



HAL
open science

Minkowski Addition of Triangles

Mireille Rousset

► **To cite this version:**

Mireille Rousset. Minkowski Addition of Triangles. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1996. Français. NNT: . tel-00005017

HAL Id: tel-00005017

<https://theses.hal.science/tel-00005017>

Submitted on 23 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

Mireille ROUSSET

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph FOURIER - Grenoble I

(arrêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et du 30 Mars 1992)

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Sommes de Minkowski de Triangles

Date de soutenance : 22 octobre 1996

Composition du Jury :

Président : Mr P.-J. LAURENT
Rapporteurs : Mr J.-D. BOISSONNAT
Mr J.-C. FIOROT
Examineurs : Mr B. LACOLLE
Mr D. NADDEF
Mr P. VALENTIN

Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG

Table des matières

Introduction	1
Chapitre I Polytopes et Somme de Minkowski : Rappels	5
1. Rappels, définitions et notations	6
1.1 Somme de Minkowski	6
1.2 Outils pour la somme de Minkowski de polytopes	7
• <i>Polytopes</i>	7
• <i>Hyperplan d'appui, points d'appui et k-faces d'un polytope</i>	8
• <i>Cône normal et faisceau de normales d'un polytope</i>	10
• <i>Propriétés du faisceau de normales</i>	11
• <i>Rappels sur les arrangements d'hyperplans</i>	13
2. Zonotopes	15
2.1 Définitions et propriétés	15
2.2 Zonotopes et arrangements d'hyperplans	17
• <i>Lien entre arrangement d'hyperplans et zonotopes</i>	18
• <i>Complexité de Z et de (Z)</i>	18
• <i>Zone du zonotope et zone dans l'arrangement d'hyperplans</i>	20
2.3 Diagrammes	21
Chapitre II Sommes de Minkowski de Triangles	23
1. Généralités	24
• Complexité de la somme de polytopes	26
• Construction de la somme de polytopes : Algorithme	26
2. Complexité de la somme de triangles	28
3. Propriété des trois demi-zones	34

Chapitre IV	Décomposition	107
1.	Définitions et principaux résultats sur la décomposition de polytopes	108
	• Les sommandes	108
	• Décomposabilité	110
2.	Décomposition d'un polygone convexe en somme de segments et de triangles	115
3.	"Soustraction" de Minkowski de deux ensembles	117
	Conclusion	125
	Bibliographie	127

Introduction

Ce travail concerne des problèmes géométriques sur des polytopes nouveaux : les sommes de Minkowski de triangles. L'origine de ce problème est une modélisation géométrique de la fabrication des mélanges. Une autre motivation de notre étude, est de considérer ces objets comme une généralisation de la somme de segments, appelée zonotope, car ces polytopes ont suscités beaucoup d'intérêts.

Les zonotopes apparaissent dans des domaines d'applications tels que :

- l'économie, où les productions possibles d'un groupe d'entreprises sont modélisées par un zonotope [Hil81],
- les problèmes de pavages [Gro78], [Cox62].

Le terme zonoèdre (zonotope de dimension 3) a été introduit E.S. Fedorov dans le domaine de la cristallographie. L'auteur s'intéressait particulièrement aux zonoèdres qui pavent l'espace. Les zonotopes ont fait l'objet de nombreuses études qui ont révélé leurs propriétés géométriques et combinatoires. Les principaux résultats sont apparus dans les travaux de H.S. Coxeter, E.D. Bolker, P. McMullen et G.C. Shephard. Citons quelques sujets d'étude :

- la caractérisation des zonotopes par des propriétés de symétrie de leur faces,
- les zones,
- les types combinatoires,
- les diagrammes projectifs pour les zonoèdres.

Les zonotopes interviennent dans le modèle géométrique des procédés de fabrication de mélanges. A partir de la représentation vectorielle des produits, P.Valentin a développé le concept de convexe de mélanges. Ce convexe est un zonotope associé aux produits de base disponibles. Il représente l'ensemble des mélanges faisables, de sorte que la faisabilité d'un mélange s'exprime par l'appartenance d'un point, représentation vectorielle du mélange, au zonotope. Cette modélisation a été à l'origine de différents travaux (cf. [Sla86], [Gir86], [Gir&Val89], [LSV91], [Lac&Val93], [Sza91], [Dao95] ...).

En général, la façon de fabriquer un produit n'est pas unique, d'où l'élaboration d'un critère de gestion des mélanges. Ce critère a pour but de consommer les produits de base de façon à ce que les produits restant après fabrication du mélange permettent de fabriquer le plus grand éventail de mélanges possibles.

Après avoir traité le problème d'un seul mélange, les impératifs de la fabrication ont amené à considérer la fabrication de plusieurs mélanges. Différentes solutions ont été envisagées avec succès pour l'utilisation du modèle dans la pratique : optimisation de la fabrication d'un mélange pour préserver les opérations futures, résolution numérique de la fabrication de plusieurs mélanges en utilisant la programmation

linéaire.

Pour fabriquer plusieurs mélanges, plutôt qu'une stratégie séquentielle de fabrication, où la faisabilité d'un second mélange dépend du choix fait pour la fabrication d'un premier mélange, on regarde si globalement ces mélanges sont faisables. Ce problème est énoncé sous la forme plus générale de *faisabilité simultanée de q mélanges* à partir des produits de base, et est également appelé problème de *coexistence* de deux familles de vecteurs.

La modélisation géométrique de ce problème introduite dans [Lac&Val93] généralise le convexe de mélanges à celui de q -mélanges. Ces nouveaux ensembles résultent de la somme de q -simplexes et la faisabilité simultanée des mélanges est équivalente à l'appartenance d'un point à ce convexe. La faisabilité simultanée de 2 mélanges conduit à l'étude de la somme de triangles.

En dehors du contexte des mélanges, il nous a paru intéressant d'étudier les sommes de triangles en tant que généralisation des sommes de segments, et d'étudier la structure de ces polytopes et des méthodes de constructions. On pourrait élargir cette étude aux sommes de simplexes. Cette voie n'a pas été abordée dans cette thèse, mais les méthodes développées pourraient certainement s'adapter.

Dans le chapitre I, on effectue des rappels sur les polytopes et on introduit les outils utilisés dans cette thèse : les faisceaux de normales, les arrangements d'hyperplans et le premier diagramme projectif, ainsi que les raffinements de faisceaux de normales qui sont fondamentaux pour la suite. On rappelle également certaines propriétés des zonotopes. Ces notions sont empruntées soit à la géométrie classique soit à la géométrie projective.

La somme de triangles est étudiée dans le chapitre II. Les résultats obtenus concernent essentiellement la complexité combinatoire de la somme et sa construction. Ils s'appuient sur l'étude de la somme de polytopes faite par P. Gritzmann et B. Sturmfels (cf. [Gri&Stu83]).

On montre que, comme pour les zonotopes, le nombre de faces de la somme de p triangles dans \mathbb{R}^n se comporte en $O(p^{n-1})$ et cette complexité est atteinte.

Une propriété géométrique similaire à celle des zones d'un zonotope est mise en évidence. De même qu'à un vecteur correspond une zone d'un zonotope, à un triangle correspond trois "demi-zones" sur le polytope.

La construction en dimension 2 ne présente pas de difficulté. Sa description nous permet d'expliquer les deux étapes de la somme. En dimension 3, la construction est plus délicate mais on se ramène à un problème dans le plan, de fusion de subdivisions convexes traité par L.J. Guibas et R. Seidel dans [Gui&Sei87].

On propose, pour la construction de la somme de triangles en dimension quelconque ($n \geq 3$), une méthode qui permet d'extraire la structure combinatoire du

polytope (ou graphe d'incidence) d'un arrangement d'hyperplans par des opérations de fusion de faces.

La construction effective qui résulte de la méthode, permet de bien mettre en évidence la notion de décomposition que l'on illustre sur un certain nombre d'exemples.

L'algorithme décrit en dimension 3 se généralise en dimension supérieure avec une complexité $O(n^3)$.

Dans le chapitre III, le système de triangles étudiée est issue du modèle géométrique de fabrication simultanée de deux mélanges. La représentation vectorielle des produits dans le convexe de dimension 6. C'est le prolongement de l'étude menée sur les mélanges binaires (i.e. pour une représentation vectorielle des produits dans [Lac&Val92]). La faisabilité s'exprime par l'appartenance d'un point au convexe de 2-mélanges, ceci a orienté notre étude vers l'énumération des facettes du convexe. Celles-ci permettent d'obtenir un système d'inégalités équivalent à la faisabilité des deux mélanges.

Cette énumération a permis d'établir la "lecture" des facettes à partir du premier diagramme projectif. Il en résulte également que le nombre de facettes peut atteindre $O(p^5)$ pour p produits de bases. Le cas de la sélectivité régulière, c'est à dire celui où tout vecteur n'est pas combinaison linéaire positive des autres, donne lieu à une propriété remarquable : les mélanges M_1 et M_2 sont simultanément faisables si et seulement si chacun des mélanges M_1 , M_2 et $M_1 + M_2$ est faisable. Ceci correspond effectivement à une dégénérescence du convexe de 2-mélanges qui ne comporte plus que $O(p^2)$ facettes. Cette simplification avait déjà été observée dans la fabrication d'un seul mélange, et interprétée par une dégénérescence du zonoèdre [Lac&Sza96].

Dans le chapitre IV, on aborde le sujet de la décomposition d'un polytope en somme de polytopes. On donne un aperçu des résultats existants. Dans le plan tout polygone convexe peut s'écrire comme la somme de segments et de triangles. En dimension supérieure le problème de décomposition est beaucoup plus complexe.

On propose une expression de la "soustraction" à un convexe d'un de ses sommandes, sous forme d'intersection de translatés. Et on tente d'examiner ce que cette expression peut apporter du point de vue algorithmique.

Chapitre I

Polytopes et Somme de Minkowski : Rappels

Introduction

Les polytopes convexes ont donné lieu à de nombreuses études. Elles portent sur des aspects combinatoires et géométriques, ou encore sur des problèmes de pavage par des polytopes. On trouvera dans les ouvrages suivants un éventail des problèmes abordés : B. Grünbaum [Grü63], P. McMullen & G.C. Shephard [McM&She71] et G.M. Ziegler [Zie95].

Ce chapitre est une introduction aux problèmes posés dans cette thèse : on y décrit les notions fondamentales pour l'étude et la construction de la somme de Minkowski de polytopes. L'exemple des zonotopes donne une illustration des problèmes traités.

La première partie est consacrée à des rappels sur les polytopes et sur les outils liés à la somme de Minkowski de polytopes. La plupart des notions décrites sont spécifiques au cas des polytopes convexes, dans lequel notre problème se pose : hyperplan d'appui, et faisceau de normales.

Le principal outil de notre étude est le faisceau de normales d'un polytope qui permettra de calculer la somme de polytopes avec sa géométrie et sa combinatoire. C'est un complexe polyédrique particulier. Il permet de ramener la somme de polytopes au calcul du raffinement commun de faisceaux de normales.

Dans la seconde partie, nous présentons les zonotopes, cas particulier de la somme de Minkowski, abondamment étudié par les géomètres. Les principaux résultats sont la caractérisation des zonotopes par des propriétés géométriques de leurs faces, leur lien avec les arrangements d'hyperplans (outil usuel de la géométrie algorithmique), et les diagrammes projectifs associés aux zonoèdres.

1. Rappels, définitions et notations

Dans tout ce qui suit, nous nous situons dans l'espace \mathbb{R}^n à n dimensions, muni du produit scalaire Euclidien que nous noterons $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1.1. Somme de Minkowski

Définition 1 : La *somme de Minkowski* (ou *somme vectorielle*) de deux ensembles quelconques P et Q de \mathbb{R}^n est définie par

$$P + Q = \{ p + q : p \in P \text{ et } q \in Q \}.$$

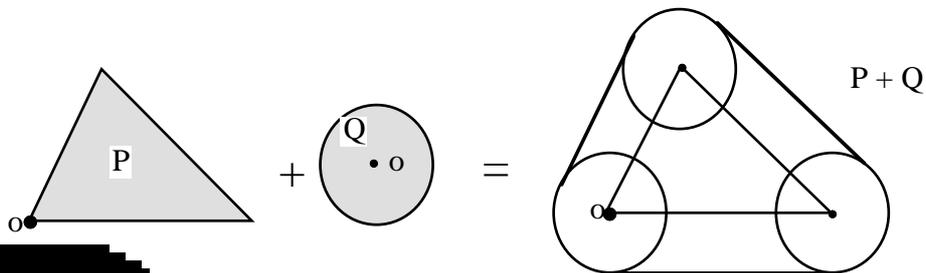


Figure 1 : Exemple, somme d'un triangle et d'un disque.

Remarque 1 : La somme de Minkowski peut être vue comme la projection du produit cartésien des ensembles (cf. [Zie95]). Soient P et Q deux ensembles quelconques de \mathbb{R}^n , leur somme peut s'écrire

$$P + Q = \Pi(P \times Q)$$

où

$$P \times Q = \{ (p, q) : p \in P, q \in Q \}$$

et

$$\Pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ telle que } \Pi(p, q) = p + q$$

Définition 2 : Soit P un ensemble convexe de \mathbb{R}^n . La *fonction support* h de P , dans la direction $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, est définie par :

$$h(P, u) = \sup \{ \langle x, u \rangle / x \in P \}.$$

Propriété 1 [Vale64] : Soient P un ensemble convexe compact de \mathbb{R}^n et $h(P, \cdot)$ sa fonction support, alors P vérifie :

$$P = \{ x / \langle x, u \rangle \leq h(P, u) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \}$$

Ainsi, un ensemble convexe compact est complètement déterminé par sa fonction support. De sorte qu'on peut exprimer la somme de Minkowski de tels ensembles par leurs fonctions supports.

Propriété 2 [Grü67] : Soient P et Q deux ensembles convexes compacts de \mathbb{R}^n et $h(P, \cdot)$ et $h(Q, \cdot)$ leurs fonctions supports respectives. La somme $P+Q$ est finie comme étant l'ensemble convexe fermé dont la fonction support est donnée par :

$$h(P+Q, u) = h(P, u) + h(Q, u), \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Dans le cas des polytopes, la somme de Minkowski peut également s'exprimer de la façon suivante :

Propriété 3 : Soient P et Q des polytopes. Soient p_i ($i=1, \dots, k$) les sommets de P et q_j ($j=1, \dots, m$) les sommets de Q .

$$P+Q = \text{Conv} \{ p_i + q_j \mid i=1, \dots, k \text{ et } j=1, \dots, m \},$$

où Conv désigne l'enveloppe convexe.

1.2. Outils pour la somme de Minkowski de polytopes

Dans ce paragraphe, nous introduisons les principales notions et notations relatives aux polytopes. On rappelle, pour commencer, les définitions des hyperplans d'appui, des points d'appui et des k -faces d'un polytope. Puis, on introduit les notions de cône normal à une face d'un polytope et de faisceaux coniques d'un polytope. Toutes ces notions seront fortement utiles par la suite. Pour plus de détails, on peut se référer à [Gri&Stu91] et [Grü67].

• Polytopes

Définition 3 : Un polytope P est une partie de \mathbb{R}^n qui est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points.

De façon équivalente, un polytope est défini comme une partie bornée de \mathbb{R}^n intersection finie de demi-espaces fermés.

On trouvera donc les deux expressions suivantes pour définir un polytope P :

- $P = \text{Conv}(V)$, où $V =$ ensemble des sommets de P ,
- $P = \bigcap_{i=1, \dots, f} H_i^-$, où H_i^- est le demi-espace fermé de frontière l'hyperplan H_i .

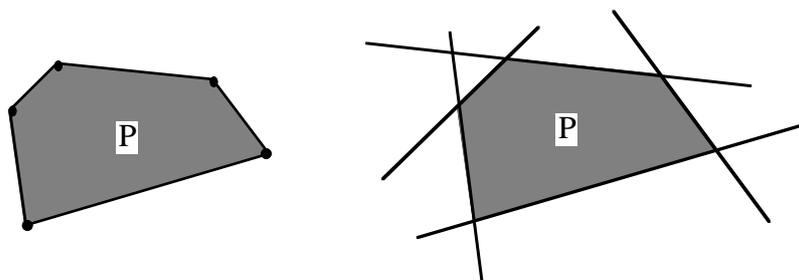
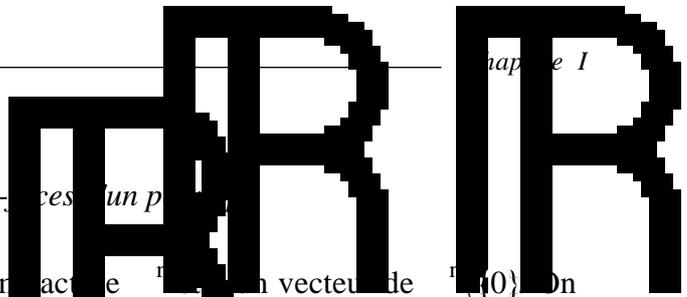


Figure 2 : P enveloppe convexe de ses sommets, ou intersection de demi-plans.



- Hyperplans d'appui, points d'appui et k -faces d'un polyèdre

Définition 4 : Soient S un ensemble compact de \mathbb{R}^n et un vecteur de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On appelle *hyperplan d'appui* de S de normale extérieure u l'hyperplan défini par :

$$H(S,u) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = h(S, u) \}.$$

Remarque 2 : L'hyperplan d'appui $H(S,u)$ doit vérifier :

- S est contenu dans le demi espace fermé de normale extérieure u délimité par $H(S,u)$,
- et $H(S,u) \cap S \neq \emptyset$.

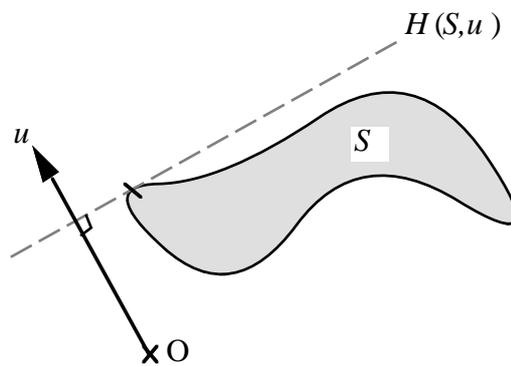


Figure 3 : Hyperplan d'appui.

Définition 5 : Si P est un polyèdre, alors

$$F(P,u) = H(P,u) \cap P$$

est une face de P (ensemble des *points d'appui*). On parlera de *k-face* de P pour désigner une face $F(P,u)$ de dimension k ($0 \leq k \leq n-1$). La dimension de $F(P,u)$ est celle du plus petit sous espace affine contenant $F(P,u)$.

On remarque que la face $F(P,u)$ est constituée de l'ensemble des points de P , qui maximisent la fonctionnelle linéaire $x \rightarrow \langle x, u \rangle$,

$$F(P,u) = \{ x \in P \mid \langle x, u \rangle = \text{Max}_{y \in P} \langle y, u \rangle \}.$$

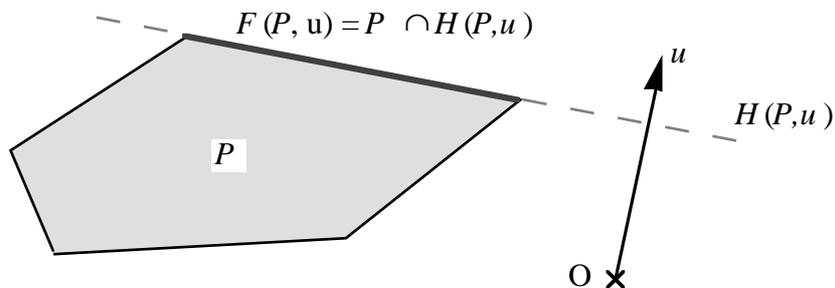


Figure 4 : Ensemble des points d'appui.

Les 0 -faces, les 1 -faces et les $(n-1)$ -faces sont appelées respectivement sommets, arêtes et facettes (pour un polytope P de dimension n). De la même façon, on parlera de n -polytope pour désigner un polytope de dimension n .

On note : $\mathcal{F}_k(P)$ l'ensemble des faces de P de dimension k pour $k = 0, \dots, n-1$. $f_k(P)$ désigne le cardinal de $\mathcal{F}_k(P)$ et $\mathcal{F}(P)$ l'ensemble de toutes les faces de P .

Remarque 3 : Soient P un n -polytope et $\{f_1, \dots, f_{f_{n-1}(P)}\}$ l'ensemble de ses facettes. A chaque facette f_i correspond le demi-espace fermé H_i^- contenant P et délimité par l'hyperplan d'appui à f_i .

La représentation minimale de P , sous forme d'intersections de demi-espaces fermés, est donnée par :

$$P = \bigcap_{i=1}^{f_{n-1}(P)} H_i^-$$

Cette représentation est dite minimale car il est impossible de supprimer l'un des demi-espaces H_i^- sans modifier P .

Soit P un polytope de \mathbb{R}^n . Soient f et $g \in \mathcal{F}(P)$ deux faces de P .

Définition 6 : On dit que f et g sont *incidentes* si f est contenue dans g ou si g est contenue dans f .

Si f est contenue dans g , et $\dim f = \dim g - 1$, alors f est appelée *sous-face* de g , et g *super-face* de f .

Les propriétés suivantes seront fréquemment utilisées dans la suite.

Propriété 4 : Soient P_1, \dots, P_k des polytopes de \mathbb{R}^n , alors quel que soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a la relation

$$F(P_1 + \dots + P_k, u) = F(P_1, u) + \dots + F(P_k, u).$$

Exemple :

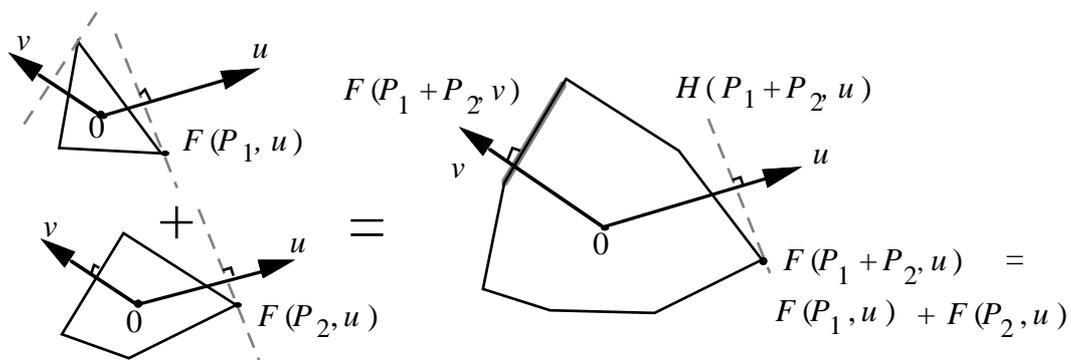


Figure 5 : Points d'appui dans une direction donnée.

• Cône normal et faisceau de normales

(cf. [Gri&Stu93])

Définition 7 [Zie95] : Soit f une face de P et C_f le cône normal en f à P , noté (f, P) .

$$C_f = \{ \alpha u \mid \alpha \geq 0, u \in P, u \cap P \}. \quad (*)$$

Dans certains articles, on trouve également la définition suivante (cf. [Gri&Stu93]) :

$$C_f = \{ \alpha u \mid \alpha \geq 0, u \in P, u \cap P \}$$

En fait

$$C_f = \{ \alpha u \mid \alpha \geq 0, u \in P, u \cap P \}$$

où $\text{Int Rel}(S)$ désigne l'intérieur relatif de S dans \mathbb{R}^n et Int l'intérieur de l'ensemble S pris dans le plus petit espace affine contenant S .

Et réciproquement

$$C_f = \{ \alpha u \mid \alpha \geq 0, u \in P, u \cap P \}$$

où Cl désigne la fermeture d'un ensemble.

Dans toute la suite, on utilisera la définition (*).

Propriété 5 : Soient P un polytope convexe et f une face de P , (f, P) cône polyédrique de sommet 0 .

Par exemple, si f est une face de P (dimension k), alors (f, P) est une demi-droite d'origine 0 si $k=0$, un cône convexe admettant un unique hyperplan d'appui de normale u si $k=1$ et $(f, P) = \{ \alpha u \mid \alpha \geq 0 \}$ si $k=1$.

Exemple

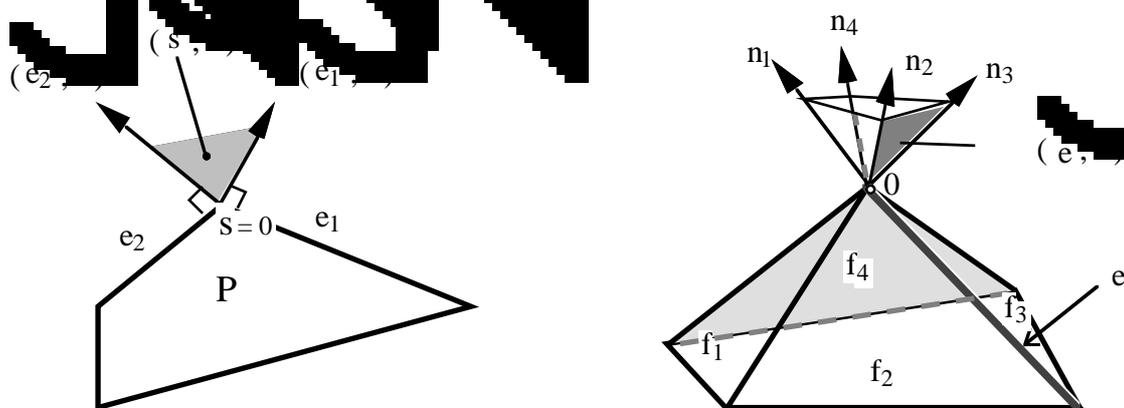


Figure 6 : Cônes de normales.

Définition 8 : On appelle *faisceau de cônes normaux* (ou "normal fan") l'ensemble des cônes normaux (f, τ_f) pour toute face f d'un polyèdre P et on le note: $(P) = \{(f, \tau_f) \mid f \in (P)\}$.

Exemple :

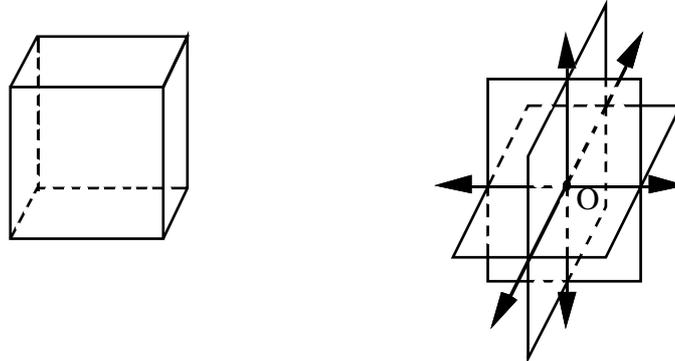


Figure 7 : Un cube et le faisceau de cônes normaux associé.

• *Propriétés du faisceau de cônes normaux :*

Définition 9 [Grü67] : Une chaîne de faces d'un polyèdre est appelée *chaîne de faces* si :

- (i) Toute face d'un élément de la chaîne est incluse dans un élément de la chaîne.
 - (ii) L'intersection de deux éléments consécutifs d'une chaîne est une face commune d'eux.
- donc un élément de (P) d'après (i).

Propriété 6 : L'ensemble (P) est un ensemble complet de cônes rayonnants (f, τ_f) qui est constitué de cônes (de sommet O) pour toutes faces de dimension 0 à n .

L'ensemble de ces cônes (f, τ_f) pour tout face $f \in (P)$, donne une partition $\mathbb{R}^n(f)$ formée de cônes polyédriques d'origine O .

Propriété 7 : Étant donné un polyèdre P , l'application qui à l'associe (f, τ_f) est une bijection entre (P) et le jeu de toutes les normales (P) .

A chaque cellule de (P) correspond une $(n-i)$ -cellule de (P) , $i = 0, \dots, n-1$. (Voir figure 7)

Propriété 8 : Soient f et g deux faces d'un polyèdre P . Si f est incluse dans g , alors (g, τ_g) est inclus dans (f, τ_f) .

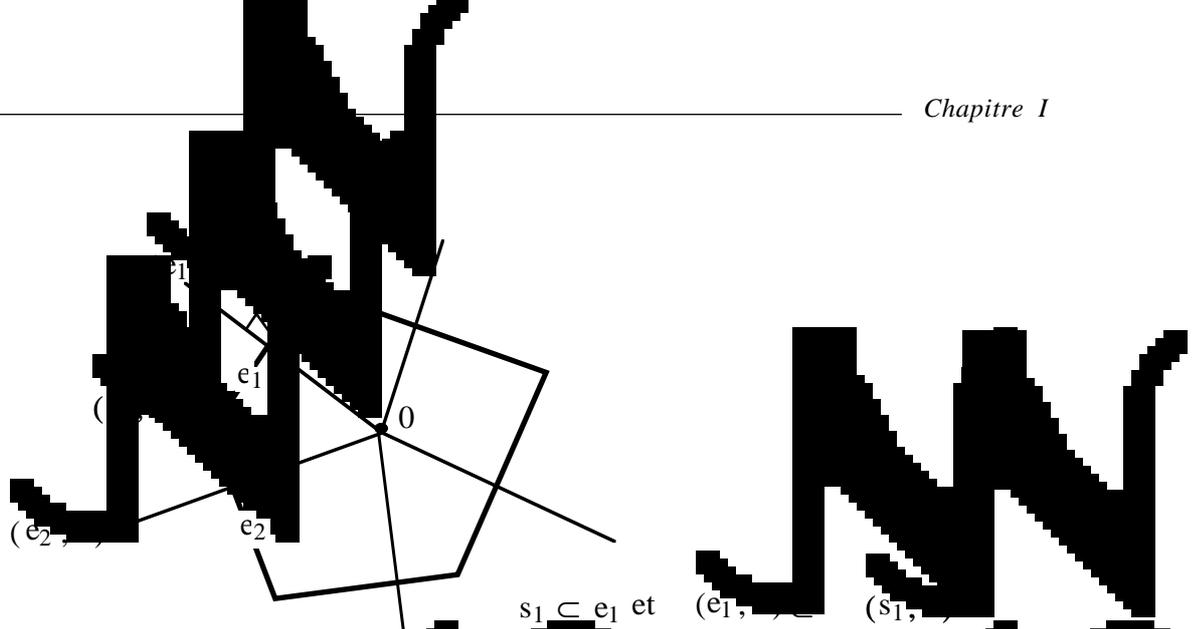


Figure 8 : Faisceau de normales dans un polygone.

Les définitions suivantes sur les faisceaux de normales de cellules s'appliquent aux faisceaux de normales associés aux polyèdres.

Définition 10 : Un complexe simplicial est dit *convexe* si et seulement si tout faisceau de normales est convexe.

Ceci induit un ordre partiel sur les complexes simpliciaux.

Définition 11 : Un complexe simplicial est dit *affine* si et seulement si il est convexe.

Définition 12 : Le *plus grand raffinement commun* de deux complexes simpliciaux (P_1) et (P_2) est noté (P_1, P_2) .

c'est à dire le plus grand complexe simplicial affine qui est contenu dans $(P_1) \cup (P_2)$.

Propriété 9 : Soient (P_1) et (P_2) deux complexes simpliciaux affines.

Alors $(P_1, P_2) = (P_1 \cup P_2) \setminus (P_1 \cap P_2)$ où (P_1, P_2) désigne le raffinement commun des (P_1) et (P_2) .

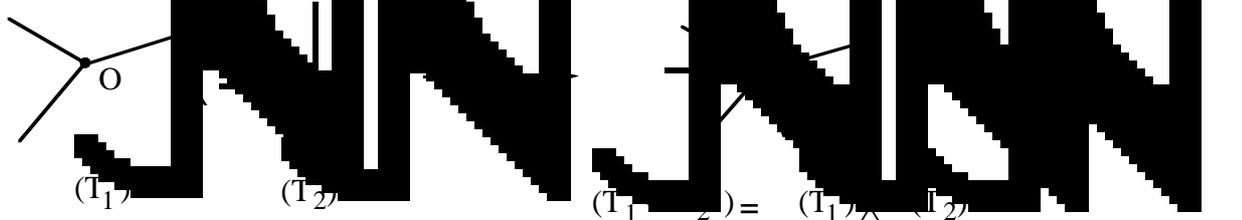


Figure 9 : Raffinement commun des faisceaux de normales de deux triangles.

Définition 13 : Etant donné deux polytopes P et P' on dit qu'ils ont la même *type combinatoire* entre P et P' si il existe une bijection entre l'ensemble (P) de toutes les faces de P et l'ensemble (P') de toutes les faces de P' telle que si f_1 et f_2 deux faces de P telles que f_1 est d'inclusion dans f_2 (à dire si f_1 et f_2 deux faces de P telles que f_1 est d'inclusion dans f_2), alors f_1' et f_2' ont la même relation d'inclusion dans P' .

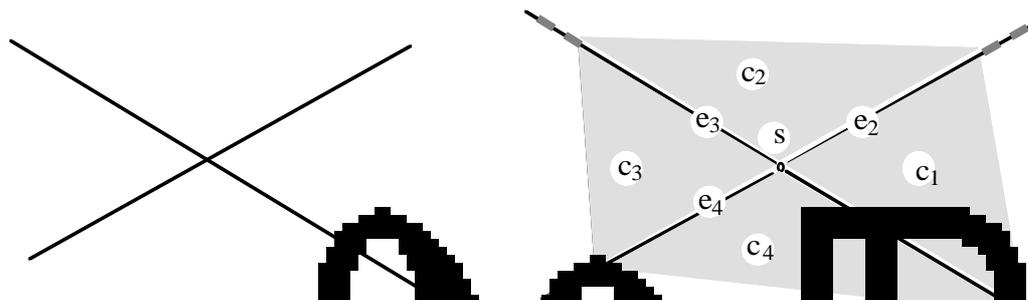
Remarque :

- 1- Si deux polytopes P et P' sont tels que $(P) \cong (P')$, ils ont le même *type combinatoire* et il existe une bijection entre (P) et (P') telle que la face f de P et la face f' de P' ont le même cône normal.
- 2- Pour que deux polytopes aient même *type combinatoire* il suffit qu'ils aient le même nombre de côtés.

• *Rappels et notations sur les arrangements d'hyperplans* (voir [Ede86, chapitre 1])

Soit H un ensemble de p hyperplans de

l'espace E^n . Un arrangement d'hyperplans dans E^n est la partition de l'espace induite par un ensemble H d'hyperplans. Il est constitué d'un ensemble de cellules de dimension 0 à n . Les n -cellules de l'arrangement sont des n -polytopes ouverts non nécessairement bornés, qui sont les plus grands ensembles de points de E^n qui ne sont pas séparés par un hyperplan de H . L'intérieur relatif des k -faces ($0 \leq k \leq n-1$) de ces n -polytopes forment les k -cellules de l'arrangement.



Arrangement du plan par deux droites. Les cellules de l'arrangement sont les régions délimitées par les droites.

Figure 10 : Arrangement d'hyperplans dans l'espace.

On note (H) l'arrangement d'hyperplans dans E^n . Selon les auteurs ([Grü67], [Zas75], [Ede86], ...) (H) est défini soit comme une partition de l'espace (comme dans la description ci-dessus), soit comme un complexe polyédrique sur E^n . Dans toute la suite, on considérera (H) comme un complexe, ainsi ses cellules sont la fermeture des k -faces du partitionnement.

On note :

- $f_k(\mathbf{H})$ le nombre de k -faces d'un arrangement (\mathbf{H}) ,
- $f_k^{(n)}(p) = \max\{ f_k(\mathbf{H}) \mid \mathbf{H} \text{ ensemble de } p \text{ hyperplans de } \mathbb{R}^n\}$, maximum sur tous les arrangements de p hyperplans,
- $i_k(\mathbf{H})$ le nombre d'incidences entre k -faces et $(k+1)$ -faces d'un arrangement (\mathbf{H}) ,
- et $i_k^{(n)}(p) = \max\{ i_k(\mathbf{H}) \mid \mathbf{H} \text{ ensemble de } p \text{ hyperplans de } \mathbb{R}^n\}$.

Propriété 10 [Ede86] : Pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$, on a

$$f_k^{(n)}(p) = \sum_{i=0, \dots, k} C_{n-1-i}^k C_p^i \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n, \text{ et}$$

$$i_k^{(n)}(p) = 2(n-k) f_k^{(n)}(p), \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n-1.$$

Définition 14 : Un arrangement (\mathbf{H}) de $p \geq n$ hyperplans de \mathbb{R}^n est dit *simple* si toute intersection de n hyperplans de \mathbf{H} est réduite à un point et si toute intersection de $n+1$ hyperplans de \mathbf{H} est vide.

Les arrangements simples maximisent le nombre de faces et le nombre de faces incidentes, comme l'énonce la propriété suivante.

Propriété 11 [Ede86] : Soit \mathbf{H} un ensemble de p hyperplans de

$$f_k(\mathbf{H}) = f_k^{(n)}(p) \quad \text{et} \quad i_k(\mathbf{H}) = i_k^{(n)}(p)$$

si et seulement si l'arrangement (\mathbf{H}) est simple.

Une autre expression (équivalente) de $f_k^{(n)}(p)$ est donnée par R.C. Buck (cf. [Buc43]) :

$$f_k^{(n)}(p) = C_p^{n-k} \sum_{i=0, \dots, k} C_{p+k-n}^i. \quad (1)$$

Dans cet article, l'auteur donne également le nombre de faces bornées $f_{k, \text{ bornée}}^{(n)}(p)$ d'un arrangement simple.

Propriété 12 [Buc43] :

$$f_{k, \text{ bornée}}^{(n)}(p) = \sum_{i=n-k, \dots, n} (-1)^{n+i} C_i^{n-k} C_p^i. \quad (2)$$

2. Zonotopes

Dans ce paragraphe, nous rappelons les principaux résultats relatifs au cas particulier de la somme de Minkowski de segments de droites.

2.1 Définitions et propriétés

Définition 15 : Un *zonotope* est un polytope défini par la somme de Minkowski de segments de droites fermés.

D'après la remarque 1 (Ziegler), un zonotope somme de p segments est la projection d'un paralléloétope de dimension p .

Ces polytopes particuliers ont fait l'objet de nombreuses études de la part de Coxeter, McMullen, Shephard... Dans leurs travaux Coxeter et Fedorov traitent des zonotopes de dimension 2 et 3 appelés respectivement zonogones et zonoèdres.

Exemple :

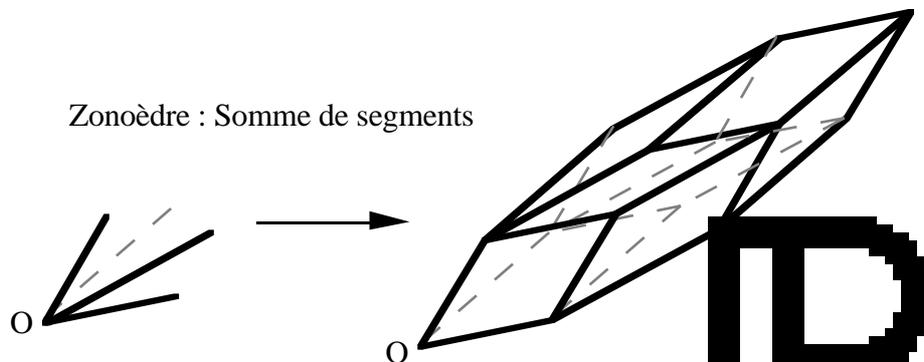


Figure 11 : Zonoèdre somme de quatre segments

Définition 16 : Soient N_1, N_2, \dots, N_p des vecteurs de \mathbb{R}^n . Le zonotope associé à ces vecteurs s'écrit :

$$Z(N_1, \dots, N_p) = \sum_{i=1, \dots, p} [0, N_i], \tag{3}$$

Tout zonotope s'écrit sous cette forme à une translation près. En effet, soit le Z' zonotope défini par $Z' = \sum_{i=1, \dots, p} [A_i, B_i]$. Si on pose $N_i = B_i - A_i$, on a

$$Z' = \sum_{i=1, \dots, p} A_i + \sum_{i=1, \dots, p} [0, B_i - A_i] = \sum_{i=1, \dots, p} A_i + Z(N_1, \dots, N_p).$$

Ainsi sans perte de généralité, on parlera, dans la suite, de zonotope de la forme (3), associé à un ensemble de vecteurs.

Les zonotopes présentent des propriétés géométriques remarquables.

Soit Z le zonotope associé aux vecteurs $\{N_1, \dots, N_p\}$. Z admet comme centre de symétrie, le point I obtenu en faisant la somme des milieux des segments $[0, N_i]$.

En appliquant la propriété au zonotope Z associé aux vecteurs $\{N_1, \dots, N_p\}$, on obtient : pour tout $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$F(Z, u) = \sum_{i=1, \dots, p} F([0, N_i], u).$$

Or

$$F([0, N_i], u) = \begin{cases} N_i & \text{si } \langle N_i, u \rangle > 0, \\ [0, N_i] & \text{si } \langle N_i, u \rangle = 0, \\ 0 & \text{si } \langle N_i, u \rangle < 0. \end{cases}$$

Donc toute face de Z s'écrit sous la forme :

$$F(Z, u) = \sum_{i=1, \dots, p / \text{où } \langle u, N_i \rangle > 0} N_i + \sum_{i=1, \dots, p / \text{où } \langle u, N_i \rangle = 0} [0, N_i], \quad (4)$$

c'est à dire comme étant la somme de segments. Donc $F(Z, u)$ est un zonotope.

Ceci entraîne que toute face d'un zonotope est à symétrie centrale. La réciproque est vraie, d'où la caractérisation suivante des zonotopes donnée dans [She67].

Propriété 13 : Un zonotope est un polytope à symétrie centrale, dont toutes les faces sont à symétrie centrale.

Remarque 5 :

- Tout polygone (en dimension 2) à symétrie centrale est un zonotope.
- Par contre un polytope à symétrie centrale n'est pas forcément un zonotope ($n \geq 3$). Par exemple le cocube

$$C_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1, \dots, n} |x_i| \leq 1 \right\}$$

est à symétrie centrale, mais pour $n \geq 3$ ses 2-faces sont des triangles, donc ce n'est pas un zonotope.

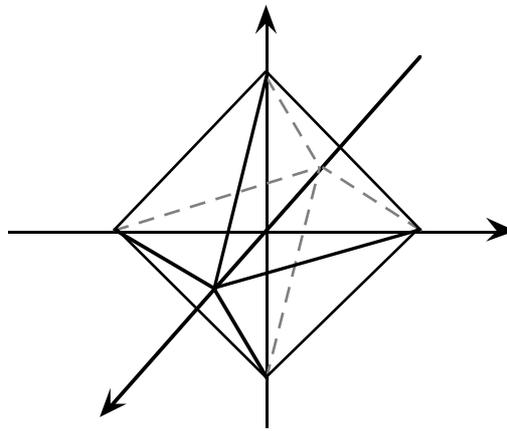


Figure 12 : Cocube de dimension 3.

A. D. Alexandrov donne la propriété suivante.

Propriété 14 [Ale33]: Soit P un polyèdre (i.e. un polytope de dimension 3). Si toutes ses facettes sont à symétrie centrale, alors P est à symétrie centrale (donc c'est un zonotède).

Cette propriété a été généralisée par Shephard en dimension quelconque.

Théorème 1 [She67]: Si toutes les j -faces d'un n -polytope P sont à symétrie centrale, où j est un entier donné vérifiant $2 \leq j \leq n$, alors les k -faces de P sont à symétrie centrale pour tout k tel que $j \leq k \leq n$.

P étant lui même considéré comme une n -face, le théorème implique que P est à symétrie centrale.

Si on applique ce théorème avec $j = 2$, on obtient une caractérisation des zonotopes (cf. [McM 70]).

Propriété 15 : Un polytope dont toutes les faces de dimension deux sont à symétrie centrale est un zonotope.

En effet, du théorème 1 on déduit que toutes les k -faces du polytope sont à symétrie centrale pour $k \geq 2$ (pour $k = 0$ et 1 c'est toujours le cas), donc un tel polytope est un zonotope (d'après la propriété 13).

2.2 Zonotopes et arrangements d'hyperplans

Dans ce paragraphe, on rappelle la relation entre les zonotopes et les arrangements d'hyperplans, et comment elle permet de calculer le nombre de faces d'un zonotope.

