Valeurs spéciales de fonctions L de formes modulaires adéliques

Julien Puydt

Valeurs spéciales de fonctions L de formes modulaires adéliques

Julien PUYDT

Introduction

Objet. L'objet principal de la thèse est l'étude des valeurs spéciales de fonctions L attachées à des formes modulaires, tordues par des caractères de Dirichlet de conducteurs essentiellement arbitraires :

$$L_f(j+1,\chi) = \sum_{n\geq 1} \chi(n) a_n n^{-s}\Big|_{s=j+1}$$

(où $k \geq 2$ et $0 \leq j < k-1$ sont entiers, χ est un caractère de Dirichlet, et $f = \sum_n a_n q^n$ une forme modulaire)

Ce qui nous intéresse plus particulièrement, c'est l'existence de propriétés de congruences entre ces valeurs lorsque le conducteur tend vers l'infini, et uniformes pour presque tous les nombres premiers.

Résultats. On introduit une classe de formes modulaires sur $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ assez similaire à celle qui est utilisée en théorie des représentations automorphes (par exemple par Bump [**3**], Gelbart [**16**] ou Scholl [**45**]), et on construit des distributions d'Eisenstein qui entrent dans ce cadre, en s'appuyant sur un précédent travail [**42**].

On construit une distribution μ à valeurs algébriques, dont certaines intégrales sont liées à une version régularisée des $L_f(j+1,\chi)$.

Cette distribution μ est obtenue en trois étapes (essentiellement indépendantes les unes des autres) sous la forme $\mu = \ell(\pi(\Phi))$, où Φ est une distribution à valeurs modulaires, π est un opérateur de projection sur un sous-espace modulaire, et ℓ est une forme linéaire algébrique.

On définit l'opérateur de projection π par une adaptation adélique de la méthode de la projection canonique de Pantchichkine (telle qu'il l'a présentée dans [**40, 38, 39**]), et on montre que l'espace image est de dimension finie, c'est le *théorème de la dimension finie*.

On construit explicitement la distribution Φ, comme convolution de deux distributions d'Eisenstein, et on montre qu'elle vérifie le *théorème des congruences (version modulaire)*. On établit ensuite qu'une distribution modulaire qui satisfait de telles congruences, fournit par projection une distribution modulaire $\pi(\Phi)$ qui a de bonnes propriétés de régularité : c'est le *critère d'admissibilité* ; cela signifie que la famille permet de construire des mesures admissibles au sens p-adique.

On définit ensuite la forme linéaire ℓ, associée à une forme modulaire parabolique f, fonction propre des opérateurs de Hecke. On prouve alors le *théorème d'algébricité de la forme linéaire*, qui affirme que l'image par cette forme linéaire d'une forme à coefficients algébriques, est algébrique. On étudie ensuite la variation horizontale de cette forme, ce qui fournit un *théorème de contrôle horizontal*.

Le *théorème de la dimension finie* assure que les congruences pour Φ (*théorème des congruences*, version modulaire) impliquent des congruences similaires pour les intégrales de la distribution μ ; c'est le *théorème des congruences*, version scalaire.

Par ailleurs, comme certaines de ces intégrales sont liées aux valeurs spéciales (c'est le *théorème d'intégration des caractères de Dirichlet*) on en déduit un *théorème des congruences*, version valeurs spéciales.

Motivations. On sait que ce type de congruence permet de faire de l'interpolation p-adique pour définir des fonctions L p-adiques.

Un autre intérêt a été discuté par exemple par Kato, dans son exposé [**20**] au congrès international en 2002 : dans le cas des formes modulaires de poids 2, attachées à des courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$, il y a un lien entre les valeurs spéciales étudiées ici et les χ composantes du groupe de Selmer.

Sources. L'idée de base de ce travail est dûe à Serre (voir par exemple l'introduction de [**50**]) : des congruences entre coefficients de Fourier de formes modulaires doivent donner lieu à des résultats similaires pour les valeurs spéciales de fonctions L associées de façon plus ou moins directe. On peut à ce propos citer l'exemple des séries d'Eisenstein classiques :

$$E_{k,\chi} = \frac{L(1-k,\chi)}{2} + \sum_{n\geq 1}\sum_{d|n}\chi(d)d^{k-1}q^n$$

attachée aux caractères de Dirichlet χ définis modulo $M \geq 1$, qui fournissent des congruences pour les valeurs spéciales $L(1-k,\chi) = -B_{k,\chi}/k$ des séries de Dirichlet, où les $B_{k,\chi} = M^{k-1}\sum_{a \bmod M}\chi(a)B_k(a/M)$ sont les nombres de Bernoulli généralisés. Le cas $\chi = 1$ par exemple est discuté en détails par Serre dans [**49**].

Dans l'article [**15**], Deligne et Ribet construisent des distributions bornées sur le groupe de Galois de l'extension maximale abélienne d'un corps de nombres totalement réel $\mathbb{K}$. Ils établissent ensuite que ces distributions interpolent une version régularisée des valeurs spéciales de la fonction ζ de Dedekind du corps $\mathbb{K}$. Nous obtenons des résultats similaires pour les fonctions L des formes modulaires paraboliques.

Enfin, on utilise, après l'avoir adaptée à un cadre adélique, la méthode de la projection canonique développée par Alexei Pantchichkine, et présentée par exemple dans son article [**40**].

NOTATION 1. *On se fixe une forme modulaire F, de poids $k \geq 2$, de niveau N, propre pour les opérateurs de Hecke, à coefficients entiers algébriques. On suppose que le support de N et S sont disjoints.*

Moyens techniques. Les formes modulaires avec lesquelles on travaille ne sont pas les formes classiques ; ce sont des formes presque-holomorphes arithmétiques, telles que celles discutées par Shimura dans son récent livre [**56**] par exemple (en particulier la section 13) ; on peut les voir comme simplement des séries formelles de la forme :

$$\sum_{n,r} a_{n,r}q^nR^r \in \mathbb{C}[[q]][R]$$

où la somme est sur $n \geq 0$, et $0 \leq r$ est borné indépendamment de n ; cette série est telle que si on évalue par $q = \exp(2i\pi\tau)$ et $R = (4\pi\Im\tau)^{-1}$, on obtient une forme modulaire C^∞ sur le demi-plan de Poincaré, annulée par une puissance de $\partial/\partial\bar{z}$. Les formes modulaires holomorphes sont en particulier annulées par la première puissance de cet opérateur, et rentrent donc dans cette théorie. Les espaces qu'elles engendrent peuvent munies d'une structure rationnelle (sur $\overline{\mathbb{Q}}$) ou entière (sur $\mathcal{O}$) via les coefficients $a_{n,r}$.

Pour obtenir des résultats semi-adéliques sur ces formes, on procède en deux étapes :

– on se fixe d'abord un ensemble fini S de nombres premiers, qui sert de base aux différentes études, où on laisse le niveau des formes croître, mais à support fixé (lié à S). On appelle cette dépendance la "variation verticale" ;
– on discute ensuite de l'impact de l'ajout d'un nombre fini de places à S sur ces constructions – on appelle cette seconde dépendance la "variation horizontale" ;

NOTATION 2. *On note en général $\mathcal{M}_S$ un espace de formes modulaires dans lequel on a fixé S pour discuter de la variation verticale.*

On note M_S le produit des p de S ; et si $\underline{\nu}$ est une famille indexée par S, $M_S^{\underline{\nu}}$ est le produit pour $p \in S$ des p^{ν_p}. On écrit aussi N_S pour NM_S.

Distributions modulaires. Les distributions modulaires sont obtenues par convolution de deux distributions d'Eisenstein adéliques, très similaires à celles construites dans [**42**]. Une telle construction est motivée par le fait que l'on cherche à utiliser la méthode de Rankin-Selberg.

On souhaite contrôler ces distributions suivant deux aspects :

– contrôle du niveau, qui permet de se restreindre à travailler dans un espace du type $\mathcal{M}_S$, pour la variation verticale ;
– contrôle algébrique, avec des résultats de congruences entre les coefficients de Fourier ;

Plus précisément, ces distributions sont construites via une convolution de deux distributions d'Eisenstein, tordue par un caractère de Dirichlet :

$$\Phi_j = (-1)^j E_1^{(j)} *_{1_{(.,N)=1}} E_2^{(j)}$$

(où $0 \leq j < k-1$)

Cette convolution admet plusieurs écritures explicites ; en voici une :

$$\Phi_j(\chi) = (-1)^j E_1^{(j)}(\chi) E_2^{(j)}(1_{(.,N)=1}\overline{\chi})$$

Projections. Techniquement, les projections font intervenir un système de valeurs propres α_p non-nulles des opérateurs de Atkin-Lehner (pour tout $p \in S$) sur les formes modulaires presque-holomorphes.

Ces opérateurs agissent sur le développement formel via :

$$U_M \sum_{n,r} a_{n,r} q^n R^r = \sum_{n,r} a_{Mn,r} q^n (MR)^r$$

DÉFINITION 1. *(page 74) Le sous-espace $\mathcal{M}^{\alpha,S}$ d'un espace de formes modulaires $\mathcal{M}$ est l'intersection des espaces α_p caractéristiques pour U_p, pour tout $p \in S$. On note $\pi_S^{\alpha,S}$ la projection associée.*

Le but de cet projection est de s'assure que les distributions projetées sont à valeurs dans un espace de dimension finie, car on sait qu'alors on contrôlera les dénominateurs éventuels introduits par la forme linéaire.

Formes linéaires. Une fois obtenues des distributions à valeurs modulaires dans des espaces de dimension finie, on souhaite leur appliquer des formes linéaires, qui possèderaient les deux propriétés-clefs suivantes :
- définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$, c'est-à-dire que l'image d'une forme modulaire à coefficients algébriques est algébrique ;
- à variation horizontale contrôlée ;

Le fait que l'on souhaite utiliser la méthode de Rankin-Selberg incite à construire ces formes linéaires via le produit scalaire de Petersson.

NOTATION 3. *On fixe maintenant le choix de α_p et f : f est une forme propre des opérateurs de Hecke, à coefficients entiers algébriques, et α_p est une des racines réciproques de son polynôme de Hecke en p. On note α'_p l'autre racine réciproque.*

DÉFINITION 2. *(page 76) Dans le cas précédent, on dit que la famille $(\alpha_p)_p$ est adaptée à f.*

DÉFINITION 3. *(page 79) On définit la forme linéaire $\ell_f^{\alpha,S}$ par :*

$$g \mapsto \lim_{\underline{\nu}\to\underline{\infty}} \frac{\langle f^0_{\alpha,S}, \alpha_S^{-\underline{\nu}} U_S^{\underline{\nu}} g\rangle_{N_S}}{\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}}$$

où :

$$f_{\alpha,S,0} = f|\prod_{l\in S}(I - \alpha'_l V_l)$$

et

$$f^0_{\alpha,S} = f^\rho_{\alpha,S,0}|_{W_{N_S}}$$

$f^0_{\alpha,S}$ et $f_{\alpha,S,0}$ sont donc des formes modulaires obtenues à partir de f en modifiant les facteurs d'Euler en les places $p \in S$, via l'action d'opérateurs simples et explicites ($^\rho$ est l'action de la conjugaison complexe, par exemple).

Distributions scalaires. Une fois que l'on dispose des familles précédentes, on peut les réunir pour définir une famille de distributions à valeurs scalaires :

DÉFINITION 4. *(page 93) On pose :*

$$\mu^{\alpha,S}_{f,j} : \varphi \mapsto \ell_f^{\alpha,S}(\pi_S^{\alpha,S}\Phi_j(\varphi))$$

(où φ est une fonction-test)

Résultats principaux. Passons maintenant en revue les principaux résultats de ce travail ; on suppose que poids et caractères sont fixés, on ne les précisera donc pas.

Sur les projections. On a besoin, pour contrôler la régularité de la forme linéaire $\ell_f^{\alpha,S}$, de savoir qu'elle est définie sur des espaces dont la dimension ne croît pas indéfiniment avec le niveau, à S fixé ; c'est le résultat suivant qui garantit ce point :

THÉORÈME (théorème de la dimension finie). *(énoncé page 75) L'espace de formes modulaires presque-holomorphes $\mathcal{M}^{\alpha,S}(NM_S^{\underline{\nu}})$ est de dimension finie, bornée indépendamment de $\underline{\nu}$.*

La démonstration de ce résultat (en page 75) fait appel à des outils très élémentaires d'algèbre linéaire.

Sur les distributions modulaires.

NOTATION 4. *Y_S est le produit des $\mathbb{Z}_p^*$ pour $p \in S$.*

DÉFINITION 5. *(page 85) Une distribution sur Y_S est une forme linéaire sur les fonctions localement constantes.*

THÉORÈME (théorème des congruences, version modulaire). *(énoncé en page 89) Si on considère une famille d'ouverts élémentaires $a + (M_S^\nu) \subset Y_S$, avec $a \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$U_S^\nu \sum_{j=0}^{t} \left(\begin{array}{c} t \\ j \end{array} \right) (-a)^{t-j}\, \Phi_j(a + (M_S^\nu)) \equiv 0 \bmod M_S^{t\nu} \mathcal{O}[[q]][R]$$

La démonstration (page 89) utilise le fait que l'on connaît explicitement le développement de Fourier, pour évaluer les valuations en les différentes places de S.

DÉFINITION 6. *(page 87) Pour tout $p \in S$, la famille $\left(\pi_S^{\alpha,S}\Phi_j\right)$ permet de définir une distribution $\Phi_{(p)}^{\alpha,S}$ sur les fonctions localement polynomiales en la projection $y_p : Y_S \to \mathbb{Z}_p^*$, de la façon suivante :*

$$\int_U y_p^j d\Phi_{(p)}^{\alpha,S} = \int_U d\pi_S^{\alpha,S}\Phi_j$$

(les $\Phi_j^{\alpha,S}$ sont en fait les moments de $\Phi_{(p)}^{\alpha,S}$)

On dispose d'une notion de régularité pour ces distributions p-adiques : l'admissibilité, dans un sens très proche de ce qu'utilise Visik dans [**60**]. Le résultat suivant donne un critère pour reconnaître si une famille de distributions, telle que celle décrite précédemment, forme des distributions p-adiques admissibles, via la construction que l'on vient de présenter :

THÉORÈME (critère d'admissibilité). *(énoncé page 90) On suppose que pour tout ouvert élémentaire $a + (M_S^\nu) \subset Y_S$, $a \in \mathbb{Z}$, on dispose de la condition de niveau :*

$$\forall j, \Phi_j(a + (M_S^\nu)) \in \mathcal{M}(M_S^\nu)$$

ainsi que, pour tout $t \in [[0, h[[$, de la condition de congruence :

$$U_S^\nu \sum_{j=0}^{t} \left(\begin{array}{c} t \\ j \end{array} \right) (-a)^{t-j}\Phi_j(a + (M_S^\nu)) \equiv 0 \bmod M_S^{t\nu} \mathcal{O}[[q]][R]$$

enfin, on suppose que pour tout $p \in S$, $h \geq v_p(\alpha_p)$; alors la famille $\left(\pi_S^{\alpha,S}\Phi_j\right)$ forme une mesure S-adique h-admissible.

Ce théorème, bien que l'énoncé fasse apparaître "Φ_j", n'utilise pas de connaissance précise des coefficients de Fourier, et est donc plus général que le cas dans lequel on l'applique. La démonstration (page 90) est basée sur le contrôle de l'action des opérateurs de projection sur le développement de Fourier.

Sur les formes linéaires. On a vu que la définition de $\ell_f^{\alpha,S}$ faisait intervenir le produit scalaire de Petersson. On obtient donc a priori une forme linéaire définie sur $\mathbb{C}$, ce qui ne permet pas de discuter de congruences. C'est pourquoi le résultat suivant est très intéressant, puisqu'il affirme qu'elle est en fait définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$:

Théorème (théorème de contrôle algébrique). *(énoncé page 75)*

$$\ell_f^{\alpha,S} : \mathcal{M}_S^{\alpha,S}(\overline{\mathbb{Q}}) \to \overline{\mathbb{Q}}$$

La démonstration (page 75) utilise un argument de stabilité par les opérateurs de Hecke.

Notation 5. *On note λ_f l'homomorphisme de valeurs propres de f défini sur l'algèbre de Hecke, à valeurs algébriques, et les $(T_p)_p$ sont les opérateurs de Hecke.*

Théorème (théorème de contrôle horizontal). *(énoncé page 83) Si on sait que $\lambda_f(T_l) \neq 0$ pour tout $l \in \Sigma - S$, alors :*

$$\begin{aligned}\ell_f^{\alpha,\Sigma} \quad = \quad & \prod_{l\in\Sigma-S}\Bigg[\left(1-\frac{(p+1)\alpha'_p}{p\overline{\lambda_f}(T_p)}\right) \\ & \left(1-\frac{2(p+1)\alpha'_p}{p\overline{\lambda_f}(T_p)}+\frac{{\alpha'_p}^2\lambda_f(T_p)}{p^k\overline{\lambda_f}(T_p)}\right)^{-1}\Bigg]\ell_f^{\alpha,S}\end{aligned}$$

La démonstration (page 83), longue et calculatoire, consiste à étudier tour à tour chacun des éléments dépendant de S, puis à comparer ces différentes variations.

Sur les distributions scalaires et les valeurs spéciales. Les résultats précédents permettent d'affirmer le théorème suivant sur les distributions $\mu_{f,j}^{\alpha,S}$:

Théorème (théorème des congruences, version scalaire). *(énoncé page 93) Il existe une constante C_S^α algébrique non-nulle, telle que pour tout ouvert élémentaire $a+(M_S^\nu) \subset Y_S$, $a \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$C_S^\alpha \sum_{j=0}^{t} \begin{pmatrix} t \\ j \end{pmatrix} (-a)^{t-j}\, \mu_{f,j}^{\alpha,S}(a+(M_S^\nu)) \equiv 0 \bmod M_S^{(t-h)\nu}\mathcal{O}$$

De façon similaire, on peut transporter le résultat d'admissibilité, pour obtenir un équivalent scalaire :

Théorème (d'admissibilité des distributions scalaires). *(énoncé page 94) La famille de distributions $\mu_{f,j}^{\alpha,S}$ forme une mesure S-adique h-admissible, où $h = \max_{p\in S} v_p(\alpha_p)$.*

On a besoin d'introduire un certain nombre de notations avant de pouvoir énoncer le théorème suivant :

Notation 6. *Si χ est un caractère de Dirichlet, on note c_χ son conducteur, et G_χ sa somme de Gauss.*

Notation 7. *Si φ est une fonction localement constante à support compact sur $\mathbb{A}_f^2$, lui associe une fonction ζ sur $GL_2(\mathbb{A}_f)$ de la façon suivante :*

$$\zeta_{k,s}(\varphi)(g_f) = \sum_{m\in\mathbb{Q}^*} \varphi\left(g_f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) x^{-k}|x|^{-2s}$$

NOTATION 8. *Si φ est une fonction localement constante à support compact sur $\mathbb{A}_f$, on note $\mathcal{F}\varphi$ sa transformée de Fourier.*

On est maintenant en mesure d'énoncer le :

THÉORÈME (théorème d'intégration des caractères de Dirichlet). *(énoncé page 94) Soit f une forme modulaire adélique* holomorphe *de poids k, niveau N et caractères (ψ_1, ψ_2), forme propre des opérateurs de Hecke, et $(\alpha_p)_p$ une famille de valeurs propres des opérateurs de Atkin-Lehner adaptée à f.*

Soit enfin χ un caractère de Dirichlet de conducteur c_χ premier avec N et $S = Z(c_\chi)$ le support de ce conducteur.

Sous ces hypothèses, on a :

$$\mu_{f,j}^{\alpha,S}(\chi) = H(f, \alpha, S, j, \chi) L_{f_{\alpha,S,0}}(j + 1, \overline{\chi})$$

où :

$$\begin{aligned} H(f, \alpha, S, j, \chi) \quad &= \quad \frac{a_{1,0} G_\chi \Gamma(k-1)(2i\pi)^{j+1}(-1)^k c_\chi^j \alpha_S^{-\underline{\nu}}}{\Gamma(j+1)\langle f_{\alpha,S}^0, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}} \\ &\quad \zeta_{j+1,0}(1_{\hat{\mathbb{Z}}} \times \mathcal{F}^{-1}(1_{(.,N)=1}\overline{\chi}))(1_f) L_{f_{\alpha,S,0}}(k-1, \mathcal{F}1_{Y_S}) \end{aligned}$$

Comme corollaire de ces deux théorèmes, on a le :

COROLLAIRE (congruences pour les valeurs spéciales). *(énoncé en page 99) On suppose que l'on dispose d'une combinaison linéaire finie de caractères de conducteurs $M_S^{\underline{\nu}}$, qui vérifie une congruence :*

$$\sum_\chi \gamma_\chi \chi \equiv 0 \bmod M_S^{\underline{\tau}} \mathcal{O}$$

alors :

$$C_S^\alpha \sum_\chi \gamma_\chi H(f, \alpha, S, j, \chi) L_{f_{\alpha,S,0}}(j+1, \overline{\chi}) \equiv 0 \bmod M_S^{(j-h)\underline{\nu}+\underline{\tau}} \mathcal{O}$$

où on rappelle que :

$$\begin{aligned} H(f, \alpha, S, j, \chi) \quad &= \quad \frac{a_{1,0} G_\chi \Gamma(k-1)(2i\pi)^{j+1}(-1)^k c_\chi^j \alpha_S^{-\underline{\nu}}}{\Gamma(j+1)\langle f_{\alpha,S}^0, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}} \\ &\quad \zeta_{j+1,0}(1_{\hat{\mathbb{Z}}} \times \mathcal{F}^{-1}\overline{\chi})(1_f) L_{f_{\alpha,S,0}}(k-1, \mathcal{F}1_{Y_S}) \end{aligned}$$

Plan du travail. Le **chapitre I** commence par fixer les notations qui seront utilisées dans le reste du texte. Il passe ensuite en revue les résultats de base sur le théorème d'approximation forte, la réduction d'endomorphismes et les fonctions confluentes hypergéométriques. Au passage, on introduit le formalisme des "tours modulaires", qui sans être absolument nécessaire, permet de mieux exprimer les problèmes de variations verticale et horizontale.

Le **chapitre II** présente en détails les formes modulaires qui sont étudiées dans ce texte. Il commence bien évidemment par leur définition, en précisant le lien avec les formes classiques, et avec la présentation plus classique des formes modulaires adélique. Il se poursuit en discutant les notions de développements, automorphe et de Fourier. Il se termine par la construction de séries d'Eisenstein qui rentrent dans ce cadre.

Le **chapitre III** présente tous les outils sur les formes modulaires dont on aura besoin. Il commence donc par un passage en revue de tous les opérateurs, qui sont définis, puis étudiés (en mettant l'accent sur les propriétés qui sont utiles à la suite, bien sûr). Il se poursuit par la définition de la fonction L d'une forme modulaire, avec à nouveau une discussion des propriétés essentielles. Enfin, le produit de Petersson est introduit, avec le cas particulier des intégrales de Rankin-Selberg, et des calculs explicites qui montrent le lien entre ces intégrales et les valeurs spéciales.

Le **chapitre IV** contient les premiers résultats intéressants ; en effet, c'est là que sont définies et étudiées la projection canonique et la forme linéaire. En particulier, on discute de l'intérêt de la projection canonique par rapport à d'autres projections, avant de prouver le théorème de contrôle de la dimension. On discute ensuite de familles de formes propres, car elles sont nécessaires à la définition de formes linéaires. Cette dernière définition est détaillée point par point, pour justifier que tout ce qu'on introduit est bien nécessaire pour obtenir les résultats attendus. La variation horizontale de ces formes linéaires occupe le reste du chapitre, qui se termine par une synthèse dans laquelle on montre que l'on peut, à partir des diverses formes, en obtenir une indépendante de S.

Le **chapitre V** discute des distributions à valeurs modulaires ; d'abord dans un cadre général, en donnant des exemples, et en discutant de leur “admissibilité”, avant de se pencher sur le cas particulier de la convolution de deux distributions d'Eisenstein, et prouver le théorème des congruences. Le critère d'admissibilité est alors énoncé puis prouvé ; la distribution construite et étudiée précédemment en vérifie évidemment les hypothèses !

Le **chapitre VI** enfin, définit les distributions à valeurs scalaires à partir des distributions modulaires, de la projection et de la forme linéaire construits précédemment. On peut alors prouver que ces distributions vérifient aussi un théorème des congruences, et forment une famille admissible. On établit ensuite que certaines de leurs intégrales sont liées aux valeurs spéciales auxquelles on s'intéresse. On en déduit alors un résultat de congruence pour les valeurs spéciales.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Alexei Alexeiev Pantchichkine pour ses conseils, ses avis et ses explications durant ces années.

Un grand merci à Siegfried Böcherer et Serge Vladut pour avoir accepté d'être rapporteurs sur ce travail, et ce, malgré un calendrier extrêmement court.

Je suis très content que Gilles Robert et Roland Gillard se soient joints aux précédents pour former le jury de cette thèse.

Je remercie pour leurs questions et remarques lors de mes exposés Gilles Robert, Fabienne Jory-Hugues et Bertrand Gorsse, qui m'ont permis de rendre ce texte plus compréhensible.

Je remercie Céline, Pierre et Diane Puydt, qui m'ont supporté sans trop se plaindre.

Je tiens finalement à remercier tous ceux qui ont contribué à LaTeX, car sans cet outil fabuleux, présenter un travail mathématique de façon aussi lisible serait une véritable gageure.

Table des matières

CHAPITRE I

Préliminaires

1.1. Notations, conventions

1.1.1. Général. On fixe un entier N et un caractère de Dirichlet ψ défini modulo N. On notera S et Σ des ensembles finis variables de places de $\mathbb{Q}$, avec $S \subset \Sigma$; et on écrira : $M_S = \prod_{l \in S} l$ et $N_S = NM_S$. On fera toujours le choix $N \wedge M_\Sigma = N \wedge M_S = 1$.

On notera par des lettres soulignées des multi-indices de $\mathbb{N}^S$ ou $\mathbb{N}^\Sigma$, et si $\underline{\mu}, \underline{\nu} \in \mathbb{N}^S$, on notera :

- $\underline{\nu} = (\nu_p)_{p \in S}$;
- $M_S^{\underline{\nu}} := \prod_{p \in S} p^{\nu_p}$;
- $\underline{\nu} \leq \underline{\mu}$ lorsque $\nu_p \leq \mu_p$ pour tout $p \in S$;
- $\underline{\mu} - \underline{\nu} = (\mu_p - \nu_p)_{p \in S}$ si on sait $\underline{\nu} \leq \underline{\mu}$;
- $\underline{\mu} + \underline{\nu} = (\mu_p + \nu_p)_{p \in S}$,
- $t\underline{\nu} = (t\nu_p)_{p \in S}$ lorsque $t \in \mathbb{N}$;
- $\underline{\nu} + n = (\nu_p + n)_{p \in S}$ (n entier) ;
- enfin, $(\underline{\nu}, \underline{0}) \in \mathbb{N}^\Sigma$ est le prolongement de la famille $(\nu_p)_{p \in S}$ par zéro sur $\Sigma - S$;

ces multi-indices se révéleront d'un usage très pratique.

1.1.2. Anneaux. Si A est un anneau commutatif unitaire, on notera $A^\times$ le semi-groupe des réguliers, et A^* le groupe des inversibles.

Sur un anneau A, $A[[q^{\mathbb{Q}}]][R]$ ne forme pas un anneau. Cependant, la limite inductive : $\lim_{\infty | N} A[[q^{\frac{1}{N}\mathbb{Z}}]][R]$ admet une structure d'anneau. C'est à cette limite que l'on fera référence quand on parlera de l'anneau $A[[q^{\mathbb{Q}}]][R]$.

On se placera souvent dans le cas où l'anneau de base sera $\overline{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{C}$ ou un des corps de Tate $\mathbb{C}_p$. On rappelle que sont des corps algébriquement clos. On se fixe des plongements :

$$\begin{aligned} i_\infty : \quad & \overline{\mathbb{Q}} \to \quad \mathbb{C} \\ i_l : \quad & \overline{\mathbb{Q}} \to \quad \mathbb{C}_l \end{aligned}$$

qui resteront en général implicites...

$\mathcal{O} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ est l'anneau des entiers algébriques et $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$ l'anneau des entiers p-adiques pour tout p.

On note $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles, et $\mathbb{A}_f$ l'anneau des adèles finis. $\hat{\mathbb{Z}}$ est l'anneau complété des entiers, isomorphe à $\prod_l \mathbb{Z}_l$. On sait que $\mathbb{A} = \mathbb{A}_f \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{A}_f = \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$.

1.1.3. Groupes. On travaillera avec des sous-groupes de GL_2 sur divers anneaux, que l'on va noter ainsi :

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} *_1 & *_2 \\ 0 & *_3 \end{pmatrix} \\
P &= \begin{pmatrix} 1 & *_1 \\ 0 & *_2 \end{pmatrix} \\
Z &= \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \\
D &= \begin{pmatrix} *_1 & 0 \\ 0 & *_2 \end{pmatrix} \\
U &= \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

naturellement, en plus de ces groupes-ci, on considèrera les groupes usuels SL_2, SO_2, O_2, etc, lorsque cela a un sens. En particulier, on notera $r(\theta)$ la rotation d'angle θ dans $SO_2(\mathbb{R})$.

De même, toujours lorsque cela a un sens (par exemple sur $\hat{\mathbb{Z}}$ ou $\mathbb{Z}$), on considèrera les groupes $B(\mathfrak{a})$, $P(\mathfrak{a})$, etc, où $\mathfrak{a}$ est un idéal, qui sont obtenus comme image réciproques des sous-groupes correspondants dans le quotient.

On réserve les notations $\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$ et $\Gamma(N)$ aux sous-groupes de congruences habituels dans $SL_2(\mathbb{Z})$: respectivement $B(N)$, $U(N)$ et le noyau de la réduction modulo N.

Dans le cas des sous-groupes sur sous-corps de $\mathbb{R}$, on notera $^+$ pour signifier que l'on se restreint au sous-groupe de déterminant strictement positif (avec la réserve suivante : comme les matrices d'homothéties sont de toutes façons de déterminant positif, cela signifiera que le rapport est strictement positif).

Il est pratique de disposer d'une façon de nommer les coefficients d'une matrice :

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ c_\gamma & d_\gamma \end{pmatrix} \in GL_2$$

1.1.4. Objets adéliques. Quand on considèrera un objet de nature adélique, disons o, on notera o_∞ sa partie archimédienne, et o_f sa partie non-archimédienne. Par exemple, si i est un idèle, i_∞ sera un élément de $\mathbb{R}^*$, et i_f un élément de $\mathbb{A}_f^*$. On notera aussi o_p pour la partie p-adique de o.

Etant donné un objet (non-)archimédien, on parlera aussi parfois de lui comme d'un objet adélique. Cela signifiera que l'on utilisera implicitement un plongement canonique de la partie considérée dans l'espace adélique correspondant. Ainsi, un réel non-nul x considéré comme un adèle est l'adèle dont la partie archimédienne est x, et la partie non-archimédienne est nulle. Le même réel considéré comme un idèle est l'idèle dont la partie archimédienne est x, et la partie non-archimédienne est 1.

Il y a une exception importante à cette dernière convention : les rationnels ont des plongements naturels à la fois dans les parties archimédiennes et non-archimédiennes ; dans ce cas, on privilégiera le plongement diagonal. Par exemple, une matrice $\gamma \in GL_2(\mathbb{Q})$ se plonge en une matrice de $GL_2(\mathbb{A})$ telle que $\gamma_\infty = \gamma$ et $\gamma_f = \gamma$.

1.1.5. Espaces topologiques. Les espaces de base dans ce travail seront les $Y_S = \prod_{l\in S} \mathbb{Z}_l^*$. Ce sont des espaces topologiques profinis, donc compacts. La topologie de Y_S est définie par les voisinages de ses points ; pour un point $a \in Y_S$ une base de ces voisinages est $a + (M_S^{\underline{\nu}})$, où $\underline{\nu} \in \mathbb{N}^S$.

On considèrera aussi le demi-plan de Poincaré usuel $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C}/\Im(\tau) > 0\}$, sur lequel $GL_2^+(\mathbb{R})$ agit par homographies.

On notera :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_\infty &= \left\{ \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}) \right\} \\ \mathbb{H}_f &= \left\{ \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{A}_f) \right\} \end{aligned}$$

les équivalents matriciels du demi-plan de Poincaré ; en particulier, on peut identifier $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}_\infty$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \to & \mathbb{H}_\infty \\ \tau & \mapsto & \begin{pmatrix} \Im(\tau) & \Re(\tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Proposition 1.1. *On dispose de la décomposition suivante (topologique !) de $GL_2^+(\mathbb{R})$:*

$$GL_2^+(\mathbb{R}) \backsimeq Z^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}_\infty \times SO_2(\mathbb{R})$$

Démonstration. Il suffit de considérer l'action des homographies sur i : le stabilisateur est formé par le centre et les rotations, et cette action induit un homéomorphisme : $\mathbb{H}_\infty \backsimeq \mathbb{H}$. $\square$

Proposition 1.2. *L'application $\tau : GL_2^+(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}$ définie précédemment, transforme la multiplication par une matrice de $GL_2^+(\mathbb{Q})$ en action par homographie par cette même matrice.*

Démonstration. On considère $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{Q})$, et $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ (où on voit x et y comme des fonctions de τ, et où on identifie $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}_\infty$) ; alors on peut prouver :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(\gamma\tau) & x(\gamma\tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} r(\alpha)$$

où α est défini par : $c\tau + d = |c\tau + d| \exp(i\alpha)$. $\square$

1.1.6. Facteurs d'automorphie. Pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$ et $\tau \in \mathbb{H}$, on peut définir trois facteurs d'automorphie :

$$\begin{aligned} j_0(\gamma, \tau) &= (c\tau + d)^{-1} \\ j_{1/2}(\gamma, \tau) &= \sqrt{|\det \gamma|}(c\tau + d)^{-1} \\ j_1(\gamma, \tau) &= \det \gamma (c\tau + d)^{-1} \end{aligned}$$

Il vérifient tous, pour tous $\gamma, g \in GL_2^+(\mathbb{R})$ et $\tau \in \mathbb{H}$, la règle de composition suivante :

$$j(\gamma g, \tau) = j(\gamma, g\tau) j(g, \tau)$$

Par ailleurs, on définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une action des matrices de $GL_2^+(\mathbb{R})$ sur les fonctions $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$, via :

$$f|_k\gamma(\tau) = j_{1/2}(\gamma,\tau)^k f(\gamma\tau)$$

1.2. Caractères

1.2.1. Caractères de Dirichlet. Un caractère de Dirichlet modulo N est un morphisme de groupes : $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$.

On dit qu'un caractère de Dirichlet est de conducteur N lorsqu'il ne se factorise pas via la réduction modulo D pour un diviseur strict D de N.

1.2.2. Exponentielle adélique. Il s'agit d'un caractère additif $\Psi : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$, que l'on définit localement :
- sur la place infinie, on considère $\Psi_\infty : x \mapsto \exp(2i\pi x)$;
- sur chaque place finie p, on considère $\Psi_p : x \mapsto \exp(-2i\pi x)$, où cette définition est à comprendre comme définissant l'image d'un nombre p-adique par l'image de sa partie fractionnaire, l'image des entiers étant triviale.

Cette exponentielle engendre tous les caractères de $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$.

Remarque 1.1. *Se fixer explicitement un caractère additif de base possède un avantage sur une approche plus généraliste : elle permet de se contenter de la définition des sous-groupes de congruence donnée plus loin : nul besoin de rajouter une "différente" pour tenir compte du fait que le caractère n'est pas trivial sur $\mathbb{Z}_p$ pour tout p.*

1.3. Théorème d'approximation forte

1.3.1. Enoncé. On rappelle sans le démontrer le résultat suivant, connu sous le nom de "théorème d'approximation forte" :

Théorème 1.1. *Si K est un sous-groupe d'indice fini de $GL_2(\hat{\mathbb{Z}})$, tel que :*
- *pour presque tout p, $K_p = GL_2(\mathbb{Z}_p)$;*
- *pour tout p, le déterminant $\det : K_p \to \mathbb{Z}_p^*$ est surjectif.*

alors $GL_2(\mathbb{A}) = GL_2(\mathbb{Q}).\left(GL_2^+(\mathbb{R}) \times K\right)$ (où le produit par des matrices rationnelles doit se comprendre par le plongement diagonal, comme convenu !)

On va souvent utiliser ce théorème appliqué dans le cas suivant ; on parlera alors d'appliquer le théorème d'approximation forte "en niveau N" :

Corollaire 1.1. $GL_2(\mathbb{A}) = GL_2(\mathbb{Q}).\left(GL_2^+(\mathbb{R}) \times B(N)\right)$

1.3.2. Unicité de l'écriture. Il est important de comparer deux décompositions d'une même matrice adélique $g \in GL_2(\mathbb{A})$ via ce corollaire. Imaginons que $g = g_\mathbb{Q}.(g_\mathbb{R}^+ \times g_N) = g'_\mathbb{Q}.({g'}_\mathbb{R}^+ \times g'_N)$, avec $g_\mathbb{Q}, g'_\mathbb{Q} \in GL_2(\mathbb{Q})$, $g_\mathbb{R}^+, {g'}_\mathbb{R}^+ \in GL_2^+(\mathbb{R})$ et $g_N, g'_N \in B(N)$. On pose $h = {g'}_\mathbb{Q}^{-1} g_\mathbb{Q} \in GL_2(\mathbb{Q})$. On a alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g'_\mathbb{Q} & = & g_\mathbb{Q} h^{-1} \\ {g'}_\mathbb{R}^+ & = & h g_\mathbb{R}^+ \\ g'_N & = & h g_N \end{array}\right.$$

ce qui montre que h est un bon indicateur du défaut d'unicité de la décomposition. Voyons ce que ces égalités fournissent comme indication sur h :

- la première ligne provient directement de la définition de h, et montre que c'est une matrice à coefficients rationnels, ce qui permet de la voir à la fois comme archimédienne et non-archimédienne ;
- la seconde ligne indique que le déterminant de h est strictement positif ;
- la dernière ligne donne beaucoup d'indications : h est à coefficients entiers, et son coefficient $(2, 1)$ est congru à 0 modulo N. Par ailleurs, son déterminant (qui est donc entier) doit être inversible modulo tous les nombres premiers : c'est donc ± 1.

