

## Minkowski Addition of Triangles

Mireille Rousset

► **To cite this version:**

Mireille Rousset. Minkowski Addition of Triangles. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1996. Français. tel-00005017

**HAL Id: tel-00005017**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005017>**

Submitted on 23 Feb 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE**

présentée par

**Mireille ROUSSET**

pour obtenir le titre de

**Docteur de l'Université Joseph FOURIER - Grenoble I**

(arrêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et du 30 Mars 1992)

Spécialité : Mathématiques Appliquées

---

# Sommes de Minkowski de Triangles

---

*Date de soutenance :* 22 octobre 1996

*Composition du Jury :*

Président : Mr P.-J. LAURENT  
Rapporteurs : Mr J.-D. BOISSONNAT  
Mr J.-C. FIOROT  
Examineurs : Mr B. LACOLLE  
Mr D. NADDEF  
Mr P. VALENTIN

**Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG**

# Table des matières

|   |    |
|---|----|
| <b>Introduction</b>   | 1  |
| <b>Chapitre I Polytopes et Somme de Minkowski : Rappels</b>         | 5  |
| <b>1. Rappels, définitions et notations</b>                         | 6  |
| 1.1 Somme de Minkowski  | 6  |
| 1.2 Outils pour la somme de Minkowski de polytopes                  | 7  |
| • <i>Polytopes</i>  | 7  |
| • <i>Hyperplan d'appui, points d'appui et k-faces d'un polytope</i> | 8  |
| • <i>Cône normal et faisceau de normales d'un polytope</i>          | 10 |
| • <i>Propriétés du faisceau de normales</i>                         | 11 |
| • <i>Rappels sur les arrangements d'hyperplans</i>                  | 13 |
| <b>2. Zonotopes</b>   | 15 |
| 2.1 Définitions et propriétés                                       | 15 |
| 2.2 Zonotopes et arrangements d'hyperplans                          | 17 |
| • <i>Lien entre arrangement d'hyperplans et zonotopes</i>           | 18 |
| • <i>Complexité de <math>Z</math> et de <math>(Z)</math></i>        | 18 |
| • <i>Zone du zonotope et zone dans l'arrangement d'hyperplans</i>   | 20 |
| 2.3 Diagrammes  | 21 |
| <b>Chapitre II Sommes de Minkowski de Triangles</b>                 | 23 |
| <b>1. Généralités</b>   | 24 |
| • Complexité de la somme de polytopes                               | 26 |
| • Construction de la somme de polytopes : Algorithme                | 26 |
| <b>2. Complexité de la somme de triangles</b>                       | 28 |
| <b>3. Propriété des trois demi-zones</b>                            | 34 |

|   |    |
|---|----|
| <b>4. Somme de triangles</b>  | 38 |
| <b>4.1 Construction dans le plan</b>  | 38 |
| <b>4.2 Calcul de la somme de triangles de</b>   | 40 |
| <b>4.3 Calcul de la somme de triangles de</b>   | 42 |
| <b>4.3.1 Préliminaires</b>  | 42 |
| <b>4.3.2 Description de l'algorithme dans</b>   | 49 |
| <b>4.3.3 Extension de l'algorithme à</b>  | 55 |
| <b>5. Exemples de somme de triangles</b>  | 57 |
| <b>Annexe Chapitre II</b>   | 60 |
| <br>  |    |
| <b>Chapitre III Application : Modélisation géométrique<br/>de la fabrication des mélanges</b> | 65 |
| <br>  |    |
| <b>1. Rappel de la modélisation géométrique de la fabrication<br/>d'un mélange</b>            | 66 |
| <br>  |    |
| <b>2. Faisabilité de plusieurs mélanges</b>   | 68 |
| <b>2.1 Fabrication simultanée des mélanges</b>  | 69 |
| <b>2.2 Quelques résultats</b>   | 69 |
| <br>  |    |
| <b>3. Modélisation géométrique de la coexistence</b>  | 70 |
| <br>  |    |
| <b>4. Détermination des facettes d'un convexe de 2-mélanges</b>                               | 71 |
| <b>4.1 Idée de base de l'énumération des facettes</b>   | 72 |
| <b>4.2 Enumération des facettes</b>   | 75 |
| <br>  |    |
| <b>5. Bilan de l'étude des facettes</b>   | 90 |
| <b>5.1 Cas général</b>  | 90 |
| <b>5.2 Cas de la sélectivité régulière</b>  | 93 |
| <br>  |    |
| <b>6. Relations d'Adjacence entre des facettes et Applications</b>                            | 96 |

|                    |   |     |
|--------------------|---|-----|
| <b>Chapitre IV</b> | <b>Décomposition</b>  | 107 |
| <b>1.</b>          | <b>Définitions et principaux résultats sur la décomposition de polytopes</b>    | 108 |
|                    | • Les sommandes   | 108 |
|                    | • Décomposabilité   | 110 |
| <b>2.</b>          | <b>Décomposition d'un polygone convexe en somme de segments et de triangles</b> | 115 |
| <b>3.</b>          | <b>"Soustraction" de Minkowski de deux ensembles</b>                            | 117 |
|                    | <b>Conclusion</b>   | 125 |
|                    | <b>Bibliographie</b>  | 127 |



## Introduction

Ce travail concerne des problèmes géométriques sur des polytopes nouveaux : les sommes de Minkowski de triangles. L'origine de ce problème est une modélisation géométrique de la fabrication des mélanges. Une autre motivation de notre étude, est de considérer ces objets comme une généralisation de la somme de segments, appelée zonotope, car ces polytopes ont suscités beaucoup d'intérêts.

Les zonotopes apparaissent dans des domaines d'applications tels que :

- l'économie, où les productions possibles d'un groupe d'entreprises sont modélisées par un zonotope [Hil81],
- les problèmes de pavages [Gro78], [Cox62].

Le terme zonoèdre (zonotope de dimension 3) a été introduit E.S. Fedorov dans le domaine de la cristallographie. L'auteur s'intéressait particulièrement aux zonoèdres qui pavent l'espace. Les zonotopes ont fait l'objet de nombreuses études qui ont révélé leurs propriétés géométriques et combinatoires. Les principaux résultats sont apparus dans les travaux de H.S. Coxeter, E.D. Bolker, P. McMullen et G.C. Shephard. Citons quelques sujets d'étude :

- la caractérisation des zonotopes par des propriétés de symétrie de leur faces,
- les zones,
- les types combinatoires,
- les diagrammes projectifs pour les zonoèdres.

Les zonotopes interviennent dans le modèle géométrique des procédés de fabrication de mélanges. A partir de la représentation vectorielle des produits, P.Valentin a développé le concept de convexe de mélanges. Ce convexe est un zonotope associé aux produits de base disponibles. Il représente l'ensemble des mélanges faisables, de sorte que la faisabilité d'un mélange s'exprime par l'appartenance d'un point, représentation vectorielle du mélange, au zonotope. Cette modélisation a été à l'origine de différents travaux (cf. [Sla86], [Gir86], [Gir&Val89], [LSV91], [Lac&Val93], [Sza91], [Dao95] ...).

En général, la façon de fabriquer un produit n'est pas unique, d'où l'élaboration d'un critère de gestion des mélanges. Ce critère a pour but de consommer les produits de base de façon à ce que les produits restant après fabrication du mélange permettent de fabriquer le plus grand éventail de mélanges possibles.

Après avoir traité le problème d'un seul mélange, les impératifs de la fabrication ont amené à considérer la fabrication de plusieurs mélanges. Différentes solutions ont été envisagées avec succès pour l'utilisation du modèle dans la pratique : optimisation de la fabrication d'un mélange pour préserver les opérations futures, résolution numérique de la fabrication de plusieurs mélanges en utilisant la programmation

linéaire.

Pour fabriquer plusieurs mélanges, plutôt qu'une stratégie séquentielle de fabrication, où la faisabilité d'un second mélange dépend du choix fait pour la fabrication d'un premier mélange, on regarde si globalement ces mélanges sont faisables. Ce problème est énoncé sous la forme plus générale de *faisabilité simultanée de  $q$  mélanges* à partir des produits de base, et est également appelé problème de *coexistence* de deux familles de vecteurs.

La modélisation géométrique de ce problème introduite dans [Lac&Val93] généralise le convexe de mélanges à celui de  $q$ -mélanges. Ces nouveaux ensembles résultent de la somme de  $q$ -simplexes et la faisabilité simultanée des mélanges est équivalente à l'appartenance d'un point à ce convexe. La faisabilité simultanée de 2 mélanges conduit à l'étude de la somme de triangles.

En dehors du contexte des mélanges, il nous a paru intéressant d'étudier les sommes de triangles en tant que généralisation des sommes de segments, et d'étudier la structure de ces polytopes et des méthodes de constructions. On pourrait élargir cette étude aux sommes de simplexes. Cette voie n'a pas été abordée dans cette thèse, mais les méthodes développées pourraient certainement s'adapter.

Dans le chapitre I, on effectue des rappels sur les polytopes et on introduit les outils utilisés dans cette thèse : les faisceaux de normales, les arrangements d'hyperplans et le premier diagramme projectif, ainsi que les raffinements de faisceaux de normales qui sont fondamentaux pour la suite. On rappelle également certaines propriétés des zonotopes. Ces notions sont empruntées soit à la géométrie classique soit à la géométrie projective.

La somme de triangles est étudiée dans le chapitre II. Les résultats obtenus concernent essentiellement la complexité combinatoire de la somme et sa construction. Ils s'appuient sur l'étude de la somme de polytopes faite par P. Gritzmann et B. Sturmfels (cf. [Gri&Stu83]).

On montre que, comme pour les zonotopes, le nombre de faces de la somme de  $p$  triangles dans  $\mathbb{R}^n$  se comporte en  $O(p^{n-1})$  et cette complexité est atteinte.

Une propriété géométrique similaire à celle des zones d'un zonotope est mise en évidence. De même qu'à un vecteur correspond une zone d'un zonotope, à un triangle correspond trois "demi-zones" sur le polytope.

La construction en dimension 2 ne présente pas de difficulté. Sa description nous permet d'expliquer les deux étapes de la somme. En dimension 3, la construction est plus délicate mais on se ramène à un problème dans le plan, de fusion de subdivisions convexes traité par L.J. Guibas et R. Seidel dans [Gui&Sei87].

On propose, pour la construction de la somme de triangles en dimension quelconque ( $n \geq 3$ ), une méthode qui permet d'extraire la structure combinatoire du



polytope (ou graphe d'incidence) d'un arrangement d'hyperplans par des opérations de fusion de faces.

La construction effective qui résulte de la méthode, permet de bien mettre en évidence la notion de décomposition que l'on illustre sur un certain nombre d'exemples.

L'algorithme décrit en dimension 3 se généralise en dimension supérieure avec une complexité  $O(n^3)$ .

Dans le chapitre III, le système de triangles étudiée est issue du modèle géométrique de fabrication simultanée de deux mélanges. La représentation vectorielle des produits dans le convexe de dimension 6. C'est le prolongement de l'étude menée sur les mélanges binaires (i.e. pour une représentation vectorielle des produits dans [Lac&Val92]). La faisabilité s'exprime par l'appartenance d'un point au convexe de 2-mélanges, ceci a orienté notre étude vers l'énumération des facettes du convexe. Celles-ci permettent d'obtenir un système d'inégalités équivalent à la faisabilité des deux mélanges.

Cette énumération a permis d'établir la "lecture" des facettes à partir du premier diagramme projectif. Il en résulte également que le nombre de facettes peut atteindre  $O(p^5)$  pour  $p$  produits de bases. Le cas de la sélectivité régulière, c'est à dire celui où tout vecteur n'est pas combinaison linéaire positive des autres, donne lieu à une propriété remarquable : les mélanges  $M_1$  et  $M_2$  sont simultanément faisables si et seulement si chacun des mélanges  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_1 + M_2$  est faisable. Ceci correspond effectivement à une dégénérescence du convexe de 2-mélanges qui ne comporte plus que  $O(p^2)$  facettes. Cette simplification avait déjà été observée dans la fabrication d'un seul mélange, et interprétée par une dégénérescence du zonoèdre [Lac&Sza96].

Dans le chapitre IV, on aborde le sujet de la décomposition d'un polytope en somme de polytopes. On donne un aperçu des résultats existants. Dans le plan tout polygone convexe peut s'écrire comme la somme de segments et de triangles. En dimension supérieure le problème de décomposition est beaucoup plus complexe.

On propose une expression de la "soustraction" à un convexe d'un de ses sommandes, sous forme d'intersection de translatés. Et on tente d'examiner ce que cette expression peut apporter du point de vue algorithmique.



## **Chapitre I**

# **Polytopes et Somme de Minkowski : Rappels**

### **Introduction**

Les polytopes convexes ont donné lieu à de nombreuses études. Elles portent sur des aspects combinatoires et géométriques, ou encore sur des problèmes de pavage par des polytopes. On trouvera dans les ouvrages suivants un éventail des problèmes abordés : B. Grünbaum [Grü63], P. McMullen & G.C. Shephard [McM&She71] et G.M. Ziegler [Zie95].

Ce chapitre est une introduction aux problèmes posés dans cette thèse : on y décrit les notions fondamentales pour l'étude et la construction de la somme de Minkowski de polytopes. L'exemple des zonotopes donne une illustration des problèmes traités.

La première partie est consacrée à des rappels sur les polytopes et sur les outils liés à la somme de Minkowski de polytopes. La plupart des notions décrites sont spécifiques au cas des polytopes convexes, dans lequel notre problème se pose : hyperplan d'appui, et faisceau de normales.

Le principal outil de notre étude est le faisceau de normales d'un polytope qui permettra de calculer la somme de polytopes avec sa géométrie et sa combinatoire. C'est un complexe polyédrique particulier. Il permet de ramener la somme de polytopes au calcul du raffinement commun de faisceaux de normales.

Dans la seconde partie, nous présentons les zonotopes, cas particulier de la somme de Minkowski, abondamment étudié par les géomètres. Les principaux résultats sont la caractérisation des zonotopes par des propriétés géométriques de leurs faces, leur lien avec les arrangements d'hyperplans (outil usuel de la géométrie algorithmique), et les diagrammes projectifs associés aux zonoèdres.

# 1. Rappels, définitions et notations

Dans tout ce qui suit, nous travaillons dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  à dimension finie, muni du produit scalaire Euclidien noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

## 1.1. Somme de Minkowski

**Définition 1 :** La somme de Minkowski (ou somme vectorielle) de deux ensembles quelconques  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{R}^n$  est définie par

$$P + Q = \{ p + q : p \in P \text{ et } q \in Q \}.$$

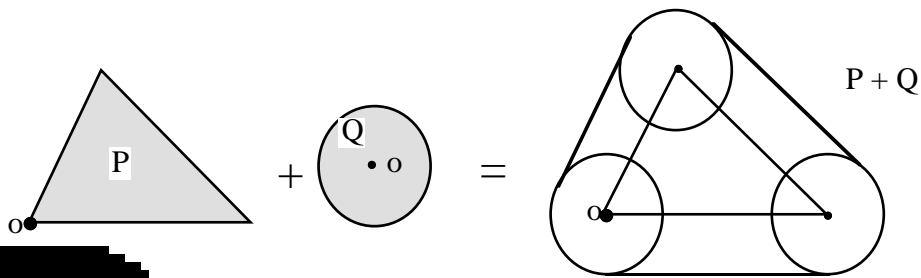


Figure 1 : Exemple, somme d'un triangle et d'un disque.

**Remarque 1 :** La somme de Minkowski peut être vue comme la projection du produit cartésien des ensembles (cf. [Zie95]). Soient  $P$  et  $Q$  deux ensembles quelconques de  $\mathbb{R}^n$ , leur somme peut s'écrire

$$P + Q = \Pi(P \times Q)$$

où

$$P \times Q = \{ (p, q) : p \in P, q \in Q \}$$

et

$$\Pi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ telle que } \Pi(p, q) = p + q$$

**Définition 2 :** Soit  $P$  un ensemble convexe de  $\mathbb{R}^n$ . La fonction support de  $P$ , dans la direction  $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , est définie par :

$$h(P, u) = \sup \{ \langle x, u \rangle / x \in P \}.$$

**Propriété 1** [Vale64] : Soient  $P$  un ensemble convexe compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $h(P, \cdot)$  sa fonction support, alors  $P$  vérifie :

$$P = \{ x / \langle x, u \rangle \leq h(P, u) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \}$$

Ainsi, un ensemble convexe compact est complètement déterminé par sa fonction support. De sorte qu'on peut exprimer la somme de Minkowski de tels ensembles par leurs fonctions supports.

**Propriété 2** [Grü67] : Soient  $P$  et  $Q$  deux ensembles convexes compacts de  $\mathbb{R}^n$  et  $h(P, \cdot)$  et  $h(Q, \cdot)$  leurs fonctions supports respectives. La somme  $P+Q$  est finie comme étant l'ensemble convexe fermé dont la fonction support est donnée par :

$$h(P+Q, u) = h(P, u) + h(Q, u), \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Dans le cas des polytopes, la somme de Minkowski peut également s'exprimer de la façon suivante :

**Propriété 3** : Soient  $P$  et  $Q$  des polytopes. Soient  $p_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) les sommets de  $P$  et  $q_j$  ( $j=1, \dots, m$ ) les sommets de  $Q$ .

$$P+Q = \text{Conv} \{ p_i + q_j \mid i=1, \dots, k \text{ et } j=1, \dots, m \},$$

où Conv désigne l'enveloppe convexe.

### 1.2. Outils pour la somme de Minkowski de polytopes

Dans ce paragraphe, nous introduisons les principales notions et notations relatives aux polytopes. On rappelle, pour commencer, les définitions des hyperplans d'appui, des points d'appui et des  $k$ -faces d'un polytope. Puis, on introduit les notions de cône normal à une face d'un polytope et de faisceaux coniques d'un polytope. Toutes ces notions seront fortement utiles par la suite. Pour plus de détails, on peut se référer à [Gri&Stu91] et [Grü67].

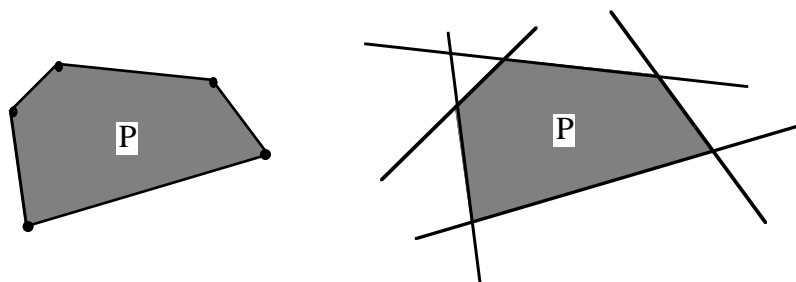
#### • Polytopes

**Définition 3** : Un polytope  $P$  est une partie de  $\mathbb{R}^n$  qui est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points.

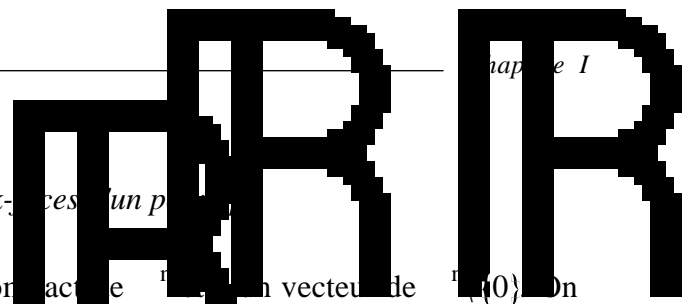
De façon équivalente, un polytope est défini comme une partie bornée de  $\mathbb{R}^n$  intersection finie de demi-espaces fermés.

On trouvera donc les deux expressions suivantes pour définir un polytope  $P$  :

- $P = \text{Conv}(V)$ , où  $V =$  ensemble des sommets de  $P$ ,
- $P = \bigcap_{i=1, \dots, f} H_i^-$ , où  $H_i^-$  est le demi-espace fermé de frontière l'hyperplan  $H_i$ .



**Figure 2** :  $P$  enveloppe convexe de ses sommets, ou intersection de demi-plans.



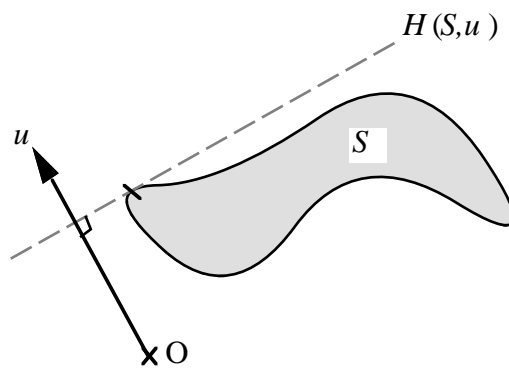
- Hyperplans d'appui, points d'appui et  $k$ -faces d'un polyèdre

**Définition 4 :** Soient  $S$  un ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$  et un vecteur de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . On appelle *hyperplan d'appui* de  $S$  de normale extérieure  $u$  l'hyperplan défini par :

$$H(S,u) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = h(S, u) \}.$$

**Remarque 2 :** L'hyperplan d'appui  $H(S,u)$  doit vérifier :

- $S$  est contenu dans le demi espace fermé de normale extérieure  $u$  délimité par  $H(S,u)$ ,
- et  $H(S,u) \cap S \neq \emptyset$ .



**Figure 3 :** Hyperplan d'appui.

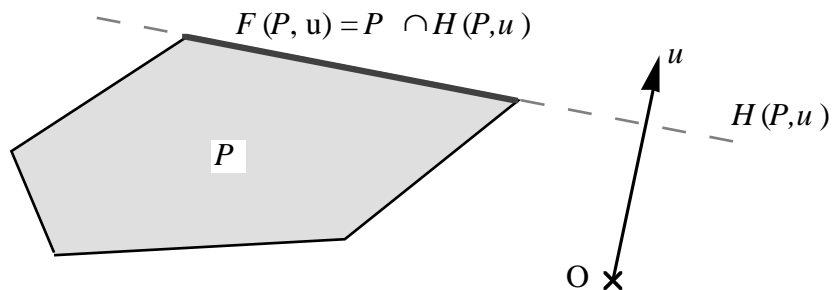
**Définition 5 :** Si  $P$  est un polyèdre, alors

$$F(P,u) = H(P,u) \cap P$$

est une face de  $P$  (ensemble des *points d'appui*). On parlera de  $k$ -face de  $P$  pour désigner une face  $F(P,u)$  de dimension  $k$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ). La dimension de  $F(P,u)$  est celle du plus petit sous espace affine contenant  $F(P,u)$ .

On remarque que la face  $F(P,u)$  est constituée de l'ensemble des points de  $P$ , qui maximisent la fonctionnelle linéaire  $x \rightarrow \langle x, u \rangle$ ,

$$F(P,u) = \{ x \in P \mid \langle x, u \rangle = \text{Max}_{y \in P} \langle y, u \rangle \}.$$



**Figure 4 :** Ensemble des points d'appui.

Les  $0$ -faces, les  $1$ -faces et les  $(n-1)$ -faces sont appelées respectivement sommets, arêtes et facettes (pour un polytope  $P$  de dimension  $n$ ). De la même façon, on parlera de  $n$ -polytope pour désigner un polytope de dimension  $n$ .

On note :  $\mathcal{F}_k(P)$  l'ensemble des faces de  $P$  de dimension  $k$  pour  $k = 0, \dots, n-1$ .  $f_k(P)$  désigne le cardinal de  $\mathcal{F}_k(P)$  et  $\mathcal{F}(P)$  l'ensemble de toutes les faces de  $P$ .

**Remarque 3 :** Soient  $P$  un  $n$ -polytope et  $\{f_1, \dots, f_{f_{n-1}(P)}\}$  l'ensemble de ses facettes. A chaque facette  $f_i$  correspond le demi-espace fermé  $H_i^-$  contenant  $P$  et délimité par l'hyperplan d'appui à  $f_i$ .

La *représentation minimale* de  $P$ , sous forme d'intersections de demi-espaces fermés, est donnée par :

$$P = \bigcap_{i=1}^{f_{n-1}(P)} H_i^-$$

Cette représentation est dite minimale car il est impossible de supprimer l'un des demi-espaces  $H_i^-$  sans modifier  $P$ .

Soit  $P$  un polytope de  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $f$  et  $g \in \mathcal{F}(P)$  deux faces de  $P$ .

**Définition 6 :** On dit que  $f$  et  $g$  sont *incidentes* si  $f$  est contenue dans  $g$  ou si  $g$  est contenue dans  $f$ .

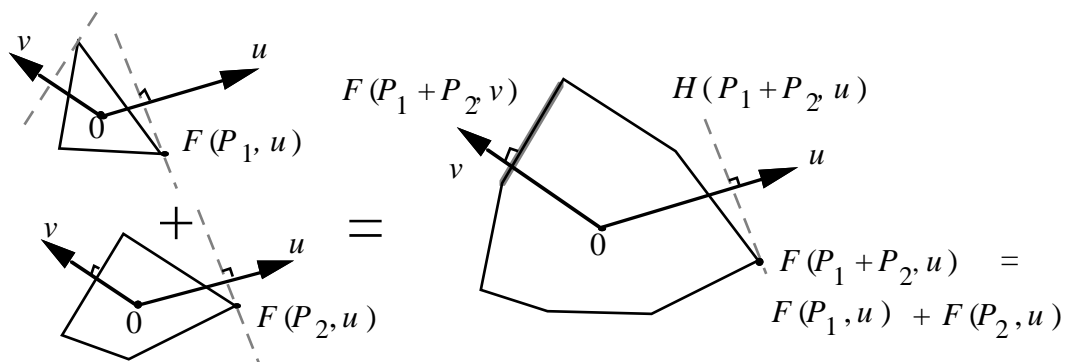
Si  $f$  est contenue dans  $g$ , et  $\dim f = \dim g - 1$ , alors  $f$  est appelée *sous-face* de  $g$ , et  $g$  *sur-face* de  $f$ .

Les propriétés suivantes seront fréquemment utilisées dans la suite.

**Propriété 4 :** Soient  $P_1, \dots, P_k$  des polytopes de  $\mathbb{R}^n$ , alors quel que soit  $u$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , on a la relation

$$F(P_1 + \dots + P_k, u) = F(P_1, u) + \dots + F(P_k, u).$$

**Exemple :**



**Figure 5 :** Points d'appui dans une direction donnée.

• *Cône normal et faisceau de normales*

(cf. [Gri&Stu93])

**Définition 7** [Zie95] : Soit  $f$  une face de  $P$  et  $C_f$  le cône normal en  $f$  à  $P$ , noté  $(f, P)$ .

$$C_f = \{ \alpha u \mid \alpha \geq 0, u \in P \cap \text{Int Rel}(S) \} \quad (*)$$

Dans certains articles, on trouve également la définition suivante (cf. [Gri&Stu93]) :

$$C_f = \{ \alpha u \mid \alpha \geq 0, u \in P \}$$

En fait

$$C_f = \text{Int Rel}(S)$$

où  $\text{Int Rel}(S)$  désigne l'intérieur relatif de  $S$  dans  $\mathbb{R}^n$  (c'est à dire l'intérieur de l'ensemble  $S$  pris dans le plus petit espace affine contenant  $S$ ).

Et réciproquement

$$C_f = \{ \alpha u \mid \alpha \geq 0, u \in \text{Cl}(S) \}$$

où  $\text{Cl}$  désigne la fermeture d'un ensemble.

Dans toute la suite on utilisera la définition (\*).

**Propriété 5** : Soient  $P$  un polytope convexe et  $f$  une face de  $P$ ,  $(f, P)$  est un cône polyédrique de sommet  $0$ .

Par exemple, si  $f$  est une face de  $P$  (dimension  $k$ ), alors  $(f, P)$  est une demi-droite d'origine  $0$  si  $k=0$ , un cône admettant un unique hyperplan d'appui de normale  $u$  si  $k=1$  et  $(f, P) = \{ \alpha u \mid \alpha \geq 0 \}$  si  $k=2$ .

**Exemple**

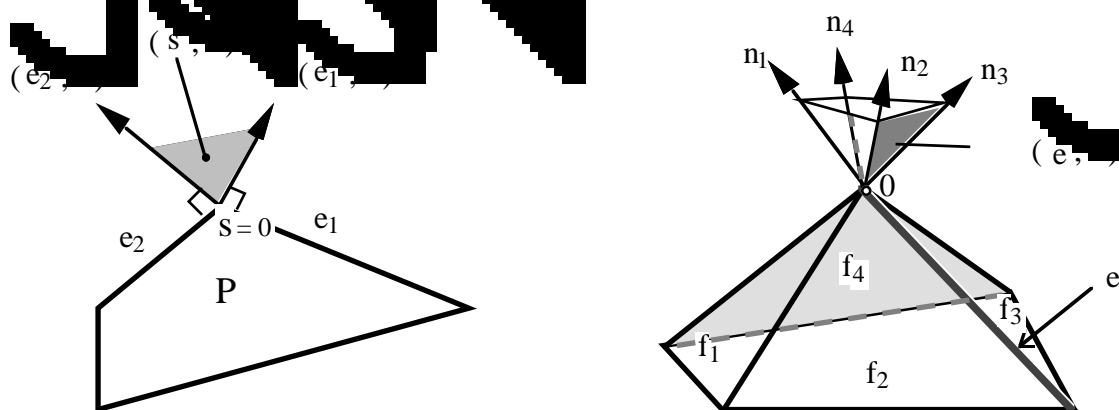
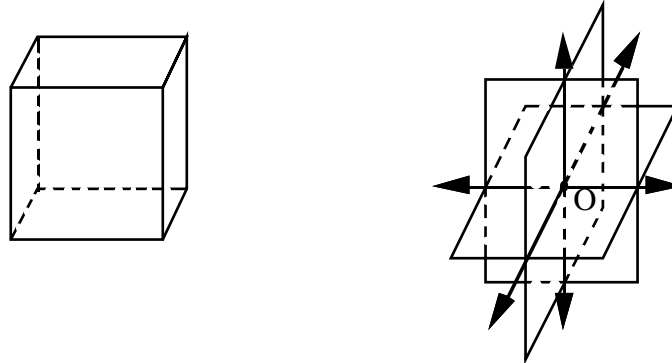


Figure 6 : Cônes de normales.



**Définition 8 :** On appelle *faisceau de cônes normaux* (ou "normal fan") l'ensemble des cônes normaux  $(f, \tau_f)$  pour toute face  $f$  d'un polytope  $P$  et on le note:  $(P) = \{(f, \tau_f) \mid f \in (P)\}$ .

**Exemple :**



**Figure 7 :** Un cube et le faisceau de cônes normaux associé.

• *Propriétés du faisceau de cônes normaux :*

**Définition 9** [Grü67] : Une famille de cônes  $\mathcal{C}$  est appelée *complexion* si :

- (i) Toute face d'un élément de  $\mathcal{C}$  est incluse dans un autre élément de  $\mathcal{C}$ .
  - (ii) L'intersection de deux éléments de  $\mathcal{C}$  est une face d'un des éléments de  $\mathcal{C}$ .
- donc un élément de  $\mathcal{C}$  d'après (i).

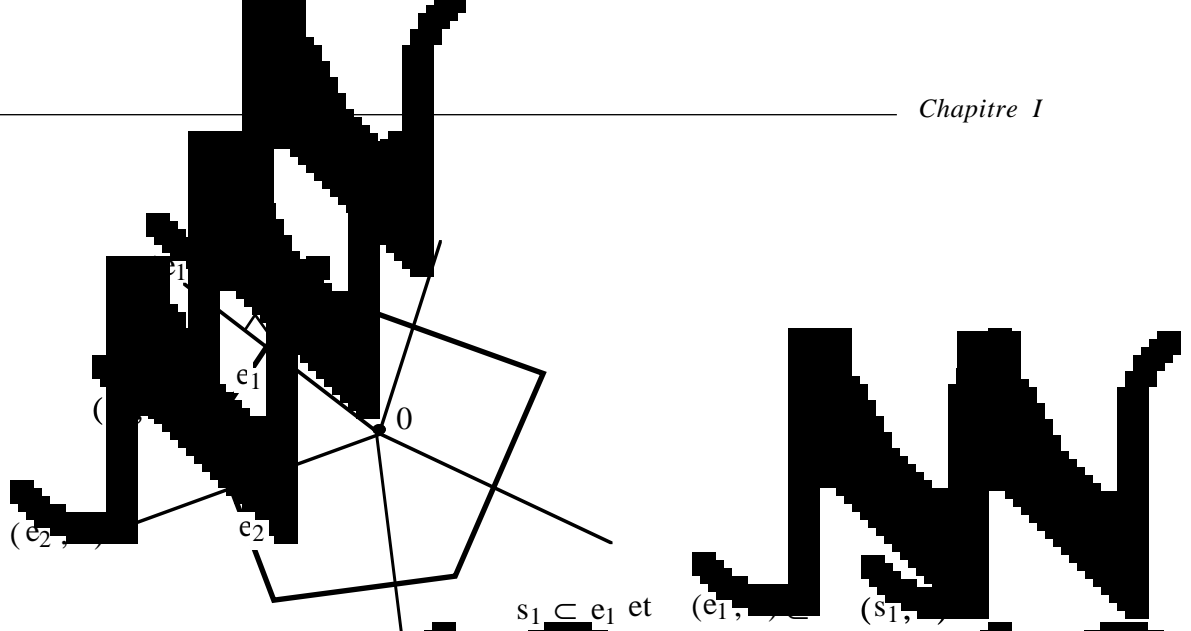
**Propriété 6 :** L'ensemble  $(P)$  est une complexion complète de cônes rayonnés  $(f, \tau_f)$  qui est constitué de cônes (de sommet  $O$ ) pour toutes faces de dimension  $1$  à  $n$ .

L'ensemble de ces cônes  $(f, \tau_f)$  pour tout face  $f \in (P)$ , donne une partition  $\mathbb{R}^n(f)$  formée de cônes polyédriques convexes.

**Propriété 7 :** Étant donné un polytope  $P$ , l'application qui à l'associe  $(f, \tau_f)$  est une bijection entre  $(P)$  et le jeu de toutes les normales  $(P)$ .

A chaque face  $f$  de  $P$  correspond une  $(n-i)$ -cellule de  $(P)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ . (Voir figure 7)

**Propriété 8 :** Soient  $f$  et  $g$  deux faces d'un polytope  $P$ . Si  $f$  est incluse dans  $g$ , alors  $(g, \tau_g)$  est inclus dans  $(f, \tau_f)$ .



**Figure 8 :** Faisceaux de normales dans un polygone.

Les définitions suivantes sur les faisceaux de normales de cellules s'appliquent aux faisceaux de normales associés aux polyèdres.

**Définition 10 :** Un complexe cellulaire est dit *normal* si et seulement si tout faisceau de normales est un élément.

Ceci induit un ordre partiel sur les complexes normaux.

**Définition 11 :** Un complexe cellulaire est dit *normal* si et seulement si 'est normal.

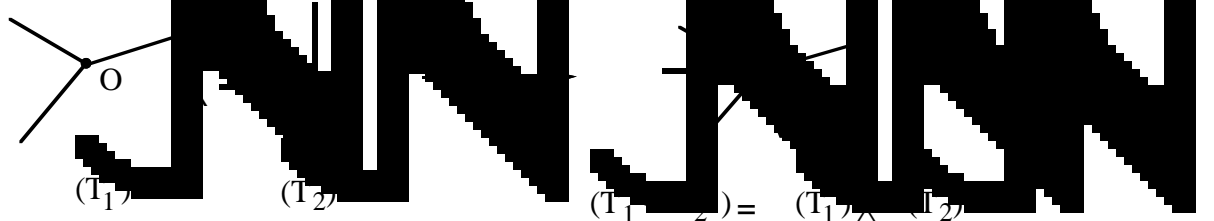
**Définition 12 :** Le plus grand raffinement commun de deux complexes normaux  $(P_1)$  et  $(P_2)$  est le plus grand raffinement commun de  $(P_1)$  et  $(P_2)$ .

c'est à dire le plus grand raffinement commun de  $(P_1)$  et  $(P_2)$ .

**Propriété 9 :** Soient  $(P_1)$  et  $(P_2)$  deux complexes de polyèdres.

$$(P_1) \vee (P_2) = (P_1) \vee (P_2) \vee (P_1) \vee (P_2) \vee \dots \vee (P_1) \vee (P_2)$$

où  $(P_1) \vee (P_2)$  désigne le raffinement commun des  $(P_1)$  et  $(P_2)$ .



**Figure 9 :** Raffinement commun des faisceaux de normales de deux triangles.

**Définition 13 :** Etant donné deux polytopes  $P$  et  $P'$  on dit qu'ils ont la même *type combinatoire* entre  $P$  et  $P'$  si il existe une bijection entre l'ensemble  $(P)$  de toutes les faces de  $P$  et l'ensemble  $(P')$  de toutes les faces de  $P'$  telle que si  $f_1$  et  $f_2$  deux faces de  $P$  telles que  $f_1$  est d'inclusion dans  $f_2$  (à dire si  $f_1$  et  $f_2$  deux faces de  $P$  telles que  $f_1$  est d'inclusion dans  $f_2$ ), alors  $f_1'$  et  $f_2'$  ont la même relation d'inclusion dans  $P'$ .

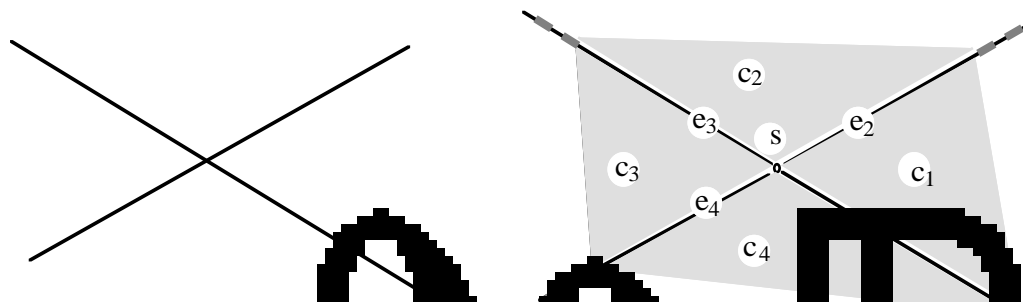
**Remarque :**

- 1- Si deux polytopes  $P$  et  $P'$  sont tels que  $(P) \cong (P')$ , ils ont le même *type combinatoire* et il existe une bijection entre  $(P)$  et  $(P')$  telle que la face  $f$  de  $P$  et la face  $f'$  de  $P'$  ont le même cône normal.
- 2- Pour que deux polyèdres aient même *type combinatoire* il suffit qu'ils aient le même nombre de côtés.

• *Rappels et notations sur les arrangements d'hyperplans* (voir [Ede86, chapitre 1])

Soit  $H$  un ensemble de  $p$  hyperplans de

l'espace  $E^n$ . Un arrangement d'hyperplans dans  $E^n$  est la partition de l'espace induite par un ensemble  $H$  d'hyperplans. Il est constitué d'un ensemble de cellules de dimension 0 à  $n$ . Les  $n$ -cellules de l'arrangement sont des  $n$ -polytopes ouverts non nécessairement bornés, qui sont les plus grands ensembles de points de  $E^n$  qui ne sont pas séparés par un hyperplan de  $H$ . L'intérieur relatif des  $k$ -faces ( $0 \leq k \leq n-1$ ) de ces  $n$ -polytopes forment les  $k$ -cellules de l'arrangement.



Arrangement du plan par deux droites. Les cellules de l'arrangement.

**Figure 10 :** Arrangement d'hyperplans dans l'espace.

On note  $(H)$  l'arrangement d'hyperplans dans  $E^n$ . Selon les auteurs ([Grü67], [Zas75], [Ede86], ...)  $(H)$  est défini soit comme une partition de l'espace (comme dans la description ci-dessus), soit comme un complexe polyédrique sur  $E^n$ . Dans toute la suite, on considérera  $(H)$  comme un complexe, ainsi ses cellules sont la fermeture des  $k$ -faces du partitionnement.

On note :

- $f_k(\mathbf{H})$  le nombre de  $k$ -faces d'un arrangement  $(\mathbf{H})$ ,
- $f_k^{(n)}(p) = \max\{ f_k(\mathbf{H}) \mid \mathbf{H} \text{ ensemble de } p \text{ hyperplans de } \mathbb{R}^n\}$ , maximum sur tous les arrangements de  $p$  hyperplans,
- $i_k(\mathbf{H})$  le nombre d'incidences entre  $k$ -faces et  $(k+1)$ -faces d'un arrangement  $(\mathbf{H})$ ,
- et  $i_k^{(n)}(p) = \max\{ i_k(\mathbf{H}) \mid \mathbf{H} \text{ ensemble de } p \text{ hyperplans de } \mathbb{R}^n\}$ .

**Propriété 10** [Ede86] : Pour  $n \geq 1$  et  $p \geq 1$ , on a

$$f_k^{(n)}(p) = \sum_{i=0, \dots, k} C_{n-1-i}^k C_p^i \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n, \text{ et}$$

$$i_k^{(n)}(p) = 2(n-k) f_k^{(n)}(p), \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n-1.$$

**Définition 14** : Un arrangement  $(\mathbf{H})$  de  $p \geq n$  hyperplans de  $\mathbb{R}^n$  est dit *simple* si toute intersection de  $n$  hyperplans de  $\mathbf{H}$  est réduite à un point et si toute intersection de  $n+1$  hyperplans de  $\mathbf{H}$  est vide.

Les arrangements simples maximisent le nombre de faces et le nombre de faces incidentes, comme l'énonce la propriété suivante.

**Propriété 11** [Ede86] : Soit  $\mathbf{H}$  un ensemble de  $p$  hyperplans de

$$f_k(\mathbf{H}) = f_k^{(n)}(p) \quad \text{et} \quad i_k(\mathbf{H}) = i_k^{(n)}(p)$$

si et seulement si l'arrangement  $(\mathbf{H})$  est simple.

Une autre expression (équivalente) de  $f_k^{(n)}(p)$  est donnée par R.C. Buck (cf. [Buc43]) :

$$f_k^{(n)}(p) = C_p^{n-k} \sum_{i=0, \dots, k} C_{p+k-n}^i. \quad (1)$$

Dans cet article, l'auteur donne également le nombre de faces bornées  $f_{k, \text{ bornée}}^{(n)}(p)$  d'un arrangement simple.

**Propriété 12** [Buc43] :

$$f_{k, \text{ bornée}}^{(n)}(p) = \sum_{i=n-k, \dots, n} (-1)^{n+i} C_i^{n-k} C_p^i. \quad (2)$$

## 2. Zonotopes

Dans ce paragraphe, nous rappelons les principaux résultats relatifs au cas particulier de la somme de Minkowski de segments de droites.

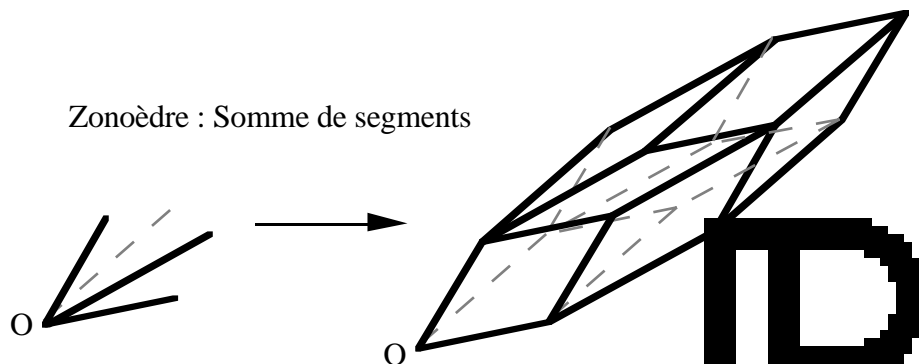
### 2.1 Définitions et propriétés

**Définition 15 :** Un *zonotope* est un polytope défini par la somme de Minkowski de segments de droites fermés.

D'après la remarque 1 (Ziegler), un zonotope somme de  $p$  segments est la projection d'un paralléloétope de dimension  $p$ .

Ces polytopes particuliers ont fait l'objet de nombreuses études de la part de Coxeter, McMullen, Shephard... Dans leurs travaux Coxeter et Fedorov traitent des zonotopes de dimension 2 et 3 appelés respectivement zonogones et zonoèdres.

**Exemple :**



**Figure 11 :** Zonoèdre somme de quatre segments

**Définition 16 :** Soient  $N_1, N_2, \dots, N_p$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Le zonotope associé à ces vecteurs s'écrit :

$$Z(N_1, \dots, N_p) = \sum_{i=1, \dots, p} [0, N_i], \tag{3}$$

Tout zonotope s'écrit sous cette forme à une translation près. En effet, soit le  $Z'$  zonotope défini par  $Z' = \sum_{i=1, \dots, p} [A_i, B_i]$ . Si on pose  $N_i = B_i - A_i$ , on a

$$Z' = \sum_{i=1, \dots, p} A_i + \sum_{i=1, \dots, p} [0, B_i - A_i] = \sum_{i=1, \dots, p} A_i + Z(N_1, \dots, N_p).$$

Ainsi sans perte de généralité, on parlera, dans la suite, de zonotope de la forme (3), associé à un ensemble de vecteurs.

Les zonotopes présentent des propriétés géométriques remarquables.

Soit  $Z$  le zonotope associé aux vecteurs  $\{N_1, \dots, N_p\}$ .  $Z$  admet comme centre de symétrie, le point  $I$  obtenu en faisant la somme des milieux des segments  $[0, N_i]$ .

En appliquant la propriété au zonotope  $Z$  associé aux vecteurs  $\{N_1, \dots, N_p\}$ , on obtient : pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$

$$F(Z, u) = \sum_{i=1, \dots, p} F([0, N_i], u).$$

Or

$$F([0, N_i], u) = \begin{cases} N_i & \text{si } \langle N_i, u \rangle > 0, \\ [0, N_i] & \text{si } \langle N_i, u \rangle = 0, \\ 0 & \text{si } \langle N_i, u \rangle < 0. \end{cases}$$

Donc toute face de  $Z$  s'écrit sous la forme :

$$F(Z, u) = \sum_{i=1, \dots, p / \text{où } \langle u, N_i \rangle > 0} N_i + \sum_{i=1, \dots, p / \text{où } \langle u, N_i \rangle = 0} [0, N_i], \quad (4)$$

c'est à dire comme étant la somme de segments. Donc  $F(Z, u)$  est un zonotope.

Ceci entraîne que toute face d'un zonotope est à symétrie centrale. La réciproque est vraie, d'où la caractérisation suivante des zonotopes donnée dans [She67].

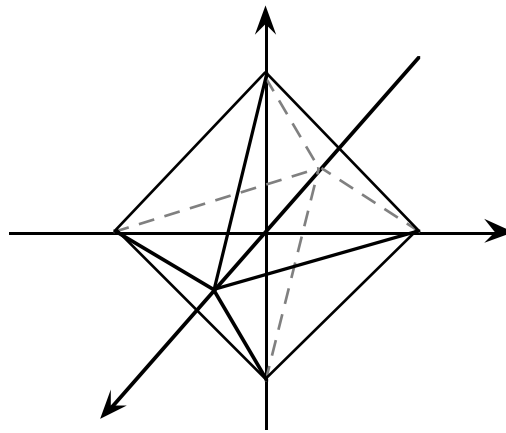
**Propriété 13 :** Un zonotope est un polytope à symétrie centrale, dont toutes les faces sont à symétrie centrale.

**Remarque 5 :**

- Tout polygone (en dimension 2) à symétrie centrale est un zonotope.
- Par contre un polytope à symétrie centrale n'est pas forcément un zonotope ( $n \geq 3$ ). Par exemple le cocube

$$C_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1, \dots, n} |x_i| \leq 1 \right\}$$

est à symétrie centrale, mais pour  $n \geq 3$  ses 2-faces sont des triangles, donc ce n'est pas un zonotope.



**Figure 12 :** Cocube de dimension 3.

A. D. Alexandrov donne la propriété suivante.

**Propriété 14** [Ale33]: Soit  $P$  un polyèdre (i.e. un polytope de dimension 3). Si toutes ses facettes sont à symétrie centrale, alors  $P$  est à symétrie centrale (donc c'est un zonotède).