• *Lien entre arrangement d'hyperplans et zonotopes*

Le faisceau de normales associé à un segment est constitué de l'hyperplan H orthogonal au segment, privé de l'origine, ainsi que des deux demi-espaces fermés de frontière H qui contiennent l'origine. Or d'après la propriété 1, le faisceau de normales associé au zonotope $Z = \sum_{i=1, \dots, p} [0, N_i]$ est le raffinement commun des faisceaux $(0, N_i]$ pour $i=1, \dots, p$.

Posons $H_Z = \{H_i \mid i=1, \dots, p, H_i \text{ s'hypercplan } \langle N_i \rangle = 0\}$, alors

est le complexe polyédrique "central" de l'arrangement d'hyperplans (H_Z) . C'est à dire, toute cellule de (Z) est une cellule de (H_Z) privée de l'origine.

L'arrangement (H_Z) est dit *central* car tous les hyperplans passent par l'origine.

• *Complexité de Z et de (Z)*

Notation : Une fonction $g(p)$ est dite *polynomiale* (en p), et seulement si, il existe un entier p_0 et une constante c tels que :

$$\forall p \geq p_0, g(p) \leq c p.$$

Une fonction $g(p)$ est dite en $h(p)$ (en h), et seulement si, il existe un entier p_0 et deux constantes c_1 et c_2 telles que :

$$\forall p \geq p_0, c_1 h(p) \leq g(p) \leq c_2 h(p).$$

La complexité de (Z) est celle de l'arrangement (H_Z) défini ci-dessus. (H_Z) n'est pas un arrangement simple car tous les hyperplans passent par l'origine. Cependant, on peut faire les remarques suivantes :

Si les segments qui engendrent le zonotope Z sont en position générale (c'est-à-dire pour tout n -uplet de segments les vecteurs directeurs associés engendrent \mathbb{R}^n), alors l'intersection de (H_Z) avec un hyperplan Π (de \mathbb{R}^n et ne passant pas par l'origine) est un arrangement simple de dimension $n-1$. On note G_Z l'ensemble de tous les espaces affines de dimension $n-2$ définis par $G_i = \Pi \cap H_i$ pour $i=1, \dots, p$.

De même, si on prend l'intersection de (H_Z) avec le symétrique $-\Pi$ de Π par rapport à l'origine, on obtient également un arrangement simple (G_Z^-) de l'ensemble $Z^- = \{-G_i \mid G_i \in G_Z\}$ de sous espaces affines de dimension $n-2$ dans $-\Pi$.

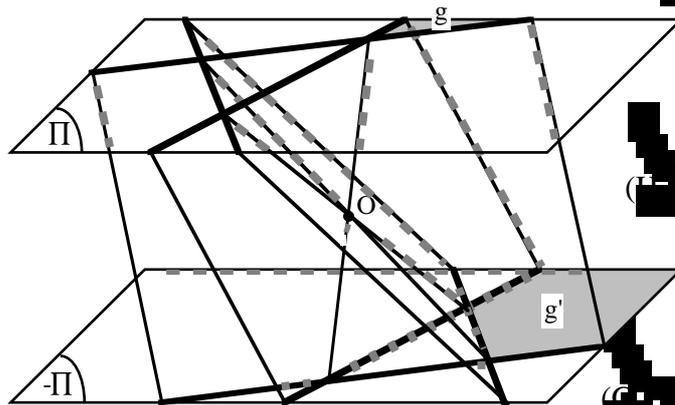


Figure 13 : Intersection d'un arrangement linéaire par un polyèdre

Les hyperplans Π et $-\Pi$ contiennent les faces de G_Z qui sont incluses dans l'hyperplan Π (où l'hyperplan Π est parallèle à l'hyperplan passant par l'origine). Dans G_Z , où une face (H_Z) est incluse dans Π , on peut perturber Π , ce qui sort de G_Z et contient une face de G_Z . On compte les faces (H_Z) sachant que toute face de (H_Z) coupe :

- soit une face de G_Z dans $(\Pi$ ou $-\Pi)$ en une $(k-1)$ -face bornée de (G_Z) ou de (G_Z^-) .
- soit les deux hyperplans Π et $-\Pi$ en deux faces non bornées g de (G_Z) et g' de (G_Z^-) (cf. figure ci-dessus). Il faut donc compter une seule fois les faces non bornées. D'où

$$f_k(H_Z) = f_{k-1}(G_Z) + f_{k-1}^{\text{bornée}}(G_Z^-),$$

en remplaçant $f_{k-1}(G_Z)$ et $f_{k-1}^{\text{bornée}}(G_Z^-)$ par les expressions (1) et (2) de $f_{k-1}^{(n-1)}(p)$ et $f_{k-1, \text{bornée}}^{(n-1)}(p)$, on obtient :

$$f_k(H_Z) = 2 C_p^{n-k} \sum_{j=0, \dots, k-1} \binom{k-j}{j} p^j$$

Et d'après la correspondance entre k -faces d'un polyèdre et $(k-1)$ -faces de son faisceau de normales, on retrouve le résultat :

Propriété 16 [Gri&Stu93] : Le nombre de k -faces d'un n -zonotope généré par la somme de p segments en position générale dans \mathbb{R}^n est égal à :

$$f_k(Z) = f_{n-k}(H_Z) = C_p \sum_{j=0, \dots, n-k-1} \binom{n-k-j}{j} p^j.$$

On constate que $f_k(Z)$ se comporte en $(p^{n-1})_p$ pour $k = 0, \dots, n-1$.

• Zone du zonotope et zone dans l'arrangement d'hyperplans

Définition 17 : On appelle *zone* associée au segment $[0, N_i]$, l'ensemble des faces du zonotope $Z(N_1, \dots, N_p)$ qui sont l'intersection de $Z(N_1, \dots, N_p)$ avec un hyperplan d'appui de normale orthogonale au vecteur N_i .

Si les vecteurs N_i ($i = 1, \dots, p$) sont deux à deux non colinéaires alors Z est un zonotope avec p zones.

En dimension 3, l'arête commune entre 2 facettes adjacentes de la zone est parallèle au segment $[0, N_i]$.

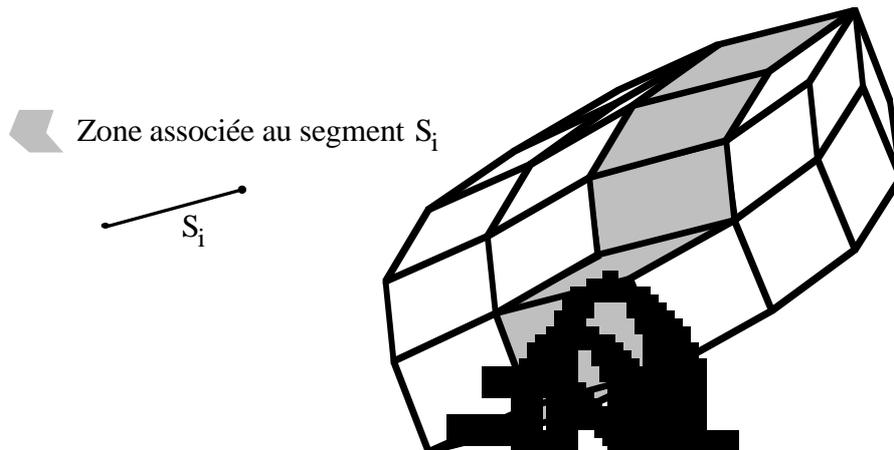


Figure 14 : Zonoèdre et zone associée à un segment.

Dans l'arrangement d'hyperplans (H_i) , la zone associée à l'hyperplan H_i est formée de l'ensemble des faces de $Z(N_1, \dots, N_p)$ coupées par H_i et de leurs faces incidentes.

Les cônes normaux aux faces de la zone de $Z(N_1, \dots, N_p)$ associée au segment $[0, N_i]$, sont les faces de (H_i) incluses dans Z et les faces incidentes à l'une d'elles.

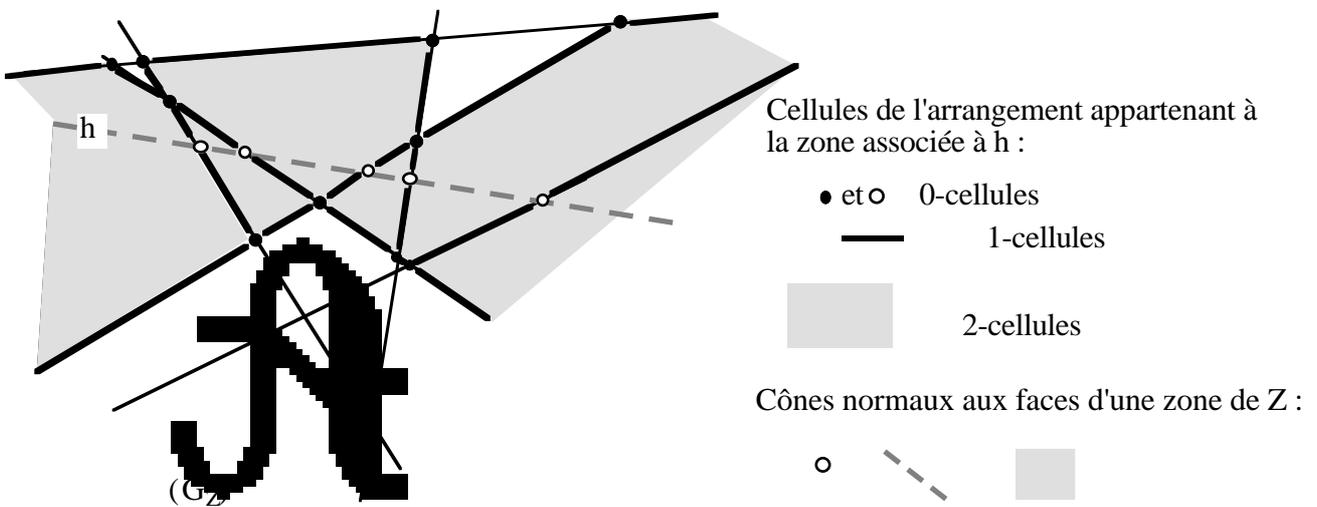


Figure 15 : Zone d'un arrangement de droites.

2.3 Diagrammes

Des diagrammes spécifiques ont été associés aux zonotopes : le "diagramme zonotomique" [McM71], le premier diagramme projectif et le deuxième diagramme projectif [Cox62].

Dans le chapitre III, on utilisera la notion de premier diagramme projectif introduite par Coxeter dans [Cox62] pour la classification des zonotopes. Il nous permettra de représenter les différentes configurations de vecteurs de

On suppose que les vecteurs $\{N_i, i = 1, \dots, p\}$ sont deux à deux non colinéaires. On pourra toujours se ramener à ce cas, en remplaçant les vecteurs colinéaires par leur vecteur somme.

Soit $\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$ un ensemble de vecteurs. Supposons que les N_i sont tels qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ vérifiant $\langle N_i, \mu \rangle > 0$ pour $i = 1, \dots, p$. On se ramène à ce cas en remplaçant les N_i tels que $\langle N_i, \mu \rangle < 0$, par $-N_i$. $Z(N_1, \dots, -N_i, N_{i+1}, \dots, N_p)$ est le translaté de $Z(N_1, \dots, N_p)$ par le vecteur $-N_i$.

Soit Π_μ le plan défini par :

$$\Pi_\mu = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, \mu \rangle = 1\}.$$

Définition 18 : On appelle *premier diagramme projectif* associé aux vecteurs $\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$, le diagramme dans le plan Π_μ construit de la manière suivante :

Pour chaque N_i , on calcule P_i l'intersection de la demi-droite d'origine 0 passant par N_i , avec le plan Π_μ . Dans ce plan, on considère l'ensemble des droites passant par deux points distincts de $\{P_1, P_2, \dots, P_p\}$.

Exemple :

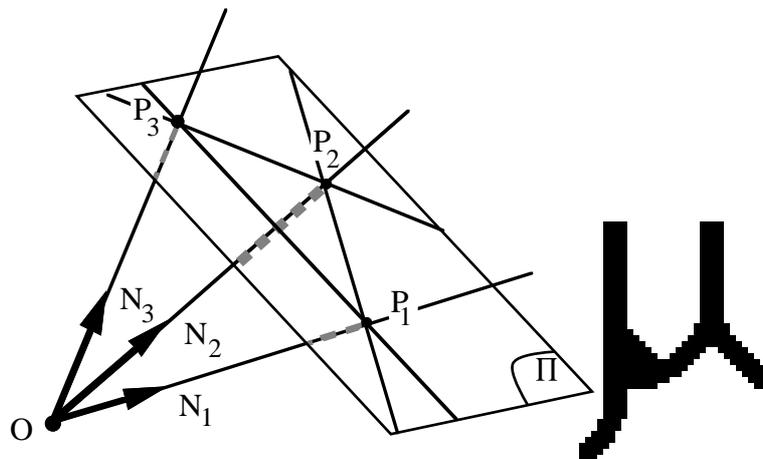


Figure 16 : Premier Diagramme projectif.

Soient $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et le plan $\Pi_u = \{x / \langle x, u \rangle = 0\}$. Soit D_u la droite d'intersection entre Π_μ et Π_u . La droite D_u est orientée de telle sorte que la partie du plan Π_μ à droite de D_u (quand on voit le plan Π_μ depuis un point x tel que $\langle x, \mu \rangle > 1$), notée D_u^+ , corresponde à la projection du demi-espace $\Pi_u^+ = \{x / \langle x, u \rangle > 0\}$ sur Π_μ .

Pour tout vecteur $N_i \in \Pi_u^+$, son image P_i dans le P.D.P. appartient au demi-plan D_u^+ , de même que si $N_i \in \Pi_u$, alors $P_i \in D_u$. Et d'après l'expression (4) de $F(Z, u)$, on voit que si la droite D_u contient :

- aucun point P_i , alors $F(Z, u)$ est un sommet de Z ,
- un point P_i , alors $F(Z, u)$ est une arête de Z ,
- deux points P_i ou plus, alors $F(Z, u)$ est une facette de Z .

On peut donc décrire les faces du zonoèdre $Z = \sum_{i=1, \dots, p} [0, N_i]$, à partir du P.D.P.

Dans l'exemple ci-dessous, $F(Z, u)$ est un sommet de Z .

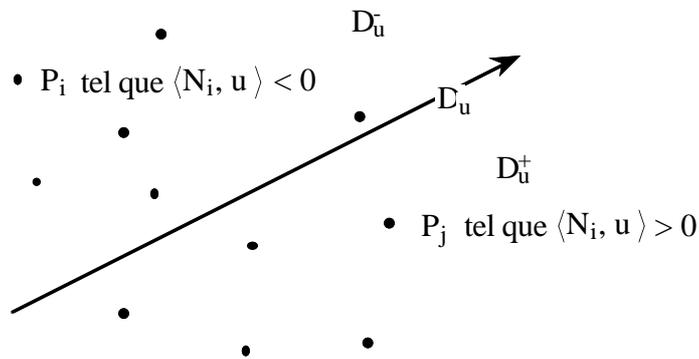


Figure 17 : Premier Diagramme Projectif associé aux vecteurs N_i .

Dans le chapitre III, on rappellera comment on peut décrire les faces du zonoèdre $Z = \sum_{i=1, \dots, p} [0, N_i]$, à partir du P.D.P. On introduira également le deuxième diagramme projectif.

Chapitre II

Sommes de Minkowski de Triangles

Introduction

Les zonotopes sont la somme de simplexes de dimension 1 (segments). Ces polytopes présentent des propriétés géométriques remarquables (voir chapitre 1). Une perspective de généralisation des zonotopes est de prendre la somme de simplexes et en particuliers de triangles.

Dans la première partie, on présente certains résultats de Gritzmann et Sturmfels sur la somme de polytopes (cf. [Gri&Stu93]) qui nous seront utiles par la suite. Il s'agit de résultats combinatoires et d'un algorithme de construction.

La seconde partie porte sur l'étude de la somme de triangles. Elle traite essentiellement de sa complexité, à savoir le comportement asymptotique du nombre de faces en fonction du nombre de triangles. Sur l'aspect géométrique, on ne retrouve pas les propriétés de symétrie des zonotopes. Par contre la propriété de zone se "généralise", sous la forme de trois "demi-zones" associées à chaque triangle. Cette notion est illustrée en dimension 3.

La dernière partie est consacrée au problème de construction de la somme de triangles. Les méthodes proposées reposent essentiellement sur les faisceaux de normales. Des méthodes spécifiques aux dimensions 2 et 3 sont décrites. Elles utilisent des résultats classiques de géométrie algorithmique (fusion de subdivisions planes). La difficulté, pour généraliser la méthode en dimension supérieure, est le calcul du raffinement commun des faisceaux de normales. On propose une méthode qui calcule le raffinement de faisceau de normales en fusionnant des faces d'un arrangement d'hyperplans. La méthode est décrite en dimension 3 et elle est généralisable en dimension quelconque.

Dans ce chapitre, on reprendra les notations introduites dans le chapitre 1.

1. Généralités

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques résultats concernant la somme de polytopes (voir [Gri&Stu93]).

Soient P_1, P_2, \dots, P_p p polytopes de dimension n . On désignera S_p leur somme.

Le problème est de déterminer la frontière du polytope résultant, c'est à dire de connaître l'ensemble de ses faces (i.e. ses k -faces, $0 \leq k \leq n-1$), leur nombre et leurs relations d'incidence.

L'écriture d'une face de la somme de polytopes (voir chapitre 1, propriété 4) montre la façon dont les faces de S_p sont formées. Par exemple, les sommets de la somme S_p sont la somme de sommets appartenant à différents polytopes (voir chapitre 1, propriété 3 et la figure 1 ci-dessous). Mais reconstituer l'ensemble des faces de S_p en testant toutes les combinaisons possibles de sommes de faces est une solution trop coûteuse. En effet, pour déterminer l'ensemble des sommets de la somme des polytopes P_i , il y a $f_0(P_1) \times \dots \times f_0(P_p)$ combinaisons à tester (où $f_0(\cdot)$ désigne le nombre de sommets d'un polytope), ce qui pour la somme de triangles donne 3^p combinaisons. Cette méthode donnerait une complexité exponentielle par rapport au nombre de polytopes et de plus le résultat obtenu est une liste de faces non ordonnées, c'est à dire sans relation d'adjacence ou d'incidence.

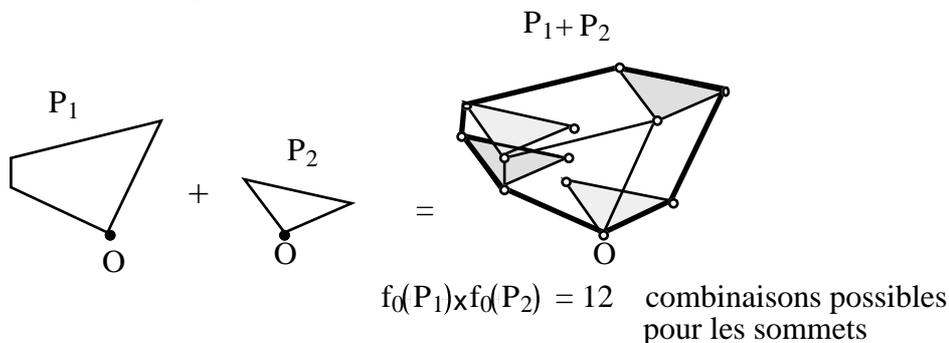


Figure 1 : Somme de polygones.

Si les faisceaux de normales sont représentés par une structure d'incidence entre les cellules, et si le raffinement commun des faisceaux de normales est calculé avec ses relations d'incidences, alors on obtient l'ensemble de toutes les faces du polytope somme ainsi que leur graphe d'incidence. On trouve des méthodes directes pour construire le faisceau de normales dans les petites dimensions (c'est à dire 2 et 3), mais en dimension supérieure le problème est plus complexe. On passera par le calcul intermédiaire d'un complexe plus fin, un arrangement d'hyperplans, pour obtenir le faisceau de normales de la somme.

Gritzmann et Sturmfels dans [Gri&Stu93] ont proposé de remplacer chaque polytope P_i par le "plus petit" zonotope $Z(P_i)$ (i.e. le zonotope à un nombre minimum de segments qui le génèrent) tel que $Z(P_i)$ soit un affinement de P_i . Le zonotope $Z(P_i)$ associé à P_i est défini de la façon suivante (voir figure 2) :

$$Z(P_i) = \sum_{e \in \text{edges}(P_i)} e. \tag{1}$$

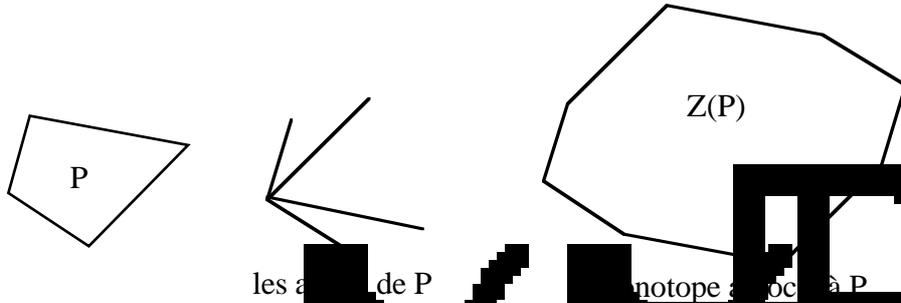


Figure 2 : Zonotope $Z(P)$ associé au polytope P .

On a les propriétés suivantes :

Propriété 1 [Gri&Stu93] : Soient P_1, \dots, P_p des polyèdres de \mathbb{R}^d . Alors $Z(P_1 + \dots + P_p) = Z(P_1) + \dots + Z(P_p)$.

Propriété 2 [Gri&Stu93] : Soient P un polytope et $Z(P)$ le zonotope associé. Alors $(P) \subseteq (Z(P))$.

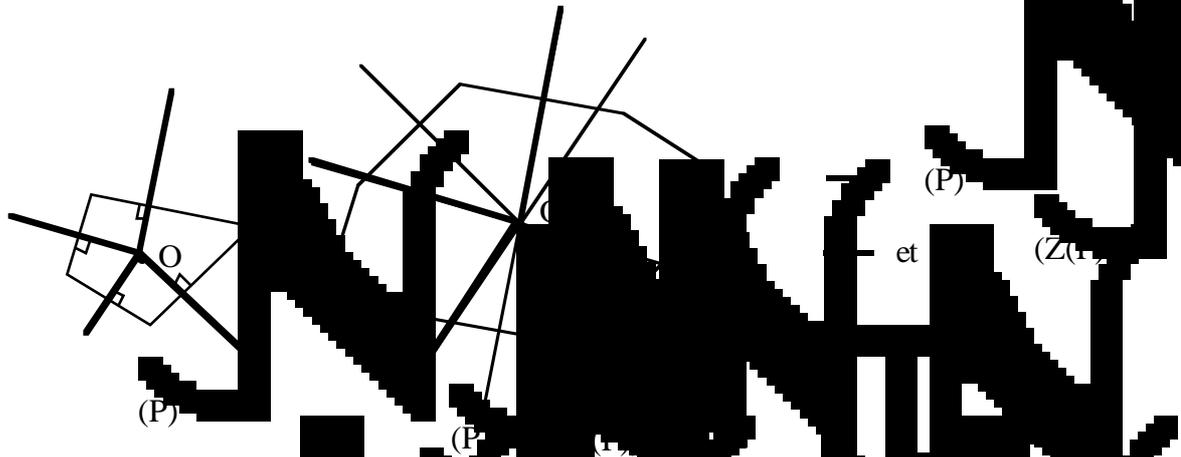


Figure 3 : Le faisceau de normales d'un zonotope est un arrangement d'hyperplans passant par l'origine.

Ainsi on obtient :

Propriété 3 [Gri&Stu93] : Soient P_1, \dots, P_p des polyèdres de \mathbb{R}^d . Alors $(P_1 + \dots + P_p) \subseteq (Z(P_1) + \dots + Z(P_p)) \subseteq \bigwedge_{i=1, \dots, p} (Z(P_i))$.

Le faisceau de normales d'un zonotope est un arrangement d'hyperplans passant

par l'origine. Ainsi, les résultats de complexité sur les arrangements peuvent s'appliquer à $(Z(S_p))$ de même que les algorithmes de constructions. Ces deux points sont développés ci-dessous :

• **Complexité de la somme de polyèdres**

Gritzmann et Sturmfels donnent une estimation du nombre de faces de S_p , basée sur la propriété $(S_p) \leq (Z(S_p))$.

Propriété 4 [Gri&Stu93]: Soient P_1, \dots, P_p p polyèdres de \mathbb{R}^n et n le nombre total d'arêtes non parallèles des polyèdres P_1, P_2, \dots, P_p .

On a

$$f_k(P_1 + \dots + P_p) \leq \sum_{j=0}^{n-1-k} \binom{n-1-k}{j} \binom{m-1-k}{m-1-k-j} \quad (2)$$

avec l'égalité si tous les polyèdres P_i sont des zonotopes et leurs arêtes génératrices sont en position générale.

preuve : Dans le chapitre 1, on a vu que chaque arête e_i du polyèdre S_p correspond une cellule de dimension $n-1-k$ dans l'arrangement de k -faces de S_p égal au nombre de $(n-k)$ -cellules de (S_p) .

De plus $(S_p) \leq (Z(S_p))$ donc que le nombre de k -cellules de (S_p) majore celui de $(Z(S_p))$ et le nombre de faces du zonotope $Z(S_p)$ majore le nombre de faces de S_p .

$$f_k(P_1 + \dots + P_p) \leq f_k(Z(P_1) + \dots + Z(P_p)) = f_k(Z(S_p)) = f_{n-k}((Z(S_p)))$$

Et d'après la propriété 16 (chapitre 1), on obtient la majoration (2).

On remarque que la borne supérieure du nombre de k -faces se comporte en (m^{n-1-k}) pour tout k . Nous reviendrons, dans le paragraphe 2, sur l'estimation du nombre de faces pour le cas particulier de la somme de triangles.

• **Construction de la somme de polyèdres : Algorithme**

Gritzmann et Sturmfels proposent un algorithme de construction de la somme de polyèdres. L'idée de cet algorithme repose sur le fait que $(Z(S_p))$ est un raffinement de (S_p) .

Cet algorithme consiste à associer à chaque arête e_i de chaque polyèdre un hyperplan H_i orthogonal à e_i passant par l'origine. On notera \mathbf{H} l'ensemble de ces hyperplans. L'algorithme se déroule alors de la façon suivante :

- 1- Calcul de l'arrangement (H) des hyperplans H , c'est à dire
- 2- Pour chaque n -cellule C de (H) (C : cône normal à un sommet de S_p)
 - a- Calcul d'un point z "échantillon" de C . ($z \in \text{IntRel}(C)$)
 - b- Calcul de $F(P_1 + \dots + P_p, z)$. (Face d'appui à S_p dans la direction z)
 - c- $F(P_1 + \dots + P_p, z)$ est retenu dans une liste si ce n'est pas déjà.

Certains sommets peuvent se retrouver plusieurs fois. En effet, un sommet du polytope $S_p = P_1 + \dots + P_p$ est associé à son voisinage local de cellules de (H) (voir figure 4, et u_2 appartient à deux cellules d'hyperplans de la même cellule de (T) , $F(T, u_1) = F(T, u_2)$.

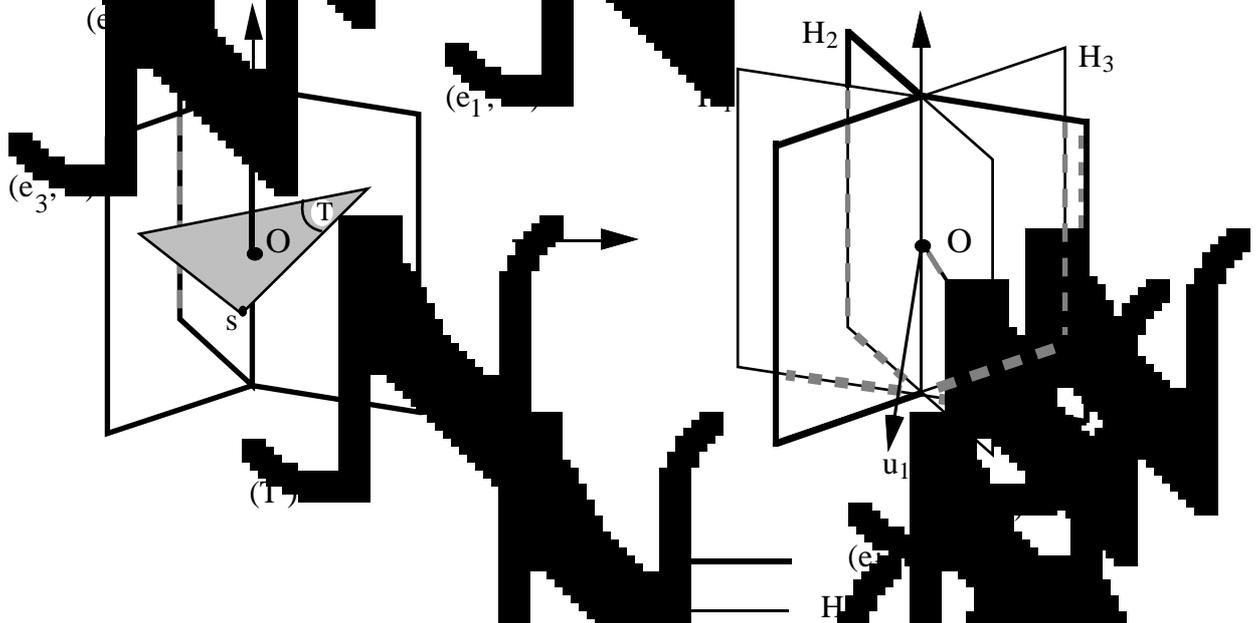


Figure 4 : (Z) est un raffinement de (T) .

Dans [Gri&Stu93], le but principal n'est pas d'avoir un algorithme optimal, mais d'étudier la calculabilité du problème. Existe-t-il un algorithme qui résout le problème en temps polynomial ? L'algorithme fournit la liste de toutes les faces de $P_1 + \dots + P_p$. Pour obtenir le treillis des faces (i.e. l'ensemble des faces avec leurs relations d'incidences) de S_p , les auteurs proposent d'appliquer un algorithme d'enveloppe convexe à la liste, et d'obtenir une complexité suivante :

Propriété 5 [Gri&Stu93] : Soient $n \geq 3$ et $P_1 + \dots + P_p$ p polytopes de \mathbb{R}^n représentés chacun par l'ensemble de ses sommets. Le treillis des faces de $P_1 + \dots + P_p$ peut être calculé en $O(p^n s^{2n-1})$ opérations arithmétiques, où s désigne le nombre maximum de sommets d'un polytope P_i .

Les algorithmes de calcul d'arrangement d'hyperplans donnent en général le treillis (ou graphe d'incidence) des faces de l'arrangement (cf. [Ede86], [Boi&Yvi95]). La méthode proposée ci-dessus n'utilise pas l'information d'incidence et d'adjacence contenue dans l'arrangement pour réaliser l'étape 2-b et pour déterminer l'ensemble des faces. Dans le cas particulier de la somme de triangles (voir paragraphe 4), nous verrons comment décrire l'ensemble des faces de S_p à partir de l'arrangement d'hyperplans et avec une complexité optimale (proportionnelle au nombre de faces de S_p).

2. Complexité de la somme de triangles

Dans ce paragraphe, nous tentons d'évaluer la complexité de la somme de triangles. C'est à dire le nombre de faces du polytope résultant de cette somme en fonction du nombre de triangles et de la dimension n de l'espace. Rappelons (voir propriété 16, chapitre 1) que le nombre de k -faces de la somme de p triangles est de l'ordre de p^{n-1} pour $k = 0, \dots, n-1$.

Dans toute la suite de ce chapitre, on considère la somme de p triangles T_1, T_2, \dots, T_p de \mathbb{R}^n .

Convention : Un ensemble de p triangles T_i de \mathbb{R}^n est en position *générale* si et seulement si :

Tout ensemble de n arêtes prises parmi les arêtes des triangles a au plus deux arêtes d'un même triangle, engendre un simplexe.

Propriété 6 : Le nombre de k -faces de la somme de p triangles de \mathbb{R}^n est $O(p^{n-1})$ et cette borne est atteinte.

preuve : Si on applique la propriété 4 au cas particulier de la somme de triangles, on obtient la majoration :

$$f_k(T) \leq \sum_{j=0, \dots, n-1-k} c_{3p-1-k}^j$$

Ceci donne une majoration en $O(p^{n-1})$ du nombre de k -faces. Il reste à montrer que la complexité de la somme de triangles est effectivement cet ordre de grandeur.

On construit un ensemble de triangles dont la somme a une complexité en $O(p^{n-1})$ faces. La construction est la suivante :

On se donne $\{N_1, \dots, N_p\}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n telle que $\langle N_i, e_n \rangle > 0$ pour $i = 1, \dots, p$ où e_n est le $n^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique.

A partir de $\{N_1, \dots, N_p\}$, on construit la famille de triangles $T_i = \{T_i, i=1, \dots, p\}$, où

$T_i = \text{Conv}\{0, N_i, N_i - \varepsilon e_n\}$,
 et avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que
 $\langle N_i - \varepsilon e_n, e_n \rangle > 0$, pour tout i de 1 à p .

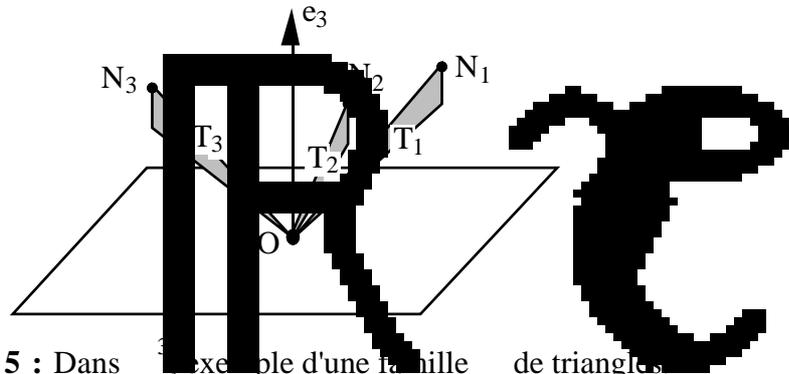


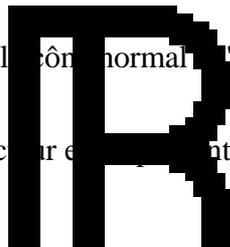
Figure 5 : Dans l'exemple d'une famille de triangles

Les arêtes de T_i sont numérotées de la façon suivante :

$$e_i^1 = [0, N_i], \quad e_i^2 = [N_i, N_i - \varepsilon e_n] \text{ et } e_i^3 = [0, N_i - \varepsilon e_n].$$

On note

- \bar{H}_i^j , le demi-hyperplan contenant le cône normal à l'arête e_i^j du triangle T_i ,
- H_i^j l'hyperplan contenant \bar{H}_i^j , et
- H_n l'hyperplan orthogonal au vecteur e_n passant par l'origine.



On fait les observations suivantes :

Les cônes normaux $\bar{H}_i^1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, N_i \rangle = 0 \text{ et } \langle x, e_n \rangle > 0\}$ se trouvent dans le demi-espace $H_n^+ = \{x \mid \langle x, e_n \rangle > 0\}$ délimité par l'hyperplan H_n , alors que les cônes normaux \bar{H}_i^3 sont inclus dans $H_n^- = \{x \mid \langle x, e_n \rangle < 0\}$, et les cônes \bar{H}_i^2 sont inclus dans H_n (voir figure 6).

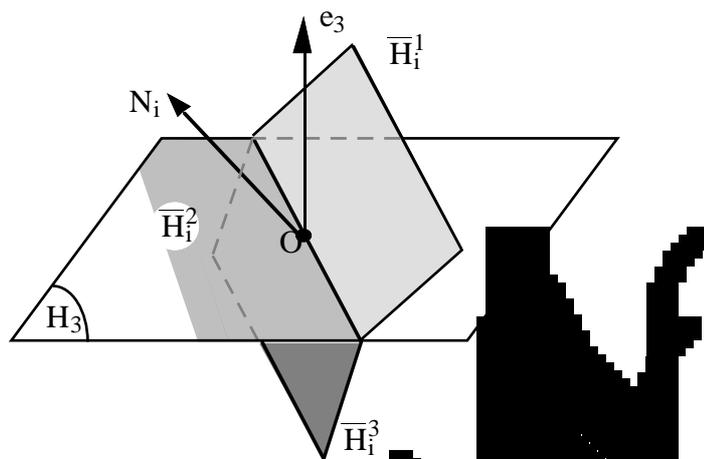


Figure 6 : Position du faisceau $(\bar{H}_i^1, \bar{H}_i^2, \bar{H}_i^3)$ app

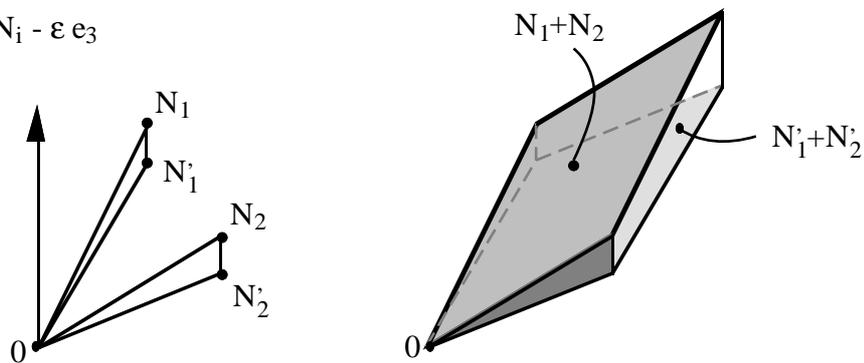
La restriction du faisceau de normales (T_1, \dots, T_p) au demi-espace H_n^+ est identique à la restriction de l'arrangement des hyperplans de $\mathbf{H}^1 = \{H_i^1, i=1, \dots, p\}$ à

H_n^+ . De même (cf. [1]) l'arrangement d'hyperplans dans l'espace H_n est identique à la restriction de l'arrangement des hyperplans $\{H_i, i = 1, \dots, p\}$ à H_n .

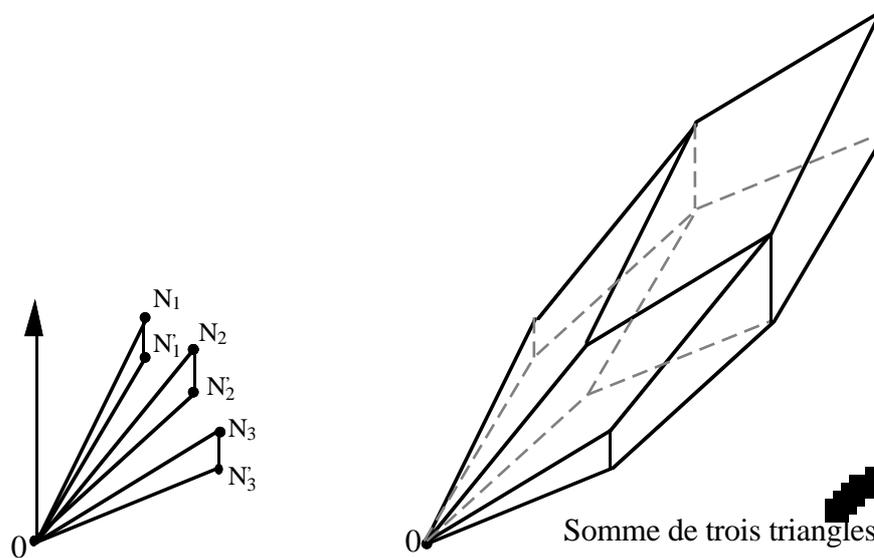
Or le nombre de faces de dimension $k \leq n$ d'un arrangement central de p hyperplans (i.e. les hyperplans passent par l'origine) est de l'ordre de p^{n-1} . Chacun des deux arrangements (H_i^+) et (H_i^-) est symétrique par rapport à l'origine (cf. chapitre §2.2), donc leur complexe est également de l'ordre p^{n-1} respectivement sur H_n^+ et sur H_n^- . Donc le nombre de faces de la somme des triangles de la famille est en $\Theta(p^{n-1})$.

Exemples (dans \mathbb{R}^3)

$$N'_i = N_i - \varepsilon e_3$$



Somme de deux triangles.



Somme de trois triangles

Figure 7 : Exemples.

Remarque : Soit S_T le polytope somme des triangles de la famille décrite ci-dessus. La partie de frontière de S_T orientée positivement par rapport au vecteur e_n (i.e. l'ensemble des facettes dont la normale extérieure v vérifie : $\langle v, e_n \rangle > 0$) est identique, à une translation près, à celle du zonotope $Z = \sum_{i=1, \dots, p} [0, N_i]$.

On fait la même observation pour les faces orientées négativement par rapport à e_n et le zonotope $Z' = \sum_{i=1, \dots, p} [0, N_i - \epsilon e_n]$. Ces deux parties de la frontière de S_T sont reliées par les faces de S_T ayant une normale inclus dans le plan H_n (voir figure 7).

Pour les dimensions 2 et 3, on peut donner une complexité plus précise de la somme de triangles, dans les cas où ils sont en position générale.

Complexité dans

Propriété 7: Soient p polygones P_1, P_2, \dots et P_p dans le plan, dont les arêtes sont deux à deux non colinéaires. Le nombre d'arêtes de leur somme est alors donné par :

$$f_1(P_1 + \dots + P_p) = \sum_{i=1, \dots, p} f_1(P_i),$$

ce qui donne pour la somme de p triangles :

$$f_1(T_1 + \dots + T_p) = \sum_{i=1, \dots, p} f_1(T_i) = 3p.$$

preuve : Evidente.

Complexité dans

En dimension trois, la géométrie particulière des faisceaux de normales associés aux triangles permet d'obtenir un encadrement du nombre de faces

Propriété 8: Soient T_1, T_2, \dots et T_p des triangles de \mathbb{R}^3 . On suppose que ces triangles sont en position générale. On a alors :

$$2p + 4 C_p^2 \leq f_2(T_1 + \dots + T_p) \leq 2p + 5 C_p^2,$$

$$3p + 8 C_p^2 \leq f_1(T_1 + \dots + T_p) \leq 3p + 9 C_p^2,$$

$$2 + p + 4 C_p^2 \leq f_0(T_1 + \dots + T_p) \leq 2 + p + 5 C_p^2.$$

preuve : Soient deux triangles T_1 et T_2 vérifiant les hypothèses de la propriété. On notera n_1 (respectivement n_2) la direction normale au triangle T_1 (respectivement T_2). Afin de déterminer le nombre de 1-cellules de $(T_1 + T_2)$, on fait les observations suivantes :

Soit H le plan défini par les vecteurs n_1 et n_2 .

- Le plan H sépare l'ensemble des cônes normaux aux arêtes des triangles T_1 et T_2 , $\{ (e_i, -e_j) \mid i, j = 1, 2, 3 \}$ en deux sous ensembles : deux cônes d'un côté du plan H et

un de l'autre (voir figure 8).

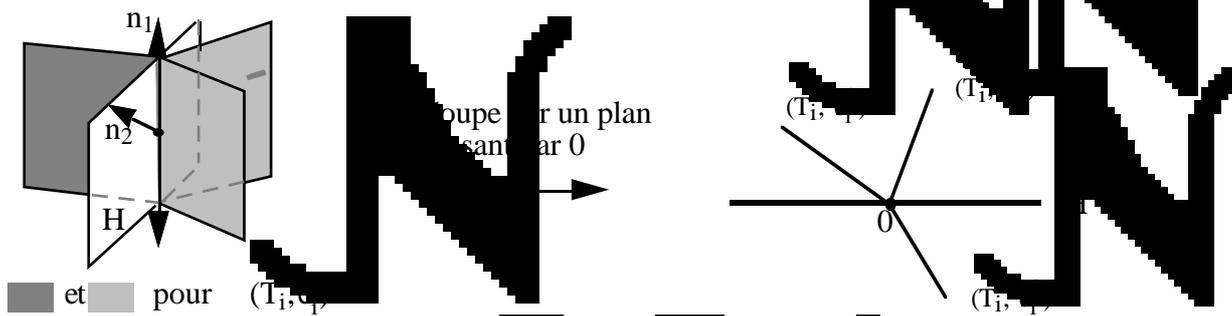


Figure 8 : Répartition des cônes par rapport à H.

- Si le cône normal à l'arête e_1^k de T_1 est contenu dans le cône normal à l'arête e_2^k de T_2 , alors ces deux cônes forment un cône unique.

c'est donc une cellule de (T_1, T_2) (voir figure 9).



Figure 9 : Intersection de deux cônes normaux à des arêtes.

