

Dualité géométrique et relations de correspondance entre courbes primales et duales

Hafsa Deddi

► **To cite this version:**

Hafsa Deddi. Dualité géométrique et relations de correspondance entre courbes primales et duales. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1997. Français. tel-00004935

HAL Id: tel-00004935

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004935>

Submitted on 20 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée par

Hafsa Deddi

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier- Grenoble I

(arrêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et du 30 Mars 1992)

(Spécialité: Mathématiques Appliquées)

DUALITÉ GÉOMÉTRIQUE ET RELATIONS DE CORRESPONDANCE ENTRE COURBES PRIMALES ET DUALES

Date de soutenance: 22 Octobre 1997

Composition du jury:

Président : M. Pierre-Jean LAURENT

Rapporteurs : M. Alain LE MÉHAUTÉ

M. Christophe RABUT

Examineurs : M. Luc BIARD

M. Bernard LACOLLE

Mme Marie-Laurence MAZURE

Table des matières

Introduction	5
1 Généralités sur la dualité géométrique	9
1.1 Les transformations de dualité	9
1.1.1 Caractérisation de la dualité géométrique	10
1.2 Polarité et transformation polaire	12
1.2.1 Polarité dans l'espace affine \mathbb{R}^n	12
1.2.2 Transformés polaires dans \mathbb{R}^n	15
1.3 Les dualités dans le plan affine \mathbb{R}^2	17
1.3.1 Exemples de dualités géométriques dans le plan affine	18
1.4 Géométrie projective et dualité: Rappels	21
1.4.1 Espace projectif associé à un espace vectoriel	21
1.4.2 Espace projectif associé à un espace affine	22
1.4.3 Forme linéaire et dualité	22
1.5 Représentation duale d'une courbe plane	23
1.5.1 Enveloppe d'une famille de courbes	23
1.5.2 Enveloppe d'une famille de droites	25
1.5.3 Représentation duale d'une courbe plane	25
1.5.4 Courbes de Bézier duales	26
2 Correspondances entre courbes primales et courbes duales	29
2.1 Interpolation par des courbes duales	29
2.1.1 Interpolation par une courbe de Bézier duale quadratique	30

2.1.2	Un autre exemple de problème d'interpolation	34
2.1.3	Détermination d'une courbe duale d'une courbe de Bézier quadratique	40
2.1.4	Quelques propriétés générales d'une courbe duale quelconque: interpolation et convexité	42
2.1.5	Interpolation: cas particulier de tangentes parallèles	47
2.1.6	Interpolation de deux points et trois tangentes	50
2.2	Courbes duales d'une courbe rationnelle	62
2.2.1	Intersection de deux faisceaux de droites	62
2.2.2	courbe duale de l'intersection de deux faisceaux	64
2.2.3	Intersection de faisceaux de degré n	68
2.3	Courbes duales par morceaux	69
2.3.1	Préliminaires	69
2.3.2	Courbe duale d'une courbe de Bézier quadratique par morceaux .	70
2.3.3	Interpolation par le dual d'une courbe de Bézier cubique	73
2.4	Raccordements géométriques de courbes duales	75
2.4.1	Rappels	75
2.4.2	Courbe duale d'une courbe raccordée G^1	76
2.4.3	Continuité géométrique d'ordre 2 de courbes duales	77
2.5	Etude des singularités des courbes duales	79
2.5.1	Détermination des points singuliers	80
2.5.2	Etude des points singuliers	83
2.6	L'image duale d'un cercle	93
2.6.1	Détermination de la nature de l'image duale d'un cercle	98
2.6.2	image duale d'un cercle passant par trois points	99
3	Dualités géométriques définies par une matrice symétrique	103
3.1	Rappels	103
3.2	Dualité associée à une forme bilinéaire symétrique dans l'espace affine \mathbb{R}^3	105
3.2.1	Quelques propriétés de la dualité géométrique dans \mathbb{R}^3	107
3.3	Dualité associée à une forme bilinéaire symétrique dans un plan projectif	110

3.3.1	Quelques propriétés de la dualité projective	112
3.4	Dualité géométrique associée à une matrice symétrique dans le plan affine \mathbb{R}^2	113
3.4.1	Propriétés de la transformation géométrique \mathcal{D}_s	113
3.4.2	Droites affines non représentables par une dualité géométrique	115
3.5	Courbes duales associées à une matrice symétrique inversible	116
3.5.1	Exemples de courbes duales relatives à une matrice symétrique	117
3.5.2	Exemples de courbes duales interpolantes	122
3.5.3	Retour au plan affine	124
3.6	Courbes de Bézier duales associées à une matrice symétrique	126
3.6.1	courbes duales d'une courbe quadratique	126
3.6.2	courbes duales d'une courbe cubique	126
3.6.3	Courbe duale d'une courbe degré n	129
	Conclusion	137
	Bibliographie	139

Introduction

La dualité est une transformation très utilisée en géométrie projective, elle a permis de déduire des théorèmes très intéressants à partir d'autres théorèmes déjà existants comme par exemple le théorème de Desargues [22]. Cette dualité introduit une certaine équivalence entre des points projectifs et des droites projectives. D'autre part, dans d'autres domaines mathématiques, la dualité est utilisée sous d'autres formes différentes comme par exemple en programmation mathématique où les problèmes de minimisation sous contraintes se transforment en problèmes duaux de maximisation.

Dans cette thèse, on s'intéressera à l'aspect géométrique de la dualité. Ainsi, on va se restreindre à des dualités, qu'on nommera des dualités géométriques, faisant correspondre à des points des hyperplans et réciproquement.

La dualité géométrique peut être résumée en un seul principe, appelé principe de dualité [8], qu'on va énoncer dans \mathbb{R}^3 et dans \mathbb{R}^2 :

PRINCIPE DE DUALITE

Dans \mathbb{R}^3 :

Lorsqu'une figure de forme quelconque est donnée, on peut toujours former, d'une infinité de manière, une autre figure, dans laquelle les points, les plans, les droites, correspondront respectivement à des plans, à des points, à des droites de la première figure;

Les points situés sur un même plan, dans l'une des deux figures, auront pour correspondants des plans passant tous par le point qui correspond à ce plan;

Les points situés sur une même droite, dans l'une des deux figures, auront pour correspondants, dans l'autre figure, des plans passant par la droite qui correspondra à la première;

Les points situés sur une surface, dans la première figure, auront pour correspondants, dans la seconde, des plans tangents à une autre surface; et les plans tangents à la première surface, en ces points, auront pour correspondants précisément les points de contact des plans tangents à la seconde surface.

Dans \mathbb{R}^2 :

Si dans le plan un énoncé concernant des points et des droites en position générale et vrai, il en est de même de l'énoncé dual obtenu en permutant les mots "droite" et "point" dans l'énoncé de départ.

Exemple:

Les affirmations suivantes sont, deux à deux, dualement équivalentes:

- 1. Deux points distincts sont incidents à une et une seule droite.*
- 2. Deux droites distinctes sont incidentes à un et un seul point.*

- 1. Un point est incident à une infinité de droites.*
- 2. Une droite est incidente à une infinité de points.*

⊖

Le premier chapitre est un chapitre de généralités. La première partie de ce chapitre débute par une définition de la dualité géométrique qu'on a voulu la plus générale possible. En effet on l'a définie comme une double transformation géométrique entre des points et des hyperplans vérifiant certaines conditions. Ensuite on a fait un récit des propriétés et des caractérisations de la dualité géométrique. On a rappelé aussi d'autres transformations géométriques qui ressemblent à la dualité géométrique, comme par exemple les transformés polaires.

La deuxième partie du premier chapitre est consacrée à la généralisation de la dualité pour des formes géométriques quelconques, en particulier pour des courbes quelconques. En effet, faisant appel à la théorie des enveloppes, on a défini une courbe duale comme enveloppe d'une famille de droites. On prendra comme exemple les courbes de Bézier auxquelles on associe des courbes duales appelées courbes de Bézier duales [15].

Le deuxième chapitre est consacré à une étude plus précise et plus complète des courbes duales. Une grande partie de ce chapitre aura comme but d'étudier les relations existantes entre les courbes initiales, qu'on appelle courbes primales, et leurs courbes duales. On étudiera les correspondances des propriétés d'interpolation entre des courbes primales et leurs courbes duales. Il est à noter que le but ici n'est pas l'interpolation en elle-même car il existe beaucoup de méthodes et algorithmes qui donnent des solutions à ce problème [4]. Mais notre objectif est surtout de trouver les problèmes duaux, d'établir les relations liant les courbes primales et duales et de déduire des propriétés à partir des propriétés primales. On a par exemple considéré le problème dual du problème d'interpolation classique de deux points associés à leurs tangentes respectives, on a aussi traité le cas

où les tangentes sont parallèles puis on a considéré le problème d'interpolation de deux points munis de leurs tangentes et d'une troisième tangente. Dans un autre paragraphe, on a voulu traité le problème d'interpolation avec un autre point de vue. En effet, on a voulu décrire le problème dual qu'avec des droites, pour cela on a utilisé des faisceaux de droites et on a considéré une courbe comme intersection de ces faisceaux. L'avantage de cette description est qu'on peut obtenir l'équation implicite de la courbe en calculant un déterminant d'ordre inférieur à celui de Bezout ou Sylvester [21]. D'autre part, on a considéré aussi des courbes duales interpolantes par morceaux. On a étudié les relations de correspondances entre courbes primales et courbes duales concernant les raccordements géométriques des morceaux des deux courbes.

Dans l'autre partie de ce chapitre, on s'est intéressé à l'étude des correspondances des singularités entre les courbes primales et les courbes duales. Cette étude nous a permis de constater que plus l'une des courbes est singulière moins l'autre l'est. Par exemple une courbe avec des points d'inflexion se transforme en une courbe avec des points de rebroussement et réciproquement. Pour résumer toutes les situations de singularités on a établi un tableau récapitulatif de ces correspondances. A la fin de ce chapitre, on a donné un petit aperçu sur la nature de l'image duale d'un cercle et on a considéré un problème duale au problème d'un cercle passant par trois points.

Le troisième chapitre est une généralisation de la dualité géométrique. En effet, dans ce chapitre une dualité géométrique est définie à l'aide d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. En utilisant une écriture matricielle de cette dernière, on a défini des dualités dans le plan projectif, dans l'espace affine \mathbb{R}^3 et dans le plan affine \mathbb{R}^2 . Avec cette dualité associée à une matrice symétrique, on a généralisé la notion de courbes duales. Ainsi, à une courbe primale on a associé une famille de courbes duales dépendant de la matrice symétrique. On a commencé par étudier les courbes duales d'une courbe de Bézier quadratique et cubique. Ensuite on a cherché la formule explicite des courbes duales d'une courbe de Bézier de degré n quelconque. On a cherché aussi le degré d'une courbe duale en fonction du degré de la courbe primale associée.

Chapitre 1

Généralités sur la dualité géométrique

1.1 Les transformations de dualité

La dualité est une notion mathématique utilisée dans beaucoup de domaines mathématiques. C'est un outil efficace pour résoudre des problèmes initiaux compliqués en considérant des problèmes duaux plus simples à résoudre.

Cependant, il est difficile de trouver dans la littérature une définition complète et précise regroupant toutes les dualités mathématiques. En effet chaque domaine mathématique fait appel à des dualités différentes et variées selon les problèmes posés.

D'autre part, on remarque que les points communs à toutes ces dualités peuvent se résumer en deux points:

Premièrement , la notion de dualité a toujours été liée à une inversion des opérateurs utilisés, par exemple transformer l'opérateur "maximum" en "minimum", la notion de "plus petit" en "plus grand" ou encore l'opérateur "contenant" en "contenu".

Deuxièmement , la dualité est une notion réversible, elle doit donc permettre le passage du dual au primal et vice versa.

Dans ce chapitre, on s'intéressera à l'aspect géométrique de la dualité. Pour cela on cherchera à caractériser une dualité géométrique dans un cadre général. Une fois la dualité bien caractérisée, on peut alors chercher ses propriétés, ses avantages et ses inconvénients. On donnera ensuite quelques transformations géométriques, comme par exemple la transformation polaire, qui ont quelques propriétés en commun avec la dualité géométrique. Enfin, on étendra la dualité à des courbes planes et à des formes géométriques quelconques.

1.1.1 Caractérisation de la dualité géométrique

Dans ce paragraphe, on étudie la dualité sous son aspect géométrique. D'abord on essaiera de donner une définition générale de la dualité géométrique, ensuite on étudiera toutes ses propriétés et ses caractéristiques.

Définition 1

Une dualité géométrique dans \mathbb{R}^n , $n > 1$, est une double transformation bijective entre un sous ensemble des points de \mathbb{R}^n et un sous ensemble des hyperplans de \mathbb{R}^n vérifiant les deux caractéristiques suivantes:

1. L'involution,
2. L'inversion de la relation d'inclusion.

Notation

La transformation géométrique définie ci-dessus et sa réciproque seront notées par le symbole \mathcal{D} .

Interprétation de la définition

Les caractéristiques d'une dualité géométrique sont les suivantes:

1. L'involution:

- Le dual du dual d'un point p est le point p lui même, c-à-d $\mathcal{D}(\mathcal{D}(p)) = p$.
- Le dual du dual d'un hyperplan H est l'hyperplan H lui même: $\mathcal{D}(\mathcal{D}(H)) = H$.

2. L'inversion de la relation d'inclusion:

Un point p appartient à un hyperplan H si et seulement si le dual de l'hyperplan H appartient au dual du point p c-à-d (fig 1.1)

$$p \in H \iff \mathcal{D}(H) \in \mathcal{D}(p).$$

Exemples

Pour trouver des relations de dualité entre les configurations des points et des hyperplans Edelsbrunner [10] a introduit une transformation de dualité géométrique de la manière suivante:

Soit E^d un espace Euclidien de dimension d . Soit \mathcal{D} une transformation géométrique qui à un point p fait correspondre un hyperplan non vertical de E^d , et vice versa.

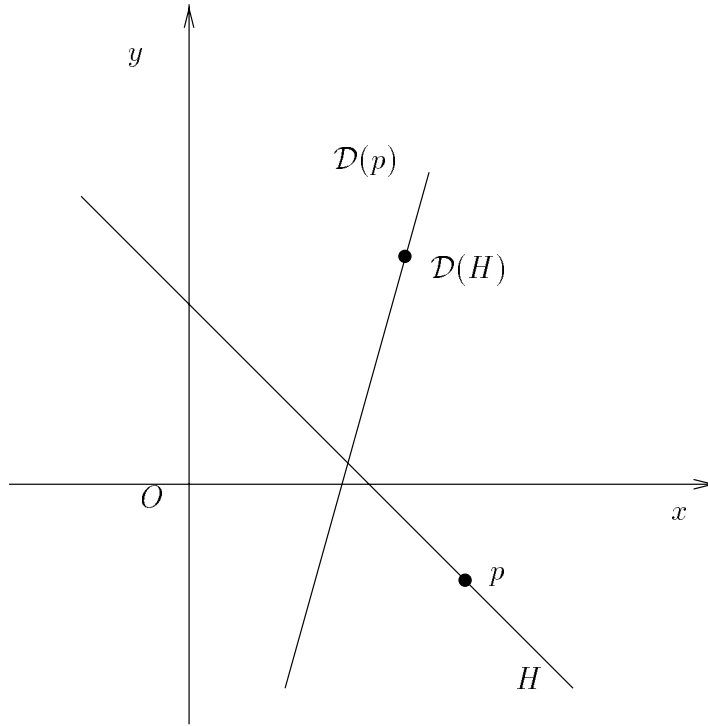


FIG. 1.1 – propriété d'inversion d'inclusion dans le plan

Soit $p = (p_1, p_2, \dots, p_d)$ un point de E^d . La transformation \mathcal{D} fait correspondre au point p l'hyperplan $\mathcal{D}(p)$ donné par l'équation suivante:

$$x_d = 2p_1x_1 + 2p_2x_2 + \dots + 2p_{d-1}x_{d-1} - p_d,$$

et vice versa, c.à.d, elle fait correspondre à un hyperplan non vertical h le point $\mathcal{D}(h)$ tel que $\mathcal{D}(\mathcal{D}(h)) = h$.

Définition 2 [10]

Soit h un hyperplan non vertical d'équation:

$$x_d = \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \dots + p_{d-1}x_{d-1} + \beta_d.$$

On dit qu'un point $p = (p_1, p_2, \dots, p_d)$ est au-dessus ou au-dessous de h si p_d est plus grand ou plus petit que $\beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \dots + p_{d-1}x_{d-1} + \beta_d$ respectivement.

On note h^+ l'ensemble des points au-dessus de h et h^- l'ensemble des points au-dessous de h .

La transformation géométrique \mathcal{D} définie ci-dessus vérifie les propriétés suivantes:

Lemme 1 [10]

Soient p un point de l'espace Euclidien E^d et h un hyperplan non vertical de E^d .

1. Le point p appartient à l'hyperplan h si et seulement si $\mathcal{D}(h)$ appartient à l'hyperplan $\mathcal{D}(p)$.
2. Le point p se trouve au-dessus (au-dessous) de l'hyperplan h si et seulement si le point $\mathcal{D}(h)$ se trouve au-dessus (au-dessous) de l'hyperplan $\mathcal{D}(p)$.

D'où la transformation géométrique \mathcal{D} est une dualité géométrique.

Remarques

1. Il est clair qu'on peut étendre d'une façon naturelle la notion de dualité à toute forme géométrique P définie à partir d'une famille de points ou d'une famille d'hyperplans. On définit ainsi les ensembles suivants:

$$\mathcal{D}(P) = \{\mathcal{D}(p) : p \in P\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(\mathcal{D}(P)) = \{\mathcal{D}(h) : h \in \mathcal{D}(P)\}.$$

On parlera alors de formes duales ou de représentations duales d'une forme primale.

2. Comme la dualité est une transformation entre des points et des hyperplans on aura selon l'équation choisie pour représenter un hyperplan une dualité particulière. De plus les sous ensembles des points et des hyperplans sur lesquels la dualité est définie peuvent changer.
3. La transformation de dualité définie ci-dessus par Edelsbrunner n'est pas définie pour un hyperplan vertical. D'une manière générale les éléments qui sont indéfinis par une dualité sont appelés les positions interdites de cette dualité. On verra ultérieurement que pour chaque dualité il existe une position interdite.

1.2 Polarité et transformation polaire

1.2.1 Polarité dans l'espace affine \mathbb{R}^n

Dans ce paragraphe, on étudiera quelques transformations géométriques qui ont des points en commun la dualité géométrique. On donnera aussi leurs propriétés ainsi que des exemples.

Définition 3 (Polarité)

La polarité est une double transformation géométrique entre l'ensemble des points de \mathbb{R}^n privé de l'origine O et l'ensemble des hyperplans de \mathbb{R}^n qui ne passent pas par l'origine.

Définition 4 (Hyperplan polaire)

On considère un point p de \mathbb{R}^n distinct de l'origine, l'hyperplan polaire de p est l'ensemble $\mathcal{D}(p)$ des points m vérifiant l'équation suivante:

$$\langle p, m \rangle = 1.$$

Définition 5 (Pôle)

Soit H un hyperplan de \mathbb{R}^n ne passant pas par l'origine, le pôle de H est le point $\mathcal{D}(H)$ satisfaisant l'équation suivante:

$$\langle \mathcal{D}(H), m \rangle = 1 \quad \forall m \in H.$$

On peut facilement vérifier que la polarité satisfait les propriétés d'involution et d'inversion de la relation d'inclusion. Par suite la polarité est une dualité géométrique.

Définition 6

Soit H un hyperplan de \mathbb{R}^n ne passant pas par l'origine. On appelle demi-espace positif(respectivement négatif) défini par H , noté H^+ , (respectivement H^-) le demi-espace limité par H et ne contenant pas l'origine (respectivement contenant l'origine):(fig 1.2)

$$H^+ = \{m \in \mathbb{R}^n : \langle \mathcal{D}(H), m \rangle > 1\},$$

$$H^- = \{m \in \mathbb{R}^n : \langle \mathcal{D}(H), m \rangle < 1\}.$$

Avec les notations précédentes on a le lemme suivant:(fig 1.3 et fig 1.4)

Lemme 2

Soient p un point de \mathbb{R}^n distinct de l'origine et H un hyperplan de \mathbb{R}^n ne passant pas par l'origine. Alors on a:

$$p \in H^+ \iff \mathcal{D}(H) \in \mathcal{D}(p)^+,$$

$$p \in H^- \iff \mathcal{D}(H) \in \mathcal{D}(p)^-.$$

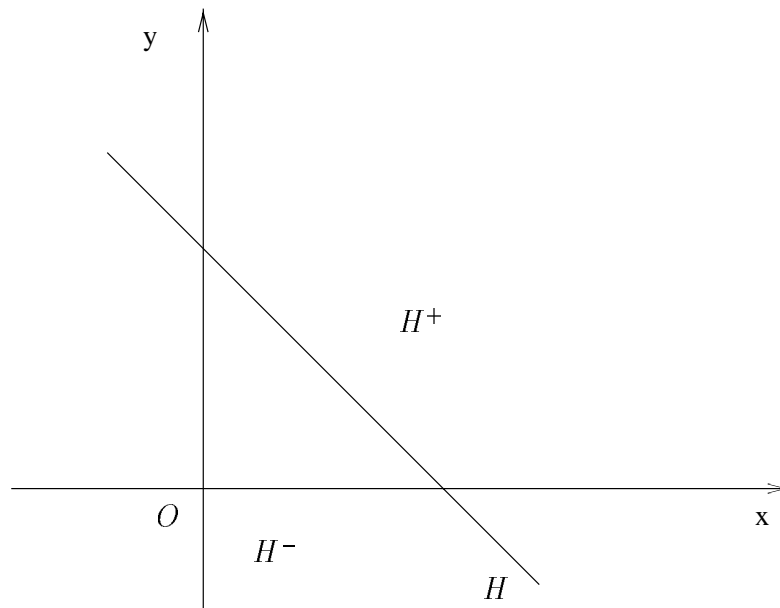


FIG. 1.2 – demi-espace positif et demi-espace négatif d'un hyperplan

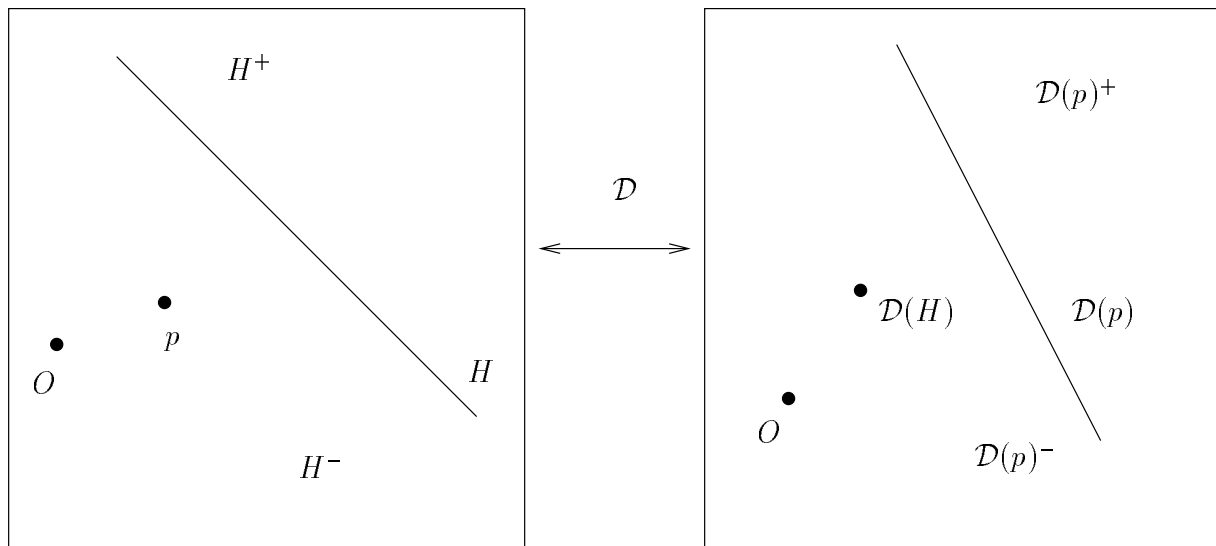


FIG. 1.3 – dualité: propriété de la préservation de position

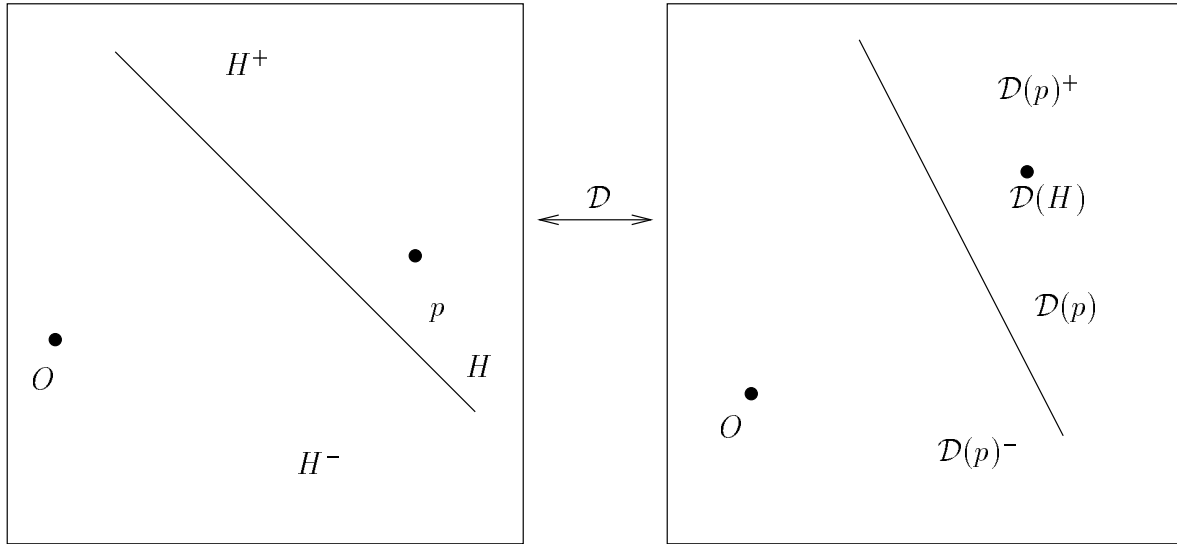


FIG. 1.4 – dualité: propriété de la préservation de position

Preuve:

Soit p un point de \mathbb{R}^n et soit H un hyperplan de \mathbb{R}^n . Alors on a:

$$\begin{aligned}
 p \in H^- &\iff \langle \mathcal{D}(H), p \rangle < 1 \\
 &\iff \langle \mathcal{D}(H), \mathcal{D}(\mathcal{D}(p)) \rangle < 1 \\
 &\iff \mathcal{D}(H) \in \mathcal{D}(p)^-.
 \end{aligned}$$

On peut montrer la même équivalence pour l'autre demi-espace. \diamond

1.2.2 Transformés polaires dans \mathbb{R}^n

En géométrie algorithmique l'étude des arrangements et des polytopes occupe une place considérable. Parmi les transformations géométriques traitées dans ce domaine, on trouve les transformés polaires qui donnent de nouvelles représentations d'un polytope.

Définition 7 [1]

Soit A un ensemble de points de \mathbb{R}^n .

On appelle transformé polaire de A l'ensemble défini par:

$$A^\circ = \{Y \in \mathbb{R}^n : \langle Y, X \rangle \leq 1 \quad \forall X \in A\}.$$

Soit E un espace affine. On a les définitions suivantes:

Définition 8 [26]

|| Soient $X \in E$ et $Y \in E$. On appelle segment joignant les deux points X et Y
|| l'ensemble des points de la forme: $\alpha X + \beta Y$ où $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et $\alpha + \beta = 1$.

Définition 9 [26]

|| Un ensemble S de E . S est dit convexe si pour chaque paire de points $X \in S$
|| et $Y \in S$, le segment $[X, Y]$ joignant ces deux points est inclus dans S .

Tandis que la dualité géométrique est une relation entre l'ensemble des points et l'ensemble des hyperplans, la transformation polaire lie l'ensemble des points à l'ensemble des demi-espaces.

Par conséquent, on retrouve sous certaines conditions quelques propriétés de la dualité géométrique.

On a les propriétés suivantes [14]:

Propriété 1

|| Soit A un ensemble de points. Alors A° est convexe fermé.

Propriété 2

|| Soient A et B deux ensembles de \mathbb{R}^n alors on a:
||
$$A \subset B \implies B^\circ \subset A^\circ.$$

Propriété 3

|| Si E est un ensemble borné alors l'origine appartient à l'intérieur du transformé
|| polaire de E .

Propriété 4

|| Si O appartient à l'intérieur de E alors le transformé polaire de E est borné.

Lemme 3

|| Soit A un ensemble de \mathbb{R}^n . Le transformé polaire du transformé polaire de
|| A contient l'ensemble A , c-à-d $A \subset A^{\circ\circ}$. De plus si A est fermé et contient
|| l'origine alors on a:
||
$$A = A^{\circ\circ}.$$

Définition 10 [26]

|| L'enveloppe convexe d'un ensemble S est l'intersection de tous les ensembles convexes contenant l'ensemble S .

Définition 11 [5]

|| L'intérieur (au sens topologique) de l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points est appelé polytope ouvert de S .

En utilisant ces définitions, on obtient les résultats suivants:

Lemme 4 [5]

|| Soient P_1, P_2, \dots, P_m des points de \mathbb{R}^n et $Env(P_1, P_2, \dots, P_m)$ l'enveloppe convexe de ces points tels que l'origine appartient à $Env(P_1, P_2, \dots, P_m)$. Alors on:

$$Env(P_1, P_2, \dots, P_m)^{\circ\circ} = Env(P_1, P_2, \dots, P_m).$$

Propriété 5 [5]

|| Si $\mathcal{E} = Env(P_1, P_2, \dots, P_m)$. Alors on a:

$$\mathcal{E}^{\circ} = \bigcap_{i=1}^p \{Y \in \mathbb{R}^n : \langle Y, A_i \rangle \leq 1\}.$$

Avec cette transformation on peut représenter un polytope soit comme l'enveloppe convexe de ses sommets soit comme l'intersection d'un ensemble de demi-espaces.

Théorème 1 [5]

|| Le transformé polaire d'un polytope dont l'intérieur contient l'origine est un polytope dont l'intérieur contient l'origine.

Théorème 2 [5]

|| La transformation polaire est involutive sur l'ensemble des polytopes contenant l'origine.

1.3 Les dualités dans le plan affine \mathbb{R}^2

Dans ce paragraphe on va se restreindre au plan affine \mathbb{R}^2 . Cependant les résultats énoncés peuvent se généraliser pour des espaces de dimension plus élevée.

1.3.1 Exemples de dualités géométriques dans le plan affine

Dans un plan affine la dualité transforme un point en une droite et une droite en un point. Ainsi suivant la représentation choisie pour décrire une droite dans le plan, on aura une dualité particulière.

Par exemple dans le plan affine \mathbb{R}^2 , on peut citer les double transformations géométriques suivantes:

- La double transformation entre l'ensemble des points $p = (a, b)$ et l'ensemble des droites d'équation: $ax + by = 1$.
- La double transformation entre l'ensemble des droites d'équation: $ax + by + 1 = 0$ et l'ensemble des points $p = (a, b)$.
- La double transformation entre l'ensemble des points $p = (a, b)$ et l'ensemble des droites d'équation: $y = ax - b$.
- La double transformation entre l'ensemble des points $p = (a, b)$ et l'ensemble des droites d'équation: $y = -ax - b$.

On peut vérifier facilement que les transformations précédentes satisfont les conditions d'involution et d'inversion d'inclusion. Elles définissent donc des dualités géométriques dans le plan.

Remarque:

La double transformation qui à un points $p = (a, b)$ du plan affine \mathbb{R}^2 fait correspondre la droite d'équation: $y = ax + b$, et vice versa, ne vérifie pas la caractéristique de l'inversion de la relation d'inclusion.

En effet:

Soit $m = (\alpha, \beta)$ un point du plan et soit L une droite d'équation: $y = ax + b$. Leurs images duales sont respectivement: $\mathcal{D}(L) = (a, b)$ et $\mathcal{D}(m)$ la droite d'équation: $y = \alpha x + \beta$.

$$\begin{aligned} m \in L &\implies \beta = a\alpha + b \\ &\implies b = -a\alpha + \beta \\ &\implies (-a, b) \in \mathcal{D}(m) \\ &\not\Rightarrow \mathcal{D}(L) \in \mathcal{D}(m). \end{aligned}$$

Propriété 6

- *Le dual du point d'intersection de deux droites est la droite joignant les images duales respectives des deux droites.*
- *le dual d'une droite passant par deux points A et B est le point d'intersection des droites duales de A et B .*

Preuve:

Soit p le point d'intersection de deux droites D_1 et D_2 alors on a :

$$\begin{aligned} \{p\} = D_1 \cap D_2 &\iff \begin{cases} p \in D_1 \\ p \in D_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mathcal{D}(D_1) \in \mathcal{D}(p) \\ \mathcal{D}(D_2) \in \mathcal{D}(p) \end{cases} \\ &\iff \mathcal{D}(p) \text{ est la droite passant par } \mathcal{D}(D_1) \text{ et } \mathcal{D}(D_2). \end{aligned}$$

D'où la propriété. ◇

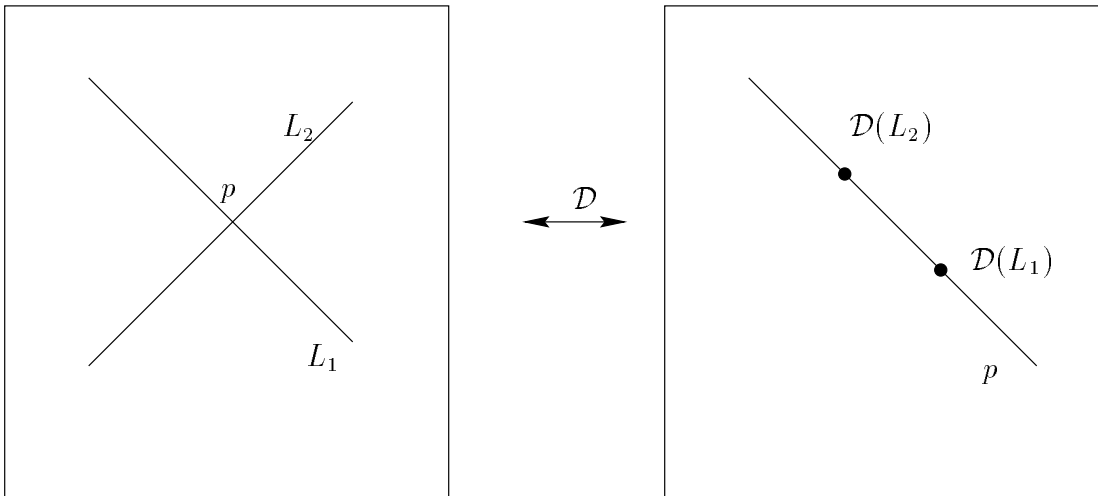


FIG. 1.5 – Le dual d'un point d'intersection

Propriété 7

|| Soient D_1 et D_2 deux droites concourantes en un point p . Alors le dual de toute droite D du faisceau formé par D_1 et D_2 est un point de la droite passant par les deux respectifs de D_1 et D_2 . (voir figure 2.1)

Preuve:

On a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \{p\} = D_1 \cap D_2 \\ p \in D \end{cases} &\iff \begin{cases} \mathcal{D}(p) \text{ est la droite passant par les points } \mathcal{D}(D_1) \text{ et } \mathcal{D}(D_1) \\ \mathcal{D}(D) \in \mathcal{D}(p) \end{cases} \\ &\iff \mathcal{D}(D) \text{ est un point de la droite passant par } \mathcal{D}(D_1) \text{ et } \mathcal{D}(D_2). \end{aligned}$$

D'où la propriété. ◇

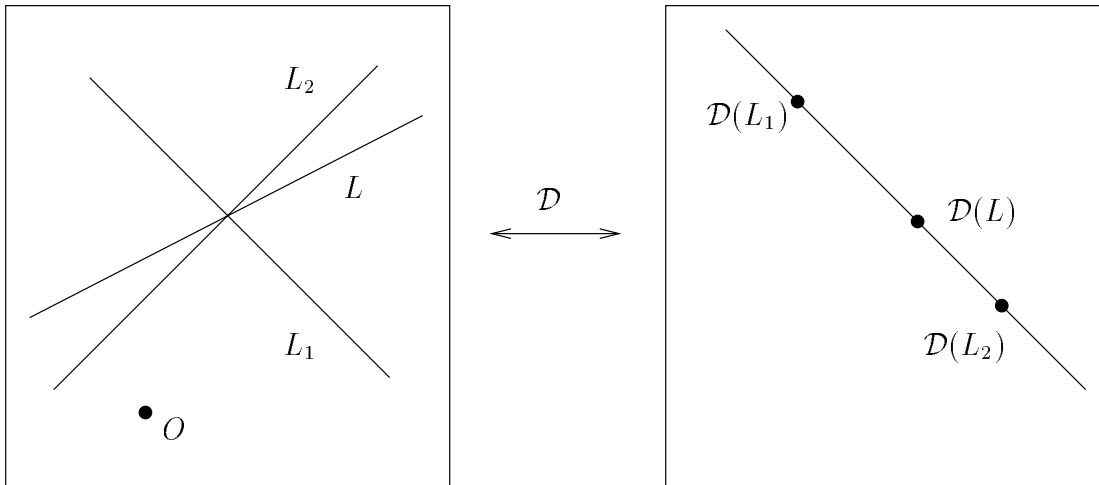


FIG. 1.6 – le dual d'un faisceau de droites

Propriété 8

|| Soit \mathcal{D} la polarité qui à un point $p = (a, b)$ distinct de l'origine fait correspondre la droite d'équation $ax + by = 1$. Les images duales par \mathcal{D} de droites parallèles sont deux points colinéaires avec l'origine.

Interprétation géométrique de la polarité:

Soit \mathcal{D} la polarité qui à un point $p = (a, b)$ distinct de l'origine fait correspondre la droite d'équation $ax + by = 1$. Si o désigne l'origine du repère de \mathbb{R}^2 et d la distance Euclidienne, alors on a:

$$d(o, p) = \frac{1}{d(o, \mathcal{D}(p))}.$$

Donc la droite duale de p est perpendiculaire à op située à une distance $\frac{1}{d(o, p)}$ de l'origine. (voir fig 1.7)

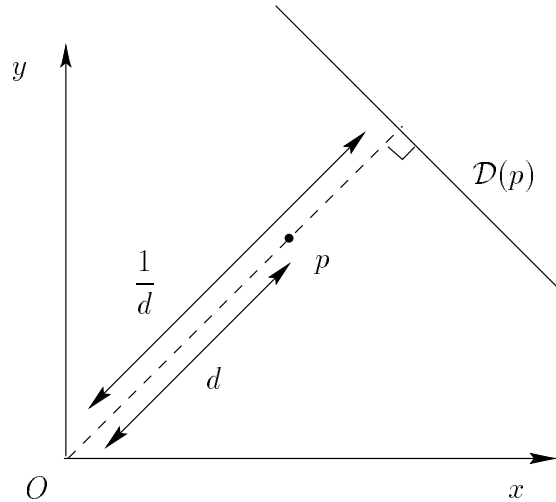


FIG. 1.7 – propriété géométrique de la polarité.

1.4 Géométrie projective et dualité: Rappels

1.4.1 Espace projectif associé à un espace vectoriel

Définition 12

|| Soit \vec{E} un espace vectoriel sur un corps K . On appelle espace projectif associé à \vec{E} et l'on note $P(\vec{E})$ l'ensemble des droites vectorielles de \vec{E} .

Remarque

Sur l'ensemble $\vec{E} - \{o\}$ des éléments non nuls on considère la relation d'équivalence suivante:

\vec{x} est en relation avec \vec{y} si et seulement si $\exists k \in K, k \neq 0$ tel que $\vec{y} = k\vec{x}$.

Un espace projectif peut être considéré comme l'ensemble quotient de $E - \{0\}$ par cette relation. On peut alors considérer l'application canonique p de $\vec{E} - \{0\}$ dans $P(\vec{E})$ qui à tout vecteur \vec{x} fait correspondre la droite $K\vec{x}$ qui le contient.

Définition 13

|| La dimension d'un espace projectif $P(\vec{E})$ associé à un espace vectoriel \vec{E} de dimension n , est par définition égale à $n - 1$.

Définition 14

|| Soit \vec{F} un sous-espace vectoriel de \vec{E} . L'image de \vec{F} par p est appelé une variété linéaire projective.

Coordonnées homogènes

Soit $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de l'espace vectoriel \vec{E} . Alors à tout point m de $P(\vec{E})$ on peut associer des systèmes (x_0, x_1, \dots, x_n) de $(n + 1)$ éléments de K . Ces systèmes sont proportionnels c-à-d si (x_0, x_1, \dots, x_n) est l'un d'eux alors les autres sont de la forme $(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ avec λ élément non nul du corps K . Ces systèmes sont appelés les systèmes de coordonnées homogènes.

Théorème 3

Si K est un corps commutatif alors les systèmes de coordonnées homogènes des points de $P(\vec{E})$ sont déterminés par la donnée:

- des points de base p_0, p_1, \dots, p_n de $P(\vec{E})$ qui sont les images d'une base de E
- du point unité p_{n+1} de coordonnées homogènes $(1, 1, \dots, 1)$

Définition 15

Un système de points $(p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1})$ décrit comme précédemment est dit un repère projectif.

1.4.2 Espace projectif associé à un espace affine

Etant donné E un espace affine de dimension finie sur un corps K , \vec{E} l'espace vectoriel associé et A un point de E . On appelle clôture projective de E l'espace suivant:

$$\hat{E} = P(\vec{E} \times K).$$

On considère l'injection j_A de E dans \hat{E} défini par:

$$\forall m \in E, \quad j_A(m) = p(m - A, 1).$$

L'image $j_A(E)$ est le complémentaire de l'hyperplan $P(\vec{E} \times 0)$ de \hat{E} qu'on appelle hyperplan à l'infini.