On voit alors que si deux décompositions diffèrent, c'est nécessairement par une matrice de $\Gamma_0(N)$. Et inversement, si on se donne une décomposition d'une matrice, il est clair qu'on peut en obtenir une autre en faisant agir une matrice de ce groupe.

Remarque 1.2. *Ce théorème est dicuté de façon très claire dans le livre* [**16**] *de Gelbart, où sont données aussi un certain nombre de références sur des résultats similaires. On trouve une preuve pour le groupe algébrique SL_2 dans le livre* [**18**] *de Hida.*

1.3.3. Passage à un groupe plus petit. On choisit $g \in GL_2(\mathbb{A})$, et on imagine qu'on en connaît une écriture dans la décomposition $GL_2(\mathbb{Q}).(GL_2^+(\mathbb{R}) \times B(N))$; et on souhaite en déduire alors une écriture dans $GL_2(\mathbb{Q}).(GL_2^+(\mathbb{R}) \times B(MN))$, si possible. On va voir que si $M|N$, on peut le faire.

Pour cela, il suffit de considérer $1_\infty \times u$ avec $u \in B(N)$. On va voir qu'il existe une matrice $h \in \Gamma_1(N)$, que l'on donnera explicitement, telle que $h_f u \in B(MN)$.

A l'aide de cette matrice h, on peut écrire :

$$1_\infty \times u = h^{-1}.(h \times hu)$$

Voyons maintenant comment calculer h ; on pose :

$$\begin{aligned} h &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N\alpha & 1 \end{pmatrix} \\ u &= \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ N(c + a\alpha) & d + Nb\alpha \end{pmatrix}$$

et on voit qu'il suffit de faire un choix de $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $c + a\alpha \equiv 0 \bmod M$.

C'est là qu'intervient l'hypothèse $M|N$; en effet, pour être sûr de pouvoir faire un tel choix, il faut que $a_p \in \mathbb{Z}_p$ soit inversible, pour tout $p|M$. Or, si $M|N$, ces conditions sont vérifiées, car $ad - bNc \in \hat{\mathbb{Z}}^*$. Si maintenant a_p est inversible, alors il existe $\alpha_p \in \mathbb{Z}_p$ tel que $c_p + a_p\alpha_p \equiv 0 \bmod p^{v_p(M)}$. Cet entier (de $\mathbb{Z}_p$) est unique modulo $p^{v_p(M)}$. On utilise alors le théorème chinois pour obtenir un entier (relatif !) α, défini modulo M, qui recolle les données des α_p, pour tous les $p|M$.

1.4. Tours

On va travailler avec des familles d'espaces vectoriels sur des corps algébriquement clos (généralement $\overline{\mathbb{Q}}$ ou $\mathbb{C}$), structurées par des applications linéaires plus ou moins simples. Il est donc relativement naturel de chercher à définir un certain vocabulaire, qui sans exprimer de choses bien complexes, permettra néanmoins de rendre l'exposé plus compréhensible.

1.4.1. S-tour. Une S-tour est la donnée :

– pour chaque $\underline{\nu} \in \mathbb{N}^S$, d'un espace vectoriel $E^{\underline{\nu}}$;

– pour chaque couple $\underline{\nu} \leq \underline{\mu} \in \mathbb{N}^S$ d'une application linéaire $h_{\underline{\nu},\underline{\mu}} : E^{\underline{\nu}} \to E^{\underline{\mu}}$;

– pour chaque couple $\underline{\nu} \leq \underline{\mu} \in \mathbb{N}^S$ d'une application linéaire $b_{\underline{\mu},\underline{\nu}} : E^{\underline{\mu}} \to E^{\underline{\nu}}$;

$E^{\underline{\nu}}$ est l'*étage* $\underline{\nu}$, $E^{\underline{0}}$ est le *rez-de-chaussée*. Les applications $h_{\underline{\nu},\underline{\mu}}$ sont les *ascenseurs ascendants* et les $b_{\underline{\mu},\underline{\nu}}$ sont les *ascenseurs descendants*.

On demande aux ascenseurs de vérifier les propriétés suivantes :

– c'est l'identité si $\underline{\mu} = \underline{\nu}$;

– si $\underline{\nu} \leq \underline{\mu} \leq \underline{\lambda}$, l'ascenseur associé au couple $\underline{\nu} \leq \underline{\lambda}$ est le composé des ascenseurs associés à $\underline{\nu} \leq \underline{\mu}$ et $\underline{\mu} \leq \underline{\lambda}$.

On dira plus simplement que (E, h, b) est une S-tour pour décrire cette situation.

Remarque 1.3. *Les ascenseurs ascendants et descendants forment deux familles de morphismes, avec des propriétés de cohérences internes à chaque famille, mais sans propriété qui les lie : ils ne sont pas inverses les uns des autres, en particulier.*

1.4.2. Morphisme de tours. Etant données (E, h, b) une S-tour et (E', h', b') une Σ-tour, et une famille d'applications linéaires (indexée par $\mathbb{N}^S$) $f_{\underline{\nu}} : E^{\underline{\nu}} \to E'^{(\underline{\nu},\underline{0})}$, on dit que cette famille forme un morphisme de tours si pour tous $\underline{\nu} \leq \underline{\mu} \in \mathbb{N}^S$, on a :

– la condition de compatibilité ascendante : le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} E^{\underline{\mu}} \arrow[r, "f_{\underline{\mu}}"] & E'^{(\underline{\mu},\underline{0})} \\ E^{\underline{\nu}} \arrow[u, "h_{\underline{\nu},\underline{\mu}}"] \arrow[r, "f_{\underline{\nu}}"'] & E'^{(\underline{\nu},\underline{0})} \arrow[u, "h'_{(\underline{\nu},\underline{0}),(\underline{\mu},\underline{0})}"'] \end{tikzcd}$$

– la condition de compatibilité descendante : le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} E^{\underline{\mu}} \arrow[r, "f_{\underline{\mu}}"] \arrow[d, "b_{\underline{\mu},\underline{\nu}}"'] & E'^{(\underline{\mu},\underline{0})} \arrow[d, "b'_{(\underline{\mu},\underline{0}),(\underline{\nu},\underline{0})}"] \\ E^{\underline{\nu}} \arrow[r, "f_{\underline{\nu}}"'] & E'^{(\underline{\nu},\underline{0})} \end{tikzcd}$$

Remarque 1.4. *Il n'est pas possible de définir de façon satisfaisante un morphisme d'une Σ-tour dans une S-tour pour une raison simple : la S-tour a moins d'indices !*

1.4.3. Restriction et extension de tour. Clairement, si $S \subset \Sigma$, et si on dispose d'une Σ-tour (E, h, b), on peut en faire une S-tour $(E|_S, h|_S, b|_S)$ de la façon suivante :

– $E|_S^{\underline{\nu}} = E^{(\underline{\nu},\underline{0})}$;

– $(h|_S)_{\underline{\nu},\underline{\mu}} = h_{(\underline{\nu},\underline{0}),(\underline{\mu},\underline{0})}$;

– $(b|_S)_{\underline{\mu},\underline{\nu}} = b_{(\underline{\mu},\underline{0}),(\underline{\nu},\underline{0})}$;

où $\underline{\nu} \leq \underline{\mu} \in \mathbb{N}^S$. On dit que $E|_S$ est la *restriction* de E à S.

On ne va pas définir la notion d'extension de tours comme réciproque de la restriction, car cela serait trop restrictif : on dira qu'un morphisme f entre une S-tour et une Σ-tour est une *extension* s'il est injectif à chaque étage.

Si $S = \Sigma$, et les morphismes sont des inclusions, on parlera plutôt de *sous-tour*.

1.4.4. Tour de dimension finie. On s'intéressera principalement à des tours dont chaque étage est de dimension finie ; mais évidemment, même dans ce cas, il n'est pas impossible que $\dim E^{\underline{\nu}}$ tende vers $+\infty$ quand on fait tendre $\underline{\nu}$ vers "l'infini".

On parlera donc de tour *de dimension finie* uniquement dans le cas où la dimension des étages est bornée.

1.5. Réduction d'endomorphismes : espaces caractéristiques

Dans toute cette section, on va travailler avec un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos, un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$, et U, V deux $\mathbb{K}$-endomorphismes de E, tels que $UV = VU$.

1.5.1. Point de vue polynomial. On rappelle d'abord un résultat très simple mais fondamental sur les polynômes d'endomorphismes :

Lemme 1.1 (lemme des noyaux). *Si $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux deux à deux, on a :*

$$Ker(P_1 \dots P_n)(U) = Ker P_1(U) \oplus \cdots \oplus Ker P_n(U)$$

Démonstration. On va commencer par montrer que la somme est directe : soient $i \neq j$, et supposons que $x \in Ker P_i(U) \cap Ker P_j(U)$. On applique le théorème de Bézout à P_i et P_j, ce qui permet d'écrire : $Q_i P_i + Q_j P_j = 1$. Si on calcule le polynôme en U associé à cette égalité, évalué en x, il vient : $x = 0$.

Il reste maintenant à montrer que cette somme directe vaut ce que l'on attend. L'inclusion de la somme dans le noyau du produit est claire ; il suffit donc de prouver l'autre inclusion : fixons $x \in Ker(P_1 \dots P_n)(U)$, le but est de le décomposer en somme d'éléments dans les autres noyaux. Pour $j \in [[1, n]]$, notons $\hat{P}_j$ le produit de tous les P_i, sauf $i = j$. On applique alors le théorème de Bézout à ces polynômes pour écrire : $Q_1 \hat{P}_1 + \cdots + Q_n \hat{P}_n = 1$. Quand on calcule au point x le polynôme en U associé à cette égalité, il vient $x = x_1 + \cdots + x_n$, où $x_i = Q_i(U)\hat{P}_i(U)(x)$ est un élément de $Ker P_i(U)$, par définition de x, ce qui donne l'écriture cherchée. □

Si maintenant on utilise le fait que $\mathbb{K}$ est algébriquement clos pour écrire le polynôme minimal de U (il existe : on est en dimension finie !) sous la forme suivante :

$$\Pi_U(X) = (X - \alpha_1)^{\nu_1} \times \cdots \times (X - \alpha_n)^{\nu_n}$$

A partir de cette décomposition polynomiale, le lemme des noyaux donne une décomposition vectorielle :

$$E = Ker(U - \alpha_1)^{\nu_1} \oplus \cdots \oplus Ker(U - \alpha_n)^{\nu_n}$$

et cette décomposition est respectée par V : il respecte les noyaux des polynômes en U car il commute avec ce dernier.

On a donc une décomposition vectorielle de l'espace total, qui présente des propriétés intéressantes, puisqu'elle est respectée par les endomorphismes raisonnables, et fait intervenir des calculs sur des puissances de U fixée. Son défaut est de nécessiter la connaissance explicite de toutes les valeurs propres de U.

1.5.2. Point de vue grassmannien. On note $\mathcal{G}_E$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E. L'endomorphisme U, qui agit sur les points induit $U : \mathcal{G}_E \to \mathcal{G}_E$ qui agit sur les espaces.

On peut évidemment composer les applications sur cette grassmannienne, mais on dispose d'une possibilité supplémentaire : on peut définir une “composition infinie”, de la façon suivante : si $V \in \mathcal{G}_E$ est tel que $U(V) \subset V$, on définit $U^\infty(V)$ comme $\cap_n U^n(V)$. Cette composée vérifie une propriété de projection : $U^\infty \circ U^\infty = U^\infty$; mais ce n'est plus une fonction sur les points de E !

On va voir que c'est une véritable projection, en un certain sens ; posons :

$$\begin{aligned} KerU^\infty &= \cup_n KerU^n \\ ImU^\infty &= \cap_n ImU^n \end{aligned}$$

où le noyau est le plus grand sous-espace sur lequel U est nilpotent, et l'image le plus grand sous-espace dont les points sont image d'une puissance quelconque de U.

Proposition 1.3. *On a la décomposition suivante :*

$$E = KerU^\infty \oplus ImU^\infty$$

Démonstration. C'est l'intuition qu'il s'agit d'une sorte de projecteur qui doit guider !

Montrons que la somme est directe : soit $y = KerU^\infty \cap ImU^\infty$. Alors $y = U^\infty(x)$, car c'est un sous-espace de l'image. On peut alors utiliser la propriété de stabilité : $y = U^\infty(U^\infty(x)) = U^\infty(y)$, mais comme y est un sous-espace du noyau, il vient : $y = 0$.

Pour montrer que la somme est totale, avec un projecteur normal, on écrirait l'identité comme $I = U^\infty + (I - U^\infty)$, mais ceci n'est pas disponible sur la grassmannienne. On dispose par contre du théorème du rang, que l'on peut appliquer à U^n pour tout $n \geq 0$: $\dim E = dimKerU^n + dimImU^n$. En passant à la limite dans cette égalité, on voit que les dimensions des sous-espaces considérés sont supplémentaires ; or il sont en somme directe, donc ils engendrent tout l'espace. □

On obtient donc une décomposition vectorielle intéressante car elle est stable par des endomorphismes raisonnables, et elle ne demande pas de trop bien connaître l'opérateur U. Cependant, elle fait intervenir un passage à la limite qui n'est pas des plus explicites.

1.5.3. Comparaison des deux points de vue. Si on se fixe une valeur propre α de U, on a deux décompositions intéressantes associées à (U, α) :

$$\begin{aligned} E &= Ker(U - \alpha I)^{\nu_\alpha} \oplus \bigoplus_{\beta \neq \alpha} Ker(U - \beta I)^{\nu_\beta} \\ E &= \cup_{n \geq 0} Ker(U - \alpha I)^n \oplus \cap_{n \geq 0} Im(U - \alpha I)^n \end{aligned}$$

on va montrer qu'en fait :

$$\begin{aligned} \cup_{n \geq 0} Ker(U - \alpha I)^n &= Ker(U - \alpha I)^{\nu_\alpha} \\ \cap_{n \geq 0} Im(U - \alpha I)^n &= \bigoplus_{\beta \neq \alpha} Ker(U - \beta I)^{\nu_\beta} \end{aligned}$$

ce qui montre que pour calculer une projection sur les noyaux, il suffit de faire le calcul pour une puissance donnée de $U - \alpha I$, et que la connaissance de toutes les valeurs propres n'est pas nécessaire : on dispose d'une décomposition à laquelle on peut appliquer des outils classiques de calcul algorithmique.

En fait, comme on sait dispose de renseignements sur les dimensions de ces espaces, on va se contenter de prouver :

$$\begin{aligned} Ker(U-\alpha I)^{\nu_\alpha} &\subset \cup_{n\geq 0} Ker(U-\alpha I)^n \\ Ker(U-\beta I)^{\nu_\beta} &\subset \cap_{n\geq 0} Im(U-\alpha I)^n \end{aligned}$$

La première inclusion est claire, regardons la seconde (dans laquelle bien sûr $\beta \neq \alpha$). Comme $U-\alpha I$ fixe $Ker(U-\beta I)^{\nu_\beta}$ (U commute avec lui-même !), on va prouver que c'est un isomorphisme de cet espace.

Pour cela, on remarque que : $U-\alpha I$ s'écrit $(U-\beta I)+(\beta-\alpha)I$, donc se met sous la forme $(\beta-\alpha)(I-N)$ où N est un opérateur nilpotent. Or on sait que de tels opérateurs sont inversibles (l'inverse de $I-N$ est la somme [finie par nilpotence] : $\sum_i N^i$).

1.5.4. Calcul effectif de la projection. On va essayer de voir comment la discussion précédente permet de calculer explicitement la projection avec un logiciel capable de faire un certain nombre de manipulations sur l'espace considéré.

On se fixe donc l'opérateur U sur l'espace, et une de ses valeurs propres α. On imagine que l'on dispose d'une base quelconque $\mathcal{B}$ de l'espace, et que l'on est capable de projeter tout élément dans toute base.

On commence par calculer l'image de chaque élément de la base par U, et sa projection sur la base ; cela détermine la matrice M de U dans la base initiale.

On calcule $M' = M^d$ où d est la dimension de l'espace. Si on dispose de renseignements plus fins sur la valeur propre (comme son ordre dans le polynôme minimal de U sur cet espace), on peut calculer une puissance plus faible.

On cherche alors le noyau de M', ce qui donne un certain nombre de vecteurs, qui forment une base de l'espace caractéristique cherché.

Il reste enfin à calculer l'image de M', dont on ne conserve que le minimum de vecteurs nécessaires pour en avoir une base : on a alors une base du supplémentaire canonique (pour U) de l'espace caractéristique.

Ces deux bases forment une base de l'espace total, adaptée à la décomposition caractéristique : il suffit de projeter un vecteur dans cette nouvelle base pour connaître sa projection sur l'espace caractéristique.

1.6. Fonction confluente hypergéométrique

Ces fonctions, dont l'une va jouer un rôle crucial pour établir des résultats de régularité pour les séries d'Eisenstein, sont étudiées, preuves à l'appui, dans divers textes ; la référence centrale est l'article [**52**] de Shimura, mais Hida donne d'autres preuves dans [**18**].

1.6.1. Définition. On considère, pour $y \in \mathbb{R}_+^*$ et α, β des complexes :

$$\sigma(y;\alpha,\beta) = \int_0^\infty (u+1)^{\alpha-1} u^{\beta-1} \exp(-yu)du$$

cette intégrale converge bien lorsque β est de partie réelle strictement positive.

1.6.2. Prolongement analytique. La fonction $(\exp(2i\pi\beta)-1)\sigma(y;\alpha,\beta)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur tout le plan $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$.

1.6.3. Equation fonctionnelle. La fonction $\omega(y;\alpha,\beta) \mapsto y^{\beta}\Gamma(\beta)^{-1}\sigma(y;\alpha,\beta)$ est invariante via les substitutions (simultanées !) $\alpha \mapsto 1-\beta$ et $\beta \mapsto 1-\alpha$:

$$\omega(y;\alpha,\beta) = \omega(y;1-\beta,1-\beta)$$

1.6.4. Valeurs particulières. On sait évaluer la fonction ω dans les cas suivants très simples :
– lorsque $\Re(\alpha) > 0$, $\omega(y;\alpha,0) = 1$;
– lorsque $\Re(\beta) > 0$, $\omega(y;1,\beta) = 1$;

1.6.5. Développement polynomial.

Proposition 1.4. *On dispose de l'expression de récurrence suivante, pour tout entier naturel r :*

$$\omega(y;\alpha,\beta) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-j)} y^{-j} \omega(y;\alpha-j;\beta+r)$$

Cette relation de récurrence permet d'obtenir un développement polynomial :

Corollaire 1.2. *Si r est tel que $\Re(\alpha - r) > 0$, alors on a :*

$$\omega(y;\alpha,-r) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-j)} y^{-j}$$

Démonstration. En effet, pour ces choix, on sait que l'on peut utiliser les valeurs particulières connues de la fonction ω. $\square$

1.7. Lemme de Rankin

Lemme 1.2 (de Rankin). *Supposons données deux suites (a_r) et (b_r), vérifiant les propriétés suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{r\geq 0} a_r X^r & = & \frac{1}{(1-\alpha X)(1-\alpha' X)} \\ \sum_{r\geq 0} b_r X^r & = & \frac{1}{(1-\beta X)(1-\beta' X)} \end{array} \right.$$

alors on a :

$$\sum_{r\geq 0} a_r b_r X^r = \frac{(1-\alpha\alpha'\beta\beta' X^2)}{(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X)(1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta' X)}$$

Démonstration. On commence par se ramener à un énoncé qui ne fait intervenir que les α, α', β et β' ; en décomposant les séries en (a_r) et (b_r) via le produit, on obtient les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_r & = & \sum_{i+j=r} \alpha^i \alpha'^j \\ b_r & = & \sum_{k+l=r} \beta^k \beta'^l \end{array} \right.$$

Par ailleurs, en décomposant la fraction rationnelle, on a :

$$\begin{array}{cl} & \frac{(1-\alpha\alpha'\beta\beta' X^2)}{(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X)(1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta' X)} \\ = & (1-\alpha\alpha'\beta\beta' X^2) \times \sum_{a,b,c,d\geq 0} \alpha^{a+c}\alpha'^{b+d}\beta^{a+b}\beta'^{c+d}X^{a+b+c+d} \\ = & \sum_{a,b,c,d\geq 0} \alpha^{a+c}\alpha'^{b+d}\beta^{a+b}\beta'^{c+d}X^{a+b+c+d} \\ & -\sum_{a,d\geq 1;b,c\geq 0} \alpha^{a+c}\alpha'^{b+d}\beta^{a+b}\beta'^{c+d}X^{a+b+c+d} \end{array}$$

prouver le lemme revient donc à établir :

$$\sum_{a,b,c,d\geq 0} \alpha^{a+c}\alpha'^{b+d}\beta^{a+b}\beta'^{c+d} = \sum_{i,j,k,l\geq 0} \alpha^i\alpha'^j\beta^k\beta'^l$$

avec les contraintes : $a+b+c+d=r$ et $ad=0$ à gauche, et $i+j=r$ et $k+l=r$ à droite ; et ceci pour tout $r\geq 0$. Il s'agit donc essentiellement de trouver un changement de variables adéquat.

Il suffit en fait de considérer les points i et k sur le segment $[[0,r]]$. Ils coupent le segment en trois. La longueur du premier morceau sera c, la longueur du dernier, b. La longueur du segment du milieu sera a si $k\leq i$, et d si $i\leq k$; avec a ou d nul si non précisé. Il est clair que cela reste cohérent si $k=i$. Récapitulons : si $k\leq i$, alors $c=k$, $a=i-k$, $b=j$ et $d=0$; si $i\leq k$, alors $c=i$, $d=k-i$, $b=l$ et $a=0$. Ce changement de variable établit l'égalité, donc le lemme. □

1.8. Transformée de Fourier sur $\mathbb{A}_f$

1.8.1. Définitions. Soit $\varphi : \mathbb{A}_f \to \mathbb{C}$ une fonction localement constante à support compact (notons $\mathcal{LC}$ leur ensemble). On définit sa transformée de Fourier par la formule suivante :

$$\mathcal{F}\varphi(x) = \int_{\mathbb{A}_f} \varphi(t)\Psi_f(-tx)\mathrm{dt}$$

où $\Psi_f = \prod_p \Psi_p$ est l'exponentielle semi-adélique déjà introduite (en 1.2.2, page 18).

Si a est un adèle fini, on note T_a l'opérateur qui agit sur $\varphi\in\mathcal{LC}$ par translation :

$$\varphi|T_a(x) = \varphi(x+a)$$

Pour λ un idèle fini, on note H_λ l'opérateur qui agit sur $\varphi\in\mathcal{LC}$ par homothétie :

$$\varphi|H_\lambda(x) = \varphi(\lambda x)$$

1.8.2. Outils de calcul. Les propriétés suivantes permettent de calculer la transformée de Fourier d'une fonction quelconque plus facilement.

Proposition 1.5. *On a :* $\mathcal{F}1_{\hat{\mathbb{Z}}} = 1_{\hat{\mathbb{Z}}}$

Démonstration. En effet, la transformée de Fourier s'interprète alors comme une somme sur des racines de l'unité : s'il y a un dénominateur, la somme est nulle. Sinon, la somme vaut 1. □

On va noter Ψ_a la fonction $x\mapsto \Psi_f(ax)$. Elle est bien localement constante, mais son support n'est pas compact.

Proposition 1.6. *Pour tous* $a,x\in\mathbb{A}_f$ *et* $\varphi\in\mathcal{LC}$*, on a :* $\mathcal{F}T_a\varphi = \Psi_a\mathcal{F}\varphi$

Démonstration. Il suffit d'effectuer le changement de variable : $u=t+a$ et $\mathrm{du}=\mathrm{dt}$ dans l'intégrale. □

Proposition 1.7. *Pour tous* $a\in\mathbb{A}_f$ *et* $\varphi\in\mathcal{LC}$*, on a :* $\mathcal{F}(\Psi_a\varphi) = T_{-a}\mathcal{F}\varphi$

Démonstration. L'exponentielle décale simplement la variable dans l'intégrale, sans changement de variable. □

Proposition 1.8. *Pour tous* $\lambda\in\mathbb{I}_f$ *et* $\varphi\in\mathcal{LC}$*, on a :* $\mathcal{F}H_\lambda\varphi = |\lambda|_f^{-1}H_\lambda^{-1}\mathcal{F}\varphi$

Démonstration. Il suffit d'effectuer le changement de variable $u=\lambda t$ et $\mathrm{du}=|\lambda|_{\mathrm{f}}\mathrm{dt}$ dans l'intégrale. □

1.8.3. Transformée de Fourier d'un caractère de Dirichlet. On souhaite calculer la transformée de Fourier d'un caractère de Dirichlet χ de conducteur c_χ. Pour cela, on va commencer par expliquer comment on peut le considérer comme une fonction de $\mathcal{LC}$; par définition :

$$\chi = \sum_{a \bmod c_\chi} \chi(a) 1_{a+c_\chi\hat{\mathbb{Z}}}$$

Pour faire le calcul à l'aide des propositions précédentes, on le réécrit alors sous la forme :

$$\chi = \sum_{a \bmod c_\chi} \chi(a) T_{-a} H_{c_\chi^{-1}} 1_{\hat{\mathbb{Z}}}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\chi(x) &= \sum_{a \bmod c_\chi} \chi(a) \mathcal{F} T_a H_{c_\chi^{-1}} 1_{\hat{\mathbb{Z}}}(x) \\
&= \sum_{a \bmod c_\chi} \chi(a) \Psi_f(-ax) \mathcal{F} H_{c_\chi^{-1}} 1_{\hat{\mathbb{Z}}}(x) \\
&= \sum_{a \bmod c_\chi} \chi(a) \Psi_f(-ax) \frac{1}{c_\chi} H_{c_\chi} \mathcal{F} 1_{\hat{\mathbb{Z}}}(x) \\
&= \frac{1}{c_\chi} \sum_{a \bmod c_\chi} \chi(a) \Psi_f(-ax) H_{c_\chi} 1_{\hat{\mathbb{Z}}}(x) \\
&= \frac{1}{c_\chi} H_{c_\chi} \sum_{a \bmod c_\chi} \chi(a) \Psi_f\left(\frac{-ax}{c_\chi}\right) 1_{\hat{\mathbb{Z}}}(x)
\end{aligned}$$

dans cette expression, on voit une somme sur les valeurs d'un caractère, tordue par une exponentielle : cela fait penser à une somme de Gauss. On va donc tenter de forcer l'apparition de G_χ dans l'expression de la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\chi(x) &= \frac{1}{c_\chi} H_{c_\chi} \sum_{a \bmod c_\chi} \chi(a) \Psi_f\left(\frac{-ax}{c_\chi}\right) 1_{\hat{\mathbb{Z}}}(x) \\
&= \frac{1}{c_\chi} H_{c_\chi} \overline{\chi}(x) \sum_{a \bmod c_\chi} \chi(ax) \Psi_f\left(\frac{-ax}{c_\chi}\right) 1_{\hat{\mathbb{Z}}}(x)
\end{aligned}$$

on voit alors que la condition $1_{\hat{\mathbb{Z}}}(x)$ est inutile, car $\chi(ax)$ la contient déjà ; la somme est donc la somme de Gauss, et on obtient l'expression finale de la transformée de Fourier de χ :

$$\mathcal{F}\chi(x) = \frac{G_\chi}{c_\chi} \overline{\chi}(c_\chi x)$$

1.8.4. Transformée inverse. On peut légitimement se demander quelle est l'expression de la transformée de Fourier inverse ; comme les formules de calcul de la transformée directe sont inversibles, on obtient aisément et sans calcul :

PROPOSITION 1.9. *Si $a \in \mathbb{A}_f$, $\lambda \in \mathbb{I}_f$ et $\varphi \in \mathcal{LC}$, on a :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}^{-1} 1_{\hat{\mathbb{Z}}} & = & 1_{\hat{Z}} \\ \mathcal{F}^{-1} T_a \varphi & = & \Psi_{-a} \mathcal{F}^{-1} \varphi \\ \mathcal{F}^{-1} \Psi_a \varphi & = & T_a \mathcal{F}^{-1} \varphi \\ \mathcal{F}^{-1} H_\lambda \varphi & = & |\lambda|_f^{-1} H_\lambda^{-1} \mathcal{F}^{-1} \varphi \end{array}$$

CHAPITRE II

Formes modulaires adéliques

2.1. Définition

2.1.1. Rappel : formes modulaires classiques. Il n'est pas inutile de rappeler la définition des formes classiques : cela permet de motiver les définitions qui seront données dans le cadre adélique.

Une forme modulaire classique, de poids k pour un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ est une fonction $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$, qui vérifie :

$$\forall \tau \in \mathbb{H}, \gamma \in \Gamma, f|_k\gamma(\tau) = f(\tau)$$

et qui est presque-holomorphe ; c'est une condition de régularité qui est discutée plus en détail en section 2.2.4. On note l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par ces formes $M_k(\Gamma)$.

On parle de forme modulaire (classique) de poids k et de niveau N pour les formes appartenant à $M_k(\Gamma_1(N))$. Cet espace se décompose de façon naturelle sous la forme : $M_k(N) = \oplus_\psi M_k(N,\psi)$, où la somme porte sur les caractères définis modulo N, et f est dans $M_k(N,\psi)$ lorsqu'elle est dans $M_k(N)$ et vérifie de plus : $f|\gamma(\tau) = \psi(\gamma)f(\tau)$.

On dit qu'elle est parabolique lorsqu'elle s'annule sur toutes les pointes. Les espaces de formes paraboliques sont plutôt notés avec un S (de l'allemand Spitz) ; $S_k(N,\psi)$ est donc l'espace des formes paraboliques de poids k, niveau N et caractère ψ.

2.1.2. Cadre adélique. On dit que $F : GL_2(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ est une forme modulaire de poids k, pour le sous-groupe d'indice fini $K \subset GL_2(\hat{\mathbb{Z}})$, lorsqu'elle vérifie les conditions suivantes : ($g \in GL_2(\mathbb{A})$)

- $\forall \gamma \in GL_2(\mathbb{Q}), F(\gamma g) = F(g)$;
- $\forall z \in \mathbb{R}^*, F(gz) = F(g)$;
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, F(gr(\theta)) = \exp(-ik\theta)F(g)$;
- $\forall k \in K, F(gk) = F(g)$,
- F est presque-holomorphe (la notion, importante, est discutée en détail en section 2.2.4).

On note $\mathcal{M}_k(K)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par ces fonctions. On verra plus loin qu'il est possible de le munir d'une structure entière/rationnelle, grâce aux coefficients de Fourier.

On dit que F est de poids k et de niveau N lorsqu'elle appartient à $\mathcal{M}_k(U(N))$. On préfèrera noter cet espace $\mathcal{M}_k(N)$. Comme dans le cadre classique, cet espace se décompose le long de caractères :

$$\mathcal{M}_k(N) = \oplus_{\psi_1,\psi_2}\mathcal{M}_k(N,\psi_1,\psi_2)$$

où la somme porte sur les couples de caractères de Dirichlet modulo N. L'espace $\mathcal{M}_k(N,\psi_1,\psi_2)$ est le sous-espace de $M_k(N)$ formé par les formes F telles que :

$$F(g\gamma) = \psi_1(a_\gamma)\psi_2(d_\gamma)F(g)$$

lorsque $\gamma \in B(N)$.

Remarque 2.1. *Si F est dans $\mathcal{M}_k(N,\psi_1,\psi_2)$, comme $r(\pi) = -1$, on a :*

$$F(gr(\pi)) = F\left(g\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

où l'on voit la seconde matrice comme élément de $B(N)$, et donc :

$$\psi_1\psi_2(-1) = (-1)^k$$

ce résultat est cohérent avec ce qu'on a dans le cadre classique.

Remarque 2.2. *Comme $B(N)/U(N) \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{*2}$, qui est commutatif, on a :*

$$F(GL_2(\mathbb{Q})g_{\mathbb{R}} \times g_N g'_N U(N)) = F(GL_2(\mathbb{Q})g_{\mathbb{R}} \times g'_N g_N U(N))$$

2.1.3. Lien avec d'autres définitions. La définition précédente de forme modulaire ne correspond pas exactement à ce qui se trouve dans la littérature ; donnons rapidement quelques points de comparaison.

2.1.3.1. *Théorie de la représentation.* La définition plus couramment utilisée dans les articles/livres où l'auteur est plus intéressé par l'aspect théorie de la représentation (comme par exemple dans les livres de Gelbart [**16**], Hida [**18**] et Li [**25**]) est la suivante : une forme modulaire de poids k, niveau N et caractère ψ (un seul caractère !) est définie comme vérifiant :

– $F(\gamma g) = F(g)$, pour tout $\gamma \in GL_2(\mathbb{Q})$;
– $F(gr(\theta)) = F(g)\exp(-ik\theta)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$;
– $F(zg) = \psi(a_z)F(g)$, pour tout $z \in Z(\mathbb{A})$;
– $F(gb) = \psi(a_b)F(g)$, pour tout $b \in B(N)$;
– des conditions de régularité (en général holomorphie, avec éventuellement des conditions de croissances pour les formes paraboliques - nous n'avons pas encore discuté ce point).

La condition sur le centre adélique se décompose en fait en une condition sur le centre réel, et une au centre non-archimédien ; on voit donc qu'en fait, la forme ainsi définie est dans $\mathcal{M}_k(N,\psi,1)$. On verra que cette définition est alors plus adaptée pour avoir une correspondance avec les formes classiques ; mais on perd le parallèle entre les formes avec caractère et sans caractère, c'est la raison pour laquelle on ne l'a pas retenue ici.

2.1.3.2. *Formes semi-adéliques.* Ces formes sont utilisées dans l'article [**45**] de Scholl, et un précédent travail [**42**] ; elles sont définies sur $\mathbb{H} \times GL_2(\mathbb{A}_f)$. Une forme $\tilde{F}$ vérifie :

– $\tilde{F}(\gamma\tau,\gamma g) = j_1(\gamma,\tau)^{-k}\tilde{F}(\tau,g)$, pour tout $\gamma \in GL_2^+(\mathbb{Q})$;
– une propriété d'invariance à droite pour un sous-groupe $K \subset GL_2(\mathbb{A}_f)$;
– une condition de régularité (holomorphie ou presque-holomorphie).

La principale différence avec les formes étudiées ici réside dans cette différence de comportement vis-à-vis de $GL_2(\mathbb{Q})$. Voyons comment obtenir une forme adélique F à partir de la forme $\tilde{F}$; il suffit d'utiliser les propriétés du facteur d'automorphie pour avoir une idée de la définition : $j_1(\gamma\tau,i) = j_1(\gamma,\tau)j_1(\tau,i)$ où on identifie $\tau \in \mathbb{H}$ à $\tau \in \mathbb{H}_\infty$, et donc où $j_1(\tau,i) = y$.

Il suffit donc de considérer $j_1(\tau, i)^k \tilde{F}(\tau, g)$ pour obtenir une fonction $GL_2^+(\mathbb{Q})$-invariante : c'est le lien cherché.

REMARQUE 2.3. *La partie archimédienne de l'espace de définition est plutôt* $\mathbb{C} - \mathbb{R}$*, donc deux copies de* $\mathbb{H}$*, mais on se ramène aisément au cas de figure discuté ici.*

2.1.4. Lien entre formes classiques et adéliques, torsion.

2.1.4.1. *Passage classique-adélique.*

PROPOSITION 2.1. *Il existe une application naturelle :*

$$M_k(N, \psi) \to \mathcal{M}_k(N, \psi, 1)$$

DÉMONSTRATION. On va définir explicitement cette application ; cela se fait en trois étapes. Pour cela, on se fixe une forme modulaire classique $f \in M_k(N, \psi)$.

On commence par prolonger f en F_1 de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} F_1 : GL_2^+(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & f|_k g(i) = j_{1/2}(g, i)^k f(gi) \end{array}$$

Cette nouvelle fonction a d'ores et déjà un certain nombre de propriétés :
- si $g \in GL_2^+(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{R}^+$, alors $F_1(gz) = F_1(g)$; en effet, le centre n'agit pas sur i, et $j_{1/2}(z, i) = 1$;
- si $g \in GL_2^+(\mathbb{R})$ et $r(\theta) \in SO_2(\mathbb{R})$, alors $F_1(gr(\theta)) = \exp(-ik\theta)F_1(g)$; à nouveau on utilise le fait que les rotations n'agissent pas sur i, et on calcule $j_{1/2}(r(\theta), i) = \exp(-i\theta)$;
- si $g \in GL_2^+(\mathbb{R})$ et $\gamma \in \Gamma_0(N)$, alors $F_1(\gamma g) = \psi(d_\gamma)F_1(g)$; ici, il suffit d'utiliser la propriété d'action à droite pour séparer les actions de γ et g sur f, puis utiliser la modularité de f.