- Soit H' le demi-espace fermé de frontière H contenant les cônes normaux à deux arêtes de T_1 , et H'' le demi-espace fermé contenant le cône normal à l'arête de T_1 . Deux cas se présentent : H' contient deux cônes normaux aux arêtes de T_2 ou un seul.

Le premier cas donne deux intersections $(e_1^k, e_2^k) \neq \emptyset$ dans H' . Comme H'' contient un cône normal à une arête de chaque triangle, il y a une intersection $(e_1^k, e_2^k) \neq \emptyset$ dans H'' pour chaque arête e_1^k et e_2^k total.

Le second cas donne deux intersections dans H' et deux dans H'' , donc quatre intersections $(e_1^k, e_2^k) \neq \emptyset$ en tout (voir figure 10).

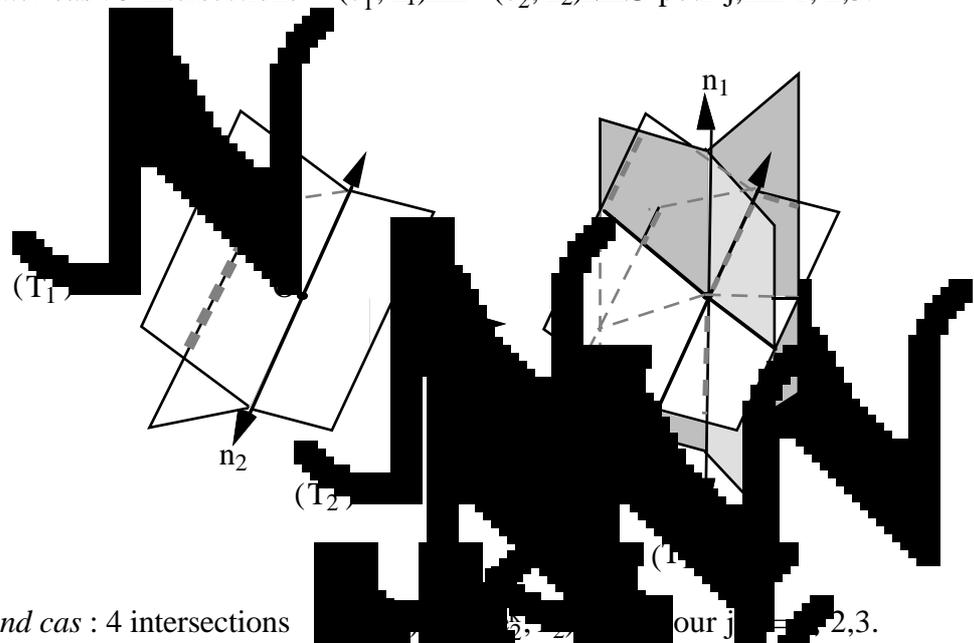
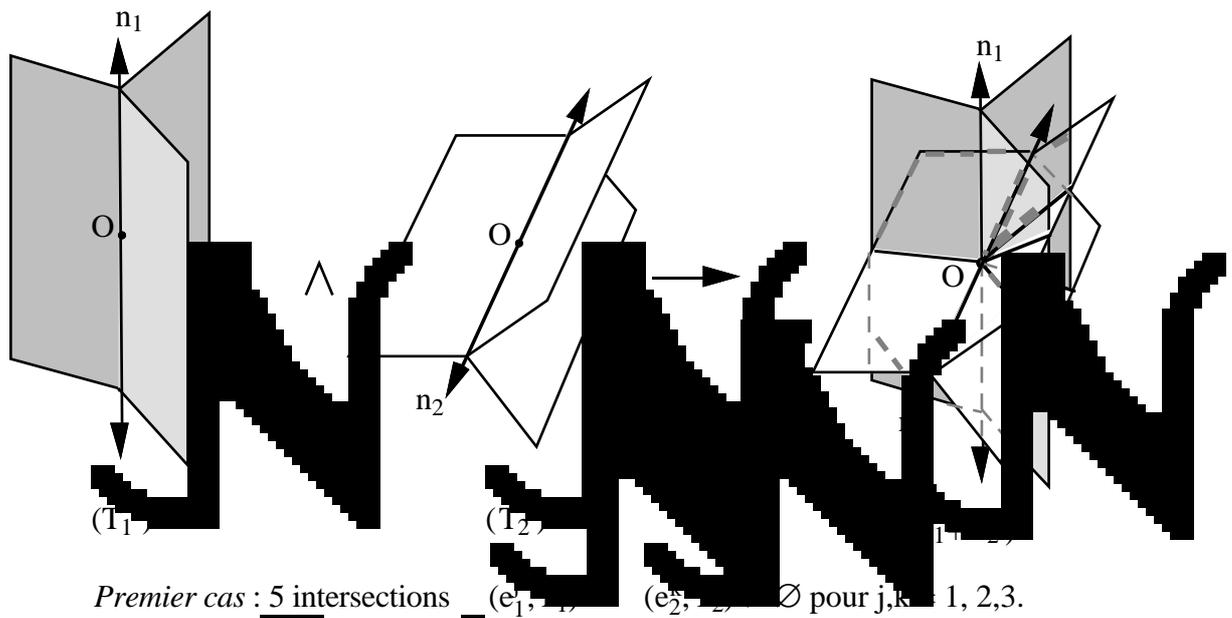


Figure 10 : Raffinement

- Les 1-cellules de (T_1) sont d'une part les 1-cellules de (T_i) , et d'autre part l'intersection d'une cellule d'un (T_j) avec le plan (T_1) (selon les intersections décrites ci-dessus).

Le nombre de 1-cellules est de $2p$ pour le cas (i) (i.e. 2 par triangles) et de 4 ou 5 par paire de triangles pour le cas (ii). Donc au total nombre de 1-cellules de $(T_1 \cup \dots \cup T_p)$ est d'au moins $2p + 4 C_p^2$ et d'au plus $2p + 5 C_p^2$. D'où l'encadrement du nombre de facettes de S_T .

• Les 1-faces de S_T correspondent aux 2-faces du faisceau, c'est à dire à des parties (de dimension 2) des demi-plans. Les T_i portent $3p$ demi-plans, et chaque intersection entre deux demi-plans crée deux 2-faces supplémentaires. On vient de voir que nombre d'intersections $f_2(S_T) - 2p$ est compris entre $4 C_p^2$ et $5 C_p^2$, d'où

$$f_1(S_T) = 3p + 2 (f_2(S_T) - 2p) = 2 f_2(S_T) - p \tag{4}$$

et l'encadrement de $f_1(S_T)$.

• Enfin, de la formule d'Euler $f_2 - f_1 + f_0 = 2$ et de (4), on déduit $f_0 = 2 - p + f_2$ et un encadrement de f_0 en fonction de f_2 et p .

Remarque : Dans ces exemples les deux configurations (cas 1 et cas 2) sont non dégénérées et on les a choisies différentes. Donc les sommes de p triangles en position générale ont toutes la même complexité, contrairement aux arrangements d'hyperplans et donc aux zonotopes. Les arrangements de p hyperplans en position générale dans \mathbb{R}^3 ont le même nombre de faces, même si entre eux il n'y a pas équivalence combinatoire, et ce nombre majore la complexité de tous les arrangements de p hyperplans (cf. chapitre 1).

3. Propriété des trois demi-zones

Dans ce paragraphe on va voir de quelle façon la propriété de zone des zonotopes se généralise pour la somme de triangles.

Considérons dans \mathbb{R}^3 la somme S_T de p triangles T_i ($i=1, \dots, p$) et K un triangle quelconque de sommets s_1, s_2, s_3 . On notera t^+ et t^- les deux 2-faces du triangle K .

La somme de K avec S_T se traduit de la façon suivante dans le faisceau de normales.

Le faisceau de normales du triangle K , partage l'espace en trois catégories. Soit c un cône quelconque du faisceau de normales de S_T , les cas se présentent :

- (i) $\exists i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $c \cap (t^+, s_i) \neq \emptyset$, on notera $\phi_i = \{c \in (S_T) \mid c \cap (t^+, s_i) \neq \emptyset\}$.
- (ii) $\exists i, j$ ($1 \leq i < j \leq 3$) tel que $c \cap (t^+, s_i, s_j) \neq \emptyset$. Relativement à t^- on notera $\psi_{i,j} = \{c \in (S_T) \mid c \cap (t^-, s_i, s_j) \neq \emptyset\}$.
- (iii) $c \cap (t^+, s_1, s_2, s_3) \neq \emptyset$, on notera $\phi_+ = \{c \in (S_T) \mid c \cap (t^+, s_1, s_2, s_3) \neq \emptyset\}$ et $\phi_- = \{c \in (S_T) \mid c \cap (t^-, s_1, s_2, s_3) \neq \emptyset\}$.

Lorsqu'on fait la somme de K avec S_T , la frontière de S_T+K se déduit de celle de S_T de la façon suivante :

(a) Les trois ensembles de faces, dont les cônes normaux appartiennent à un même ensemble ϕ_i (pour $i = 1, 2, 3$), correspondent à trois parties de la frontière de S_T . Chacune de ces parties est translatée du vecteur s_i correspondant, pour donner trois parties disjointes de la frontière de S_T+K .

(b) Trois ensembles de faces de S_T+K résultent de la somme de l'arête $[s_i, s_j]$ ($1 \leq i < j \leq 3$) avec l'ensemble des faces correspondant aux cônes de $\psi_{i,j}$. Chaque ensemble de faces ainsi obtenu relie 2 à 2 les trois parties de la frontière de S_T+K décrite dans (a), on les appellera "demi-zones".

(c) Les deux ensembles de faces de S_T , dont les cônes normaux appartiennent aux ensembles ϕ_+ et ϕ_- , donnent deux ensembles de faces de S_T+K . Ces deux ensembles sont adjacents aux trois ensembles de faces décrites dans (b).

On remarque que le point (b), développé ci-dessus, présente une similitude avec la propriété des zones d'un zonotope. Par analogie, on donne le nom de demi-zone à ces ensembles de faces :

Définition 1 : On appelle demi-zone associée à une arête e d'un triangle S_T l'ensemble des faces de S_T+K qui sont la somme de e avec les faces de S_T dont le cône normal a une intersection non vide avec l'intérieur relatif de (e, K) .

remarque : On peut également définir la demi-zone comme l'ensemble des faces de S_T+K dont le cône normal est inclus dans le demi-espace ouvert $Rel(e, K)$.

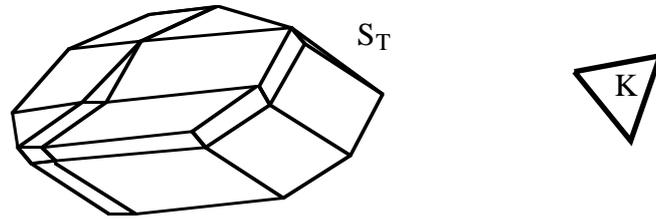
Remarquons que, dans le plan des translations normale, (t^+, n) une demi-droite et coupe un unique cône de (S_T) à un sommet s de S_T . La nouvelle face de S_T+K de normale (t^+, n) est obtenue en translatant K par le vecteur s . Ainsi les 2 ensembles de faces (décrits au point (c)) sont réduits à une face : le triangle K à une translation près (voir figure 11).

On reprendra le terme de prézone utilisé dans [Sza91] pour les zonotopes.

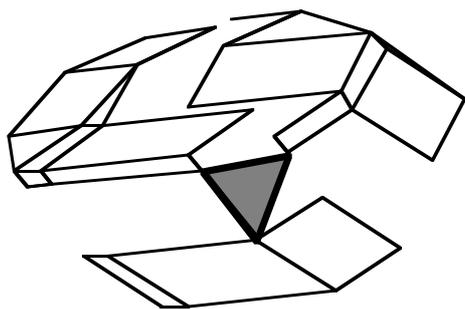
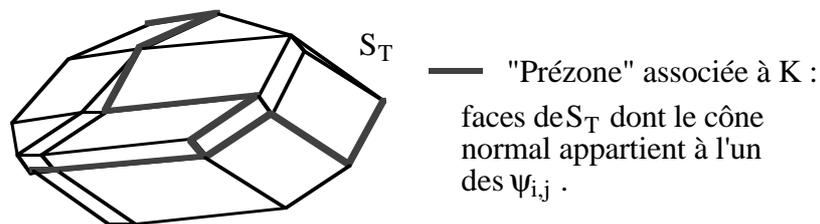
Définition 2 : On appelle "prézone" de S_T par rapport à l'arête $[s_i, s_j]$ de K l'ensemble des faces de S_T dont le cône normal appartient à $\psi_{i,j}$.

Exemple :

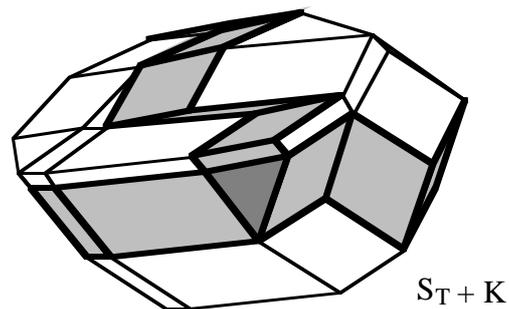
Soit S_T et un triangle K .



Les prézones de S_T associées à K :



Les trois parties de S_T traduites dans les trois directions s_i $i=1, \dots, 3$.

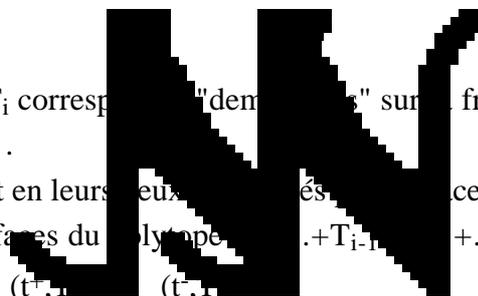


les trois "demi-zones"

Figure 11 : Passage de S_T à S_T+K .

Propriété 9 : A chaque triangle T_i correspond une "demi-zone" sur la frontière de S_T associées à chacune des arêtes de T_i .

Ces demi-zones se rejoignent en leurs bords extérieurs. Les faces obtenues en effectuant la somme de T_i avec les faces du polyèdre $T_1 + T_2 + \dots + T_{i-1} + \dots + T_p$ correspondant aux cônes intersectés par (t, \mathbf{r}_i) et (t, \mathbf{r}_j) .



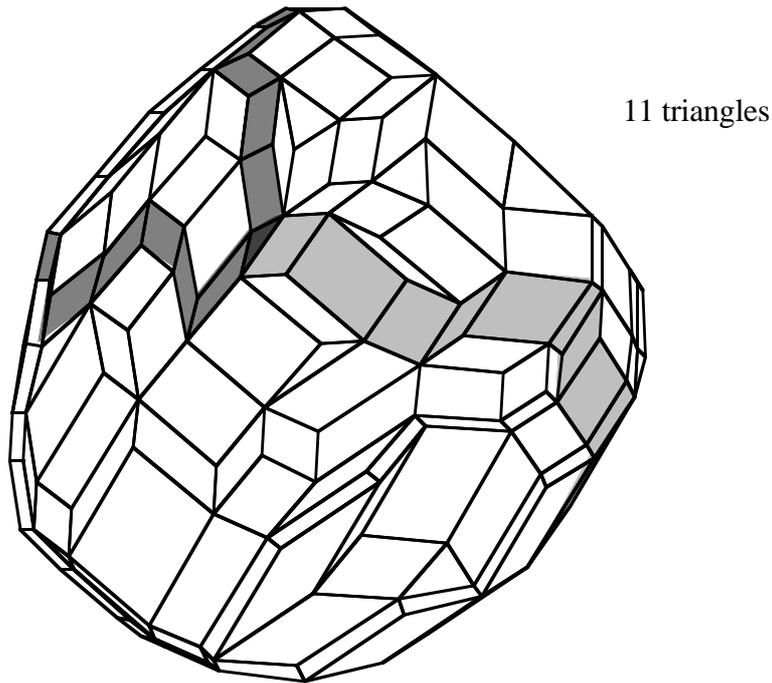


Figure 12 : Exemple de la somme de triangles et les trois demi-zones associées à un triangle.

Propriété : Le nombre de faces de la demi-zone de S_i associée à une arête e d'un triangle T_i est en $O(p^{n-2})$.

preuve : Le nombre de faces de la demi-zone de S_i est le nombre de cellules de (S_i) intersectées par le cône normal à l'arête e (dans l'espace). Il est majoré par le nombre de cellules intersectées par (e, r_i) dans $(Z(S_i))$ qui ce compte en $O(p^{n-2})$.

On pourrait envisager de reprendre le développement dans [za91] pour la construction optimale de la somme de segments. Il s'agit de construire itérativement la structure combinatoire (ou graphe d'incidence) des polyèdres par insertions successives des segments. Cette méthode nécessite à chaque étape le calcul de la

Le coût de calcul de la prézone de S_i relative à $[s_i, s_j]$ est proportionnel au nombre de faces des n -cellules de (S_i) intersectées par $([s_i, s_j])$. Cependant, on ne peut pas appliquer le théorème de demi-zone pour majorer ce nombre par le nombre de faces de la zone de l'arrangement $(Z(S_i))$ relative à l'hyperplan orthogonal à $[s_i, s_j]$. On ne peut donc pas prouver l'optimalité de cette méthode pour la somme de triangles.

4. Construction de la somme de triangles

Nous décomposons la construction de la somme en deux étapes. De même que pour la construction des zonoèdres (cf. [Sza91]), la première étape consiste à déterminer la structure combinatoire, et la seconde à calculer les informations géométriques permettant de définir complètement le polytope résultant. On entend par structure combinatoire, la donnée de l'ensemble des faces et de leur relations d'incidences; et par informations géométriques, les coordonnées des sommets, les équations des hyperplans d'appui aux facettes, etc...

Le premier point sera réalisé par l'utilisation de la notion de faisceau de normales. L'information sur les faces du polytope sera pas uniquement combinatoire, mais également géométrique, le faisceau de normales fournissant également l'orientation des faces.

4.1. Construction dans le plan

La description, dans le plan, de la construction de la somme de triangles, nous permet d'illustrer le principe général utilisé en dimension supérieure. Le calcul du raffinement commun des faisceaux de normales ne présente pas de difficulté, ceci vient du fait que sa représentation est simple. En effet, le faisceau de normales associé à un polygone convexe du plan est complètement défini par la donnée de la liste ordonnée des normales extérieures aux arêtes (par exemple, les normales sont ordonnées par l'angle qu'elles forment avec l'axe des abscisses).

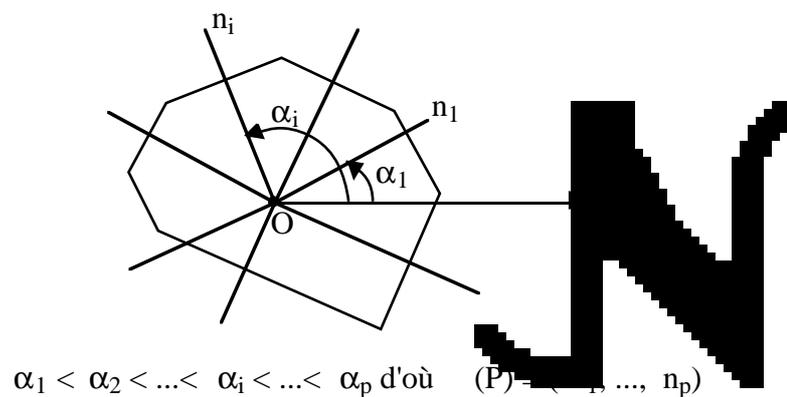


Figure 13 : Faisceau de normales d'un polygone.

Propriété 11 : Le coût de la construction de la somme de Minkowski de p triangles du plan est en $O(p \log p)$.

preuve : La construction se fait selon les deux étapes suivantes:

• *Première étape : Calcul du faisceau de normal*

Le raffinement commun des faisceaux de normales des triangles, se calcule en ordonnant les normales extérieures aux arêtes, d'où un coût en temps de $O(p \log p)$.

Le cas dégénéré pouvant survenir à cette étape est celui de deux arêtes colinéaires ayant même normales extérieures. Il se règle en confondant les deux normales en une seule et en lui associant la somme des deux arêtes.

• *Seconde étape : Calcul des sommets*

Même si cette étape est triviale, il faut effectuer les calculs de façon à avoir un algorithme optimal en temps.

On note $\text{Pos}(\cdot)$ l'enveloppe positive d'un ensemble de vecteurs (i.e. l'ensemble obtenu par des combinaisons linéaires positives des vecteurs)

Calcul d'un sommet s de S_T de cône normal $C_s = \text{Pos}(n_1, n_2)$:

Soit η un vecteur de $\text{IntRel } C_s$,

$$s = \sum_{i=1, \dots, p} F(T_i, \eta). \quad (5)$$

Le calcul du terme $F(T_i, \eta)$ s'effectue en déterminant le sommet v de T_i qui maximise $\langle v, \eta \rangle$ (d'où un coût de 3 produits scalaires).

Soit un coût pour tous les $F(T_i, \eta)$ en $O(p)$, plus le coût de la somme en $O(p)$. Donc le calcul d'un sommet se fait en $O(p)$

Si on procédait de la même façon pour tous les sommets, le coût total serait en $O(p^2)$.

Pour effectuer les calculs de façon optimale, on calculera un premier sommet s_0 de cône normal $\text{Pos}(n_1, n_2)$ par la méthode décrite ci-dessus (coût $O(p)$). Puis on calculera les autres sommets de proche en proche. Pour passer du cône normal $C_i = \text{Pos}(n_i, n_{i+1})$ du sommet s_i au cône normal C_{i+1} du sommet s_{i+1} , on traverse la normale n_{i+1} à une arête d'un des triangles. Ce qui signifie que dans (5) un seul terme de la somme change de valeur : soit $F(T_k, u)$ ce terme. Soient $u \in \text{IntRel } C_i$, $v \in \text{IntRel } C_{i+1}$, alors le sommet s_{i+1} s'écrit :

$$s_{i+1} = s_i + F(T_k, v) - F(T_k, u). \quad (6)$$

Donc le calcul de s_{i+1} à partir de s_i coûte 2 additions de vecteurs et est constant par rapport à p . On répète ce calcul $O(p)$ fois, d'où un coût total pour l'ensemble des sommets de $O(p)$.

Le coût total de la construction est donc en $O(p \log p)$.

Remarques :

- Le même algorithme peut s'appliquer à la somme de polyèdres. Si n désigne le nombre total d'arêtes des polyèdres, la complexité sera alors $O(n \log n)$.

- Pour réaliser le calcul des sommets en dimension $n \geq 3$, on utilisera selon la même méthode. Les cônes normaux à des sommets de dimension n , et deux cônes adjacents ont en commun une $(n-1)$ -cellule. (Si l'on passe d'un sommet à l'autre, il faut connaître l'arête associée à la $(n-1)$ -cellule commune).

Donc lorsqu'on calcule le faisceau de normales, il faut associer à chaque $(n-1)$ -cellule l'arête correspondante.

4.2. Calcul de la somme de triangles de

Dans ce paragraphe, on décrit une méthode de construction du faisceau de normales de S_T selon la méthode "diviser pour régner".

Guibas et Seidel (cf. [Gui&Sei87]) décrivent un algorithme réalisable à la table de la sortie, permettant la fusion de deux subdivisions convexes du plan de tailles respectives n_1 et n_2 , avec une complexité en temps $O(n_1 + n_2 \log K)$, où K désigne la taille de la subdivision la plus grande.

Cet algorithme peut être appliqué à la somme de deux subdivisions avec une complexité proportionnelle de la taille de la sortie (cf. [Gui&Sei87]). En effet, si on considère un faisceau de normales (P) d'un plan, de même qu'une subdivision convexe (P) du plan, de même que l'algorithme de fusion de deux subdivisions convexes, on peut obtenir l'intersection du raffinement commun de deux subdivisions (P_1) et (P_2) connaissant l'intersection du faisceau de normales (F_1) et (F_2) et les plans Π_1 et Π_2 symétriques par rapport à l'origine, alors on peut le faire en temps $O(n_1 + n_2 \log K)$.

Pour la somme de triangles de deux subdivisions planaires S_1 et S_2 des plans Π_1 et Π_2 par rapport à l'origine, on utilise le principe "divide and conquer". Puis, on reconstitue $(S_T) = (T_1) \cup \dots \cup (T_p)$.

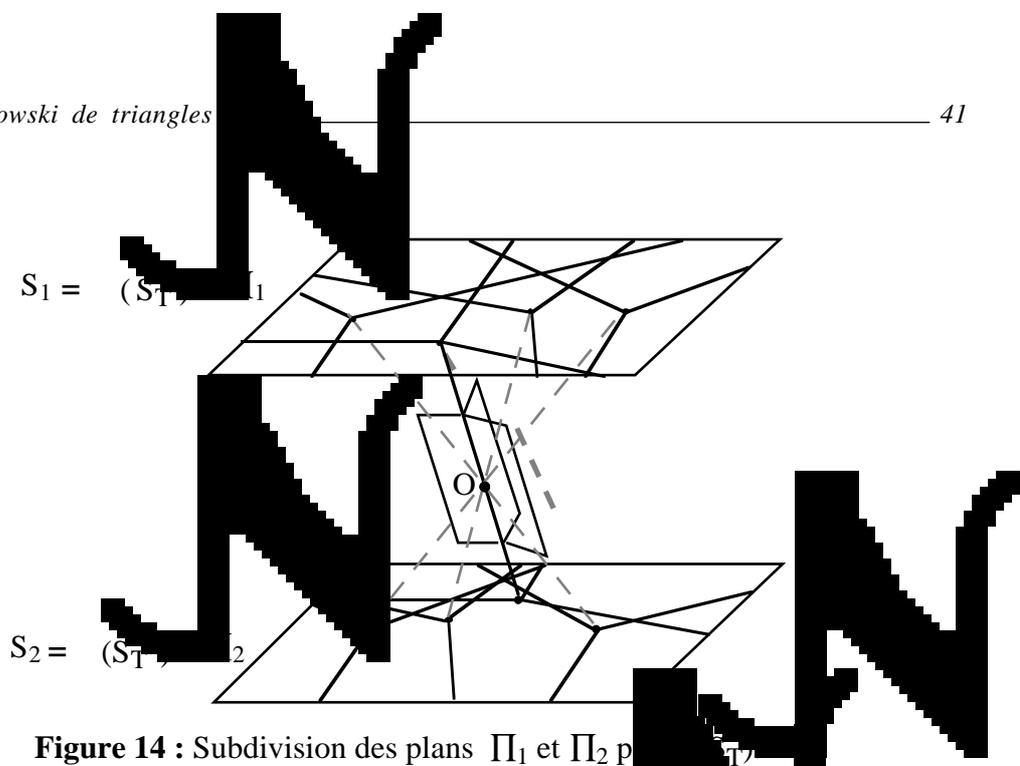


Figure 14 : Subdivision des plans Π_1 et Π_2 par les faisceaux de normales de p triangles.

• **La première étape** de l'algorithme consiste à calculer les subdivisions S_1 et S_2 des plans Π_1 et Π_2 (où raffinement commun des $(T_i)_{i=1, \dots, p}$ en leurs appliquant la méthode division-fusion. A chaque étape de l'algorithme on applique l'algorithme de fusion de deux subdivisions convexes du plan.

La taille d'une subdivision planaire, obtenue par l'intersection d'un plan avec les faisceaux de normales de p triangles, est en $O(p^2)$. Si on note $T(p)$ le coût en temps du calcul de la subdivision planaire formée par les faisceaux de normales de p triangles intersectant un plan Π_1 (resp. Π_2), on a :

$$T(p) = 2 T\left(\frac{p}{2}\right) + O(p^2).$$

Et finalement, $T(p)$ est en $O(p^2)$.

• **La seconde étape** est la reconstruction de $(S_T)_{T=1, \dots, T}$ à partir des deux subdivisions planaires.

Les éléments non bornés des deux subdivisions sont des cellules de Π_1 et Π_2 qui coupent Π_1 et Π_2 . On identifie les paires de cellules (non bornées des deux subdivisions) identiques, en calculant leurs positions par rapport aux $(T_i)_{i=1, \dots, p}$. Le nombre de 2-cellules non bornées est en $O(p)$.

On majore le nombre de 1-cellules les bordant par le nombre total de 1-cellules car on ne peut pas appliquer le théorème de la zone à "l'arrangement" des $(T_i)_{i=1, \dots, p}$ (remarque à la fin du paragraphe 3). Donc on majore le coût de cette étape par $O(p^2)$.

• **La troisième étape**, calcul des sommets, s'effectue comme dans le plan, avec un temps proportionnel au nombre de sommets, c'est à dire en $O(p^2)$.

Propriété 12 La méthode décrite ci-dessus, permet de construire la somme de p triangles de \mathbb{R}^3 avec un coût en temps de $O(p^2)$.

4.3. Calcul de la somme de triangles de \mathbb{R}^3

En dimension deux et trois, on a pu se ramener à des problèmes plus simples pour calculer le raffinement commun des faisceaux de normales, mais en dimension supérieure nous ne connaissons aucune méthode pour calculer le raffinement commun de subdivisions convexes de l'espace.

Le but de ce paragraphe est de calculer le faisceau de normales d'un polytope S_T résultant de la somme des triangles T_1, \dots, T_p à partir d'un arrangement d'hyperplans (i.e. de $(Z(S_T))$).

4.3.1 Préliminaires

Comme dans le programme proposé par Gritzman et Sturmfels (voir [Gri&Stu93] ou paragraphe 1 de ce chapitre), on associe à chaque arête de chaque triangle un hyperplan orthogonal à cette arête.

On note :

- e_i^j un vecteur normal à l'arête du triangle T_i ($i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, 3$)
- $H_i^j = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, e_i^j \rangle = 0\}$ le plan orthogonal à l'arête e_i^j ,
- $\bar{H}_i^j = (e_i^j, \text{span}\{0\})$ le demi-hyperplan inclus dans H_i^j associé à l'arête du triangle T_i , et
- H_T l'ensemble des hyperplans H_i^j .

Rapportons l'arrangement (H_T) en un hyperplan. C'est un raffinement de (S_T) est à dire : (H_T) est un raffinement de (S_T) se traduit par le fait que toute face f de (S_T) s'écrit

$$f = \bigcup_{g \in (H_T) \cap f} g$$

• Particularités (ou dégénérescences) de l'arrangement (H_T)

Dans le cas présent, tous les hyperplans passent par l'origine, donc l'ensemble des 0-faces de l'arrangement est réduit à un élément $\{0\}$. Toutes les 1-faces de (H_T) lui sont incidentes, et toutes les faces de cet arrangement sont des cônes.

Les trois hyperplans (resp. plans, pour $n=3$) H_i^1 , H_i^2 et H_i^3 orthogonaux aux arêtes de T_i s'intersectent en un même sous espace vectoriel de dimension $n-2$ (resp. une même droite).

Dans le chapitre 1, on a vu que la complexité d'un arrangement central (H_T) est en $\Theta(p^{n-1})$, i.e. le nombre de faces est $\Theta(p^{n-1})$ pour tout k , $1 \leq k \leq n$.

• **Structure de l'arrangement et sa représentation par un graphe d'incidence ou d'un complexe polyédrique** [Edelsbrunner & Yvi95]

(H_T) et (S_T) les complexes polyédriques, sont représentés par le graphe d'incidence de leurs faces.

Convention : Soit un ensemble de type (H) . En plus de la face propre de (H) , on définit deux faces impropres : la (-1) -face \emptyset et la $(n+1)$ -face (H) . On considère \emptyset et (H) comme étant incidentes sous les sommets de (H) et (H) sous les n -faces de (H) .

Définition 3 : Le graphe d'incidence (H) est défini par (H) . Pour chaque k -face f de (H) ($k = -1, 0, 1, \dots, n+1$), (H) contient un nœud qui représente f . Et on établit des connections entre les nœuds des faces incidentes la dimension diffère de 1.

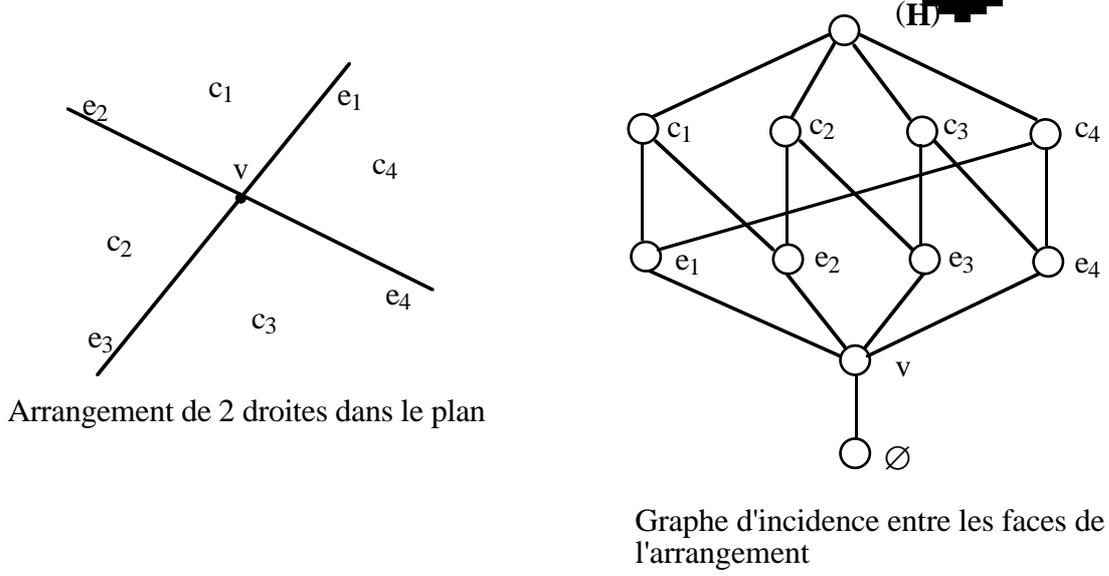


Figure 15 : Arrangement de droites, et sa représentation par un graphe d'incidence.

Une k -face f est représentée par des informations auxiliaires et deux listes de pointeurs sur les sous-faces et super-faces de f (voir définitions chapitre 1). Les informations auxiliaires, pour une k -face f , sont par exemple :

- un point $p(f)$ appartenant à $\text{IntRel}f$, et
- si $k = n-1$, l'hyperplan H_1^j auquel f appartient,
- etc...

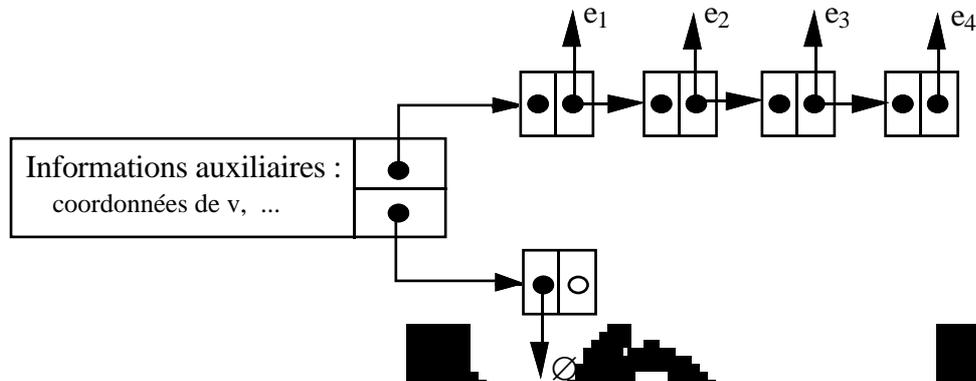


Figure 16 : Représentation d'une face de l'arrangement d'incidence.

• Adaptation de cette structure de données à des normales

Notations : On appellera la liste des sous-faces de f la liste $i(f)$ et la liste des super-faces de f la liste $l(f)$. On suppose initialement égale au graphe d'incidence de (H_1^j) la liste des faces de (H_1^j) .

Soit f une face de (H_1^j) ou de (S_1^j) . On note :

- $i(f)$ l'ensemble des sous-faces de f
- et $l(f)$ l'ensemble de ses super-faces

Pour un arrangement simple, la taille des listes de super-faces d'une k -face est de $2(n-k)$; elle ne dépend donc pas du nombre d'hyperplans de l'arrangement. Par contre, la taille de la liste des sous-faces est d'au moins $k+1$, mais la borne supérieure est $p-n+k$ et dépend de p .

Même, si l'arrangement (H_1^j) est dégénéré, on peut faire les mêmes remarques lorsque les triangles sont en position générale.

Pour effectuer certaines opérations élémentaires sur les listes, on ajoute à la structure décrite ci-dessus des pointeurs supplémentaires :

- Double chaînage des listes de sous-faces et super-faces pour effectuer des suppressions en temps constant.

- Soit g une sous-face de f . Pour accéder, à partir de g à son représentant dans la liste $i(f)$ des sous-faces de f , il faut parcourir cette liste, d'où un coût proportionnel à sa taille $\text{card}(i(f))$. Or on a vu que $\text{card}(i(f))$ peut dépendre de p . Pour effectuer cette opération avec un coût constant, on ajoute au représentant de f dans $l(g)$ un pointeur sur le

représentant de g dans la liste des sous-faces de f . Exemple, dans la figure ci-dessous avec l'arête e_1 et la face c_1 . On verra l'utilité de ce pointeur supplémentaire dans la deuxième étape de l'algorithme décrit en annexe du chapitre.

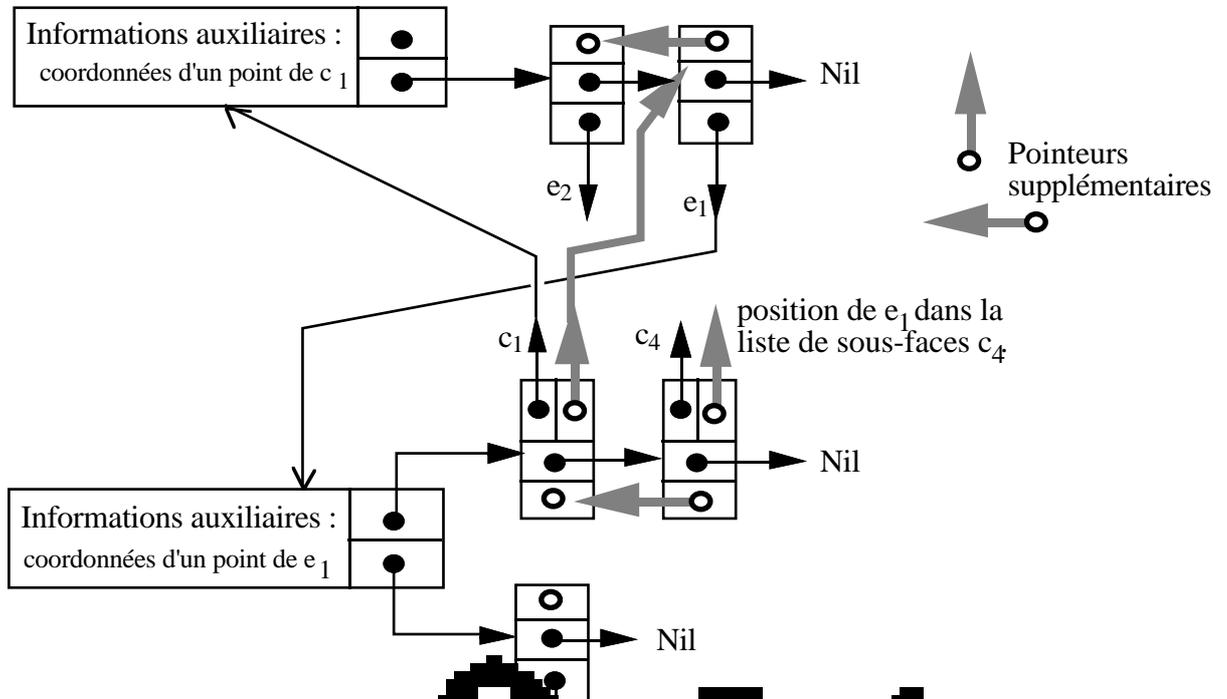


Figure 17 : Représentation des faces et des arêtes.

• Lien entre faces de (H_T) et faces de (S_T)

Soit f une k -face de (S_T) , notons $f = \text{Conv} \{ g \}$ l'ensemble des k -faces (H_T) incluses dans f . On a :

$$f = \text{Conv} \{ g \}$$

Définition Soit g une face de (H_T) et f une face de (S_T) contenant g .

$$\text{Rel Int } g \subseteq \text{Rel Int } f.$$

On dira que g est une *face valide* pour f si :

$$\dim g = \dim f,$$

i.e. $g \in \text{Rel Int } f$ donc g est attribué à la face f .

Par opposition, on dira que g est *fausse* si :

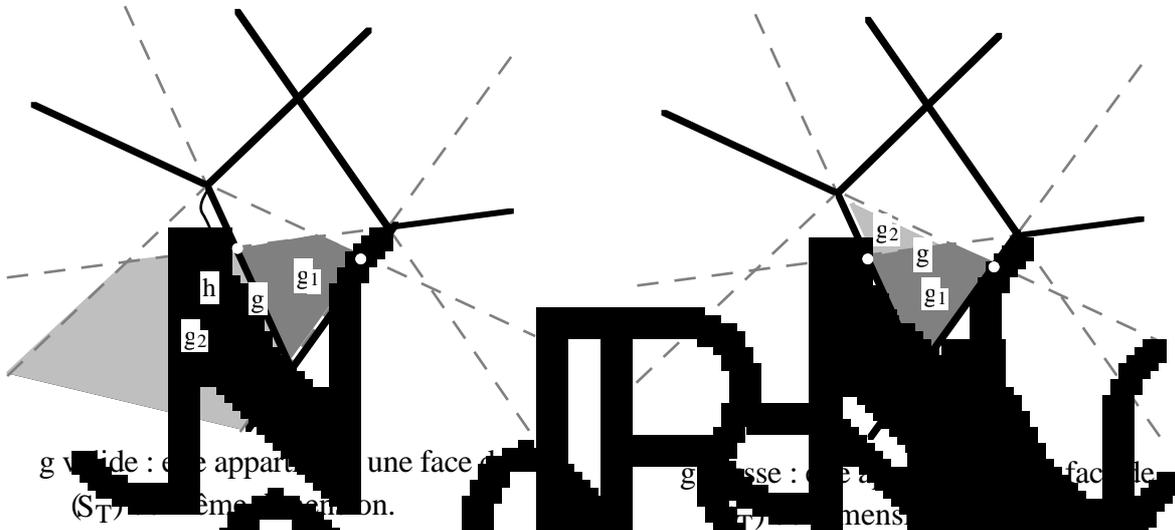
$$\dim g < \dim f.$$

Remarque : La face g de (H_T) contenant $\text{Rel Int } g \subseteq \text{Rel Int } f$ est unique, car (H_T) est un raffinement de (S_T) .

Soient g_1 et g_2 deux faces adjacentes de (H_T) et soit g leur face commune. Deux cas se présentent (voir figure ci-dessous),

- soit g_1 et g_2 appartiennent à la même k -face f de (S_T) , g est incluse dans f , alors g_1 et $g_2 \in (f)$. Comme f est une k -face, g est valide.
- soit elles appartiennent à deux faces f_1 et f_2 différentes de (S_T) , g est incluse dans la $(k-1)$ -face h de (S_T) commune à f_1 et f_2 . Comme h et g ont la même dimension, g est valide.

— coupe de (S_T) dans un plan
 - - - coupe des demi-hyperplans n'appartenant pas à (S_T)



g valide : elle appartient à une face de (S_T) de même dimension.
 g invalide : elle appartient à une face de (S_T) de dimension inférieure.

Figure 18 : Exemple dans (H_T) et (S_T)

Remarques

- Toute face de (H_T) est incluse dans une n -face de (S_T) et toute n -face de (H_T) est valide.
- Toute $(n-1)$ -face de (H_T) est incluse dans un demi-hyperplan H_i^j de H_T , donc soit elle appartient au demi-hyperplan \bar{H}_i^j auquel cas elle est valide, soit elle n'appartient pas à \bar{H}_i^j alors elle est invalide. On peut donc déterminer directement la validité des $(n-1)$ -faces.
- Soient deux faces g_1 et g_2 adjacentes de (H_T) se partageant la face g de (H_T) , si g est valide et g_2 appartient à une n -face de (S_T) , alors g_1 est valide, sinon elles appartiennent à la même n -face de (S_T) .
- Enfin dernière particularité, les 1-faces valides de (S_T) sont les faces du faisceau (S_T) et à dire si g est une 1-face de (S_T) (g) est un élément.