On peut alors considérer un espace affine comme le complémentaire $P - H$ d'un hyperplan à l'infini d'un espace projectif.

1.4.3 Forme linéaire et dualité

Définition 16

L'ensemble \vec{E}^* des formes linéaires sur un espace vectoriel \vec{E} sur K est appelé le dual de \vec{E} .

On sait qu'on peut faire correspondre à toute forme linéaire f son noyau $\text{Ker}(f)$, et on sait aussi que $\text{Ker}(f)$ est un hyperplan de \vec{E} si et seulement si $f \neq 0$.

Proposition 1

|| Deux formes linéaires ont même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.

Ainsi, on peut identifier l'ensemble des hyperplans de \vec{E} à l'espace projectif $P(\vec{E}^*)$. Si on a des coordonnées homogènes dans $p(\vec{E})$ associés à une base de \vec{E} , alors un hyperplan d'équation: $x_0u_0 + x_1u_1 + \dots + x_nu_n = 0$ admet comme coordonnées homogènes (u_0, \dots, u_n) dans le système qui provient de la base duale de la base donnée sur \vec{E} . En conclusion, toutes les propriétés et théorèmes sur les variétés linéaires projectives sont applicables aux systèmes linéaires d'hyperplans. D'où la notion de dualité qui par exemple dans le plan exprime qu'un point et une droite ont même structure.

1.5 Représentation duale d'une courbe plane

En général, une courbe paramétrique définie sur un intervalle réel I est décrite comme un ensemble de points variant avec un paramètre appartenant à l'intervalle I . La représentation duale d'une courbe C consiste à décrire une courbe à l'aide d'une famille de droites (tangentes). En se donnant une dualité géométrique, une courbe duale d'une courbe C est décrite à l'aide de la famille des droites duales de chaque point de la courbe C . Ainsi, cette représentation permet d'étudier une courbe en étudiant la représentation de ses tangentes.

1.5.1 Enveloppe d'une famille de courbes

Dans un article M. R. Thom [24] a développé la théorie des enveloppes. Il a donné les fondements théoriques dans un cadre plus général. Dans ce paragraphe on rappelle quelques notions de la théorie des enveloppes. On commence d'abord par la définition et ensuite on énonce le théorème fondamental qui nous sera utile dans la suite.

Définition 17 [6]

Etant donné dans le plan une famille F de courbes C_λ dépendant d'un paramètre λ , λ prenant toutes les valeurs d'un intervalle réel I , on dit que ces courbes admettent pour enveloppe une courbe E si:

1. chaque courbe C_λ est tangente à E ,
2. à chaque point m de E correspond une valeur unique $\lambda(m) \in I$ telle que la courbe $C_{\lambda(m)}$ associée soit tangente en m à E ,
3. la fonction $\lambda(m)$ définie en 2. n'est constante sur aucun arc de E .

Théorème 4 [6]

La famille de courbes planes C_λ d'équation générale:

$$f(x, y, \lambda) = 0$$

admet en général une enveloppe E engendrée par les points communs à C_λ et à la courbe associée C'_λ

$$f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

dont l'équation est obtenue en annulant la dérivée par rapport à λ du premier membre de l'équation de C_λ .

Exemple

On considère dans le plan la famille $\mathcal{C}((t, 0), 1)$ des cercles de rayon 1 et de centre un point sur l'axe (OX). Alors l'enveloppe de cette famille de courbes est formée par la droite d'équation $y = 1$ et la droite d'équation $y = -1$ (voir fig 1.8). En effet:

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'équation de la famille $\mathcal{C}((t, 0), 1)$ est:

$$(x - t)^2 + y^2 = 1.$$

En utilisant le théorème précédent l'enveloppe vérifie:

$$\begin{cases} (x - t)^2 + y^2 = 1 \\ 2(x - t) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = t, \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

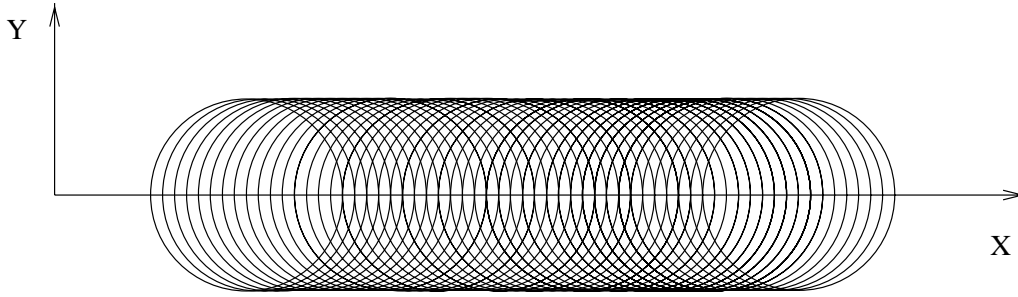


FIG. 1.8 – Enveloppe de cercles

1.5.2 Enveloppe d'une famille de droites

On considère D_λ la droite variable d'équation cartésienne:

$$u(\lambda)x + v(\lambda)y + w(\lambda) = 0.$$

Théorème 5

Si $(u(\lambda), v(\lambda))$ est distinct de l'origine et si $(u(\lambda), v(\lambda))$ et $(u'(\lambda), v'(\lambda))$ sont libres, alors la famille \mathcal{F} des droites D_λ admet une enveloppe \mathcal{E} engendrée, quand λ varie, par le point commun à D_λ et à la droite associée D'_λ :

$$u'(\lambda)x + v'(\lambda)y + w'(\lambda) = 0.$$

Définition 18

On appelle droite stationnaire de la famille \mathcal{F} toute droite correspondant à une valeur λ_1 du paramètre pour laquelle le système (1) et (2) est indéterminé; cela se produira lorsque

$$\frac{u(\lambda_1)}{u'(\lambda_1)} = \frac{v(\lambda_1)}{v'(\lambda_1)} = \frac{w(\lambda_1)}{w'(\lambda_1)},$$

c.à.d lorsque les droites correspondantes D_{λ_1} , D'_{λ_1} sont confondues, ou lorsque D'_{λ_1} sera indéterminée, $u'(\lambda_1), v'(\lambda_1), w'(\lambda_1)$ étant simultanément nuls.

1.5.3 Représentation duale d'une courbe plane

Définition 19

Soient C une courbe plane paramétrique définie et suffisamment dérivable sur un intervalle I et \mathcal{D} une dualité géométrique du plan affine \mathbb{R}^2 . À chaque point $C(t)$, $t \in I$, cette dualité fait correspondre, lorsqu'elle existe, une droite Δ_t .

La courbe enveloppe de la famille des droites Δ_t , $t \in I$, est appelée courbe duale de la courbe C .

1.5.4 Courbes de Bézier duales

Les courbes de Bézier duales ont été introduites par Hoschek[15], ce sont des cas particuliers de courbes duales dont la famille des tangentes sont exprimées dans la base de Bernstein.

Afin de définir ces courbes de Bézier duales, Hoschek a choisi de représenter une droite par un 'vecteur ligne' exprimé en coordonnées homogènes de la façon suivante:

$$L = w(1, l_1, l_2) \quad \text{où } w \in \mathbb{R}^*,$$

w est appelé poids associée à L .

Avec ces notations on peut considérer une dualité géométrique entre les points et les droites, et on peut exprimer un faisceau de deux 'vecteurs lignes' L_1 et L_2 de la manière suivante:

$$L = L_0 + \lambda L_1 \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, une droite du faisceau est déterminée par le paramètre λ et les poids des 'vecteurs lignes'.

D'autre part on peut définir une courbe duale dans le plan en la décrivant avec l'ensemble de ses tangentes dont les équations sont de la forme:

$$\alpha a_1(t) + \beta a_2(t) + a_0(t) = 0.$$

Par suite une courbe de Bézier duale peut être définie comme l'enveloppe de ces droites. Par conséquent elle vérifie l'équation de la droite précédente et l'équation de sa dérivée. D'où on a:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} a_0(t) & a_2(t) \\ a'_0(t) & a'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1(t) & a_2(t) \\ a'_1(t) & a'_2(t) \end{vmatrix}} \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} a_0(t) & a_1(t) \\ a'_0(t) & a'_1(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1(t) & a_2(t) \\ a'_1(t) & a'_2(t) \end{vmatrix}}$$

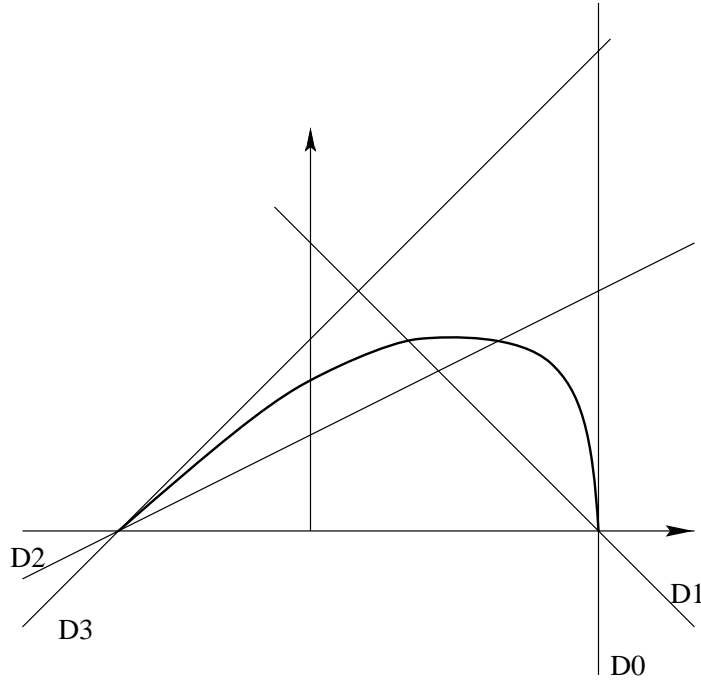


FIG. 1.9 – Courbe de Bézier duale

Définition 20 [15]

Une courbe de Bézier duale dans le plan est une courbe dont la famille des tangentes admet la représentation suivante en coordonnées homogènes: (voir fig 1.9)

$$\mathcal{L}(t) = (\mathcal{L}_0(t), \mathcal{L}_1(t), \mathcal{L}_2(t)) = \sum_{k=0}^n D_k B_k^n(t).$$

- $B_k^n(t)$, $k = 0, \dots, n$ et $\forall t \in [0, 1]$, est le polynôme de Bernstein,
- Les lignes D_k , $k = 0, \dots, n$, forment un "Bézier lateral",
- $\{E_k\} = D_k \cap D_{k+1}$, $k = 0, \dots, n$ et $D_{n+1} = D_0$, sont les sommets de Bézier.

Propriété 9 [15]

Les courbes de Bézier duales vérifient les propriétés d'interpolation suivantes:

- $\mathcal{L}(0) = D_0$, $\mathcal{L}(1) = D_n$.
- $\mathcal{L}'(0) = n(D_1 - D_0)$, $\mathcal{L}'(1) = n(D_n - D_{n-1})$.

Lemme 5 [15]

|| *Si le choix des poids est convenable alors le graphe d'une courbe de Bézier duale est invariant par transformations Euclidiennes sur le système de coordonnées.*

Convenable veut dire qu'il faut changer de poids suivant la transformation voulue.

Théorème 6 [15]

|| *Les sommets $\{E_k\} = D_k \cap D_{k+1}$, ($k = 0, \dots, n-1$), et les lignes D_1, \dots, D_{n-1} du "Bézier lateral" D_0, \dots, D_n forment un polygone ouvert convexe à l'intérieur du triangle E_0, E_{n-1}, E_n . Alors la courbe de "Bézier duale est convexe et se situe à l'intérieur du "Bézier lateral" si:*

- *tous les poids sont de même signe.*
- *l'origine est à l'extérieur du "Bézier lateral", mais dans la même partie du faisceau $D_0 \cup D_n$ que les sommets E_k*

Dans un chapitre ultérieur, on traitera ces courbes dans un cadre plus général en utilisant des dualités géométriques plus générales.

Chapitre 2

Correspondances entre courbes primales et courbes duales

L'interpolation de données discrètes dans le plan ou dans l'espace est un problème qui concerne beaucoup de domaines comme par exemple CAGD, CAO...etc. Dans la littérature, plusieurs méthodes et algorithmes ont été élaborés pour résoudre ce problème. La plupart de ces méthodes font appel à des courbes de Bézier polynomiales ou rationnelles ou encore à des courbes splines pour assurer des raccordements géométriques convenables. Dans la première partie de ce chapitre, on abordera ce même problème mais d'un autre point de vue. En effet, notre approche consiste à construire des courbes duales interpolantes et à établir les relations existant entre des courbes primales et leurs courbes duales. On cherchera aussi à déduire les relations duales correspondant aux relations de raccordement de morceaux de courbes primales.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on fera une étude complète sur les correspondances des singularités entre les courbes primales et leurs courbes duales.

Par souci de simplicité, on a choisi d'utiliser dans ce chapitre comme dualité géométrique la polarité. Cependant, les résultats obtenus peuvent se généraliser pour d'autres types de dualités géométriques.

2.1 Interpolation par des courbes duales

Dans le but d'éviter des cas dégénérés (qui feront l'objet d'un paragraphe ultérieur), dans la suite, et sauf mention contraire, on ne considère que des courbes paramétriques γ , sur un intervalle I de \mathbb{R} , telles que γ , $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ sont linéairement indépendants.

2.1.1 Interpolation par une courbe de Bézier duale quadratique

Comme on l'a vu dans le premier chapitre, les courbes de Bézier duales ont été introduites par Hoschek [15]. Pour cela, il a fait appel à une dualité particulière en utilisant les coordonnées homogènes. Cette définition de courbes de Bézier duales peut être généralisable pour toute dualité géométrique. On introduit alors la définition suivante.

Définition 21 Soit \mathcal{D} une dualité géométrique.

|| On appelle courbe de Bézier duale toute courbe dont la duale est une courbe qui admet une représentation paramétrique polynomiale.

Dans ce paragraphe, on va commencer par un exemple simple d'interpolation. En effet on se pose le problème suivant:

PROBLEME1

Soient p_0 et p_1 deux points du plan, auxquels on associe respectivement les vecteurs \vec{u}_0 et \vec{u}_1 . Construire une courbe de Bézier duale passant par les points p_0 et p_1 et dont les vecteurs tangents en ces points sont respectivement proportionnels aux vecteurs \vec{u}_0 et \vec{u}_1 . ⊖

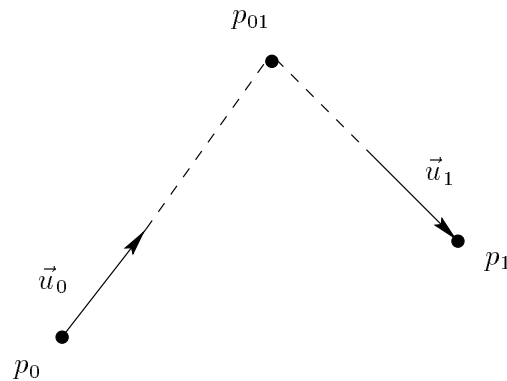


FIG. 2.1 – Données initiales

Dans toute la suite, on suppose que les systèmes considérés admettent des solutions uniques.

Soit le point p_{01} , point d'intersection des droites passant par les points p_0 et p_1 et dont les vecteurs directeurs sont respectivement proportionnels aux vecteurs \vec{u}_0 et \vec{u}_1 .

Avec le choix de la polarité comme dualité, on considère les droites D_0 , D_1 et D_{01} , images

duales respectives des points p_0 , p_1 et p_{01} . Elles sont caractérisées par:

$$\begin{aligned} D_0 &: \{m \in \mathbb{R}^2, \langle p_0, m \rangle = 1\}, \\ D_1 &: \{m \in \mathbb{R}^2, \langle p_1, m \rangle = 1\}, \\ D_{01} &: \{m \in \mathbb{R}^2, \langle p_{01}, m \rangle = 1\}. \end{aligned}$$

On définit ensuite les points d'intersections de ces droites comme suit:

$$\begin{aligned} q_0 &= D_0 \cap D_{01}, \\ q_1 &= D_1 \cap D_{01}, \\ q_{01} &= D_0 \cap D_1. \end{aligned}$$

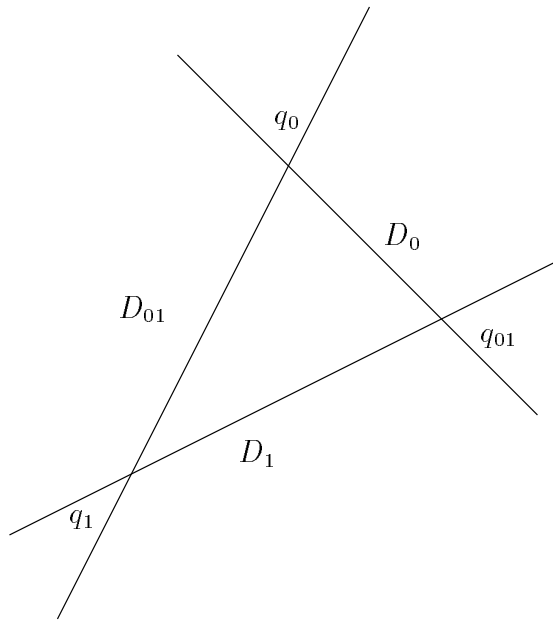


FIG. 2.2 – *Images duales des données primales*

Ces points d'intersection définis ci-dessus sont solutions des systèmes suivants:

$$\begin{cases} \langle q_0, p_0 \rangle = 1, \\ \langle q_0, p_{01} \rangle = 1, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \langle q_1, p_{01} \rangle = 1, \\ \langle q_1, p_1 \rangle = 1, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \langle q_{01}, p_0 \rangle = 1, \\ \langle q_{01}, p_1 \rangle = 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

On considère ensuite la courbe de Bézier quadratique suivante:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow \gamma(t) = (1-t)^2 q_0 + 2t(1-t)q_{01} + t^2 q_1. \end{aligned}$$

L'image duale de tout point $\gamma(t)$ est la droite $D_t = \mathcal{D}(\gamma(t))$ d'équation:

$$\langle (1-t)^2 q_0 + 2t(1-t)q_{01} + t^2 q_1, M \rangle = 1.$$

Quand t varie dans l'intervalle $[0, 1]$, ces droites forment une famille de droites qui dépendent du paramètre t . Leur enveloppe est une courbe Λ caractérisée par les deux équations suivantes:

$$\begin{aligned} \langle \gamma(t), \Lambda(t) \rangle &= 1, \\ \langle \gamma'(t), \Lambda(t) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Où $\gamma'(t)$ désigne la dérivée de γ , en t .

Λ est alors solution de:

$$\langle (1-t)^2 q_0 + 2t(1-t)q_{01} + t^2 q_1, \Lambda(t) \rangle = 1, \quad (2.4)$$

$$\langle -2(1-t)q_0 + (2-4t)q_{01} + 2tq_1, \Lambda(t) \rangle = 0. \quad (2.5)$$

A partir des équations (2.4) et (2.5), on déduit l'équation suivante:

$$\langle (1-t)^2 q_0 + 2t(1-t)q_{01} + t^2 q_1, \Lambda'(t) \rangle = 0. \quad (2.6)$$

Proposition 2

|| La courbe duale de la courbe de Bézier définie ci-dessus est une courbe paramétrée sur $[0, 1]$, dont les points aux extrémités sont p_0 et p_1 .

Preuve:

Vérifions que $\Lambda(0) = p_0$ et $\Lambda(1) = p_1$.

Pour $t = 0$ dans l'équation (2.4), on a:

$$\langle q_0, \Lambda(0) \rangle = 1.$$

L'équation (2.5) pour $t = 0$ nous donne:

$$\langle -2q_0 + 2q_{01}, \Lambda(0) \rangle = 0 \implies \langle q_0, \Lambda(0) \rangle = \langle q_{01}, \Lambda(0) \rangle.$$

Ainsi on a:

$$\begin{cases} \langle q_0, \Lambda(0) \rangle = 1, \\ \langle q_{01}, \Lambda(0) \rangle = 1. \end{cases}$$

Or, d'après (2.2) et (2.3), p_0 vérifie aussi le système précédent, qui est supposé avoir une solution unique. D'où :

$$\Lambda(0) = p_0.$$

Avec un raisonnement identique, on peut vérifier que $\Lambda(1) = p_1$.

D'où la proposition. \diamond

Proposition 3

|| La courbe duale de la courbe de Bézier définie précédemment est une courbe dont les vecteurs tangents aux extrémités sont respectivement proportionnels aux vecteurs \vec{u}_0 et \vec{u}_1 .

Preuve:

Vérifions que $\Lambda'(0)$ est proportionnel au vecteur \vec{u}_0 et que $\Lambda'(1)$ est proportionnel au vecteur \vec{u}_1 .

Pour $t = 0$, l'équation (2.6) nous donne :

$$\langle q_0, \Lambda'(0) \rangle = 0.$$

Cela signifie que les vecteurs $\Lambda'(0)$ et q_0 sont orthogonaux. Or q_0 est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}(q_0)$. Par suite $\Lambda'(0)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}(q_0)$. De plus, q_0 est l'intersection des droites D_0 et D_{01} , ce qui implique que $\mathcal{D}(q_0)$ est la droite passant par les points $\mathcal{D}(D_0)$ et $\mathcal{D}(D_{01})$.

Or

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(D_0) &= \mathcal{D}(\mathcal{D}(p_0)), \\ &= p_0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(D_{01}) &= \mathcal{D}(\mathcal{D}(p_{01})), \\ &= p_{01}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{D}(q_0)$ est la droite passant par les points p_0 et p_{01} . Comme \vec{u}_0 est un vecteur directeur de la droite passant par les points p_0 et p_{01} , alors $\Lambda'(0)$ est un vecteur proportionnel à \vec{u}_0 .

De la même manière, on vérifie que $\Lambda'(1)$ est un vecteur proportionnel à \vec{u}_1 . \diamond

Dans la suite, on donne quelques exemples de courbes duales de courbes de Bézier quadratiques, solution du problème posé.

Les courbes à droite sont les courbes duales et les courbes à gauche sont des courbes de Bézier quadratiques.

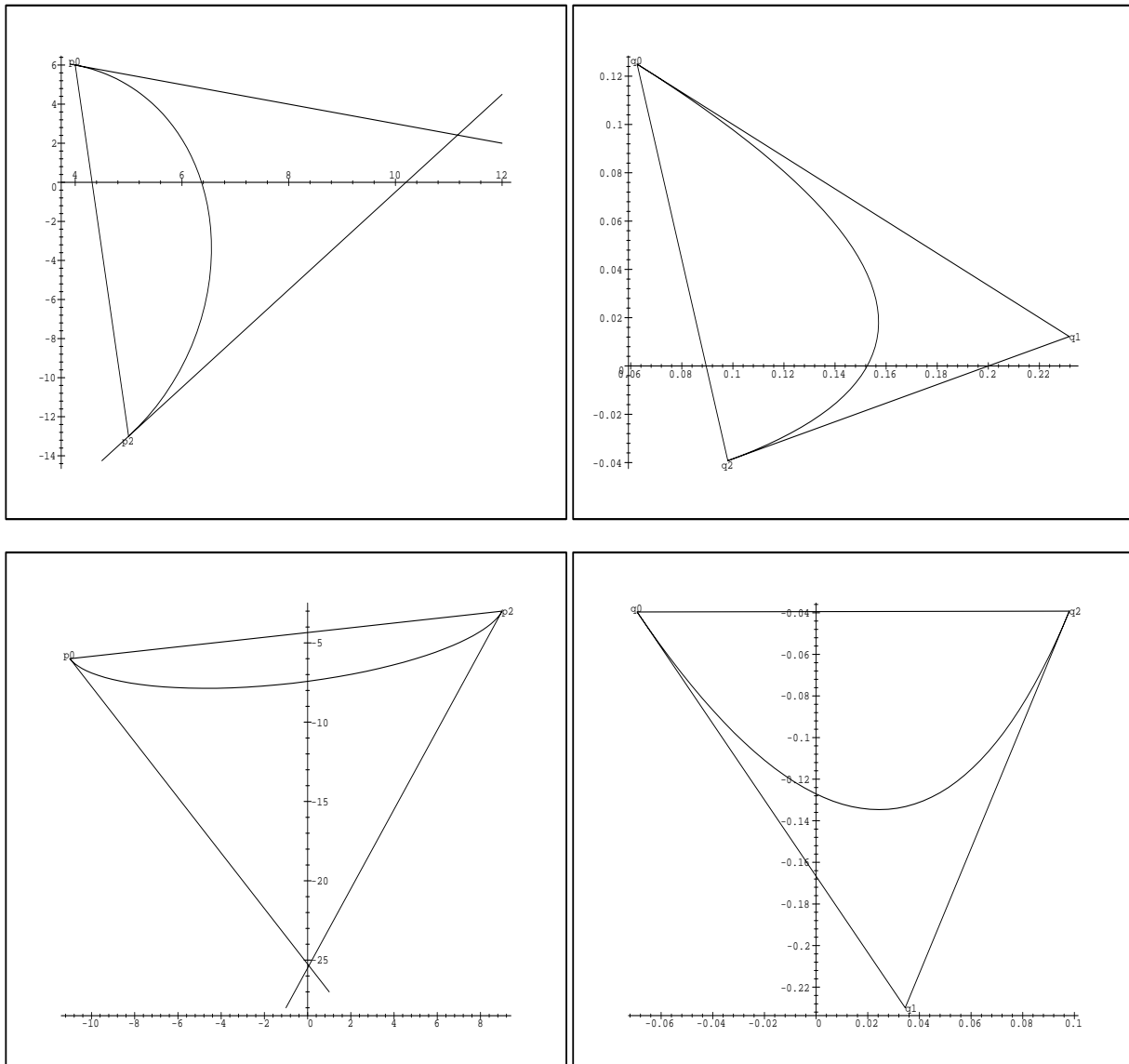


FIG. 2.3 – a) courbes primales b) courbes duales

2.1.2 Un autre exemple de problème d'interpolation

Dans un article, Carnicer[7] s'est proposé de résoudre un problème d'interpolation par des courbes 'duales'. Il a considéré la transformation géométrique qui à un point $p = (a, b)$ fait correspondre la droite d'équation $y = ax + b$. Cette transformation, comme on l'a vu dans le chapitre précédent, n'est pas une dualité géométrique car elle n'inverse pas la relation d'inclusion. Dans ce paragraphe, on se propose de résoudre le problème posé par Carnicer, mais en utilisant une dualité géométrique.

PROBLEME2

Trouver une fonction f de graphe convexe vérifiant les conditions d'interpolation suivantes:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= y_0, & f(x_1) &= y_1, \\ f'(x_0) &= m_0, & f'(x_1) &= m_1, \end{aligned}$$

avec

$$x_0 < x_1 \quad \text{et} \quad f : [x_0, x_1] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

⊖

Le graphe de f peut être représenté par une courbe régulière paramétrique \mathcal{C} telle que:

$$\mathcal{C}(\tau) = (\mathcal{C}_1(t), \mathcal{C}_2(t)) \quad t \in [0, 1].$$

$\mathcal{C}_1(t)$ et $\mathcal{C}_2(t)$ sont des fonctions C^1 , telles que: $\mathcal{C}'_1(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et telle que ces fonctions vérifient les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(0) &= x_0, & \mathcal{C}_1(1) &= x_1, \\ \mathcal{C}_2(0) &= y_0, & \mathcal{C}_2(1) &= y_1, \\ \mathcal{C}'_2(1) &= m_1 \mathcal{C}'_1(1), & \mathcal{C}'_2(0) &= m_0 \mathcal{C}'_1(0). \end{aligned}$$

f sera alors donnée par:

$$f = \mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_1^{-1} : [x_0, x_1] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dans toute la suite on considère d'une part, les points $p_0 = (x_0, y_0)$ et $p_1 = (x_1, y_1)$, d'autre part les droites T_0 et T_1 , droites tangentes à la courbe \mathcal{C} , respectivement aux points p_0 et p_1 .

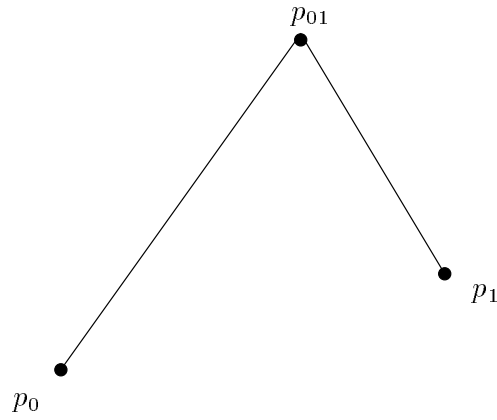
Les équations cartésiennes des droites T_0 et T_1 sont les suivantes:

$$T_0 : y = y_0 + m_0(x - x_0),$$

$$T_1 : y = y_1 + m_1(x - x_1).$$

Soit alors $p_{01} = (x_{01}, y_{01})$, le point d'intersection des droites T_0 et T_1 . Ses coordonnées sont les suivantes:

$$\begin{aligned} x_{01} &= \frac{1}{m_0 - m_1}(y_1 - y_0 + m_0x_0 - m_1x_1), \\ y_{01} &= \frac{1}{m_0 - m_1}(m_0y_1 - m_1y_0 + m_0m_1(x_0 - x_1)). \end{aligned}$$

FIG. 2.4 – *Données initiales*

Données duales

On considère les droites D_0 , D_1 et D_{01} , les droites duales respectives des points p_0 , p_1 et p_{01} . Ces droites duales sont définies par les équations cartésiennes suivantes:

$$D_0 : \langle p_0, m \rangle = 1,$$

$$D_1 : \langle p_1, m \rangle = 1,$$

$$D_{01} : \langle p_{01}, m \rangle = 1.$$

On pose:

$$q_0 = D_0 \cap D_{01},$$

$$q_1 = D_1 \cap D_{01},$$

$$q_{01} = D_0 \cap D_1.$$

Ces points d'intersection sont alors solutions des systèmes suivants:

$$\begin{cases} \langle q_0, p_0 \rangle = 1, \\ \langle q_0, p_{01} \rangle = 1, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \langle q_1, p_{01} \rangle = 1, \\ \langle q_1, p_1 \rangle = 1, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \langle q_{01}, p_0 \rangle = 1, \\ \langle q_{01}, p_1 \rangle = 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Soit , la courbe de Bézier quadratique définie par:

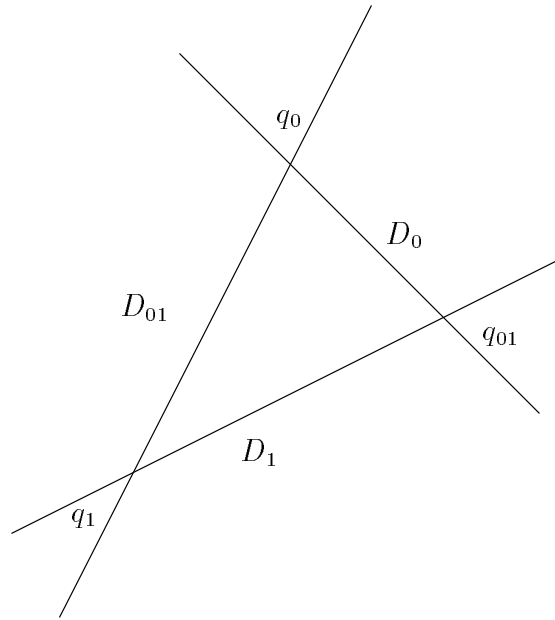


FIG. 2.5 – Données duales

$$\begin{aligned} \gamma, : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow \gamma(t) = (1-t)^2 q_0 + 2t(1-t)q_{01} + t^2 q_1. \end{aligned}$$

Soit $D_t = \mathcal{D}(\gamma(t))$ la droite duale du point $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$. $D_t = \mathcal{D}(\gamma(t))$ a pour équation cartésienne:

$$\langle (1-t)^2 q_0 + 2t(1-t)q_{01} + t^2 q_1, m \rangle = 1.$$

L'enveloppe de cette famille de droites est une courbe $\Lambda = (\Lambda_1(t), \Lambda_2(t))$ caractérisée par les deux équations suivantes:

$$\begin{aligned} \langle \gamma(t), \Lambda(t) \rangle &= 1, \\ \langle \gamma'(t), \Lambda(t) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

En remplaçant $\gamma(t)$ par sa valeur on a:

$$\begin{aligned} \langle (1-t)^2 q_0 + 2t(1-t)q_{01} + t^2 q_1, \Lambda(t) \rangle &= 1, \\ \langle -2(1-t)q_0 + (2-4t)q_{01} + 2tq_1, \Lambda(t) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

D'après les deux équations précédentes on a:

$$\langle (1-t)^2 q_0 + 2t(1-t)q_{01} + t^2 q_1, \Lambda'(t) \rangle = 0. \quad (2.10)$$

Avec le même raisonnement que dans le paragraphe précédent, on peut vérifier que la courbe Λ est une courbe paramétrée sur $[0, 1]$ interpolant les deux points p_0 et p_1 .

Proposition 4

|| La courbe Λ vérifie les conditions suivantes:

$$\Lambda'_2(0) = m_0 \Lambda'_1(0), \quad \Lambda'_2(1) = m_1 \Lambda'_1(1).$$

Preuve:

On pose:

$$\Lambda'(t) = (\Lambda'_1(t), \Lambda'_2(t)),$$

$$q_0 = (a_0, b_0), \quad q_{01} = (a_{01}, b_{01}), \quad q_1 = (a_1, b_1).$$

D'après l'équation (2.10)

$$\langle (1-t)^2 q_0 + 2t(1-t)q_{01} + t^2 q_1, \Lambda'(t) \rangle = 0.$$

$$((1-t)^2 a_0 + 2t(1-t)a_{01} + t^2 a_1) \Lambda'_1(t) + ((1-t)^2 b_0 + 2t(1-t)b_{01} + t^2 b_1) \Lambda'_2(t) = 0.$$

D'où, pour tout $t \in [0, 1]$ on a:

$$\Lambda'_2(t) = -\frac{(1-t)^2 a_0 + 2t(1-t)a_{01} + t^2 a_1}{(1-t)^2 b_0 + 2t(1-t)b_{01} + t^2 b_1} \Lambda'_1(t).$$

En particulier pour $t = 0$ et $t = 1$ on a:

$$\Lambda'_2(0) = -\frac{a_0}{b_0} \Lambda'_1(0),$$

$$\Lambda'_2(1) = -\frac{a_1}{b_1} \Lambda'_1(1).$$

Calculons d'abord a_0 , b_0 , a_1 et b_1 . Pour cela supposons que tous les déterminants utilisés dans la suite, sont non nuls.

– Calcul des coordonnées (a_0, b_0) du point q_0 :

On sait que le point q_0 est défini par:

$$\begin{cases} \langle q_0, p_0 \rangle = 1, \\ \langle q_0, p_{01} \rangle = 1. \end{cases}$$

Ce qui signifie que les coordonnées (a_0, b_0) sont solutions du système:

$$\begin{cases} x_0 a_0 + y_0 b_0 = 1, \\ x_{01} a_0 + y_{01} b_0 = 1. \end{cases}$$

Posons

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_{01} & y_{01} \end{vmatrix} \\ &= x_0 y_{01} - y_0 x_{01}\end{aligned}$$

Les coordonnées du point q_0 sont données par:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{y_{01} - y_0}{\Delta_1}, \\ b_0 = \frac{x_0 - x_{01}}{\Delta_1}. \end{cases}$$

Or, on a:

$$\begin{aligned}y_{01} - y_0 &= \frac{m_0}{m_0 - m_1}((y_1 - y_0) + m_1(x_0 - x_1)), \\ x_0 - x_{01} &= \frac{1}{m_0 - m_1}((y_0 - y_1) - m_1(x_0 - x_1)).\end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned}\Lambda'_2(0) &= -\frac{a_0}{b_0}\Lambda'_1(0), \\ &= \frac{-m_0}{m_0 - m_1}((y_1 - y_0) + m_1(x_0 - x_1))\frac{m_0 - m_1}{(y_0 - y_1) - m_1(x_0 - x_1)}\Lambda'_1(0), \\ &= m_0\frac{m_0(y_0 - y_1) - m_1(x_0 - x_1)}{(y_0 - y_1) - m_1(x_0 - x_1)}\Lambda'_1(0), \\ &= m_0\Lambda'_1(0).\end{aligned}$$

– calcul des coordonnées (a_1, b_1) du point q_1 :

On utilise le même raisonnement pour $\Lambda'_2(1)$

q_1 est défini par:

$$\begin{cases} \langle q_1, p_{01} \rangle = 1, \\ \langle q_1, p_1 \rangle = 1, \\ \begin{cases} x_1 a_1 + y_1 b_1 = 1, \\ x_{01} a_1 + y_{01} b_1 = 1. \end{cases} \end{cases}$$

Posons

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_{01} & y_{01} \end{vmatrix}, \\ &= x_1 y_{01} - y_1 x_{01}.\end{aligned}$$

Avec la méthode de Cramer, on trouve la solution du système précédent:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{y_{01} - y_1}{\Delta_2}, \\ b_1 = \frac{x_1 - x_{01}}{\Delta_2}. \end{cases}$$

On remplace x_{01} et x_{01} par leurs valeurs déjà calculées:

$$y_{01} - y_1 = \frac{m_1}{m_0 - m_1}((y_1 - y_0) + m_0(x_0 - x_1)),$$

$$x_1 - x_{01} = \frac{1}{m_0 - m_1}((y_0 - y_1) - m_0(x_0 - x_1)).$$

D'où, on a la valeur de $\Lambda'_2(1)$ en fonction de $\Lambda'_1(1)$:

$$\begin{aligned} \Lambda'_2(1) &= \frac{-a_1}{b_1} \Lambda'_1(1), \\ &= \frac{m_1((y_0 - y_1) - m_0(x_0 - x_1))}{(y_0 - y_1) - m_0(x_0 - x_1)} \Lambda'_1(1), \\ &= m_1 \Lambda'_1(1). \end{aligned}$$

En conclusion, on a les relations suivantes:

$$\Lambda'_2(0) = m_0 \Lambda'_1(0), \quad \Lambda'_2(1) = m_1 \Lambda'_1(1).$$

◇

Finalement on a: La courbe paramétrique \mathcal{C} , définie précédemment est une courbe qui interpole les données primales.

2.1.3 Détermination d'une courbe duale d'une courbe de Bézier quadratique

On sait que la courbe duale d'une courbe , quelconque est une courbe Λ solution du système suivant:

$$\begin{cases} \langle \cdot, (t), \Lambda(t) \rangle = 1, \\ \langle \cdot, '(t), \Lambda(t) \rangle = 0. \end{cases}$$

En posant , $= (, {}_1, {}_2)$ et $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$, on peut expliciter le système précédent, pour tout $t \in [0, 1]$, par:

$$\begin{cases} , {}_1(t) \Lambda_1(t) + , {}_2(t) \Lambda_2(t) = 1, \\ , {}'_1(t) \Lambda_1(t) + , {}'_2(t) \Lambda_2(t) = 0. \end{cases}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(t) &= \frac{, {}'_2(t)}{\Delta(t)}, \\ \Lambda_2(t) &= \frac{-, {}'_1(t)}{\Delta(t)}. \end{aligned}$$

Où

$$\Delta(t) = ,_1(t), ' _2(t) - , ' _1(t), _2(t).$$

Remarque

En général la courbe duale d'une courbe polynomiale est une courbe rationnelle de degré $[(n-1)/(2n-1)]$.

En gardant les mêmes notations que précédemment, on cherche à déterminer explicitement la courbe duale dans le cas où la courbe primale est une courbe de Bézier quadratique.

