

Restauration de signaux bruités observés sur des plans d'expérience aléatoires

Voichita Maxim

▶ **To cite this version:**

Voichita Maxim. Restauration de signaux bruités observés sur des plans d'expérience aléatoires. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2003. Français. NNT : . tel-00005298

HAL Id: tel-00005298

https://theses.hal.science/tel-00005298

Submitted on 10 Mar 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Joseph Fourier

Spécialité : Mathématiques Appliquées

présentée par

Voichiţa MAXIM

Restauration de signaux bruités observés sur des plans d'expérience aléatoires

Thèse soutenue le 3 octobre 2003

Composition du Jury :

Mme Valérie PERRIER	Professeur - INPG	Présidente
M. Jean-Michel POGGI	Professeur - Université Paris 5	Rapporteur
M. Jean-Louis MERRIEN	Maître de Conférence - INSA Rennes	Rapporteur
Mme Marie-Laurence MAZURE	Professeur - UJF, Grenoble 1	Directrice de thèse
M. Anestis ANTONIADIS	Professeur - UJF, Grenoble 1	Directeur de thèse
M. Gérard GRÉGOIRE	Professeur - UPMF, Grenoble 2	Examinateur

Thèse preparée au sein du Laboratoire de Modélisation et Calcul LMC-IMAG
Grenoble

Je remercie tout d'abord mes directeurs de thèse pour m'avoir fait découvrir et approfondir un sujet riche et passionnant. Leurs suggestions clairvoyantes et leur rigueur m'ont été une aide précieuse. Je les remercie pour leur patience et pour avoir veillé à ce que cette thèse se déroule dans de bonnes conditions.

Je remercie Messieurs Jean-Michel Poggi et Jean-Louis Merrien pour l'attention avec laquelle ils ont lu le manuscrit, pour les corrections qu'ils ont apportées et pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de rapporter sur ma thèse. Je remercie Madame Valérie Perrier d'avoir bien voulu présider le jury de soutenance et Monsieur Gérard Grégoire pour y avoir participé. Les questions des membres du jury et les discussions qu'elles ont provoquées ont été particulièrement enrichissantes.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent également à Monsieur Pierre-Jean Laurent pour sa confiance, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour l'amitié qu'il a bien voulu m'accorder.

Je remercie Monsieur Ovidiu Pop pour m'avoir montré la beauté des mathématiques, pour la confiance qu'il m'a accordée et pour tout le travail qu'il a investi en moi.

Je remercie le personnel du LMC-IMAG pour leur accueil et pour la bonne atmosphère qui règne au sein du laboratoire. Les discussions avec mes collègues thèsards m'ont été d'une grande aide pendant ces années. Je les remercie pour leur amitié (et pour les si bons gâteaux, y compris celui du pot de soutenance!).

Les mots sont trop pauvres pour exprimer ma gratitude à mes parents, à Ovidiu et à Yves, pour leur aide, leurs encouragements et leur immense patience.

Table des matières

Introduction **9**

1 Notions générales concernant les ondelettes **17**

1.1 Base orthonormée et base de Riesz d'un espace de Hilbert 17

1.2 Analyse multirésolution "de première génération" 18

1.2.1 Les sous-espaces de détails et les ondelettes 21

1.2.2 La décomposition et la reconstruction 23

1.3 Pourquoi une décomposition multi-échelle? 25

1.4 L'ordre d'une AMR et le nombre de moments nuls des ondelettes 25

1.5 Adaptation à l'intervalle 25

1.5.1 Ondelettes périodiques 26

1.5.2 Symétrisation par rapport aux bords 27

1.5.3 Ondelettes orthonormées adaptées aux bords 28

1.5.4 Ondelettes biorthogonales sur l'intervalle 29

1.6 Approximation des coefficients 30

1.7 La transformée invariante par translations discrète 34

1.8 Le seuillage 34

2 Estimation de fonctions hölderiennes **37**

2.1 Le problème 37

2.2 Préliminaires 39

2.3 Échantillonnage déterministe 41
2.4 Le modèle log-spline 46
2.5 Échantillonnage aléatoire 51
2.5.1 Majoration de la distance entre les points $X_{(i)}$ de la grille et les points estimés $\widehat{G}_n^{-1}(t_i)$ 52
2.5.2 Étude de l'approximation linéaire 56
2.5.3 Le risque d'estimation 60
2.6 Conclusion 69

3 Estimation dans des espaces de Besov 71
3.1 Énoncé du problème 71
3.2 Espaces de Besov 72
3.2.1 Oscillations 73
3.2.2 Définition 74
3.3 Rappels de quelques résultats concernant le risque d'estimation 77
3.4 Construction de l'estimateur 79
3.4.1 Formule de quadrature 79
3.4.2 L'estimateur 81
3.5 Résultats théoriques 83
3.5.1 Pertinence de la régression 83
3.5.2 Le risque d'estimation 89
3.6 Annexe 99

4 Schémas de subdivision et grilles non régulières 103
4.1 Introduction 103
4.2 Schémas de subdivision uniformes et stationnaires 110
4.3 Schémas de subdivision non réguliers 116
4.4 Le schéma de subdivision de Lagrange non régulier 117
4.4.1 Ordre d'un schéma de Lagrange 119

4.4.2 La grille 121
4.5 Comportement asymptotique 124
4.5.1 Équivalence asymptotique avec le schéma uniforme et stationnaire 124
4.5.2 Les schémas aux différences 126
4.6 Convergence du schéma de Lagrange non régulier 128
4.7 Les fonctions fondamentales 134
4.8 L'ordre d'approximation 138
4.9 Le schéma de subdivision interpolateur en moyenne non régulier 143
4.9.1 Lien avec le schéma de Lagrange 144
4.9.2 Convergence et propriétés 145
4.10 Conclusion 148

5 Ondelettes de seconde génération **151**
5.1 Ondelettes de seconde génération et schéma de relèvement 151
5.1.1 Définitions et notations 151
5.1.2 Le schéma de relèvement 156
5.2 Du schéma interpolateur en moyenne aux ondelettes 159
5.2.1 L'analyse multi-résolution 159
5.2.2 Les ondelettes 162
5.3 Conclusion 169

6 Illustrations numériques et étude comparative **171**
6.1 L'algorithme d'estimation de fonctions hölderiennes 171
6.2 Estimation dans des espaces de Besov 179
6.3 Estimation par des ondelettes adaptées à la grille 188
6.4 Comparaison entre les différentes méthodes 195

Conclusion **203**

Introduction

L'un des objectifs principaux de ce travail de thèse est d'étudier des problèmes d'estimation de signaux contaminés par un bruit, ceci à l'aide de décompositions en ondelettes.

Les bases d'ondelettes permettent de bien approcher sur un petit nombre de coefficients les signaux réguliers par morceaux. Ces bonnes capacités d'approximation non linéaire conditionnent l'efficacité d'un débruitage du signal par seuillage des coefficients d'ondelettes. De plus, pour des signaux échantillonnés de manière discrète sur une grille régulièrement espacée, une transformée en ondelettes orthogonales s'implémente par un algorithme rapide à l'aide de cascades de filtres miroirs conjugués, permettant ainsi d'obtenir des algorithmes de débruitage dont la rapidité est suffisante pour les applications.

L'échantillonnage régulier est une hypothèse réaliste pour la plupart des applications en traitement du signal, mais une telle hypothèse est bien moins naturelle dans le cadre de la régression. En effet, en régression monodimensionnelle il est rare d'observer le régresseur sur une grille régulière et équidistante et une utilisation telle quelle de procédures classiques de débruitage peut entraîner des résultats décevants, comme nous le verrons au cours de cette thèse. Nous nous concentrerons donc par la suite sur le débruitage de signaux contaminés par un bruit aléatoire et observés sur une grille non régulière. Mais avant de poursuivre notre introduction dans ce sens, revenons un instant sur les motivations de l'utilisation classique de décompositions en ondelettes pour l'estimation non paramétrique.

En restant dans le cadre de la régression non paramétrique, les informations a priori sur le signal f à restaurer s'expriment par une condition d'appartenance de f à un espace S de signaux vérifiant certaines conditions. Selon les propriétés géométriques de S, il est alors possible d'utiliser des méthodes d'estimation linéaires ou non linéaires permettant de minimiser l'erreur quadratique moyenne. Lorsque S est constitué de fonctions "lisses", le recours à des méthodes basées sur les décompositions d'ondelettes est moins justifié que dans le cas où les fonctions de S possèdent certaines formes de régularité par

morceaux et sont spatialement peu homogènes. C'est dans ce contexte que les méthodes de seuillage d'ondelettes sont performantes à cause de leur pouvoir adaptatif d'approximation et c'est le cadre que nous avons choisi pour ce travail. Néanmoins l'optimalité de ce type de méthodes a été principalement étudiée dans le cadre d'un échantillonnage régulier.

Nous cherchons ici des méthodes d'ondelettes pour l'estimation non paramétrique de fonctions de régression *à échantillonnage aléatoire*. Les méthodes classiques de débruitage par ondelettes donnent des résultats insatisfaisants quand les points X_i du plan d'expérience ne sont pas équidistants (voir chapitres 2 et 6). Diverses méthodes ont été proposées pour remédier à cet inconvénient. L'idée commune d'une grande partie d'entre elles est de se ramener à une estimation sur grille régulière. Nombre d'entre elles interpolent ou moyennisent les données initiales aux points d'une grille équidistante. On obtient ainsi un nouvel ensemble de données, disons de taille 2^J. Nous citons ci-dessous quelques références de travaux où les auteurs choisissent cette voie.

- Dans [40], les auteurs proposent d'appliquer aux nouvelles données (obtenues soit par interpolation soit par moyennisation), un algorithme classique de débruitage par seuillage dur des coefficients d'ondelettes. Le seuil est choisi globalement, identique pour tous les coefficients. Les auteurs évaluent le risque L^2 d'un tel estimateur pour des fonctions C^r par morceaux lorsque la densité de l'échantillonnage est continue par morceaux et bornée inférieurement par une constante strictement positive. Ce risque devient optimal si le rapport n/N converge vers l'infini, quand $n \to +\infty$, avec une certaine vitesse.

- L'interpolation sur une grille équidistante apparaît aussi dans [46]. Ici le seuil n'est plus choisi globalement, il est adapté à chaque coefficient de détail. Les calculs de ce seuil tiennent compte de la matrice de covariance de ces coefficients. Les auteurs donnent un algorithme rapide pour le calcul de cette matrice.

- On trouve dans [22] une méthode linéaire de reconstruction des fonctions à partir de valeurs non bruitées. Les valeurs sur une nouvelle grille, équidistante, sont construites par interpolation polynomiale locale. Les auteurs évaluent les erreurs d'estimation par projection sur des espaces d'approximations de niveau moins fin, pour des fonctions appartenant à des espaces de Besov.

Les trois méthodes suivantes sont reliées aux précédentes par le fait qu'on se ramène toujours à un problème sur grille équidistante.

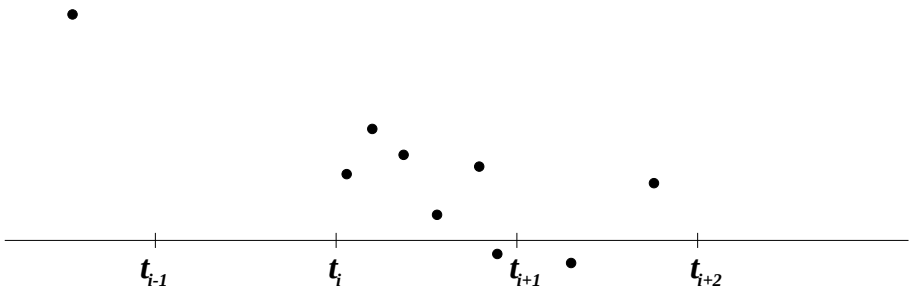
- Dans [1], les auteurs choisissent une grille équidistante de taille N suffisamment grande, puis ils "déplacent" chacune des valeurs Y_i à l'abscisse $k(i)/N$ la plus proche. Si N est relativement grand par rapport à la taille n de l'échantillon, l'erreur produite par ce déplacement est petite. Ensuite ils appliquent une méthode de moindres carrés

pénalisés pour estimer le vecteur des coefficients d'ondelettes.

- La méthode présentée dans [5] consiste en un préconditionnement des données, suivi d'un algorithme de débruitage par seuillage individuel de chaque coefficient, ceci pour une régression dont le plan d'expérience est déterministe. Nous y reviendrons dans le chapitre 2, où nous généraliserons cette méthode à des échantillonnages aléatoires.

- Dans [2], on part en sens inverse : au lieu d'interpoler les valeurs initiales sur une grille équidistante, on évalue les fonctions d'échelle aux points du plan d'expérience. Puisque les valeurs de ces fonctions sont la plupart du temps connues uniquement aux points dyadiques, les auteurs de [2] proposent pour ce faire un algorithme récursif basé sur un théorème de Chui ([8]).

L'avantage des méthodes basées sur l'interpolation ou la moyennisation réside dans le fait qu'on se ramène aux algorithmes d'ondelettes classiques et donc à des outils théoriques bien établis. Cependant, le principe n'est pas sans inconvénients, comme illustré dans l'exemple suivant.



La figure ci-dessus représente les points (X_k, Y_k) dont les abscisses se trouvent respectivement dans les intervalles $[t_{i-1}, t_i[$, $[t_i, t_{i+1}[$, $[t_{i+1}, t_{i+2}[$. Dans chacun de ces intervalles nous devons définir un seul nouveau point, dont l'ordonnée sera utilisée pour la construction de l'estimateur. Dans le premier de ces intervalles il n'y a aucun point. En mettre un semble quelque peu artificiel. Le second intervalle contient au contraire beaucoup de points. Réduire tous ces points à un seul risque fort d'entraîner une perte d'information.

Les bases d'ondelettes adaptées au plan d'expérience tentent d'éviter cet inconvénient. Si l'on renonce à la condition qui stipule que les ondelettes soient engendrées par une seule fonction, on peut construire des AMR (analyse multirésolution) sur des intervalles compacts, ou adaptées aux échantillonnages non équidistants. Ce sont les AMR (et les ondelettes) dites de "seconde génération". Leur construction et la preuve des résultats théoriques sont néanmoins plus difficiles car la transformée de Fourier, systématiquement utilisée dans les preuves du cas classique, n'est plus adéquate.

Généraliser en ce sens la base de Haar est simple : il suffit de considérer des fonctions indicatrices d'intervalles de longueurs différentes, pondérées de manière à obtenir des bases orthonormales. Pour construire des AMR plus complexes, ayant des propriétés particulières, on pourra éventuellement partir d'une analyse multirésolution très simple, comme celle de Haar généralisée, pour ensuite l'enrichir graduellement. Ceci peut se faire par une opération algébrique appelée *schéma de relèvement* (voir [65]). On construit ainsi des *filtres*, qui permettront de construire les fonctions de base par un algorithme itératif appelé *schéma de subdivision* (voir chapitre 4).

Nous sommes ainsi amenés à étudier des schémas de subdivision associés à des grilles non régulières. La difficulté vient du fait que ces schémas sont à la fois non uniformes et non stationnaires, et donc on ne peut pas leur appliquer les méthodes usuelles. Comme cas particulier on trouve les schémas de subdivision sur grilles semi-régulières, pour lesquels nous renvoyons à [71]. Dans [16] et [17] les auteurs font une étude des schémas de subdivision sur grilles non régulières, et ils montrent la convergence d'un schéma particulier, le schéma interpolateur de Lagrange non régulier de degré respectivement 3 et 5. On peut penser à montrer la convergence par comparaison avec un autre schéma, dont on sait qu'il converge. C'est notamment la démarche choisie dans [36], pour déduire la convergence des schémas de subdivision uniformes mais non stationnaires, la grille associée étant par contre supposée régulière. Citons également le travail plus récent de [47], dans lequel les auteurs généralisent le schéma à quatre points introduit dans [34]. Sous certaines conditions sur la grille, ils montrent la convergence de leur schéma par comparaison avec le schéma uniforme et stationnaire correspondant.

Les fonctions fondamentales d'un schéma de subdivision, éventuellement multipliées par des constantes, peuvent devenir les fonctions d'échelle d'une AMR. Les ondelettes seront définies comme combinaisons affines de fonctions d'échelle du niveau plus fin. A cette étape algébrique s'ensuit une étape analytique, qui consiste à montrer qu'on a bien construit une AMR et des bases d'ondelettes stables pour l'espace fonctionnel considéré. Les résultats sont assez incomplets et peu généraux. On peut citer l'exemple de [14], où les auteurs s'intéressent au cas des ondelettes-splines sur l'intervalle, et celui de [58] qui traite de la stabilité des bases obtenues par le schéma de relèvement. Dans ce dernier article, les auteurs donnent des conditions suffisantes sur les matrices du schéma de relèvement de façon à aboutir à des bases stables à une échelle. L'étude de la stabilité multi-échelle semble plus difficile.

Dans le même contexte d'ondelettes adaptées à des grilles non régulières, on peut également choisir de se placer dans des espaces $L^2(X,\Sigma,\mu)$, où X est un espace métrique, Σ une σ-algèbre et μ une mesure non-atomique. C'est, par exemple, l'approche adoptée dans [39], où les auteurs généralisent la base de fonctions de Haar, en obtenant une base stable de $L^2(X,\Sigma,\mu)$. Ils l'appellent la base d'ondelettes de Haar non équilibrées.

Une extension de ces AMR de Haar non équilibrées est présentée dans [21]. Les auteurs utilisent le schéma de relèvement pour obtenir des bases dont les fonctions sont plus lisses et les ondelettes duales ont plus de moments nuls. Ils définissent un estimateur de débruitage et ils montrent que celui-ci a de bonnes propriétés de convergence pour la norme de l'espace $L^2(dF_x)$, F_x étant la fonction de répartition empirique de l'échantillon $X_1,\ldots,X_n$. Cependant, ils n'étudient pas l'existence effective des fonctions de l'AMR, ni la stabilité. La norme dans lequel le risque est calculé est la norme usuelle de l'espace $L^2(dF_x)$. Soit $X_{(1)},\ldots,X_{(n)}$ la statistique d'ordre obtenue en ordonnant les X_i dans l'ordre croissant de leurs valeurs. Utiliser comme mesure la fonction dF_x revient à donner la même importance à tous les intervalles $[X_{(i)},X_{(i+1)}[$, indépendamment de leur taille. Toute méthode aura tendance à se comporter moins bien sur des intervalles $[X_{(i)},X_{(i+1)}[$ relativement grands, que sur le même type d'intervalles relativement petits. Ce choix de la norme réduit l'influence négative de ce phénomène sur le résultat final. Il serait intéressant, mais plus difficile, de calculer l'erreur en moyenne quadratique par rapport à la mesure dF, F étant ici la fonction de répartition théorique de l'échantillon. En effet, moyennant des contraintes faibles sur F, on arriverait ainsi à rendre la norme de l'espace $L^2(dF)$ équivalente à la norme L^2 usuelle.

Les bases d'ondelettes adaptées à la grille sont également étudiées dans [67] et [70]. Dans [67] on peut trouver des algorithmes de décomposition en ondelettes de seconde génération qui utilisent le schéma de relèvement. Les auteurs discutent en particulier le cas des ondelettes interpolatrices et des ondelettes interpolatrices en moyenne, construites respectivement par le schéma de subdivision interpolateur de Lagrange et le schéma de subdivision interpolateur en moyenne. Une étude empirique plus approfondie des ondelettes interpolatrices est présentée dans [70]. Les auteurs y remarquent que le conditionnement d'une telle base est très sensible à la non homogénéité de la grille. Ils proposent alors des méthodes pour stabiliser la transformée en ondelettes.

Dans le même contexte citons également [56], où les auteurs comparent quatre méthodes pour généraliser l'AMR de Haar. L'une d'entre elles, qui utilise des "fonctions de Haar isométriques", équivaut à traiter les points comme s'ils étaient équidistants. La deuxième, qui utilise des "fonctions de Haar asymétriques", entre dans la catégorie des ondelettes interpolatrices en moyenne. La troisième méthode consiste à interpoler par une fonction constante par morceaux les valeurs initiales sur une grille équidistante, puis à utiliser la base de Haar usuelle. La quatrième méthode s'appelle intégration exacte. Elle peut être considérée comme un cas particulier de la méthode présentée dans [3]. Dans le cas des fonctions similaires à la fonction de Haar, les essais numériques suggèrent une performance équivalente entre ces quatre méthodes. Nous pensons que cette équivalence n'est plus aussi claire quand on considère des bases dont les fonctions sont lisses. En particulier, on sait que la première des quatre méthodes ne donne pas de

très bons résultats (des exemples se trouvent dans le chapitre 6).

Les échantillonnages uniformes (*i.e.*, de loi uniforme) sont un cas particulier intéressant d'échantillonnages aléatoires. On montre (voir [4]) que si l'on utilise les estimateurs classiques par seuillage des coefficients d'ondelettes, en considérant les points équidistants, pour des classes de fonctions hölderiennes, le taux de décroissance de l'erreur quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini est à un facteur $\log n$ du taux optimal. Citons également [23], autre référence traitant de ce type de plan, mais pour des fonctions moins régulières appartenant à des espaces de Besov. Après élimination des valeurs marginales, les auteurs y définissent des estimateurs empiriques pour les coefficients à l'échelle la plus fine. Un algorithme de débruitage par seuillage est ensuite appliqué, le seuil étant propre à l'échelle.

Dans cette thèse, nous avons choisi de développer trois méthodes d'estimation de fonctions de régression échantillonnées sur des grilles non équidistantes, sur l'intervalle. La première consiste à généraliser la procédure de [3] à des échantillonnages aléatoires. La deuxième utilise la régression polynomiale locale pour estimer la fonction en des points équidistants dans le but d'utiliser des ondelettes classiques. La troisième méthode suit l'idée de [67], et propose donc la construction de bases d'ondelettes adaptées à la grille. Cette dernière méthode est liée à la convergence des schémas de subdivision sur des grilles non régulières.

Le plan de la thèse est le suivant. Le premier chapitre contient un passage en revue des AMR et des ondelettes classiques, dites "de première génération". Nous rappelons les définitions et propriétés qui nous semblent importantes pour la suite. Nous rappelons également certaines notions concernant le débruitage par seuillage dans une base d'ondelettes.

Le second chapitre généralise la démarche de [3]. Nous traitons le cas d'une grille d'échantillonnage aléatoire, de fonction de répartition inconnue. Nous estimons la fonction de répartition à partir de l'échantillon, en utilisant le modèle log-spline d'estimation paramétrique d'une densité de probabilité ([62]). Nous définissons un estimateur pour la fonction de régression et nous étudions ses propriétés asymptotiques. Nous montrons que le risque L^2 d'estimation converge en probabilité vers 0, quand $n \to \infty$, sur la classe de fonctions hölderiennes sur l'intervalle.

Dans le chapitre 3, nous utilisons la régression polynomiale locale pour estimer des valeurs sur une grille de $2^J + 1$ points équidistants. Une condition nécessaire est alors de disposer d'un nombre suffisant de données initiales, dans un certain voisinage de chacun de ces points. Nous montrons que la probabilité de cet événement tend vers 1 quand $n \to \infty$, si $2^J \sim n/\log n$. Nous montrons que le risque L^2 de l'estimateur que nous définissons tend vers 0, quand $n \to \infty$, avec une vitesse presque optimale.

Le chapitre 4 traite de la problématique des schémas de subdivision sur grilles non régulières (mais déterministes). Si la grille est du type $x_{j,k} = G^{-1}(2^{-j}k)$, la fonction G satisfaisant certaines propriétés relativement peu contraignantes, nous montrons que les schémas de subdivision interpolateur de Lagrange et interpolateur en moyenne définis sur cette grille sont convergents. La démonstration se fait par comparaison du schéma non régulier avec le schéma régulier de même degré. Nous étudions les propriétés des fonctions fondamentales qui s'en déduisent ainsi que l'ordre d'approximation de ces schémas. Pour une approche un peu plus générale, applicable éventuellement à d'autres schémas de subdivision, le lecteur pourra consulter [51].

Les schémas de subdivision permettent de construire des fonctions candidates à être les fonctions fondamentales d'une AMR de seconde génération. Nous nous y intéressons de plus près au cours du chapitre 5. Ce chapitre commence donc par un rappel sur les notions d'AMR et ondelettes de seconde génération, et sur le schéma de relèvement. Nous montrons que les fonctions d'échelle du schéma interpolateur en moyenne, pondérées en accord avec la grille, sont les fonctions d'échelle d'une AMR. Pour cela, nous montrons la stabilité uniforme des bases à chaque niveau d'approximation. Nous construisons un système biorthogonal, formé des fonctions d'échelle primales et duales et des "ondelettes" primales et duales. La stabilité multi-échelle de ces bases, qui manque pour pouvoir réellement considérer ces fonctions ondelettes, reste un problème ouvert.

Dans le chapitre 6 nous nous intéressons au comportement des méthodes que nous proposons dans les chapitres 2 et 3 quand elles sont appliquées à des échantillons de taille "raisonnable". Cet étude vient compléter l'étude asymptotique menée dans les chapitres 2 et 3. Nous verrons que dans cette situation la méthode proposée au chapitre 3 ne peut pas être appliquée telle quelle et nous suggérons des modiffications à apporter. Cependant, ces modifications entraînent des difficultées du point de vue du calcul du risque d'estimation, et ce calcul reste pour l'instant un problème ouvert. Nous présentons des illustrations de simulations numériques pour chacune de ces méthodes, ainsi que pour un algorithme utilisant les "ondelettes" adaptées à la grille que nous étudions au chapitre 5. Nous effectuons une étude comparative en prenant en compte l'erreur quadratique $\left(\frac{1}{N}\sum_i |\widehat{f}(t_i) - f(t_i)|^2\right)^{1/2}$.

Chapitre 1

Notions générales concernant les ondelettes

Nous rappelons dans ce chapitre des notions et quelques résultats qui nous serviront dans les chapitres suivants.

1.1 Base orthonormée et base de Riesz d'un espace de Hilbert

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, *i.e.*, un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, complet par rapport à la métrique induite. Soit I un ensemble d'indices. On appelle *système orthogonal* une famille $E = \{e_n : n \in I\}$ d'éléments non nuls de $\mathcal{H}$ telle que $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, pour tout $i, j \in I$, $i \neq j$. Un *système orthonormé* est un système orthogonal dans lequel $\|e_i\|_{\mathcal{H}} = 1$, pour tout $i \in I$. On appelle *base orthonormée* de $\mathcal{H}$ un système orthonormé E tel que

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2,$$

pour tout $x \in \mathcal{H}$. Les espaces de Hilbert *séparables* admettent toujours des bases orthonormées et celles-ci sont toujours dénombrables.

Soit I un ensemble au plus dénombrable. On appelle *base de Riesz* de $\mathcal{H}$ un ensemble $E = \{e_n : n \in I\}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ qui vérifie les propriétés :

(i) span E est dense dans $\mathcal{H}$, où span E dénote le sous-espace vectoriel engendré par E;

(ii) il existe deux constantes finies $0 < C_1 \leq C_2$ telles que pour toute suite $(x_i)_{i \in I}$ de

support fini,

$$C_1 \sum_{i\in I} |x_i|^2 \leq \| \sum_{i\in I} x_i e_i \|^2_{\mathcal{H}} \leq C_2 \sum_{i\in I} |x_i|^2. \tag{1.1.1}$$

Les bases de Riesz sont une généralisation des bases orthonormales, pour lesquelles on a $C_1 = C_2 = 1$. Si E est une base de Riesz, la relation (1.1.1) reste valable pour des sommes infinies, et elle implique qu'il existe deux constantes $C_2' \geq C_1' > 0$ telles que :

$$C_1' \|x\|^2_{\mathcal{H}} \leq \sum_{i\in\mathbb{Z}} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq C_2' \|x\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{1.1.2}$$

La relation (1.1.2) est plus faible que (1.1.1). En effet, si l'on considère l'application

$$T : (x_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} x_i e_i, \tag{1.1.3}$$

la relation (1.1.1) équivaut à dire que T est un isomorphisme de $\ell^2(I)$ dans $\mathcal{H}$. L'application duale de T est donnée par

$$T^* : x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}, \tag{1.1.4}$$

et la relation (1.1.2) reflète seulement l'inversibilité à gauche de T^*. Une famille $\{e_i\}_{i\in I}$ qui vérifie (1.1.2) s'appelle *un frame*. Elle assure le fait que tout $x \in \mathcal{H}$ peut être reconstruit à partir des produits scalaires $\langle x, e_i\rangle$ mais cette reconstruction n'est pas unique, les frames sont donc généralement *redondants*. Par contre, tout $x \in \mathcal{H}$ admet une représentation unique dans une base de Riesz : $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$, et l'ordre de sommation ne compte pas. De plus, on aura $(x_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$.

Soit E une base de Riesz de $\mathcal{H}$. Il existe une unique base de Riesz pour $\mathcal{H}$, $\widetilde{E} = \{\widetilde{e}_i : i \in I\}$, qui est *duale* de E, *i.e.*, $\langle e_i, \widetilde{e}_j\rangle = \delta_{i,j}$, pour tout $i, j \in I$. Si l'on connaît la base duale $\widetilde{E}$, les coefficients x_i d'un élément $x \in \mathcal{H}$ dans la base E peuvent être obtenus par la formule $x_i := \langle x, \widetilde{e}_i\rangle$. On peut donc écrire :

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, \widetilde{e}_i\rangle e_i = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \widetilde{e}_i.$$

1.2 Analyse multirésolution “de première génération”

Nous faisons ici un court rappel concernant les analyses multirésolution (en abrégé, AMR) et les ondelettes classiques, dites “de première génération”. Nous nous contenterons de rappeler des résultats qui nous semblent utiles pour la suite. Le lecteur intéressé par plus de détails peut consulter par exemple [49], [9], [15].

Définition 1.2.1 [49] *Une analyse multirésolution est une suite $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de sous-espaces fermés de $L^2 = L^2(\mathbb{R})$, telle que*

(i) La suite est emboîtée : pour tout j,

$$V_j \subset V_{j+1}\,.$$

(ii) $f \in V_j$ si et seulement si $f(2^{-j}\cdot) \in V_0$.

(iii) La réunion de ces espaces est dense dans L^2 : pour tout f dans L^2,

$$\lim_{j\to\infty} \| f - P_j^o f\|_2 = 0, \tag{1.2.1}$$

où P_j^o représente la projection orthogonale sur V_j.

(iv) L'intersection de ces espaces est l'espace nul : pour tout f dans L^2,

$$\lim_{j\to-\infty} \|P_j^o f\|_2 = 0. \tag{1.2.2}$$

(v) Il existe $\varphi \in V_0$ telle que la famille $\{\varphi(\cdot - k) :\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une base Riesz de V_0.

On appelle *fonctions d'échelle* les translatées et dilatées de φ,

$$\varphi_{j,k} := 2^{j/2}\varphi(2^j \cdot - k), \quad k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}. \tag{1.2.3}$$

Nous appellerons parfois la fonction φ "la" fonction d'échelle, ou *fonction d'échelle génératrice*. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, la famille $\{\varphi_{j,k} :\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz pour V_j, avec les mêmes constantes C_1 et C_2 que pour la base $\{\varphi(\cdot - k) :\ k \in \mathbb{Z}\}$.

L'inclusion $V_0 \subset V_1$ permet d'exprimer φ dans la base de V_1. Grâce à la relation (1.2.3) on obtient la *relation à deux échelles* (ou encore *relation de raffinement*) :

$$\varphi = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \varphi(2\cdot - k). \tag{1.2.4}$$

Les coefficient h_k s'appellent *coefficients de raffinement*. La stabilité de la base de V_1 assure le fait que la suite $(h_k)_k$ est dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. La relation de raffinement joue un rôle très important dans la construction de la fonction d'échelle φ, qui souvent n'est pas connue explicitement. Ses valeurs sont calculées par récurrence dans les points dyadiques par un *schéma de subdivision*, à partir des coefficients de raffinement. Nous y reviendrons, dans un cadre plus général, au cours du chapitre 4.

La condition (ii) implique que toute fonction dans L^2 peut être approchée aussi près que l'on veut par sa projection sur l'un des sous-espaces fermés V_j, $j \in \mathbb{Z}$. Cette projection existe et elle est unique. On dit que la fonction $\phi \in L^2$ est L^2-stable si la famille $\{\phi(\cdot - k) :\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz pour le sous-espace fermé qu'elle

engendre dans L^2. La condition (v) dit alors que la fonction φ d'une AMR est L^2-stable. Généralement, on étudie la stabilité d'une fonction à l'aide de sa transformée de Fourier.

Une AMR de fonction d'échelle φ est dite *orthonormée* si $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée pour V_0.

L'exemple classique le plus simple d'AMR est celle de Haar,

$$V_j = \{f \in L^2 : \forall k \in \mathbb{Z},\ f_{|[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)[} \text{ constante}\}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

et $\varphi = \mathbb{1}_{[0,1[}$. L'AMR de Haar est orthonormée. Elle est très simple, et les algorithmes qui l'utilisent sont très rapides, mais dans certaines applications on souhaite que la fonction φ soit plus lisse. On utilise alors par exemple les AMR orthonormées construites par I. Daubechies ([15]). Leur inconvénient est d'avoir un support un peu plus grand (mais toujours compact), et surtout de ne pas être symétriques. L'AMR de Haar est la seule AMR orthonormée dont la fonction φ est à support compact et symétrique. Pour pallier ce défaut, on peut se contenter des AMR non orthonormales.

Soient $\phi, \widetilde{\phi} \in L^2$ deux fonctions qui vérifient des relations de raffinement du type (1.2.4). Les fonctions ϕ et $\widetilde{\phi}$ sont dites *duales* l'une de l'autre si pour tout $k, l \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\langle \phi(\cdot - k), \widetilde{\phi}(\cdot - l) \rangle = \delta_{k,l}, \tag{1.2.5}$$

le produit scalaire étant celui de L^2. Nous dirons que deux AMR, de fonctions d'échelle φ et $\widetilde{\varphi}$, sont *duales* l'une de l'autre si les fonctions φ et $\widetilde{\varphi}$ sont duales l'une de l'autre. Nous appellerons fonction d'échelle *primale* la fonction φ et fonction d'échelle *duale* la fonction $\widetilde{\varphi}$.

Remarquons que la famille $\{\widetilde{\varphi}(\cdot - l) : l \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas nécessairement la base duale (unique) de $\{\varphi(\cdot - l) : l \in \mathbb{Z}\}$ dans V_0. La fonction duale n'est pas unique et elle ne se trouve pas toujours dans V_0. Un résultat de [48] montre que si la fonction $\varphi \in L^2$ est raffinable, à support compact et L^2-stable, alors il existe une fonction $\widetilde{\varphi}$ duale de φ, qui est elle aussi dans L^2 et à support compact.

Citons le cas des fonctions d'échelle *interpolatrices i.e.*, $\varphi \in L^2 \cap C^0$, telle que $\varphi(k) = \delta_{0,k}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Une telle fonction admet comme "duale" la distribution de Dirac. En effet, $\widetilde{\varphi} = \delta$ vérifie la relation de raffinement $\widetilde{\varphi}(\cdot) = 2\widetilde{\varphi}(2\cdot)$ et φ et $\widetilde{\varphi}$ vérifient la relation (1.2.5), mais au sens d'un produit de dualité.

Comme pour la fonction d'échelle primale φ, on note

$$\widetilde{\varphi}_{j,k} := 2^{j/2}\widetilde{\varphi}(2^j \cdot - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \tag{1.2.6}$$

les *fonctions d'échelle duales* et $\widetilde{V}_j := \overline{\text{span}\,\{\widetilde{\varphi}_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}}$.

Comment construire une AMR? La démarche est en général l'inverse de ce que nous avons présenté jusqu'ici : on choisit d'abord la fonction φ qui sera la fonction d'échelle de l'AMR, puis on construit cette dernière comme suite des sous-espaces $V_j = \overline{\text{span}\,\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}}$.

Ainsi, si φ et $\widetilde{\varphi}$ sont deux fonctions raffinables, à support compact, duales l'une de l'autre, et si

$$(\int \widetilde{\varphi}(t)dt) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x-k) = 1, \tag{1.2.7}$$

presque partout dans $\mathbb{R}$, avec ces deux fonctions on peut construire deux AMR duales l'une de l'autre. La propriété (1.2.7) est la propriété de reconstruction des polynômes constants. Si φ est raffinable et L^2-stable, (1.2.7) est automatiquement vérifiée.

Remarquons qu'en intégrant sur $[0,1]$ la relation (1.2.7) on obtient :

$$(\int \varphi(x)dx)(\int \widetilde{\varphi}(x)dx) = 1. \tag{1.2.8}$$

On peut donc normaliser les fonctions φ et $\widetilde{\varphi}$ de sorte que :

$$\int \varphi(x)dx = \int \widetilde{\varphi}(x)dx = 1. \tag{1.2.9}$$

1.2.1 Les sous-espaces de détails et les ondelettes

Soit une AMR de fonction d'échelle φ. Soit W_0 un complément de V_0 dans V_1, *i.e.*,

$$V_1 = V_0 \oplus W_0.$$

Supposons qu'il existe une fonction ψ telle que $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ soit une base de Riesz de W_0. Nous désignerons parfois la fonction ψ du nom d'*ondelette-mère*. Si l'AMR est orthonormée, il existe un unique complément orthogonal W_0 de V_0 dans V_1 et une fonction ψ telle que $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de W_0.

Nous appellerons *ondelettes (primales)* les fonctions :

$$\psi_{j,k} := 2^{j/2}\psi(2^j \cdot - k), \quad j,k \in \mathbb{Z},$$

et *sous-espaces de détails (primaux)* les ensembles :

$$W_j := \overline{span\,\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Le nom vient du fait que les sous-espaces W_j contiennent les différences d'information entre deux résolutions successives, V_j et V_{j+1}. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on a $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ et

$\{\psi_{j,k} : \ k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de W_j. De plus, nous demandons que pour tout $j_0 \in \mathbb{Z}$ l'ensemble

$$E_{j_0} := \{\varphi_{j_0,k} : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{j,k} : \ j,k \in \mathbb{Z}, \ j \geq j_0\}$$

soit une base de Riesz pour L^2. Il existe alors une unique base de Riesz de L^2, duale de E_{j_0}.

De manière similaire, on définit des *sous-espaces de détails duaux* $\widetilde{W}_j$ et des *ondelettes duales* $\widetilde{\psi}_{j,k}$, $j,k \in \mathbb{Z}$, qui forment des bases de Riesz pour les sous-espaces de détail duaux. Nous demandons que pour tout $j_0 \in \mathbb{Z}$ l'ensemble

$$\widetilde{E}_{j_0} := \{\widetilde{\varphi}_{j_0,k} : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\widetilde{\psi}_{j,k} : \ j,k \in \mathbb{Z}, \ j \geq j_0\}$$

soit une base de Riesz pour L^2.

Nous imposons la condition que $(\varphi, \widetilde{\varphi}, \psi, \widetilde{\psi})$ soit un *système biorthogonal*, i.e.

$$\langle \varphi, \widetilde{\varphi}(\cdot - k) \rangle = \langle \psi, \widetilde{\psi}(\cdot - k) \rangle = \delta_{0,k} \tag{1.2.10}$$

et

$$\langle \psi, \widetilde{\varphi}(\cdot - k) \rangle = \langle \widetilde{\psi}, \varphi(\cdot - k) \rangle = 0, \tag{1.2.11}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $j_0 \in \mathbb{Z}$, les bases E_{j_0} et $\widetilde{E}_{j_0}$ seront alors duales l'une de l'autre. Nous appellerons les ensembles E_{j_0}, respectivement $\widetilde{E}_{j_0}$, la *base d'ondelettes* primale et la base d'ondelettes duale, de niveau j_0. On pourra se référer à [10] pour un étude des bases biorthogonales d'ondelettes.

Puisque $W_0 \subset V_1$ et $\widetilde{W}_0 \subset \widetilde{V}_1$ on peut écrire :

$$\psi = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2 \cdot - k) \text{ et } \widetilde{\psi} = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widetilde{g}_k \widetilde{\varphi}(2 \cdot - k) \tag{1.2.12}$$

avec les suites de *coefficients de raffinement* $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (\widetilde{g}_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$.

On montre que si $(\varphi, \widetilde{\varphi}, \psi, \widetilde{\psi})$ est un système biorthogonal alors :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \widetilde{h}_{k+2n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \widetilde{g}_{k+2n} = \delta_{0,n} \tag{1.2.13}$$

et

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \widetilde{g}_{k+2n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \widetilde{g}_{k+2n} = 0 \tag{1.2.14}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Soient H, $\widetilde{H}$, G, $\widetilde{G}$ les matrices bi-infinies respectivement de composantes $H_{l,k} = h_{k-2l}$, $\widetilde{H}_{l,k} = \widetilde{h}_{k-2l}$, $G_{l,k} = g_{k-2l}$, $\widetilde{G}_{l,k} = \widetilde{g}_{k-2l}$, pour tout $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Alors les relations (1.2.13) et (1.2.14) s'écrivent :

$$\widetilde{H} H^T = \widetilde{G} G^T = I \quad \text{et} \quad \widetilde{G} H^T = \widetilde{H} G^T = 0. \tag{1.2.15}$$

En particulier, on peut choisir $g_k = (-1)^k h_{1-k}$ et $\widetilde{g}_k = (-1)^k \widetilde{h}_{1-k}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Quand l'AMR est orthonormée on aura alors $h_k = \widetilde{h}_k$ et $g_k = \widetilde{g}_k = (-1)^k h_{1-k}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

1.2.2 La décomposition et la reconstruction

Soient deux AMR duales l'une de l'autre et le système biorthogonal $(\varphi, \widetilde{\varphi}, \psi, \widetilde{\psi})$. Toute fonction $f \in L^2$ peut être approchée aussi près que l'on veut par sa projection sur un sous-espace V_J suffisamment fin :

$$\mathrm{Proj}_{V_J} f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{J,k}\varphi_{J,k}, \tag{1.2.16}$$

avec $c_{J,k} := \langle f, \widetilde{\varphi}_{J,k}\rangle$. Cette décomposition est unique et stable. Plus utile pour nous est la décomposition qui exploite la relation

$$L^2 = \overline{V_{j_0} \oplus W_{j_0} \oplus W_{j_0+1} \oplus \ldots}, \tag{1.2.17}$$

avec $j_0 \in \mathbb{Z}$ quelconque. Si $j_0 < J$, du fait que E_{j_0} est une base de Riesz pour L^2 on obtient la *décomposition multi-échelle* (unique) :

$$\mathrm{Proj}_{V_J} f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j_0,k}\varphi_{j_0,k} + \sum_{j=j_0}^{J-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j,k}\psi_{j,k}, \tag{1.2.18}$$

avec $c_{j,k} := \langle f, \widetilde{\varphi}_{j,k}\rangle$ et $d_{j,k} := \langle f, \widetilde{\psi}_{j,k}\rangle$.

Dans la pratique, les coefficients de la décomposition (1.2.18) ne sont pas calculés comme produits scalaires, mais par des convolutions-décimations successives à partir des coefficients de la décomposition (1.2.16). C'est *l'algorithme de décomposition en ondelettes.* Il utilise les formules :

$$c_{j,k} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_{l-2k} c_{j+1,l} \quad \text{et} \quad d_{j,m} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widetilde{g}_{l-2k} c_{j+1,l}. \tag{1.2.19}$$

Inversement, à partir des coefficients multi-échelle on calcule les coefficients à l'échelle fine J par *l'algorithme de reconstruction.* Il est basé sur la formule :

$$c_{j+1,l} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{l-2k} c_{j,k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_{l-2k} d_{j,k}. \tag{1.2.20}$$

Si l'on note $c_j = (c_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ le vecteur colonne des coefficients des fonctions d'échelle au niveau j et $d_j = (d_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ le vecteur colonne des coefficients des ondelettes au même niveau, les opérations de décomposition et reconstruction s'écrivent :

$$c_j = \widetilde{H} c_{j+1} \quad \text{et} \quad d_j = \widetilde{G} c_{j+1},$$

respectivement

$$c_{j+1} = H^T c_j + G^T d_j.$$

Ces deux algorithmes ont été introduits par S. Mallat, dans le cadre des AMR orthogonales de première génération. Ils s'inspirent du schéma de codage en sous-bandes, utilisé depuis longtemps en traitement du signal : on décompose un signal c_{j+1} en deux composantes, l'une qui contient les basses fréquences, c_j, l'autre qui contient les hautes fréquences, d_j. Par similarité avec ce schéma on peut appeler le filtre $\widetilde{H}$, filtre passe-bas, et le filtre $\widetilde{G}$, filtre passe-haut. Pour la reconstruction, on utilise les filtres H et G. Le diagramme suivant représente le schéma de codage.

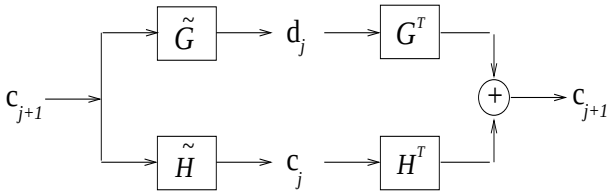


FIG. 1.1 – *La transformée en ondelettes représenté comme schéma de codage.*

En imposant la condition que la reconstruction soit exacte, on obtient que

$$H^T \widetilde{H} + G^T \widetilde{G} = I. \tag{1.2.21}$$

Les relations (1.2.15) et (1.2.21) donnent alors

$$\begin{bmatrix} \widetilde{H} \\ \widetilde{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^T & G^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} H^T & G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{H} \\ \widetilde{G} \end{bmatrix} = I. \tag{1.2.22}$$

Si les matrices H, G, $\widetilde{H}$ et $\widetilde{G}$ vérifient la relation (1.2.22), on dit qu'elles forment un *système biorthogonal de matrices de filtrage*. Si l'on note $\Phi_j := (\varphi_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\Psi_j := (\psi_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$, les relations de raffinement s'écrivent:

$$\Phi_j = H\Phi_{j+1} \quad \text{et} \quad \Psi_j = G\Psi_{j+1}. \tag{1.2.23}$$

Inversement, les fonctions au niveau fin s'expriment par rapport aux fonctions au niveau moins fin par la formule :

$$\Phi_{j+1} = \widetilde{H}^T \Phi_j + \widetilde{G}^T \Psi_j. \tag{1.2.24}$$

On dit d'un *filtre H* qu'il est *de longueur finie* si sa matrice a sur chaque ligne et chaque colonne un nombre fini de composantes non nulles. Si les filtres H, $\widetilde{H}$, G et $\widetilde{G}$ sont tous de longueur finie, alors la complexité des algorithmes de décomposition et de reconstruction est d'ordre $O(n)$, inférieur à la Transformée de Fourier Rapide, qui est d'ordre $O(n\log n)$.

1.3 Pourquoi une décomposition multi-échelle?

Les coefficients de détails $d_{j,k}$ d'une fonction $f \in L^2$ sont très petits dans les régions où la fonction est régulière. Leur valeur devient non négligeable dans le voisinage des points de discontinuité ou des points critiques de f, ce qui permet la détection de ces points. De plus, ils décroissent rapidement vers 0 quand j croît vers l'infini. Dans la compression de données, il suffit alors de garder les coefficients $c_{j_0,k}$ à une échelle j_0 petite (qui sont peu nombreux lorsque la fonction f est à support compact), ainsi que les coefficients de détails significatifs, qui sont, eux aussi, peu nombreux. On élimine les coefficients de détails à des échelles hautes. A la reconstruction, en remplaçant par zéro les coefficients manquants, on obtient une bonne approximation de la fonction originale. Dans le cas de fonctions bruitées, on peut espérer éliminer les petites oscillations haute fréquence parasites par simple seuillage des coefficients de détails. On garde la structure "grossière" de la fonction, et les grands coefficients de détails (qui appartiennent avec une grande probabilité à la fonction) et on élimine les petits coefficients de détails.

1.4 L'ordre d'une AMR et le nombre de moments nuls des ondelettes

Définition 1.4.1 *On dit que l'ordre d'une AMR est r si, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, tout polynôme P de degré strictement inférieur à r peut être écrit sous la forme :*

$$P = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j,k}\varphi_{j,k}.$$

Une définition similaire existe pour l'ordre $\widetilde{r}$ de l'AMR duale.

On dit d'une fonction f qu'elle a r moments nuls si pour tout $\ell = 0,\ldots,r-1$

$$\int_{\mathbb{R}} x^\ell f(x)dx = 0.$$

Un calcul simple montre que l'ordre de l'AMR primaire coïncide avec le nombre de moments nuls de l'ondelettes duale $\widetilde{\psi}$ et, réciproquement, l'ordre de l'AMR duale coïncide avec le nombre de moments nuls de l'ondelette primale ψ.

1.5 Adaptation à l'intervalle

Nous ne présentons pas ici d'exemples de bases d'ondelettes et d'AMR de première génération. Le lecteur pourra consulter par exemple [15], [50], [9]. Nous supposerons

disposer d'une telle AMR, de fonctions d'échelle $\varphi_{j,k}$ et d'ondelettes $\psi_{j,k}$, et nous allons brièvement rappeler certaines méthodes permettant de la transformer en une AMR adaptée à l'intervalle.

Dans la pratique, un signal (ou une image) est toujours de dimension finie. Sans perte de généralité, nous supposerons que les fonctions qui nous intéressent sont définies sur l'intervalle $[0,1]$. Une première idée est de les prolonger par zéro en dehors de leur domaine de définition. Cette méthode introduit artificiellement des discontinuités aux bords, donc des grands coefficients d'ondelettes qui ne sont pas justifiés par l'allure de la fonction. Son avantage est sa simplicité — elle ne nécessite aucune modification des algorithmes. D'autres stratégies existent, chacune ayant des avantages et des inconvénients. Le choix est donc à faire en fonction de l'application.

1.5.1 Ondelettes périodiques

Une solution simple, facile à utiliser aussi bien dans les calculs théoriques que dans les algorithmes, est de prolonger par périodicité les fonctions à tout l'axe réel. Étant donnée une fonction $f \in L^2(0,1)$, on la prolonge d'abord hors de $[0,1]$ par la fonction $\overline{f}:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$\overline{f}(t) := \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0,1[\\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

puis on la périodise par :

$$f^{per}(t) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{f}(t+\ell), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nous créons ainsi des discontinuités aux bords. Nous pouvons néanmoins espérer qu'elles seront moins grandes que celles introduites par la première méthode que nous avons mentionnée. Prenons l'exemple extrême d'une fonction qui est constante sur $[0,1]$, de constante très grande. Si nous la prolongeons par périodicité, nous récupérons une fonction constante sur $\mathbb{R}$, donc elle ne perd pas de régularité. Au contraire, nous créons des grandes discontinuités aux bords si nous la prolongeons par 0 en dehors de son domaine de définition.

Prolonger par périodicité les fonctions revient à construire une base d'ondelettes pour $L^2(0,1)$ comme suit. On définit les fonctions :

$$\varphi^{per}_{j,k} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \varphi_{j,k}(\cdot + \ell), \quad j,k \in \mathbb{Z}. \tag{1.5.1}$$

Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé, dans l'ensemble $\{\varphi^{per}_{j,k} :\ k \in \mathbb{Z}\}$ il existe 2^j fonctions différentes, car elles sont périodiques de période 1 et $\varphi^{per}_{j,k+1} = \varphi^{per}_{j,k}(\cdot - 2^{-j})$. Choisissons les fonctions

indexées par $1 \leq k \leq 2^j$. Pour $1 \leq k \leq 2^j$, notons $\varphi^p_{j,k} := \varphi^{per}_{j,k}|_{[0,1]}$. Remarquons que si $1 \leq k \leq 2^j$ et le support de $\varphi_{j,k}$ est inclus dans $[0,1]$ alors $\varphi^p_{j,k}(t) = \varphi_{j,k}(t)$ pour tout $t \in [0,1]$. Nous gardons donc les fonctions qui ont le support dans $[0,1]$ et nous ignorons celles qui ont leur support dans l'extérieur de $[0,1]$. Nous coupons en deux composantes disjointes les fonctions dont le support intersecte l'intérieur et l'extérieur de $[0,1]$, comme le montre la figure suivante.

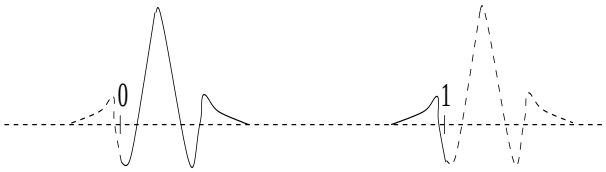


FIG. 1.2 – *La restriction à l'intervalle d'une ondelette périodique.*

Par le même procédé on construit les ondelettes $\psi^p_{j,k}$, $j \in \mathbb{Z}$ et $k = 1, \ldots, 2^j$.

Dans les algorithmes de décomposition utilisant cette méthode il ne faut pas descendre en dessous du niveau j_{inf}, le plus petit entier tel que le diamètre de l'ensemble $\text{supp}\varphi_{j_{inf},0}$ soit inférieur à 1. Ces algorithmes restent des algorithmes de filtrage, dont les filtres sont construits par périodisation des filtres classiques.

Cette méthode a le désavantage de créer de grands coefficients de détails près des bords, à cause du manque de moments nuls pour les ondelettes dont le support touche les bords, mais elle est facile à appliquer. Nous l'utiliserons dans le chapitre 2.

1.5.2 Symétrisation par rapport aux bords

Cette méthode nous évite d'introduire des discontinuités aux bords. On définit le prolongement de f à tout l'axe réel par symétrisation par rapport à l'axe $x = 0$, puis périodisation :

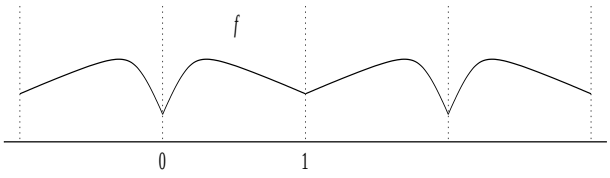


FIG. 1.3 – *Prolongement de f par symétrie.*

La base d'ondelettes de $L^2(0,1)$ construite par cette méthode ressemble à la base

d'ondelettes périodiques, mis à part que l'on symétrise l'ondelette par rapport à l'extrémité 0, avant de périodiser le résultat. Nous gagnons ainsi la continuité aux bords, mais les coefficients de détails seront quand même plus grands aux extrémités qu'à l'intérieur de l'intervalle, car la nouvelle fonction n'est pas dérivable aux points entiers. Pour appliquer cette méthode il faut que les ondelettes initiales soient symétriques ou antisymétriques. La seule base orthogonale avec cette propriété est la base de Haar. Si l'on veut des bases d'ondelettes plus lisses, ayant plus de moments nuls, il faut s'affranchir de la condition d'orthogonalité.

Ce type d'algorithme est parfois utilisé en traitement d'images, quand le manque de dérivabilité aux bords n'est pas trop gênant. Mais l'implémentation est plus difficile comparativement à la méthode précédente.

1.5.3 Ondelettes orthonormées adaptées aux bords

Nous avons vu que le principal inconvénient des méthodes précédentes est le manque de moments nuls des ondelettes duales qui ont été modifiées à cause des bords. Ceci fait que les coefficients de détails dans le voisinage des bords sont d'ordre de grandeur plus élevé que les coefficients de détail intérieurs. Dans un algorithme de compression on sera alors amené à utiliser inutilement beaucoup de ressources pour enregistrer les bords d'une image, et dans un algorithme de débruitage on devra seuiller différemment les coefficients intérieurs et les coefficients affectés par les bords.

Considérons désormais une base orthonormée d'ondelettes. Dans ce cas, les fonctions d'échelle et les ondelettes duales se confondent avec les fonctions primales. Le nombre de moments nuls coïncide avec le degré maximal des polynômes qui peuvent être écrits comme combinaison linéaire de fonctions d'échelle d'un même niveau. On construit alors les fonctions d'échelle aux bords comme combinaison linéaire de restrictions à $[0,1]$ des fonctions d'échelle sur $\mathbb{R}$, de sorte que les nouvelles fonctions d'échelle vérifient les conditions de Strang-Fix [38] pour la reproduction des polynômes. Cette méthode a été utilisée dans [11] et dans [52], pour construire des bases d'ondelettes adaptées aux bords, à partir de bases d'ondelettes orthonormées de Daubechies.

Rappelons ici le procédé de [52]. Supposons que φ soit une fonction d'échelle de support de longueur L telle que les conditions de Strang-Fix soient vérifiées jusqu'à l'ordre N, c'est-à-dire, telle que :

$$\frac{x^\ell}{\ell!} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_\ell(k)\varphi(x-k), \quad \ell = 0,\dots,N-1, \quad x \in \mathbb{R},$$

avec

$$P_\ell(x) = \sum_{n=0}^{\ell} \frac{C_{\ell-n}}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

et

$$C_m = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^m}{m!} \varphi(x) dx = P_m(0).$$

Les coefficients C_m peuvent être calculés par récurrence.

On construit d'abord une base pour $[0, +\infty[$. Pour $\ell = 0, \ldots, N-1$, on note :

$$\widehat{\varphi}_\ell(x) = \sum_{k=-N+1}^{N-1-\alpha} P_\ell(k) \varphi(x-k) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x),$$

où α est un paramètre qui vaut 0 ou 1. Grâce à cette définition, on peut écrire :

$$\frac{x^\ell}{\ell!} = \widehat{\varphi}_\ell(x) + P_\ell(N-\alpha)\varphi(x-(N-\alpha)) + \ldots,$$

pour tout $x \in [0, +\infty[$. Les fonctions $\widehat{\varphi}_\ell$ et $\varphi_{0,k}$, $\ell = 0, \ldots, N-1$, $k \geq N$, sont indépendantes et elles permettent la reconstruction des polynômes jusqu'au degré $N-1$. Après orthonormalisation, on obtient un système de fonctions d'échelle du sous-espace fermé $V_0^{[0,+\infty[}$ qu'elles engendrent. Les fonctions d'échelle aux niveaux plus fins sont des contractées des fonctions d'échelle du niveau 0. Au bord droit, en 1, la construction est symétrique. Les ondelettes se construisent par le même procédé. Le paramètre α permet de construire des fonctions qui vérifient des conditions de type Dirichlet sur les bords.

Puisque l'on peut décrire avec des fonctions d'échelle du même niveau les polynômes jusqu'au degré $N-1$, l'ordre de la nouvelle AMR est N, comme pour l'AMR initiale. Les ondelettes construites par cette méthode ont toutes le même nombre de moments nuls. Les algorithmes sont plus compliqués, du fait que les filtres changent selon que l'on est à l'intérieur de l'intervalle ou près d'un bord. Un autre inconvénient que nous avons remarqué dans les tests numériques est que les fonctions affectées par les bords sont très oscillantes. Un estimateur construit par seuillage sera donc oscillant dans le voisinage des bords. Nous utilisons cette méthode dans le chapitre 3.

1.5.4 Ondelettes biorthogonales sur l'intervalle

On peut construire des bases d'ondelettes sur l'intervalle, ondelettes ayant toutes le même nombre de moments nuls, qui ne sont pas issues d'ondelettes orthonormales. Il suffit de trouver des filtres adéquats, de sorte que les fonctions d'échelle vérifient les conditions de Strang-Fix. Dans [67] on trouve l'exemple des ondelettes interpolatrices de Lagrange et les ondelettes interpolatrices en moyenne. Certains résultats théoriques se trouvent dans [27].

1.6 Approximation des coefficients

Un algorithme de décomposition en ondelettes reçoit en entrée le vecteur des coefficients à une échelle fine, et le transforme dans un vecteur contenant les coefficients à une échelle moins fine ainsi que les détails entre les deux niveaux. La transformation se fait par convolutions successives avec des filtres (généralement de longueur finie). La principale difficulté est alors de calculer les coefficients à l'échelle fine, qui sont des produits scalaires entre f, la fonction à décomposer, et les fonctions d'échelle du niveau fin. Même si l'on veut faire les calculs avec une grande précision, dans une situation réelle c'est souvent impossible puisqu'on dispose uniquement d'un échantillonnage de la fonction f. On est alors amené à utiliser des formules de quadrature et on se pose la question de savoir dans quelle mesure cette approximation affecte l'algorithme.

Soient deux AMR duales l'une de l'autre, dont les fonctions d'échelles respectives φ et $\widetilde{\varphi}$, sont à support compact et vérifient la relation (1.2.9). Notons $t_{j,k} := k/2^j$, pour tout $j,k \in \mathbb{Z}$. On suppose que l'origine se trouve dans le support des fonctions $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$. Pour les bases d'ondelettes usuelles cette condition est vérifiée.

On peut caractériser certains espaces de fonctions par l'amplitude des coefficients de détails de leurs éléments et vice-versa. C'est le cas en particulier des fonctions hölderiennes.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, nous noterons $\lfloor \alpha \rfloor$ sa partie entière inférieure, *i.e.*, l'entier positif tel que $\alpha' := \alpha - \lfloor \alpha \rfloor \in]0,1]$.

Définition 1.6.1 *Soit Ω un intervalle réel. Étant donné $\alpha > 0$ et m un entier positif, nous dirons que la fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est hölderienne d'ordre α par morceaux sur Ω, avec au plus m discontinuités, si :*

(i) il existe $l \leq m$ points $a_1 < \ldots < a_l$ dans Ω tels que f ait $\lfloor \alpha \rfloor$ dérivées continues, sauf éventuellement en les points a_i, et tels que toutes les dérivées (y compris f) soient bornées en valeur absolue sur leur domaine de définition ;

(ii) pour tout intervalle I de la forme $]a_i, a_{i+1}[$, $]-\infty, a_1[\cap \Omega$ ou $]a_n, +\infty[\cap \Omega$, il existe des constantes positives L_i, $i = 0,1,\ldots,l$, telles que pour tout $x,y \in I$,

$$|f^{(\lfloor \alpha \rfloor)}(x) - f^{(\lfloor \alpha \rfloor)}(y)| \leq L_i |x-y|^{\alpha'}.$$

Si $m = 0$, nous dirons que f est hölderienne d'ordre α sur Ω.

Nous dirons que f appartient à $\Lambda^\alpha(L,m)$ si elle est hölderienne d'ordre α par morceaux et si toutes ses dérivées (sur Ω, sauf en les $l \leq m$ points de rupture), ainsi que les constantes L_i, sont bornées en valeur absolue par une constante positive L.

Dans la suite de ce chapitre, nous considérerons $\Omega := \mathbb{R}$. La vitesse de décroissance

de l'amplitude des coefficients de détails pour les fonctions de $\Lambda^\alpha(L,m)$ dépend du nombre de moments nuls de l'ondelette duale. Nous rappelons ici ce résultat.

Proposition 1.6.2 *Soit $\alpha, L > 0$, $m \geq 0$ un entier et f une fonction de $\Lambda^\alpha(L,m)$. Si l'ondelette duale $\widetilde{\psi}$ est bornée, à support compact et admet r moments nuls, il existe une constante C indépendante de f, de j et de k telle que :*

(i) Si $\operatorname{supp}\widetilde{\psi}_{j,k}$ *ne contient aucun point de rupture de f, alors*

$$|d_{j,k}| \leq C2^{-j(1/2+\min(\alpha,r))} \; ; \tag{1.6.1}$$

(ii) Si $\operatorname{supp}\widetilde{\psi}_{j,k}$ *contient au moins un point de rupture de f, alors*

$$|d_{j,k}| \leq C2^{-j/2}. \tag{1.6.2}$$

Démonstration : (i) Soit $p = \min(\lfloor\alpha\rfloor, r-1)$. Puisque $\widetilde{\psi}$ admet r moments nuls, on a:

$$\int_{\mathbb{R}} [f(t_{j,k}) + \cdots + \frac{(t-t_{j,k})^p}{p!} f^{(p)}(t_{j,k})]\widetilde{\psi}_{j,k}(t)dt = 0.$$

Le point $t_{j,k}$ est intérieur au support de $\widetilde{\psi}_{j,k}$. Puisque la fonction f n'a pas de points de rupture dans l'intérieur de ce support, nous pouvons en écrire un développement limité au point $t_{j,k}$:

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t_{j,k}) + \cdots + \frac{(t-t_{j,k})^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(t_{j,k}) \\ &+ \frac{(t-t_{j,k})^p}{(p-1)!} \int_0^1 (1-\theta)^{p-1} f^{(p)}(t_{j,k} + \theta(t-t_{j,k}))d\theta, \quad t \in \operatorname{supp}\widetilde{\psi}_{j,k}. \end{aligned}$$

Les deux dernières relations nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} d_{j,k} &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\widetilde{\psi}_{j,k}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} [f(t) - f(t_{j,k}) - \cdots - \frac{(t-t_{j,k})^p}{p!} f^{(p)}(t_{j,k})]\widetilde{\psi}_{j,k}(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(t-t_{j,k})^p}{(p-1)!}\widetilde{\psi}_{j,k}(t) \int_0^1 (1-\theta)^{p-1}[f^{(p)}(t_{j,k} + \theta(t-t_{j,k})) - f^{(p)}(t_{j,k})]d\theta dt. \end{aligned}$$

Si $p = \lfloor\alpha\rfloor$, alors

$$|f^{(p)}(t_{j,k} + \theta(t-t_{j,k})) - f^{(p)}(t_{j,k})| \leq L|\theta(t-t_{j,k})|^{\alpha'}.$$

Si $p < \lfloor\alpha\rfloor$, alors

$$|f^{(p)}(t_{j,k} + \theta(t-t_{j,k})) - f^{(p)}(t_{j,k})| \leq L|\theta(t-t_{j,k})|.$$

Donc

$$|f^{(p)}(t_{j,k} + \theta(t-t_{j,k})) - f^{(p)}(t_{j,k})| \leq L|\theta(t-t_{j,k})|^{\min(\alpha-p,1)}$$

et

$$\begin{aligned} |d_{j,k}| &\leq L\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{p-1}\theta^{\min(\alpha-p,1)}}{(p-1)!}d\theta \int_{\mathbb{R}} |t-t_{j,k}|^{\min(\alpha,p+1)}|\widetilde{\psi}_{j,k}(t)|dt \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}} |t-t_{j,k}|^{\min(\alpha,r)}|\widetilde{\psi}_{j,k}(t)|dt. \end{aligned}$$

Du fait que $\widetilde{\psi}$ est à support compact et bornée on obtient alors la relation (1.6.1).

(ii) Dans ce cas, nous pouvons utiliser uniquement le fait que f est bornée et que $\|\psi_{j,k}\|_1$ est de l'ordre du $2^{-j/2}$:

$$|d_{j,k}| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\cdot|\widetilde{\psi}_{j,k}(t)|dt \leq L\|\widetilde{\psi}\|_1 2^{-j/2}.$$

■

Nous avons supposé que l'origine se trouve dans le support de la fonction $\widetilde{\varphi}$, ce qui implique que le point $t_{j,k}$ se trouve dans le support de la fonction $\widetilde{\varphi}_{j,k}$. Quand j tend vers l'infini, la longueur du support de $\widetilde{\varphi}_{j,k}$ tend vers 0. Une approximation pour $c_{j,k}$ est alors

$$c_{j,k} \simeq 2^{-j/2} f(2^{-j}k).$$

Le résultat suivant donne une estimation de l'erreur d'approximation de $c_{j,k}$ par $f(2^{-j}k)$, pour les fonctions hölderiennes par morceaux :

Proposition 1.6.3 *Soit $\alpha, L > 0$, $m \geq 0$ un entier et f une fonction de classe $\Lambda^\alpha(L,m)$. Si la fonction d'échelle duale $\widetilde{\varphi}$ est bornée et à support compact, il existe une constante C indépendante de f, de j et de k telle que :*

(i) si $\operatorname{supp}\widetilde{\varphi}_{j,k}$ *ne contient aucun point de rupture de f, alors*

$$|n^{-1/2}f(t_{j,k}) - c_{j,k}| \leq C2^{-j(1/2+\min(\alpha,1))}; \tag{1.6.3}$$

(ii) si $\operatorname{supp}\widetilde{\varphi}_{j,k}$ *contient au moins un point de rupture de f, alors*

$$|n^{-1/2}f(t_{j,k}) - c_{j,k}| \leq C2^{-j/2}. \tag{1.6.4}$$

Démonstration : (i) De la relation (1.2.9) on tire :

$$\begin{aligned} |n^{-1/2}f(t_{j,k}) - c_{j,k}| &= |\int_{\mathbb{R}} f(t_{j,k})\widetilde{\varphi}_{j,k}(t)dt - \int_{\mathbb{R}} f(t)\widetilde{\varphi}_{j,k}(t)dt| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(t_{j,k}) - f(t)|\cdot|\widetilde{\varphi}_{j,k}(t)|dt. \end{aligned}$$

La fonction f étant hölderienne d'ordre α sur le support de $\widetilde{\varphi}_{j,k}$, on en déduit :

$$|n^{-1/2}f(t_k) - c_{j,k}| \leq L\int_{\operatorname{supp}\widetilde{\varphi}_{j,k}} |t_{j,k}-t|^{\min(\alpha,1)}|\widetilde{\varphi}_{j,k}(t)|dt.$$

Et comme $\widetilde{\varphi}_{j,k} = 2^{j/2}\widetilde{\varphi}(2^j \cdot -k)$ et puisque $\widetilde{\varphi}$ est bornée et à support compact on obtient la relation (1.6.3).

(ii) La démonstration est similaire :

$$\begin{aligned} |n^{-1/2} f(t_{j,k}) - c_{j,k}| &= |\int_{\mathbb{R}} f(t_{j,k})\widetilde{\varphi}_{j,k}(t)dt - \int_{\mathbb{R}} f(t)\widetilde{\varphi}_{j,k}(t)dt| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(t_{j,k}) - f(t)| \cdot |\widetilde{\varphi}_{j,k}(t)|dt \\ &\leq 2L\|\widetilde{\varphi}_{j,k}\|_1 \leq 2L\|\widetilde{\varphi}\|_1 2^{-j/2}. \end{aligned}$$

■

Le résultat précédent évalue l'erreur d'approximation, quand on utilise une formule de quadrature d'ordre zéro. On peut obtenir de meilleures approximations pour $c_{j,k}$ en utilisant des formules de quadrature d'ordre supérieur. Si f est de classe C^s, avec $s > 0$, on peut remplacer f sur le support de $\varphi_{j,k}$ par un polynôme de degré $l < s$. Par exemple soit P_l le polynôme d'interpolation de Lagrange qui interpole f en les points $2^{-j}(k+n)$, $n = 0, \ldots, l$. On peut alors estimer $c_{j,k}$ par

$$c_{j,k} \simeq \widehat{c}_{j,k} := 2^{-j/2} \sum_{n=0}^{l} w_n f(2^{-j}(k+n)), \tag{1.6.5}$$

avec les poids

$$w_n = \int_{\mathbb{R}} L_n(t)\widetilde{\varphi}(t)dt, \tag{1.6.6}$$

où L_n sont les polynômes de Lagrange qui interpolent les valeurs $L_n(n') = \delta_{n,n'}$, pour $n, n' = 0, \ldots, l$. Les résultats classiques sur l'interpolation de Lagrange montrent alors que

$$\begin{aligned} |c_{j,k} - \widehat{c}_{j,k}| &\leq \|\widetilde{\varphi}_{j,k}\|_{L^1} \sup_{t \in \mathrm{supp}\widetilde{\varphi}_{j,k}} |f(t) - P_l(t)| \\ &\leq C2^{-j(1/2+l)} \|f\|_{C^s(\mathrm{supp}\widetilde{\varphi}_{j,k})}. \end{aligned} \tag{1.6.7}$$

Le calcul des poids w_n réside dans le calcul des moments

$$M_k = \int t^k \widetilde{\varphi}(t)dt.$$

En utilisant la relation de raffinement on obtient

$$M_k = (1 - 2^{-k})^{-1} 2^{-k-1} \sum_{l<k} (\sum_n h_n C_l^k n^{k-l}) M_l.$$

Sachant que $M_0 = 1$, on peut calculer la valeur exacte de tous les moments ([66]).

1.7 La transformée invariante par translations discrète

La transformée discrète en ondelettes n'est pas invariante par translations. Si on translate la suite de données discrètes issue de l'échantillonnage d'un signal, les coefficients d'ondelettes ne sont pas simplement translatés mais complètement modifiés. Ceci entraîne des artefacts visuels (dits phénomènes de Gibbs), au voisinage des discontinuités. Une méthode pour obtenir l'invariance par translations est le "cycle spinning", introduit par R. Coifman. La méthode consiste à calculer la moyenne, sur un ensemble de translations, des transformées suivantes : on translate les données, on enlève le bruit et on re-translate le résultat pour revenir à la position initiale. Si on note avec S_h la translation circulaire de h pas et avec T l'opérateur d'estimation (dans notre cas, l'ensemble d'opérations : décomposition en ondelettes, débruitage, reconstruction), on peut décrire le "cycle spinning" par :

$$\frac{1}{\mathrm{card}(\mathcal{H})} \sum_{h \in \mathcal{H}} S_{-h} T S_h,$$

où $\mathcal{H}$ est l'ensemble des pas de translations. Dans le cas particulier où $\mathcal{H}$ est l'ensemble de toutes les translations possibles du signal échantillonné à traiter, on obtient une transformation invariante par translations. Au cours de la décomposition en ondelettes on effectue toujours une décimation. La transformée invariante par translations ne fait pas la décimation, elle garde toutes les variantes possibles pour les coefficients d'échelle et pour les coefficients de détails. Coifman et Donoho montrent dans [13] que les algorithmes classiques, mais qui ne font pas la décimation, sont invariants par translations et de complexité $O(n \log n)$. Le lecteur intéressé peut trouver plus de détails et des exemples dans [13]. L'ensemble de programmes WaveLab ([28]), implementé par D. Donoho et al. contient ces algorithmes.

1.8 Le seuillage

Les estimateurs non linéaires que nous définirons dans les chapitres suivants utilisent des procédures de seuillage. Nous rappelons ici deux procédures traditionnellement employées. Le nombre réel strictement positif λ désignera le *seuil.*

Le seuillage dur

Le seuillage dur est défini par :

$$\eta_\lambda^h(x) := \begin{cases} x & \text{si} \quad |x| > \lambda \\ 0 & \text{si} \quad |x| \leq \lambda. \end{cases} \tag{1.8.1}$$

Le seuillage doux

Il est défini par :

$$\eta_\lambda^s(x) := \begin{cases} x-\lambda & \text{si} \quad x > \lambda \\ x+\lambda & \text{si} \quad x < \lambda \\ 0 & \text{si} \quad |x| \leq \lambda \end{cases} \tag{1.8.2}$$

Ce seuillage minimise la distance quadratique aux données, pénalisée par une norme ℓ^1. En effet, si x_m, $m = 0,\ldots,n-1$, sont les données, alors le vecteur y qui minimise :

$$\sum_{m=1}^{N-1} |y_m - x_m|^2 + 2\lambda \sum_{m=1}^{N-1} |y_m|$$

a pour composantes $y_m = \eta_\lambda^s(x_m)$.

Choix du seuil

Dans le cas des ondelettes classiques, et quand le bruit est indépendant et identiquement distribué suivant une loi normale centrée, on peut choisir pour le seuil la valeur $\lambda := \sigma\sqrt{2(\log n)/n}$, où n est la taille de l'échantillon et σ^2 est la variance du bruit [29]. Ce seuil est asymptotiquement optimal, mais il semble trop grand en pratique. Le risque peut être diminué en choisissant un seuil adapté aux données, avec la méthode SURE (Stein Unbiased Risk Estimate [60])

Quand le bruit est corrélé, il est plus judicieux de choisir un seuil spécifique à l'échelle, dépendant de la variance des coefficients de détails à l'échelle donnée.

La variance du bruit, σ, n'est pas toujours connue. On peut en calculer un estimateur robuste à partir de la médiane des valeurs absolues des coefficients de détail à l'échelle la plus fine (voir [29]). En effet, un signal non-bruité a relativement peu de coefficients de détails significatifs, la plupart étant d'amplitude négligeable. Après un premier pas de décomposition, on évalue M_Y, la médiane des valeurs absolues des coefficients de détails, qui sera donc peu influencée par le signal original. Si l'on considère un ensemble de variables aléatoires gaussiennes, de moyenne nulle et de variance σ^2. Si M est la médiane de leurs valeurs absolues, on montre que

$$E(M) \approx 0.6745\sigma.$$

On peut donc estimer la variance du bruit avec la formule :

$$\widehat{\sigma} = \frac{M_Y}{0.6745}. \tag{1.8.3}$$

Chapitre 2

Estimation de fonctions hölderiennes

Dans ce chapitre nous proposons un algorithme pour le débruitage de fonctions observées sur une grille aléatoire. Nous montrons que l'estimateur issu de cet algorithme est presque optimal lorsque les fonctions à estimer appartiennent à la classe des fonctions hölderiennes, ceci au sens du risque L^2-minimax et conditionnellement à la grille d'échantillonnage.

