



Analyse d'images par transformées en ondelettes. Application aux images sismiques

Emmanuelle Bournay Bouchereau

► **To cite this version:**

Emmanuelle Bournay Bouchereau. Analyse d'images par transformées en ondelettes. Application aux images sismiques. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1997. Français. tel-00004923

HAL Id: tel-00004923

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004923>

Submitted on 20 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Chapitre 3

Ondelettes directionnelles

3.1 Introduction

Nous avons vu aux chapitres précédents que la transformée en ondelettes comportait un paramètre de rotation r en dimension supérieure à 1. En effet

$$\mathcal{W}f(a, b, r) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int \bar{\Psi}_{a,b,r}(x) f(x) d^n x$$

Si l'ondelette mère Ψ est parfaitement isotrope, c'est-à-dire que $\Psi(r(x)) = \Psi(x)$ pour tout élément x de \mathbb{R}^n comme l'est le chapeau mexicain pour $A = Id$ (chapitre 1 paragraphe 1.5.1), alors ce paramètre n'a aucun sens. On voit donc son utilité pour un certain type d'ondelettes qu'on appellera "directionnelles". Ces ondelettes auront la propriété de "voir" les caractéristiques d'une fonction dans une direction donnée, en étant "aveugle" dans les autres directions.

Les premiers à prendre en compte ce paramètre ont été J.P. Antoine, R. Murenzi et al. [3] [65] qui ont étudié l'ondelette de Morlet multi-dimensionnelle. L'analyse par ondelettes directionnelles est très utile pour des fonctions comportant des directions privilégiées, ce qui est le cas de l'étude des écoulements turbulents où on peut ainsi étudier le champ des vitesses [27] [83] [69] ou de l'analyse de textures orientées [70]. On verra dans le chapitre suivant qu'une application importante est l'analyse des images sismiques et notamment la détection de failles.

Etant donné le nombre d'applications possibles de telles ondelettes, il est apparu important de les définir plus précisément et d'étudier quelques-unes de leurs propriétés. Jusqu'à présent, l'ondelette utilisée était l'ondelette de Morlet. On va alors proposer une méthode de construction d'ondelettes directionnelles permettant éventuellement

d'accéder à des ondelettes plus adaptées au cas envisagé. On étudiera ensuite le comportement de l'ondelette de Morlet sur une fonction très simple pouvant représenter une couche de roche au voisinage d'une faille.

3.2 Définitions et propriétés

Avant de définir explicitement une ondelette directionnelle, on aura besoin de quelques définitions préalables.

Le définition d'une ondelette directionnelle sera basée sur la forme de sa transformée de Fourier et sur son "support". Beaucoup d'ondelettes n'étant pas à support compact dans le domaine de Fourier ou dans le domaine spatial, nous allons définir le support à ε près d'une fonction. Les ondelettes souvent à décroissance rapide auront un support à ε près.

Définition 3.1 (Supports à ε près) Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^n . On appellera un support à ε près de f un ensemble S_ε tel que : $\forall x \notin S_\varepsilon, |f(x)| < \varepsilon$.

On appellera le support à ε près principal de f , le support à ε près Sp_ε tel que : $\forall x \in Sp_\varepsilon, |f(x)| \geq \varepsilon$.

Définition 3.2 (Centre d'une fonction) On appellera centre d'une fonction f , l'isobarycentre des maxima de f .

On peut remarquer que le centre d'une fonction correspond au maximum de cette fonction s'il est unique.

Définition 3.3 (Ondelette directionnelle) Soit Ψ une fonction admissible dont la transformée de Fourier admet un module à décroissance rapide et dont un support S_ε à ε près est de la forme :

$S_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^N [\xi_{i1}, \xi_{i2}] \times [\nu_{i1}, \nu_{i2}]$ avec $\bigcap_{i=1}^N [\xi_{i1}, \xi_{i2}] \times [\nu_{i1}, \nu_{i2}] = \emptyset$, $\xi_{i,j}, \nu_{i,j} \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$ et tel que $O \notin [\xi_{i1}, \xi_{i2}] \times [\nu_{i1}, \nu_{i2}]$ pour tout i .

Soit M_i le centre de $|\hat{\Psi}|$ restreinte à $[\xi_{i1}, \xi_{i2}] \times [\nu_{i1}, \nu_{i2}]$. On appellera ondelette directionnelle de direction \vec{u} toute fonction Ψ possédant les propriétés ci-dessus et dont l'ensemble des centres M_i se situent sur une droite passant par l'origine O et de direction \vec{v} perpendiculaire à \vec{u} .

La figure 3.1 permet d'illustrer de manière plus intuitive la définition énoncée ci-dessus.

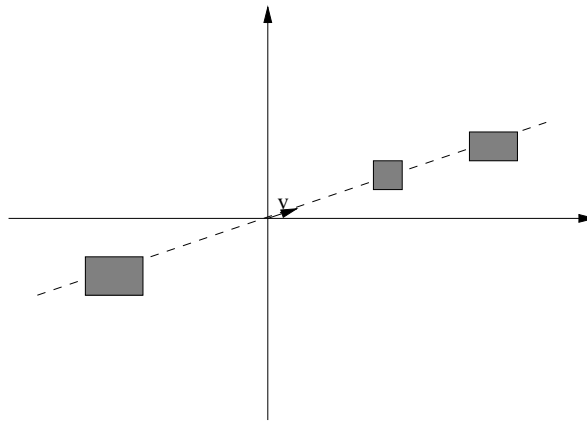


Figure 3.1: Exemple d'un support à ε près d'une ondelette directionnelle. Les rectangles gris sont les pavés formant le support.

Remarques

1. Les ondelettes étant localisées en fréquence, on aura le plus souvent $N = 1$ (ondelettes complexes) ou $N = 2$ (ondelettes réelles).
2. Le support à ε près de la TF des ondelettes filles évolue en fonction de l'angle θ et du facteur d'échelle a . Le centre de la fonction subit une rotation d'angle θ et une homothétie de rapport $\frac{1}{a}$ et la "taille" du support augmente lorsque a diminue, comme le montre la figure 3.2

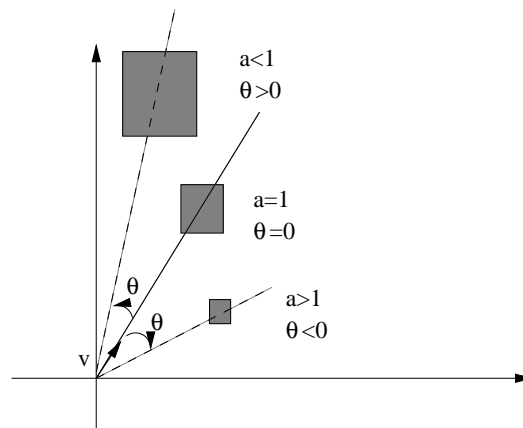


Figure 3.2: Effet de a et θ sur le support d'une ondelette.

3. On pourra parler de la *qualité directionnelle* d'une ondelette. En effet, la forme du support principal Sp_ε à ε près de sa transformée de Fourier influence le nombre de directions prises en compte par la transformée en ondelettes comme le montre la figure 3.3. En effet, l'ondelette représentée en (b) est considérée par définition

comme directionnelle, pourtant toutes les directions de 0 à $\frac{\pi}{2}$ seront prises en compte par la transformée en ondelettes. Celle-ci n'a donc pas le caractère directionnel attendu. Nous allons donc définir un critère de qualité, α_ε , angle du cône issu de 0 et de base Sp_ε comme le montre la figure 3.3(a). Plus cet angle est petit, meilleure est la qualité.

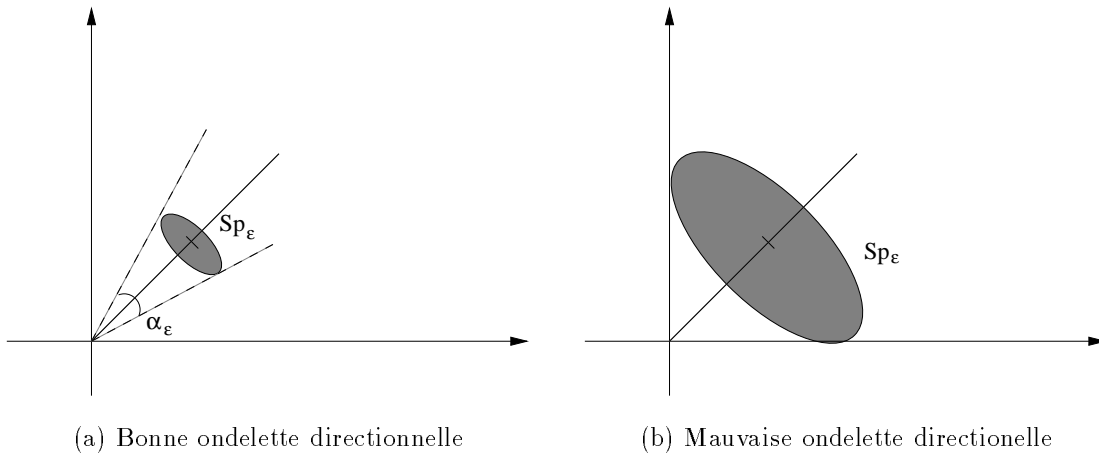


Figure 3.3: Supports principaux à ε près des transformées de Fourier d'ondelettes directionnelles de différentes qualités. On suppose que le module de la transformée de Fourier de l'ondelette (b) vaut 1 sur tout le support et 0 en dehors.

Exemple de la transformée en ondelettes directionnelles sur une fonction simple

Nous allons considérer une fonction f formée de deux demi-droites d'angles avec l'horizontale différents (Fig. 3.4). Nous verrons ainsi la sélectivité directionnelle des ondelettes définies ci-dessus.