On prolonge alors à $GL_2^+(\mathbb{R}) \times B(N)$ via ψ :

$$\begin{array}{rcl} F_2 : GL_2^+(\mathbb{R}) \times B(N) & \to & \mathbb{C} \\ (g, u) & \mapsto & \psi(a_u)F_1(g) \end{array}$$

Par construction, les matrices de $B(N)$ agissent via $(\psi, 1)$. Le sous-groupe de congruence $B(N)$ agit donc sur F_2 comme on le voudrait.

Pour obtenir F_3 définie sur $GL_2(\mathbb{A}) = GL_2(\mathbb{Q}).(GL_2^+(\mathbb{R}) \times B(N))$, on veut prolonger par $GL_2(\mathbb{Q})$-invariance. On sait cependant que les translatés de $GL_2^+(\mathbb{R}) \times B(N)$ se chevauchent, via les matrices de $\Gamma_0(N)$ (voir la discussion sur le théorème d'approximation forte en 1.3). On doit donc vérifier des conditions de recollement : si $h \in \Gamma_0(N)$, on a :

$$\begin{array}{rcl} F_3(hg_{\mathbb{R}}^+ \times hg_N) & = & F_1(hg_{\mathbb{R}}^+)\psi(a_{hg_N}) \\ & = & \psi(d_h)F_1(g_{\mathbb{R}}^+)\psi(a_h)\psi(a_{g_N}) \\ & = & \psi(a_h d_h)F_1(g_{\mathbb{R}}^+)\psi(g_N) \\ & = & F_3(g_{\mathbb{R}}^+ \times g_N) \end{array}$$

car $a_h d_h \equiv 1 \bmod N$.

On a donc obtenu une application $F : GL_2(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ à partir de f. Il s'agit bien d'une forme modulaire adélique car les trois étapes fournissent les trois propriétés principales : la première étape donne le comportement via les rotations et homothéties archimédiennes, la seconde étape le comportement via $B(N)$, et la troisième donne la $GL_2(\mathbb{Q})$-invariance. Finalement, la régularité de la forme modulaire classique f de départ fournit la régularité attendue.

□

2.1.4.2. *Passage adélique-classique.*

PROPOSITION 2.2. *Il existe une application naturelle :*

$$\mathcal{M}_k(N,\psi,1) \to M_k(N,\psi)$$

DÉMONSTRATION. Le passage est nettement plus facile dans cette direction, puisqu'il s'agit cette fois de restreindre une fonction ! On se donne donc $F \in \mathcal{M}_k(N,\psi,1)$, et on souhaite lui associer de façon naturelle une forme modulaire classique f, définie sur $\mathbb{H}$.

On définit f par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{H} \backsimeq \mathbb{H}_\infty & \to & \mathbb{C} \\ \tau \backsimeq \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \mapsto & y^{\frac{-k}{2}} F\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f\right) \end{array}$$

Montrons que $f \in M_k(N,\psi)$, comme annoncé : on se donne un point $\tau \in \mathbb{H}$ et une matrice $\gamma \in \Gamma_0(N)$:

$$\begin{aligned} f|_k\gamma(\tau) &= j_{1/2}(\gamma,\tau)^k f(\gamma\tau) \\ &= j_{1/2}(\gamma,\tau)^k y(\gamma\tau)^{\frac{-k}{2}} F\left(\begin{pmatrix} y(\gamma\tau) & x(\gamma\tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f\right) \\ &= j_{1/2}(\gamma,\tau)^k |j_{1/2}(\gamma,\tau)|^{-k} y^{\frac{-k}{2}} F\left(\gamma \begin{pmatrix} y(\gamma\tau) & x(\gamma\tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} r(-\alpha) \times 1_f\right) \\ &= j_{1/2}(\gamma,\tau)^k |j_{1/2}(\gamma,\tau)|^{-k} y^{\frac{-k}{2}} \exp(ik\alpha) F\left(\gamma \begin{pmatrix} y(\gamma\tau) & x(\gamma\tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f\right) \\ &= y^{\frac{-k}{2}} F\left(\gamma \begin{pmatrix} y(\gamma\tau) & x(\gamma\tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f\right) \\ &= y^{\frac{-k}{2}} F\left(\begin{pmatrix} y(\gamma\tau) & x(\gamma\tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \gamma^{-1}\right) \\ &= y^{\frac{-k}{2}} \psi(a_{\gamma^{-1}}) F\left(\begin{pmatrix} y(\gamma\tau) & x(\gamma\tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f\right) \\ &= y^{\frac{-k}{2}} \psi(d_\gamma) F\left(\begin{pmatrix} y(\gamma\tau) & x(\gamma\tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f\right) \\ &= \psi(d_\gamma) f(\tau) \end{aligned}$$

où on a utilisé toutes les propriétés de F : la $GL_2(\mathbb{Q})$-invariance pour faire passer γ de la partie archimédienne à la partie non-archimédienne [avec inversion], où l'on a appliqué la $(\psi,1)$-variance. On a de plus utilisé la discussion sur le lien entre l'action des homographies sur le demi-plan de Poincaré et la multiplication par une matrice dans $GL_2^+(\mathbb{R})$ (proposition 1.2, où α est défini dans la preuve).

□

On vérifie aisément que cette construction est bien l'inverse de la précédente.

2.1.4.3. *Torsion par un caractère.* On se donne une forme modulaire adélique F de poids k, de niveau N et de caractères (ψ_1, ψ_2), ainsi qu'un caractère de Dirichlet ψ, de conducteur divisant N.

On définit la forme tordue $F \otimes \psi$, elle aussi de poids k et de niveau N, mais de caractères $(\psi\psi_1, \psi\psi_2)$, de la façon suivante : si $g \in GL_2(\mathbb{A})$ s'écrit sous la forme $g = g_{\mathbb{Q}}.(g_{\mathbb{R}} \times g_N)$(en niveau N, via le théorème d'approximation forte), alors on définit $F \otimes \psi(g)$ par la formule : $\psi(\det g_N)F(g)$. Cela a un sens, car l'indétermination sur g_N est donnée par une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$, qui est de déterminant 1.

Elle est bien du poids attendu, car elle hérite de F ses propriétés vis-à-vis de $Z^+(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$. Son niveau et ses caractères se lisent eux aussi bien sur l'expression qui la définit.

Comme l'application $F \mapsto F \otimes \psi$ est linéaire, d'inverse $F \mapsto F \otimes \overline{\psi}$, il s'agit d'un isomorphisme. En particulier, la torsion par $\overline{\psi_2}$ permet d'associer à une forme de caractères (ψ_1, ψ_2) une forme de caractères $(\psi_1\overline{\psi_2}, 1)$, à laquelle vu comment associer de façon naturelle une forme modulaire classique.

La torsion nous donne donc le dernier pont entre formes classiques et formes adéliques. On verra plus tard qu'elle respecte beaucoup plus que la structure vectorielle des espaces de formes modulaires.

2.2. Presque-holomorphie et développement de Fourier

On souhaite se donner une condition de régularité plus faible que l'holomorphie, mais qui conserverait néanmoins de bonnes propriétés ; telles par exemple que l'existence d'un développement de Fourier, ainsi que la stabilité par les opérateurs usuels sur les formes modulaires.

2.2.1. Objectifs : structure entière/rationnelle. On va voir que l'on peut définir un "développement de Fourier" des formes modulaires, assez similaire au développement classique ; mais ici sous la forme :

$$F\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f\right) = y^{\frac{k}{2}} \sum_{n,r \geq 0} a_{n,r} q^n R^r \qquad (2.2.1.a)$$

avec $n \in \mathbb{N}$, et une somme finie (et indépendante de n) sur r, où $y \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in \mathbb{R}$; expression qui provient de l'anneau formel $A[[q]][R]$ via les identifications $R = \frac{1}{4\pi y}$ et $q = \exp(2i\pi(x + iy))$, avec $A = \mathcal{O}$, $\overline{\mathbb{Q}}$ ou $\mathbb{C}$.

L'existence d'un tel développement permet de doter les espaces de formes modulaires d'une structure entière (choix $A = \mathcal{O}$) ou rationnelle (choix $A = \overline{\mathbb{Q}}$). Cela permet de discuter des problèmes de congruences entre formes modulaires, par exemple. On définit alors $\mathcal{M}_k(N, \psi_1, \psi_2, A)$ comme étant le sous-espace (sous-module si A n'est qu'un anneau) des formes de $\mathcal{M}_k(N, \psi_1, \psi_2)$ à coefficients dans A (ie : $\forall n, r, a_{n,r} \in A$).

On dit qu'une forme est "parabolique" si $n = 0 \implies \forall r, a_{n,r} = 0$. Ces formes paraboliques forment un sous-espace vectoriel (un sous-module, sur un anneau) de $\mathcal{M}_k(N, \psi_1, \psi_2, A)$, que l'on note $\mathcal{S}_k(N, \psi_1, \psi_2, A)$.

2.2.2. Développement automorphe. Même sans hypothèse de régularité forte, ni de modularité, une fonction $F : GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ admet automatiquement une écriture sous la forme suivante : (où $x \in \mathbb{A}$)

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = \sum_{\xi \in \mathbb{Q}} a_\xi(g)\Psi(\xi x) \tag{2.2.2.b}$$

en effet, à $g \in GL_2(\mathbb{A})$ fixé, la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & F\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \end{array}$$

est $\mathbb{Q}$-périodique, donc se décompose, par dualité de Pontryagin, sous la forme (2.2.2.b) avec :

$$a_\xi(g) = \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \Psi(-\xi t)dt \tag{2.2.2.c}$$

Ce n'est pas le développement cherché, qui de toutes façons va nécessiter de faire des hypothèses plus fortes sur le comportement analytique, mais on verra que ce développement est très utile.

2.2.3. Fonction de Whittaker. Parmi les coefficients du développement automorphe, l'un d'entre eux mérite une attention toute particulière : c'est la fonction a_1, dite "de Whittaker", que nous noterons A, et qui permet de reconstituer tous les termes non-nuls, en vertu de la proposition suivante :

Proposition 2.3. *Pour tous $\xi \neq 0$ et $g \in GL_2(\mathbb{A})$, on a :*

$$A\left(\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = a_\xi(g)$$

Démonstration. On calcule, avec un changement de variable $x = \xi z$:

$$\begin{aligned} A\left(\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) &= \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)\Psi(-x)dx \\ &= \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F\left(\begin{pmatrix} \xi & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)\Psi(-x)dx \\ &= \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F\left(\begin{pmatrix} \xi & \xi z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)\Psi(-\xi z)dz \\ &= \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F\left(\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)\Psi(-\xi z)dz \\ &= \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F\left(\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)\Psi(-\xi z)dz \\ &= a_\xi(g) \end{aligned}$$

□

2.2.4. Presque-holomorphie sur le demi-plan de Poincaré. Il est temps de discuter de la notion de presque-holomorphie pour une fonction $\mathbb{H} \backsimeq \mathbb{H}_\infty \to \mathbb{C}$. Cette théorie est présentée dans le livre [**56**] de Shimura ; on se contentera ici d'énoncer les résultats qui nous seront utiles, en donnant des références dans ce livre.

Plus précisément, la section 13 de [**56**] discute de la notion de presque-holomorphie en général sur une variété complexe, mais la sous-section 13.12, qui discute un cas particulier est particulièrement intéressante, puisque d'une part elle éclaire grandement l'exposé un peu aride qui précède, et d'autre part elle traite justement le cas qui nous intéresse ici !

On va donc considérer sur $\mathbb{H}_\infty$ la fonction $\mathcal{C}^\infty$ suivante : $R = (4\pi y)^{-1}$. Elle définit un champ de vecteurs $\partial/\partial R$, et donc une dérivation des fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

On appelle fonction presque-holomorphe de degré $e \geq 0$ toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ annulée par cette dérivation à la puissance $e+1$. Une fonction est dite presque-holomorphe lorsqu'elle est presque-holomorphe en un degré (que l'on ne fixe pas).

Voici un résultat qui explique le nom “presque-holomorphe” :

Proposition 2.4. *Une fonction presque-holomorphe en degré e s'exprime comme polynôme en R de degré au plus e, à coefficients holomorphes.*

Remarque 2.4. *En particulier, cela signifie qu'on peut lui associer un développement en série formelle de la forme :*

$$\sum_{n\geq 0, 0\leq r<e} a_{n,r} R^r q^n$$

qui généralise le développement habituel $\sum_n a_n q^n$ des séries de Fourier.

2.2.5. Presque-holomorphie des formes modulaires. Les formes modulaires ne sont pas définies uniquement sur $\mathbb{H}_\infty$, néanmoins, leurs propriétés d'invariance font que l'on va pouvoir se ramener à cette situation. Cela se fera évidemment par un “oubli” de la partie non-archimédienne, mais c'est assez naturel dans la mesure où l'on cherche à définir un comportement de régularité analytique.

De façon similaire au cadre classique, néanmoins, on définit la régularité via deux hypothèses : d'une part une condition de régularité sur la plus grande partie du domaine, où la fonction est bien définie, et d'autre part une condition de développement agréable sur les “pointes”, où l'on fait une hypothèse de prolongement de la fonction.

On dira donc qu'une forme modulaire F de poids k, niveau N et caractères ψ_1 et ψ_2 est presque-holomorphe en degré e à coefficients dans A, lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

– pour toute matrice $g_f \in B(N)$, l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{H}_\infty & \to & \mathbb{C} \\ g_\infty & \mapsto & (\det g_\infty)^{\frac{-k}{2}} F(g_\infty \times g_f) \end{array}$$

  est presque-holomorphe en degré e,

– pour toute matrice $g_f \in B(N)$, il existe une famille $a_{\xi,r}(g_f)$ de A telle qu'on a un développement :

$$F\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times g_f\right) = y^{\frac{k}{2}} \sum_{\xi\geq 0, 0\leq r\leq e} a_{\xi,r}(g_f) q^\xi R^r$$

où $q = \exp(2i\pi(x+iy))$ et $R = (4\pi y)^{-1}$, et ξ est à dénominateur borné.

Comme dans le cadre classique, on souhaite mettre en avant un développement particulier : on choisit d'appeler "le" développement de Fourier de F le développement associé au choix $g_f = 1$. Ce choix ne prête pas à conséquence ; en effet, si on sait dans quel espace se trouve la forme F, on peut la retrouver à partir de ce développement, car

$$\begin{aligned} GL_2(\mathbb{A}) &= GL_2(\mathbb{Q}).(GL_2^+(\mathbb{R}) \times B(N)) \\ &= GL_2(\mathbb{Q}).(\mathbb{H}_\infty Z^+(\mathbb{R}) SO_2(\mathbb{R}) \times B(N)) \end{aligned}$$

Remarque 2.5. *En général, on ne parlera de développement de Fourier que pour des formes dont on saura a priori dans quel espace elles vivent.*

En termes du développement automorphe, l'hypothèse de presque-holomorphie se traduit ainsi :

$$a_\xi\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f\right) = y^{\frac{k}{2}} \sum_r a_{\xi,r} R^r q^\xi$$

si $\xi \geq 0$ (et 0 sinon).

Définition 2.1. *On notera $\mathcal{S}_k^e(N, \psi_1, \psi_2, A)$ et $\mathcal{M}_k^e(N, \psi_1, \psi_2, A)$ les espaces de formes modulaires de poids k, niveau N, caractères ψ_1 et ψ_2 à coefficients dans A presque-holomorphes en degré e, respectivement paraboliques ou non.*

Remarque 2.6. *On voit alors que les notions de presque-holomorphie dans le cadre classique et ce cadre adélique se recoupent bien : les correspondances que l'on a discutées sont entre espaces de formes modulaires presque-holomorphes de même degré.*

2.2.6. Dimension des espaces de formes modulaires. Une des propriétés importantes des espaces de formes modulaires que l'on souhaitait conserver en affaiblissant les hypothèses de régularité par rapport au cadre classique holomorphe, est le fait que les espaces de formes modulaires sont de dimension finie.

Cette propriété est en partie conservée :

Proposition 2.5. *$\mathcal{M}_k^e(N, \psi_1, \psi_2, A)$ est de dimension finie, pour $A = \mathcal{O}$, $\overline{\mathbb{Q}}$ ou $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Le lemme 14.3 de [**56**] traite le cas $A = \mathbb{C}$.

La proposition de [**56**] montre qu'une famille libre sur $\overline{\mathbb{Q}}$ est libre sur $\mathbb{C}$, ce qui traite le cas $A = \overline{\mathbb{Q}}$.

Le cas $\mathcal{O}$ se déduit du cas précédent. □

Remarque 2.7. *Mizumoto a étudié la dimension des espaces de formes presque-holomorphes, et prouve dans [**32**] une estimation linéaire de leur croissance avec le degré ; c'est la raison pour laquelle on travaillera toujours – parfois implicitement, à degré borné.*

2.3. Séries d'Eisenstein

Le but de cette section est de construire des séries d'Eisenstein dans les espaces modulaires présentés précédemment, avec un calcul précis de leurs coefficients de Fourier. On va les construire sous forme de deux distributions sur $\mathbb{A}_f^2$: $E_{k,s}^{\mathrm{anal}}$ et $E_{k,s}^{\mathrm{alg}}$.

2.3.1. Distributions d'Eisenstein analytiques. On définit la distribution d'Eisenstein analytique de poids $k \geq 2$ et type $s \in \mathbb{C}$, par :

$$E_{k,s}^{\mathrm{anal}}(\varphi)(g) = |\det g|_{\mathbb{A}}^{-\frac{k+2s}{2}} \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Q}) \backslash GL_2(\mathbb{Q})} \zeta_{k,s}(\varphi)(\gamma g_f) j_1(\gamma g_\infty, i)^k |j_1(\gamma g_\infty, i)|^{2s}$$

où $g \in GL_2(\mathbb{A})$, φ est une fonction localement constante à support compact sur $\mathbb{A}_f^2$, et :

$$\zeta_{k,s}(\varphi)(g_f) = \sum_{m \in \mathbb{Q}^*} \varphi\left(g_f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) x^{-k}|x|^{-2s}$$

Il n'est pas clair que ces sommes soient bien définies ; on va donc vérifier qu'elle le sont.

Discutons d'abord de $\zeta_{k,s}(\varphi)$: la somme qui la définit va converger si $k + 2\Re(s) \gg 0$, car comme φ est à support compact, les dénominateurs sont bornés, et on a donc une fonction ζ relativement classique.

Pour $E_{k,s}^{\mathrm{anal}}(\varphi)$, on peut supposer que $k + 2\Re(s) \gg 0$, pour que chaque terme soit bien défini. Il faut vérifier que chacun d'entre eux ne dépend que de la classe à gauche de $\gamma \in GL_2(\mathbb{Q})$.

Pour cela, il faut discuter de l'action de $B(\mathbb{Q})$ à gauche sur chaque terme de la somme. Il est plus simple d'utiliser la décomposition des matrices boréliennes en produit des matrices diagonales et des translations : $B = DT$.

Le cas des translations est le plus simple à traiter : elles n'agissent ni sur la partie archimédienne $j_1(\gamma g_\infty, i)^k |j_1(\gamma g_\infty, i)|^{2s}$, ni sur la partie non-archimédienne $\zeta_{k,s}(\varphi)(\gamma g_f)$; en effet :

- si t est une translation : $j_1(t\gamma g_\infty, i) = j_1(\gamma g_\infty, i) j_1(t, \gamma g_\infty i)$, où $j_1(t, \gamma g_\infty i) = 1$;
- si t est une translation : $t\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$;

Voyons maintenant le cas des matrices diagonales ; on se fixe h une telle matrice :

- on a $j_1(h\gamma g_\infty, i) = a_h j_1(\gamma g_\infty, i)$, car $j_1(h, \gamma g_\infty i) = a_h$;
- et $\zeta_{k,s}(\varphi)(h\gamma g_f) = a_h^{-k}|a_h|^{-2s}\zeta_{k,s}(\varphi)(\gamma g_f)$, par changement de variable dans la sommation ;

On voit donc que les parties archimédienne et non-archimédienne se compensent, et le produit ne dépend pas de h.

Maintenant que l'on sait que la somme est définie, il reste à vérifier qu'elle converge !

2.3.2. Convergence et prolongement analytique. Il n'est pas facile de prouver la convergence d'une série portant sur des classes d'équivalences de matrices ; on va donc essayer de se ramener à des séries plus classiques, auxquelles on pourra appliquer des résultats connus.

Réécrivons la série d'Eisenstein précédente différemment :

$$\begin{aligned} E_{k,s}^{\mathrm{anal}}(\varphi)(g) &= |\det g|_{\mathbb{A}}^{-\frac{k+2s}{2}} \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Q}) \backslash GL_2(\mathbb{Q})} \zeta_{k,s}(\varphi)(\gamma g_f) j_1(\gamma g_\infty, i)^k |j_1(\gamma g_\infty, i)|^{2s} \\ &= |\det g|_{\mathbb{A}}^{-\frac{k+2s}{2}} \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Q}) \backslash GL_2(\mathbb{Q})} \sum_{x \in \mathbb{Q}^*} \varphi\left((\gamma g_f)^{-1}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &\quad x^{-k}|x|^{-2s} j_1(\gamma g_\infty, i)^k |j_1(\gamma g_\infty, i)|^{2s} \end{aligned}$$

Dans cette expression, on devine que la double somme porte sur une fonction de γx^{-1} ; explicitement :

– c'est très visible dans la partie non-archimédienne ;
– dans la partie archimédienne, commme $x^{-1} = j_1(x^{-1}, \gamma g_\infty i)$, on peut utiliser les propriétés du facteur j_1 pour faire apparaître la variable de sommation voulue : $x^{-1} j_1(\gamma g_\infty, i) = j_1(\gamma x^{-1} g_\infty, i)$.

On va maintenant s'attacher à réécrire le domaine de sommation : on va cette fois décomposer les boréliens sous la forme : $B = ZD_2T$; puis identifier $\mathbb{Q}^*$ à Z, de sorte que :

$$B(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}^* \simeq D_2T(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{Q})$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} E^{\text{anal}}_{k,s}(\varphi)(g) &= |\det g|_{\mathbb{A}}^{-\frac{k+2s}{2}} \\ &\sum_{\gamma \in D_2T(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{Q})} \varphi\left(g_f^{-1}\gamma^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) j_1(\gamma g_\infty, i)^k |j_1(\gamma g_\infty, i)|^{2s} \end{aligned}$$

Ce sous-groupe D_2T est justement celui qui fixe le premier vecteur de base, dans l'évaluation :

$$\begin{array}{rcl} GL_2(\mathbb{Q}) & \to & \mathbb{Q}^2 - \{0\} \\ \gamma & \mapsto & \gamma^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

donc la série d'Eisenstein est en fait une sommation sur des couples non-nuls de rationnels ; donnons une paramétrisation explicite :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Q}^2 - \{0\} & \simeq & D_2T(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{Q}) \\ (m_1, m_2) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \begin{pmatrix} 1/m_1 & 0 \\ -m_2 & m_1 \end{pmatrix} & m_1 \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/m_2 \\ -m_2 & m_1 \end{pmatrix} & m_1 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

en ces termes, on a :

– $\gamma^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$;
– $j_1(\gamma g_\infty, i) = j_1(\gamma, g_\infty i) j_1(g_\infty, i)$, où $j_1(g_\infty, i)$ est une constante, et où le terme $j_1(\gamma, g_\infty i)$ s'écrit $(m_1 - m_2 g_\infty i)^{-1}$;

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} E^{\text{anal}}_{k,s}(\varphi)(g) &= |\det g|_{\mathbb{A}}^{-\frac{k+2s}{2}} j_1(g_\infty, i)^k |j_1(g_\infty, i)|^{2s} \sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Q}^2-\{0\}} \\ &\varphi\left(g_f^{-1}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}\right) (m_1 - m_2 g_\infty i)^{-k} |m_1 - m_2 g_\infty i|^{-2s} \end{aligned}$$

La convergence de cette nouvelle somme, dans laquelle la présence de φ assure que la somme se fait à dénominateurs bornés, est absolue sur le domaine $k + 2\Re(s) > 2$, et donne une fonction C^∞ en g_∞.

Par ailleurs, d'après le travail [**52**] de Shimura, on sait que ce type de série se prolonge de façon méromorphe en s ; ce qui permet de définir $E^{\text{anal}}_{k,s}(\varphi)$, même pour $s = -0, -1, \ldots, -(k-1)$, toujours comme fonction C^∞ de $g_\infty i$.

Ce résultat de convergence est valable pour beaucoup d'autres points s, mais on verra que pour obtenir des séries d'Eisenstein presque-holomorphes, il faut se limiter aux s cités précédemment. Ceci sera discuté quand on disposera d'un développement de Fourier explicite pour cette série.

Avant de calculer ce développement, on vérifie qu'il s'agit bien d'une forme modulaire.

2.3.3. Modularité. Le but est de prouver que $E_{k,s}^{\mathrm{anal}}$ est modulaire de poids k, et de niveau N pour un N assez grand.

Cette discussion est plus aisée à partir de la première définition, en effet :

- la $GL_2(\mathbb{Q})$-invariance est immédiate, grâce à la sommation d'une part, et le fait que la norme adélique d'un rationnel est 1 d'autre part ;
- l'invariance par homothétie réelle est obtenue car le déterminant devant la somme compense la variation des facteurs en j_1 ;
- le comportement via les rotations, est obtenu de la même façon : le facteur en j_1^k donne le facteur $\exp(-ik\theta)$ attendu, et les facteurs déterminant et en $|j_1|^{2s}$ sont invariants ;
- le comportement via-à-vis des matrices de $B(N)$ est obtenu en étudiant uniquement la fonction $\zeta_{k,s}(\varphi)$, puisque le déterminant d'une matrice de $B(N)$ est dans $\hat{\mathbb{Z}}^*$, donc de norme 1 ;

On se fixe $g_f \in GL_2(\mathbb{A}_f)$ et $u \in U(N)$.

On veut comparer :

$$\varphi\left((g_f u)^{-1}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad = \quad \varphi\left(u^{-1}g_f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

et :

$$\varphi\left(g_f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Or, si N est assez grand, comme φ est localement constante à support compact, u^{-1} ne la modifiera pas, si N est assez grand.

Maintenant que l'on sait que $E_{k,s}^{\mathrm{anal}}(\varphi)$ est une forme modulaire, on peut calculer son développement de Fourier.

2.3.4. Développement automorphe et presque-holomorphie. Pour obtenir des résultats de presque-holomorphie sur les distributions d'Eisenstein analytiques, on va calculer explicitement leur développement automorphe.

Proposition 2.6. *On dispose de l'expression intégrale suivante de la fonction de Whittaker W de $E_{k,s}^{\mathrm{anal}}(\varphi)$:*

$$\begin{aligned} W(g) \quad = \quad & |\det g|_{\mathbb{A}}^{-\frac{k+2s}{2}} j_1(g_\infty, i)^k |j_1(g_\infty, i)|^{2s} \\ & \sum_{m\in\mathbb{Q}^*}\int_{\mathbb{A}_f}\varphi\left(g_f^{-1}\begin{pmatrix} z_f \\ m \end{pmatrix}\right)\Psi_f\left(\frac{-z_f}{m}\right)dz_f \\ & \int_{\mathbb{R}}(z_\infty - mg_\infty i)^{-k}|z_\infty - mg_\infty i|^{-2s}\exp\left(2i\pi\frac{z_\infty}{m}\right)dz_\infty \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On part de la définition de la fonction de Whittaker, dans laquelle on développe l'expression de $E_{k,s}^{\mathrm{anal}}(\varphi)$ comme somme sur des rationnels :

$$\begin{aligned}
W(g) &= \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} E_{k,s}^{\mathrm{anal}}(\varphi)\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)\Psi(-t)dt \\
&= |\det g|_{\mathbb{A}}^{-\frac{k+2s}{2}} j_1(g_\infty,i)^k |j_1(g_\infty,i)|^{2s} \\
&\quad \sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Q}^2-\{0\}} \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \varphi\left(g_f^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -t_f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}\right) \\
&\quad \left(m_1 - m_2\begin{pmatrix} 1 & t_\infty \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_\infty i\right)^{-k}\left|m_1 - m_2\begin{pmatrix} 1 & t_\infty \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_\infty i\right|^{-2s}\Psi(-t)dt \\
&= |\det g|_{\mathbb{A}}^{-\frac{k+2s}{2}} j_1(g_\infty,i)^k |j_1(g_\infty,i)|^{2s} \\
&\quad \sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Q}^2-\{0\}} \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \varphi\left(g_f^{-1}\begin{pmatrix} m_1 - m_2 t_f \\ m_2 \end{pmatrix}\right) \\
&\quad (m_1 - m_2 t_\infty - m_2 g_\infty i)^{-k}|m_1 - m_2 t_\infty - m_2 g_\infty i|^{-2s}\Psi(-t)dt
\end{aligned}$$

où, si $m_2 = 0$, on n'a pas de dépendance en t autre que l'exponentielle dans l'intégrale, donc une contribution nulle. On peut donc développer la somme sur $(m_1, m_2) \in \mathbb{Q} - \{0\}$ comme une somme sur $m_2 \in \mathbb{Q}^*$ et une somme sur $m_1 \in \mathbb{Q}$. On souhaiterait utiliser cette dernière sommation pour obtenir une intégrale sur $\mathbb{A}$. Pour cela, il faut faire un changement de variable pour faire disparaître la dépendance en m_1 dans l'intégrale ; on remarque que ce résultat est obtenu en faisant le changement $z = m_1 - m_2 t$ (pour lequel $dz = dt$, car il s'agit d'un changement de variable rationnel) :

$$\begin{aligned}
W(g) &= |\det g|_{\mathbb{A}}^{-\frac{k+2s}{2}} j_1(g_\infty,i)^k |j_1(g_\infty,i)|^{2s} \\
&\quad \sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Q}^2-\{0\}} \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \varphi\left(g_f^{-1}\begin{pmatrix} m_1 - m_2 t_f \\ m_2 \end{pmatrix}\right) \\
&\quad (m_1 - m_2 t_\infty - m_2 g_\infty i)^{-k}|m_1 - m_2 t_\infty - m_2 g_\infty i|^{-2s}\Psi(-t)dt \\
&= |\det g|_{\mathbb{A}}^{-\frac{k+2s}{2}} j_1(g_\infty,i)^k |j_1(g_\infty,i)|^{2s} \\
&\quad \sum_{m_2\in\mathbb{Q}^*}\sum_{m_1\in\mathbb{Q}} \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \varphi\left(g_f^{-1}\begin{pmatrix} z_f \\ m_2 \end{pmatrix}\right) \\
&\quad (z_\infty - m_2 g_\infty i)^{-k}|z_\infty - m_2 g_\infty i|^{-2s}\Psi\left(\frac{z - m_1}{m_2}\right)dz
\end{aligned}$$

dans cette dernière expression, comme Ψ est triviale sur $\mathbb{Q}$, on n'a pas de dépendance en m_1, donc on obtient une intégrale sur $\mathbb{A}$; par ailleurs, l'intégrande se factorise en partie archimédienne et partie non-archimédienne, ce qui donne l'expression de la proposition. □

A partir de cette première expression générale de la fonction de Whittaker, on va pouvoir en établir une seconde, qui permettra d'établir aisément la presque-holomorphie de $E_{k,s}^{\mathrm{anal}}(\varphi)$; pour cela, on aura besoin du lemme suivant, qui donne une expression d'une intégrale archimédienne :

LEMME 2.1. *Si $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}} (\tau + x)^{-k} |\tau + x|^{-2s} \exp(-2i\pi x) dx = \frac{(-2i\pi)^k \pi^s}{\Gamma(k+s)} \omega(4\pi y; k+s, s) y^{-s} \exp(2i\pi\tau)$$

PROPOSITION 2.7. *On dispose de l'expression suivante de la fonction de Whittaker, où $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$:*

$$\begin{aligned} W\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times g_f\right) &= y^{\frac{k}{2}} \exp(2i\pi\tau) \frac{(2i\pi)^k \pi^s}{\Gamma(k+s)} \omega(4\pi y; k+s, s) \\ & \sum_{m \in \mathbb{Q}^*} m^{1-k} |m|^{-2s} \\ & \int_{\mathbb{A}_f} \varphi\left(g_f^{-1} \begin{pmatrix} z_f \\ m \end{pmatrix}\right) \Psi_f\left(\frac{-z_f}{m}\right) dz_f \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On part de l'expression précédente, dans laquelle on ramène l'intégrale archimédienne à celle donnée par le lemme :

$$\begin{aligned} W\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times g_f\right) &= y^{-\frac{k+2s}{2}} y^{k+s} \sum_{m \in \mathbb{Q}^*} \\ & \int_{\mathbb{A}_f} \varphi\left(g_f^{-1} \begin{pmatrix} z_f \\ m \end{pmatrix}\right) \Psi_f\left(\frac{-z_f}{m}\right) dz_f \\ & \int_{\mathbb{R}} (z_\infty - m\tau)^{-k} |z_\infty - m\tau|^{-2s} \exp\left(2i\pi \frac{z_\infty}{m}\right) dz_\infty \\ &= y^{-\frac{k+2s}{2}} y^{k+s} \sum_{m \in \mathbb{Q}^*} \\ & \int_{\mathbb{A}_f} \varphi\left(g_f^{-1} \begin{pmatrix} z_f \\ m \end{pmatrix}\right) \Psi_f\left(\frac{-z_f}{m}\right) dz_f \\ & \int_{\mathbb{R}} (mx - m\tau)^{-k} |mx - m\tau|^{-2s} \exp(2i\pi x) m dx \end{aligned}$$

où on a posé : $z_\infty = mx$ dans l'intégrale archimédienne, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} &= y^{-\frac{k+2s}{2}} y^{k+s} \sum_{m \in \mathbb{Q}^*} m^{1-k} |m|^{-2s} \\ & \int_{\mathbb{A}_f} \varphi\left(g_f^{-1} \begin{pmatrix} z_f \\ m \end{pmatrix}\right) \Psi_f\left(\frac{-z_f}{m}\right) dz_f \\ & \int_{\mathbb{R}} (x - \tau)^{-k} |x - \tau|^{-2s} \exp(2i\pi x) dx \\ &= y^{-\frac{k+2s}{2}} y^{k+s} \sum_{m \in \mathbb{Q}^*} m^{1-k} |m|^{-2s} \\ & \int_{\mathbb{A}_f} \varphi\left(g_f^{-1} \begin{pmatrix} z_f \\ m \end{pmatrix}\right) \Psi_f\left(\frac{-z_f}{m}\right) dz_f \\ & \int_{\mathbb{R}} (-u - \tau)^{-k} |-u - \tau|^{-2s} \exp(-2i\pi u) du \end{aligned}$$

où on pose $x = -u$ pour faire apparaître plus clairement l'intégrale du lemme :

$$\begin{aligned} &= y^{-\frac{k+2s}{2}} y^{k+s} (-1)^k \sum_{m \in \mathbb{Q}^*} m^{1-k} |m|^{-2s} \\ &\quad \int_{\mathbb{A}_f} \varphi\left(g_f^{-1}\begin{pmatrix} z_f \\ m \end{pmatrix}\right) \Psi_f\left(\frac{-z_f}{m}\right) dz_f \\ &\quad \int_{\mathbb{R}} (u+\tau)^{-k} |u+\tau|^{-2s} \exp(-2i\pi u) du \\ &= y^{-\frac{k+2s}{2}} y^{k+s} (-1)^k \sum_{m \in \mathbb{Q}^*} m^{1-k} |m|^{-2s} \\ &\quad \int_{\mathbb{A}_f} \varphi\left(g_f^{-1}\begin{pmatrix} z_f \\ m \end{pmatrix}\right) \Psi_f\left(\frac{-z_f}{m}\right) dz_f \\ &\quad \frac{(-2i\pi)^k \pi^s}{\Gamma(k+s)} \omega(4\pi y; k+s, s) y^{-s} \exp(2i\pi\tau) \end{aligned}$$

$\square$

Corollaire 2.1. *Si $0 \leq r < k$, on a :*

$$E^{\text{anal}}_{k,-r}(\varphi) \in \mathcal{M}^r_k(N, \psi, 1)$$

Démonstration. En effet, on sait que $\omega(4\pi y; k+s, s)$ s'écrit comme polynôme en $R = 1/4\pi y$ pour le choix $s = -r$, avec $0 \leq r < k$ (d'après la proposition 1.2). $\square$

Remarque 2.8. *Pour les choix $s = 0$ et $s = 1 - k$, $\omega(4\pi y; k+s, s) = 1$; dans ces deux cas, la série d'Eisenstein est donc holomorphe.*

2.3.5. Version algébrique. La définition précédente met l'accent sur le contrôle analytique des distributions d'Eisenstein (presque-holomorphie et degré de presque-holomorphie, modularité) ; ceci aux dépens du contrôle des coefficients de Fourier : on ne sait pas vraiment dans quel anneau ils vivent, et on serait bien en peine d'établir des relations de congruence entre eux.

On souhaiterait pouvoir définir des distributions d'Eisenstein en contrôlant parfaitement la structure rationnelle, de la façon suivante :

$$E^{\text{alg}}_{k,s}(\varphi)\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times g_f\right) = y^{\frac{k}{2}} \sum_{n \geq 0} \omega(4\pi ny; k+s, s) \sigma^{(n)}_{k,s}(\varphi)(g_f) q^n$$

avec :

$$\sigma^{(n)}_{k,s}(\varphi)(g_f) = \sum_{m \in \mathbb{Q}^*} \varphi\left(g_f^{-1}\begin{pmatrix} m \\ \frac{n}{m} \end{pmatrix}\right) m^{-s} \left(\frac{n}{m}\right)^{k+s-1}$$

où φ est une fonction localement constante à support compact sur $\mathbb{A}^2_f$, $k \geq 2$ et $s \in \mathbb{Z}$.

