# Optimisation multicritère : fondements et concepts

Imed Othmani

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1

# THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER DE GRENOBLE**

**Discipline :** Informatique

**Formation Doctorale :** Recherche Opérationnelle

présentée et soutenue publiquement

par

Imed OTHMANI

le 20 Mai 1998

*Titre :*

# OPTIMISATION MULTICRITÈRE : FONDEMENTS ET CONCEPTS

**Directeur de thèse :** Hervé RAYNAUD

**JURY**

| | |
|---|---|
| M. Gerd FINKE | Président |
| M. Denis BOUYSSOU | |
| M. Marc PIRLOT | |
| M. Hervé RAYNAUD | |

# Remerciements

Je remercie en premier lieu le Professeur Hervé Raynaud, mon directeur de thèse, pour ses précieux conseils, ainsi que pour la confiance et la liberté qu'il m'a accordées durant mes trois années de thèse.

Je tiens ensuite à remercier tout spécialement le Professeur Gerd Finke, qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être Président du jury de ma thèse, pour sa disponibilité et son soutien pendant ces quatre dernières années.

Messieurs les Professeurs Marc Pirlot et Denis Bouyssou m'ont fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs de ma thèse. Je les en remercie ici très vivement.

Ce travail n'aurait pu être réalisé sans les nombreux échanges qu'il m'a été donné d'avoir avec des membres de la Société Internationale MCDM. Une mention spéciale va au Professeur Ralph E. Steuer pour le matériel qu'il a mis à ma disposition et pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui m'ont soutenu durant ces trois années, tout particulièrement mes amis Christine Pelletier, Emmanuel Costa et Zouhier Hamrouni, et mes collègues Samia Ould-ali, Clarisse Flipo, Nadia Brauner, Marie Laure Espinouse, Sylvain Durand, Vladimir Bourgade et Oulamara Ammar.

Cette thèse a été effectuée au sein de l'équipe Théorie de la décision du Laboratoire Leibniz-IMAG, avec le soutien financier du Centre National des Œuvres Universitaires et Scolaires.

# Table des matières

# Introduction

L'optimisation multicritère consiste à choisir, en présence de critères multiples, une (des) alternative(s) parmi un nombre infini d'alternatives qui varient généralement dans un domaine continu. Depuis une trentaine d'années, le domaine de l'optimisation multicritère connaît une évolution importante. Cette évolution s'est traduite par le développement d'un grand nombre de méthodes qui sont généralement regroupées en deux classes. La première classe est constituée des méthodes, dites classiques, qui s'appuient sur un critère unique de synthèse. La seconde classe est constituée des méthodes qui utilisent un processus interactif de décision [Roy 93], [Vincke 89].

La multitude des méthodes d'optimisation multicritère est perçue comme une richesse incontestable de ce domaine. D'ailleurs, certains la justifient par la diversité des problèmes ainsi que par l'existence de différentes approches de résolution possibles et légitimes de ces problèmes [korhonen 92]. Cependant, ce phénomène révèle aussi des faiblesses certaines. En effet, la plupart de ces méthodes manquent de fondements axiomatiques, et il est difficile de choisir la méthode à appliquer face à une situation donnée [Arrow 86], [Bouyssou 93].

Dans cette thèse, nous nous sommes fixés comme objectif de proposer des fondements axiomatisés possibles pour certains modèles d'optimisation multicritère. Nous essaierons de concrétiser cet objectif par le développement de méthodes axiomatisées applicables aux problèmes comportant des critères nombreux et incommensurables. En vue de la construction de telles méthodes, nous avons commencé par analyser les méthodes existantes. Cette analyse nous a permis, d'une part, de mieux cerner leur portée, les hypothèses formelles qui leurs sont sous-jacentes (si elles existent) et leurs valeurs pragmatiques; d'autre part, de mettre en évidence quelques problèmes ouverts ou peu étudiés tels que le traitement de l'incommensurabilité des critères et de la non compensation de préférence, et l'absence de méthodes de surclassement en continu. Nous allons donc, tout au long de ce mémoire, essayer de donner des éléments de réponse à certains problèmes de l'optimisation multicritère.

Ce mémoire comporte six chapitres :

Le premier chapitre expose le cadre général de ce travail. Il contient un rappel des notions fondamentales de la théorie de la décision multicritère et une présentation sommaire des modèles utilisés.

Le deuxième chapitre est entièrement consacré aux méthodes classiques d'optimisation multicritère. Nous nous interrogeons sur leurs fondements théoriques ainsi que sur leurs valeurs pragmatiques. Ceci permettra, d'une part de préciser les conditions de leurs applications et d'autre part, de révéler certains problèmes tels que l'absence de fondements axiomatisés pour la plupart d'entre elles.

Dans le troisième chapitre, nous introduisons une nouvelle approche d'optimisation multicritère qui s'appuie sur la notion d'analyse partielle. Nous présentons la philosophie de cette approche, ainsi que les notions fondamentales utilisées telles que l'efficacité partielle et les différents modes d'agrégation des critères.

Le quatrième chapitre s'attache à l'analyse axiomatique de l'approche proposée. Différentes interprétations ainsi que la théorie sous-jacente sont développées. Nous établissons ensuite des liens entre cette approche et d'autres méthodes.

Le cinquième chapitre est dédié à l'analyse technique de l'approche proposée. Nous traitons successivement le cas convexe puis le cas linéaire. Des cas particuliers de problèmes et des expérimentations sont discutés.

Dans le sixième et dernier chapitre, nous proposons quelques extensions et perspectives. Des idées sur l'intégration de la notion de décision par rejet, sous la forme d'axiomes et de seuils, dans l'approche proposée sont examinées. Nous soumettons aussi la possibilité d'utiliser l'analyse partielle comme démarche d'apprentissage.

# Chapitre 1

# La décision multicritère

Ce chapitre introductif contient un exposé du cadre du notre travail. Nous rappelons quelques notions fondamentales en décision multicritère, les différentes démarches classiquement suivies dans l'étude des problèmes de décision, ainsi qu'une typologie classique des modèles utilisés [1].

## 1.1 Le problème de décision multicritère

La décision multicritère s'intéresse aux problèmes de prise de décision en présence de critères multiples éventuellement contradictoires. Ces problèmes se rencontrent à tous les niveaux - national, régional, managérial et personnel - et dans tous les domaines - économique, social et environnemental. Par exemple, il peut s'agir de choisir entre plusieurs schémas d'organisation du système de santé celui qui permet au mieux de maîtriser les coûts, d'améliorer la qualité et l'accessibilité aux soins; de sélectionner des candidats à un concours selon les critères requis par les postes; d'adopter un nouveau processus de production dans une usine pour améliorer les délais, la qualité, et réduire les coûts en tenant compte de l'investissement et de la capacité d'apprentissage des employés [2].

La plupart des décisions qui font l'objet d'études multicritères sont de nature complexe et leurs conséquences sont importantes et stratégiques. L'aspect conflictuel des critères, l'indétermination et le manque d'information liés au problème sont souvent avancés comme les sources de sa complexité [Bouyssou 84], [Fishburn 68].

1. Notons que les cinq premières parties de ce chapitre peuvent être omises de ce mémoire dédié principalement à des questions mathématiques. Néanmoins il nous semble intéressant de présenter ce recueil de concepts généraux pour mieux situer ce travail aux yeux d'un lecteur néophyte.

2. Des exemples de domaines d'application de la décision multicritère sont présentés dans [White 90] et [Zeleny 82].

## 1.2 Théorie de la décision : les différentes démarches

La théorie de la décision est un ensemble de concepts, d'approches, de modèles et de procédures utiles pour l'étude des problèmes de décision[3]. Les travaux qui traitent des problèmes de prise de décision s'inscrivent généralement dans l'une des démarches suivantes :

#### Démarche descriptive

La démarche descriptive à pour but la description et la prévision du comportement du décideur. Elle suppose donc qu'il préexiste à toute analyse du problème, une vérité cachée. Le rôle des modèles descriptifs est de dévoiler cette vérité [Roy 90].

#### Démarche prescriptive

Cette démarche s'intéresse aux conseils et recommandations qui peuvent être proposés au décideur afin qu'il améliore ses décisions. Ces recommandations doivent être en accord avec les besoins et les capacités cognitives des individus pour lesquels elles sont conçues. Ce domaine de recherche se préoccupe donc des modes et des instruments d'aide à la décision utiles pour les individus. Les modèles prescritifs sont évalués par leur *valeur pragmatique* : leur capacité d'aider le décideur à améliorer ses décisions [Bell 88].

#### Démarche normative

La démarche normative consiste à définir des principes et des règles que certains individus suivent ou pourraient suivre. Cette analyse est cohérente et rationnelle dans le sens où ses règles bien spécifiées constituent un ensemble d'axiomes possédant une logique et des implications précises [Bell 88].
Ces axiomes sont définis par des analystes qui essaient de traduire un comportement logique et rationnel. Ensuite, comme avec n'importe quel système d'axiomes mathématiques, le chercheur académique joue sur des variations du système identifié : que se passe-t-il si un axiome est ignoré ou modifié? Cet exercice est récompensé si les implications mathématiques sont profondes ou si le chercheur peut identifier une meilleure concordance entre le système abstrait et les observations comportementales qu'il a pu vérifier empiriquement ou qu'il croit vérifiées.

La démarche normative contient plusieurs facettes qui diffèrent selon l'interprétation des axiomes. D'une part, la théorie normative classique confère à ces axiomes la valeur d'une vérité indiscutable ou de règle idéale que le décideur doit rationnellement suivre [Roy 90]; d'autres part, l'approche axiomatique perçoit les axiomes comme des hypothèses de travail qui sont mises au point à l'occasion d'un dialogue entre l'analyste

3. Différentes définitions sont proposées dans la littérature (voir [Buchanan 97], [Roy 85], [Lemoigne 82] et [White 75]).

et le décideur [RAYNAUD 97], [BOUCHET 93].

C'est dans cette approche axiomatique que nous souhaitons intégrer notre travail.

## 1.3 Concepts et terminologie

Dans cette section nous rappelons la terminologie couramment utilisée dans la littérature de la théorie de la décision multicritère [ZIONTS 79], [ZELENY 82], [TECLE 91], [ROY 85], [KEENEY 76]. Les termes essentiels qui permettent de décrire un problème de décision sont les alternatives, les objectifs, les attributs, les critères, le décideur et l'analyste.

### 1.3.1 Les alternatives et les critères

#### Les alternatives, les variables de décisions et les contraintes

L'ensemble des alternatives désigne l'ensemble des scénarios, des candidats, des projets, des sites, etc..., sur lesquels porte la décision. L'identification de cet ensemble de solutions réalisables est une tâche primordiale dans la définition du problème. Cet ensemble peut être défini de deux façons :

- explicitement par un ensemble fini d'alternatives de cardinal relativement faible,

- implicitement par un ensemble de propriétés ou de conditions que les alternatives doivent vérifier (c'est le cas d'un ensemble d'alternatives spécifié par ses variables de décision vérifiant un système de contraintes explicites).

#### Les objectifs

Un objectif indique le sens de l'amélioration qu'un décideur souhaite apporter à un système lors d'un changement d'état. Il reflète l'aspiration du décideur. Les trois manières de poursuivre un objectif sont de le maximiser, de le minimiser ou de le maintenir dans un certain état. Des exemples industriels classiques de ces situations sont : maximiser le profit, minimiser le coût ou maintenir un équilibre économique.
Des auteurs ajoutent à ces situations d'autres types d'objectifs comme : près d'une cible (but), plus grand ou plus petit qu'un certain seuil, dans un intervalle, etc...

#### Les attributs

Les attributs correspondent à des caractéristiques des alternatives. Les attributs permettent d'évaluer les niveaux des objectifs.

#### Les critères

La signification du mot critère selon le dictionnaire (Le Robert) est "ce qui sert de base à un jugement, ce qui permet de distinguer une chose, une notion". En théorie de la décision, il correspond à un attribut ou à un objectif. Dans ce sens, un problème de décision désigne soit un problème de décision multiattribut, soit multiobjectif, ou les deux.