La transformée en ondelettes s'écrit, dans le domaine de Fourier

$$\mathcal{W}f(a, b, r) = \frac{a^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{c_\Psi}} \int e^{i(\xi b_x + \nu b_y)} \hat{\Psi}(ar_{-\theta}(\xi, \nu)) \hat{f}(\xi, \nu) d\xi d\nu$$

avec

$$\hat{f}(\xi, \nu) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-i(\xi x_1 + \nu y_1)}}{\xi \cos \theta_1 + \nu \sin \theta_1} + \frac{e^{-i(\xi x_2 + \nu y_2)}}{\xi \cos \theta_2 + \nu \sin \theta_2} \right] = \hat{f}_1(\xi, \nu) + \hat{f}_2(\xi, \nu)$$

Un support à ε près de $|\hat{f}|$ est constitué de deux "bandes" centrées sur les droites d'angles $\frac{\pi}{2} + \theta_i$ avec l'horizontale (réunion de supports à ε près S_{f_1} et S_{f_2} de $|\hat{f}_1|$ et $|\hat{f}_2|$) comme l'illustre la figure 3.5.

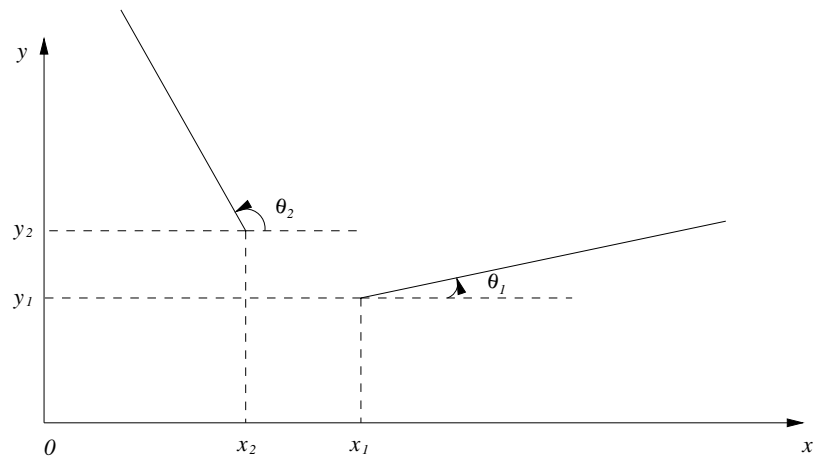


Figure 3.4: *Fonction f formée de deux demi-droites.*

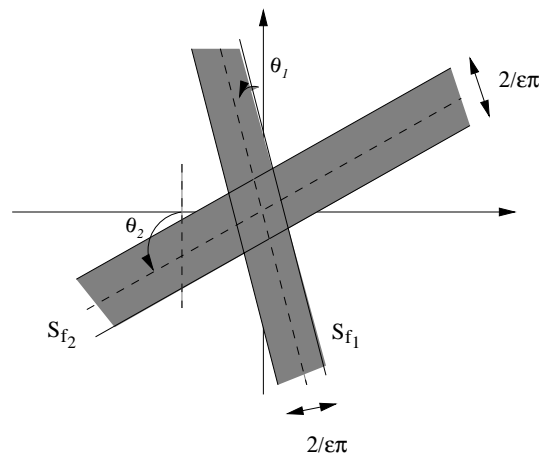


Figure 3.5: *Support à ε près de $|\hat{f}|$.*

Nous allons considérer pour plus de simplicité dans les notations que l'ondelette Ψ est directionnelle de direction horizontale. Un support à ε près S_Ψ du module de sa TF est donc "centré" sur la verticale.

Prenons $\theta = \theta_1$. Alors, il existe un facteur d'échelle a tel que $S_\Psi \cap S_{f_2} = \emptyset$ et la transformée en ondelette s'écrit

$$\mathcal{W}f(a, b, r) = \mathcal{W}f_1(a, b, r) + res_2$$

où res_2 est un résidu venant du fait que $|\hat{f}_2|$ n'est pas à support compact et correspondant à la singularité en (x_2, y_2) . On voit donc la direction privilégiée par la transformée en ondelettes est la direction θ_1 , d'où le nom d'ondelette directionnelle.

On peut également trouver un angle θ et un facteur d'échelle a tels que $S_\Psi \cap S_{f_1} = \emptyset$ et $S_\Psi \cap S_{f_2} = \emptyset$. Alors $\mathcal{W}f(a, b, r) = res_1 + res_2$ et seules les extrémités des demi-droites seront détectées.

Exemple et contre-exemple d'ondelettes directionnelles

L'ondelette de Morlet $\Psi_{M,2}$ est directionnelle. En effet, elle est à décroissance rapide et le support principal Sp_ε à ε près du module de sa transformée de Fourier est une ellipse de centre (k_{0x}, k_{0y}) .

$$\begin{aligned}\Psi_{M,2}(x, y) &= \cos(k_{0x}x + k_{0y}y) e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{\mu} + y^2)} + i \sin(k_{0x}x + k_{0y}y) e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{\mu} + y^2)} \\ \hat{\Psi}_{M,2}(\xi, \nu) &= \sqrt{\mu} e^{-\frac{1}{2}[\mu(\xi - k_{0x})^2 + (\nu - k_{0y})^2]}\end{aligned}$$

On montre facilement que Sp_ε est inclus dans un pavé ne contenant pas l'origine et $|\hat{\Psi}_{M,2}|$ admet un unique maximum en (k_{0x}, k_{0y}) . La direction de l'ondelette est donc perpendiculaire au vecteur déterminé par ce point. Dans la suite, on prendra toujours $k_{0x} = 0$ de telle manière à avoir une ondelette horizontale.

Par contre, le chapeau mexicain $\Psi_{CM,2}$ n'est pas une ondelette directionnelle. En effet, sa transformée de Fourier est maximum sur une ellipse centrée sur l'origine et son centre est donc l'origine. De plus elle ne possède pas de support à ε près étant la réunion de pavés disjoints ne contenant pas l'origine.

$$\begin{aligned}\Psi_{CM,2}(x, y) &= \left(2 - \frac{x^2}{\mu} + y^2\right) e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{\mu} + y^2)} \\ \hat{\Psi}_{CM,2}(\xi, \nu) &= \sqrt{\mu} (\mu\xi^2 + \nu^2) e^{-\frac{1}{2}(\mu\xi^2 + \nu^2)}\end{aligned}$$

On voit l'effet de ces deux ondelettes sur la figure 3.6. L'ondelette de Morlet détecte

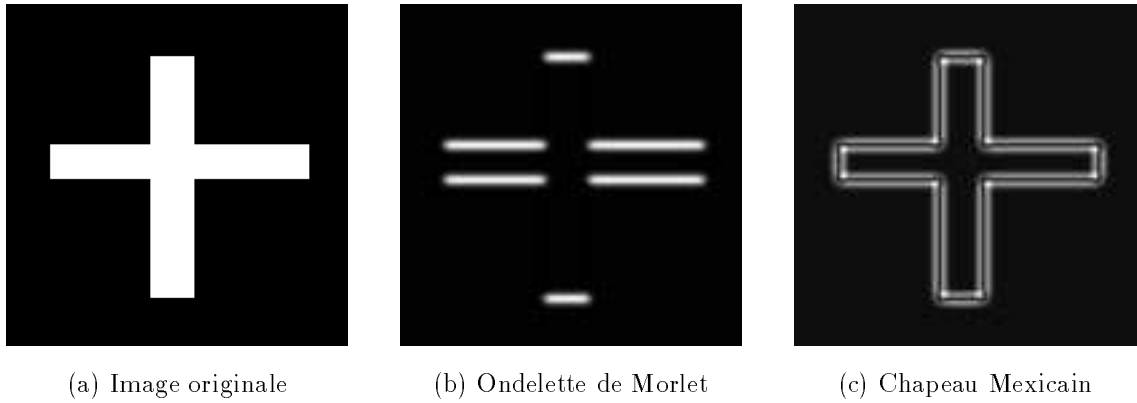


Figure 3.6: Transformée en ondelettes sur une image simple pour une ondelette directionnelle (celle de Morlet, $k_0 = (0, 6)$, $\mu = 1$) et une ondelette isotrope (le chapeau Mexicain, $\mu = 1$). Les paramètres pour la transformée sont : $\theta = 0$ et $a = 0, 2$.

les frontières uniquement dans la direction θ alors que le chapeau mexicain détecte les frontières dans toutes les directions.

Propriétés

Nous allons voir à présent un certain nombre de propriétés qui vont conduire à la construction d'ondelettes directionnelles séparables.

Propriété 3.1 Soit ϕ une fonction d'échelle unidimensionnelle et ψ une ondelette analysante également unidimensionnelle dont les TFs sont à décroissance rapide. On suppose de plus que le centre de la TF de ϕ est 0. Alors

1. la fonction $\Psi_1(x, y) = \phi(x)\psi(y)$ est une ondelette directionnelle de direction horizontale;
2. la fonction $\Psi_2(x, y) = \psi(x)\phi(y)$ est une ondelette directionnelle de direction verticale;
3. la fonction $\Psi_3(x, y) = \psi(x)\psi(y)$ est une ondelette directionnelle de direction diagonale.

DÉMONSTRATION:

On montre facilement que par construction, Ψ_i vérifie la condition d'admissibilité.

$|\hat{\phi}|$ admet un support à ε près $[\nu_1, \nu_2]$ puisqu'elle est à décroissance rapide et son centre est 0. $|\hat{\psi}|$ admet un support à ε près $\cup_i [\xi_{i1}, \xi_{i2}]$ tel que $0 \notin [\xi_{i1}, \xi_{i2}]$ pour tout i puisque

$\hat{\Psi}(0) = 0$ (condition d'admissibilité). On appelle k_0 son centre.