Pour vérifier qu'une telle définition a un sens, on va étudier plus en détails les coefficients automorphes de la distribution d'Eisenstein analytique $E^{\text{anal}}_{k,s}(\varphi)$:

$$\begin{aligned} a_n(\varphi)\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= (ny)^{\frac{k}{2}} \exp(2i\pi n\tau) \omega(4\pi ny; k+s, s) \frac{(2i\pi)^k \pi^s}{\Gamma(k+s)} \\ &\quad \sum_{m \in \mathbb{Q}^*} m^{1-k} |m|^{-2s} \int_{\mathbb{A}_f} \varphi\left(g_f^{-1}\begin{pmatrix} \frac{z}{n} \\ m \end{pmatrix}\right) \Psi_f\left(\frac{-z}{m}\right) dz \end{aligned}$$

on va maintenant y effectuer le changement de variable : $t = z/n$, pour obtenir :

$$a_n(\varphi)\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (ny)^{\frac{k}{2}} \exp(2i\pi n\tau)\omega(4\pi ny; k+s, s)\frac{(2i\pi)^k\pi^s}{\Gamma(k+s)} \sum_{m\in\mathbb{Q}^*} m^{1-k}|m|^{-2s}\frac{1}{n}\int_{\mathbb{A}_f}\varphi\left(g_f^{-1}\begin{pmatrix} t \\ m \end{pmatrix}\right)\Psi_f\left(\frac{-nt}{m}\right)dt$$

L'intégrale apparaît alors comme l'évaluation au point $(n/m, m)$ de la transformée de Fourier de $\varphi\circ g_f^{-1}$ en la première variable ; notons cette transformation : $\mathcal{F}_1$, de sorte que :

$$a_n(\varphi)\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (ny)^{\frac{k}{2}} \exp(2i\pi n\tau)\omega(4\pi ny; k+s, s)\frac{(2i\pi)^k\pi^s}{\Gamma(k+s)} \sum_{m\in\mathbb{Q}^*} m^{1-k}|m|^{-2s}\frac{1}{n}\mathcal{F}_1(\varphi\circ g_f^{-1})\begin{pmatrix} \frac{n}{m} \\ m \end{pmatrix}$$

Ce calcul fonde la définition des distributions d'Eisenstein algébriques $E_{k,s}^{\mathrm{alg}}$, et donne le moyen de calculer les unes en fonction des autres :

Proposition 2.8.

$$\frac{(2i\pi)^k\pi^s}{\Gamma(k+s)}E_{k,s}^{\mathrm{anal}}(\varphi) = E_{k,s}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{F}_1\varphi)$$

2.4. Tours modulaires

2.4.1. Définition de $\mathcal{M}_S$. On se fixe un entier N et S un ensemble fini de places (finies), tels que le support de N et S sont disjoints. On fixe de plus un poids $k \geq 2$ et des caractères de Dirichlet ψ_1 et ψ_2 définis modulo N.

On définit une S-tour de la façon suivante :

- l'étage $\underline{\nu}$ est l'espace modulaire $\mathcal{M}_k(N_S M_S^{\underline{\nu}}, \psi_1, \psi_2)$ (à l'avenir, on ne précisera plus ni le poids, ni les caractères, qui en général seront explicites dans le contexte) ;
- les ascenseurs ascendants sont tout simplement donnés par l'inclusion naturelle des formes d'un niveau dans les formes de niveau multiple ;
- l'ascenseur descendant du couple $\underline{\nu} \leq \underline{\mu}$ est l'opérateur $U_S^{\underline{\mu}-\underline{\nu}}$; on a vu que cet opérateur permettait de descendre le niveau de cette façon.

On notera cette tour $\mathcal{M}_S$, et elle servira de base à toutes les constructions. C'est une tour dont tous les étages sont de dimension finie, mais qui n'est pas de dimension finie

2.4.2. Variation horizontale. On a, pour tout $\underline{\nu} \in \mathbb{N}^S$, une inclusion naturelle :

$$\mathcal{M}(N_S M_S^{\underline{\nu}}) \subset \mathcal{M}\left(N_\Sigma M_\Sigma^{(\underline{\nu},0)}\right)$$

qui est bien évidemment compatible avec les ascenseurs, puisque :

- les extensions de niveau sont trivialement compatibles entre elles ;
- par définition $U_\Sigma^{(\underline{\mu},0)-(\underline{\nu},0)} = U_S^{\underline{\mu}-\underline{\nu}}$.

On a donc une extension naturelle $\mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_\Sigma$.

Quand on aura construit des familles d'objets, disons o_S dans chaque tour, *étudier la variation horizontale* de cette famille d'objets, consistera à comparer o_Σ à l'image de o_S par cette extension.

CHAPITRE III

Outils sur les formes modulaires

3.1. Opérateurs de base

3.1.1. Action des matrices rationnelles. On souhaite maintenant définir une action à droite des matrice de $GL_2^+(\mathbb{Q})$, qui prolongerait l'action classique. On va voir que la situation est un peu plus compliquée ; on va donc commencer par montrer comment se passe la comparaison, ce qui rendra la définition plus naturelle.

Soit f une forme classique, et $f' = f|_k\gamma$ son image par l'action de $\gamma \in GL_2^+(\mathbb{Q})$. On va comparer les fonctions F_1 et F_1' associées, définies sur $GL_2^+(\mathbb{R})$, que l'on a rencontrées lorsque l'on a discuté de la comparaison entre formes classiques et formes adéliques. On se fixe $g \in GL_2^+(\mathbb{R})$, et on calcule :

$$\begin{aligned} F_1'(g) &= f'|_k g(i) \\ &= f|_k\gamma|_k g(i) \\ &= f|_k\gamma g(i) \\ &= F_1(\gamma g) \end{aligned}$$

On voit donc que l'action à droite sur les formes modulaires va apparaître comme action à gauche sur l'argument de la forme (les fonctions ont une action dualisante sur les actions de groupe). Cependant, il n'est pas question de définir simplement $F|\gamma(g) = F(\gamma g)$ pour γ à coefficients rationnels, car la forme F est $GL_2(\mathbb{Q})$-invariante à gauche !

On souhaite donc plutôt définir l'action de la façon suivante : si F est de poids k et de niveau N, $\gamma \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ et $g \in GL_2(\mathbb{A})$, on écrit g sous la forme $g_{\mathbb{Q}}.(g_{\mathbb{R}} \times g_N)$, via le théorème d'approximation forte en niveau N. On définit alors :

$$F|\gamma(g) = F(g_{\mathbb{Q}}.(\gamma g_{\mathbb{R}} \times g_N))$$

Cette définition est néanmoins problématique : autant dans le cadre classique, définir l'action est très simple et évident, et c'est le fait que l'on obtient une forme modulaire qui est à prouver et demande des hypothèses sur γ, autant ici, la modularité du résultat est très claire, mais le fait que la définition soit cohérente est loin de l'être : l'écriture de g n'est pas unique !

Avant de donner des résultats explicites sur la définition de cette action, on va établir quelques lemmes, qui seront utiles pour les prouver.

LEMME 3.1. *Si $u \in U(N)$ et $b \in B(N)$, alors $ubU(N) = bU(N)$.*

DÉMONSTRATION. On écrit : $u = I + Nm + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec I la matrice identité, $x \in \hat{\mathbb{Z}}$ et m une matrice carrée à coefficients dans $\hat{\mathbb{Z}}$. On calcule ensuite :

$$ub = b\left(I + Nb^{-1}mb + b^{-1}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} b\right)$$

Où on veut prouver : $\left(I + Nb^{-1}mb + b^{-1}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} b\right) \in U(N)$. Pour cela, il suffit de vérifier :

$$b^{-1}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} b \in \begin{pmatrix} N\hat{\mathbb{Z}} & \hat{\mathbb{Z}} \\ N\hat{\mathbb{Z}} & N\hat{\mathbb{Z}} \end{pmatrix}$$

or :

$$b^{-1}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} b = \frac{1}{\det g}\begin{pmatrix} c_g d_g x & d_g^2 x \\ -c_g^2 x & -c_g d_g x \end{pmatrix}$$

où $\det g \in \hat{\mathbb{Z}}^*$, $a_g, b_g, d_g \in \hat{\mathbb{Z}}$ et $c_g \in N\hat{\mathbb{Z}}$; donc on a écrit ub sous la forme bu' avec $u' \in U(N)$, ce qui prouve le lemme. □

Corollaire 3.1. *Si $u \in U(MN)$ et $b \in B(N)$, alors $ubU(N) = bU(N)$.*

Démonstration. $U(MN) \subset U(N)$, donc il suffit d'appliquer le lemme précédent. □

Proposition 3.1. *Si $F \in \mathcal{M}_k(N)$, et $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ est telle que :*
– $\alpha B(MN) \subset B(N)\alpha$;
– si $\alpha h = h'\alpha$ avec $h \in B(MN)$ et $h' \in B(N)$, alors $h'^{-1}h \in U(N)$;
alors $F|\alpha$ est bien définie, et $F|\alpha \in \mathcal{M}_k(MN)$.

Démonstration. C'est la définition qui est le plus problématique ; en effet on a vu en 1.3, que la décomposition via le théorème d'approximation forte n'était pas unique. Il faut donc vérifier que deux décompositions différentes d'une matrice g donnent la même valeur $F|\alpha(g)$. On avait justement discuté précisément du défaut d'unicité de la décomposition : on se donne $h \in \Gamma_0(MN)$, on décompose via le théorème d'approximation forte en niveau MN (on reprend les notations de la discussion), et on veut prouver :

$$F(g_{\mathbb{Q}}.(\alpha g_{\mathbb{R}} \times g_{MN})) = F(g_{\mathbb{Q}} h^{-1}.(\alpha h g_{\mathbb{R}} \times h g_{MN}))$$

Pour cela, on va utiliser la $GL_2(\mathbb{Q})$-invariance à gauche, et la $U(N)$-invariance à droite de F, et écrire αh comme $h'\alpha$, comme le permettent les hypothèses :

$$\begin{aligned} F(g_{\mathbb{Q}} h^{-1}.(\alpha h g_{\mathbb{R}} \times h g_{MN})) &= F(GL_2(\mathbb{Q}).(h'\alpha g_{\mathbb{R}} \times h g_{MN} U(N))) \\ &= F(GL_2(\mathbb{Q}).(\alpha g_{\mathbb{R}} \times h'^{-1} h g_{MN} U(N))) \end{aligned}$$

dans cette dernière expression, on sait par hypothèse que $h'^{-1}h \in U(N)$, donc : $h'^{-1}hg_N U(N) = g_N U(N)$.

Finalement :

$$F(g_{\mathbb{Q}} h^{-1}.(\alpha h g_{\mathbb{R}} \times h g_N)) = F(GL_2(\mathbb{Q}).(\alpha g_{\mathbb{R}} \times g_N U(N))) = F(g_{\mathbb{Q}}.(\alpha g_{\mathbb{R}} \times g_N))$$

ce qui montre que la définition est valide.

Voyons maintenant que $F|\alpha$ appartient bien à l'espace attendu :
– la $GL_2(\mathbb{Q})$-invariance à gauche est héritée de F ;
– le comportement à droite via les matrices de $Z(\mathbb{R})SO_2(\mathbb{R})$ est le même que F ;
– l'invariance par les matrices de $U(MN)$ provient de celle de F.

Pour finir cette preuve, il est important de souligner pourquoi $F|\alpha$ n'est pas $U(N)$-invariante à droite comme F, mais est $U(MN)$-invariante à droite comme F, ce qui peut sembler paradoxal à première vue : la définition de $F|\alpha$ fonctionne en appliquant F à une décomposition en niveau MN, que la multiplication à droite par un élément de $U(MN)$ ne perturbe pas ; si par contre on multiplie à droite par un élément de $U(N)$, pour se ramener à un calcul qui fait apparaître F, il faut faire un calcul qui amène la décomposition au niveau MN ; ce qui commute mal avec l'action de α. $\square$

PROPOSITION 3.2. *Si on a $F \in \mathcal{M}_k(MN, \psi_1, \psi_2)$ avec ψ_1 et ψ_2 de conducteurs divisant N, $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ telle que :*
– *$\alpha B(N) \subset B(MN)\alpha$;*
– *si $\alpha h = h'\alpha$ avec $h \in B(N)$ et $h' \in B(MN)$, alors $h'^{-1}h \in U(N)$;*
alors $F|\alpha \in \mathcal{M}_k(N, \psi_1, \psi_2)$ (c'est-à-dire : $F|\alpha$ est définie et appartient à cet espace)

DÉMONSTRATION. On va commencer par prouver que $F|\alpha$ est bien définie, puis que son niveau est descendu à N.

La seule chose qui gêne pour appliquer la proposition précédente en niveau MN et avoir directement $F|\alpha \in \mathcal{M}_k(MN)$, c'est que l'on sait que $h'^{-1}h \in U(N)$ alors qu'il faudrait $h'^{-1}h \in U(MN)$. Cependant, on sait quand même que $h, h' \in B(MN)$, donc il suffit de passer par les caractères ψ_1 et ψ_2, pour que les choses se passent bien ; si $h \in \Gamma_0(MN)$, alors :

$$\begin{aligned}
F(g_{\mathbb{Q}}h^{-1}.(\alpha h g_{\mathbb{R}} \times h g_{MN})) &= F(GL_2(\mathbb{Q}).(\alpha h g_{\mathbb{R}} \times h g_{MN})) \\
&= F(GL_2(\mathbb{Q}).(h'\alpha g_{\mathbb{R}} \times h g_{MN})) \\
&= F(GL_2(\mathbb{Q}).(\alpha g_{\mathbb{R}} \times h'^{-1} h g_{MN})) \\
&= \psi_1(a_{h'^{-1}hg_{MN}})\psi_2(d_{h'^{-1}hg_{MN}}) \\
&\quad \times F(GL_2(\mathbb{Q}).(\alpha g_{\mathbb{R}} \times 1_f)) \\
&= \psi_1(a_{g_{MN}})\psi_2(d_{g_{MN}})\psi_1(a_{h'^{-1}h})\psi_2(d_{h'^{-1}h}) \\
&\quad \times F(GL_2(\mathbb{Q}).(\alpha g_{\mathbb{R}} \times 1_f)) \\
&= F(GL_2(\mathbb{Q}).(\alpha g_{\mathbb{R}} \times g_{MN})) \\
&= F(g_{\mathbb{Q}}.(\alpha g_{\mathbb{R}} \times g_{MN}))
\end{aligned}$$

On sait donc maintenant que $F|\alpha \in \mathcal{M}_k(MN, \psi_1, \psi_2)$: le premier objectif de la preuve est atteint.

Calculons maintenant $F|\alpha(gb)$ avec $b \in B(N)$. On décompose d'abord $g = g_{\mathbb{Q}}.(\alpha g_{\mathbb{R}} \times g_{MN})$ via le théorème d'approximation forte :

$$\begin{aligned}
F|\alpha(gb) &= F|\alpha\,(g_{\mathbb{Q}}.(g_{\mathbb{R}} \times g_{MN})(1_\infty \times b)) \\
&= F|\alpha\,(g_{\mathbb{Q}}.(g_{\mathbb{R}} \times g_{MN}b))
\end{aligned}$$

mais la matrice à laquelle on applique $F|\alpha$ est décomposée en niveau N ; ce qui ne convient pas pour écrire l'action de α ; mais on a vu qu'on pouvait obtenir aisément une décomposition en niveau MN à partir de celle-ci, via une matrice explicite $h \in \Gamma_1(N)$ (voir 1.3) :

$$\begin{aligned}
F|\alpha(gb) &= F|\alpha\,(g_{\mathbb{Q}}.(g_{\mathbb{R}} \times g_{MN}b)) \\
&= F|\alpha\left(g_{\mathbb{Q}}h^{-1}.(h g_{\mathbb{R}} \times h g_{MN}b)\right) \\
&= F\left(g_{\mathbb{Q}}h^{-1}.(\alpha h g_{\mathbb{R}} \times h g_{MN}b)\right) \\
&= F\,(GL_2(\mathbb{Q}).(h'\alpha g_{\mathbb{R}} \times h g_{MN}b)) \\
&= F\left(GL_2(\mathbb{Q}).(\alpha g_{\mathbb{R}} \times h'^{-1} h g_{MN}b)\right) \\
&= \psi_1(a_{h'^{-1}hg_{MN}b})\psi_2(d_{h'^{-1}hg_{MN}b}) \\
&\quad \times F\,(GL_2(\mathbb{Q}).(\alpha g_{\mathbb{R}} \times 1_f))
\end{aligned}$$

où la dernière ligne a pu être obtenue car on connaît le comportement de F via les matrices de $B(MN)$, mais où ψ_1 et ψ_2 nous permettent de travailler dans $B(N)$:

$$\begin{aligned}\psi_1(a_{h'^{-1}hg_{MN}b}) &= \psi_1(a_{h'^{-1}h})\psi_1(a_{g_{MN}})\psi_1(a_b)\\ &= \psi_1(a_{g_{MN}})\psi_1(a_b)\end{aligned}$$

et de même pour $\psi_2(d_{...})$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}F|\alpha(gb) &= \psi_1(a_{h'^{-1}hg_{MN}b})\psi_2(d_{h'^{-1}hg_{MN}b})\\ &\quad\times F\left(GL_2(\mathbb{Q}).(\alpha g_{\mathbb{R}}\times 1_f)\right)\\ &= \psi_1(a_{g_{MN}})\psi_1(a_b)\psi_2(d_{g_{MN}})\psi_2(d_b)F\left(GL_2(\mathbb{Q}).(\alpha g_{\mathbb{R}}\times 1_f)\right)\\ &= \psi_1(a_b)\psi_2(d_b)F\left(GL_2(\mathbb{Q}).(\alpha g_{\mathbb{R}}\times g_{MN})\right)\\ &= \psi_1(a_b)\psi_2(d_b)F|\alpha(g)\end{aligned}$$

Ce qui montre que $F|\alpha$ est de niveau N et de caractères (ψ_1,ψ_2). □

Remarque 3.1. *On verra que ces propositions n'englobent pas tous les opérateurs que l'on va définir, mais leurs preuves présentent néanmoins tous les arguments que nous rencontrerons.*

3.1.2. Opérateurs de trace. Le niveau d'une forme modulaire se reconnaît à son invariance à droite par un sous-groupe de congruence. Pour faire descendre le niveau d'une forme, il suffit donc de calculer la moyenne sur un quotient,

La proposition suivante précise cette idée :

Proposition 3.3. *Etant donnée $F\in\mathcal{M}_k(MN)$, alors :*

$$Tr_N^{MN}F : \left[g\mapsto \sum_{\delta\in U(N)/U(MN)} F(g\delta)\right]\in\mathcal{M}_k(N)$$

Démonstration. L'invariance à gauche par $GL_2(\mathbb{Q})$, et le comportement à droite par $Z(\mathbb{R})SO_2(\mathbb{R})$ sont hérités de F. Par ailleurs, la somme est bien définie, car F est $U(MN)$-invariante à droite.

Seul le niveau reste à évaluer ; mais si on considère le calcul de $Tr_N^{MN}F(gu)$ pour $u\in U(N)$, la présence de u permute seulement les éléments de la somme, sans changer sa valeur : $Tr_N^{MN}F(gu)=Tr_N^{MN}F(g)$. □

3.1.3. Opérateurs U de Atkin-Lehner. On définit l'opérateur U_m en poids k de la façon suivante, sur les fonctions $GL_2(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$ a priori :

$$F|U_m(g)=m^{\frac{k}{2}-1}\sum_{u \bmod m}F|\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & m\end{pmatrix}$$

Il faut vérifier la validité de cette définition. Néanmoins, on peut déjà faire une remarque qui simplifie cette vérification :

Proposition 3.4. *Si m,n sont des entiers, $U_mU_n=U_{mn}$; en particulier, il s'agit d'une famille commutative d'opérateurs.*

DÉMONSTRATION. On se donne une forme F, et $g \in GL_2(\mathbb{A})$:

$$\begin{aligned} F|U_n|U_m(g) &= m^{\frac{k}{2}-1} \sum_{u \bmod m} F|U_n| \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & m \end{pmatrix}(g) \\ &= (mn)^{\frac{k}{2}-1} \sum_{u \bmod m} \sum_{v \bmod n} F| \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & m \end{pmatrix}(g) \\ &= (mn)^{\frac{k}{2}-1} \sum_{u \bmod m} \sum_{v \bmod n} F| \begin{pmatrix} 1 & u+vm \\ 0 & mn \end{pmatrix}(g) \\ &= (mn)^{\frac{k}{2}-1} \sum_{w \bmod mn} F| \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & mn \end{pmatrix}(g) \\ &= F|U_{mn}(g) \end{aligned}$$

□

On voit donc qu'il suffit de vérifier que l'action de U_p (p : premier) est bien définie. Il y a deux cas à distinguer, qui donnent lieu à deux propositions :

PROPOSITION 3.5. *Soit ψ_1 et ψ_2 deux caractères définis modulo un entier N et p un nombre premier divisant N ; alors :*

$$U_p : \mathcal{M}_k^e(Np, \psi_1, \psi_2) \to \mathcal{M}_k^e(N, \psi_1, \psi_2)$$

DÉMONSTRATION. On aimerait appliquer la proposition 3.2 ; on verra qu'elle ne s'applique pas tout à fait, mais il sera aisé de l'adapter au cas présent.

Considérons $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in B(N)$, et calculons :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & p \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{p} \begin{pmatrix} a+cu & b+du \\ pc & pd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{p} \begin{pmatrix} p(a+cu) & b+du-av-cuv \\ p^2 c & p(d-vc) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+cu & \frac{b+du-av-cuv}{p} \\ pc & d-vc \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dans le coefficient $(1,2)$, p divise c, car N divise c et par hypothèse $p|N$, et comme $\gamma \in GL_2(\hat{\mathbb{Z}})$, $v_p(a) = v_p(d) = 0$, donc pour chaque $u \bmod p$, il y a un unique $v \bmod p$ tel que ce coefficient est entier, et donc tel que :

$$\gamma' = \begin{pmatrix} a+cu & \frac{b+du-av-cuv}{p} \\ pc & d-vc \end{pmatrix} \in B(Np)$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p \end{pmatrix} B(N) \subset B(Np) \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

par ailleurs, un rapide calcul montre que $\gamma'^{-1}\gamma \in U(N)$.

Cette situation ne correspond pas exactement aux hypothèses de la proposition 3.2, néanmoins il ne faut pas perdre de vue que U_p est défini via une somme : ce que l'on vient d'établir montre que si l'on ne peut pas appliquer la proposition à chaque terme de la somme, cela a un sens de l'appliquer à la somme tout entière. □

Il reste à discuter le cas où p ne divise pas le niveau :

Proposition 3.6. *Soit ψ_1 et ψ_2 deux caractères définis modulo un entier N et p un nombre premier ne divisant pas N ; alors :*

$$U_p : \mathcal{M}_k^e(N, \psi_1, \psi_2) \to \mathcal{M}_k^e(Np, \psi_1, \psi_2)$$

Démonstration. Le même calcul que la proposition précédente montre qu'on est quasiment dans un cas d'application de la proposition 3.1 ; si ce n'est à nouveau le fait qu'elle ne fonctionne pas terme à terme, mais pour la somme complète. $\square$

On peut calculer explicitement le développement de Fourier de $F|U_p$ à partir de celui de F :

Proposition 3.7. *Pour tout ξ, on a :*

$$a_\xi(F|U_p)\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = p^{\frac{k}{2}} a_{p\xi}(F)\left(\begin{pmatrix} \frac{y}{p} & \frac{x}{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

et donc :

$$a_{\xi,r}(F|U_p) = a_{p\xi,r}(F)p^r$$

Démonstration. On calcule à partir des différentes définitions :

$$\begin{aligned} a_\xi(F|U_p)\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F|U_p\left(\begin{pmatrix} 1 & t_\infty \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right. \\ &\quad \times \left.\begin{pmatrix} 1 & t_f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Psi(-\xi t)dt \\ &= p^{\frac{k}{2}-1}\sum_{u \bmod p}\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t_\infty \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right. \\ &\quad \left.\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & t_f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Psi(-\xi t)dt \\ &= p^{\frac{k}{2}-1}\sum_{u \bmod p}\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F\left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{u+t_\infty}{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{y}{p} & \frac{x}{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right. \\ &\quad \left.\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & t_f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Psi(-\xi t)dt \end{aligned}$$

où on a utilisé la définition de U_p pour un choix du domaine d'intégration tel que $t_f \in \hat{\mathbb{Z}}$.

Maintenant, comme l'homothétie réelle n'agit pas, on peut "oublier" cette matrice. On effectue alors le changement de variable : $t = pz$, et on raffine le choix du domaine fondamental, en demandant à ce que $z_f \in \hat{\mathbb{Z}}$. Enfin, comme la mesure de

Haar est invariante par translation, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
a_\xi(F|U_p)\left(\left(\begin{array}{cc} y & x \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right) &= p^{\frac{k}{2}-1}\sum_{u \bmod p}\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & \frac{u+t_\infty}{p} \\ 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} \frac{y}{p} & \frac{x}{p} \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right. \\
&\quad \times \left.\left(\begin{array}{cc} 1 & t_f \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right)\Psi(-\xi t)dt \\
&= p^{\frac{k}{2}-1}\sum_{u \bmod p}\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & z_\infty \\ 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} \frac{y}{p} & \frac{x}{p} \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right. \\
&\quad \times \left.\left(\begin{array}{cc} 1 & pz_f \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right)\Psi(-\xi pz)dz \\
&= p^{\frac{k}{2}-1}\sum_{u \bmod p}\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & z_\infty \\ 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} \frac{y}{p} & \frac{x}{p} \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right. \\
&\quad \times 1_f\left.\vphantom{\frac{y}{p}}\right)\Psi(-\xi pz)dz \\
&= p^{\frac{k}{2}-1}\sum_{u \bmod p}\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & z_\infty \\ 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} \frac{y}{p} & \frac{x}{p} \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right. \\
&\quad \times \left.\left(\begin{array}{cc} 1 & z_f \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right)\Psi(-\xi pz)dz
\end{aligned}$$

La somme ne dépend plus de $u \bmod p$; cette sommation se simplifie donc avec p^{-1}. Il reste alors le facteur $p^{\frac{k}{2}}$ et le coefficient automorphe attendu.

Il reste donc à voir comment cette relation entre les coefficients automorphes se traduit en termes de coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned}
a_\xi(F|U_p)\left(\left(\begin{array}{cc} y & x \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right) &= p^{\frac{k}{2}}a_{p\xi}(F)\left(\left(\begin{array}{cc} \frac{y}{p} & \frac{x}{p} \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right) \\
&= p^{\frac{k}{2}}\left(\frac{y}{p}\right)^{\frac{k}{2}}\sum_r a_{p\xi,r}(F)(pR)^r q^{\frac{p\xi}{p}} \\
&= y^{\frac{k}{2}}\sum_r a_{p\xi,r}(F)(pR)^r q^{\xi}
\end{aligned}$$

où par définition :

$$a_\xi(F|U_p)\left(\left(\begin{array}{cc} y & x \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right) = y^{\frac{k}{2}}\sum_r a_{\xi,r}(F|U_p)R^r q^{\xi}$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque 3.2. *La somme porte sur n'importe quels entiers u dont les restes modulo p parcourent toutes les classes, en effet :*

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & u+np \\ 0 & p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & n \\ 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & u \\ 0 & p \end{array}\right)$$

et la première matrice est dans $\Gamma_1(N)$*, donc :*

$$\begin{aligned} F|\begin{pmatrix} 1 & u+np \\ 0 & p \end{pmatrix}(g) &= F\left(GL_2(\mathbb{Q})\begin{pmatrix} 1 & u+np \\ 0 & p \end{pmatrix} g_{\mathbb{R}} \times g_N\right) \\ &= F\left(GL_2(\mathbb{Q})\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p \end{pmatrix} g_{\mathbb{R}} \times \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} g_N\right) \\ &= F\left(GL_2(\mathbb{Q})\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p \end{pmatrix} g_{\mathbb{R}} \times g_N\right) \\ &= F|\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p \end{pmatrix}(g) \end{aligned}$$

3.1.4. Opérateurs V**.** Pour un entier m, on définit :

$$F|V_m(g) = m^{\frac{-k}{2}} F|\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces opérateurs, s'ils sont bien définis, forment de toute évidence une famille commutative ! Comme précédemment, cela signifie que l'on peut se contenter de discuter de l'action de V_p pour un p premier.

Proposition 3.8. *Soient* ψ_1 *et* ψ_2 *deux caractères définis modulo un entier* N *et* p *un nombre premier, alors :*

$$V_p : \mathcal{M}_k^e(N, \psi_1, \psi_2) \to \mathcal{M}_k^e(Np, \psi_1, \psi_2)$$

Démonstration. On se donne $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in B(Np)$; et on étudie la matrice conjuguée de γ via la matrice que l'on souhaite faire agir pour appliquer une des propositions sur l'action des matrices :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{p}\begin{pmatrix} pa & pb \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & pb \\ \frac{c}{p} & d \end{pmatrix} \\ &= \gamma' \\ &\in B(N) \end{aligned}$$

et de plus, il est clair que $\gamma'^{-1}\gamma \in U(N)$. On est donc dans un cas d'application de la proposition 3.1. □

On peut calculer le développement de Fourier de $F|V_p$ en fonction de celui de F, de la façon suivante :

Proposition 3.9. *Pour tout* $\xi > 0$*, on a :*

$$a_{p\xi}(F|V_p)\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = p^{\frac{-k}{2}} a_\xi(F)\left(\begin{pmatrix} py & px \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

et donc :

$$a_{p\xi,r}(F|V_p) = p^{-r} a_{\xi,r}(F)$$

Démonstration. On écrit les définitions :

$$\begin{aligned}
a_{p\xi}(F|V_p)\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F|V_p\left(\begin{pmatrix} 1 & t_\infty \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right. \\
&\quad \times \left.\begin{pmatrix} 1 & t_f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Psi(-p\xi t)dt \\
&= p^{\frac{-k}{2}}\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t_\infty \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right. \\
&\quad \times \left.\begin{pmatrix} 1 & t_f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Psi(-p\xi t)dt \\
&= p^{\frac{-k}{2}}\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F\left(\begin{pmatrix} 1 & pt_\infty \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} py & px \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right. \\
&\quad \times \left.\begin{pmatrix} 1 & t_f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Psi(-p\xi t)dt
\end{aligned}$$

on effectue alors le changement de variable : $z = pt$, et les mêmes arguments que pour U_p donnent le résultat pour les coefficients automorphes, et les coefficients de Fourier. □

3.1.5. Opérateurs W. On souhaite définir un opérateur W_N via l'action de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$, où N est le niveau.

En pratique, cette matrice n'agit pas du tout convenablement pour utiliser exactement les méthodes précédentes, car si on conjugue une matrice de $B(N)$ par elle :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{N}\begin{pmatrix} -c & -d \\ Na & Nb \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -N & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d & -c/N \\ -Nb & a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

cette nouvelle matrice est bien dans $B(N)$, mais ces coefficients $(1,1)$ et $(2,2)$ sont inversés ! (on note h et h' les deux matrices conjuguées, comme précédemment)

On va donc non seulement faire agir la matrice sur la partie archimédienne, mais aussi modifier la partie non-archimédienne ; on utilise évidemment toujours le théorème d'approximation forte (niveau N) :

$$F|W_N(g) = F\left(GL_2(\mathbb{Q})\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix} g_{\mathbb{R}} \times g_N^{-1}\right)\right)$$

Proposition 3.10. *On a :*

$$W_N : \mathcal{M}_k^e(N, \psi_1, \psi_2) \to \mathcal{M}_k^e(N, \overline{\psi_1}, \overline{\psi_2})$$

et $W_N^2 = (-1)^k I$.

Démonstration. Commençons par prouver que cet opérateur est bien défini ! On choisit $h \in \Gamma_0(N)$, et on calcule :

$$\begin{aligned}
& F\left(GL_2(\mathbb{Q})\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ N & 0 \end{array}\right) hg_{\mathbb{R}} \times (hg_N)^{-1}\right)\right) \\
= \quad & F\left(GL_2(\mathbb{Q})\left(h'\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ N & 0 \end{array}\right) g_{\mathbb{R}} \times h^{-1}g_N^{-1}\right)\right) \\
= \quad & F\left(GL_2(\mathbb{Q})\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ N & 0 \end{array}\right) g_{\mathbb{R}} \times h'^{-1}h^{-1}g_N^{-1}\right)\right) \\
= \quad & F\left(GL_2(\mathbb{Q})\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ N & 0 \end{array}\right) g_{\mathbb{R}} \times (hh')^{-1}g_N^{-1}\right)\right) \\
= \quad & F\left(GL_2(\mathbb{Q})\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ N & 0 \end{array}\right) g_{\mathbb{R}} \times g_N^{-1}\right)\right)
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est vraie car $hh' \in U(N)$.

Maintenant que l'on sait que cet opérateur est bien défini, vérifions qu'il va dans le bon espace ; si $b \in B(N)$, on a :

$$\begin{aligned}
b &\equiv \left(\begin{array}{cc} a & * \\ 0 & d \end{array}\right) \\
b^{-1} &\equiv \left(\begin{array}{cc} 1/a & * \\ 0 & 1/d \end{array}\right)
\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
F|W_N(gb) &= \psi_1(1/a)\psi_2(1/b)F|W_N(g) \\
&= \overline{\psi_1}(a)\overline{\psi_1}(d)F|W_N(g)
\end{aligned}$$

Enfin, le dernier point à établir est que $W_N^2 = (-1)^k I$. Sur la partie non-archimédienne, il agit par une involution, donc il faut regarder sur la partie archimédienne :

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ N & 0 \end{array}\right)^2 &= \left(\begin{array}{cc} -N & 0 \\ 0 & -N \end{array}\right) \\
&= r(\pi)\left(\begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & N \end{array}\right)
\end{aligned}$$

où l'homothétie de rapport positif n'agit pas, et la rotation agit par $(-1)^k$. □

On aura besoin de connaître l'action de cet opérateur sur les coefficients de Fourier des distributions d'Eisenstein :

Proposition 3.11. *On a :*

$$E_{k,s}^{\mathrm{anal}}(\varphi)|W_N(g_\infty \times 1_f) = E_{k,s}^{\mathrm{anal}}(\mathcal{T}\varphi)\left(\left(\begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) g_\infty \times 1_f\right)$$

où $\mathcal{T}\varphi(x,y) = \varphi(-y,x)$.

DÉMONSTRATION. On commence par appliquer les définitions :

$$\begin{aligned}
E^{\mathrm{anal}}_{k,s}(\varphi)|W_N(g_\infty \times 1_f) &= E^{\mathrm{anal}}_{k,s}(\varphi)\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ N & 0 \end{array}\right) g_\infty \times 1_f\right) \\
&= E^{\mathrm{anal}}_{k,s}(\varphi)\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) g_\infty \times 1_f\right) \\
&= \left|\det\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) g_\infty \times 1_f\right)\right|_{\mathbb{A}}^{-\frac{k+2s}{2}} \\
&\quad \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{Q})} \zeta_{k,s}(\varphi)(\gamma) \\
&\quad j_1\left(\gamma\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) g_\infty, i\right)^k \\
&\quad \left|j_1\left(\gamma\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) g_\infty, i\right)\right|^{2s}
\end{aligned}$$

on applique ensuite le changement de variable :

$$\gamma' = \gamma\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$$

pour obtenir :

$$\begin{aligned}
E^{\mathrm{anal}}_{k,s}(\varphi)|W_N(g_\infty \times 1_f) &= \left|\det\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) g_\infty \times 1_f\right)\right|_{\mathbb{A}}^{-\frac{k+2s}{2}} \\
&\quad \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{Q})} \zeta_{k,s}(\varphi)\left(\gamma\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)\right) \\
&\quad j_1\left(\gamma'\left(\begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) g_\infty, i\right)^k \\
&\quad \left|j_1\left(\gamma'\left(\begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) g_\infty, i\right)\right|^{2s}
\end{aligned}$$

il suffit finalement de constater :

$$\zeta_{k,s}(\varphi)\left(\gamma\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)\right) = \zeta_{k,s}(\mathcal{T}\varphi)(\gamma)$$

pour obtenir la proposition. □

COROLLAIRE 3.2. *On a :*

$$E^{\mathrm{alg}}_{k,s}(\varphi)|W_N(g_\infty \times 1_f) = E^{\mathrm{alg}}_{k,s}(\mathcal{F}_1\mathcal{T}\mathcal{F}_1^{-1}\varphi)\left(\left(\begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) g_\infty \times 1_f\right)$$

où $\mathcal{F}_1$ est la transformée de Fourier le long de la première variable, et ${}^t\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

DÉMONSTRATION. On commence par convertir la série algébrique en série analytique :

$$E^{\mathrm{alg}}_{k,s}(\varphi)|W_N(g_\infty \times 1_f) = \frac{(2i\pi)^k\pi^s}{\Gamma(k+s)} E^{\mathrm{anal}}_{k,s}(\mathcal{F}_1^{-1}\varphi)|W_N(g_\infty \times 1_f)$$

on utilise alors le résultat précédent :

$$\begin{aligned}
&E_{k,s}^{\mathrm{alg}}(\varphi)|W_N(g_\infty \times 1_f)\\
= \ &\tfrac{(2i\pi)^k\pi^s}{\Gamma(k+s)} E_{k,s}^{\mathrm{anal}}(\mathcal{F}_1^{-1}\varphi)|W_N(g_\infty \times 1_f)\\
= \ &\tfrac{(2i\pi)^k\pi^s}{\Gamma(k+s)} E_{k,s}^{\mathrm{anal}}(\mathcal{T}\mathcal{F}_1^{-1}\varphi)\left(\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_\infty \times 1_f\right)
\end{aligned}$$

puis on reconvertit en série algébrique :

$$E_{k,s}^{\mathrm{alg}}(\varphi)|W_N(g_\infty \times 1_f) = E_{k,s}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{F}_1\mathcal{T}\mathcal{F}_1^{-1}\varphi)\left(\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_\infty \times 1_f\right)$$

□

3.1.6. Action de la conjugaison complexe. Il reste une dernière opération sur les formes modulaires à discuter ici : celle induite par la conjugaison complexe sur les coefficients de Fourier.