2.1 Le problème

Soit $X_1,\dots,X_n$ un échantillon aléatoire issu de la loi d'une variable aléatoire $\mathbf{X}$*, ayant comme fonction de répartition la fonction inconnue $G:\ \mathbb{R}\to[0,1]$. Puisque nous allons toujours considérer que* supp $G=[0,1]$*, par abus de langage G désignera également la restriction de G à $[0,1]$. Soit $X_{(1)},\dots,X_{(n)}$ la statistique d'ordre obtenue en ordonnant les X_i dans l'ordre croissant de leurs valeurs. Nous considérons le modèle de régression*

$$Y_i = f(X_{(i)}) + \sigma Z_i, \quad i=1,\dots,n,\ n=2^J, \tag{2.1.1}$$

avec $\sigma\geq 0$, $Z_1,\dots,Z_n$ étant un échantillon aléatoire issu d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Nous noterons $\mathbf{Z}$ *le vecteur du bruit et nous supposerons que* $\mathbf{Z}$ *est indépendant du plan d'expérience* $\mathbf{X}$*.*

Le cas de l'échantillonnage équidistant, $X_i = i/n$, $i=1,\dots,n$, a été traité dans des nombreux travaux. Donoho et Johnstone proposent un algorithme non linéaire de débruitage, par seuillage des coefficients d'ondelettes, et ils montrent que le taux de convergence de leur estimateur est presque optimal ([29]). Nous faisons une présentation sommaire de leur méthode dans le paragraphe 2.3. Le même algorithme pourrait éventuellement être utilisé dans le cas d'échantillonnages non équidistants, mais les résultats ne sont pas satisfaisants, comme on peut le voir dans l'exemple suivant.

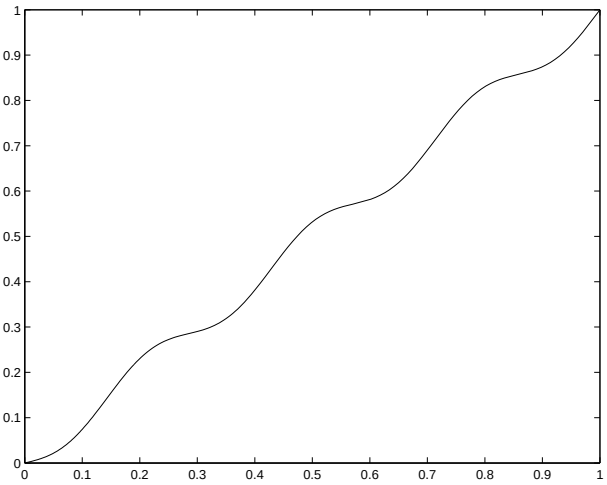


FIG. 2.1 – *Exemple de fonction de répartition,* $G(x) = x + \frac{1}{10\pi}\sin(7\pi x + \pi)$.

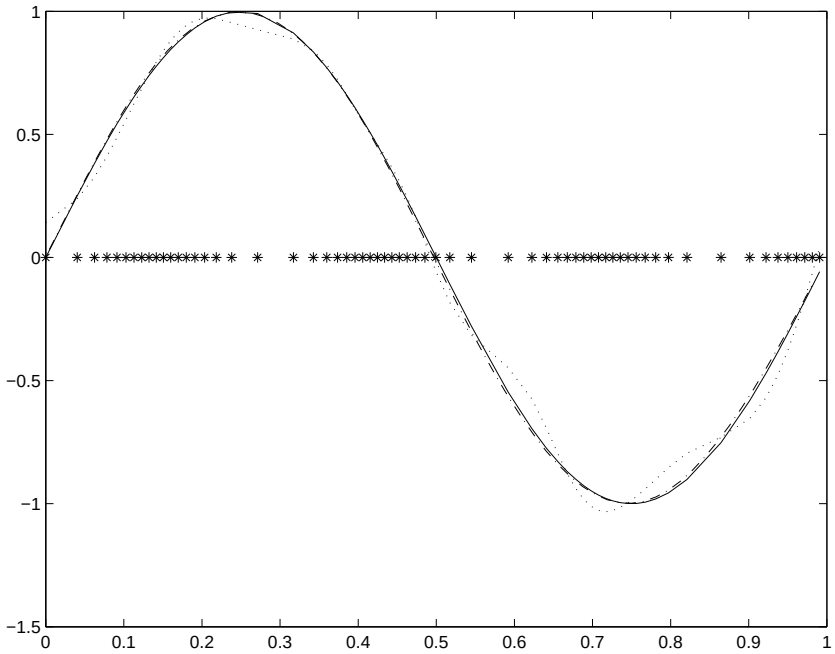


FIG. 2.2 – *Comparaison entre deux méthodes d'estimation, sur une grille non équidistante.*

Le plan d'expérience, représenté avec des astérisques, est déterministe : $X_i = G^{-1}(i/n)$, $i = 1, \ldots, n$. La fonction G est celle de la figure 2.1. La ligne continue est la fonction f. A partir des valeurs (non bruitées) de cette fonction aux points d'échantillonnage,

on construit deux approximations : en pointillé celle obtenue en considérant les points comme étant équidistants et en ligne brisée celle calculée avec une méthode adaptée que nous développerons plus tard. On remarquera les artefacts de la première méthode.

Un grand intérêt a été porté ces dernières années aux méthodes adaptées pour le débruitage des fonctions observées sur des grilles non équidistantes. Un exemple dans ce sens est la méthode développée par T. Cai dans [5] et dans [3]. Elle traite le cas d'un plan déterministe, $X_i = G^{-1}(i/n)$, $i = 1,\dots,n$, la fonction G étant supposée connue. Nous allons rappeler ses résultats et les étendre au cas non déterministe. Dans notre cas la fonction "grille" sera inconnue. A sa place nous utiliserons une estimation lisse, notamment l'estimation log-spline. Cette substitution fait que les résultats de convergence que nous obtenons sont plus faibles que dans le cas déterministe : le risque sera contrôlé conditionnellement à la grille. Il sera montré que, pour la classe des fonctions hölderiennes sur l'intervalle $[0,1]$, l'ordre en probabilité de ce risque est presque optimal. A la lumière des résultats concernant l'estimation log-spline, la convergence en probabilité semble le mieux que l'on puisse faire. Comme on le verra dans les exemples numériques, l'algorithme donne des résultats satisfaisants même pour des fonctions présentant des irrégularités locales.

2.2 Préliminaires

La méthode que nous proposons est fondée sur la décomposition en ondelettes. Dans la suite nous allons considérer une base d'ondelettes périodisées (pour leur définition, voir le paragraphe §1.5 du premier chapitre). Supposons qu'elles proviennent d'une base d'ondelettes définie sur $\mathbb{R}$ à support compact, orthonormées et r-régulières (r étant un entier positif). Par r-régularité on entend que les fonctions ont r dérivées continues et que les ondelettes ont r moments nuls. Soit φ la fonction d'échelle génératrice et soit ψ l'ondelette-mère. Nous supposerons que la fonction d'échelle est de moyenne 1 :

$$\int \varphi(x)dx = 1.$$

Pour $j \in \mathbb{Z}$ et $k = 1,\dots,2^j$, notons par $\varphi_{j,k}$ les fonctions d'échelle et par $\psi_{j,k}$ les ondelettes périodisées. Soient les sous-espaces d'approximation

$$V_j := \overline{\text{span}\{\varphi_{j,k} :\ k = 1,\dots,2^j\}}$$

et les sous-espaces de détails

$$W_j := \overline{\text{span}\{\psi_{j,k} :\ k = 1,\dots,2^j\}}.$$

On sait alors que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ et $V_j \perp W_j$. Nous noterons Proj_V la projection orthogonale sur le sous-espace fermé V.

Nous supposerons que la régularité r des ondelettes est supérieure à la régularité hölderienne β des fonctions à reconstruire (voir la définition 1.6.1). Nous allons noter par $\Lambda_p^\beta(L,0)$ l'ensemble de fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante : si on prolonge f par périodicité sur l'axe réel, la fonction que l'on obtient appartient à l'ensemble $\Lambda^\beta(L,0)$ (sur $\mathbb{R}$).

Dans tout ce chapitre, sauf autre mention, nous désignerons par $\Lambda^\beta(L,m)$ l'ensemble de fonctions hölderiennes de rang β avec au plus m points de rupture, sur l'intervalle $[0,1]$.

Pour $j \in \mathbb{Z}$ et $k = 1,\ldots,2^j$, les coefficients de la décomposition d'une fonction $f \in L^2(0,1)$ dans la base d'ondelettes sont les produits scalaires dans $L^2(0,1)$:

$$\xi_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \quad \text{et} \quad \theta_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle, \tag{2.2.1}$$

et f s'écrit :

$$f = \sum_{k=1}^{2^{j_0}} \xi_{j_0,k} \varphi_{j_0,k} + \sum_{j \geq j_0} \sum_{k=1}^{2^j} \theta_{j,k} \psi_{j,k}, \tag{2.2.2}$$

pour $j_0 \in \mathbb{N}$ quelconque.

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous considérerons que la taille des échantillons est de la forme

$$n = 2^J, \quad J \in \mathbb{Z}.$$

Soit $t_k := k/n$, $k = 1,\ldots,n$, un échantillonnage équidistant de l'intervalle $[0,1]$. Quand la fonction f est inconnue, sauf en les points t_k, on peut l'approcher par :

$$f_J = n^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \varphi_{J,k}. \tag{2.2.3}$$

Le théorème suivant rappelle la vitesse de convergence de f_J vers f. Pour la démonstration on utilise les propositions 1.6.2 et 1.6.3 du premier chapitre et la relation (2.2.2), avec J à la place de j_0.

Théorème 2.2.1 *Soient β et L des constantes strictement positives. Si $f \in \Lambda^\beta(L,m)$ sur $[0,1]$, il existe une constante C qui ne dépend ni de f ni de J telle que :*

$$\|f - f_J\|_2^2 \leq C n^{-2\min(\beta,1)} + C(m+2)n^{-1}.$$

Remarque 2.2.2 *Le nombre de points de rupture peut croître avec une vitesse polynomiale quand n croît, sans dégrader l'approximation. Si le nombre de points de rupture m est inférieur à cn^γ, où c est une constante positive et où $0 \leq \gamma < 1/(1+2\beta)$, alors*

$$\|f - f_J\|_2^2 = o(n^{\frac{-2\beta}{1+2\beta}}).$$

Rappelons qu'utiliser des ondelettes périodisées équivaut à prolonger par périodicité la fonction f à tout $\mathbb{R}$. Ceci fait que les bords se rajoutent à l'ensemble de points de rupture (d'où le terme $C(m+2)n^{-1}$). Si la fonction qui prolonge f à l'axe réel tout entier est de classe $\Lambda^{\beta}(L,0)$ sur $\mathbb{R}$ alors la convergence est plus rapide :

$$\|f - f_J\|_2 \leq Cn^{-\min(\beta,1)}, \tag{2.2.4}$$

et on a le même taux pour la norme L^{∞} :

$$\|f - f_J\|_{\infty} \leq Cn^{-\min(\beta,1)}. \tag{2.2.5}$$

2.3 Échantillonnage déterministe

Nous rappelons ici la méthode utilisée dans [5] pour estimer une fonction à partir de ses valeurs bruitées en les points non équidistants $X_k = G^{-1}(t_k)$, G étant une fonction connue. Nous montrerons également pourquoi cette méthode est inadéquate quand l'échantillonnage est aléatoire.

Le problème d'estimation à résoudre est celui décrit en (2.1.1), à la différence que l'échantillonnage est déterministe :

$$X_i = G^{-1}(t_i), \quad t_i = i/n, \ \ i = 1,\ldots,n.$$

Nous supposerons que $G^{-1} \in \Lambda^1(M,0)$ sur $[0,1]$. Du fait que G est continue et croissante on déduit qu'elle est dérivable presque partout sur $[0,1]$, et donc sa dérivée g, là où elle existe, est bornée inférieurement par $1/M$. Nous cherchons un estimateur pour les fonctions de classe $\Lambda^{\beta}(L,m)$ sur $[0,1]$, dans une base d'ondelettes ayant les propriétés décrites auparavant.

Notons y_i une réalisation de Y_i, $i = 1,\ldots,n$. L'algorithme de reconstruction est :

Algorithme

Étape 1. On considère les points comme étant équidistants. On construit

$$h_J := n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_{J,k} \ ;$$

Étape 2. Retour à la grille initiale :

$$\widetilde{f}_J := h_J \circ G \ ;$$

Étape 3. Projection de $\widetilde{f}_J$ sur l'espace d'ondelettes et application d'un seuillage, pour obtenir l'estimateur $\widehat{f}_J$.

La complexité est d'ordre $O(n)$, puisqu'on peut considérer les deux premières étapes de l'algorithme comme un préconditionnement des données initiales par une matrice creuse avec $O(n)$ composantes non nulles. Par contre le calcul de cette matrice est assez long. Une amélioration peut être envisagée, si les données proviennent toujours du même échantillonnage, car on peut alors calculer une fois pour toutes la matrice de préconditionnement.

L'ordre d'approximation

Nous considérons ici le problème (2.1.1) avec $\sigma = 0$. Nous disposons donc d'un échantillon de $n = 2^J$ valeurs exactes de f :

$$Y_i = f(X_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Soit

$$h_J := n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} Y_i \varphi_{J,i}. \tag{2.3.1}$$

La fonction

$$f_J := \mathrm{Proj}_{V_J}(h_J \circ G), \tag{2.3.2}$$

va nous servir d'approximation de f dans V_J. Le théorème suivant mesure l'erreur d'approximation.

Théorème 2.3.1 *Soit $f \in \Lambda^\beta(L,m)$. Il existe alors une constante positive C, qui dépend uniquement de la base d'ondelettes choisie, telle que :*

$$\|f - f_J\|_2^2 \leq CL^2(1 + M^{1+2\min(\beta,1)})(n^{-2\min(\beta,1)} + (m+2)n^{-1}).$$

Démonstration : Soit $h = f \circ G^{-1}$. Par définition $\|f - f_J\|_2 = \|f - \mathrm{Proj}_{V_J}(h_J \circ G)\|_2$ ce qui permet d'utiliser la majoration :

$$\begin{aligned} \|f - f_J\|_2 &\leq \|f - \mathrm{Proj}_{V_J} f\|_2 + \|\mathrm{Proj}_{V_J}(f - h_J \circ G)\|_2 \\ &\leq \|f - \mathrm{Proj}_{V_J} f\|_2 + \|h \circ G - h_J \circ G\|_2, \end{aligned} \tag{*}$$

la projection étant un opérateur linéaire et contractant. Du lemme 1.6.2 il résulte que :

$$\|f - \mathrm{Proj}_{V_J} f\|_2^2 \leq CL^2(n^{-2\min(\beta,r)} + (m+2)n^{-1}). \tag{2.3.3}$$

La fonction $f \circ G^{-1}$ est dans $\Lambda^{\min(\beta,1)}(LM^{\min(\beta,1)}, m)$. En appliquant le théorème 2.2.1 à la fonction $f \circ G^{-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|h - h_J\|_2^2 &= \|f \circ G^{-1} - \sum_{k=1}^{n} (f \circ G^{-1})(t_k)\varphi_{J,k}\|_2^2 \\ &\leq CL^2 M^{2\min(\beta,1)}(n^{-2\min(\beta,1)} + (m+2)n^{-1}). \end{aligned}$$

Comme G est dérivable presque partout et que sa dérivée g est bornée inférieurement par $1/M$, on obtient alors :

$$\|h \circ G - h_J \circ G\|_2^2 \leq CL^2 M^{1+2\min(\beta,1)}(n^{-2\min(\beta,1)} + (m+2)n^{-1}). \qquad (**)$$

De (*), (2.3.3) et (**), il résulte que :

$$\|f - f_J\|_2^2 \leq CL^2(1 + M^{1+2\min(\beta,1)})(n^{-2\min(\beta,1)} + (m+2)n^{-1}).$$

∎

Remarque 2.3.2 *Si le nombre de points de rupture m est inférieur à cn^γ, avec c constante positive et $0 \leq \gamma < 1/(1+2\beta)$, alors*

$$\|f - f_J\|_2^2 = o(n^{\frac{-2\beta}{1+2\beta}}).$$

Le taux de convergence est le même que dans le cas de points équidistants.

Le risque d'estimation

Quand les données sont bruitées, on décompose d'abord $\widetilde{f}_J = h_J \circ G$ en ondelettes, en descendant jusqu'à un certain niveau j_0 :

$$\widetilde{f}_J = \sum_{k=1}^{2^{j_0}} \widetilde{\xi}_{j_0,k}\varphi_{j_0,k} + \sum_{j=j_0}^{J-1}\sum_{k=1}^{2^j} \widetilde{\theta}_{j,k}\psi_{j,k}, \qquad (2.3.4)$$

où

$$\widetilde{\xi}_{j_0,k} := n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} Y_i\langle\varphi_{J,i} \circ G, \varphi_{j_0,k}\rangle, \quad \widetilde{\theta}_{j,k} := n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} Y_i\langle\varphi_{J,i} \circ G, \psi_{j,k}\rangle. \qquad (2.3.5)$$

Puis on seuille les coefficients de détail, en choisissant ici un seuillage doux, décrit dans le premier chapitre au paragraphe 1.8. On estime donc les coefficients de détails $\theta_{j,k}$ par

$$\widehat{\theta}_{j,k} := \eta^s(\widetilde{\theta}_{j,k}, \lambda_{j,k}), \quad j_0 \leq j < J,\ k = 1, \ldots, 2^j, \qquad (2.3.6)$$

et les coefficients d'échelle par les coefficients d'échelle empiriques :

$$\widehat{\xi}_{j_0,k} := \widetilde{\xi}_{j_0,k}, \quad k = 1, \ldots, 2^{j_0}.$$

On estime la fonction f par :

$$\widehat{f}_J(x) := \sum_{k=1}^{2^{j_0}} \widehat{\xi}_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} \widehat{\theta}_{j,k} \psi_{j,k}(x). \tag{2.3.7}$$

Il reste à trouver le seuil adéquat. Pour tout $j = j_0, \ldots, J-1$ et $k = 1, \ldots, 2^j$, les coefficients de détails $\widetilde{\theta}_{j,k}$ suivent des lois normales : $\widetilde{\theta}_{j,k} \sim \mathcal{N}(\overline{\theta}_{j,k}, \sigma^2_{j,k})$, avec

$$\overline{\theta}_{j,k} := n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \langle \varphi_{J,i} \circ G, \psi_{j,k} \rangle,$$

et

$$\sigma^2_{j,k} := var(\widetilde{\theta}_{j,k}) = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^{n} (\langle \varphi_{J,i} \circ G, \psi_{j,k} \rangle)^2.$$

Avec les notations :

$$g_{j,k} := \sup_{s \in \mathrm{supp}\, \psi_{j,k}} \frac{1}{g(s)}, \quad u^2_{j,k} := \frac{\sigma^2}{n} \int \frac{1}{g(x)} \psi^2_{j,k}(x) dx, \tag{2.3.8}$$

T. Cai montre que :

$$\sigma^2_{j,k} \leq u^2_{j,k} \leq \frac{\sigma^2 g_{j,k}}{n}. \tag{2.3.9}$$

La seconde inégalité est évidente. Pour montrer la première, on tient compte de l'orthonormalité de la base d'ondelettes, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (\langle \varphi_{J,i} \circ G, \psi_{j,k} \rangle)^2 &= \sum_{i=1}^{n} (\int (\varphi_{J,i} \circ G)(x) \psi_{j,k}(x) dx)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\int \frac{1}{(g \circ G^{-1})(y)} (\psi_{j,k} \circ G^{-1})(y) \varphi_{J,i}(y) dy)^2 \\
&= \| \mathrm{Proj}_{V_J} (\frac{1}{g \circ G^{-1}} (\psi_{j,k} \circ G^{-1})) \|_2^2.
\end{aligned}$$

Du fait que la projection est un opérateur contractant, un changement de variable permet d'écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} (\langle \varphi_{J,i} \circ G, \psi_{j,k} \rangle)^2 \leq \| \frac{1}{g \circ G^{-1}} (\psi_{j,k} \circ G^{-1}) \|_2^2 = \int \frac{1}{g(x)} \psi^2_{j,k}(x) dx$$

Donc $\sigma^2_{j,k} \leq u^2_{j,k}$. Quand $n \to +\infty$, la première des inégalités (2.3.9) se transforme asymptotiquement en une égalité, puisque la projection approche de mieux en mieux la fonction projetée.

Pour supprimer le bruit du coefficient $\widetilde{\theta}_{j,k}$ on choisit alors le seuil :

$$\lambda_{j,k} := \sigma\sqrt{\frac{2g_{j,k}\log n}{n}}. \tag{2.3.10}$$

Quand la fonction G est l'identité (les noeuds sont alors équidistants), le seuil devient constant par rapport à j et k et il coïncide avec le seuil de la procédure WaveShrink de Donoho et Johnstone ([28]) : $\sigma\sqrt{2\log n/n}$.

Avec ce choix du seuil, T. Cai montre que le risque d'estimation est optimal à un facteur $\log n$ près :

Théorème 2.3.3 [3] *Soit* $0 < \beta < r$, $L, M > 0$ *et* $m \leq cn^{\gamma}$, *avec* c *constante positive et* $0 < \gamma < 1/(1+2\beta)$. *Si* $G^{-1} \in \Lambda^1(M,0)$ *sur* $[0,1]$ *alors :*

$$\sup_{f\in\Lambda^{\beta}(L,m)} \mathbb{E}\|\widehat{f}_J - f\|_2^2 \leq C\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{2\beta}{1+2\beta}}. \tag{2.3.11}$$

La démonstration de ce théorème se trouve dans [5] et [3]. Elle sera reprise et complétée dans un cadre plus général par la suite. Citons un autre résultat portant, lui, sur l'estimation ponctuelle.

Théorème 2.3.4 [3] *Soit* $0 < \beta < r$ *et* $L, M > 0$. *Si* $G^{-1} \in \Lambda^1(M,0)$ *sur* $[0,1]$ *alors :*

$$\sup_{f\in\Lambda_p^{\beta}(L,0)} \sup_{t\in[0,1]} \mathbb{E}(\widehat{f}_J(t) - f(t))^2 \leq C\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{2\beta}{1+2\beta}}.$$

Conclusion

On a vu que si la fonction qui caractérise la grille satisfait certaines propriétés et si le seuil est défini par la relation (2.3.10), la méthode permet l'estimation d'une fonction hölderienne par morceaux à partir de données bruitées avec un bruit gaussien indépendant et identiquement distribué, sans dégrader l'erreur par rapport au cas des points équidistants. Mais dans le cas où les points de la grille sont aléatoires, on ne peut pas appliquer directement ces résultats. En effet, si G_n^{-1} est l'interpolation affine des points $(0,0)$, $(t_i, X_{(i)})$, $i = 1,\ldots,n$, la fonction G_n^{-1} est dans $\Lambda^1(M_n,0)$, où M_n est une variable aléatoire. Aussi,

$$(G_n^{-1})'(x) \leq M_n, \quad \text{presque partout.}$$

Mais on ne peut rien dire sur le comportement asymptotique des variables M_n, notamment s'il existe $\overline{M} > 0$ tel que $M_n \leq \overline{M}$, pour tout n et pour tout échantillon de taille

n. Donc le facteur indépendant de n de tous les théorèmes précédents n'est plus une constante, puisqu'il dépend de M_n. Il se peut notamment qu'il prenne des valeurs très grandes quand la grille est inhomogène, en particulier on peut choisir des échantillons pour lesquels M_n converge vers l'infini.

Cela explique pourquoi il est important de développer une méthode basée sur une meilleure estimation de la fonction de répartition. Nous nous proposons dans la suite de procéder à l'estimation de G par des méthodes de type log-splines.

2.4 Le modèle log-spline

Le modèle log-spline est un modèle paramétrique d'inférence statistique, qui consiste à chercher, à partir d'un échantillon aléatoire issu d'une loi admettant une densité, une estimation de cette densité de probabilité inconnue sous la forme de l'exponentielle d'une fonction spline. Par cette méthode, la fonction obtenue est automatiquement strictement positive et on peut la construire aussi régulière que l'on veut. Sous certaines contraintes, si le nombre de paramètres tend vers l'infini avec une certaine vitesse dépendant de la taille de l'échantillon, l'estimation atteint un taux de convergence optimal.

L'estimateur log-spline est obtenu en maximisant la fonction de log-vraisemblance d'une famille dépendant d'un vecteur de paramètres. Cependant il existe des cas où la fonction de log-vraisemblance n'admet pas de maximum, donc l'estimateur log-spline $\widehat{g}_n$ de g ne peut pas être construit. La probabilité de cet événement tend néanmoins vers zéro quand $n \to \infty$.

Dans ce paragraphe nous allons faire une courte présentation de la méthodologie et nous allons rappeler quelques résultats théoriques qui nous seront utiles par la suite. Nous renvoyons à [62] pour une présentation des propriétés statistiques liées à ce modèle. Dans [44] on trouve une discussion sur l'implémentation de l'algorithme. Les auteurs y prévoient certaines modifications par rapport au modèle théorique, qui améliorent les résultats numériques mais qui sont difficiles à étudier théoriquement. Citons également [45] et [63], références plus récentes sur ces aspects.

Soit $\mathcal{Y}$ un compact dans $\mathbb{R}$ et Y une variable aléatoire de support $\mathcal{Y}$ et de densité g inconnue. On suppose que g est strictement positive et continue. Soit $(Y_1, \ldots, Y_n)$ un échantillon aléatoire de taille n de même loi que celle de Y. On considère pour la densité de Y un modèle paramétrique, $\gamma(\cdot\,; \theta)$, où θ est un vecteur K_n-dimensionnel de paramètres inconnus. On trouve une estimation $\widehat{\theta}$ de ce paramètre en maximisant la fonction de log-

vraisemblance, *i.e.*,

$$\ell(\theta) := \sum_{i=1}^{n} \log(\gamma(Y_i;\theta)), \quad \theta \in \Theta_n. \tag{2.4.1}$$

Cette estimation est particulièrement intéressante quand le modèle paramétrique pour g est issu d'une famille exponentielle.

Pour construire une telle famille, on part d'un espace vectoriel $\mathcal{S}_n$ de fonctions sur $\mathcal{Y}$, de dimension K_n, tel que la fonction nulle sur $\mathcal{Y}$ soit la seule fonction constante presque partout qui appartienne à $\mathcal{S}_n$. Soit $B_{n,1},\ldots,B_{n,K_n}$ une base pour $\mathcal{S}_n$. Pour tout vecteur colonne $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_{K_n})^T \in \mathbb{R}^{K_n}$, on définit

$$s(\cdot;\theta) := \sum_{k=1}^{K_n} \theta_k B_{n,k} \quad \text{et} \quad c(\theta) := \log[\int_{\mathcal{Y}} \exp(s(y;\theta))dy].$$

Alors $\Theta_n := \{\theta \in \mathbb{R}^{K_n} : c(\theta) < \infty\}$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^{K_n}$, qu'on suppose ouvert et non vide. On choisit la famille d'approximation

$$\gamma(\cdot;\theta) := \exp(s(\cdot;\theta) - c(\theta)), \quad \theta \in \Theta_n.$$

Le terme c est un terme de normalisation pour avoir $\int \gamma(x;\theta)dx = 1$ pour tout θ. On remarque que $\gamma(\cdot;\theta)$ est strictement positive. Soit $H_n(\theta) = (\partial^2 c(\theta)/\partial\theta_j\partial\theta_k)_{j,k=1,\ldots,K_n}$, $\theta \in \Theta_n$, la matrice hessienne de c. Cette matrice est définie positive, donc c est strictement convexe sur Θ_n. La matrice hessienne de la fonction de log-vraisemblance ℓ, définie en (2.4.1), est $-nH_n(\theta)$, donc la fonction de log-vraisemblance est strictement concave et son maximum, s'il existe, est unique. Si on note par S la fonction score, dont les K_n composantes sont :

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta_j}(\theta) = b_j - n\frac{\partial c}{\partial \theta_j}(\theta), \quad j = 1,\ldots,K_n,$$

avec $b_j := \sum_i B_{n,j}(Y_i)$, alors l'équation de maximum de vraisemblance est $S(\theta) = 0$. D'un point de vue pratique, elle peut être résolue par la méthode de Newton-Raphson. Soit $\widehat{\theta}_n$ la solution, si elle existe, de l'équation de maximum de vraisemblance. La fonction $\widehat{g}_n := \gamma(\cdot,\widehat{\theta}_n)$ représente l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance pour la densité de probabilité g.

Examinons plus en détail le cas où $\mathcal{S}_n$ est un espace de splines polynomiales, le modèle présenté ci-dessus étant alors appelé *modèle log-spline*. Sans perte de généralité, par la suite nous supposerons que $\mathcal{Y} = [0,1]$. Soit q un entier positif. Soit $n \geq 1$ la taille de l'échantillon issu de g et J_n un entier positif. On partitionne $\mathcal{Y}$ en sous-intervalles de même longueur :

$$\mathcal{Y}_j := [(j-1)/J_n, j/J_n),\ 1 \leq j < J_n \text{ et } \mathcal{Y}_{J_n} := [(J_n-1)/J_n, 1]. \tag{2.4.2}$$

Soit $\mathcal{S}_n$ la collection de fonctions s de classe C^{q-2} (si $q \geq 2$) sur $\mathcal{Y}$ qui sont polynomiales de degré strictement plus petit que q sur chaque $\mathcal{Y}_j$. Alors $\mathcal{S}_n$ est l'espace des splines polynomiales d'ordre q et de noeuds j/J_n, pour $1 \leq j < J_n$. Quand q prend respectivement les valeurs 1, 2, 3, 4, $\mathcal{S}_n$ est respectivement l'espace des splines constantes par morceaux, linéaires, quadratiques, cubiques. La dimension de $\mathcal{S}_n$ est $K_n := J_n + q - 1$. Soit $\{B_{n,k} : \ 1 \leq k \leq K_n\}$, la base de B-splines pour cet espace. Parmi les propriétés de ces fonctions rappelons notamment le fait qu'elles sont positives et qu'elles constituent une partition de l'unité : $\sum B_{n,k}(x) = 1$ pour tout $x \in \mathcal{Y}$ ([20]).

Comme dans le cas général, à partir de la base de B-splines on définit les fonctions $s(\cdot;\theta)$ et $\gamma(\cdot;\theta)$. La famille de fonctions $\gamma(\cdot;\theta)$ n'est pas identifiable, puisqu'en rajoutant une constante à toutes les composantes du vecteur θ, $\gamma(\cdot;\theta)$ ne change pas. Pour cette raison, on se restreint au sous-espace $(K_n - 1)$-dimensionnel $\Theta_{n,0}$ de Θ_n formé des vecteurs $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{K_n})$ tels que $\sum_{i=1}^{K_n} \theta_i = 0$. La fonction de log-vraisemblance étant strictement concave sur Θ_n, elle l'est sur $\Theta_{n,0}$ aussi. En la maximisant, on trouve $\widehat{\theta}_n \in \Theta_{n,0}$, l'estimateur du paramètre θ. On note $\widehat{g}_n := \gamma(\cdot;\widehat{\theta}_n)$ l'estimateur log-spline de la densité de probabilité g, $\widehat{G}_n$ la fonction de répartition associée à $\widehat{g}_n$ et $\widehat{Q}_n := \widehat{G}_n^{-1}$ la fonction quantile. Soit

$$\Lambda_n(\theta) := \mathbb{E}(\log(\gamma(Y;\theta))) = \int \log(\gamma(\cdot;\theta))g = \int s(\cdot;\theta)g - c(\theta), \quad \theta \in \Theta_n.$$

La matrice hessienne de Λ_n est $-H_n$, H_n étant la matrice hessienne de c. La matrice H_n étant définie positive, Λ_n est strictement concave sur $\Theta_{n,0}$. Si $\theta \in \Theta_{n,0}$ est un vecteur non nul, alors $\Lambda_n(t\theta) = \int s(\cdot;\theta)g - \log(\int \exp(ts(\cdot;\theta)))$ tend vers $-\infty$ quand $|t| \to \infty$, parce que $s(\cdot;\theta)$ n'est pas constante presque partout. Donc il existe un unique $\theta_n^* \in \Theta_{n,0}$ qui maximise Λ_n dans cet ensemble. Il maximise aussi l'espérance de la fonction de log-vraisemblance. La fonction $g_n^* := \gamma(\cdot;\theta_n^*)$ sera appelée l'approximation log-spline de g. On notera respectivement G_n^* et Q_n^* la fonction de répartition et la fonction quantile associées à g_n^*.

La fonction g étant supposée continue et strictement positive sur le compact $\mathcal{Y}$, la fonction $\log(g)$ est bornée. Soit

$$\delta_n := \inf_{s \in \mathcal{S}_n} \|s - \log(g)\|_\infty.$$

Si $K_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, alors $\delta_n = o(1)$, et si g est hölderienne d'ordre p alors $\delta_n = O(K_n^{-p})$ (voir [20]). Par la suite, K_n sera supposé satisfaire à :

$$K_n = o(n^{0.5-\varepsilon}), \tag{2.4.3}$$

pour un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Le théorème suivant concerne l'erreur d'approximation par g_n^*.

Théorème 2.4.1 [62] *Si g est une densité de probabilité strictement positive et continue, alors :*

$$\begin{aligned} &(i) && \|g_n^* - g\|_\infty = O(\delta_n); \\ &(ii) && \|G_n^* - G\|_\infty = O(\delta_n / K_n); \\ &(iii) && \|Q_n^* - Q\|_\infty = O(\delta_n / K_n). \end{aligned}$$

Rappelons ici la définition de l'*ordre en probabilité* :

Définition 2.4.2 [53] *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{R}^m, \mathcal{R}^m)$ et soit $f(n)$ une fonction positive sur $\mathbb{N}$.*

(i) On dira que X_n est d'ordre $o[f(n)]$ en probabilité *et on notera $X_n = o_P[f(n)]$ si*

$$\frac{X_n}{f(n)} \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} 0.$$

(ii) On dira que X_n est d'ordre $O[f(n)]$ en probabilité *et on notera $X_n = O_P[f(n)]$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon > 0 : \mathbb{P}\left(\frac{\|X_n\|}{f(n)} \leq M_\varepsilon\right) \geq 1 - \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le théorème 2.4.3 donne des bornes supérieures pour la distance entre les approximations log-spline et les estimateurs log-spline.

Théorème 2.4.3 [62] *Si g est une densité de probabilité strictement positive et continue, alors :*

(i) $\widehat{\theta}_n$ existe sur un événement A_n dont la probabilité tend vers 1 *quand n tend vers l'infini;*

$$\begin{aligned} &(ii) && (\sum_{j=1}^{K_n} |\widehat{\theta}_{n,j} - \theta_{n,j}^*|^2)^{1/2} = O_P(K_n/\sqrt{n}); \\ &(iii) && \max_{1\leq j\leq K_n} |\widehat{\theta}_{n,j} - \theta_{n,j}^*| = O_P(\sqrt{K_n \log(K_n)/n}); \\ &(iv) && \|\widehat{g}_n - g_n^*\|_2 = O_P(\sqrt{K_n/n}); \\ &(v) && \|\widehat{g}_n - g_n^*\|_\infty = O_P(\sqrt{K_n \log(K_n)/n}); \\ &(vi) && \|\widehat{G}_n - G_n^*\|_\infty = O_P(1/\sqrt{n}); \\ &(vii) && \|\widehat{Q}_n - Q_n^*\|_\infty = O_P(1/\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Nous utiliserons également le résultat suivant (voir [62], lemme 10), valable sous l'hypothèse (2.4.3) :

$$\max_{0\leq t\leq 1} \|\log\gamma(\cdot; \theta_n^* + t(\widehat{\theta}_n - \theta_n^*))\|_\infty = O_P(1). \tag{2.4.4}$$

En particulier, pour $t = 1$ on en déduit :

$$\|\log \widehat{g}_n\|_\infty = O_P(1). \tag{2.4.5}$$

Notons par $a_n \sim b_n$ le fait qu'il existent deux constantes positives C_1 et C_2 et un entier positif N_0 tels que $C_1 b_n \leq a_n \leq C_2 b_n$, pour tout $n \geq N_0$.

Remarque 2.4.4 *Supposant que* $\delta_n = O(K_n^{-p})$ *, avec* $p > 1/2$, *soit* $\nu = 1/(2p+1)$ *et* $r = p/(2p+1)$. *En choisissant* $K_n \sim n^\nu$, *on obtient* $\|g - \widehat{g}_n\|_2 = O_P(n^{-r})$. *En choisissant* $K_n \sim (n/\log n)^\nu$, *on obtient* $\|g - \widehat{g}_n\|_\infty = O_P((\log n/n)^{-r})$. *Ce sont les taux optimaux de convergence pour l'estimation non paramétrique. Si* $\delta_n/K_n = O(1/\sqrt{n})$, *on a* $\|G - \widehat{G}_n\|_\infty = O_P(1/\sqrt{n})$ *et* $\|Q - \widehat{Q}_n\|_\infty = O_P(1/\sqrt{n})$, *qui est le taux optimal de convergence pour l'estimation paramétrique et non paramétrique.*

Dans la pratique, l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ existe dès que chacun des intervalles $\mathcal{Y}_j$, définis en (2.4.2), contient un nombre suffisant de points $y_1, \ldots, y_n$. Par exemple, s'il s'agit de splines cubiques, il suffit que chaque intervalle contienne au moins quatre points parmi $y_1, \ldots, y_n$.

Pour les simulations numériques que nous présenterons au chapitre 6, nous avons utilisé un ensemble de programmes appelé LOGSPLINE, réalisé par C. Kooperberg et C. J. Stone, accessible sous le logiciel R. Il utilise des splines cubiques. L'utilisation des splines de rang supérieur pose des problèmes dans la pratique, liés à l'évaluation de la fonction c et de ses dérivées partielles qui nécessite des intégrations numériques coûteuses.

Pour des données multidimensionnelles on peut envisager une méthode utilisant des produits tensoriels de B-splines ou certains espaces de fonctions liés aux éléments finis. Mais dès qu'on dépasse la dimension 2, l'implémentation de l'algorithme devient difficile.

Dans LOGSPLINE les auteurs font certaines modifications par rapport à la méthode théorique, notamment dans le choix des intervalles $\mathcal{Y}_j$. Dans la variante implémentée les intervalles ne sont plus construits à partir de noeuds équidistants, mais à partir de noeuds sélectionnés parmi les données, ou proches d'elles. Le choix du nombre de noeuds ainsi que leur position se fait de manière automatique. Cette méthode dépendante des données pour le choix des noeuds donne visuellement des meilleurs résultats, mais son étude théorique est plus délicate.

Le modèle log-spline existe dans un cadre plus général, qui consiste à laisser libres les noeuds des splines. Ils seront eux aussi des paramètres, estimés avec la méthode du maximum de log-vraisemblance. Les propriétés théoriques de la modélisation statistique avec des splines à noeuds libres et leurs produits tensoriels sont étudiées dans [63], dans le contexte de la modélisation linéaire généralisée. La fonction recherchée

est modélisée comme élément d'un espace vectoriel de dimension finie ou infinie et elle est estimée à partir des données avec une méthode de maximum de vraisemblance. Dans [63], l'espace d'approximation dépend d'un vecteur de paramètres non linéaires, appartenant à un certain ensemble Π_n. On considère une collection $\mathbb{G}_{n,\pi}$, $\pi \in \Pi_n$, d'espaces linéaires d'approximation (en l'occurrence, des espaces de splines cubiques de noeuds π), ayant tous la même dimension K_n, qui peut varier avec n, la dimension de l'échantillonnage. Le meilleur estimateur est construit en deux étapes. Dans un premier temps, on maximise la fonction de vraisemblance sur chaque $\mathbb{G}_{n,\pi}$, $\pi \in \Pi_n$, et on obtient pour $\log g$ les estimateurs :

$$\widehat{\eta}_{n,\pi} := \max_{\gamma \in \mathbb{G}_{n,\pi}} \ell_n(\gamma). \tag{2.4.6}$$

Dans un deuxième temps on maximise la fonction de vraisemblance pour ces estimateurs et on trouve le paramètre $\widehat{\pi}_n$ ayant la propriété :

$$\ell_n(\widehat{\eta}_{n,\widehat{\pi}}) = \max_{\pi \in \Pi_n} \ell(\widehat{\eta}_{n,\pi}). \tag{2.4.7}$$

Le lecteur trouvera dans [45] un algorithme pour implémenter cette méthode. Il est beaucoup plus coûteux que l'algorithme LOGSPLINE et les auteurs remarquent que les améliorations qu'il apporte ne sont pas significatives.

2.5 Échantillonnage aléatoire

Dans ce paragraphe nous donnons une méthode de débruitage quand le plan d'expérience est aléatoire. L'algorithme de débruitage que nous utiliserons est calqué sur celui du cas déterministe. La fonction G étant maintenant inconnue, nous allons lui substituer une estimation :

Étape 1. Calcul de $\widehat{G}_n$, l'estimation de G : on choisit comme $\widehat{G}_n$ l'estimation log-spline si celle-ci existe, et sinon la fonction identité de l'intervalle $[0,1]$.

Étape 2. On considère les points comme étant équidistants. On construit :

$$h_J := n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_{J,i}.$$

Étape 3. Ajustement à une grille proche de la grille initiale :

$$\widetilde{f}_J := h_J \circ \widehat{G}_n.$$

Étape 4. Projection de $\widetilde{f}_J$ sur l'espace d'ondelettes et application d'un seuillage, pour obtenir l'estimation $\widehat{f}_J$.

Nous garderons les mêmes hypothèses qu'au paragraphe §2.2 en ce qui concerne la base d'ondelettes utilisée.

Les modifications apportées à l'algorithme imposent des hypothèses plus restrictives pour les fonctions à débruiter ainsi que pour la fonction de répartition de la grille. Nous supposerons que la fonction f à débruiter est hölderienne sur $[0,1]$, et non plus seulement hölderienne par morceaux. La nécessité s'en fait sentir dans la troisième étape de l'algorithme. En effet, pour certains indices i, les points $X_{(i)}$ et $\widehat{G}_n^{-1}(t_i)$ peuvent se trouver d'un côté et de l'autre d'une discontinuité. Les résultats dont nous disposons concernant l'estimation log-spline ne nous permettent pas de contrôler le nombre de ces indices, par conséquent nous ne pouvons pas contrôler l'erreur ainsi produite.

Pour pouvoir utiliser le modèle log-spline il faut que la densité $g := G'$ soit continue et bornée inférieurement par une constante strictement positive. Cette hypothèse, déjà plus forte que l'hypothèse $G^{-1} \in \Lambda^1(M,0)$ du cas déterministe, est encore insuffisante. En effet, une partie de l'erreur provient du fait que (dans la troisième étape de l'algorithme) on associe aux points $\widehat{G}_n^{-1}(t_i)$ les valeurs Y_i mesurées aux points $X_{(i)}$. Pour que cette erreur ne dégrade pas l'erreur globale, nous allons donc devoir supposer que $G \in C^2([0,1])$ et que, pour un $M > 0$ fixé, $G^{-1} \in \Lambda^1(M,0)$. Ceci implique en particulier que g est bornée inférieurement par $1/M$.

2.5.1 Majoration de la distance entre les points $X_{(i)}$ de la grille et les points estimés $\widehat{G}_n^{-1}(t_i)$

Cette distance est majorée par $\|\widehat{G}_n^{-1} - G_n^{-1}\|_\infty$, où G_n^{-1} est une interpolation affine de la fonction quantile empirique. Soit $\widetilde{G}_n : [0,1] \to [0,1]$ la fonction de répartition empirique de $\mathbf{X}$, i.e.,

$$\widetilde{G}_n(x) := \frac{\sharp\{i : X_i \le x\}}{n},$$

et soit

$$\widetilde{\delta}_n := \|G(t) - \widetilde{G}_n(t)\|_\infty. \tag{2.5.1}$$

Si g est continûment différentiable et bornée inférieurement par une constante strictement positive, le théorème de Glivenko-Cantelli permet d'affirmer que :

$$\widetilde{\delta}_n = O(n^{-1/2}\log\log n), \quad \text{presque sûrement.} \tag{2.5.2}$$

Par similarité avec la fonction de répartition empirique, on note par $G_n^{-1} : [0,1] \to [0, X_{(n)}]$ l'interpolation affine des points $(t_i, X_{(i)})$, $i = 0, \ldots, n$ (on note $X_{(0)} := t_0 := 0$). La notation G_n^{-1} est une notation convenable pour souligner la relation entre cette fonction et la fonction G^{-1}, et elle ne signifie pas ici l'inverse d'une fonction G_n. L'inverse de G_n^{-1} est l'application multivoque $G_n : [0, X_{(n)}] \to \mathcal{P}([0,1])$ définie par :

$$G_n(x) := \{t : G_n^{-1}(t) = x\}.$$

Évidemment, $t \in G_n(G_n^{-1}(t))$.

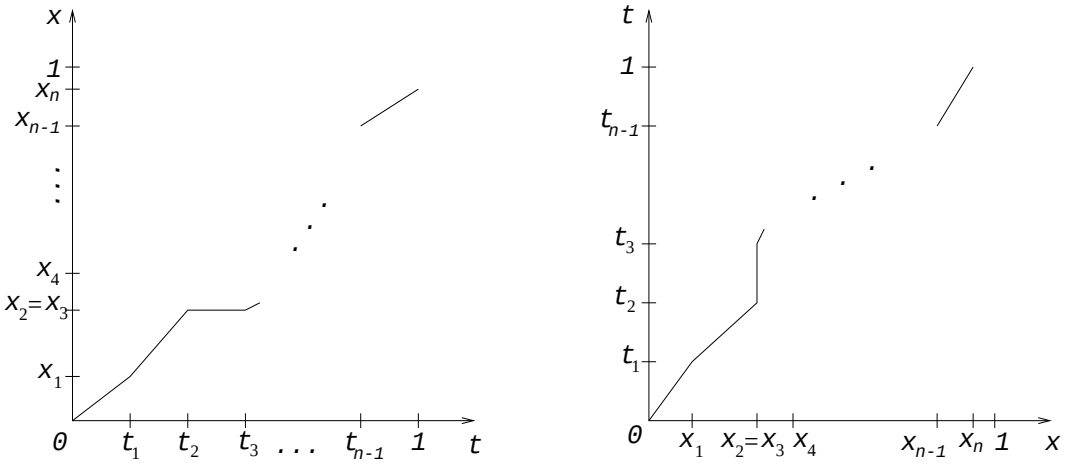


FIG. 2.3 – *La fonction G_n^{-1} (à gauche) et l'application multivoque G_n (à droite).*

Dans la pratique il semble naturel de considérer des points d'observation distincts. Sous l'hypothèse $0 < X_{(1)} < \ldots < X_{(n)} \leq 1$ (c'est-à-dire, si les observations sont distinctes et différentes du bord gauche de l'intervalle), l'inverse de la fonction G_n^{-1} est une application univoque. Cette hypothèse n'est cependant pas nécessaire sur le plan théorique.

On généralise la distance $d: L^\infty \times L^\infty \to \mathbb{R}$, $d(f,g) := \|f-g\|_\infty$ par l'application ∂ qui, à une fonction f et à une application multivoque g, bornées et définies sur un ensemble E, associe le nombre réel positif

$$\partial(f,g) := \sup_{u\in E} \sup_{v\in g(u)} |f(u)-v|. \tag{2.5.3}$$

Le lemme suivant donne une borne supérieure de $\partial(G,G_n)$, en fonction de la distance entre la fonction de répartition théorique G et la fonction de répartition empirique $\widetilde{G}_n$:

Lemme 2.5.1 *Si la densité g est dans $C^1[0,1]$ et bornée inférieurement par une constante strictement positive, sur $E = [0, X_{(n)}]$ on a :*

$$\partial(G,G_n) \leq \widetilde{\delta}_n + \frac{1}{n}, \quad \text{presque sûrement.} \tag{2.5.4}$$

Démonstration : Puisque la mesure de l'ensemble

$$A_n := \{\omega : \exists i,j \in \{0,\ldots,n\},\ i \neq j,\ X_{(i)} = X_{(j)}\}$$

est nulle, il suffit de montrer (2.5.4) sur A_n^C. Dans ce cas, $G_n(x)$ est un singleton pour tout $x \in [0, X_{(n)}]$. Soit $x \in [0, X_{(n)}]$ quelconque, soit $t := G_n(x)$ et soit $i \in \{0,\ldots,n\}$ tel

que $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Alors $\widetilde{G}_n(x) \in \{t_{i-1}, t_i\}$ et, pour tout $x \in [0, X_{(n)}]$,

$$|G(x) - G_n(x)| \leq |G(x) - \widetilde{G}_n(x)| + |\widetilde{G}_n(x) - G_n(x)| \leq \widetilde{\delta}_n + \frac{1}{n}.$$

■

A cause des discrétisations, il peut arriver que des observations soient égales entre elles. Supposons qu'il existe deux entiers $i \in [1, n]$ et $\ell > 0$ tels que $x_{(i-1)} < x_{(i)} = \cdots = x_{(i+\ell)} < x_{(i+\ell+1)}$, où $x_{(k)}$ est l'observation de $X_{(k)}$, pour $k = 1, \ldots, n$, avec la convention $x_{(n+1)} := 1 + 1/n$. Si $x := x_{(i)}$, on a encore $\sup_{t \in G_n(x)} |G(x) - t| \leq \widetilde{\delta}_n + 1/n$.

Effectivement, dans ce cas $G_n(x) = [t_i, t_{i+\ell}]$ et on a :

$$\begin{aligned} \sup_{t \in G_n(x)} |G(x) - t| &= \sup_{t \in [t_i, t_{i+\ell}]} |G(x) - t| \leq \max(|G(x) - t_i|, |G(x) - t_{i+\ell}|) \\ &= \max(|G(x_i) - t_i|, |G(x_{i+\ell}) - \widetilde{G}_n(x_{i+\ell})|). \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout h suffisamment petit,

$$\begin{aligned} |G(x_i) - t_i| &\leq |G(x_i) - t_{i-1}| + \frac{1}{n} = |G(x_i) - \widetilde{G}_n(x_i - h)| + \frac{1}{n} \\ &\leq |G(x_i) - G(x_i - h)| + |G(x_i - h) - \widetilde{G}_n(x_i - h)| + \frac{1}{n} \\ &\leq |G(x_i) - G(x_i - h)| + \widetilde{\delta}_n + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Quand $h \to 0$, du fait que G est continue, on obtient $|G(x_i) - t_i| \leq \widetilde{\delta}_n + 1/n$, donc

$$\sup_{t \in G_n(x)} |G(x) - t| \leq \max(\widetilde{\delta}_n + \frac{1}{n}, \widetilde{\delta}_n) = \widetilde{\delta}_n + \frac{1}{n}.$$

Le problème reste ouvert lorsque $x = x_0 = \cdots = x_\ell$, avec $\ell > 0$.

Venons en maintenant aux fonctions quantile. Nous voulons évaluer la distance $\|G_n^{-1} - \widehat{G}_n^{-1}\|_\infty$. Le lemme 2.5.1 nous permet pour l'instant de montrer que :

Lemme 2.5.2 *Si la densité g est dans $C^1[0,1]$ et bornée inférieurement par une constante strictement positive,*

$$\|G^{-1} - G_n^{-1}\|_\infty = O(n^{-1/2} \log\log n), \quad \text{presque sûrement.} \tag{2.5.5}$$

Démonstration : Si G est dérivable et sa dérivée est bornée inférieurement par $1/M > 0$, pour $t \in [0,1]$ on a :

$$|G(G^{-1}(t)) - G(G_n^{-1}(t))| = g(\xi)|G^{-1}(t) - G_n^{-1}(t)| \geq \frac{1}{M}|G^{-1}(t) - G_n^{-1}(t)|.$$

D'un autre côté,

$$|G(G^{-1}(t)) - G(G_n^{-1}(t))| = |t - G(G_n^{-1}(t))| \leq \sup_{v \in G_n(G_n^{-1}(t))} |v - G(G_n^{-1}(t))| \leq \partial(G, G_n).$$

On obtient alors que $\|G^{-1}(t) - G_n^{-1}(t)\|_\infty \leq M\partial(G, G_n)$. La conclusion est maintenant immédiate, grâce au lemme 2.5.1 et à la relation (2.5.2). ∎

Proposition 2.5.3 *On suppose d'une part que $g \in C^1([0,1])$ et qu'elle est bornée inférieurement par une constante strictement positive, d'autre part que la dimension K_n de l'espace de splines utilisé pour l'estimation log-spline vérifie $K_n \sim n^\kappa$, avec $1/4 \leq \kappa < 1/2$. Alors :*

$$\|G_n^{-1} - \widehat{G}_n^{-1}\|_\infty = O_P(n^{-1/2} \log\log n). \tag{2.5.6}$$

Démonstration : On commence par la majoration :

$$\|G_n^{-1} - \widehat{G}_n^{-1}\|_\infty \leq \|G_n^{-1} - G^{-1}\|_\infty + \|G_n^{-1} - \widehat{G}_n^{-1}\|_\infty. \tag{*}$$

Le lemme 2.5.2 implique l'existence d'une constante C_1 et d'un entier positif N_1 tels que $\|G_n^{-1} - G^{-1}\|_\infty \leq C_1 n^{-1/2} \log\log n$ presque sûrement pour tout $n \geq N_1$. La fonction g étant continûment différentiable sur le compact $[0,1]$, elle est aussi hölderienne d'ordre 1 sur cet intervalle. Avec les notations du paragraphe §2.4, ceci implique que $\delta_n = O(K_n^{-1})$. Puisque $K_n \sim n^\kappa$, avec $1/4 \leq \kappa < 1/2$, on obtient $\delta_n / K_n = O(n^{-1/2})$ et la remarque 2.4.4 montre que :

$$\|G^{-1} - \widehat{G}_n^{-1}\|_\infty = O_P(n^{-1/2}). \tag{2.5.7}$$

Il existe alors un entier positif N_2 tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une constante M'_ε telle que, pour tout $n \geq N_2$,

$$\mathbb{P}(\|G^{-1} - \widehat{G}_n^{-1}\|_\infty \leq M'_\varepsilon n^{-1/2}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$ et $M_\varepsilon = C_1 + M'_\varepsilon$ et soient les événements :

$$A_n := \{\omega : \ \|G_n^{-1} - G^{-1}\|_\infty \leq C_1 n^{-1/2} \log\log n\},$$

$$B_{n,\varepsilon} := \{\omega : \ \|G^{-1} - \widehat{G}_n^{-1}\|_\infty \leq M'_\varepsilon n^{-1/2}\}.$$

Dès que $n \geq N$, on a donc à la fois $\mathbb{P}(A_n) = 1$ et $\mathbb{P}(B_{n,\varepsilon}) \geq 1 - \varepsilon$. Par conséquent, pour $n \geq N$,

$$\mathbb{P}((A_n \cap B_{n,\varepsilon})^C) \leq \mathbb{P}(A_n^C) + \mathbb{P}(B_{n,\varepsilon}^C) \leq \varepsilon.$$

Compte tenu de la relation (*) on obtient, toujours pour $n \geq N$:

$$1 - \varepsilon \leq \mathbb{P}(A_n \cap B_{n,\varepsilon}) \leq \mathbb{P}(\|G_n^{-1} - \widehat{G}_n^{-1}\|_\infty \leq M_\varepsilon n^{-1/2} \log\log n).$$

La définition de l'ordre en probabilité conduit à (2.5.6). ∎

2.5.2 Étude de l'approximation linéaire

Nous allons considérer d'abord le cas $\sigma = 0$. Les résultats obtenus nous permettront ensuite d'étudier le cas général que nous nous sommes posés au début de ce chapitre.

Dans le cas $\sigma = 0$ le seuillage consiste simplement à éliminer les coefficients de détails aux niveaux qui sont plus fins qu'un certain j. Soit

$$h_J := n^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} Y_k \varphi_{J,k},$$

et soit

$$f_j := \mathrm{Proj}_{V_j}(h_J \circ \widehat{G}_n), \quad j \leq J. \tag{2.5.8}$$

Nous voulons attirer l'attention du lecteur sur le fait que f_j dépend de n, même si cela n'est pas mentionné explicitement.

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant. Rappelons que r désigne la régularité des ondelettes utilisées.

Théorème 2.5.4 *On suppose d'une part que $g \in C^1([0,1])$ et qu'elle est bornée inférieurement par une constante strictement positive, d'autre part que la dimension K_n de l'espace de splines utilisé pour l'estimation log-spline vérifie $K_n \sim n^{\kappa}$, avec $1/4 \leq \kappa < 1/2$. Soit $L > 0$ et $0 < \beta < r$. On a alors :*

$$\sup_{f \in \Lambda^{\beta}(L,0)} \|f - f_j\|_2 = O(2^{-\beta j}) + O_P((n^{-1/2} \log\log n)^{\min(\beta,1)}). \tag{2.5.9}$$

La preuve de ce théorème nécessite quelques résultats préliminaires :

Lemme 2.5.5 *Pour $0 < \beta < r$ et $L > 0$, toute fonction $f \in \Lambda^{\beta}(L,0)$ satisfait :*

$$\frac{1}{n} \| \sum_{i=1}^{n} (f \circ \widehat{G}_n^{-1})(t_i) \varphi_{J,i} - \sum_{i=1}^{n} f(X_{(i)}) \varphi_{J,i} \|_2^2 \leq L^2 \| \widehat{G}_n^{-1} - G_n^{-1} \|_{\infty}^{2\min(\beta,1)}.$$

Démonstration : La démonstration est immédiate, compte tenu du fait que la base d'ondelettes est orthonormée et que la fonction f est hölderienne d'ordre β. ∎

Soit

$$\widehat{M}_n := \| \frac{1}{\widehat{g}_n} \|_{\infty} = \frac{1}{\inf_{x \in [0,1]} \widehat{g}_n(x)}. \tag{2.5.10}$$

Puisque $\widehat{g}_n$ est par sa définition continue et strictement positive sur $[0,1]$, la variable $\widehat{M}_n$ est finie.

Lemme 2.5.6 *Si K_n satisfait (2.4.3), la variable aléatoire $\widehat{M}_n$ est bornée en probabilité, i.e.,*

$$\widehat{M}_n = O_P(1).$$

Démonstration : A partir de (2.4.5) on obtient $\|\log \widehat{g}_n\|_\infty = O_P(1)$. Il existe donc un entier positif N tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M_\varepsilon > 0$ pour lequel

$$\mathbb{P}(\|\log \widehat{g}_n\|_\infty \leq M_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon,$$

pour tout $n \geq N$. Puisque $\|\log \widehat{g}_n\|_\infty \leq M_\varepsilon$ implique $\|\widehat{g}_n\|_\infty \leq e^{M_\varepsilon}$ et $\|1/\widehat{g}_n\|_\infty \leq e^{M_\varepsilon}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\|\widehat{g}_n\|_\infty \leq e^{M_\varepsilon}) \geq 1-\varepsilon,$$

et

$$\mathbb{P}(\|1/\widehat{g}_n\|_\infty \leq e^{M_\varepsilon}) \geq 1-\varepsilon.$$

De la définition de l'ordre en probabilité on déduit alors que $\|\widehat{g}_n\|_\infty = O_P(1)$ et $\|1/\widehat{g}_n\|_\infty = O_P(1)$. ∎

Lemme 2.5.7 *Sous les hypothèses du théorème 2.5.4, on a :*

$$(i) \qquad \sup_{f\in\Lambda^\beta(L,0)} \|f\circ\widehat{G}_n^{-1} - n^{-1/2}\sum_{k=1}^n f(X_{(k)})\varphi_{J,k}\|_2^2 = O_P((n^{-1/2}\log\log n)^{2\min(\beta,1)});$$

$$(ii) \qquad \sup_{f\in\Lambda^\beta(L,0)} \|f - n^{-1/2}\sum_{k=1}^n f(X_{(k)})\varphi_{J,k}\circ\widehat{G}_n\|_2^2 = O_P((n^{-1/2}\log\log n)^{2\min(\beta,1)}).$$

Démonstration : (i) Soit $f \in \Lambda^\beta(L,0)$ sur $[0,1]$. Il est évident que :

$$\begin{aligned}\|f\circ\widehat{G}_n^{-1} - n^{-1/2}\sum_{k=1}^n f(X_{(k)})\varphi_{J,k}\|_2^2 &\leq 2\|f\circ\widehat{G}_n^{-1} - n^{-1/2}\sum_{k=1}^n f(\widehat{G}_n^{-1}(t_k))\varphi_{J,k}\|_2^2 \\ &+ 2n^{-1}\|\sum_{k=1}^n [f(X_{(k)}) - f(\widehat{G}_n^{-1}(t_k))]\varphi_{J,k}\|_2^2.\end{aligned}$$

Le lemme 2.5.5 fournit une borne supérieure pour le second terme du majorant. Étudions le premier terme de la somme. La fonction $\widehat{G}_n^{-1}$ est dans $\Lambda^1(\widehat{M}_n,0)$ sur $[0,1]$ et $f\circ\widehat{G}_n^{-1}$ est dans $\Lambda^{\min(\beta,1)}(L\widehat{M}_n^{\min(\beta,1)},0)$ sur $[0,1]$. Du théorème 2.2.1 on déduit que :

$$\|f\circ\widehat{G}_n^{-1} - n^{-1/2}\sum_{k=1}^n f(\widehat{G}_n^{-1}(t_k))\varphi_{J,k}\|_2^2 \leq CL^2\widehat{M}_n^{2\min(\beta,1)}n^{-1},$$

où le nombre C dépend uniquement de la base d'ondelettes choisie. On a alors, pour tout $f \in \Lambda^\beta(L,0)$:

$$\|f\circ\widehat{G}_n^{-1} - n^{-1/2}\sum_{k=1}^n f(X_{(k)})\varphi_{J,k}\|_2^2 \leq 2L^2\|\widehat{G}_n^{-1} - G_n^{-1}\|_\infty^{2\min(\beta,1)} + 2CL^2\widehat{M}_n^{2\min(\beta,1)}n^{-1}.$$

Par conséquent :

$$\sup_{f\in\Lambda^\beta(L,0)} \|f\circ\widehat{G}_n^{-1} - n^{-1/2}\sum_{k=1}^n f(X_{(k)})\varphi_{J,k}\|_2^2 \leq \quad 2L^2\|\widehat{G}_n^{-1}-G_n^{-1}\|_\infty^{2\min(\beta,1)} + 2CL^2\widehat{M}_n^{2\min(\beta,1)}n^{-1}.$$

Le lemme 2.5.3 nous dit qu'il existe un entier positif N_1 tel que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $M'_\varepsilon>0$ tel que, pour tout $n\geq N_1$:

$$\mathbb{P}(\|\widehat{G}_n^{-1}-G_n^{-1}\|_\infty \leq M'_\varepsilon n^{-1/2}\log\log n) \geq 1-\varepsilon/2.$$

Notons $A_{n,\varepsilon} := \{\omega :\ \|\widehat{G}_n^{-1}-G_n^{-1}\|_\infty \leq M'_\varepsilon n^{-1/2}\log\log n\}$. Grâce au lemme 2.5.6, on sait qu'il existe un entier positif N_2 tel que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $M''_\varepsilon>0$ tel que, pour tout $n\geq N_2$:

$$\mathbb{P}(\widehat{M}_n \leq M''_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon/2.$$

Soit l'événement $B_{n,\varepsilon} := \{\omega :\ \widehat{M}_n \leq M''_\varepsilon\}$. Soit $M_\varepsilon := 2L^2(M'^{2\min(\beta,1)}_\varepsilon + CM''^{2\min(\beta,1)}_\varepsilon)$. On a alors

$$\begin{aligned}
1-\varepsilon &\leq \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}\cap B_{n,\varepsilon}) \\
&\leq \mathbb{P}\Big[\sup_{f\in\Lambda^\beta(L,0)} \|f\circ\widehat{G}_n^{-1} - n^{-1/2}\sum_{k=1}^n f(X_{(k)})\varphi_{J,k}\|_2^2 \\
&\qquad\qquad \leq 2L^2(M'^{2\min(\beta,1)}_\varepsilon + CM''^{2\min(\beta,1)}_\varepsilon)(n^{-1/2}\log\log n)^{2\min(\beta,1)}\Big] \\
&\leq \mathbb{P}\Big[\sup_{f\in\Lambda^\beta(L,0)} \|f\circ\widehat{G}_n^{-1} - n^{-1/2}\sum_{k=1}^n f(X_{(k)})\varphi_{J,k}\|_2^2 \\
&\qquad\qquad \leq M''_\varepsilon(n^{-1/2}\log\log n)^{2\min(\beta,1)}\Big],
\end{aligned}$$

ce qui, d'après la définition de l'ordre en probabilité, conduit à (i).

Pour montrer (ii) on utilise (i) ainsi que la majoration :

$$\|f - n^{-1/2}\sum_{k=1}^n f(X_{(k)})\varphi_{J,k}\circ\widehat{G}_n\|_2^2 \leq \widehat{M}_n\|f\circ\widehat{G}_n^{-1} - n^{-1/2}\sum_{k=1}^n f(x_k)\varphi_{J,k}\|_2^2.$$

Le lemme 2.5.6 garantit l'existence d'un entier positif N_1 tel que, pour tout $n\geq N_1$:

$$\mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}) \geq 1-\varepsilon/2,$$

avec $A_{n,\varepsilon} := \{\omega :\ \widehat{M}_n \leq M'_\varepsilon\}$. D'après (i), il existe un entier N_2 tel que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $M''_\varepsilon>0$ tel que, pour tout $n\geq N_2$:

$$\mathbb{P}(B_{n,\varepsilon}) \geq 1-\varepsilon/2,$$

avec

$$B_{n,\varepsilon} := \{\omega : \sup_{f\in\Lambda^{\beta}(L,0)} \|f\circ\widehat{G}_n^{-1} - n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n} f(X_{(k)})\varphi_{J,k}\|_2^2 \le M_\varepsilon''(n^{-\frac{1}{2}}\log\log n)^{2\min(\beta,1)}\}.$$

En conclusion, pour tout ε, il existe $M_\varepsilon := M_\varepsilon' M_\varepsilon''$ tel que, pour tout $n \ge \max(N_1, N_2)$

$$\begin{aligned} 1-\varepsilon &\le \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}\cap B_{n,\varepsilon}) \\ &\le \mathbb{P}(\sup_{f\in\Lambda^{\beta}(L,0)} \|f - n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n} f(X_{(k)})\varphi_{J,k}\circ\widehat{G}_n\|_2^2 \le M_\varepsilon(n^{-\frac{1}{2}}\log\log n)^{2\min(\beta,1)}\}). \end{aligned}$$

Ceci montre (ii). ∎

Le résultat qui suit est similaire au lemme précédent, à la différence près qu'il concerne la norme L^∞.

Lemme 2.5.8 *Sous les hypothèses du théorème 2.5.4, on a :*

$$(i) \qquad \sup_{f\in\Lambda_p^{\beta}(L,0)} \|f\circ\widehat{G}_n^{-1} - n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} f(X_{(k)})\varphi_{J,k}\|_\infty = O_P((n^{-1/2}\log\log n)^{\min(\beta,1)}) ;$$

$$(ii) \qquad \sup_{f\in\Lambda_p^{\beta}(L,0)} \|f - n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} f(X_{(k)})(\varphi_{J,k}\circ\widehat{G}_n)\|_\infty = O_P((n^{-1/2}\log\log n)^{\min(\beta,1)}).$$

Démonstration : (i) Soit $f \in \Lambda_p^{\beta}(L,0)$. On a :

$$\begin{aligned} \|f\circ\widehat{G}_n^{-1} - n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} f(X_{(k)})\varphi_{J,k}\|_\infty &\le \|f\circ\widehat{G}_n^{-1} - n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}(f\circ\widehat{G}_n^{-1})(t_k)\varphi_{J,k}\|_\infty \\ &+ n^{-1/2}\|\sum_{k=1}^{n}((f\circ\widehat{G}_n^{-1})(t_k) - f(X_{(k)}))\varphi_{J,k}\|_\infty. \qquad (*) \end{aligned}$$

Nous allons majorer chacun des deux termes de la somme du second membre ci-dessus. Du fait que $f\circ\widehat{G}_n^{-1} \in \Lambda^{\min(\beta,1)}(L\widehat{M}_n^{\min(\beta,1)}, 0)$ sur $[0,1]$ on sait que :

$$\sup_{f\in\Lambda_p(L,0)} \|f\circ\widehat{G}_n^{-1} - n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}(f\circ\widehat{G}_n^{-1})(t_k)\varphi_{J,k}\|_\infty \le C\widehat{M}_n^{\min(\beta,1)} n^{-\min(\beta,1)}, \qquad (**)$$

où la constante C dépend uniquement de la base d'ondelettes choisie. Pour majorer le second terme, on utilise le fait qu'en chaque point il y a un nombre fini, disons N_φ, de fonctions d'échelle de niveau J qui ne s'annulent pas. Sachant également que f est hölderienne, on obtient :

$$\sup_{f\in\Lambda_p^{\beta}(L,0)} \|\sum_{k=1}^{n}(f(\widehat{G}_n^{-1}(t_k)) - f(X_{(k)}))\varphi_{J,k}\|_\infty \le 2^{J/2}LN_\varphi\|\varphi\|_\infty\|\widehat{G}_n^{-1} - G_n^{-1}\|_\infty^{\min(\beta,1)}. \qquad (***)$$

A partir de (*), (**) et (***), et compte tenu de la proposition 2.5.3 et du lemme 2.5.6 on obtient (i).

La propriété (ii) est une conséquence immédiate de (i) et du fait que $\widehat{G}_n$ est strictement croissante et bijective. ∎

On peut donner maintenant la preuve du résultat central de ce paragraphe :

Démonstration du Théorème 2.5.4. L'inégalité triangulaire permet la majoration :

$$\sup_{f\in\Lambda^\beta(L,0)} \|f-f_j\|_2 \leq \sup_{f\in\Lambda^\beta(L,0)} \|f-\mathrm{Proj}_{V_j} f\|_2 + \sup_{f\in\Lambda^\beta(L,0)} \|\mathrm{Proj}_{V_j}(f-h_J\circ\widehat{G}_n)\|_2.$$

D'après le Lemme 1.6.2, le premier terme est de l'ordre $O(2^{-\min(\beta,r)j})$. Puisque la projection est un opérateur contractant, le lemme 2.5.7 conduit à :

$$\sup_{f\in\Lambda^\beta(L,0)} \|\mathrm{Proj}_{V_j}(f-h_J\circ\widehat{G}_n)\|_2^2 = O_P((n^{-1/2}\log\log n)^{2\min(\beta,1)}).$$

La conclusion est alors immédiate. ∎

Pour $j \leq J$ mais grand, le terme en $2^{-\beta j}$ de (2.5.9) est négligeable par rapport au terme en $(n^{-1/2}\log\log n)^{\min(\beta,1)}$, donc la qualité d'approximation est plus faible que dans le cas de l'échantillonnage équidistant. Le corollaire suivant donne l'ordre maximal pour j tel que les erreurs d'approximation soient du même ordre.

Corollaire 2.5.9 *Soit C une constante positive. Si $2^j \leq C(n^{1/2}/\log\log n)^{\min(1,1/\beta)}$, alors*

$$\sup_{f\in\Lambda^\beta(L,0)} \|f-f_j\|_2 = O_P(2^{-\beta j}). \tag{2.5.11}$$

Le corollaire qui suit donne la condition pour obtenir un ordre d'approximation égal au risque L^2-minimax pour la classe de fonctions hölderiennes considérée.

Corollaire 2.5.10 *Soit C une constante positive. Si $1/2 < \beta < r$ et $2^j \geq Cn^{1/(2\beta+1)}$ alors :*

$$\sup_{f\in\Lambda^\beta(L,0)} \|f-f_j\|_2 = O_P(n^{-\beta/(1+2\beta)}).$$

En particulier, $\sup_{f\in\Lambda^\beta(L,0)} \|f-f_J\|_2 = O_P(n^{-\beta/(1+2\beta)})$.

2.5.3 Le risque d'estimation

Revenons au problème (2.1.1). Considérons maintenant le cas des données bruitées avec un bruit blanc de moyenne nulle et d'écart-type $\sigma \geq 0$, sur une grille aléatoire.

Rappelons que le nombre de données est de la forme $n = 2^J$, où J est un entier positif. Soit

$$\widetilde{f}_J := h_J \circ \widehat{G}_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} f(X_{(i)}) \varphi_{J,i} \circ \widehat{G}_n + \sigma n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} Z_i \varphi_{J,i} \circ \widehat{G}_n. \tag{2.5.12}$$

On décompose $\widetilde{f}_J$ dans la base d'ondelettes. Pour appliquer une procédure de seuillage sur les coefficients de détails nous avons besoin de quelques informations sur ces coefficients, à savoir :

$$\widetilde{\theta}_{j,k} := \langle \widetilde{f}_J, \psi_{j,k} \rangle, \quad k = 1, \ldots, 2^j, \ j = j_0, \ldots, J-1,$$

$j_0 < J$ étant un entier positif. On a :

$$\widetilde{\theta}_{j,k} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} f(X_{(i)}) \langle \varphi_{J,i} \circ \widehat{G}_n, \psi_{j,k} \rangle + n^{-1/2} \sigma \sum_{i=1}^{n} Z_i \langle \varphi_{J,i} \circ \widehat{G}_n, \psi_{j,k} \rangle.$$

Désignons par $\overline{\theta}_{j,k}$ la partie de cette somme qui est indépendante du bruit, soit :

$$\overline{\theta}_{j,k} := n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} f(X_{(i)}) \langle \varphi_{J,i} \circ \widehat{G}_n, \psi_{j,k} \rangle. \tag{2.5.13}$$

Alors, conditionnellement à $\mathbf{X}$, la variable $\widetilde{\theta}_{j,k}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\overline{\theta}_{j,k}, \widehat{\sigma}^2_{j,k})$, avec

$$\widehat{\sigma}^2_{j,k} := \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^{n} (\langle \varphi_{J,i} \circ \widehat{G}_n, \psi_{j,k} \rangle)^2.$$

Soit

$$\widehat{g}_{j,k} := \sup_{s \in \mathrm{supp}\psi_{j,k}} \frac{1}{\widehat{g}_n(s)}.$$

En remplaçant G par $\widehat{G}_n$ dans le raisonnement qui, au paragraphe 2.3 a conduit à la double inégalité (2.3.9), on obtient maintenant :

$$\widehat{\sigma}^2_{j,k} \leq \frac{\sigma^2 \widehat{g}_{j,k}}{n} \leq \frac{\sigma^2 \widehat{M}_n}{n}. \tag{2.5.14}$$

Remarque 2.5.11 ([5]) *En général, les coefficients $\widetilde{\theta}_{j,k}$ sont corrélés, mais pour l'approximation asymptotique considérée ici cette corrélation n'est pas significative.*

Pour supprimer le bruit, nous appliquerons aux coefficients de détails le seuillage doux $\eta^s(\cdot, \lambda_{j,k})$, avec le seuil variable

$$\lambda_{j,k} = \sigma \sqrt{\frac{2 \widehat{g}_{j,k} \log n}{n}}. \tag{2.5.15}$$

Soient, pour $k = 1, \ldots, 2^j$:

$$\begin{cases} \widehat{\theta}_{j,k} := \eta^s(\widetilde{\theta}_{j,k}, \lambda_{j,k}), & \text{si } j_0 \leq j \leq J-1 \\ \widehat{\theta}_{j,k} := 0, & \text{si } j \geq J, \end{cases} \tag{2.5.16}$$

les estimateurs des coefficients de détails. Nous estimons les coefficients à l'échelle la moins fine j_0 par :

$$\widehat{\xi}_{j_0,k} := \widetilde{\xi}_{j_0,k} = \langle \widetilde{f}_J, \varphi_{j_0,k} \rangle. \tag{2.5.17}$$

Nous étudierons le risque d'estimation $\sup_{f \in \Lambda^\beta(L,0)} \mathbb{E}(\| \widehat{f}_J - f \|_2^2 | \mathbf{X})$, pour l'estimateur

$$\widehat{f}_J := \sum_{k=1}^{2^{j_0}} \widehat{\xi}_{j_0,k} \varphi_{j_0,k} + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} \widehat{\theta}_{j,k} \psi_{j,k}. \tag{2.5.18}$$

Soient $\xi_{j_0,k}$ et $\theta_{j,k}$ les coefficients de la décomposition de f dans la base d'ondelettes choisie, i.e. :

$$f = \sum_{k=1}^{2^{j_0}} \xi_{j_0,k} \varphi_{j_0,k} + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^j} \theta_{j,k} \psi_{j,k}.$$

Le théorème suivant montre que ce risque est de même ordre, en probabilité, que le risque d'estimation pour un échantillonnage équidistant.

Théorème 2.5.12 *On suppose d'une part que $g \in C^1([0,1])$ et qu'elle est bornée inférieurement par une constante strictement positive, d'autre part que la dimension K_n de l'espace de splines utilisé pour l'estimation log-spline vérifie $K_n \sim n^\kappa$, avec $1/4 \leq \kappa < 1/2$. Soit $L > 0$ et $0 < \beta < r$. On a alors :*

$$\sup_{f \in \Lambda^\beta(L,0)} \mathbb{E}(\| \widehat{f}_J - f \|_2^2 | \mathbf{X}) = O_P\left(\left(\frac{\log n}{n} \right)^{\frac{2\beta}{1+2\beta}} \right).$$

Au cours de la démonstration de ce théorème, nous ferons en particulier usage du résultat suivant, dont la démonstration figure dans [5].