Cette propriété a été généralisée par Shephard en dimension quelconque.

**Théorème 1** [She67]: Si toutes les  $j$ -faces d'un  $n$ -polytope  $P$  sont à symétrie centrale, où  $j$  est un entier donné vérifiant  $2 \leq j \leq n$ , alors les  $k$ -faces de  $P$  sont à symétrie centrale pour tout  $k$  tel que  $j \leq k \leq n$ .

$P$  étant lui même considéré comme une  $n$ -face, le théorème implique que  $P$  est à symétrie centrale.

Si on applique ce théorème avec  $j = 2$ , on obtient une caractérisation des zonotopes (cf. [McM 70]).

**Propriété 15 :** Un polytope dont toutes les faces de dimension deux sont à symétrie centrale est un zonotope.

En effet, du théorème 1 on déduit que toutes les  $k$ -faces du polytope sont à symétrie centrale pour  $k \geq 2$  (pour  $k = 0$  et  $1$  c'est toujours le cas), donc un tel polytope est un zonotope (d'après la propriété 13).

## 2.2 Zonotopes et arrangements d'hyperplans

Dans ce paragraphe, on rappelle la relation entre les zonotopes et les arrangements d'hyperplans, et comment elle permet de calculer le nombre de faces d'un zonotope.

• *Lien entre arrangement d'hyperplans et zonotopes*

Le faisceau de normales associé à un segment est constitué de l'hyperplan  $H$  orthogonal au segment, privé de l'origine, ainsi que des deux demi-espaces fermés de frontière  $H$  qui contiennent l'origine. Or d'après la propriété 1, le faisceau de normales associé au zonotope  $Z = \sum_{i=1, \dots, p} [0, N_i]$  est le raffinement commun des faisceaux  $(0, N_i]$  pour  $i=1, \dots, p$ .

Posons  $H_Z = \{H_i \mid i=1, \dots, p, H_i \text{ s'hypercasse } \langle N_i \rangle = 0\}$ , alors

est le complexe polyédrique "central" de l'arrangement d'hyperplans  $(H_Z)$ . C'est à dire, toute cellule de  $(Z)$  est une cellule de  $(H_Z)$  privée de l'origine.

L'arrangement  $(H_Z)$  est dit *central* car tous les hyperplans passent par l'origine.

• *Complexité de  $Z$  et de  $(Z)$*

**Notation :** Une fonction  $g(p)$  est dite *linéaire* (en  $p$ ), et seulement si, il existe un entier  $p_0$  et une constante  $c$  tels que :

$$\forall p \geq p_0, g(p) \leq c p.$$

Une fonction  $g(p)$  est dite en  $h(p)$  (en  $h$ ), et seulement si, il existe un entier  $p_0$  et deux constantes  $c_1$  et  $c_2$  telles que :

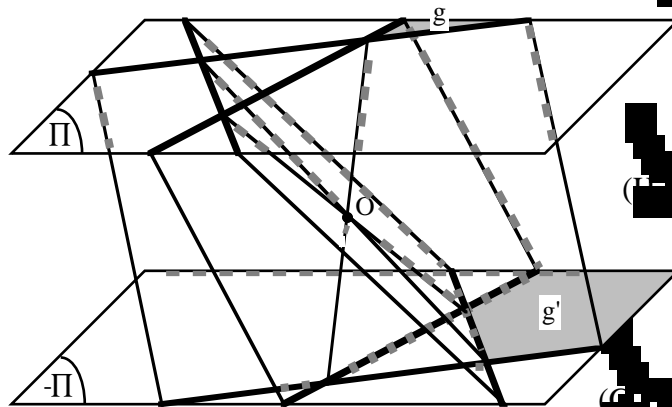
$$\forall p \geq p_0, c_1 h(p) \leq g(p) \leq c_2 h(p).$$

La complexité de  $(Z)$  est celle de l'arrangement  $(H_Z)$  défini ci-dessus.  $(H_Z)$  n'est pas un arrangement simple car tous les hyperplans passent par l'origine. Cependant, on peut faire les remarques suivantes :

Si les segments qui engendrent le zonotope  $Z$  sont en position générale (c'est-à-dire pour tout  $n$ -uplet de segments, les vecteurs directeurs associés engendrent  $\mathbb{R}^n$ ), alors l'intersection de  $(H_Z)$  avec un hyperplan  $\Pi$  (de dimension  $n-1$  et n'ayant pas l'origine) est un arrangement simple de dimension  $n-1$ . On note  $G_Z$  l'ensemble de tous les espaces affines de dimension  $n-2$  définis par  $G_i = \Pi \cap H_i$  pour  $i=1, \dots, p$ .

De même, si on prend l'intersection de  $(H_Z)$  avec le symétrique  $-\Pi$  de  $\Pi$  par rapport à l'origine, on obtient également un arrangement simple  $(G_Z)$  de l'ensemble  $Z^- = \{-G_i, G_i \in G_Z\}$  de sous espaces affines de dimension  $n-2$  dans  $-\Pi$ .





**Figure 13 :** Intersection d'un arrangement de plans parallèles

Les hyperplans  $H_Z$  sont les faces de  $(G_Z)$  incluses dans l'hyperplan  $\Pi$  (où  $\Pi$  est un hyperplan parallèle à l'origine). Dans  $(G_Z)$ , les faces  $(H_Z)$  sont incluses dans un petit perturbé  $\Pi$ , qui sort de l'origine et contient une face de  $(G_Z)$ . On compte les faces  $(H_Z)$  sachant que toute face de  $(G_Z)$  coupe :

- soit une section dans  $(\Pi$  ou  $-\Pi)$  en une  $(k-1)$ -face bornée de  $(G_Z)$  de  $(G_Z)$ .
- soit les deux hyperplans  $\Pi$  et  $-\Pi$  en deux faces non bornées  $g$  de  $(G_Z)$  et  $g'$  de  $(G_Z)$  (cf. figure ci-dessus). Il faut donc compter une seule fois les faces non bornées. D'où

$$f_k(H_Z) = f_{k-1}(G_Z) + f_{k-1}^{\text{bornée}}(G_Z^-),$$

en remplaçant  $f_{k-1}(G_Z)$  et  $f_{k-1}^{\text{bornée}}(G_Z^-)$  par les expressions (1) et (2) de  $f_{k-1}^{(n-1)}(p)$  et  $f_{k-1, \text{bornée}}^{(n-1)}(p)$ , on obtient :

$$f_k(H_Z) = 2 C_p^{n-k} \sum_{j=0, \dots, k-1} \binom{n-k-j}{j} p^j$$

Et d'après la correspondance entre  $k$ -faces d'un polytope et  $(n-k)$ -faces de son faisceau de normales, on retrouve le résultat :

**Propriété 16** [Gri&Stu93] : Le nombre de  $k$ -faces d'un  $n$ -zonotope généré par la somme de  $p$  segments en position générale dans  $\mathbb{R}^n$  est égal à :

$$f_k(Z) = f_{n-k}(H_Z) = C_p \sum_{j=0, \dots, n-k-1} \binom{n-k-j}{j} p^j.$$

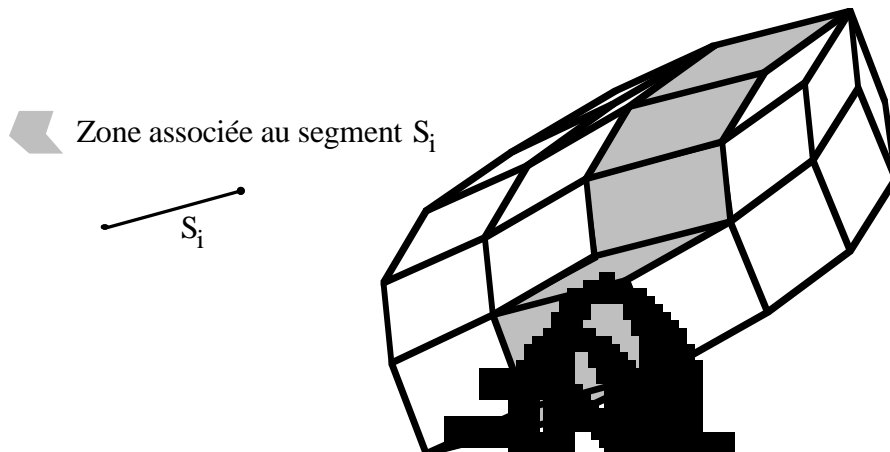
On constate que  $f_k(Z)$  se comporte en  $(p^{n-1})_p$  pour  $k = 0, \dots, n-1$ .

• Zone du zonotope et zone dans l'arrangement d'hyperplans

**Définition 17 :** On appelle *zone* associée au segment  $[0, N_i]$ , l'ensemble des faces du zonotope  $Z(N_1, \dots, N_p)$  qui sont l'intersection de  $Z(N_1, \dots, N_p)$  avec un hyperplan d'appui de normale orthogonale au vecteur  $N_i$ .

Si les vecteurs  $N_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) sont deux à deux non colinéaires alors  $Z$  est un zonotope avec  $p$  zones.

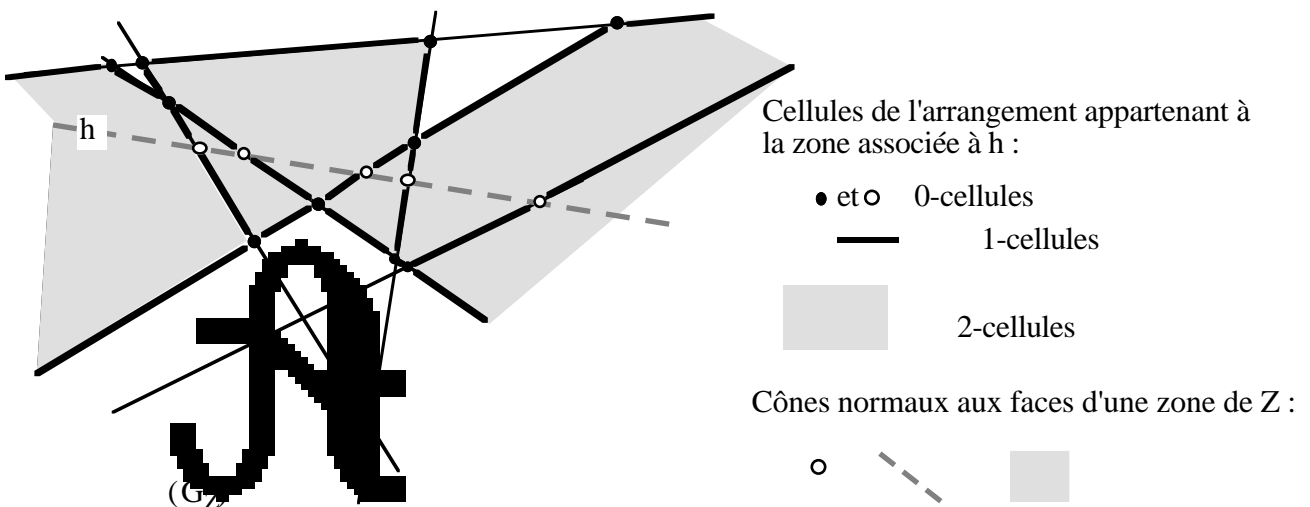
En dimension 3, l'arête commune entre 2 facettes adjacentes de la zone est parallèle au segment  $[0, N_i]$ .



**Figure 14 :** Zonoèdre et zone associée à un segment.

Dans l'arrangement d'hyperplans  $(H_i)$ , la zone associée à l'hyperplan  $H_i$  est formée de l'ensemble des faces de  $Z(N_1, \dots, N_p)$  coupées par  $H_i$  et de leurs faces incidentes.

Les cônes normaux aux faces de la zone de  $Z(N_1, \dots, N_p)$  associée au segment  $[0, N_i]$ , sont les faces de  $(H_i)$  incluses dans  $Z$  et les faces incidentes à l'une d'elles.



**Figure 15 :** Zone d'un arrangement de droites.

### 2.3 Diagrammes

Des diagrammes spécifiques ont été associés aux zonotopes : le "diagramme zonotome" [McM71], le premier diagramme projectif et le deuxième diagramme projectif [Cox62].

Dans le chapitre III, on utilisera la notion de premier diagramme projectif introduite par Coxeter dans [Cox62] pour la classification des zonotopes. Il nous permettra de représenter les différentes configurations de vecteurs d'un zonotope.

On suppose que les vecteurs  $\{N_i, i = 1, \dots, p\}$  sont deux à deux non colinéaires. On pourra toujours se ramener à ce cas, en remplaçant les vecteurs colinéaires par leur vecteur somme.

Soit  $\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$  un ensemble de vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$ . Supposons que les  $N_i$  sont tels qu'il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  vérifiant  $\langle N_i, \mu \rangle > 0$  pour  $i = 1, \dots, p$ . On se ramène à ce cas en remplaçant les  $N_i$  tels que  $\langle N_i, \mu \rangle < 0$ , par  $-N_i$ .  $Z(N_1, \dots, -N_i, N_{i+1}, \dots, N_p)$  est le translaté de  $Z(N_1, \dots, N_p)$  par le vecteur  $-N_i$ .

Soit  $\Pi_\mu$  le plan défini par :

$$\Pi_\mu = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, \mu \rangle = 1\}.$$

**Définition 18 :** On appelle *premier diagramme projectif* associé aux vecteurs  $\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$ , le diagramme dans le plan  $\Pi_\mu$  construit de la manière suivante :

Pour chaque  $N_i$ , on calcule  $P_i$  l'intersection de la demi-droite d'origine 0 passant par  $N_i$ , avec le plan  $\Pi_\mu$ . Dans ce plan, on considère l'ensemble des droites passant par deux points distincts de  $\{P_1, P_2, \dots, P_p\}$ .

**Exemple :**

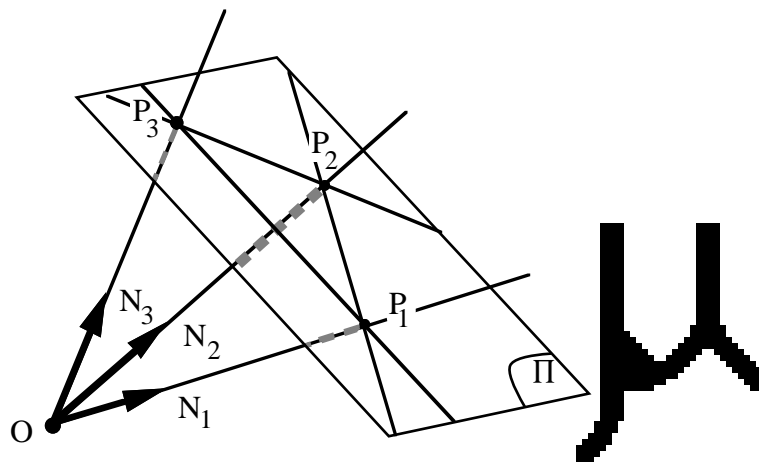


Figure 16 : Premier Diagramme projectif.

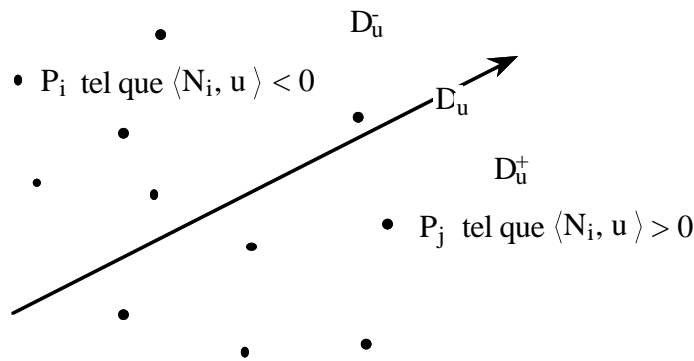
Soient  $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et le plan  $\Pi_u = \{x / \langle x, u \rangle = 0\}$ . Soit  $D_u$  la droite d'intersection entre  $\Pi_\mu$  et  $\Pi_u$ . La droite  $D_u$  est orientée de telle sorte que la partie du plan  $\Pi_\mu$  à droite de  $D_u$  (quand on voit le plan  $\Pi_\mu$  depuis un point  $x$  tel que  $\langle x, \mu \rangle > 1$ ), notée  $D_u^+$ , corresponde à la projection du demi-espace  $\Pi_u^+ = \{x / \langle x, u \rangle > 0\}$  sur  $\Pi_\mu$ .

Pour tout vecteur  $N_i \in \Pi_u^+$ , son image  $P_i$  dans le P.D.P. appartient au demi-plan  $D_u^+$ , de même que si  $N_i \in \Pi_u$ , alors  $P_i \in D_u$ . Et d'après l'expression (4) de  $F(Z, u)$ , on voit que si la droite  $D_u$  contient :

- aucun point  $P_i$ , alors  $F(Z, u)$  est un sommet de  $Z$ ,
- un point  $P_i$ , alors  $F(Z, u)$  est une arête de  $Z$ ,
- deux points  $P_i$  ou plus, alors  $F(Z, u)$  est une facette de  $Z$ .

On peut donc décrire les faces du zonoèdre  $Z = \sum_{i=1, \dots, p} [0, N_i]$ , à partir du P.D.P.

Dans l'exemple ci-dessous,  $F(Z, u)$  est un sommet de  $Z$ .



**Figure 17 :** Premier Diagramme Projectif associé aux vecteurs  $N_i$ .

Dans le chapitre III, on rappellera comment on peut décrire les faces du zonoèdre  $Z = \sum_{i=1, \dots, p} [0, N_i]$ , à partir du P.D.P. On introduira également le deuxième diagramme projectif.

## Chapitre II

# Sommes de Minkowski de Triangles

### Introduction

Les zonotopes sont la somme de simplexes de dimension 1 (segments). Ces polytopes présentent des propriétés géométriques remarquables (voir chapitre 1). Une perspective de généralisation des zonotopes est de prendre la somme de simplexes et en particuliers de triangles.

Dans la première partie, on présente certains résultats de Gritzmann et Sturmfels sur la somme de polytopes (cf. [Gri&Stu93]) qui nous seront utiles par la suite. Il s'agit de résultats combinatoires et d'un algorithme de construction.

La seconde partie porte sur l'étude de la somme de triangles. Elle traite essentiellement de sa complexité, à savoir le comportement asymptotique du nombre de faces en fonction du nombre de triangles. Sur l'aspect géométrique, on ne retrouve pas les propriétés de symétrie des zonotopes. Par contre la propriété de zone se "généralise", sous la forme de trois "demi-zones" associées à chaque triangle. Cette notion est illustrée en dimension 3.

La dernière partie est consacrée au problème de construction de la somme de triangles. Les méthodes proposées reposent essentiellement sur les faisceaux de normales. Des méthodes spécifiques aux dimensions 2 et 3 sont décrites. Elles utilisent des résultats classiques de géométrie algorithmique (fusion de subdivisions planes). La difficulté, pour généraliser la méthode en dimension supérieure, est le calcul du raffinement commun des faisceaux de normales. On propose une méthode qui calcule le raffinement de faisceau de normales en fusionnant des faces d'un arrangement d'hyperplans. La méthode est décrite en dimension 3 et elle est généralisable en dimension quelconque.

Dans ce chapitre, on reprendra les notations introduites dans le chapitre 1.

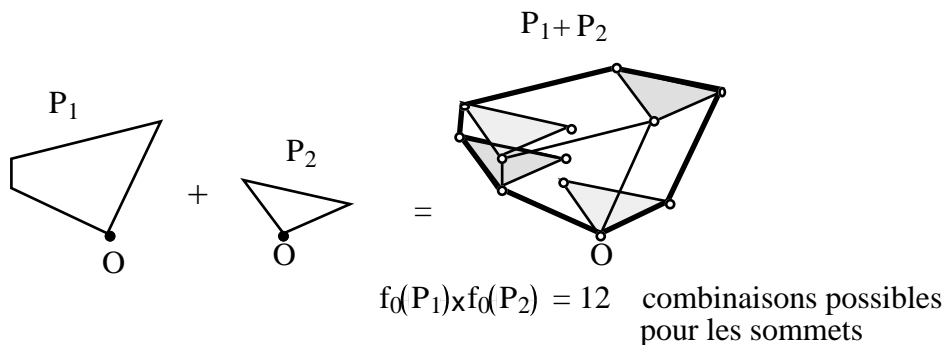
## 1. Généralités

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques résultats concernant la somme de polytopes (voir [Gri&Stu93]).

Soient  $P_1, P_2, \dots, P_p$   $p$  polytopes de dimension  $n$ . On désignera  $S_p$  leur somme.

Le problème est de déterminer la frontière du polytope résultant, c'est à dire de connaître l'ensemble de ses faces (i.e. ses  $k$ -faces,  $0 \leq k \leq n-1$ ), leur nombre et leurs relations d'incidence.

L'écriture d'une face de la somme de polytopes (voir chapitre 1, propriété 4) montre la façon dont les faces de  $S_p$  sont formées. Par exemple, les sommets de la somme  $S_p$  sont la somme de sommets appartenant à différents polytopes (voir chapitre 1, propriété 3 et la figure 1 ci-dessous). Mais reconstituer l'ensemble des faces de  $S_p$  en testant toutes les combinaisons possibles de sommes de faces est une solution trop coûteuse. En effet, pour déterminer l'ensemble des sommets de la somme des polytopes  $P_i$ , il y a  $f_0(P_1) \times \dots \times f_0(P_p)$  combinaisons à tester (où  $f_0(\cdot)$  désigne le nombre de sommets d'un polytope), ce qui pour la somme de triangles donne  $3^p$  combinaisons. Cette méthode donnerait une complexité exponentielle par rapport au nombre de polytopes et de plus le résultat obtenu est une liste de faces non ordonnées, c'est à dire sans relation d'adjacence ou d'incidence.



**Figure 1 :** Somme de polygones.

Si les faisceaux de normales sont représentés par une structure d'incidence entre les cellules, et si le raffinement commun des faisceaux de normales est calculé avec ses relations d'incidences, alors on obtient l'ensemble de toutes les faces du polytope somme ainsi que leur graphe d'incidence. On trouve des méthodes directes pour construire le faisceau de normales dans les petites dimensions (c'est à dire 2 et 3), mais en dimension supérieure le problème est plus complexe. On passera par le calcul intermédiaire d'un complexe plus fin, un arrangement d'hyperplans, pour obtenir le faisceau de normales de la somme.

Gritzmann et Sturmfels dans [Gri&Stu93] ont proposé de remplacer chaque polytope  $P_i$  par le "plus petit" zonotope  $Z(P_i)$  (i.e. le zonotope à un nombre minimum de segments qui le génèrent) tel que  $Z(P_i)$  soit un affinement de  $(P_i)$ . Le zonotope  $Z(P_i)$  associé à  $P_i$  est défini de la façon suivante (voir figure 2) :

$$Z(P_i) = \sum_{e \in \text{edges}(P_i)} e. \tag{1}$$

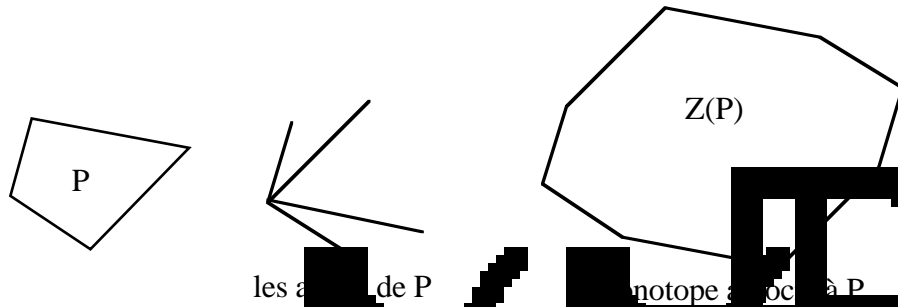


Figure 2 : Zonotope  $Z(P)$  associé au polytope  $P$ .

On a les propriétés suivantes :

**Propriété 1** [Gri&Stu93] : Soient  $P_1, \dots, P_p$  des polyèdres de  $\mathbb{R}^d$ . Alors  $Z(P_1 + \dots + P_p) = Z(P_1) + \dots + Z(P_p)$ .

**Propriété 2** [Gri&Stu93] : Soient  $P$  un polytope et  $Z(P)$  le zonotope associé. Alors  $(P) \subseteq (Z(P))$ .

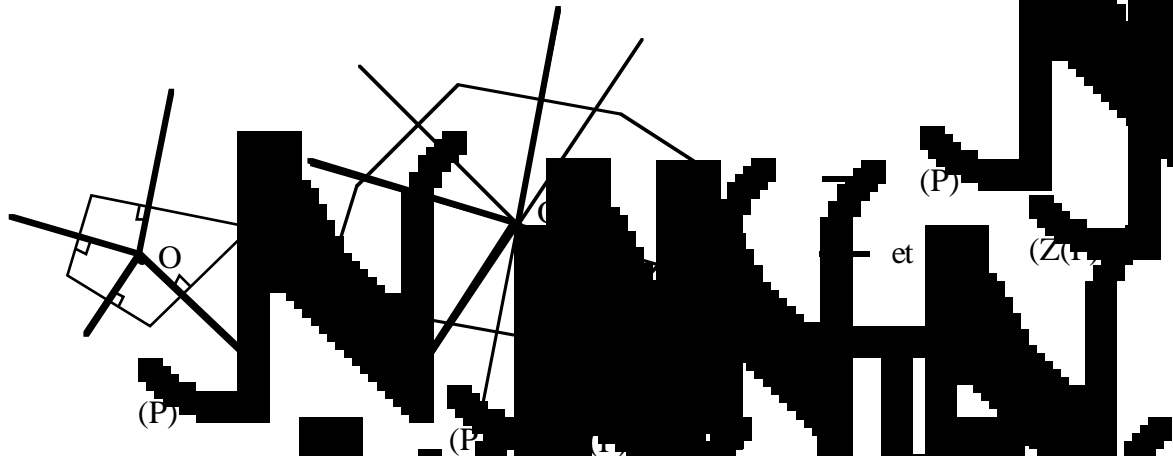


Figure 3 : Le faisceau de normales d'un zonotope est un arrangement d'hyperplans passant

Ainsi on obtient :

**Propriété 3** [Gri&Stu93] : Soient  $P_1, \dots, P_p$  des polyèdres de  $\mathbb{R}^d$ . Alors  $(P_1 + \dots + P_p) \subseteq (Z(P_1) + \dots + Z(P_p)) \equiv \bigcap_{i=1, \dots, p} (Z(P_i))$ .

Le faisceau de normales d'un zonotope est un arrangement d'hyperplans passant

par l'origine. Ainsi, les résultats de complexité sur les arrangements peuvent s'appliquer à  $(Z(S_p))$  de même que les algorithmes de constructions. Ces deux points sont développés ci-dessous :

• **Complexité de la somme de polyèdres**

Gritzmann et Sturmfels donnent une estimation du nombre de faces de  $(S_p)$ , basée sur la propriété  $(S_p) \leq (Z(S_p))$ .

**Propriété 4** [Gri&Stu93]: Soient  $P_1, \dots, P_p$   $p$  polyèdres de  $\mathbb{R}^n$  et  $n$  le nombre total d'arêtes non parallèles des polyèdres  $P_1, P_2, \dots, P_p$ .

On a

$$f_k(P_1 + \dots + P_p) \leq \sum_{j=0}^{n-1-k} \binom{n-1-k}{j} \binom{m-1-k}{m-1-k-j} \quad (2)$$

avec l'égalité si tous les polyèdres  $P_i$  sont des zonotopes et leurs arêtes génératrices sont en position générale.

**preuve :** Dans le chapitre 1, on a vu que chaque arête  $e_i$  du polyèdre  $S_p$  correspond une cellule de dimension  $n-1-k$  dans l'arrangement de  $k$ -faces de  $S_p$  égal au nombre de  $(n-k)$ -cellules de  $(S_p)$ .

De plus  $(S_p) \leq (Z(S_p))$  donc que le nombre de  $k$ -cellules de  $(S_p)$  est majoré par le nombre de faces du zonotope  $Z(S_p)$  majoré par le nombre de faces de  $S_p$ .

$$f_k(P_1 + \dots + P_p) \leq f_k(Z(P_1) + \dots + Z(P_p)) = f_k(Z(S_p)) = f_{n-k}((Z(S_p)))$$

Et d'après la propriété 16 (chapitre 1), on obtient la majoration (2).

On remarque que la borne supérieure du nombre de  $k$ -faces se comporte en  $(m^{n-1-k})$  pour tout  $k$ . Nous reviendrons, dans le paragraphe 2, sur l'estimation du nombre de faces pour le cas particulier de la somme de triangles.

• **Construction de la somme de polyèdres : Algorithme**

Gritzmann et Sturmfels proposent un algorithme de construction de la somme de polyèdres. L'idée de cet algorithme repose sur le fait que  $(Z(S_p))$  est un raffinement de  $(S_p)$ .

Cet algorithme consiste à associer à chaque arête  $e_i$  de chaque polyèdre un hyperplan  $H_i$  orthogonal à  $e_i$  passant par l'origine. On notera  $\mathbf{H}$  l'ensemble de ces hyperplans. L'algorithme se déroule alors de la façon suivante :



- 1- Calcul de l'arrangement  $(H)$  des hyperplans  $H$ , c'est à dire
- 2- Pour chaque  $n$ -cellule  $C$  de  $(H)$  ( $C$  : cône normal à un sommet de  $S_p$ )
  - a- Calcul d'un point  $z$  "échantillon" de  $C$ . ( $z \in \text{IntRel}(C)$ )
  - b- Calcul de  $F(P_1 + \dots + P_p, z)$ . (Face d'appui à  $S_p$  dans la direction  $z$ )
  - c-  $F(P_1 + \dots + P_p, z)$  est retenu dans une liste si ce n'est pas déjà.

Certains sommets peuvent se retrouver plusieurs fois. En effet, un sommet du polytope  $S_p = P_1 + \dots + P_p$  est associé à son voisinage local de cellules de  $(H)$  (voir figure 4, et  $u_2$  appartient à deux cellules d'hyperplans de la même cellule de  $(T)$ ,  $F(T, u_1) = F(T, u_2)$ .

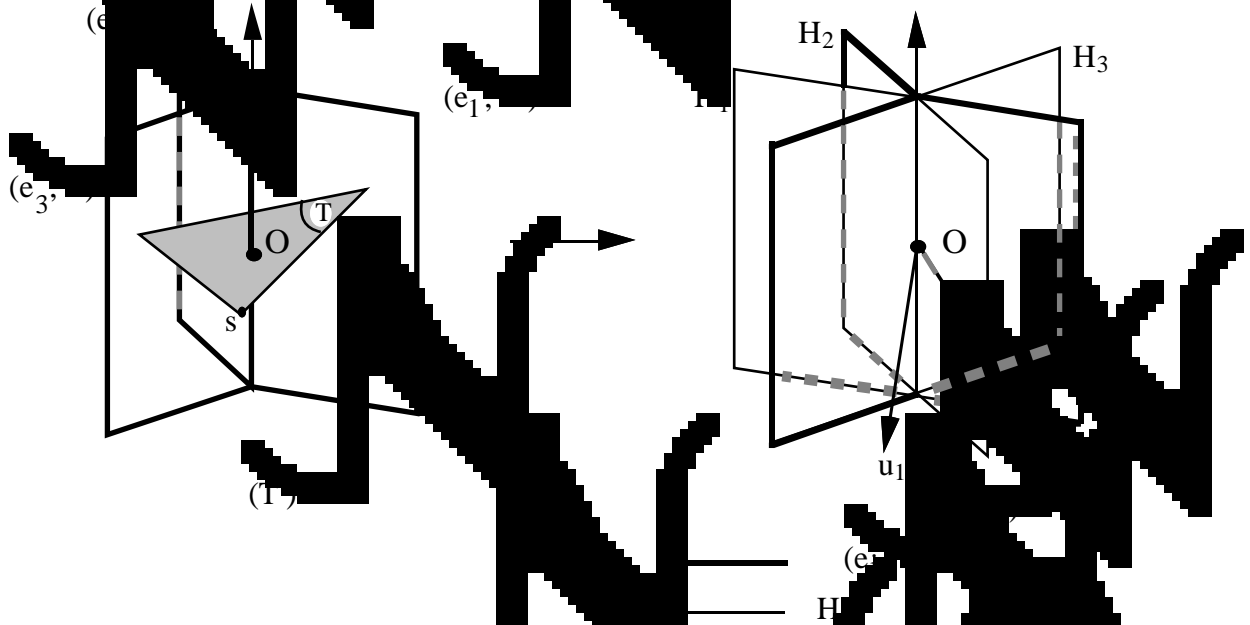


Figure 4 :  $(Z)$  est un raffinement de  $(T)$ .

Dans [Gri&Stu93], le but principal n'est pas d'avoir un algorithme optimal, mais d'étudier la calculabilité du problème. Existe-t-il un algorithme qui résout le problème en temps polynomial ? L'algorithme fournit la liste de toutes les faces de  $P_1 + \dots + P_p$ . Pour obtenir le treillis des faces (i.e. l'ensemble des faces avec leurs relations d'incidences) de  $S_p$ , les auteurs proposent d'appliquer un algorithme d'enveloppe convexe à la liste, et d'obtenir la complexité suivante :

**Propriété 5** [Gri&Stu93] : Soient  $n \geq 3$  et  $P_1 + \dots + P_p$   $p$  polytopes de  $\mathbb{R}^n$  représentés chacun par l'ensemble de ses sommets. Le treillis des faces de  $P_1 + \dots + P_p$  peut être calculé en  $O(p^n s^{2n-1})$  opérations arithmétiques, où  $s$  désigne le nombre maximum de sommets d'un polytope  $P_i$ .

Les algorithmes de calcul d'arrangement d'hyperplans donnent en général le treillis (ou graphe d'incidence) des faces de l'arrangement (cf. [Ede86], [Boi&Yvi95]). La méthode proposée ci-dessus n'utilise pas l'information d'incidence et d'adjacence contenue dans l'arrangement pour réaliser l'étape 2-b et pour déterminer l'ensemble des faces. Dans le cas particulier de la somme de triangles (voir paragraphe 4), nous verrons comment décrire l'ensemble des faces de  $S_p$  à partir de l'arrangement d'hyperplans et avec une complexité optimale (proportionnelle au nombre de faces de  $S_p$ ).

## 2. Complexité de la somme de triangles

Dans ce paragraphe, nous tentons d'évaluer la complexité de la somme de triangles. C'est à dire le nombre de faces du polytope résultant de cette somme en fonction du nombre de triangles et de la dimension  $n$  de l'espace. Rappelons (voir propriété 16, chapitre 1) que le nombre de  $k$ -faces de la somme de  $p$  triangles est de l'ordre de  $p^{n-1}$  pour  $k = 0, \dots, n-1$ .

Dans toute la suite de ce chapitre, on considère la somme de  $p$  triangles  $T_1, T_2, \dots, T_p$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Convention :** Un ensemble de  $p$  triangles  $T_i$  de  $\mathbb{R}^n$  est en position *générale* si et seulement si :

Tout ensemble de  $n$  arêtes prises parmi les arêtes des triangles a au moins deux arêtes d'un même triangle, engendre un polytope.

**Propriété 6 :** Le nombre de  $k$ -faces de la somme de  $p$  triangles de  $\mathbb{R}^n$  est  $O(p^{n-1})$  et cette borne est atteinte.

**preuve :** Si on applique la propriété 4 au cas particulier de la somme de triangles, on obtient la majoration :

$$f_k(T) \leq \sum_{j=0, \dots, n-1-k} c_{3p-1-k}^j$$

Ceci donne une majoration en  $O(p^{n-1})$  du nombre de  $k$ -faces. Il reste à montrer que la complexité de la somme de triangles est effectivement cet ordre de grandeur.

On construit un ensemble de triangles dont la somme a une complexité en  $O(p^{n-1})$  faces. La construction est la suivante :

On se donne  $n$  vecteurs  $\{e_1, \dots, e_n\}$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\langle N_i, e_n \rangle > 0$  pour  $i = 1, \dots, n$  où  $e_n$  est le  $n^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique.

A partir de  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , on construit la famille de triangles  $S = \{T_i, i=1, \dots, p\}$ , où

$T_i = \text{Conv}\{0, N_i, N_i - \epsilon e_n\}$ ,  
 et avec  $\epsilon > 0$  suffisamment petit pour que  
 $\langle N_i - \epsilon e_n, e_n \rangle > 0$ , pour tout  $i$  de 1 à  $p$ .

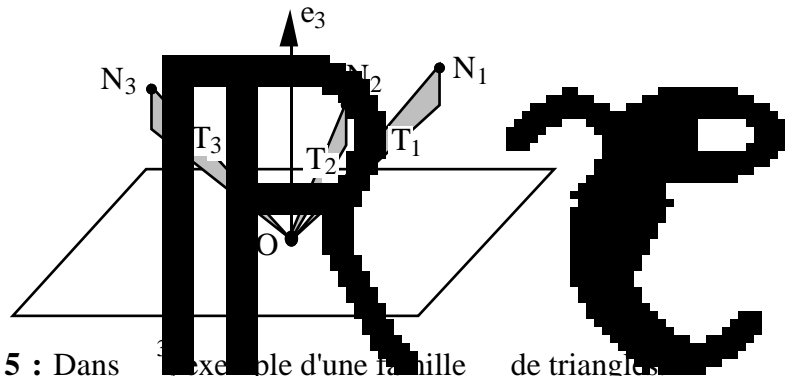


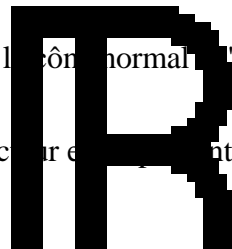
Figure 5 : Dans l'exemple d'une famille de triangles

Les arêtes de  $T_i$  sont numérotées de la façon suivante :

$$e_i^1 = [0, N_i], \quad e_i^2 = [N_i, N_i - \epsilon e_n] \text{ et } e_i^3 = [0, N_i - \epsilon e_n].$$

On note

- $\bar{H}_i^j$ , le demi-hyperplan contenant le cône normal à l'arête  $e_i^j$  du triangle  $T_i$ ,
- $H_i^j$  l'hyperplan contenant  $\bar{H}_i^j$ , et
- $H_n$  l'hyperplan orthogonal au vecteur  $e_n$  passant par l'origine.



On fait les observations suivantes :

Les cônes normaux  $\bar{H}_i^1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, N_i \rangle = 0 \text{ et } \langle x, e_n \rangle > 0\}$  se trouvent dans le demi-espace  $H_n^+ = \{x \mid \langle x, e_n \rangle > 0\}$  délimité par l'hyperplan  $H_n$ , alors que les cônes normaux  $\bar{H}_i^3$  sont inclus dans  $H_n^- = \{x \mid \langle x, e_n \rangle < 0\}$ , et les cônes  $\bar{H}_i^2$  sont inclus dans  $H_n$  (voir figure 6).

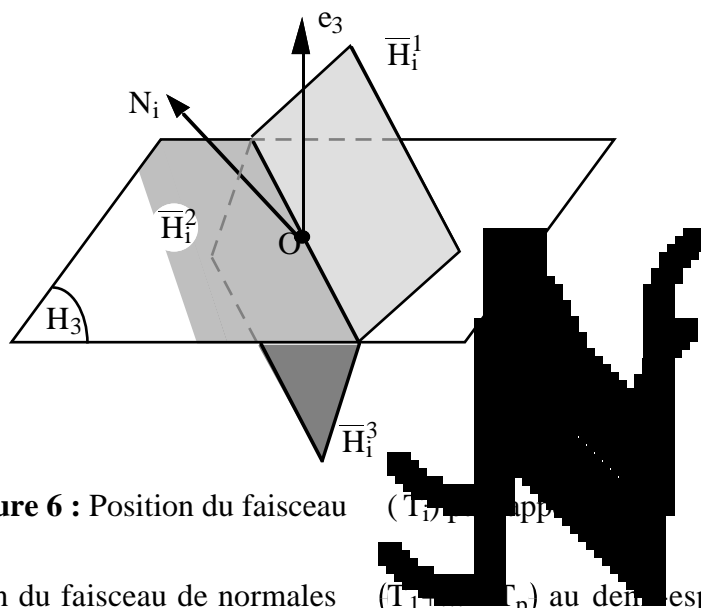


Figure 6 : Position du faisceau  $(\bar{H}_i^1, \bar{H}_i^2, \bar{H}_i^3)$  app

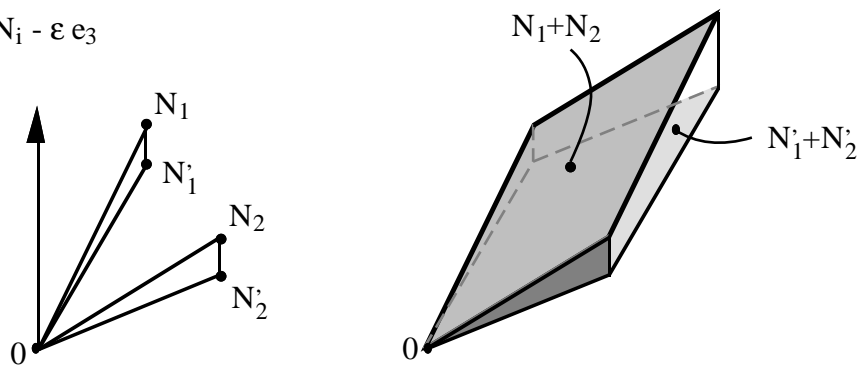
La restriction du faisceau de normales  $(T_1, \dots, T_p)$  au demi-espace  $H_n^+$  est identique à la restriction de l'arrangement des hyperplans de  $\mathbf{H}^1 = \{H_i^1, i=1, \dots, p\}$  à

$H_n^+$ . De même (cf. [1]) l'arrangement central de  $p$  hyperplans dans l'espace  $H_n$  est identique à la restriction de l'arrangement des hyperplans  $H_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) à  $H_n$ .

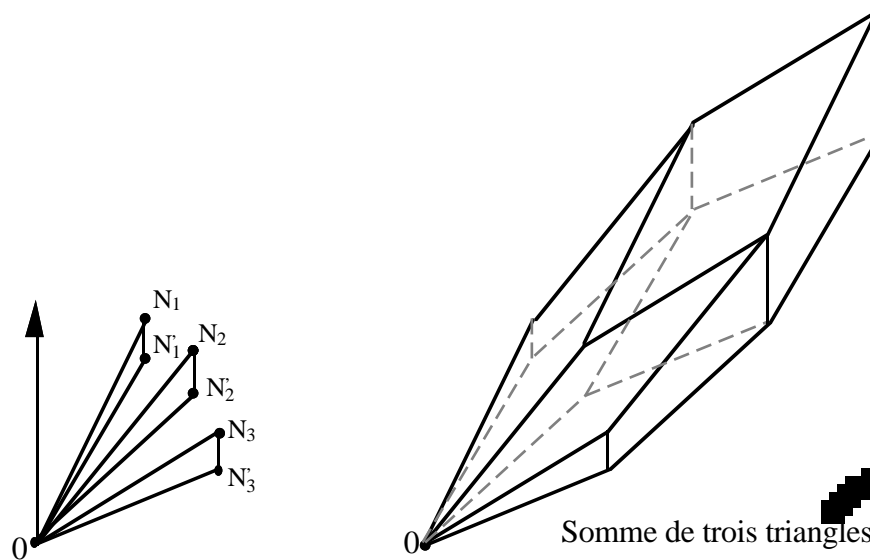
Or le nombre de faces de dimension  $k \leq n$  d'un arrangement central de  $p$  hyperplans (i.e. les hyperplans passent par l'origine) est de l'ordre de  $p^{n-1}$ . Chacun des deux arrangements  $(H_i^+)$  et  $(H_i^-)$  est symétrique par rapport à l'origine (cf. chapitre §2.2), donc leur complexe est également de l'ordre  $p^{n-1}$  respectivement sur  $H_n^+$  et sur  $H_n^-$ . Donc le nombre de faces de la somme des triangles de la famille est en  $\Theta(p^{n-1})$ .

**Exemples** (dans  $H_3$ )

$$N'_i = N_i - \varepsilon e_3$$



Somme de deux triangles.



Somme de trois triangles

**Figure 7** : Exemples.

**Remarque :** Soit  $S_T$  le polytope somme des triangles de la famille décrite ci-dessus. La partie de frontière de  $S_T$  orientée positivement par rapport au vecteur  $e_n$  (i.e. l'ensemble des facettes dont la normale extérieure  $v$  vérifie :  $\langle v, e_n \rangle > 0$ ) est identique, à une translation près, à celle du zonotope  $Z = \sum_{i=1, \dots, p} [0, N_i]$ .

On fait la même observation pour les faces orientées négativement par rapport à  $e_n$  et le zonotope  $Z' = \sum_{i=1, \dots, p} [0, N_i - \epsilon e_n]$ . Ces deux parties de la frontière de  $S_T$  sont reliées par les faces de  $S_T$  ayant une normale incluse dans le plan  $H_n$  (voir figure 7).

Pour les dimensions 2 et 3, on peut donner une complexité plus précise de la somme de triangles, dans les cas où ils sont en position générale.

**Complexité dans**

**Propriété 7:** Soient  $p$  polygones  $P_1, P_2, \dots$  et  $P_p$  dans le plan, dont les arêtes sont deux à deux non colinéaires. Le nombre d'arêtes de leur somme est alors donné par :

$$f_1(P_1 + \dots + P_p) = \sum_{i=1, \dots, p} f_1(P_i),$$

ce qui donne pour la somme de  $p$  triangles :

$$f_1(T_1 + \dots + T_p) = \sum_{i=1, \dots, p} f_1(T_i) = 3p.$$

**preuve :** Evidente.

**Complexité dans**

En dimension trois, la géométrie particulière des faisceaux de normales associés aux triangles permet d'obtenir un encadrement du nombre de faces

**Propriété 8:** Soient  $T_1, T_2, \dots$  et  $T_p$  des triangles de  $\mathbb{R}^3$ . On suppose que ces triangles sont en position générale. On a alors :

$$2p + 4 C_p^2 \leq f_2(T_1 + \dots + T_p) \leq 2p + 5 C_p^2,$$

$$3p + 8 C_p^2 \leq f_1(T_1 + \dots + T_p) \leq 3p + 9 C_p^2,$$

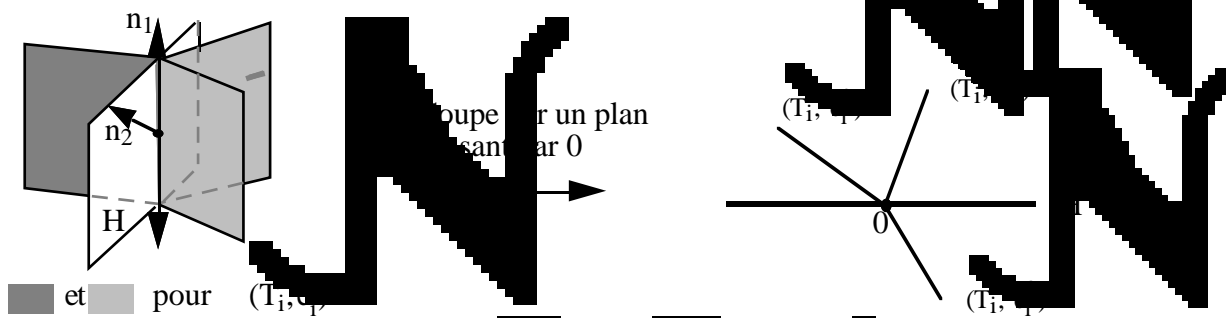
$$2 + p + 4 C_p^2 \leq f_0(T_1 + \dots + T_p) \leq 2 + p + 5 C_p^2.$$

**preuve :** Soient deux triangles  $T_1$  et  $T_2$  vérifiant les hypothèses de la propriété. On notera  $n_1$  (respectivement  $n_2$ ) la direction normale au triangle  $T_1$  (respectivement  $T_2$ ). Afin de déterminer le nombre de 1-cellules de  $(T_1 + T_2)$ , on fait les observations suivantes :

Soit  $H$  le plan défini par les vecteurs  $n_1$  et  $n_2$ .