Si F a pour développement de Fourier $\sum_{n,j} a_{n,j} q^n R^j$, on définit F^ρ par le développement de Fourier : $\sum_{n,j} \overline{a_{n,j}} q^n R^j$.

La proposition suivante affirme que cela a un sens :

Proposition 3.12.

$$^\rho : \mathcal{M}_k^e(N, \psi_1, \psi_2) \to \mathcal{M}_k^e(N, \overline{\psi_1}, \overline{\psi_2})$$

Démonstration. Le principe est le même que dans le cas classique : la façon dont on a défini la conjugaison, si elle est la plus pratique quand il s'agit de faire des calculs, n'est pas très utile quand il s'agit de prouver que la fonction obtenue a de bonnes propriétés !

On va considérer :

$$F^\rho(g) = \overline{F\left(g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)}$$

et ensuite vérifier que cette F^ρ a le développement de Fourier attendu.

On va noter ρ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, pour alléger les notations dans cette preuve.

Cette F^ρ est bien dans $\mathcal{M}_k^e(N, \overline{\psi_1}, \overline{\psi_2})$:
- la $GL_2(\mathbb{Q})$-invariance à gauche est conservée ;
- la $Z^+(\mathbb{R})$-invariance à droite est conservée ;
- le comportement via $SO_2(\mathbb{R})$ à droite est conservé, car $r(\theta)\rho = \rho r(-\theta)$, donc le comportement de F fait intervenir un $\exp(ik\theta)$, et le comportement de $\overline{F}$ un $\exp(-ik\theta)$, comme voulu ;
- le comportement via $B(N)$ à droite est celui attendu, car $\rho \in B(N)$, donc si $b \in B(N)$:

$$\begin{aligned}
F^\rho(gb) &= \overline{F(gb\rho)}\\
&= \overline{F(g_\infty\rho \times g_f b\rho)}\\
&= \overline{\psi_1(a_{b\rho})\psi_2(d_{b\rho})F(g_\infty\rho \times g_f)}\\
&= \overline{\psi_1(a_b)\psi_2(d_b)\psi_1(a_\rho)\psi_2(d_\rho)F(g_\infty\rho \times g_f)}\\
&= \overline{\psi_1(a_b)\psi_2(d_b)F(g_\infty\rho \times g_f\rho)}\\
&= \overline{\psi_1(a_b)\psi_2(d_b)F(g\rho)}\\
&= \overline{\psi_1(a_b)\psi_2(d_b)}F^\rho(g)
\end{aligned}$$

Vérifions donc maintenant le développement de Fourier : il suffit de prouver que :

$$a_\xi(F^\rho)\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \overline{a_\xi(F)\left(\begin{pmatrix} y & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}$$

pour cela ; on calcule :

$$\begin{aligned}
a_\xi(F^\rho)\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F^\rho\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f\right)\Psi(-\xi t)dt \\
&= \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \overline{F\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rho \times \rho\right)}\Psi(-\xi t)dt \\
&= \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \overline{F\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rho\begin{pmatrix} y & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \rho\right)}\Psi(-\xi t)dt \\
&= \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \overline{F\left(\rho\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \rho\right)}\Psi(-\xi t)dt \\
&= \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \overline{F\left(\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f\right)}\Psi(-\xi t)dt \\
&= \overline{\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F\left(\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f\right)\Psi(-\xi(-t))dt} \\
&= \overline{\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} F\left(\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f\right)\Psi(-\xi z)dz} \\
&= \overline{a_\xi(F)\left(\begin{pmatrix} y & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}
\end{aligned}$$

où l'on a dans un premier temps fait “migrer” la composante archimédienne de ρ vers la gauche, puis utilisé la $GL_2(\mathbb{Q})$-invariance à gauche, avant de faire le changement de variables $z = -t$. □

3.2. Règles de commutation

Le but de cette section est de développer en détail des résultats de commutation entre les opérateurs déjà présentés. On ne cherche pas à être exhaustif, mais à présenter d'une part les résultats qui seront effectivement utilisés, et d'autre part les résultats qui révèlent des propriétés structurelles des formes modulaires adéliques.

3.2.1. U et V.

PROPOSITION 3.13. *Soient m et n deux entiers, et d leur plus grand diviseur commun. On a :*

$$V_m U_n = U_{n/d} V_{m/d}$$

DÉMONSTRATION. On pose :

$$\begin{aligned} m &= m'd \\ n &= n'd \end{aligned}$$

avec $(m', n') = 1$, et on calcule à partir des définitions :

$$\begin{aligned}
F|V_mU_n &= m^{\frac{-k}{2}}n^{\frac{k}{2}-1}\sum_{u \bmod n} F|\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} \\
&= m^{\frac{-k}{2}}n^{\frac{k}{2}-1}\sum_{u \bmod n} F|\begin{pmatrix} m & mu \\ 0 & n \end{pmatrix} \\
&= (m'd)^{\frac{-k}{2}}(n'd)^{\frac{k}{2}-1}\sum_{u \bmod n'd} F|\begin{pmatrix} m'd & m'du \\ 0 & n'd \end{pmatrix} \\
&= m'^{\frac{-k}{2}}n'^{\frac{k}{2}-1}\frac{1}{d}\sum_{u \bmod n'd} F|\begin{pmatrix} m' & m'u \\ 0 & n' \end{pmatrix} \\
&= m'^{\frac{-k}{2}}n'^{\frac{k}{2}-1}\frac{1}{d}\sum_{u \bmod n'd} F|\begin{pmatrix} 1 & m'u \\ 0 & n' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= F|U_{n'}V_{m'}
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'invariance par les matrices de $Z^+(\mathbb{R})$ pour simplifier les matrices par d, et où on a utilisé le fait $(m', n') = 1$ pour reconnaître que la somme sur $u \bmod n'd$ était d fois une somme sur $v \bmod n'$. □

Corollaire 3.3. *On a : $V_mU_m = I$.*

3.2.2. W et V.

Proposition 3.14. *Pour tous les entiers N, d et d', on a :*

$$V_dW_{Ndd'} = d'^{\frac{k}{2}}d^{\frac{-k}{2}}W_NV_{d'}$$

Démonstration. Les actions de ces opérateurs se décomposent en trois parties :

- une action sur la partie non-archimédienne, qui est une simple inversion ; sur ce point les deux membres ont le même comportement ;
- un facteur devant la forme ; là aussi, on voit bien que les deux membres agissent de même ;
- une action sur la partie archimédienne ; c'est en fait le seul point qui demande une vérification.

On calcule :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Ndd' & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -d \\ Ndd' & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Nd' & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

où la matrice d'homothétie n'agit pas, et les autres matrices sont celles attendues. □

3.2.3. Torsion par un caractère. On souhaite comparer tous les opérateurs avec l'opérateur de torsion, pour mettre en évidence le fait que c'est une opération qui respecte la structure des formes modulaires.

3.2.3.1. *Opérateurs matrices, U et V.* L'action des matrices est définie via une action sur la partie réelle dans la décomposition du théorème d'approximation forte ; ce qui n'interfère pas avec la définition de la torsion par un caractère, on a donc :

PROPOSITION 3.15. *Si on se donne une forme F, une matrice rationnelle γ et un caractère de Dirichlet ψ :*

$$(F \otimes \psi)|\gamma = (F|\gamma) \otimes \psi$$

En particulier, les opérateurs définis via l'action de matrices commutent aussi avec la torsion :

COROLLAIRE 3.4.

$$(F \otimes \psi)|U = (F|U) \otimes \psi$$

COROLLAIRE 3.5.

$$(F \otimes \psi)|V = (F|V) \otimes \psi$$

3.2.3.2. *Opérateur W.* Cet opérateur est défini, à un niveau donné, non seulement par l'action d'une matrice sur la partie réelle de l'écriture en niveau N, mais aussi par une inversion de la partie semi-adélique ; on a alors aisément le résultat suivant :

PROPOSITION 3.16. *Pour toute forme modulaire adélique F de niveau N et tout caractère de Dirichlet ψ défini modulo N :*

$$(F \otimes \psi)|W_N = (F|W_N) \otimes \overline{\psi}$$

3.2.3.3. *Conjugaison complexe.*

PROPOSITION 3.17. *Pour toute forme modulaire F et tout caractère ψ :*

$$(F \otimes \psi)^\rho = \psi(-1) F^\rho \otimes \overline{\psi}$$

3.3. Opérateurs de Hecke

Les opérateurs de Hecke sont classiquement introduits comme provenant de l'action de classes doubles. On va donc commencer par étudier un équivalent de ces classes dans notre cadre, pour conserver un bon parallélisme.

3.3.1. Classes doubles. Plus précisément, l'opérateur de Hecke T_p que l'on veut définir doit être lié à la classe double $B(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}B(N)$, pour être comparable à l'opérateur classique.

On va donc commencer par établir quelques résultats élémentaires sur cette dernière :

LEMME 3.2. *Si $(N,p)=1$, $B(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}B(N)$ est l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients entiers complétés, dont le déterminant est dans $p\hat{\mathbb{Z}}^*$ et dont le coefficient $(2,1)$ est divisible par N.*

DÉMONSTRATION. Une des inclusions est facile, voyons l'autre. On se donne une matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $c \equiv 0 \bmod N$ et $ad-bc \in p\hat{\mathbb{Z}}^*$, à coefficients entiers complétés. On distingue plusieurs cas.

(1) si p ne divise pas a mais divise b, alors p divise d et on peut écrire :

$$\begin{aligned}\gamma &= \begin{pmatrix} a & b/p \\ c & d/p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \\ &\in B(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \\ &\in B(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}B(N)\end{aligned}$$

(2) si p ne divise ni a ni b, alors en choisissant u un entier relatif (défini modulo p) tel que $b + au \equiv 0 \bmod p$, alors :

$$\gamma\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+au \\ c & d+du \end{pmatrix}$$

et cette matrice vérifie les hypothèses du premier cas, donc γ appartient à la classe double attendue ;

(3) discutons du cas particulier de la matrice $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+N & 1 \\ N & 1 \end{pmatrix}$$

or cette nouvelle matrice est dans $B(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}B(N)$, d'après le cas précédent ;

(4) si p divise a et b, on se ramène à la matrice précédente de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\gamma &= \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a/p & b/p \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\in \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}B(N) \\ &\in B(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}B(N)\end{aligned}$$

(5) si p divise a et ne divise pas b, alors nécessairement, il divise c, donc :

$$\begin{aligned}\gamma &= \begin{pmatrix} a/p & b \\ c/p & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\in B(N)\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\in B(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}B(N)\end{aligned}$$

□

On veut décomposer cette classe double en classes à gauche, toujours dans le but d'imiter le cas classique :

Proposition 3.18. *On a, lorsque* $(N, p) = 1$:

$$B(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}B(N) = \bigsqcup_{u \bmod p} B(N)\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p \end{pmatrix} \sqcup B(N)\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Il y a trois choses à établir : deux inclusions, et le fait que les unions sont disjointes.

L'une des inclusions est claire d'après le lemme précédent.

Pour l'inclusion des classes doubles dans l'union : il suffit de vérifier que toute matrice de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} B(N)$ appartient à l'un des ensembles. Soit une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in B(N)$, alors si p divise a, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/p & b \\ c & pd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B(N) \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et si p ne divise pas a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b-au}{p} \\ pc & d-cu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

où comme a est inversible modulo p, un unique entier relatif u mod p convient pour que $b - au$ soit divisible par p, et mène dans une des classes à gauche.

Vérifions que l'union est disjointe : on considère une matrice γ qui appartiendrait simultanément à $B(N) \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p \end{pmatrix}$ et à $B(N) \begin{pmatrix} 1 & u' \\ 0 & p \end{pmatrix}$; on veut prouver que dans ce cas, $u \equiv u'$ mod p. On écrit :

$$\begin{aligned} \gamma &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & au+bp \\ c & pd+cu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u' \\ 0 & p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a' & a'u'+b'p \\ c' & pd'+c'u' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On voit alors que $a = a'$, donc si cette valeur commune est un inversible modulo p, l'égalité des coefficients $(1, 2)$ montre que $u \equiv u'$ mod p. Et si par contre p divise $a = a'$, alors il ne divise pas $c = c'$ (car $ad - bc$ est inversible modulo tout nombre premier), c'est alors par réduction des coefficients $(2, 2)$ modulo p que l'on obtient $u \equiv u'$ mod p.

Soit maintenant $\gamma \in B(N) \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p \end{pmatrix} \cap B(N) \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On veut aboutir à une contradiction.

$$\begin{aligned} \gamma &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & au+bp \\ c & pd+cu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a'p & b' \\ c'p & d' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où l'on voit que p divise à la fois a et c, ce qui est impossible ! $\square$

3.3.2. Opérateurs T_p. On dispose maintenant des outils théoriques nécessaires à la définition de l'opérateur T_p, appliqué à $F \in \mathcal{M}_k^e(N, \psi_1, \psi_2)$.

On décompose la classe double de la façon suivante :

$$B(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} B(N) = \bigsqcup_i B(N)\alpha_i$$

où l'union disjointe est finie, et $\alpha_i \in GL_2^+(\mathbb{Q})$.

On vient de voir qu'une telle décomposition existait, et que de plus, ces matrices étaient à coefficients entiers, et leur coefficient $(2,1)$ nul modulo N. Il est par ailleurs clair que dans toute décomposition telle que précédemment, cette propriété est vérifiée, car si $B(N)\alpha_i = B(N)\alpha_i'$, alors nécessairement, $\alpha_i' = h\alpha_i'$, pour une matrice $h \in \Gamma_0(N)$.

On définit alors :

$$T_pF = \overline{\psi_2}(p)p^{\frac{k}{2}-1} \sum_i \psi_1(a_{\alpha_i})\psi_2(d_{\alpha_i})F|\alpha_i$$

cette définition ne dépend pas du choix des α_i dans la décomposition ; en effet, si $h \in \Gamma_0(N)$, alors :

$$\begin{aligned}
\psi_1(a_{h\alpha_i})\psi_2(d_{h\alpha_i})F|h\alpha_i(g) &= \psi_1(a_{h\alpha_i})\psi_2(d_{h\alpha_i}) \\
&\quad F(GL_2(\mathbb{Q})h\alpha_i g_{\mathbb{R}} \times g_N) \\
&= \psi_1(a_h)\psi_2(d_h)\psi_1(a_{\alpha_i})\psi_2(d_{\alpha_i}) \\
&\quad F(GL_2(\mathbb{Q})h\alpha_i g_{\mathbb{R}} \times g_N) \\
&= \psi_1(a_h)\psi_2(d_h)\psi_1(a_{\alpha_i})\psi_2(d_{\alpha_i}) \\
&\quad F(GL_2(\mathbb{Q})h\alpha_i g_{\mathbb{R}} \times g_N) \\
&= \psi_1(a_h)\psi_2(d_h)\psi_1(a_{\alpha_i})\psi_2(d_{\alpha_i}) \\
&\quad F(GL_2(\mathbb{Q})\alpha_i g_{\mathbb{R}} \times h^{-1}g_N) \\
&= \psi_1(a_h)\psi_2(d_h)\psi_1(a_{\alpha_i})\psi_2(d_{\alpha_i})\overline{\psi_1}(a_h)\overline{\psi_2}(d_h) \\
&\quad F(GL_2(\mathbb{Q})\alpha_i g_{\mathbb{R}} \times g_N) \\
&= \psi_1(a_{\alpha_i})\psi_2(d_{\alpha_i})F(GL_2(\mathbb{Q})\alpha_i g_{\mathbb{R}} \times g_N) \\
&= \psi_1(a_{\alpha_i})\psi_2(d_{\alpha_i})F|\alpha_i(g)
\end{aligned}$$

Proposition 3.19. *On a :*

$$T_p = U_p + \psi_1\overline{\psi_2}(p)p^{k-1}V_p$$

Démonstration. Il suffit de considérer la décomposition explicite en classes à gauche donnée. □

Corollaire 3.6. *Les opérateurs T_p forment une famille commutative d'opérateurs.*

DÉMONSTRATION. On choisit p et q deux nombres premiers distincts, et on calcule, en se ramenant aux règles de commutations des opérateurs U et V :

$$\begin{aligned} T_pT_q - T_qT_p &= \left(U_p + \psi_1\overline{\psi_2}(p)p^{k-1}V_p\right)\left(U_q + \psi_1\overline{\psi_2}(q)q^{k-1}V_q\right) \\ &\quad - \left(U_q + \psi_1\overline{\psi_2}(q)q^{k-1}V_q\right)\left(U_p + \psi_1\overline{\psi_2}(p)p^{k-1}V_p\right) \\ &= U_pU_q - U_qU_p \\ &\quad + \psi_1\overline{\psi_2}(p)p^{k-1}(V_pU_q - U_qV_p) \\ &\quad + \psi_1\overline{\psi_2}(q)q^{k-1}(U_pV_q - V_qU_p) \\ &\quad + \psi_1\overline{\psi_2}(pq)(pq)^{k-1}(V_pV_q - V_qV_p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 3.7. *Les opérateurs de Hecke commutent avec la torsion par un caractère.*

DÉMONSTRATION. En effet, on sait déjà que les opérateurs U et V commutent avec elle. □

3.3.3. Opérateurs T_{p^r}. On définit par récurrence :

$$T_{p^{d+1}} = T_pT_{p^d} - \psi_1\overline{\psi_2}(p)p^{k-1}T_{p^{d-1}}$$

Ces familles $(T_{p^d})_d$ pour divers p commutent alors entre elles par construction.

On dispose toujours d'une formule explicite et élégante les liant aux opérateurs U et V :

PROPOSITION 3.20. *Pour tout $d \geq 0$, et p premier, on a :*

$$T_{p^d} = \sum_{0\leq i\leq d} \psi_1\overline{\psi_2}(p^i)p^{i(k-1)}U_{p^{d-i}}V_{p^i}$$

DÉMONSTRATION. On définit une famille d'opérateurs $(T'_d)_d$ par la sommation, et on va montrer qu'elle est vérifie la même relation de récurrence que la famille $(T_{p^d})_d$; comme il est facile de vérifier que $T'_1 = T_p$, cela établira la proposition.

Calculons : (en posant $\psi = \psi_1\overline{\psi_2}$ pour alléger)

$$\begin{aligned} T'_1T'_d - \psi(p)p^{k-1}T'_{d-1} &= \left(U_p + \psi(p)p^{k-1}V_p\right)\sum_{0\leq i\leq d}\psi(p^i)p^{i(k-1)}U_{p^{d-i}}V_{p^i} \\ &\quad -\psi(p)p^{k-1}\sum_{0\leq i\leq d-1}\psi(p^i)p^{i(k-1)}U_{p^{d-1-i}}V_{p^i} \\ &= U_p\sum_{0\leq i\leq d}\psi(p^i)p^{i(k-1)}U_{p^{d-i}}V_{p^i} \\ &\quad +\psi(p)p^{k-1}V_p\sum_{0\leq i\leq d-1}\psi(p^i)p^{i(k-1)}U_{p^{d-i}}V_{p^i} \\ &\quad +\psi(p)p^{k-1}V_p\psi(p^d)p^{d(k-1)}V_{p^d} \\ &\quad -\psi(p)p^{k-1}\sum_{0\leq i\leq d-1}\psi(p^i)p^{i(k-1)}U_{p^{d-1-i}}V_{p^i} \end{aligned}$$

où on a coupé une somme pour séparer les cas $i = d$ et $i < d$; en effet, on sait que V_pU_p est l'identité, donc :

$$\begin{aligned}
T_1'T_d' - \psi(p)p^{k-1}T_{d-1}' &= \sum_{0\leq i\leq d} \psi(p^i)p^{i(k-1)}U_{p^{d+1-i}}V_{p^i} \\
&\quad +\psi(p)p^{k-1}\sum_{0\leq i\leq d-1} \psi(p^i)p^{i(k-1)}U_{p^{d-1-i}}V_{p^i} \\
&\quad +\psi(p^{d+1})p^{(d+1)(k-1)}V_{p^{d+1}} \\
&\quad -\psi(p)p^{k-1}\sum_{0\leq i\leq d-1} \psi(p^i)p^{i(k-1)}U_{p^{d-1-i}}V_{p^i} \\
&= \sum_{0\leq i\leq d} \psi(p^i)p^{i(k-1)}U_{p^{d+1-i}}V_{p^i} \\
&\quad +\psi(p^{d+1})p^{(d+1)(k-1)}V_{p^{d+1}} \\
&= \sum_{0\leq i\leq d+1} \psi(p^i)p^{i(k-1)}U_{p^{d+1-i}}V_{p^i} \\
&= T_{d+1}'
\end{aligned}$$

C'est la relation que l'on souhaitait vérifier. □

3.3.4. Opérateurs T_m. On a maintenant les moyens de définir T_m, pour un entier m premier avec le niveau, par multiplicativité :

$$T_m = \prod_{p \nmid N} T_{p^{v_p(m)}}$$

On a, comme conséquence immédiate de ce qui précède :

Proposition 3.21. *Pour tout m premier avec le niveau, on a :*

$$T_m = \sum_{0<d|m} \psi_1\overline{\psi_2}(d)d^{k-1}U_{m/d}V_d$$

3.3.5. Action sur les coefficients de Fourier. On dispose de résultats sur l'action des opérateurs U et V sur les coefficients automorphes et de Fourier, et d'une expression des opérateurs de Hecke en termes de ceux-ci ; on peut donc obtenir relativement simplement une expression pour les coefficients de Fourier de l'image d'une forme par un opérateur de Hecke :

Proposition 3.22. *On considère F une forme de niveau N, et m premier avec N ; alors :*

$$a_n(F|T_m)\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = m^{\frac{k}{2}} \sum_{0<d|(m,n)} \psi_1\overline{\psi_2}(d)d^{-1}a_{\frac{mn}{d^2}}(F)\left(\begin{pmatrix} y/\frac{m}{d^2} & x/\frac{m}{d^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Démonstration. Cette expression découle directement de l'expression de T_m en termes d'opérateurs U et V, puis de l'expression des coefficients de Fourier pour ces opérateurs. □

3.4. Fonctions L

On veut maintenant associer une fonction L à certaines formes modulaires. L'association classique d'une série de Dirichlet à toute forme modulaire, via la transformée de Mellin, liée directement aux coefficients ne fonctionne pas dans le cadre de ce texte : le développement des formes presque-holomorphes comporte plus de coefficients qu'il n'en faudrait.

On sait néanmoins que dans le cas classique, cette série de Dirichlet n'est à proprement parler une fonction L que dans le cas où la forme est une forme propre des opérateurs de Hecke et Atkin-Lehner ; cela fait directement intervenir l'interprétation des coefficients de Fourier comme valeurs propres de ces opérateurs (à normalisation près).

On va donc commencer par discuter de ces formes propres, et établir quelques propriétés sur les valeurs propres associées.

3.4.1. Formes propres des opérateurs de Atkin-Lehner.

PROPOSITION 3.23. *Soit F est une forme de niveau N et p un nombre premier divisant N, alors si F est une forme propre de U_p de valeur propre λ_p :*
- *F est valeur propre pour U_{p^d}, pour tout $d \geq 0$; notons λ_{p^d} la valeur propre associée ;*
- *la suite $(\lambda_{p^d})_{d\geq 0}$ est géométrique.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de rappeler que par définition $U_{p^d} = U_p^d$! □

On considère que U_{p^0} est l'identité, de valeur propre associée $\lambda_{p^0} = 1$, alors :

COROLLAIRE 3.8. *On peut associer à la forme F un facteur d'Euler en p :*

$$L_p(F,s) = \sum_{d\geq 0} \lambda_{p^d} p^{ds} = \left(1 - \lambda_p p^{-s}\right)^{-1}$$

3.4.2. Formes propres des opérateurs de Hecke.

PROPOSITION 3.24. *Soit F est une forme de niveau N et p un nombre premier ne divisant pas N, alors si F est une forme propre de T_p, de valeur propre λ_p :*
- *F est valeur propre pour T_{p^d}, pour tout $d \geq 0$, notons λ_{p^d} la valeur propre associée ;*
- *la suite $(\lambda_{p^d})_{d\geq 0}$ vérifie la relation de récurrence linéaire suivante :*

$$\lambda_{p^{d+1}} = \lambda_p \lambda_{p^d} - \psi_1\overline{\psi_2}(p) p^{k-1} \lambda_{p^{d-1}}$$

DÉMONSTRATION. A nouveau, cela découle de la même relation vérifiée par définition par la suite $(T_{p^d})_{d\geq 0}$. □

On considère que T_{p^0} est l'identité, de valeur propre associée $\lambda_{p^0} = 1$, alors :

COROLLAIRE 3.9. *On peut donc associer à la forme F un facteur d'Euler en p :*

$$L_p(F,s) = \sum_{d\geq 0} \lambda_{p^d} p^{ds} = \left(1 - \lambda_p p^{-s} + \psi_1\overline{\psi_2}(p) p^{k-1-2s}\right)^{-1}$$

3.4.3. Lien valeurs propres-coefficients automorphes. On voit donc que les valeurs propres d'une forme modulaire sont un bon moyen de définir une fonction L ; cependant, si l'on souhaite prouver des résultats sur un tel objet, il est bon de relier les valeurs propres à quelque chose de plus calculable, comme les coefficients automorphes : c'est à nouveau le parallèle avec le cadre classique qui inspire la voie à suivre.

PROPOSITION 3.25. *Soit F une forme propre pour U_p, de valeur propre λ_p, alors pour tout entier n, on a :*

$$\lambda_p a_n(F)\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = p^{\frac{k}{2}} a_{pn}(F)\left(\begin{pmatrix} y/p & x/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

en particulier, si $n = 1$, il vient :

$$a_p(F)\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = p^{\frac{-k}{2}} \lambda_p a_1(F)\left(\begin{pmatrix} py & px \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

PROPOSITION 3.26. *Soit F une forme propre pour T_m, de valeur propre λ_m, alors pour tout n premier avec m, on a :*

$$\lambda_m a_n(F)\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = m^{\frac{k}{2}} a_{mn}(F)\left(\begin{pmatrix} y/m & x/m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

et en particulier, si $n = 1$, il vient :

$$a_m(F)\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = m^{-\frac{k}{2}} \lambda_m a_1(F)\left(\begin{pmatrix} my & mx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de comparer deux expressions de $a_n(F|T_m)$:

– celle obtenue en utilisant le fait que F est forme propre ;
– celle obtenue via la formule explicite pour les coefficients de Fourier, qui se résume à un seul terme car m et n sont premiers entre eux.

Le cas $n = 1$ se déduit du cas général (l'hypothèse m premier avec n est alors automatique !), tout simplement avec un changement de variable en y et en x, pour avoir une expression plus jolie. □

REMARQUE 3.3. *Ces égalités sont peut-être impressionnantes car elles dépendent de y et de x, cependant il faut se rappeler que ces coefficients automorphes sont à comparer à $a_n q^n$ dans le cadre classique, plutôt qu'à a_n seul.*

En particulier, si la forme F est holomorphe, cette comparaison s'applique, et les corollaires précédents sont exactement ceux qui donnent le lien entre coefficients de Fourier et valeur propre dans le cadre classique :

$$\begin{aligned} \lambda_m a_n &= a_{mn} \\ a_m &= \lambda_m a_1 \end{aligned}$$

La principale différence étant qu'ici on peut difficilement normaliser en divisant par a_1 : ce n'est pas une constante, mais une fonction !

3.4.4. Lien valeurs propres-coefficients de Fourier. A partir des propositions précédentes, ces liens sont aisés à établir :

PROPOSITION 3.27. *Si F est une forme propre pour U_p, de valeur propre associée λ_p, alors pour tout entier n :*

$$\lambda_p a_{n,r} = p^r a_{pn,r}$$

en particulier, si $n = 1$*, on a :*

$$a_{p,r} = p^{-r}\lambda_p a_{1,r}$$

Démonstration. On a d'une part :

$$\lambda_p a_n \left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \lambda_p y^{\frac{k}{2}} \left(\sum_r a_{n,r} R^r \right) q^n$$

et d'autre part :

$$p^{\frac{k}{2}} a_{pn} \left(\begin{pmatrix} \frac{y}{p} & \frac{x}{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = p^{\frac{k}{2}} \left(\frac{y}{p} \right)^{\frac{k}{2}} \left(\sum_r a_{pn,r} (pR)^r \right) q^n$$

et on sait que ces quantités sont égales... □

Proposition 3.28. *Si F est une forme propre de T_m de valeur propre associée λ_m, alors pour tout n premier avec m :*

$$\lambda_m a_{n,r} = m^r a_{mn,r}$$

et en particulier, si $n = 1$*, on a :*

$$a_{m,r} = m^{-r}\lambda_m a_{1,r}$$

Démonstration. On a d'une part :

$$\lambda_m a_n \left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \lambda_m y^{\frac{k}{2}} \left(\sum_r a_{n,r} R^r \right) q^n$$

et d'autre part :

$$m^{\frac{k}{2}} a_{mn} \left(\begin{pmatrix} \frac{y}{m} & \frac{x}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = m^{\frac{k}{2}} \left(\frac{y}{m} \right)^{\frac{k}{2}} \left(\sum_r a_{mn,r} (mR)^r \right) q^n$$

et on sait que ces expressions sont égales ; il suffit de comparer les coefficients dans les deux pour conclure. □

3.4.5. Linéarisation. On considère une forme F de niveau N, propre pour T_p, avec p ne divisant pas N. Le facteur d'Euler en p de F, tel que l'on vient de le définir, est donné par un polynôme de degré 2. On va voir que l'on peut s'arranger pour que ce facteur devienne "linéaire", c'est-à-dire soit donné par un polynôme de degré 1.

On factorise le polynôme (quitte à agrandir l'anneau dans lequel on travaille, s'il n'est pas algébriquement clos), de la façon suivante :

$$1 - \lambda_p X + \psi_1 \overline{\psi_2} p p^{k-1} X^2 = (1 - \alpha_p X)(1 - \alpha'_p X)$$

Proposition 3.29. *$F|(I - \alpha'_p V_p)$ est une forme modulaire de niveau Np, propre pour U_p, de valeur propre α_p.*

Démonstration. On va prouver que $F|(I - \alpha'_p V_p)|(U_p - \alpha_p I) = 0$, en utilisant :
- les relations de commutation entre les U_p et les V_p ;
- l'expression de T_p en termes de U_p et V_p ;
- les expressions de la somme et du produit de α_p et α'_p, que l'on déduit de leur définition.

Voici le calcul :

$$\begin{aligned}
F|(I-\alpha'_pV_p)|(U_p-\alpha_pI) &= F|(I-\alpha'_pV_p)(U_p-\alpha_pI)\\
&= F|(U_p-\alpha'_pV_pU_p-\alpha_pI+\alpha_p\alpha'_pV_p)\\
&= F|(U_p-(\alpha'_p+\alpha_p)I+\alpha_p\alpha'_pV_p)\\
&= F|(U_p-\lambda_pI+\psi_1\overline{\psi_2}(p)p^{k-1}V_p)\\
&= F|(T_p-\lambda_pI)\\
&= 0
\end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 3.10. *$F|(I-\alpha'_pV_p)$ a un facteur d'Euler en p, et ce facteur est linéaire.*

3.4.6. Définition de la fonction L. On se donne une forme F, de niveau N. On la suppose propre pour les opérateurs de Hecke ne divisant pas le niveau, et pour les opérateurs de Atkin-Lehner divisant le niveau.

On définit alors :

$$L_F(s)=\prod_{p|N}\left(1-\lambda_pp^{-s}\right)^{-1}\prod_{(p,N)=1}\left(1-\lambda_pp^{-s}+\psi_1\overline{\psi_2}pp^{k-1-2s}\right)^{-1}$$

3.4.7. Fonctions L et torsion. Il est clair que si f est une forme modulaire classique, propre pour les opérateurs de Hecke (et les opérateurs U en les places divisant le niveau) et normalisée, et F la forme adélique associée, alors : $L_F=L_f$.

En effet, on a vu que les opérateurs étaient compatibles via la correspondance, et on sait que dans le cadre classique, il y a égalité entre les coefficients de Fourier et les valeurs propres.

La torsion permet de pousser cette comparaison plus loin :

PROPOSITION 3.30. *Si F est une forme modulaire adélique, forme propre des opérateurs de Hecke, alors pour tout caractère ψ :*
- *$F\otimes\psi$ est forme propre des mêmes opérateurs ;*
- *$F\otimes\psi$ a les mêmes valeurs propres ;*
- *$L_{F\otimes\psi}=L_F$.*

DÉMONSTRATION. On a vu que la torsion était un isomorphisme qui respectait parfaitement la structure des formes modulaires vis-à-vis de tous les opérateur (de Atkin-Lehner, de Hecke, conjugaison complexe...), donc en particulier, elle transporte une forme adélique propre, à laquelle on sait donc associer une fonction L, vers une autre forme propre. Et les deux formes ont les mêmes valeurs propres, donc la même fonction L. □

3.4.8. Propriétés analytiques. On s'intéresse aux propriétés suivantes, classiques, des fonctions L :
- la convergence dans un demi-plan,
- l'équation fonctionnelle
- et le prolongement analytique

Jusqu'à présent, dans toute la discussion sur les formes modulaires, avec les opérateurs, on a toujours construit proprement les objets dans le cadre de $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, avant de vérifier que ce que l'on venait de définir correspondait à quelque chose de classique via la correspondance. Pour la première (et la seule !) fois ici, on va travailler dans l'autre sens.

On va vu que l'on pouvait, à torsion près, identifier toute fonction L d'une forme adélique, à la fonction L d'une forme classique. On en déduit que les fonctions L que l'on considère ont les mêmes propriétés. En particulier, elles ont une bande critique, et des valeurs spéciales.

3.5. Produit scalaire de Petersson

3.5.1. Définition. Etant données deux formes modulaires F et G, de mêmes poids k, niveau N et caractères, dont l'une au moins est parabolique, on définit ainsi leur produit :

$$\langle F, G\rangle_N = \int_{GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})/Z^+(\mathbb{R})SO_2(\mathbb{R})\times B(N)} \overline{F}(m)G(m)dm$$

Cette définition fait clairement apparaître que ce produit est une forme semi-linéaire en la première variable, et linéaire en la seconde.

On étend ce produit à toutes les formes de mêmes poids et niveau en décidant que les différents espaces avec caractères sont orthogonaux.

3.5.2. Propriétés élémentaires. Il est particulièrement intéressant de comparer ce produit que l'on vient d'appeller "de Petersson" avec le produit qui porte habituellement ce nom :

PROPOSITION 3.31. *Si f et g sont deux formes modulaires classiques de poids k, niveau N, et même caractère ψ, et F et G sont les formes adéliques associées, on a :*

$$\langle f, g\rangle_N = \langle F, G\rangle_N$$

DÉMONSTRATION. En fait, le théorème d'approximation forte montre que l'on a la correspondance suivante : $GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})/Z^+(\mathbb{R})SO_2(\mathbb{R}) \times B(N) \backsimeq \Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}$; si on compare cette correspondance entre espaces, et la correspondance entre formes modulaires classiques et adéliques, on voit que ces deux comparaisons sont compatibles, ce qui donne le résultat attendu. $\square$

On a vu que l'on choisit le niveau sur lequel on travaille. Il faut donc se donner des points de comparaisons entre les produits à différents niveaux :

PROPOSITION 3.32. (1) *si F et G sont des formes de niveaux N et NM respectivement, alors*

$$\langle F, G\rangle_{NM} = \langle F, Tr_N^{NM} G\rangle_N$$

(2) *si F et G sont des formes de niveau N, alors :*

$$\langle F, G\rangle_{NM} = [B(N) : B(NM)]\langle F, G\rangle_N$$

DÉMONSTRATION. (1) oui...

(2) on est en train de comparer l'intégration sur un domaine fondamental d'un groupe, et sur un domaine fondamental d'un sous-groupe ; de fonctions qui sont invariantes par le groupe entier. L'intégrale pour le sous-groupe est donc égale à l'indice fois l'intégrale pour le groupe.

$\square$

3.6. Intégrales de Rankin-Selberg

3.6.1. Définition. On appelle intégrale de Rankin-Selberg, un produit de Petersson du type :

$$\langle F, GE\rangle_N$$

où F et G sont des formes modulaires, avec F parabolique, et E est une série d'Eisenstein (analytique).

3.6.2. Expression en termes des fonctions de Whittaker. On se fixe une forme modulaire parabolique F, de poids k, une forme modulaire G de poids $l \leq k$, et φ une fonction localement constante à support compact.