Idée de l'algorithme

Les objectifs de cet algorithme, nous conduisent à traiter dans un premier temps les n -faces et (n-1)-faces d'un arrangement de droites couvrant le graphe d'adjacence des n -faces d'un complexe simplicial valide de dimension n et on formera les n -faces de (S_T) par récurrence et à mesurer leur volume de dimension plus petite, jusqu'à l'obtention de toutes les faces de (S_T) .
Ainsi, on aura un lien de la caractérisation de faces valides (de dimension $k < n-1$) de (H_T) en fonction de la validité de leurs faces voisines, que nous donnons dans la propriété suivante :

Notation : Soit g une k -face de (H_T)

$$I_{valide}(g) = \{ f \in (S_T) / f \text{ est valide} \}$$

Propriété 13 : Une k -face f de (H_T) est valide si et seulement si

$$\text{Card} \{ h \in I(f) / \dim h = k \} > 2.$$

preuve : Soit f une k -face de (H_T)

- Pour la première implication, supposons que f est valide.
 Si f est valide alors elle est incluse dans une unique k -face f' de (S_T)

On veut montrer que $\text{Card}(I_{valide}(f)) = \text{Card}(I(f'))$.

- Soit $g \in I_{valide}(f)$, alors il existe une unique face g' de (S_T) de dimension $k+1$ telle que $g \subseteq g'$. On a

$$f' \cap g' \supseteq f$$

or $\dim f = k$, donc la dimension de $f' \cap g'$ est au moins k et $\dim f' = k$ d'où

$$\dim(f' \cap g') = k.$$

De plus $f' \cap g'$ est une face de (S_T) incluse à f' et g' . Donc $f' \cap g' = f$
 $g' \in I(f')$.

Donc à toute face g de $I_{valide}(f)$ correspond une unique face g' de $I(f')$.

- Réciproquement, soit $g' \in I(f')$. Comme $f' \in (S_T)$ l'ensemble (g') de $(k+1)$ -faces valides de (S_T) est non vide.

$$(g') = \{ g \in (S_T) / \dim g = k+1 \text{ et } g \subseteq f' \}.$$

Or f est incluse dans f' qui est une face de g' , donc f est une frontière de g' .

Donc il existe une unique $(k+1)$ -face $g \in (g')$ incluse dans f .

On conclut qu'à toute face g' de $I(f')$ correspond une unique face g dans $I(f)$.

D'où

$$\text{Card}(I_{valide}(f)) = \text{Card}(I(f')).$$

Or f' est une k -face ($k \leq n-2$) d'un complexe de droites donc $\text{Card}(I(f')) > 2$.

- Pour démontrer la réciproque, on va montrer que :

$$f \text{ non valide entraîne } \text{Card}(I_{\text{valide}}(f)) \leq 2.$$

Si f n'est pas valide, elle est incluse dans une face f' de (S_{T-1}) qui est de dimension j avec $j > k$. Donc la frontière de f , c'est à dire

$$f \cap \text{IntRel}(f') \quad (*)$$

- *Premier cas* : $j = k+1$.

L'ensemble f' n'est pas ouvert à un point, car $f \subset$ strictement dans f' . L'ensemble des cellules de (H_T) incluses dans f' forme un complexe $c(f')$ de dimension $k+1$. La face f de dimension k coupe l'intérieur du complexe $c(f')$, elle a donc exactement 2 $(k+1)$ -faces de $c(f')$ incidentes (incluses dans f'). Soient g_1, g_2 ces faces, $\dim g_1 = \dim g_2 = \dim f' = k+1$, donc g_1 et $g_2 \in I_{\text{valide}}(f)$.

Supposons qu'il y a une autre face g_3 que g_1 et g_2 . Soit f'' une de ces faces, $g_3 \subset f''$. Mais g_3 est valide, donc il existe une face f'' ($f'' \neq f'$) de (S_{T-1}) telle que

$$g_3 \subset f'' \text{ et } f'' \cap f = g_3 \cap f' = g_3 \cap f' \subseteq f'' \cap f'.$$

Or (S_{T-1}) est un complexe, donc $f'' \cap f'$ est une face de (S_{T-1}) commune à f'' et f' . Et d'après (*), f ne peut être incluse dans une face de f' . D'où contradiction. Donc f ne peut avoir d'autres $(k+1)$ -faces incidentes que celles incluses dans f' . D'où $\text{Card}(I_{\text{valide}}(f)) = 2$.

- *Second cas* : $k+1 < j$.

$\forall g \in I(f), g \subset f'$ car $\text{IntRel}(f) \subseteq \text{IntRel}(f')$. Et $\dim g = k+1 < \dim f'$, donc g n'est pas valide. D'où $I_{\text{valide}}(f) = \emptyset$.

Exemple : Dans ce petit problème, on va établir la validité des 1-faces de (H_T) .

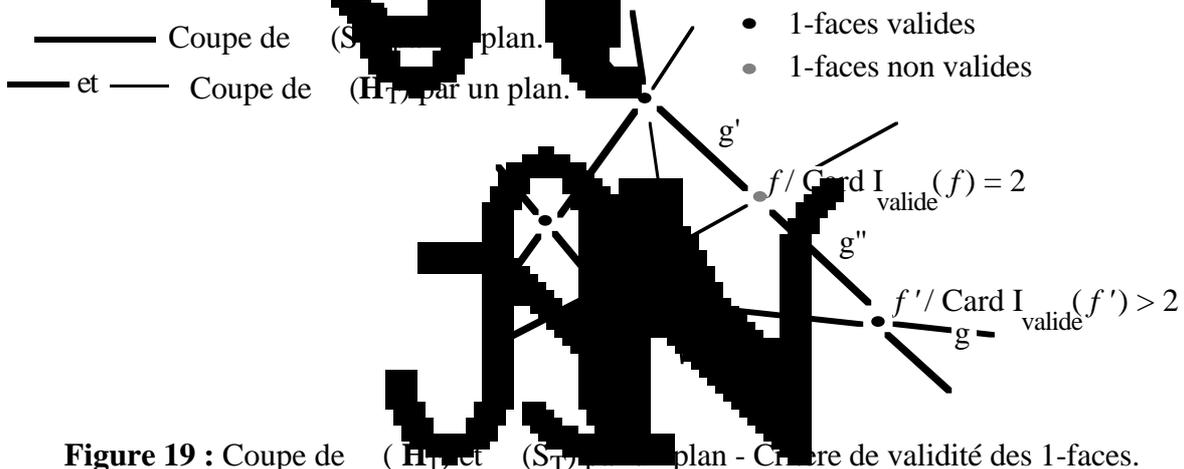


Figure 19 : Coupe de (H_T) et (S_{T-1}) dans le plan - Critère de validité des 1-faces.

4.3.2 Description de l'algorithme de fusion

On décrit en deux étapes l'algorithme de fusion. La première étape consiste à parcourir le graphe d'adjacence des 3-faces de (H_T) , afin de construire les ensembles (f) de 3-faces à fusionner, pour chaque 3-face f de (S_T) , et déterminer la validité des 2-faces de (H_T) . Lors de la 2^{ème} étape, on construit les ensembles de 2-faces à fusionner, et on détermine la validité des 1-faces, par un parcours des 2-faces valides.

• **Description de la 1^{ère} étape : Fusion des 3-faces et validité des 2-faces.**

Soit $G = (V, E)$ le graphe d'adjacence des 3-faces de (H_T) , V désignant l'ensemble des sommets du graphe et E l'ensemble de ses arêtes. Chaque sommet du graphe représente une 3-face de (H_T) , il y a une arête entre deux sommets du graphe si les 3-faces qui leur correspondent sont adjacentes dans (H_T) , c'est à dire qu'elles ont une 2-face de (H_T) en commun (voir figure ci-dessous). Donc, chaque 2-face de (H_T) correspond à une arête du graphe.

Coupe de (H_T) par un plan :

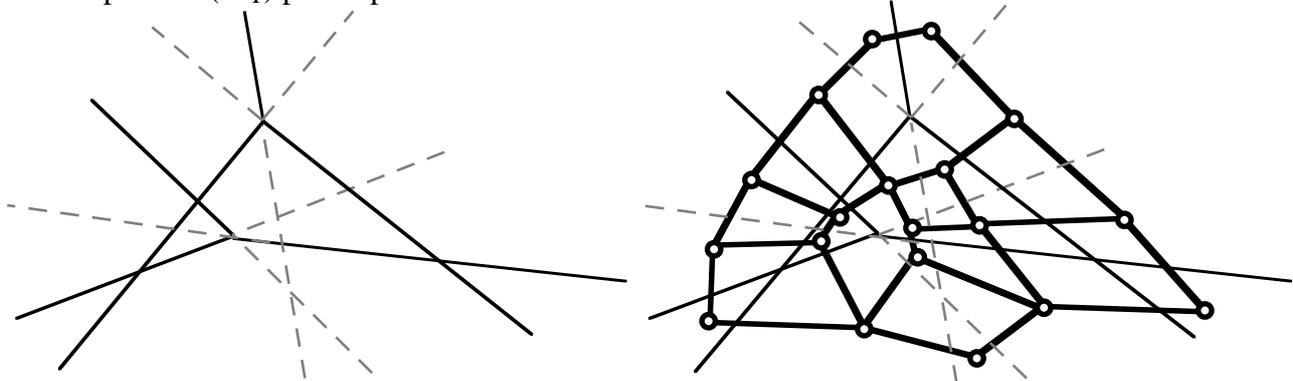


Figure 20 : Graphe d'adjacence G des 3-faces de l'arrangement.

Définition 5 : On appelle *graphe partiel* d'un graphe $G = (V, E)$, le graphe noté G_P et défini par :

$$G_P = (V, E_P), \quad \text{où } E_P \subset E.$$

En fait, G_P est un graphe ayant les mêmes sommets que G , mais dont les arêtes sont un sous-ensemble des arêtes de G .

Ici, on associe à G le graphe partiel $G_p = (V, E_p)$ défini par :
 Soit $e = (u, v)$ une arête de E , où u et v sont les noeuds représentant les 3-faces f_1 et f_2 de (H_T) . Soit g la sous-face commune à f_1 et f_2 .

L'arête e est aussi une arête de E_p si et seulement si g est fusse ($g \in H_i^j$, mais $g \notin ZH_i^j$), c'est à dire si f_1 et f_2 appartiennent à la même 3-faces de (S_T) (figure).

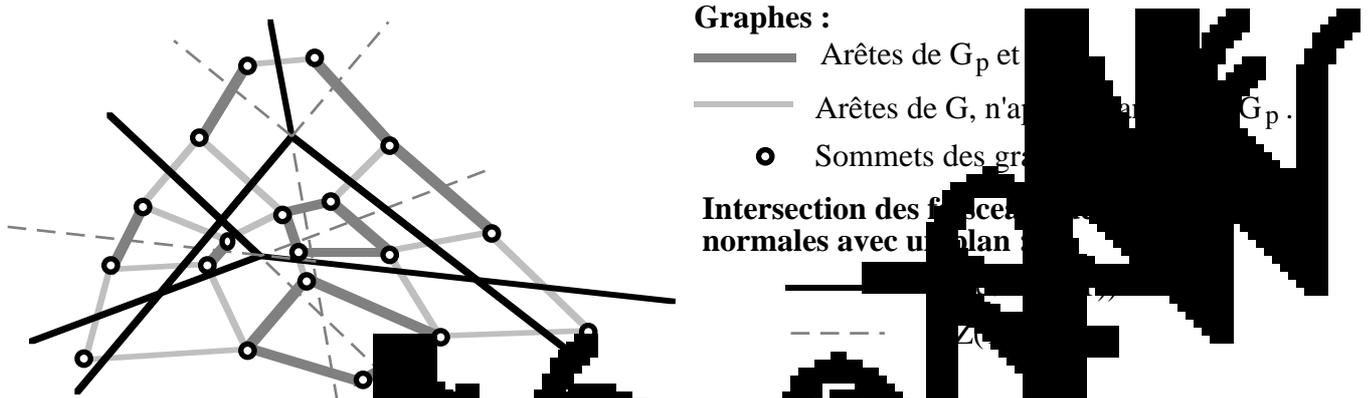


Fig. 21 : Graphe partiel G_p des 3-faces de (H_T) et le graphe partiel G .

Observation : Chaque composante connexe ($C \subset V$) du graphe G_p correspond à une 3-face f de (H_T) (l'ensemble des sommets du graphe) de la composante connexe représente l'ensemble (f) des 3-faces (H_T) incluses dans la même 3-face f de (S_T) .

Ces composantes connexes forment une partition de l'ensemble des 3-faces de (H_T) en sous-ensembles.

Les composantes connexes de G_p sont déterminées par un algorithme de parcours dans le graphe G .

Parcours dans le graphe d'adjacence avec détermination des composantes connexes

Les relations d'adjacences entre les 3-faces (H_T) forment le graphe G . On applique un algorithme de parcours en largeur (ou exploration) à ce graphe (cf. [Xuo92]), mais avec une priorité de visiter les composantes connexes de G_p . Ceci signifie que lorsqu'un algorithme se trouve au sommet v_0 , il visite tous les sommets appartenant à la même composante connexe de G_p que v_0 , avant de visiter d'autres sommets du graphe (voir algorithme). La visite d'une première composante connexe permet de construire un ensemble (f_0) de faces (H_T) appartenant à la même 3-face de (S_T) et le parcours recommence à partir d'un autre sommet de G non

visité pour déterminer une autre composante connexe (f_1) de G_p .
 Pour chaque arête rencontrée dans le parcours de G_p , on teste s'il s'agit d'une arête de G_p . C'est à dire, si la 2-face g de (H_1) correspondante à l'arête e du graphe n'est pas valide.

Mise à jour de la structure d'incidence

Durant le déroulement de l'algorithme de parcours du graphe, les données sont mises à jour de la structure de graphe d'incidence. On notera que le graphe d'incidence auquel on applique l'algorithme, il est initialisé par le graphe d'incidence (H_1) .

Lors du parcours de la $k^{\text{ème}}$ composante connexe (f_k) les mises à jour suivantes apparaissent :

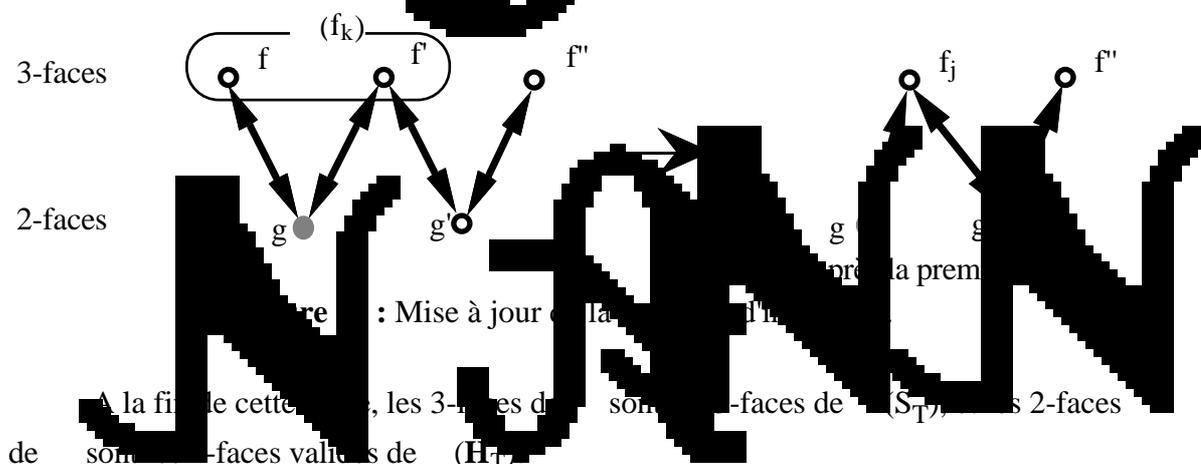
L'algorithme arrive à une 3-face f , et consulte une de ses sous-faces g commune à une face adjacente f' de (H_1) l'hyperplan contenant g .

- Si $g \subset \overline{H_1}$ alors f est valide. Les super-faces de g sont mises à jour en remplaçant f par f' et f' est ajoutée dans la liste $i(f_k)$ des sous-faces de f_k .
- Sinon $g \not\subset \overline{H_1}$, alors f est fautive.

Quand on fait le parcours d'une composante connexe, on a la liste $i(f_k)$ des faces de (H_1) à fusionner, et on obtient la nouvelle face f_k et $i(f_k)$ contient les sous-faces de f_k .

Il faut également mettre à jour les éventuelles informations auxiliaires concernant les 3-faces : la donnée $p(f)$ (point à l'intérieur de la face f , etc...

- 2-faces à supprimer



A la fin de cette étape, les 3-faces de (H_1) sont remplacées par les 2-faces de (S_1) et les 2-faces de (H_1) sont remplacées par les 2-faces valides de (H_1) .

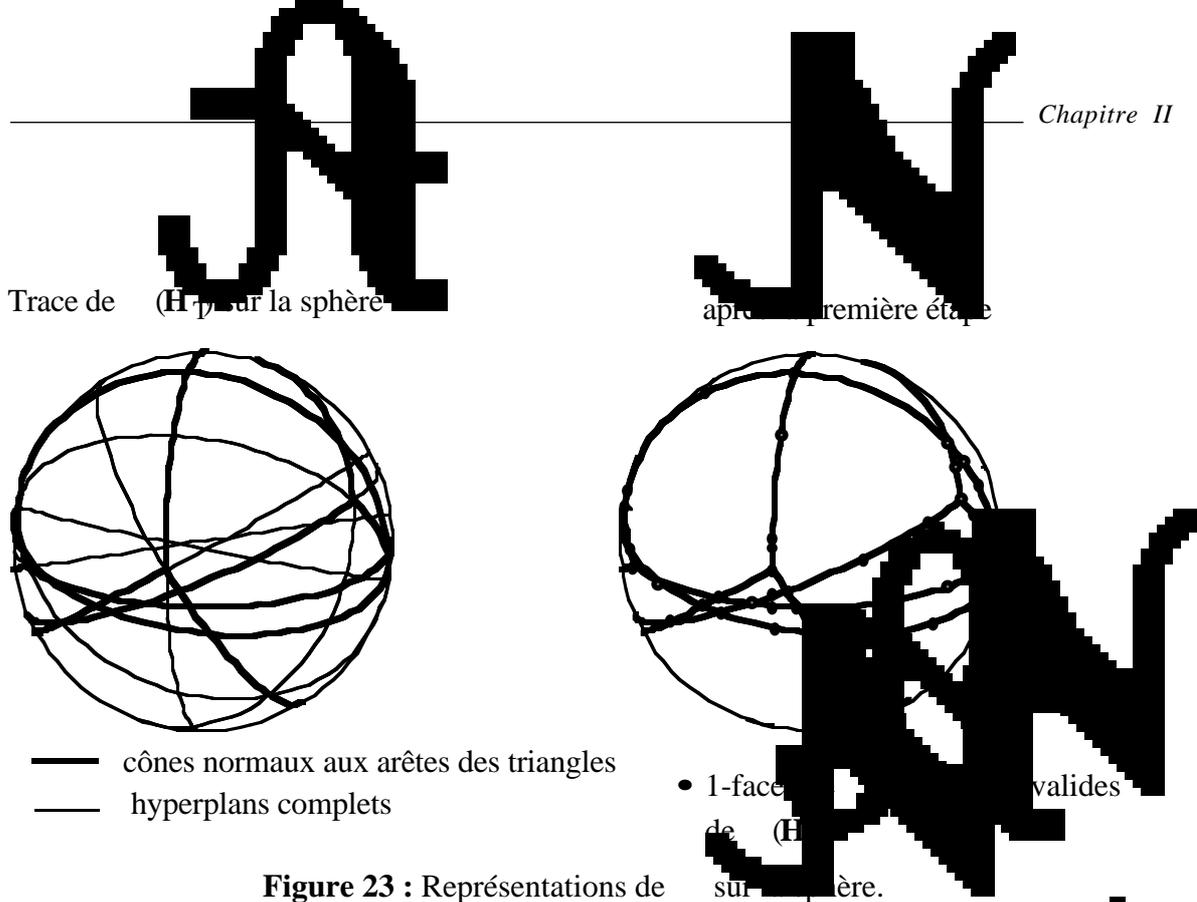


Figure 23 : Représentations de (H_T) sur la sphère.

L'algorithme de cette première étape est donné en annexe.

• **Description de la deuxième étape : Fusion des 2-faces et suppression des 1-faces.**

Comme à l'étape précédente, l'ensemble des 2-faces de (H_T) doit être partitionné en sous-faces qui sont les éléments appartenant à une même 2-face de (S_T) .

Soient f_1 et f_2 deux 2-faces voisines de (H_T) appartenant à la même 2-face de (S_T) . Leur sous-face commune h n'est pas valide (respectivement n'appartient pas à la même 2-face de (S_T) , est valide). On aura donc besoin à cette étape d'appliquer le critère de validité, donné par la propriété 13, aux 1-faces de l'arrangement.

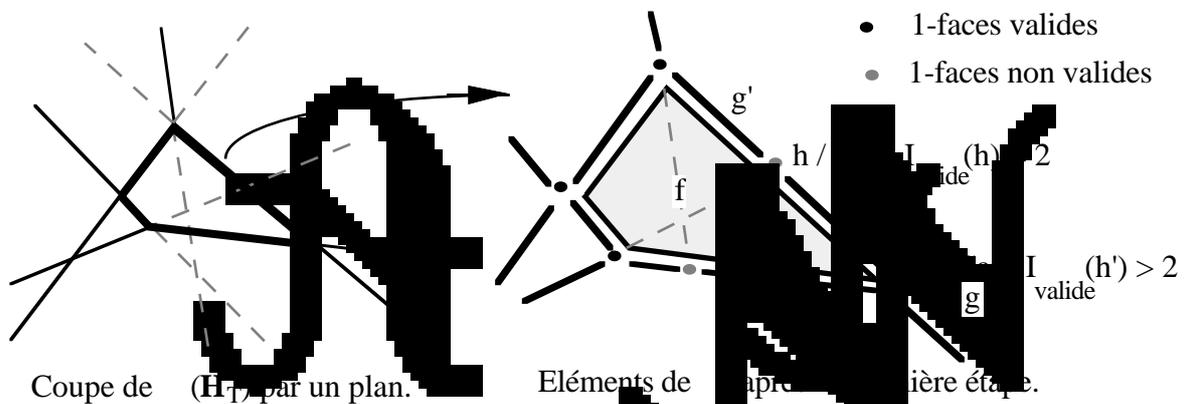


Figure 24 : Éléments de (H_T) après première étape.

Parcours

Cette étape s'effectue comme précédemment par un algorithme de parcours du graphe d'adjacence des 2-faces valides de H_2 (non supprimées à la première étape), qui détermine les composantes connexes des 2-faces à fusionner (voir algorithme).

On remarque que les 1-faces n'ayant pas de 2-faces incidentes que des faces fausses ($Card(I_{valide}(s))=0$) ne sont pas affectées par l'algorithme. C'est pour cette raison que les 1-faces de H_1 sont toutes considérées comme étant fausses.

On peut remarquer une particularité des composantes connexes des 2-faces. En effet, le sous graphe correspondant à une composante connexe des 2-faces est une chaîne. On peut alors simplifier l'algorithme de parcours dans la composante connexe.

Mise à jour de

Dans le graphe d'incidence, la mise à jour des incidences entre 2-faces et 1-faces est gérée comme celle des incidences entre 3-faces et 2-faces à l'étape précédente.

A cette étape, il faut également mettre à jour les incidences entre 3-faces et 2-faces. Par exemple, dans la figure 25, la 3-face f a parmi ses sous-faces g' et g'' , or à cette étape g' et g'' deviennent une seule face g_j , donc $i(f)$ devient $i(f) \cup \{g_j\} \setminus \{g', g''\}$. Par contre $I(g_j) = I(g') = I(g'')$.

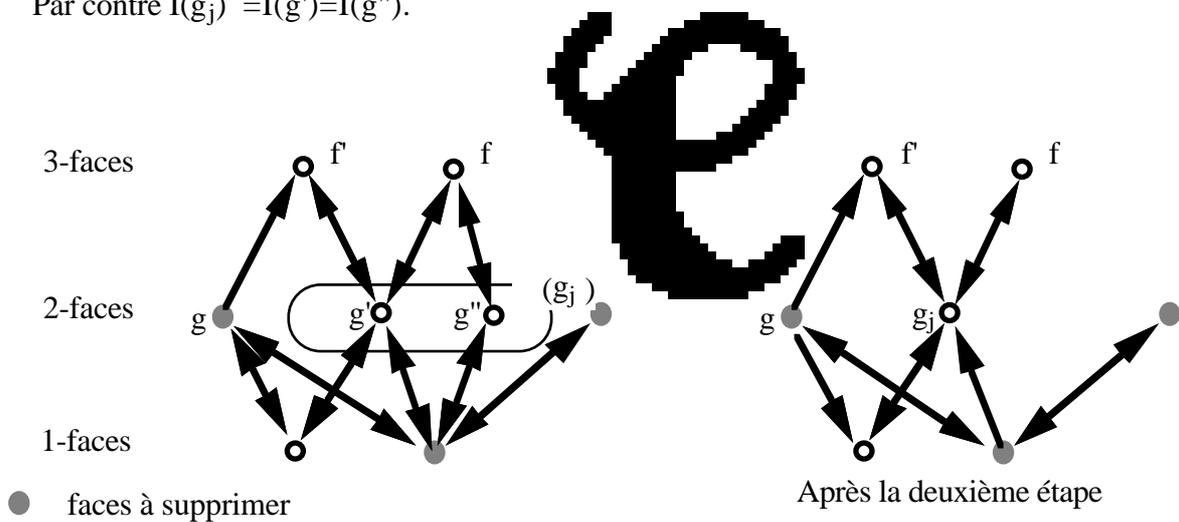


Figure 25 : Mise à jour des structures de données.

L'algorithme de cette deuxième étape est donné en annexe.

• Complexité de l'algorithme

La complexité d'un algorithme de parcours dans un graphe est linéaire par rapport au nombre de sommets plus le nombre d'arêtes du graphe.

Complexité de la première étape :

Le graphe G comporte $f_3(\mathbf{H}_T)$ sommets et $f_2(\mathbf{H}_T)$ arêtes, donc son parcours est en $\Theta(p^2)$.

Les instructions supplémentaires au parcours dans un graphe sont :

- déterminer la validité de chaque 2-face.
- le passage d'un sommet v à un sommet voisin du graphe, c'est à dire d'une 3-face f à une 3-face adjacente en passant par leur 2-face commune.
- la mise à jour des super-faces des 2-faces.
- la construction de la liste des sous-faces des nouvelles 3-faces.

Ces opérations s'effectuent en coût constant à chaque étape du parcours (voir annexe 1). Donc, la première étape de l'algorithme s'effectue avec une complexité en temps $O(p^2)$.

Complexité de la deuxième étape :

L'algorithme parcourt le graphe d'adjacence des 2-faces valides de (\mathbf{H}_T) , avec une complexité proportionnelle à $f_2(\mathbf{H}_T) = 2i_1(\mathbf{H}_T)$ ($i_1(\mathbf{H}_T)$ désigne le nombre d'incidences entre 1-faces et 2-faces de (\mathbf{H}_T)), c'est à dire $O(p^2)$.

Les instructions supplémentaires au parcours du graphe sont :

- déterminer la validité des 1-faces, en comptant leurs super-faces valides. Le coût total est majoré par $i_1(\mathbf{H}_T)$, ce qui donne un coût en $O(p^2)$.
- mise à jour des sous-faces des 3-faces.
- mise à jour des super-faces des 1-faces.

Ces opérations s'effectuent en coût constant à chaque étape du parcours (voir annexe 1). La deuxième étape de l'algorithme s'effectue avec une complexité en temps de $O(p^2)$.

Propriété 14 : La méthode décrite pour calculer le normal (S_T) à partir de l'arrangement (\mathbf{H}_T) a une complexité en temps $O(p^2)$.

Complexité du calcul des sommets

Le graphe d'incidence de (S_T) peut être obtenu à partir de (\mathbf{H}_T) en inversant la dimension des faces, i.e. les k -faces de (\mathbf{H}_T) deviennent les $(3-k)$ -faces de S_T . Par exemple, le point intérieur à une 1-face de (S_T) est une normale extérieure à une facette du polytope.

Pour calculer les sommets, on procède comme au §4.1. On calcule un premier

sommet, en déterminant sa position par rapport aux triangles adjacents (T_i) , avec un coût en $O(p)$. Puis on calcule les autres sommets de proche en proche, en parcourant le graphe d'adjacence des 3-faces de (S_T) . Le coût de calcul pour passer d'un sommet à son voisin est constant, donc le coût total du calcul des sommets est en $O(p^2)$.

Propriété 15 : La somme de p triangles de (S_T) peut être imprimée en temps de $O(p^2)$.

4.3.3 Extension de l'algorithme à n dimensions

La première étape de l'algorithme à n dimensions est décrite dans [1]. Elle consiste à fusionner les n -faces de (H_T) incluses dans une même $(n-1)$ -face de (S_T) . Un parcours du graphe d'adjacence des n -faces de (H_T) permet de trouver les faces incluses dans une même $(n-1)$ -face de (S_T) .

Les étapes suivantes consistent à passer de $n-1$ à différents niveaux du graphe d'incidence (S_T) .

A une étape de l'algorithme,

- les j -faces de (S_T) pour $j < n-1$,
- les $(k+1)$ -faces de (H_T) qui n'ont pas été fusionnées,
- les i -faces de (H_T) pour $1 \leq i < k+1$.

Un parcours parmi les $(k+1)$ -faces valides de (H_T) permet de

- fusionner les $(k+1)$ -faces incluses dans la même $(k+1)$ -face de (S_T) ,
- déterminer la validité des k -faces,
- et mettre à jour les incidences entre les faces de dimensions $k+2$, $k+1$ et k .

Il faut répéter ces étapes jusqu'à la fusion des 2-faces et suppression des 1-faces.

Complexité de l'algorithme

La complexité d'une étape est de l'ordre du nombre de $(k+1)$ -faces, plus celui des k -faces, plus celui des incidences entre $(k+1)$ -faces et k -faces. Car chaque relation d'incidence sera utilisée au plus 2 fois.

Or, on a

$$i_k(H_T) \leq i_k^{(n)}(3p) = \Theta(p^{n-1}),$$

où $i_k(H_T)$ désigne le nombre d'incidences entre les faces de dimension k et $k+1$ d'un arrangement de l'ensemble H_T de p hyperplans et $i_k^{(n)}(p) = \max \{ i_k(H) \}$ pour tout ensemble H de p hyperplans de \mathbb{R}^n (Edelsbrunner Chapitre 1)

Donc le coût d'une étape est de l'ordre de

$$f_{k+1}(H_T) + f_k(H_T) + i_k(H_T) = \Theta(p^{n-1}).$$

Chaque étape est en $\Theta(p^{n-1})$ pour $k = n-2$ à 1, donc S_T est obtenu à partir de (H_T) avec un coût temps en $\Theta(p^{n-1})$.

Le faisceau de normales de S_T donne le graphe d'incidence de S_T , et le calcul des sommets se fait selon la méthode décrite dans 4.1. en $\Theta(p^{n-1})$.

Propriété 16 : Le calcul de la somme de n cellules de S_T selon la méthode décrite dans ce paragraphe s'effectue en $O(p^n)$.

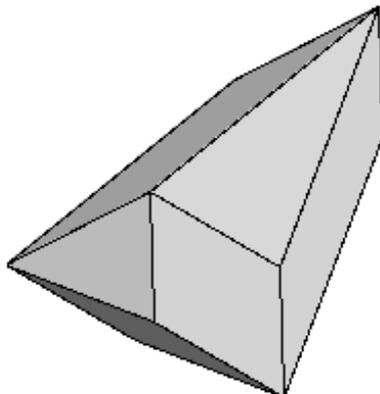
Autre idée : l'extension à

On peut simplement obtenir le 1-squelette (ou graphe) de S_T (sommets et arêtes du polytope) en appliquant la première étape de l'algorithme, on obtient les n -cellules de (S_T) il suffit alors de déterminer le graphe d'adjacence des n -cellules de (S_T) et d'appliquer l'algorithme de calcul des sommets.

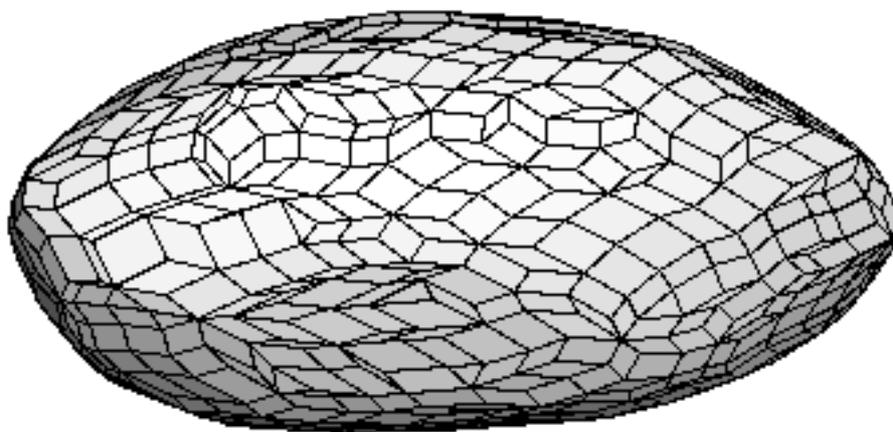
Conclusion : La méthode décrite ici n'est pas spécifique aux triangles. La même technique peut s'appliquer aux polytopes, à savoir obtenir la graphe d'incidence de la somme à partir de celui d'un arrangement d'hyperplans. Par contre, dans ce cas l'optimalité de l'algorithme n'est pas prouvée car elle dépend de la complexité effective de la somme des polytopes, par rapport à celle de l'arrangement engendré par les hyperplans orthogonaux aux arêtes des polytopes (cette dernière induit la complexité de l'algorithme).

5. Exemples de somme de triangles

- Triangles quelconques



Somme de deux triangles.

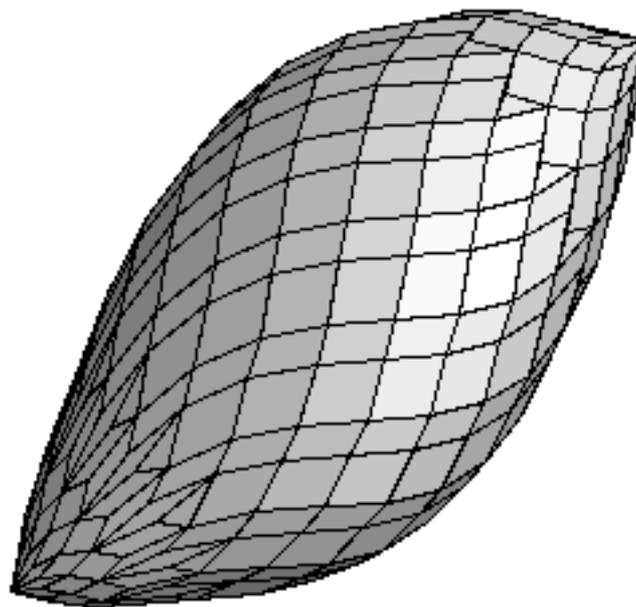
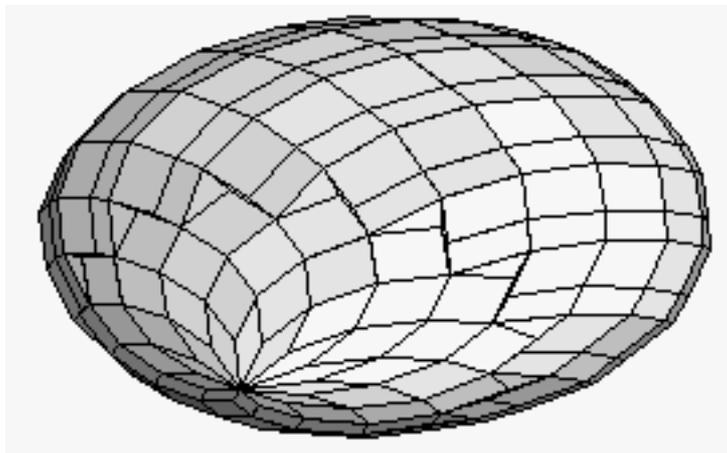
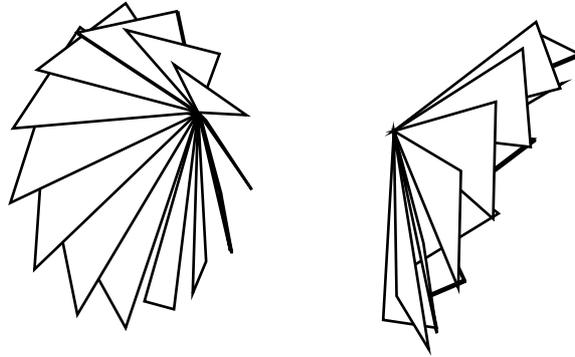


894 facettes, 1768 arêtes et 876 sommets

Somme de 20 triangles quelconques.

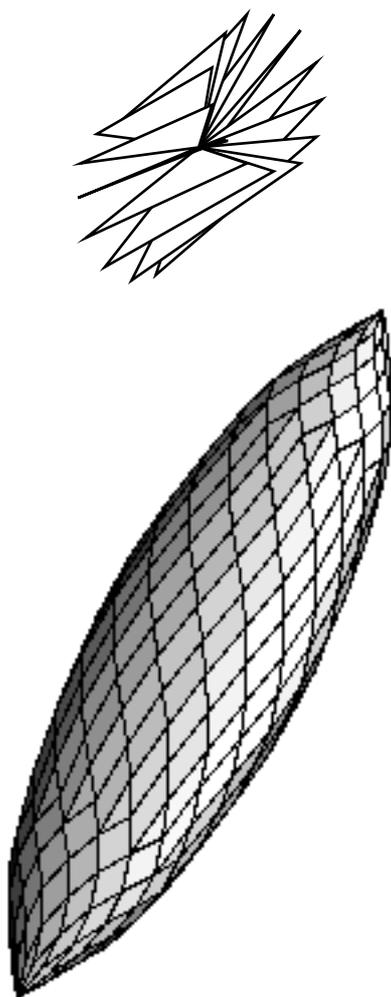
- Triangles avec des sommets régulièrement répartis sur des cercles :

1- Somme de 13 triangles :



364 facettes, 715 arêtes et 353 sommets.

2-



338 facettes, 663 arêtes et 327 sommets.

Somme de 13 triangles.

6. Annexe

Algorithme de calcul du graphe d'incidence

• Remarques préalables

La structure est définie par le graphe d'incidence (G, H) .

L'algorithme est celui du parcours en largeur dans un graphe auquel est ajouté des instructions qui nous permettent de modifier au fur et à mesure du parcours.

F et Q sont des files d'attente. Q correspond aux éléments de la composante connexe en attente d'être visités, alors que dans F on met les éléments non atteints et ne faisant pas partie de la composante connexe courante.

A un moment donné du parcours, chaque sommet du graphe est dans l'un des 3 cas suivants :

- soit il n'est pas atteint par le parcours,
- soit il est atteint (c'est à dire qu'il est dans l'une des files d'attente F ou Q),
- soit il a été visité (c'est à dire atteint et tous ses voisins sont atteints).

Ainsi, à chaque face f de G est associée une marque (f_marque) qui prend les valeurs:

- "non atteinte", son état n'a pas encore été déterminé.
- "atteinte", son état est connu mais elle n'est pas encore traitée.
- "traitée", soit elle est dans la file d'attente pour subir d'éventuelles modifications, soit elle les a déjà subies.

Et on associe également à f un état qui prend les valeurs : "vraie", si la face f valide (respectivement "fausse" sinon).

- Parcours des faces et 3-faces de (H_7) (première étape)

```

{- Initialisation -}
= graphe d'adjacence  $(H_7)$ 
k = 0;   compteur des composantes connexes (ou 3-faces du faisceau)
F = {f0} ; où f0 est un 3-face quelconque de  $(H_7)$ 
Pour f ∈  $(H)$  faire f_marque = non atteinte fin pour;
{- - - - - - - -}
Tant que F ≠ ∅ faire
  k = k + 1;           g0 = PrendPremierFile(F) ;
  Q = (g0);
  Tant que Q ≠ ∅ faire {- parcours de la composante connexe -}
    f = PrendPremierFile(Q) ; (2)           (fk) = (f)
    i(fk) = ∅;
    Pour a ∈ i(f) faire
      Si a_marque = non atteinte
      alors
        f' = I(a) \ {f}; (3)
        a_marque = atteinte
        Si a ∉ H(a) (7)
        alors
          a_état = fautive ;
          Si f'_marque = non atteinte
          alors
            Q = Q ∪ {f'}; (4)
            (fk) = (fk) ∪ {f'} ;
            f'_marque = atteinte ;

        sinon
          a_état = vraie ;
          i(fk) = i(fk) ∪ {a}; b
          I(a) = I(a) ∪ {fk} \ {f} ; a
          Si f'_marque = non atteinte
          alors
            F = F ∪ {f'}; (4)
            f'_marque = atteinte ; (5)

        sinon
          si a_état = vraie
          alors I(a) = I(a) ∪ {fk} \ {f} ; a
            i(fk) = i(fk) ∪ {a}; b

      fin pour
      f_marque = traitée ;
    fin tant que Q ≠ ∅;
  Tant que PremierFile(F)_marque = traitée (6)
  faire SupprimePremier(F);
fin tant que F ≠ ∅;

```

Notes sur l'algorithme :

- (1) g_0 est la première face de la liste F.
- (2) f est la première face de la liste Q.
- (3) $\text{Card } I(a) = 2$, donc la d-face $f' = I(a) \setminus \{f\}$ est bien définie.
- (4) La face f' est mise à la queue de la file d'attente.
- (5) Une face "atteinte" est différente de "traitée", cela signifie qu'elle est mise en attente dans la file d'attente F ou Q, et que la composante connexe à laquelle elle appartient n'a toujours pas été explorée. Une face est dite "traitée" lorsque tous ses voisins sont atteints.
- (6) On dépile les éléments de F jusqu'à trouver un élément non traité.

Instructions supplémentaires au parcours du graphe :

- Le test (7) s'effectue par un produit scalaire d'un point $p(a)$ de a avec un vecteur.

En effet, pour déterminer si une 2-face a est incluse dans le demi-plan $\overline{H}(a)$ du faisceau de normales d'un triangle, il suffit de tester le signe de $\langle p(a), v \rangle$.

Où le demi-plan $\overline{H}(a)$ est défini par les deux vecteurs : η et v tels que

$$\overline{H}(a) = \{ x, \langle x, \eta \rangle = 0 \text{ et } \langle x, v \rangle > 0 \}.$$

- Le passage d'un sommet v à un sommet voisin du graphe, c'est à dire d'une 3-face f à une 3-face adjacente, se fait de la façon suivante. Soit g une sous-face de f , l'ensemble $I(g)$ des super-faces de g ne contient que deux faces : f et f' adjacentes. Donc la face voisine $f' = I(g) \setminus f$ est déterminée avec un coût constant (instruction (3)).

De plus, le parcours en largeur du graphe permet de consulter linéairement les listes des sous-faces (sans faire d'aller retour).

- La mise à jour des super-faces d'une 2-face a "vraie", se fait par l'instruction a avec un coût constant, car $\text{Card } (I(a)) = 2$.

- la construction de la liste des sous-faces de la nouvelle face f_k se fait en temps proportionnel aux nombres de sous-faces de f_k au fur et à mesure du parcours (instruction b).

Ainsi, ces intructions n'augmentent pas l'ordre de grandeur de la complexité du parcours du graphe d'adjacence des 3-faces de l'arrangement.