$|\hat{\Psi}_1|$ admet donc un support à ε près $\cup_i [\nu_1, \nu_2] \times [\xi_{i1}, \xi_{i2}]$ ne contenant pas O et son centre est $(0, k_0)$. Ψ_1 est donc une ondelette directionnelle de direction horizontale.

Le raisonnement pour les autres ondelettes est exactement identique. ■

Remarque On retrouve ces propriétés dans la construction d'ondelette par analyse multi-résolution bidimensionnelle avec les ondelettes horizontales, verticales et diagonales qui détectent les détails horizontaux, verticaux et diagonaux.

3.3 Construction d'ondelettes directionnelles et exemples

La propriété 3.1 donne un moyen de construire facilement des ondelettes directionnelles séparables. Plus généralement, on a la propriété suivante.

Propriété 3.2 *Si ψ est une ondelette analysante unidimensionnelle dont la TF est à décroissance rapide et f_a une fonction dont la TF admet un support à ε près et dont le centre est θ alors $\Psi(x, y) = f_a(x)\psi(y)$ est une ondelette directionnelle de direction horizontale.*

La démonstration est exactement la même que la précédente.

Remarques

1. La propriété énoncée ci-dessus offre une grande souplesse dans le choix des fonctions f_a et ψ ce qui peut permettre de construire des ondelettes adaptées à chaque cas particulier si besoin est.
2. Il a paru plus naturel de privilégier la direction horizontale pour l'ondelette mère. Ainsi le paramètre θ de la TO désigne directement la direction qui sera prise en compte.

Exemples

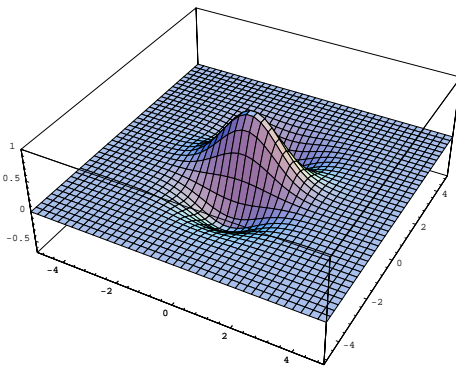
Nous allons prendre comme fonction f_a une gaussienne, c'est-à-dire $f_a(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. En effet sa transformée de Fourier, qui est également une gaussienne, est centrée en 0, à décroissance rapide et donc suffisamment bien localisée.

1^{er} exemple : le demi chapeau mexicain

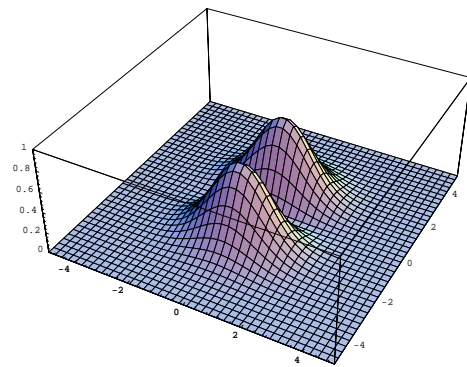
Le chapeau mexicain est particulièrement adapté à la détection de frontières en imagerie. En effet, celui-ci étant issu de la dérivée seconde de la gaussienne, la TO correspondante est nulle sur les frontières et celles-ci peuvent être détectées par la méthode dites des passages par zéro comme l'expose S. Mallat dans [55].

Si on souhaite détecter les frontières dans une unique direction, on peut utiliser l'ondelette directionnelle obtenue en posant $\psi(y) = (1 - y^2) e^{-\frac{y^2}{2}}$ et finalement

$$\begin{aligned}\Psi(x, y) &= (1 - y^2) e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)} \\ \hat{\Psi}(\xi, \nu) &= \nu^2 e^{-\frac{1}{2}(\xi^2 + \nu^2)}\end{aligned}$$



(a) Ondelette mère



(b) Transformée de Fourier



(c) Module de la TO sur l'image de croix, $\theta = 0$ et $a = 0,2$

Figure 3.7: *Demi chapeau mexicain.*

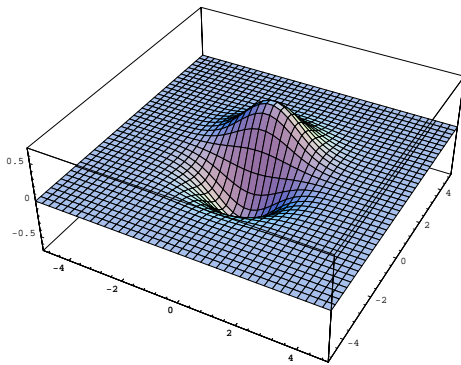
Cette ondelette est appelée *demi chapeau mexicain* car elle n'a une forme de chapeau mexicain que dans une direction. La figure 3.7 montre l'ondelette ainsi que sa transformée de Fourier. On peut remarquer les maxima de cette dernière sur l'axe des y .

Un exemple de transformée en ondelette permet de voir l'effet de cette ondelette. On voit son caractère directionnel ainsi que sa propriété de s'annuler sur les frontières.

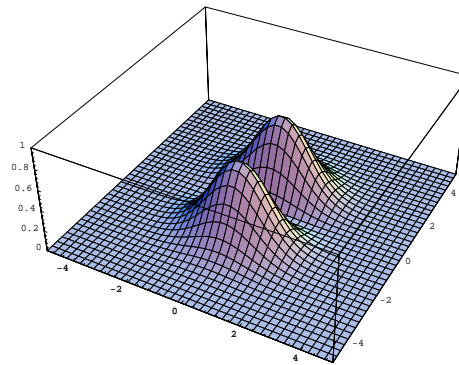
2^{ème} exemple : la dérivée de la gaussienne

Une autre possibilité est de choisir comme ondelette unidimensionnelle ψ , la dérivée première de la gaussienne et non sa dérivée seconde. On a alors

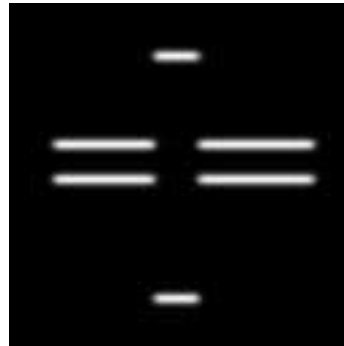
$$\begin{aligned}\Psi(x, y) &= f_a(x)\psi(y) = y e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \\ \hat{\Psi}(\xi, \nu) &= -i\nu e^{-\frac{1}{2}(\xi^2+\nu^2)}\end{aligned}$$



(a) Ondelette mère



(b) Module de la TF



(c) TO sur l'image de croix, $\theta = 0$ et $a = 0,2$

Figure 3.8: Dérivée de la gaussienne.

Cette ondelette a un comportement voisin de celui de l'ondelette de Morlet. En effet, la TO correspondante est maximum sur les frontières. Cependant sa qualité directionnelle α_ε est moins bonne que celle de l'ondelette de Morlet α_{M_ε} . En effet, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{|\hat{\Psi}_M(k_{0y}, \nu)|}{|\hat{\Psi}(1, \nu)|} = 0$ (on se place dans le cas où $k_{0x} = 0$) donc il existe un réel positif E tel que, $\forall \varepsilon < E, \alpha_\varepsilon > \alpha_{M_\varepsilon}$.

3.4 Etude de la TO par l'ondelette de Morlet d'une fonction simple

Nous allons par la suite nous intéresser à la détection de structures comme des couches de roches dans une certaine direction ou bien des failles, failles qu'on peut voir de manière simplifiée comme la rupture de ces couches de roches. Nous allons alors étudier la transformée en ondelettes de la fonction $s(x, y)$ représentée par la figure 3.9, la barre représentant une couche de roche et le point M_0 , le voisinage de la faille (rupture de la couche de roche).

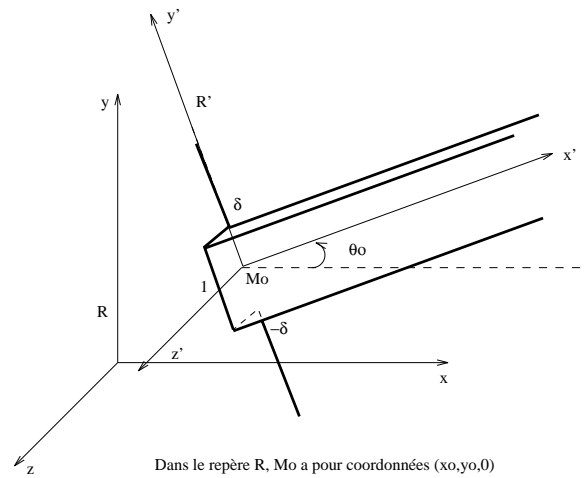


Figure 3.9: Fonction $s(x, y)$ représentant une couche de roche au voisinage d'une faille.

Le choix de l'ondelette s'est fixé sur l'ondelette de Morlet car, comme on le verra dans le chapitre suivant, nous voulons détecter plus des structures que des frontières. De plus on a vu que l'ondelette de Morlet était de meilleure qualité directionnelle que le demi chapeau mexicain.

Nous allons dans toute la suite utiliser l'expression de l'ondelette de Morlet sans approximations. On posera de plus $k_{0x} = 0$ et $k_{0y} = k_0$ et finalement, l'expression de l'ondelette sera

$$\begin{aligned}\Psi_M(x, y) &= [e^{ik_0y} - e^{-\frac{k_0^2}{2}}] e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{\mu} + y^2)} \\ \hat{\Psi}_M(\xi, \nu) &= \sqrt{\mu} [e^{-\frac{1}{2}[\mu\xi^2 + (\nu - k_0)^2]} - e^{-\frac{k_0^2}{2}}] e^{-\frac{1}{2}(\mu\xi^2 + \nu^2)}\end{aligned}$$

On notera Ψ_{M_1} l'ondelette de Morlet 1D.