On souhaite lier le produit de Rankin-Selberg de F et G (via $E^{\text{anal}}_{k-l,s}(\varphi)$) à leurs fonctions de Whittaker :

Proposition 3.33.

$$\begin{aligned}\langle F, GE^{\text{anal}}_{k-l,s}(\varphi)\rangle_N &= \zeta_{k-l,s}(\varphi)(1_f)\\ &\sum_{n>0}\int_0^{+\infty}\overline{A}B\left(\begin{pmatrix} ny & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)y^{\frac{k-l+2s}{2}-2}dy\end{aligned}$$

Démonstration. On commence par utiliser l'expression de la série d'Eisenstein comme somme sur des matrices, pour modifier le domaine d'intégration :

$$\begin{aligned}\langle F, GE^{\text{anal}}_{k-l,s}(\varphi)\rangle_N &= \int_{GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})/Z^+(\mathbb{R})SO_2(\mathbb{R})\times B(N)}\overline{F}GE^{\text{anal}}_{k-l,s}(\varphi)(g)dg\\ &= \int_{GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})/Z^+(\mathbb{R})SO_2(\mathbb{R})\times B(N)}\overline{F}G(g)|\det g|_{\mathbb{A}}^{-\frac{k-l+2s}{2}}\\ &\quad\sum_{\gamma\in B(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{Q})}\zeta_{k-l,s}(\varphi)(\gamma g_f)j_1(\gamma g_\infty,i)^{k-l}|j_1(\gamma g_\infty,i)|^{2s}dg\\ &= \int_{B(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})/Z^+(\mathbb{R})SO_2(\mathbb{R})\times B(N)}\overline{F}G(g)|\det g|_{\mathbb{A}}^{-\frac{k-l+2s}{2}}\\ &\quad\zeta_{k-l,s}(\varphi)(g_f)j_1(g_\infty,i)^{k-l}|j_1(g_\infty,i)|^{2s}dg\end{aligned}$$

on fait alors intervenir les développements automorphes de F et G :

$$\begin{aligned}F(g) &= \sum_{m>0}a_m(g)\\ G(g) &= \sum_{n\geq 0}b_n(g)\end{aligned}$$

qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\langle F, GE^{\text{anal}}_{k-l,s}(\varphi)\rangle_N &= \sum_{m,n}\int_{B(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})/Z^+(\mathbb{R})SO_2(\mathbb{R})\times B(N)}\overline{a_m}b_n(g)\\ &\quad|\det g|_{\mathbb{A}}^{-\frac{k-l+2s}{2}}\zeta_{k-l,s}(\varphi)(g_f)j_1(g_\infty,i)^{k-l}|j_1(g_\infty,i)|^{2s}dg\end{aligned}$$

Dans cette dernière intégrale, si on regarde le domaine d'intégration :
- en partie archimédienne, on peut paramétrer sur un quotient de $\mathbb{H}_\infty$, de sorte que $j_1(g_\infty,i)=y$, $dg_\infty = dxdy/y^2$ et $|\det g_\infty|_\infty = y$;
- en partie non-archimédienne, on est en fait sur $\{1\}$, donc il n'y a pas vraiment d'intégration ;

on a donc :

$$\begin{aligned}\langle F, GE^{\mathrm{anal}}_{k-l,s}(\varphi)\rangle_N &= \sum_{m,n} \int_{B(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})/Z^+(\mathbb{R})SO_2(\mathbb{R})\times B(N)} \overline{a_m} b_n \left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &\quad y^{\frac{k-l+2s}{2}} \zeta_{k-l,s}(\varphi)(1_f) \frac{dxdy}{y^2} dg_f\end{aligned}$$

On peut alors faire apparaître les fonctions de Whittaker, A et B de F et G respectivement :

$$\begin{aligned}\langle F, GE^{\mathrm{anal}}_{k-l,s}(\varphi)\rangle_N &= \sum_{m,n} \int_{B(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})/Z^+(\mathbb{R})SO_2(\mathbb{R})\times B(N)} \\ &\quad \overline{A}\left(\begin{pmatrix} my & mx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &\quad B\left(\begin{pmatrix} ny & nx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &\quad y^{\frac{k-l+2s}{2}} \zeta_{k-l,s}(\varphi)(1_f) \frac{dxdy}{y^2} dg_f\end{aligned}$$

dans cette dernière expression, on sait que les fonctions de Whittaker sont des polynômes en $1/4\pi y$, fois une exponentielle complexe de $x+iy$, fois une puissance de y. Cela signifie donc que l'intégrale le long de x annule les termes où $m \neq n$; il reste donc :

$$\begin{aligned}\langle F, GE^{\mathrm{anal}}_{k-l,s}(\varphi)\rangle_N &= \sum_{n>0} \int_{B(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})/Z^+(\mathbb{R})SO_2(\mathbb{R})\times B(N)} \\ &\quad \overline{A}B\left(\begin{pmatrix} ny & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &\quad y^{\frac{k-l+2s}{2}} \zeta_{k-l,s}(\varphi)(1_f) \frac{dxdy}{y^2} dg_f \\ &= \zeta_{k-l,s}(\varphi)(1_f) \\ &\quad \sum_{n>0} \int_0^{+\infty} \overline{A}B\left(\begin{pmatrix} ny & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) y^{\frac{k-l+2s}{2}-2} dy\end{aligned}$$

C'est le résultat de la proposition. □

3.6.3. Lien avec le produit double usuel. Dans cette section, on va calculer l'intégrale de Rankin-Selberg dans le cas particulier où les deux formes F et G sont holomorphes. Le but est de donner un exemple explicite de calcul d'une telle intégrale, qui sans être directement utile par la suite, devrait rendre plus compréhensible les calculs dans des cas plus difficiles.

On a :

$$A\left(\begin{pmatrix} ny & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = A_n y^{\frac{k}{2}} q^n$$

et :

$$B\left(\begin{pmatrix} ny & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = B_n y^{\frac{l}{2}} q^n$$

où A_n et B_n sont des constantes, qui sont les coefficients de Fourier des formes classiques associées (notons-les f et g respectivement).

DÉFINITION 3.1. *On rappelle que le produit double de f et g est donné par la formule suivante :*

$$D(s,f,g)=\sum_n a_n b_n n^{-s}$$

PROPOSITION 3.34. *Sous les hypothèses précédentes, on dispose de la relation suivante :*

$$\langle F, GE^{\mathrm{anal}}_{k-l,s}(\varphi)\rangle_N = \frac{\Gamma(k+s-1)}{(4\pi)^{k+s-1}}\zeta_{k-l,s}(\varphi)(1_f)D(k+s-1,f^\rho,g)$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
\langle F, GE^{\mathrm{anal}}_{k-l,s}(\varphi)\rangle_N &= \zeta_{k-l,s}(\varphi)(1_f) \\
&\quad \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_0^{+\infty}\overline{A}B\left(\left(\begin{array}{cc} ny & 0 \\ 0 & 1\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{cc} n & 0 \\ 0 & 1\end{array}\right)\right)y^{\frac{k-l+2s}{2}-2}dy \\
&= \zeta_{k-l,s}(\varphi)(1_f)\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_0^{+\infty}\overline{A_n}B_n\exp(-4\pi ny)y^{k+s-2}dy \\
&= \frac{\Gamma(k+s-1)}{(4\pi)^{k+s-1}}\zeta_{k-l,s}(\varphi)(1_f)\sum_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}B_n n^{-(k+s-1)} \\
&= \frac{\Gamma(k+s-1)}{(4\pi)^{k+s-1}}\zeta_{k-l,s}(\varphi)(1_f)D(k+s-1,f^\rho,g)
\end{aligned}$$

$\square$

CHAPITRE IV

Systèmes de projections et de formes linéaires compatibles

4.1. Projections sur des sous-espaces de dimension finie

On va s'attacher dans cette section à décrire un opérateur de projection sur les formes modulaires, à valeurs dans un autre espace de formes modulaires. Cet opérateur devra réunir un certain nombre de propriétés pour nous être utile par la suite : il devra être canonique, c'est-à-dire dépendre d'un minimum de choix arbitraires ; il devra respecter les conditions de congruences entre les coefficients de Fourier ; et enfin, son espace d'arrivée devra être de dimension finie.

4.1.1. Exemples. Passons d'abord en revue quelques exemples connus de projections dans les espaces modulaires, et voyons en quoi ils ne conviennent pas pour la suite de ce travail.

4.1.1.1. *Opérateur de trace.* On a vu en section 3.1.2 qu'étant donnée une forme modulaire, disons de niveau MN, on pouvait abaisser son niveau à N en sommant sur $B(MN)\backslash B(N)$.

Comme à chaque niveau on est sur un espace de dimension finie, cela semble prometteur ; néanmoins, pour définir cette trace, on s'est non seulement fixé le niveau d'arrivée (ce qui ne nous dérange pas), mais aussi le niveau de départ : cela signifie que cet opérateur de projection n'est pas canonique, et donc n'est pas satisfaisant.

4.1.1.2. *Trace normalisée.* Pour obtenir un opérateur de trace plus canonique, on n'a guère de choix : il faut diviser l'opérateur précédent par l'ordre de $B(MN)$ dans $B(N)$.

Cette opération a cependant un défaut rédhibitoire lorsque l'on cherche à établir des résultats de congruence : elle fait apparaître un dénominateur !

4.1.1.3. *Projecteur de Hida.* Si on se fixe un nombre premier $p \in S$, et si on considère le cas ordinaire (où $|a_p|_p = 1$), alors Hida a construit (voir par exemple [**17**]) un opérateur idempotent (noté e) qui permet de projeter les formes modulaires p-adiques sur un sous-espace, dit *ordinaire*, dont il prouve qu'il ne dépend pas des choix faits pour le construire, et est de dimension finie. Cela demande néanmoins de privilégier un nombre premier...

4.1.2. Projections (α, S)-caractéristiques.

4.1.2.1. *Espaces caractéristiques.* Pour chaque $l \in S$ et $\underline{\nu} \in \mathbb{N}^S$, on peut considérer le sous-espace α_l-caractéristique de U_l dans l'espace $\mathcal{M}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\nu}})$; notons-le $\mathcal{M}^{U_l,\alpha_l}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\nu}})$.

On a vu que l'on était capable d'écrire un supplémentaire canonique de cet espace, dont on connaît aussi une expression plus pratique pour travailler :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\nu}}) &= \mathcal{M}^{U_l,\alpha_l}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\nu}}) \oplus \cap_{n\geq 0} Im(U_l-\alpha_l I)^n \\ \mathcal{M}^{U_l,\alpha_l}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\nu}}) &= \cup_{n\geq 0} Ker(U_l-\alpha_l I)^n\end{aligned}$$

(et on sait que ces espaces sont stables par tous les opérateurs qui commutent avec U_l).

On va s'intéresser au sous-espace caractéristique commun à tous les couples (U_l,α_l), pour $l\in S$:

$$\mathcal{M}^{\alpha,S}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\nu}}) = \cap_{l\in S}\mathcal{M}^{U_l,\alpha_l}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\nu}})$$

4.1.2.2. *Tours $\mathcal{M}_\Sigma^{\alpha,S}$.* Ces sous-espaces sont compatibles avec les extensions de niveau, puisque ce sont des espaces de nilpotence pour les U_l, $l\in S$:

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{M}^{\alpha,S}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\mu}}) & \subset & \mathcal{M}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\mu}}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{M}^{\alpha,S}(N_\Sigma^{\underline{\nu}}) & \subset & \mathcal{M}(N_\Sigma^{\underline{\nu}})\end{array}$$

et comme ils sont aussi stables par tous les U_l, $l\in\Sigma$, on sait aussi que les diagrammes du type suivant sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{M}^{\alpha,S}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\mu}}) & \subset & \mathcal{M}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\mu}}) \\ {\scriptstyle U_S^{\underline{\mu}-\underline{\nu}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U_S^{\underline{\mu}-\underline{\nu}}} \\ \mathcal{M}^{\alpha,S}(N_\Sigma^{\underline{\nu}}) & \subset & \mathcal{M}(N_\Sigma^{\underline{\nu}})\end{array}$$

Ces deux faits montrent que ces espaces forment les étages d'une sous-tour $\mathcal{M}_\Sigma^{\alpha,S}$ de $\mathcal{M}_S$.

4.1.2.3. *Projecteurs $\pi_\Sigma^{\alpha,S}$.* Cette sous-tour est surtout intéressante car il est possible de définir, à chaque niveau de la tour, un opérateur de projection canonique :

$$\pi_{\Sigma,\underline{\nu}}^{\alpha,S} : \mathcal{M}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\nu}}) \to \mathcal{M}^{\alpha,S}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\nu}})$$

en effet, on dispose pour chaque couple (U_l,α_l) d'un supplémentaire canonique, à partir de ceux-ci on va donner un supplémentaire de $\mathcal{M}^{\alpha,S}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\nu}})$.

Plus précisément, on peut décomposer l'espace total en somme de sous-espaces stables pour les U_l, $l\in S$ de la façon suivante :

$$\mathcal{M}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\nu}}) = \mathcal{M}^{\alpha,S}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\nu}}) \oplus \left(\oplus \cap_{l\in S}\mathcal{M}^{U_l,\beta_l}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\nu}})\right)$$

où la somme directe porte sur les S-uplets $(\beta_l)_{l\in S}$ de valeurs propres de $(U_l)_{l\in S}$ distincts de $(\alpha_l)_{l\in S}$. On définit alors $\pi_{\Sigma,\underline{\nu}}^{\alpha,S}$ comme la projection sur la première composante.

Remarquons qu'un élément du supplémentaire peut aussi être caractérisé de la façon suivante, qui nous sera plus utile, dans la mesure où elle ne fait pas intervenir d'autres valeurs propres des opérateurs U_l que les α_l :

$$\oplus \cap_{l\in S}\mathcal{M}^{\beta_l,l}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\nu}}) = \cup_{l\in S}\cap_{n\in\mathbb{N}} Im(U_l-\alpha_l I)^n$$

Proposition 4.1. *A chaque étage le diagramme suivant est commutatif :*

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\mu}}) \arrow[r, "\pi^{\alpha,S}_{\Sigma,\underline{\mu}}"] \arrow[d, "U_\Sigma^{\underline{\mu}-\underline{\nu}}"'] & \mathcal{M}^{\alpha,S}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\mu}}) \arrow[d, "U_\Sigma^{\underline{\mu}-\underline{\nu}}"] \\
\mathcal{M}(N_\Sigma^{\underline{\nu}}) \arrow[r, "\pi^{\alpha,S}_{\Sigma,\underline{\nu}}"'] & \mathcal{M}^{\alpha,S}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\nu}})
\end{tikzcd}
$$

Démonstration. C'est clair : les projections sont définies via des espaces stables pour les U_l avec $l \in S$, et $U_\Sigma^{\underline{\mu}-\underline{\nu}}$ est une composition d'U_l avec $l \in \Sigma$; or tous ces opérateurs commutent deux à deux. $\square$

C'est pour les mêmes raisons que le diagramme suivant commute :

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\mu}}) \arrow[r, "\pi^{\alpha,S}_{\Sigma,\underline{\mu}}"] & \mathcal{M}^{\alpha,S}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\mu}}) \\
\mathcal{M}(N_\Sigma^{\underline{\nu}}) \arrow[r, "\pi^{\alpha,S}_{\Sigma,\underline{\nu}}"'] \arrow[u] & \mathcal{M}^{\alpha,S}(N_\Sigma M_\Sigma^{\underline{\nu}}) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Ces diagrammes montrent que la famille de projecteurs $\pi^{\alpha,S}_{\Sigma,\underline{\nu}}$, pour $\underline{\nu} \in \mathbb{N}^\Sigma$, forme un morphisme de Σ-tours :

$$\pi_\Sigma^{\alpha,S} : \mathcal{M}_\Sigma \to \mathcal{M}_\Sigma^{\alpha,S}$$

Les résultats suivants sur la tour $\mathcal{M}_S^{\alpha,S}$ montrent tout l'intérêt de la projection :

Proposition 4.2. $U_S^{\underline{\mu}-\underline{\nu}}$ *est un isomorphisme :*

$$\mathcal{M}^{\alpha,S}(N_S M_S^{\underline{\mu}}) \xrightarrow{\backsim} \mathcal{M}^{\alpha,S}(N_S M_S^{\underline{\nu}})$$

Démonstration. On peut se contenter de montrer que chaque U_l est un isomorphisme sur son espace α_l-caractéristique.

Or, on sait que pour tout $l \in S$, $U_l - \alpha_l I$ est nilpotent sur $\mathcal{M}^{U_l,\alpha_l}(N_S M_S^{\underline{\mu}})$, donc il existe une puissance $n > 0$ qui annule cette opérateur, et si on écrit la relation $(U_l - \alpha_l I)^n = 0$, après développement binomial, on voit qu'on obtient un polynôme d'opérateurs en U_l dont le coefficient constant est une matrice inversible ; donc U_l est bien inversible. $\square$

Ce résultat est lui aussi plus clair quand on le représente par un diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(N_S M_S^{\underline{\mu}}) \arrow[r, "\pi^{\alpha,S}_{S,\underline{\mu}}"] \arrow[d, "U_S^{\underline{\mu}-\underline{\nu}}"'] & \mathcal{M}^{\alpha,S}(N_S M_S^{\underline{\mu}}) \arrow[d, "U_S^{\underline{\mu}-\underline{\nu}}", "\wr"'] \\
\mathcal{M}(N_S^{\underline{\nu}}) \arrow[r, "\pi^{\alpha,S}_{S,\underline{\nu}}"'] & \mathcal{M}^{\alpha,S}(N_S M_S^{\underline{\nu}})
\end{tikzcd}
$$

Théorème 4.1 (théorème de la dimension finie). *Les tours $\mathcal{M}_S^{\alpha,S}$ sont de dimension finie.*

Démonstration. En effet, d'après la proposition, la dimension de l'espace $\mathcal{M}^{\alpha,S}(N_S M_S^{\underline{\nu}})$ est indépendante de $\underline{\nu} \in \mathbb{N}^S$... $\square$

COROLLAIRE 4.1. *On peut calculer la projection via la formule suivante :*

$$\pi^{\alpha,S}_{S,\underline{\nu}} = (U^{\underline{\nu}}_S)^{-1}\pi^{\alpha,S}_{S,\underline{0}}U^{\underline{\nu}}_S$$

REMARQUE 4.1. *Attention ! On n'a pas de garantie de dimension finie pour les tours $\mathcal{M}^{\alpha,S}_{\Sigma}$ si $S \subsetneq \Sigma$. Néanmoins, on verra que définir ces tours de façon générale permet de discuter plus aisément la variation horizontale.*

4.2. Familles de formes propres

Jusqu'à présent, on a travaillé avec une famille quelconque de valeurs propres non-nulles des opérateurs de Atkin-Lehner. On va maintenant faire des hypothèses sur cette famille.

On se fixe une forme modulaire $f \in \mathcal{M}_k(N, \psi_1, \psi_2, \overline{\mathbb{Q}})$, que l'on suppose propre pour les opérateurs de Hecke. Elle a donc une fonction L, et des polynômes de Hecke de degré deux. On supposera dorénavant que la famille $(\alpha_l)_{l \nmid N}$ est telle que α_l est une des racines réciproques du polynôme de Hecke de f en la place l (et on notera en général α'_l l'autre racine réciproque). On dira que la famille $(\alpha_l)_{l \nmid N}$ est *adaptée* à f.

4.2.1. Formes $f_{\alpha,S,0}$. On souhaite associer à f et à la suite adaptée de racines réciproques $(\alpha_l)_{l \nmid N}$ une famille explicite de formes propres pour les $(U_l)_{l \in S}$, indexée par S.

Pour chaque $l \in S$, on écrit le polynôme de Hecke de f en l sous la forme $(1 - \alpha_l X)(1 - \alpha'_l X)$; et on définit alors :

$$f_{\alpha,S,0} = f | \prod_{l \in S}(I - \alpha'_l V_l)$$

ces opérations modifient les facteur d'Euler de f en les places $l \in S$ pour les linéariser :

PROPOSITION 4.3. *La forme modulaire $f_{\alpha,S,0}$:*
- *est forme propre des opérateurs de Hecke $(T_l)_{l \nmid N_S}$, de mêmes valeurs propres que f ;*
- *est une forme α_l-propre des U_l pour $l \in S$.*

4.2.2. Formes $f^0_{\alpha,S}$. A partir de la famille précédente, on peut construire une autre famille, de la façon suivante :

$$f^0_{\alpha,S} = f^{\rho}_{\alpha,S,0}|_{W_{N_S}}$$

On rappelle que l'opérateur adjoint de U_S (pour le produit scalaire de Petersson), est donné par la formule suivante : $U^*_S = W^{-1}_{N_S} U_S W_{N_S}$;

PROPOSITION 4.4. *La fonction $f^0_{\alpha,S}$ a conservé un certain nombre de propriétés communes avec f :*
- *elle est forme propre des opérateurs de Hecke $(T_l)_{l \nmid N_S}$, avec les mêmes valeurs propres que celles de f ;*
- *elle est une forme $\overline{\alpha_l}$-propre pour U^*_l, quel que soit $l \in S$;*

4.3. Définition d'une forme linéaire sur $\mathcal{M}_S$

On conserve les notations précédentes pour f et la famille adaptée de racines réciproques $(\alpha_l)_{l \nmid N}$.

4.3.1. Définition naïve. On va d'abord définir une première forme linéaire sur le rez-de-chaussée $\mathcal{M}(N_S)$, par la formule suivante :

$$g \mapsto \langle f^0_{\alpha,S}, g\rangle_{N_S}$$

puis on va voir comment la modifier pour obtenir une forme qui se prolonge bien en niveau, dont on connaitra l'algébricité, et dont la variation horizontale sera explicite.

Commençons déjà par voir une propriété intéressante :

PROPOSITION 4.5. *Cette forme linéaire s'annule sur $Ker(\pi^{\alpha,S}_{S,\underline{0}})$;*

DÉMONSTRATION. Soit g dans le noyau ; d'après les expressions explicites dont on dispose pour les sous-espaces, il existe donc $l \in S$ tel que $g \in \cap_n Im(U_l - \alpha_l I)^n$. Ecrivons $g = (U_l - \alpha_l I)h$; on a alors :

$$\begin{aligned}
\langle f^0_{\alpha,S}, g\rangle_{N_S} &= \langle f^0_{\alpha,S}, (U_l - \alpha_l I)h\rangle_{N_S} \\
&= \langle (U_l - \alpha_l I)^* f^0_{\alpha,S}, h\rangle_{N_S} \\
&= \langle (U_l^* - \overline{\alpha_l} I) f^0_{\alpha,S}, h\rangle_{N_S} \\
&= \langle 0, h\rangle_{N_S} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Ce résultat est plus explicite exprimé sous forme de diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(N_S) \arrow[r, "\pi_0^{\alpha,S}"] \arrow[d, "\ell_0^{\alpha,S}"'] & \mathcal{M}^{\alpha,S}(N_S) \arrow[dl, dashed] \\
\mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

4.3.2. Dépendance en niveau. On souhaite maintenant prolonger cette application linéaire à toute la tour $\mathcal{M}_S$. Pour cela, on va "pousser" les formes au rez-de-chaussée, appliquer la forme précédent, puis diviser par un facteur pour compenser.

Plus précisément, on définit une forme linéaire sur $\mathcal{M}(N_S M_S^{\underline{\nu}})$ via :

$$g \mapsto \langle f^0_{\alpha,S}, \alpha_S^{-\underline{\nu}} U_S^{\underline{\nu}} g\rangle_{N_S}$$

Il y a deux points intéressants à discuter sur cette famille de formes linéaires :

(1) la compatibilité avec les ascenseurs ascendants : elle exprime qu'une même forme, vue à deux niveaux différents, aura malgré tout la même image ;

(2) la variation via les ascenseurs descendants : on ne peut pas espérer une compatibilité totale avec les deux types d'ascenseurs, et il est normal de préférer la cohérence ascendante, néanmoins, il est intéressant de voir comment se comporte les opérateurs U vus à travers ces formes.

Discutons d'abord le premier point : on considère $g \in \mathcal{M}(N_S M_S^{\underline{\nu}})$, qui est aussi un élément de $\mathcal{M}(N_S M_S^{\underline{\mu}})$, où $\underline{\mu} \geq \underline{\nu}$, et on va comparer ses images :

$$\begin{aligned}
\langle f^0_{\alpha,S}, \alpha_S^{-\underline{\mu}} U_S^{\underline{\mu}} g\rangle_{N_S} &= \langle (U_S^*)^{\underline{\mu}-\underline{\nu}} f^0_{\alpha,S}, \alpha_S^{-\underline{\mu}} U_S^{\underline{\nu}} g\rangle_{N_S} \\
&= \langle \overline{\alpha_S}^{\underline{\mu}-\underline{\nu}} f^0_{\alpha,S}, \alpha_S^{-\underline{\mu}} U_S^{\underline{\nu}} g\rangle_{N_S} \\
&= \langle f^0_{\alpha,S}, \alpha_S^{-\underline{\nu}} U_S^{\underline{\nu}} g\rangle_{N_S}
\end{aligned}$$

Ceci exprime que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(N_S M_S^{\underline{\mu}}) \arrow[r] & \mathbb{C} \\ \mathcal{M}(N_S M_S^{\underline{\nu}}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathbb{C} \arrow[u, "Id"'] \end{tikzcd}$$

Passons au second point : il s'agit de choisir $g \in \mathcal{M}(N_S M_S^{\underline{\mu}})$, et de comparer les images de g et de $U_S^{\underline{\mu}-\underline{\nu}} g$ via les formes linéaires aux étages $\underline{\mu}$ et $\underline{\nu}$ respectivement :

$$\begin{aligned} \langle f^0_{\alpha,S}, \alpha_S^{-\underline{\nu}} U_S^{\underline{\nu}} (U_S^{\underline{\mu}-\underline{\nu}} g) \rangle_{N_S} &= \langle f^0_{\alpha,S}, \alpha_S^{-\underline{\nu}} U_S^{\underline{\mu}} g \rangle_{N_S} \\ &= \alpha_S^{\underline{\mu}-\underline{\nu}} \langle f^0_{\alpha,S}, \alpha_S^{-\underline{\mu}} U_S^{\underline{\mu}} g \rangle_{N_S} \end{aligned}$$

Ce que l'on exprime plus clairement par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(N_S M_S^{\underline{\mu}}) \arrow[r] \arrow[d, "U_S^{\underline{\mu}-\underline{\nu}}"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\times \alpha_S^{\underline{\mu}-\underline{\nu}}"] \\ \mathcal{M}(N_S M_S^{\underline{\nu}}) \arrow[r] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

On peut résumer ces résultats en appelant $\mathbb{C}^{\alpha,S}$ la S-tour dont chaque étage est $\mathbb{C}$, et dont les ascenseurs sont donnés par les diagrammes que l'on vient de voir, de sorte que les formes linéaires définissent un morphisme : $\mathbb{M}_S \to \mathbb{C}^{\alpha,S}$. On peut aussi considérer que l'on vient de définir une forme linéaire sur la tour, qui transforme les opérateurs U en simples homothéties.

4.3.3. Factorisation par $\mathcal{M}_S^{\alpha,S}$. Il reste un point à discuter : on a vu qu'au rez-de-chaussée, la forme linéaire se factorisait par l'espace (α, S)-caractéristique. Qu'est devenue cette propriété ?

PROPOSITION 4.6. *La forme linéaire que l'on vient de définir se factorise :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_S \arrow[r, "\pi_S^{\alpha,S}"] \arrow[d] & \mathcal{M}_S^{\alpha,S} \arrow[dl, dashed] \\ \mathbb{C}^{\alpha,S} & \end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. La preuve est tout à fait similaire à ce qui a été fait pour le rez-de-chaussée ; il suffit juste d'utiliser le fait que les $(U_l)_{l \in S}$ commutent entre eux... $\square$

4.3.4. Contrôle algébrique. On s'est jusqu'à présent gardé de donner un nom à la forme linéaire que l'on a étudié car il lui manquait une propriété importante, sans laquelle cette discussion perdrait tout son intérêt : on souhaiterait que l'image d'une forme à coefficients algébriques soit algébrique (on dit que la forme est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$).

Cette propriété ne va pas de soi : on a utilisé le produit scalaire de Petersson pour définir la forme linéaire ; ce qui nous place a priori sur $\mathbb{C}$ sans grand'espoir de contrôler l'espace des valeurs.

On définit la forme linéaire modifiée suivante sur $\mathcal{M}(N_S M_S^{\underline{\nu}})$:

$$\ell_{f,\underline{\nu}}^{\alpha,S} : g \mapsto \frac{\langle f_{\alpha,S}^0, \alpha_S^{-\underline{\nu}} U_S^{\underline{\nu}} g\rangle_{N_S}}{\langle f_{\alpha,S}^0, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}}$$

Proposition 4.7. (1) *Cette famille de formes linéaires induit un morphisme de S-tours : $\ell_f^{\alpha,S} : \mathcal{M}_S \to \mathbb{C}^{\alpha,S}$.*

(2) *Ce morphisme se factorise par $\mathcal{M}_S^{\alpha,S}$:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_S \arrow[r, "\ell_f^{\alpha,S}"] \arrow[d, "\pi_S^{\alpha,S}"'] & \mathbb{C}^{\alpha,S} \\
\mathcal{M}_S^{\alpha,S} \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

(3) *$\ell_f^{\alpha,S}$ est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Démonstration. Cette forme ne diffère de celle déjà discutée que par un facteur constant ; il suffit donc d'établir le seul résultat nouveau : elle est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$!

Pour cela, on remarque d'abord que $\ell_f^{\alpha,S}(f_{\alpha,S,0}) = 1$, ce qui signifie que l'on connaît une forme à coefficients algébriques dont l'image est algébrique.

Par ailleurs, le noyau de la forme linéaire est l'orthogonal par le produit scalaire de Petersson de l'espace engendré par une forme propre de l'algèbre de Hecke. Donc cet espace est stable pour cette algèbre ; on sait que cela implique qu'il est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Finalement, si les éléments de définition de la forme sont tous définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$, c'est que la forme elle-même est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$! $\square$

Remarque 4.2. *On voit que ce facteur de correction est fondamental pour obtenir une forme linéaire à valeurs algébriques, car sans lui, il n'est pas sûr que l'on soit capable d'exhiber une forme modulaire à coefficients algébriques dont l'image est algébrique ! Néanmoins, on voit qu'il rajoute une dépendance en S supplémentaire, et il nécessitera donc une discussion particulière dans l'étude de la variation horizontale.*

Remarque 4.3. *On peut légitimement se demander si le facteur par lequel on divise ne risque pas de s'annuler. Ce point, qui n'est pas évident, est prouvé par Hida dans* [**17**].

4.4. Variation horizontale de ces formes linéaires

Le but de cette partie est de comparer les formes $\ell_f^{\alpha,S}$ et $\ell_f^{\alpha,\Sigma}$. Pour cela, on étudie séparément tout ce qui dépend de S dans leur définition.

4.4.1. Comparaison de $f_{\alpha,S,0}$ et $f_{\alpha,\Sigma,0}$. Il suffit d'écrire les définitions :

$$\begin{aligned}
f_{\alpha,\Sigma,0} &= f|\prod_{l\in\Sigma}(I - \alpha_l' V_l) \\
&= f_{\alpha,S,0}|\prod_{l\in\Sigma - S}(I - \alpha_l' V_l)
\end{aligned}$$

4.4.2. Comparaison de $f^0_{\alpha,S}$ et $f^0_{\alpha,\Sigma}$. On utilise la comparaison précédente, pour écrire :

$$\begin{aligned} f^0_{\alpha,\Sigma} &= f^{\rho}_{\alpha,\Sigma,0}|W_{N_\Sigma} \\ &= f^{\rho}_{\alpha,S,0}|\prod_{l\in\Sigma-S}(I-\overline{\alpha'_l}V_l)W_{N_\Sigma} \\ &= f^0_{\alpha,S}|W^{-1}_{N_S}\prod_{l\in\Sigma-S}(I-\overline{\alpha'_l}V_l)W_{N_\Sigma} \end{aligned}$$

4.4.3. Comparaison des formes sans normalisation algébrique. On souhaite maintenant comparer les formes $\langle f^0_{\alpha,S},.\rangle_{N_S}$ et $\langle f^0_{\alpha,\Sigma},.\rangle_{N_\Sigma}$, appliquées à une même forme g, de niveau N_S, que l'on voit aussi de niveau N_Σ.

Comme g est de niveau N_S, elle fait apparaître un opérateur de trace :

$$\begin{aligned} \langle f^0_{\alpha,\Sigma},g\rangle_{N_\Sigma} &= \langle f^0_{\alpha,\Sigma}|Tr^{\Sigma}_S,g\rangle_{N_S} \\ &= \left\langle f^0_{\alpha,S}|W^{-1}_{N_S}\prod_{l\in\Sigma-S}(I-\overline{\alpha'_l}V_l)W_{N_\Sigma}Tr^{\Sigma}_S,g\right\rangle_{N_S} \end{aligned}$$

pour des raisons de simplification d'écriture, on va noter :

$$P_f^{\alpha,S\subset\Sigma}=W^{-1}_{N_S}\prod_{l\in\Sigma-S}(I-\overline{\alpha'_l}V_l)W_{N_\Sigma}Tr^{\Sigma}_S$$

on va montrer que cet opérateur est un “bon” opérateur de Hecke pour $f^0_{\alpha,S}$ (et pour f, donc de même valeur propre associée) ; ce qui permet d'écrire un des liens explicites cherchés :

Proposition 4.8.

$$\langle f^0_{\alpha,\Sigma},g\rangle_{N_\Sigma}=\overline{\lambda_f}\left(P_f^{\alpha,S\subset\Sigma}\right)\langle f^0_{\alpha,S},g\rangle_{N_S}$$

où λ_f est l'opérateur de valeur propre de f.

Démonstration. Si on sait que l'opérateur $P_f^{\alpha,S\subset\Sigma}$ est un bon opérateur de Hecke pour $f^0_{\alpha,S}$, son action sur cette forme est simplement la multiplication par la valeur propre associée.

Or cette valeur propre est aussi la valeur propre associée par f au même opérateur, et le produit de Petersson est semi-linéaire en la première variable : on a bien ce qui était cherché. □

Montrons maintenant le résultat qui nous a servi :

Proposition 4.9. *L'opérateur $P_f^{\alpha,S\subset\Sigma}$ admet l'expression suivante en termes d'opérateurs de Hecke :*

$$P_f^{\alpha,S\subset\Sigma}=\sum_{M_\Sigma=M_S dd'}\overline{\alpha'_d}\mu(d)\left(\prod_{l|d}l+1\right)d^{-\frac{k}{2}}(d')^{1-\frac{k}{2}}T(d')$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} P_f^{\alpha,S\subset\Sigma} &= W_{N_S}^{-1}\prod_{l\in\Sigma-S}(I-\overline{\alpha'_l}V_l)W_{N_\Sigma}Tr_S^\Sigma \\ &= W_{N_S}^{-1}\sum_{M_\Sigma=M_Sdd'}\mu(d)\overline{\alpha'_d}V_dW_{N_\Sigma}Tr_S^\Sigma \\ &= \sum_{M_\Sigma=M_Sdd'}\mu(d)\overline{\alpha'_d}W_{N_S}^{-1}V_dW_{N_\Sigma}Tr_S^\Sigma \end{aligned}$$

dans cette dernière égalité, on applique la règle de commutation suivante :

$$V_dW_{N_\Sigma} = (dd')^{\frac{k}{2}}d^{-k}W_{N_S}V(d')$$

qui permet de simplifier les opérateurs W. On remplace alors les opérateurs V par leur forme matricielle :

$$\begin{aligned} P_f^{\alpha,S\subset\Sigma} &= \sum_{M_\Sigma=M_Sdd'}\mu(d)\overline{\alpha'_d}(dd')^{\frac{k}{2}}d^{-k}V(d')Tr_S^\Sigma \\ &= \sum_{M_\Sigma=M_Sdd'}\mu(d)\overline{\alpha'_d}(dd')^{\frac{k}{2}}d^{-k}d'^{-\frac{k}{2}}\begin{pmatrix} d' & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}Tr_S^\Sigma \\ &= \sum_{M_\Sigma=M_Sdd'}\mu(d)\overline{\alpha'_d}d^{-\frac{k}{2}}\begin{pmatrix} d' & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}Tr_S^\Sigma \end{aligned}$$

Notons $g(d') = \begin{pmatrix} d' & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$; pour finir, il faut donc comparer $g(d')Tr_S^\Sigma$ et $T(d')$.

Notons encore $\Gamma' = \Gamma_0(N_\Sigma)$ et $\Gamma = \Gamma_0(N_S)$. $g(d')Tr_S^\Sigma$ fait intervenir les classes $\Gamma g(d')/\Gamma'$, alors que l'opérateur de Hecke fait intervenir $\Gamma g(d')/\Gamma$. Il s'agit donc d'étudier l'action à droite de Γ sur $\Gamma g(d')$. Le stabilisateur de cette action est $\Gamma'' = g(d')^{-1}\Gamma g(d')\cap\Gamma$. On a les inclusions suivantes : $\Gamma'\subset\Gamma''\subset\Gamma$; cela permet de voir que $g(d')Tr_S^\Sigma$ agit comme $[\Gamma'':\Gamma']T(d')$.

On doit donc calculer $[\Gamma'':\Gamma']$. Mais c'est facile ; en effet, on voit que $\Gamma'' = \Gamma_0(N_Sd')$; donc on est en train d'évaluer $[\Gamma(N_Sd'):\Gamma(N_Sd'd)]$, ce qui se fait par induction sur le nombre de facteurs premiers de d, et donne : $[\Gamma'':\Gamma'] = \prod_{l|d}(l+1)$, ce qui conclut la preuve. □

PROPOSITION 4.10. *Si on suppose que $\Sigma = S\sqcup\{p\}$ et que $\lambda_f(T_p)\neq 0$, on peut écrire la valeur propre plus explicitement :*

$$\lambda_f\big(P_f^{\alpha,S\subset\Sigma}\big) = p^{1-\frac{k}{2}}\lambda_f(T_p)\left(1-\frac{(p+1)\overline{\alpha'_p}}{p\lambda_f(T_p)}\right)$$

REMARQUE 4.4. *Il est clair que cette comparaison dans les rez-de-chaussées est suffisante, puisque de toutes façons, on a vu que la forme $\ell_f^{\alpha,S}$ était définie en poussant les formes à ce niveau.*

4.4.4. Comparaison des facteurs de normalisation algébrique. Pour finir l'étude, il reste à comparer $\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}$ et $\langle f^0_{\alpha,\Sigma}, f_{\alpha,\Sigma,0}\rangle_{N_\Sigma}$. Cette comparaison est assez complexe ; on va donc faire l'hypothèse que $\Sigma = S\sqcup\{p\}$, en déduisant ensuite le cas général par induction.