Calcul de $\Delta(t)$

En utilisant les mêmes notations que précédemment, on peut calculer Δ comme suit:

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= ((1-t)^2 a_0 + 2t(1-t)a_{01} + t^2 a_1)(2(1-t)(b_{01} - b_0) + 2t(b_1 - b_{01})) \\ &\quad - ((1-t)^2 b_0 + 2t(1-t)b_{01} + t^2 b_1)(2(1-t)(a_{01} - a_0) + t(a_1 - a_{01})) \\ &= 2(1-t)^3 a_0(b_{01} - b_0) + 2t(1-t)^2 a_0(b_1 - b_{01}) + 4t(1-t)^2 a_{01}(b_{01} - b_0) \\ &\quad + 4t^2(1-t)a_{01}(b_1 - b_{01}) + 2t^2(1-t)a_1(b_{01} - b_0) + 2t^3 a_1(b_1 - b_{01}) \\ &\quad - 2(1-t)^3 b_0(a_{01} - a_0) - 2t(1-t)^2 b_0(a_1 - a_{01}) - 4t(1-t)^2 b_{01}(a_{01} - a_0) \\ &\quad - 4t^2(1-t)b_{01}(a_1 - a_{01}) - 2t^2(1-t)b_1(a_{01} - a_0) - 2t^3 b_1(a_1 - a_{01}) \\ &= 2(1-t)^3 a_0 b_{01} - 2(1-t)^3 a_0 b_0 + 2t(1-t)^2 a_0 b_1 - 2t(1-t)^2 a_0 b_{01} \\ &\quad + 4t(1-t)^2 a_{01} b_{01} + 4t^2(1-t)a_{01} b_1 - 4t^2(1-t)a_{01} b_0 + 2t^2(1-t)a_1 b_{01} \\ &\quad - 2t^2(1-t)a_1 b_0 + 2t^3 a_1 b_1 - 2t^3 a_1 b_{01} - 2(1-t)^3 b_0 a_{01} \\ &\quad + 2(1-t)^3 b_0 a_0 - 2t(1-t)^2 b_0 a_1 + 2t(1-t)^2 b_0 a_{01} - 4t(1-t)^2 b_{01} a_{01} \\ &\quad + 4t(1-t)^2 b_{01} a_0 - 4t^2(1-t)b_{01} a_1 + 4t^2(1-t)b_{01} a_{01} - 2t^2(1-t)b_1 a_{01} \\ &\quad + 2t^2(1-t)b_1 a_0 - 2t^3 b_1 a_1 + 2t^3 b_1 a_{01} \\ &= 2(1-t)^3 a_0 b_{01} - 2(1-t)^3 b_0 a_{01} + 2t(1-t)^2 a_0 b_1 - 2t(1-t)^2 a_0 b_{01} \\ &\quad - 4t(1-t)^2 a_{01} b_0 + 4t^2(1-t)a_{01} b_1 + 2t^2(1-t)a_1 b_{01} \\ &\quad - 2t^2(1-t)a_1 b_0 - 2t^3 a_1 b_{01} - 2t(1-t)^2 b_0 a_1 \\ &\quad + 2t(1-t)^2 b_0 a_{01} + 4t(1-t)^2 b_{01} a_0 - 4t^2(1-t)b_{01} a_1 \\ &\quad - 2t^2(1-t)b_1 a_{01} + 2t^2(1-t)b_1 a_0 + 2t^3 b_1 a_{01} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(t) &= a_0b_1(2(1-t)^3 + 4t(1-t)^2 - 2t(1-t)^2) + b_0a_{01}(2t(1-t)^2 - 2(1-t)^3 - 4t(1-t)^2) \\
&\quad + a_0b_1(2t(1-t)^2 + 2t^2(1-t)) + a_1b_0(-2t(1-t)^2 - 2t^2(1-t)) \\
&\quad + a_1b_{01}(2t^2(1-t) - 2t^3 - 4t^2(1-t)) + a_{01}b_1(-2t^2(1-t) + 2t^3 + 4t^2(1-t)) \\
&= 2(1-t)^2(a_0b_{01} - a_{01}b_0) + 2t(1-t)(a_0b_1 - a_1b_0) + 2t^2(a_1b_{01} - a_{01}b_1).
\end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\Lambda_1(t) = \frac{(1-t)(b_{01} - b_0) + t(b_1 - b_{01})}{(1-t)^2(a_0b_{01} - a_{01}b_0) + t(1-t)(a_0b_1 - a_1b_0) + t^2(a_1b_{01} - a_{01}b_1)}$$

$$\Lambda_2(t) = \frac{(1-t)(a_0 - b_{01}) + t(a_{01} - a_1)}{(1-t)^2(a_0b_{01} - a_{01}b_0) + t(1-t)(a_0b_1 - a_1b_0) + t^2(a_1b_{01} - a_{01}b_1)}.$$

On remarque que la courbe duale d'une courbe de Bézier quadratique est une courbe rationnelle de degré $[1/2]$

2.1.4 Quelques propriétés générales d'une courbe duale quelconque: interpolation et convexité

Dualité et interpolation

Soit \mathcal{D} une dualité géométrique (par exemple la polarité). On a défini dans le chapitre précédent une courbe duale d'une courbe paramétrique quelconque à l'aide d'une famille de droites duales. La proposition suivante est une conséquence de ce point de vue :

Proposition 5

$\left\| \begin{array}{l} \text{La courbe duale d'une courbe qui passe par un point } p \text{ est une courbe qui est} \\ \text{tangente à la droite duale du point } p. \\ \text{La courbe duale d'une courbe qui est tangente à une droite } D \text{ est une courbe} \\ \text{qui passe par le dual de la droite } D. \end{array} \right.$

Preuve:

Sans perdre de généralité, on prend comme dualité géométrique la polarité. Soit γ , une courbe paramétrique quelconque définie sur un intervalle $[a, b]$. Soit $\mathcal{D}(\gamma, \cdot)$ sa courbe duale. On sait que cette dernière vérifie le système suivant pour tout $t \in [a, b]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \gamma(t), \mathcal{D}(\gamma, \cdot)(t) \rangle = 1, \\ \langle \gamma(t), \mathcal{D}(\gamma, \cdot)'(t) \rangle = 0, \\ \langle \gamma'(t), \mathcal{D}(\gamma, \cdot)(t) \rangle = 0, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

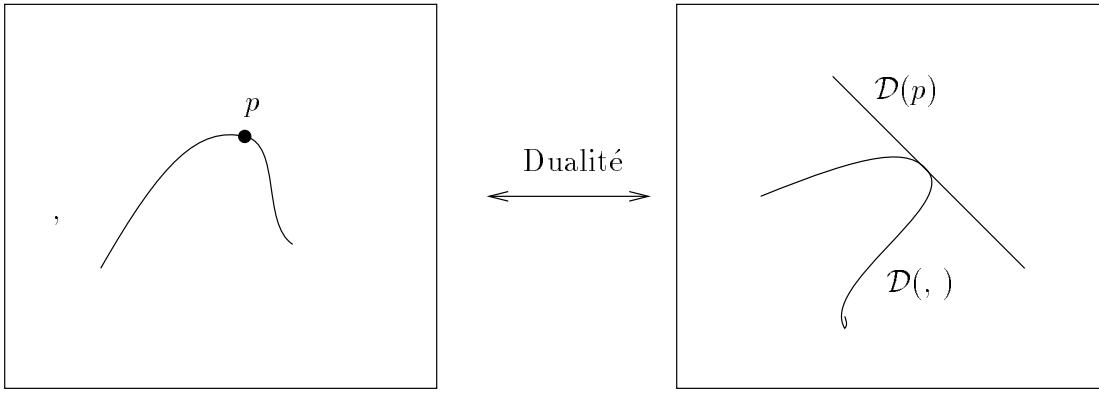


FIG. 2.6 – Relation d'interpolation entre une courbe et sa courbe duale

où $\mathcal{D}(,)'(t)$ désigne la dérivée de $\mathcal{D}(,)$ à l'instant t , et $, '(t)$ désigne la dérivée de $,$ à l'instant t .

Soit p un point du plan, le dual de ce point est la droite $\mathcal{D}(p)$ définie par:

$$\mathcal{D}(p) : \langle p, m \rangle = 1, \quad \forall m \in \mathcal{D}(p).$$

Supposons qu'il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que:

$$, (t_0) = p,$$

Alors par continuité du système précédent, on a:

$$\begin{aligned} \langle , (t_0), \mathcal{D}(,)'(t_0) \rangle &= 0, \\ \langle p, \mathcal{D}(,)'(t_0) \rangle &= 0, \end{aligned}$$

Par suite, $\mathcal{D}(,)'(t_0)$ est un vecteur normal à p . Or ce dernier est un vecteur normal de la droite $\mathcal{D}(p)$. Par conséquent, $\mathcal{D}(,)'(t_0)$ est un vecteur directeur de la droite duale de p . D'où la première partie de la proposition.

Avec le même raisonnement et en remarquant que dans le système (2.11) on peut intervertir les rôles des deux courbes $,$ et $\mathcal{D}(,)$. D'où la deuxième partie de la proposition. \diamond

Interpolation de deux points et deux tangentes par une courbe duale

Dans un paragraphe antérieur, on a utilisé des courbes duales de courbe de Bézier pour résoudre des problèmes d'interpolation. En fait, les propriétés d'interpolation sont valables pour n'importe quelle courbe vérifiant certaines conditions d'interpolation. On considère le problème d'interpolation suivant:

PROBLÈME'

Soient p_0 et p_1 deux points du plan, auxquels on associe respectivement les vecteurs \vec{u}_0 et \vec{u}_1 . Construire une courbe duale passant par les points p_0 et p_1 et dont les vecteurs tangents en ces points sont respectivement proportionnels aux vecteurs \vec{u}_0 et \vec{u}_1 . \ominus

Dans la suite, on se propose de chercher une courbe duale qui interpole les données du problème précédent. Pour cela, on considère le point p_{01} , point d'intersection des droites passant par les points p_0 et p_1 et dont les vecteurs directeurs sont respectivement proportionnels aux vecteurs \vec{u}_0 et \vec{u}_1 .

On considère les droites D_0 , D_1 et D_{01} , images duales respectives des points p_0 , p_1 et p_{01} . On définit ensuite les points d'intersections de ces droites comme suit:

$$q_0 = D_0 \cap D_{01},$$

$$q_1 = D_1 \cap D_{01},$$

$$q_{01} = D_0 \cap D_1.$$

Soit γ , une courbe quelconque paramétrée sur un intervalle $[a, b]$. Supposons d'une part que cette courbe passe par les points q_0 et q_1 pour les paramètres respectifs a et b , et d'autre part qu'elle admet comme tangentes en ces points les droites D_0 et D_1 , c'est-à-dire:

$$\gamma'(a) = q_0, \quad \gamma'(b) = q_1, \quad (2.12)$$

$$\gamma'(a) = \alpha(q_{01} - q_0), \quad \gamma'(b) = \beta(q_1 - q_{01}). \quad (2.13)$$

avec α et β réels

Proposition 6

|| La courbe duale d'une courbe γ , vérifiant les conditions (2.12) et (2.13) est une courbe qui interpole les données du problème **PROBLÈME'**.

Preuve:

Les deux points d'interpolation de la courbe γ , vérifient:

$$q_0 = D_0 \cap D_{01},$$

$$q_1 = D_1 \cap D_{01}.$$

D'après les propriétés de la dualité on sait que le dual de l'intersection de deux droites est une droite joignant les points duaux des droites considérées, c'est-à-dire:

$$\mathcal{D}(q_0) = (\mathcal{D}(D_0)\mathcal{D}(D_{01})),$$

$$\mathcal{D}(q_1) = (\mathcal{D}(D_1)\mathcal{D}(D_{01})).$$

Or, d'après la propriété d'involution de la dualité on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(D_0) &= \mathcal{D}(\mathcal{D}(p_0)), \\ &= p_0, \\ \mathcal{D}(D_1) &= \mathcal{D}(\mathcal{D}(p_1)), \\ &= p_1, \\ \mathcal{D}(D_{01}) &= \mathcal{D}(\mathcal{D}(p_{01})), \\ &= p_{01}.\end{aligned}$$

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(q_0) &= (p_0p_{01}), \\ \mathcal{D}(q_1) &= (p_1p_{01}).\end{aligned}$$

La courbe γ , passe par les points q_0 et q_1 , alors d'après la proposition(5) sa courbe duale est tangente aux droites duales de ces points à savoir les droites (p_0p_{01}) et (p_1p_{01}) . La courbe γ , est tangentes aux droites D_0 et D_1 , par suite, d'après la proposition(5), la courbe duale de la courbe γ , passe par les points p_0 et p_1 . D'où la proposition (6). \diamond

Dualité et convexité

Définition 22

|| Soit γ , une courbe quelconque du plan, et soit Δ une tangente quelconque à la courbe γ , en un point p .
|| Si, pour toute tangente Δ , tous les points (distincts de p) de la courbe γ , appartiennent à un même demi-espace défini par Δ , alors la courbe γ , sera dite convexe.

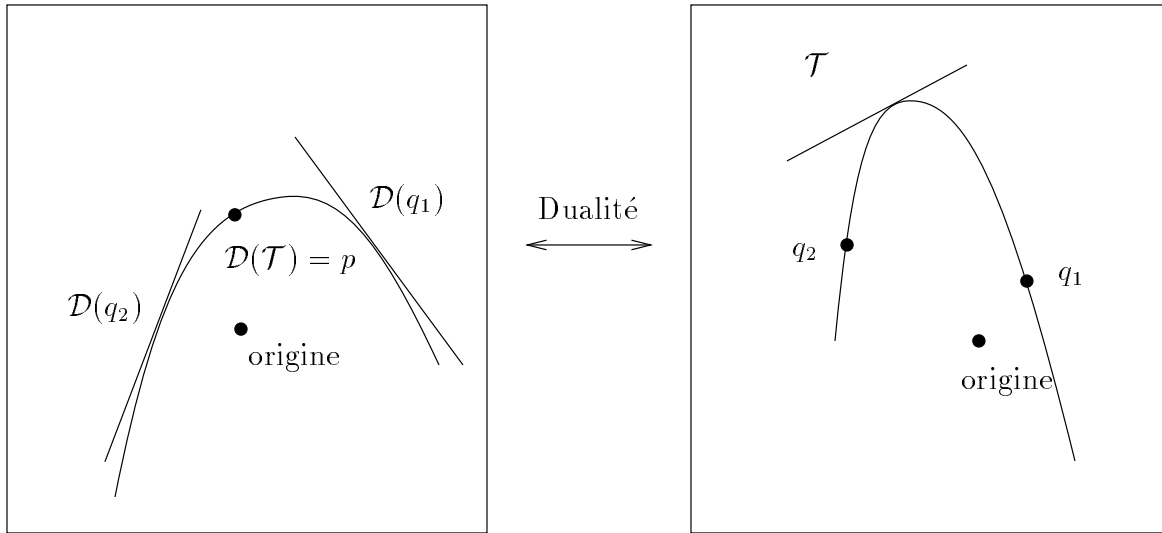
Proposition 7

|| Avec un choix convenable de l'origine, la courbe duale d'une courbe convexe est une courbe convexe.

Preuve:

Soit γ , une courbe quelconque convexe. Un choix convenable de l'origine veut dire que l'origine est choisie telle qu'aucune tangente à γ , ne passe par l'origine, ce qui signifie que pour deux droites tangentes quelconques à la courbe γ , on a l'une des deux possibilités suivantes:

1. soit tous les points de la courbe se trouvent dans les mêmes demi-espaces négatifs définis par les tangentes considérées.


 FIG. 2.7 – *Propriété de convexité*

2. soit tous les points de la courbe se trouvent dans les mêmes demi-espaces positifs définis par les tangentes considérées.

Supposons, sans perdre de généralité, que la courbe \mathcal{C} vérifie la première propriété citée ci-dessus. Soit $\mathcal{D}(\cdot)$ sa courbe duale.

Montrons que $\mathcal{D}(\cdot)$ est convexe.

Soit \mathcal{T} une tangente quelconque à la courbe $\mathcal{D}(\cdot)$. Alors $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ est un point de la courbe \mathcal{C} . Posons $\mathcal{D}(\mathcal{T}) = p$ et montrons que tous les points de la courbe $\mathcal{D}(\cdot)$ se trouvent dans un même demi-espace.

Soient q_1 et q_2 deux points quelconques de la courbe $\mathcal{D}(\cdot)$. $\mathcal{D}(q_1)$ et $\mathcal{D}(q_2)$ sont deux droites tangentes à la courbe \mathcal{C} . Or \mathcal{C} est une courbe convexe, par conséquent on a :

$$\forall M \in \mathcal{C}, \quad M \in (\mathcal{D}(q_1))^- ,$$

et

$$\forall M \in \mathcal{C}, \quad M \in (\mathcal{D}(q_2))^- .$$

ces dernières propriétés sont vraies pour tout point M de \mathcal{C} , en particulier pour le point p . Alors d'après les caractéristiques de la dualité, on a :

$$\begin{aligned} p \in (\mathcal{D}(q_1))^- &\iff \mathcal{D}(\mathcal{D}(q_1)) \in \mathcal{D}(p)^- , \\ &\iff q_1 \in \mathcal{D}(p)^- , \\ &\iff q_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{D}(\mathcal{T}))^- , \\ &\iff q_1 \in \mathcal{T}^- . \end{aligned}$$

De même on a :

$$p \in (\mathcal{D}(q_2))^- \iff q_2 \in \mathcal{T}^-.$$

Par conséquent, deux points quelconques de la courbe duale $\mathcal{D}(\cdot)$ se trouvent dans le même demi-espace défini par la tangente \mathcal{T} . D'où, la courbe duale $\mathcal{D}(\cdot)$ est convexe. \diamond

2.1.5 Interpolation: cas particulier de tangentes parallèles

Dans ce paragraphe, on se donne p_0 et p_2 deux points du plan, auxquels on associe respectivement deux vecteurs \vec{u}_0 et \vec{u}_2 supposés liés. On considère ensuite L_0 et L_2 les droites passant respectivement par les points p_0 et p_2 , et dont les vecteurs directeurs respectifs sont \vec{u}_0 et \vec{u}_2 . La droite passant par les deux points p_0 et p_2 sera notée par L_1 (voir fig: 2.8).

Les vecteurs \vec{u}_0 et \vec{u}_2 étant liés, les droites L_0 et L_2 sont parallèles. On cherche à trouver une courbe duale de Bézier qui interpole les deux points p_0 et p_2 , et dont les tangentes en ces points sont respectivement les droites L_0 et L_2 .

Pour cela, on procède dualement, on associe à chaque droite L_i , $i = 0..2$, son image duale

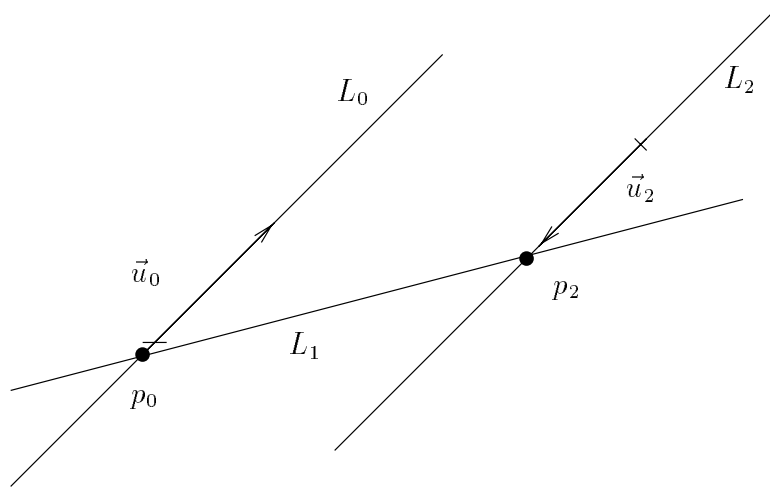


FIG. 2.8 – tangentes parallèles

$q_i = \mathcal{D}(L_i)$. D'après les propriétés de la dualité, les points q_0 et q_2 et l'origine sont alignés.

Avec ces données duales on peut définir une courbe de Bézier quadratique, sur l'intervalle $[0, 1]$:

$$, (t) = (1 - t)^2 q_0 + 2t(1 - t)q_1 + t^2 q_2.$$

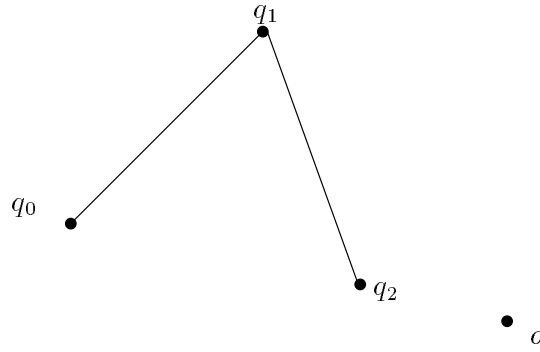


FIG. 2.9 – images duales des droites primales

Cette dernière interpole les points q_0 et q_2 , images duales des droites L_0 et L_2 . On construit ensuite la courbe $\mathcal{D}(,)$, la courbe duale de la courbe $, ,$ définie par:

$$\begin{cases} \langle , (t), \mathcal{D}(,)(t) \rangle = 1, \\ \langle , '(t), \mathcal{D}(,)(t) \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

On a la proposition suivante:

Proposition 8

|| La courbe duale $\mathcal{D}(,)$, définie par le système (2.14), interpole les points p_0 et p_2 , et admet comme tangentes respectives en ces points les droites L_0 et L_2 .

Preuve:

D'après le système (2.14) on a l'équation suivante:

$$\langle , (t), \mathcal{D}(,)'(t) \rangle = 0. \quad (2.15)$$

Pour $t = 0$, les équations du système (2.14) donnent:

$$\begin{cases} \langle , (0), \mathcal{D}(,)(0) \rangle = 1, \\ \langle , '(0), \mathcal{D}(,)(0) \rangle = 0. \end{cases}$$

Ce qui implique que:

$$\begin{cases} \langle q_0, \mathcal{D}(,)(0) \rangle = 1, \\ \langle q_1, \mathcal{D}(,)(0) \rangle = 1. \end{cases}$$

En d'autres termes cela veut dire que:

$$\mathcal{D}(,)(0) \in \mathcal{D}(q_0) \cap \mathcal{D}(q_1).$$

Or $\mathcal{D}(q_0) = L_0$ et $\mathcal{D}(q_1) = L_1$, par suite on a :

$$\mathcal{D}(,)(0) \in L_0 \cap L_1.$$

Par conséquent, on a :

$$\mathcal{D}(,)(0) = p_0.$$

Vérifions maintenant que L_0 est la tangente à la courbe $\mathcal{D}(,)$ au point p_0 .

Pour $t = 0$ dans l'équation (2.15), on a :

$$\langle (, (0), \mathcal{D}(,)'(0) \rangle = 0,$$

autrement dit on a :

$$\langle q_0, \mathcal{D}(,)'(0) \rangle = 0.$$

Cette dernière équation signifie que le vecteur dérivé $\mathcal{D}(,)'(0)$ est orthogonal au vecteur q_0 . Or, q_0 est un vecteur normal de sa droite duale L_0 . Par suite, $\mathcal{D}(,)'(0)$ est un vecteur directeur de la droite L_0 . D'où, L_0 est la tangente à la courbe $\mathcal{D}(,)$ au point p_0 .

Avec un raisonnement similaire, on peut vérifier que $\mathcal{D}(,)(1) = p_2$, et que la droite L_2 est la tangente à la courbe $\mathcal{D}(,)$ au point p_2 . ◇

Dans la suite, on donne quelques exemples de courbes duales de courbes de Bézier quadratiques, solution du problème posé.

Les courbes à gauche sont les courbes duales et les courbes à droite sont des courbes de Bézier quadratiques.

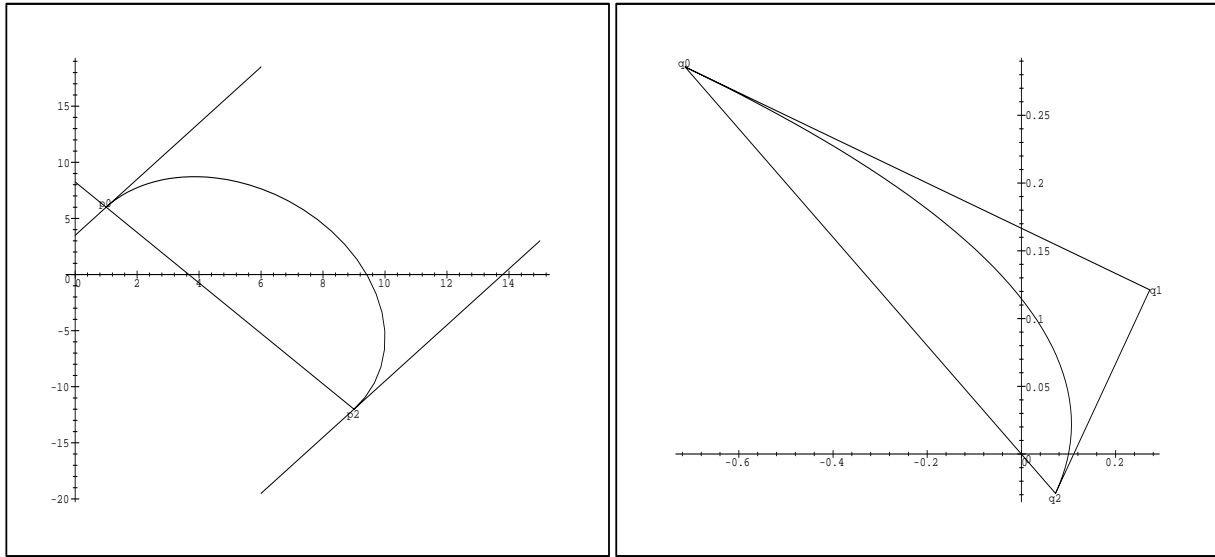


FIG. 2.10 – a) courbe duale avec tangentes parallèles b) courbe de Bézier quadratique.

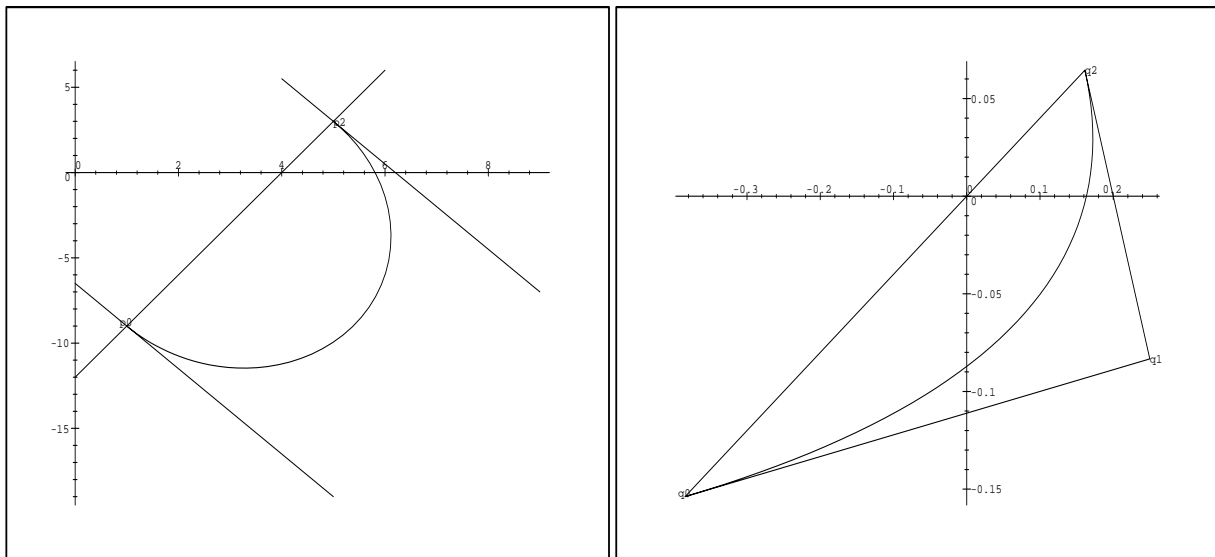
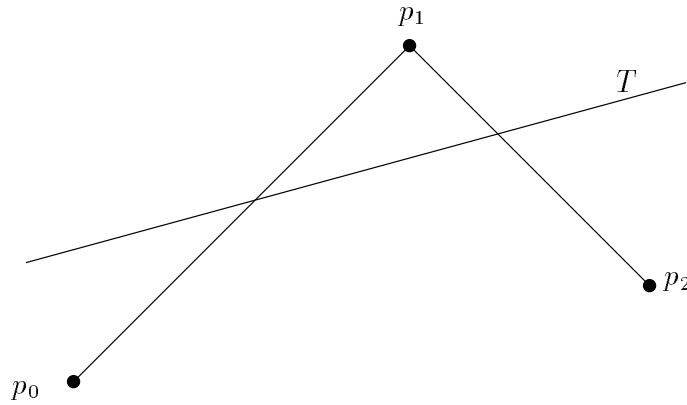


FIG. 2.11 – a) courbe duale avec tangentes parallèles b) courbe de Bézier quadratique.

2.1.6 Interpolation de deux points et trois tangentes

Dans ce paragraphe, on se propose de résoudre le problème suivant:

FIG. 2.12 – Données du problème ($\mathcal{TAN}\mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{N}\mathcal{T}\mathcal{E}$) $(\mathcal{TAN}\mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{N}\mathcal{T}\mathcal{E})$

Soient p_0 et p_2 deux points quelconques associés respectivement à deux vecteurs non liés \vec{u}_0 et \vec{u}_2 . Soit p_1 le point d'intersection de la droite passant par p_0 et dont le vecteur directeur est \vec{u}_0 et de celle passant par p_2 et admettant \vec{u}_2 comme vecteur directeur. On considère T une droite quelconque du plan telle que:

- T n'intersecte pas le segment dont les extrémités sont les points p_0 et p_2 ,
- T coupe les droites (p_0, \vec{u}_0) et (p_2, \vec{u}_2) en deux points distincts de p_1 .

Trouver une courbe duale d'une conique interpolant les points p_0 et p_2 dont les vecteurs tangents en ces points sont liés respectivement aux vecteurs \vec{u}_0 et \vec{u}_2 et telle que cette courbe soit tangente à la droite T . \ominus

On considère d'une part les droites L_i , pour $i = 0, 1, 2$, droites duales des points p_i , et d'autre part les points d'intersection de ces droites $q_i = L_i \cap L_{i+1}$, $i = 0, 1, 2$, avec $L_3 = L_0$. Soit q l'image duale de la droite T .

On peut formuler le problème dual de $(\mathcal{TAN}\mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{N}\mathcal{T}\mathcal{E})$ de la manière suivante:

 $\mathcal{D}(\mathcal{TAN}\mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{N}\mathcal{T}\mathcal{E})$

Trouver une courbe qui interpole les points q_0 et q_1 admettant les droites L_0 et L_2 comme tangentes respectives et passant par le point q . \ominus

Etude des relations de position entre la droite T et son dual

– 1^{ier} cas (voir fig: 2.13)

- l'origine O est à l'intérieur du triangle $p_0p_1p_2$,

- le point p_1 est dans le demi-espace négatif défini par la droite T .

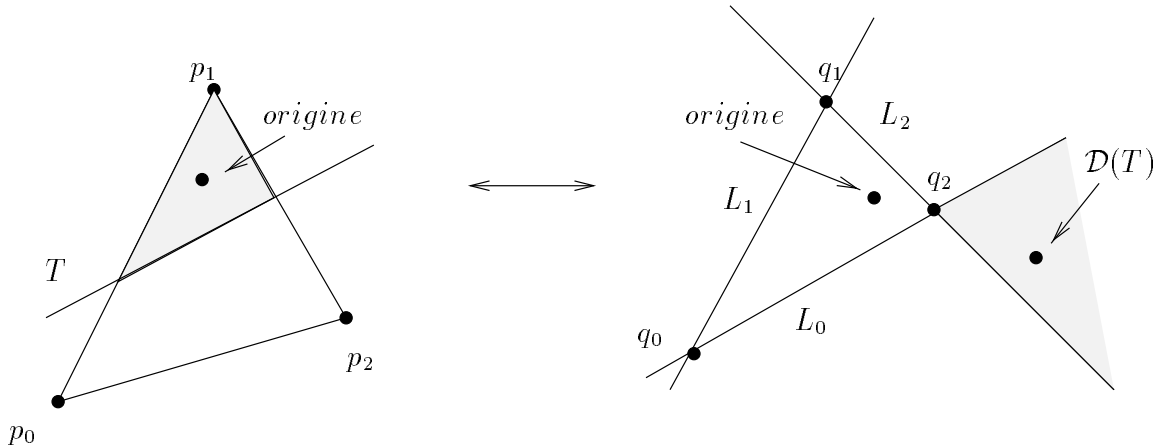


FIG. 2.13 - 1^{ère} cas

On sait d'une part que l'origine reste aussi à l'intérieur du triangle dual $q_0q_1q_2$, d'autre part d'après la propriété de conservation de la position de la dualité, on a:

$$\begin{cases} p_1 \in T^- \\ p_0 \in T^+ \\ p_2 \in T^+ \end{cases} \iff \mathcal{D}(T) \in L_1^- \cap L_0^+ \cap L_2^+.$$

Or, la courbe primale doit être une conique interpolant les points q_0 et q_1 , et tangente aux droites L_0 et L_2 . Elle doit donc être à l'intérieur du cône $L_0^- \cap L_2^-$. Cependant le point dual $\mathcal{D}(T)$ appartient au cône $L_0^+ \cap L_2^+$

Donc il n'existe pas de solution.

- 2^{ème} cas (voir fig: 2.14)

- l'origine O est à l'intérieur du triangle $p_0p_1p_2$,
- le point p_1 est dans le demi-espace positif défini par la droite T .

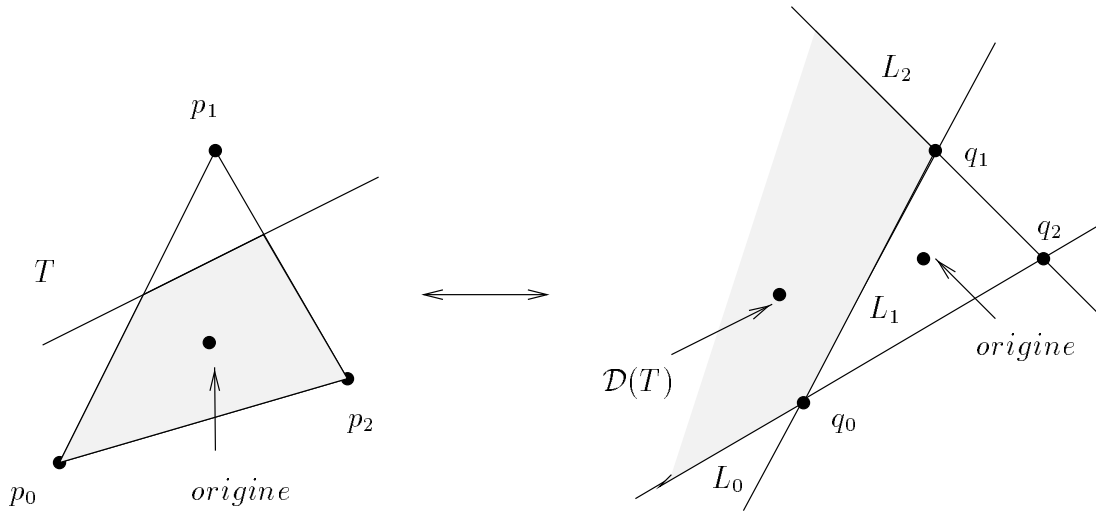
Alors on a:

$$\begin{cases} p_1 \in T^+ \\ p_0 \in T^- \\ p_2 \in T^- \end{cases} \iff \mathcal{D}(T) \in L_1^+ \cap L_0^- \cap L_2^-.$$

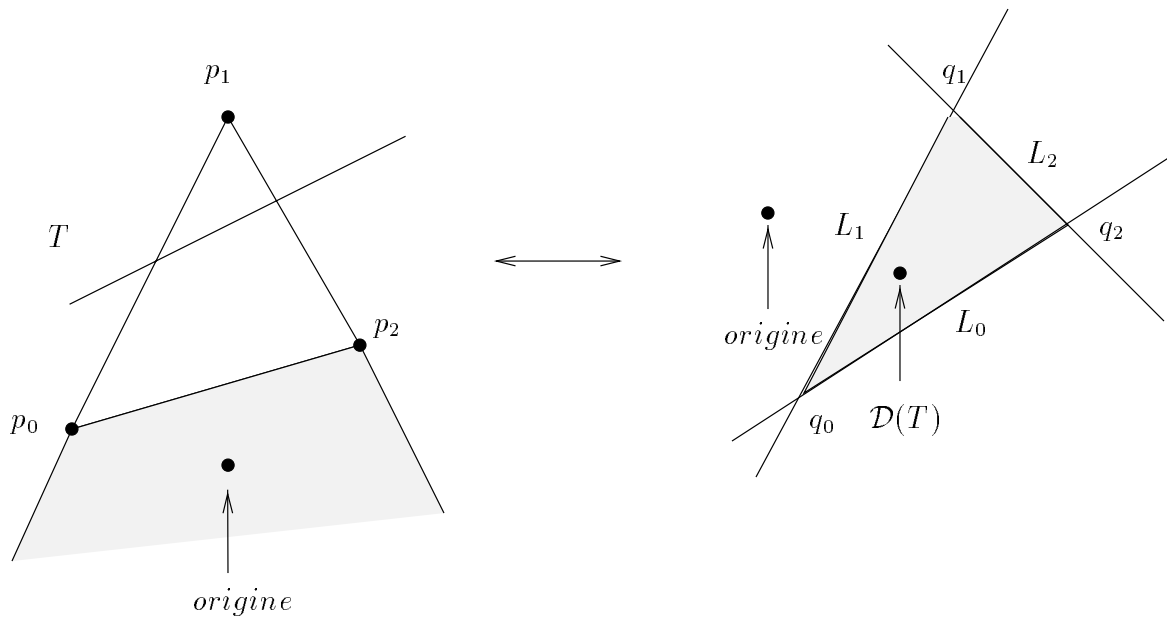
Ce qui signifie que le point dual $\mathcal{D}(T)$ appartient au cône $L_0^- \cap L_2^-$. Par suite, il existe une solution.

- 3^{ème} cas (voir fig: 2.15)

- l'origine O est à l'extérieur du triangle $p_0p_1p_2$, mais à l'intérieur du cône de sommet p_1 et passant par les points p_0 et p_2


 FIG. 2.14 – 2^{ème} cas

– le point p_1 est dans le demi-espace positif défini par la droite T .


 FIG. 2.15 – 3^{ème} cas

Alors on a :

$$\begin{cases} p_1 \in T^+ \\ p_0 \in T^- \\ p_2 \in T^- \end{cases} \iff \mathcal{D}(T) \in L_1^+ \cap L_0^- \cap L_2^-.$$

La courbe primale est une conique interpolant les points q_0 et q_1 et tangente aux droites L_0 et L_2 . Cette courbe est donc à l'intérieur du cône $L_0^- \cap L_2^-$. Or, le point dual $\mathcal{D}(T)$

appartient au cône $L_0^- \cap L_2^-$

Donc il existe une solution.

– 4^{ème} cas (voir fig: 2.16)

- l'origine O est à l'extérieur du triangle $p_0p_1p_2$,
- l'origine est à l'intérieur du cône de sommet p_1 et ne contenant pas les points p_0 et p_2 .

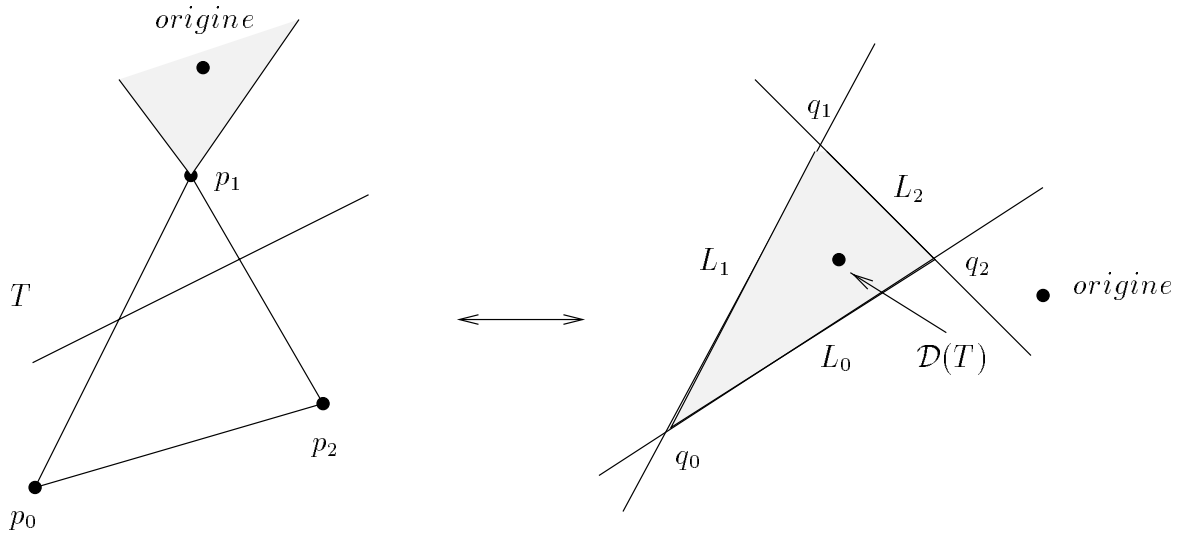


FIG. 2.16 – 4^{ème} cas

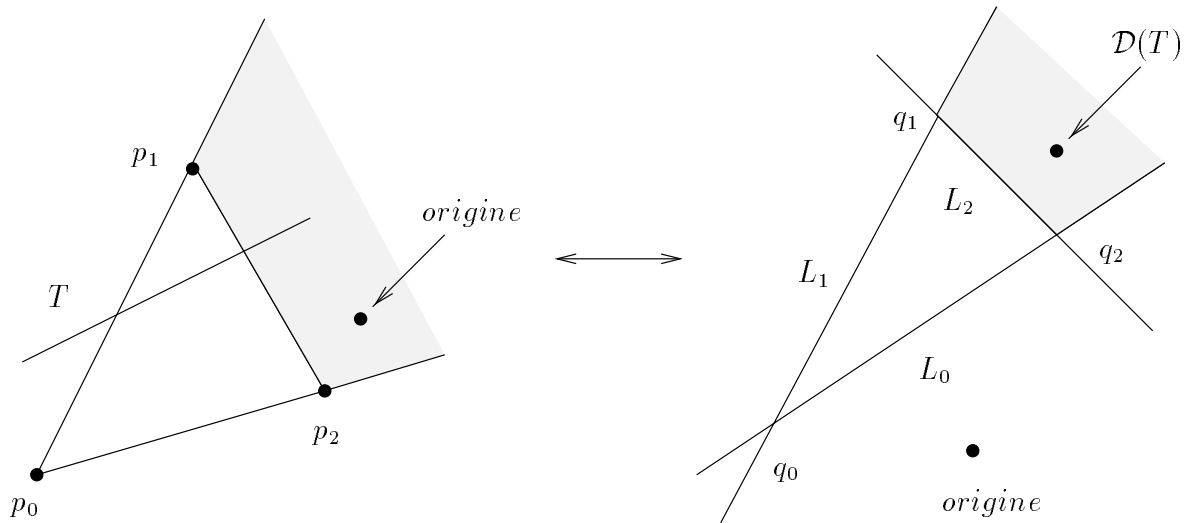
Alors on a:

$$\begin{cases} p_1 \in T^- \\ p_0 \in T^+ \\ p_2 \in T^+ \end{cases} \iff \mathcal{D}(T) \in L_1^- \cap L_0^+ \cap L_2^+.$$

Dans ce cas la courbe primale doit être incluse dans le cône $L_0^+ \cap L_2^+$. Or, le point dual $\mathcal{D}(T)$ appartient à ce cône. D'où il existe une solution.

– 5^{ème} cas (voir fig: 2.17)

- l'origine O est à l'extérieur du triangle $p_0p_1p_2$,
- l'origine est à l'intérieur du cône de sommet p_0 et passant par les points p_1 et p_2 ,
- le point p_1 est dans le demi-espace positif défini par la droite T .


 FIG. 2.17 – 5^{ème} cas

Alors on a :

$$\begin{cases} p_1 \in T^+ \\ p_0 \in T^- \\ p_2 \in T^- \end{cases} \iff \mathcal{D}(T) \in L_1^+ \cap L_0^- \cap L_2^-.$$

La courbe primale doit être à l'intérieur du cône $L_0^+ \cap L_2^-$. Or, le point dual $\mathcal{D}(T)$ appartient à L_2^+

Donc il n'existe pas de solution.