Proposition 2.5.13 [5] *Soit $Y \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ et $\lambda = a\sigma$, avec $a \geq 1$. Si $\widehat{\theta} = \eta^s(Y, \lambda)$ est le résultat de l'application du seuillage doux sur la variable Y, alors*

(i) $\mathbb{E}((\widehat{\theta} - \theta)^2) \leq (a^2+1)\sigma^2$;
(ii) $\mathbb{E}((\widehat{\theta} - \theta)^2) \leq 2\theta^2 + \sigma^2 e^{-1/2a^2}$.

Démonstration du Théorème 2.5.12. Grâce à l'égalité :

$$\mathbb{E}(\| \widehat{f}_J - f \|_2^2 | \mathbf{X}) = \sum_{k=1}^{2^{j_0}} \mathbb{E}((\widehat{\xi}_{j,k} - \xi_{j,k})^2 | \mathbf{X}) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^j} \mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k} - \theta_{j,k})^2 | \mathbf{X}),$$

il nous suffira de montrer successivement que :

$$\sup_{f\in\Lambda^{\beta}(L,0)}\sum_{k=1}^{2^{j_0}}\mathbb{E}((\widehat{\xi}_{j_0,k}-\xi_{j_0,k})^2|\mathbf{X})=O_P\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{2\beta}{1+2\beta}}\right), \tag{2.5.19}$$

et

$$\sup_{f\in\Lambda^{\beta}(L,0)}\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^j}\mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k}-\theta_{j,k})^2|\mathbf{X})=O_P\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{2\beta}{1+2\beta}}\right). \tag{2.5.20}$$

1) Preuve de (2.5.19). La forme explicite des coefficients $\widehat{\xi}_{j_0,k}$ est:

$$\widehat{\xi}_{j_0,k}=n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}f(X_{(i)})\langle\varphi_{J,i}\circ\widehat{G}_n,\varphi_{j_0,k}\rangle+\sigma n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}Z_i\langle\varphi_{J,i}\circ\widehat{G}_n,\varphi_{j_0,k}\rangle.$$

On se sert de l'identité $\mathbb{E}(V^2)=Var(V)+(\mathbb{E}(V))^2$ pour majorer les deux termes de la somme ci-dessus. Le terme de variance s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}Var(\widehat{\xi}_{j_0,k}-\xi_{j_0,k}|\mathbf{X}) &= \frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle\varphi_{J,i}\circ\widehat{G}_n,\varphi_{j_0,k}\rangle^2=\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle\frac{\varphi_{j_0,k}\circ\widehat{G}_n^{-1}}{\widehat{g}_n\circ\widehat{G}_n^{-1}},\varphi_{J,i}\rangle^2\\ &= \frac{\sigma^2}{n}\|\mathrm{Proj}_{V_J}(\frac{\varphi_{j_0,k}\circ\widehat{G}_n^{-1}}{\widehat{g}_n\circ\widehat{G}_n^{-1}})\|_2^2,\end{aligned}$$

puisque la base d'ondelettes est orthonormée. La projection étant un opérateur contractant, la variance peut être bornée par $\sigma^2\widehat{M}_n n^{-1}$. Du fait que

$$[\mathbb{E}(\widehat{\xi}_{j_0,k}-\xi_{j_0,k}|\mathbf{X})]^2=[n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}f(X_{(i)})\langle\varphi_{J,i}\circ\widehat{G}_n,\varphi_{j_0,k}\rangle-\langle f,\varphi_{j_0,k}\rangle]^2,$$

par un raisonnement similaire à celui utilisé ci-dessus pour majorer la variance on trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^{j_0}}[\mathbb{E}(\widehat{\xi}_{j_0,k}-\xi_{j_0,k}|\mathbf{X})]^2 &= \sum_{k=1}^{2^{j_0}}\langle n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}f(X_{(i)})\varphi_{J,i}\circ\widehat{G}_n-f,\varphi_{j_0,k}\rangle^2\\ &= \|\mathrm{Proj}_{V_{j_0}}(n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}f(X_{(i)})\varphi_{J,i}\circ\widehat{G}_n-f)\|_2^2\\ &\leq \|n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}f(X_{(i)})\varphi_{J,i}\circ\widehat{G}_n-f\|_2^2.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\sup_{f\in\Lambda^{\beta}(L,0)}\sum_{k=1}^{2^{j_0}}\mathbb{E}((\widehat{\xi}_{j_0,k}-\xi_{j_0,k})^2|\mathbf{X})\leq 2^{j_0}\sigma^2\widehat{M}_n n^{-1}+\|n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}f(X_{(i)})\varphi_{J,i}\circ\widehat{G}_n-f\|_2^2.$$

Les lemmes 2.5.7 et 2.5.6 donnent alors :

$$\sup_{f\in\Lambda^{\beta}(L,0)}\sum_{k=1}^{2^{j_0}}\mathbb{E}((\widehat{\xi}_{j_0,k}-\xi_{j_0,k})^2|\mathbf{X})=O_P(n^{-1}+(n^{-1/2}\log\log n)^{2\min(\beta,1)}).$$

Pour $\beta>1/2$, un calcul simple montre qu'on obtient alors (2.5.19).

2) Preuve de (2.5.20). Soit $f\in\Lambda^{\beta}(L,0)$. Remarquons d'abord que

$$\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^j}\mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k}-\theta_{j,k})^2|\mathbf{X})\leq I_1+I_2+I_3, \tag{2.5.21}$$

où

$$I_1:=2\sum_{j=j_0}^{J-1}\sum_{k=1}^{2^j}\mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k}-\overline{\theta}_{j,k})^2|\mathbf{X}),$$

$$I_2:=2\sum_{j=j_0}^{J-1}\sum_{k=1}^{2^j}(\overline{\theta}_{j,k}-\theta_{j,k})^2,\quad I_3:=\sum_{j=J}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^j}\theta_{j,k}^2.$$

D'après le lemme 1.6.2,

$$I_3\leq CL^2(n^{-2\min(\beta,r)}+n^{-1}), \tag{2.5.22}$$

la constante C dépendant uniquement de la base d'ondelettes choisie. Majorons I_2. Par définition même,

$$\overline{\theta}_{j,k}-\theta_{j,k}=\langle n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(\varphi_{J,i}\circ\widehat{G}_n)-f,\psi_{j,k}\rangle. \tag{2.5.23}$$

La base d'ondelettes étant orthonormée et la projection étant un opérateur contractant, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{j=j_0}^{J-1}\|\mathrm{Proj}_{W_j}(n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(\varphi_{J,i}\circ\widehat{G}_n)-f)\|_2^2\\
&\leq \|\mathrm{Proj}_{V_J}(n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(\varphi_{J,i}\circ\widehat{G}_n)-f)\|_2^2\\
&\leq \|n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(\varphi_{J,i}\circ\widehat{G}_n)-f\|_2^2.
\end{aligned} \tag{2.5.24}$$

Le lemme 2.5.7 donne alors :

$$\sup_{f\in\Lambda^{\beta}(L,0)}I_2=O_P((n^{-1/2}\log\log n)^{2\min(\beta,1)}\log n). \tag{2.5.25}$$

Majorons maintenant I_1. Suivant l'indice j, on choisira de majorer la quantité $\mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k} - \overline{\theta}_{j,k})^2|\mathbf{X})$ par l'une ou l'autre des inégalités suivantes :

$$\mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k} - \overline{\theta}_{j,k})^2|\mathbf{X}) \leq \frac{\sigma^2 \widehat{M}_n}{n}(2\log n + 1) \tag{2.5.26}$$

$$\mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k} - \overline{\theta}_{j,k})^2|\mathbf{X}) \leq 2\overline{\theta}_{j,k}^2 + \frac{\sigma^2 \widehat{M}_n}{n^2}. \tag{2.5.27}$$

Ces inégalités sont conséquences directes de la proposition 2.5.13, appliqué aux variables $\widehat{\theta}_{j,k}$ qui, conditionnellement à la grille, suivent des lois normales de moyenne $\overline{\theta}_{j,k}$ et de variances bornées comme dans la relation (2.5.14).

Les termes affectés par le bord dans I_1 doivent être traités séparément. Soit $\mathcal{B}_j$ l'ensemble des indices k pour lesquels $\operatorname{supp}\psi_{j,k}$ contient l'un des bords. Puisque les ondelettes que l'on considère sont à support compact, $\operatorname{card}\mathcal{B}_j$ est constant. Compte tenu de (2.5.26), la partie de I_1 affectée par les bords peut donc être bornée par $C\widehat{M}_n\sigma^2(\log n)^2/n$.

Pour les coefficients des ondelettes dont le support n'intersecte pas les bords de l'intervalle, on sait qu'il existe une constante C, dépendant uniquement de la base d'ondelettes choisie, telle que $|\theta_{j,k}| \leq CL2^{-(1/2+\min(\beta,r))j}$, pour tout j et $k = 1,\ldots,2^j$. Soit $c_j := CL2^{-(1/2+\beta)j}$. Pour trouver une borne supérieure de I_1, nous choisirons pour chaque terme de la somme le meilleur majorant entre (2.5.26) et (2.5.27). Puisque $\overline{\theta}_{j,k} = \theta_{j,k} + (\overline{\theta}_{j,k} - \theta_{j,k})$, un calcul simple montre que, lorsque j est grand, la meilleure majoration est donnée par (2.5.27), et lorsque j est petit, elle l'est par (2.5.26). Pour cette raison, on prend les majorants :

$$\mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k} - \overline{\theta}_{j,k})^2|\mathbf{X}) \leq \frac{3\widehat{M}_n\sigma^2\log n}{n} \quad \text{pour } j_0 \leq j < J_1 \text{ et} \tag{2.5.28}$$

$$\mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k} - \overline{\theta}_{j,k})^2|\mathbf{X}) \leq 4c_j^2 + 4(\overline{\theta}_{j,k} - \theta_{j,k})^2 + \frac{\widehat{M}_n\sigma^2}{n^2} \text{ pour } J_1 \leq j < J, \tag{2.5.29}$$

où J_1 est choisi de sorte que :

$$\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{1}{1+2\beta}} \leq 2^{J_1} < 2\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{1}{1+2\beta}}. \tag{2.5.30}$$

Soit I_j l'ensemble des indices des ondelettes au niveau j dont le support ne contient aucun bord. La partie I_1' de I_1 contenant que des termes intérieurs peut être majorée en

utilisant (2.5.28) et (2.5.29), comme suit :

$$\begin{aligned} I_1' &= 2\sum_{j=j_0}^{J_1-1}\sum_{k\in I_j}\mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k}-\overline{\theta}_{j,k})^2|\mathbf{X})+2\sum_{j=J_1}^{J-1}\sum_{k\in I_j}\mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k}-\overline{\theta}_{j,k})^2|\mathbf{X}) \\ &\leq 2\frac{3\widehat{M}_n\sigma^2\log n}{n}\sum_{j=j_0}^{J_1-1}2^j+8CL^2\sum_{j=J_1}^{J-1}2^j2^{-(1+2\beta)j}+4I_2+2\frac{\widehat{M}_n\sigma^2}{n^2}\sum_{j=J_1}^{J-1}2^j \\ &\leq 2^{J_1}\frac{6\widehat{M}_n\sigma^2\log n}{n}+16CL^2 2^{-2\beta J_1}+4I_2+2\frac{\widehat{M}_n\sigma^2}{n} \\ &\leq 12\widehat{M}_n\sigma^2\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{2\beta}{1+2\beta}}+16L^2\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{2\beta}{1+2\beta}}+4I_2+2\frac{\widehat{M}_n\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Puisque le terme en $1/n$ est asymptotiquement négligeable par rapport aux autres, d'après le lemme 2.5.6 et la relation (2.5.25) :

$$\sup_{f\in\Lambda^\beta(L,0)} I_1 = O_P\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{2\beta}{1+2\beta}}\right)+O_P((n^{-1/2}\log\log n)^{2\min(\beta,1)})+O_P\left(\frac{(\log n)^2}{n}\right). \tag{2.5.31}$$

En rassemblant les relations (2.5.21), (2.5.22), (2.5.25) et (2.5.31) on aboutit à l'égalité (2.5.20). ∎

L'erreur conditionnelle à $\mathbf{X}$ de l'estimation ponctuelle est du même ordre que celle de l'estimation en moyenne quadratique :

Théorème 2.5.14 *Sous les hypothèses du théorème 2.5.12, on a :*

$$\sup_{f\in\Lambda_p^\beta(L,0)}\sup_{t\in[0,1]}\mathbb{E}(|\widehat{f}_J(t)-f(t)|/\mathbf{X}) = O_P\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{\beta}{1+2\beta}}\right). \tag{2.5.32}$$

Démonstration : Rappelons d'abord que $[\mathbb{E}(V)]^2\leq\mathbb{E}(V^2)$, pour toute variable aléatoire V, et que, si V_i, $i=1,\ldots,n$, sont des variables aléatoires, on a [5] :

$$\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n V_i)^2\leq(\sum_{i=1}^n(\mathbb{E}V_i^2)^{1/2})^2. \tag{2.5.33}$$

A partir de l'identité :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((\widehat{f}_J(t)-f(t))^2|\mathbf{X}) &= \mathbb{E}([\sum_{k=1}^{2^{j_0}}(\widehat{\xi}_{j_0,k}-\xi_{j_0,k})\varphi_{j_0,k}(t) \\ &\quad+\sum_{j=j_0}^{J-1}\sum_{k=1}^{2^j}(\widehat{\theta}_{j,k}-\theta_{j,k})\psi_{j,k}(t)+\sum_{j=J}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^j}\theta_{j,k}\psi_{j,k}(t)]^2|\mathbf{X}), \end{aligned}$$

on peut appliquer deux fois l'inégalité (2.5.33), ce qui aboutit à :

$$\mathbb{E}((\widehat{f}_J(t)-f(t))^2|\mathbf{X}) \leq (S_1(t)+S_2(t)+S_3(t))^2,$$

avec les notations :

$$S_1(t) := \sum_{k=1}^{2^{j_0}} (\mathbb{E}((\widehat{\xi}_{j_0,k}-\xi_{j_0,k})^2|\mathbf{X}))^{1/2}|\varphi_{j_0,k}(t)|, \tag{2.5.34}$$

$$S_2(t) := \sum_{j=j_0}^{J-1}\sum_{k=1}^{2^j} (\mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k}-\theta_{j,k})^2|\mathbf{X}))^{1/2}|\psi_{j,k}(t)|, \tag{2.5.35}$$

$$S_3(t) := (\mathbb{E}((\sum_{j=J}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^j}\theta_{j,k}\psi_{j,k}(t))^2|\mathbf{X}))^{1/2} = |\sum_{j=J}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^j}\theta_{j,k}\psi_{j,k}(t)|. \tag{2.5.36}$$

Dans la suite nous allons souvent utiliser le fait que pour chaque j il existe un nombre fini N_φ d'indices k tels que les fonctions $\varphi_{j,k}$, respectivement $\psi_{j,k}$ ne s'annulent pas en t. Ceci nous permettra de "remplacer" la somme sur k par une constante.

1) Majoration de S_1. Comme dans la démonstration de la proposition 2.5.19, à l'aide de l'identité $\mathbb{E}(V^2) = Var(V)+\mathbb{E}(V)^2$, nous allons séparer les calculs en deux parties. Le terme $Var(\widehat{\xi}_{j_0,k}-\xi_{j_0,k}|\mathbf{X})$ a été majoré dans la démonstration du théorème 2.5.12 par $\widehat{M}_n\sigma^2/n$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(\widehat{\xi}_{j_0,k}-\xi_{j_0,k}|\mathbf{X})| &= |\langle n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} f(X_{(i)})\varphi_{J,i}\circ\widehat{G}_n - f, \varphi_{j_0,k}\rangle| \\ &\leq \|n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} f(X_{(i)})\varphi_{J,i}\circ\widehat{G}_n - f\|_\infty \|\varphi_{j_0,k}\|_1.\end{aligned}$$

On trouve alors :

$$(\mathbb{E}((\widehat{\xi}_{j_0,k}-\xi_{j_0,k})^2|\mathbf{X}))^{1/2} \leq \sigma\sqrt{\frac{\widehat{M}_n}{n}} + 2^{-j_0/2}\|\varphi\|_1\|n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} f(X_{(i)})\varphi_{J,i}\circ\widehat{G}_n - f\|_\infty,$$

ce qui implique :

$$\sup_{t\in[0,1]} S_1(t) \leq N_\varphi\|\varphi\|_\infty(2^{j_0/2}\sigma\sqrt{\frac{\widehat{M}_n}{n}} + \|\varphi\|_1\|n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} f(X_{(i)})\varphi_{J,i}\circ\widehat{G}_n - f\|_\infty).$$

A l'aide des lemmes 2.5.7 et 2.5.6 on obtient :

$$\sup_{f\in\Lambda_p^\beta(L,0)}\sup_{t\in[0,1]} S_1(t) = O_P\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{\beta}{2\beta+1}}\right). \tag{2.5.37}$$

2) Majoration de S_2. Du fait que $\widehat{\theta}_{j,k} - \theta_{j,k} = (\widehat{\theta}_{j,k} - \overline{\theta}_{j,k}) + (\overline{\theta}_{j,k} - \theta_{j,k})$, par application du lemme 2.5.33 on obtient :

$$(\mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k} - \theta_{j,k})^2|\mathbf{X}))^{1/2} \leq (\mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k} - \overline{\theta}_{j,k})^2|\mathbf{X}))^{1/2} + |\overline{\theta}_{j,k} - \theta_{j,k}|.$$

La quantité S_2 peut donc être majorée par la somme

$$S_2 \leq S_{21} + S_{22},$$

où

$$\begin{aligned} S_{21} &:= \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} (\mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k} - \overline{\theta}_{j,k})^2|\mathbf{X}))^{1/2} |\psi_{j,k}|, \\ S_{22} &:= \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} |\overline{\theta}_{j,k} - \theta_{j,k}||\psi_{j,k}|. \end{aligned}$$

Compte tenu des observations précédentes, on montre que :

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,1]} S_{22}(t) &= \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} |\langle n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} f(X_{(i)})(\varphi_{J,i} \circ \widehat{G}_n) - f, \psi_{j,k}\rangle||\psi_{j,k}(t)| \\ &\leq N_\varphi \|\varphi\|_\infty \sum_{j=j_0}^{J-1} 2^{j/2} 2^{-j/2} \|n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} f(X_{(i)})(\varphi_{J,i} \circ \widehat{G}_n) - f\|_\infty \\ &\leq N_\varphi \|\varphi\|_\infty \|n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} f(X_{(i)})(\varphi_{J,i} \circ \widehat{G}_n) - f\|_\infty \log n. \end{aligned}$$

Grâce au lemme 2.5.8, on obtient :

$$\sup_{f\in\Lambda_p^\beta(L,0)} \sup_{t\in[0,1]} S_{22}(t) = O_P\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{\beta}{2\beta+1}}\right). \tag{2.5.38}$$

Pour ce qui concerne la quantité S_{22}, l'entier J_1 étant défini par la relation (2.5.30), les

majorations (2.5.28) et (2.5.29) donnent :

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]} S_{21}(t) &= \sup_{t\in[0,1]} \sum_{j=j_0}^{J_1-1}\sum_{k=1}^{2^j} (\mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k}-\overline{\theta}_{j,k})^2|\mathbf{X}))^{1/2}|\psi_{j,k}(t)| \\
&\quad + \sup_{t\in[0,1]} \sum_{j=J_1}^{J-1}\sum_{k=1}^{2^j} (\mathbb{E}((\widehat{\theta}_{j,k}-\overline{\theta}_{j,k})^2|\mathbf{X}))^{1/2}|\psi_{j,k}(t)| \\
&\leq N_\varphi\|\varphi\|_\infty[(\frac{3\widehat{M}_n\sigma^2\log n}{n})^{1/2}\sum_{j=j_0}^{J_1-1}2^{j/2} + 2CL\sum_{j=J_1}^{J-1}2^{j/2}2^{-(1/2+\beta)j} \\
&\quad + (\frac{\widehat{M}_n\sigma^2}{n^2})^{1/2}\sum_{j=J_1}^{J-1}2^{j/2}] + 2\sup_{t\in[0,1]} S_{22}(t) \\
&\leq N_\varphi\|\varphi\|_\infty[9(2^{J_1}\frac{\widehat{M}_n\sigma^2\log n}{n})^{1/2} + 8CL2^{-\beta J_1} + 3(\frac{\widehat{M}_n\sigma^2}{n})^{1/2}] \\
&\quad + 2\sup_{t\in[0,1]} S_{22}(t) \\
&\leq N_\varphi\|\varphi\|_\infty(21\sigma\widehat{M}_n^{1/2} + 8CL)\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{\beta}{1+2\beta}} + 2\sup_{t\in[0,1]} S_{22}(t).
\end{aligned}$$

Donc $\sup_{t\in[0,1]} S_{21}(t)$ est du même ordre que $\sup_{t\in[0,1]} S_{22}(t)$ et

$$\sup_{f\in\Lambda_p^\beta(L,0)}\sup_{t\in[0,1]} S_2(t) = O_P\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{\beta}{2\beta+1}}\right). \tag{2.5.39}$$

3) Majoration de S_3. En ce qui concerne S_3, nous pouvons écrire :

$$\sup_{f\in\Lambda_p^\beta(L,0)}\sup_{t\in[0,1]} S_3(t) = \sup_f \sum_{j=J}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^j}|\theta_{j,k}|\cdot|\psi_{j,k}(t)| \leq C\sum_{j=J}^{\infty}2^{j/2}2^{-j(1/2+\beta)} \leq CLn^{-\beta}. \tag{2.5.40}$$

On obtient (2.5.32) en utilisant (2.5.37), (2.5.39) et (2.5.40) . ∎

2.6 Conclusion

La méthode présentée dans ce chapitre nous permet de reconstruire une fonction à partir des observations bruitées avec un bruit blanc gaussien, la fonction étant observée sur un plan d'expérience aléatoire de loi de probabilité de fonction de répartition $C^2([0,1])$ et de densité bornée inférieurement par une constante strictement positive.

Pour estimer la loi, que nous avons supposée inconnue, nous avons utilisé l'estimateur log-spline. Nous avons montré que l'erreur d'estimation possède les taux asymptotiques établis pour le cas de la grille uniforme, ceci pour un risque mesuré tant par la norme L^2 que par la norme L^∞, et lorsque la fonction à débruiter est supposée appartenir à $\Lambda^\beta(L,0)$ (respectivement $\Lambda_p^\beta(L,0)$), avec $1/2 < \beta < r$.

Le procédé présenté perd sont intérêt quand on sait que la grille est homogène, c'est-à-dire quand il existe des constantes strictement positives λ_1 et λ_2 telles que

$$\lambda_1 \leq \sup_j \sup_k \frac{x_{j,k+1} - x_{j,k}}{x_{j,k} - x_{j,k-1}} \leq \lambda_2.$$

Dans ce cas la fonction G_n^{-1} vérifie les hypothèses de [5] et elle est le meilleur choix pour remplacer la fonction inconnue G^{-1}. Mais quand la grille n'est pas homogène, l'erreur d'estimation en utilisant G_n^{-1} ne peut pas être bornée.

Chapitre 3

Estimation dans des espaces de Besov

Dans le chapitre 2 nous nous sommes intéressés au problème de l'estimation d'une fonction de régression, quand le plan d'expérience est aléatoire, le bruit est gaussien, indépendant et identiquement distribué, et la taille de l'échantillon est un nombre dyadique, $n = 2^J$, $J \in \mathbb{N}$. Nous avons construit un estimateur et nous avons montré qu'il a de bonnes propriétés pour les fonctions de classe hölderiennes. Ces conditions sont assez restrictives. Nous avons cherché alors une méthode qui puisse à la fois traiter un nombre de données non dyadique, du bruit ayant une distribution plus générale, et des fonctions moins régulières.

Ce chapitre concerne l'estimation des fonctions supposées appartenir à un espace de Besov, quand les observations dont on dispose sont faites sur des grilles aléatoires. Le bruit qui contamine les observations n'est pas nécessairement gaussien.

Nous commencerons par définir le modèle de régression auquel nous nous intéresserons par la suite, et par une présentation sommaire des espaces de Besov et de leurs propriétés. Les estimateurs linéaires sont sous-optimaux pour des fonctions appartenant à certains espaces de Besov, raison pour laquelle on cherche des estimateurs non linéaires. Nous proposons un tel estimateur et nous montrons que le risque L^2 qui lui est associé converge vers 0 avec un taux près de celui minimax, à un facteur $\log n$.

3.1 Énoncé du problème

Soit f une fonction à support compact, contenu dans l'intervalle $[0,1]$, dont on dispose de n observations :

$$Y_i = f(X_i) + \sigma(X_i)\varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.1.1}$$

Les variables aléatoires de bruit ε_i et les variables aléatoires X_i du plan d'expérience sont supposées être toutes indépendantes entre elles. Nous supposerons que la fonction $\sigma(\cdot)$ est positive et majorée par Σ.

Nous supposerons que les ε_i sont centrées ($\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$) et de variance $\mathbb{E}(\varepsilon_i^2) = 1$. Les moments d'ordre supérieur seront supposés vérifier, pour tout ℓ entier, $\ell \geq 2$, la condition :

$$\mathbb{E}(|\varepsilon_i|^\ell) \leq \ell! C_e^{\ell-2}, \tag{3.1.2}$$

où C_e est une constante positive.

En ce qui concerne le plan d'expérience, nous supposerons que les variables X_i sont identiquement distribuées suivant une loi de probabilité de densité g, à support inclus dans $[0,1]$ et continue sur $[0,1]$, telle que

$$0 < a \leq g(x) \leq b, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{3.1.3}$$

Nous nous proposons d'estimer la fonction f à partir de ces observations, lorsque cette dernière appartient à une boule d'un espace de Besov $B^s_{pq}([0,1])$, avec $1 \leq p \leq 2$, $1 \leq q \leq \infty$ et $s > 1/p$. Comme dans le chapitre précédent, par abus de notation g désignera également la restriction de la fonction g à $[0,1]$.

3.2 Espaces de Besov

En examinant les coefficients d'une fonction dans une base d'ondelettes suffisamment régulière, on peut décider si elle appartient à un certain espace de Besov, car ces coefficients permettent la définition d'une norme équivalente à la norme Besov.

Une autre raison de s'intéresser à la classe de ces espaces est qu'elle est suffisamment riche pour "contenir" (parmi ses éléments ou comme sous-espaces) des espaces classiques, parmi lesquels on compte les espaces de Hölder, de Sobolev et l'espace BV des fonctions à variation bornée ([69], [30]).

Parmi les caractérisations existantes pour les espaces de Besov nous avons choisi celle qui utilise les oscillations. Elle consiste à mesurer la régularité d'une fonction par comparaison avec le polynôme "localement le plus proche". D'autres caractérisations, équivalentes, utilisent des différences finies ou une décomposition spectrale (voir [69]).

3.2.1 Oscillations

Pour $x \in [0,1]$ et $t > 0$, soit :

$$B(x,t) := \{y \in [0,1] : \ |x-y| < t\},$$

la partie de la boule de centre x et rayon t contenue dans $[0,1]$. Notons $|B(x,t)|$ le volume de cet ensemble.

Pour tout entier $M \geq -1$, nous noterons $\mathcal{P}_M$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à M, avec, par convention $\mathcal{P}_{-1} := \{0\}$.

Définition 3.2.1 [69] *Soit M un entier, $M \geq -1$ et soit u un réel, $0 < u \leq \infty$. On appelle oscillation (locale) d'une fonction $f \in L^u([0,1])$, la fonction :*

$$osc_u^M f(x,t) := \inf_{P \in \mathcal{P}_M} \left(\frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(y) - P(y)|^u dy \right)^{1/u},$$

pour tout $x \in [0,1]$ et $t > 0$.

Le résultat qui suit montre l'existence d'un polynôme "meilleur approximant local", pour lequel l'erreur d'approximation de f reste bornée indépendamment de la fonction approchée et de la boule sur laquelle est faite l'approximation.

Proposition 3.2.2 [69] (Polynômes optimaux) *Soit M un entier, $M \geq -1$ et $1 \leq u \leq \infty$. Il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que, pour tout f dans $L^u([0,1])$, $x \in [0,1]$ et $j \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P \in \mathcal{P}_M$ tel que :*

$$osc_u^M f(x,2^{-j}) \leq \left(\frac{1}{|B(x,2^{-j})|} \int_{B(x,2^{-j})} |f(y) - P(y)|^u dy \right)^{1/u} \leq c_1 osc_u^M f(x, c_2 2^{-j}). \tag{3.2.1}$$

Le résultat suivant en est un cas particulier :

Corollaire 3.2.3 *Soit M un entier, $M \geq -1$ et $1 \leq u \leq \infty$. Il existe alors une constante positive C_1 et un entier j_1 tels que pour tout $f \in L^u([0,1])$, $x \in [0,1]$ et $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_1$, il existe un polynôme $P \in \mathcal{P}_M$ tel que :*

$$\begin{aligned} osc_u^M f(x,2^{-j}) &\leq \left(\frac{1}{|B(x,2^{-j})|} \int_{B(x,2^{-j})} |f(y) - P(y)|^u dy \right)^{1/u} \\ &\leq C_1 osc_u^M f(x, 2^{-(j-j_1)}). \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Démonstration : Soit $j_1 \in \mathbb{N}$ tel que $2^{j_1-1} < c_2 \leq 2^{j_1}$, c_2 étant la constante de la proposition 3.2.2. On a :

$$osc_u^M f(x, c_2 2^{-j}) \leq \left(\frac{2^{-(j-j_1)+1}}{c_2 2^{-j}} \right)^{1/u} osc_u^M f(x, 2^{-(j-j_1)}).$$

On obtient (3.2.2) grâce à la la proposition 3.2.2, avec $C_1 := c_1 4^{1/u}$. ∎

3.2.2 Définition

Comme il est usuel, nous noterons $[s]$ la partie entière de s *i.e.,* le plus grand entier inférieur où égal à s. Suivant les théorèmes 3.5.1 et 5.2.1 de [69], on peut définir l'espace de Besov B^s_{pq} sur $[0,1]$ de la manière suivante :

Définition 3.2.4 *Soient* $0 < p,q \leq \infty$, $1 \leq r \leq \infty$, $s > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)_+$. *Soit* $0 < u \leq r$ *et* $M \in \mathbb{N}$ *tel que* $M \geq [s]$. *On appellera espace de Besov sur* $[0,1]$ *l'ensemble :*

$$B^s_{pq}([0,1]) := \{f \in L^{\max(p,r)}([0,1]) : \ \|f\|_p + (\int_0^1 t^{-sq} \|osc^M_u f(\cdot,t)\|^q_p \frac{dt}{t})^{1/q} < \infty\}, \tag{3.2.3}$$

pour $q < \infty$, *et*

$$B^s_{p\infty}([0,1]) := \{f \in L^{\max(p,r)}([0,1]) : \ \|f\|_p + \sup_{0<t\leq 1} (t^{-s} \|osc^M_u f(\cdot,t)\|_p) < \infty\}, \tag{3.2.4}$$

muni des quasi-normes équivalentes :

$$\|f\|_{B^s_{pq},u} := \begin{cases} \|f\|_p + (\int_0^1 t^{-sq} \|osc^M_u f(\cdot,t)\|^q_p \frac{dt}{t})^{1/q}, & si\ q < \infty, \\ \|f\|_p + \sup\limits_{0<t\leq 1} (t^{-s} \|osc^M_u f(\cdot,t)\|_p), & sinon. \end{cases} \tag{3.2.5}$$

On a les inclusions continues suivantes :

Proposition 3.2.5 [68] *Soit* $s, s' > 0$, $1 \leq p \leq p' \leq \infty$ *et* $1 \leq q \leq q' \leq \infty$.

(i) *Si* $\varepsilon > 0$, *alors*

$$B^{s+\varepsilon}_{p\infty}([0,1]) \subset B^s_{p1}([0,1]) \subset B^s_{pq}([0,1]) \subset B^s_{pq'}([0,1]) \subset B^s_{p\infty}([0,1]) \subset B^{s-\varepsilon}_{p1}([0,1]);$$

(ii) $B^s_{p\min(p,2)}([0,1]) \subset W^{s,p}(0,1) \subset B^s_{p\max(p2)}([0,1])$;

(iii) $B^s_{pq}([0,1]) \subset B^{s'}_{p'q}([0,1])$, *quand* $s' - \frac{1}{p'} \leq s - \frac{1}{p}$;

(iv) *Si* $s > \frac{1}{p}$, *alors* $B^s_{pq}([0,1]) \subset C([0,1])$.

Remarque 3.2.6 *Un cas particulier de la Proposition* 3.2.5 (ii) *est le cas* $p = q = 2$ *et* $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, *pour lequel l'espace de Besov* $B^k_{22}([0,1])$ *coïncide avec l'espace de Sobolev* $W^{k,2}(0,1) = H^k(0,1)$ ([69]).

Pour $R > 0$, nous noterons :

$$\mathcal{B}^u_{spq}(R) := \{f \in B^s_{pq}([0,1]) : \ \|f\|_{B^s_{pq},u} \leq R\}, \tag{3.2.6}$$

la "boule" centrée de rayon R, dans l'espace $B^s_{pq}([0,1])$, par rapport à la quasi-norme $\|\cdot\|_{B^s_{pq},u}$. Pour simplifier les notations, soit

$$\|f\|_{B^s_{pq}} := \|f\|_{B^s_{pq},\infty} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{spq}(R) := \mathcal{B}^\infty_{spq}(R).$$

Pour tout $j \geq 0$ entier, nous noterons $t_{j,k} := k2^{-j}$, pour $k = 0, \ldots, 2^j$, les points d'une division équidistante de $[0,1]$.

Lemme 3.2.7 *Soit $0 < p,q \leq \infty$, $1 \leq r \leq \infty$ et $s > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)_+$. Soit $0 < u \leq r$, $M \in \mathbb{N}$, $M \geq [s]$ et $j \geq 1$ un entier. Pour tout $f \in \mathcal{B}^u_{spq}(R)$ et tout entier $2 \leq \ell \leq j+1$, on a :*

$$\|osc^M_u(t_{j,\cdot}, 2^{-\ell})\|_p \leq C_{osc} 2^{-s\ell + \frac{j}{p}}, \tag{3.2.7}$$

avec $C_{osc} := 2^{2s+2/u+2/(up)+1/p}R$, si $p < \infty$, et $C_{osc} := 2^{2s+2/u}R$, sinon.

Démonstration : Nous donnons la preuve pour le cas $p < \infty$ et $q < \infty$, les autres cas étant similaires, et plus simples. Soit $f \in \mathcal{B}^u_{spq}(R)$. Puisque

$$\int_0^1 t^{-sq} \|osc^M_u f(\cdot,t)\|^q_p \frac{dt}{t} = \sum_{i=0}^\infty \int_{2^{-(i+1)}}^{2^{-i}} t^{-sq} \|osc^M_u f(\cdot,t)\|^q_p \frac{dt}{t},$$

on en déduit en particulier que :

$$\Big(\sum_{i=0}^\infty \int_{2^{-(i+1)}}^{2^{-i}} t^{-sq} \|osc^M_u f(\cdot,t)\|^q_p \frac{dt}{t}\Big)^{1/q} \leq R. \tag{3.2.8}$$

Soit i un entier, $i \geq 0$. Pour tout $t \in [2^{-(i+1)}, 2^{-i}]$ on a :

$$osc^M_u f(\cdot,t) \geq 2^{-2/u} osc^M_u f(\cdot, 2^{-(i+1)}),$$

ce qui implique :

$$\sum_{i=0}^\infty \int_{2^{-(i+1)}}^{2^{-i}} t^{-sq} \|osc^M_u f(\cdot,t)\|^q_p \frac{dt}{t} \geq \sum_{i=0}^\infty 2^{sqi-2q/u} \|osc^M_u f(\cdot, 2^{-(i+1)})\|^q_p. \tag{3.2.9}$$

La relation (3.2.8) montre que, pour tout $i > 0$:

$$\|osc^M_u f(\cdot, 2^{-i})\|_p \leq R 2^{-s(i-1)+2/u}. \tag{3.2.10}$$

Soient $j,k \in \mathbb{Z}$, $j > 0$ et $0 \leq k \leq 2^j$. Pour tout $x \in B(t_{j,k}, 2^{-(j+1)})$ et tout $0 < i \leq j$, la boule $B(x, 2^{-i})$ contient la boule $B(t_{j,k}, 2^{-(i+1)})$, d'où

$$osc^M_u f(x, 2^{-i}) \geq 2^{-2/u} osc^M_u f(t_{j,k}, 2^{-(i+1)}). \tag{3.2.11}$$

Puisque

$$\begin{aligned}\|osc_u^M f(\cdot,2^{-i})\|_p^p &= \int_0^{\frac{1}{2^{j+1}}} |osc_u^M f(x,2^{-i})|^p dx + \sum_{k=1}^{2^j-1} \int_{(k-\frac{1}{2})/2^j}^{(k+\frac{1}{2})/2^j} |osc_u^M f(x,2^{-i})|^p dx \\ &\quad + \int_{1-\frac{1}{2^{j+1}}}^1 |osc_u^M f(x,2^{-i})|^p dx,\end{aligned}$$

les relations (3.2.10) et (3.2.11) impliquent, pour tout $0 < i \leq j$:

$$\begin{aligned}R^p 2^{-sp(i-1)+2p/u} &\geq \|osc_u^M f(\cdot,2^{-i})\|_p^p \\ &\geq \frac{2^{-2/u}}{2^{j+1}} |osc_u^M f(t_{j,0},2^{-(i+1)})|^p + \sum_{k=1}^{2^j-1} \frac{2^{-2/u}}{2^j} |osc_u^M f(t_{j,k},2^{-(i+1)})|^p \\ &\quad + \frac{2^{-2/u}}{2^{j+1}} |osc_u^M f(t_{j,2^j},2^{-(i+1)})|^p \\ &\geq 2^{-j-\frac{2}{u}-1} \sum_{k=0}^{2^j} |osc_u^M f(t_{j,k},2^{-(i+1)})|^p.\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de remplacer $i+1$ par ℓ dans cette relation pour obtenir le résultat du lemme. ∎

Pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, tel que $\ell \geq 1$, notons :

$$\theta_\ell^M(\cdot) := osc_\infty^M f(\cdot,2^{-\ell}), \tag{3.2.12}$$

pour tout ℓ entier. Une conséquence immédiate du lemme précédent est alors :

Lemme 3.2.8 *Soit $0 < p,q \leq \infty$ et $s > \frac{1}{p}$. Soit $M \in \mathbb{N}$, $M \geq [s]$ et $j \geq 1$ un entier. Pour tout $f \in \mathcal{B}_{spq}(R)$ et tout entier $2 \leq \ell \leq j+1$, on a :*

$$\|\theta_\ell^M(t_{j,k})\|_p \leq C_{osc} 2^{-s\ell+\frac{j}{p}}, \tag{3.2.13}$$

avec $C_{osc} := 2^{2s+1/p}R$.

Soient $1 \leq p,q < \infty$ et $f \in L^p(0,1)$. Notons

$$\|f\|_{spq} := \|\alpha_{j_0,\cdot}\|_p + \Big(\sum_{j \geq j_0} (2^{j(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|\beta_{j,\cdot}\|_p)^q\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.2.14}$$

où $\alpha_{j_0,k}$ sont les coefficients d'échelle et $\beta_{j,k}$ sont les coefficients de détails de la décomposition en ondelettes de la fonction f. Si les ondelettes sont suffisamment régulières (*i.e.*, si le nombre r de leurs dérivées continues est plus grand que s) alors $\|f\|_{spq}$ est une norme équivalente pour l'espace $B_{pq}^s([0,1])$ (voir [41]). Ce résultat est valable aussi pour des ondelettes adaptées aux bords (voir [12]).

3.3 Rappels de quelques résultats concernant le risque d'estimation

Soit Θ une classe de fonctions. Soit $f \in \Theta$ une fonction inconnue et $\widehat{f}_n = \widehat{f}_n(Y_1, \ldots, Y_n)$ un estimateur de f basée sur la suite de variables aléatoires indépendantes $Y_1, \ldots, Y_n$. Pour $1 \leq \rho < \infty$, le *risque* L^ρ de $\widehat{f}_n$ est défini par :

$$r_\rho(\widehat{f}_n, n) := \sup_{f \in \Theta} \mathbb{E} \| \widehat{f}_n - f \|_\rho^\rho.$$

Le plus petit risque par rapport à l'ensemble des estimateurs possibles est :

$$\mathcal{R}_\rho(\Theta, n) := \inf_{\widehat{f}_n} r_\rho(\widehat{f}_n, n),$$

et est appelé *risque* L^ρ*-minimax*. Quand l'infimum est pris sur l'ensemble des estimateurs linéaires en les observations, on parle de *risque* L^ρ*-minimax linéaire* :

$$\mathcal{R}_\rho^{lin}(\Theta, n) := \inf_{\widehat{f}_n^{lin}} r_\rho(\widehat{f}_n^{lin}, n).$$

On dit d'une suite d'estimateurs $\widehat{f}_n$ de f, qu'elle atteint le taux optimal de convergence, ou le taux L^ρ-minimax, si :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{r_\rho(\widehat{f}_n, n)}{\mathcal{R}_\rho(\Theta, n)} < \infty.$$

Des résultats concernant le risque d'estimation quand Θ est un espace de Sobolev ont été montrés dans [54]. Nous faisons ici un court rappel du résultat concernant le risque minimax, en se ramenant au cas $\rho = 2$ qui nous intéressera par la suite. Ces espaces et les espaces de Besov sont liés par des relations d'inclusions continues. En effet, comme nous l'avons vu dans la proposition 3.2.5, quand $p \in [1, +\infty]$ et $s > 0$ on a $B^s_{p\min(p,2)}([0,1]) \subset W^{s,p}(0,1) \subset B^s_{p\max(p,2)}([0,1])$.

Soient $L > 0$, $1 \leq p \leq +\infty$ et soit k un entier strictement positif. Notons par $\mathcal{B}^W_{kp}(L)$ la boule de rayon L centrée en 0 de l'espace de Sobolev $W^{k,p}(0,1)$ pour sa norme habituelle. Supposons que les observations Y_i sont faites aux n points d'une division régulière de l'intervalle $[0,1]$, et que le bruit est indépendant et identiquement distribué, de densité f_ε.

Théorème 3.3.1 [54] *Soient* C_1, σ, ν, L *des constantes strictement positives, de sorte que si* $p = k = 1$ *alors* $\nu \geq L$. *Supposons que la densité* f_ε *du bruit satisfait la condition :*

$$\int f_\varepsilon(t) \log \frac{f_\varepsilon(t)}{f_\varepsilon(t+\tau)} dt \leq \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^2, \quad |\tau| \leq \nu.$$

Pour tout $p \in [1,+\infty]$, tout entier $k \geq 1$ et tout n suffisamment grand, on a :

$$\mathcal{R}_2(\mathcal{B}^W_{kp}(L),n) \geq C_1 L^2 \left(\frac{\sigma^2}{L^2 n}\right)^{\frac{2k}{2k+1}}.$$

Par analogie avec ce résultat, en appliquant le lemme d'Assouad et en s'inspirant d'un résultat analogue sur les densités, dû à L. Devroye [26], on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.3.2 *Si la densité f_ε des termes d'erreur satisfait la condition :*

$$1 - \int \sqrt{f_\varepsilon(x) f_\varepsilon(x+h)}dx \leq K \cdot h^2, \quad \textit{quand } h \to 0,$$

on a :

$$\mathcal{R}_2(\mathcal{B}_{spq}(L),n) \geq C n^{-\frac{2s}{2s+1}}.$$

Donc, le taux optimal auquel on peut s'attendre quand Θ est une boule centrée dans un espace de Besov, est $Cn^{-\frac{2s}{2s+1}}$. Dans [59], P. Speckman montre que pour $\Theta = \mathcal{B}^W_{kp}(L)$, les estimateurs linéaires atteignent ce taux. Ce n'est plus le cas quand la fonction est moins régulière. Dans [54], I. Nemirovskii montre que ces estimateurs ne peuvent pas atteindre le taux optimal quand $\Theta = \mathcal{B}^W_{kp}(L)$ et $1 \leq p < 2$. Soit $\widehat{f}^{lin}_n(x) := \sum_{i=1}^n Y_i W_i(x, X_1, \ldots, X_n)$ un estimateur linéaire de f, basé sur des observations bruitées indépendantes $(Y_1, \ldots, Y_n)$, en des points $X_1, \ldots, X_n$, issus d'une loi de densité g par rapport à la mesure de Lebesgue. On peut montrer que :

Proposition 3.3.3 *Si la densité g est bornée, si $p \leq 2$ et $s \geq \frac{1}{p}$ alors il existe une constante C telle que :*

$$\mathcal{R}^{lin}_2(\mathcal{B}_{spq}(L),n) \geq C n^{-\frac{2s'}{2s'+1}},$$

où $s' := s + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$.

On en déduit que, pour $p < 2$, les estimateurs linéaires ne peuvent pas atteindre le taux minimax, calculé par rapport à la norme L^2. Par conséquent, les méthodes utilisant des estimateurs à noyau, des splines, la transformée de Fourier, ou celles utilisant des ondelettes mais restant linéaires, sont sous-optimales. Cela nous conduit à estimer f de manière non linéaire.

L'estimateur que nous proposons a un taux de convergence de l'ordre de $(\log n/n)^{\frac{2s}{2s+1}}$. Il est donc à un facteur $\log n$ près du taux optimal, ce qui est généralement appelé dans la littérature taux presque optimal. Remarquons que ce taux est meilleur que celui atteint par les estimateurs linéaires, et que, au vu des résultats de [30], le taux optimal ne peut pas être atteint par aucun estimateur non linéaire sous nos hypothèses : $s > 1/p$, $1 \leq p \leq 2$ et $\rho = 2$.

3.4 Construction de l'estimateur

Dans ce paragraphe nous décrivons la construction de l'estimateur. A partir des données, nous définissons des coefficients empiriques pour les coefficients d'ondelettes de la fonction f au niveau le plus fin. On applique ensuite la transformée en ondelettes discrète à ces coefficients, on seuille les coefficients de détail et par la transformée inverse on obtient un estimateur (non linéaire) de la fonction recherchée.

3.4.1 Formule de quadrature

Soient $\mathcal{J}$, $\mathcal{K}_j$ et E_j, $j \in \mathcal{J}$, des ensembles d'indices. Soit $\mathcal{M}$ une AMR orthonormée, d'ordre D, de fonctions d'échelle $\varphi_{j,k}$ et d'ondelettes $\psi_{j,k}$, $j \in \mathcal{J}$ et $k \in \mathcal{K}_j$, à support compact. Soit

$$C_\varphi := \sup_{j\in\mathcal{J}} \sup_{k\in\mathcal{K}_j} (2^{-j} \mathrm{diam}\, \mathrm{supp}\varphi_{j,k}). \tag{3.4.1}$$

Notons par $\alpha_{j,k} := \int f(x)\varphi_{j,k}(x)dx$, $j \in \mathcal{J}$ et $k \in \mathcal{K}_j$, les coefficients d'échelle théoriques d'une fonction f. Nous cherchons les coefficients $b_{j,k,i}$, $j \in \mathcal{J}$, $k \in \mathcal{K}_j$ et $i \in E_j$, tels que la formule :

$$2^{-j/2} \sum_i b_{j,k,i} f(\frac{i}{2^j})$$

soit une formule de quadrature pour $\alpha_{j,k}$, qui est exacte pour les polynômes de degré inférieur à $D+1$. Soit $\Gamma_{j,k}$ l'ensemble des entiers i tels que $i/2^j \in \mathrm{supp}\varphi_{j,k}$.

Définition 3.4.1 *Nous appellerons suite de matrices de quadrature associée à l'AMR $\mathcal{M}$, une suite $(B_j)_{j\in\mathcal{J}}$ de matrices, $B_j = (b_{j,k,i})_{k\in\mathcal{K}_j, i\in E_j}$ (éventuellement bi-infinies), qui vérifient les hypothèses suivantes :*

(i) *il existe un entier positif D_B tel que pour tout $j \in \mathcal{J}$, $k \in \mathcal{K}_j$ et $i \in E_j$,*

$$i \notin \Gamma_{j,k} \text{ ou } |k-i| > D_B \quad \Rightarrow \quad b_{j,k,i} = 0\,; \tag{3.4.2}$$

(ii) *pour tout $\ell = 0,\ldots,D$, $j \in \mathcal{J}$ et $k \in \mathcal{K}_j$, on a :*

$$\int x^\ell \varphi_{j,k}(x)dx = 2^{-j/2} \sum_{i\in\Gamma_{j,k}} b_{j,k,i} \left(\frac{i}{2^j}\right)^\ell ; \tag{3.4.3}$$

(iii) *la suite $\|B_j\| := \sup_k \sup_i |b_{j,k,i}|$ est bornée par une constante C_B.*

Soit $(B_j)_{j\in\mathcal{J}}$ une suite de matrices de quadrature. Pour tout $j \in \mathcal{J}$ et $k \in \mathcal{K}_j$, notons :

$$\widetilde{\alpha}_{j,k} := 2^{-j/2} \sum_i b_{j,k,i} f(\frac{i}{2^j}). \tag{3.4.4}$$

Alors $\widetilde{\alpha}_{j,k}$ est un approximant de $\alpha_{j,k}$, qui est exact pour les polynômes de degré strictement inférieur à $D+1$.

Regardons comment on peut construire une matrice de quadrature dans deux cas représentatifs, la droite réelle entière et l'intervalle $[0,1]$.

Cas de la droite réelle

Le cas d'une AMR sur $\mathbb{R}$ a été traité dans [22]. Les éléments de la suite de matrices de quadrature sont des matrices bi-infinies $B_j = (b_{j,k,i})_{j,k\in\mathbb{Z}}$. Trouver le vecteur $(b_{j,k,i})_{i\in\mathbb{Z}}$ solution de (3.4.3) revient alors à trouver le vecteur $\beta := (\beta_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ tel que :

$$\int x^\ell \varphi_{0,0}(x)dx = \sum_{i\in\Gamma_{0,0}} \beta_i i^\ell, \quad \ell = 0,\dots,D. \tag{3.4.5}$$

Si on utilise la base des Coiflets avec D moments nuls pour la fonction d'échelle ($\ell = 1,\dots,D$), on peut choisir $\beta := \delta_{0,\bullet}$. Si on utilise la base d'ondelettes de Daubechies, à $D+1$ moments nuls pour l'ondelette, on peut choisir $\beta_i := \varphi(i)$ (voir [22]). Pour $j \in \mathbb{Z}$ quelconque, la matrice B_j aura alors ses composantes $b_{j,k,i} := \beta_{i-k}$ si $i \in \Gamma_{j,k}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$.

Cas de l'intervalle

Nous avons vu dans le paragraphe 1.5 qu'il y a plusieurs modalités pour construire des bases d'ondelettes adaptées à l'intervalle. Une possibilité est de considérer des ondelettes périodiques, et de se ramener au paragraphe précédent pour le calcul de la suite de matrices de quadrature.

Une deuxième possibilité est d'utiliser des ondelettes orthonormées adaptées aux bords, comme nous l'avons présenté au paragraphe 1.5.3. La base est alors construite à partir d'une base orthonormée d'ondelettes sur $\mathbb{R}$, de sorte que les ondelettes sur l'intervalle héritent due nombre de moments nuls des ondelettes sur $\mathbb{R}$, à l'intérieur de l'intervalle comme sur le bord. Dans une telle AMR, la suite de sous-espaces d'approximation V_j est indexée sur l'ensemble $\mathcal{J} := \{j \in \mathbb{Z} :\ j \geq j_b\}$, l'indice de départ j_b étant choisi de sorte que le diamètre du support d'une ondelette sur $\mathbb{R}$, au niveau j, soit inférieur à la longueur de l'intervalle considéré.

Des méthodes de construction des AMR sur l'intervalle sont proposées par exemple dans [11] et [52]. Dans [52], les auteurs donnent les formules permettant le calcul pratique des matrices de quadrature $B_j := (b_{j,k,i})_{k=0,\dots,2^j-1,i=0,\dots,2^j}$. Ces matrices auront les $D+1$ premières et les $D+1$ dernières lignes avec des formats différents, mais les

lignes centrales vont se ressembler : la ligne $D+1+i$ sera la rotation vers la droite de $i-1$ positions de la ligne $D+2$. Si l'on considère des ondelettes de Daubechies, un choix possible pour la définition de ces lignes centrales est alors, pour tout $j \geq j_b$, $k = D+1, \ldots, 2^j - D - 2$ et $i = 0, \ldots, 2^j$:

$$b_{j,k,i} := \varphi(i-k).$$

Il n'est pas difficile de vérifier qu'une suite de matrices $(B_j)_{j \geq j_b}$ ainsi construites est une suite de matrices de quadrature, au sens de le définition 3.4.1.

3.4.2 L'estimateur

Pour n fixé, taille du plan d'expérience, choisissons un entier strictement positif J tel que $N := 2^J < n$. Dans un premier temps, nous utiliserons une régression polynomiale locale pour estimer les valeurs de f aux points $t_{J,m} = m2^{-J}$, $m = 0, \ldots, N$. Dans un deuxième temps, à partir de ces valeurs nous définirons des estimateurs $\overline{\alpha}_{J,k}$ pour les coefficients d'échelle $\alpha_{J,k}$, $k = 0, \ldots, N-1$, du niveau le plus fin.

Soit m un entier, $0 \leq m \leq N$. La valeur estimée $\overline{f}(t_{J,m})$ sera calculée à partir des données qui se trouvent dans l'intervalle

$$I_m := \left[\frac{2m-1}{2N}, \frac{2m+1}{2N} \right[\cap [0,1].$$

On note E_m l'ensemble d'indices de ces données, $E_m := \{i : X_i \in I_m\}$ et $|E_m|$ le cardinal de l'ensemble E_m. Remarquons que $|E_m|$ est alors une variable aléatoire, somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes,

$$|E_m| = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \in I_m}. \tag{3.4.6}$$

Soit M un entier positif, le degré du polynôme local. Nous le choisirons de sorte que $M \leq \min(D, [s])$. Pour tout $i \in E_m$, on note $z_{m,i} := N(X_i - t_{J,m})$ et $Z_{m,i} := (1, z_{m,i}, \ldots, z_{m,i}^M)^T$. Soit V_m la matrice carrée $(M+1) \times (M+1)$,

$$V_m := \sum_{i \in E_m} Z_{m,i} Z_{m,i}^T, \tag{3.4.7}$$

et soit $u := (1, 0, \ldots, 0)^T$, vecteur constant de $\mathbb{R}^{M+1}$.

Remarque 3.4.2 *Si la matrice V_m est définie positive, l'approximation locale polynomiale de degré M de f en $t_{J,m}$,*

$$\widetilde{f}(t_{J,m}) := \sum_{i \in E_m} u^T V_m^{-1} Z_{m,i} f(x_i),$$

est unique. Remarquons que si f est un polynôme de degré au plus M, alors $\widetilde{f}(t_{J,m}) = f(t_{J,m})$.

Soit $c_A > 0$ une constante qui sera choisie plus tard, et soient les événements :

$$A_m := \{\omega : \ V_m \text{ définie positive et } u^T V_m^{-1} u \leq c_A/|E_m|\}. \tag{3.4.8}$$

et soit

$$A := \bigcap_{m=0}^{N} A_m \tag{3.4.9}$$

Une première estimation de $f(t_{J,m})$, par régression polynomiale locale, sera :

$$\overline{f}(t_{J,m}) := \sum_{i \in E_m} u^T V_m^{-1} Z_{m,i} Y_i \mathbb{1}_A. \tag{3.4.10}$$

Soit une AMR de $[0,1]$ de sous-espaces d'approximation V_j, où $j \geq j_b$. Soit $(B_j)_{j \geq j_b}$ une suite de matrices de quadrature pour cette AMR. Soit $\overline{\mathbf{f}}$ le vecteur colonne de composantes $\overline{f}(t_{J,m})$, $m = 0, \ldots, N$, et soit :

$$\overline{\alpha}_J := 2^{-J/2} B_J \overline{\mathbf{f}}, \tag{3.4.11}$$

un estimateur de $\alpha_J := (\alpha_{J,k})_{k=0,\ldots,N-1}$, le vecteur des coefficients d'échelle de f, au niveau d'approximation J.

Comme il est usuel de le faire, à partir de ces coefficients nous effectuerons une décomposition en ondelettes discrète,

$$\overline{d}_J := W_J \overline{\alpha}_J, \tag{3.4.12}$$

W_J étant la matrice orthogonale de la décomposition, et on aboutit aux vecteurs de coefficients multi-échelles $\overline{\alpha}_{j_0}, \overline{\beta}_{j_0}, \ldots, \overline{\beta}_{J-1}$. Soient

$$\widehat{\alpha}_{j_0,k} := \overline{\alpha}_{j_0,k}, \quad k = 0, \ldots, 2^{j_0} - 1,$$

les coefficients d'approximation à l'échelle grossière et soient

$$\widehat{\beta}_{j,k} := \eta^s(\overline{\beta}_{j,k}, \lambda_j), \quad j = j_0, \ldots, J-1, \ k = 0, \ldots, 2^j - 1,$$

les coefficients de détail après seuillage doux selon un seuil variable λ_j. L'entier positif j_0 et le seuil λ_j seront définis plus tard.

Finalement, on construit l'estimateur :

$$\widehat{f}_J := \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} \widehat{\alpha}_{j_0,k} \varphi_{j_0,k} + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \widehat{\beta}_{j,k} \psi_{j,k}, \tag{3.4.13}$$

à l'étude duquel le paragraphe suivant est consacré.

3.5 Résultats théoriques

Nous montrons ici que l'estimateur défini dans le paragraphe 3.4 est asymptotiquement non trivial et nous calculons son risque d'estimation, en norme L^2.

3.5.1 Pertinence de la régression

Dans ce paragraphe nous calculons la probabilité de l'événement A défini en (3.4.9). Intuitivement, une première condition pour que la régression en $t_{J,m}$ soit pertinente est que le nombre de points du plan d'expérience proches de $t_{J,m}$ soit suffisamment grand.

Supposons que la taille du plan d'expérience est $n \geq 3$. Pour tout n, choisissons un entier positif $N := 2^J$ tel que :

$$c_* \leq c_n := \frac{n}{N \log n} \leq c^*, \tag{3.5.1}$$

pour deux constantes réelles $c^* \geq c_* > 0$. Avec cette hypothèse, quand n tend vers l'infini, n/N tend aussi vers l'infini, ce qui fait qu'il y aura de plus en plus de points dans les intervalles I_m, donc plus de chances qu'ils soient suffisamment nombreux pour engendrer une bonne estimation par régression polynomiale locale en les $t_{J,m}$.

Soient les constantes :

$$\kappa_0 = \kappa_N := 2 \quad \text{et} \quad \kappa_m := 1, \quad 1 \leq m < N. \tag{3.5.2}$$

Un réel strictement positif K_* étant choisi (nous reviendrons sur ce choix plus tard), considérons, pour $m = 0, \ldots, N$, les événements :

$$R_m := \{\omega : \ |E_m| \geq K_* \frac{n}{\kappa_m N}\}. \tag{3.5.3}$$

Proposition 3.5.1 *Soit $\tau > 0$ et soit $a > 0$ celui de (3.1.3). Il existe un $c_* > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$, et tout $m \in \{0, \ldots, N\}$, on a :*

$$\mathbb{P}(R_m) \geq 1 - n^{-\frac{\tau}{\kappa_m}}.$$

Pour la démonstration nous utiliserons la généralisation suivante du lemme 1 de [61] :

Lemme 3.5.2 *Soient I_v, $v \in \mathcal{V}$, une suite généralisée de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, telles que $I := \sum_v I_v$ a une moyenne finie M. Si M' et q sont deux réels, $q \in]0,1[$, on a :*

$$\mathbb{P}(I \leq M') \leq q^{-M'} e^{-M(1-q)}. \tag{3.5.4}$$

Démonstration : (i) Puisque

$$\mathbb{1}_{I\leq M'} \leq q^{I-M'} = q^I q^{-M'},$$

en intégrant on obtient :

$$\mathbb{P}(I \leq M') \leq q^{-M'}\mathbb{E}(q^I). \tag{3.5.5}$$

Soit $v \in \mathcal{V}$. Pour la variable de Bernoulli I_v on a :

$$\mathbb{E}(q^{I_v}) = q^0(1-\mathbb{E}(I_v)) + q\mathbb{E}(I_v) = 1-(1-q)\mathbb{E}(I_v),$$

d'où, grâce à l'indépendance des variables I_v, $v \in \mathcal{V}$,

$$\mathbb{E}(q^I) = \prod_{v\in V}(1-(1-q)\mathbb{E}(I_v)) \leq e^{-(1-q)\sum_v \mathbb{E}I_v} = e^{-(1-q)M}.$$

On obtient alors le résultat en utilisant (3.5.5). ∎

Remarque 3.5.3 *Ce lemme est intéressant seulement pour des valeurs de M' plus petites que $M(1-q)/\log(1/q)$ (puisqu'une probabilité est toujours majorée par 1).*

Démonstration de la proposition 3.5.1 : Soit $m \in \{0,\dots,N\}$ fixé. On sait que la variable aléatoire $|E_m|$ est somme de variables de Bernoulli indépendantes (3.4.6). Les variables X_i sont toutes de loi de densité g, ce qui implique :

$$\mathbb{E}|E_m| = n\int_{I_m} g(x)dx.$$

On en déduit que :

$$\mathbb{E}|E_m| \geq a\frac{n}{\kappa_m N}. \tag{3.5.6}$$

Soit $q \in]0,1[$. Le lemme 3.5.2 donne, avec $M' := \frac{K_* n}{\kappa_m N}$:

$$\mathbb{P}(|E_m| \leq K_*\frac{n}{\kappa_m N}) \leq (q^{-K_*}e^{-a(1-q)})^{\frac{n}{\kappa_m N}} = \exp(-\frac{n}{\kappa_m N}(K_*\log q - a(1-q))).$$

On choisit $q \in]0,1[$ et $c_* > 0$ de sorte que :

$$c_*[a(1-q) + K_*\log q] \geq \tau. \tag{3.5.7}$$

Puisque $n/N = c_n \log n$, on obtient :

$$\mathbb{P}(|E_m| \leq K_*\frac{n}{\kappa_m N}) \leq n^{-\frac{\tau}{\kappa_m}}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(R_m) \geq 1 - n^{-\frac{\tau}{\kappa_m}}.$$

■

Considérons les intervalles $J_m := [-1/2, 1/2]$, quand $1 \leq m < N$, $J_0 := [0, 1/2]$ et $J_N := [-1/2, 0]$. Pour $0 \leq m \leq N$ fixé, soit $\overline{V}_m := |E_m|^{-1} V_m$ la matrice de composantes

$$\overline{v}_{ij} := \frac{1}{|E_m|} \sum_{\ell \in E_m} [N(X_\ell - t_{J,m})]^{i+j} = \frac{\sum_{\ell=1}^{n} [N(X_\ell - t_{J,m})]^{i+j} \mathbb{1}_{X_\ell \in I_m}}{\sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{1}_{X_\ell \in I_m}}, \quad 0 \leq i, j \leq M, \tag{3.5.8}$$

si $|E_m| \neq 0$, la matrice nulle $(M+1) \times (M+1)$ sinon. Soit $\widetilde{V}_m := (\widetilde{v}_{ij})_{i,j=0,\ldots,M}$ la matrice de composantes

$$\widetilde{v}_{ij} := \int_{J_m} x^{i+j} g_m(x) dx,$$

où :

$$g_m(x) := \frac{g(\frac{x}{N} + t_{J,m})}{\int_{J_m} g(\frac{u}{N} + t_{J,m}) du}. \tag{3.5.9}$$

Lemme 3.5.4 *Soit c_* qui satisfait (3.5.1) et b qui satisfait (3.1.3). Pour tout $m = 0, \ldots, N$ et $i, j = 0, \ldots, M$, on a :*

$$\mathbb{P}((|\overline{v}_{ij} - \widetilde{v}_{ij}| \geq \varepsilon) \cap R_m) \leq 2n^{-\frac{\omega}{\kappa_m}}, \tag{3.5.10}$$

où

$$\omega := \varepsilon^2 K_*^2 c_* / \left(\frac{b}{2} + \frac{2}{3} \varepsilon K_* \right).$$

Démonstration : Soient i et j deux entiers quelconques entre 0 et M, fixés. Si $i = j = 0$, conditionnellement à R_m on a $\overline{v}_{ij} = \widetilde{v}_{ij}$, donc

$$\mathbb{P}((|\overline{v}_{ij} - \widetilde{v}_{ij}| \geq \varepsilon) \cap R_m) = 0 \leq 2n^{-\omega}.$$

Considérons maintenant le cas $i + j \geq 1$. Posons, pour $\ell = 1, \ldots, n$,

$$\zeta_\ell := ([N(X_\ell - t_{J,m})]^{i+j} - \widetilde{v}_{ij}) \mathbb{1}_{X_\ell \in I_m}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((|\overline{v}_{ij} - \widetilde{v}_{ij}| \geq \varepsilon) \cap R_m) &= \mathbb{P}((|\sum_{\ell=1}^{n} \zeta_\ell| \geq \varepsilon |E_m|) \cap R_m) \\ &\leq \mathbb{P}(|\sum_{\ell=1}^{n} \zeta_\ell| \geq \varepsilon K_* \tfrac{n}{\kappa_m N}). \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

Nous allons utiliser l'inégalité de Bernstein [55] (voir Annexe 3.6, lemme 3.6.1). Pour cela nous vérifions que les variables (indépendantes) ζ_ℓ sont de moyenne nulle :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\zeta_\ell) &= \int_0^1 [N(x - t_{J,m})]^{i+j} \mathbb{1}_{x \in I_m} g(x) dx - \widetilde{v}_{ij} \int_0^1 \mathbb{1}_{x \in I_m} g(x) dx \\ &= \frac{1}{N} \int_{J_m} y^{i+j} g(\frac{y}{N} + t_{J,m}) dy - \widetilde{v}_{ij} \frac{1}{N} \int_{J_m} g(\frac{y}{N} + t_{J,m}) dy = 0, \end{aligned}$$

ceci d'après la définition de $\widetilde{\nu}_{ij}$. Il est facile de montrer que $|\zeta_\ell| \leq 1$ (plus précisément, $|\zeta_\ell| \leq 2^{1-i-j}$, pour tout $0 \leq i, j \leq M$, $i+j \geq 1$). En ce qui concerne les variances des ζ_ℓ, $\ell = 1, \ldots, n$, on a :

$$\begin{aligned} Var(\zeta_\ell) &= \mathbb{E}(\zeta_\ell^2) = \mathbb{E}([N(X_\ell - t_{J,m})]^{2(i+j)} \mathbb{1}_{X_\ell \in I_m}) - \widetilde{\nu}_{ij}^2 \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_\ell \in I_m}) \\ &\leq \frac{b}{2^{2(i+j)}} \frac{1}{\kappa_m N}. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{\ell=0}^{n} Var(\zeta_\ell) \leq \frac{b}{2^{2(i+j)}} \frac{n}{\kappa_m N} \leq \frac{b}{4} \frac{n}{\kappa_m N}.$$

Nous pouvons maintenant appliquer l'inégalité de Bernstein, avec

$$\eta := \varepsilon K_* \frac{n}{\kappa_m N}, \quad V = \frac{b}{4} \frac{n}{\kappa_m N}, \quad A := 1,$$

et, compte tenu de (3.5.11) et (3.5.1) on obtient (3.5.10). ∎

Lemme 3.5.5 *Pour tout $m = 0, \ldots, N$ et $i, j = 0, \ldots, M$, quand N tend vers l'infini, $\widetilde{\nu}_{ij}$ tend, uniformément par rapport à i, j et m, vers*

$$\nu_{ij} := \kappa_m \int_{J_m} x^i x^j dx. \tag{3.5.12}$$

Démonstration : Soient $m = 0, \ldots, N$ et $i, j = 0, \ldots, M$ fixés et soit la suite de fonctions $h_N(x) := x^{i+j} g_m(x)$, définies sur J_m. Nous allons montrer que cette suite converge uniformément vers la fonction $h : J_m \to \mathbb{R}$, définie par $h(x) := \kappa_m x^{i+j}$. Comme J_m est compact, ceci implique la convergence de la suite des intégrales vers l'intégrale de la fonction limite.

$$\begin{aligned} |h_N(x) - h(x)| &= |x^{i+j}||g_m(x) - \kappa_m| \leq \frac{|g(\frac{x}{N} + t_{J,m}) - \kappa_m \int_{J_m} g(\frac{u}{N} + t_{J,m}) du|}{\int_{J_m} g(\frac{u}{N} + t_{J,m}) du} \\ &\leq \frac{\kappa_m^2}{a} \int_{J_m} |g(\frac{x}{N} + t_{J,m}) - g(\frac{u}{N} + t_{J,m})| du. \end{aligned} \tag{3.5.13}$$

Puisque g est uniformément continue sur $[0,1]$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_ε un entier strictement positif tel que, pour tout $N \geq N_\varepsilon$:

$$|g(\frac{x}{N} + t_{J,m}) - g(\frac{u}{N} + t_{J,m})| \leq \frac{a\varepsilon}{\kappa_m}, \quad x, u \in J_m.$$

De (3.5.13) il résulte alors que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_ε un entier strictement positif, indépendant de i, j, m, tel que, pour tout $N \geq N_\varepsilon$:

$$|h_N(x) - h(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in J_m,$$

d'où le résultat annoncé. ∎

Chaque matrice Υ_m, $m = 0,\dots,N$, de composantes ν_{ij} définies dans (3.5.12), est définie positive. Parmi toutes les valeurs propres de toutes ces matrices, la plus petite est donc strictement positive. Nous la noterons μ.

Proposition 3.5.6 *Supposons que, pour un plan d'expérience de taille n, on choisisse N de sorte que (3.5.1) soit vérifiée. Si $c_A \geq \frac{2}{\mu}$, pour tout $\tau > 0$ il existe $c_* > 0$ et un $n_0 > 0$ entier tel que, pour tout $n \geq n_0$ et $0 \leq m \leq N$:*

$$\mathbb{P}(A_m) \geq 1 - 6n^{-\frac{\tau}{\kappa_m}}.$$

Démonstration : Nous faisons la preuve en deux étapes.

1) Soit m un entier fixé, $0 \leq m \leq N$. Les lemmes 3.5.4 et 3.5.5 impliquent que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_ε tel que pour tout $N \geq N_\varepsilon$ et $i, j = 0,\dots M$, on a :

$$|\widetilde{v}_{ij} - \nu_{ij}| \leq \varepsilon$$

et

$$\mathbb{P}((|\overline{v}_{ij} - \nu_{ij}| \geq 2\varepsilon) \cap R_m) \leq \mathbb{P}((|\overline{v}_{ij} - \widetilde{v}_{ij}| \geq \varepsilon) \cap R_m) \leq 2n^{-\frac{\omega}{\kappa_m}}, \tag{3.5.14}$$

où

$$\omega = \varepsilon^2 K_*^2 c_* / \left(\frac{b}{2} + \frac{2}{3}\varepsilon K_*\right).$$

Si les entiers N sont choisis de sorte que $N = n/(c_n \log n)$, où la suite (c_n) est bornée inférieurement par c_*, il existe un n_ε tel que si $n \geq n_\varepsilon$ alors $N \geq N_\varepsilon$.

Notons μ_m la plus petite valeur propre de $\overline{V}_m$ et $\underline{e}_m$ un vecteur propre unitaire associé. On a alors :

$$\underline{e}_m^T \overline{V}_m \underline{e}_m = \mu_m. \tag{3.5.15}$$

La plus petite parmi les valeurs propres des matrices Υ_m, que nous avons notée μ, vérifie :

$$\mu \leq \underline{e}_m^T \Upsilon_m \underline{e}_m. \tag{3.5.16}$$

De (3.5.15) et (3.5.16) on obtient alors :

$$\mu_m \geq \mu - |\underline{e}_m^T (\overline{V}_m - \Upsilon_m) \underline{e}_m|. \tag{3.5.17}$$

D'un autre côté, le fait que $\underline{e}_m^T \underline{e}_m = 1$ implique

$$|\underline{e}_m^T (\overline{V}_m - \Upsilon_m) \underline{e}_m| \leq (M+1) \max_{i,j} |\overline{v}_{ij} - \nu_{ij}|. \tag{3.5.18}$$

De (3.5.17) et (3.5.18) on tire :

$$\mu_m \geq \mu - (M+1) \max_{i,j} |\overline{v}_{ij} - \nu_{ij}|$$

et donc,

$$\mathbb{P}(\mu_m \leq \frac{\mu}{2}) \leq \mathbb{P}(\max_{i,j}|\overline{\nu}_{ij} - \nu_{ij}| \geq \frac{\mu}{2(M+1)}).$$

Compte tenu de (3.5.14), pour $\varepsilon := \mu/[4(M+1)]$ et $n \geq n_0 := n_\varepsilon$, on a :

$$\mathbb{P}((\mu_m \leq \frac{\mu}{2}) \cap R_m) \leq 2n^{-\frac{\omega}{\kappa_m}},$$

où

$$\omega = \frac{\mu^2 K_*^2 c_*}{16(M+1)^2} / \left(\frac{b}{2} + \frac{\mu K_*}{6(M+1)}\right).$$

On peut toujours choisir les constantes K_* et c_* de sorte que $\omega \geq \tau$ et que (3.5.7) soit vérifiée. En particulier, les valeurs suivantes sont admissibles :

$$q := \frac{1}{2}, \quad K_* := \frac{a}{4\log 2}, \quad c_* := \tau \max\left(\frac{16(M+1)^2}{\mu^2 K_*^2}\left(\frac{b}{2} + \frac{\mu K_*}{6(M+1)}\right), \frac{4}{a}\right). \quad (3.5.19)$$

On a alors :

$$\mathbb{P}((\mu_m \leq \frac{\mu}{2}) \cap R_m) \leq 2n^{-\frac{\tau}{\kappa_m}}, \quad m = 0, \ldots, N.$$

Par ailleurs, du lemme 3.5.1 on obtient :

$$\mathbb{P}((\mu_m \leq \frac{\mu}{2}) \cap R_m^C) \leq \mathbb{P}(R_m^C) \leq n^{-\frac{\tau}{\kappa_m}}, \quad m = 0, \ldots, N.$$

Les deux dernières relations nous permettent d'écrire :

$$\mathbb{P}(\mu_m \leq \frac{\mu}{2}) = \mathbb{P}((\mu_m \leq \frac{\mu}{2}) \cap R_m) + \mathbb{P}((\mu_m \leq \frac{\mu}{2}) \cap R_m^C) \leq 3n^{-\frac{\tau}{\kappa_m}}. \quad (3.5.20)$$

2) Considérons les événements

$$S_1 := \{\omega : \ V_m \text{ n'est pas définie positive}\}$$

et

$$S_2 := \{\omega : \ u^T V_m^{-1} u \geq c_A/|E_m|\}.$$

Pour majorer la probabilité de S_2 on tient compte du fait que si $\mu_m > 0$ est la plus petite valeur propre de la matrice $\overline{V}_m$, alors $1/(\mu_m|E_m|)$ est la plus grande valeur propre de V_m^{-1}. Donc

$$u^T V_m^{-1} u \leq \frac{1}{\mu_m |E_m|}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_2 \cap S_1^C) &= \mathbb{P}((u^T V_m^{-1} u \geq c_A/|E_m|) \cap (\mu_m > 0)) \leq \mathbb{P}((\frac{1}{\mu_m} \geq c_A) \cap (\mu_m > 0)) \\ &\leq \mathbb{P}(\mu_m \leq \frac{\mu}{2}). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(A_m^C) = \mathbb{P}(S_1 \cup S_2) = \mathbb{P}(S_1) + \mathbb{P}(S_2 \cap S_1^C) \leq 2\mathbb{P}(\mu_m \leq \frac{\mu}{2}).$$

On utilise ensuite (3.5.20) pour obtenir le résultat recherché. ∎

3.5.2 Le risque d'estimation

Rappelons le contexte du problème de régression que nous nous sommes posé. Nous avons supposé que le plan d'expérience est aléatoire, de loi de densité g, $0 < a \leq g(x) \leq b$. Les variables aléatoires $\sigma(X_i)\varepsilon_i$ sont centrées et ont des variances bornées supérieurement par une constante Σ. Leurs moments d'ordre supérieur sont majorés suivant (3.1.2).

Nous divisons l'intervalle $[0,1]$ en $N+1 = 2^J + 1$ intervalles disjoints I_m, de longueur $1/N$, sauf les deux intervalles extrêmes, de longueur $1/(2N)$. Si n est la taille de l'échantillon, nous choisirons

$$N := \frac{n}{c_n \log n}, \tag{3.5.21}$$

où c_n est supposé appartenir à un intervalle $[c_*, c^*] \subset \mathbb{R}_+^*$.