- Le plan  $H$  sépare l'ensemble des cônes normaux aux arêtes des triangles  $T_1$  et  $T_2$ ,  $\{ (e_i, -e_j) \mid i, j = 1, 2, 3 \}$  en deux sous ensembles : deux cônes d'un côté du plan  $H$  et

un de l'autre (voir figure 8).



**Figure 8 :** Répartition des cônes normaux à des arêtes de triangle par rapport à H.

- Si le cône normal à l'arête  $e_1$  de  $T_1$  est dans le demi-espace  $H$  et que le cône normal à l'arête  $e_2$  de  $T_2$ , alors ces deux cônes n'ont pas d'intersection.

c'est donc une cellule de  $(T_1, T_2)$  (voir figure 9).

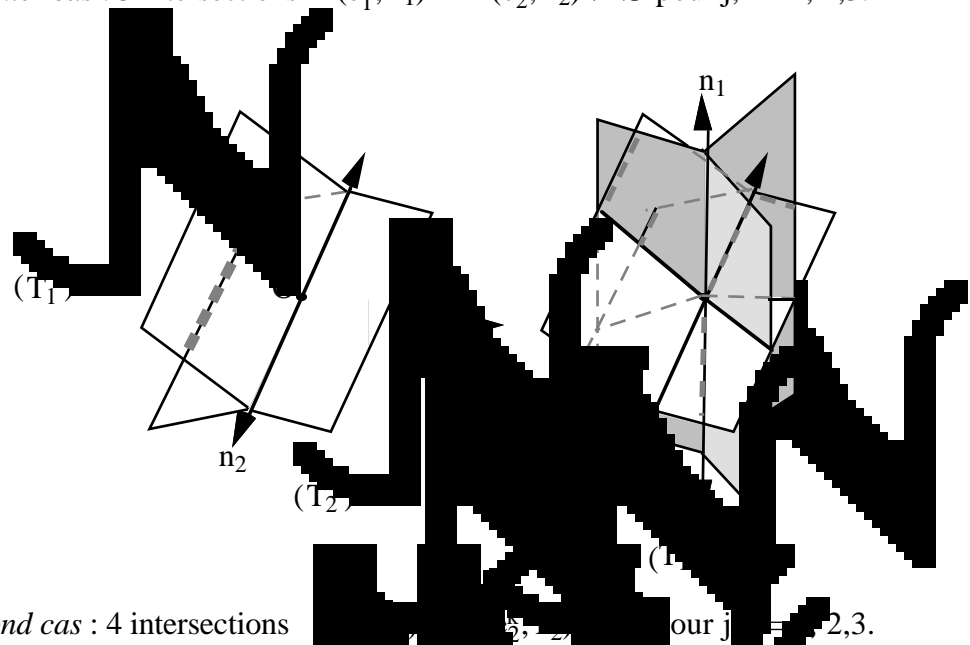
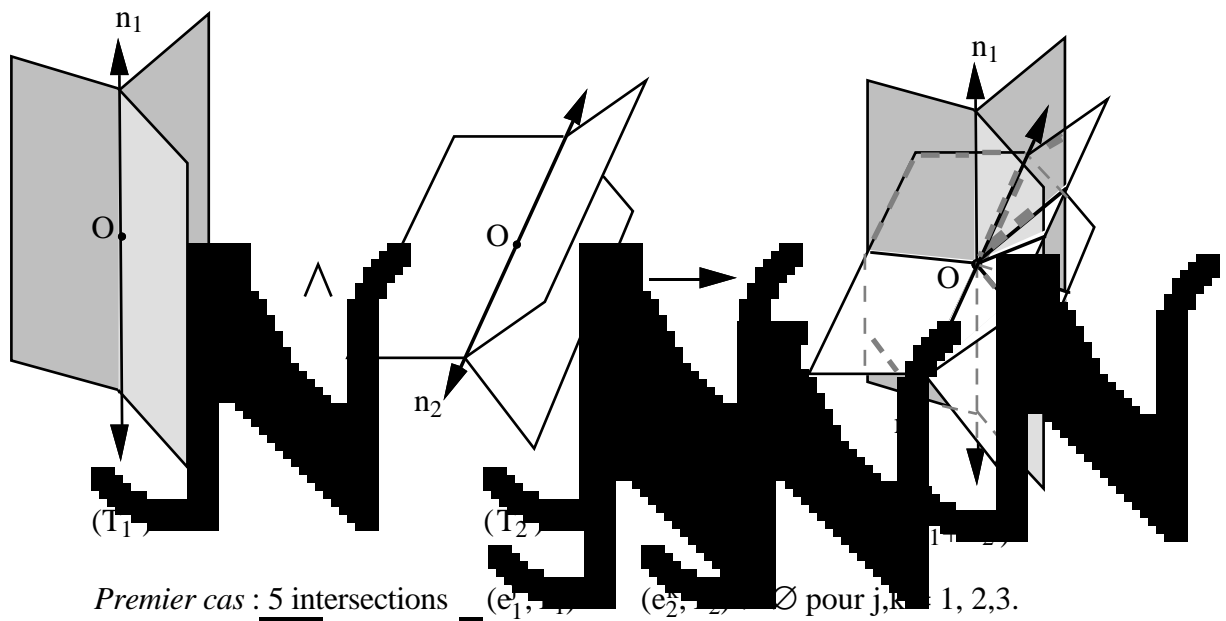


**Figure 9 :** Intersection de deux cônes normaux à des arêtes.

- Soit  $H'$  le demi-espace fermé de frontière  $H$  contenant les cônes normaux à deux arêtes de  $T_1$ , et  $H''$  le demi-espace fermé contenant le cône normal à l'arête de  $T_1$ . Deux cas se présentent :  $H'$  contient deux cônes normaux aux arêtes de  $T_2$  ou un seul.

Le premier cas donne deux intersections  $(e_1, e_2) \cap (e_1, e_2) \neq \emptyset$  dans  $H'$ . Comme  $H''$  contient un cône normal à une arête de chaque triangle, il y a une intersection  $(e_1, e_2) \cap (e_2, e_2) \neq \emptyset$  dans  $H''$  (voir figure 10).

Le second cas donne deux intersections dans  $H'$  et deux dans  $H''$ , donc quatre intersections  $(e_1, e_2) \cap (e_2, e_2) \neq \emptyset$  en tout (voir figure 10).



**Figure 10 : Raffinement**

- Les 1-cellules de  $(T_1)$  sont d'une part les 1-cellules de  $(T_i)$ , et d'autre part l'intersection de la cellule d'un  $(T_j)$  avec le plan  $(T_1)$  (selon les intersections décrites ci-dessus).

Le nombre de cellules est de  $2p$  pour le cas (i) (i.e. 2 par triangles) et de 4 ou 5 par paire de triangles pour le cas (ii). Donc au total nombre de 1-cellules de  $(T_1 \cup \dots \cup T_p)$  est d'au moins  $2p + 4 C_p^2$  et d'au plus  $2p + 5 C_p^2$ . D'où l'encadrement du nombre de facettes de  $S_T$ .

• Les 1-faces de  $S_T$  correspondent aux 2-faces du faisceau, c'est à dire à des parties (de dimension 2) des demi-plans. Les  $T_i$  portent  $3p$  demi-plans, et chaque intersection entre deux demi-plans crée deux 2-faces supplémentaires. On vient de voir que nombre d'intersections  $f_2(S_T) - 2p$  est compris entre  $4 C_p^2$  et  $5 C_p^2$ , d'où

$$f_1(S_T) = 3p + 2 (f_2(S_T) - 2p) = 2 f_2(S_T) - p \tag{4}$$

et l'encadrement de  $f_1(S_T)$ .

• Enfin, de la formule d'Euler  $f_2 - f_1 + f_0 = 2$  et de (4), on déduit  $f_0 = 2 - p + f_2$  et un encadrement de  $f_0$  en fonction de  $f_2$  et  $p$ .

**Remarque :** Dans ces exemples les deux configurations (cas 1 et cas 2) sont non dégénérées et on les a choisies différentes. Donc les sommes de  $p$  triangles en position générale ont toutes la même complexité, contrairement aux arrangements d'hyperplans et donc aux zonotopes. Les arrangements de  $p$  hyperplans en position générale dans  $\mathbb{R}^3$  ont le même nombre de faces, même si entre eux il n'y a pas équivalence combinatoire, et ce nombre majore la complexité de tous les arrangements de  $p$  hyperplans (cf. chapitre 1).

### 3. Propriété des trois demi-zones

Dans ce paragraphe on va voir de quelle façon la propriété de zone des zonotopes se généralise pour la somme de triangles.

Considérons dans  $\mathbb{R}^3$  la somme  $S_T$  de  $p$  triangles  $T_i$  ( $i=1, \dots, p$ ) et  $K$  un triangle quelconque de sommets  $s_1, s_2, s_3$ . On notera  $t^+$  et  $t^-$  les deux 2-faces du triangle  $K$ .

La somme de  $K$  avec  $S_T$  se traduit de la façon suivante dans le faisceau de normales.

Le faisceau de normales du triangle  $K$ , partage l'espace en trois catégories. Soit  $c$  un cône quelconque du faisceau de normales de  $S_T$ , les cas se présentent :

- (i)  $\exists i \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $c \cap (t^+, t^-) = \emptyset$ . On notera  $\phi_i = \{c \in (S_T) \mid c \cap (t^+, t^-) = \emptyset\}$ .
- (ii)  $\exists i, j$  ( $1 \leq i < j \leq 3$ ) tel que  $c \cap (t^+, t^-) = \text{Rel}(t^+, t^-)$ . On notera  $\psi_{i,j} = \{c \in (S_T) \mid c \cap (t^+, t^-) = \text{Rel}(t^+, t^-)\}$ .
- (iii)  $c \cap (t^+, t^-) = (t^+, t^-)$ . On notera  $\phi_+ = \{c \in (S_T) \mid c \cap (t^+, t^-) = (t^+, t^-)\}$  et  $\phi_- = \{c \in (S_T) \mid c \cap (t^+, t^-) = (t^-, t^+)\}$ .



Lorsqu'on fait la somme de  $K$  avec  $S_T$ , la frontière de  $S_T+K$  se déduit de celle de  $S_T$  de la façon suivante :

(a) Les trois ensembles de faces, dont les cônes normaux appartiennent à un même ensemble  $\phi_i$  (pour  $i = 1, 2, 3$ ), correspondent à trois parties de la frontière de  $S_T$ . Chacune de ces parties est translatée du vecteur  $s_i$  correspondant, pour donner trois parties disjointes de la frontière de  $S_T+K$ .

(b) Trois ensembles de faces de  $S_T+K$  résultent de la somme de l'arête  $[s_i, s_j]$  ( $1 \leq i < j \leq 3$ ) avec l'ensemble des faces correspondant aux cônes de  $\psi_{i,j}$ . Chaque ensemble de faces ainsi obtenu relie 2 à 2 les trois parties de la frontière de  $S_T+K$  décrite dans (a), on les appellera "demi-zones".

(c) Les deux ensembles de faces de  $S_T$ , dont les cônes normaux appartiennent aux ensembles  $\phi_+$  et  $\phi_-$ , donnent deux ensembles de faces de  $S_T+K$ . Ces deux ensembles sont adjacents aux trois ensembles de faces décrites dans (b).

On remarque que le point (b), développé ci-dessus, présente une similitude avec la propriété des zones d'un zonotope. Par analogie, on donne le nom de demi-zone à ces ensembles de faces :

**Définition 1 :** On appelle demi-zone associée à une arête  $e$  d'un triangle  $S_T$  l'ensemble des faces de  $S_T+K$  qui sont la somme de  $e$  avec les faces de  $S_T$  dont le cône normal a une intersection non vide avec l'intérieur relatif de  $(e, K)$ .

**remarque :** On peut également définir la demi-zone comme l'ensemble des faces de  $S_T+K$  dont le cône normal est inclus dans le demi-espace ouvert  $\text{Rel}(e, K)$ .

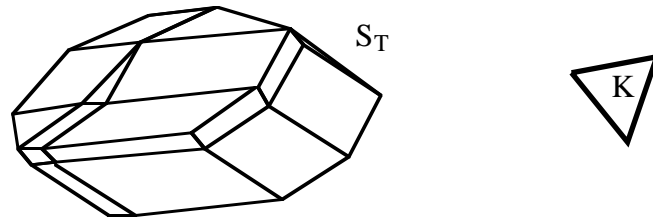
Remarquons que, dans le plan des translations normale,  $(t^+, n)$  une demi-droite et coupe un unique cône de  $(S_T)$  à un sommet  $s$  de  $S_T$ . La nouvelle face de  $S_T+K$  de normale  $(t^+, n)$  est obtenue en translatant  $K$  par le vecteur  $s$ . Ainsi les 2 ensembles de faces (décrits au point (c)) sont réduits à une face : le triangle  $K$  à une translation près (voir figure 11).

On reprendra le terme de prézone utilisé dans [Sza91] pour les zonotopes.

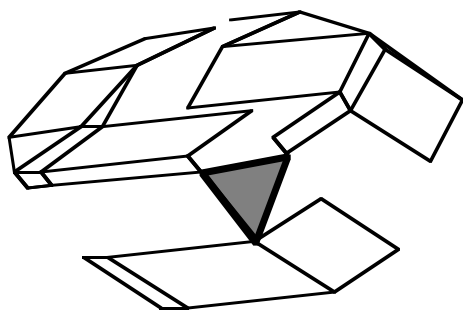
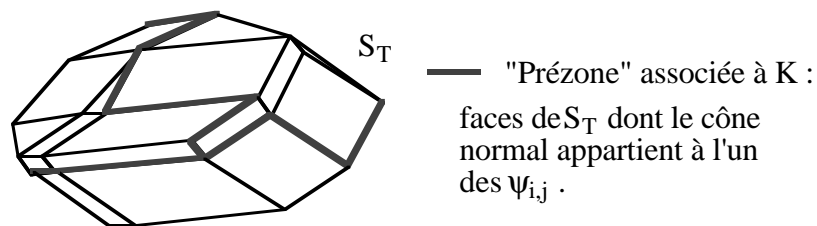
**Définition 2 :** On appelle "prézone" de  $S_T$  par rapport à l'arête  $[s_i, s_j]$  de  $K$  l'ensemble des faces de  $S_T$  dont le cône normal appartient à  $\psi_{i,j}$ .

**Exemple :**

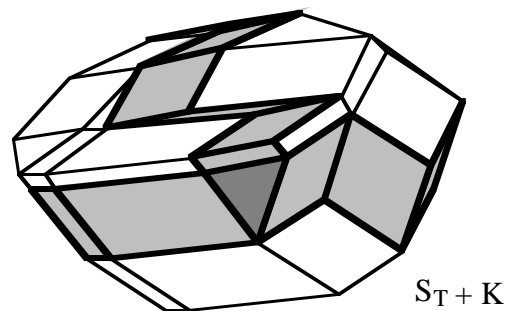
Soit  $S_T$  et un triangle  $K$ .



Les prézones de  $S_T$  associées à  $K$  :



Les trois parties de  $S_T$  traduites dans les trois directions  $s_i$   $i=1, \dots, 3$ .

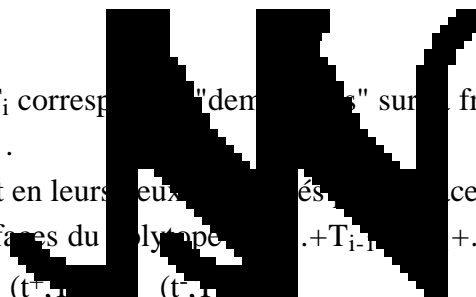


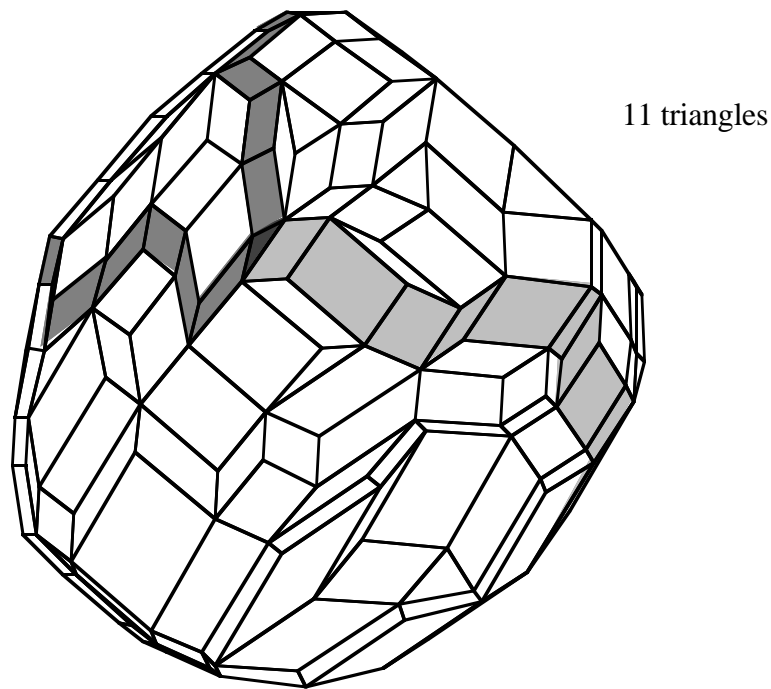
les trois "demi-zones"

**Figure 11 :** Passage de  $S_T$  à  $S_T + K$ .

**Propriété 9 :** A chaque triangle  $T_i$  correspond une "demi-zone" sur la frontière de  $S_T$  associées à chacune des arêtes de  $T_i$ .

Ces demi-zones se rejoignent en leurs bords extérieurs. Les faces obtenues en effectuant la somme de  $T_i$  avec les faces du polyèdre  $T_1 + T_2 + \dots + T_{i-1} + \dots + T_p$  correspondant aux cônes intersectés par  $(t, \mathbf{r}_i)$  et  $(t, \mathbf{r}_j)$ .





**Figure 12 :** Exemple de la somme de triangles et les trois demi-zones associées à un triangle.

**Propriété :** Le nombre de faces de la demi-zone de  $S_i$  associée à une arête  $e$  d'un triangle  $T_i$  est en  $O(p^{n-2})$ .

**preuve :** Le nombre de faces de la demi-zone de  $S_i$  est le nombre de cellules de  $(S_i)$  intersectées par le cône normal à l'arête  $e$  (dans l'espace). Il est majoré par le nombre de cellules intersectées par  $(e, r_i) \cap S_i = (Z(S_i))$  qui est en  $O(p^{n-2})$ .

On pourrait envisager de reprendre le développement dans [za91] pour la construction optimale de la somme de segments. Il s'agit de construire itérativement la structure combinatoire (ou graphe d'incidence) des polyèdres par insertions successives des segments. Cette méthode nécessite à chaque étape le calcul de la

Le coût de calcul de la prézone de  $S_i$  relative à  $[s_i, s_j]$  est proportionnel au nombre de faces des  $n$ -cellules de  $(S_i)$  intersectées par  $([s_i, s_j])$ . Cependant, on ne peut pas appliquer le théorème de la zone pour majorer ce nombre par le nombre de faces de la zone de l'arrangement  $(Z(S_i))$  relative à l'hyperplan orthogonal à  $[s_i, s_j]$ . On ne peut donc pas prouver l'optimalité de cette méthode pour la somme de triangles.

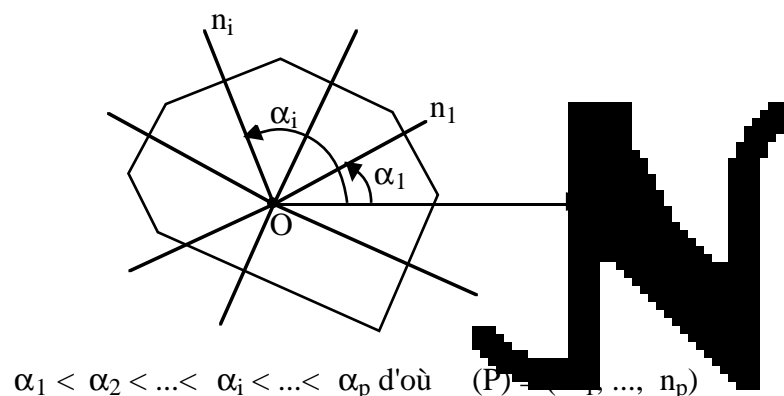
## 4. Construction de la somme de triangles

Nous décomposons la construction de la somme en deux étapes. De même que pour la construction des zonoèdres (cf. [Sza91]), la première étape consiste à déterminer la structure combinatoire, et la seconde à calculer les informations géométriques permettant de définir complètement le polytope résultant. On entend par structure combinatoire, la donnée de l'ensemble des faces et de leur relations d'incidences; et par informations géométriques, les coordonnées des sommets, les équations des hyperplans d'appui aux facettes, etc...

Le premier point sera réalisé par l'utilisation de la notion de faisceau de normales. L'information sur les faces du polytope sera pas uniquement combinatoire, mais également géométrique, le faisceau de normales fournissant également l'orientation des faces.

### 4.1. Construction dans le plan

La description, dans le plan, de la construction de la somme de triangles, nous permet d'illustrer le principe général utilisé en dimension supérieure. Le calcul du raffinement commun des faisceaux de normales ne présente pas de difficulté, ceci vient du fait que sa représentation est simple. En effet, le faisceau de normales associé à un polygone convexe du plan est complètement défini par la donnée de la liste ordonnée des normales extérieures aux arêtes (par exemple, les normales sont ordonnées par l'angle qu'elles forment avec l'axe des abscisses).



**Figure 13 :** Faisceau de normales d'un polygone.

**Propriété 11 :** Le coût de la construction de la somme de Minkowski de  $p$  triangles du plan est en  $O(p \log p)$ .

**preuve :** La construction se fait selon les deux étapes suivantes:

• *Première étape : Calcul du faisceau de normal*

Le raffinement commun des faisceaux de normales des triangles, se calcule en ordonnant les normales extérieures aux arêtes, d'où un coût en temps de  $O(p \log p)$ .

Le cas dégénéré pouvant survenir à cette étape est celui de deux arêtes colinéaires ayant même normales extérieures. Il se règle en confondant les deux normales en une seule et en lui associant la somme des deux arêtes.

• *Seconde étape : Calcul des sommets*

Même si cette étape est triviale, il faut effectuer les calculs de façon à avoir un algorithme optimal en temps.

On note  $\text{Pos}(\cdot)$  l'enveloppe positive d'un ensemble de vecteurs (i.e. l'ensemble obtenu par des combinaisons linéaires positives des vecteurs)

Calcul d'un sommet  $s$  de  $S_T$  de cône normal  $C_s = \text{Pos}(n_1, n_2)$  :

Soit  $\eta$  un vecteur de  $\text{IntRel } C_s$ ,

$$s = \sum_{i=1, \dots, p} F(T_i, \eta). \quad (5)$$

Le calcul du terme  $F(T_i, \eta)$  s'effectue en déterminant le sommet  $v$  de  $T_i$  qui maximise  $\langle v, \eta \rangle$  (d'où un coût de 3 produits scalaires).

Soit un coût pour tous les  $F(T_i, \eta)$  en  $O(p)$ , plus le coût de la somme en  $O(p)$ . Donc le calcul d'un sommet se fait en  $O(p)$

Si on procédait de la même façon pour tous les sommets, le coût total serait en  $O(p^2)$ .

Pour effectuer les calculs de façon optimale, on calculera un premier sommet  $s_0$  de cône normal  $\text{Pos}(n_1, n_2)$  par la méthode décrite ci-dessus (coût  $O(p)$ ). Puis on calculera les autres sommets de proche en proche. Pour passer du cône normal  $C_i = \text{Pos}(n_i, n_{i+1})$  du sommet  $s_i$  au cône normal  $C_{i+1}$  du sommet  $s_{i+1}$ , on traverse la normale  $n_{i+1}$  à une arête d'un des triangles. Ce qui signifie que dans (5) un seul terme de la somme change de valeur : soit  $F(T_k, u)$  ce terme. Soient  $u \in \text{IntRel } C_i$ ,  $v \in \text{IntRel } C_{i+1}$ , alors le sommet  $s_{i+1}$  s'écrit :

$$s_{i+1} = s_i + F(T_k, v) - F(T_k, u). \quad (6)$$

Donc le calcul de  $s_{i+1}$  à partir de  $s_i$  coûte 2 additions de vecteurs et est constant par rapport à  $p$ . On répète ce calcul  $O(p)$  fois, d'où un coût total pour l'ensemble des sommets de  $O(p)$ .

Le coût total de la construction est donc en  $O(p \log p)$ .

### Remarques :

- Le même algorithme peut s'appliquer à la somme de polyèdres. Si  $n$  désigne le nombre total d'arêtes des polyèdres, la complexité sera alors  $O(n \log n)$ .

- Pour réaliser le calcul des sommets en dimension  $n \geq 3$ , on utilisera selon la même méthode. Les cônes normaux à des sommets de dimension  $n$ , et deux cônes adjacents ont en commun une  $(n-1)$ -cellule. (Si l'on passe d'un sommet à l'autre, il faut connaître l'arête associée à la  $(n-1)$ -cellule commune.)

Donc lorsqu'on calcule le faisceau de normales, il faut associer à chaque  $(n-1)$ -cellule l'arête correspondante.

## 4.2. Calcul de la somme de triangles de

Dans ce paragraphe, on décrit une méthode de construction du faisceau de normales de  $S_T$  selon la méthode "diviser pour régner".

Guibas et Seidel (cf. [Gui&Sei87]) décrivent un algorithme réalisable à la table de la sortie, permettant la fusion de deux subdivisions convexes du plan de tailles respectives  $n_1$  et  $n_2$ , avec une complexité en temps  $O(n_1 + n_2 \log K)$ , où  $K$  désigne la taille de la subdivision la plus grande.

Cet algorithme peut être appliqué à la somme de deux subdivisions avec une complexité proportionnelle de la taille de la sortie (cf. [Gui&Sei87]). En effet, si on dispose d'un faisceau de normales  $(P)$  d'une subdivision convexe  $(P)$  du plan, de même que d'un faisceau de fusion de deux subdivisions convexes  $(P_1)$  et  $(P_2)$ , on obtient l'intersection du raffinement commun de  $(P)$  et  $(P_1)$  en passant l'intersection du faisceau de normales  $(P)$  et  $(P_1)$  par les droites  $I_2$  symétriques par rapport à l'origine, alors on peut le faire de même avec  $(P_2)$ .

Pour la somme de triangles  $S_T$  des subdivisions planaires  $S_1$  et  $S_2$  des plans  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  par  $(T)$ , on utilise le principe "divide and conquer". Puis, on reconstitue  $(S_T) = (T_1) \cup \dots \cup (T_p)$ .

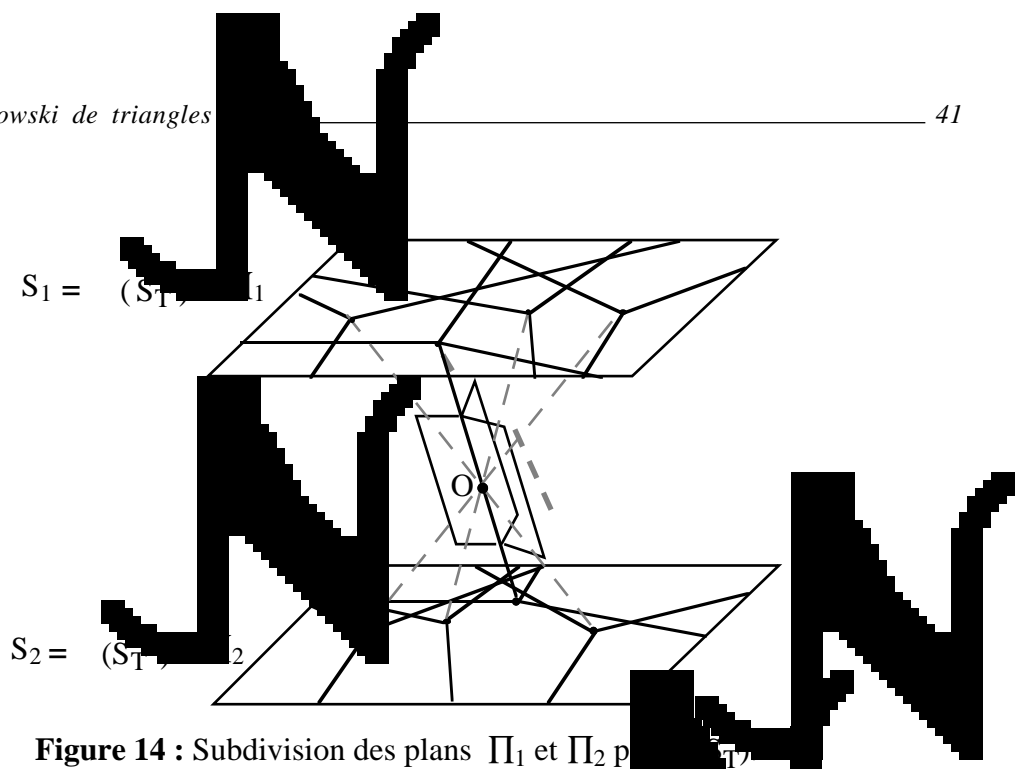


Figure 14 : Subdivision des plans  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  par les faisceaux de normales  $(T_i)_{i=1, \dots, p}$ .

• **La première étape** de l'algorithme consiste à calculer les subdivisions  $S_1$  et  $S_2$  des plans  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  (où raffinement commun des  $(T_i)_{i=1, \dots, p}$ ) en leur appliquant la méthode division-fusion. A chaque étape de l'algorithme on applique l'algorithme de fusion de deux subdivisions convexes du plan.

La taille d'une subdivision planaire, obtenue par l'intersection d'un plan avec les faisceaux de normales de  $p$  triangles, est en  $O(p^2)$ . Si on note  $T(p)$  le coût en temps du calcul de la subdivision planaire formée par les faisceaux de normales de  $p$  triangles intersectant un plan  $\Pi_1$  (resp.  $\Pi_2$ ), on a :

$$T(p) = 2 T\left(\frac{p}{2}\right) + O(p^2).$$

Et finalement,  $T(p)$  est en  $O(p^2)$ .

• **La seconde étape** est la reconstruction de  $(S_T)_{T=1,2}$  à partir des deux subdivisions planaires.

Les éléments non bornés des deux subdivisions sont des cellules de  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  qui coupent  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ . On identifie les paires de cellules (non bornées des deux subdivisions) identiques, en calculant leurs positions par rapport aux  $(T_i)_{i=1, \dots, p}$ . Le nombre de 2-cellules non bornées est en  $O(p)$ .

On majore le nombre de 1-cellules les bordant par le nombre total de 1-cellules car on ne peut pas appliquer le théorème de la zone à "l'arrangement" des  $(T_i)_{i=1, \dots, p}$  (remarque à la fin du paragraphe 3). Donc on majore le coût de cette étape par  $O(p^2)$ .

• **La troisième étape**, calcul des sommets, s'effectue comme dans le plan, avec un temps proportionnel au nombre de sommets, c'est à dire en  $O(p^2)$ .

**Propriété 12** La méthode décrite ci-dessus, permet de construire la somme de  $p$  triangles de  $\mathbb{R}^3$  avec un coût en temps de  $O(p^2)$ .

### 4.3. Calcul de la somme de triangles de $\mathbb{R}^3$

En dimension deux et trois, on a pu se ramener à des problèmes plus simples pour calculer le raffinement commun des faisceaux de normales, mais en dimension supérieure nous ne connaissons aucune méthode pour calculer le raffinement commun de subdivisions convexes de l'espace.

Le but de ce paragraphe est de calculer le faisceau de normales d'un polytope  $S_T$  résultant de la somme des triangles  $T_1, \dots, T_p$  à partir d'un arrangement d'hyperplans (i.e. de  $(Z(S_T))$ ).

#### 4.3.1 Préliminaires

Comme dans le programme proposé par Gritzman et Sturmfels (voir [Gri&Stu93] ou paragraphe 1 de ce chapitre), on associe à chaque arête de chaque triangle un hyperplan orthogonal à cette arête.

On note :

- $e_i^j$  un vecteur normal à l'arête du triangle  $T_i$  ( $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, 3$ )
- $H_i^j = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, e_i^j \rangle = 0\}$  le plan orthogonal à l'arête  $e_i^j$ ,
- $\bar{H}_i^j = (e_i^j, \text{rot}(e_i^j))$  le demi-plan inclus dans  $H_i^j$  associé à l'arête du triangle  $T_i$ , et
- $H_T$  l'ensemble des hyperplans  $H_i^j$ .

Rapportons l'arrangement  $(H_T)$  en un hyperplan. C'est un raffinement de  $(S_T)$  est à dire :  $(H_T)$  est un raffinement de  $(S_T)$  se traduit par le fait que toute face  $f$  de  $(S_T)$  s'écrit

$$f = \bigcup_{g \in (H_T) \cap f} g$$

#### • Particularités (ou dégénérescences) de l'arrangement $(H_T)$

Dans le cas présent, tous les hyperplans passent par l'origine, donc l'ensemble des 0-faces de l'arrangement est réduit à un élément  $\{0\}$ . Toutes les 1-faces de  $(H_T)$  lui sont incidentes, et toutes les faces de cet arrangement sont des cônes.



Les trois hyperplans (resp. plans, pour  $n=3$ )  $H_i^1$ ,  $H_i^2$  et  $H_i^3$  orthogonaux aux arêtes de  $T_i$  s'intersectent en un même sous espace vectoriel de dimension  $n-2$  (resp. une même droite).

Dans le chapitre 1, on a vu que la complexité d'un arrangement central  $(H_T)$  est en  $\Theta(p^{n-1})$ , i.e. le nombre de faces est  $\Theta(p^{n-1})$  pour tout  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

• **Structure de l'arrangement et sa représentation par un graphe d'incidence ou d'un complexe polyédrique** [Edelsbrunner & Yvi95]

$(H_T)$  et  $(S_T)$  les complexes polyédriques, sont représentés par le graphe d'incidence de leurs faces.

**Conventions.** Soit un ensemble de type  $(H)$ . En plus de la face propre de l'arrangement, on définit deux faces impropres : la  $(-1)$ -face  $\emptyset$  et la  $(n+1)$ -face  $(H)$ . La  $(-1)$ -face est considérée comme étant incidente sous les sommets de  $(H)$ . Et la  $(n+1)$ -face est considérée comme étant incidente sous les  $n$ -faces de  $(H)$ .

**Définition 3 :** Le graphe d'incidence  $(H)$  est défini par  $(H)$ . Pour chaque  $k$ -face  $f$  de  $(H)$  ( $k = -1, 0, 1, \dots, n+1$ ),  $(H)$  contient un nœud qui représente  $f$ . Et on établit des connections entre les nœuds des faces incidentes la dimension diffère de 1.

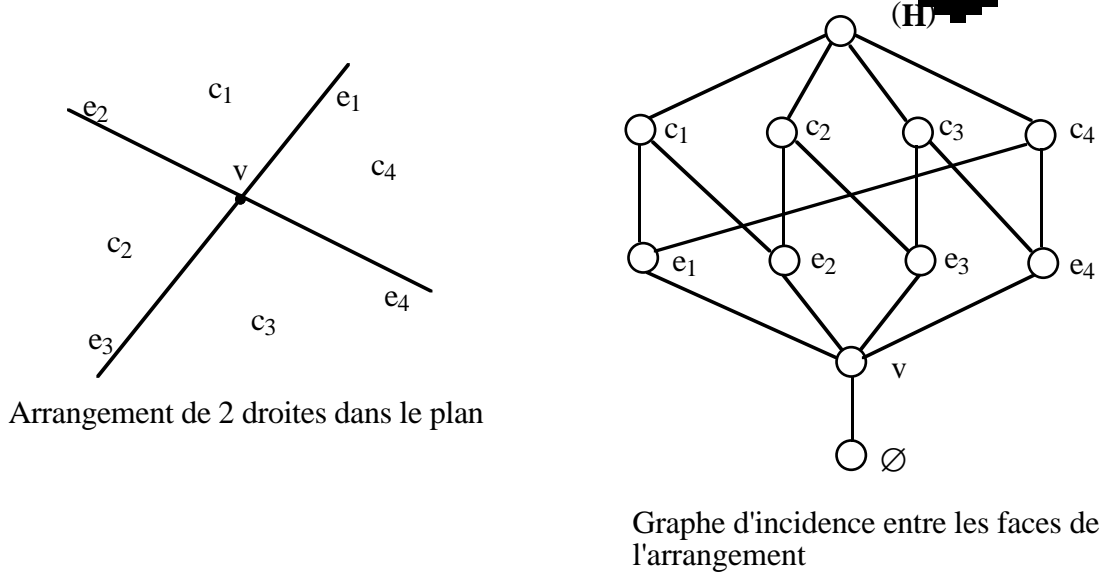


Figure 15 : Arrangement de droites, et sa représentation par un graphe d'incidence.

Une  $k$ -face  $f$  est représentée par des informations auxiliaires et deux listes de pointeurs sur les sous-faces et super-faces de  $f$  (voir définitions chapitre 1). Les informations auxiliaires, pour une  $k$ -face  $f$ , sont par exemple :

- un point  $p(f)$  appartenant à  $\text{IntRel}f$ , et
- si  $k = n-1$ , l'hyperplan  $H_1^j$  auquel  $f$  appartient,
- etc...

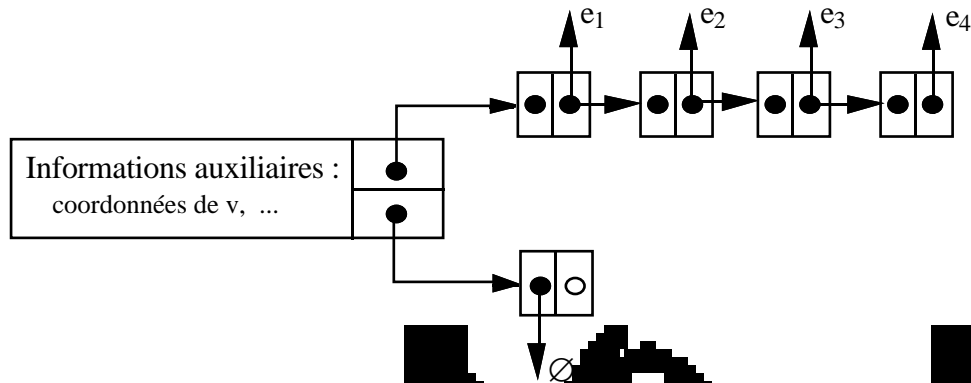


Figure 16 : Représentation d'une face de l'arrangement d'incidence.

• Adaptation de cette structure de données à un arrangement de normales

Notations : On appellera  $\mathcal{H}_1$  l'arrangement de normales représentant  $(S_1)$  et  $\mathcal{H}_2$  l'arrangement de normales représentant  $(H_1)$ . Soit  $f$  une face de  $\mathcal{H}_1$  ou de  $\mathcal{H}_2$ . On note :

- $i(f)$  l'ensemble des sous-faces de  $f$
- et  $I(f)$  l'ensemble de ses super-faces

Pour un arrangement simple, la taille des listes de super-faces d'une  $k$ -face est de  $2(n-k)$ ; elle ne dépend donc pas du nombre d'hyperplans de l'arrangement. Par contre, la taille de la liste des sous-faces est d'au moins  $k+1$ , mais la borne supérieure est  $p-n+k$  et dépend de  $p$ .

Même, si l'arrangement  $\mathcal{H}_1$  est dégénéré, on peut faire les mêmes remarques lorsque les triangles sont en position générale.

Pour effectuer certaines opérations élémentaires sur les listes, on ajoute à la structure décrite ci-dessus des pointeurs supplémentaires :

- Double chaînage des listes de sous-faces et super-faces pour effectuer des suppressions en temps constant.
- Soit  $g$  une sous-face de  $f$ . Pour accéder, à partir de  $g$  à son représentant dans la liste  $i(f)$  des sous-faces de  $f$ , il faut parcourir cette liste, d'où un coût proportionnel à sa taille  $\text{card}(i(f))$ . Or on a vu que  $\text{card}(i(f))$  peut dépendre de  $p$ . Pour effectuer cette opération avec un coût constant, on ajoute au représentant de  $f$  dans  $I(g)$  un pointeur sur le

représentant de  $g$  dans la liste des sous-faces de  $f$ . Exemple, dans la figure ci-dessous avec l'arête  $e_1$  et la face  $c_1$ . On verra l'utilité de ce pointeur supplémentaire dans la deuxième étape de l'algorithme décrit en annexe du chapitre.

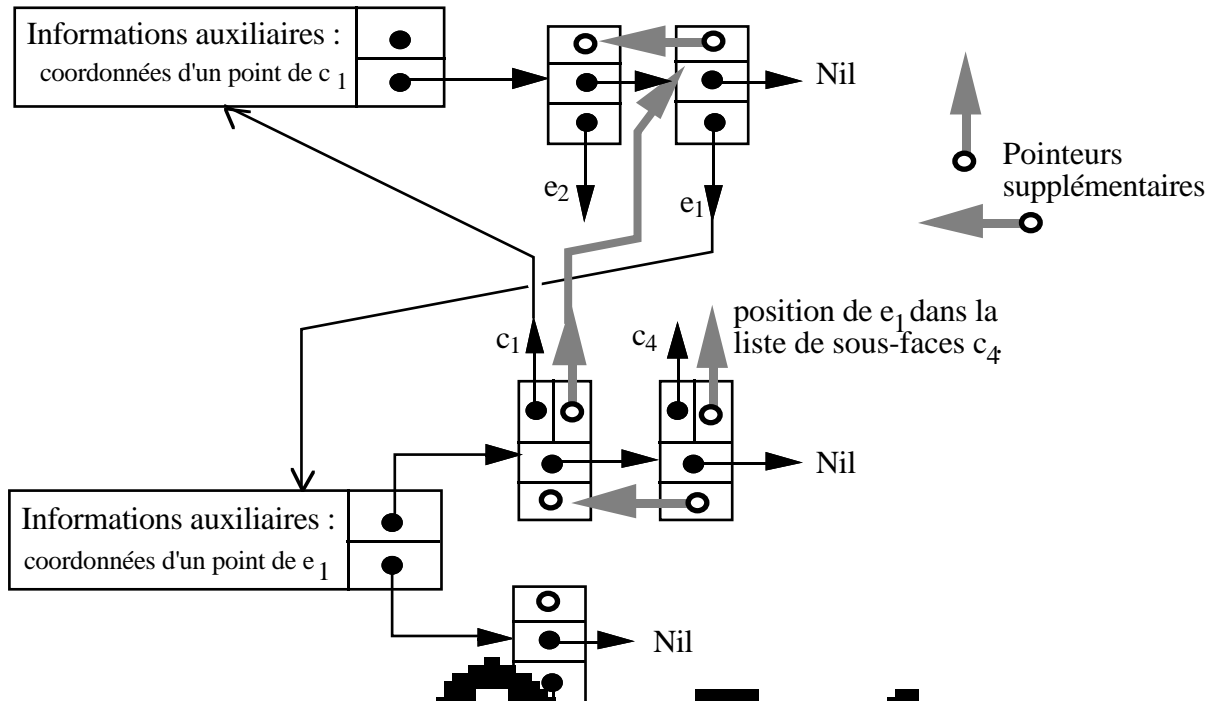


Figure 17 : Représentation des faces et des arêtes.

• Lien entre faces de  $(H_T)$  et faces de  $(S_T)$

Soit  $f$  une  $k$ -face de  $(S_T)$ , notons  $f = \text{Conv} \{ g \}$  l'ensemble des  $k$ -faces  $(H_T)$  incluses dans  $f$ . On a :

$$f = \text{Conv} \{ g \}$$

**Définition** Soit  $g$  une face de  $(H_T)$  et  $f$  l'unique  $k$ -face de  $(S_T)$  contenant

$$\text{Rel Int } g \subseteq \text{Rel Int } f.$$

On dira que  $g$  est une *face valide* pour  $(S_T)$ .

$$\dim g = \dim f,$$

i.e.  $g \in \text{Rel Int } f$  donc  $g$  est attribuée à la face  $f$ .

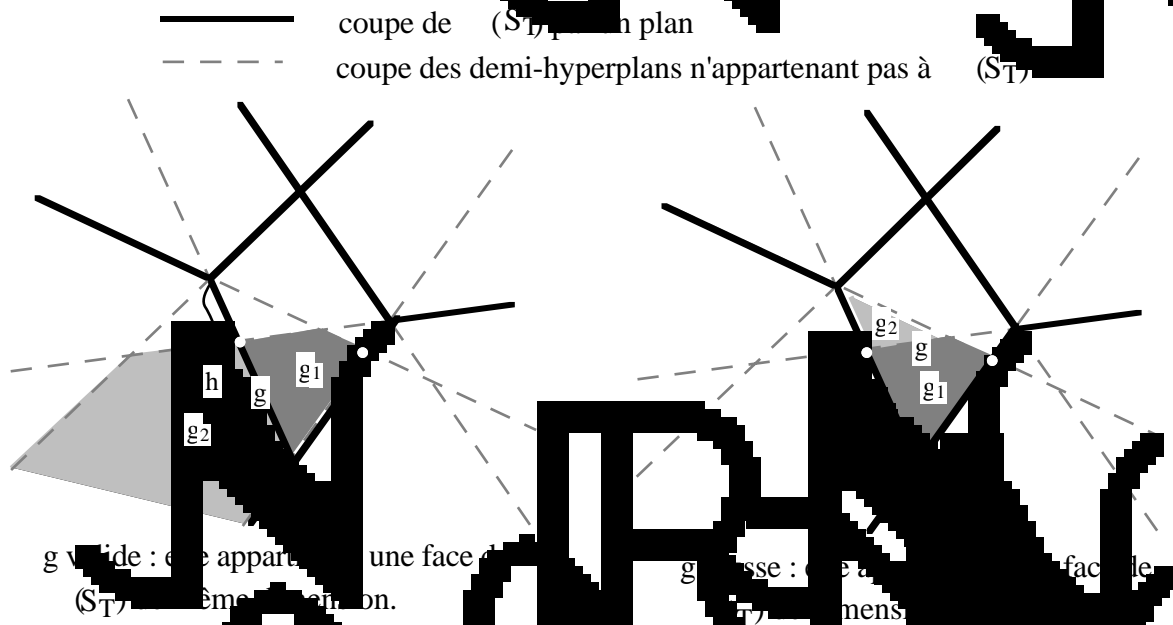
Par opposition, on dira que  $g$  est *fausse* pour  $(S_T)$ .

$$\dim g < \dim f.$$

**Remarque** : La face  $f$  de  $(S_T)$  contenant  $\text{Rel Int } g \subseteq \text{Rel Int } f$  est unique, car  $(H_T)$  est un raffinement de  $(S_T)$ .

Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux faces adjacentes de  $(H_T)$  et soit  $g$  leur face commune. Deux cas se présentent (voir figure ci-dessous),

- soit  $g_1$  et  $g_2$  appartiennent à la même  $k$ -face  $f$  de  $(S_T)$ ,  $g$  est incluse dans  $f$ , alors  $g_1$  et  $g_2 \in (f)$ . Comme  $f$  est une  $k$ -face,  $g$  est valide.
- soit elles appartiennent à deux faces  $f_1$  et  $f_2$  différentes de  $(S_T)$ ,  $g$  est incluse dans la  $(k-1)$ -face  $h$  de  $(S_T)$  commune à  $f_1$  et  $f_2$ . Comme  $h$  et  $g$  ont la même dimension,  $g$  est valide.



$g$  valide : elle appartient à une face  $f$  de  $(S_T)$  même dimension.  
 $g$  valide : elle appartient à la face  $h$  de  $(S_T)$  commune à  $f_1$  et  $f_2$ .

Figure 18 : Exemple dans  $(H_T)$  et  $(S_T)$ .