### 1.3.2 Le décideur et l'analyste

#### Le décideur

Un décideur est un individu (ou un groupe d'individus) qui face à une situation de décision, a la responsabilité d'évaluer les différentes alternatives possibles afin de proposer ou de mettre en oeuvre une solution (ou des solutions).

**Le rôle du décideur** [4] Une des tâches importantes du décideur est de se dévoiler ses jugements personnels, de s'en convaincre lui même, et de décider. Nous appelons ce rôle *l'auto-conviction*. Cette tâche d'auto-conviction peut se faire d'une façon totalement intuitive ou à l'aide d'une analyse plus formelle et plus structurée.

Le décideur peut utiliser une analyse formelle pour différentes raisons:

- pour des raisons de confort *psychologique* (la sécurité d'avoir une analyse formelle pour corroborer son intuition);
- utiliser cette analyse comme une structure ou un protocole de *communication*;
- il peut être amené à justifier ses conclusions à d'autres personnes ou à les convaincre du bien-fondé de sa proposition. Dans ce cas, le décideur joue le rôle d'*avocat* de ses opinions;
- cette analyse peut l'aider à *réconcilier* les différents points de vues.

Généralement, une analyse faite uniquement pour se convaincre soi-même est différente d'une analyse dont le but est de défendre des choix. Une analyse personnelle peut très bien incorporer des impressions très subjective. Par contre, une analyse d'une décision publique est sujette à des discussions au cours desquelles tous les points vulnérables de la proposition sont attaqués. Le raisonnement effectué par le décideur doit être, dans ce cas, le plus objectif possible et doit avoir des fondements solides pour contrer toutes les attaques éventuels.
L'autre rôle que peut avoir un décideur est celui d'un conciliateur de points de vues opposés. Ces derniers correspondent, selon la nature du problème étudié, à des critères d'évaluation des alternatives (qui sont généralement contradictoires) ou à des points

4. Dans ce paragraphe nous nous sommes inspirés des travaux de Kenneey et Raiffa(76), pp. 9-10 [Keeney 76].

de vues antagonistes des différents acteurs. Une analyse formelle qui décompose le problème en plusieurs parties peut aider à la mise en oeuvre d'un processus de conciliation. En effet, cette analyse permet de mettre en évidence les sources principales de différences d'opinions, d'avoir plus d'informations sur les avantages des différentes alternatives. Ceci permet au décideur de limiter le champ de son action et de mieux guider le processus de la conciliation.

**La structure de préférence du décideur** Une composante principale du processus de décision multicritère concerne les importances attribuées aux différents critères considérés. Ces importances sont représentées par des expressions quantitatives souvent appelées *poids* ou par le biais d'expressions ordinales désignées par le terme *priorités*. Dans la plupart des processus de décision, décrire la structure de préférence du décideur entre les différentes alternatives[5] revient, principalement, à évaluer les poids ou les priorités [TECLE 91], [VANSNICK 86a][6].

**L'analyste**

L'analyste est responsable de la définition du modèle de décision, de la conduite du processus de décision, et de la présentation des résultats au décideur. Les activités de l'analyste concernent donc la formulation et l'analyse qualitative et quantitative du problème [TECLE 91].
L'interaction entre l'analyste et le décideur est une caractéristique intrinsèque au processus de décision. Le niveau de cette interaction dépend généralement du niveau de connaissance du décideur, de sa volonté à participer au processus, de la règle de décision à appliquer et de la nature du problème. La participation minimale, que l'analyste requiert du décideur, concerne le choix de la technique à appliquer, l'évaluation des priorités des critères du problème étudié, et la post-analyse de la solution présenté par l'analyste. Cette interaction devient plus élaborée et plus complexe dans le cas de l'utilisation d'une méthode interactive qui implique une "extraction" permanente de l'information détenu par le décideur.

## 1.4 Paradigme des problèmes de décision multicritère

### 1.4.1 Le processus de décision : un modèle

**La pré-analyse**

Ce sont souvent des événements liés à l'environnement du décideur qui déclenchent un mécanisme de reconnaissance d'un besoin de changement. Le décideur perçoit alors

5. Pour une définition formelle d'une structure de préférence, voir section 1.6.1.

6. Notons que les poids ne prennent un sens que dans une technique de décision donnée [MOUSSEAU 93][GERSHON 82] et que leurs évaluation reste un problème crucial en décision multicritère.

qu'une action doit être effectuée ou améliorée. Cette identification s'articule sur une définition verbale du problème, des actions possibles qui pourraient être considérées, et des objectifs qui doivent être poursuivis. Cette étape de pré-analyse aboutit à la délimitation du problème et à la formation du binôme décideur - analyste.

#### L'analyse

Après la définition du problème, une phase de collection de données est effectuée. D'une part, ces données seront utilisées comme "input" du problème de décision. D'autre part, elles serviront à formuler le problème et éventuellement à choisir la méthode d'analyse du problème. Suite à cette phase, le décideur, avec l'aide de l'analyste, procède à une définition précise des différentes parties du problème. Ce processus inclut l'identification des alternatives, la spécification des critères relevants, et l'instruction des attributs.
Suite à cette étape de formulation, une technique de résolution est construite ou sélectionnée parmi les méthodes existantes. Cette étape difficile correspond à une méta-résolution du problème.
Une fois que la règle de décision est construite ou choisie, elle est utilisée pour résoudre le problème. Si elle réussit à le résoudre, l'analyste présente au décideur les résultats; sinon une analyse complémentaire s'impose pour affiner les hypothèses.

#### La post-analyse

Une fois la solution obtenue, une analyse de robustesse permet au décideur de mieux évaluer la fiabilité de la solution. Le cas échéant, il peut la remettre en cause et identifier de nouvelles alternatives ou critères. La post-analyse comprend entre autres l'implémentation et le suivi de l'action décidée afin d'ajuster cette dernière si nécessaire[7].

### 1.4.2 Structuration des objectifs

Différentes techniques sont proposées pour construire et structurer les objectifs. Roy (85) suggère de les construire en analysant le *nuage* des conséquences possibles des alternatives. Kenneey et Raiffa (76) proposent de les structurer d'une manière hiérarchique, méthode que nous adopterons lors du développement de notre approche[8].

#### La nature hiérarchique des objectifs

Les objectifs peuvent généralement être structurés de façon hiérarchique. Un objectif est subdivisé en objectifs de niveau inférieur plus détaillés. Ceci permet de clarifier le sens de l'objectif général. Ces objectifs de niveau inférieur peuvent être perçus comme des moyens pour atteindre la fin (l'objectif de niveau supérieur). Nous pouvons ainsi

7. Pour une présentation détaillée de ces différentes étapes voir [Roy 85] et [Keeney 76].
8. La construction des critères reste une tâche approximative et difficile. Pour plus de détails sur cette question, voir [Bouyssou 89].

construire une hiérarchie. Si on se déplace dans la hiérarchie selon une direction ascendante, on arrive à un objectif final qui synthétise la totalité des objectifs. Cet objectif indique la raison de notre intérêt pour le problème. Des exemples d'objectifs synthétiques généralement utilisés sont:

- le *bien-être public* dans le cas des problèmes de décision publique qui est désagrégé en objectifs partiels plus palpables;
- la prospérité à long terme d'une entreprise qui s'exprime sous la forme de directions stratégiques.

**Propriétés des objectifs et des attributs**

Les critères d'un problème convenablement formalisé doivent, selon Keeney et Raiffa (1976), vérifier les propriétés suivantes: [9]

- leur ensemble est complet et couvre tous les aspects du problème,
- les critères sont opérationnels, concrets et interprétables,
- les critères complexes doivent être décomposables en parties élémentaires plus faciles à traiter,
- les critères sont indépendants afin d'éviter les redondances,
- les critères sont les moins nombreux possibles,

Il s'agit là, on peut bien l'imaginer, d'un cas idéal.

## 1.5 Typologie des problèmes de décisions multicritères

### 1.5.1 Les différents problèmes multicritères

Les problèmes multicritères sont généralement classifiés selon:

- la nature des conséquences des décisions qui sont modélisées comme
  - déterministes, stochastiques ou floues,
  - réversibles, lourdes, ou irréversibles;
- la nature de l'ensemble des alternatives qui est modélisé comme
  - explicite avec un nombre d'alternatives fini. Dans ce cas les données du problème peuvent être représentées par un tableau contenant les performances des alternatives sur chaque critère,

9. Notons que des propriétés plus formelles sont proposées par Roy et Bouyssou(93).

  - implicite avec un nombre d'alternatives infini. Dans cette classe, nous retrouvons les problèmes de programmation multiobjectif;

- le contexte dans lequel la décision est prise : décision publique ou privée;

- le nombre de décideurs : décision de groupe ou individuelle.

### 1.5.2 Les différentes problématiques multicritères

#### Problématique de choix multicritère

Cette problématique vise à identifier un ensemble aussi réduit que possible d'alternatives (éventuellement une alternative) *meilleures* que les autres. Cet ensemble est constitué d'alternatives entre lesquelles il est difficile de choisir. L'optimisation est un exemple de cette problématique.

#### Problématique de rangement multicritère

Cette problématique vise à ranger les alternatives suivant un ordre de préférence. Elle établit un ordre ou préordre complet ou partiel sur l'ensemble des alternatives.

Notons que Roy propose deux autres problématiques multicritères qui sont celles de la classification et de la description [ROY 85].

## 1.6 Typologie des modèles de décision multicritère

### 1.6.1 Les structures de préférences

La plupart des modèles de décision multicritère utilisent la notion fondamentale de structure de préférence. Pour l'introduire, nous rappelons les définitions suivantes :

#### Les relations binaires et les ordres

**Définition 1.6.1.** *Une relation binaire $S$ sur un ensemble $X$ est un ensemble de paires ordonnées $(x, y)$, avec $x, y \in X$. Nous utilisons indifféremment les notations $(x, y) \in S$ ou $xSy$.*

**Définition 1.6.2.** *Une relation binaire est dite*
*réflexive si $(x, x) \in S$ pour tout $x \in X$;*
*irréflexive si $(x, x) \notin S$ pour tout $x \in X$;*
*symétrique si $(x, y) \in S$ implique que $(y, x) \in S$ pour tout $x, y \in X$;*
*asymétrique si $(x, y) \in S$ implique que $(y, x) \notin S$ pour tout $x, y \in X$;*
*antisymétrique si $(x, y) \in S$ et $(y, x) \in S$ implique que $x = y$ pour tout $x, y \in X$;*
*transitive si $(x, y) \in S$ et $(y, z) \in S$ implique $(x, z) \in S$ pour tout $x, y, z \in X$;*
*négativement transitive si $(x, y) \notin S$ et $(y, z) \notin S$ implique $(x, z) \notin S$ pour tout $x, y, z \in X$;*

*connexe si* $x, y \in X$ *implique* $(x, y) \in S$, *ou* $(y, x) \in S$;
*faiblement connexe si* $x, y \in X$ *et* $x \neq y$ *implique* $(x, y) \in S$, *ou bien* $(y, x) \in S$.
*acyclique si et seulement si il n'existe pas* $x_1, x_2, \cdots, x_m \in X$ *pour lesquels* $x_1 S x_2, x_2 S x_3, \cdots, x_m S x_1$[10].

**Définition 1.6.3.** *Un ordre partiel est une relation binaire asymétrique et transitive.*

**Définition 1.6.4.** *Un ordre faible est une relation binaire asymétrique et négativement transitive.*

**Définition 1.6.5.** *Un ordre strict est une relation binaire asymétrique, négativement transitive et faiblement connexe.*

### Les structures de préférences

Nous adoptons la définition suivante pour une structure de préférence.

