$  a une solution à  $\varepsilon$  près.

Sur le plan numérique, l'introduction de  $V_n \times (W^\perp)_n$  double la dimension du problème traité par rapport à la formulation en projection. Néanmoins, on obtient une expression directe de la fonctionnelle  $I$  à minimiser. Dans cette formulation en distance, la difficulté signalée à la fin de 1/2/3/ est levée.

## 1/3/ Méthodes d'optimisation en dimension finie

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la formulation en projection. Pour les applications numériques, on interpole la fonctionnelle  $J$  introduite en (7) par  $J_n$  introduite en (11).

### Proposition 6

Soient  $u \in U$  et  $u_n \in V_n$  tels que  $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_4} u$  alors :  $P_W S(u_n) - P_{W_n} S(u_n) \xrightarrow{W} 0$  faiblement.

### Démonstration

Soient  $u \in U$  et  $u_n \in V_n$  tels que  $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_4} u$ ,

$$(P_W S(u_n) - P_{W_n} S(u_n), v)_0 = (S(u_n), v - P_{W_n} v)_0$$

On a :  $v - P_{W_n} v \xrightarrow{W} 0$ .

D'autre part,  $S(u_n)$  est borné. On en déduit la proposition ■

A  $n$  fixé, on s'intéresse à évaluer :

$$\bar{m}_n = \inf \{ J_n(v), v \in V_n \}.$$

Pour  $v \in V_n$ , on a :  $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$  et en reportant dans  $J_n$ , on obtient :

$$J_n(v) = \sum a_{ijkl} v_i v_j v_k v_l + \sum a_{ijk} v_i v_j v_k + \sum a_{ij} v_i v_j + \sum a_i v_i + a_g$$

où les indices  $(i, j, k, l) \in [1, \dots, n]$ , les coefficients dépendent de  $n$  fixé et  $a_g = |\nabla u_g|_0^2$ . A priori, les coefficients des termes rectangles ne sont pas nécessairement positifs ce qui nous conduit à introduire un prolongement  $\theta \in C^2(\mathbb{R}^n)$  tel que :

$$\theta(v) = \begin{cases} v & |v| \leq R \\ 0 & |v| \geq R + \eta, \eta > 0 \end{cases} \quad (14)$$

et à modifier la fonctionnelle  $J_n$  en :

$$\tilde{J}_n(v) = J_n(\theta(v))$$

On pose :  $\tilde{m}_n = \inf \{ \tilde{J}_n(v), v \in V_n \}$ . (15)

On s'intéresse aux minima locaux de  $\tilde{J}_n$ . Des résultats établis en [LEBR96] et [LEBR01], on obtient le :

### Théorème 3

Soit  $\varepsilon > 0$ , (15) a des minima locaux à  $\varepsilon$  près :  $\exists u_{n_\varepsilon} \in V_n$  tel que  $|\nabla \tilde{J}_n(u_{n_\varepsilon})| \leq \varepsilon$ . De plus,

pour  $\rho \in \left] 0, \frac{1}{B} \right[$  où  $B = \sup \{ |\nabla^2 \tilde{J}_n(v)|, v \in \mathbb{R}^n \}$ , l'algorithme :

$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \text{ donné} \\ u^{(k+1)} = u^{(k)} - \rho \nabla \tilde{J}_n(u^{(k)}) \end{array} \right.$  fournit des minima locaux.



On s'intéresse maintenant aux minima globaux de  $\tilde{J}_n$ . Introduisons l'algorithme stochastique :

$$\begin{cases} X_0 \text{ donné} \\ X_{n+1} = X_n - \rho \nabla \tilde{J}_n(X_n) + Z_n \text{ avec } n \geq 0 \end{cases}$$

où  $Z_n$  sont indépendantes et suivent  $N(\mu, \sigma)$ . Des résultats de [LEBR02], on obtient le :

**Théorème 4**

Soit  $\varepsilon > 0$ , pour  $\rho \in \left] 0, \frac{R^2}{4a_g} \right[$ , la suite d'observations  $X_k(\omega)$  fournit des minima globaux à  $\varepsilon$  près de  $\tilde{J}_n$  :  $\exists v_\varepsilon = X_k(\omega)$  tel que  $\tilde{J}_n(v_\varepsilon) \leq \tilde{m}_n + \varepsilon$ .

Pour la fonctionnelle  $J_n$ , la démonstration des théorèmes 3 et 4 reste un problème ouvert. Par ailleurs, à notre connaissance, il semble que seuls des algorithmes stochastiques permettent de démontrer la convergence presque partout vers des minima globaux.

**1/4/ Résultats numériques**

Soit  $z = P_{W_n} S(v)$ , on a :  $(z - S(v), \nabla e_i)_0 = 0 \quad \forall i \in [1, \dots, n]$   
 $\Leftrightarrow (z, \nabla e_i)_0 = (S(v), \nabla e_i)_0 = E_i$

Comme  $z \in W_n$ , on a  $z = \sum_{j=1}^n z_j \nabla e_j$  et  $E_i = \sum_{j=1}^n z_j (\nabla e_i, \nabla e_j)_0$  ou encore :

$$z = A_n^{-1} E \quad \text{où } A_n = (\nabla e_i, \nabla e_j)_0 \text{ et } E = \begin{pmatrix} E_1 \\ \dots \\ E_n \end{pmatrix}$$

La fonctionnelle (11) devient :  $J_n(v) = \frac{1}{2} E A_n^{-1} E$ . Annuler  $J_n$  revient à annuler  $E$ . La fonctionnelle utilisée pour les essais numériques est donc :

$$J_n(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i^2 \tag{16}$$

notée de la même manière que (11) sans confusion possible et qui possède les mêmes propriétés. Les essais numériques fonctionnent sans que l'introduction du prolongement (14) soit nécessaire.