**Remarques**

- Toute face de  $(H_T)$  est incluse dans une  $n$ -face de  $(S_T)$  et toute  $n$ -face de  $(H_T)$  est valide.
- Toute  $(n-1)$ -face de  $(H_T)$  est incluse dans un demi-hyperplan  $H_i^j$  de  $H_T$ , donc soit elle appartient au demi-hyperplan  $\bar{H}_i^j$  auquel cas elle est valide, soit elle n'appartient pas à  $\bar{H}_i^j$  alors elle n'est pas valide. On peut donc déterminer directement la validité des  $(n-1)$ -faces.
- Soient deux faces  $g_1$  et  $g_2$  adjacentes de  $(H_T)$  se partageant la face  $g$  de  $(H_T)$ , si  $g$  est valide et  $g_2$  appartient à une face de  $(S_T)$ , alors  $g_1$  est valide, sinon elles appartiennent à la même  $n$ -face de  $(S_T)$  et  $g_1$  est valide.
- Enfin dernière particularité, les 1-faces valides de  $(S_T)$  sont les rayons du faisceau  $(S_T)$  et à dire si  $g$  est une 1-face de  $(S_T)$  ( $g$ ) est un élément.

**Idée de l'algorithme**

Les objectifs de cet algorithme, nous conduisent à traiter dans un premier temps les  $n$ -faces et (n-1)-faces d'un arrangement de droites couvrant le graphe d'adjacence des  $n$ -faces d'un complexe simplicial valide de dimension  $n$  et on formera les  $n$ -faces de  $(S_T)$  par récurrence et à mesurer leur volume de dimension plus petite, jusqu'à l'obtention de toutes les faces de  $(S_T)$ .  
Ainsi, on aura un lien de la caractérisation de faces valides (de dimension  $k < n-1$ ) de  $(H_T)$  en fonction de la validité de leurs faces de dimension plus petite, que nous donnons dans la propriété suivante :

**Notation :** Soit  $g$  une  $k$ -face de  $(H_T)$  on définit  $I_{valide}(g) = \{ f \in (S_T) / f \text{ est valide} \}$

**Propriété 13 :** Une  $k$ -face  $f$  de  $(H_T)$  est valide si et seulement si  $\text{Card} \{ h \in I(f) \mid \dim h = k \} > 2$ .

**preuve :** Soit  $f$  une  $k$ -face de  $(H_T)$

- Pour la première implication, supposons que  $f$  est valide.  
Si  $f$  est valide alors elle est incluse dans une unique  $k$ -face  $f'$  de  $(S_T)$

On veut montrer que  $\text{Card}( I_{valide}(f) ) = \text{Card}( I(f') )$ .

- Soit  $g \in I_{valide}(f)$ , alors il existe une unique face  $g'$  de  $(S_T)$  de dimension  $k+1$  telle que  $g \subseteq g'$ . On a

$$f' \cap g' \supseteq f$$

or  $\dim f = k$ , donc la dimension de  $f' \cap g'$  est au moins  $k$  et  $\dim f' = k$  d'où  $\dim(f' \cap g') = k$ .

De plus  $f' \cap g'$  est une face de  $(S_T)$  incluse à  $f$  et  $g'$ . Donc  $f' \cap g' = f$  et  $g' \in I(f')$ .

Donc à toute face  $g$  de  $I_{valide}(f)$  correspond une unique face  $g'$  de  $I(f')$ .

- Réciproquement, soit  $g' \in I(f')$ . Comme  $f'$  est une face de  $(S_T)$  l'ensemble  $(g')$  de  $(k+1)$ -faces valides de  $(S_T)$  est non vide.

$$(g') = \{ g \in (S_T) / \dim g = k+1 \text{ et } g \subseteq f' \}.$$

Or  $f$  est incluse dans  $f'$  qui est une face de  $g'$ , donc  $f$  est une face intérieure de  $g'$ .

Donc il existe une unique  $(k+1)$ -face  $g \in (g')$  incluse dans  $f$ .

On conclut qu'à toute face  $g'$  de  $I(f')$  correspond une unique face  $g$  dans  $I(f)$ .

D'où

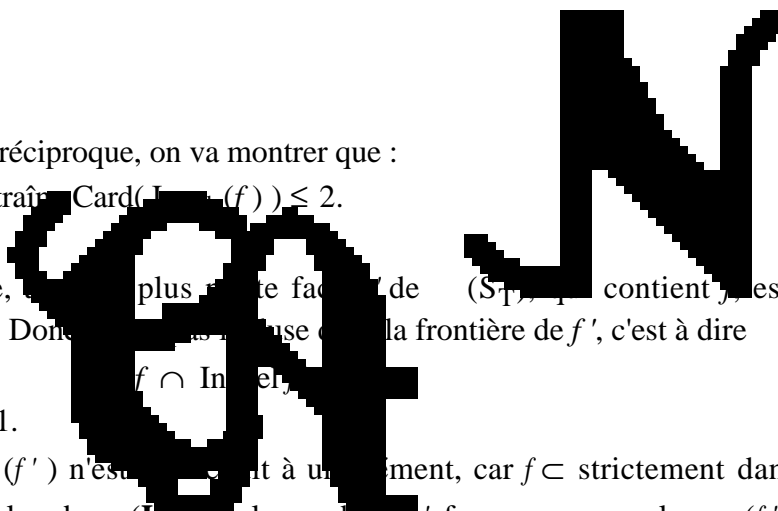
$$\text{Card}( I_{valide}(f) ) = \text{Card}( I(f') ).$$

Or  $f'$  est une  $k$ -face ( $k \leq n-2$ ) d'un complexe de droites donc  $\text{Card}( I(f') ) > 2$ .

- Pour démontrer la réciproque, on va montrer que :

$$f \text{ non valide entraîne } \text{Card}(I_{\text{valide}}(f)) \leq 2.$$

Si  $f$  n'est pas valide, elle est incluse dans une face  $f'$  de  $(S_{T-1})$  qui est de dimension  $j$  avec  $j > k$ . Donc la frontière de  $f$ , c'est à dire



$$f \cap \text{Int} f' = \emptyset \quad (*)$$

- Premier cas :  $j = k+1$ .

L'ensemble  $f'$  n'est pas ouvert à un point, car  $f \subset$  strictement dans  $f'$ . L'ensemble des cellules de  $(H_T)$  incluses dans  $f'$  forme un complexe  $c(f')$  de dimension  $k+1$ . La frontière de dimension  $k$  coupe l'intérieur du complexe  $c(f')$ , elle a donc exactement  $2(k+1)$  faces de  $(H_T)$  incidentes (incluses dans  $f'$ ). Soient  $g_1, g_2$  ces faces,  $\dim g_1 = \dim g_2 = k$ , donc  $g_1$  et  $g_2 \in I_{\text{valide}}(f)$ .

Supposons qu'il y a une autre face  $g_3$  que  $g_1$  et  $g_2$ . Soit  $f''$  une face de  $(S_{T-1})$  qui contient  $g_3$ . Mais  $g_3$  est valide, donc il existe une face  $f''$  ( $f'' \neq f'$ ) de  $(S_{T-1})$  qui contient  $g_3$ . On a

$$f \cap \text{Int} f'' = g_3 \cap f' \subseteq f'' \cap f'.$$

Or  $(S_{T-1})$  est un complexe, donc  $f'' \cap f'$  est une face de  $(S_{T-1})$  commune à  $f'$  et  $f''$ . Et d'après (\*),  $f$  ne peut être incluse dans une face de  $f'$ . D'où contradiction. Donc  $f$  ne peut avoir d'autres  $(k+1)$ -faces incidentes que celles incluses dans  $f'$ . D'où  $\text{Card}(I_{\text{valide}}(f)) = 2$ .

- Second cas :  $k+1 < j$ .

$\forall g \in I(f), g \subseteq f'$  car  $\text{Int} f \cap f' \subseteq \text{Int} f' \cap f'$ . Et  $\dim g = k+1 < \dim f'$ , donc  $g$  n'est pas valide. D'où  $I_{\text{valide}}(f) = \emptyset$ .

**Exemple :** Dans ce petit programme, on va établir la validité des 1-faces de  $(H_T)$ .

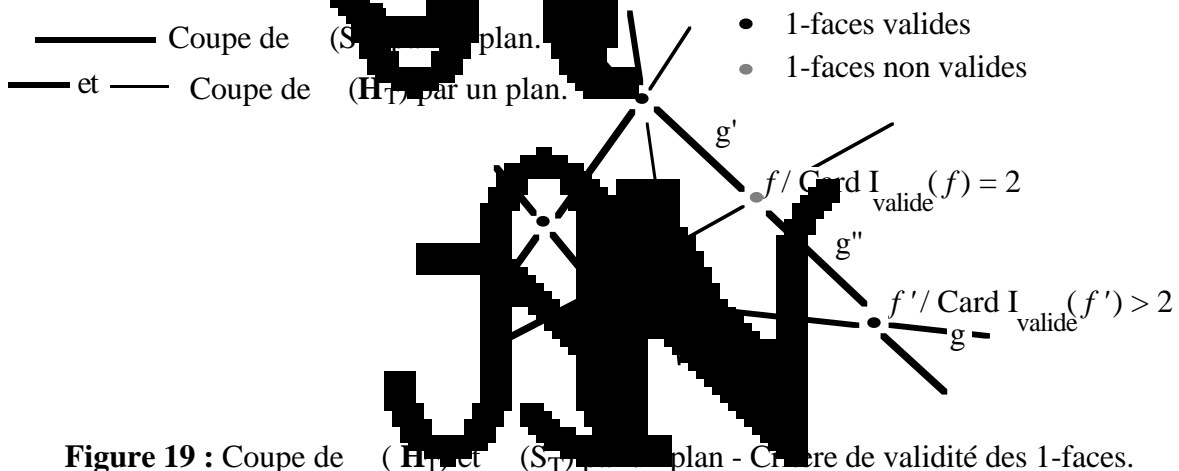


Figure 19 : Coupe de  $(H_T)$  et  $(S_{T-1})$  par un plan - Critère de validité des 1-faces.

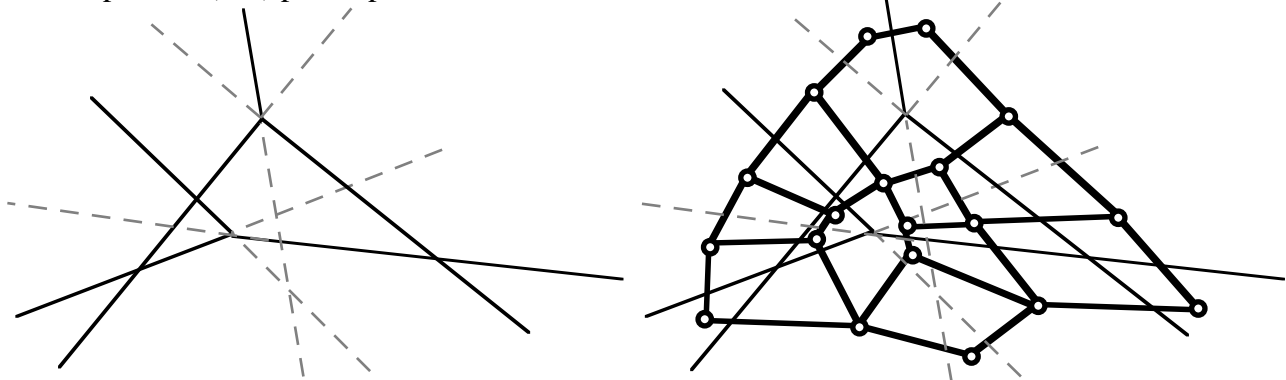
### 4.3.2 Description de l'algorithme de fusion

On décrit en deux étapes l'algorithme de fusion. La première étape consiste à parcourir le graphe d'adjacence des 3-faces de  $(H_T)$ , afin de construire les ensembles  $(f)$  de 3-faces à fusionner, pour chaque 3-face  $f$  de  $(S_T)$ , et déterminer la validité des 2-faces de  $(H_T)$ . Lors de la 2<sup>ème</sup> étape, on construit les ensembles de 2-faces à fusionner, et on détermine la validité des 1-faces, par un parcours des 2-faces valides.

• **Description de la 1<sup>ère</sup> étape : Fusion des 3-faces et validité des 2-faces.**

Soit  $G = (V, E)$  le graphe d'adjacence des 3-faces de  $(H_T)$ ,  $V$  désignant l'ensemble des sommets du graphe et  $E$  l'ensemble de ses arêtes. Chaque sommet du graphe représente une 3-face de  $(H_T)$ , il y a une arête entre deux sommets du graphe si les 3-faces qui leur correspondent sont adjacentes dans  $(H_T)$ , c'est à dire qu'elles ont une 2-face de  $(H_T)$  en commun (voir figure ci-dessous). Donc, chaque 2-face de  $(H_T)$  correspond à une arête du graphe.

Coupe de  $(H_T)$  par un plan :



**Figure 20 :** Graphe d'adjacence  $G$  des 3-faces de l'arrangement.

**Définition 5 :** On appelle *graphe partiel* d'un graphe  $G = (V, E)$ , le graphe noté  $G_P$  et défini par :

$$G_P = (V, E_P), \quad \text{où } E_P \subset E.$$

En fait,  $G_P$  est un graphe ayant les mêmes sommets que  $G$ , mais dont les arêtes sont un sous-ensemble des arêtes de  $G$ .

Ici, on associe à  $G$  le graphe partiel  $G_p = (V, E_p)$  défini par :  
 Soit  $e = (u, v)$  une arête de  $E$ , où  $u$  et  $v$  sont les noeuds représentant les 3-faces  $f_1$  et  $f_2$  de  $(H_T)$ . Soit  $g$  la sous-face commune à  $f_1$  et  $f_2$ .

L'arête  $e$  est aussi une arête de  $E_p$  si et seulement si  $g$  est fusse ( $g \in H_i^j$ , mais  $g \notin ZH_i^j$ ), c'est à dire si  $f_1$  et  $f_2$  appartiennent à la même 3-faces de  $(S_T)$  (figure).

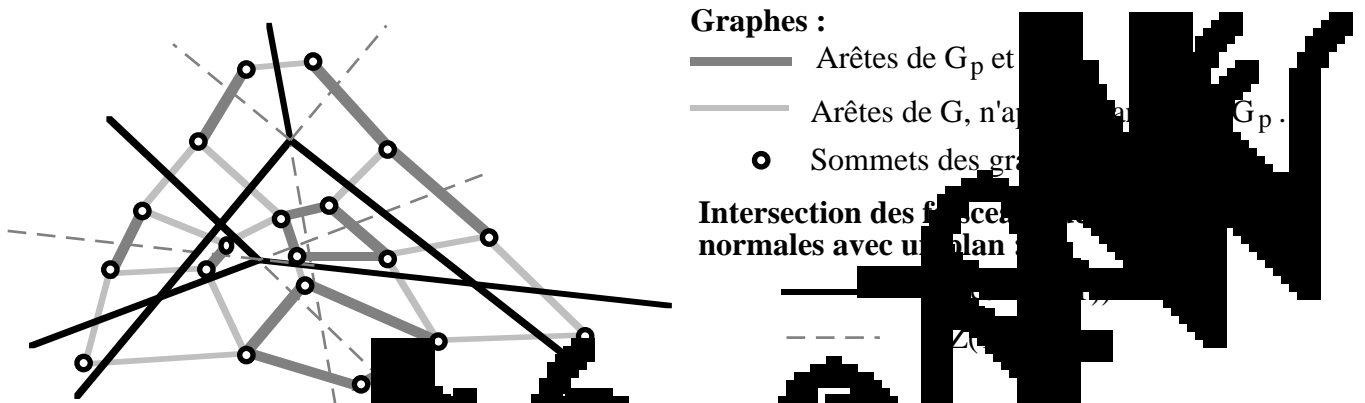


Fig. 21 : Graphes  $G$  et  $G_p$  et l'intersection des 3-faces de  $(H_T)$  avec un plan  $Z$ . Le graphe partiel  $G_p$  est obtenu en supprimant les arêtes de  $G$  qui ne sont pas dans  $G_p$ .

**Observation :** Chaque composante connexe ( $C \subset V$ ) du graphe  $G_p$  correspond à une 3-face  $f$  de  $(H_T)$  (l'ensemble des sommets du graphe) de la composante connexe représentée par  $f$  de  $(H_T)$  des 3-faces de  $(H_T)$  incluses dans la même 3-face  $f$  de  $(S_T)$ .

Ces composantes connexes forment une partition de l'ensemble des 3-faces de  $(H_T)$  en sous-ensembles.

Les composantes connexes de  $G_p$  sont déterminées par un algorithme de parcours dans le graphe  $G$ .

**Parcours dans le graphe d'adjacence avec détermination des composantes connexes**

Les relations d'adjacences entre les 3-faces de  $(H_T)$  forment le graphe  $G$ . On applique un algorithme de parcours en largeur (ou exploration) à ce graphe (cf. [Xuo92]), mais avec une priorité de visiter les composantes connexes de  $G_p$ . Ceci signifie que lorsqu'un algorithme se trouve au sommet  $v_0$ , il visite tous les sommets appartenant à la même composante connexe de  $G_p$  que  $v_0$ , avant de visiter d'autres sommets du graphe (voir algorithme). La visite d'une première composante connexe permet de construire un ensemble  $(f_0)$  de faces de  $(H_T)$  appartenant à la même 3-face de  $(S_T)$ . Le parcours recommence à partir d'un autre sommet de  $G$  non



visité pour déterminer une autre composante connexe ( $f_1$ ) de  $G_p$ .  
 Pour chaque arête rencontrée dans le parcours de  $G_p$ , on teste s'il s'agit d'une arête de  $G_p$ . C'est à dire, si la 2-face  $g$  de  $(H_1)$  correspondante à l'arête  $e$  du graphe n'est pas valide.

**Mise à jour de la structure d'incidence**

Durant le déroulement de l'algorithme de parcours du graphe, les données sont mises à jour de la structure de graphe d'incidence. On notera que le graphe d'incidence auquel on applique l'algorithme, il est initialisé par le graphe d'incidence  $(H_1)$ .

Lors du parcours de la  $k^{\text{ème}}$  composante connexe ( $f_k$ ) les mises à jour suivantes apparaissent :

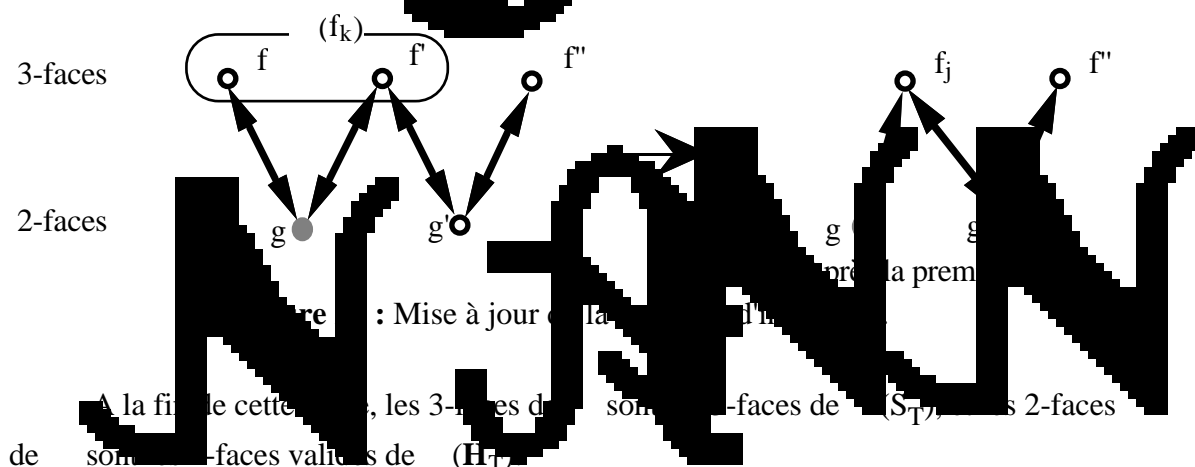
L'algorithme arrive à une 3-face  $f$ , et consulte une de ses sous-faces  $g$  commune à une face adjacente  $f'$  de  $(H_1)$  l'hyperplan contenant  $g$ .

- Si  $g \subset \overline{H_1}$  alors  $f$  est valide. Les super-faces de  $g$  sont mises à jour en remplaçant  $f$  par  $f'$  et  $f'$  est ajoutée dans la liste  $i(f_k)$  des sous-faces de  $f_k$ .
- Sinon  $g \not\subset \overline{H_1}$ , alors  $f$  est fautive.

Quand on fait le parcours d'une composante connexe, on a la liste  $i(f_k)$  des faces de  $(H_1)$  à fusionner, pour obtenir la nouvelle face  $f_k$  et  $i(f_k)$  contient les sous-faces de  $f_k$ .

Il faut également mettre à jour les éventuelles informations auxiliaires concernant les 3-faces : la donnée  $p(f)$  (point à l'intérieur de la face  $f$ , etc...

- 2-faces à supprimer



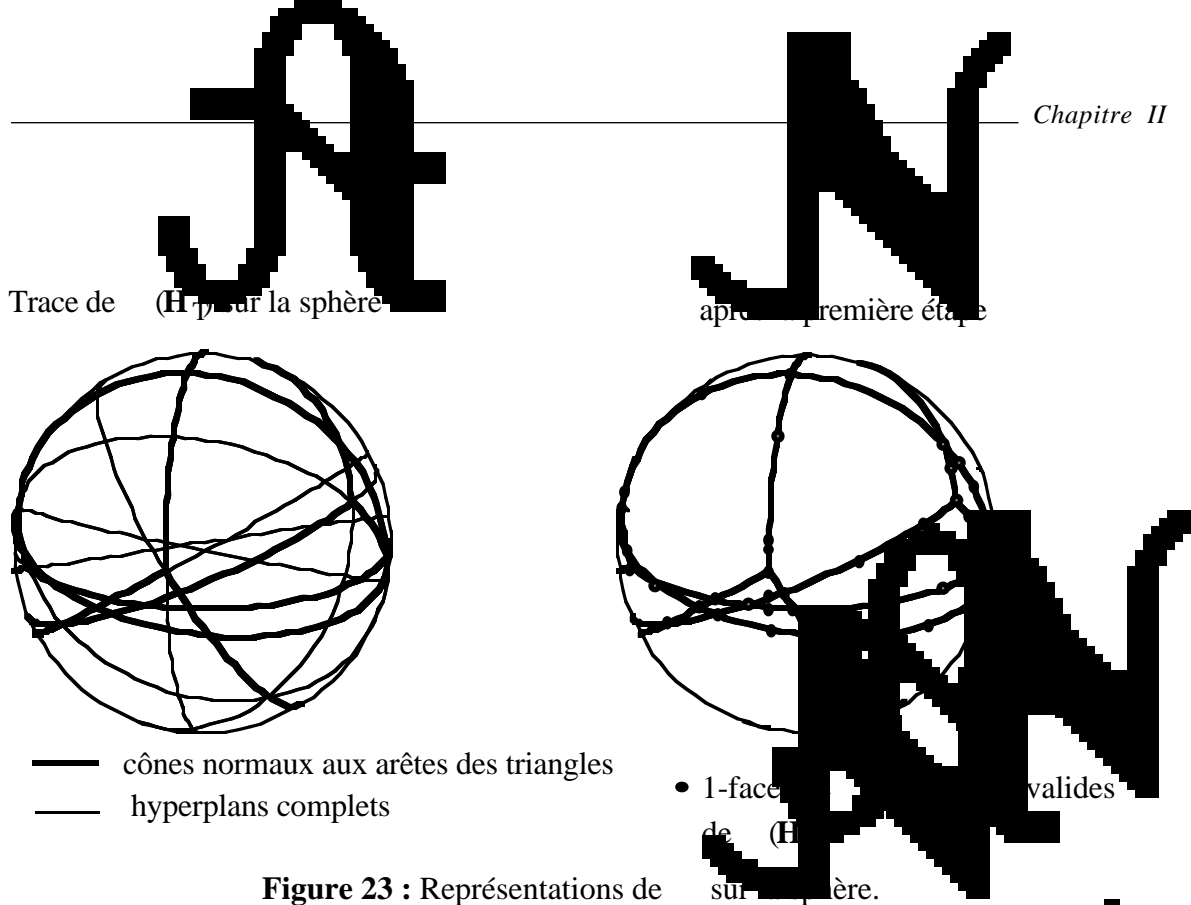


Figure 23 : Représentations de  $(H_T)$  sur la sphère.

L'algorithme de cette première étape est donné en annexe.

• Description de la deuxième étape : Fusion des 2-faces et suppression des 1-faces.

Comme à l'étape précédente, l'ensemble des 2-faces de  $(H_T)$  doit être partitionné en sous-faces qui sont les éléments appartenant à une même 2-face de  $(S_T)$ .

Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux 2-faces voisines de  $(H_T)$  appartenant à la même 2-face de  $(S_T)$ . Leur sous-face commune  $I$  n'est pas valide (respectivement n'appartient pas à la même 2-face de  $(S_T)$ , est valide). On aura donc besoin à cette étape d'appliquer le critère de validité, donné par la propriété 13, aux 1-faces de l'arrangement.

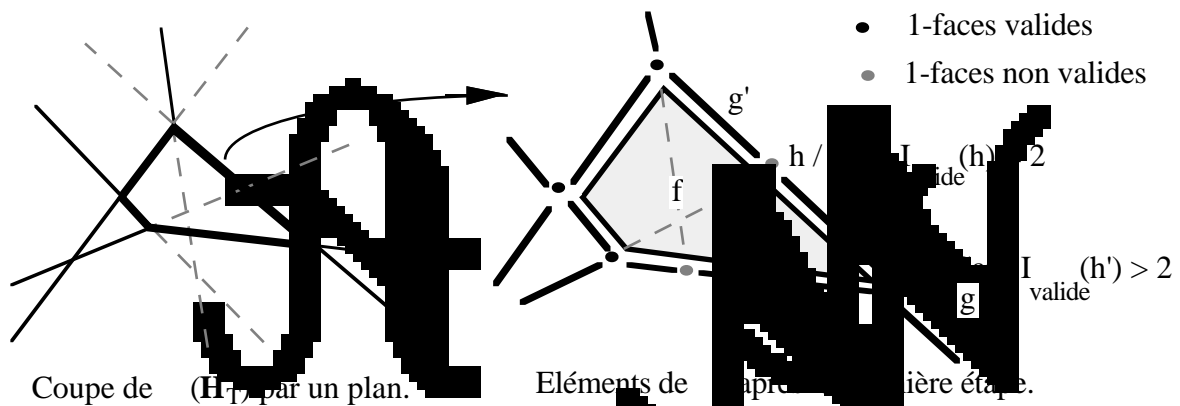


Figure 24 : Éléments de l'arrangement après première étape.

**Parcours**

Cette étape s'effectue comme précédemment par un algorithme de parcours du graphe d'adjacence des 2-faces valides de  $H_2$  (non supprimées à la première étape), qui détermine les composantes connexes des 2-faces à fusionner (voir algorithme).

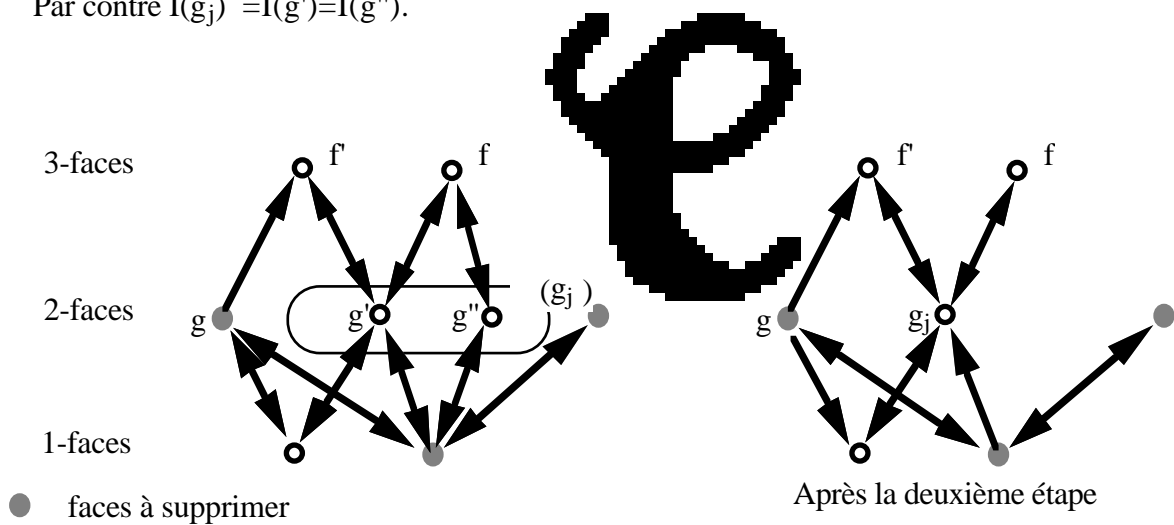
On remarque que les 1-faces n'ayant pas de 2-faces incidentes que des faces fausses ( $Card(I_{valide}(s))=0$ ) ne sont pas affectées par l'algorithme. C'est pour cette raison que les 1-faces de  $H_1$  sont toutes considérées comme étant fausses.

On peut remarquer une particularité des composantes connexes des 2-faces. En effet, le sous graphe correspondant à une composante connexe des 2-faces est une chaîne. On peut alors simplifier l'algorithme de parcours dans la composante connexe.

**Mise à jour de**

Dans le graphe d'incidence, la mise à jour des incidences entre 2-faces et 1-faces est gérée comme celle des incidences entre 3-faces et 2-faces à l'étape précédente.

A cette étape, il faut également mettre à jour les incidences entre 3-faces et 2-faces. Par exemple, dans la figure 25, la 3-face  $f$  a parmi ses sous-faces  $g'$  et  $g''$ , or à cette étape  $g'$  et  $g''$  deviennent une seule face  $g_j$ , donc  $i(f)$  devient  $i(f) \cup \{g_j\} \setminus \{g', g''\}$ . Par contre  $I(g_j) = I(g') = I(g'')$ .



**Figure 25 :** Mise à jour des structures de données.

L'algorithme de cette deuxième étape est donné en annexe.

### • Complexité de l'algorithme

La complexité d'un algorithme de parcours dans un graphe est linéaire par rapport au nombre de sommets plus le nombre d'arêtes du graphe.

#### *Complexité de la première étape :*

Le graphe  $G$  comporte  $f_3(\mathbf{H}_T)$  sommets et  $f_2(\mathbf{H}_T)$  arêtes, donc son parcours est en  $\Theta(p^2)$ .

Les instructions supplémentaires au parcours dans un graphe sont :

- déterminer la validité de chaque 2-face.
- le passage d'un sommet  $v$  à un sommet voisin du graphe, c'est à dire d'une 3-face  $f$  à une 3-face adjacente en passant par leur 2-face commune.
- la mise à jour des super-faces des 2-faces.
- la construction de la liste des sous-faces des nouvelles 3-faces.

Ces opérations s'effectuent en coût constant à chaque étape du parcours (voir annexe 1). Donc, la première étape de l'algorithme s'effectue avec une complexité en temps  $O(p^2)$ .

#### *Complexité de la deuxième étape :*

L'algorithme parcourt le graphe d'adjacence des 2-faces valides de  $(\mathbf{H}_T)$ , avec une complexité proportionnelle à  $f_2(\mathbf{H}_T) = 2i_1(\mathbf{H}_T)$  ( $i_1(\mathbf{H}_T)$  désigne le nombre d'incidences entre 1-faces et 2-faces de  $(\mathbf{H}_T)$ ), c'est à dire  $O(p^2)$ .

Les instructions supplémentaires au parcours du graphe sont :

- déterminer la validité des 1-faces, en comptant leurs super-faces valides. Le coût total est majoré par  $i_1(\mathbf{H}_T)$ , ce qui donne un coût en  $O(p^2)$ .
- mise à jour des sous-faces des 3-faces.
- mise à jour des super-faces des 1-faces.

Ces opérations s'effectuent en coût constant à chaque étape du parcours (voir annexe 1). La deuxième étape de l'algorithme s'effectue avec une complexité en temps de  $O(p^2)$ .

**Propriété 14 :** La méthode décrite pour calculer le normal  $(S_T)$  à partir de l'arrangement  $(\mathbf{H}_T)$  a une complexité en temps  $O(p^2)$ .

#### *Complexité du calcul des sommets*

Le graphe d'incidence de  $(S_T)$  est donné à partir de  $(\mathbf{H}_T)$  en inversant la dimension des faces, i.e. les  $k$ -faces de  $(\mathbf{H}_T)$  sont les  $(3-k)$ -faces de  $S_T$ . Par exemple, le point intérieur à une 1-face de  $(S_T)$  est une normale extérieure à une facette du polytope.

Pour calculer les sommets, on procède comme au §4.1. On calcule un premier

sommet, en déterminant sa position par rapport aux triangles adjacents  $(T_i)$ , avec un coût en  $O(p)$ . Puis on calcule les autres sommets de proche en proche, en parcourant le graphe d'adjacence des 3-faces de  $(S_T)$ . Le coût de calcul pour passer d'un sommet à son voisin est constant, donc le coût total du calcul des sommets est en  $O(p^2)$ .

**Propriété 15 :** La somme de  $p$  triangles de  $(S_T)$  peut être imprimée en temps de  $O(p^2)$ .

### 4.3.3 Extension de l'algorithme à $n$ dimensions

La première étape de l'algorithme à  $n$  dimensions est décrite dans [1]. Elle consiste à fusionner les  $n$ -faces de  $(H_T)$  incluses dans une même  $(n-1)$ -face de  $(S_T)$ . Un parcours du graphe d'adjacence des  $n$ -faces de  $(H_T)$  permet de trouver les faces incluses dans une même  $(n-1)$ -face de  $(S_T)$ .

Les étapes suivantes consistent à passer de  $n-1$  à différents niveaux du graphe d'incidence  $(G_T)$ .

A une étape de l'algorithme,

- les  $j$ -faces de  $(S_T)$  pour  $j < n-1$ ,
- les  $(k+1)$ -faces de  $(H_T)$  qui n'ont pas été fusionnées,
- les  $i$ -faces de  $(H_T)$  pour  $1 \leq i < k+1$ .

Un parcours parmi les  $(k+1)$ -faces valides de  $(H_T)$  permet de

- fusionner les  $(k+1)$ -faces incluses dans la même  $(k+1)$ -face de  $(S_T)$ ,
- déterminer la validité des  $k$ -faces,
- et mettre à jour les incidences entre les faces de dimensions  $k+2$ ,  $k+1$  et  $k$ .

Il faut répéter ces étapes jusqu'à la fusion des 2-faces et suppression des 1-faces.

### Complexité de l'algorithme

La complexité d'une étape est de l'ordre du nombre de  $(k+1)$ -faces, plus celui des  $k$ -faces, plus celui des incidences entre  $(k+1)$ -faces et  $k$ -faces. Car chaque relation d'incidence sera utilisée au plus 2 fois.

Or, on a

$$i_k(H_T) \leq i_k^{(n)}(3p) = \Theta(p^{n-1}),$$

où  $i_k(H_T)$  désigne le nombre d'incidences entre les faces de dimension  $k$  et  $k+1$  d'un arrangement de l'ensemble  $H_T$  de  $p$  hyperplans et  $i_k^{(n)}(p) = \max \{ i_k(H) \}$  pour tout ensemble  $H$  de  $p$  hyperplans de  $\mathbb{R}^n$  (Edelsbrunner Chapitre 1)

Donc le coût d'une étape est de l'ordre de

$$f_{k+1}(H_T) + f_k(H_T) + i_k(H_T) = \Theta(p^{n-1}).$$

Chaque étape est en  $\Theta(p^{n-1})$  pour  $k = n-2$  à 1, donc  $S_T$  est obtenu à partir de  $(H_T)$  avec un coût temps en  $\Theta(p^{n-1})$ .

Le faisceau de normales de  $S_T$  donne le graphe d'incidence de  $S_T$ , et le calcul des sommets se fait selon la méthode décrite dans 4.1. en  $\Theta(p^{n-1})$ .

**Propriété 16 :** Le calcul de la somme de  $n$  cellules de  $S_T$  selon la méthode décrite dans ce paragraphe s'effectue en  $O(p^n)$ .

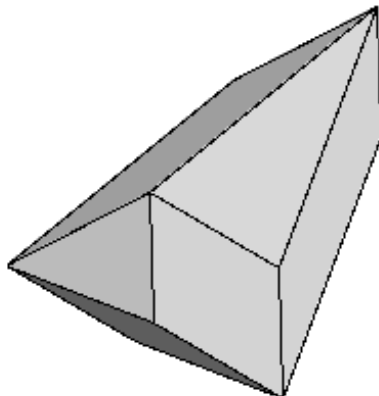
#### Autre idée : l'extension à

On peut simplement obtenir le 1-squelette (ou graphe) de  $S_T$  (sommets et arêtes du polytope) en appliquant la première étape de l'algorithme, on obtient les  $n$ -cellules de  $(S_T)$  il suffit alors de déterminer le graphe d'adjacence des  $n$ -cellules de  $(S_T)$  et d'appliquer l'algorithme de calcul des sommets.

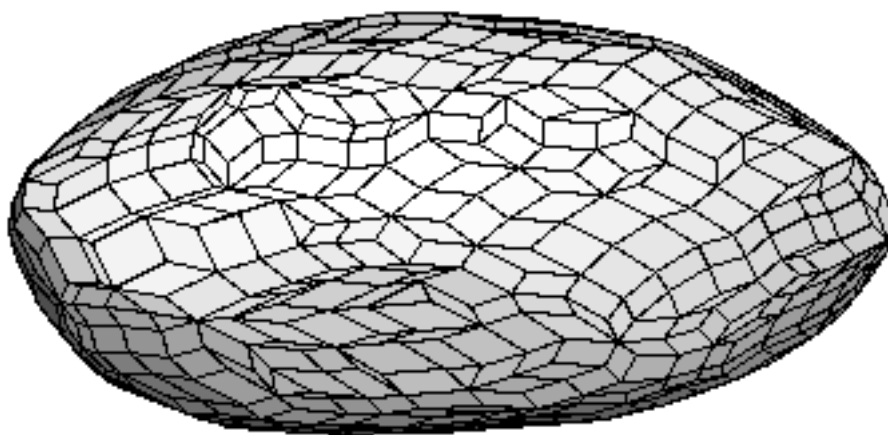
**Conclusion :** La méthode décrite ici n'est pas spécifique aux triangles. La même technique peut s'appliquer aux polytopes, à savoir obtenir la graphe d'incidence de la somme à partir de celui d'un arrangement d'hyperplans. Par contre, dans ce cas l'optimalité de l'algorithme n'est pas prouvée car elle dépend de la complexité effective de la somme des polytopes, par rapport à celle de l'arrangement engendré par les hyperplans orthogonaux aux arêtes des polytopes (cette dernière induit la complexité de l'algorithme).

## 5. Exemples de somme de triangles

- Triangles quelconques



**Somme de deux triangles.**

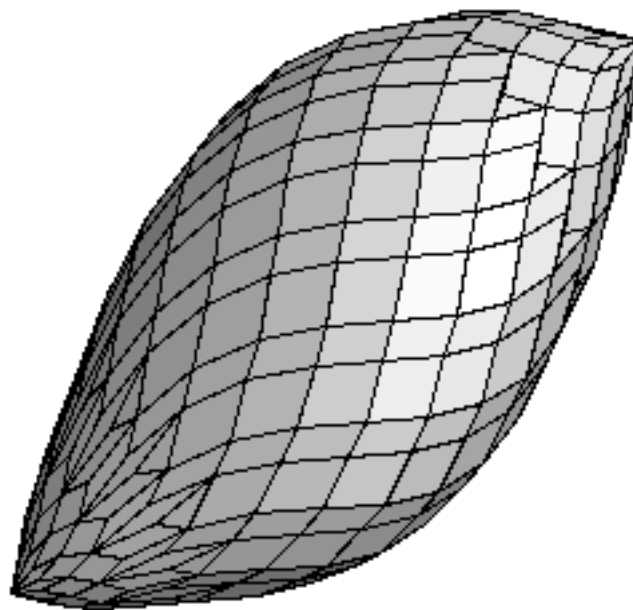
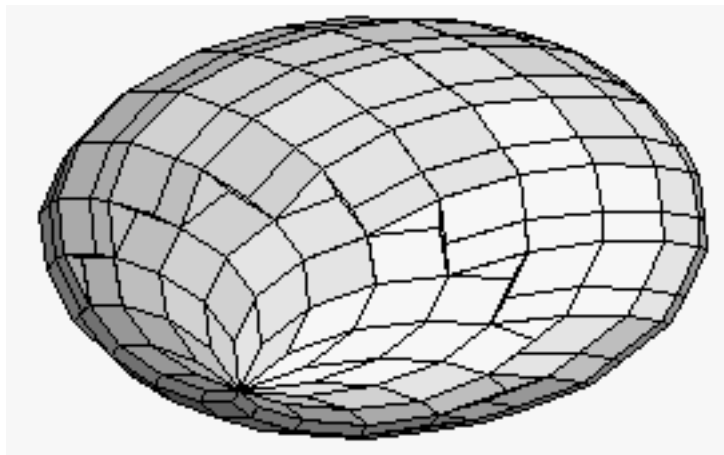
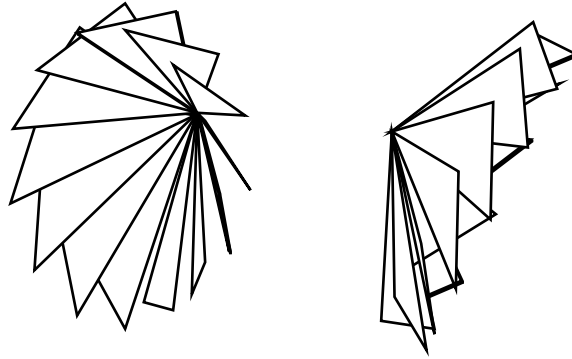


894 facettes, 1768 arêtes et 876 sommets

**Somme de 20 triangles quelconques.**

- Triangles avec des sommets régulièrement répartis sur des cercles :

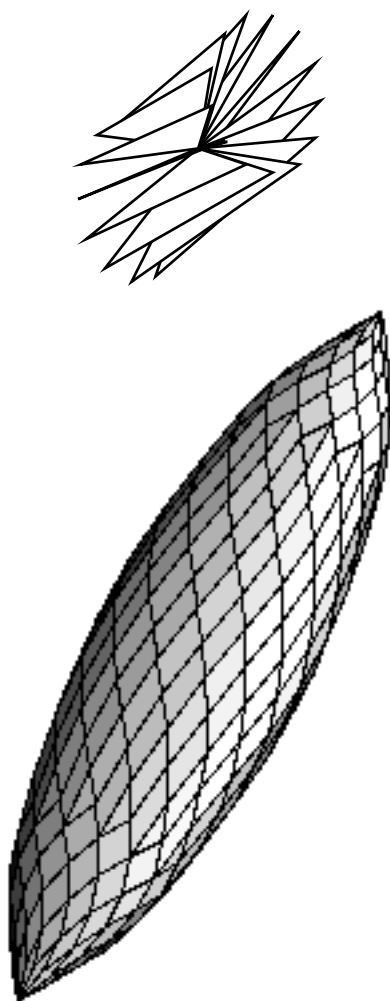
1- Somme de 13 triangles :



364 facettes, 715 arêtes et 353 sommets.



2-



338 facettes, 663 arêtes et 327 sommets.

**Somme de 13 triangles.**

## 6. Annexe

### Algorithme de calcul du graphe d'incidence

#### • Remarques préalables

La structure est définie par le graphe d'incidence  $(G, H)$ .

L'algorithme est celui du parcours en largeur dans un graphe auquel est ajouté des instructions qui nous permettent de modifier au fur et à mesure du parcours.

F et Q sont des files d'attente. Q correspond aux éléments de la composante connexe en attente d'être visités, alors que dans F on met les éléments non atteints et ne faisant pas partie de la composante connexe courante.

A un moment donné du parcours, chaque sommet du graphe est dans l'un des 3 cas suivants :

- soit il n'est pas atteint par le parcours,
- soit il est atteint (c'est à dire qu'il est dans l'une des files d'attente F ou Q),
- soit il a été visité (c'est à dire atteint et tous ses voisins sont atteints).

Ainsi, à chaque face  $f$  de  $G$  est associée une marque ( $f\_marque$ ) qui prend les valeurs:

- "non atteinte", son état n'a pas encore été déterminé.
- "atteinte", son état est connu mais elle n'est pas encore traitée.
- "traitée", soit elle est dans la file d'attente pour subir d'éventuelles modifications, soit elle les a déjà subies.

Et on associe également à  $f$  un état qui prend les valeurs : "vraie", si la face  $f$  valide (respectivement "fausse" sinon).

- Parcours des faces et 3-faces de  $(H_7)$  (première étape)

```

{- Initialisation -}
= graphe d'adjacence  $(H_7)$ 
k = 0;   compteur des composantes connexes (ou 3-faces du faisceau)
F = {f0} ; où f0 est une 3-face quelconque de  $(H_7)$ 
Pour f ∈  $(H)$  faire f_marque = non atteinte fin pour;
{- - - - - - - -}
Tant que F ≠ ∅ faire
  k = k + 1;          g0 = PrendPremierFile(F) ;
  Q = (g0);
  Tant que Q ≠ ∅ faire {- parcours de la composante connexe -}
    f = PrendPremierFile(Q) ; (2)          (fk) = (f)
    i(fk) = ∅;
    Pour a ∈ i(f) faire
      Si a_marque = non atteinte
      alors
        f' = I(a) \ {f}; (3)
        a_marque = atteinte
        Si a ∉ H(a) (7)
        alors
          a_état = fautive
          Si f'_marque = non atteinte
          alors
            Q = Q ∪ {f'}; (4)
            (fk) = (fk) ∪ {f'}
            f'_marque = atteinte ;
        sinon
          a_état = vraie ;
          i(fk) = i(fk) ∪ {a}; b
          I(a) = I(a) ∪ {fk} \ {f} ; a
          Si f'_marque = non atteinte
          alors
            F = F ∪ {f'}; (4)
            f'_marque = atteinte ; (5)
        sinon
          si a_état = vraie
          alors I(a) = I(a) ∪ {fk} \ {f} ; a
            i(fk) = i(fk) ∪ {a}; b
      fin pour
      f_marque = traitée ;
    fin tant que Q ≠ ∅;
  Tant que PremierFile(F)_marque = traitée (6)
  faire SupprimePremier(F);
fin tant que F ≠ ∅;

```

Notes sur l'algorithme :

- (1)  $g_0$  est la première face de la liste F.
- (2)  $f$  est la première face de la liste Q.
- (3)  $\text{Card } I(a) = 2$ , donc la d-face  $f' = I(a) \setminus \{f\}$  est bien définie.
- (4) La face  $f'$  est mise à la queue de la file d'attente.
- (5) Une face "atteinte" est différente de "traitée", cela signifie qu'elle est mise en attente dans la file d'attente F ou Q, et que la composante connexe à laquelle elle appartient n'a toujours pas été explorée. Une face est dite "traitée" lorsque tous ses voisins sont atteints.
- (6) On dépile les éléments de F jusqu'à trouver un élément non traité.

**Instructions supplémentaires au parcours du graphe :**

- Le test (7) s'effectue par un produit scalaire d'un point  $p(a)$  de  $a$  avec un vecteur.  
En effet, pour déterminer si une 2-face  $a$  est incluse dans le demi-plan  $\overline{H}(a)$  du faisceau de normales d'un triangle, il suffit de tester le signe de  $\langle p(a), v \rangle$ .

Où le demi-plan  $\overline{H}(a)$  est défini par les deux vecteurs :  $\eta$  et  $v$  tels que

$$\overline{H}(a) = \{ x, \langle x, \eta \rangle = 0 \text{ et } \langle x, v \rangle > 0 \}.$$

- Le passage d'un sommet  $v$  à un sommet voisin du graphe, c'est à dire d'une 3-face  $f$  à une 3-face adjacente, se fait de la façon suivante. Soit  $g$  une sous-face de  $f$ , l'ensemble  $I(g)$  des super-faces de  $g$  ne contient que deux faces :  $f$  et  $f'$  adjacentes. Donc la face voisine  $f' = I(g) \setminus f$  est déterminée avec un coût constant (instruction (3)).

De plus, le parcours en largeur du graphe permet de consulter linéairement les listes des sous-faces (sans faire d'aller retour).

- La mise à jour des super-faces d'une 2-face  $a$  "vraie", se fait par l'instruction a avec un coût constant, car  $\text{Card } (I(a)) = 2$ .