• *Algorithme de la deuxième étape*

Notations : Soit (H_1) et (H_2)

$I_{\text{valide}}(a) = \{f \in \mathcal{F}(a) / f_{\text{état}} = \text{vraie}\}$ et $I_{\text{fausse}}(a) = \{f \in \mathcal{F}(a) / f_{\text{état}} = \text{fausse}\}$

Algorithme : Soit g_0 un sommet valide de (H_1)

Pour $f \in \mathcal{F}_2(H)$ **faire** $f_{\text{marque}} = \text{non atteinte}$ **fin pour**;

Pour $f \in \mathcal{F}_1(H)$ **faire** $f_{\text{état}} = \text{fausse}$ **fin pour**;

$F = \{g_0\}$; $k = 0$;

Tant que $F \neq \emptyset$ **faire**

$f = \text{PrendPremierFile}(F)$; $Q = \{f\}$;

$k = k + 1$;

$i(f_k) = \emptyset$;

Tant que $Q \neq \emptyset$ { Visite de la même composante connexe }

$f = \text{PrendPremierFile}(Q)$; $(f_k) = (f)$;

Pour $s \in i(f)$ **faire**

Si $s_{\text{marque}} = \text{non atteinte}$

alors calculer $i_{\text{valide}}(s)$;

$s_{\text{marque}} = \text{atteinte}$;

Si $\text{Card}(I_{\text{valide}}(s)) > 0$ { Extension de l'état de s }

alors $s_{\text{état}} = \text{fausse}$;

$f' = \text{Pré}(s)$

$(f_k) = (f_k) \cup (f')$;

$Q = Q \cup \{f'\}$;

sinon $s_{\text{état}} = \text{vraie}$;

$I(s) = I(s) \cup \{f_k\} \setminus \{f\}$; (1)

$F = F \cup \{g \in I_{\text{valide}}(s) \setminus \{f\} \text{ et } g_{\text{état}} \neq \text{traitée}\}$; (3)

$i(f_k) = i(f_k) \cup \{s\}$;

sinon

si $s_{\text{état}} = \text{vrai}$ **alors** $I(s) = I(s) \cup \{f_k\} \setminus \{f\}$;

$i(f_k) = i(f_k) \cup \{s\}$;

fin pour s

Pour $g \in I(f_k)$ **faire** $i(g) = i(g) \setminus f$; (2)

$f_{\text{marque}} = \text{traitée}$;

fin tant que $Q \neq \emptyset$;

$I(f_k) = I(f)$; (3)

Pour $g \in I(f_k)$ **faire**

$i(g) = i(g) \cup \{f_k\}$;

Tant que $\text{PremierFile}(F)_{\text{marque}} = \text{traité}$

faire $\text{PrendPremierFile}(F)$;

fin tant que $F \neq \emptyset$;

Note :

(3) La face f_k a les mêmes sous-faces que les faces f de (f_k) . Les sous-faces $I(f)$ sont des faces (S_T) liées à la première face.

Instructions supplémentaires au parcours du graphe :

- Pour chaque 1-face s de (H_T) incidente à une 2-face valide, on construit $I_{valide}(s)$. Ceci se fait en temps proportionnel au nombre d'éléments de $I(s)$. Donc le coût total est majoré par $i_1(H_T)$, ce qui donne un coût en $O(p^2)$.

- Réaliser la mise à jour de super-faces des 1-faces valides par l'instruction (1). Il faut trouver le représentant de f dans la liste $I(s)$. Ceci se fait en temps constant car $\text{Card } I(s)$ est borné par une constante indépendante de p .

- Réaliser la mise à jour de sous-faces des 3-faces par l'instruction (2). Ceci se fait en temps constant grâce aux pointeurs ajoutés entre les listes de sous-faces et super-faces.

Donc ces instructions n'augmentent pas l'ordre de grandeur de la complexité du parcours des 2-faces valides.

Chapitre III

Application : Modélisation géométrique de la fabrication des mélanges

Introduction

Les sommes particulières de triangles étudiées dans ce chapitre apparaissent dans le contexte de la modélisation géométrique de la fabrication des mélanges.

La faisabilité d'un mélange se traduit par l'appartenance d'un point, représentation vectorielle du mélange, au convexe de mélange (zonotope).

Le problème de fabrication simultanée des mélanges se pose différemment : on connaît l'ensemble de mélanges à fabriquer M_1, \dots, M_n . Il s'agit de déterminer globalement s'ils peuvent être tous fabriqués. Ce problème est aussi appelé problème de coexistence de famille de vecteurs [C86]. La modélisation géométrique de ce problème introduite dans [Lac&Val93] généralise le convexe de mélange à celui de q -mélanges. Ces nouveaux ensembles résultent de la somme de q -simplexes dans un espace de dimension qn .

L'étude menée ici se limite aux convexes de 2-mélanges pour une représentation vectorielle des produits dans laquelle le plan joue un rôle central. La faisabilité se traduit par l'appartenance d'un point au convexe, ce qui nous conduit à rechercher les facettes de ce convexe, dans le but d'obtenir un système d'inégalités permettant d'établir la faisabilité des deux mélanges.

L'énumération des facettes se fait par une étude des différentes combinaisons possibles de somme d'arêtes et de triangles. On peut décrire les facettes du convexe de 2-mélanges à partir du premier diagramme projectif, comme pour les zonoèdres. Le nombre de facettes se comporte en $O(p^5)$ et cette borne peut être atteinte.

Pour le cas particulier où les vecteurs représentant les produits de base vérifient la sélectivité régulière, le nombre de facettes du convexe de 2-mélanges se comporte en $O(p^2)$. Dans ce cas, on montre que la faisabilité simultanée des mélanges M_1 et M_2 est équivalente à la faisabilité des mélanges M_1 , M_2 et $M_1 + M_2$, propriété qui est fautive en général.

Dans la dernière partie, on illustre par un exemple comment décrire les adjacences entre les facettes du convexe de 2-mélanges à partir du premier et deuxième diagramme projectif. Ceci pourrait permettre de proposer des algorithmes pour décider de la faisabilité des 2-mélanges.

1. Rappel de la modélisation géométrique de la fabrication d'un mélange

Dans le modèle géométrique de fabrication des mélanges introduit par P. Valeur dans [Val86], les produits sont représentés par des vecteurs de \mathbb{R}^n . Chaque dimension des composantes d'un vecteur correspond à une propriété du produit représenté, et l'espace est appelé espace des espèces. Ces propriétés doivent être additives et elles représentent les quantités de certains caractères physico-chimiques : volume, masse, quantité de soufre.

Définition 1 : Une propriété π d'un produit est dite *additive*, si le mélange de deux produits A et B , donne un produit C vérifiant :

$$\pi(C) = \pi(A) + \pi(B).$$

Si la masse des produits est une propriété additive, la densité d'un produit ou sa teneur en certaines substances ne le sont pas, dans ce cas il faut se ramener à une propriété additive. Par exemple, la masse volumique est remplacée par le volume.

Ainsi, si les propriétés sont additives et si on a N_1, N_2 et N_3 trois vecteurs de \mathbb{R}^n représentant chacun un produit, alors lorsqu'on mélange ces produits, en prenant une fraction α_i de chaque produit N_i , le mélange obtenu a pour représentation vectorielle :

$$M = \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \alpha_3 N_3.$$

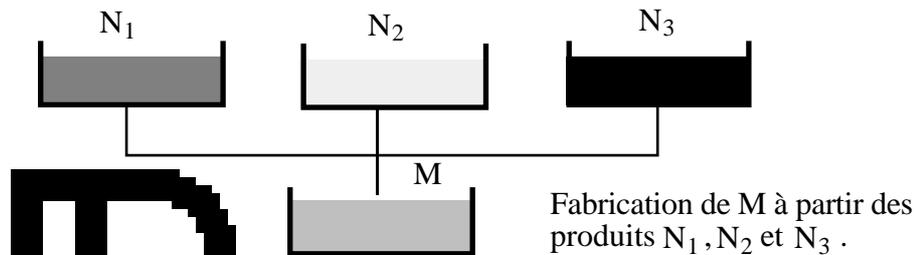


Figure 1.1 : Fabrication d'un mélange à partir d'un ensemble de produits de base.

Dans la suite, on dispose de p produits de base représentés par les vecteurs N_i de \mathbb{R}^n , $i = 1, \dots, p$.

Définition 2 : On dit qu'un produit M de \mathbb{R}^n est *fabrivable* à partir des produits de base si et seulement si

$$\exists \lambda_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, p \quad \text{tels que } M = \sum_{i=1}^p \lambda_i N_i.$$

On considère l'application G qui au vecteur $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ fait correspondre

$$G(\lambda) = \sum_{i=1}^p \lambda_i N_i,$$

le produit fabriqué. L'ensemble des mélanges faisables à partir des produits de base N_i est l'image du cube $[0,1]^p$ par G .

$$G([0,1]^p) = \sum_{i=1}^p [0,1] N_i \text{ est un zonotope.}$$

Cet ensemble est appelé *convexe de mélange* associé à la famille $\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$ et se note $Z\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$. Ceci entraîne la propriété suivante :

Propriété 1 : Le mélange $M \in \mathbb{R}^n$ est faisable à partir des produits de base si et seulement si M appartient à $Z\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$.

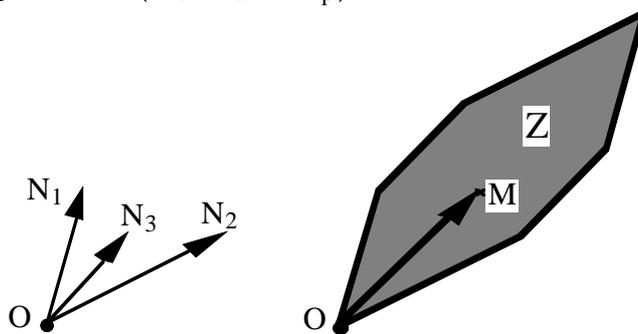


Figure 2 : Z convexe de mélange associé à N_1, N_2 et N_3 ; et M un mélange faisable.

Remarques :

Si le mélange M est faisable, alors en général le vecteur $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ qui donne le produit M n'est pas unique. On désigne par E_M l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}^p$ vérifiant $M = \sum_{i=1}^p \lambda_i N_i$, E_M est un sous espace affine de dimension au plus $p-n$. L'ensemble des solutions du problème de fabrication de M est l'intersection de E_M avec le cube $[0,1]^p$:

$$U_M = E_M \cap [0,1]^p.$$

Exemple : $n = 2$ et $p = 3$. U_M l'ensemble des λ solutions est en général l'intersection de $[0,1]^3$ avec une droite.

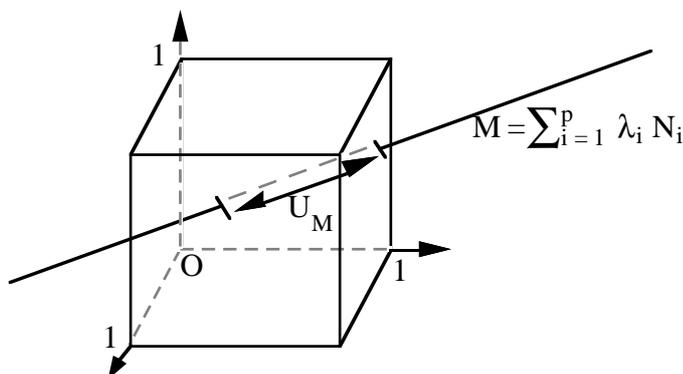


Figure 3 : U_M l'ensemble des λ solutions.

Choix optimal :

Le choix d'un vecteur λ parmi l'ensemble des solutions peut se faire par la prise en compte d'un critère à maximiser. Il s'agit en général d'un critère linéaire représentant un coût, ou d'un critère plus géométrique représentant le volume du zonotope résiduel. Si des fractions $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ des produits N_i ont été consommées pour la fabrication de M , alors le *zonotope résiduel* s'écrit

$$ZR(\lambda) = \sum_{i=1}^p (1 - \lambda_i) [0, N_i].$$

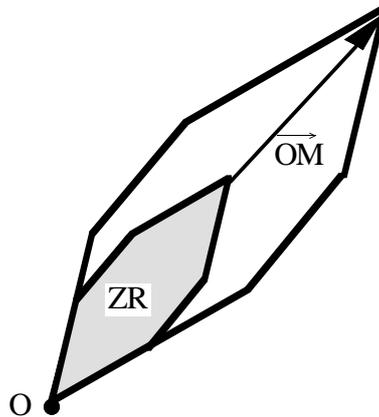


Figure 4 : ZR, le zonotope résiduel après fabrication de M .

Le critère du volume résiduel maximum, consiste à choisir dans U_M , le vecteur λ maximisant le volume du zonotope résiduel. Ce critère vise à élargir la gamme de produits faisables, après fabrication du mélange M .

On remarque que la faisabilité d'un second mélange M' après fabrication de M , est liée au choix du λ qui a permis de fabriquer M (c'est à dire, M' est faisable si et seulement si $M' \in ZR(\lambda)$).

2. Faisabilité de plusieurs mélanges

Ici, plutôt qu'une stratégie séquentielle de fabrication des mélanges, où la faisabilité d'un second mélange dépend du choix fait pour la fabrication d'un premier mélange ($\lambda \in U_M$), on regarde si globalement ces deux mélanges sont faisables. Ce problème est énoncé sous la forme plus générale de faisabilité simultanée de q mélanges M_1, M_2, \dots, M_q à partir des produits de base N_1, N_2, \dots, N_p , et est également appelé problème de *coexistence* de deux familles de vecteurs.

2.1 Fabrication simple de mélanges

Définition 3 : Soient $\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$ et $\{M_1, M_2, \dots, M_q\}$ deux familles de vecteurs de \mathbb{R}^2 .

On dit que la famille $\{M\}$ coexiste dans la famille $\{N\}$, si il existe q p -uplets $\lambda_k = (\lambda_k^1, \lambda_k^2, \dots, \lambda_k^p)$ $k = 1, \dots, q$

tels que :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad M_k = \sum_{j=1}^p \lambda_k^j N_j \quad k = 1, \dots, q, \\ (2) \quad 0 \leq \lambda_k^j (\leq 1) \quad j = 1, \dots, p \text{ et } k = 1, \dots, q, \\ (3) \quad \sum_{k=1}^q \lambda_k^j \leq 1 \quad j = 1, \dots, p. \end{array} \right.$$

2.2. Quelques résultats

Pour le zonotope résiduel on a les résultats suivants :

Propriété 2 [Sla86] : Soit $M \in \mathbb{R}^2$ un mélange faisable à partir des produits de base. Quel que soit $\lambda \in U_M$, on a :

$$ZR(\lambda) \subseteq Z \cap (Z - M).$$

Propriété 3 [Sla86] : Dans un espace des espèces de dimension 2, le zonotope de volume résiduel maximal est donné par $Z \cap (Z - M)$. En d'autres termes, il contient tous les zonotopes résiduels.

Une condition nécessaire de coexistence est donnée par la propriété suivante :

Propriété 4 [Lac&Val93] : Si la famille $\{M\}$ coexiste dans la famille $\{N\}$ et si le zonotope $Z\{M_1, M_2, \dots, M_q\}$ est contenu dans le zonotope $Z\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$

De plus, cette condition est une condition suffisante pour des vecteurs de

Corollaire 1 : La famille $\{M_1, M_2\}$ coexiste dans la famille $\{N\}$ de vecteurs si et seulement si M_1, M_2 et $M_1 + M_2$ sont faisables dans la famille $\{N\}$

Contre exemple dans

$$\text{Soient } N_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, N_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } N_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ les produits de base et}$$

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ les mélanges à fabriquer. M_1 , M_2 et $M_1 + M_2$ sont faisables et pourtant M_1 et M_2 ne sont pas faisables simultanément. En effet
 $M_1 = N_1 + N_3$, $M_2 = N_2 + N_3$ et
 $M_1 + M_2 = N_3 + N_4$.

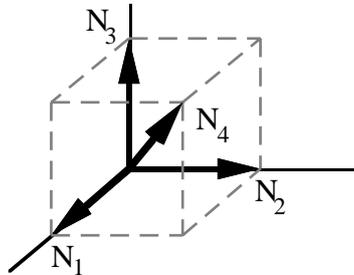


Figure 5 : Exemple d'une famille de quatre vecteurs.

3. Modélisation géométrique

La faisabilité simultanée des mélanges est modélisée géométriquement dans [Lac&Val93], en se plaçant dans un espace à dimensions finies. On définit :

On définit les vecteurs \tilde{N}_j^k de $\prod_{i=1}^q X_i$ pour $j = 1, \dots, p$ et $k = 1, \dots, q$ comme suit :

$$\tilde{N}_j^k = (X_1, X_2, \dots, X_q) \in \mathbb{R}^q \text{ où } X_i \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } X_i = N_j \text{ et } X_i = 0 \text{ si } i \neq k.$$

Ce qui donne :

$$\tilde{N}_j^1 = (N_j, 0, \dots, 0), \quad \tilde{N}_j^2 = (0, N_j, \dots, 0), \quad \dots, \quad \tilde{N}_j^q = (0, \dots, 0, N_j).$$

Soient $K_j, j = 1, \dots, p$, les q -simplexes définies par :

$$K_j = \left\{ X = \sum_{k=1, \dots, q} \lambda_j^k \tilde{N}_j^k \mid \lambda_j^k \in \mathbb{R}^+, \sum_{k=1, \dots, q} \lambda_j^k = 1, \lambda_j^k \geq 0, k=1, 2, \dots, q \right\}.$$

K_j est l'enveloppe convexe des points $\tilde{N}_j^1, \tilde{N}_j^2, \dots, \tilde{N}_j^q$.

Définition 4 : Soit $N = \{N_1, N_2, \dots, N_p\}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^q . On appelle *convexe de q -mélanges* associé à N le polyèdre défini par la somme de Minkowski des simplexes K_j . On note K ce polytope :

$$K = \sum_{j=1, \dots, p} K_j.$$

Propriété : Les mélanges M_1, \dots, M_q sont simultanément faisables (ou ensembles réalisables) dans la famille \mathcal{N} si et seulement si le point (M_1, M_2, \dots, M_q) appartient à K le convexe de q -mélanges associé à la famille \mathcal{N} .

Démonstration : Voir [Lac&Val93].

Ainsi le problème de coexistence se résout en déterminant l'appartenance du point (M_1, \dots, M_q) au convexe de q -mélanges K associé à la famille \mathcal{N} . Pour cela, nous utiliserons la représentation du polytope K sous forme d'intersection de demi-espaces. Pour cette raison, nous aborderons dans la suite à déterminer l'ensemble des facettes de K à partir d'un système d'inégalités, conditions nécessaires et suffisantes de coexistence.

Il est intéressant de noter que l'étude des convexes de q -mélanges.

L'étude est présentée dans [Lac&Val93] sur les convexes de 2-mélanges associés à une famille de vecteurs de \mathbb{R}^2 . Les résultats sont les suivants :

Théorème : Soit $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_p\}$ une famille de p vecteurs de \mathbb{R}^2 non nuls à deux colinéaires, une condition nécessaire pour qu'un vecteur non nul $X = (u, v)$, $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}$ soit normal à une B -face du convexe de 2-mélanges associé à \mathcal{N} , est qu'il existe $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ et N_j^\perp un vecteur non nul orthogonal à N_j , tels que l'on ait une des trois conditions suivantes :

- (i) $(u, v) = (N_j^\perp, 0)$,
- (ii) $(u, v) = (0, N_j^\perp)$,
- (iii) $(u, v) = (N_j^\perp, N_j^\perp)$.

Démonstration : cf. [Lac&Val93].

Remarque : A partir de ce théorème, on retrouve le résultat du chapitre 3.

4. Détermination des facettes d'un convexe de 2-mélanges

Soit K le convexe de 2-mélanges associé à la famille $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_p\}$ de vecteurs de \mathbb{R}^2 et la somme de Minkowski de triangles K_i dans \mathbb{R}^2 . Le but de ce paragraphe est de déterminer les facettes de K , et en particulier leurs normales et les valeurs de la fonction support dans ces directions.

4.1. Idée de base de l'énumération des facettes

Pour déterminer l'ensemble des facettes d'un convexe de 2-mélanges K , nous suivrons la méthode donnée dans [Lac&Val93] qui permet d'obtenir les directions des normales extérieures aux facettes de K . L'idée est la suivante:

Soient Q_i , $i = 1$ à p des polytopes dans \mathbb{R}^n . La liste de normale extérieure η de la somme des polytopes Q_i , s'écrit :

$$F\left(\sum_{i=1, \dots, p} Q_i, \eta\right) = \sum_{i=1, \dots, p} F(Q_i, \eta). \quad (\text{cf. chapitre I, propriété 5})$$

On voit que la dimension de $F\left(\sum_{i=1, \dots, p} Q_i, \eta\right)$, dépend de la dimension des termes $F(Q_i; \eta)$ de la somme, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dim F\left(\sum_{i=1, \dots, p} Q_i, \eta\right) &= \dim \left(\sum_{i=1, \dots, p} F(Q_i, \eta)\right) \\ &\leq \sum_{i=1, \dots, p} \dim F(Q_i, \eta) \\ &\leq \text{Min} \left(\sum_{i=1, \dots, p} \dim F(Q_i, \eta), n-1\right). \end{aligned}$$

D'où la remarque :

Si $F\left(\sum_{i=1, \dots, p} Q_i, \eta\right)$ est une facette de $\sum_{i=1, \dots, p} Q_i$, alors $\sum_{i=1, \dots, p} \dim F(Q_i, \eta) \geq n-1$.

Facettes d'un zonoèdre

Appliquons cette remarque aux facettes d'un zonoèdre.

Soient $N_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1$ à p , et soit Z le zonoèdre défini par :

$$Z = \sum_{i=1, \dots, p} [0, N_i].$$

Pour $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a

$$F(Z, \eta) = \sum_{i=1, \dots, p} F([0, N_i], \eta).$$

$$F([0, N_i], \eta) = \begin{cases} N_i & \text{si } \langle N_i, \eta \rangle > 0, \\ [0, N_i] & \text{si } \langle N_i, \eta \rangle = 0, \\ 0 & \text{si } \langle N_i, \eta \rangle < 0. \end{cases}$$

Si $F(Z, \eta)$ est une facette de Z , alors

$$\sum_{i=1, \dots, p} \dim F([0, N_i], \eta) \geq 2.$$

Or $\dim F([0, N_i], \eta) = 0$ ou 1 , donc au moins deux termes parmi les $F([0, N_i], \eta)$ ($i = 1, \dots, p$), sont de dimension 1. Supposons qu'il s'agit des termes d'indice j et k , alors η est orthogonal aux vecteurs N_j et N_k . Ce qui donne deux directions normales possibles :

$$-N_j \wedge N_k \text{ et } N_j \wedge N_k.$$

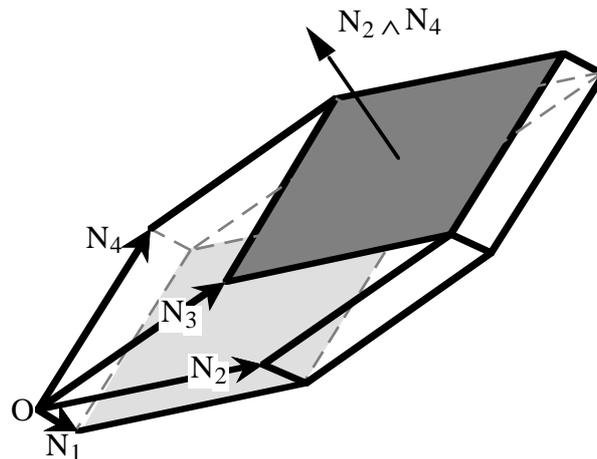


Figure 6 : Facettes du zonoèdre.

Ecrivons $F(Z, \cdot)$ pour ces deux directions :

$$F(Z, N_j \wedge N_k) = [0, N_j] + [0, N_k] + \sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ \langle N_j \wedge N_k, N_i \rangle > 0}} N_i + \sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ \langle N_j \wedge N_k, N_i \rangle < 0}} 0 + \sum_{\substack{i=1, \dots, p \text{ et } i \neq j, k \\ \langle N_j \wedge N_k, N_i \rangle = 0}} [0, N_i],$$

$$F(Z, N_k \wedge N_j) = [0, N_j] + [0, N_k] + \sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ \langle N_j \wedge N_k, N_i \rangle > 0}} 0 + \sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ \langle N_j \wedge N_k, N_i \rangle < 0}} N_i + \sum_{\substack{i=1, \dots, p \text{ et } i \neq j, k \\ \langle N_j \wedge N_k, N_i \rangle = 0}} [0, N_i].$$

Donc les vecteurs $N_j \wedge N_k$ et $N_k \wedge N_j$ sont des normales à des facettes de Z si et seulement si N_j et N_k ne sont pas colinéaires.

Et on remarque que ces deux facettes sont symétriques par rapport à $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p N_i$.

Propriété 6 : Un point M appartient à Z si et seulement si il vérifie les inégalités :

$$\text{pour tout } \{j, k\} \subset \{1, 2, \dots, p\}, 1 \leq j < k \leq p$$

$$\begin{cases} \langle M, N_k \wedge N_j \rangle \leq h(Z, N_k \wedge N_j), \\ \langle M, N_j \wedge N_k \rangle \leq h(Z, N_j \wedge N_k), \end{cases}$$

où $h(Z, \cdot)$ est la fonction support de Z .

Dans le premier diagramme projectif la face d'appui $F([0, N_k], N_i \wedge N_j)$ est donnée par la position du point P_k , associé vecteur N_k , par rapport à la droite passant

par les points P_i et P_j . En effet les déterminants $\det(\overrightarrow{P_iP_j}, \overrightarrow{P_iP_k})$ et $\det(N_i, N_j, N_k)$ ont même signe, d'où :

$$F([0, N_k], N_i \wedge N_j) = \begin{cases} N_k & \text{si } \det(\overrightarrow{P_iP_j}, \overrightarrow{P_iP_k}) > 0, \\ [0, N_k] & \text{si } \det(\overrightarrow{P_iP_j}, \overrightarrow{P_iP_k}) = 0, \\ 0 & \text{si } \det(\overrightarrow{P_iP_j}, \overrightarrow{P_iP_k}) < 0. \end{cases}$$

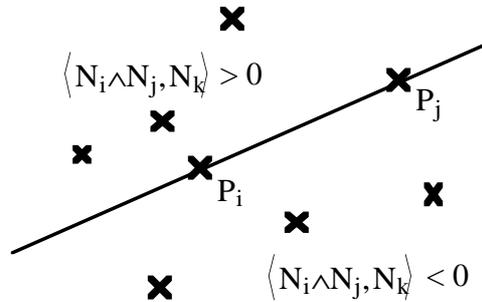


Figure 7 : Premier diagramme projectif de N .

Convexe de mélange :

La démarche consiste à énumérer toutes les façons d'obtenir une face F de K , c'est à dire une face de dimension $n-1$. Pour cela on cherche les directions u telles que la face $F(K_i, u)$ soit de dimension non nulle.

Quelles sont les directions u qui sont des faces de $F(K_i, u)$ de dimension non nulle ?

Rappelons que $F(K_i, u)$ est l'ensemble des points de K_i qui réalisent le maximum sur K_i de $\langle \cdot, u \rangle$.

Si on pose $y = \lambda_1 u + \lambda_2 v$ avec $u, v \in \mathbb{R}^n$ et si on écrit $y \in F(K_i)$ sous la forme :

$$y = (\lambda_1 N_i, \lambda_2 N_i) \text{ où } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1,$$

le maximum s'écrit

$$\text{MAX}_{y \in K_i} \langle y, \eta \rangle = \text{MAX}_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1}} (\lambda_1 \langle N_i, u \rangle + \lambda_2 \langle N_i, v \rangle).$$

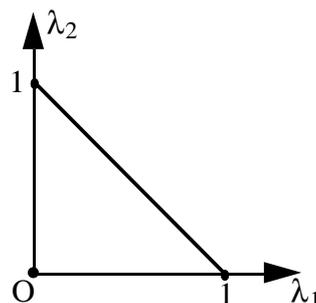


Figure 8 : Domaine de variation de (λ_1, λ_2) .

Quatre cas donnent lieu à des ensembles de solutions en (λ_1, λ_2) de dimension supérieure ou égale à un :

C₁: si $\langle N_i, u \rangle = \langle N_i, v \rangle = 0$ alors $F(K_i, \eta) = \mathbb{R}^2$,

C₂: si $\langle N_i, u \rangle = \langle N_i, v \rangle > 0$ alors $F(K_i, \eta) = \mathbb{R}^2$,

C₃: si $\langle N_i, u \rangle < 0$ et $\langle N_i, v \rangle = 0$ alors $F(K_i, \eta) = \mathbb{R}^2, \tilde{N}_i^1$,

C₄: si $\langle N_i, u \rangle = \langle N_i, v \rangle > 0$ alors $F(K_i, \eta) = \mathbb{R}^2, \tilde{N}_i^1, \tilde{N}_i^2$

sinon $F(K_i, \eta)$ est un des sommets du triangle K_i .

4.2. Enumération des facettes

Dans la première partie, l'énumération des cas donne les directions des normales aux facettes de K . Dans la seconde partie, on obtient l'expression des facettes et les valeurs de la fonction support dans ces directions.

- **Enumération des cas**

Etant donnée l'expression d'une face e de K , de normale $\eta \in \mathbb{R}^2$

$$F(K, \eta) = \sum_{i=1}^3 F(K_i, \eta) \quad (\text{Somme de Minkowski}), \quad (1)$$

une condition nécessaire pour que $\mathbb{1}(K, \eta)$ soit une facette de K , c'est à dire une face de dimension 5, est que la somme (1) comporte :

soit deux termes de dimension 2 (i.e. deux triangles) et un terme (au moins) de dimension 1 (i.e. une arête),

soit un terme de dimension 2 et deux termes de dimension 1,

soit cinq termes de dimension 1.

Dans la suite, on notera

- C_{1i}, la cone appliquée à leur

- Int, l'intérieur

- Pos(η), l'enveloppe convexe d'un ensemble de vecteurs η est à

$$\text{Pos}(\eta) = \left\{ \sum_{v \in \eta} \lambda v \mid \lambda \geq 0 \text{ pour tout } v \in \eta \right\}$$

- Lin(η), le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs η est à

$$\text{Lin}(\eta) = \left\{ \sum_{v \in \eta} \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R} \text{ pour tout } v \in \eta \right\}$$

Rappelons que $\tilde{N}_i^1 = (N_i, 0)$ et $\tilde{N}_i^2 = (0, N_i)$.

Lorsqu'on ne le précise pas, les vecteurs de $N = \{N_1, \dots, N_p\}$ sont supposés être en position générale, c'est à dire, tout triplet de vecteurs de N engend

A- Facettes obtenues à partir de la somme de 2 triangles et au moins une arête :

Pour avoir dans la somme (1), deux termes qui soient des triangles, on impose au vecteur (u,v) deux conditions du type (C_1) :

$$(C_{1i}) : \quad \langle u, N_i \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_i \rangle = 0,$$

$$(C_{1j}) : \quad \langle u, N_j \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_j \rangle = 0, \quad \text{avec } i \neq j.$$

D'où on peut déduire que u et v s'écrivent sous la forme :

$$u = \alpha N_i \wedge N_j \quad \text{et} \quad v = \beta N_i \wedge N_j, \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des réels.}$$

Pour atteindre la dimension 5, on ajoute une condition pour qu'un autre terme de la somme (1) soit une arête. Par exemple une arête du triangle K_k (avec $k \neq i, k \neq j$):

- s'il s'agit de l'arête $[0, \tilde{N}_k^2]$, on aura

$$(C_{3k}) : \quad \langle u, N_k \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_k \rangle = 0, \quad \text{qui donnent} \quad \begin{cases} \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle < 0, \\ v = 0, \end{cases}$$

- s'il s'agit de l'arête $[0, \tilde{N}_k^1]$, on aura

$$(C_{2k}) : \quad \langle u, N_k \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_k \rangle < 0, \quad \text{qui entraînent} \quad \begin{cases} u = 0, \\ \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle < 0, \end{cases}$$

- et s'il s'agit de l'arête $[\tilde{N}_k^1, \tilde{N}_k^2]$, on aura

$$(C_{4k}) : \quad \langle u, N_k \rangle = \langle v, N_k \rangle > 0,$$

d'où

$$u = v = \alpha \cdot N_i \wedge N_j \quad \text{avec } \alpha \text{ du signe de } \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle$$

Conclusion A : Soient N_i et N_j deux vecteurs de \mathbb{N} , avec $i \neq j$. Les vecteurs

$$n_1 = (N_j \wedge N_i, 0), \quad n_2 = (0, N_j \wedge N_i) \quad \text{et} \quad n_3 = (N_i \wedge N_j, N_i \wedge N_j),$$

sont des normales extérieures aux facettes du convexe de 2-mélanges K , si et seulement si, il existe $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que $\langle N_k, N_i \wedge N_j \rangle > 0$.

De même les vecteurs

$$n_4 = (N_i \wedge N_j, 0), \quad n_5 = (0, N_i \wedge N_j) \quad \text{et} \quad n_6 = (N_j \wedge N_i, N_j \wedge N_i),$$

sont des normales extérieures aux facettes du convexe de 2-mélanges K , si et seulement si, il existe $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que $\langle N_k, N_i \wedge N_j \rangle < 0$.

B- Facettes obtenues à partir de la somme de 1 triangle et 3 arêtes :

Pour avoir un triangle dans (1), le vecteur (u,v) doit vérifier une condition du type (C_1) ,

$$(C_{1i}) : \quad \langle u, N_i \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_i \rangle = 0.$$

Il faut alors au moins 3 arêtes pour obtenir la dimension 5.

Quels sont les choix de 3 arêtes qui permettent d'obtenir une facette ?

- Si on choisit 2 arêtes $[0, \tilde{N}_j^1]$ et $[0, \tilde{N}_k^1]$, le vecteur (u, v) doit vérifier en plus de (C_1i) , deux conditions (C_2) :

$$(C_{2j}): \quad \langle u, N_j \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_j \rangle < 0,$$

$$(C_{2k}): \quad \langle u, N_k \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_k \rangle < 0.$$

Ce qui entraîne $u = 0$ et rend les conditions de type (C_3) et (C_4) irréalisables pour le vecteur (u, v) . Or une troisième condition (C_{2l}) ne permet pas d'obtenir la dimension 5. En effet la dimension de la somme de Minkowski $K_i + [0, \tilde{N}_j^1] + [0, \tilde{N}_k^1] + [0, \tilde{N}_l^1]$ est égale à 4, car les vecteurs $(N_j, 0)$, $(0, N_j)$, $(N_k, 0)$ et $(N_l, 0)$ engendrent un espace de dimension 4.

- De la même façon, on remarque que si le vecteur (u, v) vérifie en plus de (C_1i) , les conditions (C_{3j}) et (C_{3k}) , alors $v = 0$. Et quelque soit la troisième arête choisie, on n'obtient pas de normale à une 5-face du convexe de 2-mélanges.

- Si on choisit 2 arêtes $[\tilde{N}_j^1, \tilde{N}_j^2]$ et $[\tilde{N}_k^1, \tilde{N}_k^2]$, les conditions (C_{4j}) et (C_{4k}) sur le vecteur (u, v) entraînent : $u = v$, et alors les conditions (C_2) et (C_3) ne peuvent être vérifiées par le vecteur (u, u) . Et comme précédemment une troisième arête du même type : $[\tilde{N}_l^1, \tilde{N}_l^2]$ ne donne pas une somme de dimension 5.

Finalement, il est impossible d'ajouter deux arêtes de même type, donc la seule combinaison restante est de prendre une arête de chaque type : $[0, \tilde{N}_j^1]$, $[0, \tilde{N}_k^2]$, $[\tilde{N}_l^1, \tilde{N}_l^2]$. Ce choix donne les conditions suivantes sur le vecteur (u, v) :

$$(C_{2j}): \quad \langle u, N_j \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_j \rangle < 0,$$

$$(C_{3k}): \quad \langle u, N_k \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_k \rangle = 0,$$

d'où on peut déduire que u et v sont de la forme :

$$u = \alpha N_i \wedge N_j \quad \text{et} \quad v = \beta N_i \wedge N_k, \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des réels;}$$

$$\text{et } (C_{4l}): \quad \langle u, N_l \rangle = \langle v, N_l \rangle > 0,$$

donne la relation :

$$\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_l \rangle = \beta \langle N_i \wedge N_k, N_l \rangle > 0 \quad (a)$$

entre α et β .

Les conditions sur les signes sont :

$$\langle u, N_k \rangle < 0, \quad \langle u, N_l \rangle > 0, \quad \langle v, N_j \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_l \rangle > 0,$$

et remplaçant u et v par leurs valeurs on a,

pour α :

$$\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_l \rangle > 0, \quad (s1)$$

et pour β :

$$\beta \langle N_i \wedge N_k, N_j \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \beta \langle N_i \wedge N_k, N_l \rangle > 0. \quad (s2)$$

Or un tel α existe si et seulement si

$$\langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_l \rangle < 0, \quad (p1)$$

et un tel β existe si et seulement si

$$\langle N_i \wedge N_k, N_j \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_k, N_l \rangle < 0. \quad (p2)$$

S'il existe α et β vérifiant les conditions (s1) et (s2), alors la direction normale (u,v) est bien définie, car la proportion entre α et β est donnée par (a), et leur signe par (s1) et (s2). Ainsi (u,v) est orthogonal à une 5-face de K .

Géométriquement la condition (p1) signifie que N_k et N_l sont de part et d'autre du plan engendré par les vecteurs N_i et N_j , et la condition (p2) que N_j et N_l sont de part et d'autre du plan engendré par les vecteurs N_i et N_k .

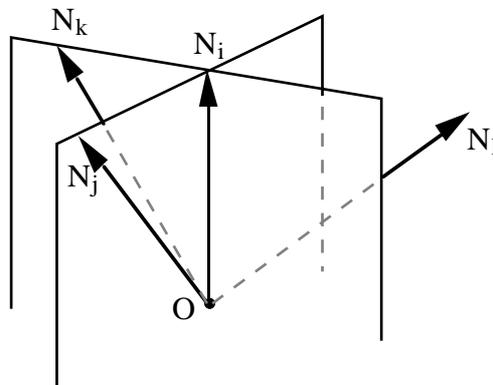


Figure 9 : Configuration des vecteurs N_i, N_j, N_k et N_l .

Conclusion B : Soient N_i, N_j, N_k et N_l quatre vecteurs distincts de N . Les vecteurs

$$n_1 = \left(\alpha \cdot N_i \wedge N_j, \beta \cdot N_i \wedge N_k \right) \text{ et } n_2 = \left(\beta \cdot N_i \wedge N_k, \alpha \cdot N_i \wedge N_j \right),$$

où les réels α et β vérifient les conditions (s1), (s2) et (a), sont des normales extérieures à des facettes du convexe de 2-mélanges K , si et seulement si,

les vecteurs N_i, N_j, N_k et N_l vérifient (p1) et (p2).

En effectuant une permutation circulaire sur les indices j, k et l , dans les relations (s1), (s2) et (a), et dans les expressions de n_1, n_2 , on obtient deux autres couples de normales à des facettes de K .

C- Facettes obtenues à partir de la somme de 5 arêtes :

Si on prend 3 arêtes de même type :

Le vecteur (u,v) vérifie trois conditions (C_2) , donc u est nul et les conditions du type (C_3) et (C_4) ne peuvent plus être vérifiées. De même si on impose 3 conditions du type (C_3) , la nullité de v ne permet pas de vérifier les conditions du type (C_2) et (C_4) . Et le choix de 3 conditions du type (C_4) , entraîne l'égalité de u et v qui contredit des conditions de type (C_2) et (C_3) .

Et si on prend plus de trois arêtes du même type, la dimension de la somme de ces arêtes reste 3. Finalement, on ne peut pas prendre plus de 3 arêtes du même type pour obtenir une 5-face de K .

Donc il faut choisir 5 arêtes parmi les trois types d'arêtes, avec au plus deux arêtes de même type. Donc la seule combinaison restante est celle de 2 arêtes d'un type, puis 2 d'un autre type et la cinquième du type restant.

1) Si on commence par les 2 conditions (C_{2i}) et (C_{2j}) , on obtient :

u est de la forme $u = \alpha N_i \wedge N_j$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
 et v vérifie les inégalités $\langle N_i, v \rangle < 0$ et $\langle N_j, v \rangle < 0$.

a- Soit on ajoute 2 conditions (C_{3k}) et (C_{3l}) et on a
 u vérifie les inégalités $\langle N_k, u \rangle < 0$ et $\langle N_l, u \rangle < 0$,
 et v s'écrit $v = \beta N_k \wedge N_l$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

il ne reste alors que le choix d'une condition de type (C_{4m}) qui donne

$$\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle = \beta \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle \tag{a1}$$

b- Soit on ajoute 2 conditions (C_{4k}) et (C_{4l}) , ce qui entraîne $v - u$ orthogonal à N_k et N_l , et s'écrit :

$$v - u = \beta N_k \wedge N_l, \text{ où } \beta \in \mathbb{R}$$

et les inégalités $\langle N_k, u \rangle > 0$ et $\langle N_l, u \rangle > 0$,
 $\langle N_k, v \rangle > 0$ et $\langle N_l, v \rangle > 0$.

Il ne reste qu'un cas possible (C_{3m}) , on obtient

$$\langle v, N_m \rangle = \beta \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle + \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle = 0, \tag{e1}$$

$$\text{et } \langle u, N_m \rangle = \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle < 0, \tag{i1}$$

puis (e1) et (i1) entraînent $\beta \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle > 0$.

Notons que si à la place de $u = \alpha N_i \wedge N_j$, on pose $u = -\alpha N_i \wedge N_j$, on aura la même relation (a1) entre α et β que dans 1) a- et les mêmes inégalités relatives à α .

2) Reste une dernière combinaison pour obtenir une 5-face avec la somme de 5 arêtes, il s'agit d'avoir dans (1) des termes $[0, \tilde{N}_i^2]$, $[0, \tilde{N}_j^2]$, $[N_k^1, \tilde{N}_k^2]$, $[N_l^1, \tilde{N}_l^2]$ et $[0, \tilde{N}_m^1]$. Ceci donne les conditions suivantes sur le vecteur (u, v) :

- (C_{3i}) et (C_{3j}) qui impliquent

u vérifie les inégalités $\langle N_i, u \rangle < 0$ et $\langle N_j, u \rangle < 0$

et v est de la forme $v = -\alpha N_i \wedge N_j$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

- puis (C_{4k}) et (C_{4l}) qui donnent

$$-\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle = \langle u, N_k \rangle > 0, \tag{i2}$$

$$-\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_l \rangle = \langle u, N_l \rangle > 0, \tag{i3}$$

et $u - v$ est de la forme $\beta N_k \wedge N_l$ ($\beta \in \mathbb{R}$)

- et finalement (C_{2m})

$$\beta \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle - \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle = 0, \tag{e2}$$

$$-\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle < 0, \tag{i4}$$

qui entraînent $\beta \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle > 0$.

Dans les trois cas, la proportion entre α et β est donnée par (a1), c'est à dire :

$$\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle = \beta \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle,$$

et les conditions sur les signes de α et β sont :

$$\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle < 0, \quad \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_l \rangle < 0 \text{ et } \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle > 0, \tag{a2}$$

et

$$\beta \langle N_k \wedge N_l, N_i \rangle < 0, \quad \beta \langle N_k \wedge N_l, N_j \rangle < 0 \text{ et } \beta \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle > 0. \tag{a3}$$

Or, il existe un réel α vérifiant les inégalités de (a2) si et seulement si :

$$\langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_l \rangle > 0 \text{ et } \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle > 0. \tag{pa1}$$

Ce qui signifie que le plan engendré par les vecteurs N_i et N_j partage le demi-espace en deux demi-espaces ouverts, l'un contenant les vecteurs N_k et N_l et l'autre le vecteur N_m .

De même, il existe un réel β vérifiant les inégalités de (a3) si et seulement si :

$$\langle N_k \wedge N_l, N_i \rangle \cdot \langle N_k \wedge N_l, N_j \rangle > 0 \text{ et } \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle \cdot \langle N_k \wedge N_l, N_i \rangle < 0. \tag{pa2}$$

Ici, le plan engendré par les vecteurs N_k et N_l partage le demi-espace en deux demi-espaces ouverts, l'un contenant les vecteurs N_i et N_j et l'autre le vecteur N_m .

Les conditions (pa1) et (pa2) portent sur les positions relatives entre les vecteurs N_i, N_j, N_k, N_l et N_m .

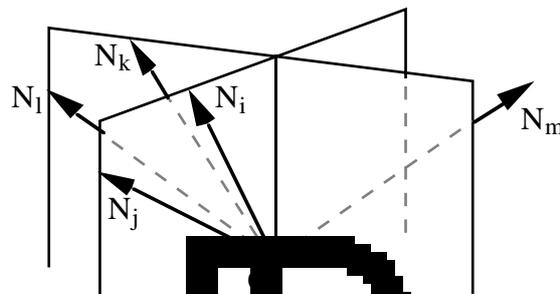


Figure 10 : Configuration des vecteurs N_i, N_j, N_k, N_l et N_m .