3.4.1 Qualité directionnelle de l'ondelette

Pour calculer la qualité directionnelle de l'ondelette de Morlet, nous allons, pour plus de simplicité, calculer un angle légèrement différent de celui défini précédemment. Comme le montre la figure 3.10, cet angle α'_ε est celui du cône issu de O et s'appuyant sur le support principal à ε près, Sp_ε , du module de la TF de l'ondelette pour $\nu = k_0$, c'est-à-dire $Sp_\varepsilon = [-\xi_0, \xi_0]$.

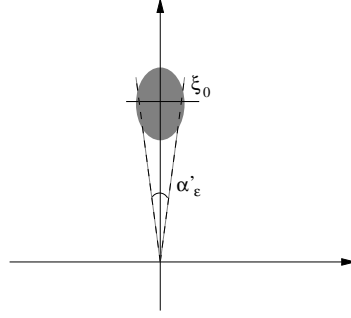


Figure 3.10: Critère de qualité directionnelle pour l'ondelette de Morlet.

Calculons cet angle α'_ε . On a

$$|\hat{\Psi}_M(\xi, k_0)| = \sqrt{\mu} e^{-\frac{\mu\xi^2}{2}} [1 - e^{-k_0^2}]$$

et $|\hat{\Psi}_M(\xi, k_0)| \geq \varepsilon$ lorsque $\xi \in [-\xi_0, \xi_0]$ avec

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{2}{\mu} \ln \frac{\sqrt{\mu}(1 - e^{-k_0^2})}{\varepsilon}}$$

et finalement le critère de qualité s'écrit

$$\alpha'_\varepsilon = 2 \arctan \frac{\xi_0}{k_0} = 2 \arctan \frac{\sqrt{\frac{2}{\mu} \ln \frac{\sqrt{\mu}(1 - e^{-k_0^2})}{\varepsilon}}}{k_0} \quad (3.1)$$

On remarque que la qualité directionnelle de l'ondelette augmente avec μ (α'_ε diminue). Mais par contre la localisation spatiale diminue alors (voir Fig. 1.7). Par la suite on prendra comme bon compromis $\mu = 1$.

3.4.2 Calcul de la transformée

La transformée en ondelettes s'écrit en dimension 2

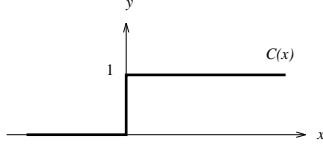
$$\mathcal{W}s(a, b, \theta) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \bar{\Psi}_M\left(\frac{1}{a}r_{-\theta}(x - b_x, y - b_y)\right) s(x, y)$$

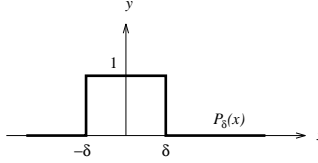
où b_x, b_y sont les coordonnées de b dans le repère \mathcal{R} .

Dans le repère \mathcal{R}' , la fonction s s'écrit

$$s(x', y') = \mathcal{C}(x') \mathcal{P}_\delta(y')$$

où \mathcal{C} et \mathcal{P}_δ sont les fonctions créneau et porte définies ci-dessous.

$$\mathcal{C}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$


$$\mathcal{P}_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\delta, \delta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$


et la transformée en ondelettes s'exprime par

$$\mathcal{W}_s(a, b, \theta') = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \bar{\Psi}_M\left(\frac{1}{a} r_{-\theta'}(x' - \delta_x, y' - \delta_y)\right) s(x', y')$$

où δ_x et δ_y sont les coordonnées de b dans \mathcal{R}' et $\theta' = \theta - \theta_0$.

Soit

$$\mathcal{W}_s(a, b, \theta') = a \int_0^{\infty} dx' \int_{-\frac{\delta}{a}}^{\frac{\delta}{a}} dy' \bar{\Psi}_M\left(r_{-\theta'}\left(x' - \frac{\delta_x}{a}, y' - \frac{\delta_y}{a}\right)\right)$$

On a

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_M\left(r_{-\theta'}\left(x' - \frac{\delta_x}{a}, y' - \frac{\delta_y}{a}\right)\right) &= \exp\left(\frac{-\delta_x^2}{2a^2} - \frac{\delta_y^2}{2a^2} + \frac{\delta_x x'}{a} - \frac{x'^2}{2} + \frac{\delta_y y'}{a} - \frac{y'^2}{2}\right) \\ & \left[-\exp\left(\frac{-k_\theta^2}{2}\right) + \exp\left[-i k_\theta \left(\left(-\frac{\delta_y}{a} + y'\right) \cos \theta' - \left(-\frac{\delta_x}{a} + x'\right) \sin \theta'\right)\right] \right] \end{aligned}$$

Et finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_s(a, b, \theta') &= \frac{a\pi}{2} e^{-\frac{k_0^2}{2}} \left[[1 - \text{Erf}(\Delta_x)] \text{Erf}(\Delta_{y_1}, \Delta_{y_2}) \right. \\ & \left. + [1 - \text{Erf}(-\Delta_x - i \frac{k_0}{\sqrt{2}} \sin \theta')] \text{Erf}(\Delta_{y_1} + i \frac{k_0}{\sqrt{2}} \cos \theta', \Delta_{y_2} + i \frac{k_0}{\sqrt{2}} \cos \theta') \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

où $\text{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$, $\text{Erf}(z_1, z_2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-t^2} dt$, $\Delta_x = \frac{\delta_x}{a\sqrt{2}}$, $\Delta_{y_1} = \frac{-\delta_y - \delta}{a\sqrt{2}}$ et $\Delta_{y_2} = \frac{-\delta_y + \delta}{a\sqrt{2}}$.

3.4.3 Etude en fonction de l'angle

3.4.3.1 $\theta' = 0$

La transformée s'écrit alors

$$\mathcal{W}_s(a, b, 0) = a \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Erfc}\left(-\frac{\delta_x}{a \sqrt{2}}\right) \mathcal{W}\mathcal{P}_\delta(\delta_y, a)$$

avec $\operatorname{Erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\mathcal{W}\mathcal{P}_\delta(\delta_y, a) = \int_{-\frac{\delta-\delta_y}{a}}^{\frac{\delta-\delta_y}{a}} \bar{\Psi}_{M_1}(t) dt$

Remarque $\mathcal{W}\mathcal{P}_\delta$ est la transformée en ondelettes de Morlet 1D de \mathcal{P}_δ .

Nous allons retrouver par le calcul que les frontières sont d'autant mieux détectées que le facteur d'échelle a est petit.

- Etude suivant δ_x

$\operatorname{Erfc}\left(-\frac{\delta_x}{a \sqrt{2}}\right)$ est une fonction croissante de δ_x majorée par 2. Plus a est faible et plus la pente au voisinage de 0 est importante (Fig. 3.11).

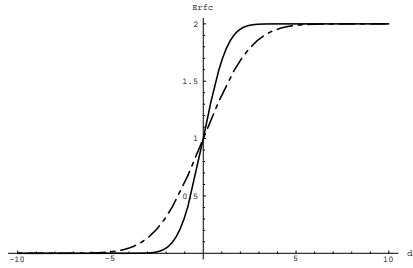


Figure 3.11: Erfc en fonction de δ_x pour $a = 1$ (ligne pleine) et $a = 3$ (pointillé).

- Etude suivant δ_y

Proposition 3.1 Soit $\varepsilon > 0$.

i - $\mathcal{W}\mathcal{P}_\delta$ est à décroissance rapide (DR) par rapport à δ_y et si $[-x_0, x_0]$ est le support à ε près principal de Ψ_{M_1} alors $[-\delta - ax_0, \delta + ax_0]$ est un support à $\frac{2\delta\varepsilon}{a}$ près de $\mathcal{W}\mathcal{P}_\delta$.

De plus $\forall |\delta_y| > ax_0 + \delta, |\mathcal{W}_s(a, b, 0)| < 2\sqrt{2\pi} \delta \varepsilon$.

ii - Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que si a est tel que $\delta > ax_1$ alors

$\forall \delta_y \in [-\delta + ax_1, \delta - ax_1], |\mathcal{W}_s(a, b, 0)| \leq 2\sqrt{2\pi} \frac{\delta - ax_1}{x_1^2} \varepsilon$.

DÉMONSTRATION:

Soit $\varepsilon > 0$.

i - \mathcal{WP}_δ s'écrit : $\mathcal{WP}_\delta(\delta_y, a) = \frac{1}{a} \mathcal{P}_\delta * \bar{\Psi}_{M_1, a, \delta_y}$.

Or \mathcal{P}_δ et $\bar{\Psi}_{M_1, a, \delta_y}$ sont DR, \mathcal{WP}_δ est DR.

Soit $[-x_0, x_0]$ le support à ε près de Ψ_M et soit δ_y tel que $|\delta_y| > ax_0 + \delta$.

On se place dans les zones (1) ou (3) de la figure 3.12.

$$\mathcal{WP}_\delta(\delta_y, a) = \frac{1}{a} \int_{-\delta}^{\delta} \bar{\Psi}_{M_1}\left(\frac{t - \delta_y}{a}\right) dt$$

Or pour $t \in [-\delta, \delta]$, $|\Psi_M(\frac{t - \delta_y}{a})| < \varepsilon$. Et donc $|\mathcal{WP}_\delta(\delta_y, a)| < \frac{2\delta\varepsilon}{a}$.

Et finalement $|\mathcal{W}_s(a, b, 0)| < 2\sqrt{2\pi} \delta \varepsilon$.