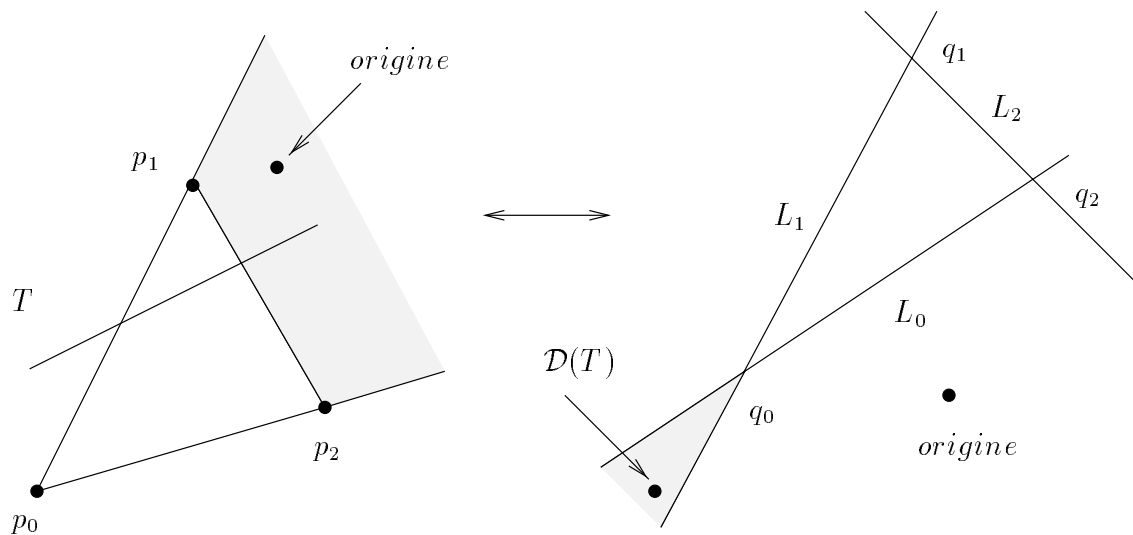
– 6^{ème} cas (voir fig: 2.18)

- l'origine O est à l'extérieur du triangle $p_0p_1p_2$,
- l'origine est à l'intérieur du cône de sommet p_0 et passant par les points p_1 et p_2 ,
- le point p_1 est dans le demi-espace négatif défini par la droite T .

Alors on a :

$$\begin{cases} p_1 \in T^- \\ p_0 \in T^+ \\ p_2 \in T^+ \end{cases} \iff \mathcal{D}(T) \in L_1^- \cap L_0^+ \cap L_2^+.$$

La courbe primale doit être à l'intérieur du cône $L_0^+ \cap L_2^-$. Or, le point dual $\mathcal{D}(T)$ appartient à L_0^-

FIG. 2.18 – 6^{ème} cas

D'où il n'existe pas de solution.

– 7^{ème} cas (voir fig:2.19)

- l'origine O est à l'extérieur du triangle $p_0p_1p_2$,
- l'origine est à l'intérieur du cône de sommet p_2 et passant par les points p_1 et p_0 ,
- le point p_1 est dans le demi-espace négatif défini par la droite T .

Alors on a:

$$\begin{cases} p_1 \in T^+ \\ p_0 \in T^- \\ p_2 \in T^- \end{cases} \iff \mathcal{D}(T) \in L_1^+ \cap L_0^- \cap L_2^-.$$

La courbe primale doit être à l'intérieur du cône $L_0^- \cap L_2^+$. Or, le point dual $\mathcal{D}(T)$ appartient au demi-espace L_2^-

D'où il n'existe pas de solution.

– 8^{ème} cas (voir fig:2.20)

- l'origine O est à l'extérieur du triangle $p_0p_1p_2$,
- l'origine est à l'intérieur du cône de sommet p_2 et passant par les points p_1 et p_0 ,
- le point p_1 est dans le demi-espace positif défini par la droite T .

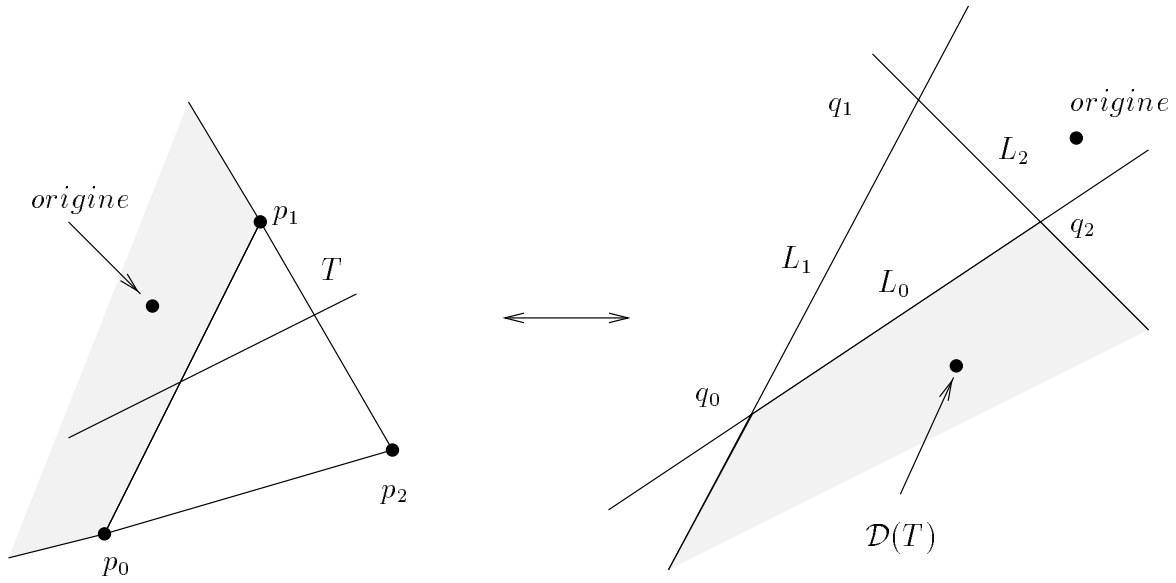


FIG. 2.19 – 7^{ème} cas

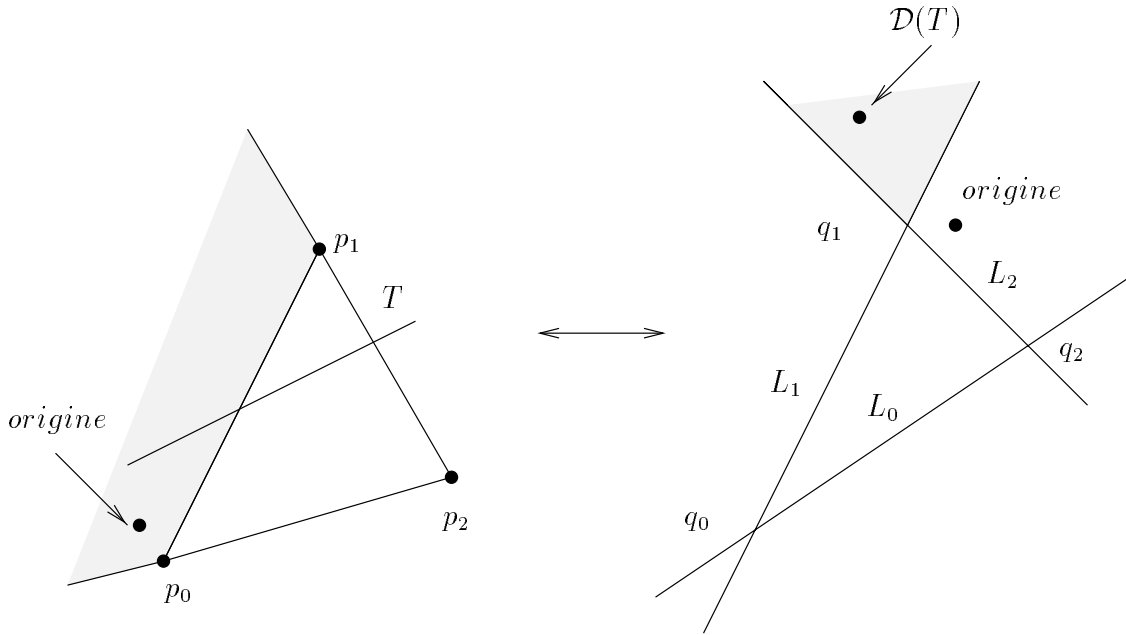


FIG. 2.20 – 8^{ème} cas

Alors on a:

$$\begin{cases} p_1 \in T^+ \\ p_0 \in T^- \\ p_2 \in T^- \end{cases} \iff \mathcal{D}(T) \in L_1^+ \cap L_0^- \cap L_2^-.$$

La courbe être à l'intérieur du cône $L_0^- \cap L_2^+$. Or, le point dual $\mathcal{D}(T)$ appartient au demi-

espace L_2^-

D'où il n'existe pas de solution.

– 9^{ème} cas (voir fig: 2.21)

- l'origine O est à l'extérieur du triangle $p_0p_1p_2$,
- l'origine est à l'intérieur du cône de sommet p_2 ne contenant pas les points p_1 et p_0 .

Dans ce cas le point p_1 est dans le demi-espace positif défini par la droite T , par suite les points p_0 et p_2 sont dans l'autre demi-espace

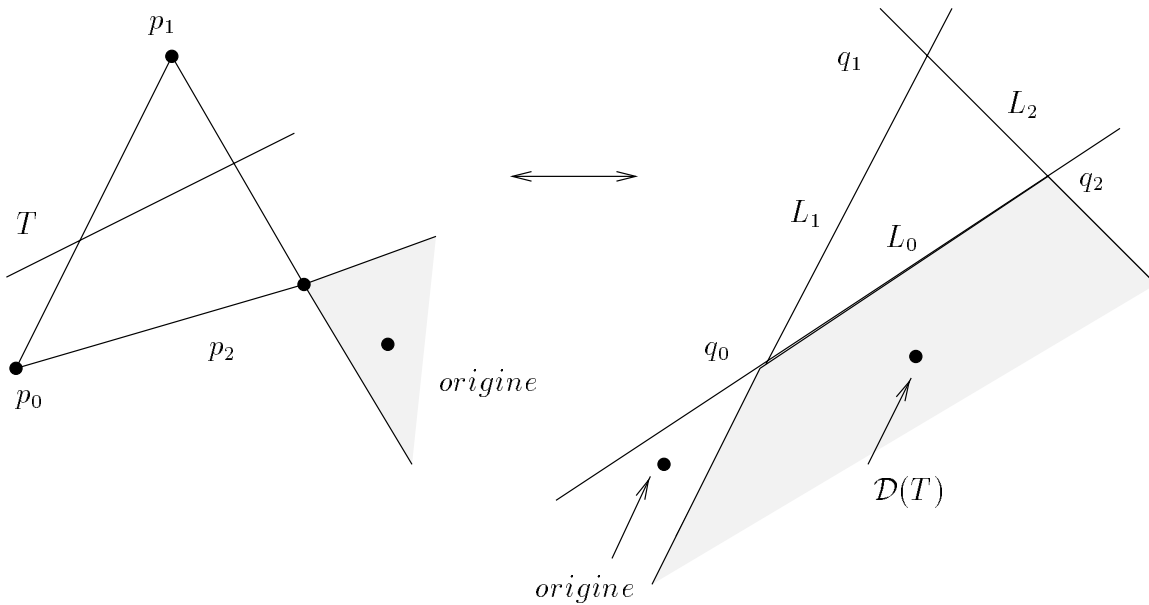


FIG. 2.21 – 9^{ème} cas

Alors on a:

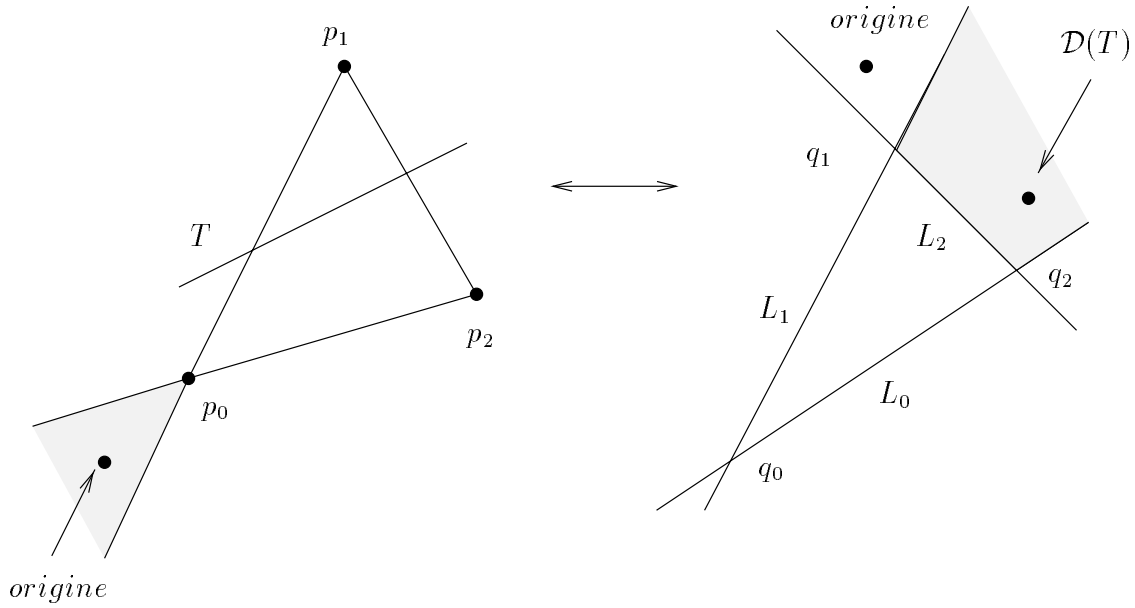
$$\begin{cases} p_1 \in T^+ \\ p_0 \in T^- \\ p_2 \in T^- \end{cases} \iff \mathcal{D}(T) \in L_1^+ \cap L_0^- \cap L_2^-.$$

La courbe primale doit être à l'intérieur du cône $L_0^+ \cap L_2^-$. Or, le point dual $\mathcal{D}(T)$ appartient au demi-espace L_0^-

D'où il n'existe pas de solution.

– 10^{ème} cas (voir fig:2.22)

- l'origine O est à l'extérieur du triangle $p_0p_1p_2$,


 FIG. 2.22 – 10^{ème} cas

- l'origine est à l'intérieur du cône de sommet p_0 ne contenant pas les points p_1 et p_2 .

Dans ce cas aussi le point p_1 est dans le demi-espace positif défini par la droite T , par suite les points p_0 et p_2 sont dans l'autre demi-espace.

Alors on a:

$$\begin{cases} p_1 \in T^+ \\ p_0 \in T^- \\ p_2 \in T^- \end{cases} \iff \mathcal{D}(T) \in L_1^+ \cap L_0^- \cap L_2^-.$$

La courbe primale doit être à l'intérieur du cône $L_0^- \cap L_2^+$. Or, le point dual $\mathcal{D}(T)$ appartient au demi-espace L_2^-

D'où il n'existe pas de solution.

Supposons qu'on est dans le cas où il existe une solution. Cherchons alors une courbe solution du problème $\mathcal{TAN}\mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{N}\mathcal{T}\mathcal{E}$.

On sait que les points q_i , $i = 0, 1, 2$, sont solutions des systèmes suivants:

$$\begin{cases} \langle q_i, p_i \rangle = 1, \\ \langle q_i, p_{i+1} \rangle = 1. \end{cases}$$

D'après [12], on sait que le problème $\mathcal{D}(\mathcal{TAN}\mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{N}\mathcal{T}\mathcal{E})$, admet une solution définie de la manière suivante:

On considère la courbe de Bézier rationnelle quadratique sur $[0, 1]$: [12]

$$, (t) = \frac{(1-t)^2 w_0 q_0 + 2t(1-t) w_1 q_2 + t^2 w_2 q_1}{(1-t)^2 w_0 + 2t(1-t) w_1 + t^2 w_2}.$$

Soient τ_0, τ_1, τ_2 les coordonnées barycentriques du point $\mathcal{D}(T) = q$ par rapport au triangle $(q_0 q_1 q_2)$. Pour assurer que la courbe $,$ passe par le point q , on peut alors choisir les poids de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0 = w_2 = 1, \\ w_1 = \frac{\tau_2}{2\sqrt{\tau_0 \tau_1}}. \end{array} \right.$$

Soit alors μ la courbe duale de $,$ définie par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle , (t), \mu(t) \rangle = 1, \\ \langle , '(t), \mu(t) \rangle = 0. \end{array} \right.$$

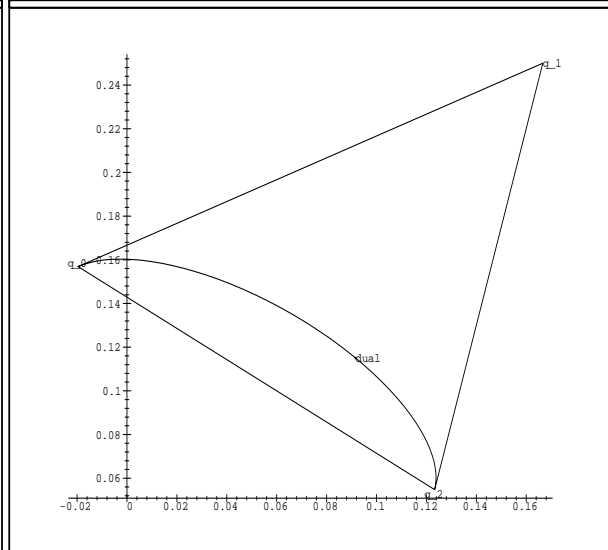
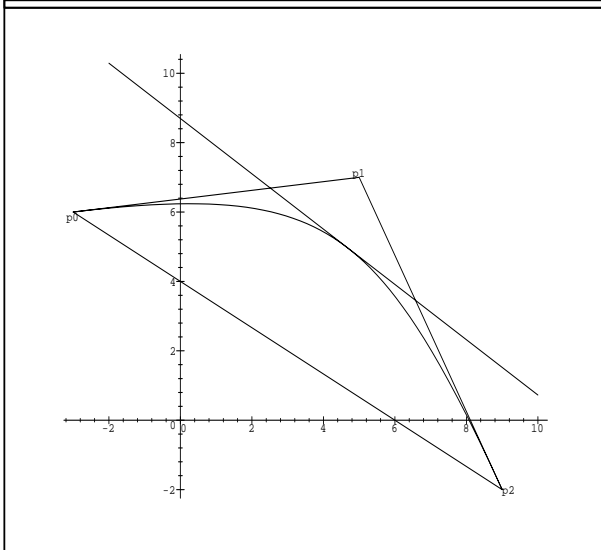
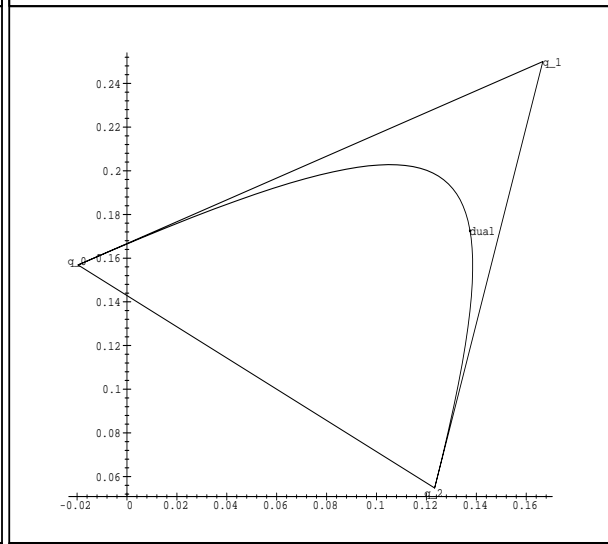
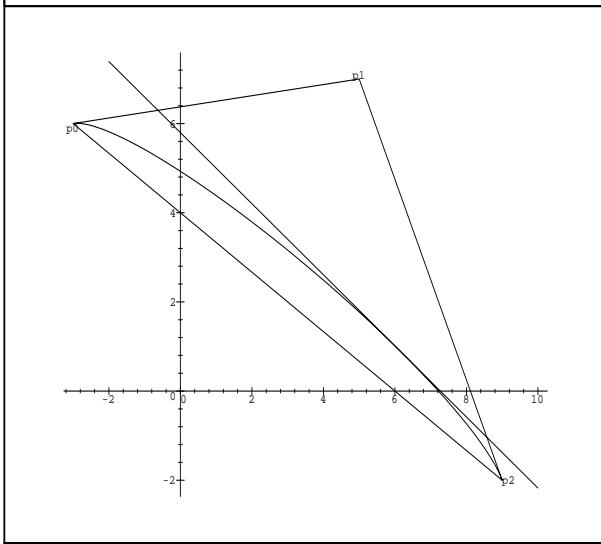
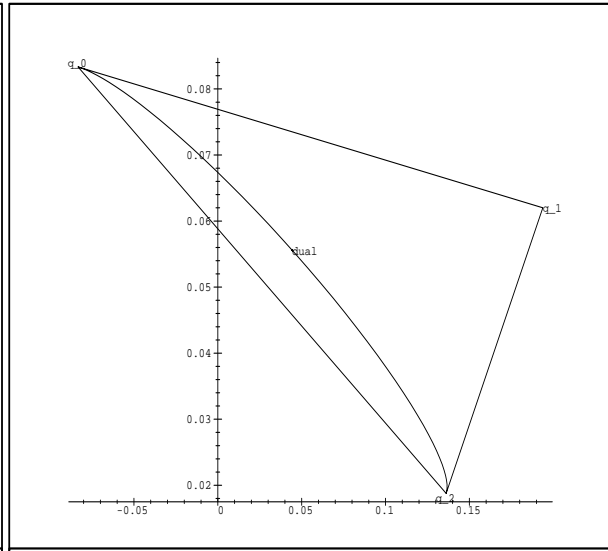
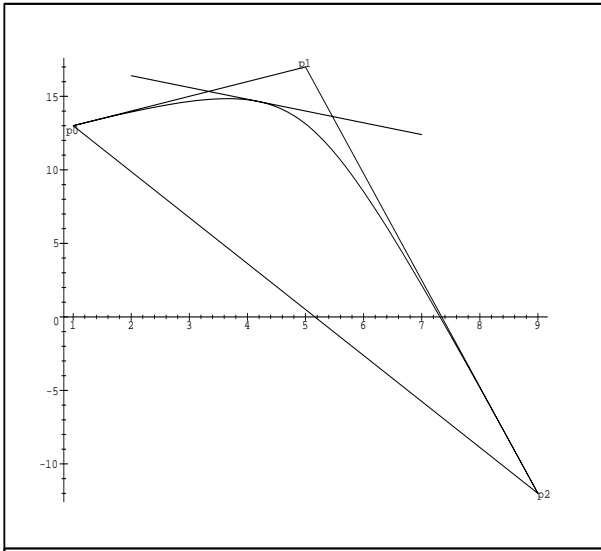
D'après les propriétés d'interpolation des courbes duales, on peut en déduire que la courbe μ vérifie:

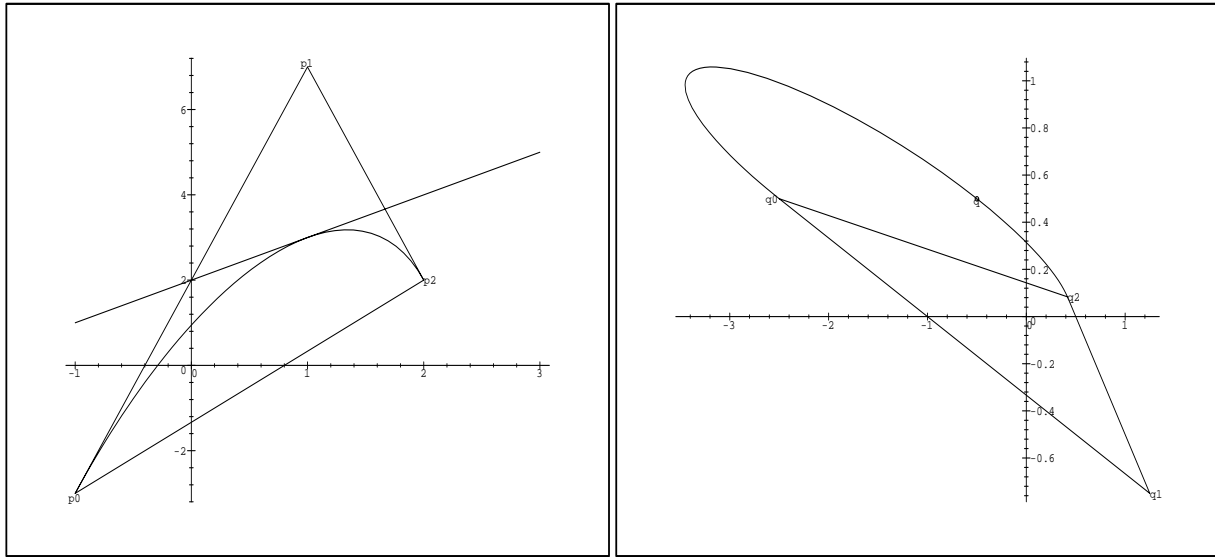
- $\mu(0) = p_0,$
- $\mu(1) = p_2,$
- les tangentes en $\mu(0)$ et $\mu(1)$ sont $(p_0 p_1)$ et $(p_1 p_2).$

D'autre part la courbe $,$ passe par le point q , ce qui entraîne que la courbe duale est tangente à la droite duale de q , à savoir la droite T . Ainsi, la courbe μ est une courbe solution du problème $\mathcal{TAN}\mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{N}\mathcal{T}\mathcal{E}.$

Dans la suite on donne quelques exemples de ces courbes duales interpolant le problème $\mathcal{TAN}\mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{N}\mathcal{T}\mathcal{E}.$

Les courbes à droite des figures suivantes sont les coniques interpolant les points q_0 et q_2 et passant par le point $q = \mathcal{D}(T)$, noté 'dual'. Les courbes à gauche sont les courbes duales obtenues qui sont solution du problème $\mathcal{TAN}\mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{N}\mathcal{T}\mathcal{E}.$





2.2 Courbes duales d'une courbe rationnelle

Dans les paragraphes précédents, on a étudié les courbes duales d'une courbe polynomiale de Bézier. Dans ce qui suit, on va s'intéresser aux courbes duales de courbes rationnelles particulières définies par Sederberg, Saito et Qi [21]. Ces courbes sont définies à partir de faisceaux linéaires de droites et plus généralement de faisceaux non linéaires. L'avantage de cette description à l'aide des droites est l'efficacité de l'implicitisation des courbes.

2.2.1 Intersection de deux faisceaux de droites

On se place dans le plan projectif \mathbb{P}^2 associé au plan affine \mathbb{R}^2 . Une droite de \mathbb{P}^2 peut être décrite par l'équation:

$$\mathcal{L} : ax + by + cz = 0.$$

On peut alors identifier cette droite au triplet $L = (a, b, c)$. Ainsi, on peut définir, d'une façon naturelle, une dualité, notée \mathcal{D}_p , entre un point $p = (a, b, c)$ du plan projectif \mathbb{P}^2 et une droite \mathcal{L} de \mathbb{P}^2 , dont le triplet associé est $L = (a, b, c)$. Grâce à cette dualité on a les propriétés suivantes:

Propriété 10

Soit p un point et \mathcal{L} une droite de \mathbb{P}^2 , alors on a :

$$p \in \mathcal{L} \iff \langle p, L \rangle = 0.$$

Propriété 11

Soient \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 deux droites dont les représentants respectifs sont L_1 et L_2 . Alors un point d'intersection p de ces droites vérifie :

$$p = L_1 \wedge L_2.$$

Propriété 12

Soient p_1 et p_2 deux points de \mathbb{P}^2 , la droite passant par ces deux points est une droite dont le représentant L vérifie :

$$L = p_1 \wedge p_2.$$

Définition 23

Soient \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 deux droites affines d'équation respective :

$$\mathcal{L}_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$\mathcal{L}_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

On appelle faisceau linéaire des droites \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 , noté $\mathcal{F}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$, l'ensemble des droites $\mathcal{L}(t)$ d'équation :

$$\mathcal{L}(t) : (1-t)(a_1x + b_1y + c_1) + t(a_2x + b_2y + c_2) = 0.$$

Pour la paramétrisation des droites appartenant à un faisceau de deux droites $\mathcal{F}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$, on peut choisir une droite \mathcal{T} et une paramétrisation associée de la manière suivante :

Soient I_1 et I_2 les points d'intersection de \mathcal{T} avec respectivement \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 , alors à toute droite $\mathcal{L}(t)$ du faisceau, par exemple $t \in [0, 1]$, on peut associer un point tel que :

$$I(t) = (1-t)I_1 + tI_2.$$

Il est clair que la paramétrisation n'est pas unique.

Définition 24

Soient $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ et \mathcal{L}_4 quatre droites affines, et soient $\mathcal{F}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4)$ les faisceaux associés à ces droites. On appelle intersection des deux faisceaux $\mathcal{F}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4)$, l'intersection des droites respectives de chaque faisceau correspondant au même paramètre t .

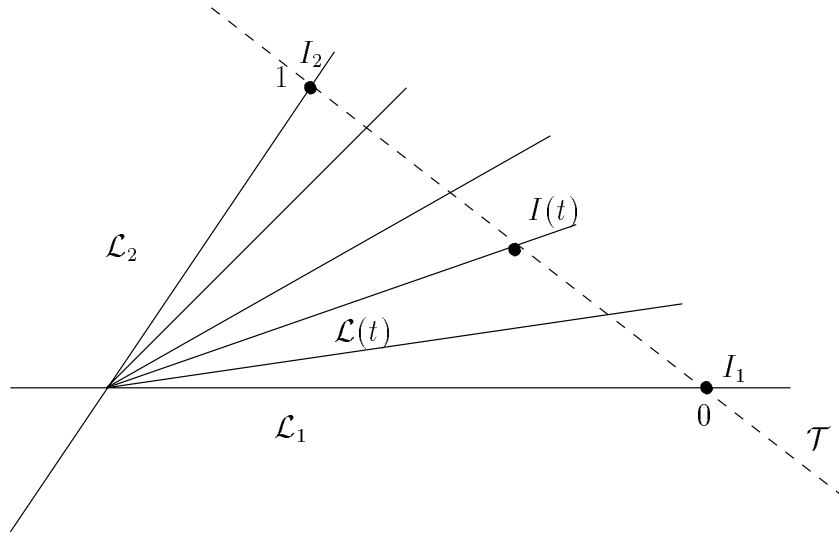


FIG. 2.23 – paramétrisation d'un faisceau

Théorème 7 [23]

Soient $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ et \mathcal{L}_4 quatre droites affines, et soient $\mathcal{F}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4)$ les faisceaux associés à ces droites. Alors l'intersection de ces deux faisceaux linéaires de droites est une section de conique.

2.2.2 courbe duale de l'intersection de deux faisceaux

Soient p_0 et p_2 deux points du plan affine \mathbb{R}^2 , et soient T_0 et T_2 deux droites non parallèles passant respectivement par p_0 et p_2 . Notons p_1 le point d'intersection de ces deux droites.

On se propose de construire une courbe duale d'une courbe rationnelle qui interpole les points p_0 et p_2 et qui est tangente respectivement à T_0 et T_2 .

Pour cela, on se place dans le plan projectif \mathbb{P}^2 . Pour chaque point p_i , $i = 0, 1, 2$, on lui associe le point $P_i = w_i(p_i, 1)$, avec w_i un nombre réel appelé poids qu'on suppose positif. Soient d'autre part les droites \mathcal{L}_i , $i = 0, 1, 2$, images duales par \mathcal{D}_p des points P_i , $i = 0, 1, 2$.

On considère ensuite, les faisceaux linéaires de droites $\mathcal{F}(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$, définis respectivement pour tout $t \in [0, 1]$ de la manière suivante:

$$\begin{aligned} L^1(t) &= (1-t)L_0 + tL_1, \\ L^2(t) &= (1-t)L_1 + tL_2. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème 7, et en considérant les faisceaux considérés ci-dessus, on définit

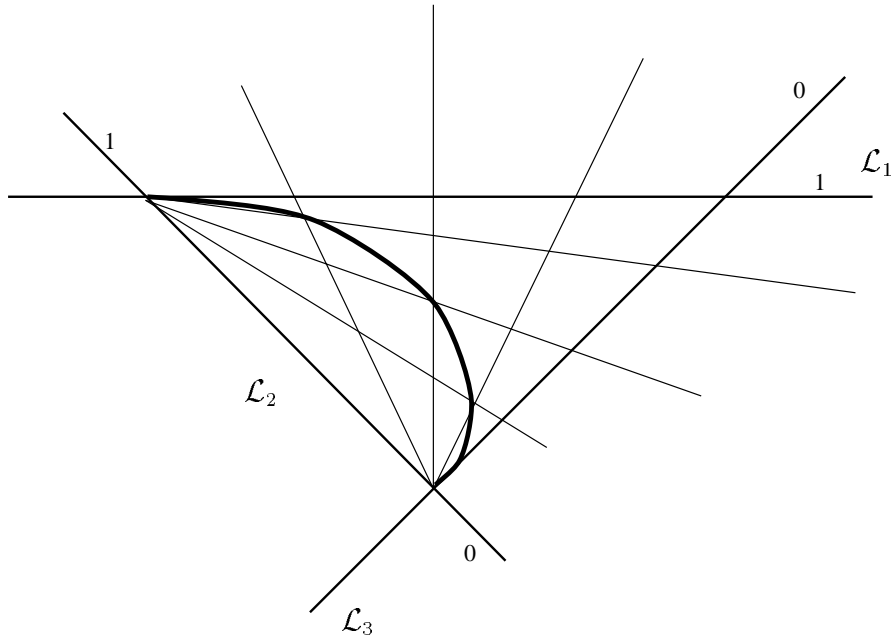


FIG. 2.24 – intersection de deux faisceaux linéaires

une courbe γ , sur $[0, 1]$ comme intersection de ces deux faisceaux:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= L^1(t) \wedge L^2(t) \\ &= ((1-t)L_0 + tL_1) \wedge ((1-t)L_1 + tL_2) \\ &= (1-t)^2 L_0 \wedge L_1 + t(1-t)L_0 \wedge L_2 + t^2 L_1 \wedge L_2. \end{aligned}$$

La courbe γ est une courbe projective exprimée en fonction des droites L_i , $i = 0, 1, 2$. Par la dualité projective \mathcal{D}_p , on peut construire sa courbe duale $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, comme dans le cas affine, comme enveloppe des images duales, par \mathcal{D}_p , de tout point de la courbe γ . Cette courbe duale est alors solution, pour tout $t \in [0, 1]$, du système suivant:

$$\begin{cases} \langle \gamma(t), \Phi(t) \rangle = 0, \\ \langle \gamma'(t), \Phi(t) \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

La courbe duale Φ est une courbe projective vérifiant:

$$\Phi(0) = P_0 \quad \text{et} \quad \Phi(1) = P_2.$$

En effet:

Valeur de Φ en $t = 0$

Le système 2.16 donne:

$$\begin{cases} \langle \cdot, (0), \Phi(0) \rangle = 0, \\ \langle \cdot, '(0), \Phi(0) \rangle = 0. \end{cases}$$

Or on a:

$$\begin{aligned} \cdot, (0) &= L_0 \wedge L_1 \\ \cdot, '(0) &= 2(L_0 \wedge L_2 - L_0 \wedge L_1), \end{aligned}$$

ce qui implique que:

$$\begin{cases} \langle \Phi(0), L_0 \wedge L_1 \rangle = 0, \\ \langle \Phi(0), L_0 \wedge L_2 - L_0 \wedge L_1 \rangle = 0. \end{cases}$$

Donc $\Phi(0)$ est solution du système suivant:

$$\begin{cases} \langle \Phi(0), L_0 \wedge L_1 \rangle = 0, \\ \langle \Phi(0), L_0 \wedge L_2 \rangle = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, on a:

$$\Phi(0) = P_1.$$

Valeur de Φ en $t = 1$

De la même manière on a:

$$\begin{cases} \langle \cdot, (1), \Phi(1) \rangle = 0, \\ \langle \cdot, '(1), \Phi(1) \rangle = 0. \end{cases}$$

Partant des résultats suivants:

$$\begin{aligned} \cdot, (1) &= L_1 \wedge L_2 \\ \cdot, '(1) &= 2(L_1 \wedge L_2 - L_0 \wedge L_2), \end{aligned}$$

on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} \langle \Phi(1), L_1 \wedge L_2 \rangle = 0, \\ \langle \Phi(1), L_1 \wedge L_2 - L_0 \wedge L_2 \rangle = 0. \end{cases}$$

Ce qui signifie que $\Phi(1)$ est solution du système suivant:

$$\begin{cases} \langle \Phi(1), L_1 \wedge L_2 \rangle = 0, \\ \langle \Phi(1), L_0 \wedge L_2 \rangle = 0. \end{cases}$$

Par conséquent:

$$\Phi(1) = P_3.$$

Pour résoudre le problème posé ci-dessus, on considère dans le plan affine la courbe paramétrique suivante:

$$\psi(t) = \left(\frac{\Phi_1(t)}{\Phi_3(t)}, \frac{\Phi_2(t)}{\Phi_3(t)} \right).$$

Il est clair que:

$$\psi(0) = p_1 \quad \text{et} \quad \psi(1) = p_3.$$

Vérifions que la courbe $\psi = (\psi - 1, \psi - 2)$ est tangente aux droites $T_0 = (p_0 p_1)$ et $T_2 = (p_1 p_2)$ respectivement aux points p_0 et p_2 .

Posons $p_0 = (a_0, b_0)$ et $p_2 = (a_2, b_2)$, alors $P_0 = w_0(a_0, b_0, 1)$ et $P_2 = w_2(a_2, b_2, 1)$. Soit $\psi'(t) = (\psi'_1(t), \psi'_2(t))$ la dérivée de $\psi(t)$, alors on a:

$$\begin{aligned} \psi'_1(t) &= \frac{\Phi'_1(t)\Phi_3(t) - \Phi_1(t)\Phi'_3(t)}{\Phi_3^2(t)}, \\ \psi'_2(t) &= \frac{\Phi'_2(t)\Phi_3(t) - \Phi_2(t)\Phi'_3(t)}{\Phi_3^2(t)}. \end{aligned}$$

L'équation (2.16) nous donne l'équation suivante:

$$\langle \Phi'(t), L_0 \wedge L_1 \rangle = 0.$$

En particulier pour $t = 0$ on a:

$$\langle \Phi'(0), L_0 \wedge L_1 \rangle = 0.$$

Ce qui implique que:

$$\Phi'(0) = P_1 - P_0.$$

Par conséquent on a:

$$\begin{aligned} \psi'_1(0) &= \frac{(w_1 a_1 - w_0 a_0)w_0 - w_0 a_0(w_1 - w_0)}{w_0^2} \\ &= \frac{w_0 w_1 (a_1 - a_0)}{w_0^2} \\ &= \frac{w_1 (a_1 - a_0)}{w_0}. \end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned} \psi'_2(0) &= \frac{(w_1 b_1 - w_0 b_0)w_0 - w_0 b_0(w_1 - w_0)}{w_0^2} \\ &= \frac{w_0 w_1 (b_1 - b_0)}{w_0^2} \\ &= \frac{w_1 (b_1 - b_0)}{w_0}. \end{aligned}$$

D'où:

$$\psi'(0) = \frac{w_1}{w_0}(p_1 - p_0).$$

Avec un raisonnement identique, on peut montrer que:

$$\psi'(0) = \frac{w_2}{w_1}(p_2 - p_1).$$

D'où, la courbe ψ est tangente aux droites T_0 et T_1 respectivement en p_0 et p_2 .