**1/4/1/ Méthode de discrétisation**

L'ouvert  $\Omega$  est décomposé en  $N1 \times N2$  rectangles de largeur  $h1=2/N1$  et de hauteur  $h2=1/N2$ . Les équations discrétisées s'écrivent en chaque noeud de la grille ainsi définie:

$$E_{ij}(\alpha, g) = 0 \quad i = 2, \dots, N_1 \quad j = 1, \dots, N_2 \quad (17)$$

où :

$$E_{i,1} = h_2 \left( \alpha \left( \frac{u_{i,1} - u_{i-1,1}}{h_1} \right) - \alpha \left( \frac{u_{i+1,1} - u_{i,1}}{h_1} \right) \right) - 2 \frac{h_1}{h_2} (u_{i,2} - u_{i,1}) + 2h_1 g(-1 + (i-1)h_1) \quad i=2, \dots, N_1 \quad (18)$$

$$E_{i,j} = h_2 \left( \alpha \left( \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_1} \right) - \alpha \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_1} \right) \right) + \frac{h_1}{h_2} (-u_{i,j+1} + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}) \quad i=2, \dots, N_1 ; j=2, \dots, N_2 \quad (19)$$

$$u_{1,1+N_2} = u_{1,j} = u_{1+N_1,j} = 0 \quad i=1, \dots, 1+N_1 ; j=1, \dots, 1+N_2 \quad (20)$$

On minimise la fonctionnelle :

$$J_n(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} E_{ij}^2 \quad (21)$$

où  $\mu$  est une constante positive convenablement choisie.

La dérivation de (21) par rapport à  $u_{pq}$  fournit l'expression :

$$\nabla_{pq} J_n = \sum_i \sum_j \left( \frac{\partial E_{ij}}{\partial u_{pq}} E_{ij}(u) \right) \quad (22)$$

## 1/4/2/ Méthode de descente avec interpolation

On introduit la méthode de descente (notée (M)). Elle se décompose en trois étapes :

- (i) choix des pas de descente  $\rho$
- (ii) modification de  $u$  par :  $u_{pq}^{(k+1)} = u_{pq}^{(k)} - \rho \nabla_{pq} J_n$  (23)  
à chaque nœud  $(p,q)$  de la grille de discrétisation, le résultats de (23) est utilisé dans le calcul de (22) dès qu'il est obtenu,
- (iii) calcul de  $J_n(u^{(k+1)})$  avec (21) et retour à (ii) tant que  $J_n(u^{(k+1)}) < J_n(u^{(k)})$ .

Nous considérons également une méthode (notée (IM)) pour interpoler les résultats de (M) :

- (i) introduction d'une nouvelle grille de discrétisation de  $\Omega$ ,  $(a,b)$  est un nœud de cette grille,
- (ii) calcul de  $x_i, x_{i+1}, y_k$  et  $y_{k+1}$  nœud de la grille de discrétisation précédente de telle sorte que:  $x_i < a < x_{i+1}$  et  $y_k < b < y_{k+1}$ ,

$$(iii) \text{ calcul de : } \quad ra = \frac{a - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad rb = \frac{b - y_k}{y_{k+1} - y_k}$$

$$\text{et de } u(a,b) : \quad u(a,b) = (1-ra).(1-rb).u(A) + ra.(1-rb).u(B) + ra.rb.u(C) + (1-ra).rb.u(D)$$

où  $u(A), u(B), u(C), u(D)$  sont les résultats de (M) aux points A, B, C, D de la grille de discrétisation précédente définis par  $A=(x_i, y_k), B=(x_{i+1}, y_k),$

$C=(x_{i+1},y_{k+1})$ ,  $D=(x_i,y_{k+1})$ . Cette interpolation est réalisée avec quatre noeuds , la surface est approchée par une parabole hyperbolique (voir [NOUG87] par exemple).

Au point (iii), la discrétisation évolue en fonction des itérations (interpolation évolutive).

Les équations (17-20) sont résolues par la procédure suivante :

- (i) choix d'une grille de discrétisation et des initialisations  $u^{(0)}$ ,
- (ii) approximation de la solution par (M),
- (iii) si la discrétisation est suffisamment précise (par évaluation de la précision de la discrétisation de g), la procédure est arrêtée sinon :
- (iv) utilisation de (IM) pour interpoler les résultats de (M) et construire une nouvelle initialisation  $u^{(0)}$ . Retour à (ii).

### 1/4/3/ Exemples numériques

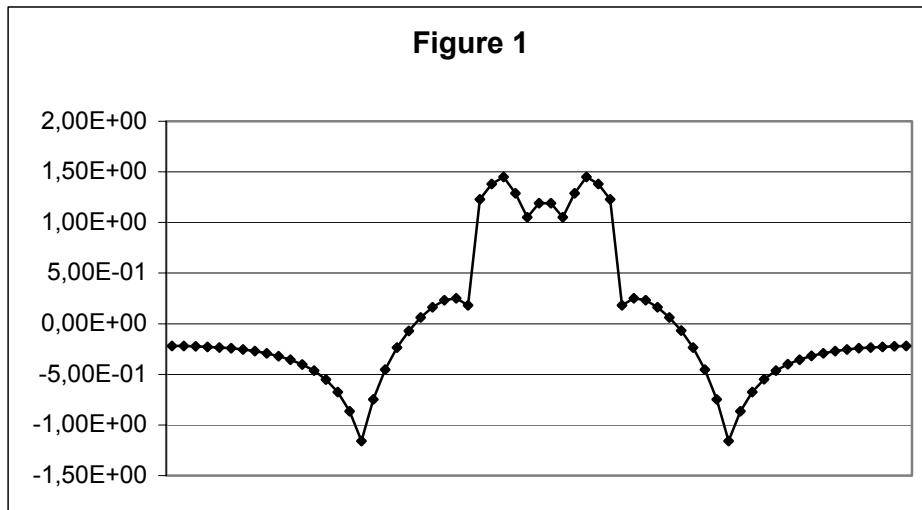
On pose  $M=0.895$  (comme dans [LEBR02c] ou [LEBR02d]) utilisées aussi pour les essais de [MURM71] et de [AMAR83].

On pose  $\rho=0.005$ . Les essais sont réalisés avec quatre maillages successifs, avec interpolation des résultats de (M) par (IM) à chaque étape :  $(N1,N2)=(8,4)$ ,  $(N1,N2)=(16,8)$ ,  $(N1,N2)=(32,16)$  et  $(N1,N2)=(64,32)$ .

La valeur finale de la fonctionnelle est  $J_n=1.42E-6$ .

La figure 1 est la représentation graphique de  $\partial u/\partial x(x,0)$  sur  $]-1,1[$ .

D'autres essais numériques commentés peuvent être trouvés en [LEBR99] et [LEBR02d].



## 2/ Problème aux limites avec contrainte

### 2/1/ Position du problème

On considère le problème aux limites :

$$\begin{cases} \partial_1(\alpha(\partial_1 u) + \partial_2^2 u = 0 & (\Omega) & (24) \\ \partial_2 u = g & (\Gamma) & (25) \\ u = 0 & (\Gamma') & (26) \end{cases}$$

où les données géométriques et les données fonctionnelles sont définies au paragraphe 1/1/. Nous adjoignons à (24-26) la condition :

$$\Delta u \leq C \quad (27)$$

où  $C$  est un paramètre à identifier dans l'intervalle  $L = [C_0, +\infty]$  avec  $C_0$  un nombre réel constant.