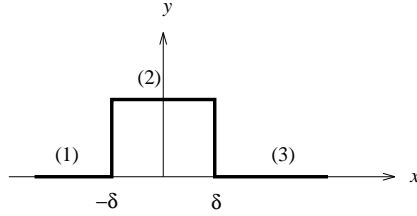


Figure 3.12: $\mathcal{P}_\delta(x)$. Les zones (1), (2) et (3) correspondent aux zones constantes.

ii - Ψ_{M_1} est DR, donc il existe x_1 tel que :

$$\forall |t| > x_1, \quad |t^2 \Psi_{M_1}(t)| < \varepsilon.$$

Choisissons a tel que $a < \frac{\delta}{x_1}$.

On peut alors écrire \mathcal{WP}_δ sous la forme : $\mathcal{WP}_\delta(\delta_y, a) = I_1 + I_2$ avec

$$I_1 = - \int_{-\infty}^{\frac{-\delta - \delta_y}{a}} \bar{\Psi}_{M_1}(t) dt$$

et

$$I_2 = - \int_{\frac{\delta - \delta_y}{a}}^{+\infty} \bar{\Psi}_{M_1}(t) dt$$

Si $\delta_y \in [-\delta + ax_1, \delta - ax_1]$ (on se trouve dans la zone (2)) alors $|t^2 \Psi_{M_1}(t)| < \varepsilon$ pour $t < \frac{-\delta - \delta_y}{a}$ et $t > \frac{\delta - \delta_y}{a}$.

Donc

$$|I_1| < \int_{\frac{\delta + \delta_y}{a}}^{\infty} \frac{\varepsilon}{t^2} dt = \frac{a \varepsilon}{\delta + \delta_y}$$

De même,

$$|I_2| < \frac{a \varepsilon}{\delta_y - \delta}$$

$$\text{Et } |\mathcal{WP}_\delta(\delta_y, a)| < \frac{2a\delta_y \varepsilon}{\delta_y^2 - \delta^2}.$$

$$\text{Or } \frac{\delta_y}{\delta_y^2 - \delta^2} < \frac{\delta - ax_1}{a^2 x_1^2} \quad \text{donc} \quad |\mathcal{W}_s(a, b, 0)| < 2\sqrt{2\pi} \frac{\delta - ax_1}{x_1^2} \varepsilon$$

■

Remarque Si on veut augmenter la précision, ε , alors le support à ε près principal de $t^2\Psi_{M_1}(t)$ sera plus large (x_1 plus grand). Et donc pour une largeur de barre identique, la condition sur l'échelle implique que cette dernière soit plus faible. Et finalement la précision pour la transformée en ondelette à l'intérieur de la barre sera meilleure.

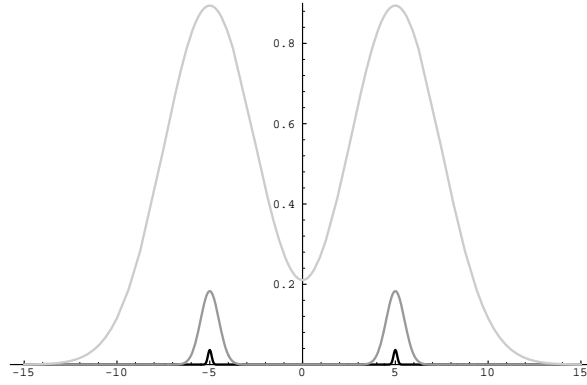


Figure 3.13: *Module de la TO en fonction de δ_y pour différentes échelles en $\delta_x = 5$ avec $\theta' = 0, k_0 = 7, \delta = 5$. Les différentes valeurs de a sont : 0.1, 0.5, 2.5. Les courbes sont d'autant plus claires que a est grand.*

On retrouve bien sur la figure 3.13 que la qualité de détection des frontières augmente avec $\frac{1}{a}$.

3.4.3.2 $\theta' = \frac{\pi}{2}$

La transformée en ondelettes s'écrit

$$\mathcal{W}_s(a, b, \frac{\pi}{2}) = \frac{a\pi}{2} e^{-\frac{k_0^2}{2}} \text{Erf}\left(\frac{\delta_x}{a\sqrt{2}}, \frac{\delta_x + i a k_0}{a\sqrt{2}}\right) \text{Erf}\left(\frac{-\delta - \delta_y}{a\sqrt{2}}, \frac{\delta + \delta_y}{a\sqrt{2}}\right)$$

- Etude suivant δ_x

On voit d'après la figure 3.14 que pour un angle perpendiculaire à la barre le module de la transformée en ondelettes est une fonction de δ_x maximum en 0, c'est-à-dire sur la frontière de la barre de direction verticale.

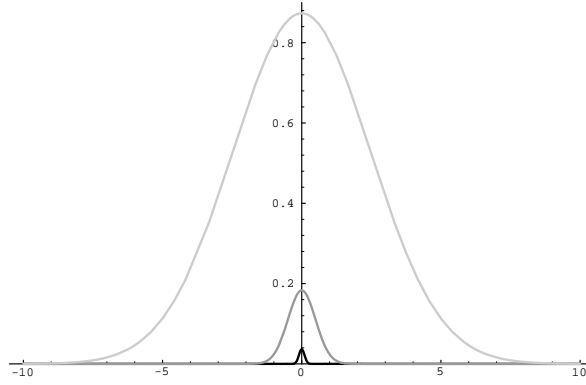


Figure 3.14: *Module de la TO en fonction de δ_x pour différentes échelle en $\delta_y = 0$ avec $\theta' = \frac{\pi}{2}$, $k_0 = 7$, $\delta = 5$. Les différentes valeurs de a sont : 0.1, 0.5, 2.5. Les courbes sont d'autant plus claires que a est grand.*

- Etude suivant δ_y

La fonction $\text{Erf}\left(\frac{-\delta-\delta_y}{a\sqrt{2}}, \frac{\delta+\delta_y}{a\sqrt{2}}\right)$ est une fonction de δ_y paire, décroissante sur $[0, +\infty[$ et maximum en 0. On voit d'après la figure 3.15 que la frontière verticale est d'autant mieux détectée que a est petit.

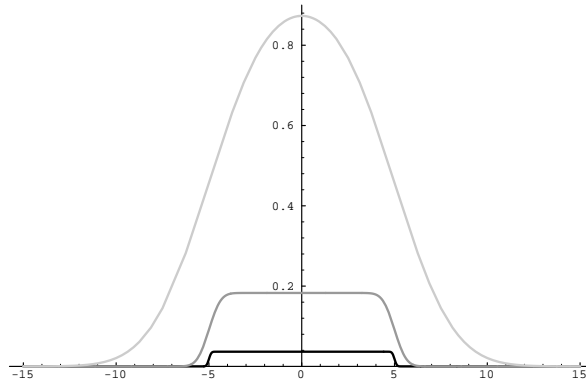


Figure 3.15: *Module de la TO en fonction de δ_y pour différentes échelle en $\delta_x = 0$ avec $\theta' = \frac{\pi}{2}$, $k_0 = 7$, $\delta = 5$. Les différentes valeurs de a sont : 0.1, 0.5, 2.5. Les courbes sont d'autant plus claires que a est grand.*

3.4.3.3 Tests sur la qualité directionnelle

On a vu précédemment que le critère de qualité directionnelle s'écrivait

$$\alpha'_\varepsilon = 2 \arctan \frac{\sqrt{2 \ln \frac{1-e^{-k_0^2}}{\varepsilon}}}{k_0}$$

(on a pris $\mu = 1$).

Nous allons donner quelques exemples de la valeur de ce critère pour $k_0 = 7$.

ε	0.1	0.3	0.5
α'_ε	0.59	0.44	0.33

La figure 3.16 nous confirme que les frontières horizontales sont bien détectées pour un angle nul (courbe noire) et complètement ignorées pour un angle de $\frac{\pi}{2}$ (courbe la plus claire). On voit que pour un angle de 0.2 elles sont encore détectées mais plus pour un angle de 0.5. La qualité directionnelle réelle de l'ondelette de Morlet correspond donc à une précision du support assez élevée (aux alentours de 0.3). Ceci s'explique par la très grande influence du maximum du module de la TF de l'ondelette de Morlet.

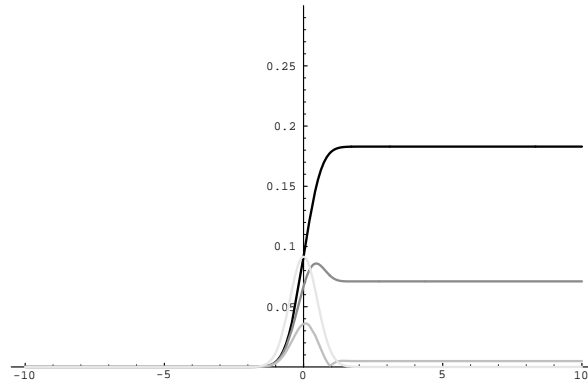


Figure 3.16: *Module de la TO en fonction de δ_x pour différents angles en $\delta_y = 0$ avec $a = 0.5, k_0 = 7, \delta = 5$. Les différentes valeurs de θ' sont : 0, 0.2, 0.5, 1.57. Les courbes sont d'autant plus claires que θ' est grand.*

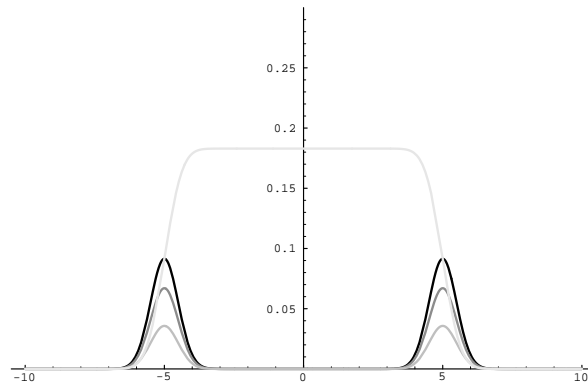


Figure 3.17: *Module de la TO en fonction de δ_y pour différents angles en $\delta_x = 0$ avec $a = 0.5, k_0 = 7, \delta = 5$. Les différentes valeurs de θ' sont : 0, 0.2, 0.5, 1.57. Les courbes sont d'autant plus claires que θ' est grand.*

On retrouve sur la figure 3.17 la détection de la frontière verticale pour un angle de $\frac{\pi}{2}$.