PROPOSITION 4.11. *On a :*

$$\begin{aligned}\langle f^0_{\alpha,\Sigma}, f_{\alpha,\Sigma,0}\rangle_{N_\Sigma} &= p^{-\frac{k}{2}}[p\overline{\lambda_f}(T_p) - 2\alpha'_p(p+1) + {\alpha'_p}^2 p^{1-k}\lambda_f(T_p)] \\ &\quad \times \langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On réécrit de façon plus explicite :

$$\begin{aligned}f_{\alpha,\Sigma,0} &= f_{\alpha,S,0}|(I - \alpha'_p V_p) \\ &= f_{\alpha,S,0} - \alpha'_p f_{\alpha,S,0}|V_p \\ &= f_{\alpha,S,0} - \alpha'_p p^{-\frac{k}{2}} f_{\alpha,S,0}|g(p)\end{aligned}$$

où on note : $g(p) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De manière similaire :

$$\begin{aligned}f^0_{\alpha,\Sigma} &= f^0_{\alpha,S}|W^{-1}_{N_S}(I - \overline{\alpha'_p}V_p)W_{N_\Sigma} \\ &= f^0_{\alpha,S}|W^{-1}_{N_S}W_{N_\Sigma} - \overline{\alpha'_p} f^0_{\alpha,S}|W^{-1}_{N_S}V_pW_{N_\Sigma} \\ &= f^0_{\alpha,S}|g(p) - \overline{\alpha'_p} f^0_{\alpha,S}|W^{-1}_{N_S}V_pW_{N_\Sigma} \\ &= f^0_{\alpha,S}|g(p) - \overline{\alpha'_p} p^{-\frac{k}{2}} f^0_{\alpha,S}\end{aligned}$$

(où on a utilisé la même règle de commutation des opérateurs V et W que précédemment).

On peut alors développer le facteur d'algébricité :

$$\begin{aligned}\langle f^0_{\alpha,\Sigma}, f_{\alpha,\Sigma,0}\rangle_{N_\Sigma} &= \langle f^0_{\alpha,S}|g(p), f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_\Sigma} \\ &\quad -\alpha'_p p^{-\frac{k}{2}}\langle f^0_{\alpha,S}|g(p), f_{\alpha,S,0}|g(p)\rangle_{N_\Sigma} \\ &\quad -\alpha'_p p^{-\frac{k}{2}}\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_\Sigma} \\ &\quad +\alpha'_p p^{-\frac{k}{2}}\alpha'_p p^{-\frac{k}{2}}\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}|g(p)\rangle_{N_\Sigma}\end{aligned}$$

ce qui nous ramène à l'étude de quatre produits.

Comme $f_{\alpha,S,0}$ est de niveau N_S, le produit de Petersson avec cette forme, s'il est calculé à un niveau supérieur, redescend via l'opérateur de trace :

$$\begin{aligned}\langle f^0_{\alpha,S}|g(p), f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_\Sigma} &= \langle f^0_{\alpha,S}|g(p)Tr^{N_\Sigma}_{N_S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S} \\ &= p^{1-\frac{k}{2}}\langle f^0_{\alpha,S}|T_p, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S} \\ &= p^{1-\frac{k}{2}}\overline{\lambda_f}(T_p)\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}\end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons, comme $f^0_{\alpha,S,0}$ est de niveau N_S :

$$\begin{aligned}\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}|g(p)\rangle_{N_\Sigma} &= \langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}|g(p)Tr^{N_\Sigma}_{N_S}\rangle_{N_S} \\ &= p^{1-\frac{k}{2}}\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}|T_p\rangle_{N_S} \\ &= p^{1-\frac{k}{2}}\lambda_f(T_p)\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}\end{aligned}$$

Et dans le cas où les deux formes sont de niveau N_S mais le produit est calculé au niveau N_Σ :

$$\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_\Sigma} = (p+1)\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}$$

Il reste enfin à calculer :

$$\langle f^0_{\alpha,S}|g(p), f_{\alpha,S,0}|g(p)\rangle_{N_\Sigma} = (p+1)\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,\Sigma,0}\rangle_{N_S}$$

On dispose alors de l'expression de chacun des quatres produits en termes du facteur d'algébricité sur S, qui permet d'écrire la comparaison :

$$\begin{aligned}\langle f^0_{\alpha,\Sigma}, f_{\alpha,\Sigma,0}\rangle_{N_\Sigma} &= [p^{1-\frac{k}{2}}\overline{\lambda_f}(T_p) - 2\alpha'_p p^{-\frac{k}{2}}(p+1) + {\alpha'_p}^2 p^{-k} p^{1-\frac{k}{2}}\lambda_f(T_p)] \\ &\quad \times\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S} \\ &= p^{-\frac{k}{2}}[p\overline{\lambda_f}(T_p) - 2\alpha'_p(p+1) + {\alpha'_p}^2 p^{1-k}\lambda_f(T_p)] \\ &\quad \times\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}\end{aligned}$$

et finit la preuve. □

4.4.5. Synthèse : forme linéaire indépendante de S. On dispose maintenant de tous les éléments pour énoncer le lien entre $\ell_f^{\alpha,\Sigma}$ et $\ell_f^{\alpha,S}$:

THÉORÈME 4.2. *Si on sait que $\lambda_f(T_l) \neq 0$ pour tout $l \in \Sigma - S$, alors :*

$$\ell_f^{\alpha,\Sigma} = \prod_{l\in\Sigma-S}\left[\left(1 - \frac{(p+1)\alpha'_p}{p\overline{\lambda_f}(T_p)}\right)\left(1 - \frac{2(p+1)\alpha'_p}{p\overline{\lambda_f}(T_p)} + \frac{{\alpha'_p}^2\lambda_f(T_p)}{p^k\overline{\lambda_f}(T_p)}\right)^{-1}\right]\ell_f^{\alpha,S}$$

DÉMONSTRATION. On utilise les comparaisons établies précédemment pour écrire (on applique les formes linéaires à une forme g que l'on considère aux niveaux N_S et N_Σ) :

$$\begin{aligned}\ell_f^{\alpha,\Sigma}(g) &= \frac{\langle f^0_{\alpha,\Sigma}, g\rangle_{N_\Sigma}}{\langle f^0_{\alpha,\Sigma}, f_{\alpha,\Sigma,0}\rangle_{N_\Sigma}} \\ &= \frac{\langle f^0_{\alpha,\Sigma}, g\rangle_{N_\Sigma}}{p^{-\frac{k}{2}}[p\overline{\lambda_f}(T_p) - 2\alpha'_p(p+1) + {\alpha'_p}^2 p^{1-k}\lambda_f(T_p)]\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}} \\ &= \frac{p^{1-\frac{k}{2}}\overline{\lambda_f}(T_p)\left(1 - \frac{(p+1)\alpha'_p}{p\overline{\lambda_f}(T_p)}\right)\langle f^0_{\alpha,S}, g\rangle_{N_S}}{p^{-\frac{k}{2}}[p\overline{\lambda_f}(T_p) - 2\alpha'_p(p+1) + {\alpha'_p}^2 p^{1-k}\lambda_f(T_p)]\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}} \\ &= \frac{p^{1-\frac{k}{2}}\overline{\lambda_f}(T_p)\left(1 - \frac{(p+1)\alpha'_p}{p\overline{\lambda_f}(T_p)}\right)}{p^{-\frac{k}{2}}[p\overline{\lambda_f}(T_p) - 2\alpha'_p(p+1) + {\alpha'_p}^2 p^{1-k}\lambda_f(T_p)]}\frac{\langle f^0_{\alpha,S}, g\rangle_{N_S}}{\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}} \\ &= \frac{p^{1-\frac{k}{2}}\overline{\lambda_f}(T_p)\left(1 - \frac{(p+1)\alpha'_p}{p\overline{\lambda_f}(T_p)}\right)}{p^{-\frac{k}{2}}[p\overline{\lambda_f}(T_p) - 2\alpha'_p(p+1) + {\alpha'_p}^2 p^{1-k}\lambda_f(T_p)]}\ell_f^{\alpha,S}(g)\end{aligned}$$

il suffit alors de forcer la mise en facteur de $p^{1-\frac{k}{2}}\overline{\lambda_f}(T_p)$ au dénominateur pour simplifier l'écriture et se ramener au résultat attendu. □

On déduit immédiatement de ce résultat :

THÉORÈME 4.3. *Il existe un unique système de formes linéaires définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{L}_f^{\alpha,S}$, défini sur toutes les tours $\mathcal{M}_S$, avec S fini ne contenant que des l tels que $\lambda_f(T_l) \neq 0$, compatible avec les extensions $\mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_\Sigma$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de diviser $\ell_f^{\alpha,S}$ par le produit d'Euler qui définit sa variation horizontale. Plus précisément, on pose :

$$\mathcal{L}_f^{\alpha,S} = \left[\prod_{p\in S}\left(1 - \frac{(p+1)\alpha'_p}{p\overline{\lambda_f}(T_p)}\right)\left(1 - \frac{2(p+1)\alpha'_p}{p\overline{\lambda_f}(T_p)} + \frac{{\alpha'_p}^2\lambda_f(T_p)}{p^k\overline{\lambda_f}(T_p)}\right)^{-1}\right]^{-1}\ell_f^{\alpha,S}$$

et l'étude précédente montre que cette forme linéaire est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, passe au quotient par l'espace (α, S)-caractéristique sur $\mathcal{M}_S$, et est invariante par variation horizontale. $\square$

CHAPITRE V

Construction de distributions modulaires S-adiques

5.1. Distributions sur Y_S

5.1.1. Fonction-tests. Si on considère les fonctions localement constantes sur Y_S à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}$ (notons cet espace $\mathcal{C}^{loc-const}(Y_S, \overline{\mathbb{Q}})$), il est clair que les indicatrices 1_U des ouverts élémentaires U l'engendrent ; en effet l'espace Y_S est compact.

Cet espace contient de plus tous les caractères de Dirichlet non-ramifiés en dehors de S, et on dispose de la formule suivante :

$$1_{a+(M_S^{\nu})} = \frac{1}{\varphi(M_S^{\nu})} \sum_{\chi \bmod M_S^{\nu}} \overline{\chi}(a)\chi$$

qui montre que les caractères de Dirichlet engendrent aussi cet espace (φ désigne ici l'indicatrice d'Euler).

5.1.2. Définition. Une distribution sur Y_S, à valeurs dans un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel V, est une application linéaire : $\mathcal{C}^{loc-const}(Y_S, \overline{\mathbb{Q}}) \to V$. En particulier, pour définir une telle distribution, il suffit de la définir soit sur les ouverts élémentaires, soit sur les caractères de Dirichlet (avec à chaque fois des conditions de recollement).

On introduit les notations intégrales suivantes, où U est un ouvert, φ une fonction-test et Φ une distribution :

$$\begin{aligned} \int \varphi d\Phi &= \Phi(\varphi) \\ \int_U \varphi d\Phi &= \Phi\left(1_U \varphi\right) \\ \Phi(U) &= \Phi(1_U) \end{aligned}$$

5.1.3. Convolution des distributions. On se donne deux distributions Φ_1 et Φ_2 à valeurs dans deux $\overline{\mathbb{Q}}$-espaces vectoriels V_1 et V_2 respectivement, et une fonction-test α. On définit la distribution convolée de Φ_1 et Φ_2 tordue par α, à valeurs dans $V_1 \otimes V_2$, évaluée en la fonction-test φ de la façon suivante :

$$\Phi_1 *_\alpha \Phi_2(\varphi) = \int_{Y_S} \int_{Y_S} \alpha(y)\varphi\left(xy^{-1}\right) d\Phi_1(x) \otimes d\Phi_2(y)$$

On dispose des résultats suivants, qui montrent comment se calcule cette convolution, suivant la base de $\mathcal{C}^{loc-const}(Y_S, \overline{\mathbb{Q}})$ considérée :

Proposition 5.1. *Si $a+(M_S^\nu)$ est un ouvert élémentaire de Y_S et χ un caractère de Dirichlet, on a :*

$$\begin{aligned}\Phi_1 *_\alpha \Phi_2(1_{a+(M_S^\nu)}) &= \sum_{b \bmod M_S^\nu} \alpha(b)\Phi_1\left(1_{ab+(M_S^\nu)}\right)\otimes\Phi_2\left(1_{b+(M_S^\nu)}\right)\\ \Phi_1 *_\alpha \Phi_2(\chi) &= \Phi_1(\chi)\otimes\Phi_2(\alpha\overline{\chi})\end{aligned}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que dans la première expression, la somme porte bien sûr sur les b inversibles modulo M_S ! Pour prouver le résultat, il suffit de dérouler la définition :

$$\begin{aligned}\Phi_1 *_\alpha \Phi_2(1_{a+(M_S^\nu)}) &= \int_{Y_S}\int_{Y_S}\alpha(y)1_{a+(M_S^\nu)}\left(xy^{-1}\right)d\Phi_1(x)\otimes d\Phi_2(y)\\ &= \int_{Y_S}\alpha(y)1_{ay+(M_S^\nu)}(x)d\Phi_1(x)\otimes d\Phi_2(y)\\ &= \int_{Y_S}\alpha(y)\Phi_1\left(1_{ay+(M_S^\nu)}\right)\otimes d\Phi_2(y)\\ &= \sum_{b \bmod M_S^\nu}\alpha(b)\Phi_1\left(1_{ab+(M_S^\nu)}\right)\otimes\Phi_2\left(1_{b+(M_S^\nu)}\right)\end{aligned}$$

La seconde expression est plus simple à obtenir, dans la mesure où on est dans un cas d'application du théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\Phi_1 *_\alpha \Phi_2(\chi) &= \int_{Y_S}\int_{Y_S}\alpha(y)\chi\left(xy^{-1}\right)d\Phi_1(x)\otimes d\Phi_2(y)\\ &= \int_{Y_S}\int_{Y_S}\alpha(y)\chi(x)\overline{\chi}(y)d\Phi_1(x)\otimes d\Phi_2(y)\\ &= \int_{Y_S}\chi(x)d\Phi_1(x)\otimes\int_{Y_S}\alpha\overline{\chi}(y)d\Phi_y(y)\\ &= \Phi_1(\chi)\otimes\Phi_2(\alpha\overline{\chi})\end{aligned}$$

□

Remarque 5.1. *On ne demande pas ici à α d'être un caractère, seulement une fonction-test ; même si on n'appliquera dans ce texte la construction que dans ce cas.*

5.1.4. Distribution p-adique. Pour $p\in S$, on peut définir une notion de distribution sur un espace de fonctions plus grand ; en effet, on dispose d'une variable $y_p : Y_S \to \mathbb{C}_p^*$, induite par la projection canonique $Y_S\to\mathbb{Z}_p^*$: elle permet de considérer, pour $h\geq 1$, l'espace $\mathcal{C}_p^h(Y_S,\overline{\mathbb{Q}})$ des fonctions $Y_S\to\mathbb{C}_p$ localement polynomiales de degré strictement inférieur à h en y_p, à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$.

Evidemment, $\mathcal{C}_p^1(Y_S,\overline{\mathbb{Q}})$ est l'espace des fonctions localement constantes, dont on a déjà discuté, et qui ne dépend pas de p. On dispose des inclusions suivantes :

$$\mathcal{C}^{loc-const}(Y_S,\overline{\mathbb{Q}})\subset\mathcal{C}_p^h(Y_S,\overline{\mathbb{Q}})\subset\ldots\subset\mathcal{C}_p^{loc-anal}(Y_S,\overline{\mathbb{Q}})\subset\mathcal{C}_p(Y_S,\overline{\mathbb{Q}})$$

Si V est un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel, une *distribution p-adique* à valeurs dans V est une application linéaire d'un espace $\mathcal{C}_p^h(Y_S,\overline{\mathbb{Q}})$ à valeurs dans V.

Se donner telle distribution sur $\mathcal{C}_p^h(Y_S,\overline{\mathbb{Q}})$ revient à choisir une distribution sur les fonctions localement constantes pour chaque $0\leq j<h$; en effet, le coefficient de

y_p^j dans le développement d'une fonction de $\mathcal{C}_p^h(Y_S,\overline{\mathbb{Q}})$ est une fonction localement constante.

Cette construction mérite d'être détaillée, car elle est très utile pour étendre commodément une notion p-adique en notion S-adique. Considérons d'abord une distribution p-adique Φ définie sur $\mathcal{C}_p^h(Y_S,\overline{\mathbb{Q}})$ et à valeurs dans V. On définit à partir d'elle une distribution Φ_j sur $\mathcal{C}^{loc-const}(Y_S,\overline{\mathbb{Q}})$ pour chaque $0 \leq j < h$ de la façon suivante : si φ est une fonction-test, on pose : $\Phi_j(\varphi) := \Phi(\varphi y_p^j)$.

Réciproquement, si on part d'une fonction-test $\varphi \in \mathcal{C}_p^h(Y_S,\overline{\mathbb{Q}})$, et d'une famille $(\Phi_j)_{0\leq j<h}$, il suffit d'écrire φ sous la forme $\sum_{0\leq j<h} \varphi_j y_p^j$, avec pour tout j, $\varphi_j \in \mathcal{C}^{loc-const}(Y_S,\overline{\mathbb{Q}})$, pour ensuite définir : $\Phi(\varphi) := \sum_{0\leq j<h} \Phi_j(\varphi_j)$.

Ces deux opérations sont par ailleurs bien l'inverse l'une de l'autre.

5.1.5. h-admissibilité (p-adique). On dispose pour ces distributions p-adiques d'une notion d'admissibilité (lorsque V est muni d'une norme, disons $|.|$), qui permet de contrôler leur croissance (introduite dans l'article [**60**] de Visik) : on dit qu'une distribution p-adique Φ est h-admissible lorsqu'elle est définie sur $\mathcal{C}_p^h(Y_S,\overline{\mathbb{Q}})$, et vérifie pour tout point $a \in Y_S$, $a \in \mathbb{Z}$, et tout $0 \leq t < h$:

$$\left| \int_{a+(M_S^{\nu})} (y_p - a)^t d\Phi \right| = \underset{\nu\to\infty}{O} \left(p^{\nu_p(h-t)} \right)$$

Remarque 5.2. *Cette notion est un peu différente de ce qui est défini dans l'article* [**60**] *de Visik : on utilise un O au lieu d'un o, de façon similaire à ce qui est fait par Dabrowski et Delbourgo dans leur article commun* [**10**].

5.1.6. Distributions S-adique, h-admissibilité. On souhaite définir des notions de distribution et d'admissibilité qui seraient valable non plus uniquement pour un unique p premier, mais dans le cadre plus général d'un ensemble fini de places (finies) S. Le problème est que les diverses distributions p-adiques pour $p \in S$, ne sont pas définies sur le même espace. Il faut donc contourner cette difficulté, en se ramenant au seul espace commun aux différents $p \in S$: les fonctions localement constantes à valeurs algébriques, qui servent justement à définir la distribution p-adique quelque soit $p \in S$.

On définit donc une distribution S-adique comme étant tout simplement la donnée d'une famille de distributions $(\Phi_j)_{0\leq j<h}$; en effet, elle donne bien une distribution p-adique définie sur $\mathcal{C}_p^h(Y_S,\overline{\mathbb{Q}})$ pour tout $p \in S$, et de cette façon, une mesure p-adique est bien la même chose qu'une mesure $\{p\}$-adique.

On dit qu'une distribution S-adique $(\Phi_j)_{0\leq j<h}$ à valeurs dans un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel V forme une distribution S-adique h-admissible, lorsque pour tout $p \in S$, la distribution p-adique qu'elle définit est h-admissible. Comme la notion d'admissibilité p-adique dépend d'une norme sur V, on suppose qu'on dispose pour tout $p \in S$ d'une norme $|.|_p$ sur V.

Remarque 5.3. *On se garde bien de ne demander qu'une norme sur V, car il est clair qu'une seule norme ne donnera en général pas de notion d'admissibilité intéressante pour tous les $p \in S$ simultanément.*

En particulier, dans le cas qui nous intéresse, on verra que la structure de $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel de V permettra de le munir pour chaque p d'une norme héritée du plongement $i_p : \overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}_p$, qui fournira alors une notion d'admissibilité convenable.

5.2. Distributions à valeurs modulaires

5.2.1. Exemples classiques.

5.2.1.1. *Distribution d'Eisenstein.* On a déjà vu deux exemples de distributions modulaires lors de l'étude des séries d'Eisenstein ; elles étaient définies sur $\mathbb{A}_f^2$ plutôt que sur Y_S, mais il suffit de considérer les sections par une fonction-test donnée pour obtenir des distributions modulaires du type considéré. C'est d'ailleurs ce que nous ferons plus loin.

5.2.1.2. *Formes modulaires partielles.* Si on se fixe $g = \sum_n a_n q^n$ de poids k et de niveau N, alors on peut poser :

$$\Phi_g(a + M_S^\nu) = \sum_{n \equiv a \bmod M_S^\nu} a_n q^n$$

qui est une forme modulaire de poids k et de niveau $NM_S^{2\nu}$.

Cette distribution apparaît de façon naturelle quand on veut tordre la forme g par un caractère χ de conducteur M_S^ν ; en effet, il est clair que : $\Phi_g(\chi) = g_\chi$.

5.2.1.3. *Séries theta partielles.* Ces séries sont obtenues de façon très similaire aux formes modulaires partielles, en faisant apparaître une fonction-test dans la définition d'une série theta associée à un réseau (tordue de plus par une fonction sphérique). Cet exemple est assez éloigné de ce qui est traité ici ; il est exposé en détail dans le travail [**17**] de Hida.

5.2.2. Construction des Φ_j. On se fixe un poids de référence k, et on considère $0 \leq j < k-1$.

Etant donnée φ une fonction-test, on considère les distributions d'Eisenstein (à valeurs holomorphes, vu les choix de types) suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} E_1^{(j)}(\varphi) & = & E_{k-j-1,1-(k-j-1)}^{\mathrm{alg}}(1_{Y_S} \times \varphi) \\ E_2^{(j)}(\varphi) & = & E_{j+1,0}^{\mathrm{alg}}(\varphi \times 1_{\hat{\mathbb{Z}}}) \end{array}\right.$$

Leur développement de Fourier, dont les coefficients sont entiers algébriques par construction, est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} E_1^{(j)}(\varphi) & = & y^{\frac{k-j-1}{2}} \sum_{n\geq 0} \sigma_{k-j-1,1-(k-j-1)}^{(n)}(\varphi) q^n \\ E_2^{(j)}(\varphi) & = & y^{\frac{j+1}{2}} \sum_{n \geq 0} \sigma_{j+1,0}^{(n)}(\varphi) q^n \end{array}\right.$$

où :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sigma_{k-j-1,1-(k-j-1)}^{(n)}(a + (M_S^\nu)) & = & \displaystyle\sum_{dd'=n, d' \equiv a \bmod M_S^\nu} 1_{Y_S}(d) d^{k-j-2} \\ \sigma_{j+1,0}^{(n)}(a + (M_S^\nu)) & = & \displaystyle\sum_{dd'=n, d \equiv a \bmod M_S^\nu} d'^j \end{array}\right.$$

On va s'intéresser à la famille finie de distributions :

$$\Phi_j = (-1)^j E_1^{(j)} *_{1_{(.,N)=1}} E_2^{(j)}$$

Pour évaluer son niveau lorsque l'on intègre un caractère χ d'ordre M_S^ν, on doit regarder :

$$\begin{array}{rcl} E_1^{(j)}(\chi) & \in & \mathcal{M}_{k-j-1}\left(M_S^{\nu+1}\right) \\ E_2^{(j)}(1_{(.,N)=1}\overline{\chi}) & \in & \mathcal{M}_{j+1}\left(NM_S^\nu\right) \end{array}$$

on en déduit le contrôle suivant du niveau :

$$\Phi_j(\chi) = (-1)^j E_1^{(j)}(\chi) E_2^{(j)}(1_{(.,N)=1}\overline{\chi}) \in \mathcal{M}_k\left(N_S M_S^{\nu}\right)$$

5.2.3. Congruences pour les Φ_j.

Théorème 5.1. *Si $0 \leq t < k-1$ et $a + (M_S^{\nu}) \subset Y_S$, $a \in \mathbb{Z}$, est un ouvert élémentaire, on a :*

$$U_S^{\nu} \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (-a)^{t-j}\, \Phi_j(a + (M_S^{\nu})) \equiv 0 \bmod M_S^{t\nu}\mathcal{O}[[q]][R]$$

Démonstration. On commence par exprimer $\Phi_j\left(a + (M_S^{\nu})\right)$ en termes de coefficients de Fourier des deux séries d'Eisenstein :

$$\begin{aligned}
\Phi_j\left(a + (M_S^{\nu})\right) &= (-1)^j \sum_{b \bmod M_S^{\nu}} 1_{(.,N)=1}(b) E_1^{(j)}\left(ab + (M_S^{\nu})\right) E_2^{(j)}\left(b + (M_S^{\nu})\right) \\
&= (-1)^j y^{\frac{k}{2}} \sum_{b \bmod M_S^{\nu}} 1_{(.,N)=1}(b) \sum_{n_1, n_2} q^{n_1+n_2} \\
&\quad \sigma_{k-j-1,1-(k-j-1)}^{(n_1)}\left(ab + (M_S^{\nu})\right) \sigma_{j+1,0}^{(n_2)}\left(b + (M_S^{\nu})\right)
\end{aligned}$$

cette expression montre que pour prouver le résultat, il suffit d'étudier, à $a, b \bmod M_S^{\nu}$ fixé, la somme suivante :

$$\sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (-a)^{t-j} (-1)^j \sigma_{k-j-1,1-(k-j-1)}^{(n_1)}\left(ab + (M_S^{\nu})\right) \sigma_{j+1,0}^{(n_2)}\left(b + (M_S^{\nu})\right)$$

dans le cas où $n_1 + n_2 \equiv 0 \bmod M_S^{\nu}$ (à cause de l'action de U_S^{ν}).

On utilise alors les expressions connues des coefficients de Fourier pour exprimer cette somme plus explicitement, dans le cas où $n_1, n_2 > 0$:

$$\sum_{d_1 d_1' = n_1} \sum_{d_2 d_2' = n_2} \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (-a)^{t-j} (-1)^j 1_{Y_S}(d_1) d_1^{k-2-j} d_2'^{j}$$

où les sommations se font avec les hypothèses supplémentaires : $d_1' \equiv ab \bmod M_S^{\nu}$ et $d_2 \equiv b \bmod M_S^{\nu}$.

On va prouver que cette dernière sommation est $\equiv 0 \bmod M_S^{\nu}\mathcal{O}$; on regroupe tous les termes qui dépendent de j, pour reconnaître une somme de binôme :

$$\begin{aligned}
&\sum_{d_1 d_1' = n_1} \sum_{d_2 d_2' = n_2} \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (-a)^{t-j} (-1)^j 1_{Y_S}(d_1) d_1^{k-2-j} d_2'^{\,j} \\
= &\sum_{d_1 d_1' = n_1} \sum_{d_2 d_2' = n_2} 1_{Y_S}(d_1) d_1^{k-2} \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (-a)^{t-j} (-1)^j d_1^{-j} d_2'^{\,j} \\
= &\sum_{d_1 d_1' = n_1} \sum_{d_2 d_2' = n_2} 1_{Y_S}(d_1) d_1^{k-2} (-1)^t \left(a + \frac{d_2'}{d_1}\right)^t
\end{aligned}$$

or, $a + \frac{d_2'}{d_1} = a + \frac{n_2}{d_2 d_1}$; et dans cette expression, on sait que $d_2 d_1 \wedge M_S^{\nu} = 1$, par hypothèse pour d_2, et par la présence de $1_{Y_S}(d_1)$ pour d_1, donc le calcul suivant a un sens, dans $\mathbb{Z}/M_S^{\nu}\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} a+\frac{n_2}{d_1d_2} &\equiv a-\frac{n_1}{d_1d_2} \bmod M_S^{\nu} \\ &\equiv a-\frac{d_1'}{d_2} \bmod M_S^{\nu} \\ &\equiv 0 \bmod M_S^{\nu} \end{aligned}$$

avec cette congruence, comme tous les autres facteurs sont entiers (algébriques), on a le résultat voulu.

Il reste à traiter deux cas : $n_1 = 0$ et $n_2 = 0$; mais dans les deux cas, $n_1 \equiv 0 \bmod M_S^{\nu}$, donc $A_{n_1} = 0$, puisque la définition de A_{n_1} fait intervenir une somme sur $d_1 d_1' = n_1$, où la condition de congruence sur d_1' implique que $d_1' \wedge M_S^{\nu} = 1$, et la présence de $1_{Y_S}(d_1)$ force $d_1 \wedge M_S^{\nu} = 1$.

□

5.3. Critère d'admissibilité

5.3.1. Enoncé du théorème. On considère une famille finie de distributions :

$$\Phi_j : \mathcal{C}^{loc-const}(Y_S, \overline{\mathbb{Q}}) \to \mathcal{M}_S(\overline{\mathbb{Q}})$$

(avec $0 \le j$; on se donnera une borne supérieure dans l'énoncé)

On définit à partir d'elle une famille finie de distributions par projection :

$$\Phi_j^{\alpha,S} : \mathcal{C}^{loc-const}\left(Y_S, \overline{\mathbb{Q}}\right) \to \mathcal{M}_S^{\alpha,S}(\overline{\mathbb{Q}})$$
$$\Phi_j^{\alpha,S} = \pi_S^{\alpha,S}\Phi_j$$

On a déjà vu comment une telle famille permet de définir une distribution p-adique pour chaque $p \in S$; notons-la $\Phi_{(p)}^{\alpha,S}$. Par ailleurs, pour chaque p, on peut munir l'espace des formes modulaires à coefficients algébriques d'une norme $|.|_p$, héritée via les coefficients de Fourier de la norme induite par le plongement i_p : $\overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}_p$.

Théorème 5.2. *On choisit $h \ge 0$, tel que pour tout $p \in S$, $h \ge v_p(\alpha_p)$; On suppose qu'il existe $\varkappa \in \mathbb{N}$ tel que pour tout ouvert élémentaire $a + (M_S^{\nu}) \subset Y_S$, $a \in \mathbb{Z}$, on dispose de la condition de niveau :*

$$\forall j \in [[0, h\varkappa[[, \Phi_j(a + (M_S^{\nu})) \in \mathcal{M}(M_S^{\varkappa\nu})$$

ainsi que, pour tout $t \in [[0, h\varkappa[[$, de la condition de congruence :

$$U_S^{\varkappa\nu} \sum_{j=0}^{t} \left(\begin{array}{c} t \\ j \end{array} \right) (-a)^{t-j}\Phi_j(a + (M_S^{\nu})) \equiv 0 \bmod M_S^{t\nu}\mathcal{O}[[q]][R]$$

alors la famille $\left(\Phi_j^{\alpha,S}\right)$ forme une mesure S-adique $h\varkappa$-admissible.

5.3.2. Preuve du théorème. On se place sous les hypothèses du théorème : on fixe un point $a \in \mathbb{Z}$, $p \in S$ et $t \in [[0, h\varkappa[[$.

L'objectif est de prouver :

$$\left| \int_{a+(M_S^{\nu})} (y_p - a)^t d\Phi_{(p)}^{\alpha,S} \right|_p = \underset{\nu_p \to \infty}{O} \left(p^{\nu_p(h_p\varkappa - t)} \right)$$

on va donc commencer par réécrire la forme dont on veut majorer la norme en termes de Φ_j :

$$\begin{aligned}\int_{a+(M_S^{\underline{\nu}})}(y_p-a)^t d\Phi^{\alpha,S}_{(p)} &= \sum_{j=0}^{t}\left(\begin{array}{c}t\\ j\end{array}\right)(-a)^{t-j}\Phi^{\alpha,S}_{(p)}\left(1_{a+(M_S^{\underline{\nu}})}y_p^j\right)\\ &= \sum_{j=0}^{t}\left(\begin{array}{c}t\\ j\end{array}\right)(-a)^{t-j}\pi_S^{\alpha,S}\Phi_j\left(a+(M_S^{\underline{\nu}})\right)\end{aligned}$$

dans cette expression, on sait (par l'hypothèse de niveau), que $\Phi_j(a+(M_S^{\underline{\nu}}))$ est de niveau $M_S^{\varkappa\underline{\nu}}$, donc la projection se calcule ainsi :

$$\pi_S^{\alpha,S}\Phi_j(a+(M_S^{\underline{\nu}})) = U_S^{-\varkappa\underline{\nu}}\pi_{S,0}^{\alpha,S}U_S^{\varkappa\underline{\nu}}\Phi_j(a+(M_S^{\underline{\nu}}))$$

on réécrit l'opérateur $U_S^{-\varkappa\underline{\nu}}$ comme $\alpha_S^{-\varkappa\underline{\nu}}\left(\alpha_S^{-1}U_S\right)^{-\varkappa\underline{\nu}}$

Or d'une part : $\left|\alpha_S^{-1}\right|_p=\left|\alpha_p^{-1}\right|_p\le p^h$, et donc $\left|\alpha_S^{-\varkappa\underline{\nu}}\right|_p\le p^{\varkappa\nu_p h}$, d'autre part on a :

$$\|(\alpha_S^{-1}U_S)^{-\varkappa\underline{\nu}}\|_p=\|(\alpha_p^{-1}U_p)^{-\varkappa\nu_p}\|_p$$

mais comme on travaille sur un sous-espace de dimension finie (et indépendante de $\underline{\nu}$!) de l'espace α_p-caractéristique de U_p, l'opérateur $Z=(U_p-\alpha_p I)$ est nilpotent, donc :

$$\left(\alpha_p^{-1}U_p\right)^{-\varkappa\nu_p}=\left(I+\alpha_p^{-1}Z\right)^{-\varkappa\nu_p}$$

se développe en polynômes d'endomorphismes de degrés bornés par la dimension de $\mathcal{M}_S^{\alpha,S}$ lorsque $\underline{\nu}$ varie. Ces polynômes ont de plus pour coefficients des entiers (rationnels) fois des puissances de α_S^{-1} (puissances bornées par son degré, donc bornées uniformément en $\underline{\nu}$) : il existe donc une constante C'_p indépendante de $\underline{\nu}$, telle que :

$$\|(\alpha_S^{-1}U_S)^{-\varkappa\underline{\nu}}\|_p=\left\|\left(\alpha_p^{-1}U_p\right)^{-\varkappa\nu_p}\right\|_p\le C'_p$$

Par ailleurs, la condition de congruence permet de borner la somme sur les Φ_j, ce qui donne :

$$\begin{aligned}&\left|\int_{a+(M_S^{\underline{\nu}})}(y_p-a)^t d\Phi_p^{\alpha,S}\right|_p\\ &=\left|\alpha_S^{-\varkappa\underline{\nu}}\left(\alpha_S^{-1}U_S\right)^{-\varkappa\underline{\nu}}\pi_0^{\alpha,S}U_S^{\varkappa\underline{\nu}}\textstyle\sum_{j=0}^t\left(\begin{array}{c}t\\ j\end{array}\right)(-a)^{t-j}\Phi_j\left(a+(M_S^{\underline{\nu}})\right)\right|_p\\ &\le\left|\alpha_S^{-\varkappa\underline{\nu}}\right|_p\left\|\left(\alpha_S^{-1}U_S\right)^{-\varkappa\underline{\nu}}\right\|_p\left|\pi_0^{\alpha,S}U_S^{\varkappa\underline{\nu}}\textstyle\sum_{j=0}^t\left(\begin{array}{c}t\\ j\end{array}\right)(-a)^{t-j}\Phi_j\left(a+(M_S^{\underline{\nu}})\right)\right|_p\\ &\le p^{h\varkappa\nu_p}C'_p\left|U_S^{\varkappa\underline{\nu}}\textstyle\sum_{j=0}^t\left(\begin{array}{c}t\\ j\end{array}\right)(-a)^{t-j}\Phi_j\left(a+(M_S^{\underline{\nu}})\right)\right|_p\\ &\le p^{h\varkappa\nu_p}C'_p p^{-t\nu_p}\\ &\le C'_p p^{\nu_p(h\varkappa-t)}\end{aligned}$$

c'est le résultat de domination en $O(p^{\nu_p(h\varkappa-t)})$ cherché.

Remarque 5.4. *Cette constante C'_p dépend uniquement de U_p, α_p et de l'espace $\mathcal{M}_S^{\alpha,S}$.*

Remarque 5.5. *Cet énoncé est identique (modulo les différences de cadre) au théorème 3.4 de l'article* [**40**] *de Pantchichkine.*

CHAPITRE VI

Application : distributions scalaires

6.1. Définition

On définit une famille de distributions $\mu_{f,j}^{\alpha,S}$ sur Y_S, avec $0 \leq j < k-1$, par :

$$\mu_{f,j}^{\alpha,S} = \ell_f^{\alpha,S} \pi_S^{\alpha,S} \Phi_j^S$$

où :

- Φ_j est la famille de distributions à valeurs dans la tour modulaire $\mathcal{M}_S$, que l'on a définie en page 88 ;
- $\pi_S^{\alpha,S}$ est le projecteur de la tour modulaire $\mathcal{M}_S$ dans la tour modulaire $\mathcal{M}_S^{\alpha,S} \subset \mathcal{M}_S$, que l'on a défini en page 74 ;
- enfin, $\ell_f^{\alpha,S}$ est la famille de formes linéaires sur $\mathcal{M}_S$, construite en page 79.