Pour $m = 0, \ldots, N$, nous utilisons la régression polynomiale locale pour estimer la valeur de la fonction au point $t_{J,m} = m2^{-j}$, à partir des valeurs du plan d'expérience qui se trouvent dans l'intervalle I_m. Ces valeurs nous permettent de définir des estimateurs pour les coefficients d'approximation $\alpha_{j,k}$, $k = 0, \ldots, N-1$, à l'échelle fine J. Nous utilisons pour cela des formules de quadrature, dont les coefficients forment une matrice B_J. Quand n croît, J croît aussi, et les matrices B_J sont choisies pour qu'elles forment une suite de matrices de quadrature, au sens de la définition 3.4.1. En particulier, nous supposons l'existence de deux constantes positives C_B et D_B telles que toutes les composantes de toutes les matrices B_J soient bornées par C_B et si $b_{J,k,i} \neq 0$, alors $|k-i| \leq D_B$. Les matrices B_J sont donc des matrices-bande.

Une fois les coefficients d'approximation à l'échelle J estimés, on leur applique un algorithme de décomposition en ondelettes. On obtient ainsi des coefficients d'approximation à une certaine échelle inférieure j_0 et des coefficients d'ondelettes aux échelles intermédiaires $j = j_0, \ldots, J-1$. Pour enlever du bruit, nous appliquons un seuillage doux aux coefficients d'ondelettes, le seuil λ_j dépendant de l'échelle. Par transformée en ondelettes inverse nous obtenons l'estimateur $\widehat{f}_J$ défini par (3.4.13).

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que cet estimateur est asymptotiquement bien défini.

Le théorème ci-dessous est le résultat central de ce chapitre. Il concerne l'estimation du risque pour l'estimateur $\widehat{f}_J$, quand la fonction à estimer appartient à une boule $\mathcal{B}_{spq}(R)$ de l'espace de Besov $B^s_{pq}([0,1])$, $1 \leq p \leq 2$, $1 \leq q \leq \infty$ et $s > 1/p$.

Théorème 3.5.7 *Soient $R > 0$, $\tau > 2 - 1/(2s+1)$, $c_A \geq \frac{2}{\mu}$. Supposons que $2^{j_0} \sim N^{\frac{1}{2s+1}}$ et que le seuil de la procédure de seuillage est $\lambda_j := \kappa \frac{j - j_0 + 1}{\sqrt{N}}$, où κ est une constante,*

$\kappa \geq \Sigma C_B(2D_B+1)^{1/2}c_A^{1/2}\max(8C_e, \frac{3D_B}{C_e})$. *Il existe une constante c_* telle que si (3.5.1) est vérifiée et si $1 \leq p \leq 2$, $1 \leq q < \infty$ et $s > 1/p$, on a :*

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_{spq}(R)} \mathbb{E}(\|\widehat{f}_J - f\|_2^2) = O\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{2s}{2s+1}}\right).$$

Nous allons d'abord montrer quelques résultats intermédiaires.

Lemme 3.5.8 *Soit c_A la constante de la relation (3.4.8). Pour tout $m = 0, \ldots, N$,*

(i) $\sum_{i \in E_m} |u^T V_m^{-1} Z_{m,i}|^2 \mathbb{1}_A \leq c_A/|E_m|$;

(ii) $\sum_{i \in E_m} |u^T V_m^{-1} Z_{m,i}| \mathbb{1}_A \leq c_A^{1/2}$.

Démonstration : (i) La démonstration est immédiate, en utilisant les définitions :

$$\sum_{i \in E_m} |u^T V_m^{-1} Z_{m,i}|^2 \mathbb{1}_A = \sum_{i \in E_m} u^T V_m^{-1} Z_{m,i} Z_{m,i}^T (V_m^{-1})^T u \mathbb{1}_A = u^T V_m^{-1} u \mathbb{1}_A \leq c_A/|E_m|.$$

(ii) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le point (i). ∎

Soit $Q := (q_m)_{m=0,\ldots,2^J}$ le vecteur colonne de composantes

$$q_m := \sum_{i \in E_m} u^T V_m^{-1} Z_{m,i} \sigma(X_i) \varepsilon_i \mathbb{1}_A, \tag{3.5.22}$$

et soit θ_ℓ^M le vecteur colonne des oscillations $\theta_\ell^M(t_{J,m})$, $m = 0, \ldots, 2^J$. Rappelons que nous avons noté $\alpha_J = (\alpha_{J,k})_{k=0,\ldots,2^J-1}$ le vecteur colonne des coefficients d'approximation au niveau J, et $\overline{\mathbf{f}} = (\overline{f}(t_{J,m}))_{m=0,\ldots,N}$ le vecteur colonne des estimations de f dans les points $t_{J,m}$.

De (3.4.11) et (3.4.10) on obtient, pour $0 \leq k \leq N-1$:

$$\begin{aligned}(\overline{\alpha}_{J,k} - \alpha_{J,k})\mathbb{1}_A &= 2^{-J/2} \sum_{m=0}^{N} b_{J,k,m} \sum_{i \in E_m} u^T V_m^{-1} Z_{m,i} \sigma(X_i) \varepsilon_i \mathbb{1}_A + \\ &\quad (2^{-J/2} \sum_{m=0}^{N} b_{J,k,m} \sum_{i \in E_m} u^T V_m^{-1} Z_{m,i} f(X_i) - \int_0^1 f(x) \varphi_{J,k}(x) dx) \mathbb{1}_A \\ &= 2^{-J/2}[(B_J Q)_k + T_k], \end{aligned} \tag{3.5.23}$$

où :

$$T_k := (\sum_{m=0}^{N} b_{J,k,m} \sum_{i \in E_m} u^T V_m^{-1} Z_{m,i} f(X_i) - 2^{J/2} \int_0^1 f(x) \varphi_{J,k}(x) dx) \mathbb{1}_A. \tag{3.5.24}$$

Notons $T := (T_k)_{k=0,\dots,N-1}$. Soit C_1 la constante définie dans le lemme 3.2.3 et C_φ la constante définie par (3.4.1).

Lemme 3.5.9 *Sous les hypothèses du théorème 3.5.7, il existe un entier positif j_c qui dépend uniquement de la base d'ondelettes choisie et du degré M de la régression locale, tel que si n est suffisamment grand pour que $J - j_c \geq 2$, pour tout $0 \leq k \leq N-1$ on a :*

$$|T_k| \leq C_\alpha \theta^M_{J-j_c}(t_{J,k}), \tag{3.5.25}$$

où $C_\alpha := C_1(C_B D_B c_A^{1/2} + C_\varphi)$.

Démonstration : Soit k un entier fixé, $0 \leq k \leq N-1$. Soit P un polynôme quelconque de degré au plus M. Le terme T_k peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} T_k &= [\sum_{m=0}^{N} b_{J,k,m} \sum_{i\in E_m} u^T V_m^{-1} Z_{m,i}(f(X_i) - P(X_i)) + \\ &\quad \sum_{m=0}^{N} b_{J,k,m}(\sum_{i\in E_m} u^T V_m^{-1} Z_{m,i} P(X_i) - P(t_{J,m})) + \\ &\quad (\sum_{m=0}^{N} b_{J,k,m} P(t_{J,m}) - 2^{J/2}\int_0^1 P(x)\varphi_{J,k}(x)dx) + \\ &\quad 2^{J/2}\int_0^1 (P(x) - f(x))\varphi_{J,k}(x)dx]\mathbb{1}_A. \end{aligned}$$

Puisque la régression polynomiale que nous utilisons est exacte pour les polynômes de degré au plus M et puisque la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré au plus $D \geq M$, on obtient :

$$T_k = [\sum_{m=0}^{N} b_{J,k,m} \sum_{i\in E_m} u^T V_m^{-1} Z_{m,i}(f(X_i) - P(X_i)) + 2^{J/2}\int_0^1 (P(x) - f(x))\varphi_{J,k}(x)dx]\mathbb{1}_A.$$

Soit j_s le plus petit entier tel que, pour tout $i = 0,\dots,N$:

$$(\bigcup_{\{m:|k-m|\leq D_B\}} I_m) \cup \operatorname{supp}\varphi_{J,i} \subset B(t_{J,i}, 2^{-J+j_s}). \tag{3.5.26}$$

Si la base d'ondelettes est comme celles des exemples donnés au paragraphe 3.4.1, l'entier j_s existe et il est indépendant de J.

Conformément au lemme 3.2.3, il existe une constante positive C_1 et un entier positif j_1, qui dépendent uniquement de M, et il existe un polynôme optimal P_k de degré au plus M, tel que

$$\sup_{x\in B(t_{J,k},2^{-J+j_s})} |f(x) - P_k(x)| \leq C_1 \theta^M_{J-j_c}(t_{J,k}), \tag{3.5.27}$$

où $j_c := j_s + j_1$. De (3.5.26), pour tout m tel que $|k-m| \leq D_B$ et tout $i \in E_m$ on a $X_i \in B(t_{J,k}, 2^{-J+j_s})$. En remplaçant P par P_k dans l'expression de T_k on obtient :

$$|T_k| \leq C_1 \theta^M_{J-j_c}(t_{J,k})\Big(\sum_{m=0}^{N} |b_{J,k,m}| \sum_{i\in E_m} |u^T V_m^{-1} Z_{m,i}| \mathbb{1}_A + 2^{J/2} \int_0^1 |\varphi_{J,k}(x)|dx\Big).$$

Grâce au lemme 3.5.8 et du fait que $\int_0^1 |\varphi_{J,k}(x)|dx \leq C_\varphi 2^{-J/2}$, on obtient :

$$|T_k| \leq C_1 (c_A^{1/2} \sum_{m=0}^{N} |b_{J,k,m}| + C_\varphi) \theta^M_{J-j_c}(t_{J,k}).$$

Comme B_J est élément d'une suite de matrices quadratiques, de la définition 3.4.1 on déduit (3.5.25). ∎

Notons $W_{J,i}$ la $(i+1)$-ième ligne de la matrice de la transformation en ondelettes W_J. De (3.5.23) on obtient :

$$(\overline{\beta}_{j,k} - \beta_{j,k})\mathbb{1}_A = 2^{-J/2} W_{J,2^{j-j_0}+k+1} B_J Q + T'_{j,k}, \tag{3.5.28}$$

pour tout $j = j_0, \ldots, J-1$ et $k = 0, \ldots, 2^j - 1$, et

$$(\overline{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k})\mathbb{1}_A = 2^{-J/2} W_{J,k} B_J Q + T''_{j_0,k}. \tag{3.5.29}$$

pour tout $k = 0, \ldots, 2^{j_0} - 1$, où

$$T'_{j,k} := 2^{-J/2} W_{J,2^{j-j_0}+k+1} T \quad \text{et} \quad T''_{j_0,k} := 2^{-J/2} W_{J,k} T. \tag{3.5.30}$$

Lemme 3.5.10 *Sous les hypothèses du théorème 3.5.7, pour tout $j = j_0, \ldots, J-1$ et $k = 0, \ldots, 2^j - 1$, on a :*

$$T'_{j,k} = o(n^{-1/2}) \quad \textit{et} \quad T''_{j_0,k} = o(n^{-1/2}).$$

Démonstration : Soient $j_0 \leq j < J$ et $0 \leq k < 2^j$ fixés. Du lemme 3.5.9 il résulte que pour tout $\ell = 0, \ldots, 2^j - 1$,

$$|T_\ell| \leq C_\alpha \theta^M_{J-j_c}(t_{J,\ell}),$$

où j_c est une constante entière positive. Soit $p' \geq 2$ tel que $1/p + 1/p' = 1$ et soit $0 \leq i < N$ un entier quelconque. Puisque la transformée en ondelettes est orthonormée et que $p' \geq 2$ on a :

$$|W_{J,i} T| \leq \|W_{J,i}\|_{p'} \|T\|_p \leq C_\alpha 2^{-J/2} \|W_{J,i}\|_{p'} \|\theta^M_{J-j_c}\|_p \leq C_\alpha 2^{-J/2} \|\theta^M_{J-j_c}\|_p.$$

Le lemme 3.2.8 garantit l'existence d'une constante C_{osc} telle que

$$\|\theta^M_{J-j_c}\|_p \leq C_{osc} 2^{-(J-j_c)s + J/p}.$$

On obtient alors :

$$2^{-J/2}|W_{J,i}T| \leq C_{osc}C_\alpha 2^{-(J-j_c)s+J/p-J/2} = C_{osc}C_\alpha 2^{j_c s}\frac{(c_n \log n)^{s-1/p+1/2}}{n^{s-1/p}} n^{-1/2}.$$

Le facteur $n^{1/p-s}(c_n \log n)^{s-1/p+1/2}$ est de l'ordre $o(1)$, car $c_n \leq c^*$ et $s > 1/p$. ∎

La proposition suivante donne la moyenne de l'erreur d'estimation des coefficients de la décomposition en ondelettes, avant seuillage :

Proposition 3.5.11 *Sous les hypothèses du théorème 3.5.7 on a :*

(i) $\mathbb{E}((\overline{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k})^2 \mathbb{1}_A) = O(n^{-1})$, *pour tout* $k = 0, \ldots, 2^{j_0} - 1$;
(ii) $\mathbb{E}((\overline{\beta}_{j,k} - \beta_{j,k})^2 \mathbb{1}_A) = O(n^{-1})$, *pour tout* $j = j_0, \ldots, J-1$ *et* $k = 0, \ldots, 2^j - 1$.

Démonstration : (ii) Soient j et k fixés. Intégrons l'égalité (3.5.28) successivement par rapport au bruit et au plan d'expérience. Puisque $T'_{j,k}$ ne dépend pas du bruit, que ce bruit est de moyenne nulle et du lemme 3.5.10, on obtient que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((\overline{\beta}_{j,k} - \beta_{j,k})^2 \mathbb{1}_A) &= \mathbb{E}(2^{-J}(W_{J,2^{j-j_0+1}+k} B_J Q)^2 \mathbb{1}_A) + o(n^{-1}) \\ &= 2^{-J} W_{J,2^{j-j_0+1}+k+1} B_J \mathbb{E}(QQ^T \mathbb{1}_A) B_J^T W_{J,2^{j-j_0+1}+k}^T + o(n^{-1}).\end{aligned}$$

Rappelons que Q est le vecteur colonne défini en (3.5.22). Les X_i et les ε_i sont tous indépendants et les ensembles E_m sont disjoints. Donc $\mathbb{E}(QQ^T)$ est une matrice $(N+1) \times (N+1)$ diagonale, ce qui nous permet d'écrire :

$$\mathbb{E}((\overline{\beta}_{j,k} - \beta_{j,k})^2 \mathbb{1}_A) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2^J} (W_{J,2^{j-j_0+1}+k+1} B_J)_m^2 \mathbb{E}(q_m^2) + o(n^{-1}). \tag{3.5.31}$$

Les variables $\sigma(X_i)\varepsilon_i$ étant indépendantes et de moyenne nulle, grâce au lemme 3.5.8 on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(q_m^2) &= \mathbb{E}((\sum_{i \in E_m} u^T V_m^{-1} Z_{m,i} \sigma(X_i)\varepsilon_i)^2 \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\sum_{i \in E_m} (u^T V_m^{-1} Z_{m,i} \sigma(X_i))^2 \mathbb{1}_A) \\ &\leq \Sigma^2 \mathbb{E}(u^T V_m^{-1} u \mathbb{1}_A) \leq c_A \Sigma^2 \mathbb{E}(|E_m|^{-1} \mathbb{1}_A). \end{aligned} \tag{3.5.32}$$

Puisque $A = (A \cap R_m) \cup (A \cap R_m^C)$),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(q_m^2) &\leq c_A \Sigma^2 \mathbb{E}(|I_m|^{-1} \mathbb{1}_{A \cap R_m}) + c_A \Sigma^2 \mathbb{E}(|I_m|^{-1} \mathbb{1}_{A \cap R_m^C}) \\ &\leq \frac{c_A \Sigma^2}{K_*} \frac{N}{n} + c_A \Sigma^2 \mathbb{P}(R_m^C).\end{aligned}$$

La proposition 3.5.1 garantit l'existence d'une constante $c_* \geq 0$ telle que :

$$\mathbb{P}(R_m^C) \leq n^{-\frac{\tau}{\kappa_m}}.$$

Il existe donc un entier $n_0 \geq 3$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$\mathbb{E}(q_m^2) \leq \frac{2c_A\Sigma^2}{K_*}\frac{N}{n}.$$

De (3.5.31) il résulte alors :

$$\mathbb{E}((\overline{\beta}_{j,k}-\beta_{j,k})^2\mathbb{1}_A) \leq \frac{1}{n}\frac{2c_A\Sigma^2}{K_*}\sum_{m=0}^{2^J}(W_{J,2^{j-j_0+1}+k+1}B_J)_m^2 + o(n^{-1}). \tag{3.5.33}$$

Nous allons montrer maintenant que le facteur $\sum_{m=0}^{2^J}(W_{J,\ell}B_J)_m^2$ est borné, indépendamment de J et de $\ell \in \{0,\ldots,N\}$. La définition 3.4.1 montre que :

$$\begin{aligned}(W_{J,\ell}B_J)_m^2 &\leq \Big(\sum_{i=\max(0,m-D_B)}^{\min(m+D_B,N-1)}(W_{J,\ell})_i^2\Big)\Big(\sum_{i=\max(0,m-D_B)}^{\min(m+D_B,N-1)}b_{J,i,m}^2\Big)\\ &\leq (2D_B+1)C_B^2\sum_{i=\max(0,m-D_B)}^{\min(m+D_B,N-1)}(W_{J,\ell})_i^2.\end{aligned}$$

Par sommation sur m on obtient :

$$\sum_{m=0}^{N}(W_{J,\ell}B_J)_m^2 \leq (2D_B+1)C_B^2\sum_{m=0}^{N}\sum_{i=\max(0,m-D_B)}^{\min(m+D_B,N-1)}(W_{J,\ell})_i^2 \leq (2D_B+1)^2C_B^2. \tag{3.5.34}$$

De (3.5.31) et (3.5.34) on obtient (ii). La preuve de (i) est similaire à celle de (ii). ∎

Comme il est usuel de le faire, nous essayons de réduire le bruit par seuillage, et nous choisirons ici un seuillage doux. Dans les estimations théoriques ce choix n'est pas essentiel. Il suffit en fait de choisir un seuillage qui vérifie la relation (3.5.35) :

Lemme 3.5.12 [23] *Soit β un nombre réel, ξ une variable aléatoire et soit $\overline{\beta} := \beta + \xi$. Soit η le seuillage dur ou doux et λ un seuil positif fixé. Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$(\eta(\overline{\beta},\lambda)-\beta)^2 \leq C(\min(|\beta|,\lambda)^2 + \xi^2\mathbb{1}_{|\xi|>\lambda/2}). \tag{3.5.35}$$

Lemme 3.5.13 *Sous les hypothèses du théorème 3.5.7, pour tout $j,k \in \mathbb{Z}$, tels que $j_0 \leq j < J$ et $0 \leq k < 2^j$, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\mathbb{E}((\overline{\beta}_{j,k}-\beta_{j,k})^2\mathbb{1}_{|\overline{\beta}_{j,k}-\beta_{j,k}|>\lambda_j/2}\mathbb{1}_A) \leq C\lambda_j^2\exp(-(j-j_0+1)\max(1,\frac{3}{8C_e^2})).$$

Démonstration : Fixons j et k deux entiers ayant les propriétés de l'énoncé. De (3.5.28), avec $T'_{j,k}$ défini en (3.5.30), on a :

$$(\overline{\beta}_{j,k}-\beta_{j,k})\mathbb{1}_A = 2^{-J/2}W_{J,2^{j-j_0+1}+k+1}B_JQ + T'_{j,k}.$$

Le lemme 3.5.10 nous dit que $T'_{j,k}$ est de l'ordre $o(1/\sqrt{n})$. Soit

$$U_m := 2^{-J/2}(W_{J,2^{j-j_0+1}+k+1}B_J)_m q_m, \quad m = 0,\dots,N,$$

où $q_m := \sum_{i\in E_m} u^T V_m^{-1} Z_{m,i}\sigma(X_i)\varepsilon_i \mathbb{1}_A$.

Nous montrerons que les variables U_m, $m = 0,\dots,N$ et $T'_{j,k}$ vérifient les conditions de la proposition 3.6.2. Les variables ε_i et X_i sont toutes indépendantes, et les ensembles E_m sont deux à deux disjoints, ce qui fait que les variables U_m sont indépendantes. Puisque le bruit est de moyenne nulle, il en est de même pour les variables U_m. La relation (3.5.32) implique, pour $0 \le m \le N$:

$$\mathbb{E}(U_m^2) \le c_A\Sigma^2(W_{J,2^{j-j_0+1}+k+1}B_J)_m^2 N^{-1}.$$

Notons $\sigma_m^2 := c_A\Sigma^2(W_{J,2^{j-j_0+1}+k+1}B_J)_m^2 N^{-1}$ et $K_N := (D_B+1)^2 C_B^2 c_A \Sigma^2 N^{-1}$. De (3.5.34) on a :

$$\sum_{m=0}^{N} \sigma_m^2 \le K_n.$$

On vérifie maintenant la condition sur les moments d'ordre supérieur. Soit $\ell \ge 2$ un entier. Grâce à l'inégalité de Hölder on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|q_m|^\ell) &\le \mathbb{E}\Big(\sum_{i\in E_m} |u^T V_m^{-1} Z_{m,i}|\sigma(X_i)|\varepsilon_i|\mathbb{1}_A\Big)^\ell \\
&\le \Sigma^\ell \mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{i\in E_m} |u^T V_m^{-1} Z_{m,i}|\mathbb{1}_A\Big)^{\ell-1}\Big(\sum_{i\in E_m} |u^T V_m^{-1} Z_{m,i}||\varepsilon_i|^\ell\Big)\mathbb{1}_A\Big)
\end{aligned}$$

De (3.1.2) et du lemme 3.5.8 on tire :

$$\mathbb{E}(|q_m|^\ell) \le \Sigma^\ell \ell! C_e^{\ell-2}\mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{i\in E_m} |u^T V_m^{-1} Z_{m,i}|\Big)^\ell \mathbb{1}_A\Big) \le \ell! C_e^{\ell-2}\Sigma^\ell c_A^{\ell/2}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|U_m|^\ell) &\le 2^{-\ell J/2}|(W_{J,2^{j-j_0+1}+k+1}B_J)_m|^\ell \ell! C_e^{\ell-2}\Sigma^\ell c_A^{\ell/2} \\
&= \ell!\sigma_m^2(\Sigma C_e C_B(2D_B+1)^{1/2}c_A^{1/2}N^{-1/2})^{\ell-2}.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\mathbb{E}((\overline{\beta}_{j,k}-\beta_{j,k})^2\mathbb{1}_{|\overline{\beta}_{j,k}-\beta j,k|>\lambda_j/2}\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{m=0}^{N} U_m + T'\Big)^2 \mathbb{1}_{|\sum_{m=0}^{N} U_m+T'|>\lambda_j/2}\Big),$$

nous pouvons maintenant appliquer la proposition 3.6.2 (voir Annexe 3.6), aux variables aléatoires U_m, $m = 0,\dots,N$ et $T'_{j,k}$, avec $c := \Sigma C_e C_B(2D_B+1)^{1/2}c_A^{1/2}N^{-1/2}$ et $C_0 := 1$. On obtient :

$$\mathbb{E}((\overline{\beta}_{j,k}-\beta_{j,k})^2\mathbb{1}_{|\overline{\beta}_{j,k}-\beta j,k|>\lambda_j/2}\mathbb{1}_A) \le \frac{\lambda_j^2}{2}\max(1,\frac{4}{\lambda_j\gamma})^2\exp(\mu\gamma)\exp(-1-|1-\frac{\lambda_j\gamma}{2}|)), \tag{3.5.36}$$

où $\mu = o(n^{-1/2})$ et

$$\gamma := \min(\frac{\lambda_j}{6K_N}, \frac{1}{2c}) = \frac{1}{2c}.$$

Puisque

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_j\gamma}{4} &\geq \frac{j-j_0+1}{\sqrt{N}} \frac{\Sigma C_B D_B^{1/2} c_A^{1/2} \max(8C_e, \frac{3D_B}{C_e})\sqrt{N}}{8\Sigma C_e C_B D_B^{1/2} c_A^{1/2}} \\ &= (j-j_0+1)\max(1, \frac{3D_B}{8C_e^2}) \geq 1,\end{aligned}$$

on trouve :

$$\max(1, \frac{4}{\lambda_j\gamma}) = 1 \tag{3.5.37}$$

et

$$-1 - |1 - \frac{\lambda_j\gamma}{4}| = -\frac{\lambda_j\gamma}{4} = -(j-j_0+1)\max(1, \frac{3D_B}{8C_e^2}). \tag{3.5.38}$$

Comme $\mu = o(n^{-1/2})$, on a $\mu\gamma = o((\log n)^{-1/2})$ et $\exp(\mu\tau) = O(1)$. De (3.5.36), (3.5.37) et (3.5.38), nous déduisons l'existence d'une constante C telle que :

$$\mathbb{E}((\overline{\beta}_{j,k} - \beta_{j,k})^2 \mathbb{1}_{|\overline{\beta}_{j,k}-\beta_{j,k}|>\lambda_j/2} \mathbb{1}_A) \leq C\lambda_j^2 \exp(-(j-j_0+1)\max(1, \frac{3D_B}{8C_e^2})).$$

■

Démonstration du Théorème 3.5.7 : La base d'ondelettes étant orthonormée, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\|\widehat{f}_J - f\|_2^2) &= \mathbb{E}(\|\widehat{f}_J - f\|_2^2 \mathbb{1}_A) + \|f\|_2^2 \mathbb{P}(A^C) \\ &= \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} \mathbb{E}((\widehat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k})^2 \mathbb{1}_A) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E}((\widehat{\beta}_{j,k} - \beta_{j,k})^2 \mathbb{1}_A) \\ &\quad + \sum_{j\geq J} \sum_{k=0}^{2^j-1} |\beta_{j,k}|^2 \mathbb{1}_A + \|f\|_2^2 \mathbb{P}(A^C). \end{aligned} \tag{3.5.39}$$

De la proposition 3.5.11 et du fait que $2^{j_0} \sim N^{1/(2s+1)}$, on obtient :

$$\mathbb{E}((\widehat{\alpha}_{j_0,k} - \alpha_{j_0,k})^2) = O\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{2s}{2s+1}}\right). \tag{3.5.40}$$

Puisque $1 \leq p \leq 2$, on sait par la proposition 3.2.5, que $B_{pq}^s([0,1]) \subset B_{2q}^{s'}([0,1])$, où $s' := s + 1/2 - 1/p$. Il existe donc une constante C_2 telle que $\|f\|_{B_{2q}^{s'}} \leq C_2 R$, pour tout $f \in B_{pq}^s([0,1])$. De la définition de la norme $\|\cdot\|_{B_{2q}^{s'}}$ on obtient :

$$\|f\|_2 \leq C_2 R, \tag{3.5.41}$$

La norme définie dans (3.2.14),

$$\|f\|_{spq} := (\sum_k |\alpha_k|^p)^{\frac{1}{p}} + [\sum_{j=0}^{\infty} (2^{j(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} (\sum_k |\beta_{j,k}|^p)^{\frac{1}{p}}) q]^{\frac{1}{q}},$$

est équivalente à la norme Besov. Il existe donc une constante C_3 telle que $\|f\|_{s'2q} \leq C_3 R$. En particulier, on en déduit :

$$\sum_k |\beta_{j,k}|^2 \leq C_3 R 2^{-2j(s+1/2-1/p)}, \tag{3.5.42}$$

et

$$\sum_{j=J}^{\infty} \sum_k |\beta_{j,k}|^2 \leq C_3 R \frac{1}{1-2^{-2(s+1/2-1/p)}} 2^{-2J(s+1/2-1/p)}. \tag{3.5.43}$$

Puisque $s > 1/p$, on obtient qu'il existe une constante C_4 telle que :

$$\sum_{j=J}^{\infty} \sum_k |\beta_{j,k}|^2 \mathbb{1}_A \leq C_4 \frac{\log n}{n}. \tag{3.5.44}$$

De la proposition 3.5.6 on obtient que :

$$\mathbb{P}(A^C) \leq \sum_{m=0}^{N} A_m \leq 4(N-1) n^{-\tau} + 8 n^{-\tau/2}.$$

Compte tenu de l'hypothèse $\tau > 2 - 1/(2s+1)$ et de (3.5.41), la relation précédente implique :

$$\|f\|_2^2 \mathbb{P}(A^C) = O\left(\left(\frac{\log n}{n} \right)^{\frac{2s}{2s+1}} \right). \tag{3.5.45}$$

Grâce au lemme 3.5.35, appliqué pour chaque j et k, avec $\overline{\beta} := \overline{\beta}_{j,k} \mathbb{1}_A$, $\lambda := \lambda_j$, $\beta = \beta_{j,k} \mathbb{1}_A$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E}((\widehat{\beta}_{j,k} - \beta_{j,k})^2 \mathbb{1}_A) &\leq C_4 \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \min(|\beta_{j,k}|, \lambda_j)^2 \\ &+ C_4 \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E}((\widehat{\beta}_{j,k} - \beta_{j,k})^2 \mathbb{1}_{|\hat{\beta}_{j,k} - \beta_{j,k}| > \lambda_j/2} \mathbb{1}_A). \end{aligned}$$

Notons

$$S_1 := \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \min(|\beta_{j,k}|, \lambda_j)^2$$

et

$$S_2 := \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E}((\widehat{\beta}_{j,k} - \beta_{j,k})^2 \mathbb{1}_{|\hat{\beta}_{j,k} - \beta_{j,k}| > \lambda_j/2} \mathbb{1}_A).$$

On déduit de (3.2.14) que $\sum_k |\beta_{j,k}|^p \leq R^p 2^{-jp(s-1/p+1/2)}$, ce qui permet la majoration suivante :

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} |\beta_{j,k}|^p \lambda_j^{2-p} = \sum_{j=j_0}^{J-1} \lambda_j^{2-p} \sum_{k=0}^{2^j-1} |\beta_{j,k}|^p \\ &\leq \kappa^{2-p} R^p N^{\frac{p}{2}-1} \sum_{j=j_0}^{J-1} (j-j_0+1)^{2-p} 2^{-j(sp+\frac{p}{2}-1)} \\ &\leq \kappa^{2-p} R^p N^{\frac{p}{2}-1} 2^{-j_0(sp+\frac{p}{2}-1)} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{2-p} 2^{-\ell(sp+\frac{p}{2}-1)}. \end{aligned}$$

Une série de type $\sum_{\ell \geq 1} \ell^\alpha \delta^\ell$, avec $0 < \delta < 1$ et α quelconque, est convergente. Notons

$$C_5 := \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{2-p} 2^{-\ell(sp+\frac{p}{2}-1)}.$$

Du fait que $2^{j_0} \sim N^{1/2s+1}$ on obtient :

$$S_1 \leq \kappa^{2-p} R^p S_1 N^{\frac{p}{2}-1} N^{-\frac{sp+\frac{p}{2}-1}{2s+1}} = \kappa^{2-p} R^p C_5 N^{-\frac{2s}{2s+1}},$$

donc :

$$S_1 = O\left(\left(\frac{\log n}{n} \right)^{\frac{2s}{2s+1}} \right). \tag{3.5.46}$$

Le Lemme 3.5.13 implique :

$$\begin{aligned} S_2 &\leq C \sum_{j=j_0}^{J-1} 2^j \lambda_j^2 \exp(-(j-j_0+1)\max(1, \frac{3D_B}{8C_e^2})) \\ &= CN^{-1} \sum_{j=j_0}^{J-1} 2^j (j-j_0+1)^2 \exp(-(j-j_0+1)\max(1, \frac{3D_B}{8C_e^2})) \\ &\leq \frac{C}{2} 2^{j_0} N^{-1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^2 (2\exp(-\max(1, \frac{3D_B}{8C_e^2})))^\ell \\ &= CN^{-\frac{2s}{2s+1}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^2 \delta^\ell, \end{aligned}$$

où

$$\delta := 2\exp(-\max(1, \frac{3}{8C_e^2})) < 1.$$

La série $\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^2 \delta^\ell$ étant convergente, on a :

$$S_2 = O\left(\left(\frac{\log n}{n} \right)^{\frac{2s}{2s+1}} \right). \tag{3.5.47}$$

De (3.5.39), (3.5.40), (3.5.44), (3.5.45), (3.5.46) et (3.5.47), on obtient :

$$\mathbb{E}(\|\widehat{f}_J - f\|_2^2) = O\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{2s}{2s+1}}\right).$$

■

3.6 Annexe

Nous rappelons ici l'inégalité de Bernstein et nous donnons un résultat technique que nous avons utilisé dans ce chapitre.

Lemme 3.6.1 (L'inégalité de Bernstein, [55]) *Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes, de moyenne nulle, telles que $|Y_i| \leq A$, pour tout $i = 1, \ldots, n$. Soit $V \geq \sum_{i=1}^n Var(Y_i)$. Pour tout $\eta > 0$ on a :*

$$\mathbb{P}(|\sum_{i=1}^n Y_i| \geq \eta) \leq 2\exp[-\frac{1}{2}\eta^2/(V + \frac{1}{3}A\eta)].$$

La proposition suivante a été utilisée dans la démonstration du lemme 3.5.13.

Proposition 3.6.2 *Soient U_i, $i = 1, \ldots, n$ et V des variables aléatoires qui vérifient les propriétés suivantes :*

1) *U_i sont indépendantes, centrées, de variance $\mathbb{E}(U_i^2) \leq \sigma_i^2$;*
2) *$\mathbb{E}(|U_i|^\ell) \leq C_0 \ell! \sigma_i^2 c^{\ell-2}$, pour tout $i = 1, \ldots, n$ et $\ell \geq 2$, avec les constantes strictement positives C_0 et c indépendantes de i et ℓ;*
3) *$|V| \leq \mu$.*

Soit $K_n \geq \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ et $\gamma := \min(\frac{\lambda}{(1+2C_0)K_n}, \frac{1}{2c})$. Pour tout seuil $\lambda > 0$ et pour tout entier positif r, on a :

$$\mathbb{E}(|\sum_{i=1}^n U_i + V|^r \mathbb{1}_{|\sum_{i=1}^n U_i + V| > \lambda}) \leq 2\lambda^r \max(1, \frac{r}{\lambda\gamma})^r \exp(\mu\gamma)\exp(-\frac{1}{2}(r + |r - \lambda\gamma|)).$$

Démonstration : Soit $S_n = \sum_{i=1}^n U_i + V$. Puisque

$$\mathbb{E}(|S_n|^r \mathbb{1}_{|S_n|>\lambda}) = \mathbb{E}(S_n^r \mathbb{1}_{S_n>\lambda}) + \mathbb{E}((-S_n)^r \mathbb{1}_{-S_n>\lambda})$$

et les variables $-U_i$, $i = 1, \ldots, n$ et $-V$ satisfont les mêmes hypothèses que U_i et V, il sera suffisant de montrer que $\mathbb{E}(S_n^r \mathbb{1}_{S_n>\lambda})$ est majoré comme dans l'énoncé, au facteur 2 près.

Soit α arbitraire strictement positif. De l'inégalité :

$$x^r \leq \left(\frac{r}{\alpha}\right)^r e^{\alpha x - r},$$

valable pour $r \geq 0$ et $x > 0$, on déduit :

$$\mathbb{E}(S_n^r \mathbb{1}_{S_n>\lambda}) \leq \left(\frac{r}{\alpha}\right)^r \mathbb{E}(\exp(\alpha S_n - r)\mathbb{1}_{S_n>\lambda}).$$

Pour $\beta \geq 0$ quelconque, on aura la suite de majorations :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n^r \mathbb{1}_{S_n>\lambda}) &\leq \left(\frac{r}{\alpha}\right)^r \mathbb{E}(\exp(\alpha S_n - r)\exp(\beta(S_n - \lambda))) \\
&\leq \left(\frac{r}{\alpha}\right)^r \exp(-r - \beta\lambda)\mathbb{E}(\exp((\alpha+\beta)S_n)) \\
&\leq \left(\frac{r}{\alpha}\right)^r \exp(-r - \beta\lambda)\exp((\alpha+\beta)\mu)\mathbb{E}(\exp((\alpha+\beta)\sum_{i=1}^n U_i)),
\end{aligned}$$

la dernière résultant de l'hypothèse $3)$. Les variables U_i étant indépendantes,

$$\mathbb{E}(\exp((\alpha+\beta)\sum_{i=1}^n U_i)) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\exp((\alpha+\beta)U_i)).$$

Soit $0 < s \leq 1/(2c)$. Pour majorer $\mathbb{E}(\exp(sU_i))$ on utilise le développement limité de la fonction exponentielle et les hypothèses $1)$ et $2)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp(sU_i)) &\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} |\mathbb{E}(U_i^k)|\frac{s^k}{k!} \leq 1 + \frac{\sigma_i^2 s^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \mathbb{E}(|U_i|^k)\frac{s^k}{k!} \\
&\leq 1 + \frac{\sigma_i^2 s^2}{2} + C_0\sigma_i^2 s^2 \sum_{k=3}^{\infty}(cs)^{k-2} \leq 1 + \frac{\sigma_i^2 s^2}{2} + C_0\sigma_i^2 s^2 \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} \\
&= 1 + (\frac{1}{2} + C_0)\sigma_i^2 s^2 \leq \exp((\frac{1}{2} + C_0)\sigma_i^2 s^2). \qquad (3.6.1)
\end{aligned}$$

Pour $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$ quelconques, tels que $\alpha + \beta \leq 1/(2c)$, appliquons (3.6.1) à $s := \alpha + \beta$. Compte tenu du fait que $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \leq K_n$, on aura alors :

$$\mathbb{E}(S_n^r \mathbb{1}_{S_n>\lambda}) \leq \left(\frac{r}{\alpha}\right)^r \exp((\alpha+\beta)\mu)\exp(-r-\beta\lambda)\exp((\frac{1}{2}+C_0)(\alpha+\beta)^2 K_n). \quad (3.6.2)$$

Le nombre γ défini dans l'énoncé de la proposition vérifie en particulier $\gamma \leq 1/2c$. Dans (3.6.2) nous pouvons donc utiliser :

$$\begin{aligned}
\alpha &:= \min(\frac{r}{\lambda}, \gamma), \\
\beta &:= \gamma - \alpha.
\end{aligned}$$

Si $0 < \lambda \leq \frac{(1+2C_0)K_n}{2c}$, alors $\gamma = \frac{\lambda}{(1+2C_0)K_n}$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n^r \mathbb{1}_{\{S_n>\lambda\}}) &\leq \left(\frac{r}{\min(\frac{r}{\lambda},\gamma)}\right)^r \exp(\mu\gamma)\exp(-r+\lambda\min(\frac{r}{\lambda}-\gamma,0)+\frac{\lambda\gamma}{2}) \\ &= \lambda^r \max(1,\frac{r}{\lambda\gamma})^r \exp(\mu\gamma)\exp(-\frac{1}{2}(r+|r-\lambda\gamma|)).\end{aligned}$$

Si $\lambda > \frac{(1+2C_0)K_n}{2c}$, alors $\gamma = \frac{1}{2c}$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n^r \mathbb{1}_{S_n>\lambda}) &\leq \left(\frac{r}{\min(\frac{r}{\lambda},\gamma)}\right)^r \exp(\mu\gamma)\exp(-r+\lambda\min(\frac{r}{\lambda}-\gamma,0)+(\frac{1}{2}+C_0)\frac{K_n}{4c^2}) \\ &\leq \gamma^r \max(1,\frac{r}{\lambda\gamma})^r \exp(\mu\gamma)\exp(-\frac{1}{2}(r+|r-\lambda\gamma|)).\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}(S_n^r \mathbb{1}_{S_n>\lambda}) \leq \gamma^r \max(1,\frac{r}{\lambda\gamma})^r \exp(\mu\gamma)\exp(-\frac{1}{2}(r+|r-\lambda\gamma|)),$$

pour tout $\gamma > 0$ et tout r entier positif. Par symétrie, on a aussi :

$$\mathbb{E}((-S_n)^r \mathbb{1}_{-S_n>\lambda}) \leq \gamma^r \max(1,\frac{r}{\lambda\gamma})^r \exp(\mu\gamma)\exp(-\frac{1}{2}(r+|r-\lambda\gamma|)),$$

ce qui conclut la preuve. ∎

Chapitre 4

Schémas de subdivision et grilles non régulières

4.1 Introduction

Les schémas de subdivision sont des méthodes classiques de construction de courbes et de surfaces. Nous nous limiterons ici au cas des courbes dans $\mathbb{R}^d$, le principe général s'étendant à des variétés de tout ordre.

Le principe général en est le suivant. Partant d'une suite bi-infinie $f_0 = (f_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ de points de l'espace $\mathbb{R}^d$, on construit par récurrence, à chaque niveau $j \geq 0$, une nouvelle suite bi-infinie $f_j = (f_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ de points de $\mathbb{R}^d$, que nous appellerons *sommets du niveau* j. Les sommets du niveau $j+1$ se déduisent de ceux du niveau j grâce à une opération h_j dite de *subdivision* :

$$f_{j+1} = h_j(f_j)\,, \quad j \geq 0, \tag{4.1.1}$$

ou encore :

$$f_j = h_{j-1} \circ \ldots \circ h_0(f_0), \quad j \geq 0. \tag{4.1.2}$$

Si, au niveau j, on note $\mathcal{L}_j$ la ligne polygonale de sommets les points $f_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, on espère que, lorsque j tend vers l'infini, cette ligne polygonale *"converge"* vers une courbe limite $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^d$, aussi régulière que possible, ceci quelle que soit l'initialisation f_0.

Quelques remarques préliminaires sur un tel *schéma de subdivision*. Il est intuitivement clair qu'une telle convergence vers une courbe lisse ne peut être obtenue qu'en augmentant indéfiniment le nombre de sommets. Supposons par exemple, que les sommets $f_{j+1,2k}$ et $f_{j+1,2k+1}$ du niveau $j+1$ soient "affiliés" au sommet $f_{j,k}$ du niveau j au

sens où ils ne dépendent que d'au plus un nombre fini N_j, indépendant de k, de sommets $f_{j,\ell}$, d'indices centrés autour de k. Ceci se résume sous la forme :

$$f_{j+1,k} = h_{j,k}\left[\left(f_{j,\ell}\right)_{|k-2\ell|\leq N_j}\right], \quad k \in \mathbb{Z},\ j \geq 0. \tag{4.1.3}$$

Le schéma sera alors dit *binaire* : on "double" le nombre de points en passant d'un niveau au suivant.

Par ailleurs, d'un point de vue modélisation géométrique, il est essentiel qu'une modification "locale" de la suite initiale f_0 (par exemple la modification d'un seul sommet initial $f_{0,k}$) n'entraîne qu'une modification locale de la courbe limite $\mathcal{C}$. Pour cela nous demanderons au schéma binaire décrit en (4.1.3) d'être également *local* en imposant que l'entier N_j soit indépendant du niveau, *i.e.*,

$$f_{j+1,k} = h_{j,k}\left[\left(f_{j,\ell}\right)_{|k-2\ell|\leq N}\right], \quad k \in \mathbb{Z},\ j \geq 0. \tag{4.1.4}$$

On pourrait de la même façon envisager des schémas de subdivision locaux "triplant", ..., le nombre de sommets à chaque niveau : il suffirait pour cela de remplacer $|k-2\ell| \leq N$ par $|k-3\ell| \leq N$, ...

Examinons maintenant comment donner aussi simplement que possible un sens à la relation *géométrique*

$$\mathcal{C} = \lim_{j\to+\infty} \mathcal{L}_j. \tag{4.1.5}$$

L'idée la plus élémentaire est de décrire chaque ligne polygonale par une représentation paramétrique $F_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, et de définir ensuite la relation (4.1.5) comme la convergence de la suite $\left(F_j\right)_{j\geq 0}$ vers une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, représentation paramétrique de la courbe limite $\mathcal{C}$. Ce passage naturel du cadre géométrique au cadre fonctionnel a l'avantage de permettre l'utilisation d'outils classiques simples de convergence. De plus, en travaillant composante par composante, nous pourrons nous limiter au cas $d = 1$, ce que nous ferons désormais. Cependant, ce passage présuppose deux choix : celui, à chaque niveau, d'une paramétrisation de la ligne polygonale $\mathcal{L}_j$, et celui d'une notion de convergence dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Du fait du caractère binaire imposé, le plus naturel peut sembler de paramétrer à chaque niveau j la ligne polygonale $\mathcal{L}_j$ par la fonction F_j définie par :

$$F_j(2^{-j}k) = f_{j,k}, \quad F_j \text{ est affine sur chaque } [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]. \tag{4.1.6}$$

Quant au deuxième choix, étant attachés à la régularité de la courbe limite, il est naturel d'utiliser la convergence uniforme, et pour cela de se placer dans l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|F\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x)|. \tag{4.1.7}$$

Pour ne pas sortir de cet espace, il est essentiel d'imposer au schéma (4.1.1) d'être *borné*, au sens où, lorsque la suite bi-infinie initiale f_0 est bornée, il en sera de même de toutes les suites successives f_j, $j \geq 0$. Sous ces hypothèses, la convergence du schéma de subdivision décrit en (4.1.1) sera définie comme la convergence uniforme de la suite F_j, $j \geq 0$, introduite en (4.1.6), ceci pour toute initialisation bornée f_0.

Nous avons donné une brève description du principe général des schémas de subdivision. De fait la plupart du temps on s'intéresse aux schémas linéaires, auxquels nous nous restreignons maintenant. Le passage d'un niveau au suivant est donc désormais supposé linéaire. Un schéma de subdivision linéaire peut alors être compris comme une suite $\mathcal{S} = (S_j)_{j\geq 0}$ de matrices bi-infinies $S_j := \left(S_{j,k,\ell}\right)_{k,\ell\in\mathbb{Z}}$. Les caractères binaire et local d'une part, et borné d'autre part, que nous avons imposés aux schémas de subdivision se répercutent sur les matrices sous forme des exigences suivantes :

(SS_1) il existe un entier $n_{\mathcal{S}}$ tel que, pour tout $j \geq 0$, et tous $k, \ell \in \mathbb{Z}$,

$$S_{j,k,\ell} \neq 0 \;\Rightarrow\; |k - 2\ell| \leq n_{\mathcal{S}}. \tag{4.1.8}$$

(SS_2) il existe un nombre $M_{\mathcal{S}} < +\infty$ tel que, pour tout $j \geq 0$,

$$\|S_j\| := \mathrm{Sup}\{|S_{j,k,\ell}|,\ k, \ell \in \mathbb{Z}\} \leq M_{\mathcal{S}}. \tag{4.1.9}$$

Le passage d'un niveau au suivant est alors décrit par :

$$f_{j+1} := S_j\ f_j, \quad j \geq 0. \tag{4.1.10}$$

Observons que cette égalité donne un sens à f_{j+1} quel que soit le vecteur f_j du fait de l'hypothèse (SS_1).

Une autre hypothèse naturelle concernant les schémas de subdivision est qu'ils reproduisent les constantes :

Définition 4.1.1 *On dira qu'un schéma de subdivision $\mathcal{S}$ reproduit les constantes si, dès que $f_{0,k} = a \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors $f_{j,k} = a$ pour tout $j \geq 0$ et tout $k \in \mathbb{Z}$.*

Le schéma $\mathcal{S}$ reproduit les constantes si et seulement si les matrices S_j satisfont

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} S_{j,k,\ell} = 1, \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall j \geq 0. \tag{4.1.11}$$

Appliquée dans $\mathbb{R}^d$, la reproduction des constantes signifie que $f_{j+1,k} \in \mathbb{R}^d$ est obtenu comme combinaison affine d'un certain nombre de points du niveau précédent.

Illustrons ces définitions par quelques exemples bien connus.

Exemple 4.1.2 Algorithme de de Rham. L'algorithme le plus ancien que nous citerons est l'algorithme de de Rham. Dans cet exemple, le passage de la ligne polygonale $\mathcal{L}_j$ à

la ligne polygonale $\mathcal{L}_{j+1}$ se fait en plaçant sur le segment $[f_{j,k}, f_{j,k+1}]$ les points $f_{j+1,2k}$ et $f_{j+1,2k+1}$ dans les proportions $1, \gamma, 1$, pour un $\gamma > 0$ donné, comme indiqué dans la figure 4.1. On a donc

$$\begin{aligned} f_{j+1,2k} &:= (1-\beta) f_{j,k} + \beta f_{j,k+1}, \\ f_{j+1,2k+1} &:= \beta f_{j,k} + (1-\beta) f_{j,k+1}, \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

avec $\beta := 1/(\gamma+2)$. Il est connu que la courbe limite est continue et qu'elle est tangente à chaque côté du polygone initial $\mathcal{L}_0$ en son milieu. Nous voyons sur la figure 4.1 comment la courbe limite varie suivant le paramètre γ. Pour obtenir une courbe fermée, les sommets du polygone initial $\mathcal{L}_0$ sont ici définis par $f_{0,k} = f_{0,k+9}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

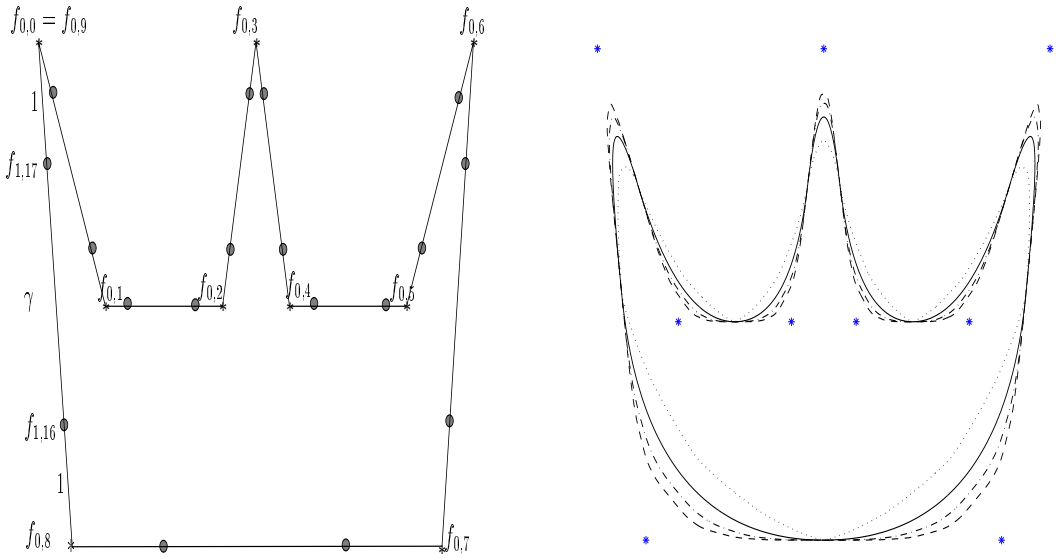


FIG. *4.1 – Un pas de l'algorithme de de Rham (figure de gauche) et les courbes limite pour quelques valeurs de γ (figure de droite). Le paramètre γ prend les valeurs entières entre* 1 *(ligne continue) et* 4 *(courbe en pointille).*

Exemple 4.1.3 Subdivision spline. Lorsque le paramètre γ vaut 2, l'algorithme de de Rham devient :

$$\begin{aligned} f_{j+1,2k} &:= \tfrac{3}{4} f_{j,k} + \tfrac{1}{4} f_{j,k+1}, \\ f_{j+1,2k+1} &:= \tfrac{1}{4} f_{j,k} + \tfrac{3}{4} f_{j,k+1}. \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

Ce cas particulier est connu sous le nom d'algorithme de Chaikin [7]. C'est en fait l'algorithme classique de subdivision des splines polynomiales de degré deux avec noeuds simples équidistants. On sait que la courbe limite est alors le graphe de la spline C^1 de degré deux dont les sommets du polygone initial sont les pôles. Dans la figure 4.1 la courbe qui correspond à l'algorithme de Chaikin est représentée en ligne continue.

Exemple 4.1.4 Le schéma à quatre points [34]. Il est également appelé “butterfly scheme”, à cause de la forme de la courbe limite quand il est appliqué à des vecteurs bi-dimensionnels. A la différence des schémas des exemples précédents, ce schéma est interpolateur : les valeurs calculées à un niveau j sont gardées inchangées au niveau supérieur $j+1$. Plus précisément, $f_{j+1,2k} = f_{j,k}$, pour tout $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$. Entre $f_{j+1,2k} := f_{j,k}$ et $f_{j+1,2k+2} := f_{j,k+1}$ on insère la valeur :

$$f_{j+1,2k+1} := (\frac{1}{2} + \omega)(f_{j,k+1} + f_{j,k+2}) - \omega(f_{j,k} + f_{j,k+3}), \tag{4.1.14}$$

où ω est un paramètre réel. Il a été montré que le schéma à quatre points est uniformément convergent (en un sens que nous préciserons plus loin) pour $|\omega| < 1/2$, et pour $0 < \omega < (-1+\sqrt{5})/8$ il produit des fonctions C^1. Le schéma est d'ordre 3 uniquement pour $\omega = 1/16$. Par contre, ces schémas de subdivision ne produisent pas forcément des fonctions C^2.

Exemple 4.1.5 Le schéma interpolateur de Lagrange ([24], [31]) rejoint dans un cas particulier celui de l'exemple 4.1.4. Soit un entier $N \geq 0$ et un vecteur initial f_0. Pour $j \geq 0$ le vecteur f_{j+1} se déduit du vecteur f_j de la façon suivante. Pour $k \in \mathbb{Z}$ quelconque, soit $P_{j,k}$ la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $2N+1$ satisfaisant :

$$P_{j,k}(\ell 2^{-j}) = f_{j,\ell}, \quad k - N \leq \ell \leq k + N + 1,$$

et soit f_{j+1} le vecteur de composantes :

$$f_{j+1,2k} := f_{j,k}, \quad f_{j+1,2k+1} := P_{j,k}((2k+1)2^{-(j+1)}). \tag{4.1.15}$$

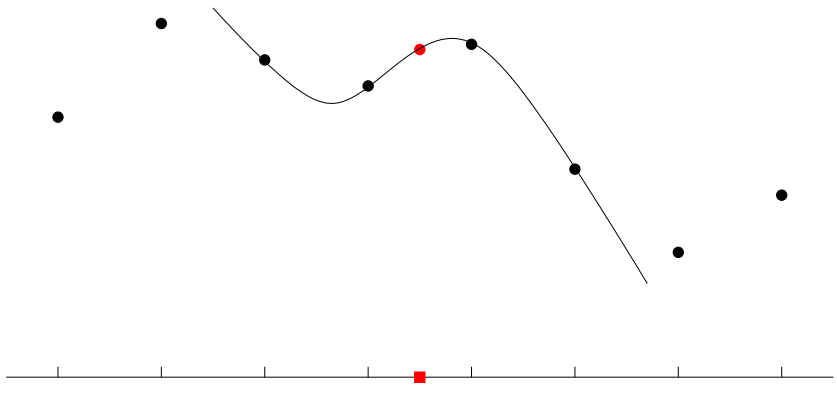


FIG. *4.2* – Construction du point milieu à partir des points voisins, quand $N = 1$.

Nous dirons alors que le schéma de subdivision est de degré $2N+1$. Les composantes de la matrice $S = S_j$, $j \geq 0$, du schéma de subdivision de Lagrange sont calculés

ligne par ligne comme il suit. Soient L_ℓ les polynômes de Lagrange de degré $2N+1$ basés sur les points $-N,\ldots,N+1$, *i.e.*,

$$L_\ell(t) := \prod_{\substack{i=-N \\ i\neq\ell}}^{N+1} \frac{t-i}{\ell-i}, \quad -N \leq \ell \leq N+1, \tag{4.1.16}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puisque

$$P_{j,k} = \sum_{i=-N}^{N+1} L_\ell(2^j \cdot -k) f_{j,\ell}, \tag{4.1.17}$$

la relation (4.1.15) peut s'écrire sous la forme $f_{j+1} = Sf_j$, avec

$$S_{2k,\ell} := \delta_{k,\ell}, \quad S_{2k+1,\ell} := \begin{cases} L_{\ell-k}(1/2) & \text{si } -N \leq \ell-k \leq N+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.1.18}$$

Le schéma de Lagrange $\mathcal{S}$ s'identifie alors à la matrice S. Le schéma de degré 1 est le schéma d'interpolation linéaire. Une partie de sa matrice de subdivision est :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $N = 1$ on obtient le schéma de subdivision interpolant quadratique, qui coïncide avec le schéma à quatre points pour $\omega = 1/16$. Une partie de la matrice de ce schéma est :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Remarquons que le schéma étant interpolateur, la composante d'indice $(2k,k)$ est la seule composante non nulle sur sa ligne, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 4.1.6 Schéma interpolateur en moyenne[27]. Soit un entier $N \geq 0$. En partant du vecteur initial f_0, on construit la suite $(f_j)_{j\geq 0}$ comme suit. Supposons connu le vecteur f_j. Soit $k \in \mathbb{Z}$ fixé et soit $Q_{j,k}$ l'unique fonction polynomiale de degré au plus $2N$ satisfaisant :

$$2^j \int_{2^{-j}\ell}^{2^{-j}(\ell+1)} Q_{j,k}(x)dx = f_{j,\ell}, \quad \ell = k-N,\ldots,k+N. \tag{4.1.19}$$

Les coefficients du polynôme $Q_{j,k}$ sont combinaisons linéaires des valeurs $f_{j,\ell}$, $\ell = k-N,\ldots,k+N$. Les composantes du vecteur f_{j+1} seront définies par :

$$\begin{aligned} f_{j+1,2k} &= 2^{j+1}\int_{2^{-j}k}^{2^{-j-1}(2k+1)} Q_{j,k}(x)dx, \\ f_{j+1,2k+1} &= 2^{j+1}\int_{2^{-j-1}(2k+1)}^{2^{-j}(k+1)} Q_{j,k}(x)dx, \end{aligned}$$

et ils sont, eux aussi, des combinaisons linéaires des valeurs $f_{j,\ell}$, $\ell = k-N,\ldots,k+N$. L'algorithme est donc bien un schéma de subdivision, local et borné. Si l'on note avec A sa matrice, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout vecteur f_0 on a :

$$f_{1,k} = \sum_{\ell} A_{k,\ell} f_{0,\ell},$$

la somme étant évidemment finie. Soit $i \in \mathbb{Z}$ fixé. Si l'on considère dans la relation précédente $f_0 := \delta_{i,\cdot}$ on obtient

$$A_{k,i} = f_{1,k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

relation qui permet de déterminer la matrice A.

En particulier, pour $N = 0$ nous obtenons la matrice dont toutes les composantes sont nulles, sauf celles de la forme $A_{2k,k}$ et $A_{2k+1,k}$ qui valent 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $N = 1$ la matrice de subdivision est de la forme :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 1 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 1 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 1 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

Rappelons maintenant la raison pour laquelle le schéma s'appelle interpolateur en moyenne. Pour tout $j \geq 0$, considérons les fonctions constantes par morceaux $\overline{F}_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\overline{F}_j(t) = f_{j,k}, \quad \forall t \in [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)),\ k \in \mathbb{Z}.$$

On voit sans difficulté que pour tout $j \geq 0$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} \overline{F}_j(t)dt = \int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} \overline{F}_{j+1}(t)dt. \tag{4.1.20}$$

Donc le schéma conserve les moyennes, sur chaque intervalle $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$. En particulier, si les données initiales $(f_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ représentent les moyennes d'une certaine fonction f sur les intervalles $[k,k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$, on retrouve à chaque pas j ces moyennes par la formule :

$$\int_k^{k+1} f(t)dt = f_{0,k} = \int_k^{k+1} \overline{F}_j(t)dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ceci suggère que, si la fonction limite $\overline{F}$ de la suite $\overline{F}_j$ existe, alors on aura pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\int_k^{k+1} f(t)dt = \int_k^{k+1} \overline{F}(t)dt$.

4.2 Schémas de subdivision uniformes et stationnaires

On s'aperçoit que dans les exemples ci-dessus les coefficients de la récurrence sont invariants en temps (par rapport à j) et en espace (par rapport à k).

Un schéma de subdivision $\mathcal{S} = (S_j)_{j\geq 0}$ est dit *stationnaire* si toutes les matrices S_j sont égales entre elles. $\mathcal{S}$ s'identifiera alors avec une unique matrice $S = (S_{k,\ell})_{k,\ell\in\mathbb{Z}}$.

Le schéma $\mathcal{S}$ est dit *uniforme* si $S_{j,k+2,\ell+1} = S_{j,k,\ell}$, pour tout $j \geq 0$, $k, \ell \in \mathbb{Z}$: à chaque niveau $j \geq 0$ toute colonne est la translatée de deux positions vers le bas de la colonne précédente, ou encore, chaque paire de deux lignes consécutives est translatée d'une position vers la droite par rapport à la paire précédente. Nous retrouvons l'invariance en espace des coefficients de subdivision des exemples précédents. En effet, la récurrence s'écrit :

$$\begin{aligned} f_{j+1,2k} &= \sum_\ell S_{j,2k,\ell} f_{j,\ell} = \sum_\ell S_{j,0,\ell-k} f_{j,\ell} = \sum_\ell S_{j,0,\ell} f_{j,\ell+k}, \\ f_{j+1,2k+1} &= \sum_\ell S_{j,2k+1,\ell} f_{j,\ell} = \sum_\ell S_{j,1,\ell-k} f_{j,\ell} = \sum_\ell S_{j,1,\ell} f_{j,\ell+k}, \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

et les coefficients des lignes $2k$ et $2k+1$ de l'algorithme de subdivision ne dépendent pas de k.

Dans la suite de ce paragraphe, $\mathcal{S}$ désignera un schéma de subdivision à la fois uniforme et stationnaire et S désignera sa matrice. Nous supposerons toujours que ce schéma est local (donc ici automatiquement borné). Rappelons que nous nous limitons à $d = 1$. Nous avons déjà mentionné dans l'introduction une façon naturelle de définir la convergence d'un schéma, que nous rappelons ici :

Définition 4.2.1 ([33]) *Un schéma de subdivision est dit uniformément convergent si pour toute suite initiale $f_0 \in \ell^\infty$, il existe une fonction continue (que nous noterons $\mathcal{S}f_0$) telle que*

$$\lim_{j\to+\infty} \|F_j - \mathcal{S}f_0\|_\infty = 0, \tag{4.2.2}$$

où la suite F_j, $j \geq 0$ est définie en 4.1.6.

Dans la littérature, la convergence est en général introduite en faisant appel à l'une ou l'autre des définitions suivantes :

Définition 4.2.2 ([33], [6]) *Un schéma de subdivision est dit uniformément convergent si pour toute suite initiale $f_0 \in \ell^\infty$, il existe une fonction continue $\mathcal{S}f_0$ telle que*

$$\lim_{j\to+\infty} \sup_{k\in\mathbb{Z}} |f_{j,k} - (\mathcal{S}f_0)(2^{-j}k)| = 0. \tag{4.2.3}$$

Définition 4.2.3 ([32]) *Un schéma de subdivision est dit uniformément convergent si pour toute suite initiale f_0, il existe une fonction continue $\mathcal{S}f_0$ telle que pour tout compact $\Omega \subset \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $J(\varepsilon,\Omega)$ tel que*

$$|f_{j,k} - (\mathcal{S}f_0)(2^{-j}k)| < \varepsilon, \quad \textit{pour tout } j \geq J(\varepsilon,\Omega) \textit{ et } k \in \mathbb{Z} \cap 2^j\Omega. \tag{4.2.4}$$

Définition 4.2.4 *On dira d'un schéma de subdivision qu'il est non dégénéré s'il existe un vecteur initial f_0 pour lequel la fonction limite $\mathcal{S}f_0$ existe et n'est pas identiquement nulle.*

Il est facile de se convaincre que la convergence uniforme d'un schéma de subdivision au sens de la définition 4.2.1 implique sa convergence au sens de la définition 4.2.2, qui, à son tour, implique la convergence au sens de la définition 4.2.3. Plus surprenant semble le fait que la convergence uniforme au sens de la définition 4.2.3 implique celle au sens de la définition 4.2.1, dès lors que le schéma est non dégénéré. Nous y reviendrons.

Comment étudier la convergence? Intuitivement, pour qu'un schéma de subdivision soit uniformément convergent, il faut que les distances $f_{j,k+1} - f_{j,k}$ tendent vers zéro quand $j \to +\infty$, afin que la fonction limite soit continue. Soit $\Delta := (\Delta_{k,\ell})_{k,\ell\in\mathbb{Z}}$ la matrice définie par :

$$\Delta_{k,\ell} := \delta_{k+1,\ell} - \delta_{k,\ell}. \tag{4.2.5}$$

Avec cette notation, pour tout niveau $j \geq 0$, le vecteur Δf_j a pour composantes les différences d'ordre 1, *i.e.*, $(\Delta f_j)_k = f_{j,k+1} - f_{j,k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Il est classique (voir [6], [33]) d'associer à un schéma de subdivision $\mathcal{S}$ le schéma aux différences $\mathcal{D}$ de

matrice D, pour permettre de calculer par récurrence la suite Δf_j par une formule du type :

$$\Delta f_{j+1} = D\Delta f_j, \quad j \geq 0. \tag{4.2.6}$$

Les composantes de la matrice D doivent s'exprimer par rapport aux composantes de la matrice S à travers la relation :

$$D_{k,\ell} := \sum_{i \geq \ell+1} (S_{k+1,i} - S_{k,i}), \quad k, \ell \in \mathbb{Z}, \tag{4.2.7}$$

avec la convention $\sum_{i=i_1}^{i_2} = 0$ si $i_2 < i_1$.

Le schéma $\mathcal{D}$ (uniforme et stationnaire) de matrice D est bien défini puisque $\mathcal{S}$ est local, mais il n'est pas nécessairement local. Par conséquent, sans restriction sur f_0, le second membre de (4.2.6) peut ne pas avoir de sens. Par contre, lorsque le schéma $\mathcal{S}$ reproduit les constantes, on peut vérifier que le schéma $\mathcal{D}$ devient local. Par suite, l'égalité (4.2.6) est satisfaite quel que soit le vecteur initial f_0.

De façon évidente, un schéma qui reproduit les constantes est non dégénéré. Qui plus est, on sait que dès qu'un schéma de subdivision est uniformément convergent (au sens le plus "faible" de la définition 4.2.3) et non dégénéré, il reproduit les constantes ([32]).

Le schéma aux différences est un outil efficace pour montrer la convergence, et ceci grâce au théorème suivant :

Théorème 4.2.5 ([33]) *Soit $\mathcal{S}$ un schéma de subdivision qui reproduit les constantes. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) Le schéma $\mathcal{S}$ converge uniformément (au sens de la définition 4.2.3).

(ii) Le schéma aux différences $\mathcal{D}$ converge uniformément vers zéro, i.e., il converge au sens de la définition 4.2.3 avec comme limite la fonction nulle).

(iii) Il existe un entier $K > 0$ et un réel $\mu < 1$ pour lesquels :

$$\|D^K\|_\infty \leq \mu. \tag{4.2.8}$$

Grâce à l'inégalité (4.2.8), le résultat précédent permet de constater que, lorsque le schéma reproduit les constantes, s'il est uniformément convergent au sens de la définition 4.2.3 il l'est aussi au sens de la définition la plus forte 4.2.1. En effet, quel que soit le vecteur initial $f_0 \in \ell^\infty$, la fonction continue définie en (4.2.3) est automatiquement la limite uniforme de la suite de fonctions affines par morceaux définies par (4.1.6). On peut même majorer la vitesse de convergence et montrer que les limites obtenues sont "plus que continues" :

Théorème 4.2.6 ([32], Corollaire 3.3). *Soit $\mathcal{S}$ un schéma de subdivision qui reproduit les constantes et qui est uniformément convergent (au sens de la définition 4.2.3). Soient*

K et μ les constantes du théorème 4.2.5. Pour un vecteur initial $f_0 \in \ell^\infty$ on note par F_j la fonction affine (4.1.6) et par $\mathcal{S} f_0$ la fonction continue limite. On a :

$$\|F_j - \mathcal{S} f_0\|_\infty \leq C\mu^{\lfloor \frac{j}{k} \rfloor}, \tag{4.2.9}$$

où la constante C qui dépend uniquement de $\mathcal{S}$ et de $\|\Delta f_0\|_\infty$. De plus, la fonction limite est hölderienne d'ordre $\nu = -(\log_2 \mu)/K$, i.e.,

$$|(\mathcal{S} f_0)(x) - (\mathcal{S} f_0)(y)| \leq \Gamma |x-y|^\nu, \quad x,y \in \mathbb{R},\ |x-y| < 1, \tag{4.2.10}$$

la constante $\Gamma > 0$ ne dépendant que de $\mathcal{S}$ et de $\|\Delta f_0\|_\infty$.

Le procédé utilisé pour étudier la convergence uniforme peut être réutilisé afin de déterminer la régularité de la fonction limite. Pour ce faire, on se sert des *schémas dérivés* $\mathcal{S}^{[p]}$ et de leurs *schémas aux différences* $\mathcal{D}^{[p+1]}$. Pour $p = 0$ on note $\mathcal{S}^{[0]} := \mathcal{S}$. Pour $p \geq 0$ on définit les matrices $D^{[p]}$ et $S^{[p]}$ des schémas $\mathcal{D}^{[p]}$ et $\mathcal{S}^{[p]}$, respectivement par les formules de récurrence :

$$\begin{aligned} D^{[p]}_{k,\ell} &= \sum_{i \geq \ell+1} (S_{k+1,i} - S_{k,i}) \\ S^{[p]}_{k,\ell} &= 2D^{[p]}_{k,\ell}, \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

pour tout $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Comme nous l'avons remarqué pour le schéma $\mathcal{D}^{[1]} = \mathcal{D}$, tant que le schéma $\mathcal{S}^{[p-1]}$ reproduit les constantes, les schémas $\mathcal{S}^{[p]}$ et $\mathcal{D}^{[p]}$ sont bien définis et locaux. Les schémas $\mathcal{S}^{[p]}$ et $\mathcal{D}^{[p]}$ sont des schémas de subdivision pour le vecteur des différences divisées d'ordre p, $f^{[p]}_{j,k} := 2^j \Delta f^{[p-1]}_{j,k}$, respectivement pour le vecteur des différences d'ordre p, $\Delta f^{[p-1]}_j$ (avec la notation $f^{[0]}_j := f_j$).

La question qui se pose est : pour un schéma donné $\mathcal{S}$, jusqu'à quel ordre est-on sûr de pouvoir définir les schémas aux différences et les schémas dérivés? Pour tout $p \geq 1$, nous définirons les schémas $\mathcal{S}^{[p]}$ et $\mathcal{D}^{[p]}$ si et seulement si le schéma $\mathcal{S}^{[p-1]}$ reproduit les constantes. On dira alors que le schéma $\mathcal{S}$ est *d'ordre supérieur ou égal à p*.

Un schéma de subdivision est dit *interpolateur* si pour tout $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$, $f_{j+1,2k} = f_{j,k}$. Soit $\mathcal{P}_P$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à P. On dit d'un schéma de subdivision qu'il reproduit les polynômes jusqu'au degré P si pour tout vecteur initial de composantes $f_{0,k} := \pi(k)$, $\pi \in \mathcal{P}_P$, $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$f_{j,k} = \pi(2^{-j}k), \quad \text{pour tout } j \geq 0,\ k \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, un schéma interpolateur qui reproduit les polynômes jusqu'au degré P est d'ordre supérieur ou égal à $P+1$ ([35]).

Un schéma de subdivision interpolateur convergent, qui produit des fonctions C^P et qui est non dégénéré reproduit les polynômes jusqu'au degré P ([35]). Ce résultat

est la généralisation, pour $P \geq 1$, du fait qu'un schéma de subdivision uniformément convergent et non dégénéré reproduit les constantes. Si un schéma de subdivision quelconque (non nécessairement interpolateur) est convergent et il produit des fonctions dans C^P, alors l'ensemble $\mathcal{P}_P$ est inclus dans l'ensemble des fonctions limites du schéma ([6]).

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour qu'un schéma soit convergent et qu'il produise des fonctions C^P. Elles deviennent nécessaires dès que le schéma est interpolateur. Pour la démonstration, voir le théorème 4.2 dans [33] et le théorème 4 dans [35]. Rappelons tout d'abord que pour toute matrice $A = (A_{k,\ell})$ on note :

$$\|A\|_\infty := \sup_k \sum_\ell |A_{k,\ell}|.$$

Théorème 4.2.7 ([33],[35]). *Soit $\mathcal{S}$ un schéma de subdivision d'ordre supérieur où égal à $P+1$. Soient les assertions :*

(i) Le schéma $\mathcal{S}$ est uniformément convergent et produit des fonctions dans C^P.

(ii) Pour tout $0 \leq p \leq P$, le schéma $\mathcal{S}^{[p]}$ est uniformément convergent et produit des fonctions dans C^{P-p}.

(iii) Le schéma $\mathcal{D}^{[P+1]}$ est uniformément convergent et dégénéré.

(iv) Il existe un entier $K > 0$ et un réel $\mu < 1$ tel que

$$\|(D^{[P+1]})^K\|_\infty \leq \mu. \tag{4.2.12}$$

On a $(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$. Si de plus $\mathcal{S}$ est interpolateur, les quatre affirmations sont équivalentes.

Le nom de schéma dérivé vient du fait qu'il produit les dérivées des fonctions produites par le schéma initial :

Théorème 4.2.8 ([35]). *Soit $\mathcal{S}$ un schéma de subdivision d'ordre supérieur ou égal à $P+1$ tel que $\mathcal{S}^{[P]}$ est uniformément convergent. Pour un vecteur initial quelconque f_0 et pour tout $0 \leq p \leq P$, on note $\mathcal{S}^{[p]} f_0^{[p]}$ la fonction limite obtenue par l'algorithme de subdivision $\mathcal{S}^{[p]}$ à partir du vecteur $f_0^{[p]}$. Soit $\mathcal{S} f_0 := \mathcal{S}^{[0]} f_0^{[0]}$. On a :*

$$(\mathcal{S} f_0)^{(p)} = \mathcal{S}^{[p]} f_0^{[p]}, \quad p = 0, \ldots, P. \tag{4.2.13}$$

Exemple 4.2.9 Schéma interpolateur de Lagrange de degré 1. L'ordre de ce schéma est exactement 2. On peut donc définir les matrices $D^{[1]}$ et $S^{[1]}$:

$$D^{[1]} : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad S^{[1]} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\|D^{[1]}\|_\infty = 1/2 < 1$, donc le schéma est uniformément convergent. Puisque le schéma $S^{[1]}$ reproduit les constantes, on peut construire le schéma $\mathcal{D}^{[2]}$:

$$D^{[2]} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais la norme infinie de cette matrice, ainsi que de ses puissances est égale à 1, donc le schéma linéaire ne produit pas des fonctions C^1.

Exemple 4.2.10 Schéma interpolateur de Lagrange de degré 3. Quand $N = 1$ on retrouve le schéma à quatre points avec $\omega = 1/16$. Ce schéma est d'ordre 4. Nous donnons des exemples de découpages dans les matrices des schémas aux différences et des schémas dérivées jusqu'à l'ordre 2 :

$$D^{[1]} : \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} & \frac{1}{2} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{2} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{2} & \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{2} & \frac{1}{16} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^{[1]} : \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 1 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 1 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 1 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{D}^{[2]} : \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

La norme infinie de cette matrice est 1, mais la norme infinie de son carré est $\frac{3}{4} < 1$, donc le schéma est C^1. Il a été montré dans [18] que les fonctions limites sont C^2 sauf dans les points dyadiques $k2^{-j}$, $k \in \mathbb{Z}$, $j \geq 0$, et qu'elles sont hölderiennes d'ordre $2-\varepsilon$, pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Remarque 4.2.11 *Il existe d'autres méthodes qui permettent l'étude de la convergence d'un schéma de subdivision uniforme et stationnaire. Le calcul des matrices des schémas aux différences et des schémas dérivés peut se faire en utilisant les polynômes de Laurent [32]. Des résultats de convergence plus précis s'obtiennent en utilisant une technique matricielle basée sur une étude des valeurs propres et l'analyse de Fourier [25], [18]. Nous avons choisi de rappeler ici uniquement la méthode et les résultats qui peuvent s'étendre aux schémas non uniformes et non stationnaires.*

4.3 Schémas de subdivision non réguliers

Dans le paragraphe 4.2 nous avons implicitement utilisé le fait que la valeur $f_{j,k}$ "se trouve" à l'abscisse $k2^{-j}$. En effet, si l'étude de la convergence se fait à partir de certaines matrices, sans que la paramétrisation soit directement impliquée, les schémas dérivés sont des schémas de subdivision pour le vecteur des différences divisées, qui, eux, sont définis par rapport à ces abscisses.