Dans (27), le laplacien  $\Delta$  est pris au sens des distributions.

L'inconnue est une fonction  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 2/2/ Méthodes fonctionnelles

#### 2/2/1/ Formulation en projection

Au paragraphe 1/2/1/, on a montré :

$$u \in U \text{ est solution de (24 - 26) si et seulement si } P_W S(u) = 0. \quad (28)$$

Par utilisation de la formule de Green généralisée, on montre (en procédant comme dans [LEBR01]) que  $u \in U$  satisfait (28) si et seulement si :

$$F(u, C) = 0, \quad (29)$$

$$q(u, C, v) = \left[ -(\nabla u, H(v)\nabla v)_0 - C(1, v^+)_0 \right]^+$$

où

$$F(u, C) = \sup \left\{ \frac{q(u, C, v)}{\|v\|_0}; v \in H_0^1(\Omega) \right\}$$

avec

$$s^+ = \max(s, 0).$$

#### 2/2/2/ Solutions généralisées à $\varepsilon$ près

Introduisons la fonctionnelle :  $J(u) = \frac{1}{2} |P_W(S(u))|_0^2$  et :

$$K = \{(u, C) \in U \times L, F(u, C) = 0\},$$

$$m_K = \inf \{J(u); (u, C) \in K\}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , une solution généralisée à  $\varepsilon$  près  $(u_\varepsilon, C_\varepsilon) \in U \times L$  de  $(J, m_K)$  satisfait :

$$\begin{cases} J(u_\varepsilon) \leq m_K + \varepsilon \\ F(u_\varepsilon, C_\varepsilon) \leq \varepsilon \end{cases} \quad (30)$$

Puisque  $K \neq 0$  et que  $J$  et  $F$  sont bornées inférieurement, les solutions généralisées à  $\varepsilon$  près existent. Par pénalisation de la contrainte en  $F$ , on peut construire des solutions de (30) en se passant de  $K$  (proposition 7).

Considérons la fonctionnelle pénalisée de  $J$  :

$$J_\mu(u, C) = J(u) + \mu F(u, C)$$

avec  $\mu$  un entier positif ou nul.

On pose :  $m_\mu = \inf \{ J_\mu(u, C), (u, C) \in U \times L \}$ .

Procédant comme dans [LEBR01], on obtient la :

**Proposition 7**

Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N / \forall \mu \geq N$ , les couples  $(u_{\mu\varepsilon}, C_\varepsilon)$  tels que :

$$J_\mu(u_{\mu\varepsilon}, C_\varepsilon) \leq m_\mu + \varepsilon$$

sont solutions de :

$$\begin{cases} J(u_\varepsilon) \leq m_K + \varepsilon \\ F(u_\varepsilon, C_\varepsilon) \leq \varepsilon \end{cases}$$

2/2/3/ Passage en dimension finie

On introduit :  $m_{\mu n} = \inf \{ J_\mu(u, C), (u, C) \in V_n \times L \}$ .

Par des arguments analogues à ceux du paragraphe 1/2/3/, on obtient le :

**Théorème 5**

A  $\mu$  fixé, pour  $n$  suffisamment grand, une solution de :

$$\exists (u, C) \in V_n \times L \quad J_\mu(u, C) \leq m_{\mu n} + \varepsilon$$

est une solution de :  $\exists (u, C) \in U \times L \quad J_\mu(u, C) \leq m_\mu + \varepsilon$ . (i)

Pour  $\mu$  assez grand, une solution de (i) est solution de :

$$\exists (u, C) \in U \times L \quad \begin{cases} J(u) \leq m_K + \varepsilon \\ F(u, C) \leq \varepsilon \end{cases}$$

c'est à dire une solution à  $\varepsilon$ -près de :

$$\exists (u, C) \in K \quad J(u) \leq m_K + \varepsilon.$$

Une démonstration de ce théorème pourra être trouvée dans [LEBR02b].

Comme en [LEBR02b], on obtient pour  $(J_\mu, m_\mu)$  l'analogie de la proposition 2 du paragraphe 1/2/2/ et du théorème 2 du paragraphe 1/2/4/.

Pour la minimisation de  $(J_{\mu n}, m_{\mu n})$ , on utilise un algorithme de descente comme celui du théorème 3.

## 2/3/ Résultats numériques

Dans cette partie, on pénalise la fonctionnelle (16) par la contrainte (29) discrétisée.

### 2/3/1/ Méthode de discrétisation

La discrétisation (17-20) est toujours valable. La condition (4) est discrétisée par :

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_1} \geq u_c \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N_1 \\ j = 1, \dots, N_2 \end{array} \quad (31)$$

Dans (29),  $F(u,C)$  se discrétise de la même manière que  $E_{ij}$  :

$$F_{ij} = (E_{ij}(\text{Id},0) - C h_1 h_2)^+ \quad i = 2, \dots, N_1 \quad j = 2, \dots, N_2 \quad (32)$$

où  $\text{Id}$  est la fonction définie par :

$$\text{Id}(x) = x.$$

On souhaite déterminer  $u$  et  $C$  en utilisant une méthode du gradient à pas fixe.

On minimise la fonctionnelle :

$$J_{n\mu}(u, C) = J_n(u) + \frac{\mu}{2} \sum_{i=2}^{N_1} \sum_{j=2}^{N_2} F_{ij}^2 \quad (33)$$

où  $\mu$  est une constante positive convenablement choisie. Quand la condition (31) n'est pas vérifiée, on prend  $\mu=0$  dans (33), ceci est en accord avec les observations de [GITT91] et [GITT00].

La dérivation de (14) par rapport à  $u_{pq}$  et par rapport à  $C$  fournit les expressions suivantes :

$$\nabla_{pq} J_{n\mu} = \sum_i \sum_j \left( \frac{\partial E_{ij}}{\partial u_{pq}} E_{ij}(u) + \mu \frac{\partial F_{ij}}{\partial u_{pq}} F_{ij}(u, C) \right) \quad (34)$$

$$\nabla_C J_{n\mu} = \sum_i \sum_j \left( \mu \frac{\partial F_{ij}}{\partial C} F_{ij}(u, C) \right) \quad (35)$$

Pour dériver (32) dans (34) et (35), on introduit une fonction régularisante. Cependant, cette fonction n'a pas été nécessaire pour les essais numériques.