3.4.4 Etude en fonction de l'échelle

On a vu auparavant que plus le facteur d'échelle a était faible, mieux on détectait les frontières. Inversement, on détecte la barre en entier pour un facteur d'échelle assez élevé (Fig.3.18, a). En ce qui concerne la direction perpendiculaire (Fig.3.18, b), on remarque que le support de détection de la frontière verticale augmente avec a . Le plus précis est donc pour les petites échelles.

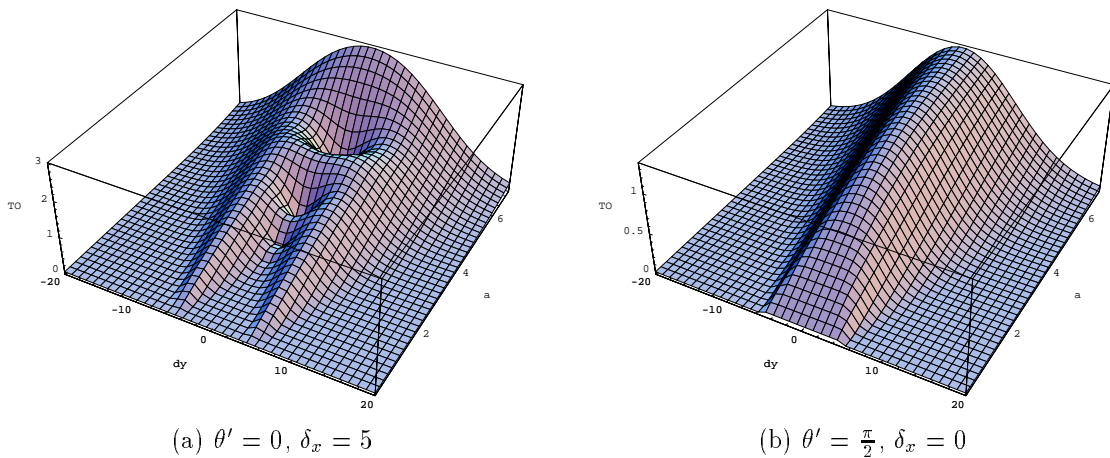


Figure 3.18: *Module de la transformée en ondelettes en fonction de a et δ_y pour $k_0 = 7, \delta = 5$.*

3.5 Conclusion

On a introduit dans ce chapitre une notion d'ondelettes directionnelles ainsi qu'une méthode de construction de ces ondelettes et quelques exemples. L'étude de la transformée en ondelettes avec l'ondelette de Morlet sur un cas précis nous aide à mieux comprendre le comportement de ce type de transformation et va nous permettre de mieux choisir les paramètres dans le cadre de l'application aux images sismiques qui va suivre.

Chapitre 4

Analyse par ondelettes des images sismiques

4.1 Les images sismiques

4.1.1 Introduction

La connaissance du sous-sol a toujours eu une importance capitale, autant pour l'agriculture que pour la construction de bâtiments ou la recherche de gisements. Ainsi l'exprime G. Henry dans son livre "Géophysique des bassins sédimentaires" [40] :

"Le vigneron et l'agriculteur savent que la qualité des récoltes dépend en partie du sol [...]. L'architecte et l'ingénieur des travaux publics étudient ce même sol pour y implanter leurs fondations [...]. Le préhistorien analysera avec soin la surface et les premières couches du sous-sol pour y retrouver les traces des civilisations disparues. L'hydrogéologue suivra, dans le sous-sol, l'évolution des nappes d'eau douce et d'eau contaminée.[...]. Les matières premières tiennent une place à part, notamment en raison du rôle stratégique du pétrole, exploité par des puits très profonds et nécessitant des investissements considérables."

Plusieurs méthodes permettent d'avoir des informations sur le sous-sol, outre l'étude de la surface et des puits déjà existants. Des méthodes exploitent des phénomènes naturels, comme la gravimétrie, la magnétométrie, la tellurique, etc..., d'autres sont des méthodes provoquées, comme les méthodes électriques ou les méthodes sismiques. Parmi toutes ces méthodes, la sismique réflexion, bien que la plus onéreuse, est une des plus utilisées dans le domaine pétrolier car elle permet d'avoir des données très

précises avec une représentation assez proche de la réalité. De plus le gaz peut avoir une réponse très particulière (anomalie d'amplitude) avec cette méthode.

4.1.2 Formation des images

En sismique réflexion, un signal sismique (Fig. 4.5), appelé aussi trace sismique, est obtenu par réflexion d'une onde sismique sur les différentes couches de roches. On procède comme suit : on envoie dans le sol une impulsion sismique $s(t)$, explosion, camion vibreur ou autre.

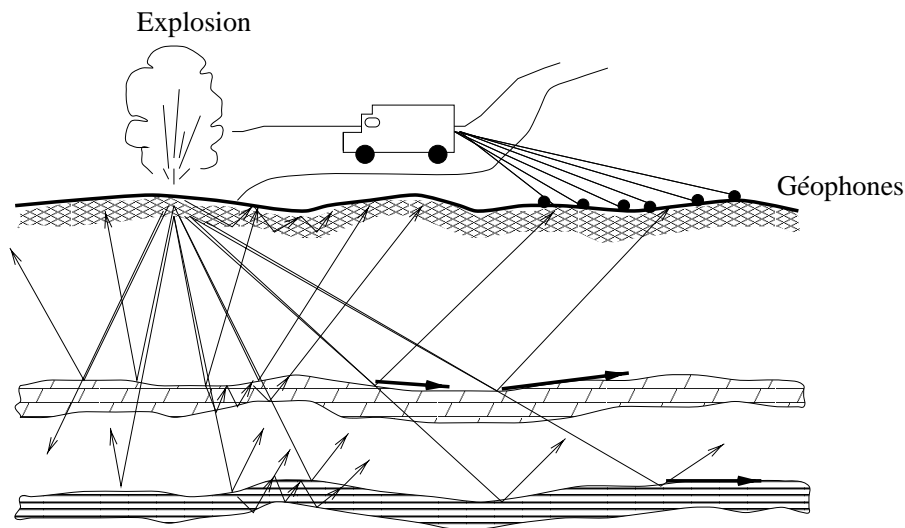


Figure 4.1: Principe d'enregistrement de signaux sismiques

Cette onde se propage à travers le sol et se réfléchit lorsqu'il y a un fort changement de nature de roche. Ce signal réfléchi est mesuré à la surface à l'aide de géophones à terre et d'hydrophones en mer (Fig. 4.1). L'unité de mesure est une impédance acoustique et l'échantillonnage en temps se fait toutes les 4 millisecondes pour une sismique courante et toutes les 1 à 2 millisecondes pour une sismique haute résolution. Le temps d'enregistrement est en général de 4 à 6 secondes. On peut ainsi mesurer des réflexions venant de couches situées jusqu'à 8 000 mètres de profondeur. Les données sont précises jusqu'à environ 5 000 mètres en moyenne. Pour obtenir une image ou section sismique, on dispose les récepteurs en lignes, ce qui donne une suite de traces. Chaque trace est codée en niveau de gris (en général sur 16 bits) et est représentée par une colonne de l'image. Pour les études de gisements, les récepteurs sont distants de 250 à 500 mètres.

Les unités d'échantillonnage pour une image sont donc (Fig. 4.2) :

- un temps en colonne, ce temps étant le double du temps nécessaire à l'onde pour

arriver à la couche de roche correspondante et étant proportionnel à la vitesse de propagation de l'onde.

- une distance en ligne, cette distance étant la distance entre deux récepteurs.

Les sections étudiées par les géophysiciens sont en général de très grandes dimensions (au moins 3000×1000) ce qui leur permet d'avoir une vue d'ensemble. Nous traiterons par la suite des extraits de ces sections.

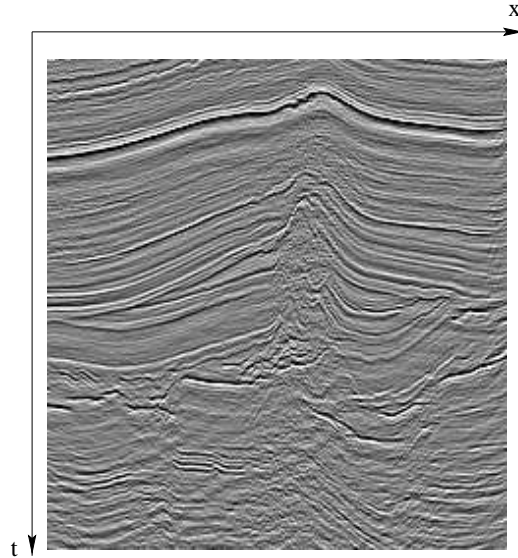


Figure 4.2: *Section sismique de dimension 512×512*

Des campagnes tridimensionnelles permettent des études approfondies. Ce sont une succession de sections distantes de 25 à 50 mètres. Les récepteurs pour l'obtention de chaque section sont également plus rapprochés (25 à 50 mètres). On obtient alors un bloc sismique, masse de données considérable (Fig. 4.3).