2.2.3 Intersection de faisceaux de degré n

Dans ce paragraphe, on considère une généralisation de faisceaux linéaires de droites[21]:

Définition 25

Soient $L_i, i = 0, \dots, n, (n + 1)$ droites dans le plan projectif \mathbb{P}^2 . On appelle faisceau de degré n des droites $L_i, i = 0, \dots, n$, noté $\mathcal{F}(L_i, i = 0, \dots, n)$, dans la base de Bernstein, l'ensemble des droites $L(t), t \in [0, 1]$, telles que:

$$L(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n[t]L_i.$$

Soient $L_i, i = 0, \dots, n$ et $\nabla_i, i = 0, \dots, m$ deux familles de droites dans le plan projectif \mathbb{P}^2 . On considère les deux faisceaux: $\mathcal{F}_1(L_i, i = 0, \dots, n)$ et $\mathcal{F}_2(\nabla_i, i = 0, \dots, m)$ définis respectivement par:

$$L(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)L_i.$$

$$\nabla(t) = \sum_{i=0}^m B_i^n(t)\nabla_i.$$

L'intersection de ces deux faisceaux est la courbe suivante[21]:

$$\begin{aligned} D(t) &= L(t) \wedge \nabla(t) \\ &= \sum_{i=0}^n B_i^n(t)L_i \wedge \sum_{i=0}^m B_i^n(t)\nabla_i \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} B_k^{n+m}(t)D_k, \end{aligned}$$

où:

$$D_k = \frac{1}{C_k^{m+n}} \sum_{i+j=k} C_i^n C_j^m L_i \wedge \nabla_j.$$

Soit Φ la courbe duale de la courbe γ , alors cette courbe est solution du système:

$$\begin{cases} \langle \gamma(t), \Phi(t) \rangle = 0, \\ \langle \gamma'(t), \Phi(t) \rangle = 0. \end{cases}$$

On peut alors écrire cette courbe, pour tout $t \in [0, 1]$, sous forme de produit vectoriel de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \gamma(t) \wedge \gamma'(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} B_k^{n+m}(t) D_k \wedge \sum_{k=0}^{n+m-1} B_k^{n+m-1}(t) \Delta D_k, \end{aligned}$$

où: $\Delta D_k = D_{k+1} - D_k$. Par conséquent

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{2(n+m)-1} B_k^{2(n+m)-1}(t) P_k,$$

avec:

$$P_k = \frac{1}{C_k^{2(m+n)-1}} \sum_{i+j=k} C_i^{n+m} C_j^{m+m-1} D_i \wedge \Delta D_j.$$

L'intérêt de considérer des courbes à l'aide des faisceaux, c'est qu'on peut avoir les équations implicites de ces courbes, en calculant des déterminants beaucoup moins grands que ceux de Bezout ou Sylvester[21]

2.3 Courbes duales par morceaux

2.3.1 Préliminaires

On se donne $n + 1$ points du plan qu'on note p_i , $i = 0, \dots, n$, et on se propose de construire une courbe duale passant par tous ces points. Dans la suite on utilisera les notations suivantes:

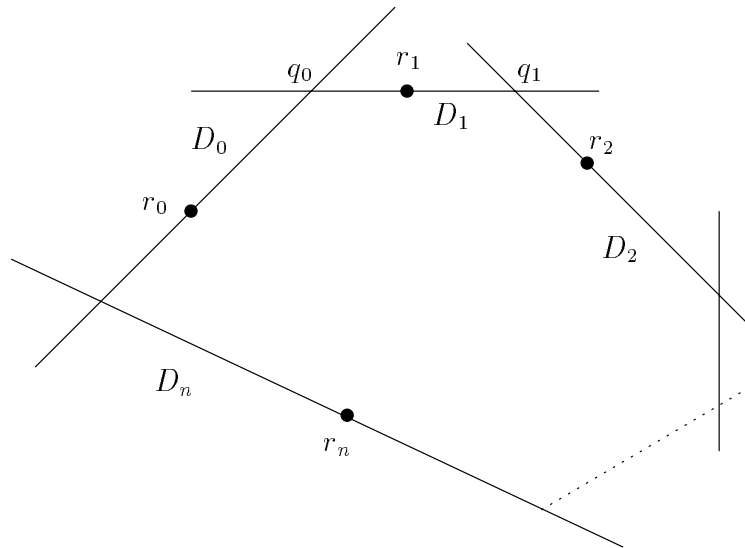
A chaque point p_i , $i = 0, \dots, n$, on associe la droite duale qu'on note D_i , $i = 0, \dots, n$, définie par:

$$D_i = \{m \in \mathbb{R}^2 : \langle p_i, m \rangle = 1\}.$$

En posant par convention $D_{n+1} = D_0$, on considère $\{q_i\} = D_i \cap D_{i+1}$, $i = 0, \dots, n$, les points d'intersection des droites duales D_i consécutives.

Ces points vérifient les systèmes suivants:

$$\begin{cases} \langle p_i, q_i \rangle = 1, \\ \langle p_{i+1}, q_i \rangle = 1. \end{cases} \tag{2.17}$$

FIG. 2.25 – Définition des points r_i , $i = 0, \dots, n$.

D'autre part on considère les points $r_i \in D_i$, $i = 0, \dots, n$ tels que:

$$\begin{aligned} r_i &= \lambda_i q_{i-1} + (1 - \lambda_i) q_i, \quad \lambda_i \in]0, 1[\quad i = 1, \dots, n, \\ r_0 &= \lambda_0 q_n + (1 - \lambda_0) q_0, \quad \lambda_0 \in]0, 1[. \end{aligned}$$

Dans toute la suite on supposera que les systèmes utilisés ont une solution unique.

2.3.2 Courbe duale d'une courbe de Bézier quadratique par morceaux

Construction de la courbe duale interpolante

Pour $i = 0, \dots, n - 1$ on note:

$$V_0^i = r_i \quad V_1^i = q_i \quad V_2^i = r_{i+1}.$$

On considère ensuite les courbes de Bézier quadratiques, μ_i , $i = 0, \dots, n - 1$, définies par:

$$\mu_i(t) = \sum_{j=0}^2 V_j^i B_j^2(t) \quad \forall t \in [0, 1],$$

où B_j^2 , ($j = 0, \dots, 2$) désignent les polynômes de Bernstein de degré 2.

Pour chaque $i = 0, \dots, n - 1$, on construit la courbe duale, μ_i , de μ_i qui est par définition l'enveloppe de la famille des droites dont les vecteurs normaux sont les points de la courbe

, i . Ces courbes μ_i , $i = 0, \dots, n - 1$, vérifient les systèmes suivants pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} \langle \cdot, \cdot_i(t), \mu_i(t) \rangle = 1, \\ \langle \cdot, \cdot'_i(t), \mu_i(t) \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Avec ces notations, on a le théorème suivant :

Théorème 8

|| La courbe duale μ formée par les morceaux de courbes μ_i , $i = 0, \dots, n - 1$ interpole tous les points p_i .

Preuve:

Chaque courbe μ_i vérifie le système 2.18 pour tout t appartenant à $[0, 1]$ et pour $t = 0$ on a :

$$\begin{cases} \langle \cdot, \cdot_i(0), \mu_i(0) \rangle = 1, \\ \langle \cdot, \cdot'_i(0), \mu_i(0) \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Or, $\cdot_i(0) = r_i$ et $\cdot'_i(0) = 2(q_i - r_i)$, par conséquent on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \langle r_i, \mu_i(0) \rangle = 1 \\ \langle q_i - r_i, \mu_i(0) \rangle = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} \langle r_i, \mu_i(0) \rangle = 1 \\ \langle q_i, \mu_i(0) \rangle = \langle r_i, \mu_i(0) \rangle \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \langle r_i, \mu_i(0) \rangle = 1 \\ \langle q_i, \mu_i(0) \rangle = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Or :

$$\begin{aligned} \langle r_i, \mu_i(0) \rangle = 1 &\implies \langle \lambda_i q_{i-1} + (1 - \lambda_i) q_i, \mu_i(0) \rangle = 1 \\ &\implies \lambda_i \langle q_{i-1}, \mu_i(0) \rangle + (1 - \lambda_i) \underbrace{\langle q_i, \mu_i(0) \rangle}_{=1} = 1 \\ &\implies \lambda_i \langle q_{i-1}, \mu_i(0) \rangle + (1 - \lambda_i) - 1 = 0 \\ &\implies \langle q_{i-1}, \mu_i(0) \rangle = 1. \end{aligned}$$

Par suite, $\mu_i(0)$ vérifie :

$$\begin{cases} \langle q_{i-1}, \mu_i(0) \rangle = 1, \\ \langle q_i, \mu_i(0) \rangle = 0. \end{cases}$$

D'après les systèmes 2.17 on peut conclure que $\mu_i(0) = p_i$.

De la même manière, pour $t = 1$ on obtient :

$$\begin{cases} \langle \cdot, \cdot_i(1), \mu_i(1) \rangle = 1, \\ \langle \cdot, \cdot'_i(1), \mu_i(1) \rangle = 0. \end{cases}$$

Puisque $\langle r_i, \mu_i(1) \rangle = r_{i+1}$ et $\langle r'_i, \mu_i(1) \rangle = 2(r_{i+1} - q_i)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \langle r_{i+1}, \mu_i(1) \rangle = 1 \\ \langle q_i - r_{i+1}, \mu_i(1) \rangle = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} \langle r_{i+1}, \mu_i(1) \rangle = 1 \\ \langle q_i, \mu_i(1) \rangle = \langle r_{i+1}, \mu_i(1) \rangle \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \langle r_{i+1}, \mu_i(1) \rangle = 1 \\ \langle q_i, \mu_i(1) \rangle = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle r_{i+1}, \mu_i(1) \rangle = 1 &\implies \langle \lambda_{i+1}q_i + (1 - \lambda_{i+1})q_{i+1}, \mu_i(1) \rangle = 1, \\ &\implies \lambda_{i+1} \underbrace{\langle q_i, \mu_i(0) \rangle}_{=1} + (1 - \lambda_{i+1})\langle q_{i+1}, \mu_i(1) \rangle = 1, \\ &\implies \lambda_{i+1} - 1 + (1 - \lambda_{i+1})\langle q_i, \mu_i(1) \rangle = 0, \\ &\implies \langle q_{i+1}, \mu_i(1) \rangle = 1. \end{aligned}$$

d'où le système suivant:

$$\begin{cases} \langle q_i, \mu_i(1) \rangle = 1 \\ \langle q_{i+1}, \mu_i(1) \rangle = 1. \end{cases}$$

D'après 2.17 on conclut que $\mu_i(1) = p_{i+1}$.

D'où le théorème. ◇

Détermination des tangentes:

D'après 2.19 les courbes μ_i , $i = 0, \dots, n-1$, vérifie pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\langle r_i, \mu'_i(t) \rangle = 0.$$

En particulier pour $t = 0$ on a: $\langle r_i, \mu'_i(0) \rangle = 0$, ce qui signifie que $\mu'_i(0)$ est orthogonal à r_i .

Comme r_i est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}(r_i)$ (qui est une droite passant par p_i), le vecteur $\mu'_i(0)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}(r_i)$. On en déduit donc que $\mathcal{D}(r_i)$ est la tangente à la courbe μ_i au point p_i . De même pour $t = 1$ on vérifie que $\mathcal{D}(r_{i+1})$ est la tangente à la courbe μ_i au point p_{i+1} . Ainsi, le choix des points r_i , $i = 0, \dots, n$, entraîne un choix des tangentes de la courbe μ . Les valeurs λ_i , $i = 0, \dots, n$, constituent des degrés de liberté.

On fera ultérieurement une étude sur les raccordements géométriques entre les morceaux des courbes μ_i .

2.3.3 Interpolation par le dual d'une courbe de Bézier cubique

En gardant les mêmes notations que précédemment, On se propose d'interpoler les données par une courbe duale d'une courbe de Bézier cubique. On définit les points intermédiaires suivants:

$$s_i = \alpha_i r_i + (1 - \alpha_i) q_i \quad \alpha_i \in]0, 1[,$$

$$s'_i = \alpha'_i q_i + (1 - \alpha'_i) r_{i+1} \quad \alpha'_i \in]0, 1[.$$

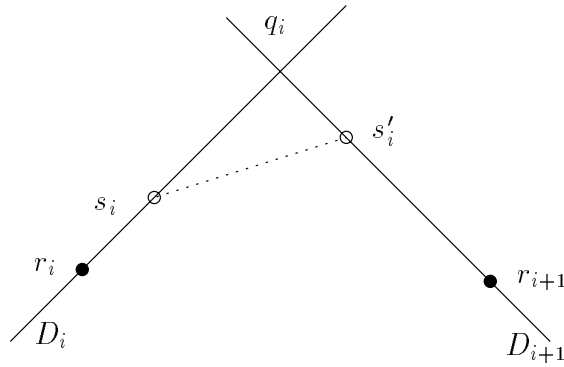


FIG. 2.26 – Définition des points s_i et s'_i , $i = 0, \dots, n$.

On pose:

$$V_0^i = r_i \quad V_1^i = s_i \quad V_2^i = s'_i \quad V_3^i = r_{i+1}.$$

Pour tout i , $i = 0, \dots, n - 1$, on considère les courbes de Bézier cubiques définies pour tout $t \in [0, 1]$ par:

$$, i(t) = \sum_{j=0}^3 V_j^i B_j^3(t).$$

Pour tout i , $i = 0, \dots, n - 1$, on définit les courbes μ_i , courbes duales respectives des courbes $, i$. Ces courbes vérifient les systèmes suivants pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} \langle , i(t), \mu_i(t) \rangle = 1, \\ \langle ,'_i(t), \mu_i(t) \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Théorème 9

|| L'union des courbes μ_i , $i = 0, \dots, n - 1$, est une courbe interpolant les points p_i .

Preuve:

Pour tout $i, i = 0, \dots, n-1$, la courbe μ_i est solution du système (2.21), pour tout $t \in [0, 1]$. En particulier pour $t = 0$ on a :

$$\begin{cases} \langle r_i(0), \mu_i(0) \rangle = 1, \\ \langle s_i'(0), \mu_i(0) \rangle = 0. \end{cases}$$

Comme $r_i(0) = r_i$ et $s_i'(0) = 3(s_i - r_i)$ on a alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \langle r_i, \mu_i(0) \rangle = 1 \\ \langle s_i - r_i, \mu_i(0) \rangle = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} \langle r_i, \mu_i(0) \rangle = 1 \\ \langle s_i, \mu_i(0) \rangle = \langle r_i, \mu_i(0) \rangle \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \langle r_i, \mu_i(0) \rangle = 1 \\ \langle s_i, \mu_i(0) \rangle = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \langle s_i, \mu_i(0) \rangle = 1 &\implies \langle \alpha_i r_i + (1 - \alpha_i) q_i, \mu_i(0) \rangle = 1, \\ &\implies \alpha_i \underbrace{\langle r_i, \mu_i(0) \rangle}_{=1} + (1 - \alpha_i) \langle q_i, \mu_i(0) \rangle = 1, \\ &\implies \alpha_i + (1 - \alpha_i) \langle q_i, \mu_i(0) \rangle - 1 = 0, \\ &\implies \langle q_i, \mu_i(0) \rangle = 1. \end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\begin{cases} \langle r_i, \mu_i(0) \rangle = 1, \\ \langle q_i, \mu_i(0) \rangle = 1. \end{cases}$$

D'après le système 2.17 on déduit que :

$$\mu_i(0) = p_i,$$

avec un raisonnement identique, on peut vérifier que :

$$\mu_i(1) = p_{i+1}.$$

◇

Étude des tangentes de la courbe duale

De la même manière que précédemment, les tangentes à la courbe duale μ aux points $p_i, i = 0, \dots, n$, sont respectivement les droites duales des points $r_i, i = 0, \dots, n$.

D'autre part pour $i = 0, \dots, n-1$, on a :

- $\mu_i(1) = p_{i+1}$ et $\mu_i'(1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}(r_{i+1})$,
- $\mu_{i+1}(0) = p_{i+1}$ et $\mu_{i+1}'(0)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}(r_{i+1})$.

On a donc un raccordement C^0 entre les courbes μ_i et $\mu_{i+1}, i = 0, \dots, n-1$ et les vecteurs tangents $\mu_i'(1)$ et $\mu_{i+1}'(0)$ sont deux vecteurs linéairement dépendants.

2.4 Raccordements géométriques de courbes duales

2.4.1 Rappels

Représentation paramétrique d'une courbe

Soit $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application de l'intervalle $[a, b]$ dans \mathbb{R}^d . On dit que ρ est une paramétrisation régulière de classe C^p si et seulement si ρ appartient à $C^p([a, b])$ et $\rho'(t) \neq 0$ pour tout t appartenant à $[a, b]$.

Définition 26

Soit $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ une application de classe C^p telle que $\phi'(t) \neq 0$ pour tout t appartenant à $[c, d]$. Alors l'application composée $\psi(t) = \rho(\phi(t))$, définie de $[c, d]$ dans \mathbb{R}^d , est appelée une reparamétrisation de la courbe définie par ρ . Elle respecte le sens de parcours de la courbe si et seulement si $\phi'(t) > 0$ pour tout t appartenant à $[c, d]$.

Exemple

En prenant comme origine $\rho(a)$, l'abscisse curviligne est une représentation paramétrique intrinsèque définie par:

$$S = C(t) = \int_a^t \|\rho'(u)\| du,$$

S représente la longueur algébrique de l'arc de la courbe $\widehat{m_0 m}$, où $m = \rho(t)$.

Raccordement de deux courbes en un point commun

Soient $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^d$ des représentations paramétriques respectives des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 qui ont un point commun $m_0 = \rho(b) = \psi(c)$. \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 se raccordent C^p si et seulement si: $\rho^{(i)}(b) = \psi^{(i)}(c)$ pour tout $i = 1, \dots, p$.

Définition 27

\mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 se raccordent géométriquement à l'ordre p en m_0 en respectant le sens du parcours, G^p , si et seulement si: il existe une représentation paramétrique de l'une et de l'autre qui se raccordent C^p en m_0 .

Caractérisation

Les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 se raccordent G^p en m_0 si et seulement si:

$$D_p \rho(b) = B D_p \psi(c),$$

avec

$$D_p \rho(b) = \begin{pmatrix} \rho'(b) \\ \rho''(b) \\ \vdots \\ \rho^{(p)}(b) \end{pmatrix}, \quad D_p \psi(c) = \begin{pmatrix} \psi'(c) \\ \psi''(c) \\ \vdots \\ \psi^{(p)}(c) \end{pmatrix},$$

et où B est une matrice triangulaire inférieure dont tous les éléments diagonaux sont positifs et qui a la forme particulière suivante:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta_2 & \beta_1^2 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_3 & 3\beta_1\beta_2 & \beta_1^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_p & \dots & \dots & \dots & \beta_1^p \end{pmatrix}$$

où les paramètres β_1, \dots, β_p dans la première colonne sont libres et les autres sont déterminés en fonction de ces paramètres.

Cas particulier

\mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 se raccordent G^2 en m_0 si et seulement si il existe $\beta_1 > 0$ et β_2 tels que:

$$\begin{cases} \rho(b) = \psi(c), \\ \rho'(b) = \beta_1 \psi'(c), \\ \rho''(b) = \beta_1^2 \psi''(c) + \beta_2 \psi'(c). \end{cases}$$

2.4.2 Courbe duale d'une courbe raccordée G^1

Soient $\mu_i, i = 0, \dots, n-1$, les courbes duales des $,_i$ courbes de Bézier quadratiques ou cubiques définies précédemment.

Ces courbes $\mu_i, i = 0, \dots, n-1$, vérifient le système suivant pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} \langle ,_i(t), \mu_i(t) \rangle = 1, \\ \langle ,'_i(t), \mu_i(t) \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

On a vu que la courbe μ formée par les morceaux μ_i interpole les points $p_i, i = 0, \dots, n$, et vérifient aussi:

$$\langle ,_i(t), \mu'_i(t) \rangle = 0. \quad (2.23)$$

On a alors:

$$\begin{cases} \langle \gamma_i(1), \mu'_i(1) \rangle = 0, \\ \langle \gamma_{i+1}(0), \mu'_{i+1}(0) \rangle = 0. \end{cases}$$

Comme $\gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$ alors les vecteurs $\mu'_i(1)$ et $\mu'_{i+1}(0)$ sont liés. La condition de raccordement C^0 s'écrit:

$$\exists \rho_i \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \mu'_i(1) = \rho_i \mu'_{i+1}(0).$$

Supposons maintenant que pour tout $i = 0, \dots, n-1$, les courbes γ_i sont raccordés G^1 . Il existe alors pour chaque $i = 0, \dots, n-1$, un nombre réel positif θ_i tel que:

$$\gamma'_{i+1}(0) = \theta_i \gamma'_i(1).$$

En dérivant l'équation (2.23), on obtient:

$$\langle \gamma_i(t), \mu''_i(t) \rangle + \langle \gamma'_i(t), \mu'_i(t) \rangle = 0.$$

On a:

$$\begin{aligned} \langle \gamma_i(1), \mu''_i(1) \rangle + \langle \gamma'_i(1), \mu'_i(1) \rangle &= 0, \\ \langle \gamma_{i+1}(0), \mu''_{i+1}(0) \rangle + \langle \gamma'_{i+1}(0), \mu'_{i+1}(0) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

En tenant compte de ce qui précède et de la G^1 continuité des courbes γ_i , on obtient:

$$\begin{aligned} \langle \gamma_i(1), \mu''_i(1) \rangle + \langle \gamma'_i(1), \mu'_i(1) \rangle &= 0, \\ \langle \gamma_i(1), \mu''_{i+1}(0) \rangle + \rho_i \theta_i \langle \gamma'_i(1), \mu'_i(1) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Par suite:

$$\langle \mu''_{i+1}(0) - \rho_i \theta_i \mu''_i(1), \gamma_i(1) \rangle = 0.$$

Par conséquent les vecteurs $\mu''_{i+1}(0) - \rho_i \theta_i \mu''_i(1)$ et $\mu'_i(1)$ sont liés. Donc $\exists \delta_i$ tel que:

$$\mu''_{i+1}(0) = \rho_i \theta_i \mu''_i(1) + \delta_i \mu'_i(1).$$

2.4.3 Continuité géométrique d'ordre 2 de courbes duales

On sait que:

$$\langle \gamma_i(t), \mu_i(t) \rangle = 1, \tag{2.24}$$

$$\langle \gamma'_i(t), \mu_i(t) \rangle = 0, \tag{2.25}$$

$$\langle \gamma_i(t), \mu'_i(t) \rangle = 0. \tag{2.26}$$

Dans ce paragraphe supposons que les morceaux de la courbe primale, sont raccordés G^2 , alors pour chaque $i = 0, \dots, n-1$ il existe $\beta_i > 0$ et α_i tels que:

$$\begin{cases} \mu_{i+1}(0) = \mu_i(1), \\ \mu'_{i+1}(0) = \beta_i \mu'_i(1), \\ \mu''_{i+1}(0) = \beta_i^2 \mu''_i(1) + \alpha_i \mu'_i(1). \end{cases}$$

De la relation (2.26) on obtient:

$$\langle \mu_i(1), \mu'_i(1) \rangle = 0, \quad (2.27)$$

$$(2.28)$$

$$\langle \mu_{i+1}(0), \mu'_{i+1}(0) \rangle = 0 \iff \langle \mu_i(1), \mu'_{i+1}(0) \rangle = 0. \quad (2.29)$$

D'autre part en dérivant (2.25) on a pour tout $t \in [0, 1]$

$$\langle \mu''_i(t), \mu_i(t) \rangle + \langle \mu'_i(t), \mu'_i(t) \rangle = 0. \quad (2.30)$$

En particulier pour le $i^{\text{ème}}$ morceau en $t = 1$:

$$\langle \mu''_i(1), \mu_i(1) \rangle + \langle \mu'_i(1), \mu'_i(1) \rangle = 0$$

et le $(i+1)^{\text{ème}}$ morceau en $t = 0$:

$$\langle \mu''_{i+1}(0), \mu_{i+1}(0) \rangle + \langle \mu'_{i+1}(0), \mu'_{i+1}(0) \rangle = 0. \quad (2.31)$$

Or $\mu_{i+1}(0) = \mu_i(1)$, donc en remplaçant dans (2.31) et en utilisant les conditions de raccordement G^2 on a:

$$\langle \mu_i(1), \beta_i^2 \mu''_i(1) + \alpha_i \mu'_i(1) \rangle + \langle \mu'_{i+1}(0), \beta_i \mu'_i(1) \rangle = 0,$$

$$\beta_i^2 \langle \mu_i(1), \mu''_i(1) \rangle + \alpha_i \underbrace{\langle \mu_i(1), \mu'_i(1) \rangle}_{=0} + \beta_i \langle \mu'_{i+1}(0), \mu'_i(1) \rangle = 0.$$

Par conséquent on a:

$$\beta_i^2 \langle \mu_i(1), \mu''_i(1) \rangle + \beta_i \langle \mu'_{i+1}(0), \mu'_i(1) \rangle = 0. \quad (2.32)$$

D'après les relations (2.27), (2.27), (2.30) et (2.32), on déduit que:

$$\mu'_{i+1}(0) = \beta_i \mu'_i(1). \quad (2.33)$$

D'où la G^1 continuité de μ . Maintenant dérivons la relation (2.26):

$$\langle \mu''_i(t), \mu_i(t) \rangle + \langle \mu'_i(t), \mu'_i(t) \rangle = 0.$$

De cette relation et de (2.30) on a pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\langle \mu_i''(t), , i(t) \rangle = \langle , i''(t), \mu_i(t) \rangle.$$

En particulier en $t = 1$ pour le $i^{\text{ième}}$ morceau et en $t = 0$ pour le $(i + 1)^{\text{ième}}$ morceau on a :

$$\begin{aligned} \langle \mu_i''(1), , i(1) \rangle &= \langle , i''(1), \mu_i(1) \rangle, \\ \langle \mu_{i+1}''(0), , i+1(0) \rangle &= \langle , i+1''(0), \mu_{i+1}(0) \rangle. \end{aligned}$$

On remplace $, i+1''(0)$ par sa valeur :

$$\begin{aligned} \langle \mu_{i+1}''(0), , i(1) \rangle &= \langle \beta_i^2 , i''(1) + \alpha_i , i'(1), \mu_{i+1}(0) \rangle \\ &= \beta_i^2 \langle , i''(1), \mu_i(1) \rangle + \alpha_i \underbrace{\langle , i'(1), \mu_i(1) \rangle}_{=0} \\ &= \beta_i^2 \langle , i''(1), \mu_i(1) \rangle \\ &= \beta_i^2 \langle \mu_i''(1), , i(1) \rangle \mu_i', \end{aligned}$$

$$\implies \langle \mu_{i+1}''(0) - \beta_i^2 \mu_i''(1), , i(1) \rangle = 0.$$

Par suite $\mu_{i+1}''(0) - \beta_i^2 \mu_i''(1)$ est orthogonal à $, i(1)$. Or on sait que $\mu_i'(1)$ est aussi orthogonal à $, i(1)$. Par suite, $\mu_{i+1}''(0) - \beta_i^2 \mu_i''(1)$ et $\mu_i'(1)$ sont liés. Il existe alors γ_i tel que :

$$\mu_{i+1}''(0) - \beta_i^2 \mu_i''(1) = \gamma_i \mu_i'(1).$$

D'où la relation :

$$\mu_{i+1}''(0) = \beta_i^2 \mu_i''(1) + \gamma_i \mu_i'(1). \tag{2.34}$$

Ainsi, les morceaux successifs μ_i et μ_{i+1} ont un point commun qui vérifie les relations (2.33) et (2.34). Elles sont donc raccordées G^2 .

2.5 Etude des singularités des courbes duales

Dans ce paragraphe, on se propose d'étudier le comportement des images duales de courbes paramétriques présentant des singularités. En effet, on s'intéressera à l'étude des correspondances entre les singularités des courbes primales et celles des courbes duales.

Soit $,$ une courbe primale définie sur un intervalle I , et soit t_0 un paramètre appartenant à l'intervalle I . Supposons qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que :

- les dérivées successives jusqu'à l'ordre $p - 1$ en t_0 sont nulles,

- la dérivée $p^{ième}$ est la première dérivée non nulle de γ en t_0 ,
- $\gamma(t_0)$ et $\gamma^{(p)}(t_0)$ ne sont pas liés,
- q est le plus petit nombre supérieur strictement à p tel que $(\gamma^{(q)}(t_0), \gamma^{(p)}(t_0))$ forment une famille libre.

Ainsi, le développement de Taylor de γ au voisinage de cet élément est donné par:

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + (1 + O(1))\frac{h^p}{p!} \gamma^{(p)}(t_0) + \frac{h^q}{q!} \gamma^{(q)}(t_0) + O(h^q).$$

On sait que suivant la parité de p et q on peut déterminer la nature du point $\gamma(t_0)$. En effet, on a les cas suivants:

- Si p est impair et q est pair alors $\gamma(t_0)$ est un point ordinaire,
- si p est impair et q est impair alors $\gamma(t_0)$ est un point d'inflexion,
- si p est pair et q est pair alors $\gamma(t_0)$ est un point de rebroussement de deuxième espèce,
- si p est pair et q est impair alors $\gamma(t_0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

2.5.1 Détermination des points singuliers

Soit μ la courbe duale de γ . On sait que μ est une courbe paramétrique vérifiant pour tout t appartenant à I les équations suivantes:

$$\langle \gamma(t), \mu(t) \rangle = 1, \tag{2.35}$$

$$\langle \gamma'(t), \mu(t) \rangle = 0, \tag{2.36}$$

$$\langle \mu'(t), \gamma(t) \rangle = 0. \tag{2.37}$$

On remarque que le système formé par l'équation (2.35) et l'équation (2.36) n'est plus valable pour définir complètement le point $\mu(t_0)$. Cependant, on a la proposition suivante qui détermine le point singulier $\mu(t_0)$:

Proposition 9

Soit γ , une courbe paramétrique définie sur un intervalle I . Supposons qu'il existe un paramètre t_0 dans I et deux entiers naturels non nuls p et q tels que le développement de Taylor de la courbe γ , au voisinage de t_0 soit de la forme:

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + (1 + O(h)) \frac{h^p}{p!} \gamma^{(p)}(t_0) + \frac{h^q}{q!} \gamma^{(q)}(t_0) + O(h^q).$$

Soit μ la courbe duale de la courbe γ .

Alors le point correspondant au paramètre t_0 de la courbe duale μ est déterminé par le système suivant:

$$\begin{cases} \langle \gamma(t_0), \mu(t_0) \rangle = 1, \\ \langle \gamma^{(p)}(t_0), \mu(t_0) \rangle = 0. \end{cases}$$

Preuve:

On sait que le point $\mu(t_0)$ vérifie l'équation:

$$\langle \gamma(t_0), \mu(t_0) \rangle = 1,$$

cette dernière ne donne pas une solution unique, il faut donc chercher une autre équation qui permettra de déterminer le point $\mu(t_0)$ de manière unique.

Pour cela on dérive l'équation (2.36) $(p-1)$ fois à l'aide de la formule de Leibnitz. Il en résulte qu'on a pour tout t appartenant à I :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} C_{p-1}^k \langle \mu^{(k)}(t), \gamma^{(p-k)}(t) \rangle &= 0, \\ \langle \mu(t), \gamma^{(p)}(t) \rangle + \sum_{k=1}^{p-1} C_{p-1}^k \langle \mu^{(k)}(t), \gamma^{(p-k)}(t) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout t appartenant à l'intervalle I , en particulier pour le paramètre t_0 :

$$\langle \mu(t_0), \gamma^{(p)}(t_0) \rangle + \sum_{k=1}^{p-1} C_{p-1}^k \langle \mu^{(k)}(t_0), \gamma^{(p-k)}(t_0) \rangle = 0.$$

Or, pour le paramètre t_0 on a:

$$\gamma'(t_0) = \gamma''(t_0) = \dots = \gamma^{(p-1)}(t_0) = 0.$$

Par suite on a :

$$\sum_{k=1}^{p-1} C_{p-1}^k \langle \mu^{(k)}(t_0), ,^{(p-k)}(t_0) \rangle = 0.$$

D'où, le point $\mu(t_0)$ vérifie une deuxième équation, à savoir :

$$\langle \mu(t_0), ,^{(p)}(t_0) \rangle = 0.$$

Notons D_{t_0} et $D_{t_0}^{(p)}$ les droites d'équations cartésiennes respectives :

$$\langle , (t_0), M \rangle = 1$$

et

$$\langle ,^{(p)}(t_0), M \rangle = 0.$$

Le point singulier $\mu(t_0)$ est la solution du système suivant :

$$\begin{cases} \langle , (t_0), \mu(t_0) \rangle = 1, \\ \langle ,^{(p)}(t_0), \mu(t_0) \rangle = 0. \end{cases}$$

Il est alors l'intersection des droites D_{t_0} et $D_{t_0}^{(p)}$

◇

Proposition 10

|| La dérivée d'ordre p de la courbe duale μ en t_0 est orthogonale au point $, (t_0)$, c'est-à-dire :

$$\langle \mu^{(p)}(t_0), , (t_0) \rangle = 0.$$

Preuve :

En dérivant l'équation (2.35) p fois pour tout t appartenant à I on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p C_p^k \langle \mu^{(k)}(t), ,^{(p-k)}(t) \rangle &= 0, \\ \langle \mu(t), ,^{(p)}(t) \rangle + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \langle \mu^{(k)}(t), ,^{(p-k)}(t) \rangle + \langle \mu^{(p)}(t), , (t) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Comme cette formule est vraie pour tout t appartenant à I , elle reste vraie pour t_0 aussi :

$$\langle \mu(t_0), ,^{(p)}(t_0) \rangle + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \langle \mu^{(k)}(t_0), ,^{(p-k)}(t_0) \rangle + \langle \mu^{(p)}(t_0), , (t_0) \rangle = 0.$$

Or, le point $\mu(t_0)$ appartient à la droite $D_{t_0}^{(p)}$, ce qui implique qu'on a :

$$\langle \mu(t_0), ,^{(p)}(t_0) \rangle = 0.$$

D'autre part on sait que les dérivées successives jusqu'à l'ordre $p - 1$ de $,$ en t_0 sont toutes nulles. Par conséquent on a :

$$\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \langle \mu^{(k)}(t_0), ,^{(p-k)}(t_0) \rangle = 0.$$

On peut donc en déduire que $\mu^{(p)}(t_0)$ est orthogonale à $, (t_0)$:

$$\langle \mu^{(p)}(t_0), , (t_0) \rangle = 0,$$

on retrouve donc l'équivalent des relations (2.35), (2.36) et (2.37) pour $t = t_0$:

$$\begin{cases} \langle , (t), \mu(t) \rangle = 1, \\ \langle ,^{(p)}(t), \mu(t) \rangle = 0, \\ \langle \mu^{(p)}(t), , (t) \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.38)$$

◇

2.5.2 Etude des points singuliers

Proposition 11

|| Les dérivées successives jusqu'à l'ordre $(q-p-1)$ de la courbe duale μ au point correspondant au paramètre t_0 sont orthogonales à la dérivée d'ordre p de la courbe primale au point correspondant au même paramètre.

Preuve:

Pour déterminer le point singulier correspondant au paramètre t_0 on avait calculé la dérivée $(p - 1)^{ième}$ de l'équation (2.36). Cherchons maintenant les dérivées d'ordre m de la même équation (2.36), où m est un entier supérieur strictement à $(p - 1)$.

Pour tout élément t de l'intervalle I , on a :

$$\sum_{k=0}^m C_m^k \langle \mu^{(m-k)}(t), ,^{(k+1)}(t) \rangle = 0,$$

ce qui est équivalent à la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{p-2} C_m^k \langle \mu^{(m-k)}(t), ,^{(k+1)}(t) \rangle + \sum_{k=p-1}^m C_m^k \langle \mu^{(m-k)}(t), ,^{(k+1)}(t) \rangle = 0.$$

En particulier pour $t = t_0$:

$$\sum_{k=0}^{p-2} C_m^k \langle \mu^{(m-k)}(t_0), ,^{(k+1)}(t_0) \rangle + \sum_{k=p-1}^m C_m^k \langle \mu^{(m-k)}(t_0), ,^{(k+1)}(t_0) \rangle = 0.$$

Comme les dérivées successives jusqu'à l'ordre $(p-1)$ de $,$ en t_0 sont nulles, alors:

$$\sum_{k=0}^{p-2} C_m^k \langle \mu^{(m-k)}(t_0), ,^{(k+1)}(t_0) \rangle = 0.$$

Par conséquent, pour tout $m > p-1$ on a:

$$\sum_{k=p-1}^m C_m^k \langle \mu^{(m-k)}(t_0), ,^{(k+1)}(t_0) \rangle = 0.$$

Pour montrer la proposition on utilise un raisonnement par récurrence sur m :

– Pour $m = p$:

La dérivation pour $m = p$ donne:

$$C_p^{p-1} \langle \mu'(t_0), ,^{(p)}(t_0) \rangle + \langle \mu(t_0), ,^{(p+1)}(t_0) \rangle = 0.$$

Or $,^{(p+1)}(t_0)$ et $,^{(p)}(t_0)$ sont liés par hypothèse, ce qui implique l'existence d'un réel λ non nul tel que:

$$,^{(p+1)}(t_0) = \lambda, ^{(p)}(t_0),$$

ce qui implique que:

$$\langle \mu(t_0), ,^{(p+1)}(t_0) \rangle = \lambda \langle \mu(t_0), ,^{(p)}(t_0) \rangle.$$

Comme $\mu(t_0)$ est orthogonal à $,^{(p)}(t_0)$ (proposition 9), alors on a

$$\langle \mu(t_0), ,^{(p+1)}(t_0) \rangle = 0.$$

Par conséquent:

$$\langle \mu'(t_0), ,^{(p)}(t_0) \rangle = 0.$$

D'où, la dérivée première de μ en t_0 est orthogonale à la dérivée d'ordre p de $,$ en t_0 .

– Pour $m = p+1$:

On a:

$$C_{p+1}^{p-1} \langle \mu''(t_0), \mu^{(p)}(t_0) \rangle + C_{p+1}^p \langle \mu'(t_0), \mu^{(p+1)}(t_0) \rangle + \langle \mu(t_0), \mu^{(p+2)}(t_0) \rangle = 0.$$

De la même manière que précédemment, $\mu^{(p+2)}(t_0)$ et $\mu^{(p)}(t_0)$ sont liés par hypothèse, ce qui implique que:

$$\langle \mu(t_0), \mu^{(p+2)}(t_0) \rangle = 0.$$

De

$$\langle \mu'(t_0), \mu^{(p)}(t_0) \rangle = 0,$$

on déduit que:

$$\langle \mu''(t_0), \mu^{(p)}(t_0) \rangle = 0.$$

D'où la dérivée seconde de μ en $t = t_0$ est orthogonale à la dérivée d'ordre p de μ en t_0 .

Supposons que la propriété soit vraie jusqu'à l'ordre $m = q - 3$ (c.à.d pour la dérivée d'ordre $(q - p - 2)$ de μ en t_0), et montrons qu'elle est vraie pour $m = q - 2$ (c-à-d pour la dérivée d'ordre $(q - p - 1)$ de μ en t_0)

– Pour $m = q - 2$ on a:

$$C_{q-2}^{p-1} \langle \mu^{(q-p-1)}(t_0), \mu^{(p)}(t_0) \rangle + \sum_{k=p}^{q-2} C_{q-2}^k \langle \mu^{(q-2-k)}(t_0), \mu^{(k+1)}(t_0) \rangle = 0.$$

Lorsque $k = p \dots q - 2$, on a:

- d'une part, $\mu^{(k+1)}(t_0)$ et $\mu^{(p)}(t_0)$ sont liés,
- d'autre part $q - 2 - k$ varie de $q - 2 - p$ jusqu'à 0. D'après l'hypothèse de récurrence les dérivées jusqu'à l'ordre $q - p - 2$ de μ en t_0 sont orthogonales à la dérivée d'ordre p de μ en t_0 .

On peut en déduire que pour tout k tel que $k = p \dots q - 2$ on a:

$$\langle \mu^{(q-2-k)}(t_0), \mu^{(k+1)}(t_0) \rangle = 0.$$

Par conséquent:

$$\langle \mu^{(q-p-1)}(t_0), \mu^{(p)}(t_0) \rangle = 0.$$

La dérivée d'ordre $(q-p-1)$ de μ en t_0 est orthogonale à la dérivée d'ordre p de μ en t_0 . D'où la propriété de récurrence. \diamond

Proposition 12

|| La dérivée d'ordre $(q - p)$ en t_0 de la courbe duale μ est la première dérivée non orthogonale à la dérivée d'ordre p de γ en t_0

Preuve:

On sait d'après ce qui précède que pour tout entier $m > p - 1$ on a:

$$\sum_{k=p-1}^m C_m^k \langle \mu^{(m-k)}(t_0), \gamma^{(k+1)}(t_0) \rangle = 0.$$

En particulier pour $m = q - 1$ on a:

$$\sum_{k=p-1}^{q-1} C_{q-1}^k \langle \mu^{(q-1-k)}(t_0), \gamma^{(k+1)}(t_0) \rangle = 0.$$

En développant cette somme on trouve:

$$C_{q-1}^{p-1} \langle \mu^{(q-p)}(t_0), \gamma^{(p)}(t_0) \rangle + \langle \mu(t_0), \gamma^{(q)}(t_0) \rangle + \sum_{k=p}^{q-2} C_{q-1}^k \langle \mu^{(q-1-k)}(t_0), \gamma^{(k+1)}(t_0) \rangle = 0.$$

D'après la proposition 11, on sait que pour tout k variant de p jusqu'à $(q - 2)$ on a:

$$\langle \mu^{(q-1-k)}(t_0), \gamma^{(k+1)}(t_0) \rangle = 0.$$

Par suite on a:

$$C_{q-1}^{p-1} \langle \mu^{(q-p)}(t_0), \gamma^{(p)}(t_0) \rangle + \langle \mu(t_0), \gamma^{(q)}(t_0) \rangle = 0. \quad (2.39)$$

Puisque $\gamma^{(q)}(t_0)$ et $\gamma^{(p)}(t_0)$ sont linéairement indépendants, alors on a

$$\langle \mu(t_0), \gamma^{(q)}(t_0) \rangle \neq 0.$$

Par conséquent on a:

$$\langle \mu^{(q-p)}(t_0), \gamma^{(p)}(t_0) \rangle \neq 0.$$

D'où la proposition 12. ◇

Proposition 13

|| les dérivées successives jusqu'à l'ordre $(q - 1)$ de la courbe duale μ en t_0 sont orthogonales à $\gamma(t_0)$.

Preuve:

D'abord on cherche les dérivées d'ordre m de l'équation (2.35) pour tout t appartenant à I , où m est un entier naturel non nul inférieur strictement à $q - 1$. On a alors:

$$\sum_{k=0}^m C_m^k \langle \mu^{(m-k)}(t), ,^{(k)}(t) \rangle = 0. \quad (2.40)$$

On a alors pour tout t appartenant à l'intervalle I :

$$\langle \mu^{(m)}(t), , (t) \rangle + \langle \mu(t), ,^{(m)}(t) \rangle + \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k \langle \mu^{(m-k)}(t), ,^{(k)}(t) \rangle = 0.$$

En particulier pour t_0 , on a:

$$\langle \mu^{(m)}(t_0), , (t_0) \rangle + \langle \mu(t_0), ,^{(m)}(t_0) \rangle + \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k \langle \mu^{(m-k)}(t_0), ,^{(k)}(t_0) \rangle = 0. \quad (2.41)$$

– Pour $m = 1, 2, \dots, p$.

On sait que les dérivées d'ordre k , ($k = 1, \dots, p - 1$) de $,$ en t_0 sont toutes nulles. Ce qui implique:

$$\sum_{k=1}^{m-1} C_m^k \langle \mu^{(m-k)}(t_0), ,^{(k)}(t_0) \rangle = 0.$$

D'autre part, on a pour tout $m = 1, 2, \dots, p$

$$\langle \mu(t_0), ,^{(m)}(t_0) \rangle = 0.$$

Par conséquent, on a $m = 1, 2, \dots, p$:

$$\langle \mu^{(m)}(t_0), , (t_0) \rangle = 0.$$

– Pour $m = p + 1, p + 2, \dots, q - 1$.