La méthode de descente avec interpolation (M)-(IM) présentée pour le cas sans contrainte dans le paragraphe 1/4/2/ est utilisée ici pour le couple  $(u,C)$ .

### 2/3/2/ Exemples numériques

Comme dans 1/4/3/, on pose  $M=0.895$ .

On pose  $\rho=\rho_C=0.005$ .

Le tableau 1 donne les résultats en fonction de la valeur initiale  $C^{(0)}$  de (M). Tous les essais sont réalisés avec quatre maillages successifs, avec interpolation des résultats de (M) par (IM) à chaque étape :  $(N_1, N_2)=(8,4)$ ,  $(N_1, N_2)=(16,8)$ ,  $(N_1, N_2)=(32,16)$  et  $(N_1, N_2)=(64,32)$ . Seuls les résultats obtenus à la fin de la procédure sont indiqués :

- la valeur de  $E = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{N1} \sum_{j=1}^{N2} E_{ij}^2$ ,
- la valeur de  $F = \frac{\mu}{2} \sum_{i=2}^{N1} \sum_{j=2}^{N2} F_{ij}^2$ , avec  $\mu=1$ ,
- la valeur finale de C.

$C^{(0)}$	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>C</b>
0	8.47 e-5	2.17 e-4	0.03458
-10	1.24 e-4	2.87 e-4	0.04655
0.1	8.47 e-5	2.12 e-4	0.05731

Tableau 1

La figure 2 est la représentation graphique de  $\partial u / \partial x(x,0)$  sur  $] -1, 1[$  dans le deuxième cas présenté dans le tableau précédent. Les résultats sont toujours satisfaisants par rapport aux critères de qualité définis en [LEBR02c] :

- non symétrie de l'évolution de  $\partial u / \partial x(x,0)$  sur  $] -1, 1[$ ,
- choc à droite d'amplitude suffisante,
- différence entre le choc à droite et le choc à gauche (quand il existe) supérieure à la moitié du choc à droite,

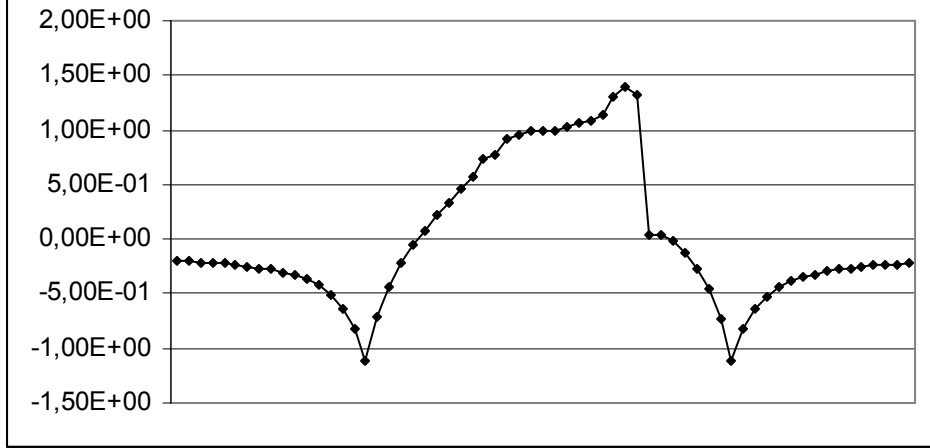
et les différences entre les représentations pour les trois essais présentés dans le tableau sont peu sensibles.

La modification du pas de descente en C ne modifie pas les résultats obtenus.

Si la condition d'entropie n'est pas introduite, les critères de qualité cités ci-dessus ne sont pas vérifiés : symétrie de l'évolution de  $\partial u / \partial x(x,0)$  sur  $] -1, 1[$ , choc à droite de faible amplitude égal au choc à gauche (voir figure 1). Ceci a déjà été observé en [POGU93] où une autre méthode de résolution a été utilisée. Si la condition d'entropie est prise comme contrainte dans la zone hyperbolique, la méthode proposée ici fait apparaître un choc à droite significatif.

D'autres résultats numériques sur ce modèle avec contrainte peuvent être trouvés dans [LEBR01b], [LEBR02b], [LEBR02c] ou [LEBR02d].

Figure 2





### 3/ Projets de recherche

#### 3/1/ Commentaires

Au paragraphe 2/2/2/, on peut aussi considérer la fonctionnelle :

$$J_{\lambda,\mu} = \lambda J + \mu F$$

et optimiser en pondérant avec  $\lambda > 0$ . On pourrait minimiser  $F$  en prenant pour contrainte  $J \leq m + \varepsilon$  (méthode utilisée par exemple en [LEBR94] et en [LEBR97] pour d'autres problèmes aux limites) c'est à dire prendre  $\lambda > 0$  et  $\mu = 1$ . Cependant, cette méthode présente ici une difficulté car  $m$  est inconnu a priori.

Au paragraphe 2/1/, en observant que  $(u, C) = 0$  est solution des relations (1),(3-4), une autre approche serait de minimiser la différence  $(\partial_2 u - g)$  sous la contrainte (1),(3-4).

Comme il a été signalé à la fin du paragraphe 1/2/4/, la formulation en distance permet d'éviter l'interpolation de  $J$  par  $J_n$  (voir (11)) ce qui devrait faciliter la résolution numérique dans les cas avec ou sans contrainte.

#### 3/2/ Extensions

La formulation en distance devrait s'étendre à un ouvert  $\Omega$  non borné par utilisation d'espaces de Sobolev avec poids ; dans cette direction, on peut se reporter par exemple à [JOLL01] pour une approche des écoulements transsoniques décrits par les équations en potentiel complet.

De même, avec cette formulation, on pourrait traiter sur le plan fonctionnel des classes plus générales d'équations aux dérivées partielles stationnaires ou en évolution par utilisation d'espaces adaptés (voir par exemple [LEBR96]). Un exemple significatif serait celui du système de la dynamique des gaz incluant l'inégalité de Clausius-Duhem (voir par exemple [POGU92b]).

#### 3/3/ Perspectives

Des théorèmes 1, 2 et 5, il resterait à démontrer l'existence de solutions à  $\varepsilon$  près :

$$\exists u_\varepsilon \text{ tel que } J(u_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Dans un premier temps, en raison des connaissances actuelles, on ne chercherait à représenter qu'une partie des conditions imposées par le modèle de Karman et Guderley.