Dans certains cas nous savons que les composantes du vecteur initial f_0 sont des mesures dans certains points $x_{0,k} \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, non nécessairement équidistants (voir chapitres précédents). Nous voudrons alors extrapoler ces valeurs à des points $x_{j,k} \in \mathbb{R}$, $j \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour l'instant nous supposerons que l'ensemble $\mathcal{X} := \{x_{j,k} \in \mathbb{R} : \ j \geq 0,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une *grille* (binaire) au sens suivant :

- $\mathcal{X}$ est dense dans $\mathbb{R}$,
- les points à chaque niveau j sont ordonnés en ordre strictement croissant, *i.e.*, $x_{j,k} < x_{j,k+1}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et
- $\mathcal{X}$ est *imbriqué* au sens où $x_{j+1,2k} = x_{j,k}$, pour tout $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Une telle grille est *régulière* s'il existe une constante $a > 0$ telle que $x_{j,k+1} - x_{j,k} = a2^{-j}$, pour tout $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$. Sans perte de généralité nous allons désormais systématiquement identifier les grilles régulières à la grille $\widetilde{\mathcal{X}} := \{\widetilde{x}_{j,k} := k2^{-j} : \ j \geq 0,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Nous utiliserons une définition de la convergence d'un schéma de subdivision similaire à la définition 4.2.1, mais adaptée à la grille non régulière dont on dispose. Si $\mathcal{S} = \{S_j : \ j \geq 0\}$ est un schéma de subdivision local et borné et $\mathcal{X}$ est une grille, à partir d'un vecteur initial f_0 nous définirons la suite de fonctions $F_j : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$F_j(x_{j,k}) = f_{j,k}, \quad F_j \text{ affine sur chaque intervalle } [x_{j,k}, x_{j,k+1}], \tag{4.3.1}$$

où $f_{j+1} := S_j f_j$, pour tout $j \geq 0$.

Définition 4.3.1 *Un schéma de subdivision $\mathcal{S} = \{S_j : \ j \geq 0\}$ est dit uniformément convergent (par rapport à la grille $\mathcal{X}$) si pour toute suite initiale $f_0 \in \ell^\infty$, il existe une*

fonction continue que nous noterons $\mathcal{S}f_0$, telle que

$$\lim_{j\to+\infty} \|F_j - \mathcal{S}f_0\|_\infty = 0, \tag{4.3.2}$$

où les fonctions F_j, $j \geq 0$, sont définies suivant la relation (4.3.1).

4.4 Le schéma de subdivision de Lagrange non régulier

Les schémas de subdivision interpolateurs de Lagrange se généralisent facilement à des grilles non régulières. Un entier $N \geq 0$ et une grille $\mathcal{X}$ étant fixés une fois pour toutes, nous allons étudier le schéma de subdivision de Lagrange de degré $2N+1$ relativement à cette grille $\mathcal{X}$. Nous le noterons $\mathcal{S}$. Il est défini comme suit. Supposons connu le vecteur f_j, pour un certain $j \geq 0$. Pour $k \in \mathbb{Z}$ fixé, soit $P_{j,k}$ la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $2N+1$ satisfaisant les conditions d'interpolation :

$$P_{j,k}(x_{j,\ell}) = f_{j,\ell}, \quad \ell = k-N, \ldots, k+N+1, \tag{4.4.1}$$

et soit f_{j+1} le vecteur de composantes :

$$f_{j+1,2k} := f_{j,k}, \quad f_{j+1,2k+1} := P_{j,k}(x_{j+1,2k+1}). \tag{4.4.2}$$

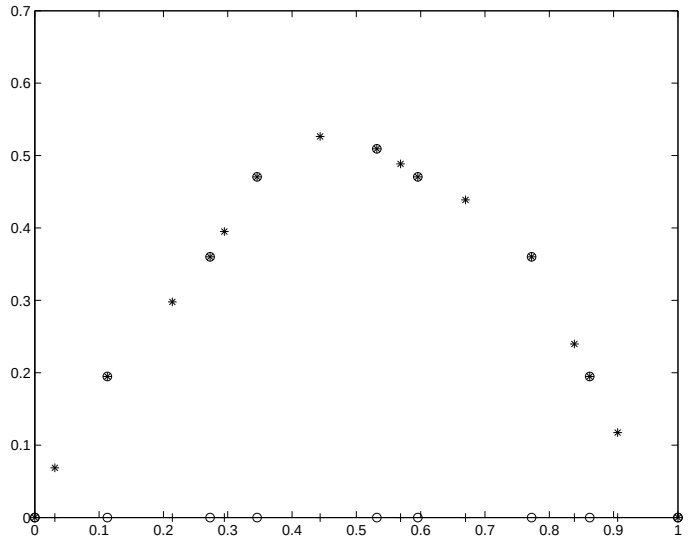


FIG. 4.3 – *Un pas de l'algorithme de subdivision interpolateur de Lagrange sur grille non régulière. Les points initiaux sont marqués avec des cercles et les points insérés avec des $*$.*

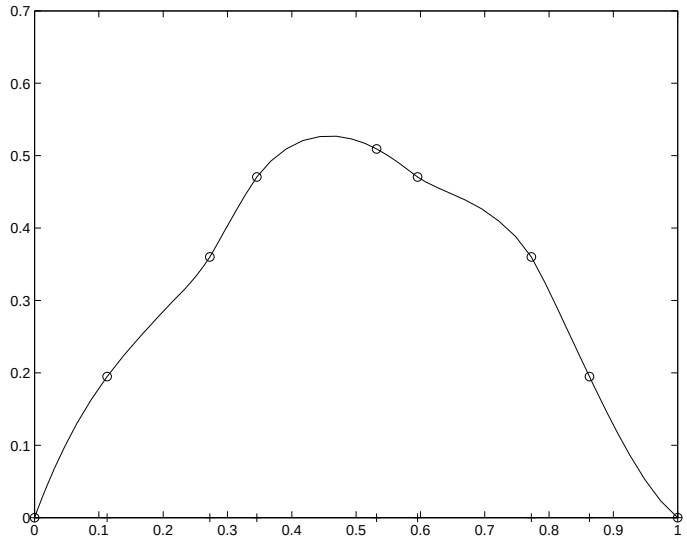


FIG. 4.4 – *La fonction limite de l'algorithme de subdivision, pour les points de la figure précédente.*

Pour $j \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ et $\ell = k-N, \ldots, k+N+1$, soient $L_{j,k,\ell}$ les polynômes de Lagrange de degré $2N+1$ basées sur les points $x_{j,k-N}, \ldots, x_{j,k+N+1}$, *i.e.,*

$$L_{j,k,\ell}(t) := \prod_{\substack{i=k-N \\ i\neq\ell}}^{k+N+1} \frac{t - x_{j,i}}{x_{j,\ell} - x_{j,i}}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.4.3}$$

Puisque

$$P_{j,k} = \sum_{\ell=k-N}^{k+N+1} L_{j,k,\ell} f_{j,\ell}, \tag{4.4.4}$$

la relation (4.4.2) peut s'écrire sous la forme matricielle $f_{j+1} = S_j f_j$, avec S_j la matrice de composantes :

$$S_{j,2k,\ell} := \delta_{k,\ell}, \quad S_{j,2k+1,\ell} := \begin{cases} L_{j,k,\ell}(x_{j+1,2k+1}) & \text{si } k-N \leq \ell \leq k+N+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.4.5}$$

Le schéma de Lagrange $\mathcal{S}$ s'identifie alors à l'ensemble de matrices $\{S_j : \ j \geq 0\}$.

Remarque 4.4.1 *Le schéma de Lagrange est évidemment local, avec* $n_{\mathcal{S}} = 2N+1$. *Du fait que :*

$$\sum_{\ell=k-N}^{k+N+1} \pi(x_{j,k}) L_{j,k,\ell}(t) = \pi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall \pi \in \mathcal{P}_{2N+1}. \tag{4.4.6}$$

il résulte que le schéma de Lagrange reproduit les polynômes jusqu'au degré $2N+1$ *(par rapport à la grille* $\mathcal{X}$*), au sens suivant : pour tout vecteur initial* f_0 *de composantes*

$f_{0,k} := \pi(x_{0,k})$, $\pi \in \mathcal{P}_{2N+1}$, $k \in \mathbb{Z}$, *on a :*

$$f_{j,k} = \pi(x_{j,k}), \quad \forall\, j \geq 0,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Si, de plus, le schéma est uniformément convergent, la densité de la grille et la continuité des fonctions $\mathcal{S} f_0$ et π impliquent $\mathcal{S} f_0 = \pi$.

Remarque 4.4.2 *Le schéma de Lagrange sur la grille régulière $\widetilde{X}$ coïncide avec le schéma de subdivision uniforme et stationnaire de l'exemple 4.1.5. Nous le noterons désormais $\widetilde{\mathcal{S}}$, et par $\widetilde{S}$ sa matrice de subdivision. Il n'est pas difficile de montrer que $\|\widetilde{S}\| = 1$.*

Dans tout ce qui suit nous rajouterons un tilde aux notations pour signaler tout ce qui concerne soit la grille régulière soit le schéma de subdivision de Lagrange régulier $\widetilde{\mathcal{S}}$.

4.4.1 Ordre d'un schéma de Lagrange

Par analogie avec le cas uniforme et stationnaire, nous utiliserons dans l'étude de la convergence du schéma de subdivision $\mathcal{S}$ les schémas aux différences $\mathcal{D}^{[p]}$ et les schémas dérivés $\mathcal{S}^{[p]}$. Pour les introduire, nous adopterons les définitions de [16].

Par souci de cohérence des notations, nous noterons $S_j^{[0]} := S_j$, pour tout $j \geq 0$, et donc logiquement, $\mathcal{S}^{[0]} := \mathcal{S}$.

Nous avons montré dans la remarque 4.4.1 que tout schéma de Lagrange $\mathcal{S}$ reproduit en particulier les constantes. De manière équivalente, nous traduirons ce fait en disant que $\mathcal{S}$ est *d'ordre supérieur ou égal à* 1. Le schéma $\mathcal{S}$ étant également local, nous pouvons construire le schéma aux différences de $\mathcal{S}$ que nous noterons $\mathcal{D}^{[1]} := \{D_j^{[1]} :\ j \geq 0\}$. Il reproduit les vecteurs des différences d'ordre 1, Δf_j, *i.e.,*

$$\Delta f_{j+1} = D_j^{[1]} \Delta f_j. \tag{4.4.7}$$

Rappelons que les composantes des matrices $D_j^{[1]}$ s'expriment par rapport aux composantes des matrices du schéma initial $\mathcal{S}$ par la formule :

$$D^{[1]}_{j,k,\ell} := \sum_{i \geq \ell+1} (S_{j,k+1,i} - S_{j,k,i}). \tag{4.4.8}$$

Le schéma de subdivision $\mathcal{D}^{[1]}$ est local puisque $\mathcal{S}$ est d'ordre supérieur ou égal à 1.

Pour tout $j \geq 0$, soit $f_j^{[0]} := f_j$ et soient $f_j^{[p]}$, $p \geq 1$, les vecteurs des différences divisées d'ordre p, *i.e.,* les vecteurs dont les composantes sont :

$$f_{j,k}^{[p]} := \frac{f_{j,k+1}^{[p-1]} - f_{j,k}^{[p-1]}}{d_{j,k}^{[p]}}, \quad j \geq 0 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \tag{4.4.9}$$

Nous n'utilisons pas ici la même notion de différence divisée que dans le paragraphe 4.2. En effet, dans le cas des grilles régulières il est possible de faire des simplifications qui ne sont plus permises dans le cas des grilles non régulières. Les différences divisées introduites dans (4.4.9) correspondent aux différences divisées des paramétrisations F_j, définies dans la relation (4.3.1) :

$$f_{j,k}^{[p]} = [x_{j,k}, \ldots, x_{j,k+p}]F_j.$$

De la relation (4.4.7) on déduit qu'il existe un schéma de subdivision $\mathcal{S}^{[1]} := \{S_j^{[1]} : j \geq 0\}$ tel que

$$f_{j+1}^{[1]} = S_j^{[1]} f_j^{[1]}, \tag{4.4.10}$$

et les composantes de ses matrices sont données par la formule :

$$S_{j,k,\ell}^{[1]} := \frac{d_{j,\ell}}{d_{j+1,k}} D_{j,k,\ell}^{[1]} = \frac{d_{j,\ell}}{d_{j+1,k}} \sum_{i \geq \ell+1} (S_{j,k+1,i} - S_{j,k,i}). \tag{4.4.11}$$

Le schéma $\mathcal{S}^{[1]}$ est local, puisque $\mathcal{D}^{[1]}$ est local.

Si le schéma $\mathcal{S}^{[1]}$ est d'ordre supérieur ou égal à 1 (on dira alors que $\mathcal{S}$ est *d'ordre supérieur ou égal à* 2), on pourra définir un schéma de subdivision local $\mathcal{D}^{[2]} := \{D_j^{[2]} : j \geq 0\}$ tel que

$$\Delta f_{j+1}^{[1]} = D_j^{[2]} \Delta f_j^{[1]}, \tag{4.4.12}$$

et un schéma de subdivision $\mathcal{S}^{[2]} := \{S_j^{[2]} : \ j \geq 0\}$, également local, tel que

$$f_{j+1}^{[2]} = S_j^{[2]} f_j^{[2]}. \tag{4.4.13}$$

Soit P un entier positif. Si les schémas $\mathcal{S}^{[p]}$, $0 \leq p \leq P-1$, existent et si $\mathcal{S}^{[P-1]}$ reproduit les constantes (nous dirons alors que le schéma de subdivision $\mathcal{S}$ est *d'ordre supérieur ou égal à P*), nous pouvons construire les schémas $\mathcal{D}^{[P]} := \{D_j^{[P]} : \ j \geq 0\}$ et $\mathcal{S}^{[P]} := \{S_j^{[P]} : \ j \geq 0\}$, tels que :

$$\Delta f_{j+1}^{[P-1]} = D_j^{[P]} \Delta f_j^{[P-1]}, \quad f_{j+1}^{[P]} = S_j^{[P]} f_j^{[P]}. \tag{4.4.14}$$

Les composantes de leurs matrices de subdivision sont données par les formules de récurrence :

$$D_{j,k,\ell}^{[P]} := \sum_{i \geq \ell+1} (S_{j,k+1,i}^{[P-1]} - S_{j,k,i}^{[P-1]}), \tag{4.4.15}$$

respectivement

$$S_{j,k,\ell}^{[P]} := \frac{d_{j,\ell}^{[P]}}{d_{j+1,k}^{[P]}} D_{j,k,\ell}^{[P]} = \frac{d_{j,\ell}^{[P]}}{d_{j+1,k}^{[P]}} \sum_{i \geq \ell+1} (S_{j,k+1,i}^{[P-1]} - S_{j,k,i}^{[P-1]}). \tag{4.4.16}$$

Ces schémas sont locaux et on peut montrer par récurrence que :

$$D^{[p]}_{j,k,\ell} \neq 0 \;\Rightarrow\; -n_{\mathcal{S}} \leq 2\ell - k \leq n_{\mathcal{S}} - p. \tag{4.4.17}$$

Nous appellerons *schéma aux différences* les schémas $\mathcal{D}^{[p]}$, et *schémas dérivés* les schémas $\mathcal{S}^{[p]}$. De la relation (4.4.14) on déduit que pour tout $1 \leq p \leq 2N+2$ et $j \geq 0$ les matrices des schémas aux différences et des schémas dérivés vérifient la *formule de commutation* :

$$D^{[p]}_j \Delta = \Delta S^{[p-1]}_j. \tag{4.4.18}$$

Par analogie nous noterons $\widetilde{\mathcal{S}}^{[p]}$ les schémas dérivés et $\widetilde{\mathcal{D}}^{[p]}$ les schémas aux différences associés à la grille régulière. Ces schémas sont tous uniformes et stationnaires. Pour tout entier p, $1 \leq p \leq 2N+2$ les composantes de la matrice $\widetilde{S}^{[p]}$ du schéma $\widetilde{\mathcal{S}}^{[p]}$ s'écrivent :

$$\widetilde{S}^{[p]}_{k,\ell} := 2 \sum_{k \geq \ell+1} (\widetilde{S}^{[p-1]}_{k+1,i} - \widetilde{S}^{[p-1]}_{k,k}), \quad k, \ell \in \mathbb{Z}, \tag{4.4.19}$$

puisque $\widetilde{d}^{[p]}_{j,k} = p2^{-j}$.

Théorème 4.4.3 *Le schéma de Lagrange $\mathcal{S}$ est d'ordre supérieur ou égal à $2N+1$.*

Démonstration : On sait (voir remarque 4.4.1) que $\mathcal{S}$ reproduit les polynômes jusqu'au degré $2N+1$. Nous renvoyons à [16] pour la preuve du fait que ceci implique le résultat annoncé. ∎

4.4.2 La grille

Désormais, nous allons considérer un type particulier de grille non régulière, qui est l'image réciproque de la grille régulière $\widetilde{\mathcal{X}}$ par une fonction suffisamment lisse. Les éléments d'une telle grille $\mathcal{X}$ seront définis par :

$$x_{j,k} := G^{-1}(\widetilde{x}_{j,k}), \quad \forall j \geq 0,\ k \in \mathbb{Z}, \tag{4.4.20}$$

où la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction qui vérifie les deux propriétés suivantes :

($\mathbf{G}_1$) G est hölderienne d'ordre $\alpha > 1$,

($\mathbf{G}_2$) sa dérivée $g := G'$ satisfait $0 < m \leq g(x) \leq M$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les propriétés (G_1) et (G_2) englobent une large classe de fonctions. Un exemple simple (par rapport auquel nous prendrons plus tard nos illustrations numériques) en est fourni par la famille de fonctions $G_{\rho,\eta}(x) = x + \rho \sin \eta x$, quand ρ, η sont des réels positifs tels que $\rho\eta < 1$.

Notons qu'une fonction $G:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui satisfait (G_1) et (G_2) est toujours bijective. En effet, elle est strictement croissante (car $g>0$), donc injective. L'ensemble $G(\mathbb{R})$ est un intervalle ouvert. Supposons que $G(x)<A$, pour tout x. Le théorème des accroissements finis permet de trouver pour tout $x>0$ un $\xi_x\in[0,x]$ tel que $G(x)-G(0)=g(\xi_x)x$. On obtient alors que :

$$A\geq G(x)-G(0)=g(\xi_x)x\geq mx,\quad \forall x>0,$$

ce qui est faux. La fonction G ne peut pas être bornée supérieurement, et un raisonnement similaire montre qu'elle ne peut pas être bornée inférieurement. Elle est donc surjective. Ceci justifie la définition (4.4.20).

L'ensemble $\mathcal{X}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (comme image d'un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ par la fonction bijective et continue $G^{-1}:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$), imbriqué et les points à chaque niveau j sont ordonnés en ordre strictement croissant. C'est donc bien une grille, au sens donné au début de ce paragraphe.

Adopter des grilles du type (4.4.20) nous permettra de montrer la convergence des schémas interpolateurs de Lagrange associés, par comparaison avec le schéma de Lagrange uniforme et stationnaire de même degré (que nous désignerons par schéma de Lagrange régulier).

Notons que cette définition de la grille n'inclut pas une catégorie de grilles très simples, les *grilles semi-régulières*: quand les points $x_{0,k}$, $k\in\mathbb{Z}$, sont non équidistants, mais pour tout $k\in\mathbb{Z}$ le point $x_{j+1,2k+1}$ est le milieu de l'intervalle $[x_{j,k},x_{j,k+1}]$. Une étude de la convergence pour ce type de grille, dans les cas particuliers $N=1$ et $N=2$, a été menée dans [71].

Le lemme qui suit est une conséquence immédiate des propriétés (G_1) et (G_2).

Lemme 4.4.4 *Si la fonction G satisfait à* (G_1) *et* (G_2) *alors il existe une constante* $\lambda>0$ *telle que :*

$$\left|\frac{g(u)}{g(v)}-1\right|\leq\lambda|u-v|^{\alpha_1},\quad \forall u,v\in\mathbb{R},$$

avec $\alpha_1:=\min(\alpha-1,1)$.

Démonstration: La propriété (G_1) implique que $|g(u)-g(v)|\leq C|u-v|^{\alpha_1}$ et la propriété (G_2) implique que $g(v)\geq m>0$, pour tout $u,v\in\mathbb{R}$. Il suffit maintenant de diviser la première de ces deux inégalités par la seconde. ∎

Pour tout $j\geq 0$, $k\in\mathbb{Z}$ et p entier strictement positif, nous noterons :

$$d_{j,k}^{[p]}:=x_{j,k+p}-x_{j,k},\quad d_{j,k}:=d_{j,k}^{[1]},\tag{4.4.21}$$

les distances entre deux points de la grille éloignés de p positions (respectivement d'une position).

Lemme 4.4.5 *Soit $\mathcal{X}$ la grille définie en (4.4.20).*

(i) *Pour tout $j \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ et $p > 0$ on a :*

$$\frac{1}{M} 2^{-j} p \leq d_{j,k}^{[p]} \leq \frac{1}{m} 2^{-j} p. \tag{4.4.22}$$

(ii) *Soit $n \geq 0$ un entier fixé. Pour tout $p > 0$ il existe une constante $\gamma_p > 0$ telle que l'on ait :*

$$\left| \frac{d_{j,\ell}^{[p]}}{d_{j+1,k}^{[p]}} - 2 \right| \leq \gamma_p 2^{-\alpha_1 j}, \tag{4.4.23}$$

pour tout $j \geq 0$ et $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $-n \leq 2\ell - k \leq n - p$, où $\alpha_1 := \min(\alpha - 1, 1)$.

Le premier point de ce lemme montre que les distances convergent vers zéro quand $j \to \infty$, uniformément par rapport à k, avec une vitesse de l'ordre du 2^{-j}. Le deuxième point met en évidence le rapprochement entre cette grille et la grille régulière. En effet, la relation (4.4.23) peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\left| \frac{d_{j,\ell}^{[p]}}{d_{j+1,k}^{[p]}} - \frac{\widetilde{d}_{j,\ell}^{[p]}}{\widetilde{d}_{j+1,k}^{[p]}} \right| \leq \gamma_p 2^{-\alpha_1 j}.$$

Rappelons que rajouter un tilde signifie que la notation se réfère à la grille régulière.
Démonstration : (i) Soient $p > 0$, $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$ fixés. Le théorème des accroissements finis montre qu'il existe $\xi_{j,k}^{[p]} \in [x_{j,k}, x_{j,k+p}]$ tel que :

$$d_{j,k}^{[p]} = G^{-1}(\widetilde{x}_{j,k+p}) - G^{-1}(\widetilde{x}_{j,k}) = \frac{1}{g(\xi_{j,k}^{[p]})} 2^{-j} p.$$

La relation (4.4.22) est alors une conséquence immédiate de la propriété (G_2).

(ii) Soit $p > 0$ fixé. Comme au point précédent, pour tout $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$ il existe $\xi_{j,k}^{[p]} \in [x_{j,k}, x_{j,k+p}]$ tel que :

$$d_{j,k}^{[p]} = \frac{2^{-j} p}{g(\xi_{j,k}^{[p]})}.$$

Par application du lemme 4.4.4 on obtient que :

$$\left| \frac{d_{j,\ell}^{[p]}}{d_{j+1,k}^{[p]}} - 2 \right| = 2 \left| \frac{g(\xi_{j+1,k}^{[p]})}{g(\xi_{j,\ell}^{[p]})} - 1 \right| \leq 2\lambda |\xi_{j+1,k}^{[p]} - \xi_{j,\ell}^{[p]}|^{\alpha_1}. \tag{4.4.24}$$

Puisque $\xi_{j,\ell}^{[p]} \in [x_{j,\ell}, x_{j,\ell+p}]$ et $\xi_{j+1,k}^{[p]} \in [x_{j+1,k}, x_{j+1,k+p}]$, on a la majoration :

$$|\xi_{j+1,k}^{[p]} - \xi_{j,\ell}^{[p]}| \leq d_{j+1,\min(k,2\ell)}^{[r]},$$

avec

$$\begin{aligned} r &:= \max(k+p, 2\ell+2p) - \min(k, 2\ell) = \max(p, 2\ell-k+2p) - \min(0, 2\ell-k) \\ &\leq \max(p, n-p+2p) - \min(0, -n) = 2n+p. \end{aligned}$$

Du point (i) il résulte que

$$|\xi^{[p]}_{j+1,k} - \xi^{[p]}_{j,\ell}| \leq \frac{2n+p}{m} 2^{-j-1},$$

et grâce à (4.4.24) on obtient (4.4.23), avec $\gamma_p := 2\lambda[(2n+p)/(2m)]^{\alpha_1}$. ∎

4.5 Comportement asymptotique

Désormais, $\mathcal{S} = \{S_j : \ j \geq 0\}$ désignera le schéma de Lagrange de degré $2N+1$ relatif à la grille non régulière définie en (4.4.20) et $\widetilde{S}$ désignera la matrice du schéma de Lagrange uniforme et stationnaire $\widetilde{\mathcal{S}}$ de même degré.

Pour montrer la convergence l'idée essentielle sera de comparer d'une part le schéma $\mathcal{S}$ et ses schémas dérivés $\mathcal{S}^{[p]}$ aux schémas $\widetilde{\mathcal{S}}$ et à ses schémas dérivés $\widetilde{\mathcal{S}}^{[p]}$, et d'autre part la grille $\mathcal{X}$ à la grille régulière $\widetilde{X}$.

4.5.1 Équivalence asymptotique avec le schéma uniforme et stationnaire

Nous allons tout d'abord montrer que le schéma $\mathcal{S}$ est "asymptotiquement proche" du schéma de Lagrange uniforme et stationnaire $\widetilde{\mathcal{S}}$ au sens suivant :

Proposition 4.5.1 *Il existe une constante $\Sigma > 0$ telle que :*

$$\|S_j - \widetilde{S}\| \leq \Sigma 2^{-\alpha_1 j}, \quad \forall j \geq 0, \tag{4.5.1}$$

avec $\alpha_1 := \min(\alpha - 1, 1)$.

Pour la démonstration nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 4.5.2 *Pour tout $j \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ et $k-N \leq \ell \leq k+N+1$, on peut écrire :*

$$L_{j,k,\ell}(G^{-1}(t)) = c_{j,k,\ell}(t) \widetilde{L}_{j,k,\ell}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.5.2}$$

La fonction $c_{j,k,\ell}$ vérifie :

$$|c_{j,k,\ell}(t) - 1| \leq C 2^{-\alpha_1 j}, \quad \forall t \in [\widetilde{x}_{j,k-N}, \widetilde{x}_{j,k+N+1}], \tag{4.5.3}$$

avec une constante C indépendante de j, k, ℓ et t.

Démonstration : Soit $j \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ et $k-N \leq \ell \leq k+N+1$ fixés. Les relations (4.4.3) et (4.4.20) impliquent que :

$$L_{j,k,\ell}(G^{-1}(t)) = \prod_{\substack{i=k-N \\ i\neq\ell}}^{k+N+1} \frac{G^{-1}(t)-G^{-1}(\widetilde{x}_{j,i})}{G^{-1}(\widetilde{x}_{j,\ell})-G^{-1}(\widetilde{x}_{j,i})}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Soit un entier $i \neq \ell$, $i \in [k-N, k+N+1]$. Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction dérivable G^{-1} assure l'existence d'un $\xi_{j,i}(t)$ entre $G^{-1}(t)$ et $G^{-1}(\widetilde{x}_{j,i})$ et d'un $\rho_{j,i,\ell}$ entre $G^{-1}(\widetilde{x}_{j,\ell})$ et $G^{-1}(\widetilde{x}_{j,i})$ pour lesquels :

$$\frac{G^{-1}(t)-G^{-1}(\widetilde{x}_{j,i})}{G^{-1}(\widetilde{x}_{j,\ell})-G^{-1}(\widetilde{x}_{j,i})} = \frac{g(\rho_{j,i,\ell})}{g(\xi_{j,i}(t))}\frac{t-\widetilde{x}_{j,i}}{\widetilde{x}_{j,\ell}-\widetilde{x}_{j,i}}.$$

On obtient alors (4.5.2) avec

$$c_{j,k,\ell}(t) := \prod_{\substack{i=k-N \\ i\neq\ell}}^{k+N+1} \frac{g(\rho_{j,i,\ell})}{g(\xi_{j,i}(t))}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.5.4}$$

Du lemme 4.4.4 il résulte que pour tout entier $i \neq \ell$, $k-N \leq i \leq k+N+1$ on a :

$$\left| \frac{g(\rho_{j,i,\ell})}{g(\xi_{j,i}(t))} - 1 \right| \leq \lambda |\rho_{j,i,\ell} - \xi_{j,i}(t)|^{\alpha_1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.5.5}$$

Si $t \in [\widetilde{x}_{j,k-N}, \widetilde{x}_{j,k+N+1}]$ alors $\rho_{j,i,\ell}, \xi_{j,i}(t) \in [x_{j,k-N}, x_{j,k+N+1}]$ et on obtient par application du lemme 4.4.5 que :

$$|\rho_{j,i,\ell} - \xi_{j,i}(t)| \leq |x_{j,k+N+1} - x_{j,k-N}| \leq \frac{2N+1}{m} 2^{-j}. \tag{4.5.6}$$

Les relations (4.5.5) et (4.5.6) impliquent que pour tout entier $i \neq \ell$, $k-N \leq i \leq k+N+1$ et tout $t \in [\widetilde{x}_{j,k-N}, \widetilde{x}_{j,k+N+1}]$ on a :

$$\left| \frac{g(\rho_{j,i,\ell})}{g(\xi_{j,i}(t))} - 1 \right| \leq A 2^{-\alpha_1 j},$$

avec $A := \lambda((2N+1)/m)^{\alpha_1}$. Compte tenu de cette inégalité pour $i = k-N, \ldots, k+N+1$, $i \neq \ell$, et de (4.5.4), on obtient (4.5.3). ∎

Démonstration de la Proposition 4.5.1 : Soit $j \geq 0$, $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Quand $\ell < k-N$ ou $\ell > k+N+1$ on a $S_{j,2k+1,\ell} = \widetilde{S}_{j,2k+1,\ell} = 0$. Quand $k-N \leq \ell \leq k+N+1$, les relations (4.4.5) et (4.5.2) impliquent que :

$$\begin{aligned} |S_{j,2k+1,\ell} - \widetilde{S}_{j,2k+1,\ell}| &= |L_{j,k,\ell}(G^{-1}(\widetilde{x}_{j+1,2k+1})) - \widetilde{L}_{j,k,\ell}(\widetilde{x}_{j+1,2k+1})| \\ &= |c_{j,k,\ell}(\widetilde{x}_{j+1,2k+1}) - 1||\widetilde{L}_{j,k,\ell}(\widetilde{x}_{j+1,2k+1})|. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de remarquer que $|\widetilde{L}_{j,k,\ell}(\widetilde{x}_{j+1,2k+1})| < 1$ quand $k-N \leq \ell \leq k+N+1$ et d'utiliser la relation (4.5.3). ∎

Remarque 4.5.3 *La proposition 4.5.1 implique en particulier que tout schéma de Lagrange défini sur une grille de type (4.4.20) est borné. Le premier point du lemme 4.4.5 permet alors de montrer que tous ses schémas dérivés et leurs schémas aux différences sont bornés.*

4.5.2 Les schémas aux différences

Nous allons maintenant comparer asymptotiquement les schémas dérivés $\mathcal{S}^{[p]}$ et leurs schémas aux différences $\mathcal{D}^{[p+1]}$ avec les schémas $\widetilde{\mathcal{S}}^{[p]}$ et $\widetilde{\mathcal{D}}^{[p+1]}$ du cas régulier.

Proposition 4.5.4 *Pour tout entier $p \in [0, 2N+1]$, il existe deux constantes Σ_p et Σ'_p indépendantes de j telles que :*

$$\|S_j^{[p]} - \widetilde{S}^{[p]}\| \leq \Sigma_p 2^{-\alpha_1 j}, \quad \text{et} \tag{4.5.7}$$

$$\|D_j^{[p+1]} - \widetilde{D}^{[p+1]}\| \leq \Sigma'_{p+1} 2^{-\alpha_1 j}, \tag{4.5.8}$$

pour tout $j \geq 0$.

Démonstration : Le schéma $\mathcal{S}$ est local et $n_{\mathcal{S}} = 2N+1$ (remarque 4.4.1). Pour $p = 0$, la relation (4.5.7) a été montrée dans la proposition 4.5.1. La méthode de la récurrence permet alors de réduire la preuve à deux implications :

1. Si $\|S_j^{[p]} - \widetilde{S}^{[p]}\| \leq \Sigma_p 2^{-\alpha_1 j}$, alors $\|D_j^{[p+1]} - \widetilde{D}^{[p+1]}\| \leq \Sigma'_{p+1} 2^{-\alpha_1 j}$, avec $\Sigma'_{p+1} := (2n_{\mathcal{S}} - p + 1)\Sigma_p$.
2. Si $\|D_j^{[p]} - \widetilde{D}^{[p]}\| \leq \Sigma'_p 2^{-\alpha_1 j}$ alors $\|S_j^{[p]} - \widetilde{S}^{[p]}\| \leq \Sigma_p 2^{-\alpha_1 j}$, avec $\Sigma_p := 2M\Sigma_p/m + \|\widetilde{D}^{[p]}\|\gamma_p$.

1. Soit un entier $0 \leq p \leq 2N+1$ et supposons que $\|S_j^{[p]} - \widetilde{S}^{[p]}\| \leq \Sigma_p 2^{-\alpha_1 j}$. De la relation (4.4.15) on obtient que :

$$\begin{aligned} D_{j,k,\ell}^{[p+1]} - \widetilde{D}_{k,\ell}^{[p+1]} &= \sum_{i \geq \ell+1} (S_{j,k+1,i}^{[p]} - S_{j,k,i}^{[p]}) - \sum_{i \geq \ell+1} (\widetilde{S}_{k+1,i}^{[p]} - \widetilde{S}_{k,i}^{[p]}) \\ &= \sum_{i \geq \ell+1} (S_{j,k+1,i}^{[p]} - \widetilde{S}_{k+1,i}^{[p]}) + \sum_{i \geq \ell+1} (S_{j,k,i}^{[p]} - \widetilde{S}_{k,i}^{[p]}). \end{aligned}$$

Chacune de ces deux sommes a au plus $n_{\mathcal{S}} - (p-1)/2$ termes non nuls (relation (4.4.17)), ce qui implique que :

$$\|D_j^{[p+1]} - \widetilde{D}^{[p+1]}\| \leq (2n_{\mathcal{S}} - p + 1)\|S_j^{[p]} - \widetilde{S}^{[p]}\|.$$

Il suffit maintenant d'utiliser l'hypothèse $\|S_j^{[p]} - \widetilde{S}^{[p]}\| \leq \Sigma_p 2^{-\alpha_1 j}$.

2. Soit $1 \leq p \leq 2N+2$ et supposons que $\|D_j^{[p]} - \widetilde{D}^{[p]}\| \leq \Sigma'_p 2^{-\alpha_1 j}$. Soient $k, \ell \in \mathbb{Z}$ quelconques fixés. Si $2\ell - k < -n_{\mathcal{S}}$ ou si $2\ell - k > n_{\mathcal{S}} - p$, la relation (4.4.17) montre que

$$S_{j,k,\ell}^{[p]} - \widetilde{S}_{k,\ell}^{[p]} = 0. \tag{4.5.9}$$

Supposons maintenant que $-n_{\mathcal{S}} \leq 2\ell - k \leq n_{\mathcal{S}} - p$. De la relation (4.4.16) on obtient :

$$\begin{aligned} |S_{j,k,\ell}^{[p]} - \widetilde{S}_{k,\ell}^{[p]}| &= \left| \frac{d_{j,\ell}^{[p]}}{d_{j+1,k}^{[p]}} D_{j,k,\ell}^{[p]} - 2\widetilde{D}_{k,\ell}^{[p]} \right| \\ &= \left| \frac{d_{j,\ell}^{[p]}}{d_{j+1,k}^{[p]}} (D_{j,k,\ell}^{[p]} - \widetilde{D}_{k,\ell}^{[p]}) + (\frac{d_{j,\ell}^{[p]}}{d_{j+1,k}^{[p]}} - 2)\widetilde{D}_{k,\ell}^{[p]} \right| \\ &\leq \frac{d_{j,\ell}^{[p]}}{d_{j+1,k}^{[p]}} \|D_j^{[p]} - \widetilde{D}^{[p]}\| + \left| \frac{d_{j,\ell}^{[p]}}{d_{j+1,k}^{[p]}} - 2 \right| \cdot \|\widetilde{D}^{[p]}\|. \end{aligned}$$

Le schéma de subdivision $\widetilde{\mathcal{D}}^{[p]}$ est uniforme, stationnaire et borné, donc $\|\widetilde{D}^{[p]}\| < \infty$.

Compte tenu de l'hypothèse et du lemme 4.4.5 on obtient pour tout $k, \ell \in \mathbb{Z}$, $-n_{\mathcal{S}} \leq 2\ell - k \leq n_{\mathcal{S}} - p$, et tout $j \geq 0$ la majoration :

$$|S_{j,k,\ell}^{[p]} - \widetilde{S}_{k,\ell}^{[p]}| \leq \frac{2M}{m} \Sigma'_p 2^{-\alpha_1 j} + \gamma_p \|\widetilde{D}^{[p]}\| 2^{-\alpha_1 j}. \tag{4.5.10}$$

Les relations (4.5.9) et (4.5.10) impliquent que :

$$\|S_j^{[p]} - \widetilde{S}^{[p]}\| \leq \Sigma_p 2^{-\alpha_1 j}.$$

Par récurrence, on obtient que les relations (4.5.7) et (4.5.8) sont vérifiées, pour tout $p \in [0, 2N+1]$. ∎

Corollaire 4.5.5 *Pour tout $1 \leq p \leq 2N+2$ et tout $k \geq 1$, il existe une constante $C_{p,k}$ indépendante de j telle que :*

$$\|D_{j+k-1}^{[p]} \ldots D_j^{[p]} - (\widetilde{D}^{[p]})^k\|_\infty \leq C_{p,k} 2^{-\alpha_1 j}, \tag{4.5.11}$$

pour tout $j \geq 0$.

Démonstration : Nous montrerons (4.5.11) par récurrence sur k. Au rang $k = 1$ elle est vraie, car grâce à la relation (4.5.8) on a :

$$\|D_j^{[p]} - \widetilde{D}^{[p]}\|_\infty \leq n_{\mathcal{S}} \|D_j^{[p]} - \widetilde{D}^{[p]}\| \leq n_{\mathcal{S}} \Sigma'_p 2^{-\alpha_1 j}.$$

Supposons (4.5.11) vraie au rang $k \geq 1$. Pour simplifier les calculs nous noterons $B_{j,k}^{[p]} := D_{j+k-1}^{[p]} \ldots D_j^{[p]}$ et $\widetilde{B}_k^{[p]} := (\tilde{D}^{[p]})^k$. Alors

$$\begin{aligned} B_{j,k+1}^{[p]} - \widetilde{B}_{k+1}^{[p]} &= D_{j+k}^{[p]} B_{j,k}^{[p]} - \widetilde{D}^{[p]} \widetilde{B}_k^{[p]} \\ &= (D_{j+k}^{[p]} - \widetilde{D}^{[p]}) B_{j,k}^{[p]} + \widetilde{D}^{[p]} (B_{j,k}^{[p]} - \widetilde{B}_k^{[p]}). \end{aligned}$$

Les schémas de subdivision $\mathcal{B}_k^{[p]} := \{B_{j,k}^{[p]} : \ j \geq 0\}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_k^{[p]}$ sont locaux et bornés, dès lors que $\mathcal{D}^{[p]}$ et $\widetilde{\mathcal{D}}^{[p]}$ le sont (voir la remarque 4.5.3). L'hypothèse de récurrence et la proposition 4.5.4 nous permettent alors la majoration :

$$\begin{aligned} \|B_{j,k+1}^{[p]} - \widetilde{B}_{k+1}^{[p]}\|_\infty &\leq \|D_{j+k}^{[p]} - \widetilde{D}^{[p]}\|_\infty \|B_k^{[p]}\|_\infty + \|\widetilde{D}^{[p]}\|_\infty \|B_{j,k}^{[p]} - \widetilde{B}_k^{[p]}\|_\infty \\ &\leq (n_{\mathcal{S}} \Sigma_p' 2^{-\alpha_1 k} n_{\mathcal{B}_k^{[p]}} M_{\mathcal{B}_k^{[p]}} + C_{p,k} \|\widetilde{D}^{[p]}\|_\infty) 2^{-\alpha_1 j}. \end{aligned}$$

On obtient la relation (4.5.11) avec

$$C_{p,k+1} := n_{\mathcal{S}} \Sigma_p' 2^{-\alpha_1 k} n_{\mathcal{B}_k^{[p]}} M_{\mathcal{B}_k^{[p]}} + C_{p,k} \|\widetilde{D}^{[p]}\|_\infty.$$

■

4.6 Convergence du schéma de Lagrange non régulier

Les résultats obtenus dans le paragraphe précédent nous permettront de montrer la convergence du schéma de subdivision de Lagrange non régulier $\mathcal{S}$ par comparaison avec le schéma régulier $\widetilde{\mathcal{S}}$. Nous montrerons également que les fonctions produites par $\mathcal{S}$ ont le même nombre de dérivées que les fonctions produites par $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Désormais, nous supposerons que :

le schéma $\widetilde{\mathcal{S}}$ produit des fonctions C^P, pour un entier $0 \leq P \leq 2N+1$. (♣)

Le théorème 4.2.5 nous permet alors d'affirmer l'existence, pour tout entier $0 \leq p \leq P$, d'un entier $\widetilde{K}_p$ et d'un nombre $\widetilde{\mu}_p \in]0,1[$ tel que

$$\|(D^{[p+1]})^{\widetilde{K}_p}\|_\infty \leq \widetilde{\mu}_p. \tag{4.6.1}$$

La comparaison asymptotique avec $\widetilde{\mathcal{S}}$ et ses schémas dérivés conduit alors au résultat suivant :

Proposition 4.6.1 *Sous l'hypothèse (♣), soit p un entier fixé, $p \leq P$. Choisissons un nombre $\mu_p \in]0, \widetilde{\mu}_p[$ et soit $K_p := \widetilde{K}_p$. Il existe alors un entier $J_p \geq 0$ tel que*

$$\|D_{j+K_p-1}^{[p+1]} \ldots D_j^{[p+1]}\|_\infty \leq \mu_p, \quad \forall\, j \geq J_p.$$

Démonstration : Avec les notations du lemme 4.5.5, on veut justifier l'existence d'un entier $J_p \geq 0$ tel que $\|B_{j,K_p}^{[p+1]}\|_\infty \leq \mu_p$ pour tout $j \geq J_p$.

Le corollaire 4.5.5 implique qu'il existe une constante C_{p+1,K_p}, indépendante de J_p, telle que

$$\|B_{j,K_p}^{[p+1]} - \widetilde{B}_{K_p}^{[p+1]}\|_\infty \leq C_{p+1,K_p} 2^{-\alpha_1 j}.$$

Il existe alors un entier $J_p \geq 0$ tel que

$$\|B_{j,K_p}^{[p+1]} - \widetilde{B}_{K_p}^{[p+1]}\|_\infty \leq \mu_p - \widetilde{\mu}_p, \quad \forall\, j \geq J_p,$$

donc $\|B_{j,K_p}^{[p+1]}\|_\infty \leq \mu_p$, pour tout $j \geq J_p$. ∎

Théorème 4.6.2 *Sous l'hypothèse (♣), pour tout $p \leq P$, le schéma $\mathcal{S}^{[p]}$ converge uniformément au sens de la définition 4.3.1.*

Lemme 4.6.3 *Supposons l'hypothèse (♣) vérifiée pour un certain $P \geq 0$ et soit $p \leq P$. Pour tout $f_0 \in \ell^\infty$ notons $(f_j)_{j\geq 0}$ la suite construite par la relation $f_{j+1} := S_j^{[p]} f_j$. Avec les notations de la proposition 4.6.1 on a :*

$$\|\Delta f_j\|_\infty \leq H_p \widehat{\mu}_p^{j-J_p} \|\Delta f_{J_p}\|_\infty, \quad \forall\, j \geq J_p,\ \forall\, f_0 \in \ell^\infty, \tag{4.6.2}$$

avec $\widehat{\mu}_p := \mu_p^{1/K_p}$ et

$$\begin{aligned} H_p &:= \widehat{\mu}_p^{-K_p+1} \max(1, \|D_{J_p}^{[p+1]}\|_\infty, \ldots, \|D_{J_p+K_p-2}^{[p+1]} \ldots D_{J_p}^{[p+1]}\|_\infty) \\ &\leq \widehat{\mu}_p^{-K_p+1} \max(1, M_{\mathcal{D}^{[p+1]}}^{K_p-1}). \end{aligned}$$

Démonstration : Par itération de la relation (4.4.7) on obtient que :

$$\Delta f_{j+K_p} = D_{j+K_p-1}^{[p+1]} \ldots D_j^{[p+1]} \Delta f_j,$$

ce qui implique, en utilisant l'hypothèse, que pour tout $j \geq J_p$ on a :

$$\|\Delta f_{j+K_p}\|_\infty \leq \|D_{j+K_p-1}^{[p+1]} \ldots D_j^{[p+1]}\|_\infty \|\Delta f_j\|_\infty \leq \mu_p \|\Delta f_j\|_\infty.$$

L'itération de la dernière inégalité donne, pour tout $q \geq 0$, la relation :

$$\|\Delta f_{j+qK_p}\|_\infty \leq \mu_p^q \|\Delta f_j\|_\infty, \quad j \geq J_p. \tag{4.6.3}$$

Tout entier $j \geq J_p$ s'écrit sous la forme $j = J_p + qK_p + r$, avec $0 \leq r < K_p$. Puisque $\mu_p \in]0,1[$ et $q \geq (j - J_p - K_p + 1)/K_p$ on obtient que :

$$\|\Delta f_j\|_\infty \leq \mu_p^q \|\Delta f_{J_p+r}\|_\infty \leq \widehat{\mu}_p^{-K_p+1} \widehat{\mu}_p^{j-J_p} \|\Delta f_{J_p+r}\|_\infty.$$

En utilisant encore une fois la relation (4.4.7) on trouve que

$$\|\Delta f_{J_p+r}\|_\infty \leq \max(1, \|D_{J_p}^{[p+1]}\|_\infty, \ldots, \|D_{J_p+K_p-2}^{[p+1]} \ldots D_{J_p}^{[p+1]}\|_\infty).$$

La relation (4.6.2) résulte maintenant de deux dernières relations. ∎

Démonstration du Théorème 4.6.2 : Fixons un entier $p \in [0, P]$. Soit $f_0 = (f_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ un vecteur fixé dans ℓ^∞ et soit $(f_j)_{j\geq 0}$ la suite d'éléments $f_{j+1} := S_j^{[p]} f_j$. La fonction affine par morceaux F_j, définie dans (4.3.1), peut être écrite sous la forme :

$$F_j = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f_{j,\ell} \Lambda_{j,\ell}, \tag{4.6.4}$$

où, pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, $\Lambda_{j,\ell} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction affine sur chaque intervalle $[x_{j,k}, x_{j,k+1}]$ qui satisfait les conditions d'interpolation :

$$\Lambda_{j,\ell}(x_{j,k}) = \delta_{k,\ell}, \quad k, \ell \in \mathbb{Z}. \tag{4.6.5}$$

Pour montrer la convergence uniforme de la suite F_j, $j \geq 0$, nous évaluons d'abord la différence :

$$F_{j+1} - F_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{j+1,k} \Lambda_{j+1,k} - \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f_{j,\ell} \Lambda_{j,\ell}. \tag{4.6.6}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que pour tout entier ℓ on peut écrire:

$$\Lambda_{j,\ell} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} U_{j,k,\ell} \Lambda_{j+1,k}, \tag{4.6.7}$$

où

$$U_{j,k,\ell} := \Lambda_{j,\ell}(x_{j+1,k}) = \begin{cases} d_{j+1,2\ell-2}/d_{j,\ell-1} & \text{si } k = 2\ell-1, \\ 1 & \text{si } k = 2\ell, \\ d_{j+1,2\ell+1}/d_{j,\ell} & \text{si } k = 2\ell+1, \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$

sont les composantes des matrices du schéma de subdivision $\mathcal{U}$, le schéma de subdivision de Lagrange de degré 1 sur la grille $\mathcal{X}$. Utilisant l'égalité $f_{j+1} = S_j^{[p]} f_j$ et la relation (4.6.7), la relation (4.6.6) devient :

$$F_{j+1} - F_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big[\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} (S_{j,k,\ell}^{[p]} - U_{j,k,\ell}) f_{j,\ell} \Big] \Lambda_{j+1,k}.$$

Cette fonction est affine par morceaux et bornée (car $f_0 \in \ell^\infty$ et les schémas $\mathcal{S}$ et $\mathcal{U}$ sont bornés), donc le maximum sur chaque intervalle $[x_{j+1,k}, x_{j+1,k+1}]$ est atteint dans l'une ou l'autre des extrémités. Ceci implique que :

$$\|F_{j+1} - F_j\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} (S_{j,k,\ell}^{[p]} - U_{j,k,\ell}) f_{j,\ell}| = \|(S_j^{[p]} - U_j) f_j\|_\infty. \tag{4.6.8}$$

On peut écrire :

$$S_j^{[p]} - U_j = A_j \Delta, \quad \forall j \geq 0, \tag{4.6.9}$$

les composantes de la matrice A_j étant définies par :

$$A_{j,k,l} := \sum_{i \leq l} (U_{j,k,i} - S_{j,k,i}^{[p]}).$$

Les schémas $\mathcal{S}^{[p]}$ et $\mathcal{U}$ sont locaux et reproduisent les constantes. Donc, en particulier, les quantités $A_{j,k,l}$ sont bien définies. De plus, pour $2\ell > k + \max(n_{\mathcal{S}}, n_{\mathcal{U}})$ on a :

$$A_{j,k,l} := \sum_{i \in \mathbb{Z}} U_{j,k,i} - \sum_{i \in \mathbb{Z}} S_{j,k,i}^{[p]} = 1 - 1 = 0.$$

Puisque, quand $|k-2i| > \max(n_{\mathcal{S}}, n_{\mathcal{U}})$, on a $S_{j,k,i}^{[p]} = U_{j,k,i} = 0$, le schéma de subdivision $\mathcal{A} := \{A_j : \ j \geq 0\}$ est donc local et on a $n_{\mathcal{A}} \leq \max(n_{\mathcal{S}}, n_{\mathcal{U}})$. Le schéma $\mathcal{A}$ est également borné, puisque $\mathcal{S}^{[p]}$ et $\mathcal{U}$ sont bornés et locaux. Par suite, (4.6.8) donne :

$$\|F_{j+1} - F_j\|_\infty \leq \|A_j\|_\infty \|\Delta f_j\|_\infty. \tag{4.6.10}$$

Le lemme 4.6.3 nous dit qu'il existe une constante H_p telle que l'on soit assuré que $\|\Delta f_j\|_\infty \leq H_p \widehat{\mu}_p^{j-J_p} \|\Delta f_{J_p}\|_\infty$, pour tout $j \geq J_p$, avec $\widehat{\mu}_p \in]0,1[$. Il existe alors une constante $H_p' := H_p(n_{\mathcal{A}}+1)M_{\mathcal{A}}$ (indépendante de j et de f_0) telle que :

$$\|F_{j+1} - F_j\|_\infty \leq H_p' \, \widehat{\mu}_p^{j-J_p} \|\Delta f_{J_p}\|_\infty, \quad \forall j \geq J_p.$$

Il résulte alors que

$$\|F_{j+q} - F_j\|_\infty \leq C \widehat{\mu}_p^{j-J_p} \|\Delta f_{J_p}\|_\infty, \quad \forall j \geq J_p, \quad q \geq 0, \tag{4.6.11}$$

avec $C := H_p'/(1-\widehat{\mu}_p)$, ce qui implique la convergence uniforme de la suite de fonctions $(F_j)_{j \geq 0}$ sur $\mathbb{R}$. ∎

Soit $\mathcal{S}^{[p]} f_0$ la limite de la suite $(F_j)_{j \geq 0}$. Une conséquence immédiate de la relation (4.6.11) est que :

$$\|\mathcal{S}^{[p]} f_0 - F_j\|_\infty \leq C \widehat{\mu}_p^{j-J_p} \|\Delta f_{J_p}\|_\infty, \tag{4.6.12}$$

pour tout $j \geq J_p$.

Corollaire 4.6.4 *Sous l'hypothèse (♣), pour tout entier $p \in [0,P]$ et pour tout vecteur initial $f_0 \in \ell^\infty$, on a :*

$$\|\mathcal{S}^{[p]} f_0\|_\infty \leq C_p \| f_0\|_\infty, \tag{4.6.13}$$

où la constante C_p est indépendante de f_0. De plus, pour $p = 0$ on a :

$$\| f_0\|_\infty \leq \|\mathcal{S} f_0\|_\infty. \tag{4.6.14}$$

Démonstration : L'inégalité (4.6.14) résulte du fait que $\mathcal{S}$ est interpolatrice. Fixons un entier $p \in [0,P]$. Avec les notations du lemme 4.6.3, de (4.6.12) il résulte :

$$\|\mathcal{S}^{[p]} f_0\|_\infty \leq \|F_{J_p}\|_\infty + 2C\|f_{J_p}\|_\infty = (1+2C)\|f_{J_p}\|_\infty.$$

On obtient alors (4.6.13) du fait que $f_{J_p} = S^{[p]}_{J_p-1} \ldots S^{[p]}_0 f_0$ et que le schéma $\mathcal{S}^{[p]}$ est local et borné. ∎

La densité de la grille $\mathcal{X}$ nous permet d'utiliser le résultat suivant, pour la preuve duquel nous renvoyons à [16] (lemme 5) :

Lemme 4.6.5 ([16]). *Soit $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{[0]}$ un schéma de subdivision local et borné. Supposons que $\mathcal{T}$ est d'ordre supérieur ou égal à $P+1 \geq 1$, par rapport à la grille $\mathcal{X}$, et que $\mathcal{T}$ ainsi que ses schémas dérivés $\mathcal{T}^{[p]}$, $p \leq P$, convergent uniformément (au sens de la définition 4.3.1). Alors le schéma de subdivision $\mathcal{T}$ produit des fonctions C^P. Partant d'un vecteur $f_0 = f_0^{[0]} \in \ell^\infty$, notons $\mathcal{T}^{[p]} f_0^{[p]}$ la fonction limite produite par le schéma de subdivision $\mathcal{T}^{[p]}$ en partant du vecteur initial $f_0^{[p]}$. Les dérivées de $\mathcal{T} f_0$ vérifient la relation :*

$$(\mathcal{T} f_0)^{(p)} = p! \mathcal{T}^{[p]} f_0^{[p]}, \quad 1 \leq p \leq P. \tag{4.6.15}$$

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour montrer le théorème qui conclut ce paragraphe :

Théorème 4.6.6 *Sous l'hypothèse (♣), le schéma de subdivision de Lagrange $\mathcal{S}$ de degré $2N+1$ est uniformément convergent et produit des fonctions C^P.*

Démonstration : On applique le théorème 4.6.2 et le lemme 4.6.5. ∎

De fait on peut montrer que les fonctions limites obtenues sont plus que C^P.

Théorème 4.6.7 *Sous l'hypothèse (♣), pour tout vecteur $f_0 \in \ell^\infty$ la fonction limite $\mathcal{S} f_0$ du schéma de subdivision de Lagrange $\mathcal{S}$ satisfait la condition:*

$$|(\mathcal{S} f_0)^{(P)}(x) - (\mathcal{S} f_0)^{(P)}(y)| \leq \Gamma \|\Delta f_0\|_\infty |x-y|^\nu, \quad x,y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leq \frac{1}{M 2^{J_P}}, \tag{4.6.16}$$

avec une constante Γ indépendante de f_0 et avec $\nu := -\log_2 \widehat{\mu}_{P+1}$.

Démonstration : Grâce au lemme 4.6.5 on sait que $(\mathcal{S} f_0)^{(P)} = P! \mathcal{S}^{[P]} f_0^{[P]}$. Pour tout $j \geq 0$, soit $F_j^{[P]}$ la fonction affine sur chaque $[x_{j,k}, x_{j,k+1}]$ telle que $F_j^{[P]}(x_{j,k}) = f_{j,k}^{[P]}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $x,y \in \mathbb{R}$, $|x-y| \leq (M 2^{J_P})^{-1}$. Soit $u := G(x)$ et $v := G(y)$. On a :

$$|u-v| = |G(x) - G(y)| \leq M|x-y| \leq 2^{-J_P}.$$

L'intervalle $]0,2^{-J_P}]$ étant la réunion disjointe de tous les intervalles $]2^{-j-1},2^{-j}]$, $j \geq J_P$, il existe un unique $j_1 \geq J_P$ tel que

$$2^{-j_1-1} < |u-v| \leq 2^{-j_1}. \tag{4.6.17}$$

Avec ce j_1 particulier on peut écrire:

$$\begin{aligned} |(\mathcal{S}^{[P]} f_0^{[P]})(x) - (\mathcal{S}^{[P]} f_0^{[P]})(y)| \quad \leq \quad & |(\mathcal{S}^{[P]} f_0^{[P]})(x) - F_{j_1}^{[P]}(x)| \\ & + |(\mathcal{S}^{[P]} f_0^{[P]})(y) - F_{j_1}^{[P]}(y)| \\ & + |F_{j_1}^{[P]}(x) - F_{j_1}^{[P]}(y)|. \end{aligned} \tag{4.6.18}$$

La deuxième inégalité de (4.6.17) montre qu'il existe un entier k_0 qui est tel que $u,v \in [\widetilde{x}_{j_1,k_0}, \widetilde{x}_{j_1,k_0+2}[$. La fonction G étant strictement croissante, ceci implique que $x,y \in [x_{j_1,k_0}, x_{j_1,k_0+2}[$, ce qui permet d'écrire :

$$|F_{j_1}^{[P]}(x) - F_{j_1}^{[P]}(y)| \leq 2\|\Delta f_{j_1}^{[P]}\|_\infty \leq 2H_P \widehat{\mu}_P^{j_1-J_P} \|\Delta f_{J_P}^{[P]}\|_\infty,$$

grâce au fait que la fonction $F_{j_1}^{[P]}$ est affine par morceaux et au lemme 4.6.3.

De la relation (4.6.12), appliquée au schéma $\mathcal{S}^{[P]}$ et au vecteur $f_0^{[P]}$ on obtient que $|(\mathcal{S}^{[P]} f_0^{[P]})(x) - F_{j_1}^{[P]}(x)|$ et $|(\mathcal{S}^{[P]} f_0^{[P]})(y) - F_{j_1}^{[P]}(y)|$ sont bornées par $C\widehat{\mu}_P^{j_1-J_P}\|\Delta f_{J_P}^{[P]}\|_\infty$. De la relation (4.6.18) il résulte alors que :

$$|(\mathcal{S}^{[P]} f_0^{[P]})(x) - (\mathcal{S}^{[P]} f_0^{[P]})(y)| \leq L\widehat{\mu}_P^{j_1-J_P}\|\Delta f_{J_P}^{[P]}\|_\infty,$$

avec $L := 2C + 2H$.

De l'inégalité gauche de (4.6.17) on obtient que :

$$\widehat{\mu}_P^{j_1} = \left(2^{-j_1}\right)^{-\log_2 \widehat{\mu}_P} < \left(2|u-v|\right)^{-\log_2 \widehat{\mu}_P} \leq \left(2M|x-y|\right)^{-\log_2 \widehat{\mu}_P}.$$

On obtient alors (4.6.16) avec $\Gamma := P!L\widehat{\mu}_P^{-J_P-\log_2 M-1}\|D_{J_P-1}^{[P+1]}\ldots D_0^{[P+1]}\|_\infty$. ∎

Remarque 4.6.8 *Sous l'hypothèse (♣), μ_P vérifie :*

$$2^{-K_P} \leq \mu_P < 1. \tag{4.6.19}$$

En effet, supposons que $\mu_P < 2^{-K_P}$. Du théorème 4.6.7 on obtient alors que toute fonction limite $\mathcal{S}^{[P]} f_0^{[P]}$ serait lipschitzienne d'ordre $\nu > 1$, donc $\mathcal{S}^{[P]} f_0^{[P]}$ serait constante sur $\mathbb{R}$. Ceci est en contradiction avec des résultats qui concernent les fonctions fondamentales et que nous montrerons plus loin, dans la propriété 4.7.2.

Corollaire 4.6.9 *Soit P un entier, $0 \leq P \leq 2N+1$ et une grille définie par la relation (4.4.20). Si le schéma de subdivision de Lagrange uniforme et stationnaire $\widetilde{\mathcal{S}}$ de degré $2N+1$ converge uniformément et produit des fonctions dans C^P alors le schéma de subdivision de Lagrange $\mathcal{S}$ de même degré produit des fonctions hölderiennes d'ordre $P+\nu$, pour tout $\nu \in]0, -\frac{1}{K_P}\log_2 \widetilde{\mu}_P[$.*

Dans [16], les auteurs ne se sont intéressés qu'aux cas $N=1$ et $N=2$. Ici notre résultat est valable pour N arbitraire. Néanmoins, pour $N=1$ les hypothèses sur la grille utilisées dans l'article cité ci-dessus sont moins restrictives. A une grille $\mathcal{X}$ on peut associer les quantités :

$$\gamma := \sup_{j,k} \frac{\max(d_{j,k+1}, d_{j,k-1})}{d_{j,k}} \in [1, +\infty], \quad \beta := \inf_{j,k} \frac{\min(d_{j+1,2k}, d_{j+1,2k+1})}{d_{j,k}} \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

Pour une grille définie par (4.4.20) on trouve $\gamma \leq M/m$ et $\beta \geq m/(2M)$. Dans [16] les auteurs montrent que si $\gamma < +\infty$ (ce qui implique $\beta > 0$), le schéma interpolateur de Lagrange de degré 3 converge et produit des fonctions C^1. Qui plus est, pour $1 \leq \gamma \leq \gamma_0$, avec $\gamma_0 \approx 2.4$, les fonctions limites sont hölderiennes d'ordre $2-\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, qui est l'ordre optimal dans le cas régulier (voir [25]). Quand $\gamma_0 < \gamma < +\infty$, les fonctions limites sont hölderiennes d'ordre $1 + [\log(1-\beta)][\log\beta] - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. L'ordre dépend maintenant de β, donc de la grille. Pour $\beta = 1/2$ (grille régulière), ils obtiennent ainsi l'ordre optimal $2-\varepsilon$. Le résultat devient faible quand β est proche de 0. En nous limitant à des grilles définies par (4.4.20) nous obtenons l'ordre $1+\nu$, indépendamment de la grille, car cet ordre est dérivé du cas régulier ($\nu > 1.65$). Par notre méthode nous ne pouvons pas espérer obtenir l'ordre optimal, puisque même dans le cas régulier il n'est pas atteint par le théorème 4.2.7. Pour $N=2$, dans [16] il est montré que le schéma de Lagrange est convergent et produit des fonctions dans C^2 si γ est suffisamment proche de 1.

4.7 Les fonctions fondamentales

Soit N un entier positif. Désormais P désignera un entier positif tel que le schéma de subdivision interpolateur de Lagrange de degré N, uniforme et stationnaire, soit uniformément convergent et produise des fonctions C^P. Fixons un entier $j_0 \geq 0$. D'après le théorème 4.6.6, le schéma de subdivision $\mathcal{S}_{j_0} := \{S_j : \ j \geq j_0\}$ (de sorte que $\mathcal{S}_0 := \mathcal{S}$) est convergent et produit lui aussi des fonctions C^P. Pour s'en assurer, il suffit de considérer que la grille est celle définie dans la relation (4.4.20), en prenant la fonction

$$G_{j_0} := 2^{j_0} G \tag{4.7.1}$$

à la place de G. Notons que la fonction G_{j_0} satisfait les propriétés (G_1) et (G_2), avec $m_{j_0} = 2^{j_0} m$ et $M_{j_0} = 2^{j_0} M$.

On notera $\mathcal{S}_{j_0} f_0$ la fonction limite du schéma de subdivision $\mathcal{S}_{j_0}$ en partant de la suite f_0 et en utilisant la grille définie par G_{j_0}.

Notons, pour $k \in \mathbb{Z}$ donné, $\delta_{k,\cdot}$ le vecteur dont toutes les composantes sont nulles, sauf celle d'indice k qui vaut 1 (*i.e.*, le vecteur de composantes $\delta_{k,i}$, $i \in \mathbb{Z}$) et par $\varphi_{j_0,k}$ la fonction limite générée par $\mathcal{S}_{j_0}$ à partir des données $\delta_{k,\cdot}$ au niveau j_0, *i.e.*,

$$\varphi_{j_0,k} := \mathcal{S}_{j_0} \delta_{k,\cdot} \,. \tag{4.7.2}$$

Les fonctions $\varphi_{j_0,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, seront appelées les *fonctions fondamentales* du schéma de subdivision $\mathcal{S}$ au niveau j_0.

Proposition 4.7.1 *Les fonctions fondamentales sont de classe C^P et pour tout $j \geq 0$ et toute suite initiale $f_0 \in \ell^\infty$ on a :*

$$\mathcal{S}_j f_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{0,k} \varphi_{j,k}. \tag{4.7.3}$$

Elles vérifient de plus les propriétés suivantes :

(i) *elles sont uniformément bornées par* $B := \sup_{j \geq 0} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|\varphi_{j,k}\|_\infty < \infty$ *;*

(ii) *elles sont à support compact,* $\operatorname{supp} \varphi_{j,k} \subset [x_{j,k-n_S}, x_{j,k+n_S}]$, *pour tout $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$;*

(iii) *pour tout $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$ on a la relation de raffinement :*

$$\varphi_{j,k} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} S_{j,\ell,k} \varphi_{j+1,\ell} \; ; \tag{4.7.4}$$

(iv) *pour tout $j \geq 0$ on a :*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_{j,k} \equiv 1 \; ; \tag{4.7.5}$$

(v) *elles sont interpolatrices, i.e., pour tout $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$ on a :*

$$\varphi_{j,k}(x_{j,\ell}) = \delta_{k,\ell}, \quad \forall \, \ell \in \mathbb{Z}. \tag{4.7.6}$$

Démonstration : Le schémas $\mathcal{S}_j$ produisant des fonctions C^P, les fonctions $\varphi_{j,k}$ sont C^P. La relation (4.7.3) vient du fait que tout $f_0 \in \ell^\infty$ s'écrit aussi sous la forme : $f_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{0,k} \delta_{k,\cdot}$. On applique maintenant le schéma de subdivision $\mathcal{S}_j$ au vecteur f_0.

(i) Du corollaire 4.6.4 il résulte que $B := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|\varphi_{0,k}\|_\infty \leq C_0 < \infty$. Pour $j > 0$ on applique le même corollaire au schéma $\mathcal{S}_j$, avec la fonction de grille G_j. Les constantes sont les mêmes dans les deux cas, sauf J_0 qui décroît vers 0 quand j croit.

(ii) Il suffit de montrer le résultat pour $j = 0$, car pour tout $j > 0$, $\mathcal{S}_j$ est le schéma de subdivision de Lagrange sur la grille définie par la fonction G_j.

Soit $k \in \mathbb{Z}$ fixé, $f_0 := \delta_{k,\cdot}$ et soit $(f_j)_{j\geq 0}$ la suite dont les éléments sont définis par $f_{j+1} := S_j f_j$. Notons $(F_j)_{j\geq 0}$ la suite de fonctions affines par morceaux définies en (4.3.1). Nous montrerons d'abord, par récurrence, que pour tout $j \geq 0$:

$$f_{j,i} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 2^j k - (2^j - 1)n_{\mathcal{S}} \leq i \leq 2^j k + (2^j - 1)n_{\mathcal{S}}, \tag{4.7.7}$$

Au rang $j = 0$ on obtient :

$$f_{0,i} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad k \leq i \leq k,$$

ce qui est évidemment vrai. Supposons (4.7.7) vérifiée au rang j et soit $\ell \in \mathbb{Z}$ un entier tel que $f_{j+1,\ell} \neq 0$, ou encore tel que

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} S_{j,\ell,i} f_{j,i} = \sum_{|\ell-2i|\leq n_{\mathcal{S}}} S_{j,\ell,i} f_{j,i} \neq 0.$$

Il existe alors un entier i, $|\ell - 2i| \leq n_{\mathcal{S}}$ tel que $f_{j,i} \neq 0$. A partir de (4.7.7) et de $|\ell - 2i| \leq n_{\mathcal{S}}$, on vérifie facilement que

$$2^{j+1}k - (2^{j+1} - 1)n_{\mathcal{S}} \leq \ell \leq 2^{j+1}k + (2^{j+1} - 1)n_{\mathcal{S}}.$$

Du fait de (4.7.7) on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} F_j &\subset [x_{j,2^j k-(2^j-1)n_{\mathcal{S}}-1}, x_{j,2^j k+(2^j-1)n_{\mathcal{S}}+1}] \\ &= [G^{-1}(k - n_{\mathcal{S}} + (n_{\mathcal{S}} - 1)2^{-j}), G^{-1}(k + n_{\mathcal{S}} - (n_{\mathcal{S}} - 1)2^{-j})] \\ &\subset [G^{-1}(k - n_{\mathcal{S}}), G^{-1}(k + n_{\mathcal{S}})] = [x_{0,k-n_{\mathcal{S}}}, x_{0,k+n_{\mathcal{S}}}], \end{aligned}$$

pour tout $j \geq 0$, la dernière inclusion étant une conséquence de la croissance de la fonction G. La fonction $\varphi_{0,k}$ étant la limite uniforme de la suite $(F_j)_{j\geq 0}$, son support sera inclus dans $[x_{0,k-n_{\mathcal{S}}}, x_{0,k+n_{\mathcal{S}}}]$.

(iii) Soient $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$ fixés et la suite $f_0 := \delta_{k,\cdot}$. Soit $f_1 = S_j f_0$. Pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$ on a :

$$f_{1,\ell} := \sum_{i\in\mathbb{Z}} S_{j,\ell,i} f_{0,i} = S_{j,\ell,k},$$

d'où on obtient que $f_1 = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} S_{j,\ell,k}\delta_{\ell,\cdot}$. En appliquant le schéma de subdivision $\mathcal{S}_{j+1}$ au vecteur f_1, on obtient d'une part :

$$\mathcal{S}_{j+1} f_1 = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} S_{j,\ell,k} \mathcal{S}_{j+1}\delta_{\ell,\cdot} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} S_{j,\ell,k}\varphi_{j+1,\ell},$$

et d'autre part :

$$\mathcal{S}_{j+1} f_1 = \mathcal{S}_j f_0 = \varphi_{j,k}.$$

Les deux dernières relations impliquent (4.7.4).

(iv) est le cas particulier de (4.7.4) correspondant à $f_{0,k} = 1$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas $\mathcal{S}_j f_0 = 1$, car $\mathcal{S}_j$ reproduit à chaque pas les constantes et l'ensemble $\mathcal{X}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(v) résulte directement du fait que les schémas de subdivision $\mathcal{S}_j$ sont interpolateurs.

■

Considérons maintenant les schémas dérivés. Pour tout $j_0 \geq 0$ et $0 \leq p \leq 2N+2$, on peut définir les schémas $\mathcal{S}_{j_0}^{[p]} := \{S_j^{[p]} : \ j \geq j_0\}$ (de sorte que $\mathcal{S}_0^{[p]} := \mathcal{S}^{[p]}$). Quand $p \leq P$, ces schémas de subdivision sont convergents. Pour toute suite bornée f_0, on notera par $\mathcal{S}_{j_0}^{[p]} f_0$ la limite obtenue par application du schéma de subdivision $\mathcal{S}_{j_0}^{[p]}$ à la suite f_0. Comme nous l'avons déjà fait pour les schémas $\mathcal{S}_{j_0}$, pour tout $1 \leq p \leq P$ nous pouvons définir les fonctions fondamentales du schéma de subdivision $\mathcal{S}_j^{[p]}$:

$$\varphi_{j_0,k}^{[\sharp p]} := \mathcal{S}_{j_0}^{[p]} \delta_{k,\bullet},$$

pour tout $j_0 \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$. Mis à part qu'elles ne sont plus interpolatrices, elles satisfont des propriétés analogues à celles listées dans le cas $p = 0$.

Proposition 4.7.2 *Pour tout entier $p \in [0, P]$ les fonctions fondamentales du schéma de subdivision $\mathcal{S}_j^{[p]}$ sont de classe C^{P-p} et pour tout $j_0 \geq 0$ et toute suite initiale $f_0 \in \ell^\infty$ on a :*

$$\mathcal{S}_j^{[p]} f_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{0,k} \varphi_{j,k}^{[\sharp p]}. \tag{4.7.8}$$

Elles vérifient de plus les propriétés suivantes :

(i) *elles sont uniformément bornées par* $B_p := \sup_{j \geq 0} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|\varphi_{j,k}^{[\sharp p]}\|_\infty < \infty$;

(ii) *elles sont à support compact,* $\operatorname{supp} \varphi_{j,k}^{[\sharp p]} \subset [x_{j,k-n_S+p}, x_{j,k+n_S}]$, *pour tout $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$;*

(iii) *pour tout $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$ on a la relation de raffinement :*

$$\varphi_{j,k}^{[\sharp p]} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} S_{j,\ell,k}^{[p]} \varphi_{j+1,\ell}^{[\sharp p]} ; \tag{4.7.9}$$

(iv) *pour tout $j \geq 0$ on a :*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_{j,k}^{[\sharp p]} \equiv 1. \tag{4.7.10}$$

Si on applique le schéma $\mathcal{S}_j^{[p]}$, $p \leq P$, à la suite $f_0^{[p]}$ des différences divisées d'ordre p d'une suite bornée f_0, on obtient la fonction limite $\mathcal{S}_j^{[p]} f_0^{[p]} = 1/p!(\mathcal{S}_j f_0)^{(p)}$ (grâce au lemme 4.6.5). Cette fonction peut être écrite maintenant de deux façons, en utilisant soit les fonctions fondamentales du schéma $\mathcal{S}$, soit les fonctions fondamentales du schéma $\mathcal{S}^{[p]}$:

$$\mathcal{S}_j^{[p]} f_0^{[p]} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{0,k}^{[p]} \varphi_{j,k}^{[\sharp p]} = \frac{1}{p!}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{0,k}\varphi_{j,k}\Big)^{(p)}. \tag{4.7.11}$$

Pour tout $p \leq P$, conformément aux notations du théorème 4.6.5, on notera $\varphi_{j,k}^{[p]}$ la limite produite par le schéma $\mathcal{S}_j^{[p]}$ à partir des données $\delta_{k,\bullet}^{[p]}$ (différences divisées d'ordre p de $\delta_{k,\bullet}$) :

$$\varphi_{j,k}^{[p]} := \mathcal{S}_j^{[p]} \delta_{k,\bullet}^{[p]}. \tag{4.7.12}$$

Comme cas particulier de l'égalité (4.7.11), on obtient pour $f_0 := \delta_{k,\bullet}$:

$$\varphi_{j,k}^{[p]} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{k,i}^{[p]} \varphi_{j,k}^{[\sharp p]} = \frac{1}{p!}\varphi_{j,k}^{(p)}. \tag{4.7.13}$$

Par exemple, pour $p = 0$ on trouve :

$$\varphi_{j,k}^{[0]} = \varphi_{j,k}^{[\sharp 0]} = \varphi_{j,k},$$

et pour $p = 1$:

$$\varphi_{j,k}^{[1]} = \frac{1}{d_{j,k-1}^{[1]}} \varphi_{j,k-1}^{[\sharp 1]} - \frac{1}{d_{j,k}^{[1]}} \varphi_{j,k}^{[\sharp 1]} = \varphi'_{j,k}.$$

4.8 L'ordre d'approximation

Soit $n \geq 1$ un entier et $F \in C^n$, bornée. Supposons qu'on dispose du vecteur f_{j_0} de composantes $f_{j_0,k} := F(x_{j_0,k})$, $k \in \mathbb{Z}$, de valeurs de F dans les points $x_{j_0,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, de la grille $\mathcal{X}$, pour un $j_0 \geq 0$ fixé. Nous cherchons une approximation de F. Pour ce faire, choisissons un entier $N \geq 0$ tel que $n \leq 2N+2$ et soit $\mathcal{S}$ le schéma de subdivision de Lagrange de degré $2N+1$. Soit P le plus grand entier tel que $\widetilde{\mathcal{S}}$ produit des fonctions C^P. Choisissons comme approximation de F la fonction $\mathcal{S}_{j_0} f_{j_0}$, construite par le schéma de subdivision interpolateur de Lagrange, à partir de la suite $f_{j_0} \in \ell_\infty$. Le théorème suivant donne une majoration de *l'erreur d'approximation ponctuelle* de F et de chacune de ses dérivées $F^{(p)}$, pour tout $p \leq P$, par $\mathcal{S}_{j_0} f_{j_0}$, respectivement $p!\mathcal{S}_{j_0}^{[p]} f_{j_0}^{[p]}$, c'est-à-dire, en un point x, la quantité :

$$|(F^{(p)} - p!\mathcal{S}_{j_0}^{[p]} f_{j_0}^{[p]})(x)|.$$

Notons que, au niveau de départ j_0, les composantes du vecteur $f_{j_0}^{[p]}$ sont

$$f_{j_0,k}^{[p]} := [x_{j_0,k}, \ldots, x_{j_0,k+p}]F,$$

les différences divisées d'ordre p de F par rapport aux points $x_{j_0,k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Théorème 4.8.1 *Pour tout entier p, $0 \leq p \leq P$ et tout x fixé dans $\mathbb{R}$, il existe une constante $C_{F,x,p}$ telle que :*

$$|(F^{(p)} - (\mathcal{S}_{j_0} f_{j_0})^{(p)})(x)| = |(F^{(p)} - p!\mathcal{S}_{j_0}^{[p]} f_{j_0}^{[p]})(x)| \leq C_{F,x,p} 2^{-(n-p)j_0}, \qquad (4.8.1)$$

pour tout $j_0 \geq 0$.