En développant la formule (2.40), on trouve:

$$\begin{aligned} \langle \mu^{(m)}(t_0), , (t_0) \rangle + \sum_{k=1}^{p-1} C_m^k \langle \mu^{(m-k)}(t_0), ,^{(k)}(t_0) \rangle \\ + \sum_{k=p}^m C_m^k \langle \mu^{(m-k)}(t_0), ,^{(k)}(t_0) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Comme les dérivées successives jusqu'à l'ordre $p - 1$ de $,$ en t_0 sont toutes nulles, alors on a:

$$\sum_{k=1}^{p-1} C_m^k \langle \mu^{(m-k)}(t_0), ,^{(k)}(t_0) \rangle = 0.$$

Lorsque k varie de p jusqu'à m , on a :

- d'une part les dérivées d'ordre k de $\mu^{(k)}$ en t_0 et la dérivée d'ordre p de μ en t_0 sont liées,
- d'autre part les entiers $(m - k)$ prennent les valeurs de $0, 1, \dots, q - p - 1$. Or, d'après la proposition 11, on sait que $\mu(t_0), \mu'(t_0), \dots, \mu^{(q-p-1)}(t_0)$ sont orthogonales à $\mu^{(p)}$.

On en déduit que :

$$\sum_{k=p}^m C_m^k \langle \mu^{(m-k)}(t_0), \mu^{(k)}(t_0) \rangle = 0.$$

Par suite :

$$\langle \mu^{(m)}(t_0), \mu(t_0) \rangle = 0.$$

D'où, toutes les dérivées d'ordre m de μ en t_0 , pour tout $m = 1, 2, \dots, q - 1$, sont orthogonales à $\mu(t_0)$. \diamond

Proposition 14

|| La dérivée d'ordre q de μ en t_0 est la première dérivée non orthogonale à $\mu(t_0)$.

Preuve :

En remplaçant m par q dans la formules 2.41 on trouve :

$$\langle \mu^{(q)}(t_0), \mu(t_0) \rangle + \langle \mu(t_0), \mu^{(q)}(t_0) \rangle + \sum_{k=1}^{q-1} C_q^k \langle \mu^{(q-k)}(t_0), \mu^{(k)}(t_0) \rangle = 0.$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} & \langle \mu^{(q)}(t_0), \mu(t_0) \rangle + \sum_{k=1}^{p-1} C_q^k \langle \mu^{(q-k)}(t_0), \mu^{(k)}(t_0) \rangle \\ & + \sum_{k=p}^{q-1} C_q^k \langle \mu^{(q-k)}(t_0), \mu^{(k)}(t_0) \rangle + \langle \mu(t_0), \mu^{(q)}(t_0) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Comme les dérivées successives de μ en t_0 jusqu'à l'ordre $p - 1$ sont nulles, alors on a :

$$\sum_{k=1}^{p-1} C_q^k \langle \mu^{(q-k)}(t_0), \mu^{(k)}(t_0) \rangle = 0.$$

Il en suit:

$$\begin{aligned} & \langle \mu^{(q)}(t_0), , (t_0) \rangle + C_q^p \langle \mu^{(q-p)}(t_0), , (p)(t_0) \rangle \\ & + \sum_{k=p+1}^{q-1} C_q^k \langle \mu^{(q-k)}(t_0), , (k)(t_0) \rangle + \langle \mu(t_0), , (q)(t_0) \rangle = 0. \end{aligned}$$

D'après la proposition 11 on a:

$$\sum_{k=p+1}^{q-1} C_q^k \langle \mu^{(q-k)}(t_0), , (k)(t_0) \rangle = 0.$$

Par conséquent on a:

$$\langle \mu^{(q)}(t_0), , (t_0) \rangle + C_q^p \langle \mu^{(q-p)}(t_0), , (p)(t_0) \rangle + \langle \mu(t_0), , (q)(t_0) \rangle = 0.$$

Or on sait d'après la formule 2.39 que:

$$C_{q-1}^{p-1} \langle \mu^{(q-p)}(t_0), , (p)(t_0) \rangle + \langle \mu(t_0), , (q)(t_0) \rangle = 0,$$

$$\implies \langle \mu(t_0), , (q)(t_0) \rangle = -C_{q-1}^{p-1} \langle \mu^{(q-p)}(t_0), , (p)(t_0) \rangle.$$

En remplaçant $\langle \mu(t_0), , (q)(t_0) \rangle$ par sa valeur, on trouve:

$$\langle \mu^{(q)}(t_0), , (t_0) \rangle + \frac{q-p}{p} C_{q-1}^{p-1} \langle \mu^{(q-p)}(t_0), , (p)(t_0) \rangle = 0.$$

Or, on sait que:

$$\langle \mu^{(q-p)}(t_0), , (p)(t_0) \rangle \neq 0,$$

d'où:

$$\langle \mu^{(q)}(t_0), , (t_0) \rangle \neq 0.$$

◇

Théorème 10

|| Les dérivées successives de μ en t_0 jusqu'à l'ordre $q-p-1$ sont toutes nulles, ses dérivées d'ordre k , $k = q-p, \dots, q-1$, sont liées et les dérivées d'ordre $q-p$ et q forment une famille libre.

Preuve:

D'après les proposition: **Proposition 11**, **Proposition 12** et **Proposition 13**, on a:

Pour $l = 1, \dots, q - p - 1$:

$$\begin{cases} \langle \cdot, (t_0), \mu^{(l)}(t_0) \rangle = 0, \\ \langle \cdot, {}^{(p)}(t_0), \mu^{(l)}(t_0) \rangle = 0. \end{cases}$$

Or, (t_0) et $, {}^{(p)}(t_0)$ ne sont pas liés, on peut alors en déduire que les dérivées de μ en t_0 d'ordre inférieur ou égal à $q - p - 1$ sont toutes nulles.

Toutefois, on a d'une part:

$$\langle \cdot, {}^{(p)}(t_0), \mu^{(q-p)}(t_0) \rangle \neq 0$$

et d'autre part, pour $l = q - p \dots q - 1$ on a:

$$\langle \cdot, (t_0), \mu^{(l)}(t_0) \rangle = 0,$$

ce qui implique que:

- $\mu^{(q-p)}(t_0)$ est la première dérivée non nulle,
- pour $l = q - p, \dots, q - 1$, les dérivées $\mu^{(l)}(t_0)$ sont liées.

Finalement on a:

$$\langle \cdot, (t_0), \mu^{(q)}(t_0) \rangle \neq 0.$$

On en déduit que $\mu^{(q)}(t_0)$ et $\mu^{(q-p)}(t_0)$ ne sont pas liés.

Le développement de Taylor de μ au voisinage de t_0 est alors de la forme:

$$\mu(t_0 + h) = \mu(t_0) + (1 + O(1)) \frac{h^{q-p}}{(q-p)!} \mu^{(q-p)}(t_0) + \frac{h^q}{q!} \mu^{(q)}(t_0) + O(h^q).$$

◇

Etude des cas

- Si p est impair et q est pair, c'est-à-dire $, (t_0)$ est un point ordinaire, alors dans le dual on a $q - p$ est impair et q est pair. Ce qui implique que $\mu(t_0)$ est un point ordinaire.
- Si p est impair et q est impair, c'est-à-dire que $, (t_0)$ est point d'inflexion, alors $q - p$ est pair et q est impair. Ce qui signifie que $\mu(t_0)$ est un point de rebroussement de première espèce.
- Si p est pair et q est pair, c'est-à-dire que $, (t_0)$ est un point de rebroussement de deuxième espèce, alors dans le dual on a $q - p$ est pair et q est pair. Ce qui signifie que $\mu(t_0)$ est point de rebroussement de deuxième espèce.

- Si p est pair q est impair, c'est-à-dire que (t_0) est un point de rebroussement de première espèce. Alors dans le dual on a $q - p$ est impair et q impair. Par suite $\mu(t_0)$ est point d'inflexion.

Tableau récapitulatif:

(voir fig 2.27, fig 2.28, fig 2.29)

Courbe primale	Courbe duale
point ordinaire	point ordinaire
point d'inflexion	point de rebroussement de première espèce
point de rebroussement de première espèce	point d'inflexion
point de rebroussement de deuxième espèce	point de rebroussement de deuxième espèce

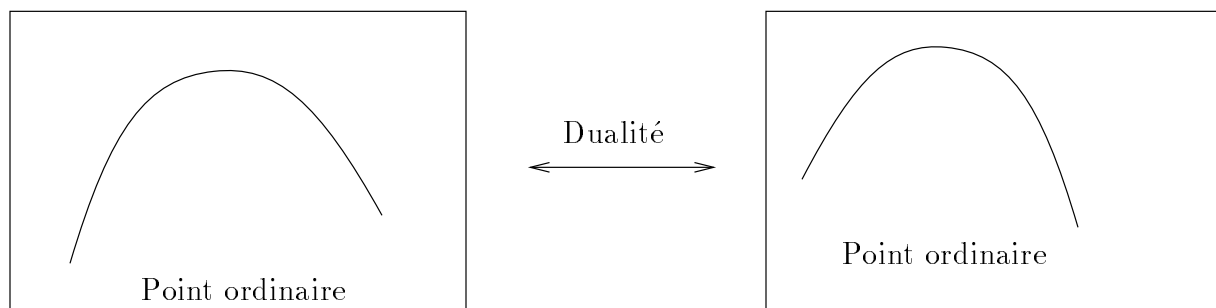


FIG. 2.27 – *Le dual d'un point ordinaire est un point ordinaire*

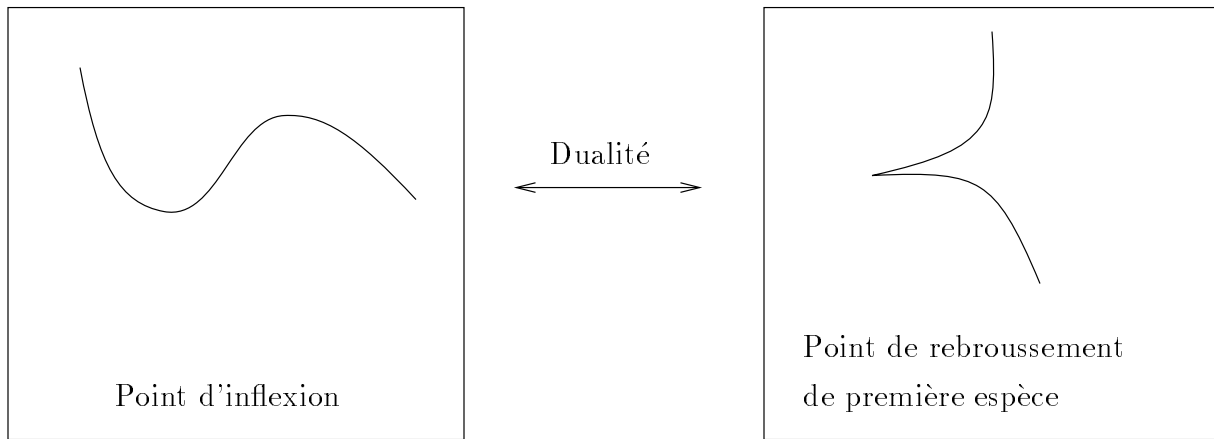


FIG. 2.28 – *Le dual d'un point d'inflexion est un point de rebroussement de 1^{ère} espèce*

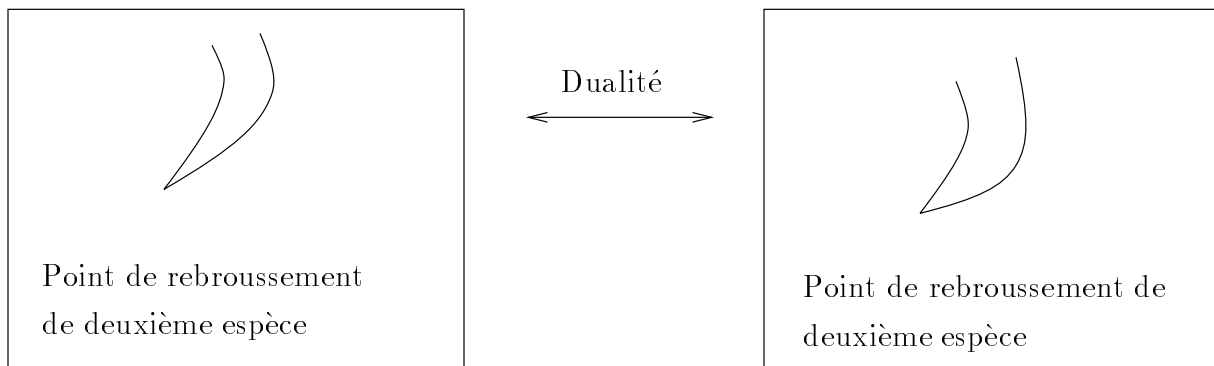


FIG. 2.29 – *Le dual d'un point de rebroussement de 2^{ème} espèce est un point de rebroussement de 2^{ème} espèce*

Point double

On garde toujours les mêmes notations que précédemment. Supposons qu'il existe deux paramètres distincts t_1 et t_2 , tels que:

$$, (t_1) = , (t_2).$$

On sait que la courbe duale μ vérifie pour tout t appartenant à l'intervalle I l'équation suivante:

$$\langle \mu'(t), , (t) \rangle = 0.$$

Pour $t = t_1$ et $t = t_2$, on a les équations suivantes:

$$\begin{cases} \langle \mu'(t_1), \mu(t_1) \rangle = 0, \\ \langle \mu'(t_2), \mu(t_2) \rangle = 0. \end{cases}$$

Or,

$$\mu'(t_1) = \mu'(t_2).$$

Par conséquent, les vecteurs $\mu'(t_1)$ et $\mu'(t_2)$ sont liés. Ils définissent donc la même droite tangente aux points $\mu(t_1)$ et $\mu(t_2)$. Par conséquent la courbe μ admet une tangente double.

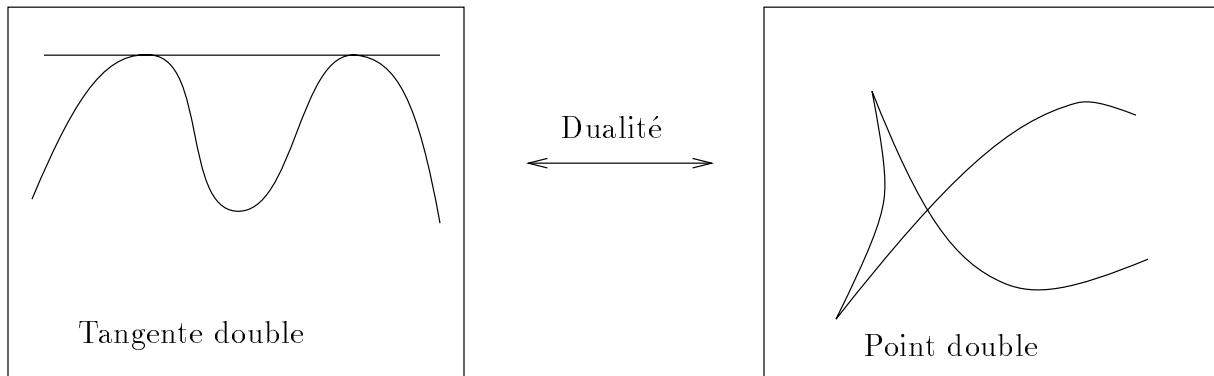


FIG. 2.30 – en dual l'équivalent d'un point double est une tangente double

2.6 L'image duale d'un cercle

Dans ce paragraphe, on cherche à trouver le dual d'un cercle quelconque dans un plan affine. La dualité utilisée dans la suite est la polarité qui à un point $p(a, b)$ fait correspondre la droite d'équation $ax + by = 1$.

Soit $\mathcal{C}(A, r)$ un cercle de centre le point $A = (a, b)$ et de rayon $r > 0$.

On sait que l'équation implicite de $\mathcal{C}(A, r)$ est la suivante:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Pour chercher l'image duale de ce cercle, utilisons l'équation paramétrique suivante, pour tout $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} \mathcal{C}_1(t) = a + r \cos(t), \\ \mathcal{C}_2(t) = b + r \sin(t). \end{cases}$$

Soit $\mathcal{G} = (x, y)$ la courbe duale du cercle $\mathcal{C}(A, r)$. On sait que \mathcal{G} est l'enveloppe des droites duales de tous les points du cercle $\mathcal{C}(A, r)$. Donc elle est solution du système suivant pour

tout $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} \langle (\mathcal{C}_1(t), \mathcal{C}_2(t)), \mathcal{G}(t) \rangle = 1, \\ \langle (\mathcal{C}'_1(t), \mathcal{C}'_2(t)), \mathcal{G}(t) \rangle = 0. \end{cases}$$

Où, $(\mathcal{C}'_1(t), \mathcal{C}'_2(t))$ désigne la dérivée de la courbe paramétrique $(\mathcal{C}_1(t), \mathcal{C}_2(t))$.

En remplaçant, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $\mathcal{C}_1(t)$ et $\mathcal{C}_2(t)$ par leurs valeurs, on a:

$$\begin{cases} (a + r \cos(t))x + (b + r \sin(t))y = 1, \\ -r \sin(t)x + r \cos(t)y = 0. \end{cases}$$

On peut résoudre ce dernier système, en utilisant la méthode de Cramer.

Soit alors:

$$\begin{aligned} \Delta &= r \cos(t)(a + r \cos(t)) + r \sin(t)(b + r \sin(t)) \\ &= r^2 + a r \cos(t) + b r \sin(t). \end{aligned}$$

La solution, si elle existe, est de la forme:

$$\begin{cases} x = \frac{\cos(t)}{r + a \cos(t) + b \sin(t)}, \\ y = \frac{\sin(t)}{r + a \cos(t) + b \sin(t)}. \end{cases}$$

Remarque

Dans le cas où le centre du cercle $\mathcal{C}(A, r)$ est confondu avec l'origine, c'est-à-dire que $a = b = 0$, alors on a:

$$\begin{cases} x = \frac{\cos(t)}{r}, \\ y = \frac{\sin(t)}{r}. \end{cases}$$

d'où le lemme:

Lemme 6

|| *L'image duale d'un cercle de centre l'origine et de rayon r est un autre cercle de centre l'origine et de rayon $\frac{1}{r}$.*

Supposons d'une part que le centre du cercle $\mathcal{C}(A, r)$ est distinct de l'origine, et d'autre part cherchons l'équation implicite de la courbe \mathcal{G} , pour pouvoir d'abord identifier sa

nature et ensuite l'étudier.

$$\begin{cases} x = \frac{\cos(t)}{r + a \cos(t) + b \sin(t)} \\ y = \frac{\sin(t)}{r + a \cos(t) + b \sin(t)} \end{cases} \implies \begin{cases} (r + a \cos(t) + b \sin(t))x = \cos(t) \\ (r + a \cos(t) + b \sin(t))y = \sin(t) \end{cases} \quad (2.43)$$

$$\implies \frac{x}{y} = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}. \quad (2.44)$$

Prenons la première équation de (2.43)

$$\begin{aligned} \frac{rx}{\cos(t)} + ax + b \frac{\sin(t)}{\cos(t)}x &= 1 \\ \frac{rx}{\cos(t)} + ax + b \frac{y}{x}x &= 1 \\ 1 - ax - by &= \frac{rx}{\cos(t)}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

D'après (2.43), on a:

$$\begin{aligned} \cos^2(t) + \sin^2(t) &= (r + a \cos(t) + b \sin(t))^2 x^2 + (r + a \cos(t) + b \sin(t))^2 y^2 \\ 1 &= (r + a \cos(t) + b \sin(t))^2 x^2 + (r + a \cos(t) + b \sin(t))^2 y^2 \\ &= ((r + a \cos(t))^2 + 2b \sin(t)(r + a \cos(t)) + b^2 \sin^2(t))x^2 \\ &\quad + ((r + a \cos(t))^2 + 2b \sin(t)(r + a \cos(t)) + b^2 \sin^2(t))y^2 \\ &= (r^2 + 2a r \cos(t) + a^2 \cos^2(t) + 2b r \sin(t) + 2ab \sin(t) \cos(t) + b^2 \sin^2(t))x^2 \\ &\quad + (r^2 + 2a r \cos(t) + a^2 \cos^2(t) + 2b r \sin(t) + 2ab \sin(t) \cos(t) + b^2 \sin^2(t))y^2 \\ &= r^2 x^2 + r^2 y^2 + \underbrace{2a r \cos(t)x^2 + 2a r \cos(t)y^2}_{F_1} \\ &\quad + \underbrace{a^2 \cos^2(t)x^2 + a^2 \cos^2(t)y^2}_{F_2} + \underbrace{2b r \sin(t)x^2 + 2b r \sin(t)y^2}_{F_3} \\ &\quad + \underbrace{2ab \sin(t) \cos(t)x^2 + 2ab \sin(t) \cos(t)y^2}_{F_4} + \underbrace{b^2 \sin^2(t)x^2 + b^2 \sin^2(t)y^2}_{F_5}. \end{aligned}$$

On calcule chaque terme de la formule précédente, et en tenant compte du fait que:

$$x \sin(t) = y \cos(t).$$

Calcul de F_1

On a:

$$\begin{aligned}F_1 &= 2a r \cos(t)x^2 + 2a r \cos(t)y^2 \\&= 2a r \cos(t)x^2 + 2a r \cos(t)\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}x^2 \\&= \frac{2a r \cos(t)\cos^2(t)x^2 + 2a r \cos(t)\sin^2(t)x^2}{\cos^2(t)} \\&= \frac{2a r \cos(t)x^2}{\cos^2(t)} \\&= 2ar\frac{x^2}{\cos(t)} \\&= 2a\frac{rx}{\cos(t)}x.\end{aligned}$$

En utilisant (2.45), on trouve:

$$\begin{aligned}F_1 &= 2a(1 - ax - by)x \\&= 2ax - 2a^2x^2 - 2a b x y.\end{aligned}$$

Calcul de F_2

$$\begin{aligned}F_2 &= a^2 \cos^2(t)x^2 + a^2 \cos^2(t)y^2 \\&= a^2 \cos^2(t)x^2 + a^2 \sin^2(t)x^2 \\&= a^2x^2.\end{aligned}$$

Calcul de F_3

$$\begin{aligned}
F_3 &= 2b r \sin(t)x^2 + 2b r \sin(t)y^2 \\
&= 2b r \sin(t)x^2 + 2b r \sin(t)x^2 \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} \\
&= \frac{2b r \sin(t) \cos^2(t)x^2 + 2b r \sin(t) \sin^2(t)x^2}{\cos^2(t)} \\
&= 2b r \frac{\sin(t)x^2}{\cos^2(t)} \\
&= 2b r \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \frac{x^2}{\cos(t)} \\
&= 2b r \frac{y}{x} \frac{x^2}{\cos(t)} \\
&= 2b r y \frac{x}{\cos(t)} \\
&= 2b y \left(\frac{rx}{\cos(t)} \right) \\
&= 2b y(1 - ax - by) \\
&= 2b y - 2a b y x - 2b^2 y^2.
\end{aligned}$$

Calcul de F_4

$$\begin{aligned}
F_4 &= 2a b \sin(t) \cos(t)x^2 + 2a b \sin(t) \cos(t)y^2 \\
&= 2a b \sin(t)x \cos(t)x + 2a b \sin(t) \cos(t)yy \\
&= 2a b \cos(t)y \cos(t)(t)x + 2a b \sin(t) \sin(t)xy \\
&= 2a b \cos^2(t)xy + 2a b \sin^2(t)xy \\
&= 2a b x y(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \\
&= 2a b x y.
\end{aligned}$$

Calcul de F_5

$$\begin{aligned}
F_5 &= b^2 \sin^2(t)x^2 + b^2 \sin^2(t)y^2 \\
&= b^2 \cos^2(t)y^2 + b^2 \sin^2(t)y^2 \\
&= b^2 y^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \\
&= b^2 y^2.
\end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\begin{aligned}
1 &= r^2 x^2 + r^2 y^2 + 2a x - 2a^2 x^2 - 2a b x y + a^2 \cos^2(t) x^2 + a^2 \sin^2(t)x^2 \\
&\quad + 2b y - 2a b y x - 2b^2 y^2 + 2a b x y + b^2 y^2 \\
1 &= x^2(r^2 + a^2 - 2a^2) + y^2(r^2 + b^2 - 2b^2) - 2a b x y + 2 a x + 2b y.
\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}
A &= r^2 + a^2 - 2a^2, \\
B &= r^2 + b^2 - 2b^2, \\
C &= -2ab, \\
D &= 2a, \\
E &= 2b.
\end{aligned}$$

Alors le dual du cercle admet l'équation implicite suivante :

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey - 1 = 0.$$

Par suite l'image duale d'un cercle est une conique

2.6.1 Détermination de la nature de l'image duale d'un cercle

On a vu que l'image duale d'un cercle \mathcal{C} de centre $\mathcal{T} = (a, b)$ et de rayon r , est une conique de la forme :

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey - 1 = 0,$$

avec A, B, C, D et E , les valeurs exprimées précédemment.

- Si $C^2 - 4AB < 0$, alors \mathcal{G} est une **ellipse**,
- Si $C^2 - 4AB > 0$, alors \mathcal{G} est une **hyperbole**,
- Si $C^2 - 4AB = 0$, alors \mathcal{G} est une **parabole**.

Or,

$$\begin{aligned} C^2 - 4AB &= 4a^2b^2 - 4(r^2 - a^2)(r^2 - b^2) \\ &= 4a^2b^2 - 4(r^4 - r^2b^2 - a^2r^2 + a^2b^2) \\ &= 4(r^2b^2 + a^2r^2 - r^4) \\ &= 4r^2(b^2 + a^2 - r^2). \end{aligned}$$

D'où:

$$\text{Signe}(C^2 - 4AB) = \text{Signe}(b^2 + a^2 - r^2).$$

2.6.2 image duale d'un cercle passant par trois points

Soient $p_i = (u_i, v_i)$, $i = 1, 2, 3$, trois points quelconques du plan. On se propose de chercher l'image duale du cercle passant par ces trois points.

Posons pour tout $i = 1, 2, 3$:

$$D_i : u_i x + v_i y = 1.$$

Pour $i = 1, 2, 3$ l'image duale de la droite D_i est le point $p_i = (u_i, v_i)$. Soit \mathcal{C} le cercle de centre (a, b) et de rayon r passant par ces trois droites.

Le cercle \mathcal{C} est d'équation:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Les valeurs a, b et r sont alors solutions du système pour $i = 1, 2, 3$:

$$(u_i - a)^2 + (v_i - b)^2 = r^2.$$

Une fois le centre et le rayon du cercle \mathcal{C} déterminés, l'image duale de \mathcal{C} est la conique tangente aux trois droites D_i , $i = 1, 2, 3$. Cette conique est d'équation:

$$x^2(r^2 + a^2 - 2a^2) + y^2(r^2 + b^2 - 2b^2) - 2abxy + 2ax + 2by - 1 = 0.$$

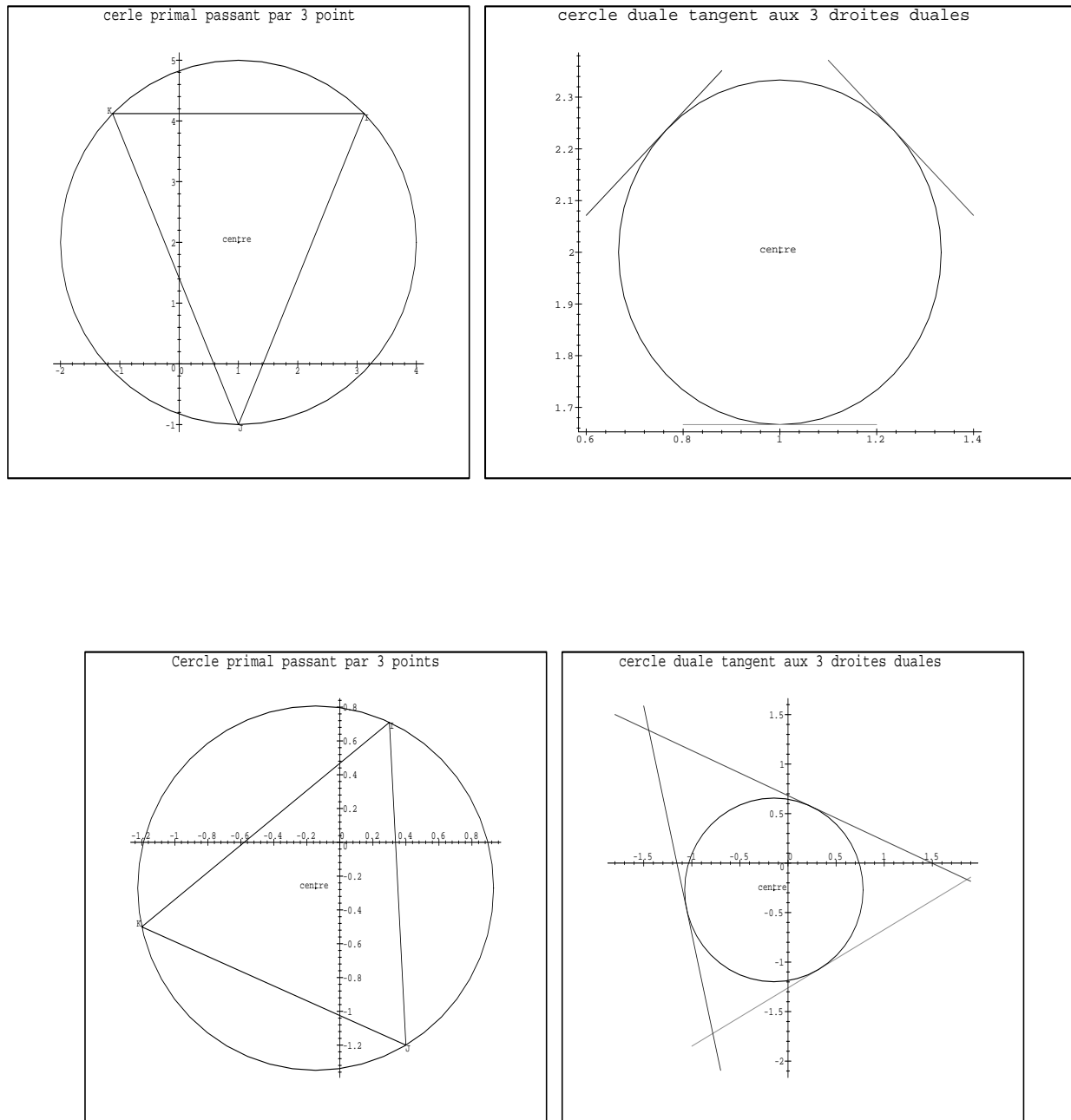


FIG. 2.31 – Deux exemples d'images duales de cercles passant par trois points en prenant comme origine à chaque fois les centres respectives des cercles.

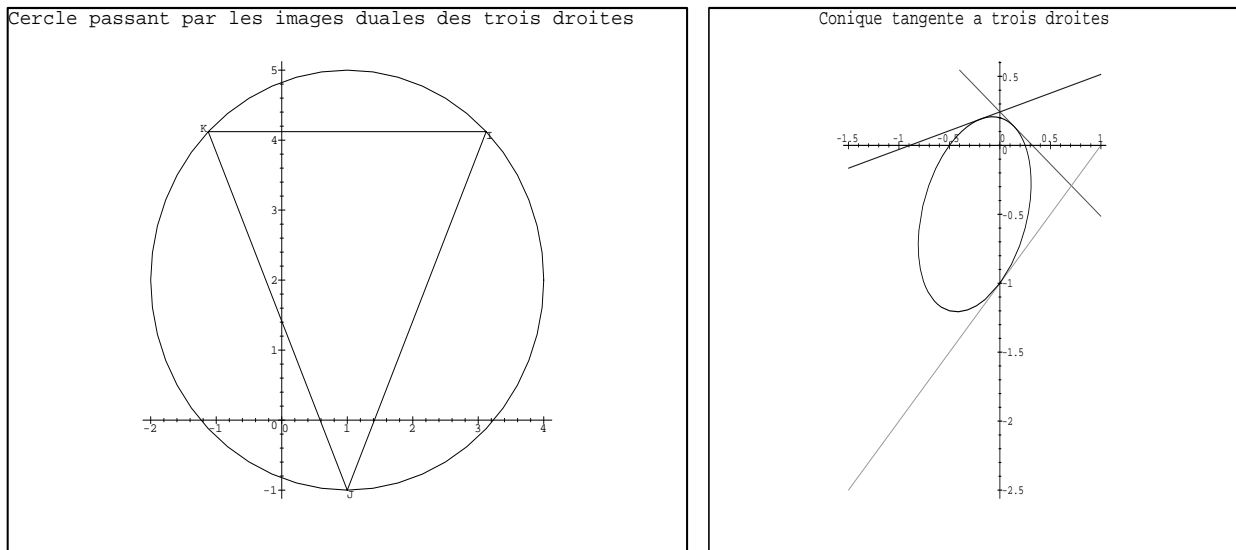


FIG. 2.32 – *Un exemple de conique tangente à trois droites.*

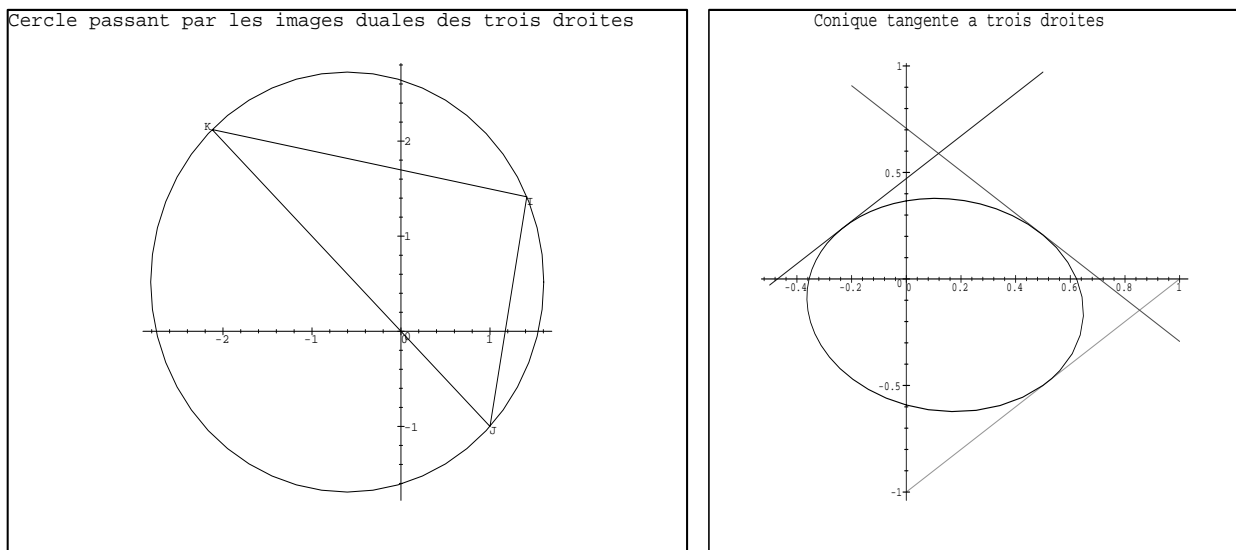


FIG. 2.33 – *Exemple avec trois droites dont deux sont parallèles.*

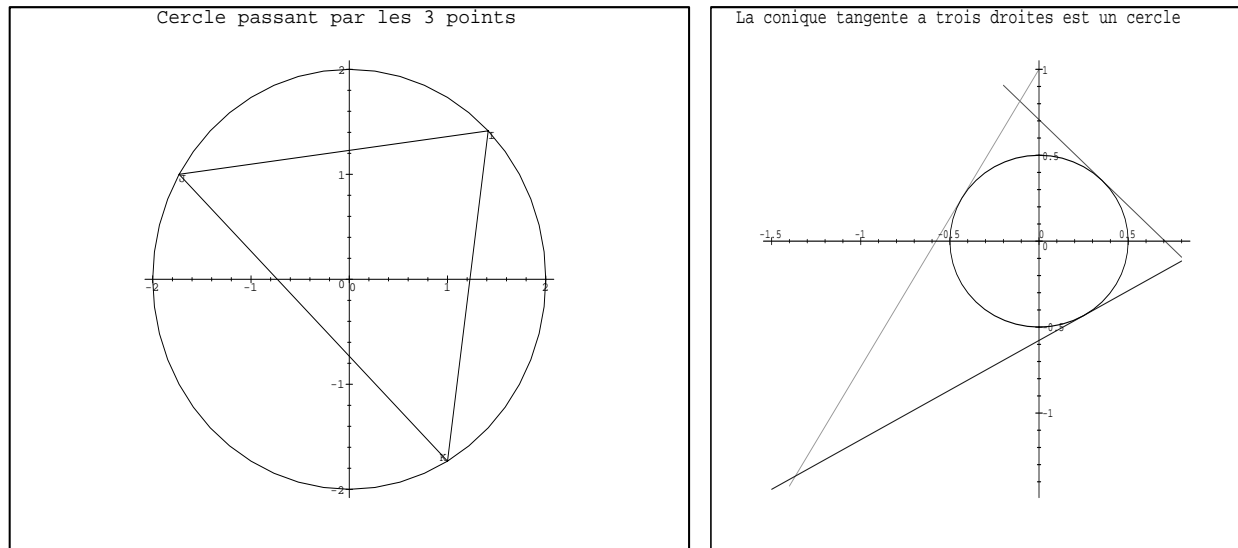
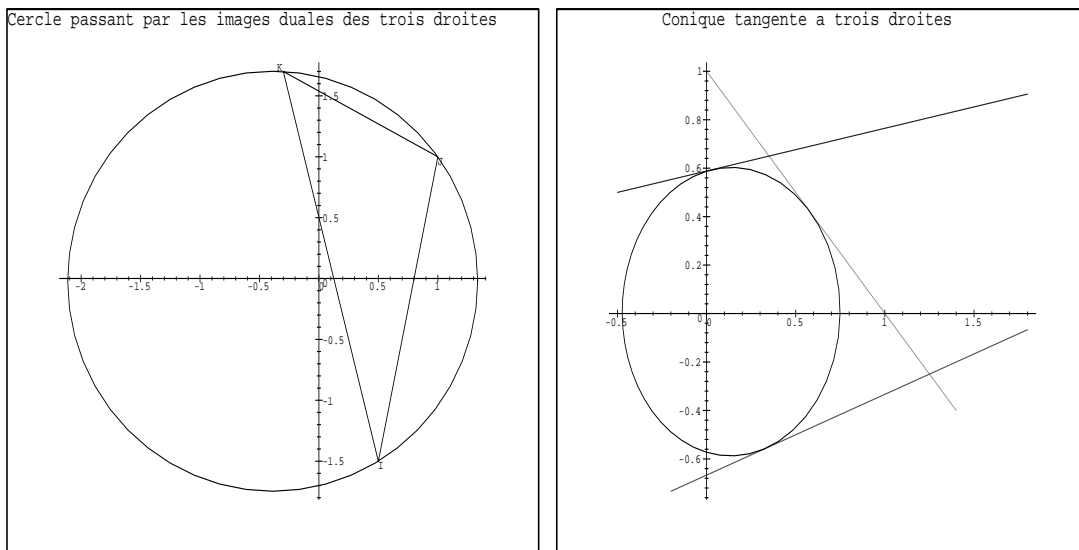


FIG. 2.34 – a) Exemple où le centre du cercle passant par les points duaux est confondu avec l'origine b) la conique duale est un cercle tangent aux trois droites données



Chapitre 3

Dualités géométriques définies par une matrice symétrique

Dans les chapitres précédents, on a utilisé des dualités géométriques particulières. Ces dualités étaient définies à partir d'un produit scalaire qui est une forme bilinéaire symétrique particulière.

Dans ce chapitre, on va généraliser cette notion en définissant une dualité à l'aide d'une forme bilinéaire symétrique quelconque. On utilisera surtout l'écriture matricielle de la forme bilinéaire symétrique considérée.

Dans un premier temps, on va considérer cette dualité dans un plan projectif pour trouver les caractérisation et les propriétés, puis on va généraliser la notion de courbes duales relatives à une forme bilinéaire symétrique, ensuite on se restreindra au plan affine.

3.1 Rappels

Définition 28

Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{R} . On appelle forme bilinéaire toute application $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, telle que:

– Pour tous vecteurs u_1, u_2 et u_3 de E on a:

$$\phi(u_1 + u_2, u_3) = \phi(u_1, u_3) + \phi(u_2, u_3),$$

$$\phi(u_1, u_2 + u_3) = \phi(u_1, u_2) + \phi(u_1, u_3).$$

– Pour tout scalaire λ , on a:

$$\phi(\lambda u_1, u_2) = \phi(u_1, \lambda u_2) = \lambda \phi(u_1, u_2).$$

Définition 29

Une forme bilinéaire d'un espace vectoriel E , est dite *symétrique* si et seulement si pour tous vecteurs u_1 et u_2 de E , on a :

$$\phi(u_1, u_2) = \phi(u_2, u_1).$$

Supposons que l'espace vectoriel E est de dimension n , et que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E . Si u et v sont deux vecteurs de E , définis dans cette base par les matrices colonnes :

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Alors on a :

$$\phi(u, v) = \phi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j \phi(e_i, e_j).$$

Par conséquent, ϕ est complètement déterminée par les coefficients :

$$a_{ij} = \phi(e_i, e_j) \quad \forall i, j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n.$$

D'où, à toute forme bilinéaire ϕ , on peut associer une matrice carrée A , dont les coefficients sont les images, par ϕ , des éléments de la base \mathcal{B} associée à l'espace vectoriel E . En outre, une forme bilinéaire peut s'écrire sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\phi(u, v) = u^t A v.$$

Lemme 7

Une matrice carrée est matrice associée à une forme bilinéaire symétrique si et seulement si c'est une matrice symétrique.

Définition 30

Une forme bilinéaire ϕ sur E est dite *alternée* si :

$$\phi(u, u) = 0, \quad \forall u \in E.$$

Définition 31

Une matrice carrée S est dite *anti-symétrique* si :

$$S^t = -S.$$

Lemme 8

Une matrice carrée est la matrice d'une forme bilinéaire alternée si et seulement si c'est une matrice anti-symétrique.