A partir de formules littérales (explicites ou semi-explicites) associées à des systèmes 2D simulant des écoulements transsoniques (voir par exemple [GUDE57], [VAND75]

et [FILI86] ou plus récemment [LARK91], [KUZM92], [PANA95] et [BUTH00]), on pourrait reporter dans les relations (12) et (29) et évaluer les restes.

De même, l'utilisation de sommes finies à partir de séries de Fourier 2D (voir par exemple [FILI84] pour des équations analogues à celles du modèle de Karman et Guderley) pourrait aboutir à des propriétés qualitatives des solutions. Les coefficients de Fourier pourraient être déterminés par des méthodes stochastiques sans gradient (pour ces méthodes, voir par exemple [CHEW88], [LEBR98], [BART02] et [LEBR02]).

## Bibliographie

- [AMAR83] M.Amara, *Analyse de méthodes d'éléments finis pour les écoulements transsoniques*, Thèse de Doctorat, Université de Paris 6, 1983
- [AUBI82] J.P.Aubin, *Mathematical methods of game and economic theory*, North Holland, 1982
- [AUBI94] J.P.Aubin, *Initiation à l'analyse appliquée*, Masson, 1994
- [BART02] N.Bartoli, P.DelMorel, *Simulation et algorithmes stochastiques*, Cepaduès Editions, 2002
- [BERG97] H.Berger, G.Warnecke, W.L.Wendland, *Analysis of a FEM/BEM coupling method for transonic flow computations*, Mathematics of Computation, Vol.66, 1997
- [BILL86] V.Billey, J.Periaux, P.Perrier, B.Stouffler, *2D and 3D Euler computations with finite element methods in aerodynamics*, Lecture notes in Mathematics, n°1270, Springer-Verlag, 1986
- [BOBY99] N.A.Bobylev, S.V.Emel'Yanov, S.K.Korovin, *Geometrical methods in variational problems*, Kluwer, 1999
- [BOCH98] P.B.Bochev, M.D.Gunzburger, *Finite element methods of least-squares type*, SIAM Review, Vol.40, 1998
- [BRIS79] M.O.Bristeau, O.Pironneau, R.Glowinski, J.Periaux, P.Perrier, *On the numerical solution of nonlinear problems in fluid dynamics by least squares and finite element (I) least square formulations and conjugate gradient solution of the continuous problems*, Communications in Mathematics Applied in Mechanics and in Engineering, Vol.17/18, 1979
- [BUTH00] O.P.Buthani, L.Roy-Chowdhury, *Applications of some recent techniques for the exact solutions of the small disturbance potential flow equation of nonequilibrium transonic gas dynamics*, Computers and Mathematics with Applications, Vol.40, 2000
- [CANI00] S.Canic, B.L.Keyfitz, G.M.Lieberman, *A proof of existence of perturbed steady transonic shocks via a free boundary problem*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol.53, 2000
- [CHEW88] S.H.Chew, Q.Zheng, *Integral global optimization*, Lecture Notes Economics and Mathematical Systems, n°298, Springer Verlag, 1988
- [COLE86] J.Cole, L.Cook, *Transonic aerodynamics*, North Holland, 1986
- [DAUT88] R.Dautray, J.L.Lions, *Analyse mathématique et calcul scientifique – 5 : spectre des opérateurs*, Masson, 1988
- [FEIS98] M.Feistauer, *Analysis in compressible fluid dynamics*, Zeitschrift fuer Angewendte Mathematik and Mechanik, Vol.78, 1998
- [FILI84] M.Y.Filimonov, *Application of the Fourier method to the investigation*, Cislennye Methody Mehaniki Splosnoj Sredy, Vol.15, 1984

- [FILI86] M.Y.Filimonov, *Representation of solutions of the nonlinear equations of transonic flows by series*, Cislennye Methody Mehaniki Splosnoj Sredy, Vol.17, 1986
- [GAMB96] I.M.Gamba, C.S.Morawetz, *A viscous approximation for a 2D steady semiconductor or transonic gas dynamic flow : Existence theorem for potential flow*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol.49, 1996
- [GILB83] D.Gilbarg, N.S.Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, 1983
- [GIT91] H.P.Gittel, *Local entropy conditions in transonic potential flows problems*, Mathematische Nachrichten, Vol.154, 1991
- [GIT00] H.P.Gittel, *A variational approach to transonic potential flow problems*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol.23, 2000
- [GUDE57] K.G.Guderley, *Theorie schallnaher Strömungen*, Springer-Verlag, 1957
- [HAFE99] M.M.Hafez, W.H.Guo, *Nonuniqueness of transonic flows*, Acta Mechanica, Vol.138, 1999
- [HERO99] B.Heron, F.Issard-Roch, *Analyse numérique*, Dunod, 1999
- [JOLL01] J.C.Jolly, *Solutions à  $\varepsilon$  près de systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires de type mixte posés sur des ouverts non bornés (2ème partie)*, Thèse de Doctorat, Université d'Angers, 2001
- [KEYF00] B.L.Keyfitz, C.A.Mora, *Prototypes for nonstrict hyperbolicity in conversation laws*, Contemporary Mathematics, Vol.255,2000
- [KUZM92] A.G.Kuzmin, *Non-classical equations of mixed type and their applications in gas dynamics*, International Series of Numerical Mathematics, n°109, Birkhäuser, 1992
- [LARK91] N.A.Larkin, *On the solvability of steady-state transonic equations in an unbounded domain*, Math USSR Sbornik, Vol.70, 1991
- [LEBR94] J.S.LeBrizaut, *Another nonlinear control method : penalization by the state equation*, Systems Analysis Modelling and Simulation, Vol.16, 1994
- [LEBR96] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, *Optimisation à  $\varepsilon$  près – Transformation des edp par projection – Application à l'identification*, Rapport de Recherche Equipe de Recherche en Mathématiques ECN n°5, 1996
- [LEBR97] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, *Une méthode non linéaire de contrôle avec pénalisation d'état*, Annales des Sciences Mathématiques du Québec, Vol.21, 1997