Démonstration : Soit p un entier fixé, $0 \leq p \leq P$, et x un réel fixé. L'égalité de gauche dans (4.8.1) provient simplement du lemme 4.6.5. Soit

$$T(y) := F(x) + \frac{y-x}{1!}F'(x) + \cdots + \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(x)$$

le polynôme de Taylor de degré $n-1$ de F en x. On a, pour $H := F - T$:

$$H^{(i)}(x) = 0,\ 0 \leq i \leq n-1, \quad \text{et} \quad H^{(n)} = F^{(n)}. \qquad (4.8.2)$$

L'erreur d'approximation au point x est linéaire puisque le schéma $\mathcal{S}_{j_0}$ est linéaire. Elle est nulle sur la fonction T puisque le schéma $\mathcal{S}_{j_0}$ reproduit les polynômes jusqu'au degré $2N+1 \geq n-1$. Donc l'erreur d'approximation de $F^{(p)}(x)$ par $(\mathcal{S}_{j_0} f_{j_0})^{(p)})(x)$ est égale à celle de $F^{(p)}(x)$ par $(\mathcal{S}_{j_0} h_{j_0})^{(p)})(x)$, où

$$h_{j_0} := (H(x_{j_0,k}))_{k\in\mathbb{Z}}.$$

En tenant compte de (4.8.2) et de (4.7.8), on obtient :

$$F^{(p)}(x) - p!\mathcal{S}_{j_0}^{[p]} f_{j_0}^{[p]}(x) = -p!(\mathcal{S}_{j_0}^{[p]} h_{j_0}^{[p]})(x) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} p! h_{j_0,k}^{[p]} \varphi_{j_0,k}^{[\sharp p]}(x). \qquad (4.8.3)$$

D'après la proposition 4.7.2, la fonction $\varphi_{j_0,k}$ a pour support $[x_{j_0,k-n_{\mathcal{S}}+p}, x_{j_0,k+n_{\mathcal{S}}}]$ et est continue. Le point x se trouve à l'intérieur de ce support si et seulement si

$$k \in]2^{j_0}G(x) - n_{\mathcal{S}}, 2^{j_0}G(x) + n_{\mathcal{S}} - p[,$$

soit au plus $2n_{\mathcal{S}} - p$ possibilités. En utilisant la proposition 4.7.2, (i), l'égalité (4.8.3) conduit donc à la majoration :

$$|F^{(p)}(x) - (\mathcal{S}_{j_0} f_{j_0})^{(p)}(x)| \leq (2n_{\mathcal{S}} - p) B_p p! |h_{j_0,k_p}^{[p]}|, \qquad (4.8.4)$$

pour un certain entier $k_p \in]2^{j_0}G(x) - n_{\mathcal{S}}, 2^{j_0}G(x) + n_{\mathcal{S}} - p[$. Puisque

$$h^{[p]}_{j_0,k_p} = [x_{j_0,k}, \ldots, x_{j_0,k+p_p}]H,$$

les propriétés des différences divisées impliquent l'existence d'un $\xi_p \in [x_{j_0,k_p}, x_{j_0,k_p+p}]$ tel que :

$$p!h^{[p]}_{j_0,k_p} = H^{(p)}(\xi_p). \tag{4.8.5}$$

Par ailleurs, grâce à (4.8.2), un développement limité d'ordre $n-p$ de $H^{(p)}$ en x donne :

$$|H^{(p)}(\xi_p)| = \frac{|\xi_p - x|^{n-p}}{(n-p)!}|F^{(n)}(y_p)|, \tag{4.8.6}$$

le réel y_p étant situé entre ξ_p et x. Du fait que $k_p \in]2^{j_0}G(x) - n_{\mathcal{S}}, 2^{j_0}G(x) + n_{\mathcal{S}} - p[$, on déduit que :

$$x_{j_0,k_p} > G^{-1}(G(x) - 2^{-j_0}n_{\mathcal{S}}) = x - 2^{-j_0}n_{\mathcal{S}}(G^{-1})'(\xi),$$

$$x_{j_0,k_p+p} < G^{-1}(G(x) + 2^{-j_0}n_{\mathcal{S}}) = x + 2^{-j_0}n_{\mathcal{S}}(G^{-1})'(\eta),$$

pour certains réels ξ, η. Par conséquent, l'intervalle $[2^{j_0}G(x) - n_{\mathcal{S}}, 2^{j_0}G(x) + n_{\mathcal{S}} - p]$ est tout entier contenu dans l'intervalle

$$I := \left[x - \frac{n_{\mathcal{S}}}{m2^{j_0}}, x + \frac{n_{\mathcal{S}}}{m2^{j_0}}\right],$$

et le point y_p lui-même est dans I. En tenant compte de (4.8.5) et (4.8.6) la majoration (4.8.4) donne donc facilement :

$$|F^{(p)}(x) - (\mathcal{S}_{j_0}f_{j_0})^{(p)}(x)| \leq 2^{-(n-p)j_0}B_p\frac{(2n_{\mathcal{S}} - p)n_{\mathcal{S}}^{n-p}}{m^{n-p}(n-p)!}\sup_{y\in I}|F^{(n)}(y)|.$$

■

Notons que si la dérivée $F^{(n)}$ est uniformément bornée, alors la constante $C_{F,x,p}$ ne dépend pas de x. En augmentant le degré du schéma de subdivision jusqu'à ce que $P \geq n-1$, on obtient que $\mathcal{S}_{j_0}f_{j_0}$ approche F, et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ approchent les dérivées de F.

Ci-dessous nous donnons quelques exemples d'approximation d'une fonction F par la fonction $\mathcal{S}_{j_0}f_{j_0}$. En fait, nous utilisons la variante adaptée à l'intervalle du schéma de subdivision de Lagrange (voir [67]). La fonction F est représentée en pointillé. Les points $(x_{6,k}, f_{6,k})$ sont représentés avec des "+", sur le graphe de la fonction. L'approximation $\mathcal{S}_6 f_6$ est dessinée en ligne continue.

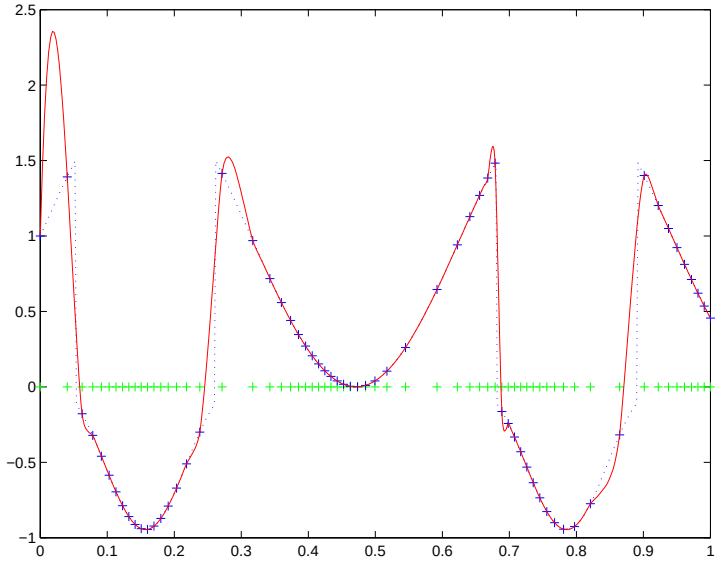


FIG. 4.5 – *Approximation construite en utilisant le schéma de degré* 3 *et la fonction de grille* $G(x) = x + \frac{1}{10\pi}\sin(7\pi x + \pi)$.

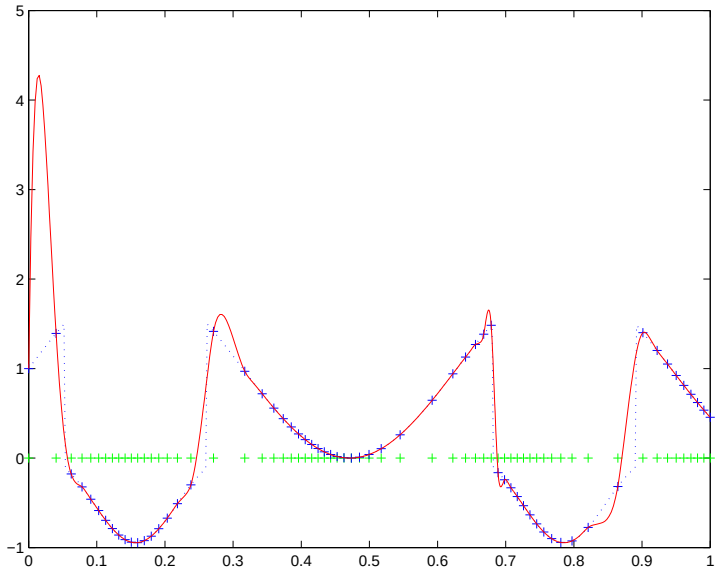


FIG. 4.6 – *Approximation construite en utilisant le schéma de degré* 5 *et la fonction de grille* $G(x) = x + \frac{1}{10\pi}\sin(7\pi x + \pi)$.

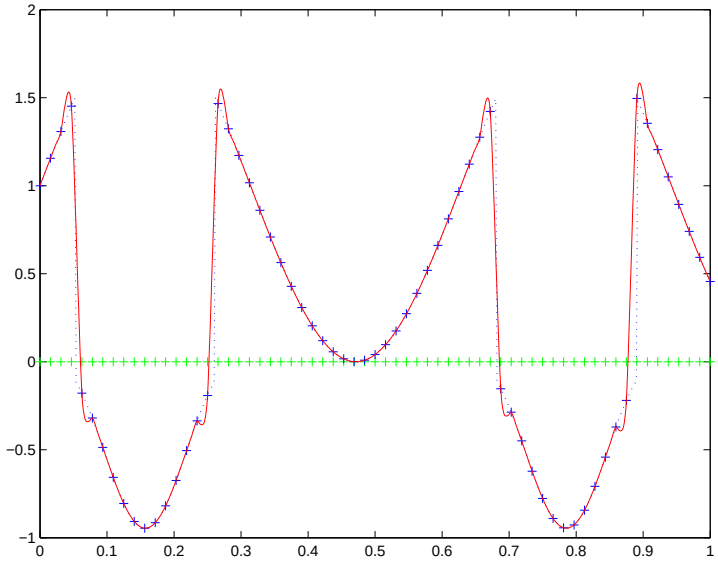


FIG. 4.7 – *Approximation construite en utilisant le schéma régulier de degré* 3.

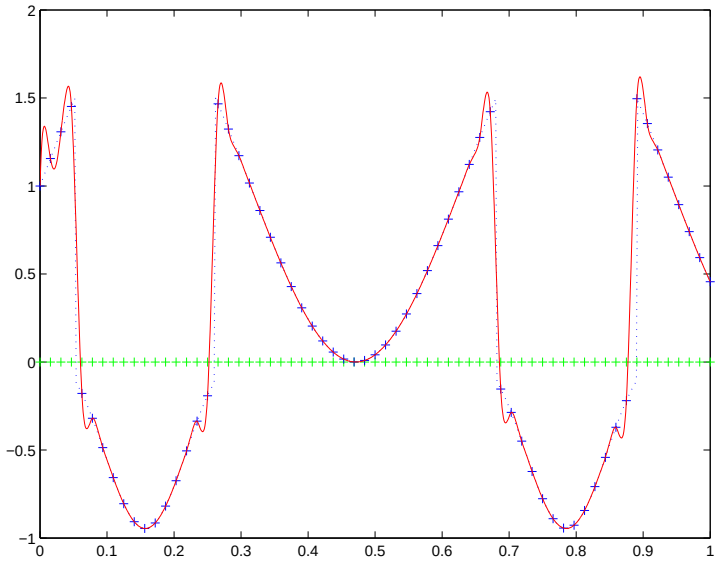


FIG. 4.8 – *Approximation construite en utilisant le schéma régulier de degré* 5.

La fonction que nous avons considéré ici est discontinue, ce qui nous permet de voir comment le schéma se comporte au voisinage des discontinuités. On voit que l'approximation peut y être de mauvaise qualité, alors qu'elle est très bonne dans les régions lisses de la fonction, même en utilisant un nombre relativement petit de points d'interpolation. Cette perte de qualité d'approximation au voisinage d'une discontinuité est

accentuée si la discontinuité est proche d'un bord de l'intervalle ou si la grille présente à cet endroit une grande inhomogénéité (*i.e.*, des valeurs soit grandes soit proches de 0 pour les rapports $d_{j,k}/d_{j,k+1}$). Elle augmente avec le degré du schéma de subdivision.

4.9 Le schéma de subdivision interpolateur en moyenne non régulier

Dans cette section nous revenons au schéma de subdivision que nous avons introduit dans l'exemple 4.1.6 et nous rappellerons comment il peut être généralisé à des grilles quelconques. Nous montrerons que si la grille est du type (4.4.20), alors le schéma non régulier est convergent.

Soit $\mathcal{X}$ une grille quelconque au sens de la section 4.3 .

Soit un entier $N \geq 0$ et un vecteur initial f_0. Supposons construit le vecteur f_j. Pour un $k \in \mathbb{Z}$ fixé, soit $Q_{j,k}$ la fonction polynomiale (unique) de degré au plus $2N$ définie par :

$$\frac{1}{x_{j,\ell+1}-x_{j,\ell}} \int_{x_{j,\ell}}^{x_{j,\ell+1}} Q_{j,k}(x)dx = f_{j,\ell}, \quad \text{pour } \ell = k-N,\ldots,k+N.$$

On assigne à $f_{j+1,2k}$ et $f_{j+1,2k+1}$ les moyennes pondérées de cette fonction polynomiale sur les sous-intervalles $[x_{j+1,2k}, x_{j+1,2k+1}]$ et $[x_{j+1,2k+1}, x_{j+1,2k+2}]$ de $[x_{j,k}, x_{j,k+1}]$:

$$\begin{aligned} f_{j+1,2k} &= \frac{1}{x_{j+1,2k+1}-x_{j+1,2k}} \int_{x_{j+1,2k}}^{x_{j+1,2k+1}} Q_{j,k}(x)dx \\ f_{j+1,2k+1} &= \frac{1}{x_{j+1,2k+2}-x_{j+1,2k+1}} \int_{x_{j+1,2k+1}}^{x_{j+1,2k+2}} Q_{j,k}(x)dx. \end{aligned}$$

On construit ainsi le vecteur f_{j+1} et, par récurrence, la suite $(f_j)_{j\geq 0}$. Puisque chaque $f_{j+1,k}$ est une combinaison linéaire des valeurs $f_{j,\ell}$, $\ell = k-N,\ldots,k+N$, l'algorithme que nous venons de décrire est bien un schéma de subdivision, que nous appellerons *le schéma de subdivision interpolateur en moyenne de degré* $2N$, relatif à la grille $\mathcal{X}$. Nous le noterons par $\mathcal{A} := \{A_j : \ j \geq 0\}$. Pour $j_0 \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$ fixés, la colonne ℓ de la matrice A_{j_0} peut être calculée par la formule :

$$f_{j+1} = A_j f_j,$$

appliquée au vecteur $f_{j_0} := \delta_{\ell,\cdot}$. On obtient :

$$A_{j_0,k,\ell} = f_{j_0+1,k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{4.9.1}$$

La composante $A_{j_0,k,\ell}$ de la matrice A_{j_0} est non nulle seulement si

$$\left[\frac{k}{2}\right] - N \leq \ell \leq \left[\frac{k}{2}\right] + N,$$

ou encore,

$$-2N-1 \leq 2\ell - k \leq 2N. \tag{4.9.2}$$

En particulier, ceci implique que le schéma $\mathcal{A}$ est local, avec $n_{\mathcal{A}} = 2N$.

Notons que si l'on part des données initiales

$$f_{0,k} = \frac{1}{x_{0,k+1} - x_{0,k}} \int_{x_{0,k}}^{x_{0,k+1}} \pi(x)dx, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{4.9.3}$$

où π est une fonction polynomiale de degré inférieur où égal à $2N$, alors $Q_{j,k} = \pi$, pour tout $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$. Notons par $\overline{F}_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction constante par morceaux telle que

$$\overline{F}_j(x) = f_{j,k}, \quad ,\forall x \in [x_{j,k}, x_{j,k+1}]. \tag{4.9.4}$$

Pour tout $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$, on obtient alors :

$$\int_{x_{j,k}}^{x_{j,k+1}} \pi(x)dx = \int_{x_{j,k}}^{x_{j,k+1}} \overline{F}_j(x)dx.$$

Cette égalité nous fait penser que le schéma interpolateur en moyenne reproduit les polynômes jusqu'au degré $2N$, à partir des moyennes, *i.e.*, pour tout $\pi \in \mathcal{P}_{2N}$, si f_0 est défini par (4.9.3) alors $\mathcal{A} f_0 = \pi$. Nous y reviendrons.

4.9.1 Lien avec le schéma de Lagrange

Le schéma interpolateur en moyenne est étroitement lié au schéma de Lagrange, comme le montre le résultat suivant, prouvé pour la cas uniforme dans [27], et pour le cas des grilles quelconques dans [57].

Théorème 4.9.1 *Le schéma de subdivision interpolateur en moyenne de degré* $2N$*, coïncide avec le schéma dérivé* $\mathcal{S}^{[1]}$ *du schéma interpolateur de Lagrange de degré* $2N+1$.

Démonstration : Soit $j_0 \geq 0$ fixé. De (4.9.2) et (4.4.17) on en déduit que $A_{j_0,k,\ell} = S^{[1]}_{j_0,k,\ell} = 0$, pour tout $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $2\ell - k \leq -2N$ ou $2\ell - k \geq 2N+1$. Nous montrerons dans ce qui suit que l'égalité précédente est également vraie pour $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $-2N-1 \leq 2\ell - k \leq 2N$, donc que $A_{j_0} = S^{[1]}_{j_0}$.

Fixons k et ℓ. Soit $f_{j_0} := \delta_{\ell,\bullet}$. De (4.9.1) il résulte alors que $A_{j_0,k,\ell} = f_{j_0+1,k}$. Soit $p = [k/2]$ et soit $Q_{j_0,p}$ le polynôme de degré au plus $2N$ défini par :

$$\frac{1}{d_{j_0,i}} \int_{x_{j_0,i}}^{x_{j_0,i+1}} Q_{j_0,p}(x)dx = \delta_{\ell,i}, \quad \text{pour } i = p-N, \ldots, p+N.$$

Soit $P_{j_0,p}$ la primitive de $Q_{j_0,p}$ pour laquelle $P_{j_0,p}(x_{j_0,p-N}) = 0$. Puisque l'on a $p-N \leq \ell \leq p+N$, $P_{j_0,p}$ est le polynôme de degré au plus $2N+1$ défini par :

$$\begin{aligned} P_{j_0,p}(x_{j,i}) &= 0, \quad \text{pour } i = p-N,\ldots,\ell, \\ P_{j_0,p}(x_{j,i}) &= d_{j_0,\ell}, \quad \text{pour } i = \ell+1,\ldots,p+N+1. \end{aligned}$$

Donc

$$P_{j_0,p}(x) = \sum_{i=\ell+1}^{p+N+1} L_{j_0,p,i}(x) d_{j_0,\ell},$$

où $L_{j_0,p,i}$ sont les polynômes de Lagrange de degré $2N+1$ basés sur les points $x_{j_0,p-N}$, $\ldots$, $x_{j_0,p+N}$. On obtient :

$$\begin{aligned} A_{j_0,k,\ell} &= \frac{1}{d_{j_0+1,k}} \int_{x_{j_0+1,k}}^{x_{j_0+1,k+1}} Q_{j_0,p}(x)dx = \frac{1}{d_{j_0+1,k}} (P_{j_0,p}(x_{j_0+1,k+1}) - P_{j_0,p}(x_{j_0+1,k})) \\ &= \frac{d_{j_0,\ell}}{d_{j_0+1,k}} \sum_{i=\ell+1}^{p+N+1} (L_{j_0,p,i}(x_{j_0+1,k+1}) - L_{j_0,p,i}(x_{j_0+1,k})). \end{aligned}$$

De (4.4.5) et (4.4.11) on obtient alors :

$$A_{j_0,k,\ell} = \frac{d_{j_0,\ell}}{d_{j_0+1,k}} \sum_{i=\ell+1}^{p+N+1} (S^{[0]}_{j_0,k+1,i} - S^{[0]}_{j_0,k,i}) = S^{[1]}_{j_0,k,\ell}.$$

■

4.9.2 Convergence et propriétés

Désormais, nous allons supposer que la grille $\mathcal{X}$ est définie par la relation (4.4.20). Le théorème précédent, ainsi que les résultats établis pour les schémas interpolateurs de Lagrange, nous permettent de montrer que :

Théorème 4.9.2 *Soit un entier $N \geq 1$. Sous l'hypothèse (♣), le schéma de subdivision interpolateur en moyenne $\mathcal{A}$ de degré $2N$ est uniformément convergent et produit des fonctions C^{P-1}.*

Démonstration : On applique le théorème 4.6.2 et le lemme 4.6.5. ■

En particulier, pour tout $N \geq 1$ le schéma interpolateur en moyenne est uniformément convergent. Pour $N = 0$ nous obtenons le schéma de subdivision qui, pour tout vecteur initial f_0, produit l'interpolation constante par morceaux des points $(x_{0,k}, f_{0,k})$, $k \in \mathbb{Z}$. Ces fonctions ne sont évidemment pas toujours C^0, donc le schéma de degré 0 n'est pas uniformément convergent.

Remarquons que pour tout $N \geq 0$, si $f_{0,k} = a$, $k \in \mathbb{Z}$, a une constante réelle, alors $\mathcal{A} f_0 = a$. Plus généralement, si $\pi \in \mathcal{P}_{2N}$ et f_0 est donné par la relation (4.9.3), alors $\mathcal{A} f_0 = \pi$. En effet, soit $N \geq 1$, Π une primitive de π et soit $f_0^{[-1]}$ le vecteur de composantes $f_{0,k}^{[-1]} := \Pi(x_{0,k})$, $k \in \mathbb{Z}$. De la remarque 4.4.1 on déduit que $\mathcal{S} f_0^{[-1]} = \Pi$. Puisque $(f_0^{[-1]})^{[1]} = f_0$ et $\mathcal{S}^{[1]} = \mathcal{A}$, du lemme 4.6.5 on obtient $\mathcal{A} f_0 = \Pi' = \pi$.

Dans la pratique, nous calculons toujours un nombre fini, petit, d'itérations de l'algorithme de subdivision. Très vite, on ne perçoit plus à l'oeil nu la différence entre deux itérations successives. Dans le cas du schéma interpolateur en moyenne, d'un pas à l'autre on conserve les moyennes. Pour cette raison, les fonctions $\overline{F}_j$, définies par (4.9.4), sont mieux adaptées que les fonctions F_j définies par (4.3.1) pour représenter graphiquement les itérations de l'algorithme. Ce changement n'a aucune influence sur la convergence (quand $N \geq 1$), car

$$\|F_j - \overline{F}_j\|_\infty \leq \|\Delta f_j\|_\infty, \quad j \geq 0,$$

donc $\|F_j - \overline{F}_j\|_\infty \to 0$ quand $j \to \infty$.

Les fonctions fondamentales du schéma interpolateur en moyenne de degré $2N > 0$ sont les fonctions fondamentales $\varphi_{j,k}^{[\sharp 1]}$ du schéma $\mathcal{S}^{[1]}$ de degré $2N+1$, et leurs propriétés découlent des résultats du paragraphe 4.7. Généralisons (4.7.2) pour couvrir le cas $N = 0$. Soient $j_0 \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$ fixés et soit $f_{j_0} := \delta_{k,\cdot}$. Soit

$$\varphi_{j_0,k}^{[\sharp 1]} := \lim_{j_0 \leq j \to +\infty} \overline{F}_j. \tag{4.9.5}$$

Cette définition ne change pas la définition (4.7.2) quand $N > 0$, mais elle permet de définir les fonctions fondamentales du schéma interpolateur en moyenne de degré $N = 0$. Nous obtenons :

$$\varphi_{j_0,k}^{[\sharp 1]} = \mathbb{1}_{[x_{j_0,k}, x_{j_0,k+1}[}.$$

La proposition 4.7.2 donne certaines propriétés des fonctions fondamentales pour $N > 0$. Il n'est pas difficile de vérifier les propriétés (i)-(iv) pour $N = 0$.

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de fonctions fondamentales du schéma interpolateur en moyenne de degré $2N = 2$. La grille est générée par la fonction $G(x) = x + \frac{1}{10\pi}\sin(7\pi x + \pi)$. Nous avons marqué par des cercles les points $x_{4,\ell}$ et par des "+" les points $x_{9,\ell}$. Nous avons effectué 5 itérations dans l'algorithme de subdivision. 5.

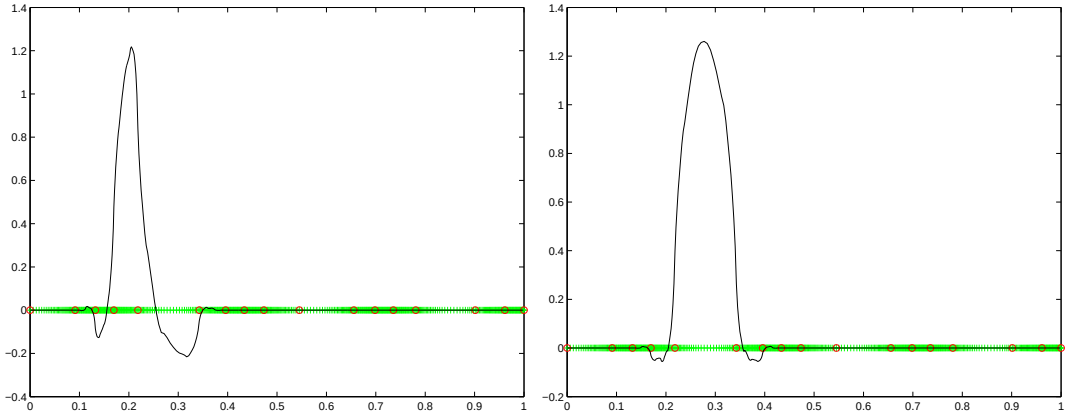


FIG. 4.9 – *Les fonctions* $\varphi_{4,4}^{[\sharp 1]}$ *et* $\varphi_{4,5}^{[\sharp 1]}$.

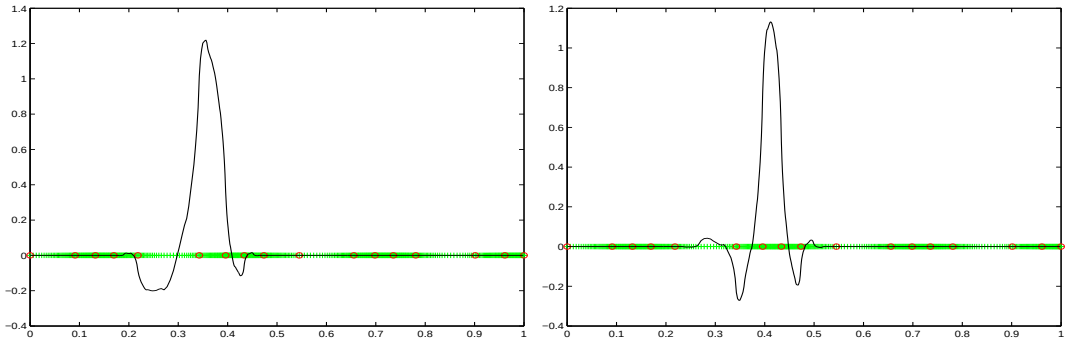


FIG. 4.10 – *Les fonctions* $\varphi_{4,6}^{[\sharp 1]}$ *et* $\varphi_{4,7}^{[\sharp 1]}$.

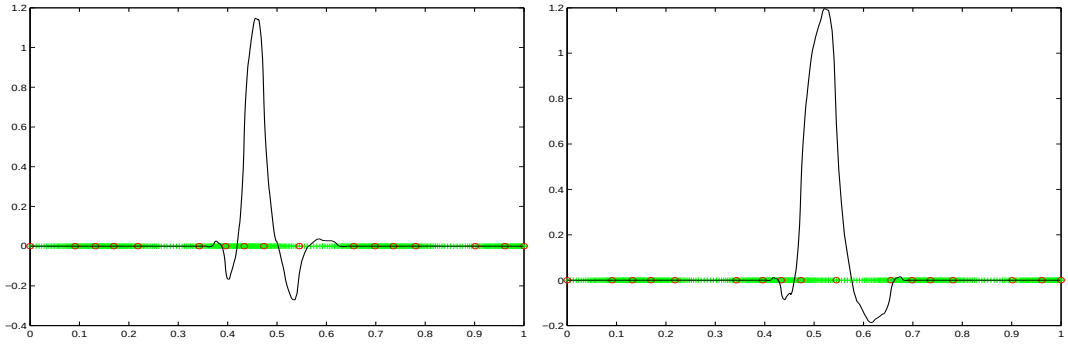


FIG. 4.11 – *Les fonctions* $\varphi_{4,8}^{[\sharp 1]}$ *et* $\varphi_{4,9}^{[\sharp 1]}$.

Quand le degré du schéma augmente, les fonctions fondamentales deviennent plus oscillantes. En voici un exemple, pour $N = 2$:

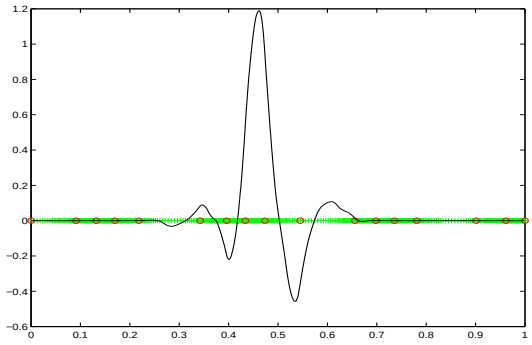


FIG. 4.12 – *La fonction* $\varphi_{4,8}^{[\sharp 1]}$.

Grâce au fait que le schéma $\mathcal{S}^{[P]}$ coïncide avec le schéma $\mathcal{A}^{[P-1]}$, le théorème 4.6.7 nous donne une estimation plus fine de la régularité des fonctions limites en termes de continuité hölderienne.

Le schéma interpolateur en moyenne permet de construire une approximation d'une fonction dont on connaît les valeurs moyennes sur une partition de $\mathbb{R}$. Plus précisément, soit un entier $n \geq 0$ et soit F une fonction dans C^n. Notons par $F^{(-1)}$ sa primitive. Soit $j_0 \geq 0$ et soient f_{j_0}, respectivement $f_{j_0}^{[-1]}$, les vecteurs de composantes :

$$f_{j_0,k} := \int_{x_{j_0,k}}^{x_{j_0,k+1}} F(x)dx, \quad f_{j_0,k}^{[-1]} = F^{(-1)}(x_{j_0,k}), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

On aura alors $F = (F^{(-1)})'$ et $f_{j_0} = (f_{j_0}^{[-1]})^{[1]}$. Le théorème 4.8.1, appliqué à la fonction $F^{(-1)} \in C^{n+1}$ implique l'existence d'une constante $C_{F,x}$ telle que :

$$|(F - \mathcal{A}_{j_0} f_{j_0})(x)| \leq C_{F,x} 2^{-n j_0}. \tag{4.9.6}$$

4.10 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que sous l'hypothèse (4.4.20) sur la grille $\mathcal{X}$, les schémas de subdivision de Lagrange de degré arbitraire, définis par rapport à $\mathcal{X}$, sont uniformément convergents et satisfont à des propriétés similaires à celles satisfaites par les schémas de Lagrange réguliers. Les schémas de subdivision interpolateurs en moyenne sont les schémas dérivés des schémas interpolateurs de Lagrange. En conséquence, les résultats obtenus pour ces derniers montrent que les schémas interpolateurs en moyenne de degré $2N > 0$ (comme dans le cas régulier) sont eux aussi uniformément convergents.

Si dans le cas régulier les fonctions limites sont toutes dans C^P, alors les fonctions limites du schéma de même degré sont toutes dans C^P.

Les fonctions fondamentales des schémas non réguliers ne sont plus des translatées et des dilatées d'une fonction particulière, comme dans le cas régulier ($\varphi := \mathcal{S}\delta_{0,\bullet}$, pour le schéma interpolateur de Lagrange). Néanmoins, elles sont toujours uniformément bornées, à support compact et elles satisfont des relations de raffinement.

Nous avons montré que l'ordre d'approximation des fonctions C^n, $n \geq 1$, à partir des valeurs aux points $x_{j_0,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, par des fonctions limites d'un schéma de Lagrange de degré suffisamment grand, est 2^{-nj_0}. L'ordre d'approximation des dérivées d'ordre $p \leq \max(n-1, P)$, par des dérivées des fonctions limites du schéma de Lagrange est $2^{-(n-p)j_0}$. Le schéma interpolateur en moyenne permet d'approcher, avec le même taux 2^{-nj_0} toute fonction de C^n, $n \geq 0$, à partir du vecteur des moyennes sur une partition de $\mathbb{R}$.

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus pour des schémas de subdivision définis sur l'axe réel entier. Comme il est connu (voir [67]), les schémas de subdivision de Lagrange, ainsi que les schémas interpolateurs en moyenne, s'adaptent facilement à des intervalles bornés. Les résultats que nous avons montrés restent valables dans ce cas.

Chapitre 5

Ondelettes de seconde génération

Le cadre présenté dans le premier chapitre s'avère contraignant dans les situations réelles, où l'on doit traiter des signaux échantillonnés sur une grille non régulière. Nous pouvons aussi être amenés à traiter des fonctions sur des domaines à géométrie spéciale. Pour, à la fois, pouvoir bien adapter la décomposition sur les bords du support du signal, traiter le cas des données manquantes, les données non équidistantes, ou les données dans un espace à géométrie plus complexe, nous avons besoin d'une définition plus générale de l'analyse multirésolution et des fonctions d'échelle et ondelettes. Nous garderons les propriétés qui semblent les plus importantes : le caractère multi-échelle, l'imbrication des sous-espaces et la stabilité. Nous n'exigerons plus par contre que les fonctions d'échelle et les ondelettes soient des translatées et dilatées d'une seule fonction mère (respectivement φ et ψ).

5.1 Ondelettes de seconde génération et schéma de relèvement

Nous présentons ici la notion d'analyse multirésolution de seconde génération telle qu'elle a été introduite dans [65], ainsi que les schémas de relèvement associés.

5.1.1 Définitions et notations

Puisque par la suite nous nous intéresserons uniquement aux fonctions définies sur des intervalles $X \in \mathbb{R}$ et à l'espace $L^2(X)$ classique, nous ne donnons pas la définition de l'AMR dans toute sa généralité, comme elle se trouve dans [65].

Définition 5.1.1 [65] *Une* analyse multirésolution (de seconde génération) **M** *de* $L^2(X)$ *est une suite* $(V_j)_{j\in\mathcal{J}}$, $\mathcal{J}\subset\mathbb{Z}$, *de sous-espaces de* $L^2(X)$, *qui vérifie les propriétés :*

(i) La suite est imbriquée : pour tout $j\in\mathcal{J}$,

$$V_j\subset V_{j+1};$$

(ii) La réunion de ces sous-espaces est dense dans $L^2(X)$ *:*

$$\overline{\cup_{j\in\mathcal{J}}V_j}=L^2(X)\ ; \tag{5.1.1}$$

(iii) Pour tout $j\in\mathcal{J}$, V_j *admet comme base de Riesz une famille* $\{\varphi_{j,k}:k\in\mathcal{K}(j)\subset\mathbb{Z}\}$.

De plus, si $\mathcal{J}=\mathbb{Z}$, *on rajoute la condition*

(iv) $\cap_{j\in\mathcal{J}}V_j=\{0\}$.

Les sous-espaces V_j portent le nom de *sous-espaces d'échelle* et les fonctions $\varphi_{j,k}$ le nom de *fonctions d'échelle.*

Deux AMR **M** et $\widetilde{\mathbf{M}}$ sont dites *duales* si les fonctions d'échelle $\varphi_{j,k}$ et $\widetilde{\varphi}_{j,k}$ vérifient les conditions :

$$\langle\varphi_{j,k},\widetilde{\varphi}_{j,l}\rangle=\delta_{k,l}\,,\quad\forall k,l\in\mathcal{K}(j). \tag{5.1.2}$$

Une AMR donnée peut admettre plusieurs AMR duales.

Du fait que $V_j\subset V_{j+1}$ et $\widetilde{V}_j\subset\widetilde{V}_{j+1}$ on obtient les *relations de raffinement* (ou encore *relations à deux échelles*) :

$$\varphi_{j,k}=\sum_{l\in\mathcal{K}(j+1)}h_{j,k,l}\varphi_{j+1,l}\quad\text{et}\quad\widetilde{\varphi}_{j,k}=\sum_{l\in\mathcal{K}(j+1)}\widetilde{h}_{j,k,l}\widetilde{\varphi}_{j+1,l}, \tag{5.1.3}$$

pour tout $j\in\mathcal{J}$ et $k\in\mathcal{K}(j)$. Les coefficients $h_{j,k,l}$ et $\widetilde{h}_{j,k,l}$ s'appellent *coefficients de raffinement.* La stabilité des bases de V_j et $\widetilde{V}_j$ assure le fait que les suites $(h_{j,k,l})_l$ et $(\widetilde{h}_{j,k,l})_l$ appartiennent à $\ell^2(\mathcal{K}(j+1))$.

Nous supposerons toujours que les filtres sont de longueur finie, au sens suivant.

Définition 5.1.2 *On dit que le filtre* $\{h_{j,k,l}:j\in\mathcal{J},k\in\mathcal{K}(j),l\in\mathcal{K}(j+1)\}$ *est fini si les ensembles* $\{l\in\mathcal{K}(j+1):h_{j,k,l}\neq0\}$ *et* $\{k\in\mathcal{K}(j):h_{j,k,l}\neq0\}$ *ont le cardinal uniformément bornée par rapport à* j, k *et* l.

Ceci implique en particulier que le support de chaque fonction d'échelle est lui aussi fini). Il est facile de voir que ces définitions généralisent celles du premier chapitre. Si l'on pose $\varphi_{j,k}:=2^{j/2}\varphi(2^j\cdot-k)$ et $h_{j,k,l}:=\mathrm{h}_{l-2k}$ on retrouve le cadre des AMR classiques.

Pour tout $j \in \mathcal{J}$, nous appellerons *sous-espace de détail primal* un sous-espace fermé W_j, complément de V_j dans V_{j+1} :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \tag{5.1.4}$$

Si les ensembles $\{\psi_{j,k} : \ k \in \mathcal{M}(j)\}$ sont des bases de Riesz pour les espaces W_j, de sorte que pour tout $j_0 \in \mathcal{J}$ l'ensemble :

$$E_{j_0} := \{\varphi_{j_0,k} : \ k \in \mathcal{K}(j_0)\} \cup \{\psi_{j,m} : \ j \in \mathcal{J}, \ j \geq j_0, \ m \in \mathcal{M}(j)\} \tag{5.1.5}$$

soit une base de Riesz de $L_2(X)$, nous appellerons les fonctions $\psi_{j,m}$ *ondelettes primales* et nous dirons que E_{j_0} est une *base d'ondelettes* de niveau j_0 pour $L^2(X)$.

Nous définissons de la même façon des *sous-espaces de détail duaux* $\widetilde{W}_j$ et des ondelettes duales $\widetilde{\psi}_{j,m}$, $j \in \mathcal{J}$ et $m \in \mathcal{M}(j)$, de sorte que pour tout $j_0 \in \mathcal{J}$, les bases d'ondelettes, primales et duales, de niveau j_0, soient duales l'une de l'autre. Le système constitué par les fonctions d'échelle et les ondelettes, primales et duales, est alors un *système biorthogonal, i.e.,* ces fonctions vérifient les égalités :

$$\begin{array}{ll} < \varphi_{j,k}, \widetilde{\varphi}_{j,k'} >= \delta_{k,k'}, & < \psi_{j,m}, \widetilde{\varphi}_{j,k} >= 0, \\ < \psi_{j,m}, \widetilde{\psi}_{j,m'} >= \delta_{m,m'}, & < \varphi_{j,k}, \widetilde{\psi}_{j,m} >= 0, \end{array} \tag{5.1.6}$$

pour tout $j \in \mathcal{J}$, $k,k' \in \mathcal{K}(j)$, $m,m' \in \mathcal{M}(j)$.

Par abus de langage, on appelle parfois ondelettes des fonctions dont on ne sait pas montrer si les ensembles E_{j_0} sont des bases de Riesz de $L^2(X)$. En particulier, nous le ferons dans le paragraphe 5.2.

Puisque $W_j \subset V_{j+1}$ et $\widetilde{W}_j \subset \widetilde{V}_{j+1}$, nous avons les *relations de raffinement* pour les ondelettes :

$$\psi_{j,m} = \sum_{l \in \mathcal{K}(j+1)} g_{j,l,m} \varphi_{j+1,l} \quad \text{et} \quad \widetilde{\psi}_{j,m} = \sum_{l \in \mathcal{K}(j+1)} \widetilde{g}_{j,l,m} \widetilde{\varphi}_{j+1,l}, \tag{5.1.7}$$

pour tout $j \in \mathcal{J}$ et $m \in \mathcal{M}(j)$.

Les relations de biorthogonalité (5.1.6) et les relations de raffinement (5.1.3) et (5.1.7) impliquent :

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{l \in \mathcal{K}(j+1)} h_{j,l,k} \widetilde{h}_{j,l,k'} = \delta_{k,k'}, & \displaystyle\sum_{l \in \mathcal{K}(j+1)} h_{j,l,k} \widetilde{g}_{j,l,m} = 0, \\ \displaystyle\sum_{l \in \mathcal{K}(j+1)} g_{j,l,m} \widetilde{g}_{j,l,m'} = \delta_{m,m'}, & \displaystyle\sum_{l \in \mathcal{K}(j+1)} g_{j,l,m} \widetilde{h}_{j,l,k} = 0, \end{array} \tag{5.1.8}$$

pour tout $j \in \mathcal{J}$, $k,k' \in \mathcal{K}(j)$ et $m,m' \in \mathcal{M}(j)$.

On peut écrire ces égalités sous forme concentrée. Pour tout $j \in \mathcal{J}$, on note par H_j l'opérateur qui à la suite $(a_l)_l \in \ell^2(\mathcal{K}(j+1))$ associe la suite $(b_k)_k$, d'éléments :

$$b_k = \sum_{l \in \mathcal{K}(j+1)} h_{j,k,l} a_l.$$

L'opérateur H_j va de $\ell^2(\mathcal{K}(j+1))$ dans $\ell^2(\mathcal{K}(j))$. En effet, soit $(a_l)_l \in \ell^2(\mathcal{K}(j+1))$. Du fait que la base choisie pour $\widetilde{V}_{j+1}$ est une base de Riesz, la fonction $f := \sum_{l \in \mathcal{K}(j+1)} a_l \widetilde{\varphi}_{j+1,l}$ est dans $L^2(X)$. La base de V_j est elle aussi base de Riesz, donc la suite $(b_k)_k$ d'éléments $b_k = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle$, pour tout $k \in \mathcal{K}(j)$, est dans $\ell^2(\mathcal{K}(j))$. Le fait que $H_j(a_l)_l \in \ell^2(\mathcal{K}(j))$ résulte maintenant de l'égalité :

$$\begin{aligned} b_k &= \langle \sum_{l \in \mathcal{K}(j+1)} a_l \widetilde{\varphi}_{j+1,l}, \varphi_{j,k} \rangle = \sum_{l \in \mathcal{K}(j+1)} a_l \sum_{m \in \mathcal{K}(j+1)} h_{j,k,m} \langle \widetilde{\varphi}_{j+1,l}, \varphi_{j+1,m} \rangle \\ &= \sum_{l \in \mathcal{K}(j+1)} h_{j,k,l} a_l = (H_j \mathbf{a})_k. \end{aligned}$$

Les opérateurs $\widetilde{H}_j$, respectivement G_j et $\widetilde{G}_j$, sont définis de la même façon, à partir des coefficients de raffinement des fonctions d'échelle duales, des ondelettes primales et des ondelettes duales. Nous les appellerons *opérateurs de filtrage* ou *filtres*, par similarité avec les filtres utilisés en traitement du signal. La biorthogonalité s'exprime alors par les égalités :

$$\widetilde{H}_j H_j^T = \widetilde{G}_j G_j^T = I \quad \text{et} \quad \widetilde{G}_j H_j^T = \widetilde{H}_j G_j^T = 0, \ \forall j \in \mathcal{J}. \tag{5.1.9}$$

Soit $f \in L^2(X)$. Notons $c_{j,k} := \langle f, \widetilde{\varphi}_{j,k} \rangle$, $j \in \mathcal{J}$ et $k \in \mathcal{K}(j)$, ses coefficients d'échelle et $d_{j,m} := \langle f, \widetilde{\psi}_{j,m} \rangle$, $j \in \mathcal{J}$ et $m \in \mathcal{M}(j)$ ses coefficients de détail. L'algorithme de décomposition en ondelettes utilise les formules :

$$c_{j,k} = \sum_l \widetilde{h}_{j,k,l} c_{j+1,l} \quad \text{et} \quad d_{j,m} = \sum_l \widetilde{g}_{j,m,l} c_{j+1,l} \tag{5.1.10}$$

et l'algorithme de reconstruction est basé sur la formule :

$$c_{j+1,k} = \sum_k h_{j,k,l} c_{j,l} + \sum_m g_{j,m,l} d_{j,l}. \tag{5.1.11}$$

Quand les filtres sont finis, les deux algorithmes sont de complexité $O(n)$, n étant le nombre de données. Ils sont quand même plus coûteux que dans le cas classique, puisque les filtres changent pour chaque coefficient. Si l'on note avec c_j le vecteur colonne des coefficients d'échelle et avec d_j le vecteur colonne des coefficients d'ondelettes, les opérations de décomposition et reconstruction sont :

$$c_j = \widetilde{H}_j c_{j+1} \quad \text{et} \quad d_j = \widetilde{G}_j c_{j+1},$$

respectivement

$$c_{j+1} = H_j^t c_j + G_j^t d_j.$$

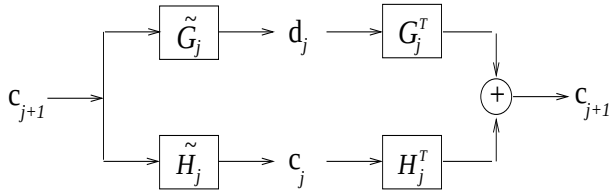


FIG. 5.1 – *Le schéma d'un pas de la transformée en ondelettes rapide.*

En imposant la condition que la reconstruction soit exacte, nous obtenons :

$$H_j^T \widetilde{H}_j + G_j^T \widetilde{G}_j = I. \tag{5.1.12}$$

Les conditions 5.1.9 et 5.1.12 donnent alors

$$\begin{bmatrix} \widetilde{H}_j \\ \widetilde{G}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_j^T & G_j^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} H_j^T & G_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{H}_j \\ \tilde{G}_j \end{bmatrix} = I. \tag{5.1.13}$$

Nous dirons alors que ces opérateurs forment un *système biorthogonal d'opérateurs de filtrage*. Soit Φ_j le vecteur colonne de composantes les fonctions d'échelle $\varphi_{j,k}$ et soit Ψ_j le vecteur ligne de composantes les ondelettes $\psi_{j,k}$. Par abus de notation, les relations de raffinement s'écrivent :

$$\Phi_j = H_j \Phi_{j+1} \quad \text{et} \quad \Psi_j = G_j \Psi_{j+1}. \tag{5.1.14}$$

Inversement, les fonctions au niveau fin s'expriment par rapport aux fonctions au niveau moins fin par la formule :

$$\Phi_{j+1} = \widetilde{H}_j^T \Phi_j + \widetilde{G}_j^T \Psi_j. \tag{5.1.15}$$

Comme dans le cadre des AMR de première génération, on définit la notion d'ordre d'une l'AMR :

Définition 5.1.3 *On dit que l'AMR* **M** *est d'*ordre *r si, pour tout $j \in \mathcal{J}$, tout polynôme P de degré strictement inférieur à r peut être écrit sous la forme :*

$$P(x) = \sum_{k \in \mathcal{K}(j)} c_{j,k} \varphi_{j,k}(x), \quad x \in X.$$

Une définition similaire existe pour l'ordre $\tilde{r}$ de l'AMR duale. Un calcul simple montre que l'ordre de l'AMR primale coïncide avec le nombre de moments nuls (section 1.4) des ondelettes duales et, inversement, l'ordre de l'AMR duale coïncide avec le nombre de moments nuls des ondelettes primales.

5.1.2 Le schéma de relèvement

Le schéma de relèvement est une technique pour construire des bases d'ondelettes et pour factoriser les filtres d'ondelettes déjà existants en des filtres très simples. Cette technique algébrique, introduite par W. Sweldens dans [64], ne fait pas appel à la transformée de Fourier, donc elle est applicable dans le contexte des AMR de seconde génération. Le schéma de relèvement ne fabrique pas des bases qui ne peuvent pas être construites par d'autres méthodes, mais elle réduit la complexité des algorithmes de décomposition et de reconstruction.

Dans le cas classique (les ondelettes de première génération), il est montré dans [19] que toute transformée en ondelettes peut être factorisée en une transformation initiale très simple suivie de plusieurs pas de relèvement élémentaires. Ce résultat a pour base l'algorithme d'Euclide de factorisation des polynômes. En effet, les filtres peuvent être représentés comme polynômes de Laurent et la convolution des filtres comme produit des polynômes.

Description intuitive

La décomposition en ondelettes tient compte de la corrélation qui existe dans la plupart des données réelles, afin de créer des représentations creuses. Typiquement cette corrélation est localisée en temps et en fréquence, ce qui permet de donner, dans chaque point, une "esquisse" du signal et un coefficient d'erreur, qui est en général petit. Soit $\mathbf{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ avec $x_k \in \mathbb{R}$ un signal discret. Soit par exemple la composante d'indices pairs, $\mathbf{x}_e = (x_{2k})_{k\in\mathbb{Z}}$ l'"esquisse" du signal. A l'aide de cette esquisse on peut prévoir les valeurs correspondant aux indices impairs. Soit P l'opérateur qui prédit les valeurs dans les positions impaires à partir des valeurs dans les positions paires. Les détails représentent la différence entre les vraies valeurs $\mathbf{x}_o = (x_{2k+1})_{k\in\mathbb{Z}}$ et celles prédites :

$$\mathbf{d} = \mathbf{x}_o - P(\mathbf{x}_e). \tag{5.1.16}$$

Un exemple est l'opérateur P qui prédit pour x_{2k+1} la valeur moyenne arithmétique de ses deux voisins. On obtient alors :

$$d_k = x_{2k+1} - \frac{x_{2k} + x_{2k+2}}{2}.$$

On voit que si le signal $\mathbf{x}$ est linéaire, les coefficients de détail seront nuls. On voit aussi que le prédicteur P ne fait pas la différence dans cet exemple entre une suite formée uniquement de 1 et une suite qui prend la valeur 1 pour les indices pairs et la valeur 0 pour les indices impairs. On dit alors que P introduit des *aliasing*. Pour les éliminer, on introduit un pas supplémentaire qui consiste à rajouter à $\mathbf{x}_e$ le résultat

de l'application d'un opérateur S à la suite $\mathbf{d}$. Ce pas s'appelle *pas de relèvement* et l'opérateur S s'appelle opérateur de mise à jour. On a donc :

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}_e + S(\mathbf{d}). \tag{5.1.17}$$

On voit des relations 5.1.16 et 5.1.17 que le schéma de relèvement est toujours inversible. Pour l'exemple que l'on a pris, le deuxième pas peut être :

$$s_k = x_{2k} + \frac{d_{k-1} + d_k}{4}.$$

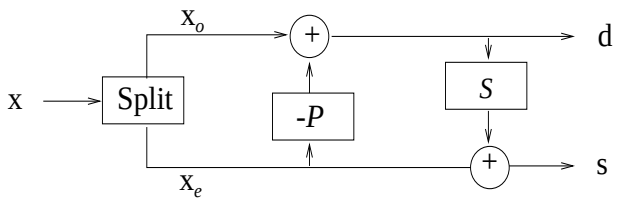


FIG. 5.2 – *La diagramme de la décomposition en ondelettes, avec un pas de relèvement.*

Description théorique

Soit un système biorthogonal d'opérateurs de filtrage $H_j^{old}, \widetilde{H}_j^{old}, G_j^{old}, \widetilde{G}_j^{old}$, $j \in \mathcal{J}$. Si $\mathbf{x}$ est un signal que l'on veut décomposer, le premier pas consiste à lui appliquer les opérateurs $\widetilde{H}_j^{old}$ et $\widetilde{G}_j^{old}$ pour obtenir l'esquisse $\mathbf{x}_e$ et les détails $\mathbf{d}$. Dans un deuxième temps on corrige l'esquisse par le terme $S(\mathbf{d})$. Le théorème suivant assure que l'on peut associer un système biorthogonal de filtres à cette nouvelle transformation :

Théorème 5.1.4 ([65]) *Soit un système biorthogonal d'opérateurs de filtrage $H_j^{old}, \widetilde{H}_j^{old}$, $G_j^{old}, \widetilde{G}_j^{old}$, $j \in \mathcal{J}$. Le système $H_j, \widetilde{H}_j, G_j, \widetilde{G}_j$, $j \in \mathcal{J}$, défini par :*

$$\begin{array}{ll} H_j = H_j^{old}, & \widetilde{H}_j = \widetilde{H}_j^{old} + S_j \widetilde{G}_j^{old}, \\ G_j = G_j^{old} - S_j^t H_j^{old}, & \widetilde{G}_j = \widetilde{G}_j^{old}, \end{array} \tag{5.1.18}$$

avec S_j un opérateur de $\ell^2(\mathcal{M}(j))$ dans $\ell^2(\mathcal{K}(j))$, est lui aussi un système biorthogonal d'opérateurs de filtrage.

La modification des filtres entraîne la modification des fonctions de base. Ainsi les nouvelles fonctions, si elles existent, vérifient :

$$\begin{array}{ll} \varphi_j = \varphi_j^{old}, & \widetilde{\varphi}_j = \widetilde{H}_j^{old} \widetilde{\varphi}_{j+1} + S_j \widetilde{\psi}_j, \\ \psi_j = \psi_j^{old} - S_j^t \varphi_j^{old}, & \widetilde{\psi}_j = \widetilde{G}_j^{old} \widetilde{\varphi}_j, \end{array} \tag{5.1.19}$$

Il est possible que les fonctions de la nouvelle base ne soient plus définies. On voit que les fonctions d'échelle primales ne changent pas et que les ondelettes primales changent, mais peu : si l'opérateur S est à support compact, les nouvelles fonctions sont toujours bien définies. Par contre, la base duale change radicalement. Les nouvelles fonctions d'échelle, construites avec des nouveaux filtres, ne semblent plus avoir des liens avec les fonctions de départ. Pour les ondelettes duales, les filtres restent les mêmes, mais elles changent quand même puisque les fonctions d'échelle ont changé. Il semble difficile de trouver des conditions générales sur l'opérateur S pour assurer la convergence de l'algorithme de subdivision qui produit les nouvelles fonctions d'échelle duales. Aussi, il est difficile de prévoir la stabilité de la nouvelle base, à partir des opérateurs de filtrage et de l'opérateur S. Dans [58], J. Simoens et S. Vandewalle trouvent des conditions nécessaires pour assurer la stabilité à une échelle, liées à la norme de ces opérateurs. Ils donnent aussi des conditions pour assurer la stabilité multi-échelle, mais qui sont moins faciles à vérifier.

On peut faire un parallèle entre le relèvement à chaque niveau et le passage d'un couple de sous-espaces orthogonaux (ou presque orthogonaux) V_j^{old} et W_j^{old} à un couple de sous-espaces non-orthogonaux (ou encore moins orthogonaux) V_j et W_j. Le cosinus de l'angle entre les deux sous-espaces devient plus grand. L'une des conditions pour que la nouvelle base soit stable est que ce cosinus reste uniformément borné à tous les niveaux, par une constante $\rho < 1$. Par ce passage on obtient des degrés de liberté que l'on peut utiliser pour imposer des autres propriétés, par exemple plus de moments nuls pour les nouvelles ondelettes duales, ce qui assure une convergence plus rapide de l'approximation.

Le schéma défini par le théorème 5.1.4 est le *schéma de relèvement primal*. Le théorème suivant définit le *schéma de relèvement dual*.

Théorème 5.1.5 ([65]) *Soit un système biorthogonal d'opérateurs de filtrage $H_j^{old}, \widetilde{H}_j^{old}$, $G_j^{old}, \widetilde{G}_j^{old}$, $j \in \mathcal{J}$. Le système $H_j, \widetilde{H}_j, G_j, \widetilde{G}_j$, $j \in \mathcal{J}$, défini par :*

$$\begin{array}{ll} H_j = H_j^{old} + \widetilde{S}_j G_j^{old}\,, & \widetilde{H}_j = \widetilde{H}_j^{old}\,, \\ G_j = G_j^{old}\,, & \widetilde{G}_j = \widetilde{G}_j^{old} - \widetilde{S}_j^t \widetilde{H}_j^{old}\,, \end{array} \tag{5.1.20}$$

avec $\widetilde{S}_j$ un opérateur de $\ell^2(\mathcal{M}(j))$ dans $\ell^2(\mathcal{K}(j))$, est lui aussi un système biorthogonal d'opérateurs de filtrage.

La nouvelle base est donnée par les fonctions :

$$\begin{array}{ll} \varphi_j = H_j^{old}\varphi_{j+1} + \widetilde{S}_j \psi_j\,, & \widetilde{\varphi}_j = \widetilde{\varphi}_j^{old}\,, \\ \psi_j = G_j^{old}\varphi_j\,, & \widetilde{\psi}_j = \widetilde{\psi}_j^{old} - \widetilde{S}_j^t \widetilde{\varphi}_j^{old}\,, \end{array} \tag{5.1.21}$$

Les mêmes questions se posent quant à l'existence des fonctions primales et à la stabilité de la nouvelle base.

Des algorithmes de décomposition et reconstruction, utilisant le schéma de relèvement, sont présentés par exemple dans [65]. Il semble que l'utilisation de cette technique multiplie par un facteur 4 la vitesse des algorithmes. Néanmoins, nous n'avons pas la certitude que le système biorthogonal de fonctions construit par cette méthode soit constitué par des fonctions d'échelle et des ondelettes. Il nous manque des informations concernant la stabilité. Il existe des conditions suffisantes simples qui assurent la stabilité à une échelle (voir [58]), mais la stabilité globale semble difficile à montrer.

5.2 Du schéma interpolateur en moyenne aux ondelettes

Notre but dans ce paragraphe est de construire une AMR de seconde génération, qui conduit à des algorithmes d'ondelettes capables de traiter les échantillons de fonctions sur des grilles non régulières, sans préconditionnement ou regroupement préalable des données. Pour ce faire nous utiliserons les fonctions fondamentales du schéma de subdivision interpolateur en moyenne.

5.2.1 L'analyse multi-résolution

Soit $\mathcal{X}$ une grille non régulière, du type (4.4.20), soit $N \geq 0$ un entier et soit $\mathcal{A}$ le schéma de subdivision interpolateur en moyenne de degré $2N$, relatif à $\mathcal{X}$. Soient $\varphi_{j,k}^{[\sharp 1]}$, $j \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, les fonctions fondamentales de $\mathcal{A}$. Rappelons qu'elles sont définies par : $\varphi_{j,k}^{[\sharp 1]} := \mathcal{A}_j \delta_{k,\bullet} = \mathcal{S}_j^{[1]} \delta_{k,\bullet}$.

Désormais, pour tout $j \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, nous noterons :

$$\varphi_{j,k} := \frac{1}{\sqrt{d_{j,k}}} \varphi_{j,k}^{[\sharp 1]}, \quad \widetilde{\varphi}_{j,k} := \frac{1}{\sqrt{d_{j,k}}} \mathbb{1}_{[x_{j,k}, x_{j,k+1}[}, \tag{5.2.1}$$

et

$$V_j := \overline{\mathrm{vect}\{\varphi_{j,k} : \ k \in \mathbb{Z}\}}, \quad \widetilde{V}_j := \overline{\mathrm{vect}\{\widetilde{\varphi}_{j,k} : \ k \in \mathbb{Z}\}}, \tag{5.2.2}$$

l'adhérence étant considérée par rapport à la norme L^2. Rappelons que les fonctions $\mathbb{1}_{[x_{j,k}, x_{j,k+1}[}$ sont les fonctions fondamentales du schéma de subdivision interpolateur en moyenne de degré 0. Les relations de raffinement (voir proposition 4.7.2)

$$\varphi_{j,k} = \sum_{\ell=2k-2N}^{2k+2N+1} \sqrt{\frac{d_{j+1,\ell}}{d_{j,k}}} A_{j,\ell,k} \varphi_{j+1,\ell}, \tag{5.2.3}$$

et

$$\widetilde{\varphi}_{j,k} = \sqrt{\frac{d_{j+1,2k}}{d_{j,k}}} \widetilde{\varphi}_{j+1,2k} + \sqrt{\frac{d_{j+1,2k+1}}{d_{j,k}}} \widetilde{\varphi}_{j+1,2k+1}, \tag{5.2.4}$$

impliquent que les suites de sous-espaces $(V_j)_{j\geq 0}$ et $(\widetilde{V}_j)_{j\geq 0}$ sont emboîtées. Nous montrerons qu'elles sont deux AMR duales l'une de l'autre.

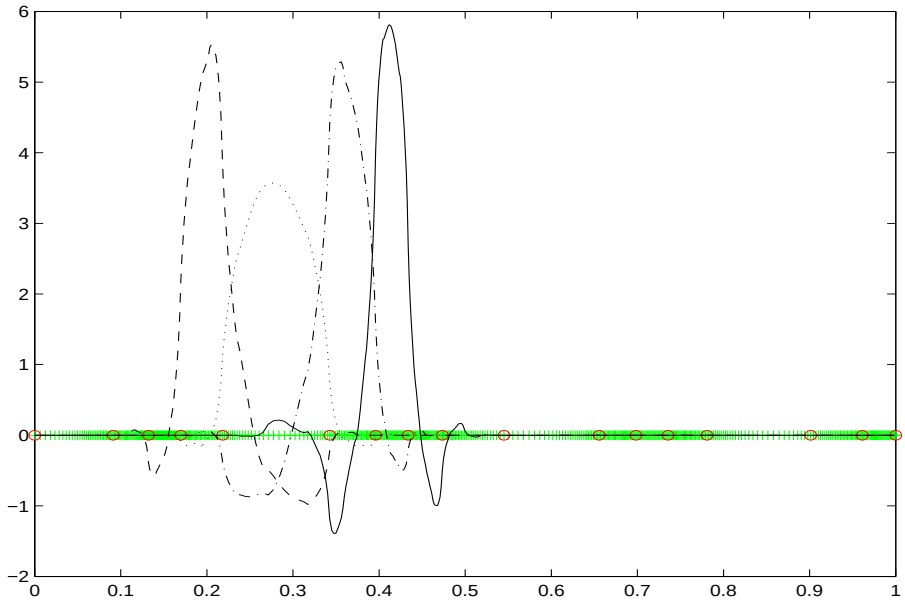


FIG. 5.3 – *Quelques fonctions d'échelle primales. De gauche à droite nous avons représenté les fonctions* $\varphi_{4,k}$, $k = 4,\ldots,7$.

Soit Ω un intervalle et $\mathcal{J}$ un ensemble d'indices. Nous dirons que la suite d'ensembles de fonctions $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\} \subset L^2(\Omega)$, $j \in \mathcal{J}$, est *uniformément stable* s'il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que pour toute suite $c \in \ell_2(\mathcal{K}(j))$ l'on ait :

$$C_1\|c\|_2 \leq \|\sum_{k\in\mathcal{K}(j)} c_k\phi_{j,k}\|_2 \leq C_2\|c\|_2, \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

Nous noterons $\mathcal{P}_{n-1}(\Omega)$ l'ensemble des restrictions à Ω de polynômes de $\mathcal{P}_{n-1}$.

Proposition 5.2.1 [14] *Soit Ω un domaine ou une variété de $\mathbb{R}^d$. Supposons que les ensembles $\Phi_j := \{\phi_{j,k} : k \in \mathcal{K}(j)\}$, $\widetilde{\Phi}_j := \{\widetilde{\phi}_{j,k} : k \in \mathcal{K}(j)\}$, $j \in \mathcal{J}$, vérifient les propriétés suivantes :*

(a) $\langle \phi_{j,k}, \widetilde{\phi}_{j,l}\rangle = \delta_{k,l}$, *pour tout* $k,l \in \mathcal{K}(j)$;

(b) Il existe deux constantes B *et* $\widetilde{B}$ *telles que* $\|\phi_{j,k}\|_{L^2(\Omega)} \leq B$ *et* $\|\widetilde{\phi}_{j,k}\|_{L^2(\Omega)} \leq \widetilde{B}$, *pour tout* $j \in \mathcal{J}$ *et* $k \in \mathcal{K}(j)$;

(c) Il existe une constante D *telle que le cardinal des ensembles :*

$$\{l \in \mathcal{K}(j) : \operatorname{supp}\phi_{j,l} \cap \operatorname{supp}\phi_{j,k} \neq \emptyset\} \quad \text{et} \quad \{l \in \mathcal{K}(j) : \operatorname{supp}\widetilde{\phi}_{j,l} \cap \operatorname{supp}\widetilde{\phi}_{j,k} \neq \emptyset\}$$

est borné par D, *pour tout* $j \in \mathcal{J}$ *et* $k \in \mathcal{K}(j)$.

Alors :

(i) Les ensembles $\{\Phi_j : j \in \mathcal{J}\}$ *et* $\{\widetilde{\Phi}_j : j \in \mathcal{J}\}$ *sont uniformément stables;*

(ii) Si $\mathcal{P}_{n-1}(\Omega) \subset \overline{\text{vect}\Phi_j}$ *alors il existe une constante C telle que :*

$$\inf_{v_j \in \overline{\text{vect}\Phi_j}} \|v - v_j\|_{L^2(\Omega)} \leq h_j^n |v|_{H^n(\Omega)}, \quad v \in H^n(\Omega), \tag{5.2.5}$$

où $H^n(\Omega)$ *est l'espace de Sobolev usuel et*

$$h_j := \sup_{k \in \mathcal{K}(j)} \max(\text{diam}(\text{supp}\,\phi_{j,k}), \text{diam}(\text{supp}\,\widetilde{\phi}_{j,k})).$$

La proposition 5.2.1 appliquée aux ensembles $\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\widetilde{\varphi}_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ nous donne :

Théorème 5.2.2 *Les suites emboîtées* $(V_j)_{j\geq 0}$ *et* $(\widetilde{V}_j)_{j\geq 0}$ *sont deux AMR de seconde génération de* L^2*, duales l'une de l'autre.*

Démonstration : Nous montrerons que les fonctions $\varphi_{j,k}$ et $\widetilde{\varphi}_{j,k}$ vérifient les propriétés $(a)-(c)$ de la proposition 5.2.1. Puisque le schéma interpolateur en moyenne conserve les moyennes, de la définition des fonctions fondamentales on déduit :

$$\langle \varphi_{j,k}, \widetilde{\varphi}_{j,\ell} \rangle = \frac{1}{\sqrt{d_{j,k} d_{j,\ell}}} \int_{x_{j,\ell}}^{x_{j,\ell+1}} \varphi_{j,k}^{[\sharp 1]}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{d_{j,k} d_{j,\ell}}} d_{j,k} \delta_{k,\ell} = \delta_{k,\ell}, \tag{5.2.6}$$

pour tout $j \geq 0$ et $k, \ell \in \mathbb{Z}$. L'hypothèse (b) résulte du fait que $\|\widetilde{\varphi}_{j,k}\|_2 = 1$ et que $\|\varphi_{j,k}\|_2^2 \leq bB_1/a(4N+1)$, pour tout $j,k \in \mathbb{Z}$ (on utilise la propriété 4.7.2). Le cardinal des ensembles du point (c) est $8N+1$, respectivement 1. Il résulte alors que les suites d'ensembles $\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\widetilde{\varphi}_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ sont uniformément stables. La condition (iii) de la définition 5.1.1 est donc satisfaite.

Pour montrer que la condition (ii) de la définition 5.1.1 est également satisfaite, nous utiliserons la conclusion (ii) de la proposition 5.2.1, avec $\Omega = \mathbb{R}$. Ici $h_j \leq 2^{-j}(4N+1)/a$. De plus, nous avons vu que $\mathcal{P}_{2N} \subset V_j$ pour tout $j \geq 0$. Si C_0^∞ est l'ensemble de fonctions infiniment dérivables et à support compact, on sait que C_0^∞ est dense dans L^2 et que $C_0^\infty \subset W_2^n \subset L^2$, pour tout $n \geq 0$. Donc W_2^n est dense dans L^2.

Soit $v \in W_2^n$, quelconque. Du point (ii) de la proposition 5.2.1 il résulte que

$$\|v - \text{Proj}_{V_j} v\|_2 \leq \frac{4N+1}{a} 2^{-(2N+1)j} |v|_{W_2^{2N+1}}, \quad v \in W_2^{2N+1}.$$

Quand $j \to +\infty$ on obtient :

$$W_2^{2N+1} \subset \overline{\bigcup_{j\geq 0} V_j}.$$

Le point (ii) de la définition des AMR résulte alors du fait que W_2^{2N+1} est dense dans L^2. La démonstration du fait que $\overline{\cup_{j\geq 0} \widetilde{V}_j} = L^2$ en est similaire. ∎

5.2.2 Les ondelettes

Nous disposons maintenant de deux AMR duales l'une de l'autre, de fonctions d'échelle $\varphi_{j,k}$ et $\widetilde{\varphi}_{j,k}$. Nous cherchons maintenant un système biorthogonal, susceptible de donner une base d'ondelettes pour L^2. Les "ondelettes primales" $\psi_{j,k}$, sont déterminées à un coefficient multiplicatif près par les relations $\langle \psi_{j,k}, \widetilde{\varphi}_{j,l} \rangle = 0$. Nous faisons le choix suivant :

$$\psi_{j,k} := \sqrt{\frac{d_{j+1,2k+1}}{d_{j,k}}}\varphi_{j+1,2k} - \sqrt{\frac{d_{j+1,2k}}{d_{j,k}}}\varphi_{j+1,2k+1}. \tag{5.2.7}$$

Exemple 5.2.3 *Pour $N = 0$ on obtient la généralisation pour grille non régulière du système orthogonal de Haar :*

$$\begin{aligned} \varphi^H_{j,k} &= \widetilde{\varphi}^H_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{d_{j,k}}}\mathbb{1}_{[x_{j,k},x_{j,k+1}[}, \\ \psi^H_{j,k} &= \widetilde{\psi}^H_{j,k} = \sqrt{\frac{d_{j+1,2k+1}}{d_{j,k}}}\varphi_{j+1,2k} - \sqrt{\frac{d_{j+1,2k+1}}{d_{j,k}}}\varphi_{j+1,2k+1}. \end{aligned}$$

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de fonctions "ondelettes". La grille est générée par la fonction $G(x) = x + \frac{1}{10\pi}\sin(7\pi x + \pi)$ et le degré du schéma de subdivision est $2N = 2$.

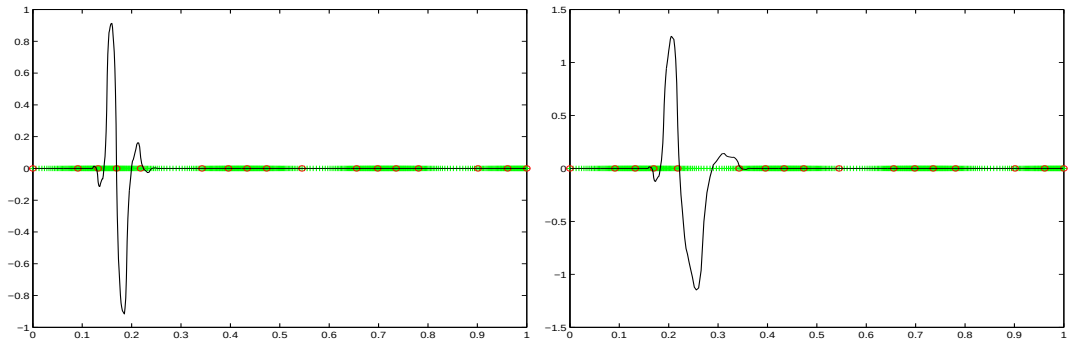


FIG. 5.4 – *Les fonctions $\psi_{4,3}$ et $\psi_{4,4}$.*

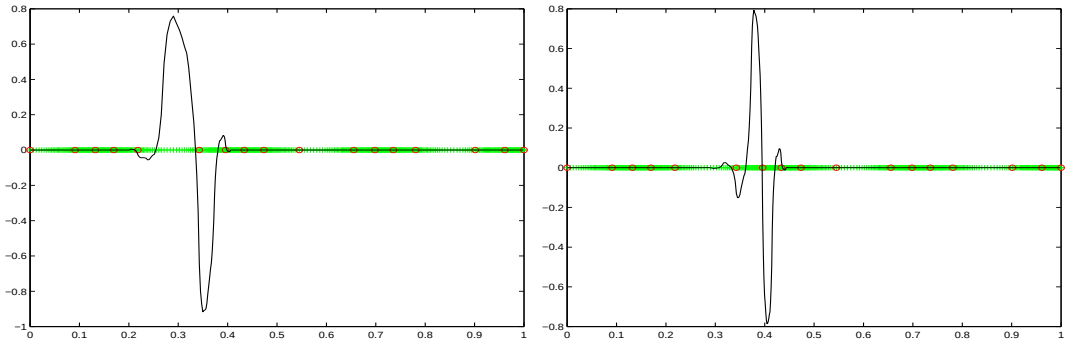


FIG. 5.5 – *Les fonctions* $\psi_{4,5}$ *et* $\psi_{4,6}$.

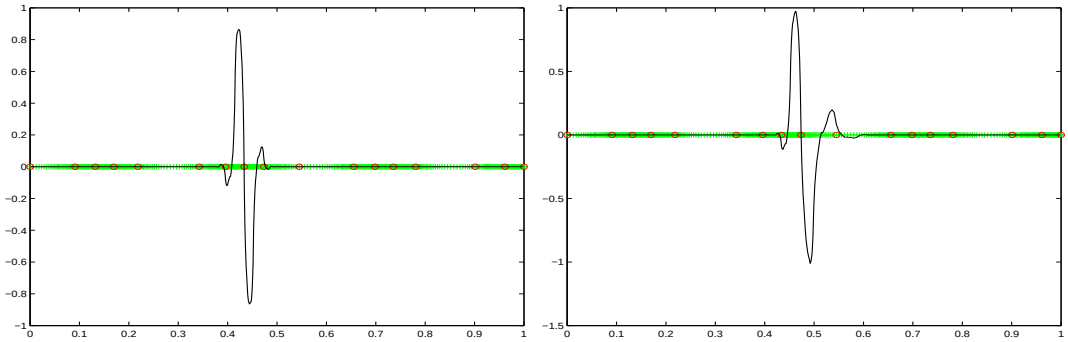


FIG. 5.6 – *Les fonctions* $\psi_{4,7}$ *et* $\psi_{4,8}$.

Quand le degré du schéma de subdivision augmente, les fonctions ondelettes deviennent plus oscillantes. Voici un exemple pour $2N = 4$.

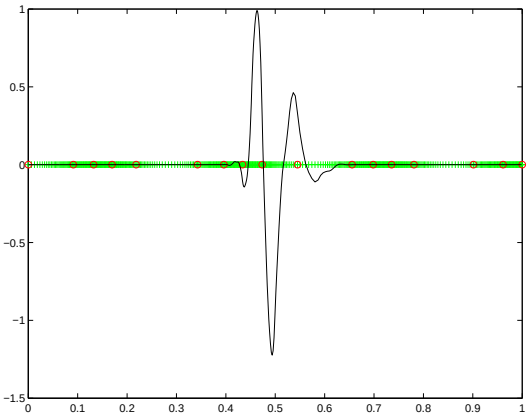


FIG. 5.7 – *Les fonction* $\psi_{4,8}$, *pour* $N = 2$.

Considérons les relations de raffinement pour les "ondelettes duales" :

$$\widetilde{\psi}_{j,k} := \sum_{\ell} g_{j,\ell,k}\widetilde{\varphi}_{j+1,\ell}, \tag{5.2.8}$$

pour $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$. Nous allons déterminer les coefficients $g_{j,\ell,k}$ de sorte que le système de fonctions $\varphi_{j,k}$, $\widetilde{\varphi}_{j,k}$, $\psi_{j,k}$ et $\widetilde{\psi}_{j,k}$ soit un système biorthogonal.