3.2 Dualité associée à une forme bilinéaire symétrique dans l'espace affine \mathbb{R}^3

Dans ce paragraphe, on se place dans l'espace affine \mathbb{R}^3 .

Soit s une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, et soit S sa matrice associée. On sait que S est une matrice symétrique inversible.

Un plan de l'espace affine \mathbb{R}^3 peut être représenté de la manière suivante:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{m \in \mathbb{R}^3, s(p, m) = 0\} \\ &= \{m \in \mathbb{P}, p^t S m = 0\}.\end{aligned}$$

Où p est un point de \mathbb{R}^3 .

Cette écriture nous permet de prendre $P = Sp$ comme représentant du plan \mathcal{P} .

Ces notations mettent en évidence une relation naturelle entre l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 et l'ensemble des plans de \mathbb{R}^3 .

En effet, on peut définir la double transformation suivante:

$$\begin{aligned}p &\longrightarrow \mathcal{D}_s(p) = P, \\ P &\longrightarrow \mathcal{D}_s(P) = p.\end{aligned}$$

D'une manière générale, la double transformation \mathcal{D}_s entre l'ensemble des points et l'ensemble des plans, est définie comme suit:

Si p est un point de \mathbb{R}^3 , alors:

$$P \longrightarrow \mathcal{D}_s(P) = S^{-1}P.$$

Cette double transformation est involutive, en effet:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_s(\mathcal{D}_s(p)) &= S^{-1}Sp = p, \\ \mathcal{D}_s(\mathcal{D}_s(P)) &= SS^{-1}P = P.\end{aligned}$$

D'autre part, on a la propriété suivante:

Soit \mathcal{P} un plan de \mathbb{R}^3 dont le représentant est $P = Sp$, c'est à dire $\mathcal{D}_s(\mathcal{P}) = p$. Soit q un point de \mathbb{R}^3 , alors on a:

$$\begin{aligned}q \in \mathcal{P} &\iff p^t S q = 0 \\ &\iff q^t S^t p = 0 \\ &\iff q^t S p = 0 \\ &\iff p \in \mathcal{D}_s(q) \\ &\iff \mathcal{D}_s(\mathcal{P}) \in \mathcal{D}_s(q).\end{aligned}$$

Par suite, cette double transformation inverse la relation d'inclusion. Ce qui nous permet d'énoncer la définition suivante:

Définition 32

Soient s une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, \mathbb{E} l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 et \mathbb{P} l'ensemble des plans de \mathbb{R}^3 .

Une dualité géométrique \mathcal{D}_s dans \mathbb{R}^3 associée à la forme bilinéaire s , et une double transformation entre l'ensemble \mathbb{E} et l'ensemble \mathbb{P} .

Elle associe d'une part à un point p le plan \mathcal{P} qui est l'ensemble des points m qui vérifie l'équation suivante:

$$s(p, m) = 0.$$

D'autre part elle associe à un plan $\mathcal{P} = \{m \in \mathbb{R}^3, s(p, m) = 0\}$ le point p .

Dans toute la suite, on identifie les plans \mathcal{P} et leurs représentants P . Alors on a les propriétés suivantes:

Propriété 13

Soit p_1 et p_2 deux points de \mathbb{R}^3 . Alors le plan P contenant ces deux points est tel que:

$$P = \lambda p_1 \wedge p_2,$$

où λ est un réel.

Preuve:

Soit $\mathcal{P} = \{m \in \mathbb{R}^3 : P^t m = 0\}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} p_1 \in \mathcal{P} \\ p_2 \in \mathcal{P} \end{cases} &\iff \begin{cases} P^t p_1 = 0 \\ P^t p_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda : P = \lambda p_1 \wedge p_2. \end{aligned}$$

◇

Propriété 14

Soit P_1 et P_2 deux plans \mathbb{R}^3 . Alors un point p appartenant à l'intersection de ces deux plans est tel que:

$$p = \alpha P_1 \wedge P_2,$$

avec α un réel.

Preuve:

Soient $\mathcal{P}_1 = \{m \in \mathbb{R}^3, P_1^t m = 0\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{m \in \mathbb{R}^3, P_2^t m = 0\}$, deux plans, et soit p un point:

$$\begin{aligned} \begin{cases} p \in \mathcal{P}_1 \\ p \in \mathcal{P}_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} P_1^t p = 0 \\ P_2^t p = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \alpha : p = \alpha P_1 \wedge P_2. \end{aligned}$$

◇

3.2.1 Quelques propriétés de la dualité géométrique dans \mathbb{R}^3 **Proposition 15**

Soient S une matrice symétrique et p_1 et p_2 deux points de \mathbb{R}^3 . Alors on a:

$$S^{-1}(p_1 \wedge p_2) = \frac{1}{\det(S)} S p_1 \wedge S p_2.$$

Soient P_1 et P_2 deux plans de \mathbb{R}^3 . Alors on a:

$$S(P_1 \wedge P_2) = \det(S) S^{-1} P_1 \wedge S^{-1} P_2,$$

avec $\det(S)$ désigne le déterminant de la matrice S .

Preuve

Posons d'abord:

$$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \quad p_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

On a:

$$p_1 \wedge p_2 = \begin{pmatrix} z_2 y_1 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(s)} \begin{pmatrix} df - e^2 & ce - bf & be - cd \\ ce - bf & af - c^2 & bc - ae \\ be - cd & bc - ae & ad - b^2 \end{pmatrix}.$$

Où:

$$\det(S) = adf - ae^2 - b^2 f + 2bce - c^2 d.$$

On pose $q = \det(s)S^{-1}(p_1 \wedge p_2)$, alors on a :

$$\begin{aligned} q &= \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (df - e^2)(z_2y_1 - z_1y_2) + (ce - bf)(z_1x_2 - z_2x_1) + (be - cd)(x_1y_2 - x_2y_1) \\ (ce - bf)(z_2y_1 - z_1y_2) + (af - c^2)(z_1x_2 - z_2x_1) + (bc - ae)(x_1y_2 - x_2y_1) \\ (be - cd)(z_2y_1 - z_1y_2) + (bc - ae)(z_1x_2 - z_2x_1) + (ad - b^2)(x_1y_2 - x_2y_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En explicitant les formules précédentes, on trouve :

$$\begin{aligned} q_1 &= (df - e^2)(z_2y_1 - z_1y_2) + (ce - bf)(z_1x_2 - z_2x_1) + (be - cd)(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= dfz_2y_1 - dfz_1y_2 - e^2z_2y_1 + e^2z_1y_2 + cez_1x_2 - cez_2x_1 - bfz_1x_2 + bfz_2x_1 \\ &\quad + be x_1y_2 - be x_2y_1 - cd x_1y_2 + cd x_2y_1. \end{aligned}$$

Calculons maintenant $Sp_1 \wedge Sp_2$.

Déterminons les coordonnées respectives de ces derniers :

$$\begin{aligned} Sp_1 &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 + cz_1 \\ bx_1 + dy_1 + ez_1 \\ cx_1 + ey_1 + fz_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Même chose pour Sp_2 , on trouve :

$$\begin{aligned} Sp_2 &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 + cz_2 \\ bx_2 + dy_2 + ez_2 \\ cx_2 + ey_2 + fz_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

tel que :

$$u = Sp_1 \wedge Sp_2.$$

Calculons les coordonnées du point u :

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 + cz_1 \\ bx_1 + dy_1 + ez_1 \\ cx_1 + ey_1 + fz_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 + cz_2 \\ bx_2 + dy_2 + ez_2 \\ cx_2 + ey_2 + fz_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (bx_1 + dy_1 + ez_1)(cx_2 + ey_2 + fz_2) - (cx_1 + ey_1 + fz_1)(bx_2 + dy_2 + ez_2) \\ (cx_1 + ey_1 + fz_1)(ax_2 + by_2 + cz_2) - (ax_1 + by_1 + cz_1)(cx_2 + ey_2 + fz_2) \\ (ax_1 + by_1 + cz_1)(bx_2 + dy_2 + ez_2) - (bx_1 + dy_1 + ez_1)(ax_2 + by_2 + cz_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Déterminons chaque composante séparément:

$$\begin{aligned} u_1 &= bcx_1x_2 + bex_1y_2 + bfx_1z_2 + dcx_1y_2 + dey_1y_2 + dfy_1z_2 + ecz_1x_2 + e^2z_1y_2 \\ &\quad + e^2z_1z_2 - cbx_1x_2 - cdx_1y_2 - cex_1z_2 - eby_1x_2 - edy_1y_2 - e^2y_1z_2 - fbz_1x_2 \\ &\quad - fdz_1y_2 - efz_1z_2 \\ &= bex_1y_2 - eby_1x_2 + dcx_1y_2 - cdx_1y_2 + ecz_1x_2 - cex_1z_2 + bfx_1z_2 - fbz_1x_2 \\ &\quad + dfy_1z_2 - fdz_1y_2 + e^2z_1y_2 - e^2y_1z_2 \\ u_1 &= (be - cd)(x_1y_2 - x_2y_1) + (ce - bf)(z_1x_2 - x_1z_2) + (df - e^2)(y_1z_2 - z_1y_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= acx_1x_2 + cby_2x_1 + c^2z_2x_1 + eay_1x_2 + eby_1y_2 + ecy_1z_2 + afz_1x_2 + bfz_1y_2 \\ &\quad + cfz_1z_2 - acx_1x_2 - aex_1y_2 - afx_1z_2 - bcy_1x_2 - bey_1y_2 - bfy_1z_2 - c^2z_1x_2 \\ &\quad - c^2z_1z_2 \\ &= cbx_1y_2 - cby_1x_2 + aey_1x_2 - aex_1y_2 + afz_1x_2 - afx_1z_2 + c^2x_1z_2 - c^2z_1x_2 \\ &\quad + ecy_1z_2 - ecy_1z_2 + bfz_1y_2 - bfy_1z_2 \\ u_2 &= (bc - ae)(x_1y_2 - y_1x_2) + (af - c^2)(z_1x_2 - x_1z_2) + (ec - bf)(y_1z_2 - z_1y_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= abx_1x_2 + ady_2x_1 + aez_2x_1 + b^2y_1x_2 + bdy_1y_2 + bey_1z_2 + bcx_1x_2 + cdz_1y_2 \\ &\quad + cez_1z_2 - abx_1x_2 - b^2x_1y_2 - bcx_1z_2 - ady_1x_2 - bdy_1y_2 - cdy_1z_2 - aez_1x_2 \\ &\quad - bez_1y_2 - cez_1z_2 \\ &= adx_1y_2 - ady_1x_2 + b^2y_1x_2 - b^2x_1y_2 + bcx_1x_2 - bcx_1z_2 + aex_1z_2 - aez_1x_2 \\ &\quad + bey_1z_2 - bez_1y_2 + cdz_1y_2 - cdy_1z_2 \\ u_3 &= (ad - b^2)(x_1y_2 - y_1x_2) + (bc - ae)(z_1x_2 - x_1z_2) + (be - cd)(y_1z_2 - z_1y_2). \end{aligned}$$

Finalement on a:

$$u = \begin{pmatrix} (df - e^2)(z_2y_1 - z_1y_2) + (ce - bf)(z_1x_2 - z_2x_1) + (be - cd)(x_1y_2 - x_2y_1) \\ (ce - bf)(z_2y_1 - z_1y_2) + (af - c^2)(z_1x_2 - z_2x_1) + (bc - ae)(x_1y_2 - x_2y_1) \\ (be - cd)(z_2y_1 - z_1y_2) + (bc - ae)(z_1x_2 - z_2x_1) + (ad - b^2)(x_1y_2 - x_2y_1) \end{pmatrix}$$

En comparant avec le point $q = \det(s)S^{-1}(p_1 \wedge p_2)$, on remarque qu'on a l'égalité suivante:

$$\det(s)S^{-1}(p_1 \wedge p_2) = Sp_1 \wedge Sp_2.$$

En conclusion on a:

$$S^{-1}(p_1 \wedge p_2) = \frac{1}{\det(S)}Sp_1 \wedge Sp_2.$$

En utilisant un raisonnement identique, on peut montrer que:

$$S(P_1 \wedge P_2) = \det(S)S^{-1}P_1 \wedge S^{-1}P_2.$$

◇

3.3 Dualité associée à une forme bilinéaire symétrique dans un plan projectif

Dans ce paragraphe, on se place dans un plan projectif \mathbb{P}^2 associé au plan affine \mathbb{R}^2 . Soit s une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, et soit S sa matrice associée. On sait que S est une matrice symétrique inversible.

Une droite de \mathbb{P}^2 peut être représentée de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{m \in \mathbb{P}, s(p, m) = 0\} \\ &= \{m \in \mathbb{P}, p^t S m = 0\}. \end{aligned}$$

Où p est un point de \mathbb{P}^2 .

Cette écriture nous permet de prendre $L = Sp$ comme représentant de la droite \mathcal{L} .

Ces notations mettent en évidence une relation naturelle entre l'ensemble des points de \mathbb{P}^2 et l'ensemble des droites de \mathbb{P}^2 .

En effet, on peut définir la double transformation suivante:

$$p \longrightarrow \mathcal{D}_s(p) = L,$$

$$L \longrightarrow \mathcal{D}_s(L) = p.$$

D'une manière générale, la double transformation \mathcal{D}_s entre l'ensemble des points et l'ensemble des droites, est définie comme suit:

Si p est un point de \mathbb{P}^2 , alors:

$$L \longrightarrow \mathcal{D}_s(L) = S^{-1}L.$$

Cette double transformation est involutive, en effet:

$$\mathcal{D}_s(\mathcal{D}_s(p)) = S^{-1}Sp = p,$$

$$\mathcal{D}_s(\mathcal{D}_s(L)) = SS^{-1}L = L.$$

D'autre part, on la propriété suivante: Soit \mathcal{L} une droite de \mathbb{P}^2 dont le représentant est $L = Sp$, c'est à dire $\mathcal{D}_s(\mathcal{L}) = p$. Soit q un point de \mathbb{P}^2 , alors on a:

$$\begin{aligned} q \in \mathcal{L} &\iff p^t S q = 0 \\ &\iff q^t S^t p = 0 \\ &\iff q^t S p = 0 \\ &\iff p \in \mathcal{D}_s(q) \\ &\iff \mathcal{D}_s(\mathcal{L}) \in \mathcal{D}_s(q). \end{aligned}$$

Par suite, cette double transformation inverse la relation d'inclusion. Ce qui nous permet d'énoncer la définition suivante:

Définition 33

Soient s une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, \mathbb{E} l'ensemble des points de \mathbb{P}^2 et \mathbb{L} l'ensemble des droites de \mathbb{P}^2 .

Une dualité géométrique \mathcal{D}_s associée à la forme bilinéaire s , et une double transformation entre l'ensemble \mathbb{E} et l'ensemble \mathbb{L} .

Elle associe d'une part à un point p la droite \mathcal{L} qui est l'ensemble des points m qui vérifie l'équation suivante:

$$s(p, m) = 0.$$

D'autre part elle associe à une droite $\mathcal{L} = \{m \in \mathbb{P}, s(p, m) = 0\}$ le point p .

Dans toute la suite, on identifie les droites \mathcal{L} et leurs représentants L . Alors on a les propriétés suivantes:

Propriété 15

Soit p_1 et p_2 deux points de \mathbb{P}^2 . Alors la droite L passant par ces deux points est telle que:

$$L \equiv p_1 \wedge p_2.$$

Preuve:

Soit $\mathcal{L} = \{m \in \mathbb{P}, L^t m = 0\}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} p_1 \in \mathcal{L} \\ p_2 \in \mathcal{L} \end{cases} &\iff \begin{cases} L^t p_1 = 0 \\ L^t p_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff L \equiv p_1 \wedge p_2. \end{aligned}$$

◇

Propriété 16

Soit L_1 et L_2 deux points de \mathbb{P}^2 . Alors le point p d'intersection de ces deux droites est tel que:

$$p \equiv L_1 \wedge L_2.$$

Preuve:

Soient $\mathcal{L}_1 = \{m \in \mathbb{P}, L_1^t m = 0\}$ et $\mathcal{L}_2 = \{m \in \mathbb{P}, L_2^t m = 0\}$, deux droites, et soit p un point:

$$\begin{aligned} \begin{cases} p \in \mathcal{L}_1 \\ p \in \mathcal{L}_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} L_1^t p = 0 \\ L_2^t p = 0 \end{cases} \\ &\iff p \equiv L_1 \wedge L_2. \end{aligned}$$

◇

3.3.1 Quelques propriétés de la dualité projective

En fait, on aurait pu avoir plus facilement que précédemment, une égalité au sens projectif, juste en utilisant les propriétés précédentes de la dualité géométrique \mathcal{D}_s .

En effet:

Soient p_1 et p_2 deux points du plan projectif \mathbb{P}^2 .

Posons $L = p_1 \wedge p_2$, la droite passant par ces deux points, on a:

$$\begin{aligned} \begin{cases} p_1 \in L \\ p_2 \in L \end{cases} &\iff \begin{cases} \mathcal{D}_s(L) \in \mathcal{D}_s(p_1) \\ \mathcal{D}_s(L) \in \mathcal{D}_s(p_2) \end{cases} \\ &\iff \mathcal{D}_s(L) \equiv \mathcal{D}_s(p_1) \wedge \mathcal{D}_s(p_2) \\ &\iff \mathcal{D}_s(p_1 \wedge p_2) \equiv \mathcal{D}_s(p_1) \wedge \mathcal{D}_s(p_2) \\ &\iff S^{-1}(p_1 \wedge p_2) \equiv Sp_1 \wedge Sp_2. \end{aligned}$$

D'une manière duale pour L_1 et L_2 deux droites de \mathcal{P}^2 , et p un point de leur intersection on a:

$$\begin{aligned} \begin{cases} p \in L_1 \\ p \in L_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} \mathcal{D}_s(L_1) \in \mathcal{D}_s(p) \\ \mathcal{D}_s(L_2) \in \mathcal{D}_s(p) \end{cases} \\ &\iff \mathcal{D}_s(p) \equiv \mathcal{D}_s(L_1) \wedge \mathcal{D}_s(L_2) \\ &\iff \mathcal{D}_s(L_1 \wedge L_2) \equiv \mathcal{D}_s(L_1) \wedge \mathcal{D}_s(L_2) \\ &\iff S(L_1 \wedge L_2) \equiv S^{-1}L_1 \wedge S^{-1}L_2. \end{aligned}$$

Ces deux dernières égalités, généralisent les propriétés, déjà vues dans les chapitres précédents, à savoir:

1. Le dual de l'intersection de deux droites est la droite passant par les deux respectifs des deux droites considérées.

2. Le dual d'une droite passant par deux points est le point d'intersection des droites duales respectives des deux points considérés.

3.4 Dualité géométrique associée à une matrice symétrique dans le plan affine \mathbb{R}^2

Dans ce paragraphe, on va se restreindre au plan affine \mathbb{R}^2 . Alors que le passage du plan affine au plan projectif se fait en prenant les coordonnées homogènes des points de \mathbb{R}^2 , le passage inverse se fait en prenant un représentant du point projectif dont la dernière composante est égale à 1.

En gardant les mêmes notations que précédemment, on définit dans le plan affine \mathbb{R}^2 une transformation géométrique associée à S , notée \mathcal{D}_s , de la manière suivante:

Au point $p = (a, b)$ on fait correspondre la droite $\Delta_{a,b}$ d'équation:

$$(x, y, 1)S \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

et réciproquement.

3.4.1 Propriétés de la transformation géométrique \mathcal{D}_s

Propriété 17

|| \mathcal{D}_s est involutive

Propriété 18

|| \mathcal{D}_s inverse la relation d'inclusion

Preuve:

Soient $q = (\alpha, \beta)$ un point du plan affine, $\Delta_{a,b} = \mathcal{D}_s(p)$ une droite du plan.
Comme S est symétrique alors on a:

$$q \in \Delta_{a,b} \iff (\alpha, \beta, 1)S \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$q \in \Delta_{a,b} \iff (a, b, 1)S \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{aligned} q \in \Delta_{a,b} &\iff p \in \mathcal{D}_s(q) \\ q \in \Delta_{a,b} &\iff \mathcal{D}_s(\Delta_{a,b}) \in \mathcal{D}_s(q). \end{aligned}$$

◇

D'où la transformation \mathcal{D}_s est une dualité géométrique du plan affine \mathbb{R}^2 .

Définition 34

Soit $\Delta_{a,b}$ une droite du plan affine définie par l'équation suivante:

$$(x, y, 1)S \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

On appelle demi-espace positif (respectivement négatif) défini par la droite $\Delta_{a,b}$ l'ensemble suivant:

$$\Delta_{a,b}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, 1)S \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} > 0\},$$

$$\Delta_{a,b}^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, 1)S \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} < 0\}.$$

Avec ces notations on peut vérifier la propriété suivante:

Propriété 19

La dualité géométrique \mathcal{D}_s vérifie les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_s \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^+ &\iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_s \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^+ \\ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_s \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^- &\iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_s \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^-. \end{aligned}$$

Exemples de dualité géométrique associée à une matrice

– soit S la matrice symétrique suivante:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors la dualité géométrique associée à la matrice S est telle que:

$$\mathcal{D}_s \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by - 1 = 0\}.$$

– soit S la matrice symétrique suivante:

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors la dualité géométrique associée à la matrice S est telle que:

$$\mathcal{D}_s \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 2ax + b = 0\}.$$

3.4.2 Droites affines non représentables par une dualité géométrique

On a considéré précédemment les droites d'équation:

$$(x, y, 1)S \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Cependant les droites d'équation:

$$(x, y, 1)S \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{3.1}$$

ne sont pas représentables par les dualités géométriques définies précédemment.

Soient

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1 = Se_1 \quad \text{et} \quad f_2 = Se_2.$$

Alors l'équation (3.1) est équivalente à l'équation suivante:

$$a(x, y, 1)f_1 + b(x, y, 1)f_2 = 0.$$

Exemples

– Pour la matrice suivante

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

les droites non représentables sont alors les droites d'équation $ax + by = 0$

– Pour la matrice suivante

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

les droites non représentables sont alors les droites d'équation $-2ax + 1/2b = 0$

Si on a:

$$\begin{cases} (x, y, 1)f_1 = 0, \\ (x, y, 1)f_2 = 0. \end{cases}$$

Alors les droites non représentables sont soit des faisceaux de droites passant toutes par un point ω solution du système ci-dessus, soit des faisceaux de droites parallèles.

3.5 Courbes duales associées à une matrice symétrique inversible

Dans le premier chapitre on a défini une courbe duale comme enveloppe de la famille des images duales des points de la courbe initiale. Cette définition reste aussi valable pour une dualité géométrique associée à une matrice symétrique. Elle est aussi valable dans le plan projectif que dans le plan affine associé. Soit S une matrice symétrique et soit \mathcal{D}_s la dualité géométrique associée à S .

Si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ est une courbe paramétrique plane, alors sa courbe duale $\mathcal{D}_s(\gamma)$ est

solution du système suivant:

$$\begin{cases} (x(t), y(t), 1)S \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \\ (x(t), y(t), 1)S \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \end{cases}$$

Où x_i' désigne la dérivée de x_i pour $i = 1, 2$.

Proposition 16

Soit γ , une courbe paramétrique donnée en coordonnées homogènes, définie sur un intervalle I , et s une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, dont la matrice associée est notée S .

Alors la courbe duale de γ , par la dualité \mathcal{D}_s est donnée en coordonnées homogènes, pour tout t appartenant à l'intervalle I , par:

$$\mathcal{D}_s(\gamma)(t) = S(\gamma(t) \wedge \gamma'(t)).$$

Où γ' désigne la dérivée de γ .

Preuve:

Soit γ , une courbe paramétrique sur un intervalle I . La courbe duale $\mathcal{D}_s(\gamma)$ est l'enveloppe des droites duales des points $\gamma(t)$, elle est donc l'ensemble des points caractéristique de la famille des droites duales des points $\gamma(t)$. Alors pour tout $t \in I$ elle vérifie:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (\gamma(t))^t S \mathcal{D}_s(\gamma)(t) = 0 \\ (\gamma'(t))^t S \mathcal{D}_s(\gamma)(t) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} (S(\gamma(t)))^t \mathcal{D}_s(\gamma)(t) = 0 \\ (S(\gamma'(t)))^t \mathcal{D}_s(\gamma)(t) = 0 \end{cases} \\ &\iff \mathcal{D}_s(\gamma)(t) = S(\gamma(t) \wedge \gamma'(t)). \end{aligned}$$

◇

3.5.1 Exemples de courbes duales relatives à une matrice symétrique

Soit

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient $i = 0, \dots, n$ et $B_i^n = C_i^n(1-t)^{n-i}t^i$ les polynômes de Bernstein de degré n définies sur $[0, 1]$. Soit $,_i^n(t) = (t, B_i^n(t))$. La courbe duale $\mathcal{D}_s(,{}_i^n(t))$ est solution du système suivant:

$$\begin{cases} (x(t), y(t), 1)S(t, B_i^n(t), 1)^t = 0 \\ (x(t), y(t), 1)S(1, B_i^n(t), 0)^t = 0 \end{cases} .$$

Les courbes à gauche des figures suivantes sont les courbes de Bernstein de degré 2 et 3 respectivement. Les courbes à droite sont leurs courbes duales respectives par la dualité associée à la matrice S .

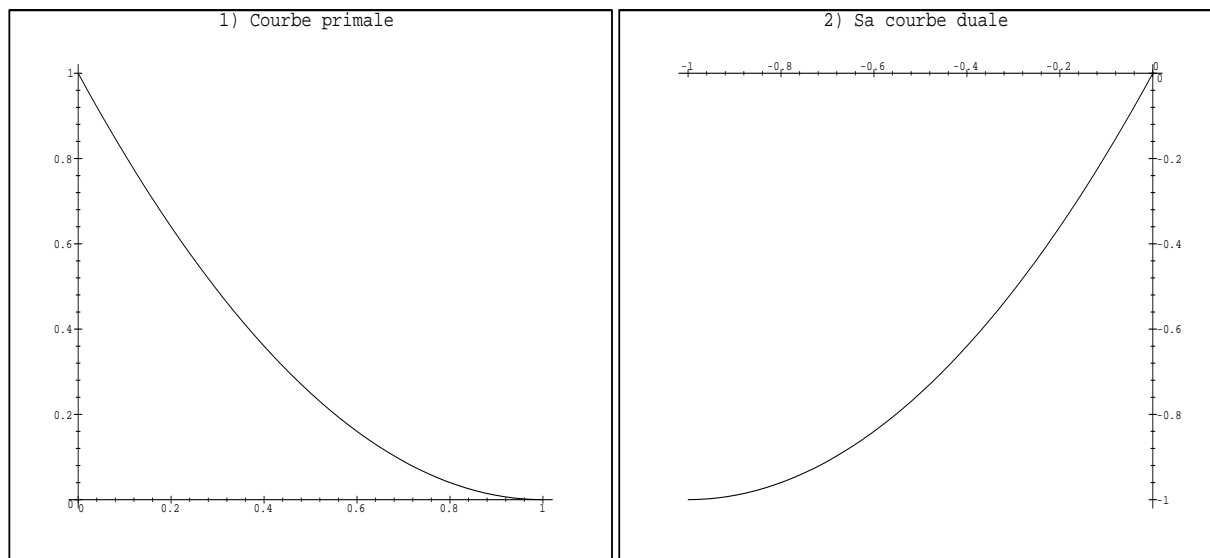


FIG. 3.1 – 1) $x(t) = t, y(t) = (1-t)^2$. 2) $x(t) = t-1, y(t) = t^2-1$.

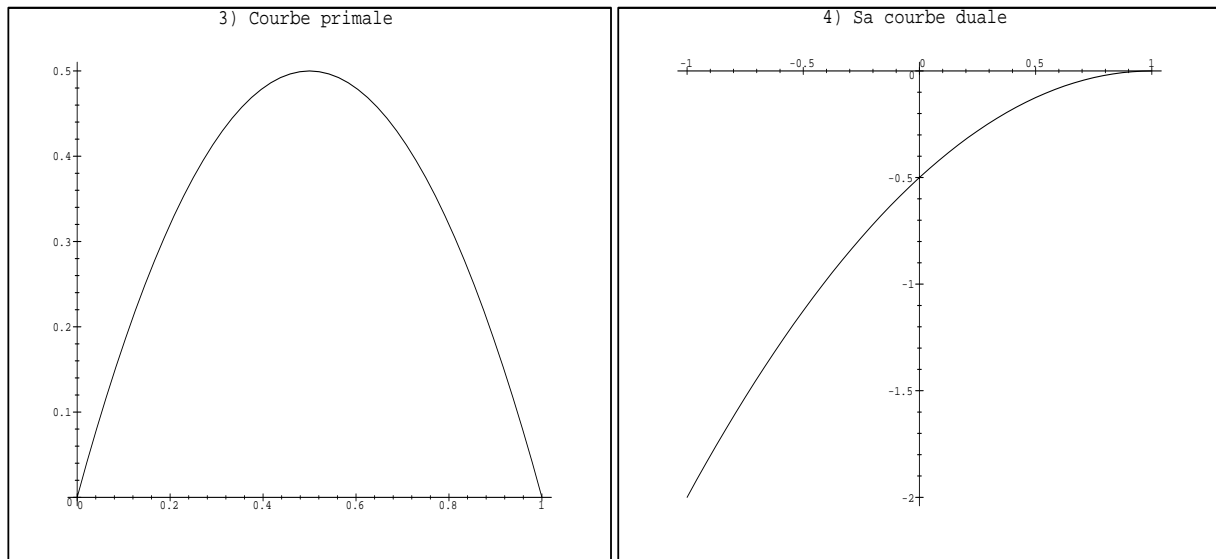


FIG. 3.2 - 3) $x(t) = t, y(t) = 2t(1 - t)$. 4) $x(t) = -2t + 1, y(t) = -2t^2$.

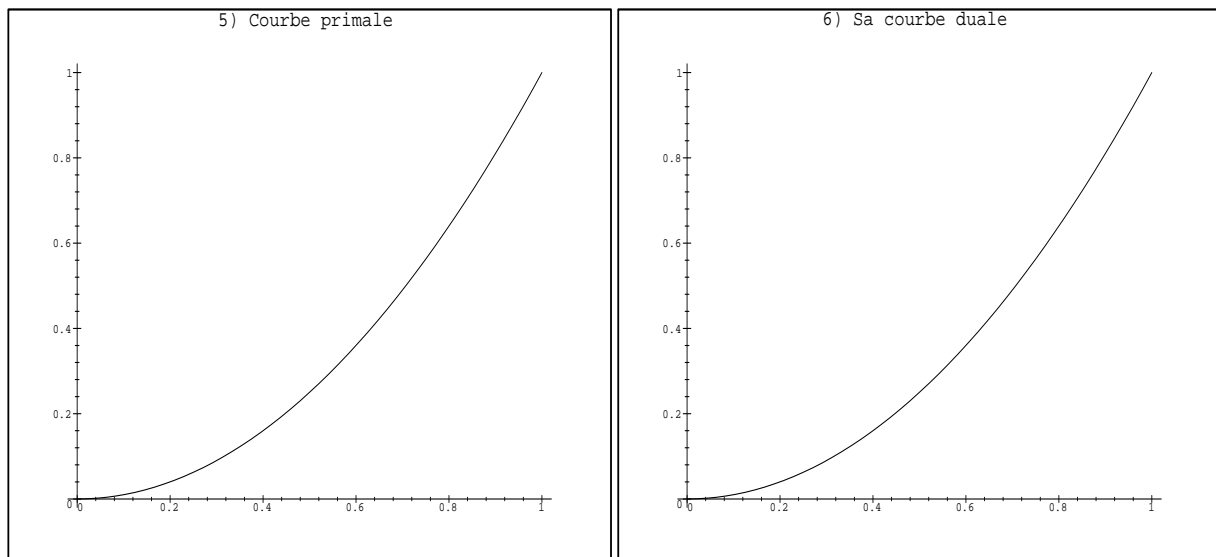


FIG. 3.3 - 5) $x(t) = t, y(t) = t^2$. 6) $x(t) = t, y(t) = t^2$.

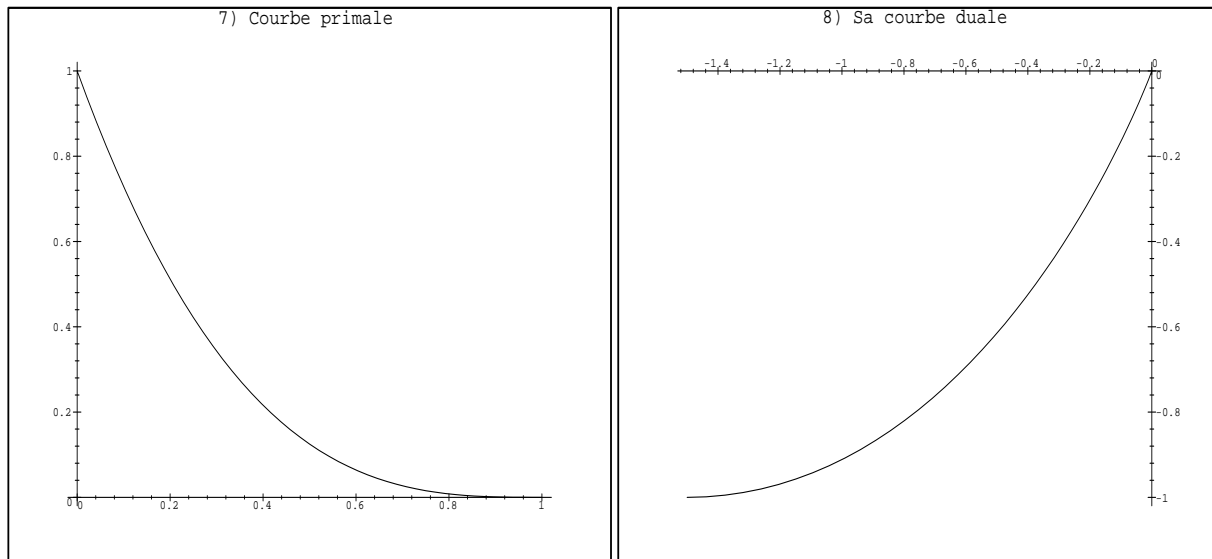


FIG. 3.4 - 7) $x(t) = t, y(t) = (1 - t)^3$. 8) $x(t) = \frac{-3}{2}(t - 1)^2, y(t) = 3t^2 - 2t^3 - 1$.

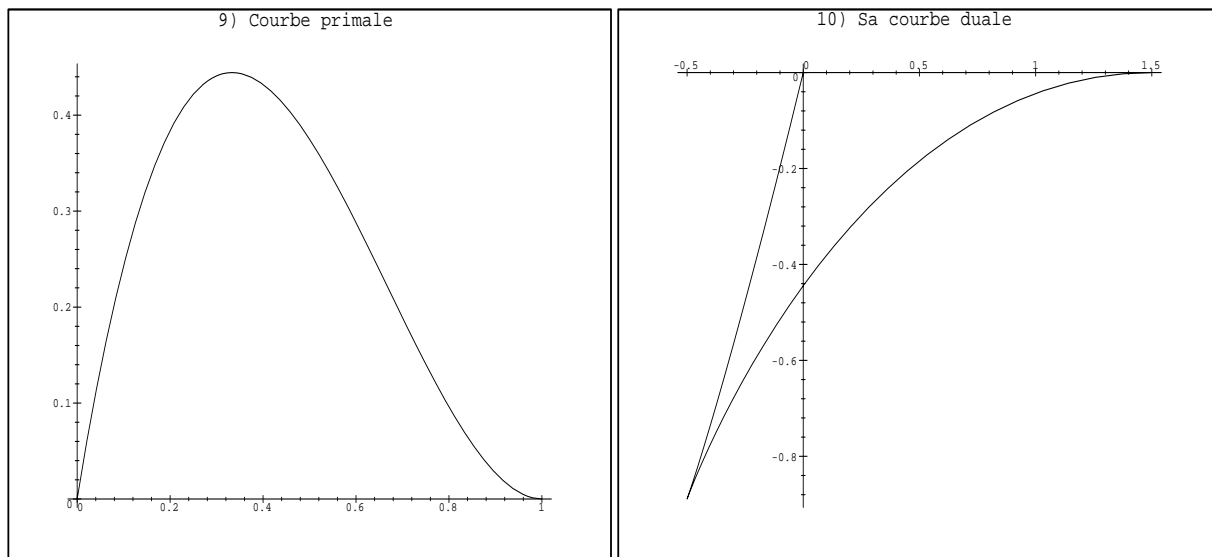


FIG. 3.5 - 9) $x(t) = t, y(t) = 3(1 - t)^2t$. 10) $x(t) = \frac{9}{2}t^2 - 6t + \frac{3}{2}, y(t) = -6t^2 + 6t^3$.

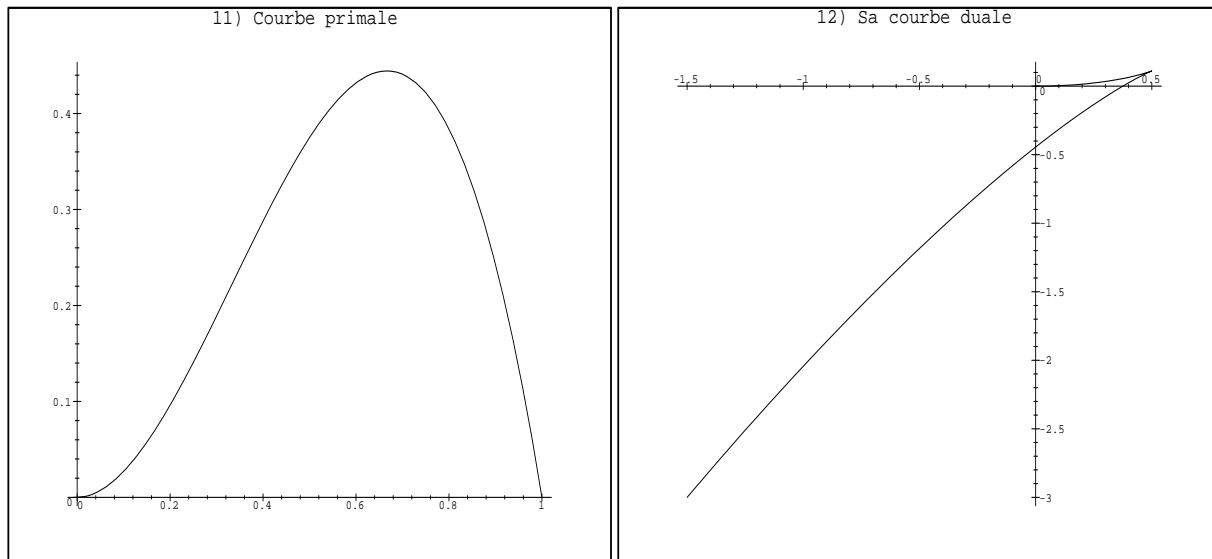


FIG. 3.6 - 11) $x(t) = t, y(t) = 3(1 - t)t^2$. 12) $x(t) = \frac{-9}{2}t^2 + 3t, y(t) = 3t^2 - 6t^3$.

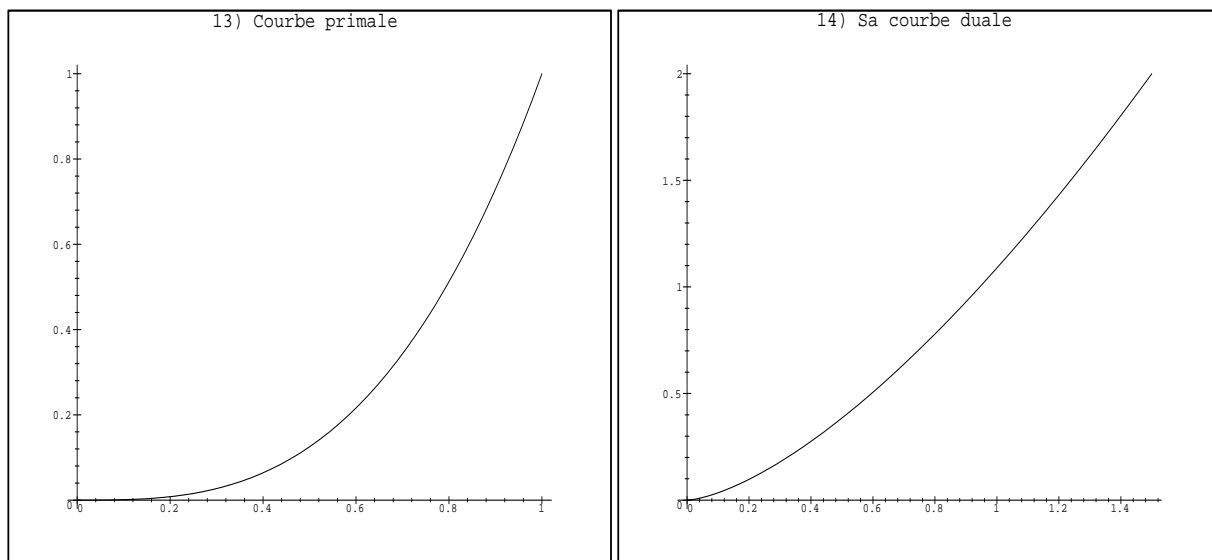


FIG. 3.7 - 13) $x(t) = t, y(t) = (1 - t)^3$. 14) $x(t) = \frac{3}{2}t^2, y(t) = 3t^3$.

3.5.2 Exemples de courbes duales interpolantes

Soit S une matrice symétrique et soit \mathcal{D}_s la dualité géométrique associée.

On se donne trois points P_1, P_2 et P_3 en coordonnées homogènes. Soient p_1, p_2 et p_3 les points affines associés.

On se propose de chercher une courbe duale qui interpole les points p_1 et p_3 et dont les tangentes respectives en ces derniers sont les droites affines (p_1p_2) et (p_2p_3) .