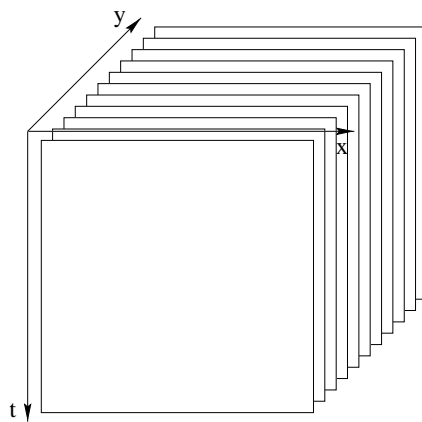


Figure 4.3: *Bloc sismique*

Il est évident que l'onde émise ne se réfléchit pas idéalement. Un grand nombre de phénomènes, tels que réflexions multiples, atténuation et étalement du signal en fonction de la profondeur, interférences, se produisent. L'équation générale d'une trace $f(t)$ peut s'écrire sous la forme [40]

$$f(t) = G(t)[r(t) * (s(t) * re(t) * m(t))] + b(t)$$

où $G(t)$ est ce que l'on nomme *la courbe de gain* (l'amplitude moyenne du signal sismique décroît très rapidement avec le temps suivant $G(t)$).

$r(t)$ s'appelle *log de réflectivité* ou *trace impulsionnelle* et représente l'enregistrement obtenu si l'impulsion sismique était un Dirac et sans bruit. Cette fonction représente donc exactement la configuration du sous-sol.

$re(t)$ représente les réverbérations, c'est-à-dire les réflexions multiples dans la couche supérieure (l'eau en sismique marine), $m(t)$ représente les réflexions multiples dans les couches inférieures et $b(t)$, le bruit (ondes de Rayleigh, bruits d'appareillage, bruits naturels, etc ...).

Des méthodes sophistiquées du traitement de signal, telles que migration, déconvolution ([46] [82]) permettent de restaurer le signal. Chaque trace $f(t)$, la réponse enregistrée par chaque récepteur, est donc une suite de réflexions se présentant comme une succession de signaux s plus ou moins amplifiés et présentant un déphasage (Figure 4.5).

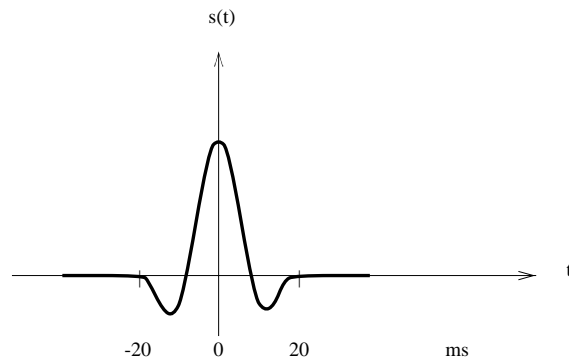


Figure 4.4: *Impulsion sismique dans le cas d'une explosion*

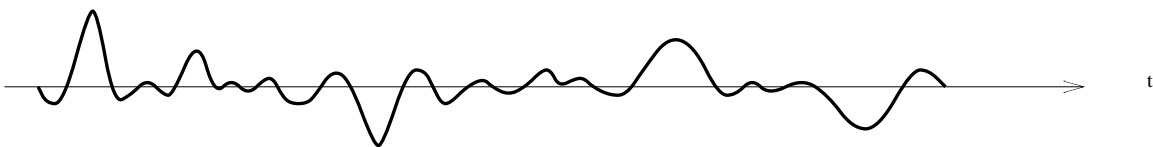


Figure 4.5: *Trace sismique*

Une approximation d'une trace sismique peut être ([82])

$$f(t) = r(t) * s(t) + br(t) = \sum_i r_i s(t - \tau_i) + br(t) \text{ avec } (r_i, \tau_i) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.1)$$

où $br(t)$ est le bruit résiduel.

On considère qu'aucune énergie n'est stockée dans le sol, ce qui se traduit par la condition suivante :

$$\int s(t)dt = 0 \quad (4.2)$$

On supposera par la suite qu'une impulsion sismique est symétrique et à support compact, c'est-à-dire que $s(t) = 0$ pour $t \notin [-T, T]$.

4.1.3 Interprétation

Une image sismique est le reflet d'une coupe géologique qu'il s'agit d'interpréter. Etant donnée la complexité des données, l'interprétation n'est pas unique et dépend beaucoup de l'interpréteur et des connaissances a priori. L'important, est de donner une interprétation cohérente de la section. Pour ce faire, on dispose de plusieurs outils :

- L'interprétation structurale qui rend compte de la structure globale du sous-sol.
- L'interprétation stratigraphique qui établit des relations entre les différentes séquences de dépôts géologiques.
- L'interprétation lithologique qui est l'étude de la forme des signaux.

Pour un observateur non averti, une image sismique se présente comme une succession de "lignes" plutôt horizontales plus ou moins marquées. Ces lignes correspondent à des alignements de réflexion maximum et donc à une séparation entre deux couches de roches d'impédances acoustiques différentes. Ces alignements sont appelés *horizons sismiques*. L'étude de la forme globale de ces horizons permet l'interprétation structurale.

Certains horizons ressortent plus que d'autres : ils sont plus longs ou ont une intensité moyenne plus élevée. Ce sont les *horizons principaux* ou *marqueurs principaux*. Ces horizons principaux sont souvent les limites de ce que l'on nomme les *séquences sismiques* qui correspondent à des séquences de dépôts géologiques. Au cours de temps, des sédiments se déposent (ce qui correspond à une séquence) puis subissent des transformations, comme l'érosion, des cassures (failles) etc... Les séquences sismiques se

reconnaîtront donc principalement par leur limites qui seront des zones de discontinuité des horizons composant la séquence en question (Fig. 4.6) ou des zones de discontinuité latérale de la forme de la réflexion.

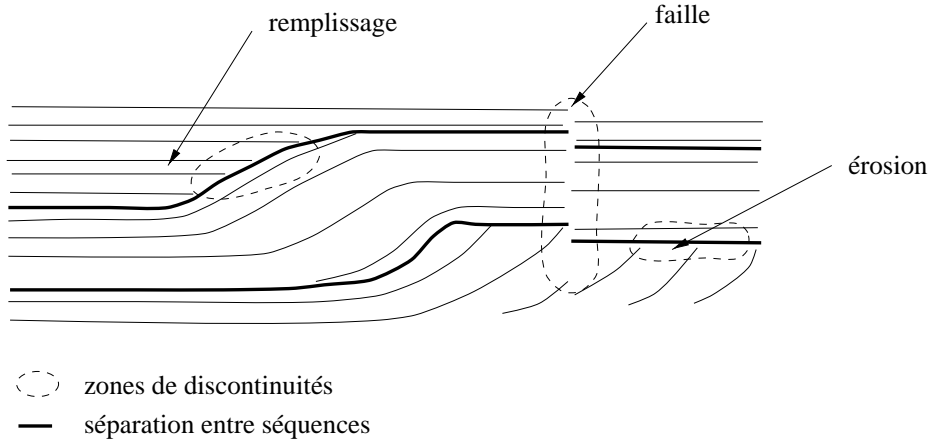


Figure 4.6: *Exemple de séquence sismique*

Une image sismique est également constituée de zones de textures différentes. Certaines sont constituées d'horizons parallèles ayant une forte amplitude, d'autres où la réponse est plus chaotique (Fig. 4.7). Ces zones constituent des *faciès sismiques* et sont significatives de la nature des roches et de configurations géologiques telles que chenaux, dômes de sel etc... On peut reconnaître les faciès sismiques grâce à un certain nombre de paramètres sismiques tels que la continuité (longueur des horizons), l'amplitude, la fréquence (qui rend compte de l'espacement entre horizons), la configuration des réflexions (parallèle, divergente, chaotique, etc...).

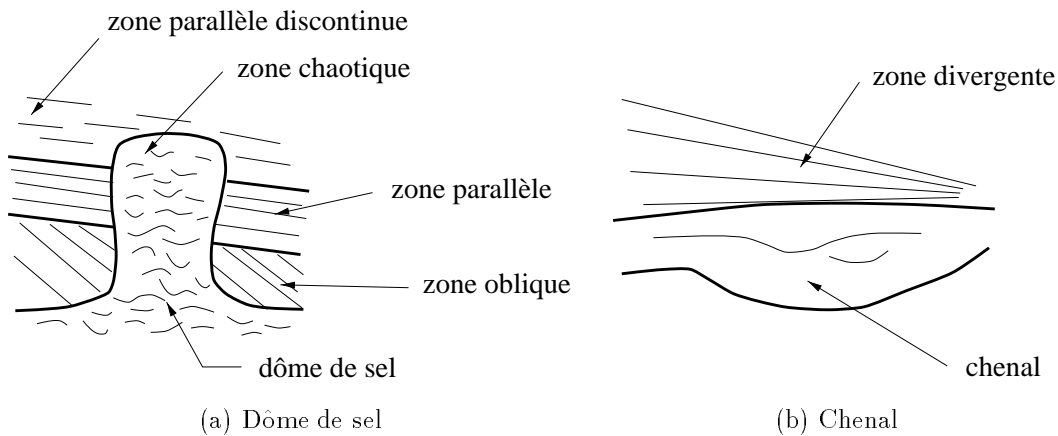


Figure 4.7: *Exemples de faciès sismiques*

L'étude des faciès sismiques est fondamentale en recherche d'hydrocarbures. En effet, celle-ci permettra d'identifier grâce aux natures des roches et à la géométrie des couches quelle zone est susceptible de contenir un puits. Dans certains cas, il est même possible de déceler immédiatement une poche de gaz ou d'huile à l'intérieur d'une lentille de sable. En effet, le sable et les hydrocarbures ont une très forte différence d'impédance acoustique. La réflexion sera alors anormalement forte par rapport aux autres réflexions. Ceci se présentera sur l'image comme un point brillant ou *bright spot* (Fig 4.8). On trouve souvent ces points à proximité des failles.