Soient $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$ fixés. Calculons les coefficients $g_{j,\ell,k}$, $\ell \in \mathbb{Z}$. La relation de biorthogonalité entre les fonctions ondelettes donne, d'une part :

$$\langle \psi_{j,\ell}, \widetilde{\psi}_{j,k} \rangle = \delta_{k,\ell}.$$

D'autre part, de (5.2.7) et (5.2.7) on a :

$$\begin{aligned} \langle \psi_{j,\ell}, \widetilde{\psi}_{j,k} \rangle &= \langle \sqrt{\frac{d_{j+1,2\ell+1}}{d_{j,\ell}}}\varphi_{j+1,2\ell} - \sqrt{\frac{d_{j+1,2\ell}}{d_{j,\ell}}}\varphi_{j+1,2\ell+1}, \sum_{m=2k-2N}^{2k+2N+1} g_{j,m,k}\widetilde{\varphi}_{j+1,m} \rangle \\ &= \sqrt{\frac{d_{j+1,2\ell+1}}{d_{j,\ell}}}g_{j,2\ell,k} - \sqrt{\frac{d_{j+1,2\ell}}{d_{j,\ell}}}g_{j,2\ell+1,k}. \end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi les équations :

$$\sqrt{\frac{d_{j+1,2\ell+1}}{d_{j,\ell}}}g_{j,2\ell,k} - \sqrt{\frac{d_{j+1,2\ell}}{d_{j,\ell}}}g_{j,2\ell+1,k} = \delta_{k,\ell}, \quad \ell \in \mathbb{Z}. \tag{5.2.9}$$

De la condition de biorthogonalité entre l'ondelettes primaires et les fonctions d'échelle duales,

$$\langle \varphi_{j,\ell}, \widetilde{\psi}_{j,k} \rangle = 0,$$

on obtient, grâce à (5.2.3) et (5.2.8) :

$$\sum_{i=\ell-N}^{\ell+N} \left(\sqrt{\frac{d_{j+1,2i}}{d_{j,\ell}}}A_{j,2i,\ell}g_{j,2i,k} + \sqrt{\frac{d_{j+1,2i+1}}{d_{j,\ell}}}A_{j,2i+1,\ell}g_{j,2i+1,k} \right) = 0, \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}. \tag{5.2.10}$$

La condition de biorthogonalité entre les fonctions d'échelle,

$$\langle \varphi_{j,\ell}, \widetilde{\varphi}_{j,i} \rangle = \delta_{i,\ell},$$

implique, grâce aux relations de raffinement (5.2.3) et (5.2.4), que :

$$\frac{d_{j+1,2i}}{\sqrt{d_{j,i}d_{j,\ell}}}A_{j,2i,\ell} + \frac{d_{j+1,2i+1}}{\sqrt{d_{j,i}d_{j,\ell}}}A_{j,2i+1,\ell} = \delta_{i,\ell},$$

ou encore :

$$\frac{d_{j+1,2i}}{\sqrt{d_{j,i}d_{j,\ell}}}A_{j,2i,\ell} = \delta_{i,\ell} - \frac{d_{j+1,2i+1}}{\sqrt{d_{j,i}d_{j,\ell}}}A_{j,2i+1,\ell}. \tag{5.2.11}$$

De (5.2.9) on obtient :

$$\sqrt{\frac{d_{j+1,2i+1}}{d_{j,i}}}g_{j,2i,k} = \sqrt{\frac{d_{j+1,2i}}{d_{j,i}}}g_{j,2i+1,k} + \delta_{k,i}. \tag{5.2.12}$$

En multipliant les deux dernières relations on trouve pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$ et $i \neq k$ les égalités :

$$\begin{aligned}\frac{d_{j+1,2i}\sqrt{d_{j+1,2i+1}}}{d_{j,i}\sqrt{d_{j,\ell}}}A_{j,2i,\ell}g_{j,2i,k} &= \delta_{i,\ell}\sqrt{\frac{d_{j+1,2i}}{d_{j,i}}}g_{j,2i+1,k} \\ &\quad - \frac{d_{j+1,2i+1}\sqrt{d_{j+1,2i}}}{d_{j,i}\sqrt{d_{j,\ell}}}A_{j,2i+1,\ell}g_{j,2i+1,k}.\end{aligned}$$

Après simplification on obtient :

$$\sqrt{\frac{d_{j+1,2i}}{d_{j,\ell}}}A_{j,2i,\ell}g_{j,2i,k} + \sqrt{\frac{d_{j+1,2i+1}}{d_{j,\ell}}}A_{j,2i+1,\ell}g_{j,2i+1,k} = \delta_{i,\ell}\sqrt{\frac{d_{j,i}}{d_{j+1,2i+1}}}g_{j,2i+1,k}, \tag{5.2.13}$$

pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$ et $i \neq k$. L'équation (5.2.10) se transforme alors dans :

$$\sum_{i\in\{k,\ell\}}\left(\sqrt{\frac{d_{j+1,2i}}{d_{j,\ell}}}A_{j,2i,\ell}g_{j,2i,k} + \sqrt{\frac{d_{j+1,2i+1}}{d_{j,\ell}}}A_{j,2i+1,\ell}g_{j,2i+1,k}\right) = 0, \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}. \tag{5.2.14}$$

En particulier, quand $\ell \neq k$ on trouve :

$$\sqrt{\frac{d_{j+1,2k}}{d_{j,\ell}}}A_{j,2k,\ell}g_{j,2k,k} + \sqrt{\frac{d_{j+1,2k+1}}{d_{j,\ell}}}A_{j,2k+1,\ell}g_{j,2k+1,k} + \sqrt{\frac{d_{j,\ell}}{d_{j+1,2\ell+1}}}g_{j,2\ell+1,k} = 0. \tag{5.2.15}$$

Quand $|\ell - k| > N$, $A_{j,2k,\ell} = A_{j,2k+1,\ell} = 0$ et la relation (5.2.15) devient :

$$g_{j,2\ell+1,k} = 0, \quad \forall \ell \in \mathbb{Z},\ |k-\ell| > N. \tag{5.2.16}$$

De (5.2.9), (5.2.14) et (5.2.13) on obtient le système de $4N+2$ équations et autant d'inconnues :

$$\begin{cases} \sum_{i\in\{k,\ell\}}\left(\sqrt{\frac{d_{j+1,2i}}{d_{j,\ell}}}A_{j,2i,\ell}g_{j,2i,k} + \sqrt{\frac{d_{j+1,2i+1}}{d_{j,\ell}}}A_{j,2i+1,\ell}g_{j,2i+1,k}\right) & = 0, \\ \sqrt{\frac{d_{j+1,2\ell+1}}{d_{j,\ell}}}g_{j,2\ell,k} - \sqrt{\frac{d_{j+1,2\ell}}{d_{j,\ell}}}g_{j,2\ell+1,k} & = \delta_{k,\ell}, \\ \ell = k-N,\ldots,k+N. \end{cases} \tag{5.2.17}$$

Écrivons le système (5.2.17) sous forme matricielle. Considérons les vecteurs colonne

$$\mathrm{b} := (\delta_{i,2N+2})_{i=1}^{4N+2} \quad \text{et} \quad \mathrm{g}_{j,k} = (g_{j,i+2k-2N-1,k})_{i=1}^{4N+2}.$$

Soit $\mathrm{V}_{j,k}$ la matrice des coefficients du système (5.2.17). Elle est creuse, de dimensions $(4N+2)\times(4N+2)$, et elle a la structure :

$$\begin{pmatrix}
A & A & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A & A & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
d & -d & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & A & A & 0 & \dots & 0 & A & A & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & d & -d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A & A & 0 & \dots & 0 & A & A \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d & -d
\end{pmatrix}$$

Les composantes non nulles des lignes impaires sont :

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_{j,k,2i+1,2i+1} &= \sqrt{\tfrac{d_{j+1,2(i+k-N)}}{d_{j,i+k-N}}}A_{j,2(i+k-N),i+k-N-1}, \\
\mathrm{V}_{j,k,2i+1,2i} &= \sqrt{\tfrac{d_{j+1,2(i+k-N)+1}}{d_{j,i+k-N}}}A_{j,2(i+k-N)+1,i+k-N}, \\
\mathrm{V}_{j,k,2i+1,2N+1} &= \sqrt{\tfrac{d_{j+1,2k}}{d_{j,i+k-N}}}A_{j,2k,i+k-N}, \\
\mathrm{V}_{j,k,2i+1,2N+2} &= \sqrt{\tfrac{d_{j+1,2k+1}}{d_{j,i+k-N}}}A_{j,2k+1,i+k-N},
\end{aligned} \tag{5.2.18}$$

et ceux des lignes paires sont :

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_{j,k,2i+2,2i+1} &= \sqrt{\tfrac{d_{j+1,2(i+k-N)+1}}{d_{j,i+k-N}}} \\
\mathrm{V}_{j,k,2i+2,2i+2} &= -\sqrt{\tfrac{d_{j+1,2(i+k-N)}}{d_{j,i+k-N}}},
\end{aligned} \tag{5.2.19}$$

pour tout $i = 0,\dots,4N+1$. Alors le système (5.2.17) devient :

$$\mathrm{V}_{j,k}\mathrm{g}_{j,k} = \mathrm{b}. \tag{5.2.20}$$

Exemple 5.2.4 Pour $N=1$, j et k fixés, la matrice de ce système est:

$$\mathrm{V}_{j,k} = \begin{pmatrix}
\sqrt{\tfrac{d_{j+1,2k-2}}{d_{j,k-1}}}A_{j,2k-2,k-1} & \sqrt{\tfrac{d_{j+1,2k-1}}{d_{j,k-1}}}A_{j,2k-1,k-1} & \sqrt{\tfrac{d_{j+1,2k}}{d_{j,k-1}}}A_{j,2k,k-1} \\
\sqrt{\tfrac{d_{j+1,2k-1}}{d_{j,k-1}}} & -\sqrt{\tfrac{d_{j+1,2k-2}}{d_{j,k-1}}} & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{\tfrac{d_{j+1,2k}}{d_{j,k}}}A_{j,2k,k} \\
0 & 0 & \sqrt{\tfrac{d_{j+1,2k+1}}{d_{j,k}}} \\
0 & 0 & \sqrt{\tfrac{d_{j+1,2k}}{d_{j,k+1}}}A_{j,2k,k+1} \\
0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ccc}
\sqrt{\frac{d_{j+1,2k+1}}{d_{j,k-1}}}A_{j,2k+1,k-1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
\sqrt{\frac{d_{j+1,2k+1}}{d_{j,k}}}A_{j,2k+1,k} & 0 & 0 \\
-\sqrt{\frac{d_{j+1,2k}}{d_{j,k}}} & 0 & 0 \\
\sqrt{\frac{d_{j+1,2k+1}}{d_{j,k+1}}}A_{j,2k+1,k+1} & \sqrt{\frac{d_{j+1,2k+2}}{d_{j,k+1}}}A_{j,2k+2,k+1} & \sqrt{\frac{d_{j+1,2k+3}}{d_{j,k+1}}}A_{j,2k+3,k+1} \\
0 & \sqrt{\frac{d_{j+1,2k+3}}{d_{j,k+1}}} & -\sqrt{\frac{d_{j+1,2k+2}}{d_{j,k+1}}}
\end{array}\right)$$

et la solution,

$$\left\{\begin{array}{l}
g_{j,2k-2,k} = -\sqrt{\frac{d_{j+1,2k-2}}{d_{j,k-1}}}\sqrt{\frac{d_{j+1,2k}}{d_{j+1,2k+1}}}\sqrt{\frac{d_{j,k}}{d_{j,k-1}}}A_{j,2k,k-1} \\
g_{j,2k-1,k} = -\sqrt{\frac{d_{j+1,2k-1}}{d_{j,k-1}}}\sqrt{\frac{d_{j+1,2k}}{d_{j+1,2k+1}}}\sqrt{\frac{d_{j,k}}{d_{j,k-1}}}A_{j,2k,k-1} \\
g_{j,2k,k} = \sqrt{\frac{d_{j+1,2k+1}}{d_{j,k}}}A_{j,2k+1,k} \\
g_{j,2k+1,k} = -\sqrt{\frac{d_{j+1,2k}}{d_{j,k}}}A_{j,2k,k} \\
g_{j,2k+2,k} = -\sqrt{\frac{d_{j+1,2k+2}}{d_{j,k+1}}}\sqrt{\frac{d_{j+1,2k}}{d_{j+1,2k+1}}}\sqrt{\frac{d_{j,k}}{d_{j,k+1}}}A_{j,2k,k+1} \\
g_{j,2k+3,k} = -\sqrt{\frac{d_{j+1,2k+3}}{d_{j,k+1}}}\sqrt{\frac{d_{j+1,2k}}{d_{j+1,2k+1}}}\sqrt{\frac{d_{j,k}}{d_{j,k+1}}}A_{j,2k,k+1}\,.
\end{array}\right. \tag{5.2.21}$$

Dans le cas uniforme, le vecteur solution est :

$$\mathrm{g}_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{8},-\frac{1}{8},1,-1,\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right),$$

ce qui donne la relation de raffinement

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}_{j,k} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{8}\widetilde{\varphi}_{j+1,2k-2}-\frac{1}{8}\widetilde{\varphi}_{j+1,2k-1}+\widetilde{\varphi}_{j+1,2k}-\widetilde{\varphi}_{j+1,2k+1}\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{8}\widetilde{\varphi}_{j+1,2k+2}+\frac{1}{8}\widetilde{\varphi}_{j+1,2k+3}\right) \\
&= -\frac{1}{8}\widetilde{\varphi}_{j,k-1}+\widetilde{\psi}^{H}_{j,k}+\frac{1}{8}\widetilde{\varphi}_{j,k+1}.
\end{aligned}$$

La solution du cas général ressemble à la solution (5.2.21) du cas $N=1$. En résolvant le système (5.2.17) à partir du milieu, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{l}
g_{j,2k,k} = \sqrt{\frac{d_{j+1,2k+1}}{d_{j,k}}}A_{j,2k+1,k} \\
g_{j,2k+1,k} = -\sqrt{\frac{d_{j+1,2k}}{d_{j,k}}}A_{j,2k,k} \\
g_{j,2i,k} = -\sqrt{\frac{d_{j+1,2i}}{d_{j,i}}}\sqrt{\frac{d_{j+1,2k}}{d_{j+1,2k+1}}}\sqrt{\frac{d_{j,k}}{d_{j,i}}}A_{j,2k,i} \\
g_{j,2i+1,k} = -\sqrt{\frac{d_{j+1,2i+1}}{d_{j,i}}}\sqrt{\frac{d_{j+1,2k}}{d_{j+1,2k+1}}}\sqrt{\frac{d_{j,k}}{d_{j,i}}}A_{j,2k,i}\,,
\end{array}\right. \tag{5.2.22}$$

pour tout $i \in \{k-N,\dots,k+N\}\setminus\{k\}$. Remarquons que dans le cas de la grille uniforme, le vecteur $\overline{\mathrm{g}}_{j,k}$ solution du système (5.2.20) ne dépend ni de j ni de k. Nous le noterons $\overline{\mathrm{g}}$.

Proposition 5.2.5 *Soit un entier $N \geq 0$, $\mathcal{X}$ une grille et $\mathcal{A}$ le schéma de subdivision interpolateur en moyenne de degré $2N$ relatif à la grille $\mathcal{X}$. Soient $\varphi_{j,k}^{[\sharp 1]}$, $j \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ les fonctions fondamentales de $\mathcal{A}$. A des constantes multiplicatives près, il existe un unique système biorthogonal de fonctions d'échelle $\varphi_{j,k}$ et $\widetilde{\varphi}_{j,k}$, respectivement définies dans (5.2.1). Les ondelettes primales $\psi_{j,k}$ sont définies par (5.2.7) et les ondelettes duales $\widetilde{\psi}_{j,k}$ sont définies par (5.2.8), avec les coefficients $g_{j,\ell,k}$ de (5.2.16) et (5.2.22). Les ondelettes duales ont $2N+1$ moments nuls et le support*

$$\mathrm{supp}\widetilde{\psi}_{j,k} = [x_{j,k-2N}, x_{j,k+2N+1}[,$$

et les ondelettes primales ont un moment nul. Les vecteurs de coefficients $\mathrm{g}_{j,k}$ vérifient les inégalités :

$$\|\mathrm{g}_{j,k} - \overline{\mathrm{g}}\|_\infty \leq C 2^{-\min(\alpha-1,1)j}, \tag{5.2.23}$$

où α est la régularité hölderienne de la fonction G de la grille.

Démonstration : Pour la dernière inégalité on utilise la proposition 4.5.4 et le lemme 4.4.5. ∎

Un calcul simple mais technique montre que l'ondelette duale peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_{j,k} \;=\; & \widetilde{\psi}^H_{j,k} - \sqrt{\frac{d_{j+1,2k}}{d_{j+1,2k+1}}}\left[\sqrt{\frac{d_{j,k}}{d_{j,k-D}}}A_{j,2k,k-D}\widetilde{\varphi}^H_{j,k-D} + \cdots + \sqrt{\frac{d_{j,k}}{d_{j,k-1}}}A_{j,2k,k-1}\widetilde{\varphi}^H_{j,k-1}\right.\\ & -(1-A_{j,2k,k})\widetilde{\varphi}^H_{j,k}\\ & \left.+\sqrt{\frac{d_{j,k}}{d_{j,k+1}}}A_{j,2k,k+1}\widetilde{\varphi}^H_{j,k+1} + \cdots + \sqrt{\frac{d_{j,k}}{d_{j,k+D}}}A_{j,2k,k+D}\widetilde{\varphi}^H_{j,k+D}\right].\end{aligned} \tag{5.2.24}$$

Pour $N \geq 1$, on peut construire le système biorthogonal par le schéma de relèvement de [64]. Par exemple, si on applique le relèvement dual au système biorthogonal construit à partir d'un schéma de subdivision de degré $2N-2$, en imposant la condition que l'ondelette duale ait deux moments nuls de plus, on trouve un système biorthogonal dont les fonctions d'échelle primales sont les fonctions fondamentales du schéma interpolateur en moyenne de degré $2N$. Par relèvement dual, les fonctions d'échelle duales ne changent pas, ni les relations de raffinement pour les ondelettes primales. Les ondelettes duales auront la forme:

$$\widetilde{\psi}_{j,k} := \widetilde{\psi}^{old}_{j,k} - a^{-N}_{j,k}\widetilde{\varphi}^{old}_{j,k-N} - \cdots - a^0_{j,k}\widetilde{\varphi}^{old}_{j,k} - \cdots - a^N_{j,k}\widetilde{\varphi}^{old}_{j,k+N},$$

Les coefficients $a_{j,k}^{-N}, \ldots, a_{j,k}^{N}$ sont définis par la condition de moments nuls. La proposition 5.2.5 nous garantit que ce système existe et que les ondelettes duales sont, éventuellement à une constante multiplicative près, les fonctions définies dans (5.2.7), avec les coefficients (5.2.16), (5.2.22). La complexité d'un algorithme qui utilise le schéma de relèvement est réduite par rapport à un algorithme direct, qui calcule les matrices A_j.

5.3 Conclusion

Ce chapitre concernait les AMR de seconde génération. Des algorithmes issus de ce type d'AMR peuvent être utilisés dans le débruitage et la reconstruction des fonctions échantillonnées sur des grilles non régulières. Ils sont plus coûteux, car à chaque pas de l'algorithme le filtre utilisé dans la convolution change. Mais ils évitent tout regroupement de données et préconditionnement, opérations également coûteuses.

Dans les AMR de première génération les fonctions d'échelle sont toutes des translatées et des dilatées d'une seule fonction. Ceci permet d'utiliser l'analyse de Fourier, dans la construction de ces fonctions ainsi que pour déduire leurs propriétés. Dans le cas des AMR de seconde génération nous sommes obligés de renoncer à cette technique, et des nombreux points concernant ce type d'AMR restent encore des problèmes ouverts.

Nous avons donné un exemple d'AMR de seconde génération. Nous avions montré dans le chapitre 4 que (sous certaines hypothèses sur la grille) le schéma de subdivision interpolateur en moyenne est convergent. Nous avons montré ici que les fonctions fondamentales de ce schéma sont les fonctions d'échelle d'AMR de seconde génération, dont l'AMR duale est l'AMR de seconde génération de Haar avec les fonctions d'échelle adaptées à la grille. Une fois les fonctions d'échelle choisies, il nous reste à trouver les ondelettes. C'est ce que nous essayons, en définissant un système biorthogonal. Nous avons montré qu'un tel système existe, et de plus qu'il est unique, modulo la multiplication par des constantes. Il reste à montrer que les "bases d'ondelettes" ainsi définies sont des bases de Riesz pour L^2.

Tout ce que nous avons montré dans le paragraphe 5.2 reste valable si l'on considère le schéma de subdivision interpolateur en moyenne sur l'intervalle (adapté aux bords), et une AMR de $L^2(0,1)$ avec les fonctions d'échelle et les ondelettes modifiées en conséquence.

Chapitre 6

Illustrations numériques et étude comparative

Dans ce chapitre nous illustrons par des exemples les méthodes d'estimation présentées dans les chapitres 2 et 3. Nous proposons des modifications à apporter aux algorithmes, suggérées par les tests numériques. Nous étudions également une méthode d'estimation utilisant les "ondelettes" de seconde génération que nous avons décrit dans le paragraphe 5.2. Nous comparons les résultats par rapport à l'erreur quadratique entre l'estimation et la fonction à estimer.

Dans les simulations nous utiliserons les fonctions HeaviSine, Blip et Corner de la boîte à outils WaveLab ([28]). Le plan d'expérience sera un échantillon aléatoire issu de la loi d'une variable aléatoire ayant comme fonction de répartition la fonction $G:\ \mathbb{R}\to[0,1]$ définie par $G(x)=(x+\frac{1}{10\pi}\sin(7\pi x+\pi))\mathbb{1}_{[0,1]}(x)+\mathbb{1}_{]1,+\infty[}$.

6.1 L'algorithme d'estimation de fonctions hölderiennes

Nous reprenons ici la méthode décrite dans le chapitre 2. Elle est prévue pour l'estimation de fonctions hölderiennes, mais nous l'appliquons ici à des fonctions moins lisses. Nous pouvons ainsi observer son comportement dans des régions où la fonction est lisse, mais aussi dans des régions où cette dernière présente des discontinuités ou des points de rebroussement.

Dans les simulations numériques nous avons utilisé un algorithme dérivé de celui décrit dans le paragraphe 2.5. Il généralise l'algorithme de [3] :

Étape 1. Estimation de $\widehat{G}_n$ à partir de l'échantillon $(x_i)_{i=1,\dots,n}$.

Étape 2. Calcul de la matrice de préconditionnement P et préconditionnement des données :

$$Y_p = P \cdot n^{-1/2} Y.$$

Étape 3. Décomposition dans la base d'ondelettes.

Étape 4. Seuillage des coefficients de détail.

Étape 5. Reconstruction à partir des coefficients débruités. On obtient l'estimateur $\widehat{f}_J$.

La matrice de préconditionnement P est une matrice creuse de dimension $n \times n$, dont les composantes sont $\langle \varphi_{J,i} \circ \widehat{G}_n, \varphi_{J,k} \rangle$. Elle peut être calculée avec la précision souhaitée en utilisant l'algorithme en cascade de I. Daubechies ([15]). Néanmoins, d'après le lemme 1.6.3 on peut approcher le produit scalaire $\langle \varphi_{J,i} \circ \widehat{G}_n, \varphi_{J,k} \rangle$ par la valeur $(\varphi_{J,i} \circ \widehat{G}_n)(k/n)$, et utiliser comme matrice de préconditionnement la matrice de composantes :

$$P_{k,i} := \varphi(n\widehat{G}_n(k/n) - i). \tag{6.1.1}$$

En effet, dans les simulations numériques nous n'avons remarqué aucune différence entre l'algorithme qui utilise la valeur exacte et celui qui utilise la valeur approchée. Par contre, cette approximation réduit beaucoup le coût de calcul.

Nous avons utilisé pour les simulations une version invariante par translations (voir paragraphe 1.7) de l'algorithme décrit ci-dessus : au dernier pas nous calculons une moyenne de tous les estimateurs obtenus pour toutes les translations possibles des donnés Y_p.

Comme il avait été remarqué auparavant, dans le cas de l'échantillonnage régulier, le seuil suggéré par les considérations asymptotiques semble souvent trop grand quand la taille de l'échantillon est finie. Nous avons observé le même comportement dans notre cas, et en conséquence nous avons utilisé dans notre algorithme le seuil (2.3.10) divisé par 2.

Dans les figures qui suivent, nous avons représenté en haut les observations et en bas le résultat de l'algorithme d'estimation. La fonction initiale est représentée en ligne continue en haut et en ligne pointillée en bas. Le plan d'expérience, aléatoire, est figuré par des $+$ sur l'axe des x. Nous avons ajouté aux donnés réelles du bruit gaussien indépendant et identiquement distribué, avec le rapport signal-sur-bruit indiqué pour

chaque cas particulier. Comme il est courant, nous appelons rapport signal-sur-bruit et nous le noterons SNR, le rapport entre l'écart-type du signal et l'écart-type du bruit.

Dans le premier exemple nous comparons les résultats obtenus par remplacement de la fonction de répartition inconnue G avec respectivement $\widehat{G}_n$ et la fonction affine par morceaux G_n. Nous pouvons remarquer que dans le deuxième cas le résultat est moins bon pour l'intervalle $[0.8, 0.9]$. Ceci s'explique par les valeur petites prises par la dérivée de G_n dans cet intervalle. Nous reviendrons sur ce point dans la comparaison des erreurs d'estimation, à la fin de ce chapitre.

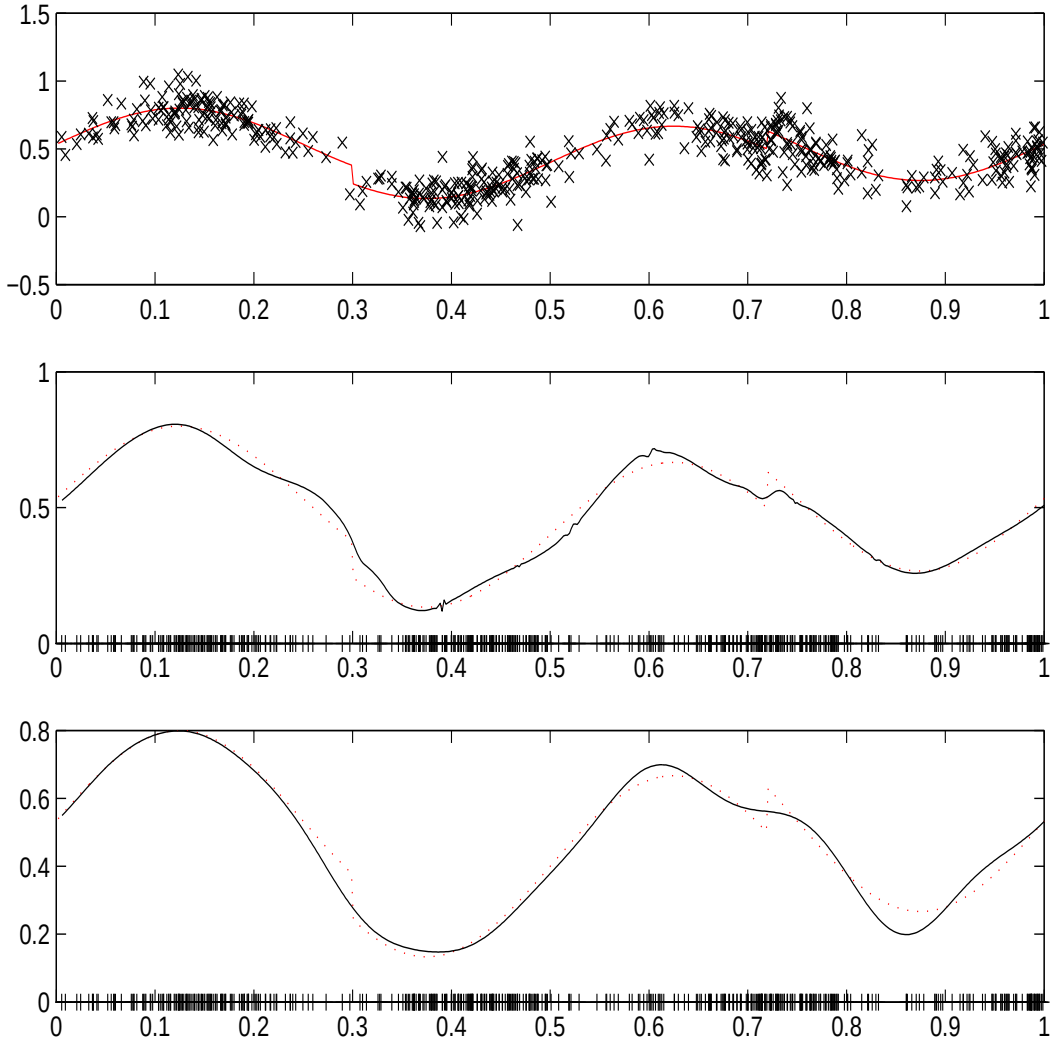


FIG. 6.1 – *Estimation de la fonction HeaviSine à partir d'un échantillon bruité de* 512 *points, utilisant d'abord l'estimateur log-spline* $\widehat{G}_n$*, puis l'estimateur* G_n*. Le rapport signal-sur-bruit est ici* $SNR = 2$.

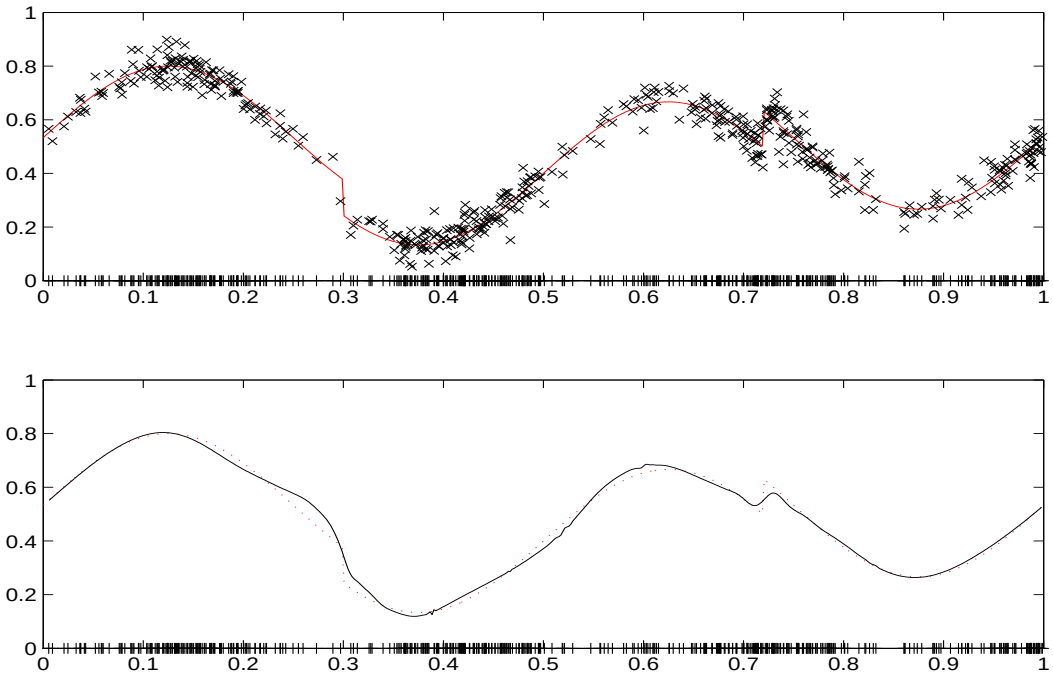


FIG. 6.2 – *Fonction HeaviSine, $n = 512$ points, $SNR = 5$.*

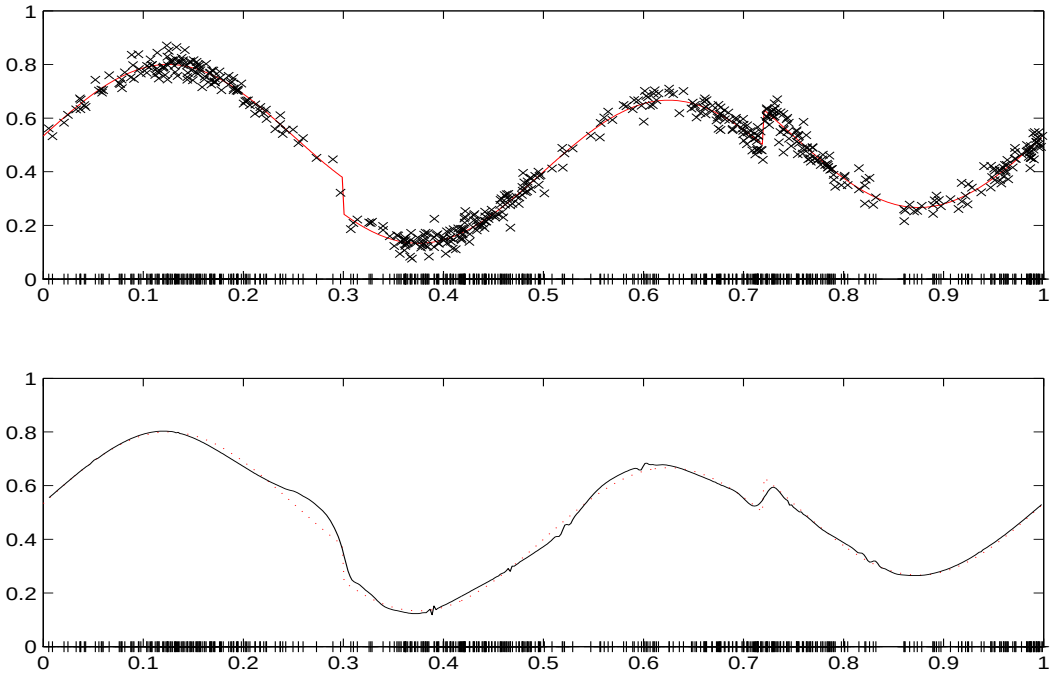


FIG. 6.3 – *Fonction HeaviSine, $n = 512$ points, $SNR = 7$.*

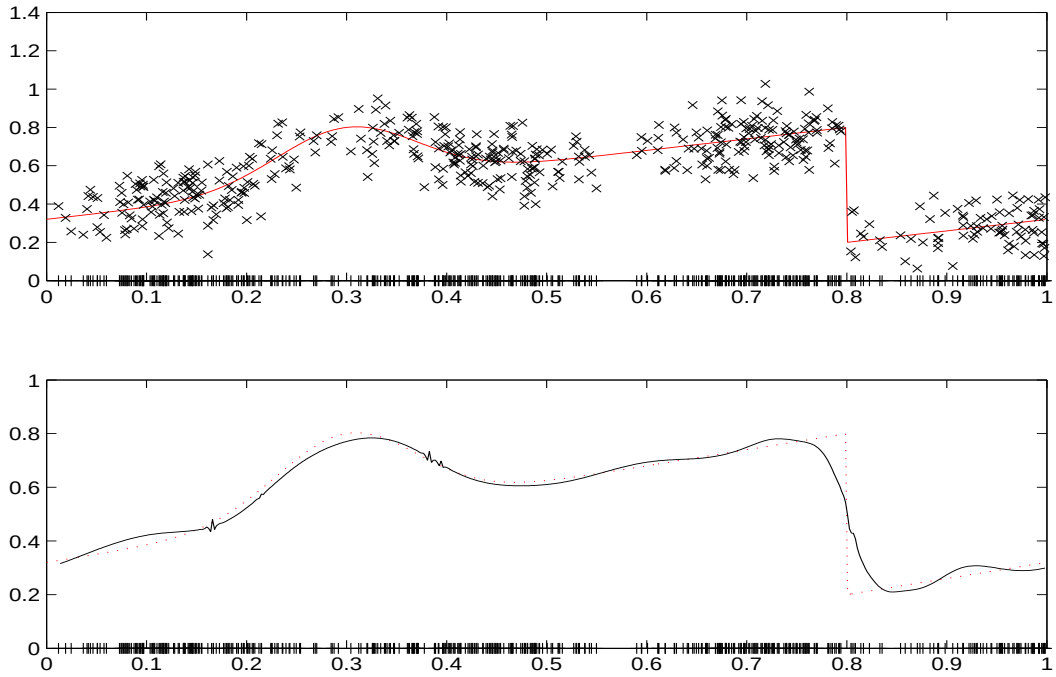


FIG. 6.4 – *Estimation de la fonction Blip à partir d'un échantillon bruité de* 512 *points. Le rapport signal-sur-bruit est ici* $SNR = 2$.

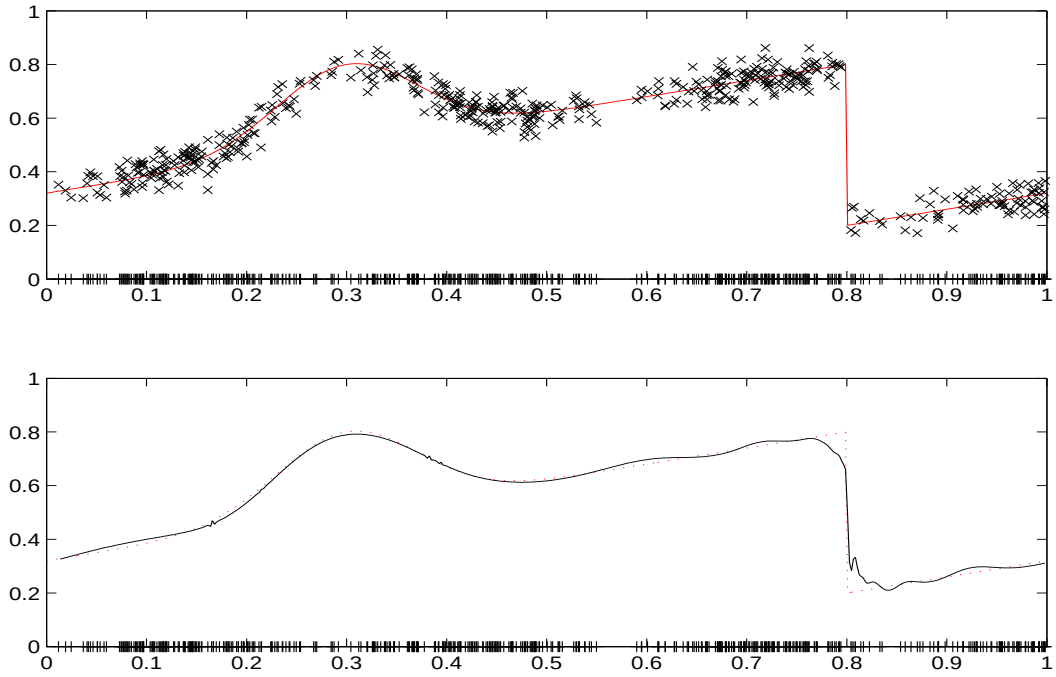


FIG. 6.5 – *Fonction Blip,* $n = 512$ *points,* $SNR = 5$.

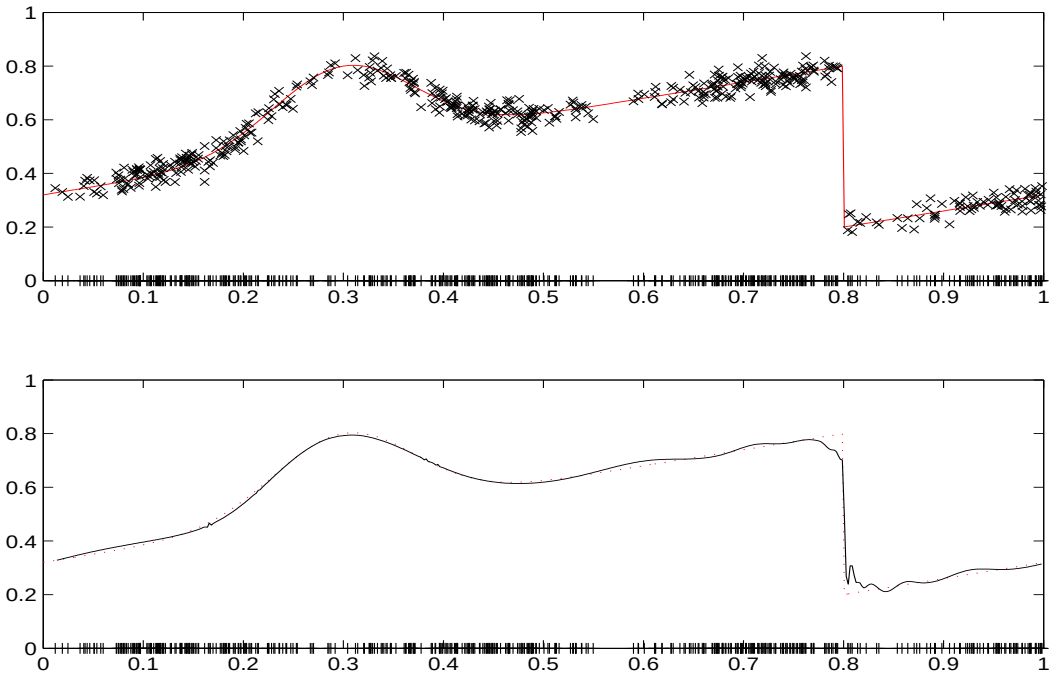


FIG. 6.6 – *Fonction Blip,* $n = 512$ *points,* $SNR = 7$.

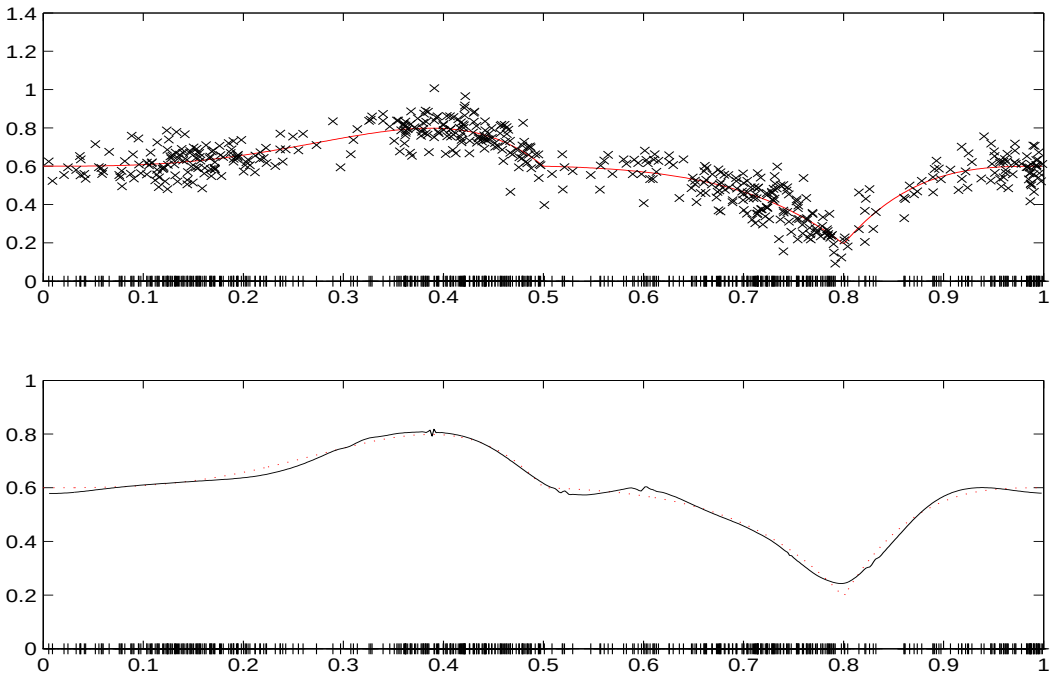


FIG. 6.7 – *Estimation de la fonction Corner à partir d'un échantillon bruité de* 512 *points. Le rapport signal-sur-bruit est ici* $SNR = 2$.

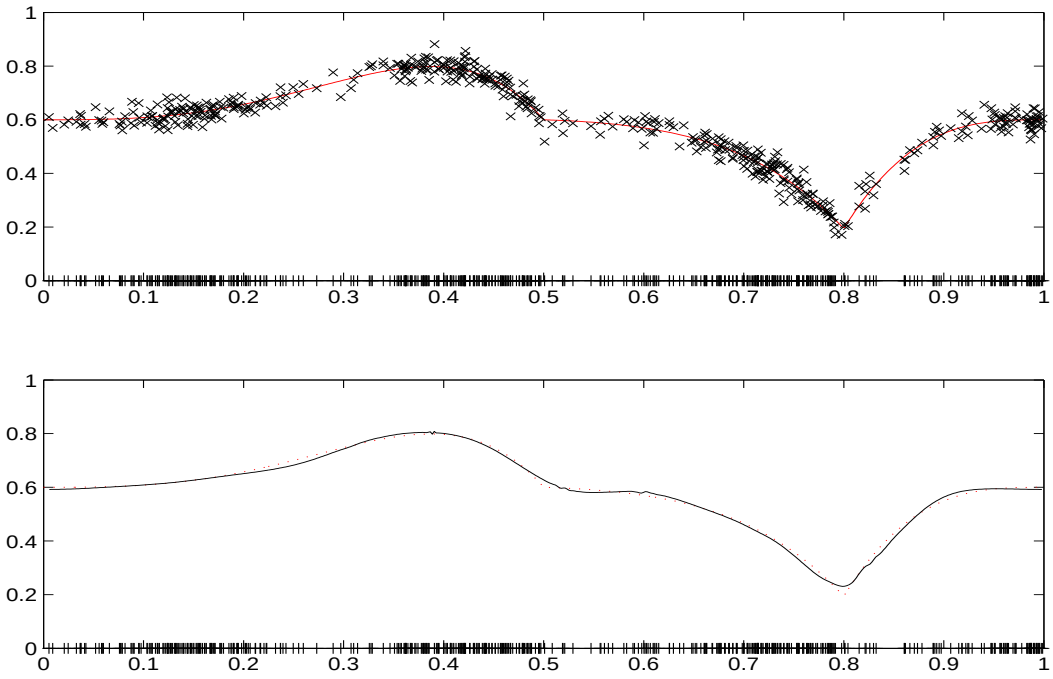


FIG. 6.8 – *Fonction Corner, $n = 512$ points, $SNR = 5$.*

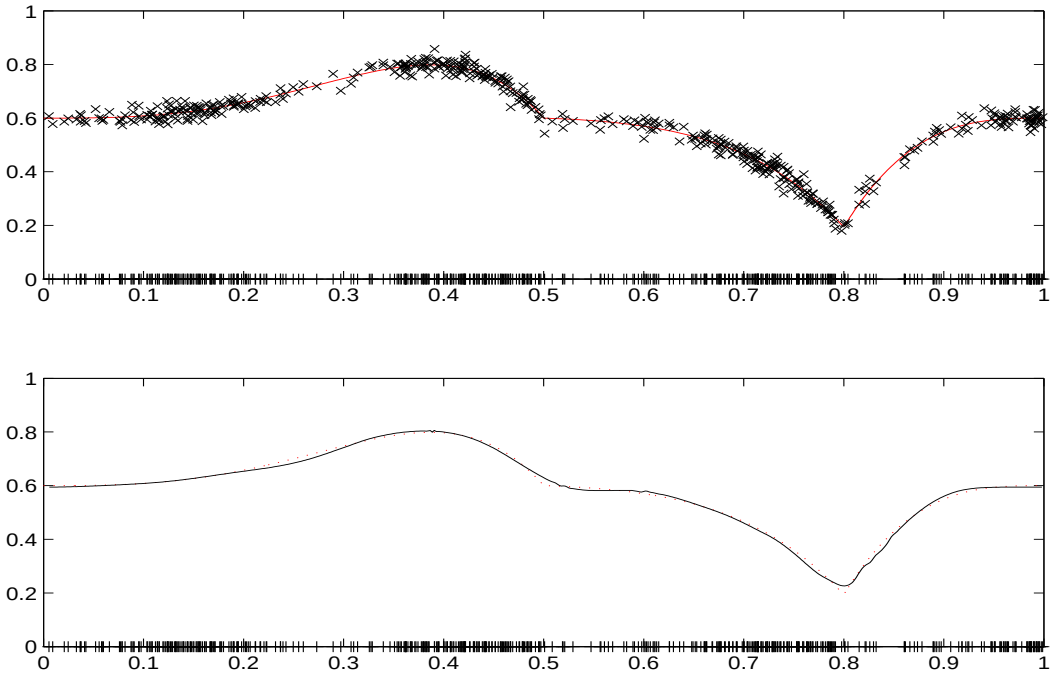


FIG. 6.9 – *Fonction Corner, $n = 512$ points, $SNR = 7$.*

Dans les trois figures relatives à la fonction HeaviSine nous pouvons observer que la discontinuité de la fonction en 0.3, cumulée avec le faible nombre de points dans le plan d'expérience à cet endroit, produit une oscillation locale assez forte de l'estimateur. Par contre, dans cet exemple la deuxième discontinuité, située entre 0.7 et 0.8 est bien reconstituée. Même dans les régions lisses de la fonction, l'inhomogénéité de la grille peut entraîner un léger décalage entre l'estimateur et la fonction à estimer.

La fonction Blip est plutôt bien reconstituée dans les régions lisses. On remarque quelques petits artefacts causés par le bruit.

Dans les exemples avec la fonction Corner, le deuxième point de rebroussement, en 0.8, est mieux reconstitué que le premier, en 0.5.

Nous donnons ci-dessous un exemple pour comparer cette méthode (résultat en ligne continue) avec la méthode qui consiste à considérer les points comme étant équidistants (résultat en ligne brisée). Le plan d'expérience est déterministe.

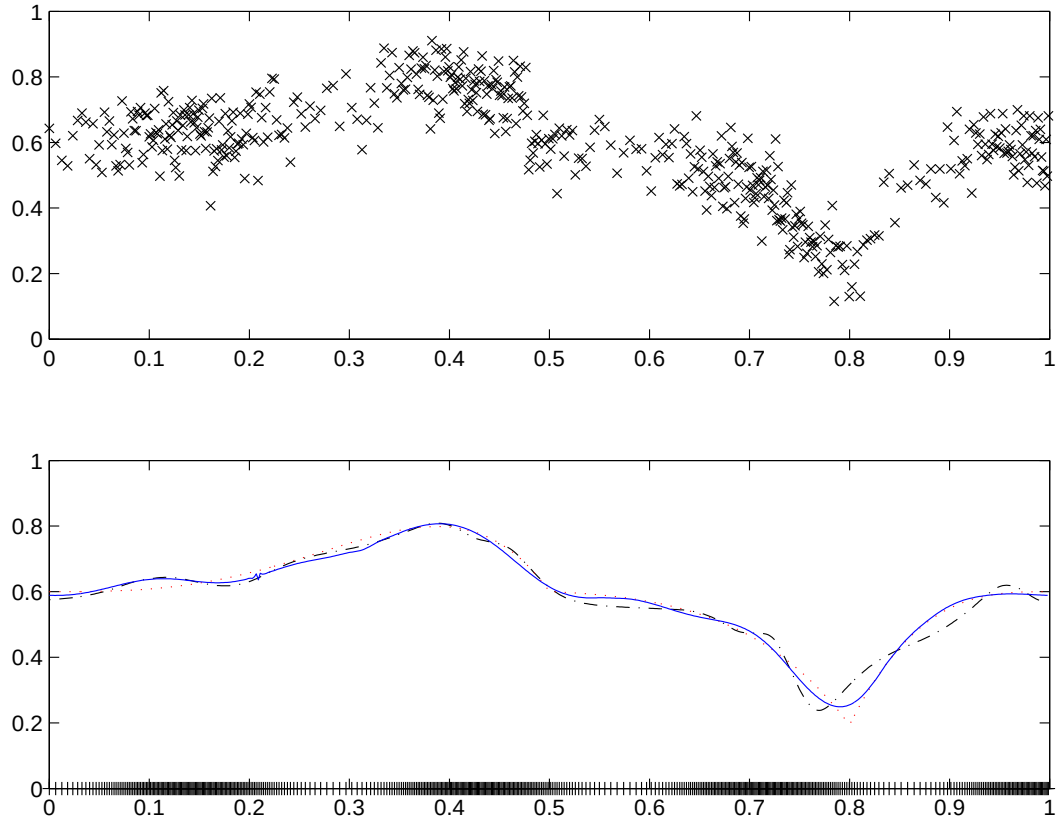


FIG. 6.10 – *Fonction Corner,* $n = 512$ *points,* $SNR = 2$.

6.2 Estimation dans des espaces de Besov

Dans le chapitre 3 nous avons présenté une méthode de reconstruction qui atteint un taux de convergence presque optimal pour des fonctions appartenant à des espaces de Besov. Cependant, pour des échantillons de taille raisonnable cette méthode semble difficile à appliquer, sans lui apporter quelques modifications, comme nous le verrons par la suite.

Pour simplifier, nous considérons dans nos essais que n est un entier dyadique. Les ondelettes adaptées aux bords qui contiennent dans leur support l'un ou l'autre des bords de l'intervalle $[0,1]$ nous ont semblées trop oscillantes, ce qui induit des oscillations significatives de l'estimateur obtenu après seuillage. Pour cette raison, nous avons préféré une base d'ondelettes périodiques, la Symmlet 8 (les ondelettes de Daubechies orthogonales, à support compact, avec maximum de moments nuls et les moins asymétriques [15]). Nous notons I_0 la réunion des intervalles I_0 et I_N (par abus de langage, nous dirons que I_0 est un intervalle de centre 0).

La première étape de l'algorithme consiste à répartir les n données dans les $N = 2^J$ intervalles $I_0, \ldots, I_{N-1}$ et à estimer par régression polynomiale locale la valeur de la fonction au centre de chacun de ces intervalles. Nous avons vu qu'une condition asymptotiquement suffisante pour que ce calcul soit réalisable et qu'il donne des valeurs pertinentes, avec une probabilité qui tend vers 1 quand $n \to +\infty$ est que

$$N = \frac{n}{c_n \log n},$$

et que la suite (c_n) soit minorée par une certaine constante strictement positive c_*. Comme on peut le voir dans (3.5.19), la constante c_* est minorée par une valeur inversement proportionelle à a, le minimum de la densité g, et par une valeur inversement proportionelle à μ, la plus petite parmi les valeurs propres des matrices Υ_m, $m = 0, \ldots, N$, définies page 87. Par exemple, pour la densité $g(x) = 1 + \frac{7}{10}\cos(7\pi x + \pi)$ et pour $M = 2$ on a $a = 0.3$ et $\mu = 0.0055$.

En prenant la fonction de répartition $G(x) = x + 1/(10\pi)\sin(7\pi x + \pi)$, nous avons observé que l'on peut espérer trouver un estimateur (c'est-à-dire, qu'il existe au moins 2 points dans chaque ensemble I_m) si $n \geq 16N$. Les chances sont cependant faibles dans le cas limite $n = 16N$.

Dans la deuxième étape nous décomposons en ondelettes la nouvelle suite, de taille N. Si l'on utilise la base d'ondelettes Symmlet 8, dont le filtre est de longueur 16, le niveau le plus bas, j_0, ne devrait pas être inférieur à 4. Raisonnablement, N devrait être au moins 2^7, ce qui fait que n doit être plus grand que $2^{11} = 2048$.

Les matrices V_m (3.4.7) peuvent être mal conditionnées, ce qui est gênant quand

nous calculons les valeurs $\overline{f}(t_{J,m})$ (3.4.10). Dans la régression polynomiale on évite cet inconvénient en utilisant une méthode de régularisation appelée “ridge regression” ([43], [42], [37]). L’estimateur obtenu par cette méthode est biaisé mais de risque L^2 plus petit que l’estimateur non biaisé sans régularisation.

Nous avons testé plusieurs algorithmes, variantes de la méthode théorique, qui nous permettent de calculer un estimateur même si la taille du plan d’expérience est relativement faible.

Nous nous sommes inspiré de la “ridge regression” et nous avons remplacé chaque matrice V_m par $V_m + \lambda I$, où λ est le paramètre “ridge” et I est la matrice identité. Dans tous les tests qui suivent nous avons fixé $\lambda = 0.2$. L’algorithme va calculer un estimateur seulement s’il y a au moins 2 points dans chaque ensemble I_m, $m = 0,\ldots,N-1$. Sur 100 essais, ceci s’est produit 91 fois, pour $n = 2^9 = 512$ et $N = 2^5 = 32$, 67 fois, pour $n = 2^{10} = 1024$ et $N = 2^6 = 64$, et 99 fois, pour $n = 2^{10} = 1024$ et $N = 2^5 = 32$.

Afin de pouvoir prendre en compte des valeurs “petites” pour N (rappelons-nous la contrainte imposée par la deuxième étape de l’algorithme initial), nous avons construit un algorithme “circulant”, de la façon suivante. Considérons les $n/N-1$ translations périodiques des ensembles $I_0,\ldots,I_{N-1}$, de sorte qu’à la i-ème translation on ait

$$I_m^{(i)} = I_m + \frac{i}{n}, \quad m = 1,\ldots,N-1,$$

et $I_0^{(i)} = [0,1] \setminus \cup_{m=1}^{N-1} I_m^{(i)}$.

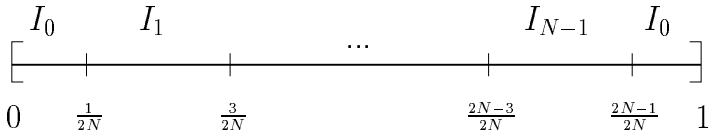


FIG. 6.11 – *Les ensembles initiaux.*

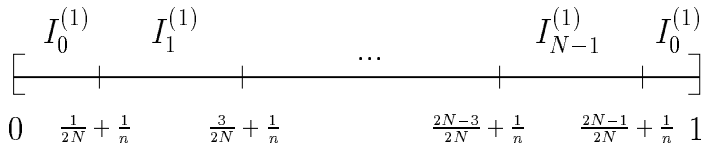


FIG. 6.12 – *La première translation.*

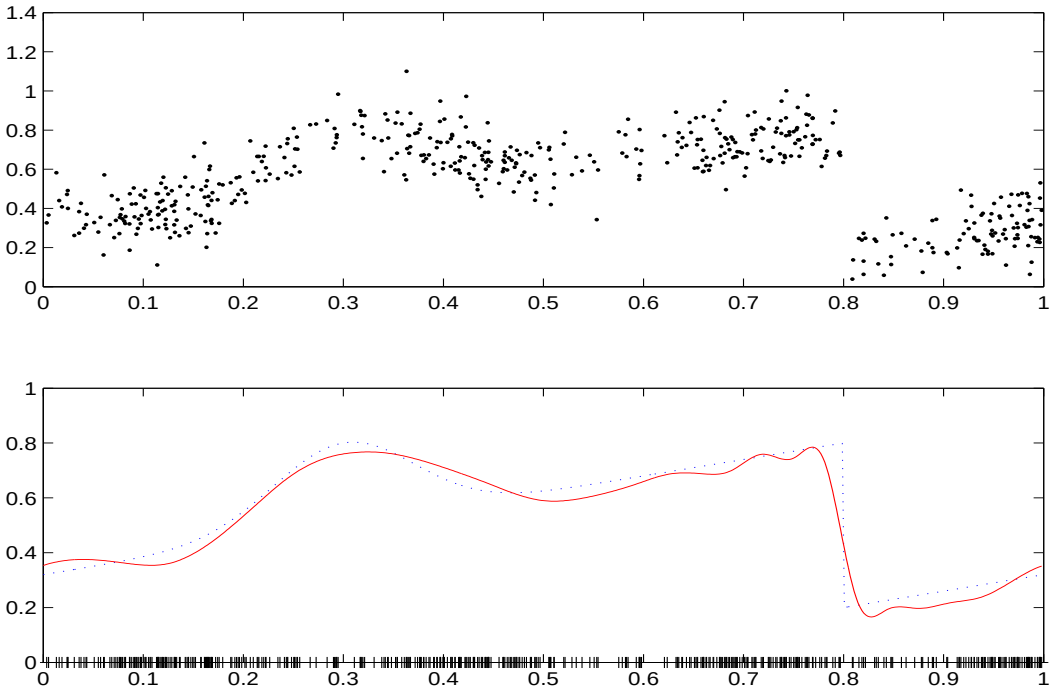
Nous estimons par régression polynomiale locale les valeurs de la fonction au centre de tous ces intervalles, si cela est possible. Nous obtenons ainsi un vecteur à n composantes. Si parmi les $n/N-1$ translations il existe au moins une pour laquelle la

régression échoue, et au moins une pour laquelle la régression réussit, nous gardons le vecteur de longueur N produit par le premier pas avec succès. Avec le vecteur issu de cette étape, nous passons à la deuxième étape, qui consiste en un débruitage par ondelettes.

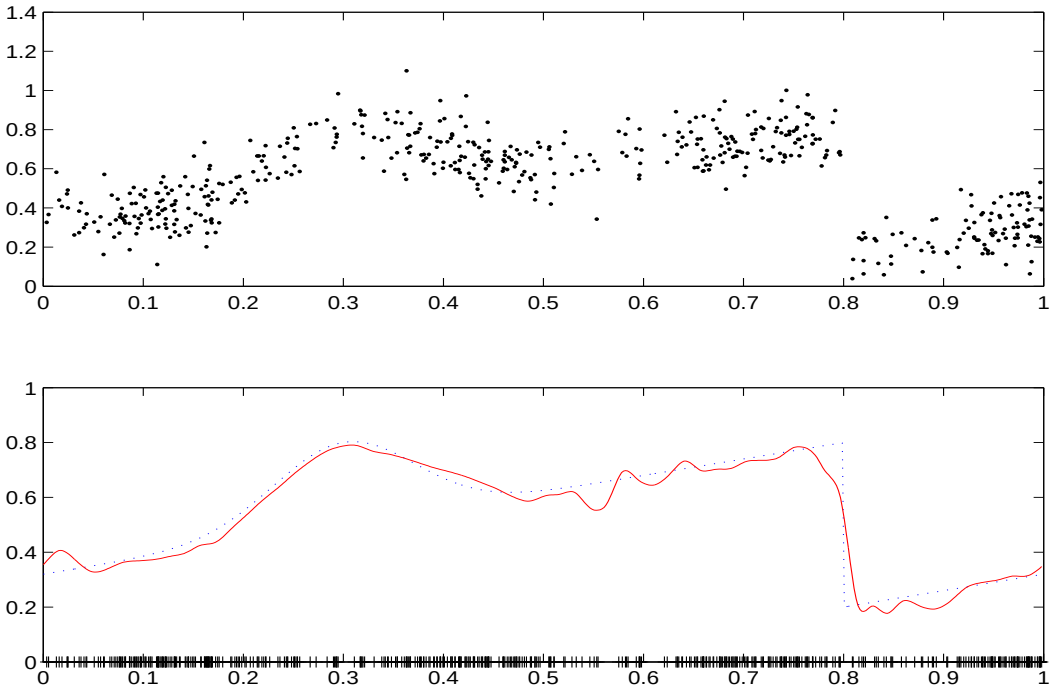
Sur 100 essais, cette méthode nous a permis de calculer un estimateur 100 fois, quand $n = 2^9$ et $N = 2^5$, 99 fois, quand $n = 2^{10}$ et $N = 2^6$, et 100 fois, quand $n = 2^{10}$ et $N = 2^5$. La première étape a produit un vecteur de longueur n dans respectivement 45, 23, 99 cas.

Une troisième méthode possible, que nous n'allons pas illustrer ici, est une méthode "multirésolution". On calcule d'abord les coefficients d'échelle empiriques $\overline{\alpha}_J^{(1)}$ d'abord pour $N = 2^J$ suffisamment petit, de sorte que cela soit possible. On calcule, sur deux fois plus d'intervalles, les composantes du vecteur $\overline{\alpha}_{J+1}^{(2)}$ pour lesquelles le nombre de points du plan d'expérience est suffisant. Les places restées libres dans le vecteur $\overline{\alpha}_{J+1}^{(2)}$ sont complétés par des composantes du vecteur $\overline{\alpha}_{J+1}^{(1)}$, obtenues du vecteur $\overline{\alpha}_J^{(1)}$ par la transformée en ondelettes inverse. On peut continuer ainsi jusqu'au pas P quand il n'est plus possible de calculer directement des valeurs du vecteur $\overline{\alpha}_{J+P-1}^{(P)}$. Cet algorithme semble mieux adapté aux plans d'expérience aléatoires, car il permet de raffiner les calculs dans les régions où l'on dispose d'un grand nombre de points.

Nous donnons quelques exemples pour illustrer les deux premières variantes que nous avons décrit plus haut. Nous avons groupé les exemples par paires, afin de mieux comparer les deux méthodes. Nous avons choisi des exemples dans lesquels à la première étape du deuxième algorithme nous avons obtenu des suites de longueur maximale, n.

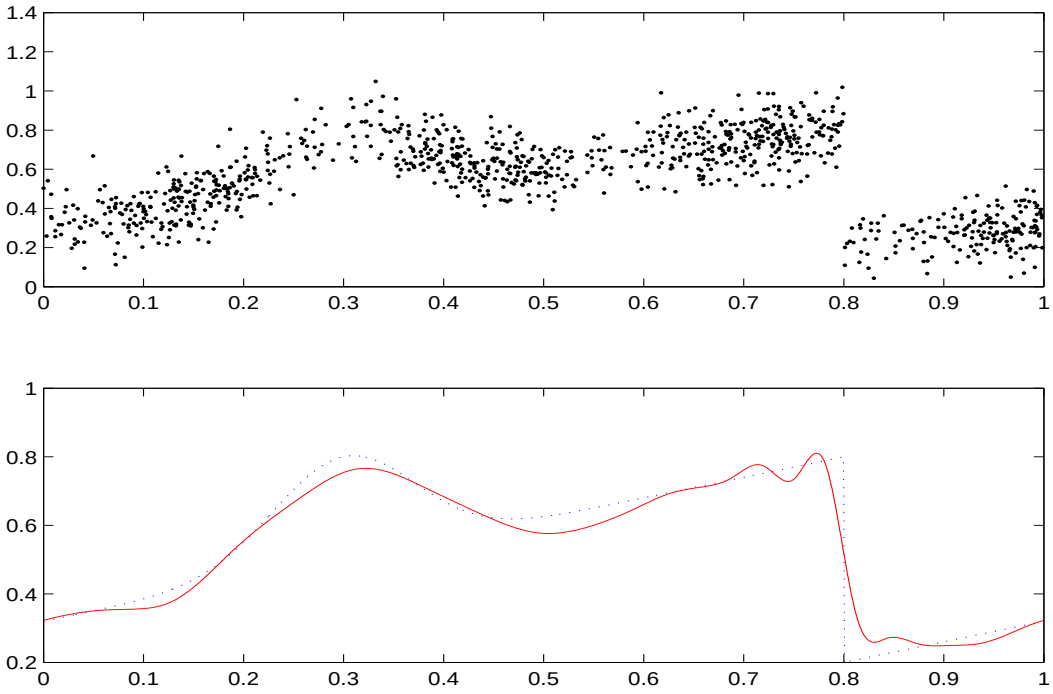


Régression “ridge”

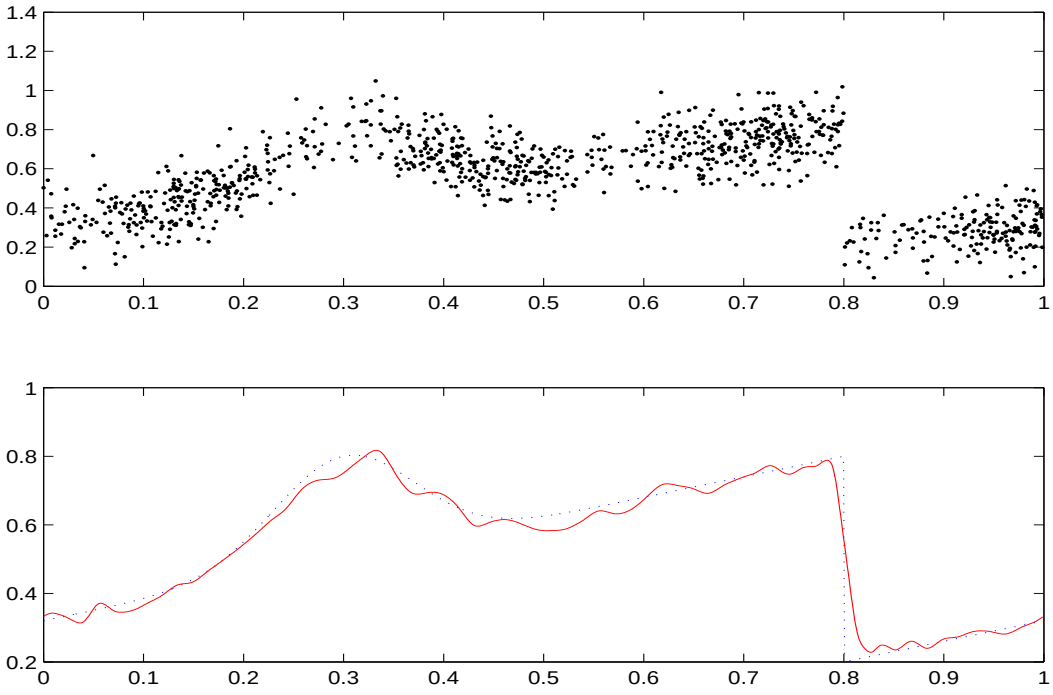


Régression “ridge” circulante

FIG. 6.13 – *Fonction Blip*, 512 *points*, $SNR = 2$.

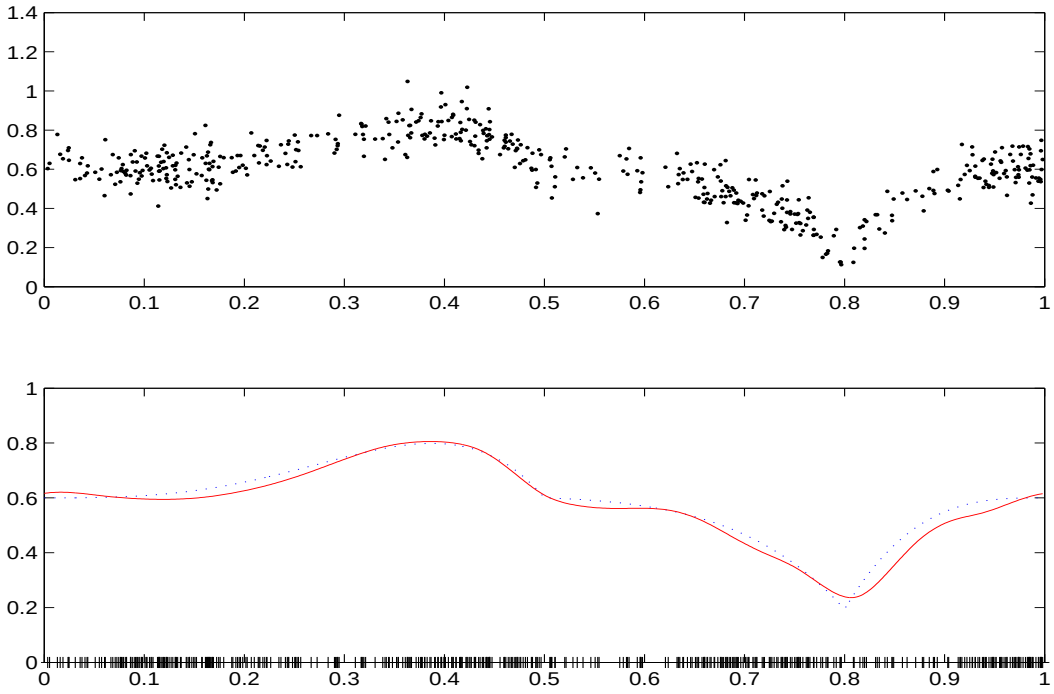


Régression “ridge”

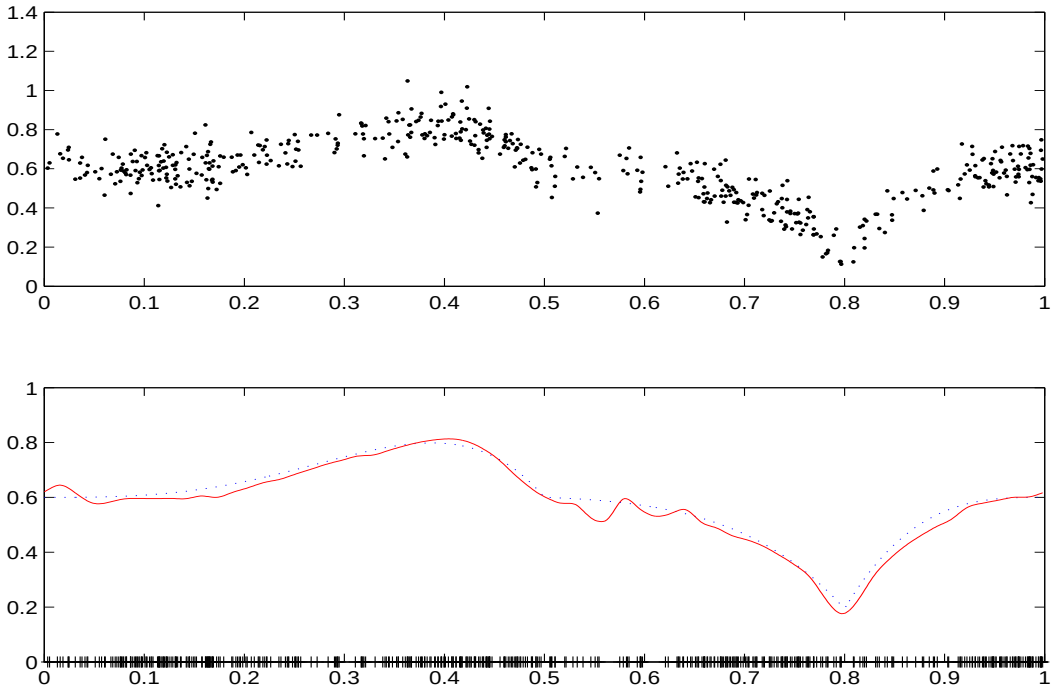


Régression “ridge” circulante

FIG. 6.14 – *Fonction Blip,* 1024 *points, SNR* = 2.

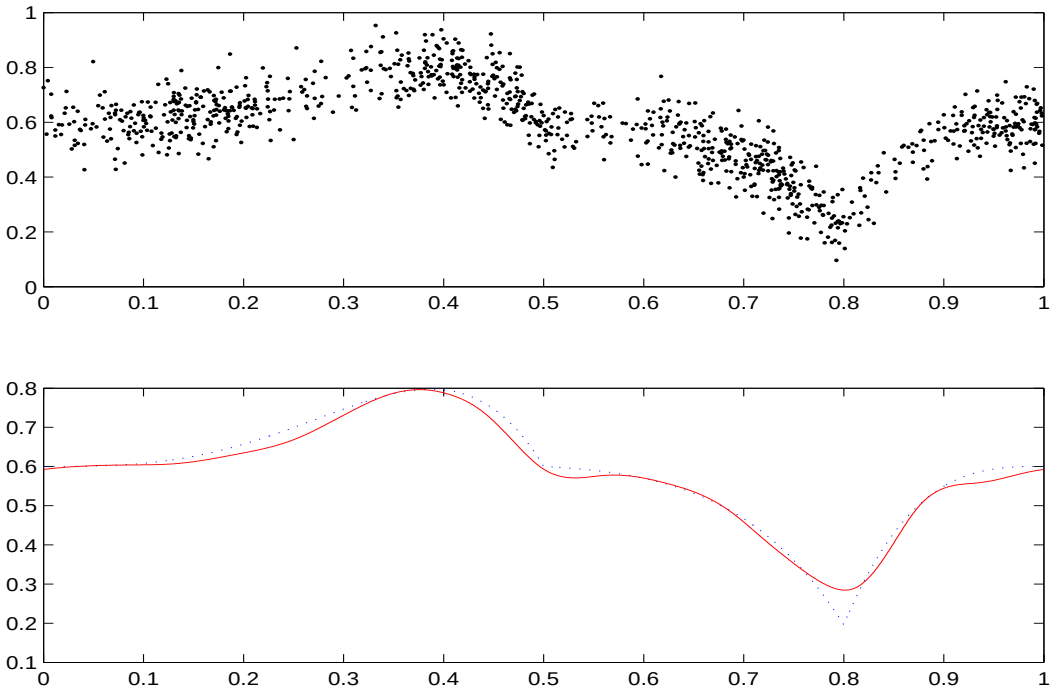


Régression “ridge”

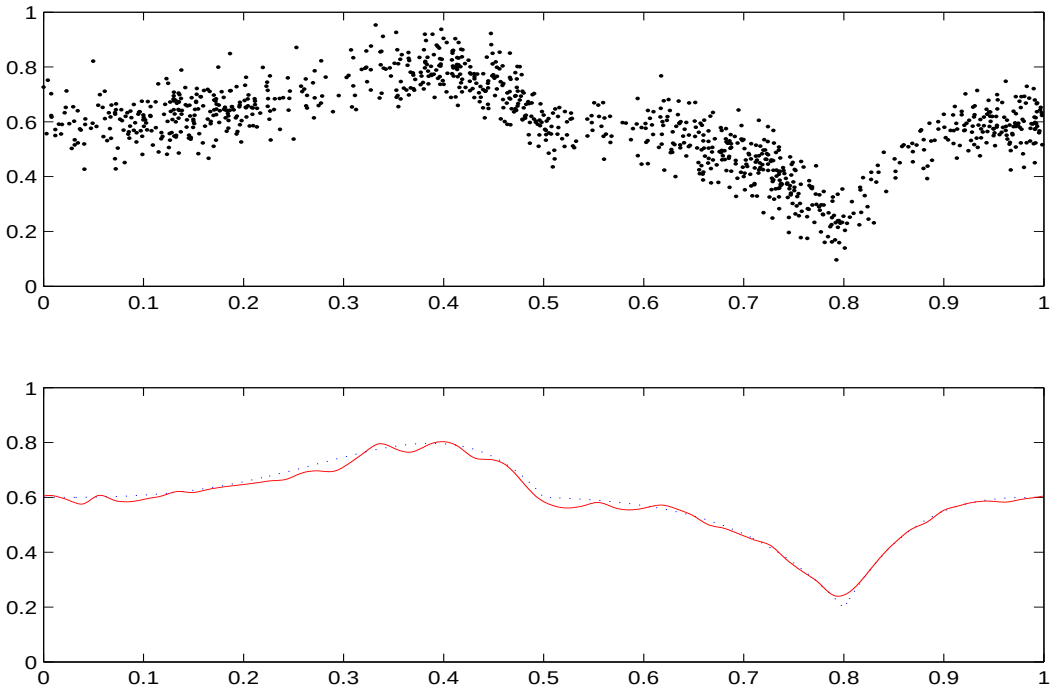


Régression “ridge” circulante

FIG. 6.15 – *Fonction Corner,* 512 *points, SNR* = 2.