La direction normale η est bien déterminée dans les deux cas :

dans **1) a-** par :

$$\eta \in \text{span}(\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l),$$

dans **1) b-** par :

$$\eta \in \text{span}(-\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j),$$

et dans **2)** par :

$$\eta \in \text{span}(\beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j, -\alpha N_i \wedge N_j).$$

Conclusion C : Soient N_i, N_j, N_k, N_l et N_m cinq vecteurs distincts de N . Les vecteurs

$$\begin{aligned} n_1 &= (\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l), \\ n_2 &= (-\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j) \text{ et} \\ n_3 &= (\beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j, -\alpha N_i \wedge N_j), \end{aligned}$$

où α et β vérifient les conditions (a1), (a2) et (a3), sont des normales extérieures aux facettes du convexe de 2-mélanges K , si et seulement si,

$$N_i, N_j, N_k, N_l \text{ et } N_m \text{ vérifient (pa1) et (pa2).}$$

Ceci finit l'énumération des cas.

- **Descriptions des facettes et calcul des valeurs de la fonction support**

Maintenant, reprenons un par un les cas, en précisant pour chacun d'eux l'expression des facettes correspondantes et la valeur de la fonction support.

- Faces du cas A :

Considérons la normale

$$n_1 = (N_j \wedge N_i, 0).$$

Que valent les termes $F(K_r, n_1)$ de la somme (1), pour $r = 1$ à p et $r \neq i, j$ et k ? On connaît les termes $F(K_r, n_1)$ pour $r = i, j$ et k , ils sont respectivement égaux à K_i, K_j et $[0, \tilde{N}_k^2]$.

Pour $r \neq i, j$ et k :

$$\begin{aligned} F(K_r, n_1) &= \left\{ P \in K_r, \langle P, \eta \rangle = \max_{Q \in K_r} \langle Q, \eta \rangle \right\}, \\ &= \left\{ P \in K_r ; \langle P, \eta \rangle = \max_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1} \lambda_1 \langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle \right\}, \end{aligned}$$

dépend du signe de $\langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle$.

Si comme pour N_k , on a

$$\langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle < 0, \text{ alors } F(K_r, n_1) = [0, \tilde{N}_r^2],$$

par contre si $\langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle > 0$, alors

$$F(K_r, n_1) = \{\tilde{N}_r^1\},$$

et enfin si on a un vecteur N_r linéairement dépendant de N_i et N_j , la face d'appui est

$$F(K_r, n_1) = K_r.$$

Pour chaque couple d'indice (i, j) de $I = \{1, \dots, p\}$, notons $I^+(i, j)$, $I^0(i, j)$ et $I^-(i, j)$ les sous ensembles formant une partition de I et définis par :

$$\begin{aligned} I^+(i, j) &= \left\{ r, r = 1, \dots, p \mid \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle > 0 \right\}, \\ I^0(i, j) &= \left\{ r, r = 1, \dots, p \mid \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle = 0 \right\}, \\ I^-(i, j) &= \left\{ r, r = 1, \dots, p \mid \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle < 0 \right\}. \end{aligned}$$

En fait, $F(K ; n_1)$ est de dimension 5 si il existe au moins un r ($r \neq i, j$) tel que $\langle N_j \wedge N_i, N_r \rangle < 0$, c'est le cas ici car $k \in I^+(i, j)$. Il en est de même pour $n_2 = (0, N_j \wedge N_i)$ et $n_3 = (N_i \wedge N_j, N_i \wedge N_j)$.

De même si il existe $r \in \{1, \dots, p\}$, tel que $r \in I^-(i, j)$, les vecteurs

$$n_4 = (N_i \wedge N_j, 0), n_5 = (0, N_i \wedge N_j) \text{ et } n_6 = (N_j \wedge N_i, N_j \wedge N_i)$$

sont les normales extérieures à des facettes de K .

Conclusion A : Soient N_i et N_j deux vecteurs de \mathbb{N} , avec $i \neq j$. L'ensemble $I^+(i, j) \neq \emptyset$, si et seulement si, les vecteurs

$$n_1 = (N_j \wedge N_i, 0), n_2 = (0, N_j \wedge N_i) \text{ et } n_3 = (N_i \wedge N_j, N_i \wedge N_j),$$

sont des normales extérieures aux facettes du convexe de 2-mélanges K , qui s'écrivent respectivement :

$$F(K, n_1) = \sum_{r \in I^+(i, j)} [0, \tilde{N}_r^2] + \sum_{r \in I^0(i, j)} K_r + \sum_{r \in I^-(i, j)} \{\tilde{N}_r^1\},$$

$$F(K, n_2) = \sum_{r \in I^+(i, j)} [0, \tilde{N}_r^1] + \sum_{r \in I^0(i, j)} K_r + \sum_{r \in I^-(i, j)} \{\tilde{N}_r^2\},$$

$$F(K, n_3) = \sum_{r \in I^+(i, j)} [\tilde{N}_r^1, \tilde{N}_r^2] + \sum_{r \in I^0(i, j)} K_r + \sum_{r \in I^-(i, j)} \{0\}.$$

De même l'ensemble $I^-(i, j) \neq \emptyset$, si et seulement si, les vecteurs

$$n_4 = (N_i \wedge N_j, 0), n_5 = (0, N_i \wedge N_j) \text{ et } n_6 = (N_j \wedge N_i, N_j \wedge N_i)$$

sont des normales extérieures aux facettes du convexe de 2-mélanges K , qu'on obtient en échangeant dans les expressions ci-dessus les rôles de $I^+(i, j)$ et de $I^-(i, j)$.

De plus, on remarque que la fonction support de K vérifie:

$$h(K, n_1) = h(K, n_2) = h(K, n_6) = \sum_{r \in I^-(i, j)} \langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle,$$

$$h(K, n_4) = h(K, n_5) = h(K, n_3) = \sum_{r \in I^+(i, j)} \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle.$$

En effet, la fonction support s'écrit :

$$\begin{aligned} h(K, n_1) &= \langle x, n_1 \rangle \text{ quelque soit } x \in F(K, n_1) \\ &= \sum_{r \in I^-(i, j)} \langle \tilde{N}_r^1, n_1 \rangle, \text{ car les autres termes } F(K, n_1) \text{ contiennent l'origine} \\ &= \sum_{r \in I^-(i, j)} \langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(K, n_2) &= \sum_{r \in I(i,j)} \langle \tilde{N}_r^2, n_2 \rangle \\
 &= \sum_{r \in I(i,j)} \langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle, \text{ on retrouve la même valeur que pour } h(K, n_1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(K, n_6) &= \sum_{r \in I(i,j)} \langle \alpha \tilde{N}_r^1 + (1 - \alpha) \tilde{N}_r^2, n_6 \rangle = \sum_{r \in I(i,j)} \langle \tilde{N}_r^1, n_6 \rangle + \sum_{r \in I(i,j)} \langle \tilde{N}_r^2, n_6 \rangle \\
 &= \sum_{r \in I(i,j)} \langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle.
 \end{aligned}$$

Remarques :

1- La condition $I^+(i,j) \neq \emptyset$ d'existence dans K des facettes $F(K, n_1)$, $F(K, n_2)$ et $F(K, n_3)$, traduit le fait que le demi espace ouvert $H_{i,j} = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, N_i \wedge N_j \rangle > 0 \}$ contient au moins un point N_r de N . Dans le premier diagramme projectif, cette condition se traduit de la façon suivante :

Si on note d_{ij} la droite orientée passant par les points P_i et P_j (images de N_i et N_j dans le P.D.P.), de direction $\overrightarrow{P_i P_j}$, alors d_{ij}^+ le demi plan ouvert à gauche de d_{ij} (si $x \in H_{i,j}^+$, alors son image dans le P.D.P. est dans d_{ij}^+) contient au moins un point P_r , $1 \leq r \leq p$.

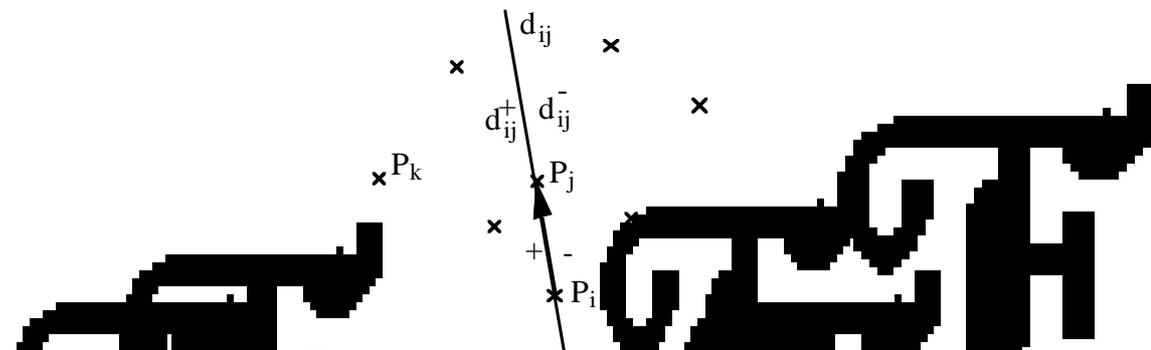


Figure 1 : Premier diagramme projectif de N .

2- Chaque couple (N_i, N_j) de vecteurs de N tel que $\text{Pos}(N_i, N_j)$ coupe l'intérieur de $\text{Pos}(N)$ donne 6 facettes de K . Pour tous les couples (N_i, N_j) de vecteurs de N , tels que $\text{Pos}(N_i, N_j) \cap \text{Int}(\text{Pos}(N)) \neq \emptyset$, la frontière de $\text{Pos}(N)$ génère 3 facettes de K .

Exemple :

$\text{Pos}(N_1, N_2)$ sur la frontière de $\text{Pos}(N)$: $I^+(1,2) = \emptyset \rightarrow 3$ facettes.
 $\text{Pos}(N_3, N_4) \cap \text{Int}(\text{Pos}(N)) \neq \emptyset$: $I^+(3,4) \neq \emptyset$ et $I(3,4) \neq \emptyset \rightarrow 6$ facettes.

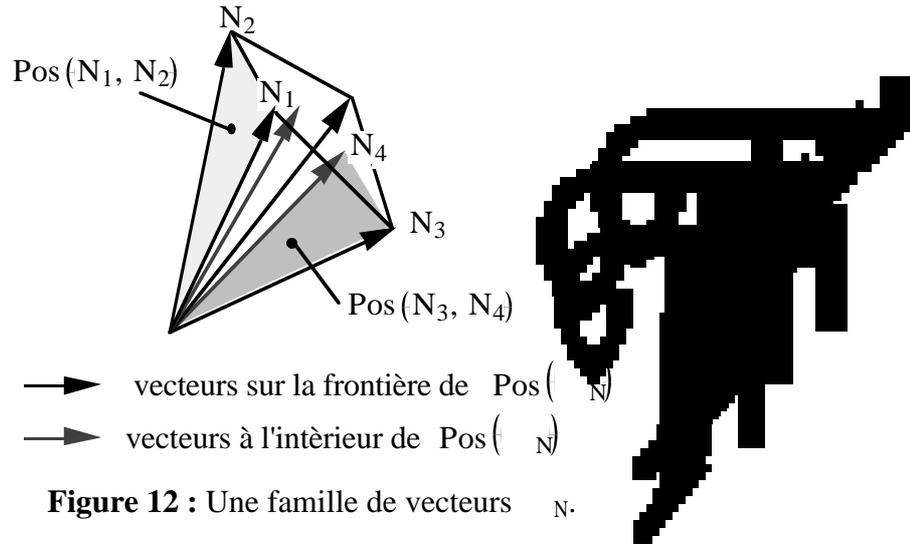


Figure 12 : Une famille de vecteurs N .

- Faces du c

Valeurs des termes $\langle K_r, n_1 \rangle$ pour $r \neq i, j, k$ et l .

$$F(K_r, n_1) = \left\{ P \in \mathbb{R}^n \mid \text{MAX}_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1} \lambda_1 \alpha \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle + \lambda_2 \beta \langle N_r, N_i \wedge N_k \rangle \right\}$$

$$C_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle N_i \wedge N_j, x \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle > 0 \text{ et } \langle N_i \wedge N_k, x \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_k, N_j \rangle > 0 \right\},$$

$$N_r \in C_1 \Rightarrow \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle < 0 \text{ et } \beta \langle N_i \wedge N_k, N_r \rangle < 0,$$

$$\Rightarrow F(K_r, n_1) = F(K_r, n_2) = (0, 0).$$

$$C_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle N_i \wedge N_j, x \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle > 0 \text{ et } \langle N_i \wedge N_k, x \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_k, N_j \rangle > 0 \right\},$$

$$N_r \in C_2 \Rightarrow \beta \langle N_i \wedge N_k, N_r \rangle > 0 \text{ et } \beta \langle N_i \wedge N_k, N_r \rangle > \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle,$$

$$\Rightarrow F(K_r, n_1) = \{\tilde{N}_r^2\} \text{ et } F(K_r, n_2) = \{\tilde{N}_r^1\}.$$

$$C_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle N_i \wedge N_j, x \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle > 0 \text{ et } \langle N_i \wedge N_k, x \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_k, N_j \rangle > 0 \right\},$$

$$N_r \in C_3 \Rightarrow \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle > 0 \text{ et } \beta \langle N_i \wedge N_k, N_r \rangle < \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle,$$

$$\Rightarrow F(K_r, n_1) = \{\tilde{N}_r^1\} \text{ et } F(K_r, n_2) = \{\tilde{N}_r^2\}.$$

Cas dégénérés : N_r appartient à l'un des demi plans séparant les cellules C_1, C_2 et C_3 .

$$N_r \text{ linéairement dépendant de } N_i \text{ et } N_k \text{ et } \langle N_i \wedge N_k, N_i \wedge N_r \rangle > 0$$

$$\Leftrightarrow N_r \in \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \setminus \{\mu N_i; \mu > 0\}$$

$$\Rightarrow F(K_r, n_1) = [0, \tilde{N}_r^2] \text{ et } F(K_r, n_2) = [0, \tilde{N}_r^1].$$

$$N_r \text{ linéairement dépendant de } N_i \text{ et } N_j \text{ et } \langle N_i \wedge N_j, N_i \wedge N_r \rangle > 0$$

$$\Leftrightarrow N_r \in \overline{C_1} \cap \overline{C_3} \setminus \{\mu N_i; \mu > 0\}$$

$$\Rightarrow F(K_r, n_1) = [0, \tilde{N}_r^1] \text{ et } F(K_r, n_2) = [0, \tilde{N}_r^2].$$

N_r linéairement dépendant de N_i et N_l et $\langle N_i \wedge N_l, N_i \wedge N_r \rangle > 0$

$$\Leftrightarrow N_r \in \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \setminus \{ \mu N_i; \mu > 0 \}$$

$$\Rightarrow F(K_r, n_1) = F(K_r, n_2) = [\tilde{N}_r^1, \tilde{N}_r^2].$$

C'_1, C'_2 et C'_3 sont les images respectives des ensembles C_1, C_2 et C_3 dans le premier diagramme projectif :

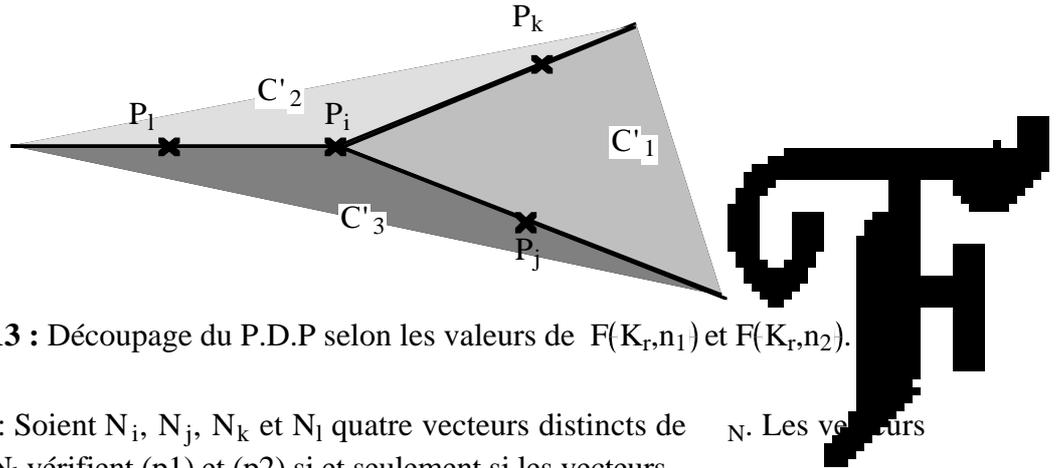


Figure 13 : Découpage du P.D.P selon les valeurs de $F(K_r, n_1)$ et $F(K_r, n_2)$.

Conclusion B : Soient N_i, N_j, N_k et N_l quatre vecteurs distincts de N . Les vecteurs N_i, N_j, N_k et N_l vérifient (p1) et (p2) si et seulement si les vecteurs

$$n_1 = (\alpha.N_i \wedge N_j, \beta.N_i \wedge N_k) \text{ et } n_2 = (\beta.N_i \wedge N_k, \alpha.N_i \wedge N_j),$$

où les réels α et β vérifient les conditions (s1), (s2) et (a), sont des normales extérieures à des facettes du convexe de 2-mélanges K , qui s'écrivent :

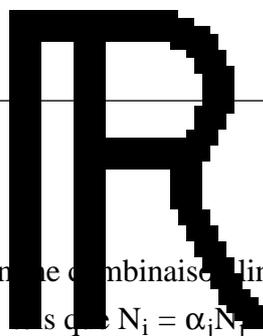
$$F(K, n_1) = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ N_r \in C_1}} 0 + \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ N_r \in C_2}} \tilde{N}_r^2 + \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ N_r \in C_3}} \tilde{N}_r^1 + K_i + [\tilde{N}_i^1, \tilde{N}_i^2] + [0, \tilde{N}_j^1] + [0, \tilde{N}_k^2]$$

$$F(K, n_2) = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ N_r \in C_1}} 0 + \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ N_r \in C_2}} \tilde{N}_r^1 + \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ N_r \in C_3}} \tilde{N}_r^2 + K_i + [\tilde{N}_i^1, \tilde{N}_i^2] + [0, \tilde{N}_j^2] + [0, \tilde{N}_k^1]$$

La fonction support de K prend la même valeur pour n_1 et n_2 :

$$\begin{aligned} h(K, n_1) &= h(K, n_2) \\ &= \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ N_r \in C_2}} \beta \langle N_i \wedge N_k, N_r \rangle + \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ N_r \in C_3}} \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle + \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_l \rangle. \end{aligned}$$

En effectuant une permutation circulaire sur les indices j, k et l , dans les relations (s1), (s2) et (a), et dans les expressions de $n_1, n_2, F(K, n_1)$ et $F(K, n_2)$, on obtient deux autres couples de normales et de facettes de K .



Remarques :

1- N_i peut s'écrire comme combinaison linéaire de N_j , N_k et N_l , c'est à dire il existe α_j, α_k et $\alpha_l \in \mathbb{R}$ tels que $N_i = \alpha_j N_j + \alpha_k N_k + \alpha_l N_l$.

(p1) s'écrit $\alpha_l \det(N_l, N_j, N_k) \cdot \alpha_k \det(N_k, N_j, N_l) < 0$, soit $\alpha_l \cdot \alpha_k > 0$ et (p2) $\alpha_j \cdot \alpha_l > 0$.

On en déduit que α_j, α_k et α_l sont de même signe. Or $\langle N_i, \mu \rangle > 0$ pour $i = 1$ à p , donc N_i est combinaison positive de N_j, N_k et N_l .

Réciproquement si $N_i \in \text{Int}(\text{Pos}(N_j, N_k, N_l))$, alors (p1) et (p2) sont vérifiées. Donc

les conditions (p1) et (p2) sont équivalentes à l'appartenance de N_i à l'intérieur de l'enveloppe positive des vecteurs N_j, N_k et N_l .

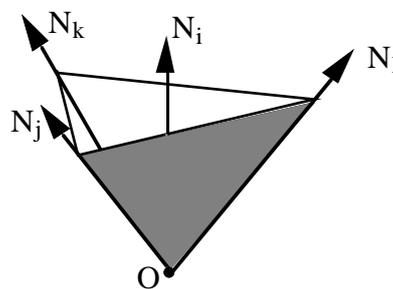
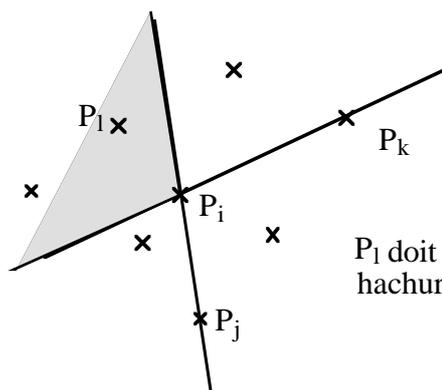


Figure 14 : Configuration des vecteurs N_i, N_j, N_k et N_l .

2- Dans le premier diagramme projectif, les conditions (p1) et (p2) sur les vecteurs se traduisent par le fait que P_i doit être à l'intérieur de l'enveloppe convexe de (P_j, P_k, P_l) .



P_i doit appartenir à la région hachurée du P.D.P.

Figure 15 : Premier diagramme projectif N .



3- Chaque quadruplet (N_i, N_j, N_k, N_l) de vecteur de N dans la configuration ci-dessus (c.à.d. N_i est à l'intérieur de l'enveloppe positive de (N_j, N_k, N_l)) donne 6 facettes de K en permutant les rôles de N_j, N_k, N_l .

- Faces du cône

Valeurs des termes $\langle N_r, x \rangle$ pour $r \neq i, k, l$ m.

On introduit un vecteur $I \in \mathbb{R}^3$ tel que I appartenant à l'intersection des plans $\text{Lin}(N_i, N_j)$ et $\text{Lin}(N_k, N_l)$.

$$C_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle I \wedge N_m, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_m, N_k \rangle > 0 \text{ et } \langle I \wedge N_m, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_m, N_l \rangle > 0 \right\}$$

$$C_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle I \wedge N_j, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_j, N_m \rangle > 0 \text{ et } \langle I \wedge N_j, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_j, N_k \rangle > 0 \right\}$$

$$C_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle I \wedge N_k, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_k, N_l \rangle > 0 \text{ et } \langle I \wedge N_k, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_k, N_j \rangle > 0 \right\}$$

Cas dégénérés

$$d_{1,2} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle I \wedge N_k, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_m, N_l \rangle > 0 \text{ et } \langle I \wedge N_m, x \rangle = 0 \right\}$$

$$d_{2,3} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle I \wedge N_m, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_j, N_k \rangle > 0 \text{ et } \langle I \wedge N_j, x \rangle = 0 \right\}$$

$$d_{1,3} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle I \wedge N_j, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_k, N_l \rangle > 0 \text{ et } \langle I \wedge N_k, x \rangle = 0 \right\}$$

C'_1, C'_2 et C'_3 sont les images respectives des ensembles C_1, C_2 et C_3 dans le premier diagramme projectif :

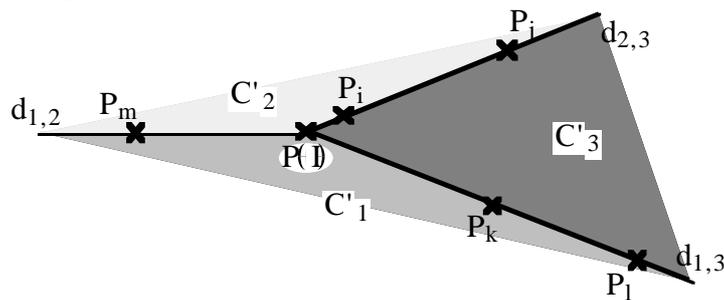


Figure 16 : Partition du plan suivant les valeurs de $F(K_r, n_i)$.

$$n_1 = (\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l)$$

$$n_2 = (-\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j)$$

$$n_3 = (\beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j, -\alpha N_i \wedge N_j)$$

Valeurs de $F(K_r, n_i)$:

$N_r \in$	C_1	$d_{1,2}$	C_2	$d_{2,3}$	C_3	$d_{1,3}$
n_1	$(0, N_r)$	$[\tilde{N}_r^1, \tilde{N}_r^2]$	$(N_r, 0)$	$[0, \tilde{N}_r^1]$	$(0, 0)$	$[0, \tilde{N}_r^2]$
n_2	$(0, N_r)$	$[0, \tilde{N}_r^2]$	$(0, 0)$	$[0, \tilde{N}_r^1]$	$(N_r, 0)$	$[\tilde{N}_r^1, \tilde{N}_r^2]$
n_3	$(N_r, 0)$	$[0, \tilde{N}_r^1]$	$(0, 0)$	$[0, \tilde{N}_r^2]$	$(0, N_r)$	$[\tilde{N}_r^1, \tilde{N}_r^2]$

Conclusion C : Si les vecteurs N_i, N_j, N_k, N_l et N_m de N vérifient (pa1) et (pa2), alors il existe α et β vérifiant les conditions (a1), (a2) et (a3), de sorte que

$$\begin{aligned} n_1 &= (\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l), \\ n_2 &= (-\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j), \\ n_3 &= (\beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j, -\alpha N_i \wedge N_j), \end{aligned}$$

sont des normales extérieures aux facettes du convexe de 2-mélanges K , qui s'écrivent respectivement :

$$F(K, n_1) = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ \text{tel que } r \notin \{i, j, k, l, m\}}} F(K_r, n_1) + [0, \tilde{N}_i^1] + [0, \tilde{N}_j^1] + [0, \tilde{N}_k^2] + [0, \tilde{N}_l^2] + [\tilde{N}_m^1, \tilde{N}_m^2]$$

$$F(K, n_2) = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ \text{tel que } r \notin \{i, j, k, l, m\}}} F(K_r, n_2) + [0, \tilde{N}_i^1] + [0, \tilde{N}_j^1] + [\tilde{N}_k^1, \tilde{N}_k^2] + [\tilde{N}_l^1, \tilde{N}_l^2] + [0, \tilde{N}_m^2]$$

$$F(K, n_3) = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ \text{tel que } r \notin \{i, j, k, l, m\}}} F(K_r, n_3) + [0, \tilde{N}_i^2] + [0, \tilde{N}_j^2] + [\tilde{N}_k^1, \tilde{N}_k^2] + [\tilde{N}_l^1, \tilde{N}_l^2] + [0, \tilde{N}_m^1]$$

On obtient trois autres normales aux facettes de K , en échangeant les rôles de (N_i, N_j) et de (N_k, N_l) dans les conditions (a1), (a2) et (a3), dans les expressions de n_1, n_2, n_3 et des facettes correspondantes. On note ces normales :

$$\begin{aligned} n_4 &= (\beta N_k \wedge N_l, \alpha N_i \wedge N_j), \quad n_5 = (-\beta N_k \wedge N_l, \alpha N_i \wedge N_j - \beta N_k \wedge N_l) \\ \text{et } n_6 &= (\alpha N_i \wedge N_j - \beta N_k \wedge N_l, -\beta N_k \wedge N_l). \end{aligned}$$

Et on a pour la fonction support de K les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} h(K, n_2) &= h(K, n_3) \\ &= \sum_{r/N_r \in C_1} \langle \beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j, N_r \rangle + \sum_{r/N_r \in C_3 \cup \{N_k, N_l\}} -\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle, \\ \text{et } h(K, n_5) &= h(K, n_6) \\ &= \sum_{r/N_r \in C_2} \langle \alpha N_i \wedge N_j - \beta N_k \wedge N_l, N_r \rangle + \sum_{r/N_r \in C_3 \cup \{N_i, N_j\}} -\beta \langle N_k \wedge N_l, N_r \rangle. \end{aligned}$$

Remarques C :

1- Comme dans **B-**, N_i est une combinaison linéaire de N_j, N_k et N_l . Il existe α_j, α_k et $\alpha_l \in \mathbb{R}$ tels que $N_i = \alpha_j N_j + \alpha_k N_k + \alpha_l N_l$. On remplace N_i par son expression dans $\langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_l \rangle > 0$ et $\langle N_k \wedge N_l, N_i \rangle \cdot \langle N_k \wedge N_l, N_j \rangle > 0$, d'où on tire :

$$\alpha_k \alpha_l < 0 \text{ et } \alpha_j > 0.$$

Donc soit $\alpha_k > 0$ et $\alpha_l < 0$, soit $\alpha_k < 0$ et $\alpha_l > 0$. Donc les quatre vecteurs N_i, N_j, N_k et N_l sont sur la frontière de l'enveloppe positive de $\{N_i, N_j, N_k, N_l\}$. Sur la figure ci dessous, les parties où P_i peut se trouver dans le diagramme projectif sont coloriées.

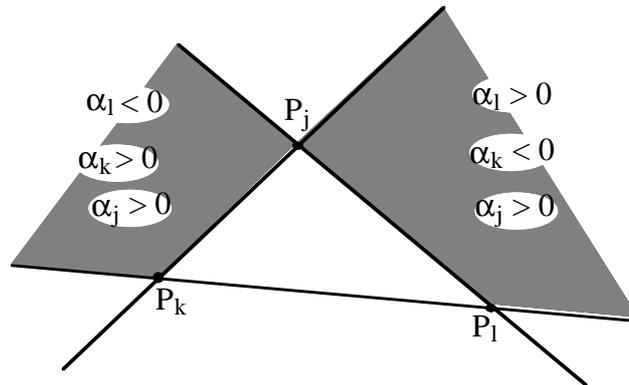


Figure 17 : Positions de P_i dans le P.D.P.

De plus, les conditions $\langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_k \text{ et } l \rangle < 0$ et $\langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle \cdot \langle N_k \wedge N_l, N_i \text{ et } j \rangle < 0$ donnent la position de N_m par rapport aux plans $\text{Lin}(N_i, N_j)$ et $\text{Lin}(N_k, N_l)$.

Notons C_4 le cône $\text{Pos}\{N_i, N_j, N_k, N_l\}$, et C_5 le cône $\text{Pos}\{N_i, N_j, N_k, N_l, N_m\}$.

En premier lieu on remarque que $N_m \notin C_4$, car $N_i \wedge N_j$ est une normale à une facette de C_4 , et $\langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_k \text{ et } l \rangle < 0$ (or $N_k \in C_4$). Les facettes de C_4 qui sont visibles depuis N_m , sont à l'intérieur de C_5 . C'est le cas de $\text{Pos}\{N_i, N_j\}$ et $\text{Pos}\{N_k, N_l\}$. Or ces deux facettes ne sont pas adjacentes (pas de rayon commun), donc nécessairement une troisième facette de C_4 est visible depuis N_m et elle est à l'intérieur de C_5 .

En conclusion,

les conditions (pa1) et (pa2) impliquent que deux vecteurs parmi N_i, N_j, N_k et N_l sont à l'intérieur de C_5 .

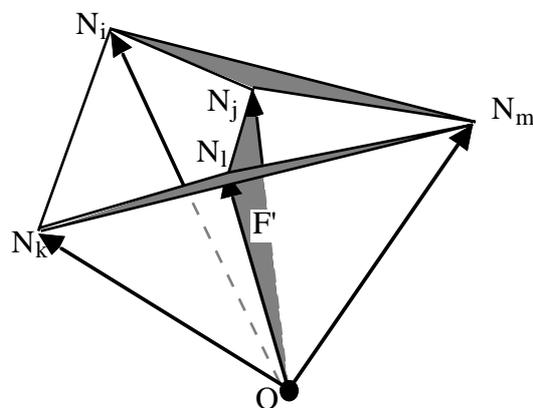


Figure 18 : Configuration des vecteurs N_i, N_j, N_k, N_l et N_m .

2- Ci dessous le premier diagramme projectif correspondant aux conditions (pa1) et (pa2):

On introduit un vecteur $I \in \mathbb{R}^3$ tel que I appartient à l'intersection de $\text{Lin}(N_i, N_j)$ et $\text{Lin}(N_k, N_l)$. Et on note $P(I)$ l'image de I dans le premier diagramme projectif. La droite passant par P_i et P_j sépare P_m des points P_k et P_l , de même que la droite passant par P_k et P_l sépare P_m des points P_i et P_j .

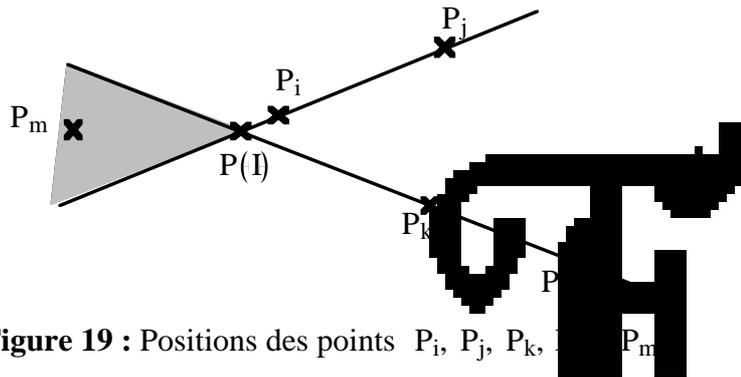


Figure 19 : Positions des points P_i, P_j, P_k, P_l, P_m

3- Chaque sous ensemble de 5 vecteurs de \mathbb{R}^3 vérifiant les conditions (pa1) et (pa2) donne 6 facettes de K , en échangeant les rôles de (N_i, N_j) et (N_k, N_l) .

5. Bilan de l'étude des facettes.

5.1. Cas général

Dans le cas général, K aura des facettes de celles énumérées dans les parties A-, B- et C-. Les valeurs données ci-dessous sont exactes pour des vecteurs N_1, \dots, N_p en position générale, et sont des bornes inférieures pour des vecteurs en position dégénérée.

Posons

$$n(i,j,k) = \text{Card} \left(\left\{ N_r \in \mathbb{R}^3 \mid r \in \{i,j,k\} \text{ et } (N_r \in \text{Pos} \{ N_i, N_j, N_k \}) \right\} \right).$$

Propriété 7 : Le nombre de facettes de K données dans la partie A- est :

$$n_A = 6 [C_p^2 - t] + 3 t,$$

où t ($3 \leq t \leq p$) est le nombre de vecteurs qui sont des rayons extrêmes de l'enveloppe positive de $\{N_1, \dots, N_p\}$.

Les facettes de la partie B- sont au nombre de :

$$n_B = 6 \times \sum_{\{i,j,k\} \subset \{1, \dots, p\}} n(i,j,k),$$

et enfin le nombre de facettes issues de la partie C- est :

$$n_C = 6 \times \sum_{\{i,j,k\} \subset \{1, \dots, p\}} C_{n(i,j,k)}^2.$$

Le nombre total de facettes de K est donné par $f_5(K) = n_A + n_B + n_C$.
 On remarque que

- n_A est en $\Theta(p^2)$ quelque soit la position des vecteurs de N , tandis que les valeurs
- n_B varie entre zéro (dans le cas de la sélectivité régulière, définie dans le paragraphe suivant) et $\Theta(p^4)$ (voir figure 20).
- n_C varie entre zéro (pour la sélectivité parfaite) et $\Theta(p^5)$ (voir exemple de la figure 20).

Le nombre total de facettes de K , $f_5(K)$, est au moins en $\Theta(p^2)$ et au plus en $\Theta(p^5)$ suivant les positions des vecteurs de N . Notons que $\Theta(p^5)$ est la complexité attendue pour une somme de triangles quelconques dans

Dans les figures ci dessous on répartit p vecteurs sur chaque cercle :

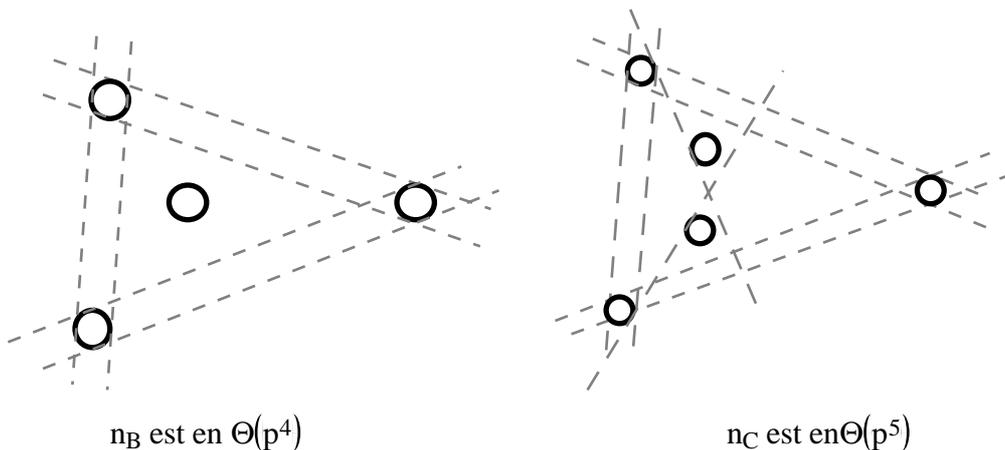


Figure 20 : Répartition des vecteurs dans le P.D.P.

Etant donnée la dépendance de $f_5(K)$ vis à vis de la configuration des vecteurs N_i , on s'interroge sur la complexité moyenne de $f_5(K)$, pour des vecteurs distribués aléatoirement. Une distribution uniforme des vecteurs N_i , dans $[0, 1]^3$, donne expérimentalement (moyenne sur 100 tirages) une évolution en p^5 du nombre moyen de facettes.

On regarde expérimentalement le comportement asymptotique du nombre de facettes pour quelques configurations particulières de vecteurs.

Exemples :

Soit k une constante entière, p tendant vers l'infini.

- 1- p points répartis uniformément dans le cube $[0,1]^3$,
- 2- $p-k$ points répartis sur un grand cercle et k points à l'intérieur d'un petit cercle inclus dans le grand cercle,
- 3- $p-k$ points répartis sur un grand cercle et k points à l'extérieur.

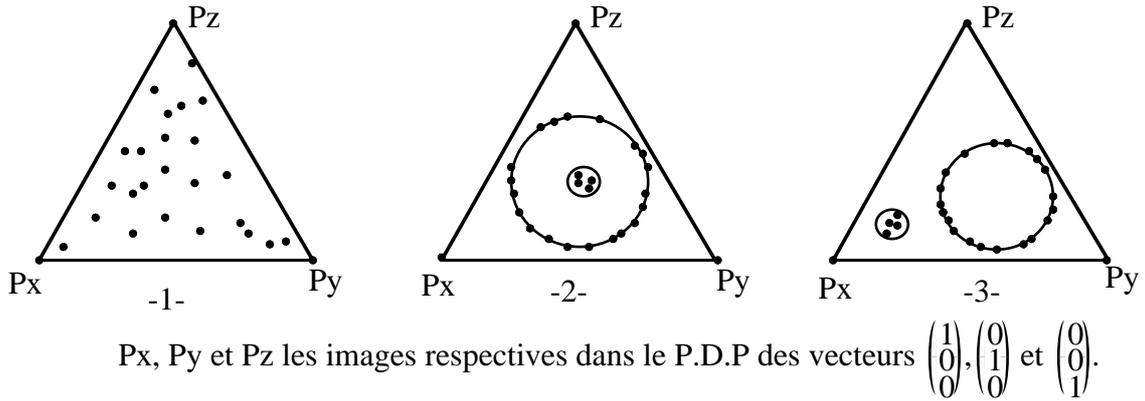
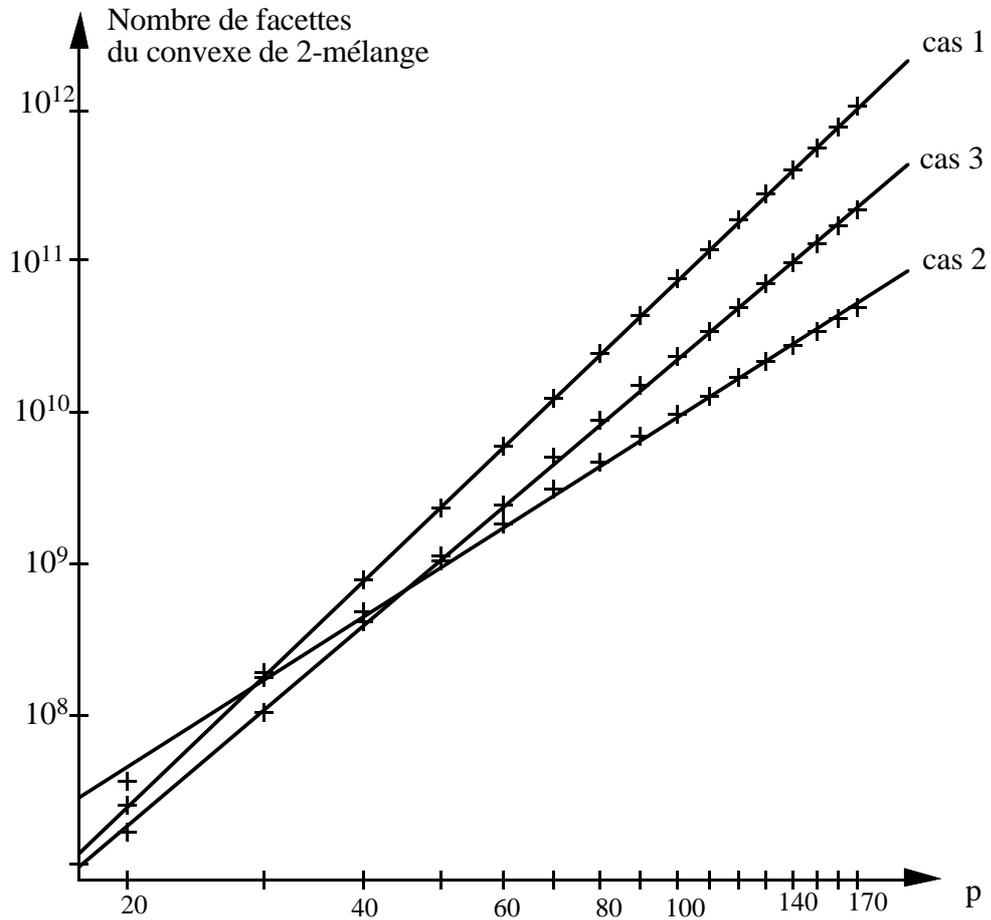


Figure 21 : Trois répartitions différentes des images des vecteurs dans le P.D.P.



Equations des droites de moindres carrés : $y = a x + b$

1) $a = 4,98436$ et $b = -4,824955$

2) $a = 3,323037$ et $b = 0,739825$

3) $a = 4,434148$ et $b = -3,489202$

Figure 22 : Comportement asymptotique du nombre moyen de facettes.

5.2. Cas de la sélectivité régulière

Définition 5 : Soit $\mathcal{N} = \{N_1, \dots, N_p\}$ une famille de directions
 $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ $N_i \cap \text{Pos}(\mathcal{N}) = \{0\}$
 e. est sur un rayon extrême du cône $\text{Pos}(\mathcal{N})$
 alors on dit que la famille \mathcal{N} vérifie la sélectivité régulière.

Exemple dans

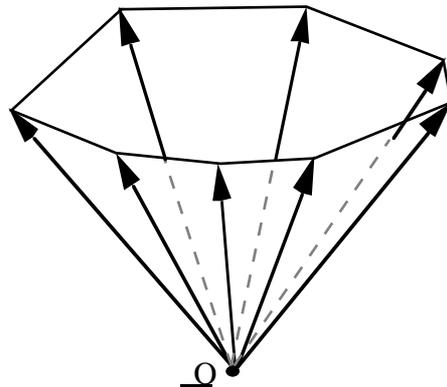


Figure 2-1 : Vecteurs vérifiant la sélectivité régulière

Remarque : On se trouve dans le cas où la famille \mathcal{N} vérifie la sélectivité régulière, alors le convexe K associé à cette famille, aura pour facettes uniquement celles décrites dans la partie A-. En effet, les configurations de vecteurs, qui donnent naissance dans les parties B- et C- à des facettes de K , sont telles qu'au moins un vecteur de \mathcal{N} soit à l'intérieur de l'enveloppe positive de trois autres vecteurs de \mathcal{N} . Ce qui ne peut pas se produire dans le cas de la sélectivité régulière.

Conséquences :

1- De cette remarque, on déduit immédiatement que le nombre de facettes d'un convexe de 2-mélanges associé à une famille de vecteurs vérifiant la sélectivité régulière, est en $\Theta(p^2)$. Son nombre exact est :

$$f_5(K) = 6 \lfloor C_p^2 - p \rfloor + 3p, \text{ car il y a } p \text{ paires de vecteurs dont l'enveloppe positive est sur la frontière de l'enveloppe positive de } \mathcal{N}.$$

2- Dans le cas de la sélectivité régulière, l'appartenance de (M_1, M_2) à K se réduit à vérifier uniquement les inégalités données par les facettes décrites dans la partie A-. Si on écrit les inégalités correspondant à ces facettes, on en déduit la propriété suivante :

Propriété 8 : Soit $\{N_i\}_i$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^p vérifiant la sélectivité régulière, si on note K le convexe de 2-mélanges associé à cette famille de vecteurs et Z le zonotope associé à cette même famille alors il y a équivalence entre :

- (a) $M_1 \in Z, M_2 \in Z$ et $M_1 + M_2 \in Z$
- (b) $(M_1, M_2) \in K$.