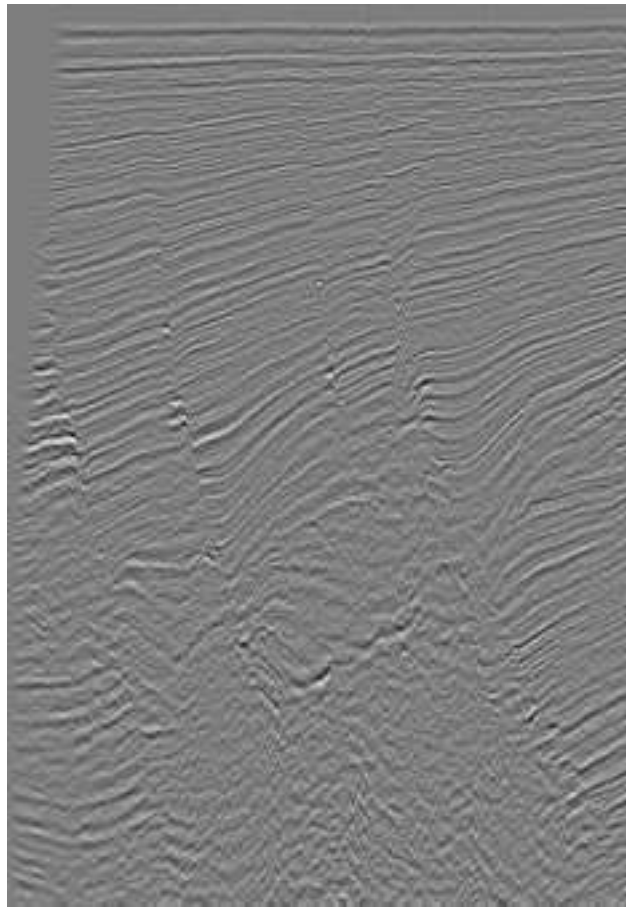


Figure 4.8: *Les points blancs près des failles sont significatifs de poches de gaz*

4.1.4 Apport des traitements informatiques dans le domaine de l'interprétation

L'interprétation d'une image sismique ou d'un bloc sismique prend beaucoup de temps à un géophysicien. En effet, les données ne sont pas toujours de très bonne qualité et il doit faire des hypothèses puis les vérifier avec des données de terrain ou

d'autres images et ceci prend parfois plusieurs années dans les cas les plus difficiles. L'outil informatique est donc une aide indispensable. D'une part il permet, dans le cas des blocs, une visualisation sous des angles de vue que l'on ne peut avoir sur des données papier et donc un accès à des informations supplémentaires. D'autre part il permet de calculer rapidement un certain nombre de paramètres que nous décrirons plus tard. L'idéal serait de pouvoir segmenter les images, c'est-à-dire classer les différentes séquences et les différents faciès. Ceci est une tâche ardue dans la mesure où une image sismique est une image complexe dans le domaine du traitement de l'image. En effet elle se présente comme une image texturée, ne comportant pas de frontières au sens forte différence de niveau de gris. Les différentes zones se différencient plus par leurs différences avec les zones voisines que par leurs caractéristiques propres. De plus une connaissance à priori est nécessaire. Certains traitements à base de connaissances ont été élaborés [50] [51] [73] [68]. Ils donnent des résultats forts intéressants et permettent une segmentation partielle. Mais jusqu'à présent, il n'existe pas de segmentation d'une image sismique fiable. Les zones posant le plus de problèmes sont les zones de discontinuités comme les failles ou les limites de séquences [77] [78].

L'informatique fournit principalement des outils qui permettent d'accélérer l'interprétation. Nous allons présenter les outils et attributs les plus classiques et les plus utilisés.

Les horizons

Nous avons vu précédemment que les horizons sont des éléments fondamentaux dans la compréhension d'une image sismique. Un horizon étant un alignement de réflexions maximales, il peut être détecté facilement par suivi de maximum sur les traces adjacentes (Fig. 4.9). Dans la littérature, plusieurs méthodes sont envisagées : N. Keskes se ramène à une détection de contour sur une image de polarité [45], I. Pitas et C. Kotropoulos proposent une détection trace à trace sur une image filtrée, la méthode étant sensible au bruit [67].

Différents attributs peuvent être calculés sur les horizons [12] :

- la *continuité*, c'est-à-dire la longueur de l'horizon ou le nombre de points le constituant;
- l'*amplitude*, valeur moyenne des réflexions constituant l'horizon;
- le *pendage local*, ou pente de l'horizon en chaque point;
- la *fréquence apparente*, ou période moyenne;

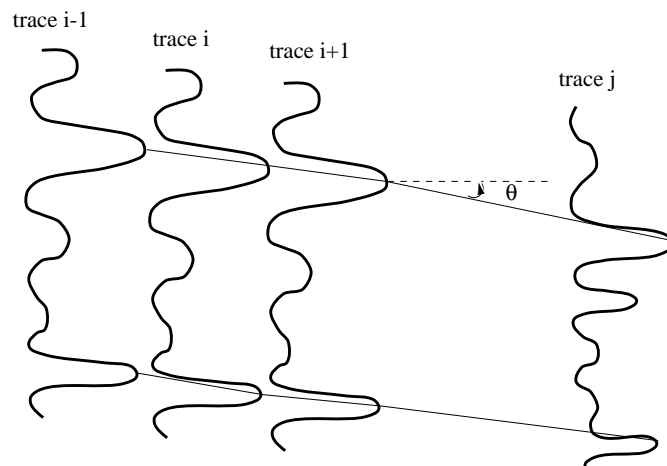


Figure 4.9: *Pointé d'horizons*. θ représente le pendage local.

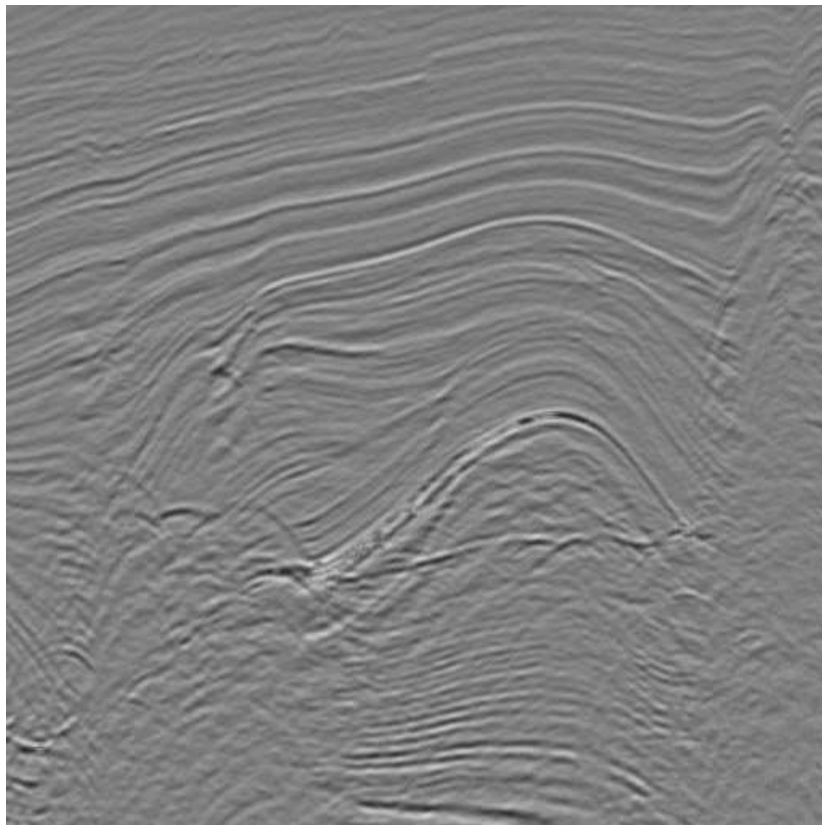


Figure 4.10: *Image* 512 \times 512

Les plages

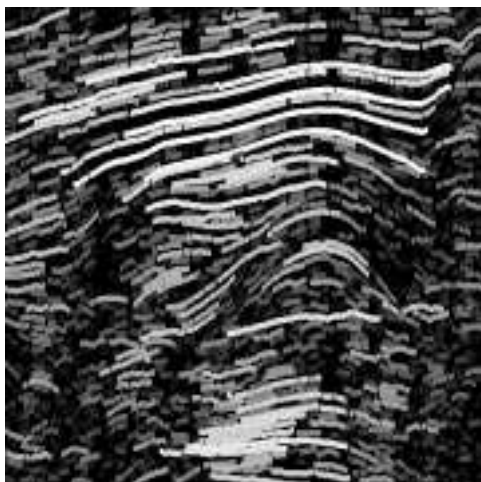
Les plages sont obtenues par binarisation de l'image et sont des groupes maximaux de points connexes ayant la même valeur maximum. Comme les horizons, les plages



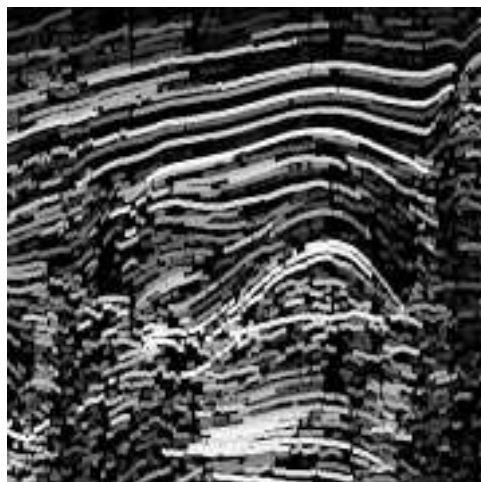
(a) Pointé d'horizons



(b) Pendage local



(c) Longueur



(d) Intensité

Figure 4.11: *Pointé d'horizons et quelques attributs*