- [LEBR98] J.S.LeBrizaut, *On the minimization method of Chew and Zheng : Application to vulcanization*, Systems Analysis Modelling and Simulation, Vol.32, 1998
- [LEBR99] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, *Approche fonctionnelle et numérique d'un problème mixte non linéaire elliptique hyperbolique (modèle de Karman et Guderley)*, Rapport de Recherche UMR CNRS 6629 n°10/1, 1999
- [LEBR01] J.S.LeBrizaut, *Méthodes à  $\varepsilon$  près et applications à des problèmes aux limites*, Bulletin des Sciences Mathématiques, Vol.125, 2001
- [LEBR01b] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, *Etude numérique de l'influence d'un paramètre d'entropie dans un modèle transsonique*, Rapport de Recherche UMR CNRS 6629 n°03/2, 2001
- [LEBR02] J.S.LeBrizaut, *Une méthode d'optimisation stochastique pour évaluer des minima à epsilon près*, Bulletin des Sciences Mathématiques, Vol.126, 2002
- [LEBR02b] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, *Identification d'un paramètre transsonique*, Rapport de Recherche UMR CNRS 6629 n°10/01, 2002
- [LEBR02c] J.S.LeBrizaut, *Numerical study of the effect of an entropy parameter in an elliptic hyperbolic nonlinear boundary value problem*, Systems Analysis Modelling and Simulation, Vol.36,2002
- [LEBR02d] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, *A mixed non linear boundary value problem appearing in gas dynamics : generalized solutions and numerical results*, International Journal of Engineering Science, Vol.40, 2002
- [MALE96] J.Malek, J.Necas, M.Rokyta, *Weak and measure valued solutions to evolutionary PDEs*, Applied Mathematics and Mathematical Computation Vol.13, Chapman & Hall, 1996
- [MURA81] F.Murat, *L'injection du cône positif de  $H^1$  dans  $W^{1,q}$  est compacte pour tout  $q < 2$* , Mathématiques Pures et Appliquées, Vol.60, 1981
- [MURM71] E.M.Murman, J.Cole, *Calculation of plane steady transonic flows*, AIAA Journal, Vol.9, 1971
- [MURM74] E.M.Murman, *Analysis of embedded shock waves calculated by relaxation methods*, AIAA Journal, Vol.12, 1974
- [NECA89] J.Necas, *Ecoulements de fluides : compacité par entropie*, Masson, 1989
- [NEUB97] J.W.Neuberger, *Sobolev gradients and differential equations*, Lecture Notes in Mathematics n°1670, Springer-Verlag, 1997
- [NOUG87] J.P.Nougier, *Méthodes de calcul numérique*, Masson, 1987
- [PANA95] D.E.Panayotounakos, M.Markakis, *Ad hoc closed form solutions of the two dimensional nonlinear steady small perturbation equation in fluid mechanics*, International Journal of Nonlinear Mechanics, Vol.30, 1995
- [PIRO88] O.Pironneau, *Méthodes des éléments finis pour les fluides*, Masson, 1988

- [POGU92] M.Pogu, G.Tournemine, *A functional approach to the solution of the Karman Guderley equation*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences – Technical Sciences, Vol.40, n°4, 1992
- [POGU92b] M.Pogu, G.Tournemine, *Modélisation et résolution d'équations de la mécanique des milieux continus*, Ellipses, 1992
- [POGU93] M.Pogu, J.E.SouzaDeCursi, *On a numerical solution of a class of partial differential equations of mixed type not adding artificial terms*, Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol.9, 1993
- [RAMM90] H.J.Ramm, *Fluid dynamics for the study of transonic fluid*, Oxford University Press, 1990
- [VAND75] M.VanDyke, *Perturbation methods in fluid mechanics*, Academic Press, 1975

## Liste des publications

### **A – ARTICLES DANS DES REVUES INTERNATIONALES AVEC COMITE DE LECTURE**

- [A91.1] J.Burger, P.Chauvet, J.S.LeBrizaut, Identification d'une fonction de réaction dans un processus de vulcanisation, RAIRO A.P.I.I., Vol.25, n°5, pp.463-476, 1991
- [A92.1] J.Burger, J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Comparison of two methods for the calculation of the gradient and of the hessian of cost functions associated with differential systems, Mathematics and Computers in Simulation, Vol.34, n°6, pp.551-562, 1992
- [A93.1] J.S.LeBrizaut, Functional solution of an identification in a vulcanization process, Applied Mathematics Letters, Vol.6, n°1, pp.43-46, 1993
- [A93.2] J.S.LeBrizaut, D.Delaunay, B.Garnier, Y.Jarny, Implementation of an inverse method for identification of reticulation kinetics from temperature measurements on a thick sample, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.36, n°16, pp.4039-4047, 1993
- [A93.3] J.S.LeBrizaut, Commande d'une vulcanisation, RAIRO A.P.I.I., Vol.27, n°6, pp.599-624, 1993
- [A94.1] J.S.LeBrizaut, Another nonlinear control method : penalization by the state equation, Systems Analysis Modelling and Simulation, Vol.16, pp.177-195, 1994
- [A94.2] J.S.LeBrizaut, Etude et résolution fonctionnelle de contrôles d'une vulcanisation, Annales des sciences mathématiques du Québec, Vol.18, n°2, pp.173-198, 1994
- [A97.1] J.S.LeBrizaut, M.Pogu , Une méthode non-linéaire de contrôle avec pénalisation d'état, Annales des sciences mathématiques du Québec, Vol.21, n°1, pp.91-102, 1997
- [A98.1] J.S.LeBrizaut, On the minimization method of Chew and Zheng : Application to vulcanization, Systems Analysis Modelling and Simulation, Vol.32, pp.299-316, 1998

- [A01.1] J.S.LeBrizaut, Méthodes à epsilon-près et applications à des problèmes aux limites, Bulletin des Sciences Mathématiques, Vol.125, n°5, pp.1-8, 2001
- [A02.1] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, A mixed non linear boundary value problem appearing in gas dynamics : generalized solutions and numerical results, International Journal of Engineering Science, Vol.40, pp.2163-2181, 2002
- [A02.2] J.S.LeBrizaut, Une méthode d'optimisation stochastique pour évaluer des minima à  $\varepsilon$  près, Bulletin des Sciences Mathématiques, Vol.126, pp.693-703, 2002
- [A03.1] J.S.LeBrizaut, Numerical Study of the effect of an entropy parameter in an elliptic-hyperbolic nonlinear boundary value problem, à paraître dans Systems Analysis Modelling and Simulation en 2003, 10 pages
- [A03.2] J.S.LeBrizaut, Méthodes d'optimisation pour l'approche de problèmes aux limites non linéaires mixtes elliptiques hyperboliques, à paraître dans Bulletin des Sciences Mathématiques en 2003, 20 pages