La composition de ces trois applications est donc bien définie, et fournit des distributions à valeurs scalaires.

On peut déjà affirmer :

Proposition 6.1. *L'image par $\mu_{f,j}^{\alpha,S}$ d'une fonction-test à valeurs algébriques est algébrique.*

Démonstration. On a vu que l'on pouvait calculer explicitement les coefficients de Fourier de l'image de Φ_j, par des formules algébriques. La projection est polynomiale en les opérateurs de Atkin-Lehner, et conserve donc les propriétés d'algébricité des coefficients. Enfin, on a prouvé que l'image par $\ell_f^{\alpha,S}$ d'une forme à coefficients algébrique est algébrique (c'est le *théorème d'algébricité* 4.7) □

6.2. Théorème des congruences (version scalaire)

Théorème 6.1 (théorème des congruences, version scalaire). *Il existe une constante C_S^α algébrique non-nulle, telle que pour tout ouvert élémentaire $a+(M_S^{\underline{\nu}}) \subset Y_S$, $a \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$C_S^\alpha \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (-a)^{t-j} \, \mu_{f,j}^{\alpha,S}(a + (M_S^{\underline{\nu}})) \equiv 0 \bmod M_S^{(t-h)\underline{\nu}} \mathcal{O}$$

Démonstration. En effet, on sait que pour tout ouvert tel que dans l'énoncé, on a :

$$U_S^{\underline{\nu}} \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (-a)^{t-j} \, \Phi_j(a + (M_S^{\underline{\nu}})) \equiv 0 \bmod M_S^{t\underline{\nu}} \mathcal{O}[[q]][R]$$

c'est le *théorème des congruences pour les formes modulaires*, énoncé puis prouvé page 89.

L'opérateur de projection va introduire un dénominateur ; en effet, il se calcule via :

$$\pi_{S,\underline{\nu}}^{\alpha,S} = U_S^{-\underline{\nu}} \pi_{S,\underline{0}}^{\alpha,S} U_S^{\underline{\nu}}$$

où la partie $U_S^{\underline{\nu}}$ n'introduit pas de dénominateur ;, car c'est une composition d'opérateurs de Atkin-Lehner. La projection $\pi_{S,\underline{0}}^{\alpha,S}$ introduit un dénominateur qui ne dépend que de l'espace (de dimension finie) $\mathcal{M}_S^{\alpha,S}$; on peut donc l'intégrer dans la constante C_S^α. Enfin, $U_S^{-\underline{\nu}}$ induit, par adjonction et les propriétés de f^0, une multiplication par $\alpha_S^{-\underline{\nu}}$. C'est ce dénominateur que l'on majore par $M_S^{h\underline{\nu}}$.

Par contre, la forme linéaire $\ell_f^{\alpha,S}$ va faire apparaître un nouveau dénominateur D_2, qui dépend a priori de l'ouvert considéré, de f, α et S. On va montrer qu'on peut le choisir indépendamment de l'ouvert ; on pourra alors l'intégrer à la constante C_S^α.

Quel que soit l'ouvert considéré, les intégrales des distributions à valeurs modulaires $(\pi_S^{\alpha,S}\Phi_j)_j$ sont dans la tour modulaire $\mathcal{M}_S^{\alpha,S}$. Or on a montré que cette tour était de dimension finie (*théorème de la dimension finie*, page 75), donc la forme linéaire est continue, et le dénominateur est indépendant du point considéré, donc de la fonction-test en laquelle on évalue $\mu_{f,j}^{\alpha,S}$. □

6.3. Théorème d'admissibilité

THÉORÈME 6.2. *La famille de distributions $\mu_{f,j}^{\alpha,S}$ forme une mesure S-adique h-admissible, où $h = \max_{p\in S} v_p(\alpha_p)$.*

DÉMONSTRATION. Rappelons que la notion d'admissibilité dans le cadre S-adique a été définie en 5.1.6, page 87.

Le *théorème des congruences (version modulaire)* (5.1, page 89) et la discussion sur le niveau en 5.2.2, 88 montrent que la famille Φ_j satisfait les hypothèses du *critère d'admissibilité* 5.2, pour h donné par l'énoncé et $\varkappa = 1$. On sait donc que la famille $(\pi_S^{\alpha,S}\Phi_j)_j$ forme une mesure S-adique h-admissible.

Or la même discussion que dans la preuve du *théorème des congruences (version scalaire)* 6.2, permet de voir qu'à un dénominateur près, $\mu_{f,j}^{\alpha,S}$ va vérifier les mêmes propriétés d'admissibilité : en effet, ce dénominateur est indépendant de l'ouvert considéré, et la notion d'admissibilité est définie en termes de majorations par des $O(.)$, donc la présence de cette constante n'empêche pas les $(\mu_{f,j}^{\alpha,S})_j$ de vérifier les mêmes majorations. □

REMARQUE 6.1. *Il suffit de regarder le polynôme de Hecke de f en toute place p de S pour constater que $v_p(\alpha_p) \leq k-1$, donc $h \leq k-1$: la famille $(\Phi_j)_{0\leq j<k-1}$ que l'on a définie a donc assez d'éléments pour que l'énoncé ait un sens !*

6.4. Intégration des caractères de Dirichlet

THÉORÈME 6.3. *Soit f une forme modulaire adélique* holomorphe *de poids k, niveau N et caractères (ψ_1, ψ_2), forme propre des opérateurs de Hecke, et $(\alpha_p)_p$ une famille de valeurs propres des opérateurs de Atkin-Lehner adaptée à f.*

Soit enfin χ un caractère de Dirichlet de conducteur c_χ premier avec N et $S = Z(c_\chi)$ le support de ce conducteur.

Sous ces hypothèses, on a :

$$\mu_{f,j}^{\alpha,S}(\chi) = H(f,\alpha,S,j,\chi) L_{f_{\alpha,S,0}}(j+1,\overline{\chi})$$

où :

$$H(f,\alpha,S,j,\chi) = \frac{a_{1,0}G_\chi\Gamma(k-1)(2i\pi)^{j+1}(-1)^k c_\chi^j \alpha_S^{-\underline{\nu}}}{\Gamma(j+1)\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}} \zeta_{j+1,0}(1_{\hat{\mathbb{Z}}} \times \mathcal{F}^{-1}(1_{(.,N)=1}\overline{\chi}))(1_f)L_{f_{\alpha,S,0}}(k-1,\mathcal{F}1_{Y_S})$$

Démonstration. On commence par écrire, à partir des définitions :

$$\begin{aligned}\mu^{\alpha,S}_{f,j}(\chi) &= \ell^{\alpha,S}_f(\Phi^{\alpha,S}_j(\chi)) \\ &= \ell^{\alpha,S}_f \pi^{\alpha,S}_S \Phi_j(\chi) \\ &= \lim_{\underline{\nu}\to\underline{\infty}} \frac{\langle f^0_{\alpha,S}, \alpha_S^{-\underline{\nu}} U_S^{\underline{\nu}} \pi_S^{\alpha,S}\Phi_j(\chi)\rangle_{N_S}}{\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}}\end{aligned}$$

où on peut calculer la projection :

$$\pi_S^{\alpha,S}\Phi_j(\chi) = U_S^{-\underline{\nu}}\pi^{\alpha,S}_{S,\underline{0}}U_S^{\underline{\nu}}\Phi_j(\chi)$$

pour un $\underline{\nu} \gg \underline{0}$. On a donc :

$$\alpha_S^{-\underline{\nu}}U_S^{\underline{\nu}}\pi_S^{\alpha,S}\Phi_j(\chi) = \alpha_S^{-\underline{\nu}}\pi^{\alpha,S}_{S,\underline{0}}U_S^{\underline{\nu}}\Phi_j(\chi)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mu^{\alpha,S}_{f,j}(\chi) &= \lim_{\underline{\nu}\to\underline{\infty}} \frac{\langle f^0_{\alpha,S}, \alpha_S^{-\underline{\nu}} U_S^{\underline{\nu}} \pi_S^{\alpha,S}\Phi_j(\chi)\rangle_{N_S}}{\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}} \\ &= \lim_{\underline{\nu}\to\underline{\infty}} \frac{\langle f^0_{\alpha,S}, \alpha_S^{-\underline{\nu}} \pi^{\alpha,S}_{S,\underline{0}} U_S^{\underline{\nu}}\Phi_j(\chi)\rangle_{N_S}}{\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}} \\ &= \lim_{\underline{\nu}\to\underline{\infty}} \frac{\alpha_S^{-\underline{\nu}}}{\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}}\langle f^0_{\alpha,S}, \pi^{\alpha,S}_{S,\underline{0}} U_S^{\underline{\nu}}\Phi_j(\chi)\rangle_{N_S} \\ &= \lim_{\underline{\nu}\to\underline{\infty}} \frac{\alpha_S^{-\underline{\nu}}}{\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}}\langle f^0_{\alpha,S}, U_S^{\underline{\nu}}\Phi_j(\chi)\rangle_{N_S}\end{aligned}$$

où la dernière égalité fait disparaître la projection, car on sait que la forme linéaire se factorise par la projection.

On peut maintenant préciser le passage à la limite sur $\underline{\nu}$; en effet, on sait que $\Phi_j(\chi)$ est de niveau Nc_χ, donc de niveau $N_S M_S^{\underline{\nu}}$ pour un certain $\underline{\nu}$, à partir duquel la suite est stationnaire. On poursuit donc les calculs en choisissant ce $\underline{\nu}$.

On utilise alors les propriétés d'adjonction pour écrire :

$$\begin{aligned}\langle f^0_{\alpha,S}, U_S^{\underline{\nu}}\Phi_j(\chi)\rangle_{N_S} &= \langle U_S^{*,\underline{\nu}} f^0_{\alpha,S}, \Phi_j(\chi)\rangle_{N_S M_S^{\underline{\nu}}} \\ &= \langle \overline{\alpha_S}^{\underline{\nu}} f^0_{\alpha,S}, \Phi_j(\chi)\rangle_{N_S M_S^{\underline{\nu}}} \\ &= \alpha_S^{\underline{\nu}}\langle f^0_{\alpha,S}, \Phi_j(\chi)\rangle_{N_S M_S^{\underline{\nu}}}\end{aligned}$$

On va maintenant tenter de se ramener à un calcul d'intégrale de Rankin-Selberg. Pour cela, on va essayer de simplifier la partie gauche du produit scalaire, en faisant apparaître un lien plus simple avec f :

$$\begin{aligned}\langle f^0_{\alpha,S}, \Phi_j(\chi)\rangle_{N_S M_S^{\underline{\nu}}} &= \langle f^\rho_{\alpha,S,0}|W_{N_S}, \Phi_j(\chi)\rangle_{N_S M_S^{\underline{\nu}}} \\ &= (-1)^k\langle f^\rho_{\alpha,S,0}, \Phi_j(\chi)|W_{N_S M_S^{\underline{\nu}}}\rangle_{N_S M_S^{\underline{\nu}}}\end{aligned}$$

La conjugaison complexe dans la partie gauche du produit scalaire n'est pas gênante, en effet, on a vu dans l'exemple de calcul en 71, qu'elle va de toutes façons intervenir à nouveau conjuguée : il va y avoir une simplification automatique.

Ce qui ne sera pas simplifié, en revanche, c'est que f et $f_{\alpha,S,0}$ n'ont pas les mêmes valeurs propres ; on va donc introduire des notations pour les distinguer : λ est le morphisme "valeur propre" de f, et $\lambda^{\alpha,S}$ le morphisme de $f_{\alpha,S,0}$.

On sait que si $(n, M_S) = 1$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \lambda^{\alpha,S}_{M_S^{\mu} n} & = & \alpha_S^{\mu} \lambda_n^{\alpha,S} \\ \lambda_n^{\alpha,S} & = & \lambda_n \end{cases}$$

On cherche à écrire $\Phi_j(\chi)|W_{N_S M_S^{\nu}}$ sous la forme :

$$E^{\mathrm{alg}}_{k-j-1,1-(k-j-1)}(\varphi_1 \times \varphi_2) E^{\mathrm{anal}}_{j+1,0}(\varphi)$$

où on rappelle que les distributions d'Eisenstein analytiques sont définies en 2.3.1, page 37, et les distributions d'Eisenstein algébriques en 2.3.5, page 42. On utilise pour cela sa définition (5.2.2, page 88) :

$$\begin{array}{rcl} \Phi_j(\chi) & = & E_1^{(j)}(\chi) E_2^{(j)}(1_{(.,N)=1}\overline{\chi}) \\ & = & E^{\mathrm{alg}}_{k-j-1,1-(k-j-1)}(1_{Y_S} \times \chi) E^{\mathrm{alg}}_{j+1,0}(1_{(.,N)=1}\overline{\chi} \times 1_{\hat{\mathbb{Z}}}) \end{array}$$

dans cette expression, on a d'une part le corollaire 3.2, page 55, sur l'action des opérateurs W sur les distributions d'Eisenstein algébriques :

$$\begin{array}{rl} & E^{\mathrm{alg}}_{k-j-1,1-(k-j-1)}(1_{Y_S} \times \chi)|W_{N_S M_S^{\nu}} \left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f \right) \\ = & E^{\mathrm{alg}}_{k-j-1,1-(k-j-1)}(\mathcal{F}\chi \times \mathcal{F}1_{Y_S}) \left(\begin{pmatrix} N_S M_S^{\nu} y & N_S M_S^{\nu} x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f \right) \end{array}$$

(où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier pour les fonctions sur $\mathbb{A}_f$ localement constantes à support compact), et d'autre part, via la proposition 2.8 de lien entre les distributions analytiques et algébriques (page 43), et la proposition 3.11 sur l'action des opérateurs W sur les premières (page 54) :

$$\begin{array}{rl} & E^{\mathrm{alg}}_{j+1,0}(1_{(.,N)=1}\overline{\chi} \times 1_{\hat{\mathbb{Z}}})|W_{N_S M_S^{\nu}} \left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f \right) \\ = & \frac{(2i\pi)^{j+1}}{\Gamma(j+1)} E^{\mathrm{anal}}_{j+1,0}(\mathcal{F}^{-1}(1_{(.,N)=1}\overline{\chi}) \times 1_{\hat{\mathbb{Z}}})|W_{N_S M_S^{\nu}} \left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f \right) \\ = & \frac{(2i\pi)^{j+1}}{\Gamma(j+1)} E^{\mathrm{anal}}_{j+1,0}(1_{\hat{\mathbb{Z}}} \times \mathcal{F}^{-1}(1_{(.,N)=1}\overline{\chi})) \left(\begin{pmatrix} N_S M_S^{\nu} y & N_S M_S^{\nu} x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1_f \right) \end{array}$$

On peut donc écrire $\Phi_j(\chi)|W_{N_S M_S^{\nu}}$ sous la forme voulue, en choisissant :

$$\begin{cases} \varphi & = & 1_{\hat{\mathbb{Z}}} \times \mathcal{F}^{-1}(1_{(.,N)=1}\overline{\chi}) \\ \varphi_1 & = & \mathcal{F}\chi \\ \varphi_2 & = & \mathcal{F}1_{Y_S} \end{cases}$$

Le calcul qui suit est alors très similaire à celui effectué dans la preuve de la proposition 3.33, page 70 ; les justifications seront donc rapides.

On peut développer l'intégrale :

$$\begin{aligned}\langle f^{\rho}_{\alpha,S,0}, \Phi_j(\chi)|W_{N_S M_S^{\nu}}\rangle_{N_S M_S^{\nu}} &= \int_{B(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})/Z^+(\mathbb{R})SO_2(\mathbb{R})\times B(N_S M_S^{\nu})} \\ &\quad |\det g|_{\mathbb{A}}^{-\frac{j+1}{2}}\overline{f^{\rho}_{\alpha,S,0}}(g) \\ &\quad E^{\mathrm{alg}}_{k-j-1,1-(k-j-1)}(\varphi_1\times\varphi_2)(g)\zeta(\varphi)(g_f) \\ &\quad j_1(g_\infty,i)^{j+1}dg\end{aligned}$$

On utilise alors les développements automorphes suivants :

$$\begin{aligned}f^{\rho}_{\alpha,S,0}(g) &= \sum_{m>0} a^{\rho}_m(g) \\ E^{\mathrm{alg}}_{k-j-1,1-(k-j-1)}(\varphi_1\times\varphi_2)(g) &= \sum_{n\geq 0} b_n(\varphi_1\times\varphi_2)(g)\end{aligned}$$

Pour écrire :

$$\begin{aligned}\langle f^{\rho}_{\alpha,S,0}, \Phi_j(\chi)|W_{N_S M_S^{\nu}}\rangle_{N_S M_S^{\nu}} &= \sum_{m\geq 0, n>0}\int_{B(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})/Z^+(\mathbb{R})SO_2(\mathbb{R})\times B(N_S M_S^{\nu})} \\ &\quad |\det g|_{\mathbb{A}}^{-\frac{j+1}{2}}\overline{a^{\rho}_m}(g)b_n(\varphi_1\times\varphi_2)(g)\zeta_{j+1,0}(\varphi)(g_f) \\ &\quad j_1(g_\infty,i)^{j+1}dg\end{aligned}$$

Le domaine d'intégration est tel qu'en partie archimédienne, on peut paramétrer par un quotient de $\mathbb{H}_\infty$, de sorte que $j_1(g_\infty,i)=y$ et $dg_\infty = dxdy/y^2$, et que l'on peut oublier la sommation en partie non-archimédienne. Par ailleurs, la dépendance en x n'est portée que par a^{ρ}_m et b_n, ce qui annule les termes $m\neq n$:

$$\begin{aligned}\langle f^{\rho}_{\alpha,S,0}, \Phi_j(\chi)|W_{N_S M_S^{\nu}}\rangle_{N_S M_S^{\nu}} &= \sum_{n>0}\int_0^\infty \\ &\quad y^{-\frac{j+1}{2}}\overline{a^{\rho}_n}b_n(\varphi_1\times\varphi_2)\left(\begin{pmatrix} y & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) \\ &\quad \zeta_{j+1,0}(\varphi)(1_f)y^{j+1}dy/y^2\end{aligned}$$

Comme b_n est un coefficient de Fourier d'une série d'Eisenstein algébrique holomorphe, on peut écrire :

$$b_n(\varphi')\left(\begin{pmatrix} y & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = y^{\frac{k-j-1}{2}}\sigma_n(\varphi_1\times\varphi_2)q^n$$

Pour a^{ρ}_n, comme on a choisi f holomorphe, on a :

$$\begin{aligned}\overline{a^{\rho}_n}\left(\begin{pmatrix} y & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) &= \overline{y^{\frac{k}{2}}a^{\rho}_{n,0}q^n} \\ &= y^{\frac{k}{2}}a_{n,0}\overline{q}^n\end{aligned}$$

ce qui permet le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\langle f^{\rho}_{\alpha,S,0}, \Phi_j(\chi)|W_{N_S M_S^{\nu}}\rangle_{N_S M_S^{\nu}} &= \sum_{n>0} \int_0^{\infty} y^{\frac{k}{2}} \overline{q}^n y^{\frac{k-j-1}{2}} q^n \\
& \quad a_{n,0}\sigma_n(\varphi_1 \times \varphi_2) \\
& \quad \zeta_{j+1,0}(\varphi)(1_f) y^{\frac{j+1}{2}} dy/y^2 \\
&= \zeta_{j+1,0}(\varphi)(1_f) \sum_{n>0} \int_0^{\infty} y^{k-2} \exp(-4\pi n y) \\
& \quad a_{n,0}\sigma_n(\varphi_1 \times \varphi_2) dy
\end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variable : $Y = 4\pi n y$, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\langle f^{\rho}_{\alpha,S,0}, \Phi_j(\chi)|W_{N_S M_S^{\nu}}\rangle_{N_S M_S^{\nu}} &= \zeta_{j+1,0}(\varphi)(1_f) \sum_{n>0} \int_0^{\infty} \left(\frac{Y}{4\pi n}\right)^{k-2} \exp(-Y) \\
& \quad a_{n,0}\sigma_n(\varphi_1 \times \varphi_2) \frac{dY}{4\pi n}
\end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que $f_{\alpha,S,0}$ est forme propre :

$$a_{n,0} = \lambda_n^{\alpha,S} a_{1,0}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\langle f^{\rho}_{\alpha,S,0}, \Phi_j(\chi)|W_{N_S M_S^{\nu}}\rangle_{N_S M_S^{\nu}} &= \zeta_{j+1,0}(\varphi)(1_f) \sum_{n>0} \int_0^{\infty} \left(\frac{Y}{4\pi n}\right)^{k-2} \exp(-Y) \\
& \quad \lambda_n^{\alpha,S} a_{1,0}\sigma_n(\varphi_1 \times \varphi_2) \frac{dY}{4\pi n} \\
&= \frac{\zeta_{j+1,0}(\varphi)(1_f)}{(4\pi)^{k-1}} \int_0^{\infty} Y^{k-2} a_{1,0} \exp(-Y) dY \\
& \quad \sum_{n>0} n^{-k+1} \lambda_n^{\alpha,S} \sigma_n(\varphi_1 \times \varphi_2) \\
&= \frac{\zeta_{j+1,0}(\varphi)(1_f)}{(4\pi)^{k-1}} a_{1,0} \Gamma(k-1) \\
& \quad \sum_{n>0} n^{-k+1} \lambda_n^{\alpha,S} \sigma_n(\varphi_1 \times \varphi_2)
\end{aligned}$$

dans cette expression, l'intégrale fournit une somme de fonctions Γ d'Euler, et la série de Dirichlet s'interprète comme un produit de fonctions L tordues, via le lemme de Rankin (lemme 1.2, page 24) ; en effet, comme :

$$\sigma_n(\varphi_1 \times \varphi_2) = \sum_{m \in \mathbb{Q}^*} \varphi_1(m)\varphi_2(n/m) m^{k-j-2}$$

sa fonction L se factorise ainsi :

$$L(s, \sigma_{\cdot}(\varphi_1 \times \varphi_2)) = L(s - (k-j-2), \varphi_1) L(s, \varphi_2)$$

d'où, avec le choix : $s = k-1$ dicté par la série de Dirichlet :

$$\sum_{n>0} n^{-k+1} \lambda_n^{\alpha,S} \sigma_n(\varphi_1 \times \varphi_2) = L_{f_{\alpha,S,0}}(j+1, \varphi_1) L_{f_{\alpha,S,0}}(k-1, \varphi_2)$$

Dans cette dernière expression, on a :

$$\varphi_1(x) = \frac{G_\chi}{c_\chi}\overline{\chi}(c_\chi x)$$

Il suffit donc de relier $L_{f_{\alpha,S,0}}(j+1,\varphi_1)$ à $L_{f_{\alpha,S,0}}(j+1,\overline{\chi})$ pour justifier le résultat annoncé. Un simple changement dans la sommation qui définit la fonction L permet d'écrire :

$$L_{f_{\alpha,S,0}}(j+1,\varphi_1) = G_\chi c_\chi^j \alpha_S^{-\underline{\nu}} L_{f_{\alpha,S,0}}(j+1,\overline{\chi})$$

□

Corollaire 6.1. *On suppose que l'on dispose d'une combinaison linéaire finie de caractères de conducteurs $M_S^{\underline{\nu}}$, qui vérifie une congruence :*

$$\sum_\chi \gamma_\chi \chi \equiv 0 \bmod M_S^{\underline{\tau}}\mathcal{O}$$

alors :

$$C_S^\alpha \sum_\chi \gamma_\chi H(f,\alpha,S,j,\chi) L_{f_{\alpha,S,0}}(j+1,\overline{\chi}) \equiv 0 \bmod M_S^{(j-h)\underline{\nu}+\underline{\tau}}\mathcal{O}$$

où on rappelle que :

$$\begin{aligned} H(f,\alpha,S,j,\chi) \quad = \quad & \frac{a_{1,0} G_\chi \Gamma(k-1)(2i\pi)^{j+1}(-1)^k c_\chi^j \alpha_S^{-\underline{\nu}}}{\Gamma(j+1)\langle f^0_{\alpha,S}, f_{\alpha,S,0}\rangle_{N_S}} \\ & \zeta_{j+1,0}(1_{\hat{\mathbb{Z}}} \times \mathcal{F}^{-1}\overline{\chi})(1_f) L_{f_{\alpha,S,0}}(k-1,\mathcal{F}1_{Y_S}) \end{aligned}$$

Démonstration. On va commencer par montrer un résultat de congruence pour chaque $\mu_{f,j}^{\alpha,S}$: le théorème 6.1, page 93 fournit des congruences : $(0 \leq t < h)$

$$C_S^\alpha \sum_{j=0}^t \begin{pmatrix} t \\ j \end{pmatrix} (-a)^{t-j}\, \mu_{f,j}^{\alpha,S}(a + (M_S^{\underline{\nu}})) \equiv 0 \bmod M_S^{(t-h)\underline{\nu}}\mathcal{O}$$

ces congruences ont l'inconvénient de ne donner des renseignements que sur certaines combinaisons linéaires d'intégrales des $\mu_{f,j}^{\alpha,S}$.

Cependant, si on lit ces congruences comme une congruence vectorielle, on voit qu'on peut les écrire :

$$T\left(C_S^\alpha \mu_{f,j}^{\alpha,S}(a + (M_S^{\underline{\nu}}))\right)_j \equiv 0 \bmod \left(M_S^{(t-h)\underline{\nu}}\right)_t$$

où T est une matrice explicite, qui fait intervenir les coefficients du binôme. Il n'est pas utile de la décrire en détails, seules les propriétés suivantes, faciles à constater, sont utiles :

- elle est à coefficients entiers (rationnels)
- elle est triangulaire inférieure
- seuls des 1 apparaissent sur sa diagonale.

A partir de ces remarques, on voit que T^{-1} va vérifier les mêmes propriétés ; et donc, on aura :

$$\begin{aligned} \left(C_S^\alpha \mu_{f,j}^{\alpha,S}(a + (M_S^{\underline{\nu}}))\right)_j \quad & \equiv \quad 0 \bmod T^{-1}\left(M_S^{(t-h)\underline{\nu}}\right)_t \\ & \equiv \quad 0 \bmod \left(M_S^{(t-h)\underline{\nu}}\right)_t \end{aligned}$$

Donc, pour tout j :

$$C_S^{\alpha}\mu_{f,j}^{\alpha,S}(a+(M_S^{\underline{\nu}}))\equiv 0 \bmod M_S^{(j-h)\underline{\nu}}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\mu_{f,j}^{\alpha,S}\left(\sum_{\chi}\gamma_\chi\chi\right) &= \sum_{\chi}\gamma_\chi\mu_{f,j}^{\alpha,S}(\chi)\\ &= \sum_{\chi}\gamma_\chi\sum_{a}\chi(a)\mu_{f,j}^{\alpha,S}(a+(M_S^{\underline{\nu}}))\\ &= \sum_{a}\left(\sum_{\chi}\gamma_\chi\chi(a)\right)\mu_{f,j}^{\alpha,S}(a+(M_S^{\underline{\nu}}))\end{aligned}$$

Dans cette somme, on sait que :

$$\begin{aligned}\sum_{\chi}\gamma_\chi\chi(a) &\equiv 0 \bmod M_S^{\underline{\tau}}\mathcal{O}\\ C_S^{\alpha}\mu_{f,j}^{\alpha,S}(a+(M_S^{\underline{\nu}})) &\equiv 0 \bmod M_S^{(j-h)\underline{\nu}}\mathcal{O}\end{aligned}$$

donc on a :

$$C_S^{\alpha}\mu_{f,j}^{\alpha,S}\left(\sum_{\chi}\gamma_\chi\chi\right)\equiv 0 \bmod M_S^{(j-h)\underline{\nu}+\underline{\tau}}\mathcal{O}$$

Par ailleurs, on sait que :

$$\begin{aligned}\mu_{f,j}^{\alpha,S}\left(\sum_{\chi}\gamma_\chi\chi\right) &= \sum_{\chi}\gamma_\chi\mu_{f,j}^{\alpha,S}(\chi)\\ &= \sum_{\chi}\gamma_\chi H(f,\alpha,S,j,\chi)L_{f_{\alpha,S,0}}(j+1,\overline{\chi})\end{aligned}$$

d'où le résultat du corollaire. $\square$

Conclusion

Les résultats obtenus donnent des congruences sur des nombres algébriques, que l'on sait liés à des valeurs spéciales de fonctions L de formes modulaires. Ils permettent donc d'avoir un analogue adélique de ces fonctions L : pour tout p premier, on peut définir un analogue p-adique de ces fonctions L, de façon "cohérente" ; c'est-à-dire via la même distribution $\mu_{f,j}^{\alpha,S}$.

L'avantage est que la formulation se fait sous forme de congruences, sans faire intervenir explicitement ces équivalents p-adiques. De ce point de vue, on généralise bien à $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ ce qui a été obtenu par Deligne et Ribet dans [**15**].

Cet article de Deligne et Ribet n'était d'ailleurs pas limité au groupe multiplicatif des adèles sur $\mathbb{Q}$: ils ont travaillé sur le groupe $GL_1(\mathbb{A}_F)$ d'un corps de nombres totalement réel général F ; il serait donc très intéressant d'essayer d'appliquer les méthodes de ce travail pour obtenir des résultats sur le groupe $GL_2(\mathbb{A}_F)$. Cela demande de développer un analogue de la technique de la projection canonique pour les formes modulaires de Hilbert.

Une autre piste intéressante pour continuer ce travail est l'application au calcul informatique des valeurs spéciales : d'une part il existe déjà des programmes capables de calculer avec les formes modulaires holomorphes (par exemple, W.Stein a travaillé sur ce sujet), et on sait que les formes presque-holomorphes sont très proches des formes holomorphes (existence d'un développement de Fourier, propriétés d'arithméticité, etc). D'autre part, la description de la projection canonique faite au chapitre IV, a été pensée à la base pour permettre un calcul facile par des moyens algorithmiques.

Enfin, on n'a pas encore étudié les interprétations arithmétiques de ces valeurs spéciales ; notamment le lien entre ces mesures et des lois de réciprocité, ou le lien avec les ordres des χ composantes des groupes de Selmer.

Bibliographie

[1] Y. Amice and J. Velu. Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke. *Astérisque*, 24/25, 1975.

[2] D. Blasius. Period relations and critical values of L-functions. *Pacific Journal of Mathematics*, 1998.

[3] D. Bump. *Automorphic forms and representations*. Number 55 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997.

[4] W. Casselman. On some results of Atkin-Lehner. *Mathematische Annalen*, 201, 1973.

[5] J. Coates. p-adic L-functions. *Séminaire Bourbaki*, 40(701), 1988.

[6] J. Coates and B. Perrin-Riou. On p-adic L-functions attached to motives over $\mathbb{Q}$. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 17, 1989.

[7] R.F. Coleman. p-adic Banach spaces and families of modular forms. *Inventiones Mathematicae*, 127, 1997.

[8] P. Colmez. Fonctions L p-adiques. *Séminaire Bourbaki*, 51(851), 1999.

[9] A. Dabrowski. p-adic L-functions of Hilbert modular forms. *Annales de l'Institut Fourier*, 44(4), 1994.

[10] A. Dabrowski and D. Delbourgo. S-adic L-functions attached to the symmetric square of a newform. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 74(3), 1997.

[11] H. Darmon. The Shimura-Taniyama conjecture. *Russian Mathematical Surveys*, 50(3), 1995.

[12] H. Darmon, F. Diamond, and R. Taylor. Fermat's Last Theorem. 1995.

[13] P. Deligne. Formes modulaires et représentations de GL_2. In *Modular Functions one Variable II*, 1972. LNM349.

[14] P. Deligne. Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 33(2), 1979.

[15] P. Deligne and K.A. Ribet. Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields. *Inventiones Mathematicae*, 59, 1980.

[16] Stephen S. Gelbart. *Automorphic forms on adele groups*, volume 83 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 1975.

[17] H. Hida. A p-adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic modular forms I. *Inventiones Mathematicae*, 79, 1985.

[18] H. Hida. *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*. Number 26 in Student Texts. London Mathematical Society, 1993.

[19] F. Jory-Hugues. *Familles de symboles modulaires et fonctions L p-adiques*. PhD thesis, Institut Fourier, 1998.

[20] Kazuya Kato. Tamagawa number conjecture for zeta values. volume II of *ICM2002*, 2002.

[21] N. Katz. p-adic L-functions via moduli of elliptic curves. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 29, 1975.

[22] N. Katz. p-adic interpolation of real analytic Eisenstein series. *Annals of Mathematics*, 104(2) :459,571, 1976.

[23] D. Kazhdan, B. Mazur, and C.-G. Schmidt. Relative modular symbols and Rankin-Selberg convolutions. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (519), 2000.

[24] T. Kubota and H.W. Leopold. Eine p-adische Theorie der Zetawerte. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 214,215 :328,339, 1964.

[25] W.C. Winnie Li. *Number theory with applications.*

[26] Y.I. Manin. Parabolic points and Zeta-functions of modular curves. *Izv.Akad. Nauk SSSR*, 36(1), 1972.

[27] Yu. I. Manin. Non-archimedean integration and Jacquet-Langlands p-adic L-functions. 1976.

[28] B. Mazur. Courbes elliptiques et symboles modulaires. *Séminaire Bourbaki*, (414), juin 1972.

[29] B. Mazur and H.P.F. Swinnerton-Dyer. Arithmetic of Weil curves. *Inventiones Mathematicae*, 25, 1974.

[30] T. Miyake. On automorphic forms on GL_2 and Hecke operators. *Annals of Mathematics*, 94(2), 1971.

[31] T. Miyake. *Modular forms*. Springer, 1989.

[32] S. Mizumoto. Nearly holomorphic Eisenstein liftings. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 67, 1997.

[33] V.K. Murty, M.R. ; Murty. *Non vanishing of L-functions and applications*. Number 157 in Progress in mathematics. birkhauser, 1997.

[34] A.A. Panchishkin. Motives for absolute Hodge cycles. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 55(1), 1994.

[35] A.A. Panchishkin. Motives over totally real fields and p-adic L-functions. *Annales de l'Institut Fourier*, 44(4), 1994.

[36] A.A. Panchishkin. On the Siegel-Eisenstein measure and its applications. *Israel Journal of Mathematics*, 120, 2000.

[37] A.A. Panchishkin. Admissible measure for standard L-functions and nearly holomorphic Siegel modular forms. *Max-Planck Institut für Mathematik*, 42, 2002.

[38] A.A. Panchishkin. A new method of constructing p-adic l-functions associated with modular forms. *Moscow Mathematical Journal*, 2(2), 2002.

[39] A.A. Panchishkin. Sur une condition suffisante pour l'existence des mesures p-adiques admissibles. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 2003.

[40] A.A. Panchishkin. Two variable p-adic L-functions attached to eigenfamilies of positive slope. *Inventiones Mathematicae*, 154(3), 2003.

[41] B. Perrin-Riou. Systèmes d'Euler p-adiques et théorie d'Iwasawa. *Annales de l'Institut Fourier*, 48(5), 1998.

[42] J. Puydt. Séries d'Eisenstein adéliques et leurs équivalents algébriques. *Prépublication de l'Institut Fourier*, 0(567), 2002.

[43] C.-G. Schmidt. p-adic measures attached to automorphic representations of GL_3. *Inventiones Mathematicae*, 92(3), 1988.

[44] C.-G. Schmidt. Period relations and p-adic measures. *J. Manuscr. Math.*, 2(106), 2001.

[45] A.J. Scholl. *An introduction to Kato's Euler systems*, volume 254 of *Lecture Note Series*, pages 379,460. London Mathematical Society, 1998.

[46] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. 1967.

[47] J.-P. Serre. Une interprétation des congruences relatives à la fonction τ de ramanujan. *Séminaire Delange-Pisot-Poitou*, (14), 1967-1968.

[48] J.-P. Serre. *Cours d'arithmétique*. 1970.

[49] J.-P. Serre. Congruences et formes modulaires. *Séminaire Bourbaki*, (416), juin 1972.

[50] J.-P. Serre. Formes modulaires et fonctions ζ p-adiques. *Modular Functions of One Variable III*, 1972. LNM350.

[51] G. Shimura. *Introduction to the arithmetic theory of automorphic forms*. Princeton University Press, 1971.

[52] G. Shimura. On the holomorphy of certain Dirichlet series. In *Proceedings of the London Mathematical Society*, pages 79,98, 1975.

[53] G. Shimura. The special values of Zeta functions associated with cusp forms. *Communications on pure and applied mathematics*, XXIX :783,804, 1976.

[54] G. Shimura. On the periods of modular forms. *Mathematische Annalen*, 229 :211–221, 1977.

[55] G. Shimura. The special values of Zeta functions associated with Hilbert modular forms. *Duke Mathematical Journal*, 45(3), 1978.

[56] G. Shimura. *Arithmeticity in the theory of automorphic forms*. Number 82 in Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2000.

[57] G. Stevens. *Arithmetic on modular curves*. 1982.

[58] H.P.F. Swinnerton-Dyer. On l-adic representations and congruences for coefficients of modular forms. *Modular Functions of One Variable III*, 1972. LNM350.

[59] J. Tate. Rigid analytic spaces. *Inventiones Mathematicae*, 1971.

[60] M.M. Visik. Non-archimedean measures connected with Dirichlet series. *Math. U.S.S.R. Sbornik*, 28(2), 1976.

[61] A. Weil. On a certain type of characters of the idèle class group of an algebraic numberfield. *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Number Theory, Tokyo-Nikko*, 1955.

[62] A. Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. *Annals of Mathematics*, 141(3) :443,551, 1995.