**Définition 1.6.6.** *Une structure de préférence* $S$ *est définie sur* $X$ *par une relation binaire* $P$ *asymétrique et une relation binaire* $I$ *réflexive et symétrique.* $P$ *et* $I$ *sont deux sous-ensembles disjoints de* $X \times X$.

$$xSy \text{ ssi } xPy \text{ ou } xIy \; (\; S = P \cup I \;).$$

Si une paire $(x, y)$ appartient à la relation $P$, alors "$x$ est préférable à $y$". Nous utilisons aussi la notation $x \succ y$, ou $y \prec x$.
Si une paire $(x, y)$ appartient à la relation $I$, alors "$x$ est indifférent à $y$". Nous utilisons aussi la notation $x \sim y$.
$S$ est interprété comme une préférence ou indifférence. La notation $(x, y) \in S$ se lit "$x$ est préféré ou indifférent à $y$". Généralement, $xSy$ est noté par $x \succeq y$ ou $y \preceq x$.
Si une paire $(x, y) \notin P$ et $\notin I$ alors $x$ et $y$ sont incomparables. La relation d'incomparabilité $R$ est défini par

$$R = \{(x, y) \mid (x, y) \in X \times X, (x, y) \notin P \text{ et } (y, x) \notin I\}.$$

**La structure de préordre complet** Cette structure est utilisée dans la plupart des modèles classiques d'économie. Dans ce cas, la relation de préférence $P$ est un ordre faible, et la relation d'indifférence $I$ est la non appartenance à la relation $P$, c'est-à-dire

$$I = \{(x, y) \mid (x, y) \in X \times X, (x, y) \notin Pet(y, x) \notin P\}.$$

S'il n'y pas d'ex aequo ($I = \emptyset$), $S$ est un ordre strict.

**La structure d'ordre partiel** Cette structure est utilisée lorsqu'on range du *meilleur* au *moins bon*, sans ex aequo, les éléments de certains sous-ensembles d'alternatives. Cette structure autorise les situations d'incomparabilité entre deux alternatives.

10. Les relations entre ces propriétés sont présentées dans [Tanguiane 91] et [Fishburn 78].

**La structure de préordre partiel** Cette structure est utilisée lorsqu'on range du *meilleur* au *moins bon*, avec d'éventuels ex aequo, les éléments de certains sous-ensembles d'alternatives. Cette structure autorise les situations d'incomparabilité et d'indifférence entre deux alternatives[11].

### 1.6.2 Procédures d'agrégation multicritère

#### L'agrégation des préférences

En termes vagues, l'agrégation est la conjonction de l'information afin d'avoir une représentation plus compacte. L'information devient alors plus adaptée au traitement et convient mieux à la perception humaine. Tout processus de description des données en terme d'indicateurs ou de caractéristiques générales, utilise directement ou indirectement des techniques d'agrégation [TANGUIANE 91].
L'agrégation des préférences est un cas particulier du problème général d'agrégation. Dans le cas de la décision multicritère, ce problème se pose sous forme d'agrégation de critères contradictoires (voir [VINCKE 82] pour une revue des travaux dans ce domaine). On distingue deux types d'agrégation de préférences :

- l'agrégation ordinale qui ne prend en compte que les ordres sur les alternatives lors de l'agrégation;
- l'agrégation cardinale si des performances ou des estimations quantitatives sont attribuées aux alternatives, et si le résultat de l'agrégation est déterminé par ces indicateurs.

#### Méthodes de surclassement

Les méthodes de surclassement visent à construire une ou plusieurs relations (binaires) de *surclassement* entre les alternatives. Ces relations indiquent dans quelle mesure on peut considérer qu'une action $x$ est "au moins aussi bonne" qu'une action $y$. Elles ont été exclusivement développées dans le cas d'un nombre fini d'alternatives [ROY 93].
Dans ce qui suit nous allons présenter deux exemples de méthodes de surclassement. La méthode majoritaire qui peut être considérée comme l'ancêtre des méthodes de surclassement, et la règle de prudence [ARROW 86], [KOHLER 78], [KRAMER 77].

Soit $X$ un ensemble de $N$ alternatives et $\succ_i$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ $p$ ordres stricts totaux sur $X$. Ces ordres correspondent aux classements de ces alternatives selon les $p$ critères.

**Méthode majoritaire** Cette méthode est due au marquis de Condorcet en 1785. C'est une méthode très utilisée et très étudiée. Elle est, avec la méthode de Borda, à

11. D'autres structures de préférences sont utilisées telles que la structure de quasi-ordre, la structure d'ordre d'intervalle pour prendre en compte la notion de seuil et les structures de préférences valuées pour prendre en compte la notion d'intensité de préférence. Pour plus de détails voir [VINCKE 89].

l'origine de la théorie du choix social [VANSNICK 86b][12].

Pour tout $x, y \in X$, nous notons par $P(x, y)$ le nombre de critères tel que $x \succ_i y$. Une alternative $x$ est préférée à une alternative $y$ si $P(x, y) > P(y, x)$. Une alternative $x$ de $X$ est un vainqueur de Condorcet[13] si

$$\forall y \in X \backslash \{x\},\ P(x, y) > P(y, x).$$

**Règle de prudence** L'idée de la prudence correspond au fait que le décideur est généralement intéressé par le choix de la solution la moins vulnérable possible. Une manière d'appréhender cette propriété est la prudence. Cette méthode consiste à choisir une solution $\bar{x}$ tel que le plus petit nombre de critères qui préfèrent $x$ à $y$ lorsque $y$ varie, est le plus grand possible. D'une manière plus formelle, on attribue, à chaque critère, un poids $\omega_j$ d'autant plus grand que le critère est important et on associe à chaque couple $(x, y)$ d'alternatives, le coefficient de surclassement suivant :

$$a(x, y) = \sum_{i : x \succ_i y} \omega_i.$$

Cet indice mesure en quelque sorte les arguments en faveur de l'affirmation "$x$ surclasse $y$ "[14] .

**Définition 1.6.7.** *(Arrow-Raynaud 86) Une alternative $\bar{x}$ est un choix prudent si et seulement si :*

$$\min_{y \in X} a(\bar{x}, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in X} a(x, y).$$

Remarquons que la méthode prudente obéit à un système d'axiomes cohérent et que son ensemble de choix coïncide avec celui de la méthode majoritaire si ce dernier est non vide [ARROW 86], [RAYNAUD 97].

### Théorie de l'utilité multiattribut

La théorie de l'utilité multiattribut repose sur l'axiome fondamental suivant : tout décideur essaye inconsciemment de maximiser un critère numérique qui agrège tous les points de vue à prendre en compte lors du processus de décision.
Cette théorie a d'abord prospéré dans le domaine économique avant d'être utilisée et développée dans le cadre de la théorie de la décision. Elle a surtout été développée dans le domaine incertain où les travaux de Keeney et Raiffa (1976) sont devenus une référence (cf. [FISHBURN 89]). Dans le cas déterministe, nous utilisons plutôt l'appellation de théorie de la valeur multiattribut [FISHBURN 78]. Cette approche est étudiée en détail dans le prochain chapitre.

12. Fisburn [FISHBURN 77] présente plusieurs extensions de la méthode de Condorcet.

13. Notons qu'il existe rarement un vainqueur de Condorcet dans les problèmes réels. ce phénomène est connu sous le nom de paradoxe de Condorcet. Pour plus de détails voir [GEHRLEIN 83].

14. Notons que d'autres manières de calculer ce coefficient de surclassement peuvent être utilisées (voir section 4.1.1)

### Méthodes interactives

Une méthode interactive repose sur un processus d'interaction entre le décideur et l'analyste. Ce processus est régi par un protocole d'interaction bien précis et progresse vers une prescription. A la différence des méthodes qui utilisent des procédures d'agrégation de critères donnant une réponse définitive au problème, ces méthodes ont pour but la construction d'une conviction personnelle à travers un processus d'apprentissage [ROY 93]. Ces méthodes qui représentent la quasi totalité des méthodes d'optimisation multicritère sont examinées en détail dans le chapitre suivant.

# Chapitre 2

# L'optimisation multicritère

Dans ce chapitre, nous traitons des méthodes d'optimisation multicritère afin de mieux cerner les hypothèses qui leur sont sous-jacentes; ainsi que leurs valeurs pragmatiques. Après la présentation des notations et des concepts de base, une première partie est consacrée à l'exposition des hypothèses formelles et les méthodes de construction du critère unique d'agrégation de l'approche classique. Dans une seconde partie, nous présentons la démarche interactive à travers quelques exemples de méthodes à caractère interactif. Nous nous penchons ensuite sur l'analyse des techniques utilisées, de leur validité et de leurs champs d'applications. Dans une troisième partie, nous nous interrogeons sur des questions tel que l'optimalité, la convergence des méthodes, et le problème du choix d'une méthode d'optimisation. Enfin, nous mettons en évidence quelques problèmes ouverts ou peu étudiés tels que l'absence de méthodes axiomatisées (en dehors de la théorie de la valeur multiattribut), le traitement de l'incommensurabilité des critères, et le manque de méthodes de surclassement pour les domaines continus. [1]

## 2.1 Le problème d'optimisation multicritère

### 2.1.1 Notations

Soit $(P)$ un problème d'optimisation en présence de critères multiples et contradictoires. Les $p$ critères à optimiser sont des fonctions explicites des variables de décision. Le domaine sur lequel les alternatives admissibles prennent leurs valeurs est continu.

Dans la suite de ce chapitre nous utilisons les notations suivantes

- $p$, le nombre de critères, $p \geq 3$,
- $x$, le vecteur des variables de décision,
- $Z_k(.)$, le $k^{ieme}$ critère, $Z_k : X \to R$ pour $k = 1, 2, ..., p$,

1. Notons que nous avons focalisé notre attention sur les problèmes d'optimisation multicritère déterministe. Ce choix est motivé par le fait que la plupart des problèmes que nous allons aborder se retrouvent aussi dans le cas non déterministe.

- $Z(.)$, le vecteur des fonctions critères, appelé vecteur critères par contraction,
- $X$, l'espace des solutions qui décrivent les décisions possibles,
- $\mathcal{Z}$, l'espace des vecteurs critères admissibles (l'ensemble des images des $x$ appartenant à $X$),
- $I$, l'ensemble des indices des critères, c'est-à-dire $I = \{1, 2, ..., p\}$,
- $I_k$ un ensemble d'indices de $k$ critères, ($I_k \subseteq I$).

Nous utilisons la notation $Z(x) \geq Z(y)$ comme abréviation de $Z_k(x) \geq Z_k(y)$ pour tout $k \in I$.

Le problème d'optimisation multicritère est formulé par :

$$\begin{array}{c} (P) \text{ Maximiser } Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), ..., Z_p(x)) \\ \text{s.c. } x \in X \end{array}$$

### 2.1.2 Concepts de base

#### Dominance

**Définition 2.1.1.** *Soient deux vecteurs critères $Z^1, Z^2 \in \mathcal{Z}$. On dit que $Z^1$ domine $Z^2$ si et seulement si $Z^1 \geq Z^2$ et $Z^1 \neq Z^2$ (i.e. $Z^1_k \geq Z^2_k$ pour tout $k \in I$, et $Z^1_k > Z^2_k$ pour au moins un $k$).*

Si $Z^1$ domine $Z^2$, alors $Z^1$ est au moins aussi bon que $Z^2$ sur tous les critères, et meilleur que lui sur au moins un critère.

#### Dominance forte

**Définition 2.1.2.** *Soient deux vecteurs critères $Z^1, Z^2 \in \mathcal{Z}$. On dit que $Z^1$ domine fortement $Z^2$ si et seulement si $Z^1 > Z^2$ (i.e. $Z^1_k > Z^2_k$ pour tout $k \in I$).*

Si $Z^1$ domine fortement $Z^2$, alors $Z^1$ est meilleur que $Z^2$ sur tous les critères.

#### Efficacité

**Définition 2.1.3.** *Une solution $\bar{x}$ est une solution efficace de $(P)$ si $\bar{x} \in X$ et s'il n'existe pas de $x \in X$ tel que $Z(x)$ domine $Z(\bar{x})$.*

Un point est efficace si son image par $Z$ est un vecteur critères non dominé. Le terme efficacité est aussi connu sous le nom de Pareto optimalité ou non infériorité[2].

2. Pour les différentes définitions de l'efficacité, voir [Gal 86a].

Une définition équivalente de l'efficacité est :

**Définition 2.1.4.** *Une solution $\bar{x}$ de $X$ est une solution efficace de $(P)$ si $x \in X$ et $Z_k(x) > Z_k(\bar{x})$, $k \in \{1, \cdots, p\}$, impliquent que $Z_r(x) < Z_r(\bar{x})$ pour au moins un indice $r \in \{1, \cdots, p\}$, $r \neq k$.*

A partir d'un point efficace, il est impossible d'augmenter la valeur d'un des critères sans diminuer la valeur d'au moins un autre critère.