- la construction de la liste des sous-faces de la nouvelle face  $f_k$  se fait en temps proportionnel aux nombres de sous-faces de  $f_k$  au fur et à mesure du parcours (instruction b).

Ainsi, ces intructions n'augmentent pas l'ordre de grandeur de la complexité du parcours du graphe d'adjacence des 3-faces de l'arrangement.

• *Algorithme de la deuxième étape*

Notations : Soit  $(H_1)$  et  $(H_2)$

$I_{\text{valide}}(a) = \{f \in \mathcal{F}(a) / f_{\text{état}} = \text{vraie}\}$  et  $I_{\text{fausse}}(a) = \{f \in \mathcal{F}(a) / f_{\text{état}} = \text{fausse}\}$

Algorithme : Soit  $g_0$  un sommet valide de  $(H_1)$

**Pour**  $f \in \mathcal{F}_2(H_1)$  **faire**  $f_{\text{marque}} = \text{non atteinte}$  **fin pour**;

**Pour**  $f \in \mathcal{F}_1(H_1)$  **faire**  $f_{\text{état}} = \text{fausse}$  **fin pour**;

$F = \{g_0\}$  ;  $k = 0$ ;

**Tant que**  $F \neq \emptyset$  **faire**

$f = \text{PrendPremierFile}(F)$  ;  $Q = \{f\}$ ;

$k = k + 1$ ;

$i(f_k) = \emptyset$ ;

**Tant que**  $Q \neq \emptyset$  { Visite de la même composante connexe }

$f = \text{PrendPremierFile}(Q)$  ;  $(f_k) = (f)$ ;

**Pour**  $s \in i(f)$  **faire**

**Si**  $s_{\text{marque}} = \text{non atteinte}$

**alors** calculer  $i_{\text{valide}}(s)$ ;

$s_{\text{marque}} = \text{atteinte}$ ;

**Si**  $\text{Card}(I_{\text{valide}}(s)) > 0$  { Extension de l'état de  $s$  }

**alors**  $s_{\text{état}} = \text{fausse}$ ;

$f' = \text{PrendPremierFile}(i_{\text{valide}}(s))$ ;

$(f_k) = (f_k) \cup (f')$ ;

$Q = Q \cup \{f'\}$ ;

**sinon**  $s_{\text{état}} = \text{vraie}$ ;

$I(s) = I(s) \cup \{f_k\} \setminus \{f\}$ ; (1)

$F = F \cup \{g \in I_{\text{valide}}(s) \setminus \{f\} \text{ et } g_{\text{état}} \neq \text{traitée}\}$ ; (3)

$i(f_k) = i(f_k) \cup \{s\}$ ;

**sinon**

**si**  $s_{\text{état}} = \text{vrai}$  **alors**  $I(s) = I(s) \cup \{f_k\} \setminus \{f\}$ ;

$i(f_k) = i(f_k) \cup \{s\}$ ;

**fin pour**  $s$

**Pour**  $g \in I(f_k)$  **faire**  $i(g) = i(g) \setminus f$ ; (2)

$f_{\text{marque}} = \text{traitée}$ ;

**fin tant que**  $Q \neq \emptyset$ ;

$I(f_k) = I(f)$ ; (3)

**Pour**  $g \in I(f_k)$  **faire**

$i(g) = i(g) \cup \{f_k\}$ ;

**Tant que**  $\text{PremierFile}(F)_{\text{marque}} = \text{traité}$

**faire**  $\text{PrendPremierFile}(F)$ ;

**fin tant que**  $F \neq \emptyset$ ;

Note :

(3) La face  $f_k$  a les mêmes sous-faces que les faces  $f$  de  $(f_k)$ . Les sous-faces de  $I(f)$  sont des faces  $(S_T)$  liées à la première face.

**Instructions supplémentaires au parcours du graphe :**

- Pour chaque 1-face  $s$  de  $(H_T)$  incidente à une 2-face valide, on construit  $I_{valide}(s)$ . Ceci se fait en temps proportionnel au nombre d'éléments de  $I(s)$ . Donc le coût total est majoré par  $i_1(H_T)$ , ce qui donne un coût en  $O(p^2)$ .

- Réaliser la mise à jour de super-faces des 1-faces valides par l'instruction (1). Il faut trouver le représentant de  $f$  dans la liste  $I(s)$ . Ceci se fait en temps constant car  $\text{Card } I(s)$  est borné par une constante indépendante de  $p$ .

- Réaliser la mise à jour de sous-faces des 3-faces par l'instruction (2). Ceci se fait en temps constant grâce aux pointeurs ajoutés entre les listes de sous-faces et super-faces.

Donc ces instructions n'augmentent pas l'ordre de grandeur de la complexité du parcours des 2-faces valides.

## Chapitre III

# Application : Modélisation géométrique de la fabrication des mélanges

### Introduction

Les sommes particulières de triangles étudiées dans ce chapitre apparaissent dans le contexte de la modélisation géométrique de la fabrication des mélanges.

La faisabilité d'un mélange se traduit par l'appartenance d'un point, représentation vectorielle du mélange, au convexe de mélange (zonotope).

Le problème de fabrication simultanée des mélanges se pose différemment : on connaît l'ensemble de mélanges à fabriquer  $M_1, \dots, M_n$ . Il s'agit de déterminer globalement s'ils peuvent être tous fabriqués. Ce problème est aussi appelé problème de coexistence de famille de vecteurs [C86]. La modélisation géométrique de ce problème introduite dans [Lac&Val93] généralise le convexe de mélange à celui de  $q$ -mélanges. Ces nouveaux ensembles résultent de la somme de  $q$ -simplexes dans un espace de dimension  $qn$ .

L'étude menée ici se limite aux convexes de 2-mélanges pour une représentation vectorielle des produits dans laquelle le plan joue un rôle central. La faisabilité se traduit par l'appartenance d'un point au convexe, ce qui nous conduit à rechercher les facettes de ce convexe, dans le but d'obtenir un système d'inégalités permettant d'établir la faisabilité des deux mélanges.

L'énumération des facettes se fait par une étude des différentes combinaisons possibles de somme d'arêtes et de triangles. On peut décrire les facettes du convexe de 2-mélanges à partir du premier diagramme projectif, comme pour les zonoèdres. Le nombre de facettes se comporte en  $O(p^5)$  et cette borne peut être atteinte.

Pour le cas particulier où les vecteurs représentant les produits de base vérifient la sélectivité régulière, le nombre de facettes du convexe de 2-mélanges se comporte en  $O(p^2)$ . Dans ce cas, on montre que la faisabilité simultanée des mélanges  $M_1$  et  $M_2$  est équivalente à la faisabilité des mélanges  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_1 + M_2$ , propriété qui est fautive en général.

Dans la dernière partie, on illustre par un exemple comment décrire les adjacences entre les facettes du convexe de 2-mélanges à partir du premier et deuxième diagramme projectif. Ceci pourrait permettre de proposer des algorithmes pour décider de la faisabilité des 2-mélanges.

## 1. Rappel de la modélisation géométrique de la fabrication d'un mélange

Dans le modèle géométrique de fabrication des mélanges introduit par P. Valeur dans [Val86], les produits sont représentés par des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Chaque des  $n$  composantes d'un vecteur correspond à une propriété du produit représenté, et l'espace est appelé espace des espèces. Ces propriétés doivent être additives et elles représentent les quantités de certains caractères physico-chimiques : volume, masse, quantité de soufre.

**Définition 1 :** Une propriété  $\pi$  d'un produit est dite *additive*, si le mélange de deux produits  $A$  et  $B$ , donne un produit  $C$  vérifiant :

$$\pi(C) = \pi(A) + \pi(B).$$

Si la masse des produits est une propriété additive, la densité d'un produit ou sa teneur en certaines substances ne le sont pas, dans ce cas il faut se ramener à une propriété additive. Par exemple, la masse volumique est remplacée par le volume.

Ainsi, si les propriétés sont additives et si on a  $N_1, N_2$  et  $N_3$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  représentant chacun un produit, alors lorsqu'on mélange ces produits, en prenant une fraction  $\alpha_i$  de chaque produit  $N_i$ , le mélange obtenu a pour représentation vectorielle :

$$M = \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \alpha_3 N_3.$$

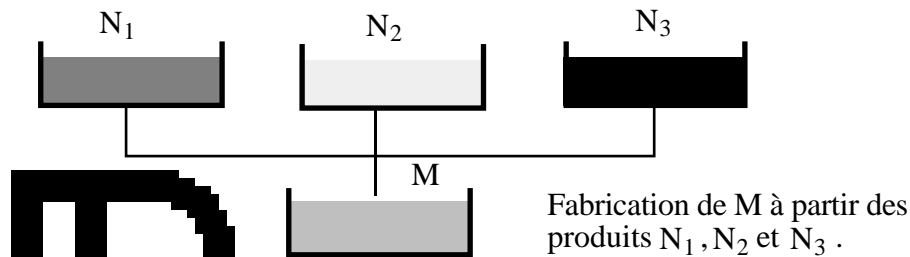


Figure 1.1 : Fabrication d'un mélange à partir d'un ensemble de produits de base.

Dans la suite, on dispose de  $p$  produits de base représentés par les vecteurs  $N_i$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

**Définition 2 :** On dit qu'un produit  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  est *fabrivable* à partir des produits de base si et seulement si

$$\exists \lambda_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, p \quad \text{tels que } M = \sum_{i=1}^p \lambda_i N_i.$$



On considère l'application  $G$  qui au vecteur  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$  fait correspondre

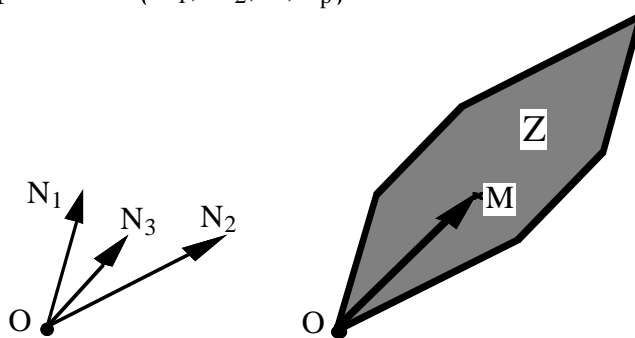
$$G(\lambda) = \sum_{i=1}^p \lambda_i N_i,$$

le produit fabriqué. L'ensemble des mélanges faisables à partir des produits de base  $N_i$  est l'image du cube  $[0,1]^p$  par  $G$ .

$$G([0,1]^p) = \sum_{i=1}^p [0,1] N_i \text{ est un zonotope.}$$

Cet ensemble est appelé *convexe de mélange* associé à la famille  $\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$  et se note  $Z\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$ . Ceci entraîne la propriété suivante :

**Propriété 1 :** Le mélange  $M \in \mathbb{R}^n$  est réalisable à partir des produits de base si et seulement si  $M$  appartient à  $Z\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$ .



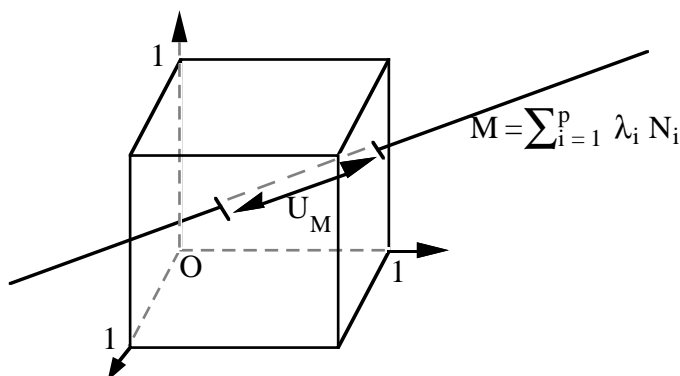
**Figure 2 :**  $Z$  convexe de mélange associé à  $N_1, N_2$  et  $N_3$ ; et  $M$  un mélange faisable.

**Remarques :**

Si le mélange  $M$  est faisable, alors en général le vecteur  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$  qui donne le produit  $M$  n'est pas unique. On désigne par  $E_M$  l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{R}^p$  vérifiant  $M = \sum_{i=1}^p \lambda_i N_i$ ,  $E_M$  est un sous espace affine de dimension au plus  $p-n$ . L'ensemble des solutions du problème de fabrication de  $M$  est l'intersection de  $E_M$  avec le cube  $[0,1]^p$  :

$$U_M = E_M \cap [0,1]^p.$$

Exemple :  $n = 2$  et  $p = 3$ .  $U_M$  l'ensemble des  $\lambda$  solutions est en général l'intersection de  $[0,1]^3$  avec une droite.

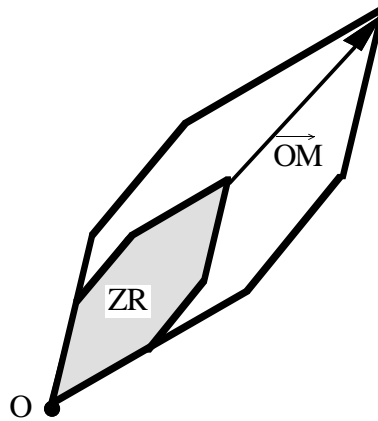


**Figure 3 :**  $U_M$  l'ensemble des  $\lambda$  solutions.

*Choix optimal :*

Le choix d'un vecteur  $\lambda$  parmi l'ensemble des solutions peut se faire par la prise en compte d'un critère à maximiser. Il s'agit en général d'un critère linéaire représentant un coût, ou d'un critère plus géométrique représentant le volume du zonotope résiduel. Si des fractions  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$  des produits  $N_i$  ont été consommées pour la fabrication de  $M$ , alors le *zonotope résiduel* s'écrit

$$ZR(\lambda) = \sum_{i=1}^p (1 - \lambda_i) [0, N_i].$$



**Figure 4 :** ZR, le zonotope résiduel après fabrication de  $M$ .

Le critère du volume résiduel maximum, consiste à choisir dans  $U_M$ , le vecteur  $\lambda$  maximisant le volume du zonotope résiduel. Ce critère vise à élargir la gamme de produits faisables, après fabrication du mélange  $M$ .

On remarque que la faisabilité d'un second mélange  $M'$  après fabrication de  $M$ , est liée au choix du  $\lambda$  qui a permis de fabriquer  $M$  (c'est à dire,  $M'$  est faisable si et seulement si  $M' \in ZR(\lambda)$  ).

## 2. Faisabilité de plusieurs mélanges

Ici, plutôt qu'une stratégie séquentielle de fabrication des mélanges, où la faisabilité d'un second mélange dépend du choix fait pour la fabrication d'un premier mélange ( $\lambda \in U_M$ ), on regarde si globalement ces deux mélanges sont faisables. Ce problème est énoncé sous la forme plus générale de faisabilité simultanée de  $q$  mélanges  $M_1, M_2, \dots, M_q$  à partir des produits de base  $N_1, N_2, \dots, N_p$ , et est également appelé problème de *coexistence* de deux familles de vecteurs.

### 2.1 Fabrication simple de mélanges

**Définition 3 :** Soient  $\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$  et  $\{M_1, M_2, \dots, M_q\}$  deux familles de vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ .

On dit que la famille  $\{M\}$  coexiste dans la famille  $\{N\}$ , si il existe  $q$   $p$ -uplets  $\lambda_k = (\lambda_k^1, \lambda_k^2, \dots, \lambda_k^p)$   $k = 1, \dots, q$

tels que :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad M_k = \sum_{j=1}^p \lambda_k^j N_j \quad k = 1, \dots, q, \\ (2) \quad 0 \leq \lambda_k^j (\leq 1) \quad j = 1, \dots, p \text{ et } k = 1, \dots, q, \\ (3) \quad \sum_{k=1}^q \lambda_k^j \leq 1 \quad j = 1, \dots, p. \end{array} \right.$$

### 2.2. Quelques résultats

Pour le zonotope résiduel on a les résultats suivants :

**Propriété 2** [Sla86] : Soit  $M \in \mathbb{R}^2$  un mélange faisable à partir des produits de base. Quel que soit  $\lambda \in U_M$ , on a :

$$ZR(\lambda) \subseteq Z \cap (Z - M).$$

**Propriété 3** [Sla86] : Dans un espace des espèces de dimension 2, le zonotope de volume résiduel maximal est donné par  $Z \cap (Z - M)$ . En d'autres termes, il contient tous les zonotopes résiduels.

Une condition nécessaire de coexistence est donnée par la propriété suivante :

**Propriété 4** [Lac&Val93] : Si la famille  $\{M\}$  coexiste dans la famille  $\{N\}$  et si le zonotope  $Z\{M_1, M_2, \dots, M_q\}$  est contenu dans le zonotope  $Z\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$

De plus, cette condition est une condition suffisante pour des vecteurs de

**Corollaire 1 :** La famille  $\{M_1, M_2\}$  coexiste dans la famille  $\{N\}$  de vecteurs si et seulement si  $M_1, M_2$  et  $M_1 + M_2$  sont faisables dans la famille  $\{N\}$

*Contre exemple dans*

$$\text{Soient } N_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, N_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } N_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ les produits de base et}$$

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  les mélanges à fabriquer.  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_1 + M_2$  sont faisables et pourtant  $M_1$  et  $M_2$  ne sont pas faisables simultanément. En effet  
 $M_1 = N_1 + N_3$  ,  $M_2 = N_2 + N_3$  et  
 $M_1 + M_2 = N_3 + N_4$ .

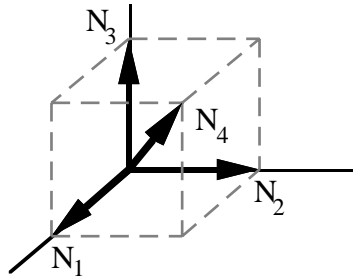


Figure 5 : Exemple d'une famille de quatre vecteurs.

### 3. Modélisation géométrique

La faisabilité simultanée des mélanges est modélisée géométriquement dans [Lac&Val93], en se plaçant dans un espace  $q$ -dimensionnel défini par l'ensemble :

On définit les vecteurs  $\tilde{N}_j^k$  de  $\prod_{i=1}^q \mathbb{R}^+$  pour  $j = 1, \dots, p$  et  $k = 1, \dots, q$  comme suit :

$$\tilde{N}_j^k = (X_1, X_2, \dots, X_q) \in \mathbb{R}^q \text{ où } X_i \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } X_i = N_j \text{ et } X_i = 0 \text{ si } i \neq k.$$

Ce qui donne :

$$\tilde{N}_j^1 = (N_j, 0, \dots, 0), \quad \tilde{N}_j^2 = (0, N_j, \dots, 0), \quad \dots, \quad \tilde{N}_j^q = (0, \dots, 0, N_j).$$

Soient  $K_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , les  $q$ -simplexes définies par :

$$K_j = \left\{ X = \sum_{k=1, \dots, q} \lambda_j^k \tilde{N}_j^k \mid \lambda_j^k \in \mathbb{R}^+, \sum_{k=1, \dots, q} \lambda_j^k = 1, \lambda_j^k \geq 0, k=1, 2, \dots, q \right\}.$$

$K_j$  est l'enveloppe convexe des points  $\tilde{N}_j^1, \dots, \tilde{N}_j^q$ .

**Définition 4 :** Soit  $N = \{N_1, N_2, \dots, N_p\}$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^q$ . On appelle *convexe de  $q$ -mélanges* associé à  $N$  le polyèdre défini par la somme de Minkowski des simplexes  $K_j$ . On note  $K$  ce polytope :

$$K = \sum_{j=1, \dots, p} K_j.$$

**Propriété :** Les mélanges  $M_1, \dots, M_q$  sont simultanément faisables (ou en fait dans la famille) coexistants dans la famille  $\mathcal{N}$  si et seulement si le point  $(M_1, M_2, \dots, M_q)$  appartient à  $K$  le convexe de  $q$ -mélanges associé à la famille  $\mathcal{N}$ .

**Démonstration :** Voir [Lac&Val93].

Ainsi le problème de coexistence se résout en déterminant l'appartenance du point  $(M_1, \dots, M_q)$  au convexe de  $q$ -mélanges  $K$  associé à la famille  $\mathcal{N}$ . Pour cela, nous utiliserons la représentation du polytope  $K$  sous forme d'intersection de demi-espaces. Pour cette raison, nous aborderons dans la suite à déterminer l'ensemble des facettes de  $K$  à partir d'un système d'inégalités, conditions nécessaires et suffisantes de coexistence.

L'étude se limite ainsi à l'étude des convexes de  $q$ -mélanges.

L'étude est menée dans [Lac&Val93] sur les convexes de 2-mélanges associés à une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ . Les résultats sont les suivants :

**Théorème :** Soit  $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_p\}$  une famille de  $p$  vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  non nuls à deux colinéaires, une condition nécessaire pour qu'un vecteur non nul  $X = (u, v)$ ,  $u \in \mathbb{R}$  et  $v \in \mathbb{R}$  soit normal à une  $B$ -face du convexe de 2-mélanges associé à  $\mathcal{N}$ , est qu'il existe  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$  et  $N_j^\perp$  un vecteur non nul orthogonal à  $N_j$ , tels que l'on ait une des trois conditions suivantes :

- (i)  $(u, v) = (N_j^\perp, 0)$ ,
- (ii)  $(u, v) = (0, N_j^\perp)$ ,
- (iii)  $(u, v) = (N_j^\perp, N_j^\perp)$ .

**Démonstration :** cf. [Lac&Val93].

**Remarque :** A partir de ce théorème, on retrouve le résultat du chapitre 3.

#### 4. Détermination des facettes d'un convexe de 2-mélanges

Soit  $K$  le convexe de 2-mélanges associé à la famille  $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_p\}$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  et la somme de Minkowski de triangles  $K_i$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Le but de ce paragraphe est de déterminer les facettes de  $K$ , et en particulier leurs normales et les valeurs de la fonction support dans ces directions.

#### 4.1. Idée de base de l'énumération des facettes

Pour déterminer l'ensemble des facettes d'un convexe de 2-mélanges  $K$ , nous suivrons la méthode donnée dans [Lac&Val93] qui permet d'obtenir les directions des normales extérieures aux facettes de  $K$ . L'idée est la suivante:

Soient  $Q_i$ ,  $i = 1$  à  $p$  des polytopes dans  $\mathbb{R}^n$ . La liste de normale extérieure  $\eta$  de la somme des polytopes  $Q_i$ , s'écrit :

$$F\left(\sum_{i=1, \dots, p} Q_i, \eta\right) = \sum_{i=1, \dots, p} F(Q_i, \eta). \quad (\text{cf. chapitre I, propriété 5})$$

On voit que la dimension de  $F\left(\sum_{i=1, \dots, p} Q_i, \eta\right)$ , dépend de la dimension des termes  $F(Q_i; \eta)$  de la somme, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dim F\left(\sum_{i=1, \dots, p} Q_i, \eta\right) &= \dim\left(\sum_{i=1, \dots, p} F(Q_i, \eta)\right) \\ &\leq \sum_{i=1, \dots, p} \dim F(Q_i, \eta) \\ &\leq \text{Min}\left(\sum_{i=1, \dots, p} \dim F(Q_i, \eta), n-1\right). \end{aligned}$$

D'où la remarque :

Si  $F\left(\sum_{i=1, \dots, p} Q_i, \eta\right)$  est une facette de  $\sum_{i=1, \dots, p} Q_i$ , alors  $\sum_{i=1, \dots, p} \dim F(Q_i, \eta) \geq n-1$ .

#### Facettes d'un zonoèdre

Appliquons cette remarque aux facettes d'un zonoèdre.

Soient  $N_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1$  à  $p$ , et soit  $Z$  le zonoèdre défini par :

$$Z = \sum_{i=1, \dots, p} [0, N_i].$$

Pour  $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , on a

$$F(Z, \eta) = \sum_{i=1, \dots, p} F([0, N_i], \eta).$$

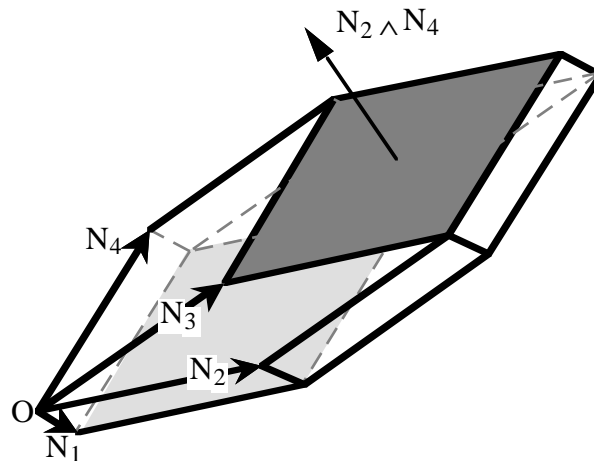
$$F([0, N_i], \eta) = \begin{cases} N_i & \text{si } \langle N_i, \eta \rangle > 0, \\ [0, N_i] & \text{si } \langle N_i, \eta \rangle = 0, \\ 0 & \text{si } \langle N_i, \eta \rangle < 0. \end{cases}$$

Si  $F(Z, \eta)$  est une facette de  $Z$ , alors

$$\sum_{i=1, \dots, p} \dim F([0, N_i], \eta) \geq 2.$$

Or  $\dim F([0, N_i], \eta) = 0$  ou  $1$ , donc au moins deux termes parmi les  $F([0, N_i], \eta)$  ( $i = 1, \dots, p$ ), sont de dimension 1. Supposons qu'il s'agit des termes d'indice  $j$  et  $k$ , alors  $\eta$  est orthogonal aux vecteurs  $N_j$  et  $N_k$ . Ce qui donne deux directions normales possibles :

$$-N_j \wedge N_k \text{ et } N_j \wedge N_k.$$



**Figure 6 :** Facettes du zonoèdre.

Ecrivons  $F(Z, \cdot)$  pour ces deux directions :

$$F(Z, N_j \wedge N_k) = [0, N_j] + [0, N_k] + \sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ \langle N_j \wedge N_k, N_i \rangle > 0}} N_i + \sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ \langle N_j \wedge N_k, N_i \rangle < 0}} 0 + \sum_{\substack{i=1, \dots, p \text{ et } i \neq j, k \\ \langle N_j \wedge N_k, N_i \rangle = 0}} [0, N_i],$$

$$F(Z, N_k \wedge N_j) = [0, N_j] + [0, N_k] + \sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ \langle N_j \wedge N_k, N_i \rangle > 0}} 0 + \sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ \langle N_j \wedge N_k, N_i \rangle < 0}} N_i + \sum_{\substack{i=1, \dots, p \text{ et } i \neq j, k \\ \langle N_j \wedge N_k, N_i \rangle = 0}} [0, N_i].$$

Donc les vecteurs  $N_j \wedge N_k$  et  $N_k \wedge N_j$  sont des normales à des facettes de  $Z$  si et seulement si  $N_j$  et  $N_k$  ne sont pas colinéaires.

Et on remarque que ces deux facettes sont symétriques par rapport à  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p N_i$ .

**Propriété 6 :** Un point  $M$  appartient à  $Z$  si et seulement si il vérifie les inégalités :

$$\text{pour tout } \{j, k\} \subset \{1, 2, \dots, p\}, 1 \leq j < k \leq p$$

$$\begin{cases} \langle M, N_k \wedge N_j \rangle \leq h(Z, N_k \wedge N_j), \\ \langle M, N_j \wedge N_k \rangle \leq h(Z, N_j \wedge N_k), \end{cases}$$

où  $h(Z, \cdot)$  est la fonction support de  $Z$ .

Dans le premier diagramme projectif la face d'appui  $F([0, N_k], N_i \wedge N_j)$  est donnée par la position du point  $P_k$ , associé vecteur  $N_k$ , par rapport à la droite passant

par les points  $P_i$  et  $P_j$ . En effet les déterminants  $\det(\overrightarrow{P_iP_j}, \overrightarrow{P_iP_k})$  et  $\det(N_i, N_j, N_k)$  ont même signe, d'où :

$$F([0, N_k], N_i \wedge N_j) = \begin{cases} N_k & \text{si } \det(\overrightarrow{P_iP_j}, \overrightarrow{P_iP_k}) > 0, \\ [0, N_k] & \text{si } \det(\overrightarrow{P_iP_j}, \overrightarrow{P_iP_k}) = 0, \\ 0 & \text{si } \det(\overrightarrow{P_iP_j}, \overrightarrow{P_iP_k}) < 0. \end{cases}$$

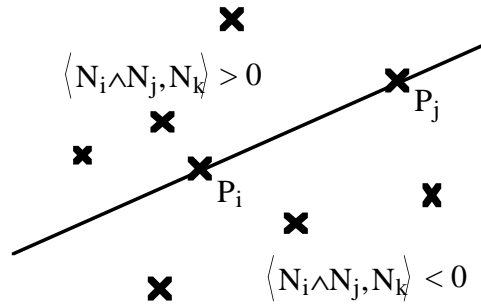


Figure 7 : Premier diagramme projectif de  $N$ .

**Convexe de mélange :**

La démarche consiste à énumérer toutes les façons d'obtenir une face  $F$  de  $K$ , c'est à dire une face de dimension  $n-1$ . Pour cela on cherche les directions  $N_i$  telles que la face  $F(K_i, N_i)$  soit de dimension non nulle.

Quelles sont les directions  $N_i$  qui sont des faces de  $F(K_i, N_i)$  de dimension non nulle ?

Rappelons que  $F(K_i, N_i)$  est l'ensemble des points de  $K_i$  qui réalisent le maximum sur  $K_i$  de  $\langle \cdot, N_i \rangle$ .

Si on pose  $y = \lambda_1 u + \lambda_2 v$  avec  $u, v \in K_i$  et si on écrit  $y \in F(K_i, N_i)$  sous la forme :

$$y = (\lambda_1 N_i, \lambda_2 N_i) \text{ où } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1,$$

le maximum s'écrit

$$\text{MAX}_{y \in K_i} \langle y, N_i \rangle = \text{MAX}_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1}} (\lambda_1 \langle N_i, u \rangle + \lambda_2 \langle N_i, v \rangle).$$

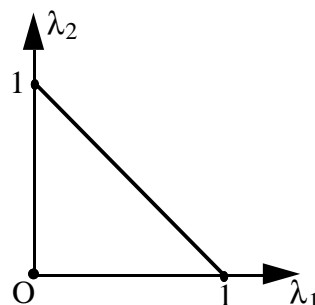


Figure 8 : Domaine de variation de  $(\lambda_1, \lambda_2)$ .



Quatre cas donnent lieu à des ensembles de solutions en  $(\lambda_1, \lambda_2)$  de dimension supérieure ou égale à un :

C<sub>1</sub>: si  $\langle N_i, u \rangle = \langle N_i, v \rangle = 0$  alors  $F(K_i, \eta) = \mathbb{R}^2$ ,

C<sub>2</sub>: si  $\langle N_i, u \rangle = \langle N_i, v \rangle > 0$  alors  $F(K_i, \eta) = \mathbb{R}^2$ ,

C<sub>3</sub>: si  $\langle N_i, u \rangle < 0$  et  $\langle N_i, v \rangle = 0$  alors  $F(K_i, \eta) = \mathbb{R}^2, \tilde{N}_i^1$ ,

C<sub>4</sub>: si  $\langle N_i, u \rangle = \langle N_i, v \rangle > 0$  alors  $F(K_i, \eta) = \mathbb{R}^2, \tilde{N}_i^2$

sinon  $F(K_i, \eta)$  est un des sommets du triangle  $K_i$ .

#### 4.2. Enumération des facettes

Dans la première partie, l'énumération des cas donne les directions des normales aux facettes de  $K$ . Dans la seconde partie, on obtient l'expression des facettes et les valeurs de la fonction support dans ces directions.

- **Enumération des cas**

Etant donnée l'expression d'une face  $e$  de  $K$ , de normale  $\eta \in \mathbb{R}^2$

$$F(K, \eta) = \sum_{i=1}^3 F(K_i, \eta) \quad (\text{Somme de Minkowski}), \quad (1)$$

une condition nécessaire pour que  $F(K, \eta)$  soit une facette de  $K$ , c'est à dire une face de dimension 5, est que la somme (1) comporte :

soit deux termes de dimension 2 (i.e. deux triangles) et un terme (au moins) de dimension 1 (i.e. une arête),

soit un terme de dimension 2 et deux termes de dimension 1,

soit cinq termes de dimension 1.

Dans la suite, on notera

- C<sub>1i</sub>, la cone appliquée à  $\eta$  pour  $C_1$ ,

- Int, l'intérieur de  $\mathbb{R}^2$ ,

- Pos( $\eta$ ), l'enveloppe convexe d'un ensemble de vecteurs  $\eta$  est à

$$\text{Pos}(\eta) = \left\{ \sum_{v \in \eta} \lambda v \mid \lambda \geq 0 \text{ pour tout } v \in \eta \right\}$$

- Lin( $\eta$ ), le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs  $\eta$  est à

$$\text{Lin}(\eta) = \left\{ \sum_{v \in \eta} \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R} \text{ pour tout } v \in \eta \right\}$$

Rappelons que  $\tilde{N}_i^1 = (N_i, 0)$  et  $\tilde{N}_i^2 = (0, N_i)$ .

Lorsqu'on ne le précise pas, les vecteurs de  $N = \{N_1, \dots, N_p\}$  sont supposés être en position générale, c'est à dire, tout triplet de vecteurs de  $N$  engend

**A-** Facettes obtenues à partir de la somme de 2 triangles et au moins une arête :

Pour avoir dans la somme (1), deux termes qui soient des triangles, on impose au vecteur  $(u,v)$  deux conditions du type  $(C_1)$  :

$$(C_{1i}) : \quad \langle u, N_i \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_i \rangle = 0,$$

$$(C_{1j}) : \quad \langle u, N_j \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_j \rangle = 0, \quad \text{avec } i \neq j.$$

D'où on peut déduire que  $u$  et  $v$  s'écrivent sous la forme :

$$u = \alpha N_i \wedge N_j \quad \text{et} \quad v = \beta N_i \wedge N_j, \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des réels.}$$

Pour atteindre la dimension 5, on ajoute une condition pour qu'un autre terme de la somme (1) soit une arête. Par exemple une arête du triangle  $K_k$  (avec  $k \neq i, k \neq j$ ):

- s'il s'agit de l'arête  $[0, \tilde{N}_k^2]$ , on aura

$$(C_{3k}) : \quad \langle u, N_k \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_k \rangle = 0, \quad \text{qui donnent} \quad \begin{cases} \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle < 0, \\ v = 0, \end{cases}$$

- s'il s'agit de l'arête  $[0, \tilde{N}_k^1]$ , on aura

$$(C_{2k}) : \quad \langle u, N_k \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_k \rangle < 0, \quad \text{qui entraînent} \quad \begin{cases} u = 0, \\ \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle < 0, \end{cases}$$

- et s'il s'agit de l'arête  $[\tilde{N}_k^1, \tilde{N}_k^2]$ , on aura

$$(C_{4k}) : \quad \langle u, N_k \rangle = \langle v, N_k \rangle > 0,$$

d'où

$$u = v = \alpha \cdot N_i \wedge N_j \quad \text{avec } \alpha \text{ du signe de } \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle$$

**Conclusion A** : Soient  $N_i$  et  $N_j$  deux vecteurs de  $\mathbb{N}$ , avec  $i \neq j$ . Les vecteurs

$$n_1 = (N_j \wedge N_i, 0), \quad n_2 = (0, N_j \wedge N_i) \quad \text{et} \quad n_3 = (N_i \wedge N_j, N_i \wedge N_j),$$

sont des normales extérieures aux facettes du convexe de 2-mélanges  $K$ , si et seulement si, il existe  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$  tel que  $\langle N_k, N_i \wedge N_j \rangle > 0$ .

De même les vecteurs

$$n_4 = (N_i \wedge N_j, 0), \quad n_5 = (0, N_i \wedge N_j) \quad \text{et} \quad n_6 = (N_j \wedge N_i, N_j \wedge N_i),$$

sont des normales extérieures aux facettes du convexe de 2-mélanges  $K$ , si et seulement si, il existe  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$  tel que  $\langle N_k, N_i \wedge N_j \rangle < 0$ .

**B-** Facettes obtenues à partir de la somme de 1 triangle et 3 arêtes :

Pour avoir un triangle dans (1), le vecteur  $(u,v)$  doit vérifier une condition du type  $(C_1)$ ,

$$(C_{1i}) : \quad \langle u, N_i \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_i \rangle = 0.$$

Il faut alors au moins 3 arêtes pour obtenir la dimension 5.

Quels sont les choix de 3 arêtes qui permettent d'obtenir une facette ?

- Si on choisit 2 arêtes  $[0, \tilde{N}_j^1]$  et  $[0, \tilde{N}_k^1]$ , le vecteur  $(u, v)$  doit vérifier en plus de  $(C_1i)$ , deux conditions  $(C_2)$  :

$$(C_{2j}): \quad \langle u, N_j \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_j \rangle < 0,$$

$$(C_{2k}): \quad \langle u, N_k \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_k \rangle < 0.$$

Ce qui entraîne  $u = 0$  et rend les conditions de type  $(C_3)$  et  $(C_4)$  irréalisables pour le vecteur  $(u, v)$ . Or une troisième condition  $(C_{2l})$  ne permet pas d'obtenir la dimension 5. En effet la dimension de la somme de Minkowski  $K_i + [0, \tilde{N}_j^1] + [0, \tilde{N}_k^1] + [0, \tilde{N}_l^1]$  est égale à 4, car les vecteurs  $(N_j, 0)$ ,  $(0, N_j)$ ,  $(N_k, 0)$  et  $(N_l, 0)$  engendrent un espace de dimension 4.

- De la même façon, on remarque que si le vecteur  $(u, v)$  vérifie en plus de  $(C_1i)$ , les conditions  $(C_{3j})$  et  $(C_{3k})$ , alors  $v = 0$ . Et quelque soit la troisième arête choisie, on n'obtient pas de normale à une 5-face du convexe de 2-mélanges.

- Si on choisit 2 arêtes  $[\tilde{N}_j^1, \tilde{N}_j^2]$  et  $[\tilde{N}_k^1, \tilde{N}_k^2]$ , les conditions  $(C_{4j})$  et  $(C_{4k})$  sur le vecteur  $(u, v)$  entraînent :  $u = v$ , et alors les conditions  $(C_2)$  et  $(C_3)$  ne peuvent être vérifiées par le vecteur  $(u, u)$ . Et comme précédemment une troisième arête du même type :  $[\tilde{N}_l^1, \tilde{N}_l^2]$  ne donne pas une somme de dimension 5.

Finalement, il est impossible d'ajouter deux arêtes de même type, donc la seule combinaison restante est de prendre une arête de chaque type :  $[0, \tilde{N}_j^1]$ ,  $[0, \tilde{N}_k^2]$ ,  $[\tilde{N}_l^1, \tilde{N}_l^2]$ . Ce choix donne les conditions suivantes sur le vecteur  $(u, v)$  :

$$(C_{2j}): \quad \langle u, N_j \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_j \rangle < 0,$$

$$(C_{3k}): \quad \langle u, N_k \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_k \rangle = 0,$$

d'où on peut déduire que  $u$  et  $v$  sont de la forme :

$$u = \alpha N_i \wedge N_j \quad \text{et} \quad v = \beta N_i \wedge N_k, \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des réels;}$$

$$\text{et } (C_{4l}): \quad \langle u, N_l \rangle = \langle v, N_l \rangle > 0,$$

donne la relation :

$$\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_l \rangle = \beta \langle N_i \wedge N_k, N_l \rangle > 0 \quad (a)$$

entre  $\alpha$  et  $\beta$ .

Les conditions sur les signes sont :

$$\langle u, N_k \rangle < 0, \quad \langle u, N_l \rangle > 0, \quad \langle v, N_j \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_l \rangle > 0,$$

et remplaçant  $u$  et  $v$  par leurs valeurs on a,

pour  $\alpha$  :

$$\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_l \rangle > 0, \quad (s1)$$

et pour  $\beta$  :

$$\beta \langle N_i \wedge N_k, N_j \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \beta \langle N_i \wedge N_k, N_l \rangle > 0. \quad (s2)$$

Or un tel  $\alpha$  existe si et seulement si

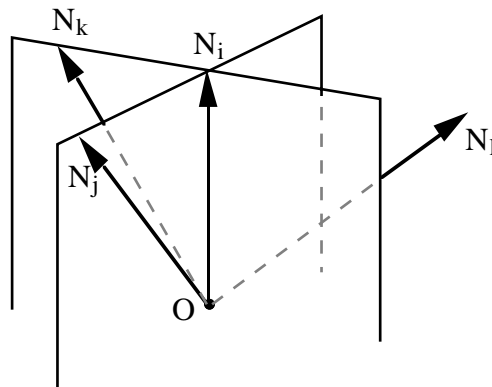
$$\langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_l \rangle < 0, \quad (p1)$$

et un tel  $\beta$  existe si et seulement si

$$\langle N_i \wedge N_k, N_j \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_k, N_l \rangle < 0. \quad (p2)$$

S'il existe  $\alpha$  et  $\beta$  vérifiant les conditions (s1) et (s2), alors la direction normale  $(u,v)$  est bien définie, car la proportion entre  $\alpha$  et  $\beta$  est donnée par (a), et leur signe par (s1) et (s2). Ainsi  $(u,v)$  est orthogonal à une 5-face de  $K$ .

Géométriquement la condition (p1) signifie que  $N_k$  et  $N_l$  sont de part et d'autre du plan engendré par les vecteurs  $N_i$  et  $N_j$ , et la condition (p2) que  $N_j$  et  $N_l$  sont de part et d'autre du plan engendré par les vecteurs  $N_i$  et  $N_k$ .



**Figure 9 :** Configuration des vecteurs  $N_i, N_j, N_k$  et  $N_l$ .

**Conclusion B :** Soient  $N_i, N_j, N_k$  et  $N_l$  quatre vecteurs distincts de  $N$ . Les vecteurs

$$n_1 = \left( \alpha \cdot N_i \wedge N_j, \beta \cdot N_i \wedge N_k \right) \text{ et } n_2 = \left( \beta \cdot N_i \wedge N_k, \alpha \cdot N_i \wedge N_j \right),$$

où les réels  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient les conditions (s1), (s2) et (a), sont des normales extérieures à des facettes du convexe de 2-mélanges  $K$ , si et seulement si,

les vecteurs  $N_i, N_j, N_k$  et  $N_l$  vérifient (p1) et (p2).

En effectuant une permutation circulaire sur les indices  $j, k$  et  $l$ , dans les relations (s1), (s2) et (a), et dans les expressions de  $n_1, n_2$ , on obtient deux autres couples de normales à des facettes de  $K$ .

**C-** Facettes obtenues à partir de la somme de 5 arêtes :

Si on prend 3 arêtes de même type :

Le vecteur  $(u,v)$  vérifie trois conditions  $(C_2)$ , donc  $u$  est nul et les conditions du type  $(C_3)$  et  $(C_4)$  ne peuvent plus être vérifiées. De même si on impose 3 conditions du type  $(C_3)$ , la nullité de  $v$  ne permet pas de vérifier les conditions du type  $(C_2)$  et  $(C_4)$ . Et le choix de 3 conditions du type  $(C_4)$ , entraîne l'égalité de  $u$  et  $v$  qui contredit des conditions de type  $(C_2)$  et  $(C_3)$ .

Et si on prend plus de trois arêtes du même type, la dimension de la somme de ces arêtes reste 3. Finalement, on ne peut pas prendre plus de 3 arêtes du même type pour obtenir une 5-face de  $K$ .

Donc il faut choisir 5 arêtes parmi les trois types d'arêtes, avec au plus deux arêtes de même type. Donc la seule combinaison restante est celle de 2 arêtes d'un type, puis 2 d'un autre type et la cinquième du type restant.

1) Si on commence par les 2 conditions  $(C_{2i})$  et  $(C_{2j})$ , on obtient :

$u$  est de la forme  $u = \alpha N_i \wedge N_j$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$   
 et  $v$  vérifie les inégalités  $\langle N_i, v \rangle < 0$  et  $\langle N_j, v \rangle < 0$ .

a- Soit on ajoute 2 conditions  $(C_{3k})$  et  $(C_{3l})$  et on a  
 $u$  vérifie les inégalités  $\langle N_k, u \rangle < 0$  et  $\langle N_l, u \rangle < 0$ ,  
 et  $v$  s'écrit  $v = \beta N_k \wedge N_l$  où  $\beta \in \mathbb{R}$ .

il ne reste alors que le choix d'une condition de type  $(C_{4m})$  qui donne

$$\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle = \beta \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle \tag{a1}$$

b- Soit on ajoute 2 conditions  $(C_{4k})$  et  $(C_{4l})$ , ce qui entraîne  $v - u$  orthogonal à  $N_k$  et  $N_l$ , et s'écrit :

$$v - u = \beta N_k \wedge N_l, \text{ où } \beta \in \mathbb{R}$$

et les inégalités  $\langle N_k, u \rangle > 0$  et  $\langle N_l, u \rangle > 0$ ,  
 $\langle N_k, v \rangle > 0$  et  $\langle N_l, v \rangle > 0$ .

Il ne reste qu'un cas possible  $(C_{3m})$ , on obtient

$$\langle v, N_m \rangle = \beta \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle + \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle = 0, \tag{e1}$$

$$\text{et } \langle u, N_m \rangle = \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle < 0, \tag{i1}$$

puis (e1) et (i1) entraînent  $\beta \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle > 0$ .

Notons que si à la place de  $u = \alpha N_i \wedge N_j$ , on pose  $u = -\alpha N_i \wedge N_j$ , on aura la même relation (a1) entre  $\alpha$  et  $\beta$  que dans 1) a- et les mêmes inégalités relatives à  $\alpha$ .

2) Reste une dernière combinaison pour obtenir une 5-face avec une somme de 5 arêtes, il s'agit d'avoir dans (1) des termes  $[0, \tilde{N}_i^2]$ ,  $[0, \tilde{N}_j^2]$ ,  $[N_k^1, \tilde{N}_k^2]$ ,  $[N_l^1, \tilde{N}_l^2]$  et  $[0, \tilde{N}_m^1]$ . Ceci donne les conditions suivantes sur le vecteur  $(u, v)$ :

-  $(C_{3i})$  et  $(C_{3j})$  qui impliquent

$u$  vérifie les inégalités  $\langle N_i, u \rangle < 0$  et  $\langle N_j, u \rangle < 0$

et  $v$  est de la forme  $v = -\alpha N_i \wedge N_j$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )

- puis  $(C_{4k})$  et  $(C_{4l})$  qui donnent

$$-\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle = \langle u, N_k \rangle > 0, \tag{i2}$$

$$-\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_l \rangle = \langle u, N_l \rangle > 0, \tag{i3}$$

et  $u - v$  est de la forme  $\beta N_k \wedge N_l$  ( $\beta \in \mathbb{R}$ )

- et finalement  $(C_{2m})$

$$\beta \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle - \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle = 0, \tag{e2}$$

$$-\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle < 0, \tag{i4}$$

qui entraînent  $\beta \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle > 0$ .

Dans les trois cas, la proportion entre  $\alpha$  et  $\beta$  est donnée par (a1), c'est à dire :

$$\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle = \beta \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle,$$

et les conditions sur les signes de  $\alpha$  et  $\beta$  sont :

$$\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle < 0, \quad \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_l \rangle < 0 \text{ et } \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle > 0, \tag{a2}$$

et

$$\beta \langle N_k \wedge N_l, N_i \rangle < 0, \quad \beta \langle N_k \wedge N_l, N_j \rangle < 0 \text{ et } \beta \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle > 0. \tag{a3}$$

Or, il existe un réel  $\alpha$  vérifiant les inégalités de (a2) si et seulement si :

$$\langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_l \rangle > 0 \text{ et } \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle > 0. \tag{pa1}$$

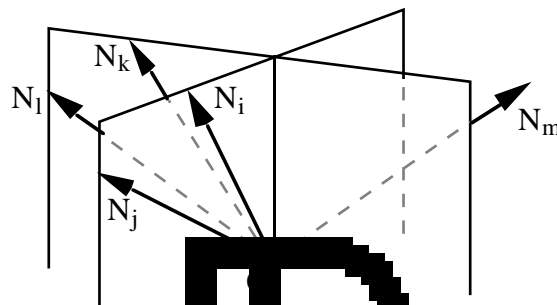
Ce qui signifie que le plan engendré par les vecteurs  $N_i$  et  $N_j$  partage le demi-espace en deux demi-espaces ouverts, l'un contenant les vecteurs  $N_k$  et  $N_l$  et l'autre le vecteur  $N_m$ .