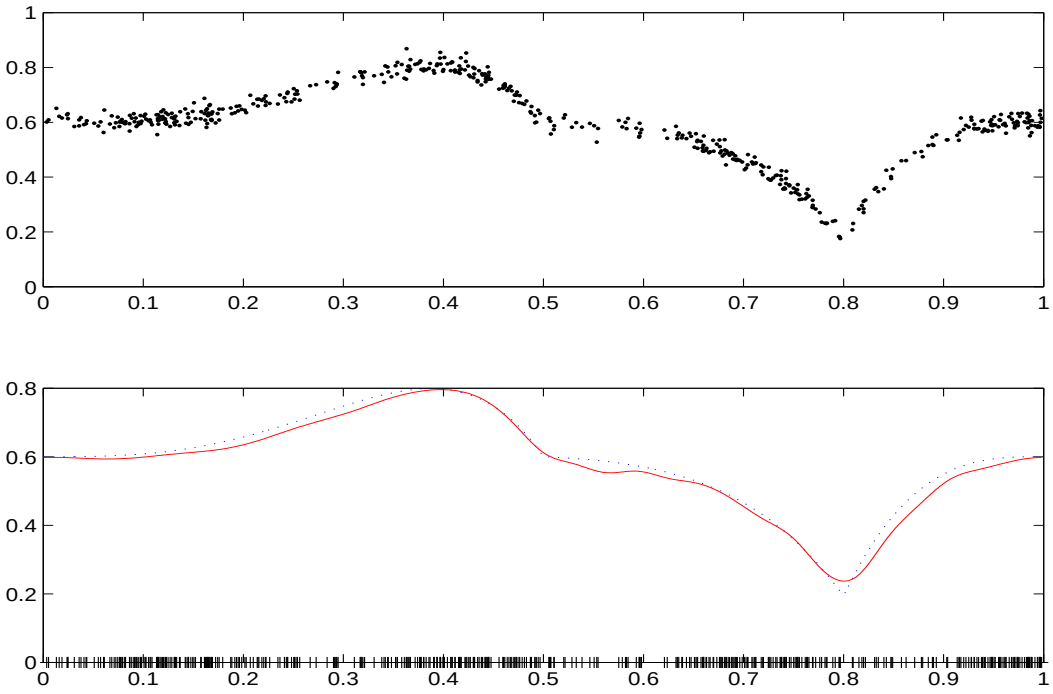


Régression “ridge”

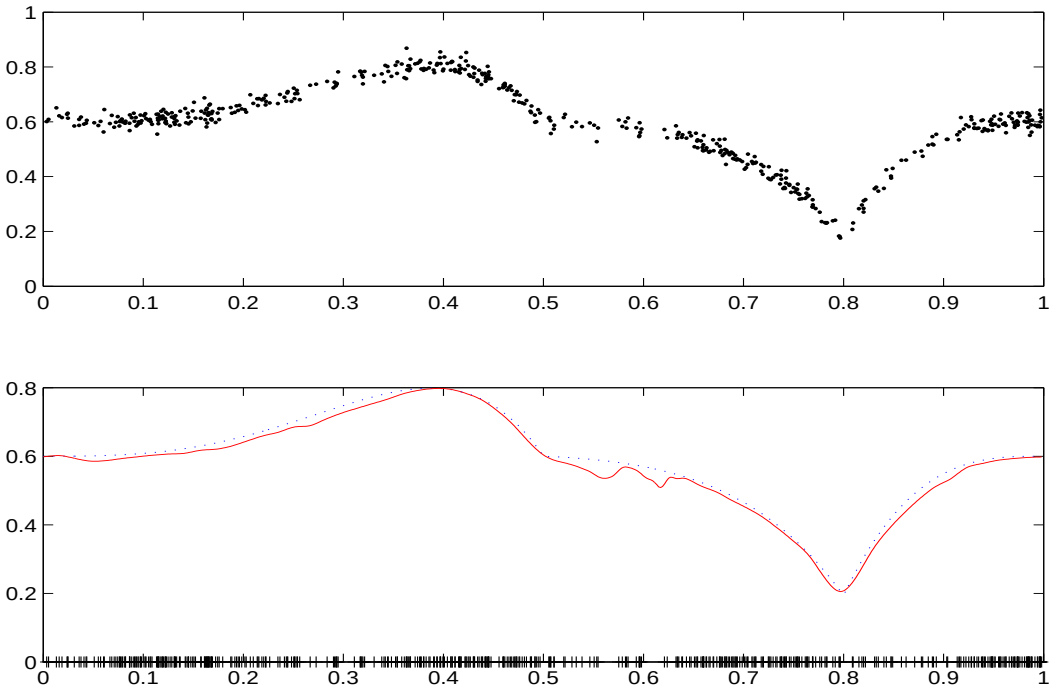


Régression “ridge” circulante

FIG. 6.16 – *Fonction Corner,* 1024 *points, SNR* = 2.



Régression “ridge”



Régression “ridge” circulante

FIG. 6.17 – *Fonction Corner,* 512 *points, SNR* = 7.

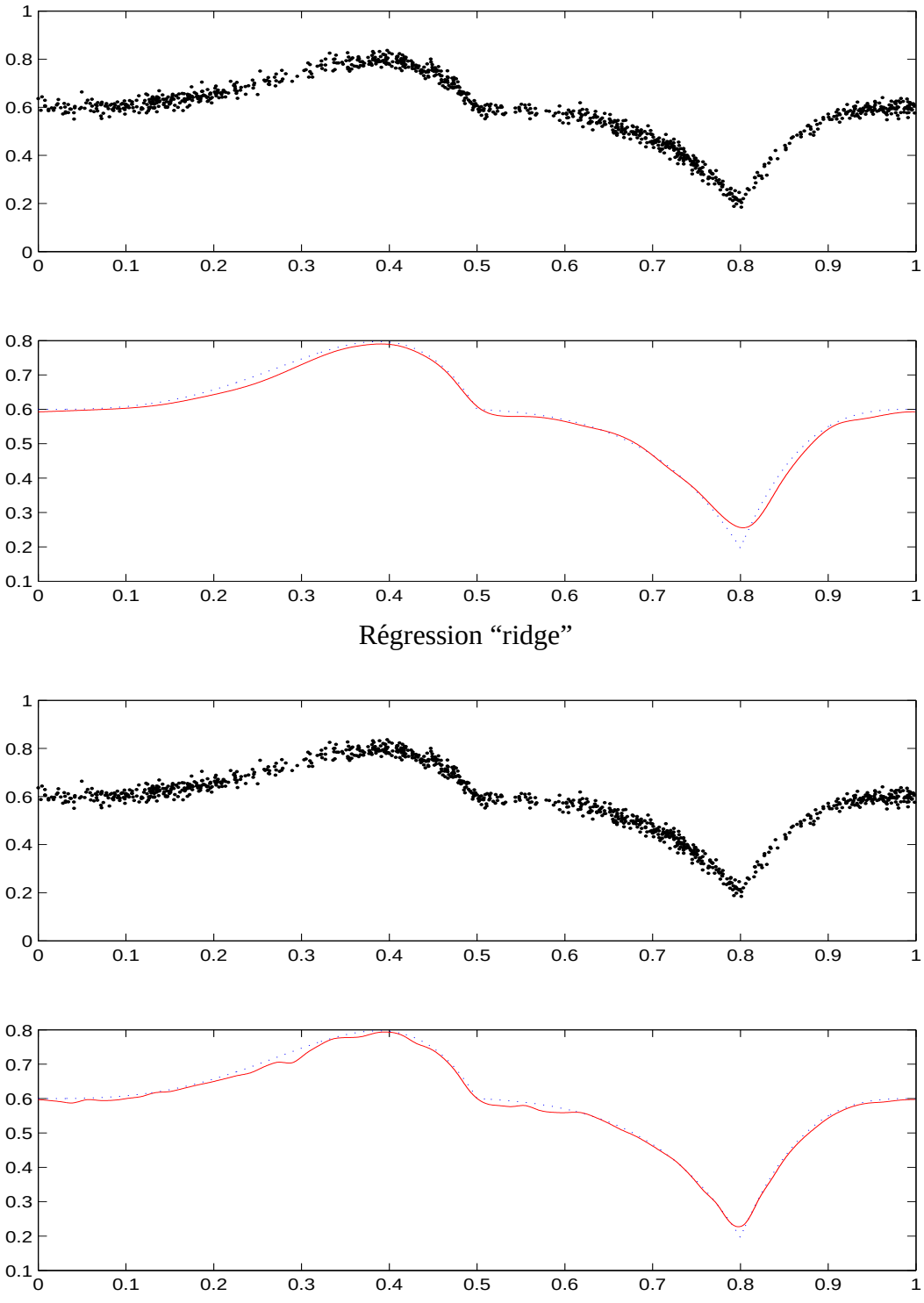


FIG. 6.18 – *Fonction Corner,* 1024 *points, SNR* = 7.

De ces exemples nous pouvons déduire que la deuxième méthode est plus sensible au bruit que la première, dans les régions où le nombre de points est faible (par exemple dans l'intervalle [0.5, 0.65]). Elle semble donner des meilleurs résultats que la première dans les régions où le nombre de points du plan d'expérience est grand, et pour reconstruire le point de rebroussement $x = 0.8$ de la fonction Corner.

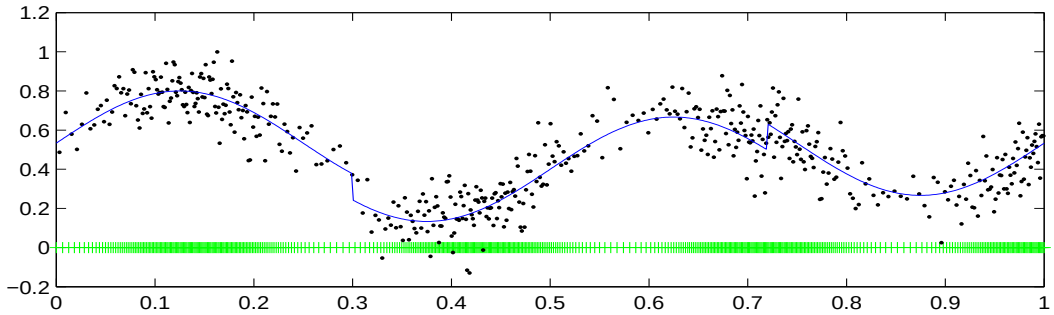
6.3 Estimation par des ondelettes adaptées à la grille

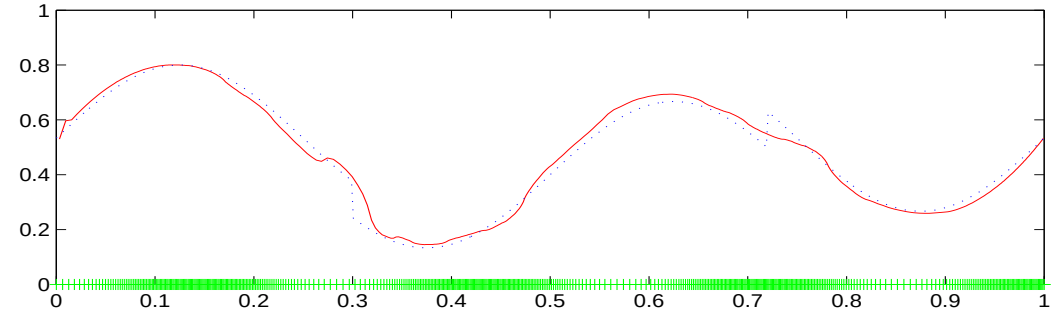
Ce type d'ondelettes évite la perte d'information causée par le regroupement des données et le calcul des valeurs moyennes sur une grille régulière. Par contre, une telle base d'ondelettes est d'autant plus mal conditionnée que la grille est inhomogène, ce qui a été mis en évidence par exemple dans [70]. Nous avons montré que sous certaines contraintes sur la grille l'algorithme de subdivision permettant la construction de telles bases converge, et nous pensons que ces mêmes conditions permettent de montrer que la base ainsi obtenue est stable.

Cette transformation en ondelettes étant biorthogonale, et non pas orthogonale, elle transforme le bruit indépendant en un bruit corrélé sur les coefficients d'ondelettes. Rajouté au mauvais conditionnement, ceci fait que les irrégularités du signal sont plus difficile à détecter à travers les coefficients d'ondelettes, par un seuillage global.

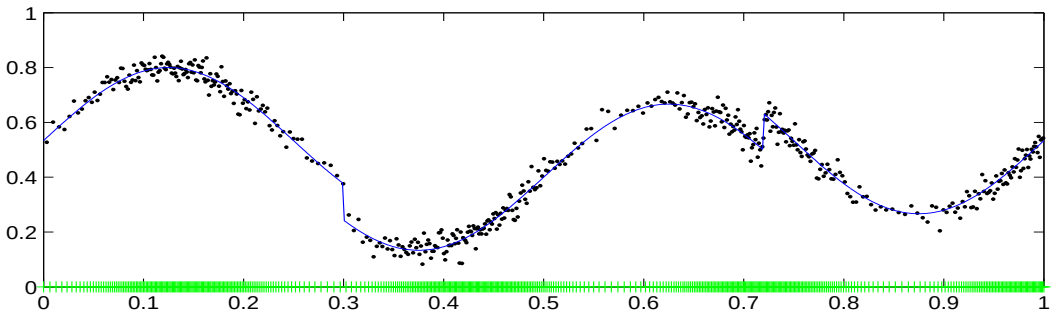
Il semblerait donc nécessaire de mener une étude plus approfondie dans deux directions : d'une part réduire l'instabilité par homogénéisation de la grille (voir par exemple [70]), et d'autre part trouver une manière adéquate pour seuiller.

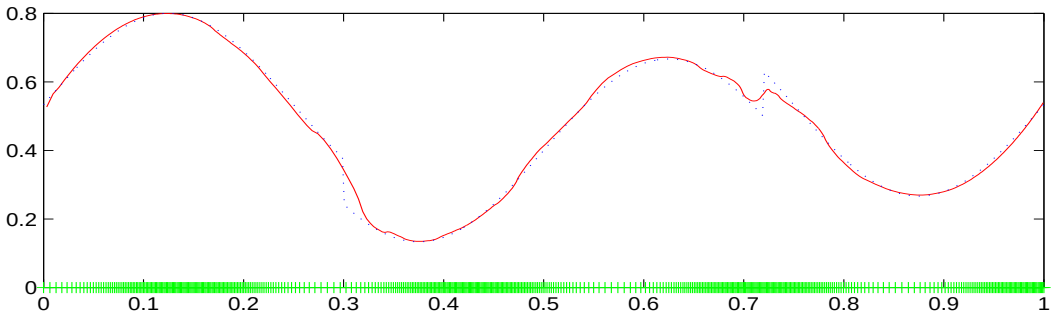
Nous donnons quelques exemples concernant des plans d'expérience non équidistants, mais déterministes. On peur remarquer les oscillations dans le voisinage des discontinuités et parfois dans les régions où le nombre de points est faible (dues au conditionnement de la base d'ondelettes).





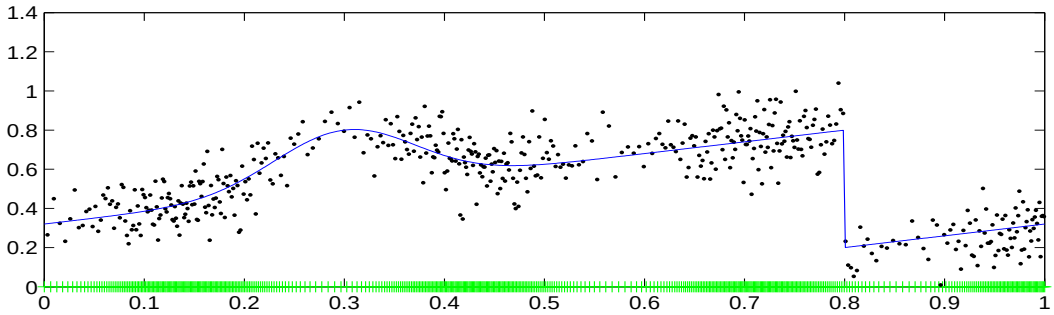
$SNR = 2$

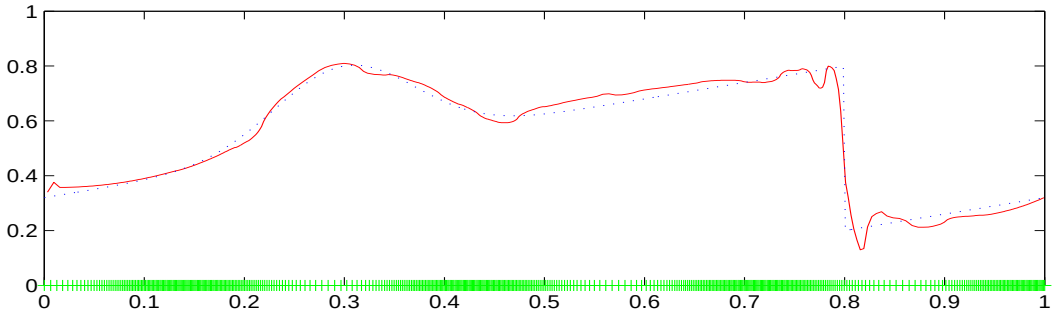




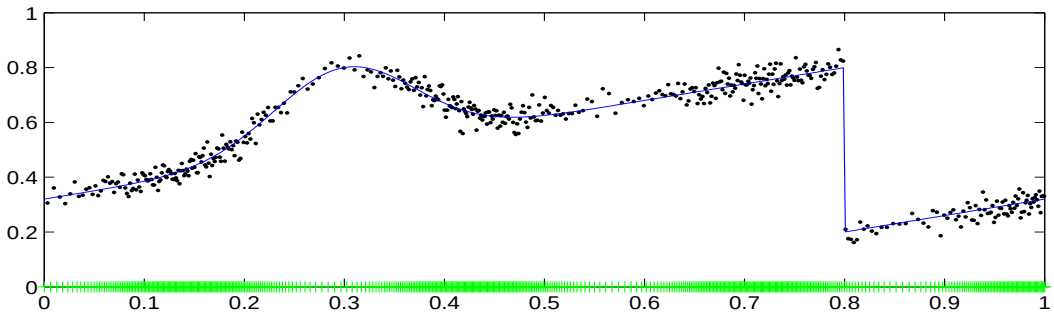
$SNR = 7$

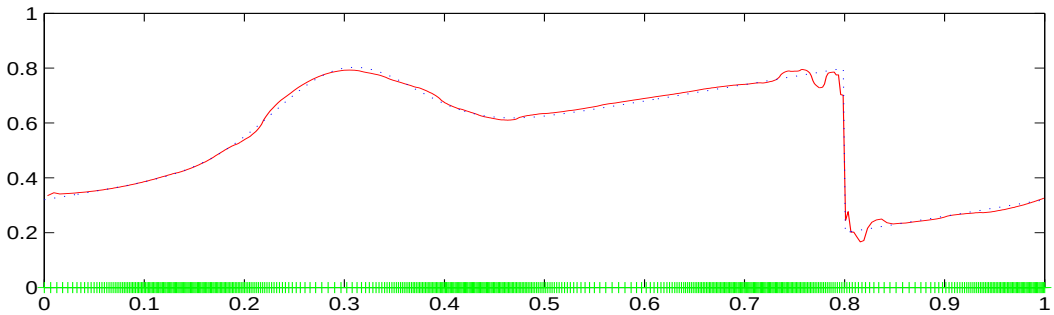
FIG. 6.19 – *Estimation avec des ondelettes interpolatrices en moyenne de la fonction HeaviSine, à partir d'un échantillon bruité de* 512 *points.*





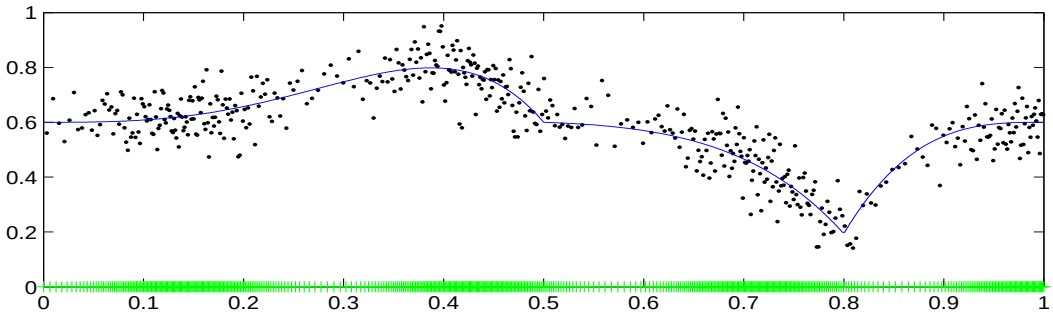
$SNR = 2$

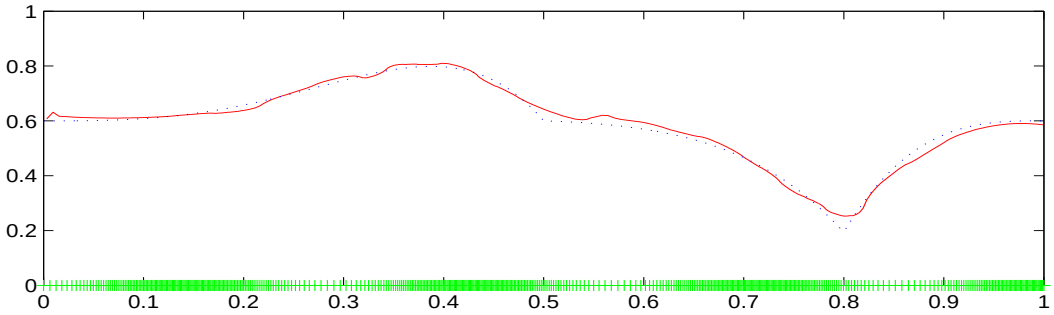




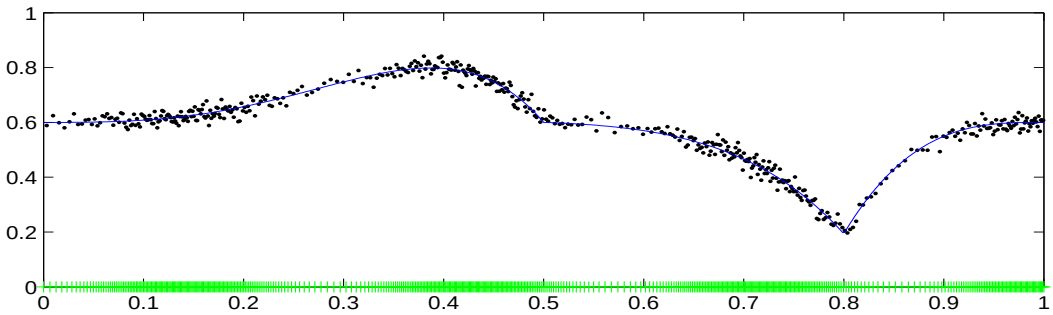
$SNR = 7$

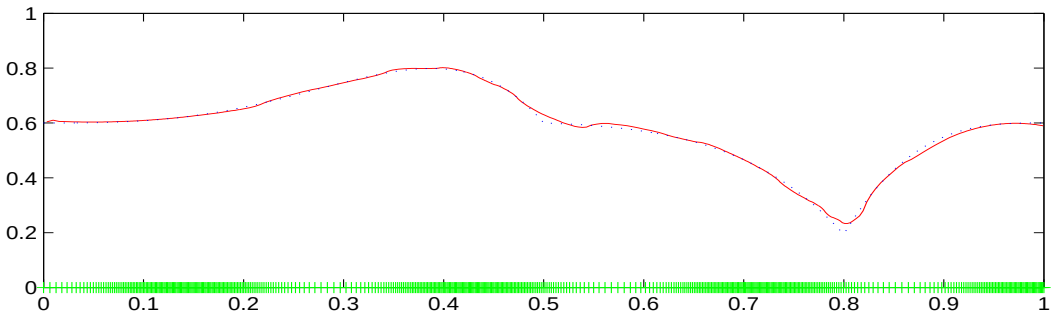
FIG. 6.20 – *Estimation avec des ondelettes interpolatrices en moyenne de la fonction Blip, à partir d'un échantillon bruité de* 512 *points.*





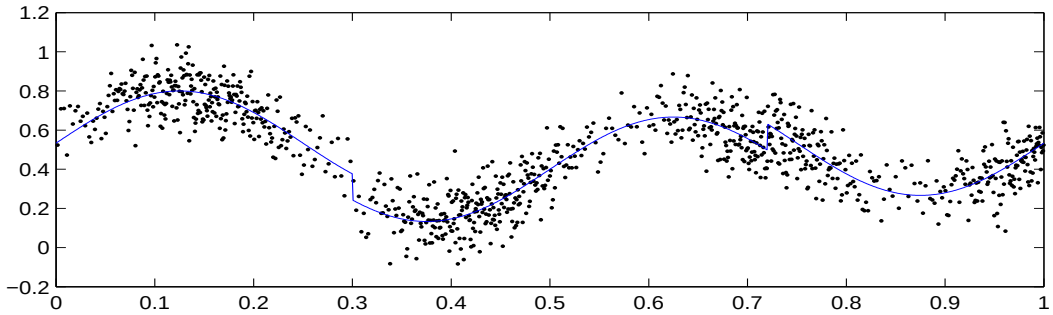
$SNR = 2$

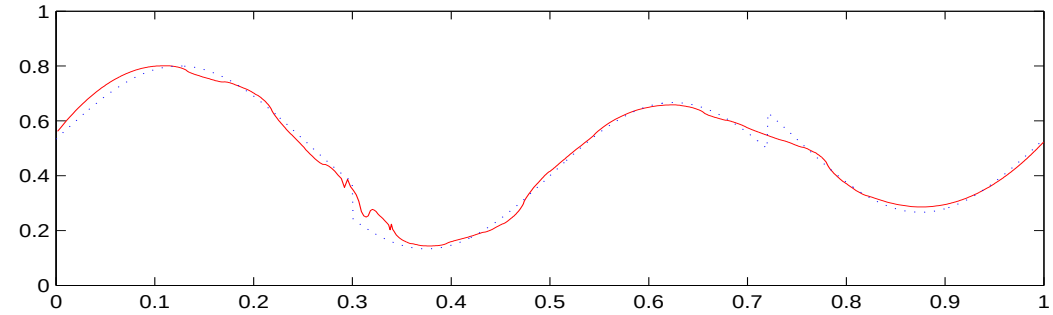




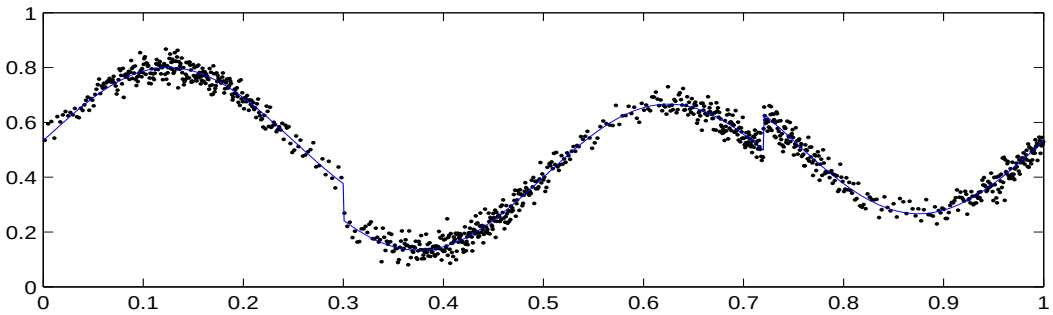
$SNR = 7$

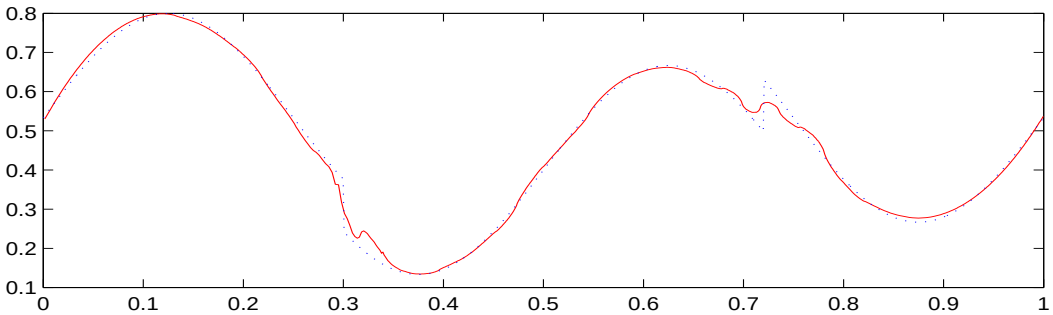
FIG. 6.21 – *Estimation avec des ondelettes interpolatrices en moyenne de la fonction Corner, à partir d'un échantillon bruité de* 512 *points.*





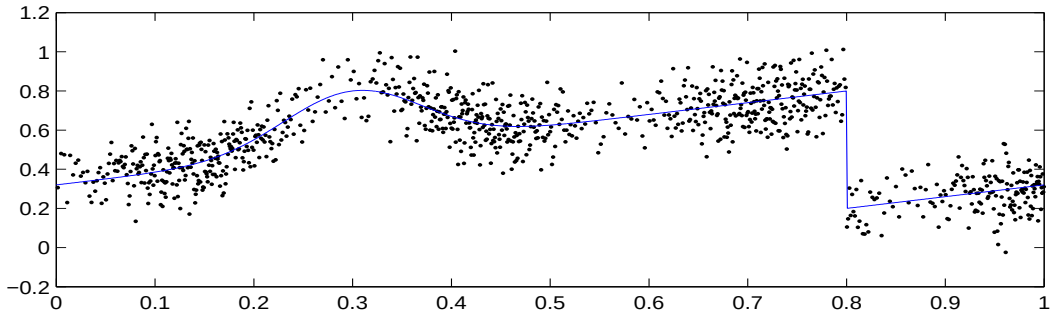
$SNR = 2$

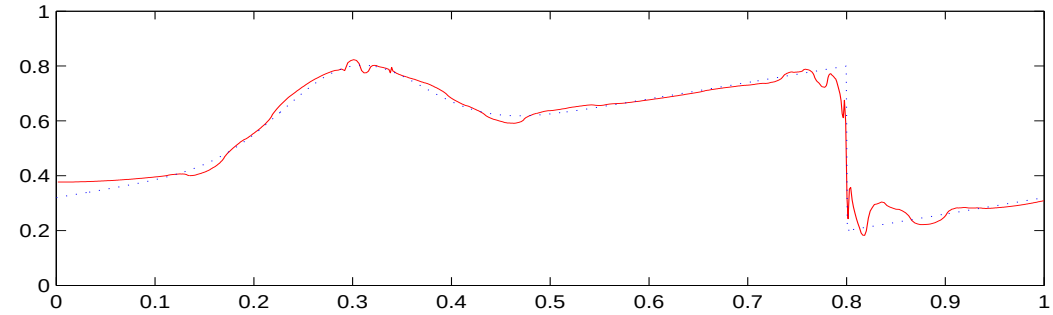




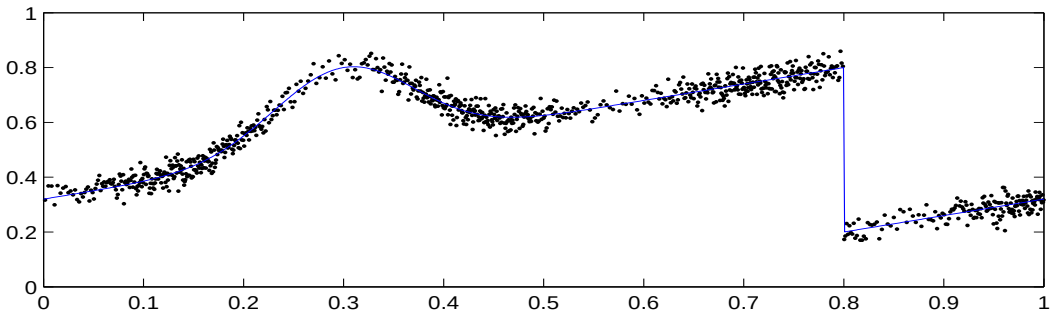
$SNR = 7$

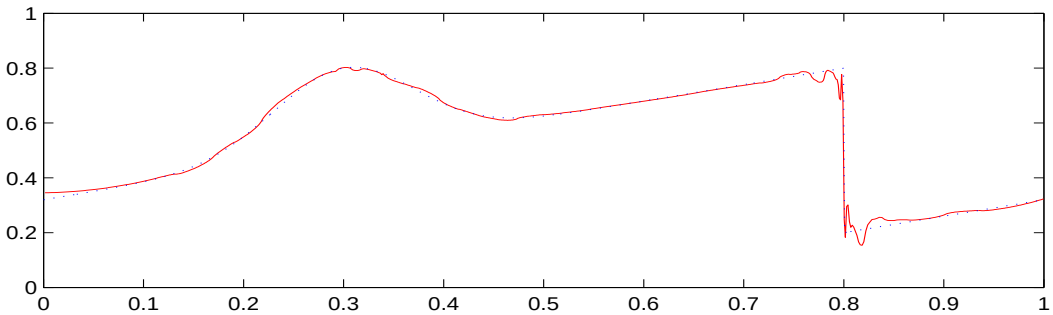
FIG. 6.22 – *Estimation avec des ondelettes interpolatrices en moyenne de la fonction HeaviSine, à partir d'un échantillon bruité de* 1024 *points.*





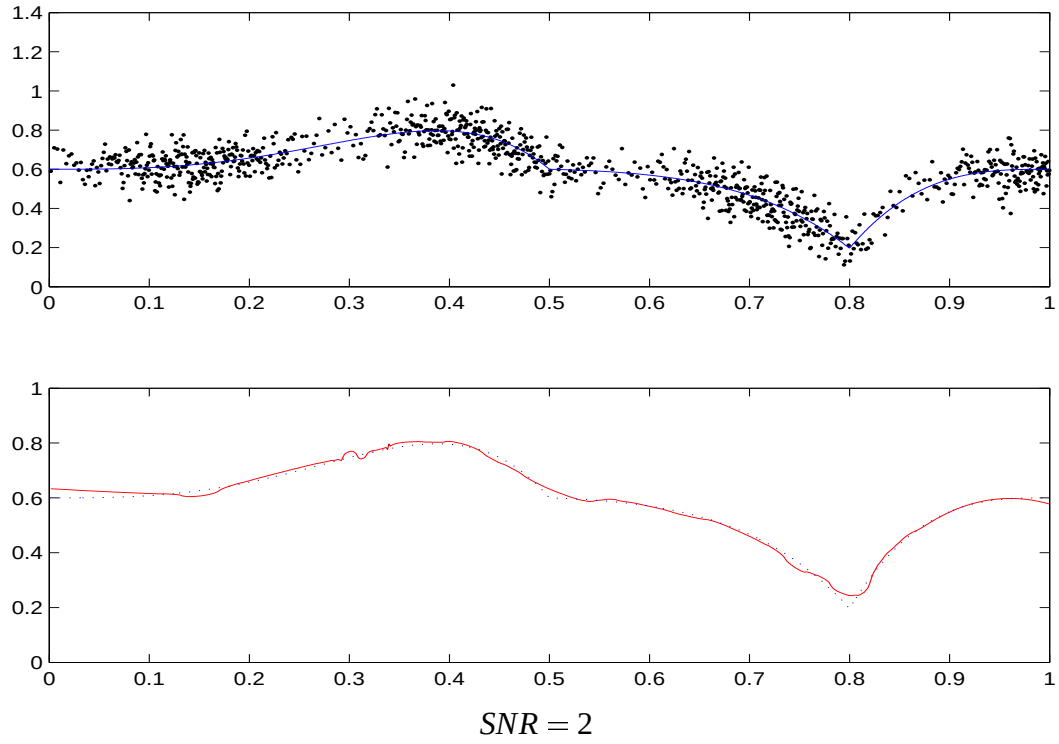
$SNR = 2$



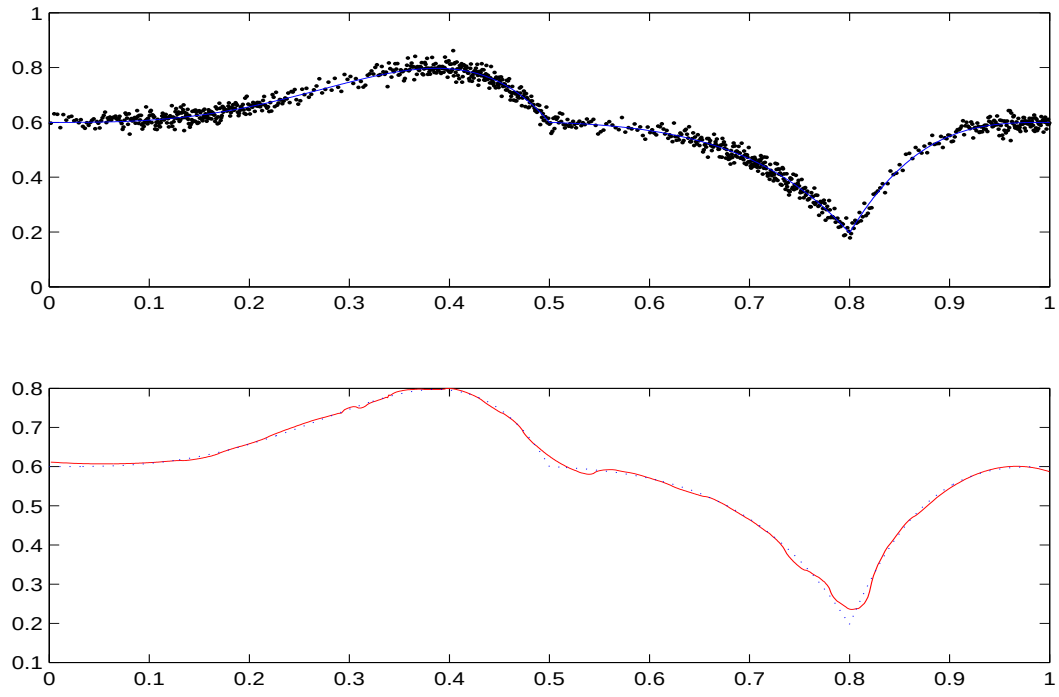


$SNR = 7$

FIG. 6.23 – *Estimation avec des ondelettes interpolatrices en moyenne de la fonction Blip, à partir d'un échantillon bruité de* 1024 *points.*



$SNR = 2$



$SNR = 7$

FIG. 6.24 – *Estimation avec des ondelettes interpolatrices en moyenne de la fonction Corner, à partir d'un échantillon bruité de* 1024 *points.*

6.4 Comparaison entre les différentes méthodes

Pour comparer les différentes méthodes que nous avons décrit dans cette thèse nous avons calculé l'erreur en norme L^2 entre l'estimateur et la fonction initiale, pour 100 essais. Nous donnons par la suite les boxplots pour chacune des méthodes, pour les trois fonctions, HeaviSine, Blip et Corner, pour SNR égal respectivement à 2, 5, 7, et pour des échantillons de taille respectivement 512 et 1024. La correspondance entre les numéros des boxplots et la méthode se trouvent dans les deux tables suivantes. La première concerne les échantillons de taille 512 et la deuxième concerne les échantillons de taille 1024.

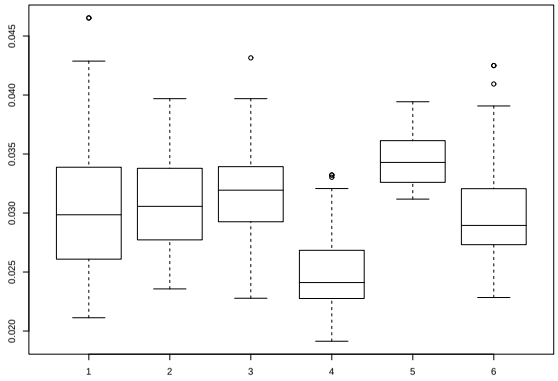
Table pour $n = 512$ points :

Nr.	**Méthode**
1	Algorithme du paragraphe 6.1
2	Régression "ridge" + ondelettes, $n = 512$, $N = 32$
3	Régression "ridge" circulante + ondelettes, $n = 512$, $N = 32$
4	Algorithme de T. Cai, pour un plan d'expérience déterministe
5	Algorithme naïf, considérant les points comme étant équidistants. Plan d'expérience déterministe.
6	Ondelettes interpolatrices en moyenne. Plan d'expérience déterministe.

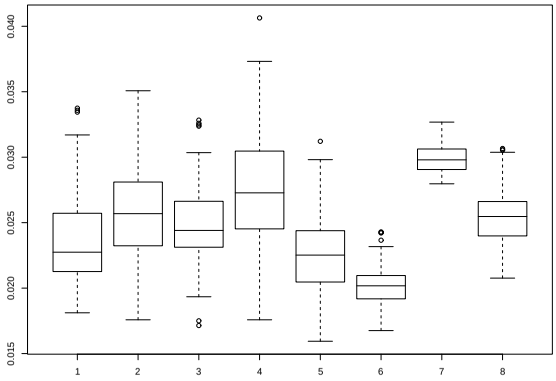
Table pour $n = 1024$ points :

Nr.	**Méthode**
1	Algorithme du paragraphe 6.1
2	Régression "ridge" + ondelettes, $n = 1024$, $N = 64$
3	Régression "ridge" + ondelettes, $n = 1024$, $N = 32$
4	Régression "ridge" circulante + ondelettes, $n = 1024$, $N = 64$
5	Régression "ridge" circulante + ondelettes, $n = 1024$, $N = 32$
6	Algorithme de T. Cai, pour un plan d'expérience déterministe
7	Algorithme naïf, considérant les points comme étant équidistants. Plan d'expérience déterministe.
8	Ondelettes interpolatrices en moyenne. Plan d'expérience déterministe.

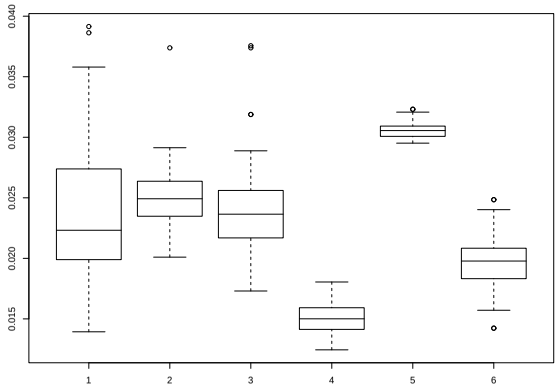
Pour les échantillons de taille 1024, si l'on compare les boxplots 2 et 4 avec respectivement les boxplots 3 et 5, on se rend compte de l'importance du rapport n/N dans la méthode utilisant la régression. Si l'on élimine ces deux boxplots, on peut remarquer que l'algorithme naïf est dans toutes les situations le moins performant.



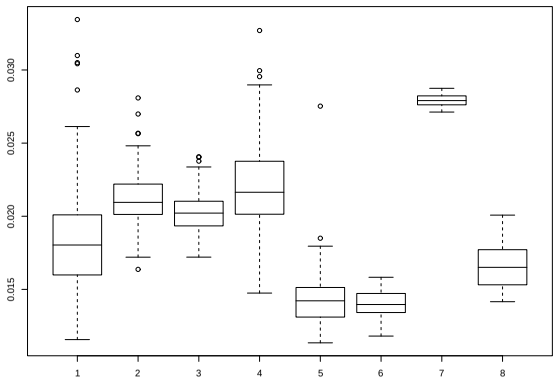
512 points, $SNR = 2$



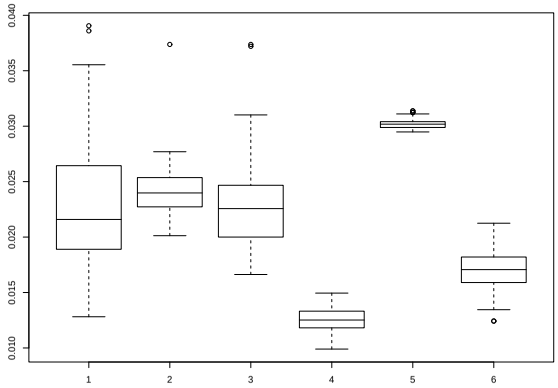
1024 points, $SNR = 2$



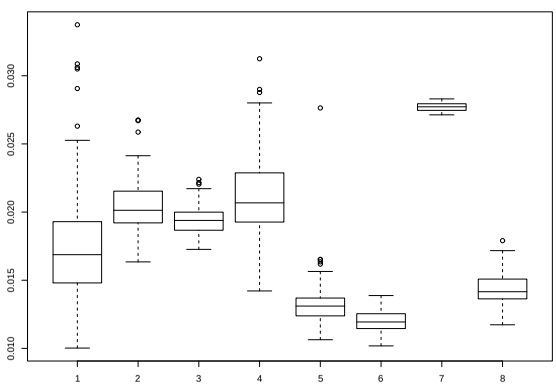
512 points, $SNR = 5$



1024 points, $SNR = 5$

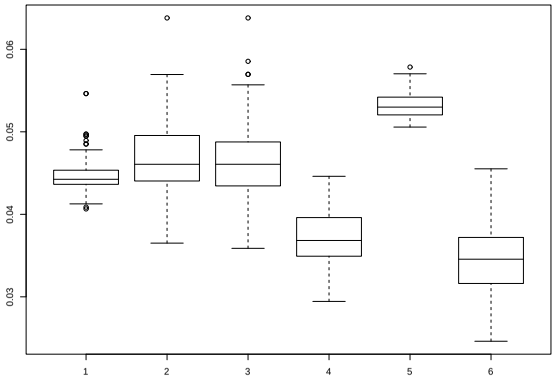


512 points, $SNR = 7$

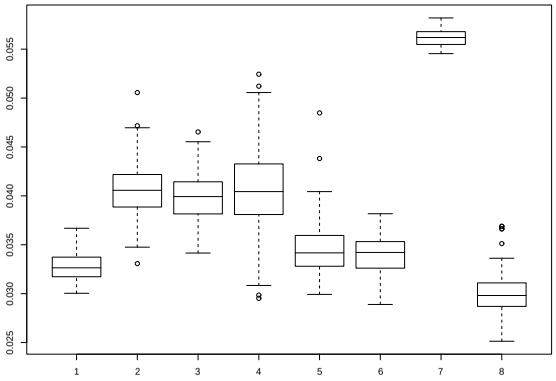


1024 points, $SNR = 7$

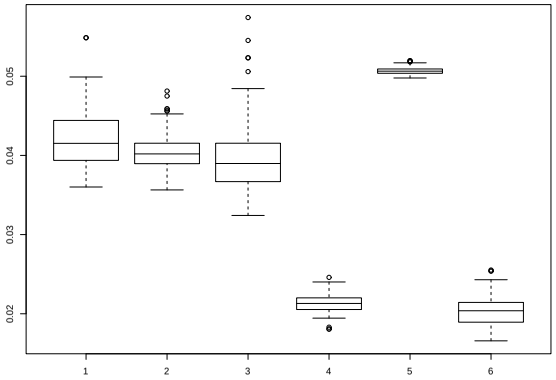
FIG. 6.25 – *Fonction HeaviSine*



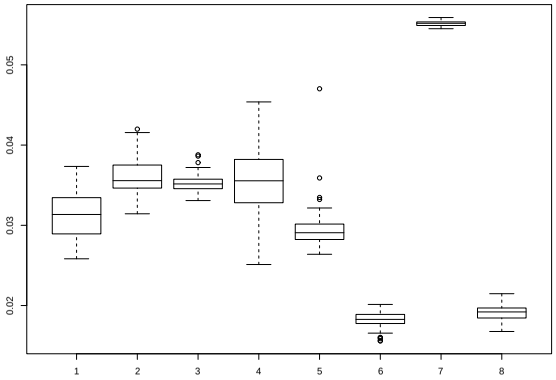
512 points, $SNR = 2$



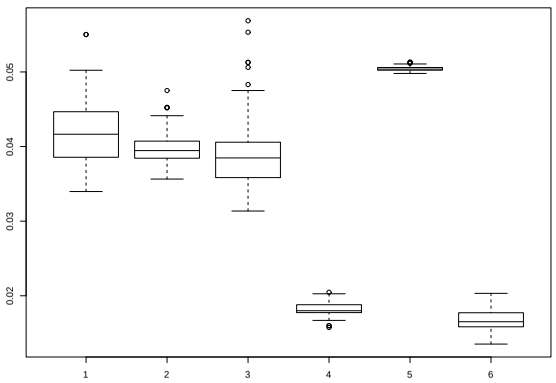
1024 points, $SNR = 2$



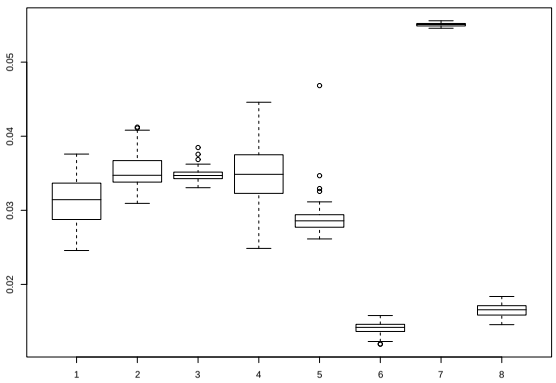
512 points, $SNR = 5$



1024 points, $SNR = 5$

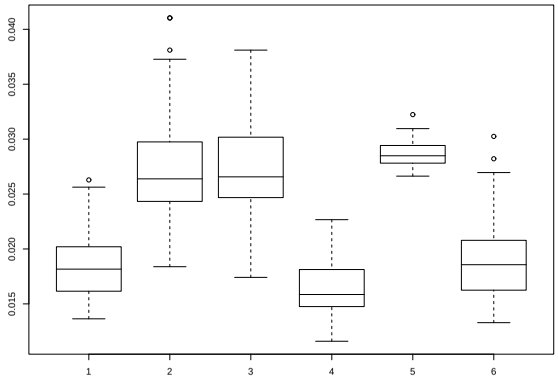


512 points, $SNR = 7$

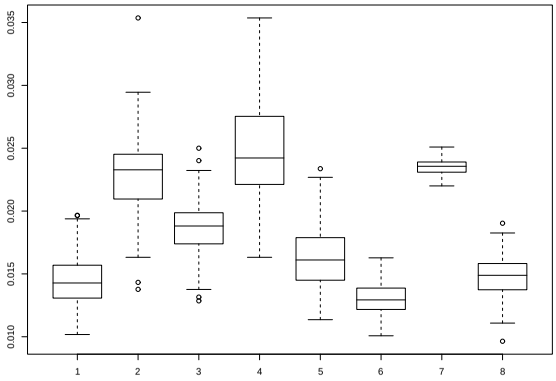


1024 points, $SNR = 7$

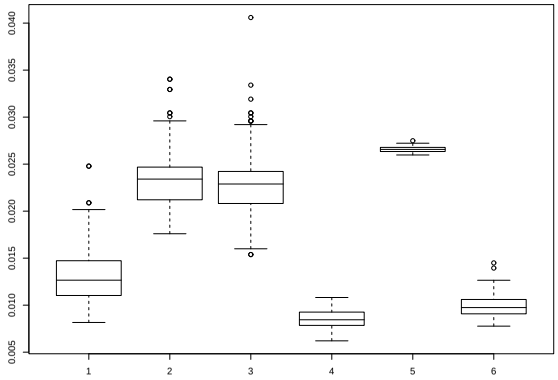
FIG. 6.26 – *Fonction Blip*



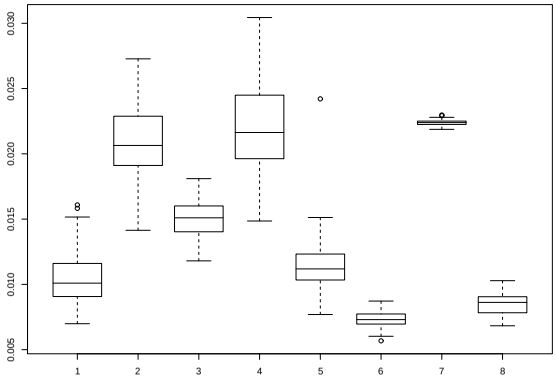
512 points, $SNR = 2$



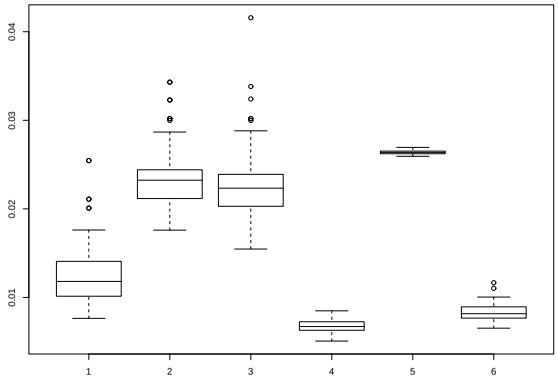
1024 points, $SNR = 2$



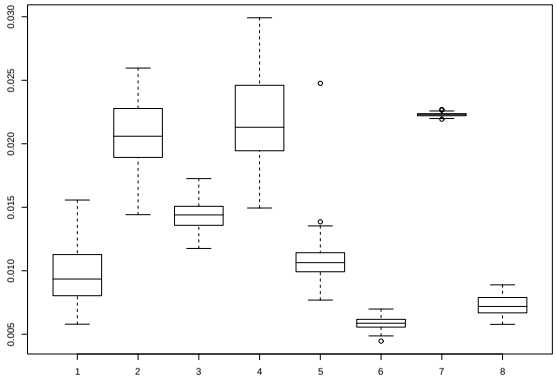
512 points, $SNR = 5$



1024 points, $SNR = 5$



512 points, $SNR = 7$



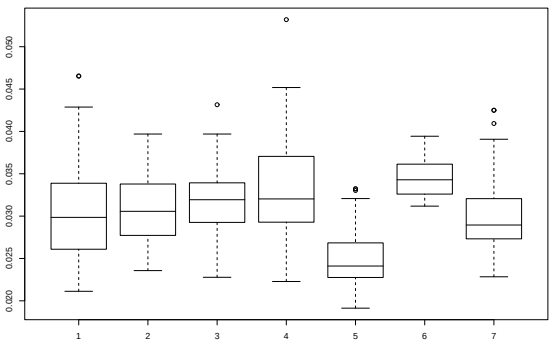
1024 points, $SNR = 7$

FIG. 6.27 – *Fonction Corner*

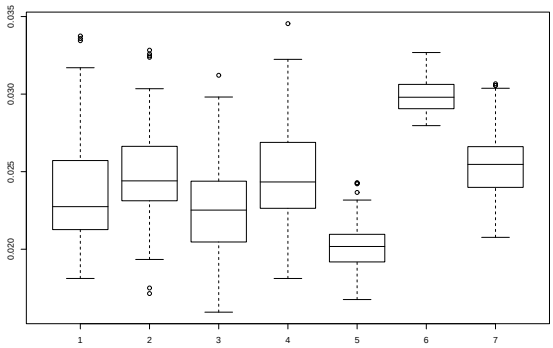
Nous avons vu que la méthode présentée dans [5] donne en moyenne les meilleurs résultats, mais pour des plans d'expérience déterministes et de fonction de répartition connue. Pour un plan d'expérience aléatoire on peut toujours se ramener au cas précédent en prenant comme fonction de répartition la fonction G_n, l'interpolation affine par morceaux de la fonction de répartition empirique. Nous avons vu dans l'exemple du paragraphe 6.1 que ce choix ne semble pas très bon. Ci-dessous nous montrons une étude comparative concernant l'erreur L^2. Pour des échantillons de taille finie et fortement bruités, cette méthode semble effectivement moins bonne. Quand le bruit est faible, c'est l'erreur introduite en déplaçant les observations qui semble dominer, car on observe un comportement moins bon de la méthode utilisant l'estimateur log-spline.

Par rapport aux comparaisons précédentes, pour $n = 1024$, nous avons éliminé les boxplots 2 et 4 qui correspondaient à $N = 64$.

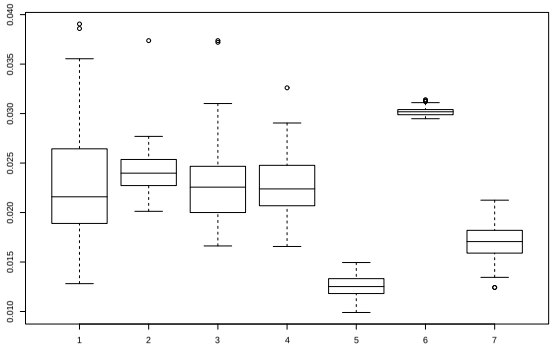
Nr.	**Méthode**
1	Algorithme du paragraphe 6.1
2	Régression "ridge" + ondelettes
3	Régression "ridge" circulante + ondelettes
4	Algorithme de T. Cai, pour un plan d'expérience aléatoire
5	Algorithme de T. Cai, pour un plan d'expérience déterministe
6	Algorithme naïf, considérant les points comme étant équidistants. Plan d'expérience déterministe.
7	Ondelettes interpolatrices en moyenne. Plan d'expérience déterministe.



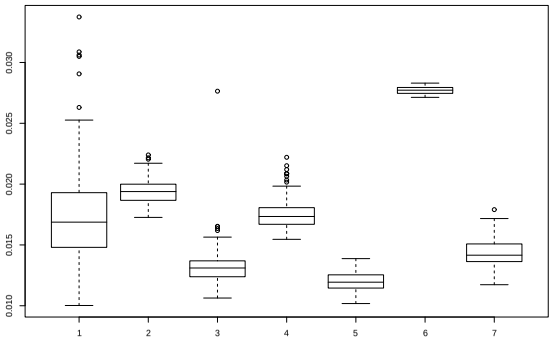
512 points, $SNR = 2$



1024 points, $SNR = 2$

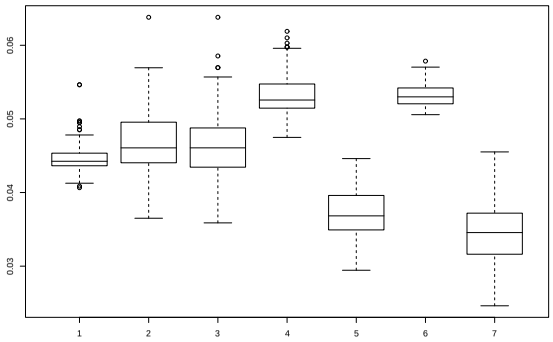


512 points, $SNR = 7$

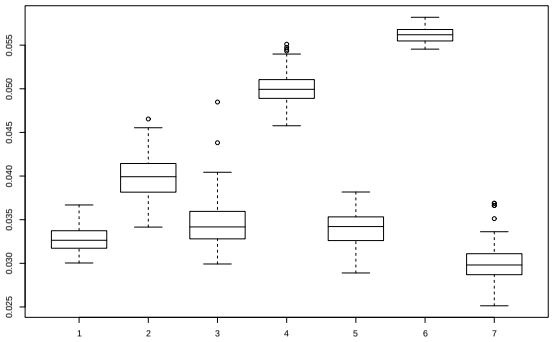


1024 points, $SNR = 7$

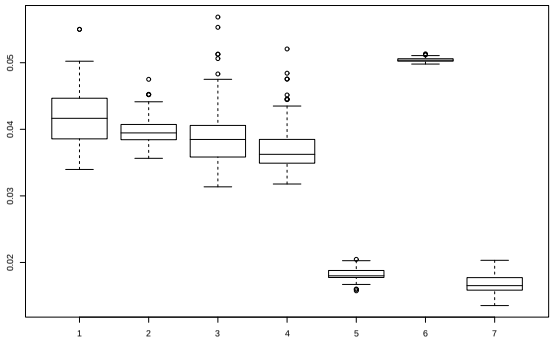
FIG. 6.28 – *Fonction HeaviSine*



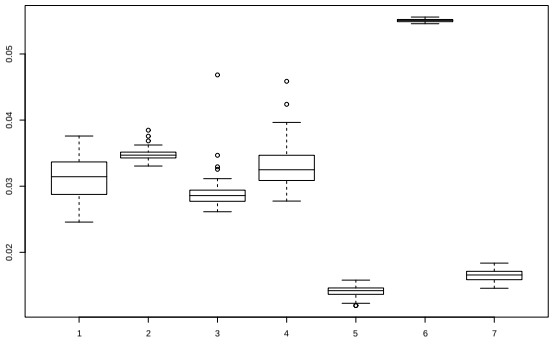
512 points, $SNR = 2$



1024 points, $SNR = 2$

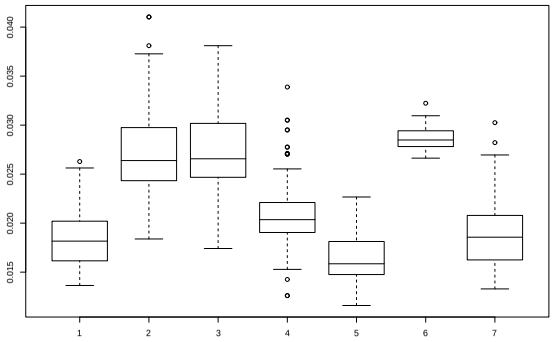


512 points, $SNR = 7$

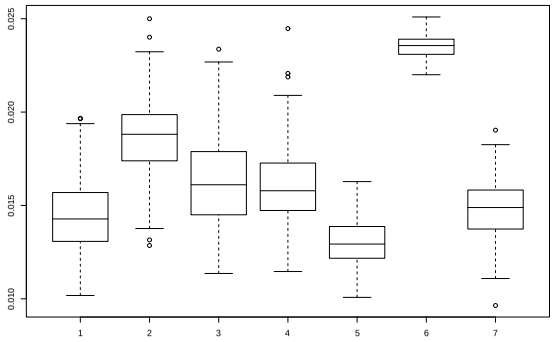


1024 points, $SNR = 7$

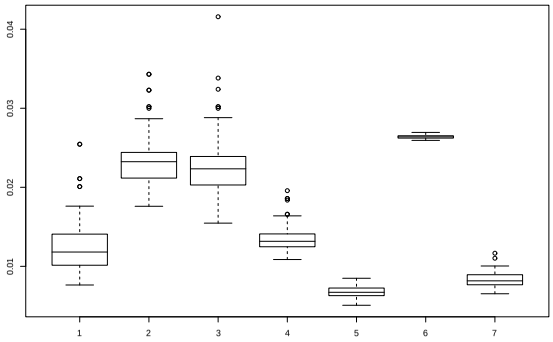
FIG. 6.29 – *Fonction Blip*



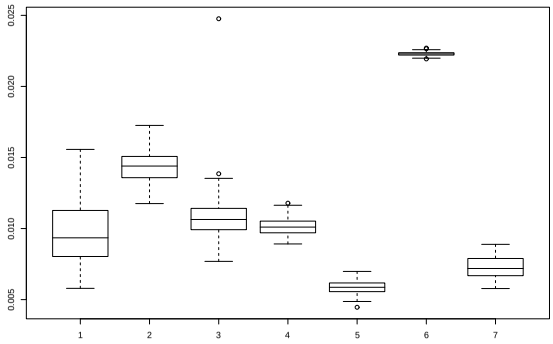
512 points, $SNR = 2$



1024 points, $SNR = 2$



512 points, $SNR = 7$



1024 points, $SNR = 7$

FIG. 6.30 – *Fonction Corner*

Conclusion

Nous étudions des méthodes d'estimation de fonctions observées sur des plans d'expérience aléatoires ou déterministes non équidistants.

Dans les chapitres 2 et 3, nous proposons des estimateurs asymptotiquement presque optimaux, respectivement pour des fonctions hölderiennes et pour des fonctions appartenant à des espaces de Besov.

Dans le chapitre 4, nous montrons que le schéma interpolateur de Lagrange et le schéma interpolateur en moyenne non régulier sont convergents sous certaines contraintes sur la grille. Ceci nous permet en particulier de définir dans le chapitre 5 une base d'ondelettes adaptée à des grilles non régulières, mais nous laissons comme problème ouvert l'étude de la stabilité de cette base.

Dans le chapitre 6, nous regardons le comportement des estimateurs issus des chapitres 2, 3 et 5 pour des échantillons de taille finie. Nous proposons des modifications à apporter dans cette situation. Nous donnons de nombreux exemples, et nous comparons nos méthodes entres elles et avec deux autres méthodes, du point de vue de l'erreur L^2 entre l'estimateur et la fonction.

Bibliographie

[1] A. ANTONIADIS and J. FAN. Regularisation of wavelets approximations (with discussion). *Journal of the American Statistical Association*, 96:939–967, 2001.

[2] A. ANTONIADIS and D. T. PHAM. Wavelet regression for random or irregular design. *Computational Statistics and Data Analysis*, 28:353–369, 1998.

[3] L. D. BROWN and T. CAI. Wavelet shrinkage for nonequispaced samples. *Annals of Statistics*, 26(5):1783–1799, 1998.

[4] L. D. BROWN and T. CAI. Wavelet estimation for samples with random uniform design. *Statistics and Probability Letters*, 26(42):313–321, 1999.

[5] T. CAI. *Non-parametric function estimation via wavelets*. PhD thesis, Cornell University, 1996.

[6] A. S. CAVARETTA, W. DAHMEN, and C. A. MICCHELLI. Stationary subdivision. *Memoirs of the AMS*, 93(453), 1991.

[7] G. M. CHAIKIN. An algorithm for high speed curve generation. *Computer Graphics and Image Processing*, 3:346–349, 1974.

[8] C. K. CHUI. *Wavelets: a tutorial in theory and applications*. Academic Press, New York, 1992.

[9] A. COHEN. *Wavelet methods in Numerical Analysis*, volume VII of *Handbook of Numerical Analysis*. P.G.Ciarlet and J.L.Lions eds., Elsevier, Amsterdam, 2000.

[10] A. COHEN, I. DAUBECHIES, and J.-C. FEAUVEAU. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLV:485–560, 1992.

[11] A. COHEN, I. DAUBECHIES, and P. VIAL. Wavelet bases on the interval and fast algorithms. *J. Appl. Comput. Harmonic Analysis*, 1:54–81, 1993.

[12] A. COHEN, R. DEVORE, G. KERKYACHARIAN, and D. PICARD. Maximal spaces with given rate of convergence for thresholding algorithms. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 11(2):167–191, 2001.

[13] R.R. COIFMAN and D. DONOHO. Translation invariant de-noising. *Wavelets and Statistics*, A. Antoniadis and G. Oppenheim eds., Lecture Notes in Statistics, 103:125–150, 1995.

[14] W. DAHMEN, A. KUNOTH, and K. URBAN. Biorthogonal spline-wavelets on the interval: stability and moment conditions. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 6:132–196, 1999.

[15] I. DAUBECHIES. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.

[16] I. DAUBECHIES, I. GUSKOV, and W. SWELDENS. Regularity of irregular subdivision. *Constructive Approximation*, 15:381–426, 1999.

[17] I. DAUBECHIES, I. GUSKOV, and W. SWELDENS. Commutation for irregular subdivision. *Constructive Approximation*, 17:479–514, 2001.

[18] I. DAUBECHIES and J. C. LAGARIAS. Two-scale difference equations. i: Existence and global regularity of solutions. *SIAM J. Math. Anal.*, 22:1388–1410, 1991.

[19] I. DAUBECHIES and W. SWELDENS. Factoring wavelet transforms into lifting steps. *J. Fourier Anal. Appl.*, 4(3):247–269, 1998.

[20] C. DE BOOR. *A Practical Guide to Splines*. Springer, New York, 1978.

[21] V. DELOUILLE, J. SIMOENS, and R. VON SACHS. Smooth design-adapted wavelets for nonparametric stochastic regression. Discussion Paper 0117, Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain, Belgique, 2001.

[22] B. DELYON and A. JUDITSKY. Estimating wavelet coefficients. *Wavelets and Statistics,* A. Antoniadis and G. Oppenheim eds., Lecture Notes in Statistics, 103:151–168, 1995.

[23] B. DELYON and A. JUDITSKY. On minimax wavelet estimators. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 3:215–228, 1996.

[24] G. DESLAURIERS and S. DUBUC. *Interpolation dyadique*, volume Fractals. Dimensions non entières et applications. Masson, Paris, 1987.

[25] G. DESLAURIERS and S. DUBUC. Symmetric iterative interpolation processes. *Constructive Approximation*, 5:49–68, 1989.

[26] L. DEVROYE. *A course in density estimation*. Birkhäuser Verlag, Boston, 1987.

[27] D. DONOHO. Smooth wavelet decomposition with blocky coefficient kernels. *Recent Advances in Wavelet Analysis,* L. L. Schumaker and G. Webb eds., pages 1–43, 1993.

[28] D. DONOHO, M. R. DUNCAN, X. HUO, and O. LEVI. *WaveLab*. http://www-stat.stanford.edu/∼wavelab/.

[29] D. DONOHO and I. JOHNSTONE. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81:425–455, 1994.

[30] D. L. DONOHO, I. M. JOHNSTONE, G. KERKYACHARIAN, and D. PICARD. Wavelet shrinkage: Asymptopia? *J. R. Stat. Soc.*, 57(2):301–369, 1995.

[31] S. DUBUC. Interpolation through an iterative scheme. *J. Math. Anal. Appl.*, 114:185–204, 1986.

[32] N. DYN. Subdivision schemes in computer-aided geometric design. *Advances in Numerical Analysis, Vol. II*. Dans Wavelets, Subdivision Algorithms and Radial Basis Functions, W. Light eds., Clarendon Press, Oxford, pages 36–104, 1992.

[33] N. DYN, J. GREGORY, and D. LEVIN. Analysis of uniform binary subdivision schemes for curve design. *Constructive Approximation*, 7:127–147, 1991.

[34] N. DYN, J. A. GREGORY, and D. LEVIN. A four-point interpolatory subdivision scheme for curve design. *Comp. Aided Geom. Design*, 4:257–268, 1987.

[35] N. DYN and D. LEVIN. Interpolating subdivision schemes for the generation of curves and surfaces. *International Series of Numerical Mathematics*, 94:91–105, 1990.

[36] N. DYN and D. LEVIN. Analysis of asymptotically equivalent binary subdivision schemes. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 193:594–621, 1995.

[37] R. L. EUBANK. *Spline smoothing and nonparametric regression*, volume 90 of *STATISTICS: textbooks and monographs*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1988.

[38] G. FIX and G. STRANG. Fourier analysis of the finite element method in Ritz-Galerkin theory. *Stud. Appl Math.*, 48:265–273, 1969.

[39] M. GIRARDI and W. SWELDENS. A new class of unbalanced Haar wavelets that form an unconditional basis on l_p on general measure spaces. *J. Fourier Anal. Appl.*, 3(4):457–474, 1997.

[40] P. HALL and B. A. TURLACH. Interpolation methods for nonlinear wavelet regression with irregularly spaced design. *The Annals of Statistics*, 25(5):1912–1925, 1997.

[41] W. HÄRDLE, G. KERKYACHARIAN, D. PICARD, and A. TSYBAKOV. *Wavelets, approximation, and statistical applications*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[42] A. E. HOERL and R. W. KENNARD. Ridge regression: applications to nonorthogonal problems. *Technometrics*, 12:69–82, 1970.

[43] A. E. HOERL and R. W. KENNARD. Ridge regression: biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, 12:55–67, 1970.

[44] C. KOOPERBERG and C.J. STONE. A study of logspline density estimation. *Computational Statistics & Data Analysis*, 12:327–347, 1991.

[45] C. KOOPERBERG and C.J. STONE. Logspline density estimation with free knots. Rapport de recherche, Fred Hutchinson Cancer Research Center, Seattle, WA 98109-1024, 2001.

[46] A. KOVAC and W. SILVERMAN. Extending the scope of wavelet regression methods by coefficient-dependent thresholding. *Journal of the American Statistical Association*, 95(449):172–183, 2000.

[47] F. KUIJT and R. VAN DAMME. Shape preserving interpolatory subdivision schemes for nonuniform data. *Journal of Approximation Theory*, 114:1–32, 2002.

[48] P.G. LEMARIÉ. On the existence of compactly supported dual wavelets. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 3, 1997.

[49] S. MALLAT. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315:69–88, 1989.

[50] S. MALLAT. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1999.

[51] V. MAXIM and M. L. MAZURE. Subdivision schemes and irregular grids. *Numerical Algorithms*, à paraître.

[52] P. MONASSE and V. PERRIER. Orthogonal wavelet bases adapted for partial differential equations with boundary conditions. *SIAM J. Num. Anal.*, 29:1040–1065, 1998.

[53] A. MONFORT. *Cours de probabilités*. Collection économie et statistique avancées. Economica, Paris, 1980.

[54] A. S. NEMIROVSKII. Nonparametric estimation of smooth regression functions. *Journal of Computer and Systems Sciences*, 23(6):1–11, 1986.

[55] D. POLLARD. *Convergence of stochastic processes*. Springer-Verlag, 1984.

[56] S. SARDY, D. B. PERCIVAL, A. G. VON BRUCE, H.-Y. GAO, and V. STUETZLE. Wavelet shrinkage for unequally spaced data. Research Report 41, MathSoft Inc., Seattle, USA, 1998.

[57] J. SIMOENS and S. VANDEWALLE. Average-interpolating wavelet bases on irregular meshes on the interval. Report TW310, Dept. of computer Science, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 2000.

[58] J. SIMOENS and S. VANDEWALLE. On the stability of wavelet bases in lifting scheme. Report TW306, Dept. of computer Science, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, Apr 2000.

[59] P. SPECKMAN. Spline smoothing and optimal rates of convergence in nonparametric regression models. *The Annals of Statistics*, 13(3):970–983, 1985.

[60] C. STEIN. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *Annals of Stat.*, 9:1135–1151, 1981.

[61] C.J. STONE. Optimal global rates of convergence for nonparametric regression. *The Annals of Statistics*, 10(4):1040–1053, 1982.

[62] C.J. STONE. Large sample inference for log-spline models. *The Annals of Statistics*, 18(2):717–741, 1990.

[63] C.J. STONE and J.Z. HUANG. Free knot splines in concave extendend linear modeling. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 108:219–253, 2002.

[64] W. SWELDENS. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *J. Appl. Comput. Harmonic Analysis*, 3(2):186–200, 1996.

[65] W. SWELDENS. The lifting scheme: a construction of second generation wavelets. *SIAM J. Num. Anal.*, 29(2):511–546, 1998.

[66] W. SWELDENS and R. PIESSENS. Quadrature formulae and asymptotic error expansions for wavelet approximation of smooth functions. *SIAM J. Num. Anal.*, 31:2140–2164, 1994.

[67] W. SWELDENS and P. SCHRÖDER. Building your own wavelets at home. *Lect. Notes Earth Sci.*, 90:72–130, 2000.

[68] H. TRIEBEL. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, volume 18 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam · New York · Oxford, 1978.

[69] H. TRIEBEL. *Theory of function spaces II*, volume 84 of *Monographs in mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel · Boston · Berlin, 1992.

[70] E. VANRAES and M. JANSEN. Stabilized wavelet transforms for non-equispaced data smoothing. *Signal Processing*, 82(12):1979–1990, 2002.

[71] J. WARREN. Binary subdivision schemes over irregular knot sequences. *Mathematical methods in CAGD III*, M. Daehlen, T. Lyche, L. Schumaker eds., Academic Press, pages 542–562, 1995.