### Efficacité faible

**Définition 2.1.5.** *Une solution $\bar{x}$ de $X$ est une solution faiblement efficace s'il n'existe pas de $x \in X$ tel que $Z(x) > Z(\bar{x})$.*

Une solution est faiblement efficace si son vecteur critère n'est pas fortement dominé.

### Efficacité forte

**Définition 2.1.6.** *Une solution $\bar{x}$ est une solution fortement efficace si $\bar{x} \in X$ et s'il n'existe pas de $x \in X$ tel que $x \neq \bar{x}$ et $Z(x) \geq Z(\bar{x})$.*

Une solution $x$ est fortement efficace s'il n'existe pas d'autre solution telle que le vecteur critères, qui lui est associé, soit aussi bon que celui de $x$. Remarquons que l'efficacité forte implique l'efficacité qui implique à son tour l'efficacité faible[3].

### Le point idéal

**Définition 2.1.7.** *Le point idéal est, dans $R^p$, le point de cordonnées $(Z_1^*, \cdots, Z_p^*)$, avec*

$$Z_k^* = \max_{x \in X} Z_k(x), \quad k = 1, ..., p.$$

On notera par $X_k^*$ l'ensemble des points $x_k^*$ qui maximisent $Z_k(.)$.

### Le point anti-idéal

**Définition 2.1.8.** *Le point anti-idéal est, dans $R^p$, le point de cordonnées $(Z_{1*}, \cdots, Z_{p*})$, avec*

$$Z_{k*} = \min_{x \in X} Z_k(x), \quad k = 1, ..., p.$$

3. Pour une étude détaillée des relations entre ces différentes notions, voir [Vangeldere 77a], [Vangeldere 77b] et [Lowe 84].

#### Le point nadir

Nous appelons *matrice de gains*, une matrice dont les colonnes représentent les performances de $p$ points $x_1^*, \cdots, x_p^*$.

**Définition 2.1.9.** *Le point nadir*[4] *est, dans* $R^p$*, le point de cordonnées* $(Z_1^{nad}, \cdots, Z_p^{nad})$*, avec*

$$Z_k^{nad} = \min_{j \in I} Z_k(x_j^*), \quad k = 1, ..., p.$$

## 2.2 Théorie de la valeur multiattribut

Cette théorie repose sur l'idée que le décideur cherche, d'une manière implicite, à maximiser une fonction qui agrège tous les points de vue pris en compte lors de la décision. Elle consiste donc à étudier les axiomes que doit vérifier la structure de préférence pour être représentée par une fonction ayant une forme analytique donnée, à construire les fonctions et à estimer les paramètres qui interviennent dans la forme utilisée [VINCKE 89].

#### Les Fonctions de valeur

Une fonction $v$, qui associe un nombre réel $v(x)$ à chaque point $x$ d'un espace d'évaluation[5], est dite une *fonction de valeur* représentant une structure de préférence du décideur si

$$x' \sim x'' \Longleftrightarrow v(x') = v(x''),$$

$$x' \succ x'' \Longleftrightarrow v(x') > v(x'').$$

Remarquons que la structure de préférence du décideur $(P,\ I)$ est une structure de préordre total sur l'ensemble des alternatives.
Si $v$ est une fonction de valeur reflétant les préférences du décideur, alors le problème d'optimisation multicrière peut être mis sous la forme d'un problème d'optimisation standard : trouver $x \in X$ qui maximise $v[Z(x)]$.

La théorie de la valeur multiattribut consiste donc à définir un critère de synthèse $V$ en construisant une fonction de valeur $v$ telle que :

$$V(x) = v[Z_1(x), Z_2(x), \cdots, Z_p(x)].$$

4. D'autres définitions du point nadir sont proposés. Pour plus de détails, voir [ISERMANN 87] et [REEVES 88].

5. Dans notre cas, l'espace d'évaluation est $\mathcal{Z}$.

Une des formes les plus simples et largement utilisées de la fonction $v$ est la forme additive[6].

### La fonction de valeur additive

La fonction de valeur additive revient à utiliser le modèle suivant pour représenter les préférences du décideur :

$$V(x) = \sum_{i=1}^{p} v_i(Z_i(x)).$$

Les $v_i$ (fonctions de valeur des attributs $Z_i$) sont des fonctions monotones strictement croissantes. Une condition nécessaire pour pouvoir utiliser cette forme est l'indépendance au sens des préférences des critères.

### Indépendances au sens des préférences

**Définition 2.2.1.** *Un ensemble d'attributs $Y$ est indépendant (au sens des préférences) de son complémentaire $T$ si considérant quatre alternatives telles que :*
$Z_i(y) = Z_i(t),\ \forall i \in T,$
$Z_i(y') = Z_i(t'),\ \forall i \in T,$
$Z_i(y) = Z_i(y'),\ \forall i \in Y,$
$Z_i(t) = Z_i(t'),\ \forall i \in Y,$
*alors:*
$y \succ$ *ou* $\sim t \Rightarrow y' \succ$ *ou* $\sim t'.$

**Définition 2.2.2.** *Les attributs $Z_1, \cdots, Z_p$ sont mutuellement indépendants (au sens des préférences) si chaque sous-ensemble de ces attributs est indépendant au sens des préférences de son complémentaire.*

Dans le cas où l'ensemble des alternatives est *continu*[7] (c'est le cas de notre étude) et le nombre des attributs est supérieur à trois, alors l'indépendance mutuelle au sens de préférence est une condition nécessaire et suffisante pour le modèle additif. Il est à noter que toute transformation affine de la fonction de valeur reflète aussi la structure de préférence du décideur.

---

6. Notons que le goal programming classique utilise une fonction de valeur de forme additive. D'autres relations entre le goal programming et les fonctions de valeurs sont étudiées dans [Romero 85].

7. Par le terme *continu*, on désigne certaines propriétés topologiques de l'ensemble $X$ comme celle d'ensemble archimédien. Ces propriétés sont présentées en détails dans [Debreu 59], [Fishburn 78] et [Fishburn 68].

### Méthodes de construction de la fonction additive

Pour construire effectivement la fonction de valeur dans le cas additif, on utilise en général la forme suivante:

$$V(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i(Z_i(x)),$$

où $V$ et $v_i$, $i = 1, \cdots, p$, varient entre 0 et 1,

$$v_i(Z_i^*) = 1 \; et \; v_i(Z_{i*}) = 0, \; et$$

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \; \lambda_i > 0$$

.

L'article de Fishburn [FISHBURN 67] présente 24 méthodes de construction classées selon qu'elles soient applicables au cas discret ou au cas continu, et selon les types des questions posées au décideur.
Comme exemple de méthodes de construction, nous exposons une méthode d'estimation due à Keeney et Raiffa (76) afin de mettre en évidence, d'une part, l'utilité des axiomes dans la phase d'estimation, et d'autre par, la difficulté de mise en oeuvre et l'aspect approximatif d'une telle procédure (cf. [KEENEY 76], chapitre 3). Cette méthode se compose de deux étapes : l'estimation des fonctions de valeur $v_i$, puis celle des constantes d'échelles $\lambda_i$.

**Estimation des $v_i$** Choisir deux alternatives $x$ et $y$ telles que
$Z(x) = (Z'_1, \cdots, Z'_{i-1}, Z_i, Z'_{i+1}, \cdots, Z'_p)$,
$Z(y) = (Z"_1, \cdots, Z"_{i-1}, Z_i, Z"_{i+1}, \cdots, Z"_p)$, et
$x \succ y$ pour toute valeur de $Z_i$ (possible grâce à l'indépendance au sens des préférences).

Ensuite, on demande au décideur de déterminer la valeur de $Z_i$ telle que
$x \sim (Z"_1, \cdots, Z_i^*, \cdots, Z"_p)$, et
$y \sim (Z'_1, \cdots, Z_{i*}, \cdots, Z'_p)$.

S'il parvient à évaluer $Z_i$, alors le modèle additif implique que $v_i(Z_i) = \frac{1}{2}$.
Par des raisonnements analogues on déduit les antécédents des valeurs $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \cdots$, pour la fonction $v_i$.

**Estimation des $\lambda_i$** L'estimation des constances d'échelles $\lambda_i$ s'effectue en deux étapes. Dans une première étape, on construit un préordre sur les $\lambda_i$ cohérent avec les préférences du décideur. Soit l'ensemble des alternatives $x^i$ telle que $Z(x^i) = (Z_{1*}, \cdots, Z_i^*, \cdots, Z_{p*})$, $i = 1, \cdots, p$. On demande au décideur d'ordonner ces alternatives selon ses préférences; on en déduit un préordre sur les $\lambda_i$. En effet,

$$x^i \succ (resp. \sim) x^j \Leftrightarrow \lambda_i > (resp. =) \lambda_j.$$

Dans une seconde étape, on estime les taux de substitution $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}$. Pour cela, on demande au décideur de répondre à des questions du type : "Soit une alternative $y^j$ telle que $Z(y^j) = (Z_{1*}, \cdots, Z_j(y^j), \cdots, Z_{p*})$, pouvez-vous déterminer $v_j[Z_j(y^j)]$ de sorte que $y^j$ soit indifférent à $x^i$?". La réponse à cette question permet d'estimer $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}$. En effet, $y^j \sim x^i \Leftrightarrow \lambda_i = \lambda_j v_j[Z_j(y^j)]$. Il suffit d'obtenir $(n \Leftrightarrow 1)$ jugements de ce type pour déterminer les $\lambda_i$ compte tenu du fait que la somme de ces coefficients est égale à 1.

Dans la pratique, il est recommandé de s'assurer de la cohérence des réponses en utilisant par exemple le préordre de la première étape. Keeney et Raiffa (76) proposent une méthode d'estimation plus naturelle en utilisant la hiérarchie des objectifs du problème, en contre partie la procédure devient plus complexe.

**Commentaires**

- La théorie de valeur multiattribut est un moyen de prédiction, cependant elle n'est pas un moyen d'explication. Les études expérimentales ne montrent pas que les décideurs utilisent réellement une telle fonction de valeur [Zeleny 82].
- Cette théorie suppose une comparabilité totale de toutes les paires d'alternatives, hypothèse largement contestée [Rivett 75].
- La transitivité des préférences supposée par ce modèle est mise en difficulté par différents contre-exemples [Fishburn 68],[Tversky 69],[Luce 56].
- L'étape de vérification des conditions d'indépendance est très difficile en pratique. Pour cette raison plusieurs analystes supposent simplement que certaines formes de décomposition sont valables pour des situations données, et n'essaient pas de vérifier leurs validité.
- Lorsque le nombre des attributs est élevé, la décomposition devient complexe et exige du décideur des capacités qu'il n'a pas. En effet l'estimation des fonctions de valeurs partielles et des constantes d'échelles devient une tâche colossale (dans un modèle quasi-additive avec 10 attributs, on doit estimer 10 fonctions de valeur et 1023 constantes) [Zeleny 82].

## 2.3 Méthodes interactives

Avec le développement des moyens et des concepts informatiques, l'interactivité est devenue l'outil de prédilection dans la résolution des problèmes d'optimisation multicritère. Ceci s'est traduit par le développement d'une vaste panoplie de méthodes interactives. Dans cette partie nous présentons la structure générale de ce type de méthodes, ensuite nous exposons en détail la méthode du point de référence [Wierczbicki 82] et la méthode de Steuer-Choo [Steuer 83]. Ces méthodes nous semblent représentatives de l'ensemble des méthodes *purement* interactives[8].

8. Par opposition aux méthodes mixtes (voir section suivante).

### 2.3.1 Modèle interactif

Une méthode interactive est une méthode fondée sur un dialogue entre le décideur et l'analyste ou l'ordinateur. Ce dialogue s'articule sur des propositions devant lesquelles le décideur est supposé pouvoir réagir. Ces propositions portent généralement sur la comparaison des éléments d'un sous-ensemble d'alternatives (une alternative ou une petite liste d'alternatives). Le décideur les déclare vraies ou fausses. Les limitations cognitives du décideur imposent des restrictions au nombre des propositions qui doit être le plus petit possible. Le processus de recherche de la solution est donc contraint à être local.