## **B – CONGRES INTERNATIONAUX AVEC COMITE DE LECTURE**

- [B92.1] J.S.LeBrizaut, Y.Jarny, D.Delaunay, Inverse methods for the optimal cure of elastomers, 5<sup>th</sup> Annual Inverse Problems in Engineering Seminar, East Lansing, Etats-Unis, 1992
- [B92.2] J.S.LeBrizaut, Identification in a nonlinear system with induction time, 11<sup>th</sup> International Conference on Systems Science, Wroclaw, Pologne, 1992
- [B93.1] Y.Jarny, D.Delaunay, J.S.LeBrizaut, Inverse analysis of the elastomer cure : control of the vulcanization degree, 1<sup>st</sup> International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice, Palm Coast, Etats-Unis, 1993
- [B93.2] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Study of inverse problems in distributed parameter systems originating from vulcanization : Results and trends, 16<sup>th</sup> IFIP Conference on Sytem Modelling and Optimization, Compiègne, France, 1993
- [B94.1] D.Delaunay, J.S.LeBrizaut, Y.Jarny, J.L.Bailleul, S.Amiaud, Characterization of heat sources in materials during transformation. Experimental validations with rubber and epoxy resin, 11<sup>th</sup> International Heat Transfer Conference, Brighton, Angleterre, 1994
- [B95.1] J.S.LeBrizaut, Control penalizing by a nonlinear partial differential equation, IFIP Conference on Modelling and Optimization of Distributed Parameter Systems with Applications to Engineering, Varsovie, Pologne, 1995
- [B96.1] J.S.LeBrizaut, Two inverse methods for problems originating from heat transfer, 2<sup>nd</sup> International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice, Le Croisic, France, 1996
- [B99.1] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, A solution of mixed partial differential equations, 4<sup>th</sup> International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Edinbough, Ecosse, 1999

## C – CONGRES NATIONAUX

- [C91.1] J.S.LeBrizaut, Identification d'une fonction de réaction d'un processus de vulcanisation modélisé par un système non-linéaire couplant une équation aux dérivées partielles et une équation différentielle avec retard, 23<sup>ème</sup> Congrès National d'Analyse Numérique, Les Mathes (Royan), France, 1991
- [C92.1] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Commande optimale de la réticulation d'un élastomère, 24<sup>ème</sup> Congrès National d'Analyse Numérique, Vittel, France, 1992
- [C92.2] J.S.LeBrizaut, Contrôles d'un processus de vulcanisation, 1<sup>er</sup> Colloque des étudiants en doctorat de l'intergroupe des Ecoles Centrales, Nantes, France, 1992
- [C93.1] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Identification à partir de relevés au bord d'une fonction cinétique dans une vulcanisation, 11<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique – Mini-colloque « Méthodes inverses en thermique et en mécanique », Lille, France, 1993
- [C95.1] J.S.LeBrizaut, Control penalizing by a nonlinear partial differential equation, IFIP Conference on Modelling and Optimization of Distributed Parameter Systems with Applications to Engineering, Varsovie, Pologne, 1995
- [C96.1] J.S.LeBrizaut, Two inverse methods for problems originating from heat transfer, 2<sup>nd</sup> International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice, Le Croisic, France, 1996
- [C97.1] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Résolution de systèmes semi-linéaires d'edp-edo – Application au modèle d'Hodgkin-Huxley, 29<sup>ème</sup> Congrès National d'Analyse Numérique, Larnas, France, 1997
- [C98.1] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Résolution de problèmes de contrôle par pénalisation à epsilon-près, 30<sup>ème</sup> Congrès National d'Analyse Numérique, Arles, France, 1998

## D – RAPPORTS

- [D90.1] P.Chauvet, J.S.LeBrizaut, Résolution fonctionnelle et numérique de deux problèmes de commande associés à l'équation de la chaleur, Rapport Interne LAN n°90-11, 86 pages, 1990
- [D90.2] P.Chauvet, J.S.LeBrizaut, Programmes FORTRAN commentés du rapport n°90-11, Rapport Interne LAN n°90-17, 48 pages, 1990
- [D91.1] J.S.LeBrizaut, Identification d'une fonction de réaction avec temps d'induction, Rapport Interne LAN n°91-12, 48 pages, 1991
- [D91.2] J.S.LeBrizaut, Programme FORTRAN du rapport n°91-12, Rapport Interne LAN n°91-13, 36 pages, 1991
- [D91.3] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Résolution fonctionnelle de l'identification d'une fonction de réaction dans un processus de vulcanisation, Rapport Interne LAN n°91-20, 23 pages, 1991
- [D91.4] Y.Jarny, J.S.LeBrizaut, D.Delaunay, Commande optimale du chauffage d'un moule dans le procédé d'élaboration d'un élastomère, Rapport Intermédiaire n°1 du Contrat CNRS-Vibrachoc, 38 pages, 1991
- [D92.1] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Origine physique d'un modèle de vulcanisation, Rapport Interne LAN n°92-8, 10 pages, 1992
- [D92.2] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Commande optimale d'un processus thermique avec déclenchement d'une réaction chimique, Rapport Interne LAN n°92-16, 86 pages, 1992
- [D92.3] Y. Jarny, D.Delaunay, J.S.LeBrizaut, M.Pogu, L.Lucas, Commande optimale du chauffage d'un moule dans le procédé d'élaboration d'un élastomère, Rapport Intermédiaire n°2 du Contrat CNRS-Vibrachoc, 150 pages, 1992
- [D93.1] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Une méthode de pénalisation par équation d'état – Etude fonctionnelle, Rapport Interne LAN n°93-11, 21 pages, 1993
- [D93.2] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Comparaison de trois méthodes de commande d'un système à paramètres répartis, Rapport Interne n°93-15, 29 pages, 1993
- [D93.3] J.S.LeBrizaut, Une autre méthode de commande : pénalisation par l'état – Application à un problème non-linéaire, Rapport Interne LAN n°93-18, 30 pages, 1993