De même, il existe un réel  $\beta$  vérifiant les inégalités de (a3) si et seulement si :

$$\langle N_k \wedge N_l, N_i \rangle \cdot \langle N_k \wedge N_l, N_j \rangle > 0 \text{ et } \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle \cdot \langle N_k \wedge N_l, N_i \rangle > 0. \tag{pa2}$$

Ici, le plan engendré par les vecteurs  $N_k$  et  $N_l$  partage le demi-espace en deux demi-espaces ouverts, l'un contenant les vecteurs  $N_i$  et  $N_j$  et l'autre le vecteur  $N_m$ .

Les conditions (pa1) et (pa2) portent sur les positions relatives entre les vecteurs  $N_i, N_j, N_k, N_l$  et  $N_m$ .



**Figure 10 :** Configuration des vecteurs  $N_i, N_j, N_k, N_l$  et  $N_m$ .

La direction normale  $\eta$  est bien déterminée dans les deux cas :

dans **1) a-** par :

$$\eta \in \text{span}(\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l),$$

dans **1) b-** par :

$$\eta \in \text{span}(-\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j),$$

et dans **2)** par :

$$\eta \in \text{span}(\beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j, -\alpha N_i \wedge N_j).$$

**Conclusion C** : Soient  $N_i, N_j, N_k, N_l$  et  $N_m$  cinq vecteurs distincts de  $N$ . Les vecteurs

$$\begin{aligned} n_1 &= (\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l), \\ n_2 &= (-\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j) \text{ et} \\ n_3 &= (\beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j, -\alpha N_i \wedge N_j), \end{aligned}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient les conditions (a1), (a2) et (a3), sont des normales extérieures aux facettes du convexe de 2-mélanges  $K$ , si et seulement si,

$$N_i, N_j, N_k, N_l \text{ et } N_m \text{ vérifient (pa1) et (pa2).}$$

Ceci finit l'énumération des cas.

- **Descriptions des facettes et calcul des valeurs de la fonction support**

Maintenant, reprenons un par un les cas, en précisant pour chacun d'eux l'expression des facettes correspondantes et la valeur de la fonction support.

**- Faces du cas A :**

Considérons la normale

$$n_1 = (N_j \wedge N_i, 0).$$

Que valent les termes  $F(K_r, n_1)$  de la somme (1), pour  $r = 1$  à  $p$  et  $r \neq i, j$  et  $k$ ? On connaît les termes  $F(K_r, n_1)$  pour  $r = i, j$  et  $k$ , ils sont respectivement égaux à  $K_i, K_j$  et  $[0, \tilde{N}_k^2]$ .

Pour  $r \neq i, j$  et  $k$  :

$$\begin{aligned} F(K_r, n_1) &= \left\{ P \in K_r, \langle P, \eta \rangle = \max_{Q \in K_r} \langle Q, \eta \rangle \right\}, \\ &= \left\{ P \in K_r ; \langle P, \eta \rangle = \max_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1} \lambda_1 \langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle \right\}, \end{aligned}$$

dépend du signe de  $\langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle$ .

Si comme pour  $N_k$ , on a

$$\langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle < 0, \text{ alors } F(K_r, n_1) = [0, \tilde{N}_r^2],$$

par contre si  $\langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle > 0$ , alors

$$F(K_r, n_1) = \{\tilde{N}_r^1\},$$

et enfin si on a un vecteur  $N_r$  linéairement dépendant de  $N_i$  et  $N_j$ , la face d'appui est

$$F(K_r, n_1) = K_r.$$

Pour chaque couple d'indice  $(i, j)$  de  $I = \{1, \dots, p\}$ , notons  $I^+(i, j)$ ,  $I^0(i, j)$  et  $I^-(i, j)$  les sous ensembles formant une partition de  $I$  et définis par :

$$\begin{aligned} I^+(i, j) &= \left\{ r, r = 1, \dots, p \mid \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle > 0 \right\}, \\ I^0(i, j) &= \left\{ r, r = 1, \dots, p \mid \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle = 0 \right\}, \\ I^-(i, j) &= \left\{ r, r = 1, \dots, p \mid \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle < 0 \right\}. \end{aligned}$$

En fait,  $F(K ; n_1)$  est de dimension 5 si il existe au moins un  $r$  ( $r \neq i, j$ ) tel que  $\langle N_j \wedge N_i, N_r \rangle < 0$ , c'est le cas ici car  $k \in I^+(i, j)$ . Il en est de même pour  $n_2 = (0, N_j \wedge N_i)$  et  $n_3 = (N_i \wedge N_j, N_i \wedge N_j)$ .

De même si il existe  $r \in \{1, \dots, p\}$ , tel que  $r \in I^-(i, j)$ , les vecteurs

$$n_4 = (N_i \wedge N_j, 0), n_5 = (0, N_i \wedge N_j) \text{ et } n_6 = (N_j \wedge N_i, N_j \wedge N_i)$$

sont les normales extérieures à des facettes de  $K$ .

**Conclusion A :** Soient  $N_i$  et  $N_j$  deux vecteurs de  $\mathbb{N}$ , avec  $i \neq j$ . L'ensemble  $I^+(i, j) \neq \emptyset$ , si et seulement si, les vecteurs

$$n_1 = (N_j \wedge N_i, 0), n_2 = (0, N_j \wedge N_i) \text{ et } n_3 = (N_i \wedge N_j, N_i \wedge N_j),$$

sont des normales extérieures aux facettes du convexe de 2-mélanges  $K$ , qui s'écrivent respectivement :

$$F(K, n_1) = \sum_{r \in I^+(i, j)} [0, \tilde{N}_r^2] + \sum_{r \in I^0(i, j)} K_r + \sum_{r \in I^-(i, j)} \{\tilde{N}_r^1\},$$

$$F(K, n_2) = \sum_{r \in I^+(i, j)} [0, \tilde{N}_r^1] + \sum_{r \in I^0(i, j)} K_r + \sum_{r \in I^-(i, j)} \{\tilde{N}_r^2\},$$

$$F(K, n_3) = \sum_{r \in I^+(i, j)} [\tilde{N}_r^1, \tilde{N}_r^2] + \sum_{r \in I^0(i, j)} K_r + \sum_{r \in I^-(i, j)} \{0\}.$$

De même l'ensemble  $I^-(i, j) \neq \emptyset$ , si et seulement si, les vecteurs

$$n_4 = (N_i \wedge N_j, 0), n_5 = (0, N_i \wedge N_j) \text{ et } n_6 = (N_j \wedge N_i, N_j \wedge N_i)$$

sont des normales extérieures aux facettes du convexe de 2-mélanges  $K$ , qu'on obtient en échangeant dans les expressions ci-dessus les rôles de  $I^+(i, j)$  et de  $I^-(i, j)$ .

De plus, on remarque que la fonction support de  $K$  vérifie:

$$h(K, n_1) = h(K, n_2) = h(K, n_6) = \sum_{r \in I^-(i, j)} \langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle,$$

$$h(K, n_4) = h(K, n_5) = h(K, n_3) = \sum_{r \in I^+(i, j)} \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle.$$

En effet, la fonction support s'écrit :

$$\begin{aligned} h(K, n_1) &= \langle x, n_1 \rangle \text{ quelque soit } x \in F(K, n_1) \\ &= \sum_{r \in I^-(i, j)} \langle \tilde{N}_r^1, n_1 \rangle, \text{ car les autres termes } F(K, n_1) \text{ contiennent l'origine} \\ &= \sum_{r \in I^-(i, j)} \langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 h(K, n_2) &= \sum_{r \in I(i,j)} \langle \tilde{N}_r^2, n_2 \rangle \\
 &= \sum_{r \in I(i,j)} \langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle, \text{ on retrouve la même valeur que pour } h(K, n_1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(K, n_6) &= \sum_{r \in I(i,j)} \langle \alpha \tilde{N}_r^1 + (1 - \alpha) \tilde{N}_r^2, n_6 \rangle = \sum_{r \in I(i,j)} \langle \tilde{N}_r^1, n_6 \rangle + \sum_{r \in I(i,j)} \langle \tilde{N}_r^2, n_6 \rangle \\
 &= \sum_{r \in I(i,j)} \langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle.
 \end{aligned}$$

**Remarques :**

1- La condition  $I^+(i,j) \neq \emptyset$  d'existence dans  $K$  des facettes  $F(K, n_1)$ ,  $F(K, n_2)$  et  $F(K, n_3)$ , traduit le fait que le demi espace ouvert  $H_{i,j} = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, N_i \wedge N_j \rangle > 0 \}$  contient au moins un point  $N_r$  de  $N$ . Dans le premier diagramme projectif, cette condition se traduit de la façon suivante :

Si on note  $d_{ij}$  la droite orientée passant par les points  $P_i$  et  $P_j$  (images de  $N_i$  et  $N_j$  dans le P.D.P.), de direction  $\overrightarrow{P_i P_j}$ , alors  $d_{ij}^+$  le demi plan ouvert à gauche de  $d_{ij}$  (si  $x \in H_{i,j}^+$ , alors son image dans le P.D.P. est dans  $d_{ij}^+$ ) contient au moins un point  $P_r$ ,  $1 \leq r \leq p$ .

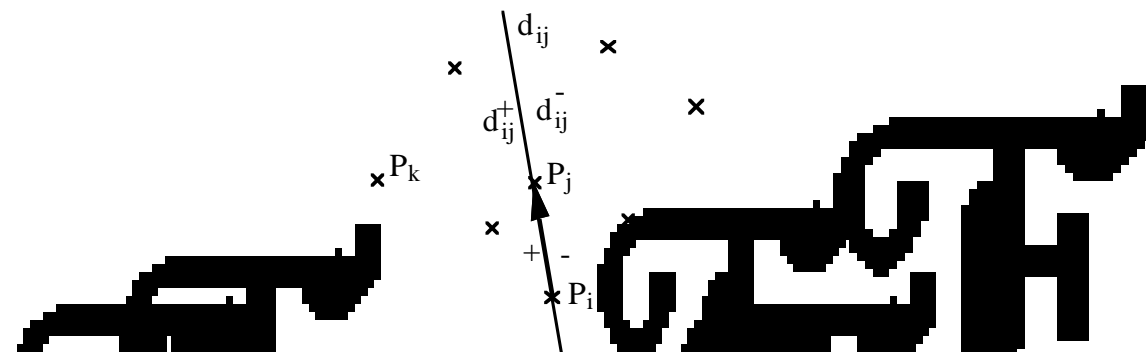


Figure 1 : Premier diagramme projectif de  $N$ .

2- Chaque couple  $(N_i, N_j)$  de vecteurs de  $N$  tel que  $\text{Pos}(N_i, N_j)$  coupe l'intérieur de  $\text{Pos}(N)$  donne 6 facettes de  $K$ . Pour tous les couples  $(N_i, N_j)$  de vecteurs de  $N$ , tels que  $\text{Pos}(N_i, N_j) \cap \text{Int}(\text{Pos}(N)) \neq \emptyset$ , la frontière de  $\text{Pos}(N)$  génère 3 facettes de  $K$ .

**Exemple :**

$\text{Pos}(N_1, N_2)$  sur la frontière de  $\text{Pos}(N)$  :  $I^+(1,2) = \emptyset \rightarrow 3$  facettes.  
 $\text{Pos}(N_3, N_4) \cap \text{Int}(\text{Pos}(N)) \neq \emptyset$  :  $I^+(3,4) \neq \emptyset$  et  $I(3,4) \neq \emptyset \rightarrow 6$  facettes.

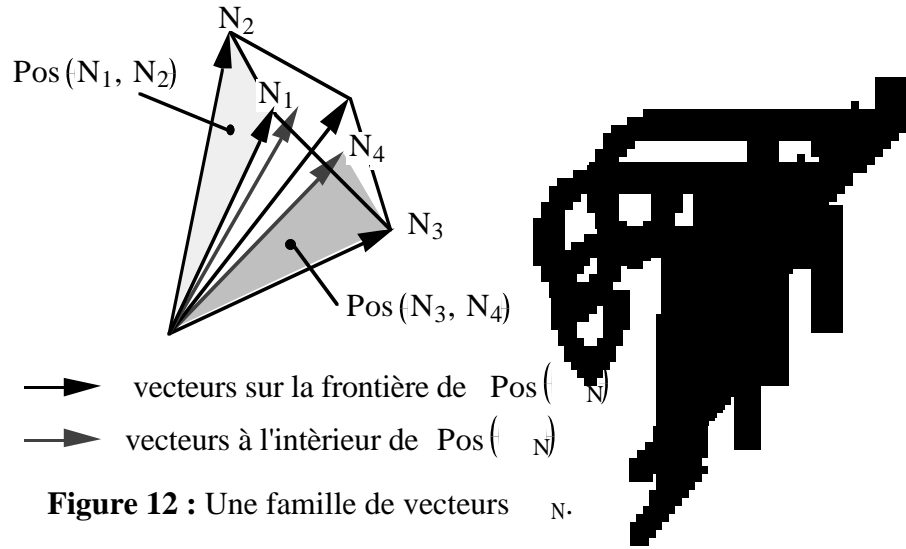


Figure 12 : Une famille de vecteurs  $N$ .

- Faces du c

Valeurs des termes  $\langle K_r, n_1 \rangle$  pour  $r \neq i, j, k$  et  $l$ .

$$F(K_r, n_1) = \left\{ P \leq Z \leq P, n_1 \right\} \text{ MAX}_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1} \lambda_1 \alpha \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle + \lambda_2 \beta \langle N_r, N_i \wedge N_k \rangle \Big\}$$

$$C_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle N_i, N_j, x \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle > 0 \text{ et } \langle N_i \wedge N_k, x \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_k, N_j \rangle > 0 \right\},$$

$$N_r \in C_1 \Rightarrow \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle < 0 \text{ et } \beta \langle N_i \wedge N_k, N_r \rangle < 0,$$

$$\Rightarrow F(K_r, n_1) = F(K_r, n_2) = (0, 0).$$

$$C_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle N_i, N_1, x \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_1, N_k \rangle > 0 \text{ et } \langle N_i \wedge N_k, x \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_k, N_1 \rangle > 0 \right\},$$

$$N_r \in C_2 \Rightarrow \beta \langle N_i \wedge N_k, N_r \rangle > 0 \text{ et } \beta \langle N_i \wedge N_k, N_r \rangle > \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle,$$

$$\Rightarrow F(K_r, n_1) = \{\tilde{N}_r^2\} \text{ et } F(K_r, n_2) = \{\tilde{N}_r^1\}.$$

$$C_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle N_i, N_1, x \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_1, N_j \rangle > 0 \text{ et } \langle N_i \wedge N_j, x \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_1 \rangle > 0 \right\},$$

$$N_r \in C_3 \Rightarrow \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle > 0 \text{ et } \beta \langle N_i \wedge N_k, N_r \rangle < \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle,$$

$$\Rightarrow F(K_r, n_1) = \{\tilde{N}_r^1\} \text{ et } F(K_r, n_2) = \{\tilde{N}_r^2\}.$$

Cas dégénérés :  $N_r$  appartient à l'un des demi plans séparant les cellules  $C_1, C_2$  et  $C_3$ .

$$N_r \text{ linéairement dépendant de } N_i \text{ et } N_k \text{ et } \langle N_i \wedge N_k, N_i \wedge N_r \rangle > 0$$

$$\Leftrightarrow N_r \in \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \setminus \{\mu N_i; \mu > 0\}$$

$$\Rightarrow F(K_r, n_1) = [0, \tilde{N}_r^2] \text{ et } F(K_r, n_2) = [0, \tilde{N}_r^1].$$

$$N_r \text{ linéairement dépendant de } N_i \text{ et } N_j \text{ et } \langle N_i \wedge N_j, N_i \wedge N_r \rangle > 0$$

$$\Leftrightarrow N_r \in \overline{C_1} \cap \overline{C_3} \setminus \{\mu N_i; \mu > 0\}$$

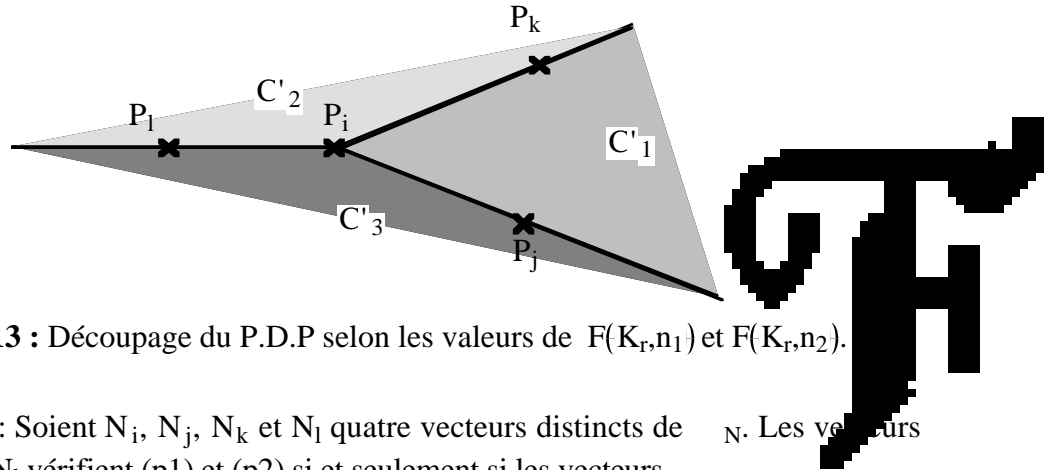
$$\Rightarrow F(K_r, n_1) = [0, \tilde{N}_r^1] \text{ et } F(K_r, n_2) = [0, \tilde{N}_r^2].$$

$N_r$  linéairement dépendant de  $N_i$  et  $N_l$  et  $\langle N_i \wedge N_l, N_i \wedge N_r \rangle > 0$

$$\Leftrightarrow N_r \in \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \setminus \{ \mu N_i; \mu > 0 \}$$

$$\Rightarrow F(K_r, n_1) = F(K_r, n_2) = [\tilde{N}_r^1, \tilde{N}_r^2].$$

$C'_1, C'_2$  et  $C'_3$  sont les images respectives des ensembles  $C_1, C_2$  et  $C_3$  dans le premier diagramme projectif :



**Figure 13 :** Découpage du P.D.P selon les valeurs de  $F(K_r, n_1)$  et  $F(K_r, n_2)$ .

**Conclusion B :** Soient  $N_i, N_j, N_k$  et  $N_l$  quatre vecteurs distincts de  $N$ . Les vecteurs  $N_i, N_j, N_k$  et  $N_l$  vérifient (p1) et (p2) si et seulement si les vecteurs

$$n_1 = ( \alpha \cdot N_i \wedge N_j, \beta \cdot N_i \wedge N_k ) \text{ et } n_2 = ( \beta \cdot N_i \wedge N_k, \alpha \cdot N_i \wedge N_j ),$$

où les réels  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient les conditions (s1), (s2) et (a), sont des normales extérieures à des facettes du convexe de 2-mélanges  $K$ , qui s'écrivent :

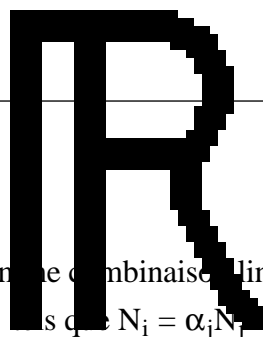
$$F(K, n_1) = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ N_r \in C_1}} 0 + \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ N_r \in C_2}} \tilde{N}_r^2 + \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ N_r \in C_3}} \tilde{N}_r^1 + K_i + [\tilde{N}_l^1, \tilde{N}_l^2] + [0, \tilde{N}_j^1] + [0, \tilde{N}_k^2]$$

$$F(K, n_2) = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ N_r \in C_1}} 0 + \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ N_r \in C_2}} \tilde{N}_r^1 + \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ N_r \in C_3}} \tilde{N}_r^2 + K_i + [\tilde{N}_l^1, \tilde{N}_l^2] + [0, \tilde{N}_j^2] + [0, \tilde{N}_k^1]$$

La fonction support de  $K$  prend la même valeur pour  $n_1$  et  $n_2$  :

$$\begin{aligned} h(K, n_1) &= h(K, n_2) \\ &= \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ N_r \in C_2}} \beta \langle N_i \wedge N_k, N_r \rangle + \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ N_r \in C_3}} \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle + \alpha \langle N_i \wedge N_j, N_l \rangle. \end{aligned}$$

En effectuant une permutation circulaire sur les indices  $j, k$  et  $l$ , dans les relations (s1), (s2) et (a), et dans les expressions de  $n_1, n_2, F(K, n_1)$  et  $F(K, n_2)$ , on obtient deux autres couples de normales et de facettes de  $K$ .



**Remarques :**

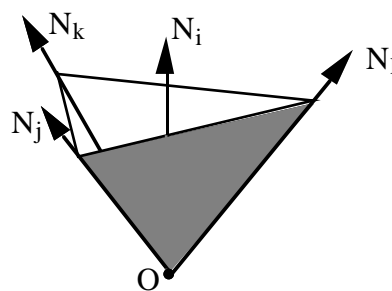
1-  $N_i$  peut s'écrire comme combinaison linéaire de  $N_j, N_k$  et  $N_l$ , c'est à dire il existe  $\alpha_j, \alpha_k$  et  $\alpha_l \in \mathbb{R}$  tels que  $N_i = \alpha_j N_j + \alpha_k N_k + \alpha_l N_l$ .

(p1) s'écrit  $\alpha_l \det(N_l, N_j, N_k) \cdot \alpha_k \det(N_k, N_j, N_l) < 0$ , soit  $\alpha_l \cdot \alpha_k > 0$  et (p2)  $\alpha_j \cdot \alpha_l > 0$ .

On en déduit que  $\alpha_j, \alpha_k$  et  $\alpha_l$  sont de même signe. Or  $\langle N_i, \mu \rangle > 0$  pour  $i = 1$  à  $p$ , donc  $N_i$  est combinaison positive de  $N_j, N_k$  et  $N_l$ .

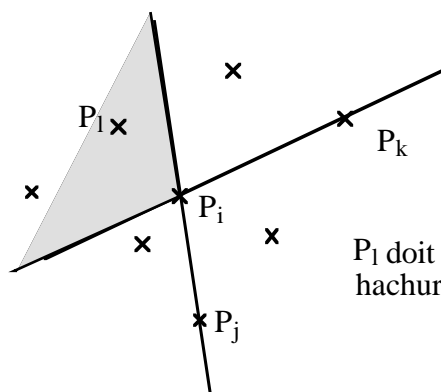
Réciproquement si  $N_i \in \text{Int}(\text{Pos}(N_j, N_k, N_l))$ , alors (p1) et (p2) sont vérifiées. Donc

*les conditions (p1) et (p2) sont équivalentes à l'appartenance de  $N_i$  à l'intérieur de l'enveloppe positive des vecteurs  $N_j, N_k$  et  $N_l$ .*



**Figure 14 :** Configuration des vecteurs  $N_i, N_j, N_k$  et  $N_l$ .

2- Dans le premier diagramme projectif, les conditions (p1) et (p2) sur les vecteurs se traduisent par le fait que  $P_i$  doit être à l'intérieur de l'enveloppe convexe de  $(P_j, P_k, P_l)$ .



$P_i$  doit appartenir à la région hachurée du P.D.P.

**Figure 15 :** Premier diagramme projectif  $N$ .



3- Chaque quadruplet  $(N_i, N_j, N_k, N_l)$  de vecteur de  $N$  dans la configuration ci-dessus (c.à.d.  $N_i$  est à l'intérieur de l'enveloppe positive de  $(N_j, N_k, N_l)$ ) donne 6 facettes de  $K$  en permutant les rôles de  $N_j, N_k, N_l$ .

**- Faces du c**

Valeurs des termes  $N_r$ , pour  $r \neq i, k, l$  m.

On introduit un vecteur  $I \in \mathbb{R}^3$  tel que  $I$  appartenant à l'intersection des plans  $\text{Lin}(N_i, N_j)$  et

$$C_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle I \wedge N_m, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_m, N_k \rangle > 0 \text{ et } \langle I \wedge N_m, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_m, N_l \rangle > 0 \right\}$$

$$C_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle I \wedge N_j, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_j, N_m \rangle > 0 \text{ et } \langle I \wedge N_j, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_j, N_k \rangle > 0 \right\}$$

$$C_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle I \wedge N_k, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_k, N_l \rangle > 0 \text{ et } \langle I \wedge N_k, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_k, N_j \rangle > 0 \right\}$$

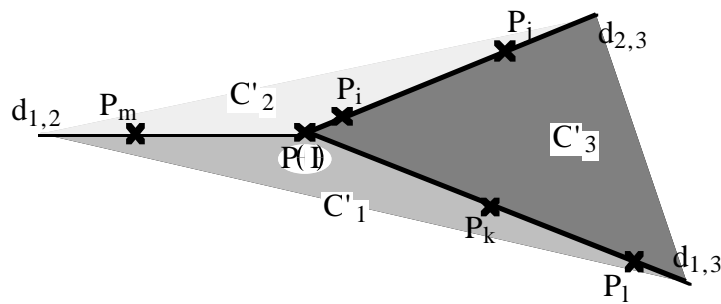
*Cas dégénérés*

$$d_{1,2} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle I \wedge N_k, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_m, N_l \rangle > 0 \text{ et } \langle I \wedge N_m, x \rangle = 0 \right\}$$

$$d_{2,3} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle I \wedge N_m, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_j, N_k \rangle > 0 \text{ et } \langle I \wedge N_j, x \rangle = 0 \right\}$$

$$d_{1,3} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle I \wedge N_j, x \rangle \cdot \langle I \wedge N_k, N_l \rangle > 0 \text{ et } \langle I \wedge N_k, x \rangle = 0 \right\}$$

$C'_1$ ,  $C'_2$  et  $C'_3$  sont les images respectives des ensembles  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  dans le premier diagramme projectif :



**Figure 16 :** Partition du plan suivant les valeurs de  $F(K_r, n_i)$ .

$$n_1 = (\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l)$$

$$n_2 = (-\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j)$$

$$n_3 = (\beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j, -\alpha N_i \wedge N_j)$$

Valeurs de  $F(K_r, n_i)$  :

| $N_r \in$ | $C_1$      | $d_{1,2}$                        | $C_2$      | $d_{2,3}$            | $C_3$      | $d_{1,3}$                        |
|-----------|------------|----------------------------------|------------|----------------------|------------|----------------------------------|
| $n_1$     | $(0, N_r)$ | $[\tilde{N}_r^1, \tilde{N}_r^2]$ | $(N_r, 0)$ | $[0, \tilde{N}_r^1]$ | $(0, 0)$   | $[0, \tilde{N}_r^2]$             |
| $n_2$     | $(0, N_r)$ | $[0, \tilde{N}_r^2]$             | $(0, 0)$   | $[0, \tilde{N}_r^1]$ | $(N_r, 0)$ | $[\tilde{N}_r^1, \tilde{N}_r^2]$ |
| $n_3$     | $(N_r, 0)$ | $[0, \tilde{N}_r^1]$             | $(0, 0)$   | $[0, \tilde{N}_r^2]$ | $(0, N_r)$ | $[\tilde{N}_r^1, \tilde{N}_r^2]$ |

**Conclusion C** : Si les vecteurs  $N_i, N_j, N_k, N_l$  et  $N_m$  de  $N$  vérifient (pa1) et (pa2), alors il existe  $\alpha$  et  $\beta$  vérifiant les conditions (a1), (a2) et (a3), de sorte que

$$\begin{aligned} n_1 &= (\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l), \\ n_2 &= (-\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j), \\ n_3 &= (\beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j, -\alpha N_i \wedge N_j), \end{aligned}$$

sont des normales extérieures aux facettes du convexe de 2-mélanges  $K$ , qui s'écrivent respectivement :

$$F(K, n_1) = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ \text{tel que } r \notin \{i, j, k, l, m\}}} F(K_r, n_1) + [0, \tilde{N}_i^1] + [0, \tilde{N}_j^1] + [0, \tilde{N}_k^2] + [0, \tilde{N}_l^2] + [\tilde{N}_m^1, \tilde{N}_m^2]$$

$$F(K, n_2) = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ \text{tel que } r \notin \{i, j, k, l, m\}}} F(K_r, n_2) + [0, \tilde{N}_i^1] + [0, \tilde{N}_j^1] + [\tilde{N}_k^1, \tilde{N}_k^2] + [\tilde{N}_l^1, \tilde{N}_l^2] + [0, \tilde{N}_m^2]$$

$$F(K, n_3) = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ \text{tel que } r \notin \{i, j, k, l, m\}}} F(K_r, n_3) + [0, \tilde{N}_i^2] + [0, \tilde{N}_j^2] + [\tilde{N}_k^1, \tilde{N}_k^2] + [\tilde{N}_l^1, \tilde{N}_l^2] + [0, \tilde{N}_m^1]$$

On obtient trois autres normales aux facettes de  $K$ , en échangeant les rôles de  $(N_i, N_j)$  et de  $(N_k, N_l)$  dans les conditions (a1), (a2) et (a3), dans les expressions de  $n_1, n_2, n_3$  et des facettes correspondantes. On note ces normales :

$$\begin{aligned} n_4 &= (\beta N_k \wedge N_l, \alpha N_i \wedge N_j), \quad n_5 = (-\beta N_k \wedge N_l, \alpha N_i \wedge N_j - \beta N_k \wedge N_l) \\ \text{et } n_6 &= (\alpha N_i \wedge N_j - \beta N_k \wedge N_l, -\beta N_k \wedge N_l). \end{aligned}$$

Et on a pour la fonction support de  $K$  les égalités suivantes :

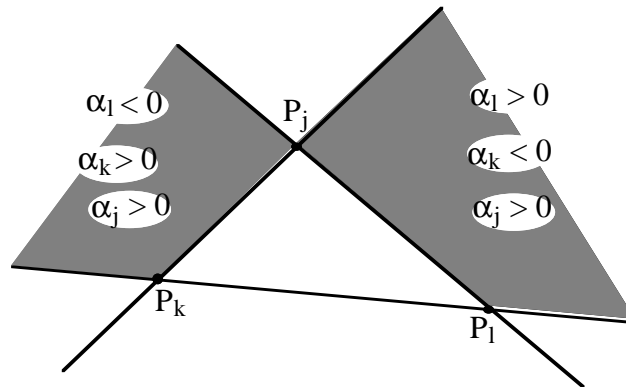
$$\begin{aligned} h(K, n_2) &= h(K, n_3) \\ &= \sum_{r/N_r \in C_1} \langle \beta N_k \wedge N_l - \alpha N_i \wedge N_j, N_r \rangle + \sum_{r/N_r \in C_3 \cup \{N_k, N_l\}} -\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_r \rangle, \\ \text{et } h(K, n_5) &= h(K, n_6) \\ &= \sum_{r/N_r \in C_2} \langle \alpha N_i \wedge N_j - \beta N_k \wedge N_l, N_r \rangle + \sum_{r/N_r \in C_3 \cup \{N_i, N_j\}} -\beta \langle N_k \wedge N_l, N_r \rangle. \end{aligned}$$

### Remarques C :

**1-** Comme dans **B-**  $N_i$  est une combinaison linéaire de  $N_j, N_k$  et  $N_l$ . Il existe  $\alpha_j, \alpha_k$  et  $\alpha_l \in \mathbb{R}$  tels que  $N_i = \alpha_j N_j + \alpha_k N_k + \alpha_l N_l$ . On remplace  $N_i$  par son expression dans  $\langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_l \rangle > 0$  et  $\langle N_k \wedge N_l, N_i \rangle \cdot \langle N_k \wedge N_l, N_j \rangle > 0$ , d'où on tire :

$$\alpha_k \alpha_l < 0 \text{ et } \alpha_j > 0.$$

Donc soit  $\alpha_k > 0$  et  $\alpha_l < 0$ , soit  $\alpha_k < 0$  et  $\alpha_l > 0$ . Donc les quatre vecteurs  $N_i, N_j, N_k$  et  $N_l$  sont sur la frontière de l'enveloppe positive de  $\{N_i, N_j, N_k, N_l\}$ . Sur la figure ci dessous, les parties où  $P_i$  peut se trouver dans le diagramme projectif sont coloriées.



**Figure 17 :** Positions de  $P_i$  dans le P.D.P.

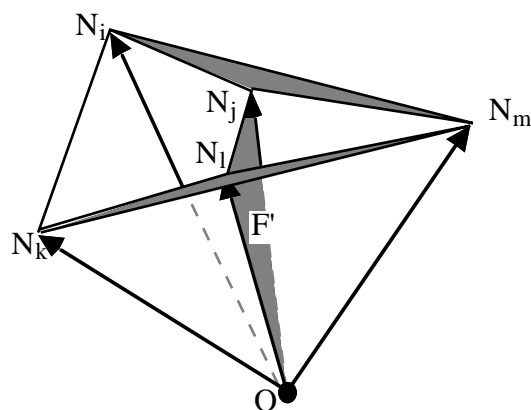
De plus, les conditions  $\langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_k \text{ et } l \rangle < 0$  et  $\langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle \cdot \langle N_k \wedge N_l, N_i \text{ et } j \rangle < 0$  donnent la position de  $N_m$  par rapport aux plans  $\text{Lin}(N_i, N_j)$  et  $\text{Lin}(N_k, N_l)$ .

Notons  $C_4$  le cône  $\text{Pos}\{N_i, N_j, N_k, N_l\}$ , et  $C_5$  le cône  $\text{Pos}\{N_i, N_j, N_k, N_l, N_m\}$ .

En premier lieu on remarque que  $N_m \notin C_4$ , car  $N_i \wedge N_j$  est une normale à une facette de  $C_4$ , et  $\langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle \cdot \langle N_i \wedge N_j, N_k \text{ et } l \rangle < 0$  (or  $N_k \in C_4$ ). Les facettes de  $C_4$  qui sont visibles depuis  $N_m$ , sont à l'intérieur de  $C_5$ . C'est le cas de  $\text{Pos}\{N_i, N_j\}$  et  $\text{Pos}\{N_k, N_l\}$ . Or ces deux facettes ne sont pas adjacentes (pas de rayon commun), donc nécessairement une troisième facette de  $C_4$  est visible depuis  $N_m$  et elle est à l'intérieur de  $C_5$ .

En conclusion,

*les conditions (pa1) et (pa2) impliquent que deux vecteurs parmi  $N_i, N_j, N_k$  et  $N_l$  sont à l'intérieur de  $C_5$ .*



**Figure 18 :** Configuration des vecteurs  $N_i, N_j, N_k, N_l$  et  $N_m$ .

2- Ci dessous le premier diagramme projectif correspondant aux conditions (pa1) et (pa2):

On introduit un vecteur  $I \in \mathbb{R}^3$  tel que  $I$  appartient à l'intersection de  $\text{Lin}(N_i, N_j)$  et  $\text{Lin}(N_k, N_l)$ . Et on note  $P(I)$  l'image de  $I$  dans le premier diagramme projectif. La droite passant par  $P_i$  et  $P_j$  sépare  $P_m$  des points  $P_k$  et  $P_l$ , de même que la droite passant par  $P_k$  et  $P_l$  sépare  $P_m$  des points  $P_i$  et  $P_j$ .

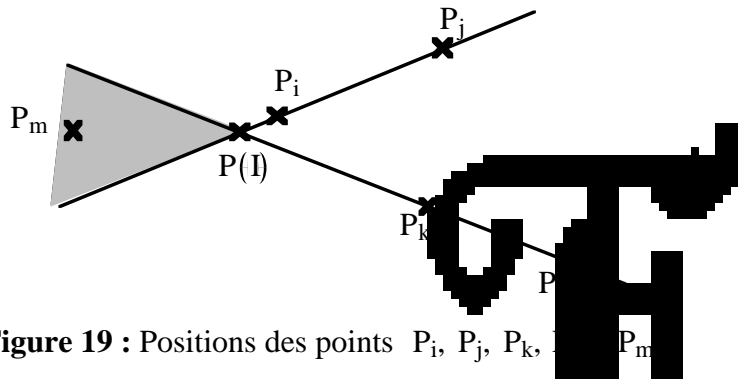


Figure 19 : Positions des points  $P_i, P_j, P_k, P_l, P_m$

3- Chaque sous ensemble de 5 vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant les conditions (pa1) et (pa2) donne 6 facettes de  $K$ , en échangeant les rôles de  $(N_i, N_j)$  et  $(N_k, N_l)$ .

### 5. Bilan de l'étude des facettes.

#### 5.1. Cas général

Dans le cas général,  $K$  aura des facettes de celles énumérées dans les parties A-, B- et C-. Les valeurs données ci-dessous sont exactes pour des vecteurs  $N_1, \dots, N_p$  en position générale, et sont des bornes inférieures pour des vecteurs en position dégénérée.

Posons

$$n(i,j,k) = \text{Card} \left( \left\{ N_r \in \mathbb{R}^3 \mid r \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i, j, k\} \text{ et } (N_i, N_j, N_k, N_r) \text{ est en position générale} \right\} \right).$$

**Propriété 7 :** Le nombre de facettes de  $K$  données dans la partie A- est :

$$n_A = 6 [ C_p^2 - t ] + 3 t,$$

où  $t$  ( $3 \leq t \leq p$ ) est le nombre de vecteurs qui sont des rayons extrêmes de l'enveloppe positive de  $\{N_1, \dots, N_p\}$ .

Les facettes de la partie B- sont au nombre de :

$$n_B = 6 \times \sum_{\{i,j,k\} \subset \{1, \dots, p\}} n(i,j,k),$$

et enfin le nombre de facettes issues de la partie C- est :

$$n_C = 6 \times \sum_{\{i,j,k\} \subset \{1, \dots, p\}} C_{n(i,j,k)}^2.$$

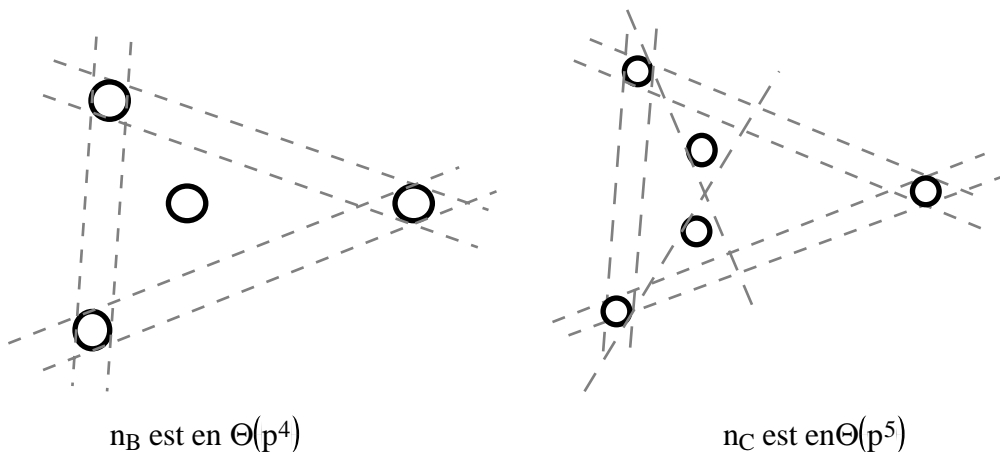


Le nombre total de facettes de  $K$  est donné par  $f_5(K) = n_A + n_B + n_C$ .  
 On remarque que

- $n_A$  est en  $\Theta(p^2)$  quelque soit la position des vecteurs de  $N$ , tandis que les valeurs
- $n_B$  varie entre zéro (dans le cas de la sélectivité régulière, définie dans le paragraphe suivant) et  $\Theta(p^4)$  (voir figure 20).
- $n_C$  varie entre zéro (pour la sélectivité parfaite) et  $\Theta(p^5)$  (voir exemple de la figure 20).

Le nombre total de facettes de  $K$ ,  $f_5(K)$ , est au moins en  $\Theta(p^2)$  et au plus en  $\Theta(p^5)$  suivant les positions des vecteurs de  $N$ . Notons que  $\Theta(p^5)$  est la complexité attendue pour une somme de triangles quelconques dans

Dans les figures ci dessous on répartit  $p$  vecteurs sur chaque cercle :



**Figure 20** : Répartition des vecteurs dans le P.D.P.

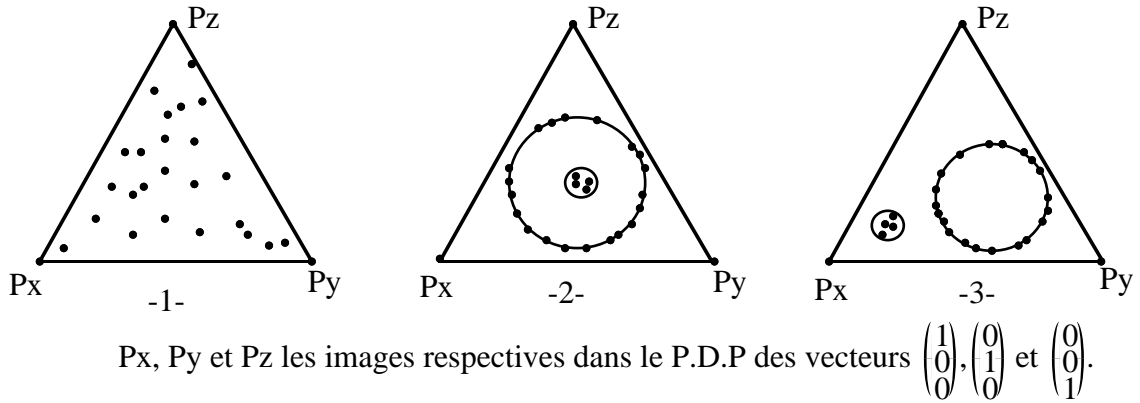
Etant donnée la dépendance de  $f_5(K)$  vis à vis de la configuration des vecteurs  $N_i$ , on s'interroge sur la complexité moyenne de  $f_5(K)$ , pour des vecteurs distribués aléatoirement. Une distribution uniforme des vecteurs  $N_i$ , dans  $[0, 1]^3$ , donne expérimentalement (moyenne sur 100 tirages) une évolution en  $p^5$  du nombre moyen de facettes.

On regarde expérimentalement le comportement asymptotique du nombre de facettes pour quelques configurations particulières de vecteurs.

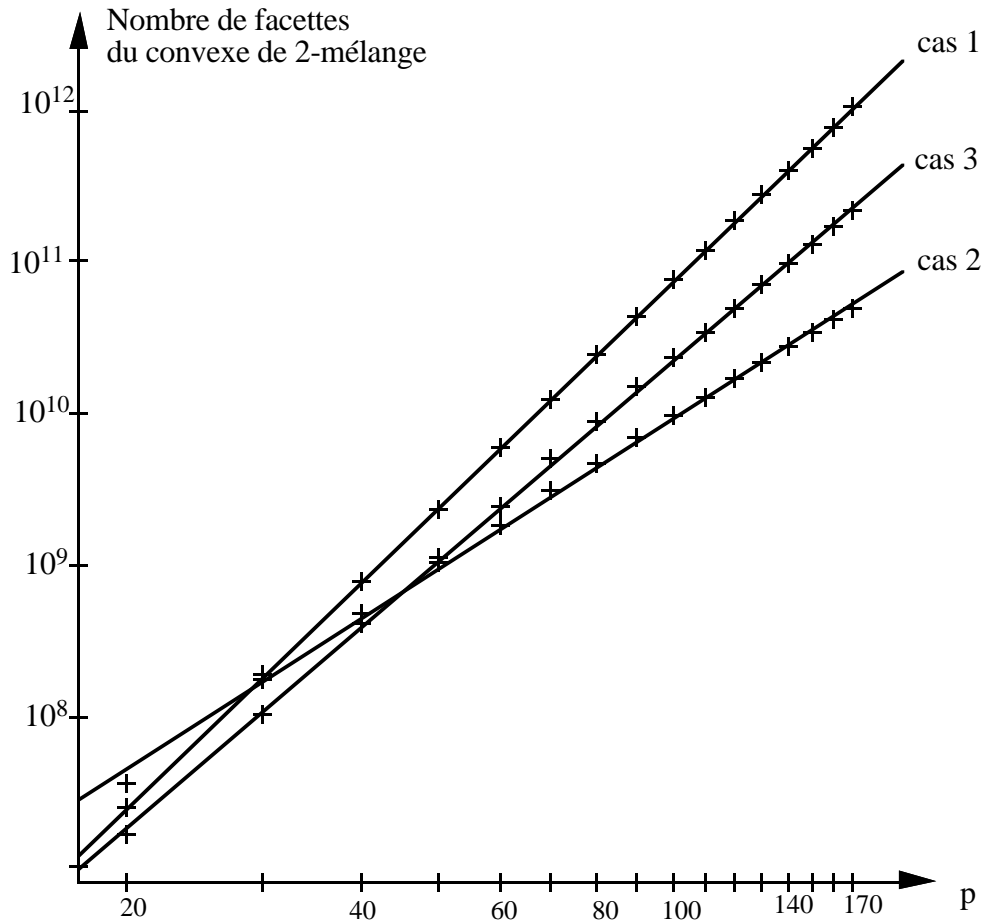
**Exemples :**

Soit  $k$  une constante entière,  $p$  tendant vers l'infini.

- 1-  $p$  points répartis uniformément dans le cube  $[0,1]^3$ ,
- 2-  $p-k$  points répartis sur un grand cercle et  $k$  points à l'intérieur d'un petit cercle inclus dans le grand cercle,
- 3-  $p-k$  points répartis sur un grand cercle et  $k$  points à l'extérieur.



**Figure 21 :** Trois répartitions différentes des images des vecteurs dans le P.D.P.



Equations des droites de moindres carrés :  $y = a x + b$

1)  $a = 4,98436$  et  $b = -4,824955$

2)  $a = 3,323037$  et  $b = 0,739825$

3)  $a = 4,434148$  et  $b = -3,489202$

**Figure 22 :** Comportement asymptotique du nombre moyen de facettes.

### 5.2. Cas de la sélectivité régulière

**Définition 5 :** Soit  $\mathcal{N} = \{N_1, \dots, N_p\}$  une famille de directions  
 $\forall i \in \{1, \dots, p\}$   $N_i \cap \text{Pos}(\mathcal{N}) = \{0\}$   
 e. est sur un rayon extrême du cône  $\text{Pos}(\mathcal{N})$   
 alors on dit que la famille  $\mathcal{N}$  vérifie la sélectivité régulière.

Exemple dans

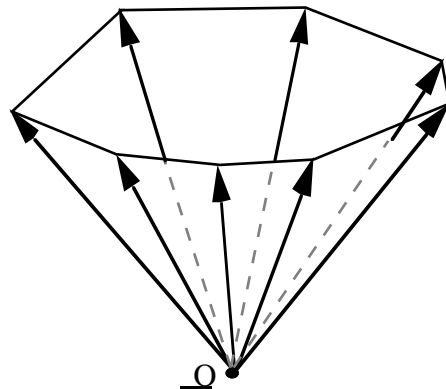


Figure 2-1 : Vecteurs vérifiant la sélectivité régulière

**Remarque :** On se trouve dans le cas où la famille  $\mathcal{N}$  vérifie la sélectivité régulière, alors le convexe  $K$  associé à cette famille, aura pour facettes uniquement celles décrites dans la partie A-. En effet, les configurations de vecteurs, qui donnent naissance dans les parties B- et C- à des facettes de  $K$ , sont telles qu'au moins un vecteur de  $\mathcal{N}$  soit à l'intérieur de l'enveloppe positive de trois autres vecteurs de  $\mathcal{N}$ . Ce qui ne peut pas se produire dans le cas de la sélectivité régulière.