Chaque méthode interactive est composée de plusieurs itérations. Chaque itération comprend une étape de calcul et une étape de dialogue [Roy 93].

1. **une étape de calcul** dans laquelle on construit des propositions courantes en mettant en oeuvre des techniques d'agrégation et (ou) d'échantillonnage, compte tenu des informations préférentielles obtenues lors des étapes de dialogue précédentes. Les techniques de calcul varient selon qu'on présente une alternative ou une liste d'alternatives. Chaque méthode fait appel à certain nombre de paramètres qui seront réactualisés à la fin de chaque étape de dialogue. Deux types de paramètres sont fréquemment utilisés de façon non exclusive:

   - un vecteur $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)$, les $\lambda_i$ étant appelés coefficients d'importance des $p$ fonctions critères;
   - des vecteurs de performances ayant des significations particulières (comme le vecteur des performances de référence correspondant à des profils jugés satisfaisants $Z^{ref} = (Z_1^{ref}, Z_2^{ref}, \cdots, Z_p^{ref})$).

   Ces paramètres sont utilisés dans des fonctions d'agrégations, que l'on qualifie de temporaires, pour calculer la (les) proposition(s) qui sont généralement sur des points efficaces ou faiblement efficaces. Les fonctions d'agrégation les plus employées sont :

   - la somme pondérée (particulièrement utilisée dans le cas linéaire),

   $$s(Z, \lambda) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Z_i \ ;$$

   - la norme pondérée augmentée de Tchebychev qui peut être utilisée dans la quasi-totalité des cas,

   $$s(Z, (\lambda, Z^{ref})) = \max_{i=1,\cdots,p} \{\mid \lambda_i(Z_i^{ref} \Leftrightarrow Z_i) \mid\} + \rho \sum_{i=1}^{p} \mid \lambda_i(Z_i^{ref} \Leftrightarrow Z_i) \mid .$$

2. **une étape de dialogue** qui consiste en :
   - une phase d'explication qui présente au décideur les propositions qui lui sont faites et les conséquences de certains jugements qu'il a émis dans les étapes précédentes.
   - une phase d'interrogation qui consiste à recueillir les réactions du décideur face à la proposition qui lui a été présentée dans la phase d'explication. Roy et Bouyssou (1993) ont essayé de cerner les informations qui sont généralement demandées au décideur pendant cette phase. Dans le cas des méthodes où une seule alternative est présentée à chaque itération, on demande au décideur de :
   (1) comparer la proposition courante avec quelques alternatives de son voisinage,
   (2) préciser sur quels critères les performances de la proposition sont insatisfaisantes,
   (3) spécifier un vecteur de performances qui le satisfait.
   Dans le cas des méthodes où plusieurs alternatives sont présentées simultanément, on demande au décideur :
   (1) d'indiquer l'alternative qu'il préfère,
   (2) de ranger les alternatives en préordre complet ou partiel.

### 2.3.2 Présentation et analyse de quelques méthodes interactives

#### Méthodes du point de référence

Plusieurs méthodes utilisant la notion de point de référence (ou des niveaux d'aspiration) ont été développées [CHARNES 77] [LOTFI 97] [KORHONEN 86]. En particulier, Wierzbicki [WIERCZBICKI 82] propose l'utilisation de points de référence de la manière suivante. On demande au décideur de fixer des niveaux d'aspiration et on essaie de trouver une solution réalisable qui s'en rapproche au mieux. Une fonction dite "scalarisante" est utilisée pour mesurer la proximité entre le point de référence et les alternatives. Cette méthode est résumée dans les étapes suivantes.

**Etape 0 :** Présenter au décideur quelques informations préliminaires telles que la matrice des gains, le point idéal, le point nadir; puis choisir un vecteur poids $\lambda$ et poser $h = 1$.
**Etape 1 :** Demander au décideur de fixer ses niveaux d'aspiration $\bar{Z}^h = (\bar{Z}_1^h, \cdots, \bar{Z}_p^h)$.
**Etape 2:** Soit $Z^h$ la solution qui dans $\mathcal{Z}$ minimise la fonction $s(Z, \bar{Z}, \lambda)$. La fonction est choisie de telle sorte que la solution obtenue soit efficace. Si le décideur est satisfait avec $Z^h$, alors on arrête la recherche; sinon, faire $h = h + 1$ et reprendre à l'étape 1.

#### Commentaires

– Le paramètre principal de cette méthode est le vecteur de référence.

– L'information demandée est de nature quantitative.

- Cette méthode peut être appliquée à tous les types de modèles (linéaire, non linéaire) avec un petit nombre de critères.

- C'est une méthode non structurée, qui explore librement l'ensemble des alternatives efficaces.

### Méthode de Steuer-Choo

Cette méthode présente des échantillons prélevés dans des ensembles de plus en plus petits de solutions efficaces. Ces échantillons sont constitués par des solutions représentatives, calculées en utilisant une distance de Tchebychev pondérée augmentée et parmi lesquelles le décideur doit désigner celle qu'il préfère. On peut résumer ses étapes de la manière suivante.

**Etape 0 :** Soit $\Lambda^h = \Lambda$. Choisir le paramètre de réduction de l'ensemble des vecteurs poids, le nombre maximum d'itérations et la taille de l'échantillon à présenter à chaque itération au décideur.
**Etape 1 :** Identifier un échantillon de vecteurs critères non dominés dont les vecteurs poids appartiennent à $\Lambda^h$ (en utilisant des techniques de calcul aléatoire et de "filtrage").
**Etape 2 :** Présenter ces solutions au décideur qui choisit entre elles la solution qu'il préfére; réduire l'ensemble des vecteurs poids à un voisinage du vecteur poids correspondant à la solution préférée, noté $\Lambda^{h+1}$.
**Etape 3 :** Si le décideur est satisfait ou si le nombre d'itérations dépasse le nombre maxium, arrêter la recherche. Sinon, poser $h = h + 1$ et reprendre le processus à l'étape 1[9].

### Commentaires

- Cette méthode peut être appliquée à tous les types de modèles (linéaire, non linéaire, variables entières).

- L'information demandée est de nature qualitative.

- C'est une méthode semi-structurée fondée sur un algorithme de réduction de l'ensemble des vecteurs poids.

- Elle permet une bonne représentativité pendant l'étape d'échantillonnage, mais engendre de nombreux calculs.

- Elle utilise des paramètres déterminés d'une manière assez arbitraire (le nombre maximum d'itérations, le taux de réduction de l'ensemble des vecteurs poids).

9. Pour plus de détails voir [Steuer 83].

## 2.4 Méthodes mixtes

Nous appelons méthode mixte toute méthode qui utilise un processus interactif en s'appuyant sur un modèle de préférence bien défini. Nous distinguons deux classes de méthodes mixtes : les méthodes interactives utilisant un modèle d'utilité, et les méthodes interactives utilisant un modèle de surclassement.

### 2.4.1 Méthodes interactives utilisant un modèle d'utilité

Deux méthodes, qui nous semblent représentatives de cette classe, sont la méthode de Zionts-Wallenius (76, 83) qui utilise une fonction d'utilité implicite et la méthode de Lagrèze-Méziani-Slowinski (87) qui utilise une fonction d'utilité explicite.

#### La méthode de Zionts-Wallenuis

Cette méthode a été introduite par Zionts et Wallenius (1976) dans le cas linéaire (cf. [Zionts 76]) et a fait l'objet de plusieurs extensions [Zionts 83] [Roy 92]. La méthode de Zionts-Wallenius converge vers un point extrême efficace maximisant une fonction d'utilité $U(.)$ supposée pseudo-concave. Cette fonction est sensée représenter la structure de préférence du décideur.
A chaque itération, la méthode opère en demandant au décideur de comparer la proposition courante (un point extrême) aux points extrêmes qui lui sont adjacents. A partir des informations fournies, l'analyse élimine des portions de l'espace des vecteurs poids $\Lambda = \{\lambda \in R^p \mid \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1\}$. Le processus s'arrête lorsque $\Lambda$ est réduit à un domaine assez petit pour qu'une solution soit identifiée. Dans ce qui suit, nous présentons une version simplifiée.

**Etape 0 :** Soient $\Lambda^h = \Lambda$ et $U(.) = <\lambda, Z(.)>$ [10] une approximation locale de la fonction d'utilité. Choisir une solution initiale $x^h$( point extrême efficace) dont le vecteur critères est $Z^h$.
**Etape 1 :** Demander au décideur de comparer la solution courante aux différents points extrêmes efficaces qui lui sont adjacents et ayant des vecteurs poids appartenant à $\Lambda^h$. Trois réponses possibles sont proposées au décideur

1. Oui (le vecteur critère du point extrême adjacent est préféré).

2. Non (le vecteur critère du point courant est préféré).

3. Je ne sais pas (le décideur est incapable d'énoncer une préférence).

S'il y a aucune réponse positive (oui), arrêter l'algorithme. La solution courante est la solution de compromis.
**Etape 2 :** traduire les réponses du décideur en inéquations. Si $Z$ désigne un vecteur critère adjacent, les inéquations sont définies par

1. $<\lambda, Z> \Leftrightarrow <\lambda, Z^h> > 0$ pour une réponse oui,

10. $<\lambda, Z(x)>$ est le produit scalaire des vecteurs $\lambda$ et $Z(x)$.

2. $<\lambda, Z> \Leftrightarrow <\lambda, Z^h> < 0$ pour une réponse non.

En ajoutant ces inéquations à $\Lambda^h$, on obtient un espace de vecteurs poids $\Lambda^{h+1}$ plus réduit. Si $\Lambda^{h+1}$ est vide, éliminer, une à une, les plus anciennes inéquations, jusqu'à ce que $\Lambda^{h+1}$ soit non vide.
**Etape 3 :** Choisir une solution efficace ayant un vecteur poids dans $\Lambda^{h+1}$. Poser $h = h+1$, et aller à l'étape 1. L'algorithme s'arrête lorsque la solution courante n'a plus de solutions adjacentes dont les vecteurs poids sont dans $\Lambda^h$.

### Commentaires

- La méthode a été conçue dans le cas de la programmation linéaire multiobjectif, et elle a été étendue au cas non linéaire et à la programmation en nombre entiers.
- L'information demandée au décideur est généralement de nature qualitative : des comparaisons par paires entre la solution proposée et les sommets adjacents.
- C'est une méthode structurée qui possède une convergence algorithmique.
- L'ensemble des solutions susceptibles d'être choisies est limité aux sommets du domaine réalisable, ce qui constitue une restriction importante quand on sait qu'il existe des solutions optimales au sens de la fonction d'utilité qui ne sont pas des sommets.
- L'élimination des anciennes réponses, dans les cas d'incohérence des réponses, ne peut-être justifiée rigoureusement.

### Méthode de Jacquet-Lagrèze, Meziani et Slowinski

Cette méthode construit une fonction d'utilité additive sur la base de jugements statués sur un échantillon de solutions. Cette fonction est ensuite utilisée pour comparer les solutions réalisables (cf. [JACQUET-LAGRÈZE 87]). Pour construire cette fonction, on utilise une méthode de régression ordinale [JACQUET-LAGRÈZE 82].

**Etape 0 :** Déterminer un échantillon représentatif des points faiblement efficaces en utilisant la procédure de Choo et Atkins [CHOO 80].
**Etape 1:** Supposer que la fonction d'utilité du décideur est additive, $U(Z) = \sum_i u_i(Z_i)$ et estimer des fonctions d'utilité partielles $u_i$ $(i = 1, \cdots p)$ par des fonctions linéaires par morceaux.
Cette estimation est effectuée en utilisant la méthode UTA [JACQUET-LAGRÈZE 82]. Plus précisément, pour estimer les $u_i(Z_i)$, on demande au décideur de présenter un préodre sur l'échantillon des points faiblement efficaces. On recherche ensuite, la fonction additive globale, définie sur tout le domaine des solutions réalisables, qui traduit au *mieux* ses préférences par paires sur l'échantillon, en utilisant un modèle de régression ordinale.
**Etape 2 :** Dans le cas où plusieurs fonctions d'utilité vérifient ce modèle, effectuer une

étude de sensibilité pour choisir $U$. Enfin, déterminer une solution qui maximise la fonction $U(.)$ sur $\mathcal{Z}$.