Pour chaque $i, i = 1, \dots, 3$, on associe à P_i la droite duale L_i , qui est l'image de P_i par la double transformation \mathcal{D}_s . On considère ensuite les points d'intersections de ces droites duales, déterminés pour tout $i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 3$ par:

$$\begin{aligned} l_{ij} &= L_i \wedge L_j, \\ &= SP_i \wedge SP_j, \\ &= \det(S)S^{-1}(P_i \wedge P_j). \end{aligned}$$

On considère la courbe suivante donnée en coordonnées homogènes et définie sur $[0, 1]$ par:

$$, (t) = (1-t)^2 l_{12} + 2t(1-t)l_{13} + t^2 l_{23}.$$

D'après les propriétés de la dualité \mathcal{D}_s on a:

$$\begin{aligned} , (t) &= \det(S)((1-t)^2 S^{-1}(P_1 \wedge P_2) + 2t(1-t)S^{-1}(P_1 \wedge P_3) + t^2 S^{-1}(P_2 \wedge P_3)) \\ &= \det(S)S^{-1}((1-t)^2 (P_1 \wedge P_2) + 2t(1-t)(P_1 \wedge P_3) + t^2 (P_2 \wedge P_3)). \end{aligned}$$

D'où la dérivée de $,$ est donnée par:

$$, '(t) = 2\det(S)S^{-1}((1-t)(P_1 \wedge P_3 - P_1 \wedge P_2) + t(P_2 \wedge P_3 - P_1 \wedge P_3)).$$

D'après la proposition (16), la courbe duale de $,$ en coordonnées homogènes est solution

de l'équation suivante:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_s(\cdot, \cdot)(t) &= S, (t) \wedge S, '(t) \\
 &= S(\det(S)(S^{-1}((1-t)^2(P_1 \wedge P_2) + 2t(1-t)(P_1 \wedge P_3) + t^2(P_2 \wedge P_3))) \\
 &\quad \wedge S(2\det(S)S^{-1}((1-t)(P_1 \wedge P_3 - P_1 \wedge P_2) + t(P_2 \wedge P_3 - P_1 \wedge P_3))) \\
 &= 2(\det(S))^2((1-t)^2(P_1 \wedge P_2) + 2t(1-t)(P_1 \wedge P_3) + t^2(P_2 \wedge P_3)) \\
 &\quad \wedge ((1-t)(P_1 \wedge P_3 - P_1 \wedge P_2) + t(P_2 \wedge P_3 - P_1 \wedge P_3)) \\
 \frac{\mathcal{D}_s(\cdot, \cdot)(t)}{2(\det(S))^2} &= (1-t)^3 \langle P_1 \wedge P_2, P_3 \rangle P_1 + t(1-t)^2 \langle P_1 \wedge P_2, P_3 \rangle P_2 - t(1-t)^2 \langle P_1 \wedge P_2, P_3 \rangle P_1 \\
 &\quad - 2t(1-t)^2 \langle P_1 \wedge P_3, P_2 \rangle P_1 - 2t^2(1-t) \langle P_1 \wedge P_3, P_2 \rangle P_3 + t^3 \langle P_1 \wedge P_2, P_3 \rangle P_3 \\
 &\quad - t^2(1-t) \langle P_2 \wedge P_3, P_1 \rangle P_3 + t^2(1-t) \langle P_2 \wedge P_3, P_1 \rangle P_2 \\
 &= (1-t)^3 \langle P_1 \wedge P_2, P_3 \rangle P_1 - t(1-t)^2 \langle P_1 \wedge P_2, P_3 \rangle P_1 + 2t(1-t)^2 \langle P_1 \wedge P_3, P_2 \rangle P_1 \\
 &\quad + t(1-t)^2 \langle P_1 \wedge P_2, P_3 \rangle P_2 + t^2(1-t) \langle P_1 \wedge P_2, P_3 \rangle P_2 + t^3 \langle P_1 \wedge P_2, P_3 \rangle P_3 \\
 &\quad + t(1-t)^2 \langle P_1 \wedge P_2, P_3 \rangle P_3 - t^2(1-t) \langle P_1 \wedge P_2, P_3 \rangle P_3 \\
 &= \langle P_1 \wedge P_2, P_3 \rangle (((1-t)^3 - t(1-t)^2 + 2t(1-t)^2)) P_1 + (t(1-t)^2 + t^2(1-t)) P_2 \\
 &\quad + (2t^2(1-t) - t^2(1-t) + t^3) P_3.
 \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_s(\cdot, \cdot)(t) &= 2(\det(S))^2 \langle P_1 \wedge P_2, P_3 \rangle ((1-t)^2 P_1 + t(1-t) P_2 + t^2 P_3) \\
 &\equiv (1-t)^2 P_1 + t(1-t) P_2 + t^2 P_3.
 \end{aligned}$$

Si on pose:

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} p_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} p_3 \\ w_1 \end{pmatrix}.$$

Et si on considère la courbe μ , courbe affine associée à la courbe $\mathcal{D}_s(\cdot, \cdot)$. La courbe μ est obtenue par projection de la courbe $\mathcal{D}_s(\cdot, \cdot)$ sur le plan $Z = 1$. Alors on a:

$$\begin{aligned}
 \mu(t) &= \frac{(1-t)^2 p_1 + t(1-t) p_2 + t^2 p_3}{(1-t)^2 + t(1-t) + t^2}, \\
 &= \frac{(1-t)^2 p_1 + t(1-t) p_2 + t^2 p_3}{1-t+t^2}.
 \end{aligned}$$

Si

$$P_1 = \begin{pmatrix} w_1 p_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2w_2 p_2 \\ 2w_2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} w_3 p_3 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Alors on retrouve une courbe de Bézier rationnelle:

$$\mu(t) = \frac{(1-t)^2 w_1 p_1 + 2t(1-t) w_2 p_2 + t^2 w_3 p_3}{(1-t)^2 w_1 + 2t(1-t) w_2 + t^2 w_3}.$$

On peut vérifier que:

- $\mu(0) = p_1$ et $\mu(1) = p_3$
- les tangentes respectives à la courbe μ au point p_1 et p_3 sont respectivement les droites (p_1p_1) et (p_2p_3) .

3.5.3 Retour au plan affine

Dans ce paragraphe, on considère le même problème que précédemment, mais on va partir d'une courbe ϕ , affine. Pour cela posons:

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} p_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} p_3 \\ w_1 \end{pmatrix}$$

Et pour tout $i = 1, \dots, 3$ et tout $j = 1, \dots, 3$:

$$l_{ij} = \begin{pmatrix} l_{ij}[1] \\ l_{ij}[2] \\ l_{ij}[3] \end{pmatrix}$$

et

On considère la courbe ϕ , qui est la projection de la courbe μ , définie ci-dessus, sur le plan $Z = 1$

$$\phi(t) = (1-t)^2 \frac{l_{12}}{l_{12}[3]} + 2t(1-t) \frac{l_{13}}{l_{13}[3]} + t^2 \frac{l_{23}}{l_{23}[3]}.$$

De la même manière que précédemment, on trouve que:

$$\begin{aligned} \phi(t) \wedge \phi'(t) &= 2(\det(S))^2 \langle P_1 \wedge P_2, P_3 \rangle \left((1-t)^2 \frac{P_1}{l_{12}[3]l_{13}[3]} + t(1-t) \frac{P_2}{l_{12}[3]l_{23}[3]} + t^2 \frac{P_3}{l_{13}[3]l_{23}[3]} \right) \\ &\equiv (1-t)^2 w_1 P_1 + t(1-t) w_2 P_2 + t^2 w_3 P_3, \end{aligned}$$

avec:

$$w_1 = \frac{1}{l_{12}[3]l_{13}[3]}, \quad w_2 = \frac{1}{l_{12}[3]l_{23}[3]}, \quad w_3 = \frac{1}{l_{23}[3]l_{13}[3]}.$$

La courbe duale est alors de la forme:

$$\mathcal{D}_s(\phi)(t) = \mu(t) = \frac{(1-t)^2 w_1 p_1 + t(1-t) w_2 p_2 + t^2 w_3 p_3}{(1-t)^2 w_1 + t(1-t) w_2 + t^2 w_3}.$$

Les poids w_i , $i = 1, \dots, 3$, dépendent de la matrice S et des coordonnées des points p_i . Cependant ces poids ne sont pas de signe constant, ce qui n'assure pas que la courbe soit à l'intérieur du triangle $p_1 p_2 p_3$. En effet, si on pose:

$$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} l_{12}[3] &\equiv (be - cd)(b_1 - b_2) + (bc - ae)(a_2 - a_1) + (a_1b_2 - a_2b_1), \\ l_{23}[3] &\equiv (be - cd)(b_2 - b_3) + (bc - ae)(a_3 - a_2) + (a_2b_3 - a_3b_2), \\ l_{13}[3] &\equiv (be - cd)(b_1 - b_3) + (bc - ae)(a_3 - a_1) + (a_1b_3 - a_3b_1). \end{aligned}$$

Etude des cas

On sait que :

$$\mu(t) = \frac{(1-t)^2 w_1 p_1 + t(1-t) w_2 p_2 + t^2 w_3 p_3}{(1-t)^2 w_1 + t(1-t) w_2 + t^2 w_3}.$$

Etudions la fonction suivante :

$$den(t) = (1-t)^2 w_1 + t(1-t) w_2 + t^2 w_3.$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} den(t) &= (1-t)^2 w_1 + t(1-t) w_2 + t^2 w_3 \\ &= t^2(w_1 - w_2 + w_3) + t(w_2 - 2w_1) + w_1. \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \Delta &= (w_2 - 2w_1)^2 - 4(w_1 - w_2 + w_3)w_1 \\ &= w_2^2 - 4w_1w_2 - 4w_1^2 - 4w_1^2 + 44w_1^2 - 4w_1^3 \\ &= w_2^2 - 4w_1^3 \\ &= \frac{1}{l_{12}^2 l_{23}^2} - 4 \frac{1}{l_{12} l_{13}^2 l_{23}} \\ &= \frac{l_{13}^2 - 4l_{12} l_{23}}{l_{12}^2 l_{13}^2 l_{23}^2}. \end{aligned}$$

Par suite, le signe de Δ est celui de $l_{13}^2 - 4l_{12}l_{23}$

1^{er} cas

Si $l_{12}l_{23} < 0$, ce qui signifie que l_{12} et l_{23} ne sont pas de même signe, alors w_1 et w_3 ne le sont pas non plus. Dans ce cas $\exists t \in]0, 1[$ tel que $\Delta > 0$. Par conséquent la fonction $den(t)$ s'annule à l'intérieur de l'intervalle $]0, 1[$. D'où, l'existence d'une direction asymptotique.

2^{ème} cas

Si $l_{12}l_{23} > 0$ c'est à dire sont de même signe, alors w_1 et w_3 le sont aussi. Dans ce cas la fonction $den(t)$ ne change pas de signe dans $[0, 1]$, elle ne s'annule pas à l'intérieur de l'intervalle.

3.6 Courbes de Bézier duales associées à une matrice symétrique

dans ce paragraphe on se place dans le plan projectif, pour faciliter les calculs. On suppose aussi qu'on a une forme bilinéaire symétrique non dégénérée dont la matrice associée est notée par S

3.6.1 courbes duales d'une courbe quadratique

On a vu que si on a une courbe γ , telle que:

$$\gamma(t) = (1-t)^2 p_0 + 2t(1-t)p_1 + t^2 p_2.$$

Alors sa courbe duale est de la forme:

$$\mathcal{D}_s(\gamma)(t) = (1-t)^2(L_0 \wedge L_1) + t(1-t)(L_0 \wedge L_2) + t^2(L_1 \wedge L_2).$$

On remarque que cette courbe duale est une courbe quadratique dans le plan projectif. Ce qui implique que sa projection sur l'axe $Z = 1$ est une courbe affine rationnelle de degré 2.

3.6.2 courbes duales d'une courbe cubique

Soient p_0, p_1, p_2 et p_3 trois points en coordonnées homogènes. On considère ensuite une courbe γ , sur l'intervalle $[0, 1]$ telle que:

$$\gamma(t) = (1-t)^3 p_0 + 3t(1-t)^2 p_1 + 3t^2(1-t)p_2 + t^3 p_3.$$

Soit alors la courbe μ , courbe duale de la courbe γ , par la dualité \mathcal{D}_s . Elle est définie sur le même intervalle que γ , et elle vérifie:

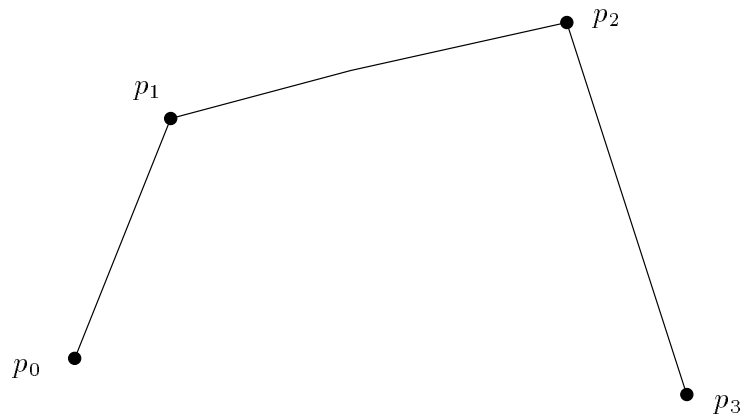
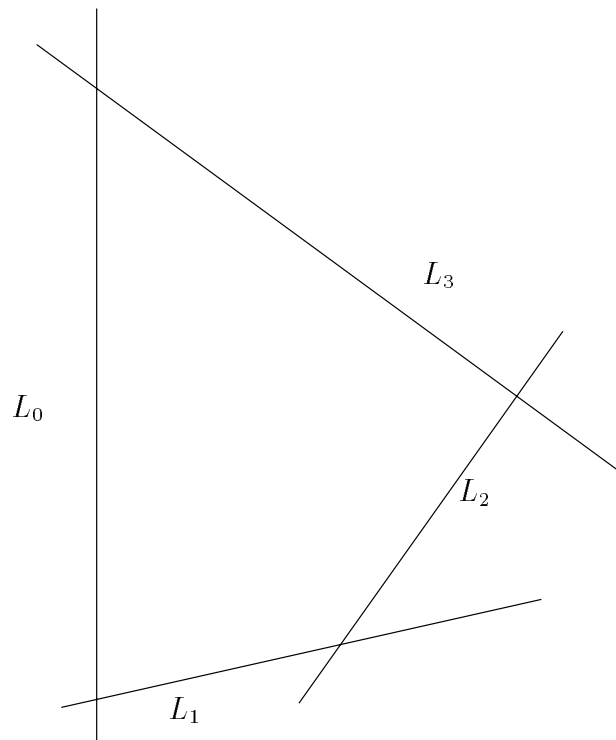
$$\mu(t) = S(\gamma(t) \wedge S'(\gamma'(t))).$$

Où γ' désigne la courbe dérivée.

On cherche à trouver la formule explicite de la courbe duale μ en fonction des données.

On associe à chaque point p_i , pour tout $i = 0, \dots, 3$, sa droite duale $L_i = S p_i$. Alors la courbe duale de γ , est telle que:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= S((1-t)^3 p_0 + 3t(1-t)^2 p_1 + 3t^2(1-t)p_2 + t^3 p_3) \\ &\quad \wedge 3S((1-t)^2(p_1 - p_0) + 2t(1-t)(p_2 - p_1) + t^2(p_3 - p_2)) \\ &= ((1-t)^3 L_0 + 3t(1-t)^2 L_1 + 3t^2(1-t)L_2 + t^3 L_3) \\ &\quad \wedge 3((1-t)^2(L_1 - L_0) + 2t(1-t)(L_2 - L_1) + t^2(L_3 - L_2)). \end{aligned}$$

FIG. 3.8 – *Données primales*FIG. 3.9 – *données duales*

La courbe duale μ est une courbe en générale de degré inférieur ou égale à 5. Dans ce qui suit, on se propose de chercher le degré de cette courbe et de l'écrire dans la base de

Bernstein (en coordonnées homogènes). On a:

$$\begin{aligned}
\mu(t) &= ((1-t)^3 L_0 + 3t(1-t)^2 L_1 + 3t^2(1-t)L_2 + t^3 L_3) \\
&\quad \wedge 3((1-t)^2(L_1 - L_0) + 2t(1-t)(L_2 - L_1) + t^2(L_3 - L_2)) \\
\frac{\mu(t)}{3} &= (1-t)^5 L_0 \wedge L_1 + 2t(1-t)^4 L_0 \wedge L_2 - 2t(1-t)^4 L_0 \wedge L_1 \\
&\quad + t^2(1-t)^3 L_0 \wedge L_3 - t^2(1-t)^3 L_0 \wedge L_2 + 3t(1-t)^4 L_1 \wedge L_1 \\
&\quad + 6t^2(1-t)^3 L_1 \wedge L_2 + 3t^3(1-t)^2 L_1 \wedge L_3 - 3t^3(1-t)^2 L_1 \wedge L_2 \\
&\quad + t^3(1-t)^2 L_3 \wedge L_1 + t^3(1-t)^2 L_0 \wedge L_3 + 2t^4(1-t)L_3 \wedge L_2 \\
&\quad + 2t^4(1-t)L_1 \wedge L_3 + t^5 L_2 \wedge L_3 \\
&= (1-t)^5 - 2t(1-t)^4 + 3t(1-t)^4 L_0 \wedge L_1 \\
&\quad + (2t(1-t)^4 - t^2(1-t)^3 + 3t^2(1-t)^3) L_0 \wedge L_2 \\
&\quad + (t^2(1-t)^3 + t^3(1-t)^2) L_0 \wedge L_3 \\
&\quad + (6t^2(1-t)^3 - 3t^3(1-t)^2 - 3t^2(1-t)^3 + 6t^3(1-t)^2) L_1 \wedge L_2 \\
&\quad + (3t^3(1-t)^2 - t^3(1-t)^2 + 2t^4(1-t)) L_1 \wedge L_3 \\
&\quad + (t^5 - 2t^4(1-t) + 3t^4(1-t)) L_2 \wedge L_3.
\end{aligned}$$

D'où, on trouve:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu(t)}{3} &= (1-t)^4 L_0 \wedge L_1 + 2t(1-t)^3 L_0 \wedge L_2 + t^2(1-t)^2 L_0 \wedge L_3 \\
&\quad + 3t^2(1-t)^2 L_1 \wedge L_2 + 2t^3(1-t)L_1 \wedge L_3 + t^4 L_2 \wedge L_3.
\end{aligned}$$

Finalement on a:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu(t)}{3} &= (1-t)^4 L_0 \wedge L_1 + 4t(1-t)^3 \frac{L_0 \wedge L_2}{2} + 6t^2(1-t)^2 \frac{L_1 \wedge L_2}{2} \\
&\quad + 4t^3(1-t) \frac{L_1 \wedge L_3}{2} + t^4 L_2 \wedge L_3.
\end{aligned}$$

Si on pose pour tout $i = 0, \dots, 3$ et tout $j = 0, \dots, 3$:

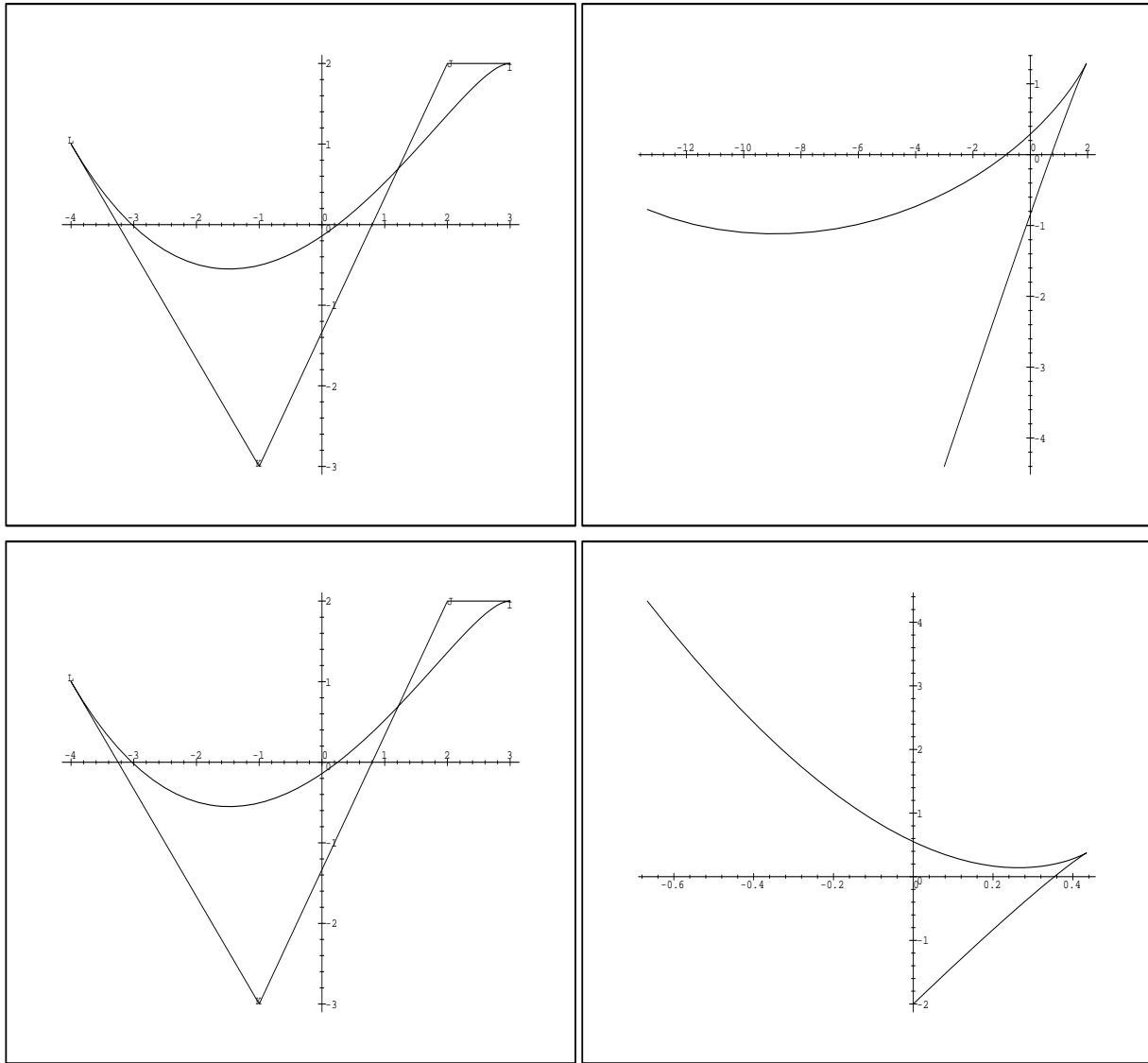
$$l_{ij} = \begin{pmatrix} L_i \wedge L_j[1] \\ L_i \wedge L_j[2] \end{pmatrix}, \quad l_{ij}[3] = L_i \wedge L_j[3].$$

On remarque alors que la courbe duale d'une courbe cubique est une courbe rationnelle quartique de la forme:

$$\mathcal{D}_s(\cdot)(t) = \frac{(1-t)^4 l_{01} + 2t(1-t)^3 l_{02} + 3t^2(1-t)^2 l_{12} + 2t^3(1-t) l_{13} + t^4 l_{23}}{(1-t)^4 l_{01}[3] + 2t(1-t)^3 l_{02}[3] + 3t^2(1-t)^2 l_{13}[3] + 2t^3(1-t) l_{13}[3] + t^4 l_{23}[3]}.$$

Exemples pour respectivement:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



3.6.3 Courbe duale d'une courbe degré n

Soient $p_i, i = 0, \dots, n, (n + 1)$ points en coordonnées homogènes. Soit γ , une courbe de Bézier de degré n , définie sur $[0, 1]$:

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t).$$

On sait que la courbe μ image duale de la courbe γ , est définie sur le même intervalle que γ , et qu'elle vérifie:

$$\mu(t) = S, \gamma(t) \wedge S, \gamma'(t).$$

En remplaçant , par sa valeur, on trouve:

$$\begin{aligned}\mu(t) &= S \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t) \wedge S \sum_{j=0}^{n-1} \Delta p_j B_j^{n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^n S p_i B_i^n(t) \wedge \sum_{j=0}^{n-1} S \Delta p_j B_j^{n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^n S p_i B_i^n(t) \wedge \sum_{j=0}^{n-1} \Delta S p_j B_j^{n-1}(t).\end{aligned}$$

Posons pour tout $i = 0, \dots, n$:

$$L_i = S p_i.$$

On peut alors écrire la courbe duale de la manière suivante:

$$\mu(t) = \sum_{i=0}^n L_i B_i^n(t) \wedge \sum_{j=0}^{n-1} \Delta L_j B_j^{n-1}(t).$$

Où $B_i^n(t)$, $i = 0, \dots, n$, désigne la base polynômiale de Bernstein.

$$\begin{aligned}
 \mu(t) &= \sum_{i=0}^n L_i B_i^n(t) \wedge \sum_{j=0}^{n-1} (L_{j+1} - L_j) B_j^{n-1}(t) \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-1} L_i \wedge L_{j+1} B_i^n(t) B_j^{n-1}(t) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-1} L_i \wedge L_j B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^n L_i \wedge L_k B_i^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{n-1} L_i \wedge L_k B_i^{n-1}(t) B_k^{n-1}(t) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n L_i \wedge L_k B_i^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) + \sum_{k=1}^n L_0 \wedge L_k B_0^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n L_n \wedge L_k B_n^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} L_i \wedge L_k B_i^n(t) B_k^{n-1}(t) \\
 &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} L_n \wedge L_k B_n^n(t) B_k^{n-1}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} L_0 \wedge L_k B_0^n(t) B_k^{n-1}(t) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} L_i \wedge L_k B_i^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} L_i \wedge L_k B_i^n(t) B_k^{n-1}(t) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} L_i \wedge L_n B_i^n(t) B_{n-1}^{n-1}(t) + \sum_{k=1}^n L_0 \wedge L_k B_0^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n L_n \wedge L_k B_n^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} L_i \wedge L_0 B_i^n(t) B_0^{n-1}(t) \\
 &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} L_0 \wedge L_k B_0^n(t) B_k^{n-1}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} L_n \wedge L_k B_n^n(t) B_k^{n-1}(t) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} L_i \wedge L_k (B_i^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) - B_i^n(t) B_k^{n-1}(t)) + \sum_{k=1}^n L_0 \wedge L_k B_0^{n-1}(t) B_{k-1}^n(t) \\
 &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} L_n \wedge L_k B_n^n(t) B_k^{n-1}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} L_0 \wedge L_k (B_0^{n-1}(t) B_k^n(t) - B_0^n(t) B_k^{n-1}(t)) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} L_n \wedge L_k (B_n^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) - B_{n-1}^{n-1}(t) B_k^n(t)).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} L_i \wedge L_k (B_i^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) - B_i^n(t) B_k^{n-1}(t)) + L_0 \wedge L_n B_0^n(t) B_{n-1}^{n-1}(t) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} L_0 \wedge L_k (B_0^{n-1}(t) B_k^n(t) - B_0^n(t) B_k^{n-1}(t) + B_0^n B_{k-1}^{n-1}) - L_n \wedge L_0 B_n^n(t) B_0^{n-1}(t) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} L_n \wedge L_k (B_n^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) - B_{n-1}^{n-1}(t) B_k^n(t) - B_n^n(t) B_k^{n-1}(t)) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} L_i \wedge L_k (B_i^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) - B_i^n(t) B_k^{n-1}(t)) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} L_0 \wedge L_k (B_0^{n-1}(t) B_k^n(t) - B_0^n(t) B_k^{n-1}(t) + B_0^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t)) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} L_n \wedge L_k (B_n^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) - B_{n-1}^{n-1}(t) B_k^n(t) - B_n^n(t) B_k^{n-1}(t)) \\
 &\quad + L_0 \wedge L_n (B_0^n(t) B_{n-1}^{n-1}(t) + B_n^n(t) B_0^{n-1}(t)).
 \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}
 A_{i,k} &= L_i \wedge L_k (B_i^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) - B_i^n(t) B_k^{n-1}(t)) \\
 \gamma_k &= L_0 \wedge L_k (B_0^{n-1}(t) B_k^n(t) - B_0^n(t) B_k^{n-1}(t) + B_0^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t)) \\
 \beta_{i,k} &= B_i^n(t) B_k^{n-1}(t) \\
 \alpha_{i,k} &= L_i \wedge L_k (\beta_{i,k-1} - \beta_{i,k}).
 \end{aligned}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}
 \mu(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} A_{i,k} + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k + \sum_{k=1}^{n-1} L_n \wedge L_k (B_n^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) - B_{n-1}^{n-1}(t) B_k^n(t) - B_n^n(t) B_k^{n-1}(t)) \\
 &\quad + t^{n-1} (1-t)^{n-1} L_0 \wedge L_n.
 \end{aligned}$$

Calculons d'abord le premier terme :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} A_{i,k} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} L_i \wedge L_k (B_i^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) - B_i^n(t) B_k^{n-1}(t)) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} L_i \wedge L_k (\beta_{i,k-1} - \beta_{i,k}) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^i L_i \wedge L_k (\beta_{i,k-1} - \beta_{i,k}) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n-1} L_i \wedge L_k (\beta_{i,k-1} - \beta_{i,k}) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^i \alpha_{i,k} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n-1} \alpha_{i,k}.
 \end{aligned}$$

Or on sait que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^i \alpha_{i,k} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} \alpha_{k,i}.$$

Par conséquent:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} L_i \wedge L_k (\beta_{i,k-1} - \beta_{i,k}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n-1} L_k \wedge L_i (\beta_{k,i-1} - \beta_{k,i}).$$

D'où:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} A_{i,k} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n-1} L_k \wedge L_i (\beta_{k,i-1} - \beta_{k,i}) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n-1} L_i \wedge L_k (\beta_{i,k-1} - \beta_{i,k}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n-1} L_i \wedge L_k (\beta_{i,k-1} - \beta_{i,k} - \beta_{k,i-1} + \beta_{k,i}). \end{aligned}$$

Posons:

$$Som_{i,k} = \beta_{i,k-1} - \beta_{i,k} - \beta_{k,i-1} + \beta_{k,i},$$

$$\begin{aligned} Som_{i,k} &= B_i^n B_{k-1}^{n-1} - B_i^n B_k^{n-1} - B_k^n B_{i-1}^{n-1} + B_k^n B_i^{n-1} \\ &= C_i^n C_{k-1}^{n-1} (1-t)^{n-i} t^i (1-t)^{n-k} t^{k-1} - C_i^n C_k^{n-1} (1-t)^{n-i} t^i (1-t)^{n-k-1} t^k \\ &\quad - C_{i-1}^{n-1} C_k^n (1-t)^{n-k} t^k (1-t)^{n-i} t^i + C_k^n C_i^{n-1} (1-t)^{n-k} t^k (1-t)^{n-i-1} t^i \\ &= C_i^n C_{k-1}^{n-1} (1-t)^{2n-i-k} t^{i+k-1} - C_i^n C_k^{n-1} (1-t)^{2n-i-k-1} t^{i+k} \\ &\quad - C_{i-1}^{n-1} C_k^n (1-t)^{2n-i-k} t^{i+k-1} + C_k^n C_i^{n-1} (1-t)^{2n-k-i-1} t^{i+k}. \end{aligned}$$

En factorisant les termes en commun on trouve:

$$Som_{i,k} = (C_i^n C_{k-1}^{n-1} - C_{i-1}^{n-1} C_k^n) (1-t)^{2n-i-k} t^{i+k-1} + (C_k^n C_i^{n-1} - C_i^n C_k^{n-1}) (1-t)^{2n-k-i-1} t^{i+k}.$$

Or

$$C_i^n C_{k-1}^{n-1} - C_{i-1}^{n-1} C_k^n = C_k^n C_i^{n-1} - C_i^n C_k^{n-1}.$$

En effet:

$$\begin{aligned} (C_i^n C_{k-1}^{n-1} - C_{i-1}^{n-1} C_k^n) - (C_k^n C_i^{n-1} - C_i^n C_k^{n-1}) &= C_i^n (C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}) - C_k^n (C_{i-1}^{n-1} + C_i^{n-1}) \\ &= C_i^n C_k^n - C_k^n C_i^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Som_{i,k} &= (C_i^n C_{k-1}^{n-1} - C_{i-1}^{n-1} C_k^n) (1-t)^{2n-i-k-1} t^{i+k-1} ((1-t) + t) \\ &= (C_i^n C_{k-1}^{n-1} - C_{i-1}^{n-1} C_k^n) (1-t)^{2n-i-k-1} t^{i+k-1}. \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} A_{i,k} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n-1} L_i \wedge L_k \text{Som}_{i,k} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n-1} L_i \wedge L_k (C_i^n C_{k-1}^{n-1} - C_{i-1}^{n-1} C_k^n) (1-t)^{2n-i-k-1} t^{i+k-1}. \end{aligned}$$

En posant:

$$\mathcal{H}_{i,k} = (C_i^n C_{k-1}^{n-1} - C_{i-1}^{n-1} C_k^n).$$

On peut écrire:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} A_{i,k} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n-1} L_i \wedge L_k \mathcal{H}_{i,k} (1-t)^{2n-i-k-1} t^{i+k-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-2} L_i \wedge L_{k+1} \frac{\mathcal{H}_{i,k+1}}{C_{i+k}^{2n-2}} B_{i+k}^{2n-2}. \end{aligned}$$

On remarque que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k &= \sum_{k=1}^{n-1} L_0 \wedge L_k (B_0^{n-1}(t) B_k^n(t) - B_0^n(t) B_k^{n-1}(t) + B_0^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} L_0 \wedge L_k \text{Som}_{0,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} A_{0,k}. \end{aligned}$$

On a aussi:

$$\begin{aligned} L_0 \wedge L_n t^{n-1} (1-t)^{n-1} &= L_0 \wedge L_n \text{Som}_{0,n} \\ &= [L_i \wedge L_{k+1} \frac{\mathcal{H}_{i,k+1}}{C_{i+k}^{2n-2}} B_{i+k}^{2n-2}]_{i=0, k=n-1}. \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned}
 \mu(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} A_{i,k} + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k + \sum_{k=1}^{n-1} L_n \wedge L_k (B_n^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) - B_{n-1}^{n-1}(t) B_k^n(t) - B_n^n(t) B_k^{n-1}(t)) \\
 &\quad + t^{n-1} (1-t)^{n-1} L_0 \wedge L_n \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} A_{i,k} + \sum_{k=1}^{n-1} L_n \wedge L_k (B_n^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) - B_{n-1}^{n-1}(t) B_k^n(t) - B_n^n(t) B_k^{n-1}(t)) \\
 &\quad + t^{n-1} (1-t)^{n-1} L_0 \wedge L_n \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} L_i \wedge L_{k+1} \frac{\mathcal{H}_{i,k+1}}{C_{i+k}^{2n-2}} B_{i+k}^{2n-2} + \sum_{k=1}^{n-1} L_n \wedge L_k (B_n^n(t) B_{k-1}^{n-1}(t) - B_{n-1}^{n-1}(t) B_k^n(t) - B_n^n(t) B_k^{n-1}(t)) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} L_i \wedge L_{k+1} \frac{\mathcal{H}_{i,k+1}}{C_{i+k}^{2n-2}} B_{i+k}^{2n-2} + \sum_{k=1}^{n-1} L_n \wedge L_k \frac{C_{k+1}^{n-1}}{C_{n+k}^{2n-2}} B_{n+k}^{2n-2}.
 \end{aligned}$$

Enfin, la courbe duale μ est une courbe en coordonnées homogènes de degré $2n - 2$.

Conclusion

Dans cette thèse on a étudié des aspects différents de la dualité géométrique. On a utilisé la dualité pour définir des courbes duales dans le plan. Ce travail s'inscrit comme une base aux utilisations de la dualité pour représenter des courbes et pour déduire des problèmes duaux à partir de problèmes initiaux. Dans le premier chapitre on a défini la dualité géométrique et on a donné ses propriétés ainsi que les transformations géométriques qui ont quelques propriétés en commun avec la dualité géométrique. On a ensuite introduit la notion de courbes duales à l'aide de la théorie des enveloppes. Dans le deuxième chapitre, on a considéré quelques problèmes d'interpolation et on a étudié leurs problèmes duaux. On a surtout étudié l'équivalence des configurations entre courbes primales et courbes duales. On s'est ensuite intéressé à l'étude des singularités des courbes duales connaissant celles des courbes primales. Dans le troisième chapitre, on a généralisé la notion de dualité géométrique. En effet on a défini la dualité géométrique associée à une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Ainsi, une courbe primale quelconque peut être représentée par une famille de courbes duales.

A travers cette étude, on a noté plusieurs problèmes intéressants à étudier, par exemple:

- On a vu que l'image par la polarité d'un cercle est une conique. Il serait intéressant de trouver une dualité associée à une matrice symétrique qui associerait à un cercle quelconque un autre cercle. Si on trouve une telle dualité, on pourrait résoudre plusieurs problèmes concernant les cercles, comme par exemple déterminer la localisation d'une droite par rapport à un cercle tangent à trois segments de droites.
- En étudiant l'image duale d'un cercle on était obligé d'utiliser l'équation paramétrique du cercle, puis de trouver l'équation implicite de son image duale afin de déterminer la nature de cette image. D'une manière générale, les courbes duales qu'on a utilisées étaient toutes des courbes paramétriques. Il serait intéressant de définir les courbes duales de courbes implicites.
- Enfin, on peut généraliser dans \mathbb{R}^3 les résultats obtenus pour les courbes planes

dans \mathbb{R}^2 en associant à une surface une famille de surfaces duales associées à une matrice symétrique. Il reste à choisir la matrice symétrique convenable au problème posé.

Au cours de ce travail, on s'est affronté à un problème important. En effet, dans le premier et le deuxième chapitre on a choisi d'utiliser la polarité pour l'étude des courbes duales. Or, la polarité n'est pas définie pour les droites passant par l'origine, ce qui nous a obligé à faire une restriction sur les courbes utilisées. Ainsi le choix de l'origine a une grande influence sur ces courbes duales, mais pour les objets fermés ce problème peut être résolu en prenant comme origine un point à l'intérieur de l'objet fermé considéré. En fait, on a ce problème pour n'importe quelle dualité géométrique, dans le troisième chapitre on a étudié les droites non représentables pour les dualités associées à une forme bilinéaire symétrique.

Bibliographie

- [1] M. BERGER. '*Géométrie: Volume 3: convexes et polytopes, polyedres reguliers, aires et volumes*'. Cedic-Fernand Nathan, Paris, 1978.
- [2] C. BLANC and C. SCHLICK. Accurate parametrization of conics by NURBS. *IEEE Computer Graphics and applications*, November:64–71, 1996.
- [3] R.M.C. BODDULURI and B. RAVANI. Design of developpable surfaces using duality between plane and point geometries. *Computr Aided Design*, 25:621–629, 1993.
- [4] W. BOHEM, G. FARIN, and J. KAHMAN. A survey of curves and surfaces methods in CAGD. *Computer Aided Geometric Design*, 11:1–60, 1984.
- [5] J.D. BOISSONNAT. *Géométrie algorithmique*. Jean-Daniel Boissonnat et Mariette Yvinec: Ediscience international, Paris, 1995.
- [6] G. CAGNAC, E. RAMIS, and J. COMMEAU. *Applications de l'analyse à la géométrie*. Masson, Paris, 1971.
- [7] J.M. CARNICER. Dual Bézier curves and convexity preserving interpolation. *Computer Aided Geometric Design*, 9:435–445, 1992.
- [8] M. CHASLES. *La dualité et l'homographie*. Editions Jacques Gabay, 1993.
- [9] B. CHAZELLE, L.J. GUIBAS, and D.T. LEE. The power of geometric duality. *IEEE Computer Graphics and applications*, pages 217–225, 1983.
- [10] H. EDELSBRUNNER. '*Algorithms in combinatorial geometry, Monographs on Theoretical Computer Science*'. W.Bauer, G. Rozenberg, A. Salomaa(eds). Springer-Verlag, New York, 1987.
- [11] G. FARIN. From conics to NURBS: A tutorial and survey. *IEEE Computer Graphics and applications*, pages 78–86, 1992.
- [12] G. FARIN. *Curves and surfaces for CAGD, A pratical guide*. Academic Press, New York, 1993.

- [13] I. FUDOS and C.M. HOFFMANN. Constraint-based parametric conics for CADGD. *Computer Aided Design*, 28:91–100, 1996.
- [14] B. GRÜNBAUM. *Convex polytopes*. John Wiley, Interscience Publishers, Grande Bretagne, 1967.
- [15] J. HOSCHEK. Dual Bézier curves and surfaces. *Surfaces in CAGD*, pages 147–156, 1983.
- [16] J. HOSCHEK. Detecting regions with undesirable curvature. *Computer Aided Geometric Design*, 1:183–192, 1984.
- [17] Y.M. LI and R.J. CRIPPS. Identification of inflexion points and cusps on rational curves. *Computer Aided Geometric Design*, 14:491–497, 1997.
- [18] M.A. SABIN. Enveloppes curves and surfaces. *The mathematics of surfaces II*, pages 413–418–60, 1987.
- [19] P. SAMUEL. *Géométrie projective*. Presse universitaires de France, Paris, 1986.
- [20] T.W. SEDERBERG and D.C. ANDERSON R.N. GOLDMANN. Implicit representation of parametric curves and surface. *Comput. Vision Graph. Image Process*, 28:72–84, 1984.
- [21] T.W. SEDERBERG, T. SAITO, D. QI, and K.S. KLIMASZEWSKI. Curve implicitization using moving lines. *Computer Aided Geometric Design*, 11:687–706, 1994.
- [22] J.G. SEMPLE and G.T. KNEEBONE. *'Algebraic projective geometry'*. Oxford university Press, Grande Bretagne, 1952.
- [23] D.M.Y. SOMMERVILLE. *Analytical geometry of three dimensions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1951.
- [24] M.R. THOM. Sur la théorie des enveloppes. *Journ. de Math*, pages 177–192, 1962.
- [25] C. TISSERON. *Géométries affine, projective et euclidienne*. Hermann, 1988.
- [26] F.A. VALENTINE. *Convex sets*. Mc Graw Hill, Inc, New York, 1964.
- [27] R.J. WALKER. *Algebraic curves*. Princeton University Press, 1950.