#### Conséquences :

1- De cette remarque, on déduit immédiatement que le nombre de facettes d'un convexe de 2-mélanges associé à une famille de vecteurs vérifiant la sélectivité régulière, est en  $\Theta(p^2)$ . Son nombre exact est :

$$f_5(K) = 6 \lfloor C_p^2 - p \rfloor + 3p, \text{ car il y a } p \text{ paires de vecteurs dont l'enveloppe positive est sur la frontière de l'enveloppe positive de } \mathcal{N}.$$

2- Dans le cas de la sélectivité régulière, l'appartenance de  $(M_1, M_2)$  à  $K$  se réduit à vérifier uniquement les inégalités données par les facettes décrites dans la partie A-. Si on écrit les inégalités correspondant à ces facettes, on en déduit la propriété suivante :

**Propriété 8 :** Soit  $\{N_i\}_i$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  vérifiant la sélectivité régulière, si on note  $K$  le convexe de 2-mélanges associé à cette famille de vecteurs et  $Z$  le zonotope associé à cette même famille alors il y a équivalence entre :

- (a)  $M_1 \in Z, M_2 \in Z$  et  $M_1 + M_2 \in Z$
- (b)  $(M_1, M_2) \in K$ .

En terme de faisabilité de mélanges, on a :

**Propriété 9 :** Soit une famille  $\{N_i\}_i$  de vecteurs linéairement indépendants de base et vérifiant la sélectivité régulière. Les mélanges  $M_1, M_2$  et  $M_1 + M_2$  sont simultanément faisables si et seulement si les mélanges  $M_1, M_2$  et  $M_1 + M_2$  le sont.

**preuve :** On note  $h(Z, \cdot)$  la fonction support du zonotope  $Z$ .

Tous les couples de vecteurs  $(N_i, N_j) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$  (avec  $i \neq j$ ) tels que  $\text{Pos}(N_i, N_j)$  coupe l'intérieur de  $\text{Pos}(\{N_i\}_i)$ , donnent les inégalités (i1), (i2), (i3), (i4), (i5) et (i6), tandis que si  $\text{Pos}(N_i, N_j)$  coupe  $\text{Pos}(\{N_i\}_i)$  sur sa frontière on aura soit les inégalités (i1), (i2) et (i3), soit (i4), (i5) et (i6).

$$\bullet n_1 = (N_j \wedge N_i, 0)$$

$$\langle (M_1, M_2), n_1 \rangle \leq \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ \text{où } \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle < 0}} \langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle \Leftrightarrow \langle M_1, N_j \wedge N_i \rangle \leq h(Z, N_j \wedge N_i). \quad (i1)$$

$$\bullet n_2 = (0, N_j \wedge N_i)$$

$$\langle (M_1, M_2), n_2 \rangle \leq \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ \text{où } \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle < 0}} \langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle \Leftrightarrow \langle M_2, N_j \wedge N_i \rangle \leq h(Z, N_j \wedge N_i). \quad (i2)$$

$$\bullet n_3 = (N_i \wedge N_j, N_i \wedge N_j)$$

$$\langle (M_1, M_2), n_3 \rangle \leq \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ \text{où } \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle > 0}} \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle \Leftrightarrow \langle M_1 + M_2, N_i \wedge N_j \rangle \leq h(Z, N_i \wedge N_j). \quad (i3)$$

$$\bullet n_4 = (N_i \wedge N_j, 0)$$

$$\langle (M_1, M_2), n_4 \rangle \leq \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ \text{où } \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle > 0}} \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle \Leftrightarrow \langle M_1, N_i \wedge N_j \rangle \leq h(Z, N_i \wedge N_j). \quad (i4)$$

$$\bullet n_5 = (0, N_i \wedge N_j)$$

$$\langle (M_1, M_2), n_5 \rangle \leq \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ \text{où } \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle > 0}} \langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle \Leftrightarrow \langle M_2, N_i \wedge N_j \rangle \leq h(Z, N_i \wedge N_j). \quad (i5)$$

•  $n_6 = (N_j \wedge N_i, N_j \wedge N_i)$   
 $\langle (M_1, M_2), n_6 \rangle \leq \sum_{r=1, \dots, p} \langle N_r, N_j \wedge N_i \rangle \Leftrightarrow \langle M_1 + M_2, N_j \wedge N_i \rangle \leq h(Z, N_j \wedge N_i). \quad (i6)$   
 où  $\langle N_r, N_i \wedge N_j \rangle < 0$

Ci-dessus on a les inégalités d'appartenance de  $M_1, M_2$  et  $M_1 + M_2$  à  $Z$ , sauf pour les couples de vecteurs  $(N_i, N_j)$  tels que soit  $I^+(i, j) = \emptyset$ , soit  $I^-(i, j) = \emptyset$ .

Si  $I^+(i, j) = \emptyset$ ,  $(M_1, M_2)$  vérifie les inégalités (i4), (i5) et (i6). Or dans (i4) et (i5)  $h(Z, N_i \wedge N_j) = 0$ , d'où en additionnant ces 2 inégalités on obtient (i3) :

$$\langle M_1 + M_2, N_i \wedge N_j \rangle \leq 0 = h(Z, N_i \wedge N_j).$$

En écrivant (i6) comme suit :

$$\langle M_1, N_j \wedge N_i \rangle + \langle M_2, N_j \wedge N_i \rangle \leq h(Z, N_j \wedge N_i),$$

et en tenant compte de (i4) et (i5) on obtient (i1) et (i2) :

$$\begin{cases} \langle M_1, N_j \wedge N_i \rangle \leq h(Z, N_j \wedge N_i), \\ \langle M_2, N_j \wedge N_i \rangle \leq h(Z, N_j \wedge N_i). \end{cases}$$

De même, si  $I^-(i, j) = \emptyset$ ,  $(M_1, M_2)$  vérifie les inégalités (i1), (i2) et (i3), on en déduit qu'il vérifie aussi les inégalités (i4), (i5) et (i6).

Donc même si  $I^+(i, j) = \emptyset$ , ou si  $I^-(i, j) = \emptyset$ ,  $M_1$  et  $M_2$  vérifient toutes les inégalités (i1), (i2), (i3), (i4), (i5) et (i6).

Finalement on a :

$$(M_1, M_2) \in K,$$

est équivalent à

$M_1$  et  $M_2$  vérifient les inégalités (i1), (i2), (i3), (i4), (i5) et (i6), pour tout couple de vecteurs  $(N_i, N_j)$ ,  $1 \leq i < j \leq p$ , qui sont les inégalités d'appartenance de  $M_1, M_2$  et  $M_1 + M_2$  à  $Z$ .

Dans le cas de la sélectivité régulière, cette propriété permet de réduire de façon significative, la complexité du problème de l'appartenance de  $(M_1, M_2) \in K$ , à passer d'un système de  $O(p^5)$  inégalités à  $O(p)$  inégalités. La condition nécessaire et suffisante obtenue pour la stabilité de deux mélanges  $M_1$  et  $M_2$  à partir de  $N_1, N_2, \dots, N_p$ , est la même que avec les vecteurs  $N_i$ . Mais dans cette condition, elle se généralise à  $q$  mélanges de la façon suivante :

**Propriété 10 :** Une condition nécessaire et suffisante de coexistence de la famille  $M$  dans la famille  $N$  de vecteurs de volume est que le zonotope  $Z\{M_1, M_2, \dots, M_q\}$  est inclus dans le zonotope  $Z\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$ .

Car dans ce cas, la généralisation à  $q$  mélanges se fait grâce à la propriété d'inclusion de tous les zonotopes résiduels dans le zonotope résiduel de volume

maximum  $Z \cap (Z-M)$ .

Pour les vecteurs de  $\mathcal{S}$ , cette propriété d'inclusion dans le zonotope résiduel de volume maximum n'est plus vraie, même pour  $\mathcal{S}$  vérifiant la sélectivité régulière comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple :**

Soient  $N_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $N_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $N_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $N_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  les produits de base et  $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  le mélange à réaliser. Les vecteurs  $\lambda$  de  $\mathcal{S}$  possibles sont de la forme :

$$\lambda = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \\ 1-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in [0,1].$$

Les zonotopes résiduels s'écrivent sous la forme :

$$ZR(\lambda) = (1-\alpha) ([0, N_1] + [0, N_4]) + \alpha ([0, N_2] + [0, N_3]), \text{ où } \alpha \in [0,1].$$

La famille de vecteurs  $\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$  vérifie la sélectivité régulière, mais on voit qu'il ne peut pas y avoir inclusion des zonotopes résiduels dans l'un d'entre eux (en l'occurrence celui de volume maximum).

On ne sait pas si la propriété 8 est propre au cas particulier étudié ici (c'est à dire  $q=2$ , et  $n=3$ ), ou si elle peut être généralisée à la fabrication de plus de deux mélanges ( $q>2$ ) ou pour des mélanges représentés dans un espace des espèces de dimension plus grande ( $n>3$ ). Mais pour  $q>2$  et  $n>3$ , il paraît difficile de mener une étude des facettes du convexe de  $q$ -mélanges  $K$ , car le nombre de combinaisons possibles pour énumérer les facettes de  $K$  augmente considérablement avec la dimension  $qn$  de  $K$ .

## 6. Relations d'Adjacence entre facettes et Applications

Dans cette partie on étudie les relations d'adjacence entre facettes du convexe  $K$  de 2-mélanges associé à des vecteurs de  $\mathcal{S}$  étudié dans les paragraphes 4 et 5).

On décrit ces relations d'adjacence dans le premier diagramme projectif.

Rappelons que deux facettes de  $K$  sont dites adjacentes, si elles partagent une même sous-face (4-face).

On compte cinq différents types d'adjacence :

- trois types entre deux faces d'un même cas : A, B ou C,
- entre une face du cas A et une face du cas B,
- et entre une face du cas B et une face du cas C.

A titre d'exemple, on étudiera ici uniquement les adjacences entre deux faces du polyèdre. L'énumération et la description complète de tous les cas serait trop fastidieuse.

Soient  $N_i, N_j, N_k, N_l$  et  $N_m$  cinq vecteurs distincts de  $N$  vérifiant les conditions (pa1) et (pa2) (voir paragraphe 4.2.). La facette de normale  $n_1 = (\alpha N_i \wedge N_j, \beta N_k \wedge N_l)$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient  $\alpha \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle = \beta \langle N_k \wedge N_l, N_m \rangle > 0$ , s'écrit :

$$F(K, n_1) = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ r \notin \{i, j, k, l, m\}}} F(K_r, n_1) + [0, \tilde{N}_i^1] + [0, \tilde{N}_j^1] + [0, \tilde{N}_k^2] + [0, \tilde{N}_l^2] + [\tilde{N}_m^1, \tilde{N}_m^2].$$

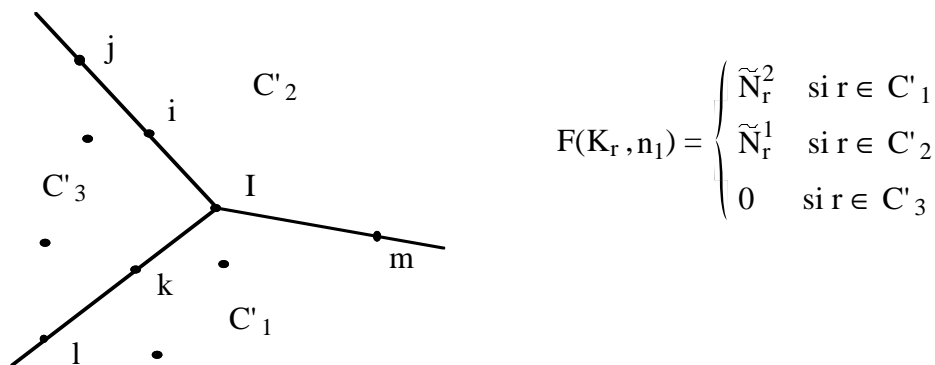
Soit  $F$  une sous-face de  $F(K, n_1)$ , qui s'écrit :

$$F = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ r \notin \{i, j, k, l, m\}}} F(K_r, n_1) + [0, \tilde{N}_i^1] + [0, \tilde{N}_j^1] + [0, \tilde{N}_k^2] + 0 + [\tilde{N}_m^1, \tilde{N}_m^2].$$

Notons  $F'$  l'unique facette de  $K$  ayant  $F$  comme sous-face commune avec  $F(K, n_1)$  et  $n'_1$  sa normale extérieure.

Comment déterminer  $F'$  à partir du premier diagramme projectif ?

Aux points  $N_1, N_2, \dots, N_p$  de  $N$ , on associe les points  $1, \dots, p$  dans le P.D.P. Soit  $I$  l'intersection entre les droites  $(i, j)$  et  $(k, l)$ .



**Figure 24** : Configuration dans le P.D.P. correspondant à une face du cas C.

Si  $F'$  est une face du cas C, alors

$$F(K_i, n'_1) = [0, \tilde{N}_i^1], \quad F(K_j, n'_1) = [0, \tilde{N}_j^1],$$

$$F(K_k, n'_1) = [0, \tilde{N}_k^2], \quad F(K_m, n'_1) = [\tilde{N}_m^1, \tilde{N}_m^2]$$

et un terme de

$$\sum_{\substack{r=1,\dots,p \\ r \notin \{i,j,k,l,m\}}} F(K_r, n_1)$$

n'est pas réduit à un sommet de  $K_r$  et prend comme valeur soit  $[\tilde{N}_r^1, \tilde{N}_r^2]$ , soit  $[0, \tilde{N}_r^2]$ .

Soit  $l'$  l'indice correspondant à ce terme.

Le terme  $F(K_{l'}, n_1) = [0, \tilde{N}_{l'}^2]$  prend alors la valeur  $F(K_{l'}, n_1) = 0$ . Donc  $l'$  passe dans le nouveau cône  $C'_3$  correspondant à la configuration des cinq points  $\{i, j, k, l', m\}$ .

Soit  $h$  la demi-droite contenant  $k$  et dont l'extrémité, notée  $c$ , est sur la droite  $(i, j)$ .

Soit  $h'$  la demi-droite contenant  $m$  et dont l'extrémité  $c$ , commune à  $h$ , est sur la droite  $(i, j)$ .

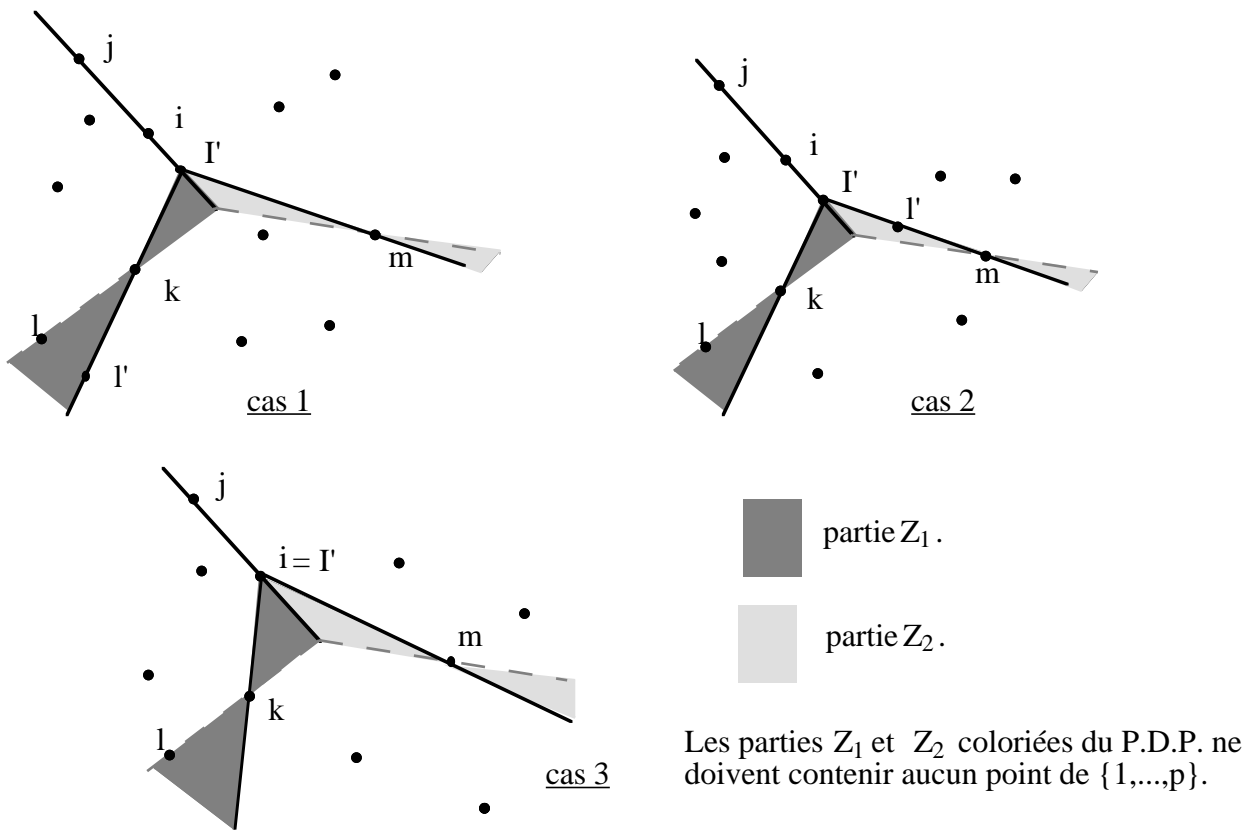
La position initiale de  $h$  est celle de la demi droite  $[I, k)$ . Puis la demi droite  $h$  pivote autour de  $k$ . De même,  $h'$  a pour position initiale celle de la demi droite  $[I, m)$  (i.e. le point  $c$  est confondu avec  $I$ ), et pivote autour de  $m$  quand  $c$  se déplace sur  $(i, j)$ . Les demi droites  $h$  et  $h'$  pivotent jusqu'à ce que l'une d'elles contienne un point  $l'$  du P.D.P. (différent de  $k$  et  $m$ ).

Trois situations se présentent (voir figure 25) :

- 1- Si  $F(K_{l'}, n_1) = [0, \tilde{N}_{l'}^2]$  alors  $h$  est la première demi-droite à rencontrer le point  $l'$  du P.D.P.
- 2- Si  $F(K_{l'}, n_1) = [\tilde{N}_{l'}^1, \tilde{N}_{l'}^2]$  alors  $h'$  est la première demi-droite à rencontrer le point  $l'$  du P.D.P.
- 3-  $h$  et  $h'$  pivotent et ne rencontrent aucun point du P.D.P. avant que leur extrémité  $c$  se confonde avec  $i$ . On se trouve alors dans une configuration de 4 points qui correspond à une face du cas B et  $F(K_i, n_1) = K_i$ .

On note  $l'$ , l'intersection des demi-droites  $h$  et  $h'$  avec la droite  $(i, j)$ , en position finale.





**Figure 25 :** Les trois cas possibles d'adjacence à partir d'une face du cas C.

Notons  $Z$  la partie hachurée du P.D.P. (cf. figure 25). Elle est constituée de deux parties  $Z_1$  et  $Z_2$ .

On note

$$l(t) = (1-t)l + t l' \quad \text{et} \quad I(t) = (1-t)I + t I' \quad \text{pour } t \in [0,1].$$

$Z_1$  est l'intersection de l'ensemble des points balayés par les droites  $(k, l(t))$ , quand  $t$  décrit l'intervalle  $]0,1[$ , et du demi-plan délimité par  $(i,j)$  contenant  $k$ .

De même  $Z_2$  est l'intersection de l'ensemble des points balayés par les droites  $(m, I(t))$ , quand  $t \in ]0,1[$ , et du demi plan délimité par  $(i,j)$  contenant  $m$ .

**cas 1 :** Si  $l'$  est sur la demi-droite  $[I',k)$ , alors la face adjacente à  $F(K, n_1)$  a pour normale

$$n_1 = (\alpha' N_i \wedge N_j, \beta' N_k \wedge N_{I'}),$$

où  $\alpha'$  et  $\beta'$  vérifient :

$$\alpha' \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle = \beta' \langle N_k \wedge N_{I'}, N_m \rangle > 0.$$

Elle s'écrit :

$$F(K, n_1) = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ r \notin \{i, j, k, l, m, l'\}}} F(K_r, n_1) + [0, \tilde{N}_i^1] + [0, \tilde{N}_j^1] + [0, \tilde{N}_k^2] + 0 + [\tilde{N}_m^1, \tilde{N}_m^2] + [0, \tilde{N}_{I'}^2],$$

où  $F(K_r, n_1) = F(K_r, n_1)$  pour tout  $r = 1, \dots, p$  et  $r \neq i, j, k, l, m, l'$ .

**cas 2 :** Si  $l'$  est sur la demi-droite  $[l', m)$ , alors la face adjacente à  $F(K, n_1)$  a pour normale

$$n'_1 = (-\alpha' N_i \wedge N_j, \beta' N_m \wedge N_l - \alpha' N_i \wedge N_j)$$

où  $\alpha'$  et  $\beta'$  vérifient :

$$\alpha' \langle N_i \wedge N_j, N_k \rangle = \beta' \langle N_m \wedge N_l, N_k \rangle > 0.$$

Elle s'écrit :

$$F(K, n'_1) = \sum_{\substack{r=1, \dots, p \\ r \notin \{i, j, k, l, m, l'\}}} F(K_r, n'_1) + [0, \tilde{N}_i^1] + [0, \tilde{N}_j^1] + [0, \tilde{N}_k^2] + 0 + [\tilde{N}_m^1, \tilde{N}_m^2] + [\tilde{N}_{l'}^1, \tilde{N}_{l'}^2],$$

où  $F(K_r, n'_1) = F(K_r, n_1)$  pour tout  $r = 1, \dots, p$  et  $r \neq i, j, k, l, m, l'$ .

**cas 3 :** Si  $l'$  est le point  $i$ , alors la face adjacente à  $F(K, n_1)$  correspond à une face du cas B de normale

$$n'_1 = (\alpha' N_i \wedge N_j, \beta' N_i \wedge N_k)$$

où  $\alpha'$  et  $\beta'$  vérifient :

$$\alpha' \langle N_i \wedge N_j, N_m \rangle = \beta' \langle N_i \wedge N_k, N_m \rangle > 0.$$

Elle s'écrit :

$$F(K, n'_1) = \sum_{r \in C_2} \tilde{N}_r^2 + \sum_{r \in C_3} \tilde{N}_r^1 + \sum_{r \in C_3} 0 + K_i + [0, \tilde{N}_j^1] + [0, \tilde{N}_k^2] + 0 + [\tilde{N}_m^1, \tilde{N}_m^2],$$

### Algorithme et deuxième diagramme projectif

Dans ce sujet, on se restreint à l'étude du cas 1.

**Problème** comment déterminer le point  $l'$  sans tester un à un tous les vecteurs  $N_r$  de  $N$  pour  $r \neq i, j, k, l, m, l'$ ?

Pour cela, on aura besoin du dual du P.L.P., le deuxième diagramme projectif.

On note  $D$  la transformation géométrique suivante qui transforme un point du plan en une droite et réciproquement. Soit  $p$  un point du plan différent de l'origine, on lui associe la droite  $d$  défini par :

$$d = D(p) = \{ q \in \mathbb{R}^2 \mid \langle p, q \rangle = 1 \}.$$

Et à une droite  $d$  (ne passant pas par l'origine) on associe le point  $p = D(d)$  vérifiant :

$$\forall q \in d, \langle p, q \rangle = 1.$$

**Observation :** La transformation  $D$  préserve l'incidence et l'ordre.

En effet, soient  $p$  un point et  $d$  une droite du plan. On a les assertions suivantes :

- (i) si  $p \in d$ , alors  $D(d) \in D(p)$ ,
- (ii) si  $p \in d^+$  (resp.  $d^-$ ), alors  $D(d) \in D(p)^+$  (resp.  $D(p)^-$ ).

Où  $d^+$  est le demi plan ouvert contenant 0 et délimité par la droite  $d$ , et  $d^-$  l'autre demi plan délimité par  $d$ .

**Définition :** On appelle *deuxième diagramme projectif* (noté D.D.P.) associé à un ensemble de vecteurs  $\{N_1, \dots, N_p\}$  de  $\mathbb{R}^3$ , le diagramme dans le plan dual du P.D.P.

A chaque vecteur  $N_i$  correspond une droite dans le D.D.P. et les points d'intersections entre les droites du D.D.P. correspondent aux droites du P.D.P.

**Construction :** On place le P.D.P. dans le plan de manière qu'aucune droite ne passe par l'origine. Puis la construction du D.D.P. est la dualité.

Aux points  $\{1, \dots, p\}$  du P.D.P. on associe des droites  $\{D(1), \dots, D(p)\}$ . On obtient un arrangement de droites  $(\{D(1), \dots, D(p)\})$  dans le plan. Cet arrangement forme le D.D.P.

• **Exemple :** Représentation dans le D.D.P. de la configuration de 5 points du P.D.P.

Soient cinq points  $i, j, k, l$  et  $m$  du P.D.P., qui correspondent à des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant les conditions (pa1) et (pa2).

- La première condition (pa1) :

$k$  et  $l$  sont du même côté de la droite  $(i, j)$  (i.e. droite passant par les points  $i$  et  $j$ ) et  $m$  est de l'autre côté de cette droite. C'est à dire :

$$\text{Soit } k \text{ et } l \in (i, j)^+ \text{ et } m \in (i, j)^-, \text{ soit } k \text{ et } l \in (i, j)^- \text{ et } m \in (i, j)^+.$$

En appliquant (ii), on obtient les conditions équivalentes dans le D.D.P. :

$$D((i, j)) = D(i) \cap D(j) \text{ appartient soit à } D(k)^+, D(l)^+, \text{ et } D(m)^- \\ \text{soit à } D(k)^-, D(l)^- \text{ et } D(m)^+.$$

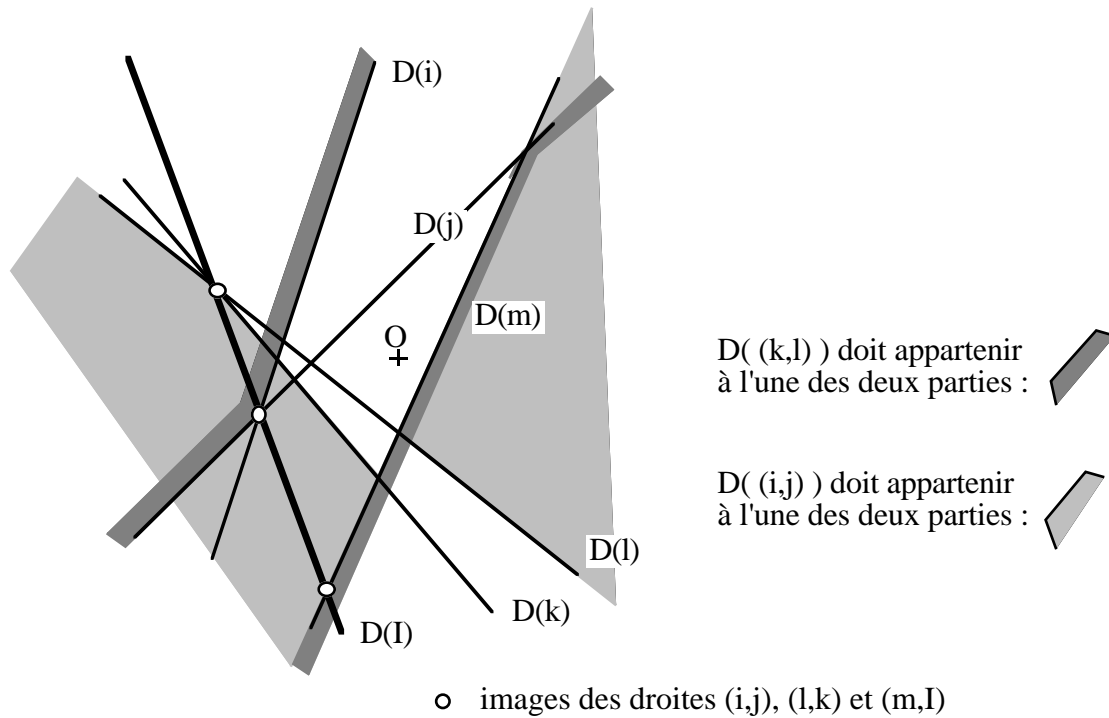
- La seconde condition (pa2) :

$i$  et  $j$  sont du même côté de la droite  $(k, l)$  (i.e. droite passant par les points  $k$  et  $l$ ) et  $m$  est de l'autre côté de cette droite.

En appliquant (ii), on obtient les conditions équivalentes dans le D.D.P. :

$$D((k, l)) = D(k) \cap D(l) \text{ appartient soit à } D(i)^+, D(j)^+ \text{ et } D(m)^-, \\ \text{soit à } D(i)^-, D(j)^- \text{ et } D(m)^+.$$

**Exemple :** Ici  $D((k, l))$  appartient à  $D(i)^+, D(j)^+$  et  $D(m)^-$  et  $D((i, j))$  appartient à  $D(k)^+, D(l)^+$  et  $D(m)^-$ .



**Figure 26 :** Configuration dans le D.D.P. associée à une facette du cas C.

• Second point : Représentation des relations d'adjacence dans le D.D.P.

Dans le P.D.P. les faces  $F(K, n_1)$  et  $F(K, n'_1)$  sont adjacentes à condition que  $Z$ , la partie hachurée du P.D.P., (cf. figure 25) ne contienne aucun point.

Etant donnée un point  $r \in \{1, 2, \dots, p\}$  du P.D.P.,  $r$  appartient soit au demi-plan délimité par  $(i, j)$  contenant  $k$ , soit au demi-plan délimité par  $(i, j)$  contenant  $m$ .

Dans le premier cas,  $r$  ne doit pas appartenir à l'une des droites  $(k, l(t))$ , quand  $t$  décrit l'intervalle  $[0, 1]$ .

Dans le second cas,  $r$  ne doit pas appartenir à l'une des droites  $(m, I(t))$ , quand  $t$  décrit  $[0, 1]$ .

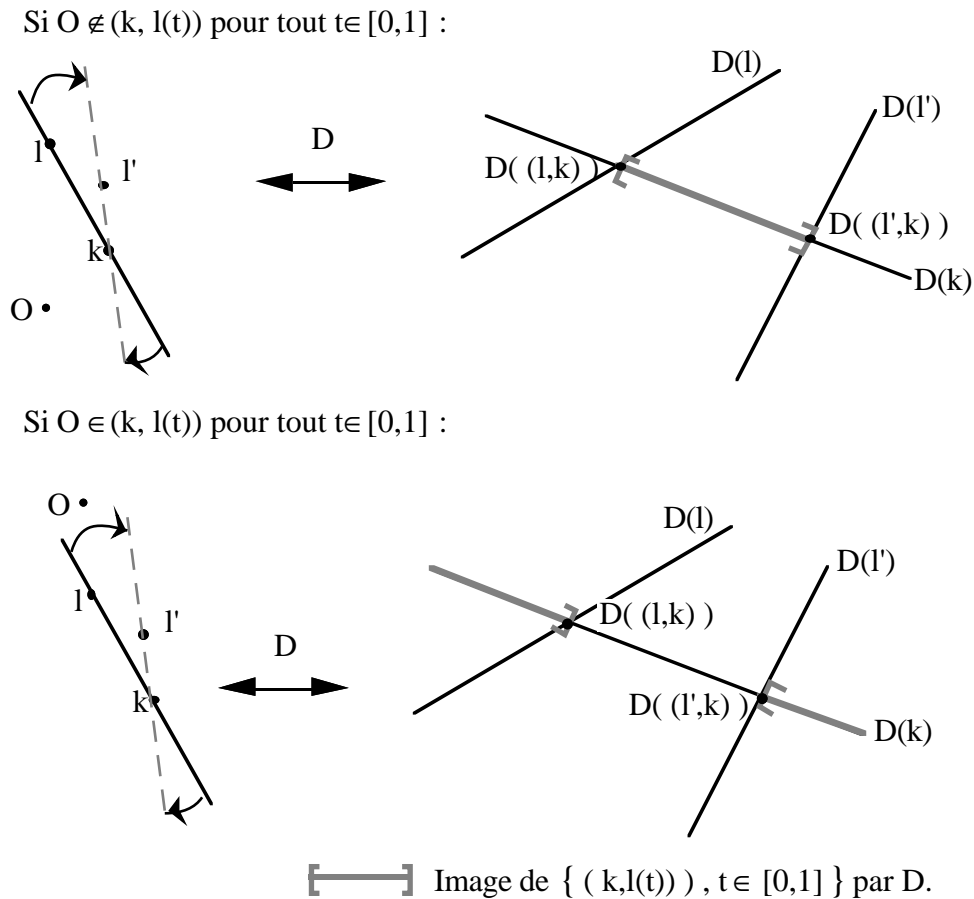
- cas 1 :  $\forall t \in [0, 1], r \notin (k, l(t)) \Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], D(k, l(t)) \notin D(r)$ .

Si les droites  $(k, l(t))$  ne rencontrent pas l'origine, quand  $t$  décrit l'intervalle  $[0, 1]$ , alors le point  $D(k, l(t))$  décrit le segment d'extrémités  $D(k, l)$  et  $D(k, l')$ ,

sinon  $D(k, l(t))$  décrit les deux demi-droites portées par  $D(k)$  et d'extrémités respectives  $D(k, l)$  et  $D(k, l')$  (voir figure 27).

- cas 2 :  $\forall t \in [0, 1], r \notin (m, I(t)) \Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], D(m, I(t)) \notin D(r)$ .

Comme dans le cas précédent  $D(m, I(t))$  décrit soit un segment de droite soit deux demi-droites portées par  $D(m)$ .



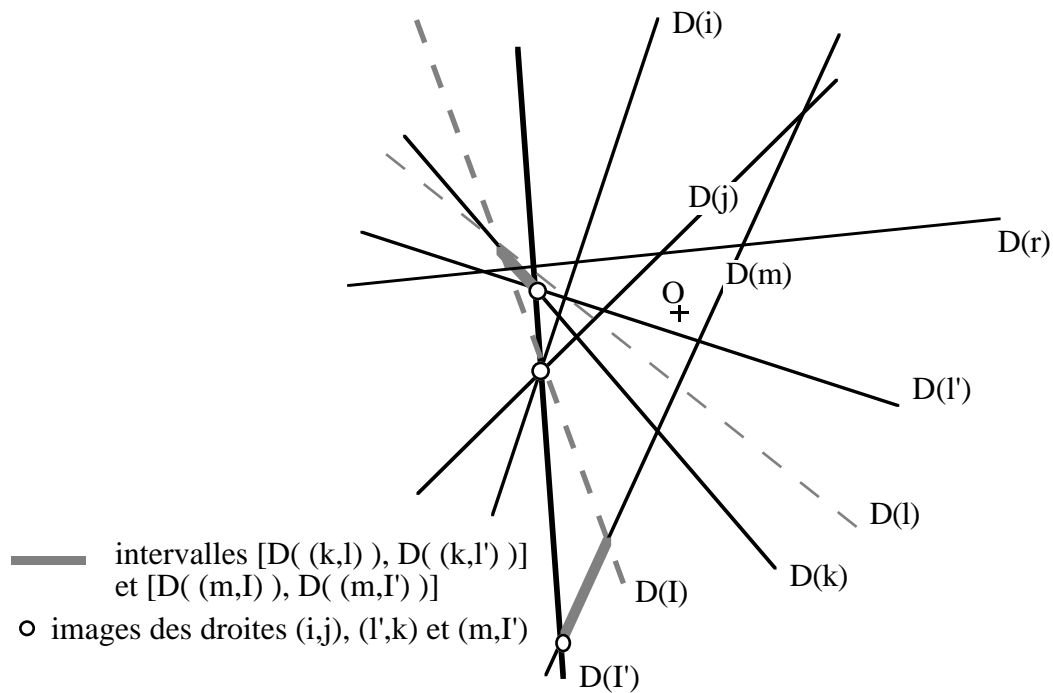
**Figure 27** : Description du cas 1.

Ainsi le point  $l'$  correspond à la première droite  $D(l')$  qui intersecte  $D(k)$  en partant du point  $D(k, l)$  sur  $D(k)$  et qui vérifie :

- si  $D(i, j) \in D(l)^+$  alors  $D(i, j) \in D(l')^+$
- et si  $D(i, j) \in D(l)^-$  alors  $D(i, j) \in D(l')$ .

La direction dans laquelle est parcourue  $D(k)$  à partir de  $D(k, l)$  dépend du sens où la droite  $[c, k)$  tourne autour de  $k$ . Dans le sens choisit ici,  $[c, k)$  doit rencontrer le point  $i$  avant le point  $j$ , donc dans le D.D.P. on choisit la direction sur la droite  $D(k)$  dans laquelle le point  $D(i, k)$  est rencontré avant  $D(j, k)$ .

Dans la figure ci-dessous la première intersection rencontrée avec la droite  $D(k)$  en partant du point  $D(k, l)$  est celle avec la droite  $D(r)$ . Or  $D(i, j) \in D(l)^-$  et  $D(i, j) \in D(r)^+$ , donc  $D(r)$  ne vérifie pas les conditions. La seconde droite coupée par  $D(k)$  est la droite  $D(l')$  qui vérifie  $D(i, j) \in D(l')^-$ , donc  $l'$  est le point cherché.



**Figure 28 :** Représentation des adjacences dans le D.D.P. .

### Applications :

#### 1- Construction des facettes du convexe de mélange $K$ en temps optimal.

Une énumération systématique des configurations de deux, quatre et cinq points dans le P.D.P., ce fait en  $O(p^5)$  et donne l'ensemble des facettes de  $K$ . Mais le coût de calcul de l'inéquation correspondant à une facette est de

- $O(1)$  pour la normale,
- $O(p)$  pour la fonction support (nécessite de connaître un point de la facette),

d'où un coût total en  $O(p^6)$ .

Ce coût est dû aux configurations de cinq points. Mais si on utilise les relations adjacences entre ces facettes, on peut calculer la fonction support d'une facette avec un coût constant si on connaît la facette voisine. Cela nécessite un prétraitement qui consiste à calculer de l'arrangement des droites  $D(1), \dots, D(p)$  avec un coût en  $O(p^2)$ , d'où le coût total en  $O(p^5)$ .

#### 2- Coupes du convexe $K$ par un plan.

La connaissance de toutes les adjacences entre facettes (dont nous avons seulement décrit un exemple) à partir du P.D.P. et du D.D.P. peut permettre la construction de coupes de  $K$  par des plans en utilisant la méthode de suivi d'intersection, et cela sans construire toutes les facettes du polytope  $K$ .

Le problème se pose de déterminer une première facette intersectée par le plan de

coupe avec un coût de calcul faible (i.e. très inférieur au nombre total de facettes). On peut estimer ce coût dans le cas de plans de coupe particuliers, liés à la fabrication des mélanges.

Soient deux mélanges  $M_1$  et  $M_2 \in \mathbb{R}^p$ . Le plan dans  $\mathbb{R}^p$  défini par les vecteurs  $(M_1, 0)$  et  $(0, M_2)$  contient, par définition, l'origine. Or les faces  $F_i$  ayant 0 comme sommet sont les facettes du cas A associées aux couples de vecteurs  $N_i, N_j$  tels que :

$$\text{Pos}(N_i, N_j) \text{ est sur la frontière de } \text{Pos}(\{N_k\}_{k \in \mathbb{N}}).$$

On compte au plus  $3p$  de ces facettes (dans le cas de la sélectivité régulière).

Dans ce cas, le suivi d'intersection peut être initialisé avec un coût de  $O(p)$ . Puis le coût du suivi d'intersection est proportionnel au nombre de facettes intersectées par le plan de coupe, plus le nombre de sous-faces (4-faces) qui les bordent.





## Chapitre IV

# Décomposition

### Introduction

Le calcul des sommes de Minkowski mène naturellement à l'étude de la décomposition d'un convexe en somme de convexes plus simples et également à l'étude des sommandes de  $A$ , c'est à dire des ensembles  $C$  tels qu'il existe  $B$  vérifiant  $A = B + C$ . Ce problème a été étudié surtout de façon théorique.

Le chapitre commence par une présentation des résultats sur la décomposition des polytopes. La notion d'indécomposabilité a été introduite par D. Gale, dans [Gal54] où il énumère un certain nombre de convexes indécomposables. Puis G.C. Shephard (cf. [She63]) donne une caractérisation des sommandes qui fait intervenir la notion de faisceaux de normales. Deux problèmes sont repris par plusieurs auteurs : l'énoncé de conditions nécessaires et suffisantes de décomposabilité ou d'indécomposabilité, et la décomposition en sommandes indécomposables.

En dimension 2, le problème de la décomposabilité a une solution simple : dans le plan tous les convexes sont décomposables excepté le triangle et le segment. Ceci permet d'établir une méthode et un algorithme de décomposition d'un polygone convexe et il apparaît que cette décomposition n'est pas unique (en général).

Dans la suite, étant donné un ensemble  $A$  et un sommande  $C$ , on cherche à déterminer  $B$  vérifiant  $A = B + C$ . On constate que  $B$  n'est pas unique, mais on peut obtenir une expression générale du plus grand ensemble  $B$  tel que  $B + C \subseteq A$ . Dans le cas de convexe compact l'expression est affinée en utilisant les points extrémaux.

Des algorithmes sont proposés dans le cas des polygones et des polyèdres soit pour déterminer  $B$ , soit pour déterminer si  $C$  est un sommande de  $A$ .

## 1. Définitions et principaux résultats sur la décomposition de polytopes

**Définition 1 :** Soit  $A$  un ensemble convexe dans  $\mathbb{R}^n$ , une *décomposition de Minkowski* de  $A$  est une paire d'ensembles convexes  $B$  et  $C$  dans  $\mathbb{R}^n$  telle que

$$A = B + C .$$

Les ensembles  $B$  et  $C$  sont appelés *sommandes* de  $A$ .

On remarque que tout convexe est trivialement décomposable sous la forme

$$A = (\lambda A + x) + ((1 - \lambda) A - x),$$

où  $\lambda \in [0, 1]$ . Ainsi on s'intéressera aux sommandes non homothétiques à  $A$ .

**Définition 2 :** Un ensemble  $A$  est dit *décomposable* s'il admet un sommande non homothétique à lui même.

Le principal problème traité, par les différents auteurs, est de déterminer les classes de convexes décomposables et indécomposables; et aussi celui de la caractérisation des sommandes.

D. Gale s'est intéressé à déterminer quelles classes de convexes étaient décomposables, ses résultats sont apparus sous forme de résumé dans [Gal54], mais les démonstrations n'ont jamais été publiées.

Il cite pour les ensembles convexes décomposables :

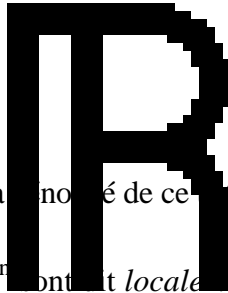
- les ensembles suffisamment lisses (par exemple les ensembles dont la frontière est deux fois différentiable),
- les ensembles de dimension deux, excepté les triangles,
- les polytopes simples (i.e. chaque sommet est commun à exactement  $n$  facettes), excepté les simplexes.

puis pour les indécomposables :

- les simplexes,
- raccord ("join") d'un point avec un ensemble de dimension inférieure à  $n$  (i.e. enveloppe convexe du point et de l'ensemble),
- octaèdre, icosaèdre.

- *Les sommandes*

Un résultat important est la caractérisation des sommandes donnée par G.C. Shephard (cf. théorème (4) [She63], où ci-dessous théorème 1). Cette caractérisation permet à l'auteur de dégager des conditions suffisantes pour qu'un polytope soit



indécomposable ou décomposable.

Quelques remarques préalables sont nécessaires à l'énoncé de ce théorème.

**Définition 3** [She63] : Deux polytopes  $P$  et  $Q$  de dimension  $n$  sont *localement similaires* si

$$\dim F(P,u) = \dim F(Q,u), \text{ pour tout } u \neq 0. \tag{1}$$

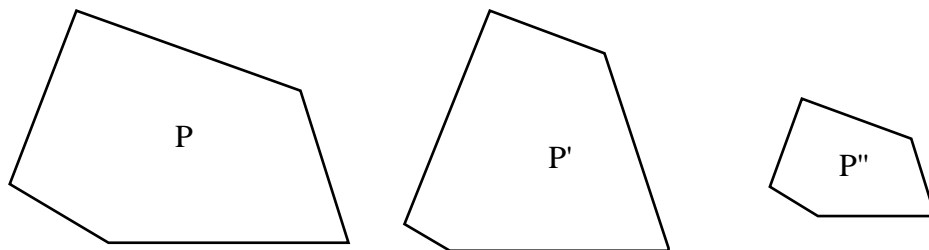
On remarque que si  $P$  et  $Q$  sont localement similaires alors ils ont le même faisceau de normales.

Si  $P$  et  $Q$  sont localement similaires, ils ont le même nombre de  $k$ -faces et en particuliers de sommets. Soient  $p_1, \dots, p_{f_0}$  les sommets de  $P$  et  $q_1, \dots, q_{f_0}$  les sommets correspondants de  $Q$  (où  $f_0 = f_0(P)$  désigne le nombre de sommets de  $P$ ).

A chaque arête de  $P$  d'extrémités  $p_i$  et  $p_j$  correspond une arête de  $Q$  d'extrémités  $q_i$  et  $q_j$ , ces deux arêtes sont parallèles et on a :

$$p_i - p_j = \lambda(q_i - q_j), \tag{2}$$

où le scalaire  $\lambda > 0$  dépend de l'arête considérée.



$P, P'$  et  $P''$  sont localement similaires,  $P$  et  $P''$  sont homothétiques.

**Figure 1** : Polygones localement similaires.

Si, à la place de (1) on impose la condition

$$\dim F(P,u) \geq \dim F(Q,u), \text{ pour tout } u \neq 0 \tag{3}$$

à chaque sommet de  $P$  correspond un sommet de  $Q$ , mais la réciproque n'est pas vraie car à plusieurs sommets de  $P$  peut correspondre le même sommet de  $Q$ , ainsi les  $q_1, \dots, q_{f_0}$  ne sont pas forcément distincts.

**Définition 4** : On note  $P \geq Q$ , si les polytopes  $P$  et  $Q$  vérifient (3) et la relation (2) pour chaque arête de  $P$  avec  $0 \leq \lambda \leq 1$  et  $\lambda$  prenant la valeur zéro quand  $q_i$  et  $q_j$  coïncident.

**Théorème 1** [She63] : Si  $P$  et  $Q$  sont des polytopes convexes, alors  $Q$  est un sommande de  $P$  si et seulement si  $P \geq Q$ .

Par la suite, d'autres auteurs considèrent uniquement la condition (3) sans les contraintes de taille sur les arêtes de  $Q$  et  $P$ . Cette condition est équivalente à la propriété :

$Q$  est homothétique à un sommande de  $P$ .

On notera  $Q \leq_H P$  cette relation.

Meyer donne deux autres conditions équivalentes dans [Mey74] (cf. théorème 2) :

**Propriété 1** : Si  $P$  et  $Q$  sont des polytopes convexes de dimension  $n \geq 2$ , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a)  $P \geq Q$  implique  $Q \leq_H P$ .
- (b)  $(F(P) \subseteq F(Q)) \implies (P \geq Q)$  pour tout  $u \in U$ . Et par conséquence  $(P) \geq_H (Q)$ .

Une autre propriété intéressante des sommandes est :

**Propriété 2** [Mey74] : Soient  $P$  un polytope de dimension  $n$  et  $U = \{u_1, \dots, u_{f_{n-1}}\}$  l'ensemble des normales extérieures aux facettes de  $P$ . Si  $Q$  est homothétique à un sommande de  $P$ , alors

$$Q = \{ x ; \langle x, u_i \rangle \leq h(Q, u_i) \quad i = 1, \dots, f_{n-1}(P) \}. \tag{4}$$

En effet d'après la condition (3), si  $Q$  admet une facette de normale extérieure  $v$ , alors  $P$  en admet une également, donc  $v$  est colinéaire à l'un des vecteurs  $u_i$ . Donc l'ensemble des normales aux facettes de  $Q$  est un sous ensemble de  $U$ , ainsi  $Q$  peut s'écrire sous la forme (4) (cf. Chapitre 1, remarque 3).

• *Décomposabilité*

Les résultats sur la décomposabilité portent essentiellement sur deux points, le premier consiste à donner des conditions suffisantes "simples" de décomposabilité et indécomposabilité (exemple [Gal54], [She63],...); le second point est la reformulation du problème de façon à obtenir des conditions nécessaires et suffisantes de décomposabilité d'un polytope et à établir une décomposition en sommandes indécomposables.