**Commentaires**

- Cette méthode a été développée dans le cas linéaire, mais elle peut-être étendue à tous les types de problèmes.
- Elle est adaptée aux programmes linéaires de grande taille.
- Elle permet de trouver des solutions différentes des sommets du domaine réalisable dans le cas linéaire.
- L'information demandée au décideur est de nature qualitative (ranger un échantillon de solution).
- Cette méthode est basée sur une technique d'extrapolation qui suppose que la fonction d'utilité estimée en utilisant l'échantillon des solutions choisi est valable dans tout l'ensemble des solutions.
- Le modèle de décomposition additif de la fonction d'utilité suppose que les conditions d'indépendance préférentielle et de transitivité sont satisfaites. Les auteurs proposent d'utiliser d'autres modèles non additifs dans le cas de non vérification de ces conditions.

### 2.4.2 Méthodes interactives utilisant un modèle de surclassement

Ces dernières années, de nouvelles méthodes interactives utilisant des relations de surclassement ont été développées telles que la méthode de Slowinski [Slowinski 90], la méthode LBS [Jaszkiewitcz 95], et la méthode de Ferhat-M'stilli [Ferhat 96][11]. Nous exposons comme exemple celle proposée par Slowinski(1990).

**Méthode de Slowinski (90)**

Cette méthode interactive utilise la notion de surclassement pour modéliser les préférences temporaires du décideur dans une première phase; et un processus interactif pour explorer l'ensemble efficace dans une seconde phase.

**Etape 0 :** Déterminer un échantillon représentatif des points efficaces en utilisant une technique de filtrage (cf. [Steuer 86]).
**Etape 1 :** Construire une relation de surclassement floue (Electre III) sur cet échantillon; établir deux préordres complets $\bar{P}$ et $\underline{P}$ sur ce dernier en utilisant les techniques

11. Un recueil de ces méthodes est présenté dans [Jaszkiewicz 97].

de distillation descendante et ascendante[12].
**Etape 2 :** Utiliser la méthode de régression ordinale en vue d'établir deux fonctions d'agrégation temporaires $\bar{s}'$ et $\underline{s}'$ *aussi compatibles que possible* avec $\bar{P}$ et $\underline{P}$.
**Etape 3:** Utiliser ces deux fonctions d'agrégation temporaire afin de délimiter un sous-ensemble de points efficaces *de plus grand intêret* pour le décideur. Explorer ce sous-ensemble. Différentes méthodes d'exploration peuvent être utilisées telles que la méthode de Steuer et Choo (83). Dans le cas d'insatisfaction du décideur, sauvegarder certains points (identifiés lors de l'exploration) jugés intéressants et revenir à l'étape 1 afin de réduire ce sous-ensemble.

**Commentaires**

- Cette méthode peut-être appliquée dans tous les cas.
- C'est une méthode semi-structurée qui joint l'utilisation d'un modèle de surclassement et les techniques de régression ordinale.
- Elle est appropriée au cas où le nombre de critères est élevé, étant donné qu'elle utilise une méthode de surclassement (Electre III) lors de la réduction de l'ensemble des points efficaces.
- Le mérite de cette nouvelle famille de méthodes (les méthodes de surclassement pour la programmation multicritère) est d'être assez structurées sans utiliser un modèle de fonction d'utilité.

## 2.5 Evaluation des méthodes interactives

### 2.5.1 Trois conceptions de l'approche interactive

Nous constatons à partir du recueil des méthodes présentées qu'il existe trois conceptions différentes de l'approche interactive :

- les méthodes non structurées qui ont pour objectif principal l'exploration libre de l'ensemble des points efficaces, en espérant découvrir une solution satisfaisante pendant ce processus. A notre avis, ces méthodes deviennent inefficaces dans les cas de problèmes complexes.
- les méthodes semi-structurées qui ont pour objectif la recherche d'une solution en utilisant une exploration guidée de l'ensemble des points efficaces. Ces méthodes utilisent des règles plus au moins arbitraires pour orienter cette recherche.
- les méthodes structurées qui ont pour objectif la recherche d'une solution qui satisfait certaines conditions que le décideur et l'analyste croient être légitimes et adéquates pour la situation étudiée. La plupart des méthodes structurées reposent sur l'hypothèse d'existence d'une fonction d'utilité implicite.

12. Pour plus de détails sur ces deux étapes, voir [Roy 93].

### 2.5.2 Evaluation technique et classification

#### Les critères d'évaluation

Pour évaluer les procédures interactives, Steuer (1986) propose d'utiliser les caractéristiques suivantes :
1. Est-ce que l'algorithme présente une solution nouvelle, ou un groupe de solutions nouvelles à chaque itération ?
2. Est-ce que l'algorithme pose le même type de questions à chaque itération ou change les questions suivant les différentes itérations ?
3. Est-ce que le décideur doit évaluer des poids, spécifier des relaxations de conditions, évaluer des taux de substitution ou effectuer des comparaisons par paire ?
4. Est-ce que c'est un algorithme *ad hoc*?
5. Est-ce que l'algorithme exige des hypothèses sur la structure de préférence du décideur ?
6. Est-ce que l'algorithme admet une convergence algorithmique ou *psychologique*?
7. Est-ce que l'algorithme demande un temps de calcul important ?
8. Est-ce que l'algorithme est applicable dans le cas linéaire, non linéaire, entier ?

#### Une classification technique

Nous présentons dans la suite une classification des méthodes interactives selon la technique utilisée (cf. [Steuer 86]).

#### Méthodes utilisant un algorithme de réduction du domaine réalisable

Les méthodes telles que STEM [Benayoun 71] et la méthode de contraintes utilisent des algorithmes de réduction du domaine réalisable $X$ qui consistent à ajouter des contraintes du type $Z_i(x) \geq \epsilon_i$ au système de contraintes définissant $X$ et à résoudre le problème d'optimisation dans un domaine de plus en plus contraint. Évidemment ces algorithmes sont de type *ad hoc*.

#### Méthodes utilisant un algorithme de recherche en ligne

Une méthode très connue qui est représentative de ce type de méthodes est celle de Geoffrion-Dyer-Feinberg [Geoffrion 72]. Le principe de ces méthodes est de choisir une solution initiale réalisable $x^0$, et d'essayer de l'améliorer à chaque itération en utilisant, par exemple, une fonction d'utilité. La direction du gradient de cette fonction peut être alors utilisée comme direction d'amélioration. Une nouvelle solution est ainsi déterminée. Cette dernière est améliorée de la même façon. Un autre exemple est la méthode des points d'ancrages [Arbel 94] fondée sur les techniques de points intérieurs.

#### Méthodes utilisant un algorithme de réduction de l'espace des vecteurs poids

Ce type d'algorithme est largement utilisé en optimisation linéaire multiobjectif où le problème (P) peut se ramener à un problème de programmation paramétrique

$$\max_{x \in X} \lambda Z(x)$$

$$avec\, \Lambda = \{\lambda \in R^p \mid \lambda_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1\}.$$

La procédure consiste donc à réduire l'espace des vecteurs critères $\Lambda$ à chaque itération $k$ (construire une suite de $\Lambda^k$ telle que $\Lambda^{k+1} \subset \Lambda^k \subset \Lambda$). Des exemples de ces méthodes sont celles de Zionts-Wallenius, et de Steuer-Choo.

#### Méthodes utilisant un algorithme de contraction du cône des critères

Ce type d'algorithme est utilisé en optimisation linéaire multiobjectif. Dans le cas linéaire, le cône des critères est défini par

$$\mathcal{C} = \{\textstyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i \mid \lambda_i \geq 0\}$$

$C_i$ étant les gradients des critères ($Z_i(x) = C_i x$).

L'algorithme consiste donc à contracter ce cône à chaque itération à un sous-ensemble de plus *grand intérêt* (construire une suite de $C^k$ tel que $C^{k+1} \subset C^k \subset C$)[13]. Un exemple de cette classe est la méthode d'intervalles de poids [ Steuer 76].

### 2.5.3 Evaluation expérimentale

L'évaluation expérimentale n'a de sens que dans le contexte de l'expérience. Vu la variété des contextes expérimentaux, il est difficile de dégager de véritables conclusions. La majorité des études d'évaluation expérimentales [Wallenius 75] [Buchanan 94] se sont déroulées dans le cadre d'études de laboratoire (des étudiants jouant le rôle de décideurs) sur des cas de programmation linéaire multiobjectif [Aksoy 96].
Les critères d'évaluations généralement utilisés dans de telles études sont :
- la confiance dans la solution choisie,
- la facilité d'utilisation,
- la facilité de compréhension,
- l'habilité à capturer les préférences,
- le nombre d'itérations,
- le temps de résolution.

Il faut remarquer que des critères de jugement tels que la facilité d'utilisation et de compréhension peuvent facilement être biaisés par le support de la méthode (le logiciel). Il est donc légitime de s'interroger sur la fiabilité de ces expériences. Néanmoins, les constations générales suivantes peuvent être avancées (cf. [Olson 92]) :

– les méthodes formelles sont généralement préférées aux méthodes *ad hoc*,

13. Pour plus de détails sur les techniques de contraction, voir [Steuer 86].

– les décideurs préférent les méthodes simples et compréhensibles,

– la préférence pour la méthode à appliquer dépend des spécificités du problème de décision à étudier,

– les décideurs souhaitent généralement contrôler le processus de décision,

– les méthodes qui requièrent des informations quantitatives pour la phase de calcul sont difficiles à appliquer [WALLENIUS 75].

## 2.6 L'approche axiomatique en optimisation multicritère : quelques réflexions générales?

### 2.6.1 L'analyse axiomatique, une nécessité

L'analyse axiomatique permet la caractérisation des procédures multicritères. Elle aide ainsi l'analyste dans le choix des méthodes à appliquer [BOUYSSOU 93]. Une méthode est décrite par un ensemble de propriétés qui la caractérisent. La caractérisation axiomatique d'une procédure est non unique. Dans ce sens, Pirlot (1995) parle d'axiomes normatifs qui traduisent des règles de comportement rationnel et des axiomes descriptifs qui présentent la manière avec laquelle la procédure fonctionne [PIRLOT 94] .
Les avantages d'une telle approche, selon Pirlot, sont :
- de clarifier ou expliciter les hypothèses de base des méthodes existantes,
- d'aider à améliorer les méthodes existantes,
- de stimuler la production de nouvelles méthodes avec des domaines d'application bien définis.

Outre cela, le choix de la méthode, est un problème qui peut-être résolu par l'approche axiomatique. Dans ce sens Arrow et Raynaud [ARROW 86] [PASQUIER-DORTHE 90] proposent de construire une batterie d'axiomes, parmi lesquels on peut choisir pour une situation donnée (problème-décideur), un système d'axiomes cohérents qui traduisent les hypothèses de base d'une telle situation. Ensuite, nous utilisons directement ou nous construisons algorithmiquement la méthode qui vérifie ces axiomes.

### 2.6.2 L'approche axiomatique en optimisation multicritère

L'approche axiomatique est presque inexistante dans le domaine de l'optimisation multicritère, exception faite pour la théorie de la valeur multiattribut. Ce sont plutôt les méthodes d'essai-erreur et l'approche par apprentissage qui sont prônées par les chercheurs dans ce domaine.