En terme de faisabilité de mélanges, on a :

Propriété 9 : Soit une famille $\{N_i\}_i$ de vecteurs linéairement indépendants de base et vérifiant la sélectivité régulière. Les mélanges M_1, M_2 sont simultanément faisables si et seulement si les mélanges M_1, M_2 et $M_1 + M_2$ le sont.

preuve : On note $h(Z, \cdot)$ la fonction support du zonotope Z .

Tous les couples de vecteurs $(N_i, N_j) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ (avec $i \neq j$) tels que $\text{Pos}(N_i, N_j)$ coupe l'intérieur de $\text{Pos}(\{N_i\}_i)$, donnent les inégalités (i1), (i2), (i3), (i4), (i5) et (i6), tandis que si $\text{Pos}(N_i, N_j)$ coupe $\text{Pos}(\{N_i\}_i)$ sur sa frontière on aura soit les inégalités (i1), (i2) et (i3), soit (i4), (i5) et (i6).

$$\bullet n_1 = (N_j \wedge N_i, 0)$$

$$\langle (M_1, M_2), n_1 \rangle \leq \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ \text{où } \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle < 0}} \langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle \Leftrightarrow \langle M_1, N_j \wedge N_i \rangle \leq h(Z, N_j \wedge N_i). \quad (i1)$$

$$\bullet n_2 = (0, N_j \wedge N_i)$$

$$\langle (M_1, M_2), n_2 \rangle \leq \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ \text{où } \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle < 0}} \langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle \Leftrightarrow \langle M_2, N_j \wedge N_i \rangle \leq h(Z, N_j \wedge N_i). \quad (i2)$$

$$\bullet n_3 = (N_i \wedge N_j, N_i \wedge N_j)$$

$$\langle (M_1, M_2), n_3 \rangle \leq \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ \text{où } \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle > 0}} \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle \Leftrightarrow \langle M_1 + M_2, N_i \wedge N_j \rangle \leq h(Z, N_i \wedge N_j). \quad (i3)$$

$$\bullet n_4 = (N_i \wedge N_j, 0)$$

$$\langle (M_1, M_2), n_4 \rangle \leq \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ \text{où } \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle > 0}} \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle \Leftrightarrow \langle M_1, N_i \wedge N_j \rangle \leq h(Z, N_i \wedge N_j). \quad (i4)$$

$$\bullet n_5 = (0, N_i \wedge N_j)$$

$$\langle (M_1, M_2), n_5 \rangle \leq \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ \text{où } \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle > 0}} \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle \Leftrightarrow \langle M_2, N_i \wedge N_j \rangle \leq h(Z, N_i \wedge N_j). \quad (i5)$$

• $n_6 = (N_j \wedge N_i, N_j \wedge N_i)$
 $\langle (M_1, M_2), n_6 \rangle \leq \sum_{r=1, \dots, p} \langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle \Leftrightarrow \langle M_1 + M_2, N_j \wedge N_i \rangle \leq h(Z, N_j \wedge N_i). \quad (i6)$
 où $\langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle < 0$

Ci-dessus on a les inégalités d'appartenance de M_1 , M_2 et $M_1 + M_2$ à Z , sauf pour les couples de vecteurs (N_i, N_j) tels que soit $I^+(i, j) = \emptyset$, soit $I^-(i, j) = \emptyset$.

Si $I^+(i, j) = \emptyset$, (M_1, M_2) vérifie les inégalités (i4), (i5) et (i6). Or dans (i4) et (i5) $h(Z, N_i \wedge N_j) = 0$, d'où en additionnant ces 2 inégalités on obtient (i3) :

$$\langle M_1 + M_2, N_i \wedge N_j \rangle \leq 0 = h(Z, N_i \wedge N_j).$$

En écrivant (i6) comme suit :

$$\langle M_1, N_j \wedge N_i \rangle + \langle M_2, N_j \wedge N_i \rangle \leq h(Z, N_j \wedge N_i),$$

et en tenant compte de (i4) et (i5) on obtient (i1) et (i2) :

$$\begin{cases} \langle M_1, N_j \wedge N_i \rangle \leq h(Z, N_j \wedge N_i), \\ \langle M_2, N_j \wedge N_i \rangle \leq h(Z, N_j \wedge N_i). \end{cases}$$

De même, si $I^-(i, j) = \emptyset$, (M_1, M_2) vérifie les inégalités (i1), (i2) et (i3), on en déduit qu'il vérifie aussi les inégalités (i4), (i5) et (i6).

Donc même si $I^+(i, j) = \emptyset$, ou si $I^-(i, j) = \emptyset$, M_1 et M_2 vérifient toutes les inégalités (i1), (i2), (i3), (i4), (i5) et (i6).

Finalement on a :

$$(M_1, M_2) \in K,$$

est équivalent à

M_1 et M_2 vérifient les inégalités (i1), (i2), (i3), (i4), (i5) et (i6), pour tout couple de vecteurs (N_i, N_j) , $1 \leq i < j \leq p$, qui sont les inégalités d'appartenance de M_1 , M_2 et $M_1 + M_2$ à Z .

Dans le cas de la sélectivité régulière, cette propriété permet de réduire de façon significative, la complexité du problème de l'appartenance de $(M_1, M_2) \in K$, à passer d'un système de $O(p^5)$ inégalités à $O(p)$ inégalités. La condition nécessaire et suffisante obtenue pour la stabilité de deux mélanges M_1 et M_2 à partir de N_1, N_2, \dots, N_p , est la même que avec les vecteurs N_i . Mais dans la condition on se généralise à q mélanges de la façon suivante :

Propriété 10 : Une condition nécessaire et suffisante de coexistence de la famille M dans la famille N de vecteurs de volume est que le zonotope $Z\{M_1, M_2, \dots, M_q\}$ est inclus dans le zonotope $Z\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$.

Car dans la généralisation à q mélanges se fait grâce à la propriété d'inclusion de tous les zonotopes résiduels dans le zonotope résiduel de volume

maximum $Z \cap (Z-M)$.

Pour les vecteurs de \mathcal{S} , cette propriété d'inclusion dans le zonotope résiduel de volume maximum n'est plus vraie, même pour \mathcal{S} vérifiant la sélectivité régulière comme le montre l'exemple suivant :

Exemple :

Soient $N_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $N_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $N_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ les produits de base et $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ le mélange à réaliser. Les vecteurs λ de \mathcal{S} possibles sont de la forme :

$$\lambda = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \\ 1-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in [0,1].$$

Les zonotopes résiduels s'écrivent sous la forme :

$$ZR(\lambda) = (1-\alpha) ([0, N_1] + [0, N_4]) + \alpha ([0, N_2] + [0, N_3]), \text{ où } \alpha \in [0,1].$$

La famille de vecteurs $\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ vérifie la sélectivité régulière, mais on voit qu'il ne peut pas y avoir inclusion des zonotopes résiduels dans l'un d'entre eux (en l'occurrence celui de volume maximum).

On ne sait pas si la propriété 8 est propre au cas particulier étudié ici (c'est à dire $q=2$, et $n=3$), ou si elle peut être généralisée à la fabrication de plus de deux mélanges ($q>2$) ou pour des mélanges représentés dans un espace des espèces de dimension plus grande ($n>3$). Mais pour $q>2$ et $n>3$, il paraît difficile de mener une étude des facettes du convexe de q -mélanges K , car le nombre de combinaisons possibles pour énumérer les facettes de K augmente considérablement avec la dimension qn de K .

6. Relations d'Adjacence entre facettes et Applications

Dans cette partie on étudie les relations d'adjacence entre facettes du convexe K de 2-mélanges associé à des vecteurs de \mathcal{S} étudié dans les paragraphes 4 et 5).

On décrit ces relations d'adjacence dans le premier diagramme projectif.

Rappelons que deux facettes de K sont dites adjacentes, si elles partagent une même sous-face (4-face).

On compte cinq différents types d'adjacence :

- trois types entre deux faces d'un même cas : A, B ou C,
- entre une face du cas A et une face du cas B,
- et entre une face du cas B et une face du cas C.

A titre d'exemple, on étudiera ici uniquement les adjacences entre deux faces du polyèdre. L'énumération et la description complète de tous les cas serait trop fastidieuse.

Soient N_i, N_j, N_k, N_l et N_m cinq vecteurs distincts de N vérifiant les conditions (pa1) et (pa2) (voir paragraphe 4.2.). La facette de normale $n_1 = (\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l)$, où α et β vérifient $\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle = \beta \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle > 0$, s'écrit :

$$F(K, n_1) = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ r \notin \{i, j, k, l, m\}}} F(K_r, n_1) + [0, \tilde{N}_i^1] + [0, \tilde{N}_j^1] + [0, \tilde{N}_k^2] + [0, \tilde{N}_l^2] + [\tilde{N}_m^1, \tilde{N}_m^2].$$

Soit F une sous-face de $F(K, n_1)$, qui s'écrit :

$$F = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ r \notin \{i, j, k, l, m\}}} F(K_r, n_1) + [0, \tilde{N}_i^1] + [0, \tilde{N}_j^1] + [0, \tilde{N}_k^2] + 0 + [\tilde{N}_m^1, \tilde{N}_m^2].$$

Notons F' l'unique facette de K ayant F comme sous-face commune avec $F(K, n_1)$ et n'_1 sa normale extérieure.

Comment déterminer F' à partir du premier diagramme projectif ?

Aux points N_1, N_2, \dots, N_p de N , on associe les points $1, \dots, p$ dans le P.D.P. Soit I l'intersection entre les droites (i, j) et (k, l) .

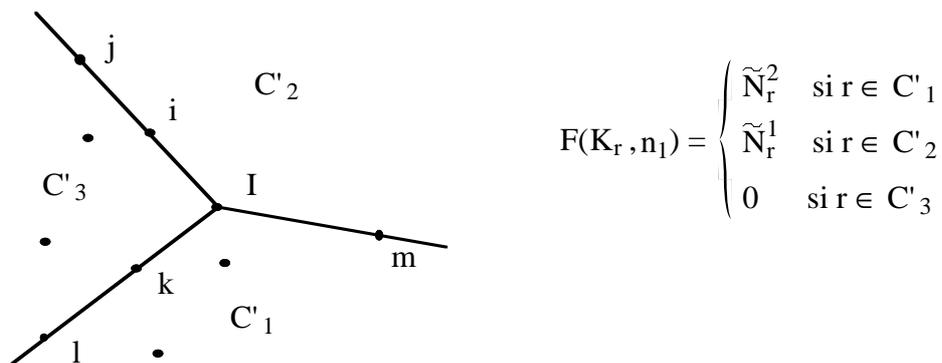


Figure 24 : Configuration dans le P.D.P. correspondant à une face du cas C.

Si F' est une face du cas C, alors

$$F(K_i, n'_1) = [0, \tilde{N}_i^1], \quad F(K_j, n'_1) = [0, \tilde{N}_j^1],$$

$$F(K_k, n'_1) = [0, \tilde{N}_k^2], \quad F(K_m, n'_1) = [\tilde{N}_m^1, \tilde{N}_m^2]$$

et un terme de

$$\sum_{\substack{r=1,\dots,p \\ r \notin \{i,j,k,l,m\}}} F(K_r, n_1)$$

n'est pas réduit à un sommet de K_r et prend comme valeur soit $[\tilde{N}_r^1, \tilde{N}_r^2]$, soit $[0, \tilde{N}_r^2]$.

Soit l' l'indice correspondant à ce terme.

Le terme $F(K_{l'}, n_1) = [0, \tilde{N}_{l'}^2]$ prend alors la valeur $F(K_{l'}, n_1) = 0$. Donc l' passe dans le nouveau cône C'_3 correspondant à la configuration des cinq points $\{i, j, k, l', m\}$.

Soit h la demi-droite contenant k et dont l'extrémité, notée c , est sur la droite (i, j) .

Soit h' la demi-droite contenant m et dont l'extrémité c , commune à h , est sur la droite (i, j) .

La position initiale de h est celle de la demi droite $[I, k)$. Puis la demi droite h pivote autour de k . De même, h' a pour position initiale celle de la demi droite $[I, m)$ (i.e. le point c est confondu avec I), et pivote autour de m quand c se déplace sur (i, j) . Les demi droites h et h' pivotent jusqu'à ce que l'une d'elles contienne un point l' du P.D.P. (différent de k et m).

Trois situations se présentent (voir figure 25) :

- 1- Si $F(K_{l'}, n_1) = [0, \tilde{N}_{l'}^2]$ alors h est la première demi-droite à rencontrer le point l' du P.D.P.
- 2- Si $F(K_{l'}, n_1) = [\tilde{N}_{l'}^1, \tilde{N}_{l'}^2]$ alors h' est la première demi-droite à rencontrer le point l' du P.D.P.
- 3- h et h' pivotent et ne rencontrent aucun point du P.D.P. avant que leur extrémité c se confonde avec i . On se trouve alors dans une configuration de 4 points qui correspond à une face du cas B et $F(K_i, n_1) = K_i$.

On note l' , l'intersection des demi-droites h et h' avec la droite (i, j) , en position finale.

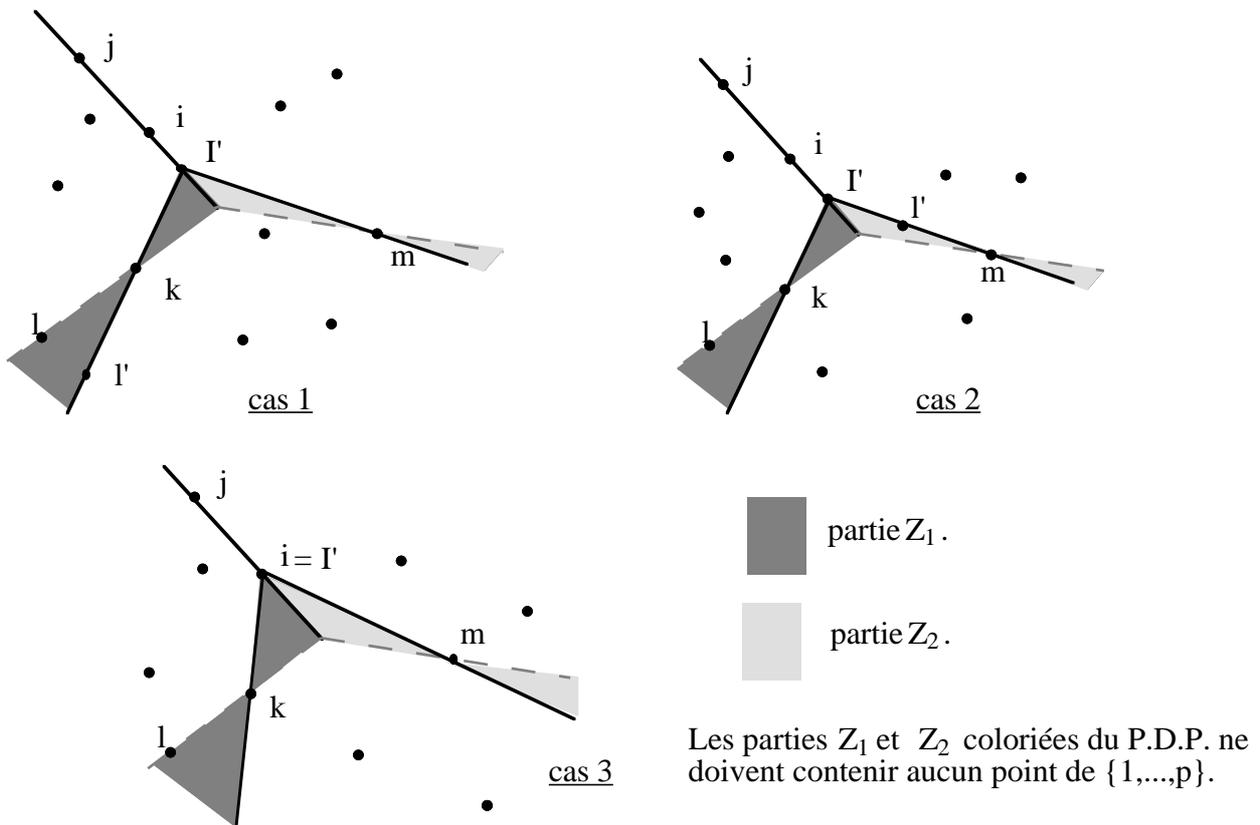


Figure 25 : Les trois cas possibles d'adjacence à partir d'une face du cas C.

Notons Z la partie hachurée du P.D.P. (cf. figure 25). Elle est constituée de deux parties Z_1 et Z_2 .

On note

$$l(t) = (1-t)l + t l' \quad \text{et} \quad I(t) = (1-t)I + t I' \quad \text{pour } t \in [0,1].$$

Z_1 est l'intersection de l'ensemble des points balayés par les droites $(k, l(t))$, quand t décrit l'intervalle $]0,1[$, et du demi-plan délimité par (i,j) contenant k .

De même Z_2 est l'intersection de l'ensemble des points balayés par les droites $(m, I(t))$, quand $t \in]0,1[$, et du demi plan délimité par (i,j) contenant m .

cas 1 : Si l' est sur la demi-droite $[I',k)$, alors la face adjacente à $F(K, n_1)$ a pour normale

$$n_1 = (\alpha' N_i \wedge N_j, \beta' N_k \wedge N_{I'}),$$

où α' et β' vérifient :

$$\alpha' \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle = \beta' \langle N_k \wedge N_{I'}, N_m \rangle > 0.$$

Elle s'écrit :

$$F(K, n_1) = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ r \notin \{i, j, k, l, m, I'\}}} F(K_r, n_1) + [0, \tilde{N}_i^1] + [0, \tilde{N}_j^1] + [0, \tilde{N}_k^2] + 0 + [\tilde{N}_m^1, \tilde{N}_m^2] + [0, \tilde{N}_{I'}^2],$$

où $F(K_r, n_1) = F(K_r, n_1)$ pour tout $r = 1, \dots, p$ et $r \neq i, j, k, l, m, I'$.

cas 2 : Si l' est sur la demi-droite $[l', m)$, alors la face adjacente à $F(K, n_1)$ a pour normale

$$n'_1 = (-\alpha' N_i \wedge N_j, \beta' N_m \wedge N_l - \alpha' N_i \wedge N_j)$$

où α' et β' vérifient :

$$\alpha' \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle = \beta' \langle N_m \wedge N_l, N_k \rangle > 0.$$

Elle s'écrit :

$$F(K, n'_1) = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ r \notin \{i, j, k, l, m, l'\}}} F(K_r, n'_1) + [0, \tilde{N}_i^1] + [0, \tilde{N}_j^1] + [0, \tilde{N}_k^2] + 0 + [\tilde{N}_m^1, \tilde{N}_m^2] + [\tilde{N}_{l'}^1, \tilde{N}_{l'}^2],$$

où $F(K_r, n'_1) = F(K_r, n_1)$ pour tout $r = 1, \dots, p$ et $r \neq i, j, k, l, m, l'$.

cas 3 : Si l' est le point i , alors la face adjacente à $F(K, n_1)$ correspond à une face du cas B de normale

$$n'_1 = (\alpha' N_i \wedge N_j, \beta' N_i \wedge N_k)$$

où α' et β' vérifient :

$$\alpha' \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle = \beta' \langle N_i \wedge N_k, N_m \rangle > 0.$$

Elle s'écrit :

$$F(K, n'_1) = \sum_{r \in C_2} \tilde{N}_r^2 + \sum_{r \in C_3} \tilde{N}_r^1 + \sum_{r \in C_3} 0 + K_i + [0, \tilde{N}_j^1] + [0, \tilde{N}_k^2] + 0 + [\tilde{N}_m^1, \tilde{N}_m^2],$$

Annexe 2 • Deuxième diagramme projectif

Dans ce sujet, on se restreint à l'étude du cas 1.

Problème comment déterminer le point l' sans tester un à un tous les vecteurs N_r de N pour $r \neq i, j, k, l, m, l'$?

Pour cela, on aura besoin du dual du P.L.P., le deuxième diagramme projectif.

On note D la transformation géométrique suivante qui transforme un point du plan en une droite et réciproquement. Soit p un point du plan différent de l'origine, on lui associe la droite d défini par :

$$d = D(p) = \{ q \in \mathbb{R}^2 \mid \langle p, q \rangle = 1 \}.$$

Et à une droite d (ne passant pas par l'origine) on associe le point $p = D(d)$ vérifiant :

$$\forall q \in d, \langle p, q \rangle = 1.$$

Observation : La transformation D préserve l'incidence et l'ordre.

En effet, soient p un point et d une droite du plan. On a les assertions suivantes :

- (i) si $p \in d$, alors $D(d) \in D(p)$,
- (ii) si $p \in d^+$ (resp. d^-), alors $D(d) \in D(p)^+$ (resp. $D(p)^-$).

Où d^+ est le demi plan ouvert contenant 0 et délimité par la droite d , et d^- l'autre demi plan délimité par d .

Définition : On appelle *deuxième diagramme projectif* (noté D.D.P.) associé à un ensemble de vecteurs $\{N_1, \dots, N_p\}$ de \mathbb{R}^2 , le diagramme dual du P.D.P.

A chaque vecteur N_i correspond une droite dans le D.D.P. et les points d'intersections entre les droites du D.D.P. correspondent aux droites du P.D.P.

Construction : On place le P.D.P. dans le plan de manière qu'aucune droite ne passe par l'origine. Puis la construction du D.D.P. est la dualité.

Aux points $\{1, \dots, p\}$ du P.D.P. on associe des droites $\{D(1), \dots, D(p)\}$. On obtient un arrangement de droites $(\{D(1), \dots, D(p)\})$ dans le plan. Cet arrangement forme le D.D.P.

• **Exemple :** Représentation dans le D.D.P. de la configuration de 5 points du P.D.P.

Soient cinq points i, j, k, l et m du P.D.P., qui correspondent à des vecteurs de \mathbb{R}^2 vérifiant les conditions (pa1) et (pa2).

- La première condition (pa1) :

k et l sont du même côté de la droite (i, j) (i.e. droite passant par les points i et j) et m est de l'autre côté de cette droite. C'est à dire :

$$\text{Soit } k \text{ et } l \in (i, j)^+ \text{ et } m \in (i, j)^-, \text{ soit } k \text{ et } l \in (i, j)^- \text{ et } m \in (i, j)^+.$$

En appliquant (ii), on obtient les conditions équivalentes dans le D.D.P. :

$$D((i, j)) = D(i) \cap D(j) \text{ appartient soit à } D(k)^+, D(l)^+, \text{ et } D(m)^- \\ \text{soit à } D(k)^-, D(l)^- \text{ et } D(m)^+.$$

- La seconde condition (pa2) :

i et j sont du même côté de la droite (k, l) (i.e. droite passant par les points k et l) et m est de l'autre côté de cette droite.

En appliquant (ii), on obtient les conditions équivalentes dans le D.D.P. :

$$D((k, l)) = D(k) \cap D(l) \text{ appartient soit à } D(i)^+, D(j)^+ \text{ et } D(m)^-, \\ \text{soit à } D(i)^-, D(j)^- \text{ et } D(m)^+.$$

Exemple : Ici $D((k, l))$ appartient à $D(i)^+, D(j)^+$ et $D(m)^-$ et $D((i, j))$ appartient à $D(k)^+, D(l)^+$ et $D(m)^-$.

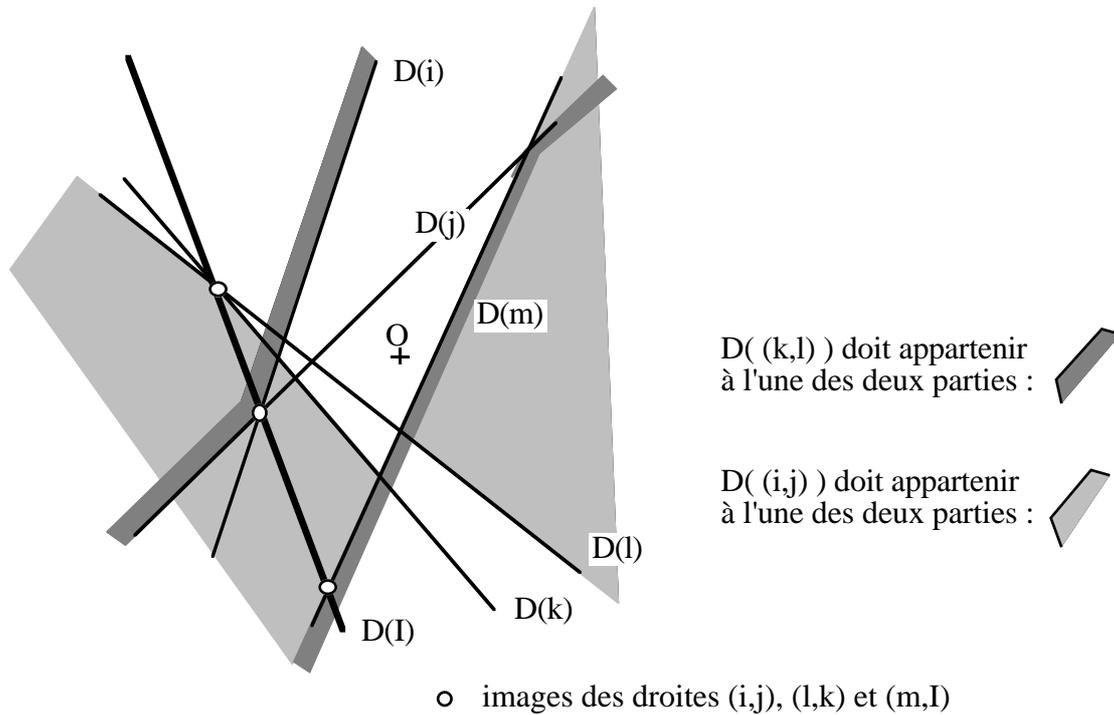


Figure 26 : Configuration dans le D.D.P. associée à une facette du cas C.

- Second point : Représentation des relations d'adjacence dans le D.D.P.

Dans le P.D.P. les faces $F(K, n_1)$ et $F(K, n'_1)$ sont adjacentes à condition que Z , la partie hachurée du P.D.P., (cf. figure 25) ne contienne aucun point.

Etant donnée un point $r \in \{1, 2, \dots, p\}$ du P.D.P., r appartient soit au demi-plan délimité par (i, j) contenant k , soit au demi-plan délimité par (i, j) contenant m .

Dans le premier cas, r ne doit pas appartenir à l'une des droites $(k, l(t))$, quand t décrit l'intervalle $[0, 1]$.

Dans le second cas, r ne doit pas appartenir à l'une des droites $(m, I(t))$, quand t décrit $[0, 1]$.

- cas 1 : $\forall t \in [0, 1], r \notin (k, l(t)) \Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], D(k, l(t)) \notin D(r)$.

Si les droites $(k, l(t))$ ne rencontrent pas l'origine, quand t décrit l'intervalle $[0, 1]$, alors le point $D(k, l(t))$ décrit le segment d'extrémités $D(k, l)$ et $D(k, l')$,

sinon $D(k, l(t))$ décrit les deux demi-droites portées par $D(k)$ et d'extrémités respectives $D(k, l)$ et $D(k, l')$ (voir figure 27).

- cas 2 : $\forall t \in [0, 1], r \notin (m, I(t)) \Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], D(m, I(t)) \notin D(r)$.

Comme dans le cas précédent $D(m, I(t))$ décrit soit un segment de droite soit deux demi-droites portées par $D(m)$.

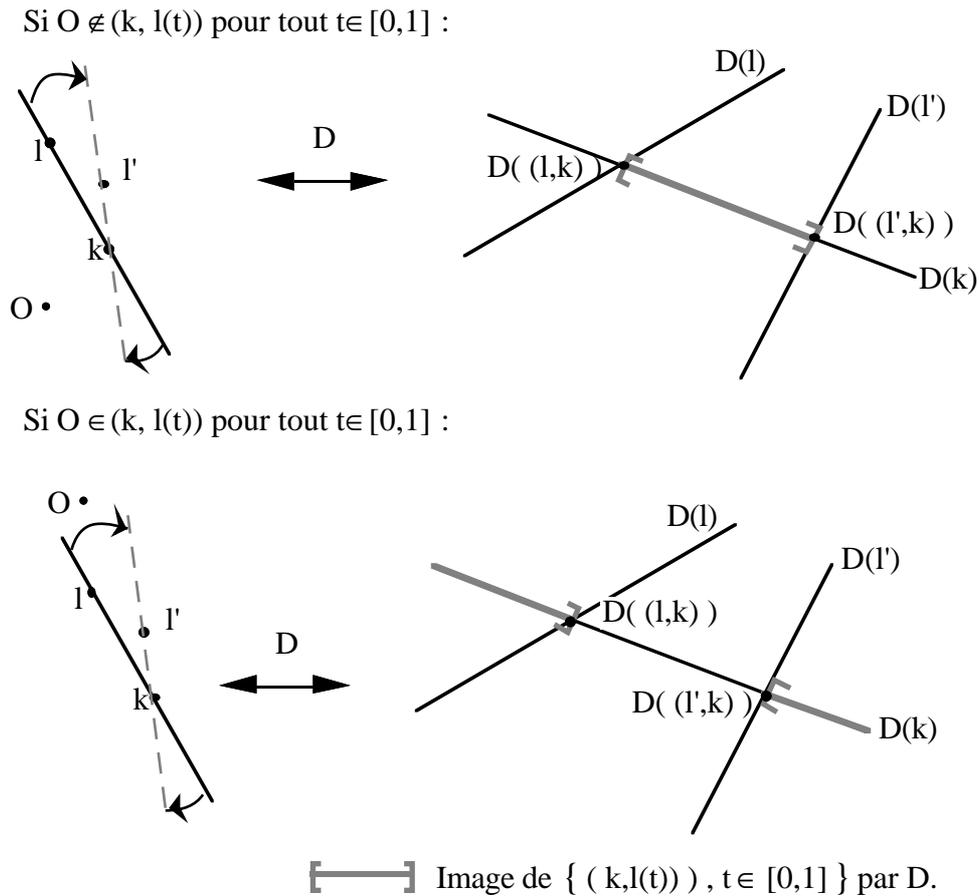


Figure 27 : Description du cas 1.

Ainsi le point l' correspond à la première droite $D(l')$ qui intersecte $D(k)$ en partant du point $D((k,l))$ sur $D(k)$ et qui vérifie :

- si $D(i,j) \in D(l)^+$ alors $D(i,j) \in D(l')^+$
- et si $D(i,j) \in D(l)^-$ alors $D(i,j) \in D(l')$.

La direction dans laquelle est parcourue $D(k)$ à partir de $D((k,l))$ dépend du sens où la droite $[c,k)$ tourne autour de k . Dans le sens choisit ici, $[c,k)$ doit rencontrer le point i avant le point j , donc dans le D.D.P. on choisit la direction sur la droite $D(k)$ dans laquelle le point $D((i,k))$ est rencontré avant $D((j,k))$.

Dans la figure ci-dessous la première intersection rencontrée avec la droite $D(k)$ en partant du point $D((k,l))$ est celle avec la droite $D(r)$. Or $D((i,j)) \in D(l)^-$ et $D((i,j)) \in D(r)^+$, donc $D(r)$ ne vérifie pas les conditions. La seconde droite coupée par $D(k)$ est la droite $D(l')$ qui vérifie $D((i,j)) \in D(l')^-$, donc l' est le point cherché.

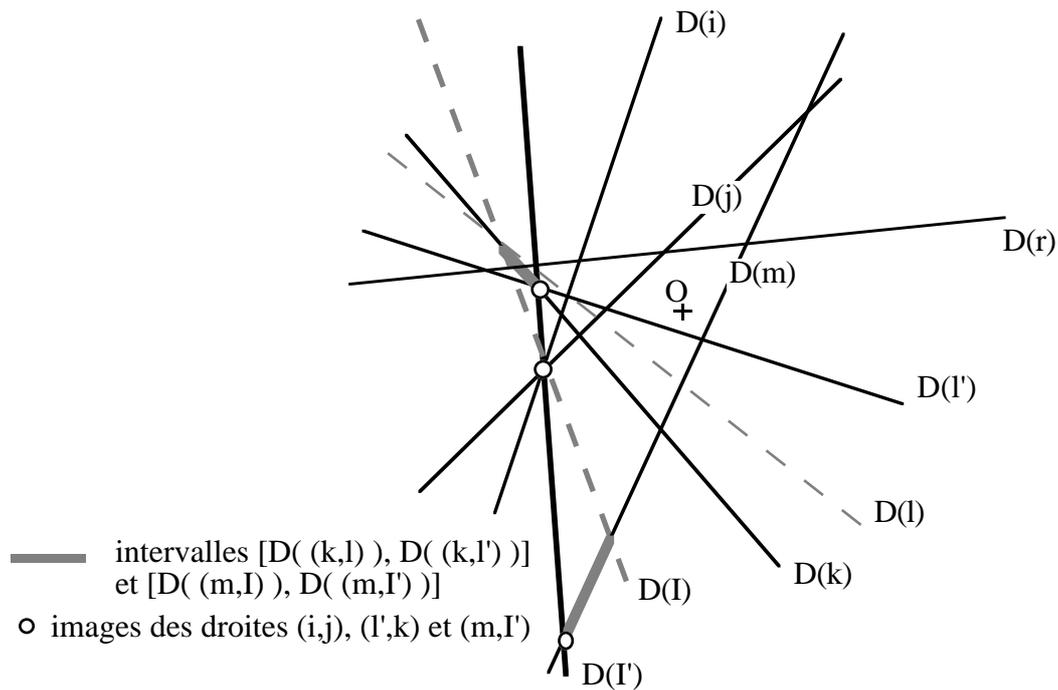


Figure 28 : Représentation des adjacences dans le D.D.P. .

Applications :

1- Construction des facettes du convexe de mélange K en temps optimal.

Une énumération systématique des configurations de deux, quatre et cinq points dans le P.D.P., ce fait en $O(p^5)$ et donne l'ensemble des facettes de K . Mais le coût de calcul de l'inéquation correspondant à une facette est de

- $O(1)$ pour la normale,
- $O(p)$ pour la fonction support (nécessite de connaître un point de la facette),

d'où un coût total en $O(p^6)$.

Ce coût est dû aux configurations de cinq points. Mais si on utilise les relations adjacences entre ces facettes, on peut calculer la fonction support d'une facette avec un coût constant si on connaît la facette voisine. Cela nécessite un prétraitement qui consiste à calculer de l'arrangement des droites $D(1), \dots, D(p)$ avec un coût en $O(p^2)$, d'où le coût total en $O(p^5)$.

2- Coupes du convexe K par un plan.

La connaissance de toutes les adjacences entre facettes (dont nous avons seulement décrit un exemple) à partir du P.D.P. et du D.D.P. peut permettre la construction de coupes de K par des plans en utilisant la méthode de suivi d'intersection, et cela sans construire toutes les facettes du polytope K .

Le problème se pose de déterminer une première facette intersectée par le plan de

coupe avec un coût de calcul faible (i.e. très inférieur au nombre total de facettes). On peut estimer ce coût dans le cas de plans de coupe particuliers, liés à la fabrication des mélanges.

Soient deux mélanges M_1 et $M_2 \in \mathbb{R}^p$. Le plan dans \mathbb{R}^p défini par les vecteurs $(M_1, 0)$ et $(0, M_2)$ contient, par définition, l'origine. Or les faces F_i ayant 0 comme sommet sont les facettes du cas A associées aux couples de vecteurs N_i, N_j tels que :

$$\text{Pos}(N_i, N_j) \text{ est sur la frontière de } \text{Pos}(\{N_k\}_{k \in \mathbb{N}}).$$

On compte au plus $3p$ de ces facettes (dans le cas de la sélectivité régulière).

Dans ce cas, le suivi d'intersection peut être initialisé avec un coût de $O(p)$. Puis le coût du suivi d'intersection est proportionnel au nombre de facettes intersectées par le plan de coupe, plus le nombre de sous-faces (4-faces) qui les bordent.

Chapitre IV

Décomposition

Introduction

Le calcul des sommes de Minkowski mène naturellement à l'étude de la décomposition d'un convexe en somme de convexes plus simples et également à l'étude des sommandes de A , c'est à dire des ensembles C tels qu'il existe B vérifiant $A = B + C$. Ce problème a été étudié surtout de façon théorique.

Le chapitre commence par une présentation des résultats sur la décomposition des polytopes. La notion d'indécomposabilité a été introduite par D. Gale, dans [Gal54] où il énumère un certain nombre de convexes indécomposables. Puis G.C. Shephard (cf. [She63]) donne une caractérisation des sommandes qui fait intervenir la notion de faisceaux de normales. Deux problèmes sont repris par plusieurs auteurs : l'énoncé de conditions nécessaires et suffisantes de décomposabilité ou d'indécomposabilité, et la décomposition en sommandes indécomposables.

En dimension 2, le problème de la décomposabilité a une solution simple : dans le plan tous les convexes sont décomposables excepté le triangle et le segment. Ceci permet d'établir une méthode et un algorithme de décomposition d'un polygone convexe et il apparaît que cette décomposition n'est pas unique (en général).

Dans la suite, étant donné un ensemble A et un sommande C , on cherche à déterminer B vérifiant $A = B + C$. On constate que B n'est pas unique, mais on peut obtenir une expression générale du plus grand ensemble B tel que $B + C \subseteq A$. Dans le cas de convexe compact l'expression est affinée en utilisant les points extrémaux.

Des algorithmes sont proposés dans le cas des polygones et des polyèdres soit pour déterminer B , soit pour déterminer si C est un sommande de A .

1. Définitions et principaux résultats sur la décomposition de polytopes

Définition 1 : Soit A un ensemble convexe dans \mathbb{R}^n , une *décomposition de Minkowski* de A est une paire d'ensembles convexes B et C dans \mathbb{R}^n telle que

$$A = B + C .$$

Les ensembles B et C sont appelés *sommandes* de A .

On remarque que tout convexe est trivialement décomposable sous la forme

$$A = (\lambda A + x) + ((1 - \lambda) A - x),$$

où $\lambda \in [0, 1]$. Ainsi on s'intéressera aux sommandes non homothétiques à A .

Définition 2 : Un ensemble A est dit *décomposable* s'il admet un sommande non homothétique à lui même.

Le principal problème traité, par les différents auteurs, est de déterminer les classes de convexes décomposables et indécomposables; et aussi celui de la caractérisation des sommandes.

D. Gale s'est intéressé à déterminer quelles classes de convexes étaient décomposables, ses résultats sont apparus sous forme de résumé dans [Gal54], mais les démonstrations n'ont jamais été publiées.

Il cite pour les ensembles convexes décomposables :

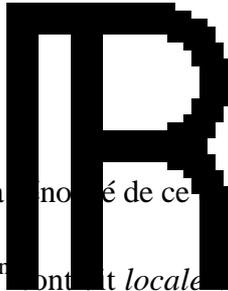
- les ensembles suffisamment lisses (par exemple les ensembles dont la frontière est deux fois différentiable),
- les ensembles de dimension deux, excepté les triangles,
- les polytopes simples (i.e. chaque sommet est commun à exactement n facettes), excepté les simplexes.

puis pour les indécomposables :

- les simplexes,
- raccord ("join") d'un point avec un ensemble de dimension inférieure à n (i.e. enveloppe convexe du point et de l'ensemble),
- octaèdre, icosaèdre.

- *Les sommandes*

Un résultat important est la caractérisation des sommandes donnée par G.C. Shephard (cf. théorème (4) [She63], où ci-dessous théorème 1). Cette caractérisation permet à l'auteur de dégager des conditions suffisantes pour qu'un polytope soit



indécomposable ou décomposable.

Quelques remarques préalables sont nécessaires à l'énoncé de ce théorème.

Définition 3 [She63] : Deux polytopes P et Q de dimension n sont *localement similaires* si

$$\dim F(P,u) = \dim F(Q,u), \text{ pour tout } u \neq 0. \tag{1}$$

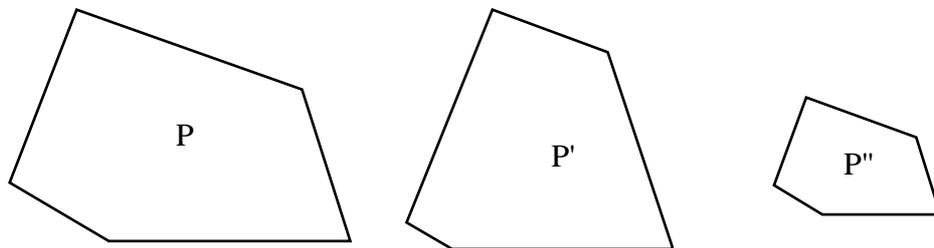
On remarque que si P et Q sont localement similaires alors ils ont le même faisceau de normales.

Si P et Q sont localement similaires, ils ont le même nombre de k -faces et en particuliers de sommets. Soient p_1, \dots, p_{f_0} les sommets de P et q_1, \dots, q_{f_0} les sommets correspondants de Q (où $f_0 = f_0(P)$ désigne le nombre de sommets de P).

A chaque arête de P d'extrémités p_i et p_j correspond une arête de Q d'extrémités q_i et q_j , ces deux arêtes sont parallèles et on a :

$$p_i - p_j = \lambda(q_i - q_j), \tag{2}$$

où le scalaire $\lambda > 0$ dépend de l'arête considérée.



P, P' et P'' sont localement similaires, P et P'' sont homothétiques.

Figure 1 : Polygones localement similaires.

Si, à la place de (1) on impose la condition

$$\dim F(P,u) \geq \dim F(Q,u), \text{ pour tout } u \neq 0 \tag{3}$$

à chaque sommet de P correspond un sommet de Q , mais la réciproque n'est pas vraie car à plusieurs sommets de P peut correspondre le même sommet de Q , ainsi les q_1, \dots, q_{f_0} ne sont pas forcément distincts.

Définition 4 : On note $P \geq Q$, si les polytopes P et Q vérifient (3) et la relation (2) pour chaque arête de P avec $0 \leq \lambda \leq 1$ et λ prenant la valeur zéro quand q_i et q_j coïncident.

Théorème 1 [She63] : Si P et Q sont des polytopes convexes, alors Q est un sommande de P si et seulement si $P \geq Q$.

Par la suite, d'autres auteurs considèrent uniquement la condition (3) sans les contraintes de taille sur les arêtes de Q et P . Cette condition est équivalente à la propriété :

Q est homothétique à un sommande de P .

On notera $Q \leq_H P$ cette relation.

Meyer donne deux autres conditions équivalentes dans [Mey74] (cf. théorème 2) :

Propriété 1 : Si P et Q sont des polytopes convexes de dimension $n \geq 2$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) $P \geq Q$ implique $Q \leq_H P$.
- (b) $(F(P) \subseteq F(Q)) \Rightarrow (P \geq Q)$ pour tout $u \in U$. Et par conséquence $(P) \geq_H (Q)$.

Une autre propriété intéressante des sommandes est :

Propriété 2 [Mey74] : Soient P un polytope de dimension n et $U = \{u_1, \dots, u_{f_{n-1}(P)}\}$ l'ensemble des normales extérieures aux facettes de P . Si Q est homothétique à un sommande de P , alors

$$Q = \{ x ; \langle x, u_i \rangle \leq h(Q, u_i) \quad i = 1, \dots, f_{n-1}(P) \}. \quad (4)$$

En effet d'après la condition (3), si Q admet une facette de normale extérieure v , alors P en admet une également, donc v est colinéaire à l'un des vecteurs u_i . Donc l'ensemble des normales aux facettes de Q est un sous ensemble de U , ainsi Q peut s'écrire sous la forme (4) (cf. Chapitre 1, remarque 3).

• Décomposabilité

Les résultats sur la décomposabilité portent essentiellement sur deux points, le premier consiste à donner des conditions suffisantes "simples" de décomposabilité et indécomposabilité (exemple [Gal54], [She63],...); le second point est la reformulation du problème de façon à obtenir des conditions nécessaires et suffisantes de décomposabilité d'un polytope et à établir une décomposition en sommandes indécomposables.

- *Conditions suffisantes*

Shephard donne une condition suffisante pour qu'un polytope soit indécomposable. Pour cela, il introduit la notion de chaîne de faces :

Une suite finie de faces $\{F_1, \dots, F_s\}$ est appelée *chaîne de faces* si chaque face F_i est de dimension supérieure ou égale à 2 et les intersections $F_i \cap F_{i+1}$ ($i = 1, \dots, s-1$) sont de dimension strictement supérieure à 0.