- [D93.4] Y.Jarny, J.S.LeBrizaut, Commande optimale du chauffage d'un moule dans le procédé d'élaboration d'un élastomère, Rapport final du Contrat CNRS-Vibrachoc, 20 pages, 1993
- [D94.1] J.S.LeBrizaut, Synthèse d'une étude de sensibilité d'une restitution d'orbite, Note Technique DS-NT-633-2973-CN, CNES, 31 pages, 1994
- [D94.2] J.S.LeBrizaut, Portage d'un sous-système de l'OMGS de HP vers SUN, Note Technique C-NT-633-2856-CN, CNES, 31 pages, 1994
- [D94.3] J.S.LeBrizaut, Analyse des rendements orbitaux SPOT1-SPOT2, Note Technique S2-NT-633-2094, CNES, 40 pages, 1994
- [D94.4] J.S.LeBrizaut, Restitution du phasage à partir des mesures Doris, Note Technique CT-NT-633-2928-CN, CNES, 90 pages, 1994
- [D94.5] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Une méthode de contrôle des systèmes à paramètres répartis utilisant la pénalisation par l'équation d'état – Résultats fonctionnels, Rapport de Recherche n°94-10, Service de Mathématiques de l'ECN, 20 pages, 1994
- [D95.1] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Une méthode d'optimisation non-convexe dans les espaces de Hilbert séparables, Rapport de Recherche n°95-01, Service de Mathématiques de l'ECN, 17 pages, 1995
- [D95.2] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Méthode de pénalisation par l'état : comparaison de deux techniques numériques associées à la formulation matricielle ou par points de discrétisation, Rapport de Recherche n°95-03, Service de Mathématiques de l'ECN, 22 pages, 1995
- [D95.3] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Etude de la non-convexité de fonctionnelles associées au contrôle de systèmes thermiques, Rapport de Recherche n°95-04, Equipe de Recherche en Mathématiques de l'ECN, 26 pages, 1995
- [D96.1] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Etude numérique d'une méthode stochastique d'optimisation non-convexe, Rapport de Recherche n°96-01, Equipe de Recherche en Mathématiques de l'ECN, 34 pages, 1996
- [D96.2] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Optimisation à epsilon-près – Transformation des edp par projection – Application à l'identification, Rapport de Recherche n°96-05, Equipe de Recherche en Mathématiques de l'ECN, 41 pages, 1996
- [D97.1] J.Burger, J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Etude d'un système non-linéaire couplant une équation aux dérivées partielles et des équations différentielles – Application au modèle d'Hodgkin-Huxley, Rapport de Recherche n°97-02, Equipe de Recherche en Mathématiques de l'ECN, 33 pages, 1997

- [D97.2] J.Burger, J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Etude d'un système non-linéaire couplant une équation aux dérivées partielles et des équations différentielles – Application au modèle d'Hodgkin-Huxley – Deuxième partie, Rapport de Recherche n°97-03, Equipe de Recherche en Mathématiques de l'ECN, 19 pages, 1997
- [D98.1] J.Burger, J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Etude d'un système non-linéaire couplant une équation aux dérivées partielles et des équations différentielles – Application au modèle d'Hodgkin-Huxley – Troisième partie, Rapport de Recherche n°98-01, Equipe de Recherche en Mathématiques de l'ECN, 16 pages, 1998
- [D98.2] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Une méthode numérique d'optimisation globale pour la résolution d'équations aux dérivées partielles, Rapport de Recherche n°98-02, Equipe de Recherche en Mathématiques de l'ECN, 31 pages, 1998
- [D98.3] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Une méthode d'optimisation globale pour la résolution d'équations aux dérivées partielles non-linéaires de type mixte (validation sur un exemple explicite) , Rapport de Recherche UMR 6629 n°98/11-2, 18 pages, 1998
- [D99.1] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Résolution d'équations aux dérivées partielles non-linéaires mal-posées : utilisation de projections, Rapport de Recherche UMR 6629 n° 99/05-5, 23 pages, 1999
- [D99.2] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Approche fonctionnelle et numérique d'un problème mixte non-linéaire elliptique-hyperbolique, Rapport de Recherche UMR 6629 n° 99/10-1, 28 pages, 1999
- [D00.1] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Synthèse de méthodes à epsilon-près, Rapport de Recherche UMR 6629 n° 00/10-3 , 13 pages, 2000
- [D01.1] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Etude numérique de l'influence d'un paramètre d'entropie dans un modèle transsonique, Rapport de Recherche UMR 6629 n° 01/03-2, 63 pages, 2001
- [D01.2] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Modèle de Karman/Guderley avec entropie : relations entre étude fonctionnelle et discrétisation, Rapport de Recherche UMR 6629 n° 01/09-2, 18 pages, 2001
- [D02.1] J.S.LeBrizaut, Identification d'un paramètre d'entropie dans le modèle de Karman et Guderley, Rapport de Recherche UMR 6629 n°02/02-4, 11 pages, 2002

- [D02.2] J.S.LeBrizaut, Optimisation stochastique avec ou sans gradient pour évaluer des minima à  $\varepsilon$  près, Rapport de Recherche UMR 6629 n°02/03-1, 16 pages, 2002
- [D02.3] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Construction explicite pour un système non linéaire mixte elliptique hyperbolique, Note de Recherche UMR 6629 n°02/06-1, 6 pages, 2002
- [D02.4] J.S.LeBrizaut, M.Pogu, Identification d'un paramètre transsonique, Rapport de Recherche UMR 6629 n°02/10-1, 27 pages, 2002

## E – SEMINAIRES

- [E91.1] J.Burger, J.S.LeBrizaut, Identification des sources internes, Séminaire du Laboratoire de Thermocinétique de l'ISITEM, Nantes, France, 28 mai 1991
- [E92.1] J.S.LeBrizaut, Commande de la réticulation dans un processus thermique, Réunion du groupe de travail « Systèmes à Paramètres Répartis » du pôle SARTA du GR Automatique, Paris, France, 19 mai 1992
- [E93.1] J.S.LeBrizaut, Comparison of the Lagrangian method and a penalization method for the control of differential system, Seminar on Inverse Problems in Heat Transfer, Laboratoire de Thermocinétique, Nantes, France, 28 mai 1993
- [E97.1] J.S.LeBrizaut, Résolution de systèmes demi-linéaires d'edp-edo par le principe du maximum, Séminaire de Mathématiques Appliquées de l'UMR 6629, Nantes, France, 22 mai 1997
- [E98.1] J.S.LeBrizaut, Résolution par optimisation d'une edp non-linéaire de type mixte, Séminaire de Mathématiques Appliquées de l'UMR 6629, Nantes, France, 10 décembre 1998
- [E99.1] J.S.LeBrizaut, La méthode de minimisation de Chew et Zheng – Application à un problème de vulcanisation, Séminaire de Mathématiques Appliquées de l'UMR 6629, Nantes, France, 2 décembre 1999
- [E00.1] J.S.LeBrizaut, Une méthode de résolution numérique d'un problème mixte non-linéaire : le modèle de Karman-Guderley avec entropie, Séminaire de Mathématiques Appliquées de l'UMR 6629, Nantes, France, 9 novembre 2000
- [E03.1] J.S.LeBrizaut, Une méthode d'optimisation stochastique pour évaluer des minima à epsilon près, Séminaire de Mathématiques Appliquées de l'UMR 6629, Nantes, France, 22 mai 2003