### Le problème de convergence des méthodes d'optimisation

La convergence des méthodes d'optimisation multicritère est-il un vrai ou un faux problème? Dans l'approche d'apprentissage, il est traité comme un faux problème en avançant comme argument l'instabilité de la structure de préférences du décideur qui peut évoluer pendant le processus de résolution du problème. Dans ce cas, la convergence formelle est substituée par la notion la convergence *psychologique* ou d'auto-conviction. Cependant, les expériences menées avec de telles méthodes mettent en évidence certains phénomènes, tels que les phénomènes de lassitude, de point d'ancrage, ainsi que l'influence du protocole d'interaction sur le résultat [French 84] [Korhonen 96]. Il est donc légitime de s'interroger sur l'aspect arbitraire qui entache les décisions obtenues avec de telles procédures. Certes les études de sensibilité peuvent abaisser cet aspect arbitraire, mais ne peuvent pas être un vrai remède. Selon Roy et Bouyssou (93), ces méthodes sont souvent mal adaptées dans le cas où l'outil multicritère est utilisé comme un moyen de communication et d'argumentation dans un processus de décision complexe et conflictuel. Les problèmes de décision publique en sont des exemples.
L'autre thèse, à laquelle nous adhérons, est que la convergence ou l'optimalité est un vrai problème à résoudre. En effet, l'optimalité dans ce cas doit être comprise dans un sens plus large qui est celui de la satisfaction des hypothèses (souhaits du décideur) sur lesquelles le décideur et l'analyste se sont mis d'accord. Cependant, nous devons soulever la question de la validité des hypothèses formelles des méthodes qui possèdent une convergence algorithmique. La théorie de la valeur multiattribut a répondu à cette question avec des conditions d'application très contraignantes. Une direction de recherche pourrait être l'investigation des conditions minimales de convergence pour certaines catégories de problèmes.

### Méta-méthodes de choix en optimisation multicritère

Le problème de choix de la méthode à appliquer pour un problème donné est traité, dans la plupart des cas, comme un problème multicritère [Al-shemmeri 97][Gershon 84]. Ces méta-méthodes consistent donc à recenser les méthodes multicritères existantes parmi lesquelles on rejette celles qui ne répondent pas à des critères éliminatoires. On choisit ensuite une méthode parmi celles qui restent en utilisant une méthode de choix multicritère.
Notons que ces pratiques peuvent donner lieu à des aberrations. Citons par exemple l'article de Cohon et Marks [Cohon 75] dans lequel les auteurs, en évaluant certaines procédures multicritères, rejettent les méthodes de surclassement de type Electre de l'ensemble des méthodes applicables aux problèmes en variables continues, étant donné que les techniques de surclassement actuelles ne permettent pas de résoudre ce type de problème. Certes le critère de faisabilité en pratique est important. Cependant il ne devrait pas être le seul critère de choix. Si nous jugeons que de telles méthodes sont adaptées a une classe de problèmes en variables continues, il suffit de construire une méthode de surclasssement pour ce type de problèmes.

**L'optimisation multicritère : le changement?**

Depuis quelques années, l'optimisation multicritère connaît des changements importants. Parmi ceux-ci nous pouvons citer le développement :

- d'une théorie de la valeur multiattribut non additive et non transitive qui permet de prendre en compte des procédures d'agrégations compensatoires et non compensatoires (cf. [Bouyssou 97]).
- de méthodes interactives éclectiques. Il s'agit d'adapter une méthode à chaque étape du processus de décision. On utilise des méthodes adéquates pour des choix grossiers (la réduction à un sous-ensemble de candidats admissibles) et d'autres plus appropriées pour le choix de la solution parmi ces candidats (cf. [Gardiner 94a], [Gardiner 94b] et [Steuer 93]).
- de méthodes interactives fondées sur des modèles de surclassement (cf. [Jaszkiewicz 97]).

## 2.7 Des problèmes ouverts

### 2.7.1 Méthodes axiomatisées d'optimisation multicritère?

Les seules méthodes d'optimisation multicritère actuellement axiomatisées sont celles qui se fondent sur l'axiome d'existence d'une fonction d'utilité implicite ou explicite. A notre connaissance il n'existe pas de méthode axiomatisée qui se fonde sur des axiomes plus faibles et moins controversés.

### 2.7.2 Réduction de l'ensemble des points efficaces?

La réduction de l'ensemble des points efficaces s'effectue généralement en utilisant des processus interactifs et des méthodes de filtrage local. A notre connaissance, il n'existe pas de méthodes de réduction globale.

### 2.7.3 Méthodes d'optimisation multicritère non compensatoire?

La plupart des méthodes de résolution des problèmes d'optimisation multicritère supposent d'une manière implicite que les critères d'évaluation des alternatives sont commensurables et que la structure de préférence du décideur est compensatoire, c'est-à-dire qu'il existe des taux de substitution entre critères. Leur champ d'application est donc limité aux problèmes multicritères de nature compensatoire. Contrairement au cas de la décision multicritère où différentes procédures d'agrégation des critères ont été développées pour traiter les problèmes non compensatoires [Vansnick 86a], [Arrow 86], [Roy 93], [Matarazzo 88], [Matarazzo 86], peu de méthodes applicables au cas de l'optimisation non compensatoire ont été proposées.

### 2.7.4 Méthodes de surclassement pour le cas continu?

Les méthodes de surclassement ont été développées pour traiter des problèmes avec un nombre d'alternatives fini; elles reposent sur la comparaison par paire. Les méthodes proposées pour généraliser ce type de modèles au cas continu restent artificielles; elles effectuent d'abord un passage au cas discret, ensuite elles utilisent des relations de surclassement sur les échantillons des points efficaces que l'on qualifie de points de plus grand intérêt.

### 2.7.5 Propositions

Après avoir décrit les méthodes d'optimisation existantes et après avoir relevé certains problèmes ouverts, nous nous proposons de donner quelques éléments de réponses à ces problèmes. Notre but sera donc de proposer une approche d'optimisation multicritère :

- axiomatisée, c'est-à-dire s'appuyant mathématiquement sur des principes *raisonnables*,
- applicable dans le cas des problèmes d'optimisation non compensatoire,
- opérationnelle et robuste par rapport aux paramètres utilisées,
- qui puisse être interprétée comme une extension des méthodes de surclassements pour le cas continu.

# Chapitre 3

# L'approche OMAP

Nous nous sommes intéressés, dans le chapitre précédent, à des méthodes d'optimisation multicritère qui correspondent à des approches interactives, à des approches utilitaristes et à des approches mixtes. L'analyse de ces méthodes nous a permis de dégager leurs faiblesses, et de révéler un réel besoin de méthodes plus fondées dans le domaine de l'optimisation multicritère.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle approche pour aborder les problèmes d'optimisation multicritère. Cette approche, que nous avons baptisé OMAP[1], tente d'explorer une nouvelle direction qui est celle de l'analyse partielle des problèmes d'optimisation multicritère. Dans une première section, nous exposons la philosophie de OMAP. La deuxième section est consacrée à l'introduction de l'analyse partielle, des concepts et des outils utilisés. Dans les troisième et quatrième sections, nous présentons deux versions de l'approche OMAP avant d'essayer de cerner les champs de son application.

## 3.1 Philosophie de OMAP, de l'analyse globale à l'analyse partielle

### 3.1.1 Nature de l'information utilisée en optimisation multicritère

La plupart des méthodes de résolution des problèmes d'optimisation multicritère utilisent des informations supplémentaires afin de distinguer les solutions réalisables. Les informations susceptibles d'être utilisées par l'analyste ou la méthode sont liées au couple problème - décideur. Elles sont groupées en deux classes :

– les informations de type préférentielles liées au décideur. Nous citons, comme exemples, les hypothèses sur la structure de préférence du décideur (l'existence

1. **O**ptimisation **M**ulticritère utilisant une **A**nalyse **P**artielle.

d'une fonction d'utilité implicite ou explicite), et les informations obtenues dans le cadre d'un processus d'apprentissage;

- les informations intrinsèques au problème telle que l'efficacité d'une solution par rapport aux critères.

Nous constatons que la plupart des méthodes d'optimisation utilisent plutôt les informations de nature préférentielle et se limitent à utiliser la propriété d'efficacité comme information intrinsèque au problème. Ceci n'est pas le cas des méthodes de décision multicritère[2]. Nous notons aussi que plus on utilise des informations de type intrinsèque, moins on a besoin d'utiliser des informations préférentielles et d'imposer certaines hypothèses généralement controversées.

### 3.1.2 Philosophie de OMAP

Notre objectif consiste à proposer une approche fondée sur les idées suivantes :

- utiliser le maximum d'informations intrinsèques au problème pour enrichir l'information décisive (i.e. susceptible d'aider le décideur à choisir);
- utiliser des conditions de validité moins contraignantes et plus faciles à vérifier que les conditions de validité de l'approche utilitariste.

A la poursuite de ces aspirations, nous proposons l'approche OMAP qui consiste à mener une analyse plus détaillée des différentes facettes du problème lorsqu'une analyse générale est insuffisante. Cette étude détaillée se traduit par un passage d'une analyse globale du problème, dans laquelle on examine le "comportement" des solutions par rapport à tous les critères, à une analyse partielle, dans laquelle on examine le "comportement" des solutions par rapport à certaines parties de l'ensemble de critères. Cette démarche permet évidemment d'enrichir l'ensemble des informations décisives en utilisant des informations intrinsèques au problème.
Notons que cette manière d'aborder le problème, qui utilise le passage de l'analyse globale à l'analyse partielle, est une approche classique dans l'étude des systèmes complexes.

## 3.2 L'analyse partielle

L'analyse partielle, que nous proposons comme moyen d'analyse supplémentaire du problème, consiste à identifier les facettes les plus importantes du problème, et à les étudier d'une manière détaillée. Ces facettes correspondent aux points de vue

2. Nous croyons que cette différence dans le traitement de problèmes assez proches est due à des raisons historiques : la théorie de choix social est à l'origine de la décision multicritère alors que la programmation mathématique est à l'origine de l'optimisation multicritère.

des différentes coalitions de critères sur les solutions candidates. En d'autres termes, l'approche OMAP est fondée sur l'analyse du "comportement" des solutions par rapport aux coalitions de critères. Dans ce qui suit, nous présentons l'instrument de base de cette analyse de comportement.

### 3.2.1 La dominance partielle

La dominance est la notion la plus utilisée pour réduire l'ensemble des solutions candidates au choix final. Elle est, par ailleurs, l'outil le moins contesté en décision multicritère. Malheureusement, cet outil est peu discriminant et ne peut être exploité que dans les étapes préliminaires de la résolution. Pour cette raison, différentes formes de dominance plus *fortes* ont été imaginées et proposées dans la littérature [RAYNAUD 97] [KOPSIDAS 91] [MATARAZZO 90] [ARROW 86] [KEENEY 76]. Parmi ces extensions, nous présentons la forme suivante dont nous nous sommes inspirés pour développer l'outil de base de notre analyse partielle.

#### La dominance étendue

La dominance étendue[3] a été brièvement présentée par Keneey et Raiffa (cf. [KEENEY 76] p. 126) dans le cadre de la théorie de l'utilité multi-attribut. Si nous comparons deux alternatives $Z = (Z_1, ..., Z_p)$ et $Z' = (Z'_1, ..., Z'_p)$, et si la dominance ne permet pas de les comparer, une partition du profil des attributs de chaque alternative $Z = (Y, T)$ nous permet d'identifier des relations de dominance entre les restrictions des profils : c'est la dominance étendue. Keenney et Raiffa suggèrent d'utiliser cette forme de dominance afin de réduire le nombre d'alternatives et de diminuer ainsi l'étendue des échelles des attributs. Ceci permet d'adopter plus facilement des hypothèses telles que l'indépendance préférentielle.

#### La dominance partielle

Dans le même ordre d'idée nous introduisons la notion de dominance partielle qui est analogue à la forme de dominance présentée par Keenney et Raiffa (1976). Mais, elle est présentée d'une manière plus formelle, avec une nouvelle interprétation et une nouvelle utilisation.

L'introduction de la dominance partielle formalise l'intuition suivante : si une solution $x$ domine une solution $y$ par rapport à une coalition de critères, alors $x$ est meilleur que $y$ par rapport à cette coalition.