- *Conditions suffisantes*

Shephard donne une condition suffisante pour qu'un polytope soit indécomposable. Pour cela, il introduit la notion de chaîne de faces :

Une suite finie de faces  $\{F_1, \dots, F_s\}$  est appelée *chaîne de faces* si chaque face  $F_i$  est de dimension supérieure ou égale à 2 et les intersections  $F_i \cap F_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, s-1$ ) sont de dimension strictement supérieure à 0.

**Proposition 1** [She63] : Un polytope convexe  $P$  est indécomposable s'il existe une arête  $e^*$  à laquelle chaque sommet est connecté par une chaîne de faces indécomposables.

Par conséquent, on a :

**Corollaire 1** [She63] : Si toutes les 2-faces d'un polytope  $P$  convexe sont des triangles alors  $P$  est indécomposable.

**Définition 5** : Soit  $P$  un polytope de dimension  $n$ . Un sommet de  $P$  est dit *simple* s'il est contenu dans exactement  $n$  facettes de  $P$ . Le polytope  $P$  est *simple* si tous ses sommets sont simples.

**Définition 6** : Un polytope est *simplicial* si toutes ses faces sont des simplexes.

Une condition suffisante pour qu'un polytope soit décomposable est donnée par :

**Proposition 2** [She63] : Soit  $P$  un polytope. Si  $P$  admet une facette  $F$  en position générale (i.e. dont tous les sommets sont simples) et s'il existe au moins deux sommets de  $P$  n'appartenant pas à  $F$ , alors  $P$  est décomposable.

En conséquence des propositions 1 et 2, les polytopes simpliciaux sont indécomposables et les polytopes simples (excepté les simplexes) sont décomposables.

- *Décomposition en sommandes indécomposables*

Un problème abordé dans les différents articles est celui de la décomposition d'un polytope en sommandes indécomposables (cf. [Mey74], [McM73], [S

Notons  $\mathbf{U} = \{u_1, \dots, u_{f_{n-1}}\}$  l'ensemble des normales extérieures aux faces de  $P$ . Les auteurs abordent le problème en se plaçant dans la famille  $(\mathbf{U})$  de polytopes (pas forcément de dimension  $n$ ) obtenus par l'intersection de demi-espaces fermés de normales extérieures  $u_1, \dots, u_{f_{n-1}}$ . Nous donnons, ici, un aperçu des techniques utilisées



et des principaux résultats, mais pour plus de détails il faut se référer aux articles correspondants.

- *Résultats de W. Meyer :*

En premier lieu, W. Meyer (cf. [Mey74]) associe au polytope  $P$  un système d'égalités et d'inégalités homogènes. Les inconnues sont les valeurs  $\eta_i = h(Q, u_i)$  de la fonction support dans les directions  $u_i$  (voir propriété 2); les équations et inéquations traduisent pour chaque sommet de  $P$  la condition (a) de la propriété 1 (équivalente à (3)), de la façon suivante :

Chaque sommet est incident à au moins  $n$  facettes. On appelle ensemble d'indices pour un sommet  $s$  de  $P$ , les sous ensembles de  $n+1$  indices  $i_1, \dots, i_n, i_{n+1}$ , tels que les indices  $i_1, \dots, i_n$  correspondent à des facettes de  $P$  contenant le sommet  $s$  ( $i_{n+1}$  étant quelconque).

On a donc pour  $k = 1, \dots, n$   $\langle s, u_{i_k} \rangle = h(P, u_{i_k})$ .

Et puisque  $s$  appartient à  $P$ , alors  $u_{i_{n+1}}$  vérifie

(i) soit  $\langle s, u_{i_{n+1}} \rangle = h(P, u_{i_{n+1}})$ ,

(ii) soit  $\langle s, u_{i_{n+1}} \rangle < h(P, u_{i_{n+1}})$ .

Les  $n+1$  vecteurs  $u_{i_k}$  sont linéairement dépendants, donc il existe des scalaires  $\alpha_i$  tels que  $\sum_{k=1, \dots, n+1} \alpha_k u_{i_k} = 0$ .

Si  $u_{i_{n+1}}$  vérifie (i), on pose l'équation :

$$\sum_{k=1, \dots, n+1} \alpha_k \eta_{i_k} = 0, \tag{5}$$

et s'il vérifie (ii), on pose l'inéquation :

$$\sum_{k=1, \dots, n+1} \alpha_k \eta_{i_k} > 0. \tag{6}$$

Les solutions  $(\eta_1, \dots, \eta_{f_{n-1}})$  de ce système sont les valeurs des fonctions supports dans les directions  $u_i$ , elles définissent des polyèdres homothétiques à des sommandes de  $P$ . L'ensemble des solutions est un cône de dimension  $k$  dont les rayons extrêmes représentent les sommandes indécomposables. Si ce cône est de dimension 1, alors  $P$  est indécomposable. La dimension  $k$  du cône est donnée par la formule :

$$k = f_{n-1} - n - \text{rang du système d'équations (5)}.$$

Si  $k > 1$ , alors  $P$  est décomposable et peut s'écrire comme la somme de au plus  $k$  polyèdres indécomposables. Dans le cas où  $P$  est simple, le système ne comporte pas d'équations d'où  $k = f_{n-1} - n$  et on retrouve la propriété que tout polytope simple est décomposable car  $f_{n-1} - n > 1$  (excepté le simplexe car dans ce cas  $f_{n-1} - n = 1$ ).

Une partie de l'article de D.M. Mount et S. Sierman [Mou&Sil91] concerne l'analyse de la complexité de cette méthode pour les polyèdres de dimension 3. Les auteurs énoncent le résultat suivant :

**Théorème 2 :** Soit  $P$  un polytope de dimension  $n$  avec  $N$  faces.

- La décomposabilité de  $P$  peut être déterminée en temps  $O(N^3)$ , par le calcul du rang d'une matrice de dimension  $O(N)$ .
- Une décomposition de  $P$  en au plus  $N$  polytopes indécomposables peut être calculée en temps  $O(N^{5.5})$  par au plus  $N$  résolutions de problèmes de programmation linéaire de  $O(N^2)$  inégalités et  $N$  contraintes.

*- Résultats de McMullen*

Par ailleurs McMullen [McM73] résout ce problème en utilisant une représentation de la famille des polyèdres dans un espace de dimension  $f_{n-1}-n$ . Cette représentation est définie à partir des dépendances linéaires des normales extérieures aux faces de  $P$ . Une dépendance linéaire de  $U$  est un vecteur  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{f_{n-1}})$  de  $\mathbb{R}^{f_{n-1}}$  tel que

$$\sum_{i=1, \dots, f_{n-1}} \alpha_i u_i = 0. \tag{7}$$

Les dépendances linéaires forment un sous espace  $L(U)$  de  $\mathbb{R}^{f_{n-1}}$  de dimension  $f_{n-1}-n$ . Si  $(\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{f_{n-1}j})_{j=1, \dots, f_{n-1}-n}$  forme une base de  $L(U)$ , on pose

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{f_{n-1},1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{1,f_{n-1}-n} & \dots & \alpha_{f_{n-1},f_{n-1}-n} \end{pmatrix}.$$

Soit  $\bar{u}_i$  un vecteur de  $\mathbb{R}^{f_{n-1}}$  qui minimise la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $\alpha$  :  $\bar{u}_i = (\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{f_{n-1}i})$ ,  $i = 1, \dots, f_{n-1}-n$ .

L'ensemble de vecteurs  $U = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{f_{n-1}-n}\}$  est appelé *représentation linéaire* de  $U$ . Si  $\eta_i = h(P, u_i)$  pour  $i = 1, \dots, f_{n-1}$ , on appelle *représentation linéaire* de  $P$  associée à  $U$ , l'application  $\sigma$  de  $\mathbb{R}^{f_{n-1}}$  dans  $\mathbb{R}^n$  définie par

$$\sigma(P) = \sum_{i=1, \dots, f_{n-1}} \eta_i \bar{u}_i.$$

Cette représentation a la propriété d'associer à tout polytope  $P$  et à tous ses translatés une unique représentation : le point  $\sigma(P)$  est l'image de tout ensemble polyédrique  $P$  (non vide) de  $\mathbb{R}^n$  par l'application  $\sigma$  appartient à la région de Pos  $\bar{U}$  (the close inner region of Pos  $\bar{U}$ ) définie par :

$$\text{clir } \bar{U} = \cap \{ \text{Pos}(\bar{U} \setminus \{\bar{u}_j\}) ; j = 1, \dots, f_{n-1} \}.$$

La région clivable est partitionnée en cônes relativement ouverts (de sommet 0), appelés *cônes type*, chacun correspondant aux différents types combinatoires de la famille  $(U)$ . La dimension du *cône type* contenant  $\sigma(P)$  détermine, comme dans [Mey74], la décomposabilité de  $P$  et le nombre de polytopes indécomposables permettant d'obtenir une décomposition de  $P$ . Et de même que dans [Mey74], on conclut à la décomposabilité des polytopes simples.

- *Résultats de Z. Smilansky :*

Plus tard, Z. Smilansky [Smi87] utilise les dépendances affines de  $U$  et de sous-ensembles de  $U$  pour déterminer si un polytope  $P$  est décomposable. Rappelons qu'une dépendance affine de  $U$  est une dépendance linéaire  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{f_{n-1}})$  qui vérifie la condition supplémentaire :  $\sum_{i=1, \dots, f_{n-1}} \alpha_i = 0$ . Par cette approche, l'auteur redémontre les propositions 1 et 2 énoncées par Shephard, ainsi que de nouvelles conditions suffisantes de décomposabilité. Les plus originales sont des conditions purement combinatoires sur le polytope  $P$ . Par exemple, pour les polyèdres (polytopes de dimension 3) on a le théorème suivant :

**Théorème 3** [Smi87] : Soit  $v$  et  $f$  des entiers,  $\frac{1}{2} v + 2 \leq f \leq 2 v - 4$ .

- (a) Si  $f < v$ , alors tout polyèdre avec  $v$  sommets et  $f$  facettes est décomposable.
- (b) Si  $v \leq f \leq 2 v - 7$ , alors il existe des polyèdres  $P$  et  $Q$  ayant chacun  $v$  sommets et  $f$  facettes tels que  $P$  est décomposable et  $Q$  est indécomposable.
- (c) Si  $2 v - 6 \leq f \leq 2 v - 4$ , alors tout polyèdre avec  $v$  sommets et  $f$  facettes est indécomposable.

Et plus généralement, pour des polytopes de dimension  $n$ , Z. Smilanski énonce le théorème suivant :

**Théorème 4** : Soit  $P$  un polytope de dimension  $n$ . Pour chaque sommet  $v$  de  $P$ , notons  $F(v)$  le nombre de facettes de  $P$  contenant  $v$ . Si

$$\sum_{v \in \sigma_0(P)} F(v) < n \cdot f_0(P) < f_{n-1}(P) - n,$$

alors  $P$  est décomposable.

D'autres auteurs (cf. [Sal71] et [Sil73]) ont abordé le problème de la décomposition par l'étude de la fonction support d'un ensemble convexe. R. Silverman donne une démonstration de la propriété énoncée par D. Gale [Gal54] : *Dans le plan les seuls*

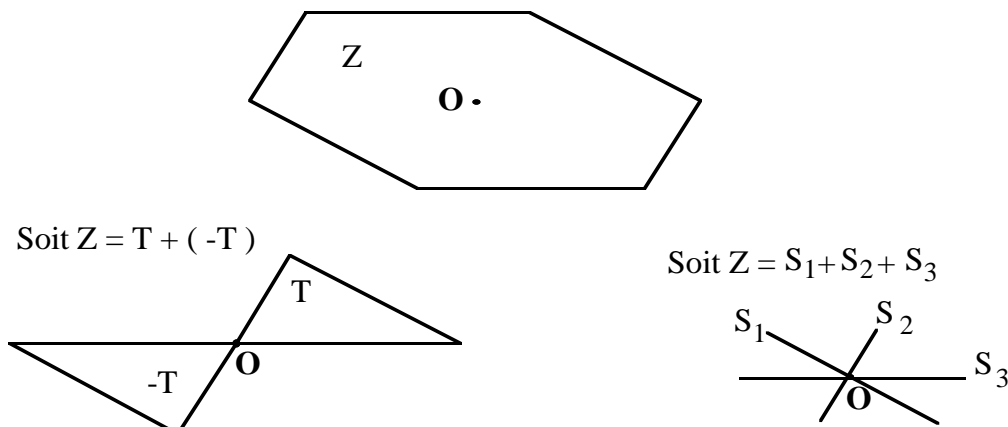


ensembles convexes indécomposables sont les triangles et les segments. G.T. Sallee étudie la décomposition de convexes généraux, c'est à dire dont la frontière peut être lisse.

## 2. Décomposition d'un polygone convexe en somme de segments et de triangles

Le cas des polygones est particulier, car tout polygone convexe  $P$  est simple, donc décomposable (sauf le triangle). En appliquant le résultat de W.Meyer ou de P.McMullen, on obtient que  $P$  peut s'écrire comme la somme de au plus  $f_1(P) - 2$  polygones indécomposables.

**Remarque :** On observe qu'une décomposition en polygones indécomposables n'est pas unique en général (figure 2).



**Figure 2 :** Deux décompositions de  $Z$ .

D'après ce qui précède, on sait que tout polygone peut s'écrire sous la forme d'une somme de triangles et de segments.

Cette propriété permet d'établir une méthode pour décomposer les polygones en sommandes indécomposables. Elle consiste à construire des sommandes du polygone  $P$  à partir de son faisceau de normales, et de les retrancher à  $P$  au fur et à mesure. On cherche dans un premier temps les sommandes de type segment, puis les sommandes de type triangle. Et à chaque étape, la soustraction d'un sommande supprime au moins un côté du polygone, donc la décomposition de  $P$  sera réalisée en au plus  $f_1(P) - 2$  étapes (où  $f_1(P)$  est le nombre d'arêtes de  $P$ ).

Pour construire un triangle  $T$  sommande de  $P$ , il suffit de choisir trois arêtes de  $P$  telles que leurs normales extérieures engendrent le plan par des combinaisons linéaires positives.

La représentation de  $P$  est telle que l'on peut choisir trois arêtes de  $P$  vérifiant ces conditions en temps constant.

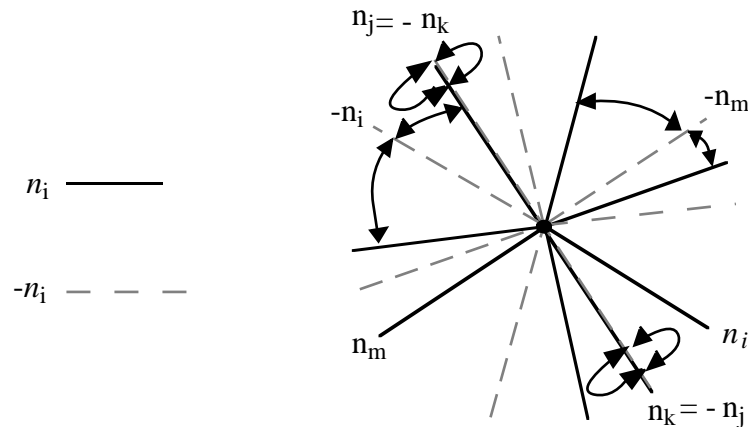
Elle est constituée de :

- la liste ordonnée des arêtes de  $P$ :  $e_i$ .

Et chaque arête  $e_i$  est représentée par :

- la normale  $n_i$  à  $e_i$  extérieure à  $P$ ,
- la longueur  $l_i$  de l'arête  $e_i$ ,

et deux pointeurs sur deux arêtes  $e_j$  et  $e_k$  choisies telles  $n_j$  précède  $-n_i$  dans l'ordre trigonométrique et  $n_k$  lui succède. Ainsi les vecteurs  $n_i$ ,  $n_j$  et  $n_k$  engendrent positivement le plan.



**Figure 3** : Représentation de  $P$ .

1- Identifier les éventuels segments sommandes.

- En construisant la représentation de  $P$ . On retiendra les paires de normales  $(n_j, n_k)$  de directions opposées ( $n_j = -n_k$ ).
- Calculer les segments sommandes correspondants.
- Soustraire les segments et mise à jour de la représentation de  $P$ . (\*)

2- Construire les triangles sommandes.

**Tant que** le nombre d'arête de  $P > 3$

- Prendre une arête  $e_i$  ainsi que les deux arêtes  $e_j$  et  $e_k$  qui lui sont associées dans la structure.
- Calculer le triangle sommande : le plus grand triangle de normales  $n_i$ ,  $n_j$  et  $n_k$  de côtés  $l_i$ ,  $l_j$  et  $l_k$  vérifiant :  
 $|l_i| \leq |e_i|$ ,  $|l_j| \leq |e_j|$  et  $|l_k| \leq |e_k|$ , où au moins une égalité est réalisée.
- Soustraire le triangle à  $P$  et mise à jour de la représentation de  $P$ .(\*)

**fin tant que**

(\*) Au moins une arête de  $P$  est supprimée. Soit  $e_j$  cette arête, il faut mettre à jour les arêtes qui pointaient sur  $e_j$  (pour former un triangle). Elles doivent pointer sur l'arête précédente ou suivante de  $e_j$ .

Par cette méthode, on obtient une décomposition de  $P$  en sommandes indécomposables avec un temps de calcul en  $O(f_1(P))$ .

En effet, à chaque étape, on supprime complètement un côté du polygone. Donc on obtient une décomposition de  $P$  en sommandes indécomposables en au plus  $f_1(P) - 2$  étapes. Chaque étape à un coût constant (par rapport à  $f_1(P)$ ), et la représentation de  $P$  est obtenue en  $O(f_1(P))$  si l'ordre des arêtes de  $P$  est connu.

### 3. "Soustraction" de Minkowski de deux ensembles

Le but de ce paragraphe est de donner une expression d'un sommande de tel que  $B + C = A$ , en fonction de  $A$  et de  $C$ .

**Propriété 3 :** Soient  $A$  et  $C$  deux ensembles de points quelconques de aucune hypothèse

Alors  $\tilde{B}$  est le plus grand ensemble de points tel que  $\tilde{B} + C \subseteq A$ .

**preuve :** En effet le plus grand ensemble  $S$  de points tel que  $S + C \subseteq A$ , s'écrit

$$\begin{aligned} S &= \{b \in \mathbb{R}^2 \mid b + c \in A\} = \bigcap_{c \in C} \{b \in \mathbb{R}^2 \mid b + c \in A\} \\ &= \{b \in \mathbb{R}^2 \mid \forall c \in C, b \in A - c\}, \end{aligned}$$

d'où  $S = \bigcap_{c \in C} A - c$ .

**Exemple :**

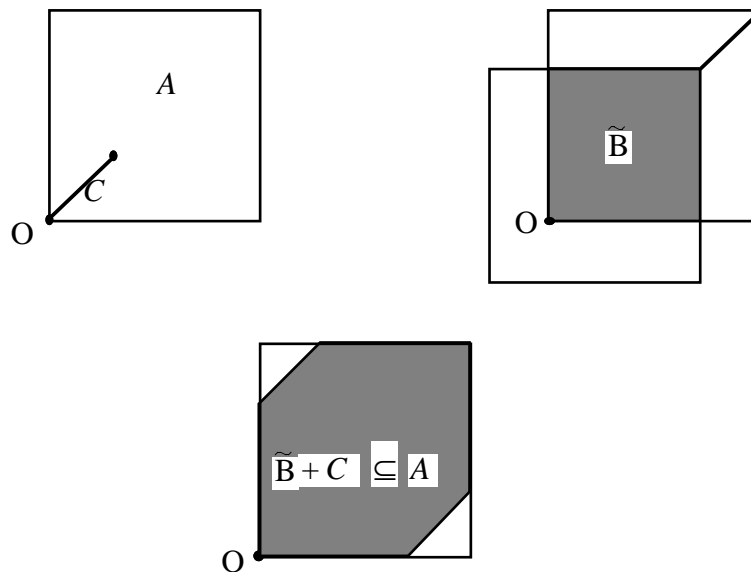


Figure 4 :  $\tilde{B}$ .

**Remarque :** On peut voir  $\tilde{B}$  comme l'ensemble des translations admettant  $C$  dans  $A$ . Cet ensemble a été considéré dans le problème de Minkowski pour les polygones et de polyèdres.

**Propriété 4 :** Soient  $A$  un ensemble de points de  $\mathbb{R}^n$  et  $C$  un sommande de  $A$ , alors l'ensemble  $\tilde{B}$  défini ci-dessus est le plus grand sommande de  $A$  (au sens de l'inclusion) tel que  $\tilde{B} + C = A$ .

**preuve :** Soit  $B$  un sommande de  $A$ , alors  $B + C \subseteq A$ . Soit  $B$  un ensemble  $B$  (sommande de  $A$ ) de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $B + C = A$ .  
 Tout  $b \in B$ , vérifie  $b + C \subseteq A$ , et ainsi  $b \in \tilde{B}$ . Donc l'inclusion de  $B$  dans  $\tilde{B}$ .  
 Donc

$$B + C \subseteq \tilde{B} + C$$

$$\text{or } B + C = A \text{ et } \tilde{B} + C \subseteq A.$$

D'où  $B + C = \tilde{B} + C = A$ .

L'hypothèse  $C$  sommande de  $A$  ne donne pas l'unicité de l'ensemble  $B$  tel que  $B + C = A$ , en voici quelques exemples :

- Soient  $A = ] 0,2[$  et  $C = ] 0,1[$ .  
 Les ensembles  $B_1 = ]0,1[$  et  $B_2 = [0,1[$  vérifient  $C + B_i = A$ .
- Avec des ensembles non bornés :  
 Soient  $A = [0, +\infty[$  et  $C = [0, +\infty[$ .  
 Tous les ensembles  $B = [0, a]$  où  $a \geq 0$ , vérifient  $C + B = A$ .
- Si on ne se restreint pas aux sommandes  $B$  convexes :  
 Soient  $A = [0,2]$  et  $C = [0,1]$ .  
 Les ensembles  $B_1 = [0,1]$  et  $B_2 = \{0,1\}$  vérifient  $C + B_1 = C + B_2 = A$ .

**Propriété 5 :** Soient  $A$  et  $C$  deux ensembles de points de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $A$  un ensemble convexe, fermé et  $C$  est un sommande de  $A$  compact et non forcément convexe.

Alors l'unique convexe  $B$  vérifiant  $B + C = A$  est donné par

$$B = \tilde{B} = \bigcap_{c \in C} A - c .$$

**preuve :** D'après la propriété 4,  $\tilde{B}$  est le plus grand sommande de  $A$ , tel que  $\tilde{B} + C = A$ . Supposons qu'il existe un autre sommande convexe  $B$  de  $A$  avec  $B + C = A$ ,

alors

$$B \subset \tilde{B} \text{ et } B \neq \tilde{B}.$$

Donc il existe un point  $p \in \tilde{B}$  tel que  $p \notin B$ .

Les ensembles  $\{p\}$  et  $B$  sont convexes, non vides, disjoints, de plus  $B$  est fermé et  $\{p\}$  est compact. On peut donc appliquer le théorème d'Hahn Banach à ces deux ensembles. Ce qui donne l'existence d'un hyperplan  $H$  qui sépare strictement  $\{p\}$  et  $B$ .

C'est à dire, si  $H$  a pour équation  $\langle x, v \rangle = \alpha$ , alors on a

$$\forall x \in B, \langle x, v \rangle < \alpha < \langle p, v \rangle$$

D'où

$$h(B, v) = \sup_{x \in B} \langle x, v \rangle \leq \alpha < \langle p, v \rangle \leq \sup_{x \in \tilde{B}} \langle x, v \rangle = h(\tilde{B}, v)$$

qui donne l'inégalité stricte

$$h(B, v) < h(\tilde{B}, v). \tag{9}$$

Or pour tout  $B$  et  $C$  tels que  $B+C=A$ , on a

$$h(A, u) = h(B, u) + h(C, u) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

De plus, on remarque que dans la direction  $v$  la fonction support de  $A$  :  $h(A, v)$  est forcément bornée, car sinon on aurait :

$$h(A, v) = h(B, v) + h(C, v) = +\infty,$$

avec  $h(C, v)$  bornée d'où  $h(B, v) = +\infty$ , ce qui est en contradiction avec

$$h(B, v) < \alpha < \langle p, v \rangle.$$

Donc

$$h(A, v) = h(B, v) + h(C, v) = h(\tilde{B}, v) + h(C, v)$$

est en contradiction avec (9).

**Définition 7 :** Soit  $C$  un convexe fermé de  $\mathbb{R}^n$ . Alors un point  $x \in C$  est dit *extrémal* de  $C$ , s'il n'existe pas de segment non dégénéré dans  $C$ , qui contienne  $x$  dans son intérieur relatif (ceci est équivalent à l'ensemble  $\{x\}$  est convexe).

On note  $\text{Ext}(C)$ , l'ensemble des points extrémaux de  $C$ .

**Théorème 5 (Krein-Milman) :** Soit  $S \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble convexe compact. Alors  $S$  coïncide avec l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

**Théorème (Carathéodory) :** Soit  $S$  un ensemble de points quelconques de  $\mathbb{R}^d$ , alors  $x \in \text{Conv}(S)$  si et seulement si  $x$  peut s'écrire comme combinaison convexe de  $n+1$  points de  $S$ .

Ainsi, si  $S$  est un ensemble convexe compact, alors  $S = \text{Conv}(S)$  et tout  $x \in S$  peut s'écrire comme combinaison convexe de  $n+1$  points extrémaux de  $S$ .

**Propriété 6 :** Soient  $A$  un ensemble convexe compact de  $\mathbb{R}^d$  et  $C$  un sous-ensemble fermé (compact) de  $A$ , alors l'unique sommande  $B$  de  $A$  vérifiant  $B + C = A$ , s'écrit :

$$B = \bigcap_{c \in \text{Ext}(C)} A - c.$$

**preuve :** Posons  $P = \bigcap_{c \in \text{Ext}(C)} A - c$  et montrons  $P = \tilde{B}$ .

- $\tilde{B} \subset P$  : évident.
- $P \subset \tilde{B}$  : Soit  $x \in P$ , il existe  $\lambda_s \geq 0$  et  $s \in \text{Ext}(C)$  tels que  $x = \sum_{s \in \text{Ext}(C)} \lambda_s s$ .  
 Tout  $c \in C$  s'écrit comme combinaison convexe de points extrémaux de  $C$  (Carathéodory & Krein-Milman).  
 Pour tout  $c \in C$ , on a  $x + c = \sum_{s \in \text{Ext}(C)} (\lambda_s + \delta_{s,c}) s$  et  $x + c \in A$ .  
 Or  $x \in P$ , il existe  $\lambda_s \geq 0$  et  $s \in \text{Ext}(C)$  tels que  $x = \sum_{s \in \text{Ext}(C)} \lambda_s s$  combinaison convexe de ces  $n+1$  points  $s$ . Les coefficients  $\lambda_s$  dans ci-dessus on obtient :

$$\sum_{s \in \text{Ext}(C)} (\lambda_s + \delta_{s,c}) s = x + c \in A \text{ pour } c \in C.$$

D'où  $x \in \tilde{B}$ .

Ainsi  $\bigcap_{s \in \text{Ext}(C)} A - s = \tilde{B}$  et d'après la propriété 5 cet ensemble  $\tilde{B}$  est l'unique sommande de  $A$  tel que  $\tilde{B} + C = A$ .

Dans le cas où  $A$  est un polyèdre, alors  $\tilde{B}$  est l'intersection d'un nombre fini de polyèdres. On a le résultat suivant :

**Corollaire 2 :** Soient  $A$  un polyèdre et  $C$  un polyèdre sommande de  $A$ , alors le convexe  $\tilde{B}$  vérifiant  $\tilde{B} + C = A$  s'écrit

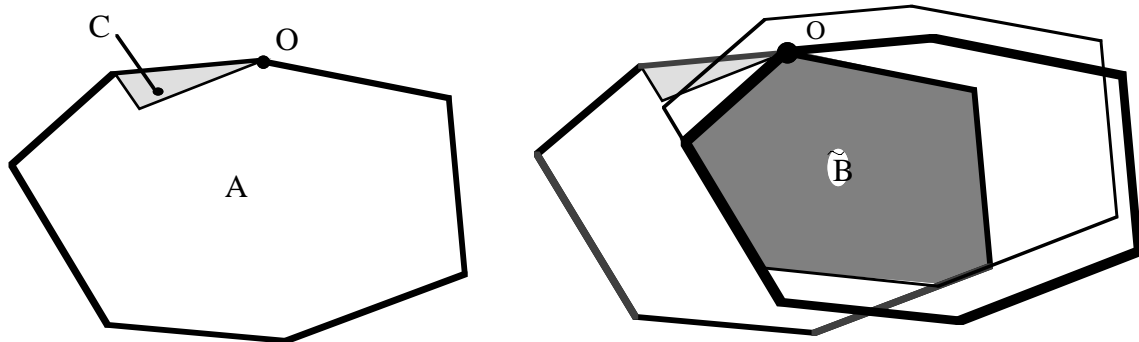
$$\tilde{B} = \bigcap_{c \in \text{Ext}(C)} A - c \tag{10}$$

comme l'intersection d'un nombre fini de translats de  $A$ .

On rappelle que  $\text{Ext}(C)$  est l'ensemble des sommets de  $C$ .

L'expression (10) est utilisée dans [Avn&Boi87].

**Exemple :**



**Figure 5 :**  $\tilde{B}$  intersection de translatsés de  $A$ ,  $\tilde{B} + C = A$ .

- Algorithme de calcul de  $\tilde{B}$  en dimension 2

A partir de l'expression (10), comment calculer de  $\tilde{B}$  le plus grand ensemble tel que  $\tilde{B} + C \subseteq A$ .

$\tilde{B}$  est l'intersection de translatsés d'un même polytope  $A$ . Donc les facettes de  $\tilde{B}$  sont parallèles à celles de  $A$ , et de ce fait l'ensemble  $U_{\tilde{B}}$  des normales (unitaires) aux facettes de  $\tilde{B}$  est inclus dans  $U_A$  celui des normales (unitaires) aux facettes  $A$ . Donc  $\tilde{B}$  est défini par

$$\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall u \in U_A, \langle x, u \rangle \leq h(\tilde{B}, u) \} \tag{11}.$$

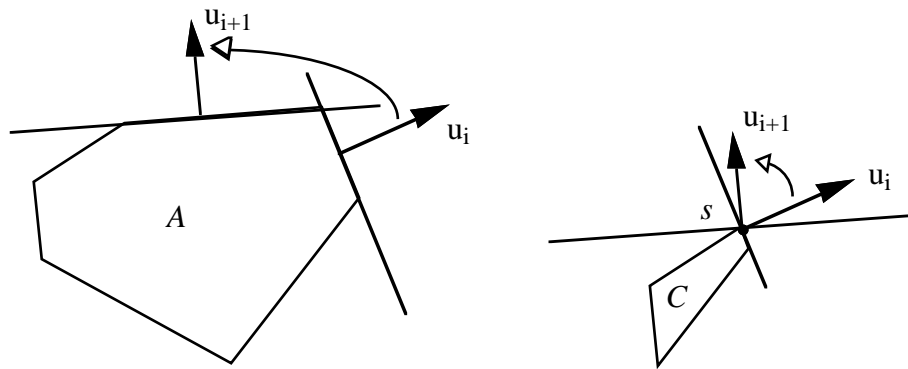
Or  $h(\tilde{B}, u) = h(\bigcap_{c \in V} A - c, u)$ , où  $V$  est l'ensemble des sommets de  $A$ .  
 $= \text{Min}_{c \in V} h(A - c, u) = h(A, u) - h(C, u)$ .

- Calcul des valeurs  $h(\tilde{B}, u)$  pour tout  $u \in U_A$  :

On commence par une facette de  $A$  de normale  $u_1 \in U_A$ . On cherche un sommet  $s$  de  $C$  vérifiant  $\langle s, u_1 \rangle = h(C, u_1)$  et on en déduit  $h(\tilde{B}, u_1)$ .

Puis on parcourt les facettes de  $A$  par leur graphe d'adjacences. Lorsqu'on passe d'une facette de  $A$  de normale  $u_i$  à une facette adjacente de normale  $u_{i+1}$ , on cherche le sommet  $s$  de  $C$  qui vérifie  $\langle s, u_{i+1} \rangle = h(C, u_{i+1})$ .

Pour des polygones  $A$  et  $C$  ayant respectivement  $n_A$  et  $n_C$  arêtes, on obtient les équations des plans d'appui de  $\tilde{B}$  dans les directions  $u \in U_A$  en temps  $O(n_A + n_C)$ .

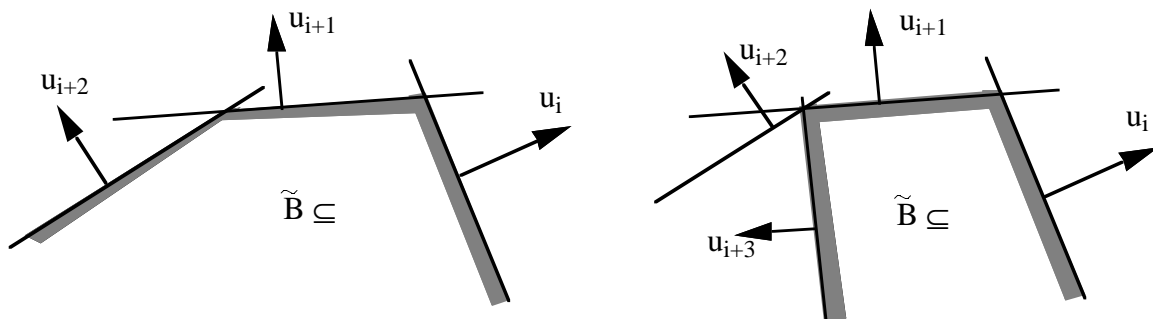


**Figure 6 :** Calcul de la fonction support de  $\tilde{B}$ .

- Calcul de  $\tilde{B}$  :

L'écriture de  $\tilde{B}$  sous la forme d'intersection de demi-espaces n'est pas forcément minimale et n'est pas structurée.

Dans le plan, on obtient le polygone  $\tilde{B}$  en construisant itérativement l'intersection des demi-plans. On ajoute les demi-plans dans l'ordre correspondant à celui des arêtes de  $A$  (voir figure 7).



**Figure 7 :** Calcul de la fonction support de  $\tilde{B}$ .

**Propriété 7 :** Soient  $A$  et  $C$  deux polygones convexes, ayant respectivement  $n_A$  et  $n_C$  arêtes, alors on peut calculer le convexe  $\tilde{B}$  en temps linéaire par rapport  $n_A + n_C$ .

**Conséquence :** On peut déterminer si  $C$  est sommable de  $A$  (et calculer  $B$  tel  $B+C=A$ , dans le cas où la réponse est positive) en  $O(n_A + n_C)$ .

En effet, à la suite du calcul de  $\tilde{B}$  on construit  $\tilde{B}+C$  et on vérifie si  $\tilde{B}+C = A$ . Pour des polygones convexes, le coût total est linéaire par rapport  $n_A + n_C$ .



D.M. Mount et R. Silverman traitent cette question pour les polyèdres. Ils énoncent le résultat suivant :

**Propriété** [Mou&Sil91] : Soient des polyèdres convexes  $A$  et  $C$ . On peut répondre aux questions suivantes en temps linéaire par rapport au nombre de facettes de  $A$ :

- (i) Si  $C \leq_H A$ .
- (ii) Si  $C \leq_H A$ , trouver le scalaire  $\alpha$  (maximum) tel que  $\alpha C$  soit un sommande de  $A$ .
- (iii) Si  $C$  est un sommande de  $A$ , alors trouver  $B$  tel que  $B + C = A$ .

**Remarque :** En dimension trois, la détermination de  $\tilde{B}$  comme intersection de demi-espaces se ferait de façon analogue (au cas des polygones) en  $O(n_A + n_C)$  par un parcours par adjacence des facettes de  $A$ . Le calcul de  $\tilde{B}$  se ferait alors en  $O(n_A \log n_A)$  si on n'exploite aucune information supplémentaire.



## Conclusion

Le travail de cette thèse nous a permis d'avancer sur les principes mathématiques et leurs implications algorithmiques relatifs au somme de Minkowski (de polytopes convexes).

Les sommes de triangles introduites au chapitre II sont des objets nouveaux, ils généralisent les zonoèdres et pourraient être étudiés en tant que tel. Certaines questions se posent encore concernant la complexité en dimension supérieure à 3. Ainsi il n'est pas prouvé qu'elle est en  $\Theta(p^{n-1})$ , pour des triangles en position générale.

Les algorithmes proposés ne sont pas spécifiques aux triangles, ils pourraient être adaptés à un cadre plus général, en particuliers ceux qui reposent sur les arrangements de faisceaux de demi hyperplans.

Cette généralisation des zonotopes pourrait s'étendre aux sommes de simplexes, voir aux sommes mixtes segments-triangles. Les méthodes de construction étudiées ici semblent pouvoir également s'adapter à ces objets.

En ce qui concerne le modèle des mélanges qui a servi de point de départ à cette thèse, la compréhension de la faisabilité de plusieurs mélanges se révèle très complexe, même pour des mélanges à seulement 3 composantes.

De nombreuses questions sont encore posées :

- les  $O(p^5)$  conditions linéaires sont t-elles effectivement nécessaires pour décider de la faisabilité de 2 mélanges ?
- peut on effectuer de façon simple le passage à plus de 2 mélanges?
- comment exploiter de façon pratique cette formulation géométrique pour obtenir une décomposition et l'optimiser ?
- quelle est la réelle signification mathématique de la sélectivité régulière?

Enfin, les procédés continus de fabrication d'un mélange font apparaître la limite (au sens de la métrique de Hausdorff) de sommes de segments, appelé zonoïde. Les études les concernant portent entre autre sur leur approximation par des sommes de segments ([BLM89],[Dao95]), ou encore sur l'étude de leur surface [DLSV94]. Que donnerait la généralisation continue des sommes de triangles?

Quant au problème de la décomposition de polytopes, des progrès sembleraient possibles sur l'aspect spécifique de la dimension trois par exemple. On pourrait considérer des sommes mixtes segments, triangles et simplexes pour approcher des objets convexes quelconques (c'est à dire pas forcément décomposables). Ceci permettrait de coder ces objets de façon plus économique.



**Références bibliographiques :**

- [Ale33] A. D. Alexandrov, "*A theorem on convex polyhedra*", Trudy Mat. Int. Steklov, Sect. Math., 4 (1933), 87 (in Russian) (Kraus Reprint Ltd., Vaduz, 1963).
- [Avn&Boi87] F. Avnaim and J.D. Boissonnat, "*Simultaneous containment of several polygons*", In Proc. 3rd Annu. ACM Sympos. Comput. Geom., p. 242-250, 1987.
- [Bar81] I. Barany, "*A vector-sum theorem and its application to improving flow shop guarantees*", Mathematics of operation research, vol. 6, n°3 august 1981.
- [Boi&Yvi95] J.D. Boissonnat & M. Yvinec, "*Géométrie algorithmique*", Ediscience International, collection informatique (1995).
- [Bol69] E.D. Bolker, "*A class of convex bodies*", Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969) p. 323-346.
- [Bon&Fen34] T. Bonnesen & W. Fenchel, "*Theorie der konvexen Körper*", Springer-Verlag OHG, Berlin, 1934.
- [BLM89] J. Bourgain, J. Lindenstrauss, V. Milman, "*Approximation of zonoids by zonotopes*" Acta Math., 162 (1989), p73-145.
- [Buc43] R.C. Buck, "*Partition of space*", Amer. Math. Monthly 50 (1943), 541-544.
- [Cox62] H.S. Coxeter, "*The classification of zonohedra by means of projective diagrams*", Journ. de Math, tome XLI., Fasc. 2, 1962.
- [Cra79] H. Crapo, "*Mathematical questions concerning zonohedral space-filling*", Structural Topology, 1979, n° 2, p. 53-69.
- [Dao95] O. Daoudi, "*Zonotopes et Zonoïdes : Etudes et Applications au Processus de la séparation*", Thèse à l'Université Joseph Fourier 1995.
- [DLSV94] O.Daoudi, B.Lacolle, N.Szafran & P.Valentin, "*Zonoidal Surfaces*", Curves and surfaces for Geometric Design. P.J.Laurent, A.Le Méhauté, L.L. Shumaker (eds), AK Peters, Wellesly, MA (1994).

- [Ede86] H. Edelsbrunner, "*Constructing arrangements of lines and hyperplanes with applications*", SIAM J. Comput., Vol. 15, No 2, May 1986, pp341-363.
- [Ede87] H. Edelsbrunner, "*Algorithms in Combinatorial Geometry*", EATCS Monographs in Theoretical Computer Science 10, Springer Verlag, Berlin 1987.
- [Eva&87] R.C. Evans, G. Koppelman & V.T. Tarjan, "*Shaping geometric objects by cumulative transaltion sweeps*", IBM J. res. develop., Vol. 31, n°3, May 1987.
- [Fed53] E.S. Fedorov, "*Nachala Ucheniya o Figurah*", Leningrad 1953.
- [Gal54] D. Gale, "*Irreducible convex sets*", Proc. Intern. Congr. Math., Amsterdam, 2 (1954), 217-218.
- [Gir86] D. Girard, "*Convexe résidu maximal et gestion de mélanges sur une plateforme*", Rapport de Recherche ELF-Aquitaine.
- [Gir&Val89] D. Girard & P. Valentin, "*Zonotopes and mixtures management*", International series of Numerical Mathematics, vol. 87, Birkhäuser Verlag (1989).
- [Gri&Stu91] P. Gritzmann and B. Sturmfels, "*Minkowski Addition of polytopes: Computational complexity and applications to Gröbner bases*", DIMACS Technical Report 90-8, February, 1990.
- [Gri&Stu93] P. Gritzmann and B. Sturmfels, "*Minkowski Addition of polytopes: Computational complexity and applications to Gröbner bases*", SIAM J. Disc. Math., Vol 6, No 2, pp 246-269, May 1993.
- [Gro78] H. Groemer, "*On multiple space subdivisions by zonotpes*", Monatsh. Math. 1978, vol.86, n°3, p. 185-188.
- [Grü67] B. Grünbaum, "*Convex Polytopes*", Pure and applied Math., vol 16, Interscience, New York 1967.
- [Gui&Sei87] L.J.Guibas and R.Seidel, "*Computing Convolutions by Reciprocal Search*", Discrete & Comput. Geometry 2, 175-193 (1987).

- [Han80] A. Hanegraaf, "*Twenty questions on zonogons, zonohedra and zonooids*", Structural Topology, 1980, n°4, p. 31-40.
- [Hil81] W. Hildenbrand, "*Short-Run Production based on Microdata*", Econometrica, vol. 49, n°5 (1981), p. 1095-1125.
- [Hil&Ney82] W. Hildenbrand and A. Neyman, "*Integrals of production sets with restricted substitutions*", J. Math. Economics, 9 (1982) 71-82.
- [Iwa91] K. Iwano, "*Strong Minkowski decomposition is NP-complete*", IEEE Transactions, Vol. E74, n°4, P.653-6, April 1991.
- [Kal82] M. Kallay, "*Indecomposable polytopes*", Israel Journal of Mathematics, Vol 41, n°3, (1982) 235-243.
- [Kau91] A. Kaul, M.A. O'Connor, V. Srinivarsan, "*Computing Minkowski sums of regular polygons*", Proc. 3rd Canada Conf. Comput. Geom., p 74-77, 1991.
- [Lac&Sza96] B. Lacolle & N. Szafran, "*Complexité des sections planes zonoédres*", Rapport de Recherche LMC-IMAG 956-M, Avril 1996.
- [Lac&Val93] B. Lacolle, P. Valentin, "*Modélisation géométrique de la faisabilité de plusieurs mélanges*", M<sup>2</sup>AN, Vol. 27, n°3, 1993.
- [LSV91] B. Lacolle, N. Szafran & P. Valentin, "*Les mélanges binaires : modélisation géométrique et algorithmes*", Rapport de recherche IMAG - RR 841 -M- (Fév 1991)
- [Lau87] J.-P. Laumond, "*Obstacle growing in a non-polygonal world*", Information processing letters, 25 (1987) 41-50.
- [Mey74] W. Meyer, "*Indecomposable polytopes*", Trans. American Math. Soc. 190 (1974), 77-86.
- [McM&She68] P. McMullen and G. C. Shephard, "*Diagrams for centrally symmetric polytopes*", Mathematika 15 (1968), 123-138.
- [McM&She71] P. McMullen and G. C. Shephard, "*Convex polytopes and upper bound conjecture*", London Math. Soc. , Lecture Notes, vol. 3 Cambridge University Press (1971).

- [McM70] P. McMullen, "*Polytopes with centrally symmetric faces.*" Israel J. Math 8 (1970), 194-196.
- [McM71] P. McMullen, "*On Zonotopes*", Trans. of the American Math. Society, vol 159, September 1971.
- [McM73] P. McMullen, "*Representation of polytopes and polyhedral sets*", Geometriae Dedicata 2 (1973) 83-99.
- [McM87] P. McMullen, "*Indecomposable convex polytopes*", Israel Journal of Mathematics, Vol 58, n° 3, (1987) 321-323.
- [McM&Sch74] P. McMullen, R. Schneider & G.C. Shephard, "*Monotypic polytopes and their intersection properties*", Geometriae Dedicata 3 (1974), 99-129.
- [Mou&Sil91] D.M. Mount & R. Silverman, "*Combinatorial and computational aspects of Minkowski decompositions*", American Mathematical Society vol.119 (1991), 107-124.
- [Pan88] G. Yu Panina, "*Representation of a  $n$ -dimensional body in the form of a sum of  $(n-1)$ -dimensional bodies*", Soviet Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 1988, 23, n° 4, 91-103.
- [Sal71] G.T. Sallee, "*Minkowski decomposition of convex sets*", Israel Journal of Math. Vol. 12 (1972).
- [She63] G.C. Shephard, "*Decomposable convex polyhedra*", Mathematika vol.10 (1963), 89-95.
- [She67] G.C. Shephard, "*Polytopes with centrally symmetric faces*" Can. J. Math. 19 (1967), 1206-1213.
- [Sil73] R. Silverman, "*Decomposition of plane convex sets, Part I.*", Pacific Journal of Mathematics, Vol. 47, n° 2 (1973), 521-530.
- [Sil&Ste88] R. Silverman and A. Stein, "*Algorithms for the decomposition of convex polygon*", Technical Report CAR-TR-343, Center for Automation Research, Univ. of Maryland, January 1988.
- [Sla86] K.H. Slaoui, "*Application des techniques mathématiques à la gestion des mélanges : histosplines et optimisation*", Thèse INPG Grenoble, 1986.



- [Smi87] Z. Smilansky, "*Decomposability of Polytopes and Polyhedra*", *Geometriae Dedicata* **24** (1987), 29-49.
- [Sza91] N. Szafran, "*Zonoèdres : de la géométrie algorithmique à la théorie de la séparation*", Thèse de l'Université Joseph Fourier 1991.
- [Val86] P. Valentin, "*Zonotopes and Chromatography : a geometric approach of seperation production*", 2<sup>nd</sup> Congress in Preparative Chromatography HPLC, Washington 12-13 Mai 1986, ed. G. Guiochon.
- [Vale64] F. A. Valentine, "*Convex sets*", McGraw-Hill series in Higher Mathematics.
- [Wei74] W. Weil, "*Decomposition of convex bodies*", *Mathematika* **21** (1974), 19-25.
- [Xuo92] N.H. Xuong, "*Mathématiques discrètes et informatique*", Collection Logique Mathématiques et Informatique (LMI) Ed. Masson.
- [Zas75] Thomas Zaslavsky, "*Facing up to arrangements : Face-Count Formulas for partitions of space by hyperplanes*", *Memoirs of the american mathematical society*, vol. 1, n°154, january 1975.
- [Zie95] Günter M. Ziegler, "*Lectures on Polytopes*", Graduate Texts in Mathematics 152, Springer-Verlag.