Proposition 1 [She63] : Un polytope convexe P est indécomposable s'il existe une arête e^* à laquelle chaque sommet est connecté par une chaîne de faces indécomposables.

Par conséquent, on a :

Corollaire 1 [She63] : Si toutes les 2-faces d'un polytope P convexe sont des triangles alors P est indécomposable.

Définition 5 : Soit P un polytope de dimension n . Un sommet de P est dit *simple* s'il est contenu dans exactement n facettes de P . Le polytope P est *simple* si tous ses sommets sont simples.

Définition 6 : Un polytope est *simplicial* si toutes ses faces sont des simplexes.

Une condition suffisante pour qu'un polytope soit décomposable est donnée par :

Proposition 2 [She63] : Soit P un polytope. Si P admet une facette F en position générale (i.e. dont tous les sommets sont simples) et s'il existe au moins deux sommets de P n'appartenant pas à F , alors P est décomposable.

En conséquence des propositions 1 et 2, les polytopes simpliciaux sont indécomposables et les polytopes simples (excepté les simplexes) sont décomposables.

- *Décomposition en sommandes indécomposables*

Un problème abordé dans les différents articles est celui de la décomposition d'un polytope en sommandes indécomposables (cf. [Mey74], [McM73], [S

Notons $\mathbf{U} = \{u_1, \dots, u_{f_{n-1}}\}$ l'ensemble des normales extérieures aux faces de P . Les auteurs abordent le problème en se plaçant dans la famille (\mathbf{U}) de polytopes (pas forcément de dimension n) obtenus par l'intersection de demi-espaces fermés de normales extérieures $u_1, \dots, u_{f_{n-1}}$. Nous donnons, ici, un aperçu des techniques utilisées



et des principaux résultats, mais pour plus de détails il faut se référer aux articles correspondants.

- *Résultats de W. Meyer :*

En premier lieu, W. Meyer (cf. [Mey74]) associe au polytope P un système d'égalités et d'inégalités homogènes. Les inconnues sont les valeurs $\eta_i = h(Q, u_i)$ de la fonction support dans les directions u_i (voir propriété 2); les équations et inéquations traduisent pour chaque sommet de P la condition (a) de la propriété 1 (équivalente à (3)), de la façon suivante :

Chaque sommet est incident à au moins n facettes. On appelle ensemble d'indices pour un sommet s de P , les sous ensembles de $n+1$ indices i_1, \dots, i_n, i_{n+1} , tels que les indices i_1, \dots, i_n correspondent à des facettes de P contenant le sommet s (i_{n+1} étant quelconque).

On a donc pour $k = 1, \dots, n$ $\langle s, u_{i_k} \rangle = h(P, u_{i_k})$.

Et puisque s appartient à P , alors $u_{i_{n+1}}$ vérifie

(i) soit $\langle s, u_{i_{n+1}} \rangle = h(P, u_{i_{n+1}})$,

(ii) soit $\langle s, u_{i_{n+1}} \rangle < h(P, u_{i_{n+1}})$.

Les $n+1$ vecteurs u_{i_k} sont linéairement dépendants, donc il existe des scalaires α_i tels que $\sum_{k=1, \dots, n+1} \alpha_k u_{i_k} = 0$.

Si $u_{i_{n+1}}$ vérifie (i), on pose l'équation :

$$\sum_{k=1, \dots, n+1} \alpha_k \eta_{i_k} = 0, \quad (5)$$

et s'il vérifie (ii), on pose l'inéquation :

$$\sum_{k=1, \dots, n+1} \alpha_k \eta_{i_k} > 0. \quad (6)$$

Les solutions $(\eta_1, \dots, \eta_{f_{n-1}})$ de ce système sont les valeurs des fonctions supports dans les directions u_i , elles définissent des polyèdres homothétiques à des sommandes de P . L'ensemble des solutions est un cône de dimension k , dont les rayons extrêmes représentent les sommandes indécomposables. Si ce cône est de dimension 1, alors P est indécomposable. La dimension k du cône est donnée par la formule :

$$k = f_{n-1} - n - \text{rang du système d'équations (5)}.$$

Si $k > 1$, alors P est décomposable et peut s'écrire comme la somme de au plus k polyèdres indécomposables. Dans le cas où P est simple, le système ne comporte pas d'équations d'où $k = f_{n-1} - n$ et on retrouve la propriété que tout polytope simple est décomposable car $f_{n-1} - n > 1$ (excepté le simplexe car dans ce cas $f_{n-1} - n = 1$).

Une partie de l'article de D.M. Mount et S. Sierman [Mou&Sil91] concerne l'analyse de la complexité de cette méthode pour les polyèdres de dimension 3. Les auteurs énoncent le résultat suivant :

Théorème 2 : Soit P un polytope de dimension n avec N faces.

- La décomposabilité de P peut être déterminée en temps $O(N^3)$, par le calcul du rang d'une matrice de dimension $O(N)$.
- Une décomposition de P en au plus N polytopes indécomposables peut être calculée en temps $O(N^{5.5})$ par au plus N résolutions de problèmes de programmation linéaire de $O(N^2)$ inégalités et N contraintes.

- Résultats de McMullen

Par ailleurs McMullen [McM73] résout ce problème en utilisant une représentation de la famille des polyèdres dans un espace de dimension $f_{n-1}-n$. Cette représentation est définie à partir des dépendances linéaires des normales extérieures aux faces de P . Une dépendance linéaire de U est un vecteur $(\alpha_1, \dots, \alpha_{f_{n-1}})$ de $\mathbb{R}^{f_{n-1}}$ tel que

$$\sum_{i=1, \dots, f_{n-1}} \alpha_i u_i = 0. \tag{7}$$

Les dépendances linéaires forment un sous espace $L(U)$ de $\mathbb{R}^{f_{n-1}}$ de dimension $f_{n-1}-n$. Si $(\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{f_{n-1}j})$, $j = 1, \dots, f_{n-1}-n$ forme une base de $L(U)$, on pose

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{f_{n-1},1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{1,f_{n-1}-n} & \dots & \alpha_{f_{n-1},f_{n-1}-n} \end{pmatrix}.$$

Soit \bar{u}_i un vecteur de $\mathbb{R}^{f_{n-1}}$ qui minimise la $i^{\text{ème}}$ colonne de α :

$$\bar{u}_i = (\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{f_{n-1}i}) \quad i = 1, \dots, f_{n-1}.$$

L'ensemble de vecteurs $U = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{f_{n-1}}\}$ est appelé *représentation linéaire* de U .

Si $\eta_i = h(P, u_i)$ pour $i = 1, \dots, f_{n-1}$, on appelle *représentation linéaire* de P associée à U , l'application σ de $\mathbb{R}^{f_{n-1}}$ dans \mathbb{R}^n définie par

$$\sigma(P) = \sum_{i=1, \dots, f_{n-1}} \eta_i \bar{u}_i.$$

Cette représentation a la propriété d'associer à tout polytope P et à tous ses translatés une unique représentation : le point $\sigma(P)$ est l'image de tout ensemble polyédrique P (non vide) de \mathbb{R}^n par l'application σ appartient à la région de Pos \bar{U} (the close inner region of Pos \bar{U}) définie par :

$$\text{clir } \bar{U} = \cap \{ \text{Pos}(\bar{U} \setminus \{\bar{u}_j\}) ; j = 1, \dots, f_{n-1} \}.$$

La région clivable est partitionnée en cônes relativement ouverts (de sommet 0), appelés *cônes type*, chacun correspondant aux différents types combinatoires de la famille (U) . La dimension du *cône type* contenant $\sigma(P)$ détermine, comme dans [Mey74], la décomposabilité de P et le nombre de polytopes indécomposables permettant d'obtenir une décomposition de P . Et de même que dans [Mey74], on conclut à la décomposabilité des polytopes simples.

- *Résultats de Z. Smilansky :*

Plus tard, Z. Smilansky [Smi87] utilise les dépendances affines de U et de sous-ensembles de U pour déterminer si un polytope P est décomposable. Rappelons qu'une dépendance affine de U est une dépendance linéaire $(\alpha_1, \dots, \alpha_{f_{n-1}})$ qui vérifie la condition supplémentaire : $\sum_{i=1, \dots, f_{n-1}} \alpha_i = 0$. Par cette approche, l'auteur redémontre les propositions 1 et 2 énoncées par Shephard, ainsi que de nouvelles conditions suffisantes de décomposabilité. Les plus originales sont des conditions purement combinatoires sur le polytope P . Par exemple, pour les polyèdres (polytopes de dimension 3) on a le théorème suivant :

Théorème 3 [Smi87] : Soit v et f des entiers, $\frac{1}{2} v + 2 \leq f \leq 2 v - 4$.

- (a) Si $f < v$, alors tout polyèdre avec v sommets et f facettes est décomposable.
- (b) Si $v \leq f \leq 2 v - 7$, alors il existe des polyèdres P et Q ayant chacun v sommets et f facettes tels que P est décomposable et Q est indécomposable.
- (c) Si $2 v - 6 \leq f \leq 2 v - 4$, alors tout polyèdre avec v sommets et f facettes est indécomposable.

Et plus généralement, pour des polytopes de dimension n , Z. Smilanski énonce le théorème suivant :

Théorème 4 : Soit P un polytope de dimension n . Pour chaque sommet v de P , notons $F(v)$ le nombre de facettes de P contenant v . Si

$$\sum_{v \in \sigma_0(P)} F(v) < n \cdot f_0(P) < f_{n-1}(P) - n,$$

alors P est décomposable.

D'autres auteurs (cf. [Sal71] et [Sil73]) ont abordé le problème de la décomposition par l'étude de la fonction support d'un ensemble convexe. R. Silverman donne une démonstration de la propriété énoncée par D. Gale [Gal54] : *Dans le plan les seuls*

ensembles convexes indécomposables sont les triangles et les segments. G.T. Sallee étudie la décomposition de convexes généraux, c'est à dire dont la frontière peut être lisse.

2. Décomposition d'un polygone convexe en somme de segments et de triangles

Le cas des polygones est particulier, car tout polygone convexe P est simple, donc décomposable (sauf le triangle). En appliquant le résultat de W.Meyer ou de P.McMullen, on obtient que P peut s'écrire comme la somme de au plus $f_1(P) - 2$ polygones indécomposables.

Remarque : On observe qu'une décomposition en polygones indécomposables n'est pas unique en général (figure 2).

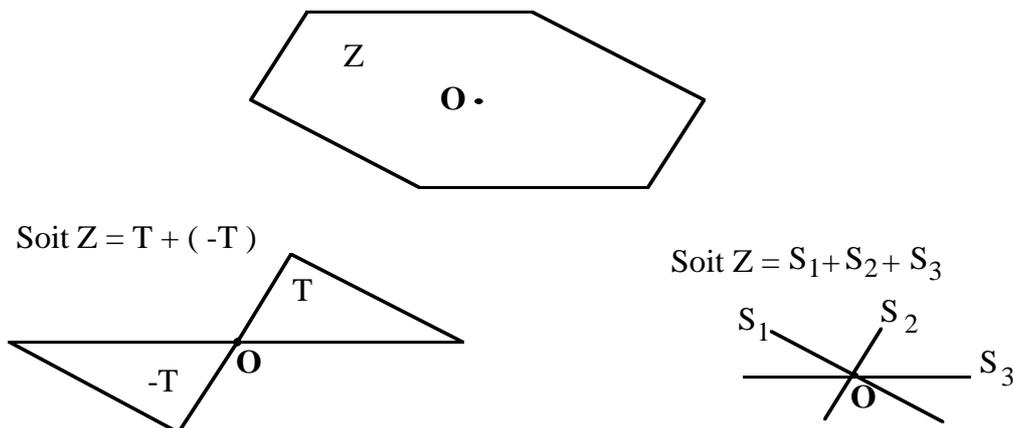


Figure 2 : Deux décompositions de Z .

D'après ce qui précède, on sait que tout polygone peut s'écrire sous la forme d'une somme de triangles et de segments.

Cette propriété permet d'établir une méthode pour décomposer les polygones en sommandes indécomposables. Elle consiste à construire des sommandes du polygone P à partir de son faisceau de normales, et de les retrancher à P au fur et à mesure. On cherche dans un premier temps les sommandes de type segment, puis les sommandes de type triangle. Et à chaque étape, la soustraction d'un sommande supprime au moins un côté du polygone, donc la décomposition de P sera réalisée en au plus $f_1(P) - 2$ étapes (où $f_1(P)$ est le nombre d'arêtes de P).

Pour construire un triangle T sommande de P , il suffit de choisir trois arêtes de P telles que leurs normales extérieures engendrent le plan par des combinaisons linéaires positives.

La représentation de P est telle que l'on peut choisir trois arêtes de P vérifiant ces conditions en temps constant.

Elle est constituée de :

- la liste ordonnée des arêtes de P : e_i .

Et chaque arête e_i est représentée par :

- la normale n_i à e_i extérieure à P ,
- la longueur l_i de l'arête e_i ,

et deux pointeurs sur deux arêtes e_j et e_k choisies telles n_j précède $-n_i$ dans l'ordre trigonométrique et n_k lui succède. Ainsi les vecteurs n_i , n_j et n_k engendrent positivement le plan.

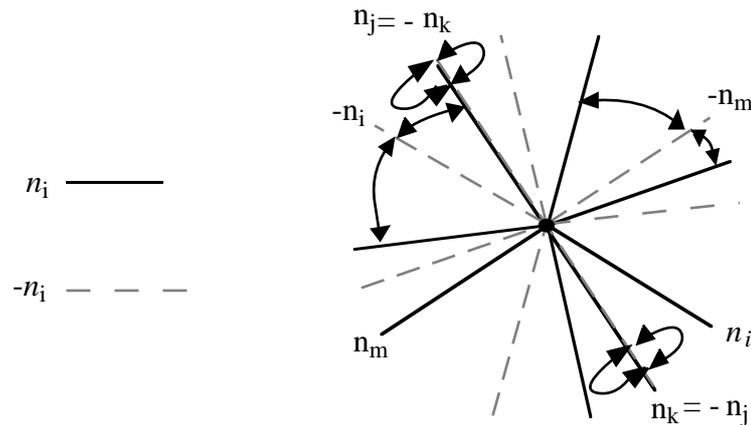


Figure 3 : Représentation de P .

1- Identifier les éventuels segments sommandes.

- En construisant la représentation de P . On retiendra les paires de normales (n_j, n_k) de directions opposées ($n_j = -n_k$).
- Calculer les segments sommandes correspondants.
- Soustraire les segments et mise à jour de la représentation de P . (*)

2- Construire les triangles sommandes.

Tant que le nombre d'arête de $P > 3$

- Prendre une arête e_i ainsi que les deux arêtes e_j et e_k qui lui sont associées dans la structure.
- Calculer le triangle sommande : le plus grand triangle de normales n_i , n_j et n_k de côtés l_i , l_j et l_k vérifiant :
 $|l_i| \leq |e_i|$, $|l_j| \leq |e_j|$ et $|l_k| \leq |e_k|$, où au moins une égalité est réalisée.
- Soustraire le triangle à P et mise à jour de la représentation de P .(*)

fin tant que

(*) Au moins une arête de P est supprimée. Soit e_j cette arête, il faut mettre à jour les arêtes qui pointaient sur e_j (pour former un triangle). Elles doivent pointer sur l'arête précédente ou suivante de e_j .

Par cette méthode, on obtient une décomposition de P en sommandes indécomposables avec un temps de calcul en $O(f_1(P))$.

En effet, à chaque étape, on supprime complètement un côté du polygone. Donc on obtient une décomposition de P en sommandes indécomposables en au plus $f_1(P) - 2$ étapes. Chaque étape à un coût constant (par rapport à $f_1(P)$), et la représentation de P est obtenue en $O(f_1(P))$ si l'ordre des arêtes de P est connu.

3. "Soustraction" de Minkowski de deux ensembles

Le but de ce paragraphe est de donner une expression d'un sommande de tel que $B + C = A$, en fonction de A et de C .

Propriété 3 : Soient A et C deux ensembles de points quelconques de aucune hypothèse

Alors \tilde{B} est le plus grand ensemble de points tel que $\tilde{B} + C \subseteq A$.

preuve : En effet le plus grand ensemble S de points tel que $S + C \subseteq A$, s'écrit

$$\begin{aligned} S &= \{b \in \mathbb{R}^2 \mid b + c \in A\} = \bigcap_{c \in C} \{b \in \mathbb{R}^2 \mid b + c \in A\} \\ &= \{b \in \mathbb{R}^2 \mid \forall c \in C, b \in A - c\}, \end{aligned}$$

d'où $S = \bigcap_{c \in C} A - c$.

Exemple :

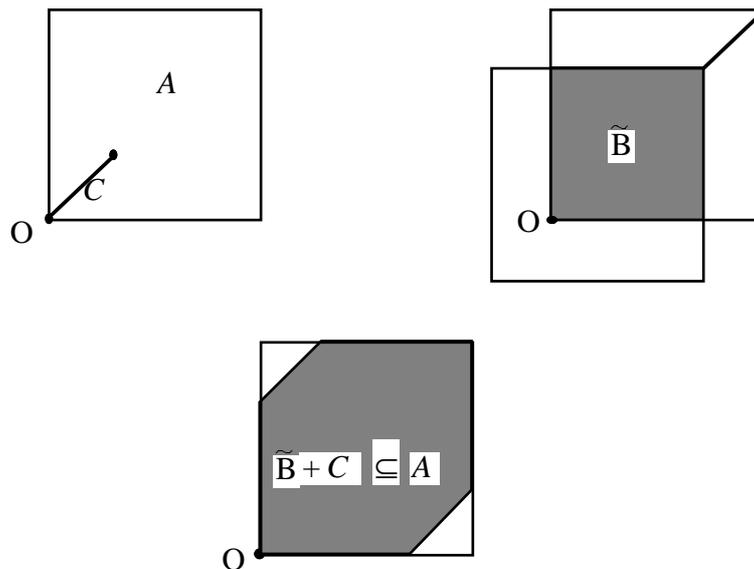


Figure 4 : \tilde{B} .

Remarque : On peut voir \tilde{B} comme l'ensemble des translations admettant C dans A . Cet ensemble a été considéré dans le problème de Minkowski pour les polygones et de polyèdres.

Propriété 4 : Soient A un ensemble de points de \mathbb{R}^n et C un sommande de A , alors l'ensemble \tilde{B} défini ci-dessus est le plus grand sommande de A (au sens de l'inclusion) tel que $\tilde{B} + C = A$.

preuve : Soit B un sommande de A , alors $B + C = A$. Soit B un ensemble B (sommande de A) de \mathbb{R}^n tel que $B + C = A$.
 Tout $b \in B$, vérifie $b + C \subseteq A$, et ainsi $b \in \tilde{B}$. Donc $B \subseteq \tilde{B}$.
 Donc

$$B + C \subseteq \tilde{B} + C$$

$$\text{or } B + C = A \text{ et } \tilde{B} + C \subseteq A.$$

D'où $B + C = \tilde{B} + C = A$.

L'hypothèse C sommande de A ne donne pas l'unicité de l'ensemble B tel que $B + C = A$, en voici quelques exemples :

- Soient $A =] 0,2[$ et $C =] 0,1[$.
 Les ensembles $B_1 =]0,1[$ et $B_2 = [0,1[$ vérifient $C + B_i = A$.
- Avec des ensembles non bornés :
 Soient $A = [0, +\infty[$ et $C = [0, +\infty[$.
 Tous les ensembles $B = [0, a]$ où $a \geq 0$, vérifient $C + B = A$.
- Si on ne se restreint pas aux sommandes B convexes :
 Soient $A = [0,2]$ et $C = [0,1]$.
 Les ensembles $B_1 = [0,1]$ et $B_2 = \{0,1\}$ vérifient $C + B_1 = C + B_2 = A$.

Propriété 5 : Soient A et C deux ensembles de points de \mathbb{R}^n . Soit A un ensemble convexe, fermé et C est un sommande de A compact et non forcément convexe.

Alors l'unique convexe B vérifiant $B + C = A$ est donné par

$$B = \tilde{B} = \bigcap_{c \in C} A - c .$$

preuve : D'après la propriété 4, \tilde{B} est le plus grand sommande de A , tel que $\tilde{B} + C = A$. Supposons qu'il existe un autre sommande convexe B de A avec $B + C = A$,

alors

$$B \subset \tilde{B} \text{ et } B \neq \tilde{B}.$$

Donc il existe un point $p \in \tilde{B}$ tel que $p \notin B$.

Les ensembles $\{p\}$ et B sont convexes, non vides, disjoints, de plus B est fermé et $\{p\}$ est compact. On peut donc appliquer le théorème d'Hahn Banach à ces deux ensembles. Ce qui donne l'existence d'un hyperplan H qui sépare strictement $\{p\}$ et B .

C'est à dire, si H a pour équation $\langle x, v \rangle = \alpha$, alors on a

$$\forall x \in B, \langle x, v \rangle < \alpha < \langle p, v \rangle$$

D'où

$$h(B, v) = \sup_{x \in B} \langle x, v \rangle \leq \alpha < \langle p, v \rangle \leq \sup_{x \in \tilde{B}} \langle x, v \rangle = h(\tilde{B}, v)$$

qui donne l'inégalité stricte

$$h(B, v) < h(\tilde{B}, v). \tag{9}$$

Or pour tout B et C tels que $B+C=A$, on a

$$h(A, u) = h(B, u) + h(C, u) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

De plus, on remarque que dans la direction v la fonction support de A : $h(A, v)$ est forcément bornée, car sinon on aurait :

$$h(A, v) = h(B, v) + h(C, v) = +\infty,$$

avec $h(C, v)$ bornée d'où $h(B, v) = +\infty$, ce qui est en contradiction avec

$$h(B, v) < \alpha < \langle p, v \rangle.$$

Donc

$$h(A, v) = h(B, v) + h(C, v) = h(\tilde{B}, v) + h(C, v)$$

est en contradiction avec (9).

Définition 7 : Soit C un convexe fermé de \mathbb{R}^n . Alors un point $x \in C$ est dit *extrémal* de C , s'il n'existe pas de segment non dégénéré dans C , qui contienne x dans son intérieur relatif (ceci est équivalent à l'ensemble $\{x\}$ est convexe).

On note $\text{Ext}(C)$, l'ensemble des points extrémaux de C .

Théorème 5 (Krein-Milman) : Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe compact. Alors S coïncide avec l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

Théorème (Carathéodory) : Soit S un ensemble de points quelconques de E^n , alors $x \in \text{Conv}(S)$ si et seulement si x peut s'écrire comme combinaison convexe de $n+1$ points de S .

Ainsi, si S est un ensemble convexe compact, alors $S = \text{Conv}(S)$ et tout $x \in S$ peut s'écrire comme combinaison convexe de $n+1$ points extrémaux de S .

Propriété 6 : Soient A un ensemble convexe compact de E^n et C un sous-ensemble fermé (compact) de A , alors l'unique sommande B de A vérifiant $B + C = A$, s'écrit :

$$B = \bigcap_{c \in \text{Ext}(C)} A - c.$$

preuve : Posons $P = \bigcap_{c \in \text{Ext}(C)} A - c$ et montrons $P = \tilde{B}$.

- $\tilde{B} \subset P$: évident.
- $P \subset \tilde{B}$: Soit $x \in P$, il existe $\lambda_s \geq 0$ et $s \in \text{Ext}(C)$ tels que $x = \sum_{s \in \text{Ext}(C)} \lambda_s (A - s)$.
 Tout $c \in C$ s'écrit comme combinaison convexe de points extrémaux de C (Carathéodory & Krein-Milman).
 Pour tout $c \in C$, il existe $\lambda_s \geq 0$ et $s \in \text{Ext}(C)$ tels que $c = \sum_{s \in \text{Ext}(C)} \lambda_s s$ et $c = \sum_{s \in \text{Ext}(C)} \lambda_s s$.
 Or $x \in P$, il existe $\lambda_s \geq 0$ et $s \in \text{Ext}(C)$ tels que $x = \sum_{s \in \text{Ext}(C)} \lambda_s (A - s)$ combinaison convexe de ces $n+1$ points $A - s$. Les coefficients λ_s dans ci-dessus on obtient :

$$\sum_{s \in \text{Ext}(C)} \lambda_s (x + s) = x + \sum_{s \in \text{Ext}(C)} \lambda_s s = x + c \in A \text{ pour } c \in C.$$

D'où $x \in \tilde{B}$.

Ainsi $\bigcap_{s \in \text{Ext}(C)} A - s = \tilde{B}$ et d'après la propriété 5 cet ensemble \tilde{B} est l'unique sommande de A tel que $\tilde{B} + C = A$.

Dans le cas où A est un polyèdre, alors \tilde{B} est l'intersection d'un nombre fini de polyèdres. On a le résultat suivant :

Corollaire 2 : Soient A un polyèdre et C un polyèdre sommande de A , alors le convexe \tilde{B} vérifiant $\tilde{B} + C = A$ s'écrit

$$\tilde{B} = \bigcap_{c \in \text{Ext}(C)} A - c \tag{10}$$

comme l'intersection d'un nombre fini de translats de A .

On rappelle que $\text{Ext}(C)$ est l'ensemble des sommets de C .

L'expression (10) est utilisée dans [Avn&Boi87].

Exemple :

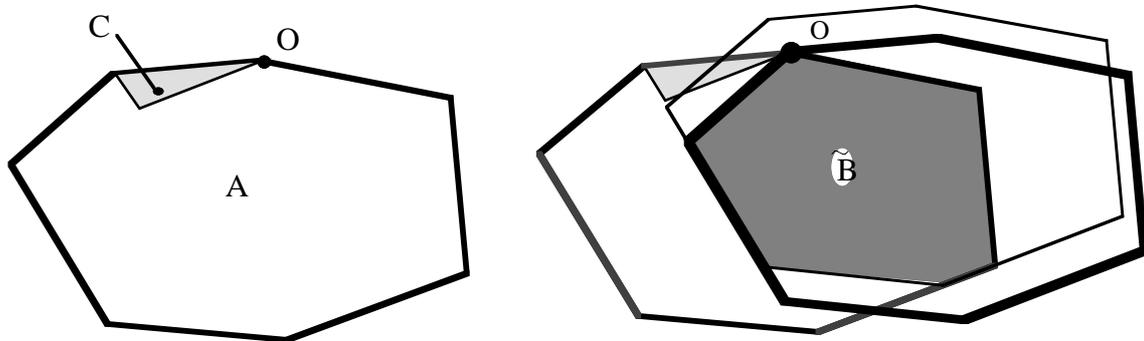


Figure 5 : \tilde{B} intersection de translatsés de A , $\tilde{B} + C = A$.

- Algorithme de calcul de \tilde{B} en dimension 2

A partir de l'expression (10), comment calculer de \tilde{B} le plus grand ensemble tel que $\tilde{B} + C \subseteq A$.

\tilde{B} est l'intersection de translatsés d'un même polytope A . Donc les facettes de \tilde{B} sont parallèles à celles de A , et de ce fait l'ensemble $U_{\tilde{B}}$ des normales (unitaires) aux facettes de \tilde{B} est inclus dans U_A celui des normales (unitaires) aux facettes A . Donc \tilde{B} est défini par

$$\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall u \in U_A, \langle x, u \rangle \leq h(\tilde{B}, u) \} \tag{11}.$$

Or $h(\tilde{B}, u) = h(\cap_{c \in V} A - c, u)$, où V est l'ensemble des sommets de A .
 $= \text{Min}_{c \in V} h(A - c, u) = h(A, u) - h(C, u)$.

- Calcul des valeurs $h(\tilde{B}, u)$ pour tout $u \in U_A$:

On commence par une facette de A de normale $u_1 \in U_A$. On cherche un sommet s de C vérifiant $\langle s, u_1 \rangle = h(C, u_1)$ et on en déduit $h(\tilde{B}, u_1)$.

Puis on parcourt les facettes de A par leur graphe d'adjacences. Lorsqu'on passe d'une facette de A de normale u_i à une facette adjacente de normale u_{i+1} , on cherche le sommet s de C qui vérifie $\langle s, u_{i+1} \rangle = h(C, u_{i+1})$.

Pour des polygones A et C ayant respectivement n_A et n_C arêtes, on obtient les équations des plans d'appui de \tilde{B} dans les directions $u \in U_A$ en temps $O(n_A + n_C)$.

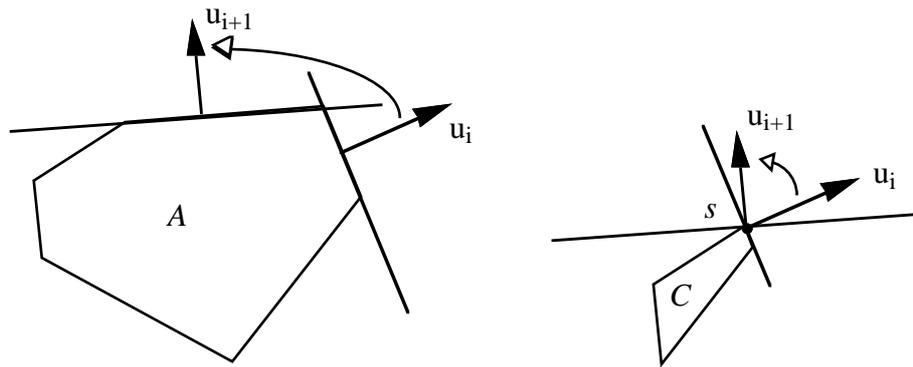


Figure 6 : Calcul de la fonction support de \tilde{B} .

- Calcul de \tilde{B} :

L'écriture de \tilde{B} sous la forme d'intersection de demi-espaces n'est pas forcément minimale et n'est pas structurée.

Dans le plan, on obtient le polygone \tilde{B} en construisant itérativement l'intersection des demi-plans. On ajoute les demi-plans dans l'ordre correspondant à celui des arêtes de A (voir figure 7).

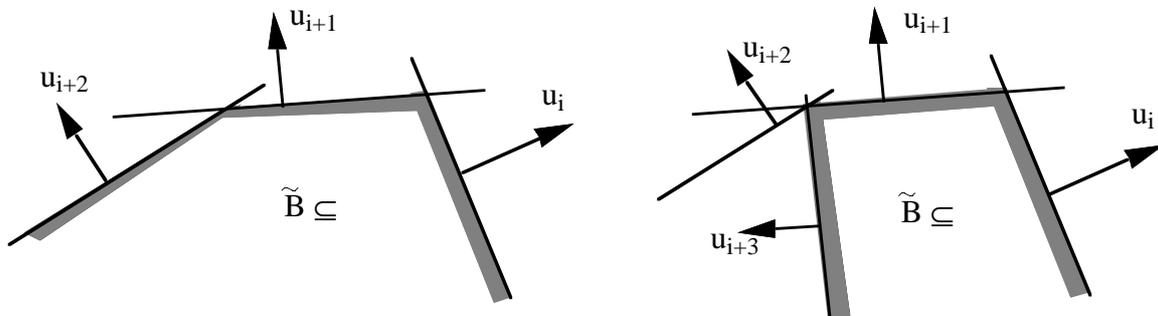


Figure 7 : Calcul de la fonction support de \tilde{B} .

Propriété 7 : Soient A et C deux polygones convexes, ayant respectivement n_A et n_C arêtes, alors on peut calculer le convexe \tilde{B} en temps linéaire par rapport $n_A + n_C$.

Conséquence : On peut déterminer si C est sommable de A (et calculer B tel $B+C=A$, dans le cas où la réponse est positive) en $O(n_A + n_C)$.

En effet, à la suite du calcul de \tilde{B} on construit $\tilde{B}+C$ et on vérifie si $\tilde{B}+C = A$. Pour des polygones convexes, le coût total est linéaire par rapport $n_A + n_C$.

D.M. Mount et R. Silverman traitent cette question pour les polyèdres. Ils énoncent le résultat suivant :

Propriété [Mou&Sil91] : Soient des polyèdres convexes A et C . On peut répondre aux questions suivantes en temps linéaire par rapport au nombre de facettes de A :

- (i) Si $C \leq_H A$.
- (ii) Si $C \leq_H A$, trouver le scalaire α (maximum) tel que αC soit un sommande de A .
- (iii) Si C est un sommande de A , alors trouver B tel que $B + C = A$.

Remarque : En dimension trois, la détermination de \tilde{B} comme intersection de demi-espaces se ferait de façon analogue (au cas des polygones) en $O(n_A + n_C)$ par un parcours par adjacence des facettes de A . Le calcul de \tilde{B} se ferait alors en $O(n_A \log n_A)$ si on n'exploite aucune information supplémentaire.

Conclusion

Le travail de cette thèse nous a permis d'avancer sur les principes mathématiques et leurs implications algorithmiques relatifs au somme de Minkowski (de polytopes convexes).

Les sommes de triangles introduites au chapitre II sont des objets nouveaux, ils généralisent les zonoèdres et pourraient être étudiés en tant que tel. Certaines questions se posent encore concernant la complexité en dimension supérieure à 3. Ainsi il n'est pas prouvé qu'elle est en $\Theta(p^{n-1})$, pour des triangles en position générale.

Les algorithmes proposés ne sont pas spécifiques aux triangles, ils pourraient être adaptés à un cadre plus général, en particuliers ceux qui reposent sur les arrangements de faisceaux de demi hyperplans.

Cette généralisation des zonotopes pourrait s'étendre aux sommes de simplexes, voir aux sommes mixtes segments-triangles. Les méthodes de construction étudiées ici semblent pouvoir également s'adapter à ces objets.

En ce qui concerne le modèle des mélanges qui a servi de point de départ à cette thèse, la compréhension de la faisabilité de plusieurs mélanges se révèle très complexe, même pour des mélanges à seulement 3 composantes.

De nombreuses questions sont encore posées :

- les $O(p^5)$ conditions linéaires sont t-elles effectivement nécessaires pour décider de la faisabilité de 2 mélanges ?
- peut on effectuer de façon simple le passage à plus de 2 mélanges?
- comment exploiter de façon pratique cette formulation géométrique pour obtenir une décomposition et l'optimiser ?
- quelle est la réelle signification mathématique de la sélectivité régulière?

Enfin, les procédés continus de fabrication d'un mélange font apparaître la limite (au sens de la métrique de Hausdorff) de sommes de segments, appelé zonoïde. Les études les concernant portent entre autre sur leur approximation par des sommes de segments ([BLM89],[Dao95]), ou encore sur l'étude de leur surface [DLSV94]. Que donnerait la généralisation continue des sommes de triangles?

Quant au problème de la décomposition de polytopes, des progrès sembleraient possibles sur l'aspect spécifique de la dimension trois par exemple. On pourrait considérer des sommes mixtes segments, triangles et simplexes pour approcher des objets convexes quelconques (c'est à dire pas forcément décomposables). Ceci permettrait de coder ces objets de façon plus économique.

Références bibliographiques :

- [Ale33] A. D. Alexandrov, "*A theorem on convex polyhedra*", Trudy Mat. Int. Steklov, Sect. Math., 4 (1933), 87 (in Russian) (Kraus Reprint Ltd., Vaduz, 1963).
- [Avn&Boi87] F. Avnaim and J.D. Boissonnat, "*Simultaneous containment of several polygons*", In Proc. 3rd Annu. ACM Sympos. Comput. Geom., p. 242-250, 1987.
- [Bar81] I. Barany, "*A vector-sum theorem and its application to improving flow shop guarantees*", Mathematics of operation research, vol. 6, n°3 august 1981.
- [Boi&Yvi95] J.D. Boissonnat & M. Yvinec, "*Géométrie algorithmique*", Ediscience International, collection informatique (1995).
- [Bol69] E.D. Bolker, "*A class of convex bodies*", Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969) p. 323-346.
- [Bon&Fen34] T. Bonnesen & W. Fenchel, "*Theorie der konvexen Körper*", Springer-Verlag OHG, Berlin, 1934.
- [BLM89] J. Bourgain, J. Lindenstrauss, V. Milman, "*Approximation of zonoids by zonotopes*" Acta Math., 162 (1989), p73-145.
- [Buc43] R.C. Buck, "*Partition of space*", Amer. Math. Monthly 50 (1943), 541-544.
- [Cox62] H.S. Coxeter, "*The classification of zonohedra by means of projective diagrams*", Journ. de Math, tome XLI., Fasc. 2, 1962.
- [Cra79] H. Crapo, "*Mathematical questions concerning zonohedral space-filling*", Structural Topology, 1979, n° 2, p. 53-69.
- [Dao95] O. Daoudi, "*Zonotopes et Zonoïdes : Etudes et Applications au Processus de la séparation*", Thèse à l'Université Joseph Fourier 1995.
- [DLSV94] O.Daoudi, B.Lacolle, N.Szafran & P.Valentin, "*Zonoidal Surfaces*", Curves and surfaces for Geometric Design. P.J.Laurent, A.Le Méhauté, L.L. Shumaker (eds), AK Peters, Wellesly, MA (1994).

- [Ede86] H. Edelsbrunner, "*Constructing arrangements of lines and hyperplanes with applications*", SIAM J. Comput., Vol. 15, No 2, May 1986, pp341-363.
- [Ede87] H. Edelsbrunner, "*Algorithms in Combinatorial Geometry*", EATCS Monographs in Theoretical Computer Science 10, Springer Verlag, Berlin 1987.
- [Eva&87] R.C. Evans, G. Koppelman & V.T. Tarjan, "*Shaping geometric objects by cumulative transaltion sweeps*", IBM J. res. develop., Vol. 31, n°3, May 1987.
- [Fed53] E.S. Fedorov, "*Nachala Ucheniya o Figurah*", Leningrad 1953.
- [Gal54] D. Gale, "*Irreducible convex sets*", Proc. Intern. Congr. Math., Amsterdam, 2 (1954), 217-218.
- [Gir86] D. Girard, "*Convexe résidu maximal et gestion de mélanges sur une plateforme*", Rapport de Recherche ELF-Aquitaine.
- [Gir&Val89] D. Girard & P. Valentin, "*Zonotopes and mixtures management*", International series of Numerical Mathematics, vol. 87, Birkhäuser Verlag (1989).
- [Gri&Stu91] P. Gritzmann and B. Sturmfels, "*Minkowski Addition of polytopes: Computational complexity and applications to Gröbner bases*", DIMACS Technical Report 90-8, February, 1990.
- [Gri&Stu93] P. Gritzmann and B. Sturmfels, "*Minkowski Addition of polytopes: Computational complexity and applications to Gröbner bases*", SIAM J. Disc. Math., Vol 6, No 2, pp 246-269, May 1993.
- [Gro78] H. Groemer, "*On multiple space subdivisions by zonotpes*", Monatsh. Math. 1978, vol.86, n°3, p. 185-188.
- [Grü67] B. Grünbaum, "*Convex Polytopes*", Pure and applied Math., vol 16, Interscience, New York 1967.
- [Gui&Sei87] L.J.Guibas and R.Seidel, "*Computing Convolutions by Reciprocal Search*", Discrete & Comput. Geometry 2, 175-193 (1987).

- [Han80] A. Hanegraaf, "*Twenty questions on zonogons, zonohedra and zonooids*", *Structural Topology*, 1980, n°4, p. 31-40.
- [Hil81] W. Hildenbrand, "*Short-Run Production based on Microdata*", *Econometrica*, vol. 49, n°5 (1981), p. 1095-1125.
- [Hil&Ney82] W. Hildenbrand and A. Neyman, "*Integrals of production sets with restricted substitutions*", *J. Math. Economics*, 9 (1982) 71-82.
- [Iwa91] K. Iwano, "*Strong Minkowski decomposition is NP-complete*", *IEECE Translations*, Vol. E74, n°4, P.653-6, April 1991.
- [Kal82] M. Kallay, "*Indecomposable polytopes*", *Israel Journal of Mathematics*, Vol 41, n°3, (1982) 235-243.
- [Kau91] A. Kaul, M.A. O'Connor, V. Srinivarsan, "*Computing Minkowski sums of regular polygons*", *Proc. 3rd Canada Conf. Comput. Geom.*, p 74-77, 1991.
- [Lac&Sza96] B. Lacolle & N. Szafran, "*Complexité des sections planes zonoédres*", *Rapport de Recherche LMC-IMAG 956-M*, Avril 1996.
- [Lac&Val93] B. Lacolle, P. Valentin, "*Modélisation géométrique de la faisabilité de plusieurs mélanges*", *M²AN*, Vol. 27, n°3, 1993.
- [LSV91] B. Lacolle, N. Szafran & P. Valentin, "*Les mélanges binaires : modélisation géométrique et algorithmes*", *Rapport de recherche IMAG - RR 841 -M-* (Fév 1991)
- [Lau87] J.-P. Laumond, "*Obstacle growing in a non-polygonal world*", *Information processing letters*, 25 (1987) 41-50.
- [Mey74] W. Meyer, "*Indecomposables polytopes*", *Trans. American Math. Soc.* 190 (1974), 77-86.
- [McM&She68] P. McMullen and G. C. Shephard, "*Diagrams for centrally symmetric polytopes*", *Mathematika* 15 (1968), 123-138.
- [McM&She71] P. McMullen and G. C. Shephard, "*Convex polytopes and upper bound conjecture*", *London Math. Soc. , Lecture Notes*, vol. 3 Cambridge University Press (1971).

- [McM70] P. McMullen, "*Polytopes with centrally symmetric faces.*" Israel J. Math 8 (1970), 194-196.
- [McM71] P. McMullen, "*On Zonotopes*", Trans. of the American Math. Society, vol 159, September 1971.
- [McM73] P. McMullen, "*Representation of polytopes and polyhedral sets*", Geometriae Dedicata **2** (1973) 83-99.
- [McM87] P. McMullen, "*Indecomposable convex polytopes*", Israel Journal of Mathematics, Vol 58, n° 3, (1987) 321-323.
- [McM&Sch74] P. McMullen, R. Schneider & G.C. Shephard, "*Monotypic polytopes and their intersection properties*", Geometriae Dedicata **3** (1974), 99-129.
- [Mou&Sil91] D.M. Mount & R. Silverman, "*Combinatorial and computational aspects of Minkowski decompositions*", American Mathematical Society vol.119 (1991), 107-124.
- [Pan88] G. Yu Panina, "*Representation of a n -dimensional body in the form of a sum of $(n-1)$ -dimensional bodies*", Soviet Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 1988, 23, n° 4, 91-103.
- [Sal71] G.T. Sallee, "*Minkowski decomposition of convex sets*", Israel Journal of Math. Vol. 12 (1972).
- [She63] G.C. Shephard, "*Decomposable convex polyhedra*", Mathematika vol.10 (1963), 89-95.
- [She67] G.C. Shephard, "*Polytopes with centrally symmetric faces*" Can. J. Math. 19 (1967), 1206-1213.
- [Sil73] R. Silverman, "*Decomposition of plane convex sets, Part I.*", Pacific Journal of Mathematics, Vol. 47, n° 2 (1973), 521-530.
- [Sil&Ste88] R. Silverman and A. Stein, "*Algorithms for the decomposition of convex polygon*", Technical Report CAR-TR-343, Center for Automation Research, Univ. of Maryland, January 1988.
- [Sla86] K.H. Slaoui, "*Application des techniques mathématiques à la gestion des mélanges : histosplines et optimisation*", Thèse INPG Grenoble, 1986.

- [Smi87] Z. Smilansky, "*Decomposability of Polytopes and Polyhedra*", *Geometriae Dedicata* **24** (1987), 29-49.
- [Sza91] N. Szafran, "*Zonoèdres : de la géométrie algorithmique à la théorie de la séparation*", Thèse de l'Université Joseph Fourier 1991.
- [Val86] P. Valentin, "*Zonotopes and Chromatography : a geometric approach of seperation production*", 2nd Congress in Preparative Chromatography HPLC, Washington 12-13 Mai 1986, ed. G. Guiochon.
- [Vale64] F. A. Valentine, "*Convex sets*", McGraw-Hill series in Higher Mathematics.
- [Wei74] W. Weil, "*Decomposition of convex bodies*", *Mathematika* **21** (1974), 19-25.
- [Xuo92] N.H. Xuong, "*Mathématiques discrètes et informatique*", Collection Logique Mathématiques et Informatique (LMI) Ed. Masson.
- [Zas75] Thomas Zaslavsky, "*Facing up to arrangements : Face-Count Formulas for partitions of space by hyperplanes*", *Memoirs of the american mathematical society*, vol. 1, n°154, january 1975.
- [Zie95] Günter M. Ziegler, "*Lectures on Polytopes*", Graduate Texts in Mathematics 152, Springer-Verlag.