**Définition 3.2.1.** *Soient $Z^1, Z^2$ deux vecteurs critères. On dit que $Z^1$ domine partiellement $Z^2$ par rapport à un sous-ensemble de critères $A$ si et seulement si $Z_i^1 \geq Z_i^2$ pour tout critère de $A$ et $Z_i^1 > Z_i^2$ pour au moins un critère de $A$.*

3. The extended dominance

Cette notion permet de comparer certaines paires d'alternatives entre elles par rapport à chacune des coalitions de critères. Cependant, le nombre d'alternatives comparables en utilisant la dominance partielle (comme toute forme de dominance) devient de plus en plus petit quand le nombre total d'alternatives est grand (cf. [ROSINGER 91]). C'est pourquoi nous proposons d'utiliser le concept de la non dominance partielle ou d'efficacité partielle qui s'avère plus opérationnel.

### 3.2.2 L'efficacité partielle

**Définition 3.2.2.** *Soit $I' \subseteq I$. Une solution $\bar{x} \in X$ est partiellement efficace par rapport à $I'$ si et seulement si $\bar{x}$ est un point efficace du problème :*

$$(P')\ \textit{Maximiser}\ (Z_k(x))\ \textit{avec}\ k \in I',$$
$$s.c.\ x \in X.$$

L'efficacité partielle correspond donc à l'efficacité de la solution par rapport à un ensemble restreint de critères. Il est évident que le choix le moins vulnérable et le moins sujet à contestation par une coalition devrait appartenir à son ensemble de points partiellement efficaces. Nous nous proposons donc d'utiliser l'efficacité partielle comme notion de base pour notre analyse partielle, étant donné que chaque coalition permet au décideur de départager l'ensemble réalisable en solutions efficaces et solutions dominées par rapport à cette dernière.

Après avoir défini l'outil de base de l'analyse partielle, les questions qui subsistent afin d'accomplir cette analyse concernent :

- le choix des coalitions que nous devons ou pourrons utiliser comme arbitres pour départager les solutions réalisables;
- la forme d'agrégation des points de vues de ces différentes coalitions.

Nous répondons à ces questions au cours de la présentations des méthodes OMAP1 et OMAP2 dans les sections suivantes.

## 3.3 OMAP1

Pour présenter l'approche OMAP, nous avons choisi une démarche progressive qui consiste à introduire en premier lieu une version particulière sous le nom de OMAP1 qui sera généralisée, avec des hypothèses d'application plus faibles, pour donner lieu à la version OMAP2.

Afin d'introduire la méthode OMAP1, nous supposons que des coefficients d'importance relative,[4] $\omega_k \in R^+$, sont attribués aux différents critères $Z_k$ $(k = 1, \cdots, p)$, et que l'importance d'une coalition de critères $A$ est mesurée par la somme des coefficients des

4. Le sens de ces coefficients est discuté dans la section 4.3.2.

critères qui la composent, c'est à dire $\omega(A) = \sum_{Z_k \in A} \omega_k$.

Sans perte de généralité et par souci de lisibilité, nous supposons dans la suite de la section 3.3 que les critères ont des importances relatives égales ($\omega_k = 1$ pour tout $k \in I$). Les coalitions peuvent donc être rangées en fonction du nombre des critères qui les composent [5].

### 3.3.1 Concept d'$a$-efficacité

Avant d'exposer la procédure OMAP1, Nous allons introduire la notion d'$a$-efficacité (cf. [OTHMANI 97b]). Cette notion répond, d'une manière indirecte, aux questions du choix des coalitions qui vont jouer le rôle d'arbitres et de la forme d'agrégation des points de vues de ces coalitions.

#### Concept d'$a$-dominance

En suivant la démarche utilisée pour introduire l'efficacité partielle, nous introduisons l'$a$-efficacité en utilisant la notion d'$a$-dominance.

Notons $a$, un entier inférieur ou ègal à $p$.

**Définition 3.3.1.** *Soient $Z^1, Z^2$ deux vecteurs critères. On dit que $Z^1$ a-domine $Z^2$ si et seulement si il existe $I_{(p+1-a)} \subseteq I$ tel que[6] :*
*(i) $Z_k^1 \geq Z_k^2$ pour tout $k \in I_{(p+1-a)}$, et*
*(ii)$Z_k^1 > Z_k^2$ pour au moins un $k \in I_{(p+1-a)}$.*

Une solution $Z^1$ $a$-domine $Z^2$ si $Z^1$ domine partiellement $Z^2$ par rapport à une coalition d'au moins $(p + 1 \Leftrightarrow a)$ critères.

**Théoreme 3.3.1.** *Soient deux vecteurs critères $Z^1, Z^2 \in \mathcal{Z}$, alors $Z^1$ a-domine $Z^2$ si et seulement si :*
*(i') il n'existe pas de sous ensemble $I_a \subseteq I$ tel que $Z_k^2 > Z_k^1$ pour tout $k \in I_a$, et*
*(ii') $Z_k^1 > Z_k^2$ pour au moins un $k \in I$.*

Une solution $Z^1$ $a$-domine $Z^2$ si $Z^1$ est meilleure que $Z^2$ sur au moins un critère, et $Z^2$ n'est meilleure que $Z^1$ que sur moins de $a$ critères.

**Preuve** Soient $Z^1, Z^2 \in \mathcal{Z}$.

Montrons que la condition est nécessaire.
D'une façon évidente, (ii) $\Rightarrow$ (ii').

5. Voir section 4.1.1 pour une présentation de OMAP1 dans le cas d'un problème avec des poids quelconques.

6. Nous rappelons que $I_{(p+1-a)}$ est l'ensemble des indices d'un sous-ensemble de $(p+1-a)$ critères.

S'il existe $(p+1-a)$ composants de $Z^1$ tel que $Z_k^1 \geq Z_k^2$, alors il existe au plus $(a-1)$ composants de $Z^1$ tel que $Z_k^2 > Z_k^1$.

Montrons que la condition est suffisante.
Soit $k_0$ tel que $Z_{k_0}^1 > Z_{k_0}^2$.
S'il n'existe pas $a$ composants de $Z^2$ tel que $Z_k^2 > Z_k^1$, alors il existe au moins $(p-a)$ composants de $Z^1$, différents de $Z_{k_0}^1$, tel que $Z_k^1 \geq Z_k^2$. Notons l'ensemble des indices de ces composants par $I_{(p-a)}^0$. L'ensemble $I_{(p+1-a)}^0 = I_{(p-a)}^0 \cup \{k_0\}$ vérifie donc les conditions (i) et (ii).

### Concept d'$a$-efficacité

**Définition 3.3.2.** *Une solution $\bar{x} \in X$ est a-efficace si et seulement si son vecteur critère associé $Z(\bar{x})$ n'est pas a-dominé.*

Un point $a$-efficace est un point partiellement efficace par rapport à toutes les coalitions de $(p+1-a)$ critères. Remarquons que lorsque $a$ est égal à 1, l'$a$-efficacité coïncide avec l'efficacité. Interprété différemment, un point $a$-efficace est un point à partir duquel on peut faire croître simultanément, en restant dans le domaine admissible, la valeur d'au plus $(p-a)$ critères.

**Théoreme 3.3.2.** *Une solution $\bar{x} \in X$ est a-efficace si et seulement si $Z_k(x) > Z_k(\bar{x})$, $k \in I$, pour un $x \in X$ implique qu'il existe un sous-ensemble $I_a \subseteq I$ tel que $Z_j(\bar{x}) > Z_j(x)$ pour tout $j \in I_a$.*

A partir d'un point $a$-efficace, il n'est pas possible d'augmenter la valeur d'un des critères sans diminuer la valeur d'au moins $a$ critères.

**Preuve** Soit $\bar{x} \in X$.

Montrons que la condition est nécessaire.
Supposons que $\bar{x}$ est $a$-efficace et que $Z_k(x) > Z_k(\bar{x})$ pour un $x \in X$, et $k \in I$. D'après le théorème 3.3.1, s'il n'existe pas de sous-ensemble $I_a \subseteq I$ tel que $Z_k(\bar{x}) > Z_k(x)$ pour tout $k \in I_a$, alors $Z(x)$ $a$-domine $Z(\bar{x})$.

Montrons que la condition est suffisante.
Supposons que pour tout $x \in X$: $Z_k(x) > Z_k(\bar{x})$ pour un $k \in X$, implique qu'il existe un sous-ensemble $I_a \subseteq I$ tel que $Z_j(\bar{x}) > Z_j(x)$ pour tout $j \in I_a$. Si $Z(\bar{x})$ est $a$-dominé, alors il existe $x'$ tel que:
(1) $Z_k(x') > Z_k(\bar{x})$ pour au moins un $k \in I$, et
(2) $Z_j(\bar{x}) > Z_j(x')$ pour au plus $(a-1)$ critères.
Ceci contredit l'hypothèse.

**Corollaire 3.3.1.** *Une solution $\bar{x} \in X$ est a-efficace si et seulement si pour tout $x \in X$:*

*(1) Il existe un sous-ensemble $I_a \subseteq I$ tel que $Z_j(\bar{x}) > Z_j(x)$ pour tout $j \in I_a$,*
*ou*
*(2) $Z(\bar{x}) \geq Z(x)$.*

Lorsque l'on compare un point $a$-efficace à chacun des points admissibles, ce point est meilleur sur $a$ critères ou aussi bon sur tous les critères.

**Preuve** Soit $\bar{x} \in X$.

Montrons que la condition est nécessaire.
Supposons que $\bar{x}$ soit $a$-efficace. Soit $x \in X$.
Si $Z_k(x) > Z_k(\bar{x})$, d'après le théorème 3.3.2, il existe un sous-ensemble de a critères tel que $Z_j(\bar{x}) > Z_j(x)$.
Sinon, $Z(\bar{x}) \geq Z(x)$.

Montrons que la condition est suffisante.
Supposons que pour tout $x \in X$:
(1) $Z(\bar{x}) \geq Z(x)$. Le vecteur $Z(\bar{x})$ n'est donc pas $a$-dominé par $Z(x)$,
ou
(2) il existe un sous-ensemble de $a$ critères $Z_j$ tel que $Z_j(\bar{x}) > Z_j(x)$. Le vecteur $Z(\bar{x})$ n'est donc pas $a$-dominé par $Z(x)$.

**Définition 3.3.3.** *Soit $\bar{\bar{x}} \in X$, $a$ et $\tilde{a} \in \{1, \cdots, p\}$. Si $\bar{\bar{x}}$ est a-efficace et s'il n'existe pas de solution $\tilde{a}$-efficace avec $\tilde{a} > a$, on dit qu'il est $a_{max}$-efficace.*

Un point $a_{max}$-efficace est un point qui vérifie toutes les conditions d'$a$-efficacité ($a = 1, \cdots, a_{max}$). Il est partiellement efficace par rapport à toutes les coalitions formées d'au moins ($p + 1 \Leftrightarrow a_{max}$) critères.

### 3.3.2 Propriétés des solutions $a$-efficaces

#### Indépendance par rapport aux solutions dominées

Les solutions $a$-efficaces dépendent seulement des solutions efficaces. Plus précisément, soit le problème $(P')$ obtenu à partir du problème $(P)$ en restreignant son ensemble de solutions admissibles à l'ensemble des solutions efficaces. Alors, les problèmes $(P)$ et $(P')$ ont le même ensemble de solutions $a$-efficaces. Cette propriété peut-être formalisée en utilisant le corollaire 3.3.1. : si l'on compare une solution $a$-efficace à chacune des solutions efficaces, alors elle est meilleure sur au moins $a$ critères ou égale sur tous les critères.

**Corollaire 3.3.2.** *Une solution $\bar{x} \in X$ est a-efficace si et seulement si pour tout point efficace $x \in X$:*
*(1) il existe un sous-ensemble $I_a \subseteq I$ tel que $Z_j(\bar{x}) > Z_j(x)$ pour tout $j \in I_a$,*

*ou*
*(2)* $Z(\bar{x}) = Z(x)$.

**Preuve** Soit $\bar{x} \in X$.

La preuve de la condition nécessaire est immédiate d'après le corollaire 3.3.1

Montrons que la condition est suffisante.
Pour montrer que $\bar{x}$ est $a$-efficace il suffit de montrer que pour tout $x \in X$:
(1) il existe un sous-ensemble $I_a \subseteq I$ tel que $Z_j(\bar{x}) > Z_j(x)$ pour tout $j \in I_a$,
ou
(2)$Z(\bar{x}) \geq Z(x)$.
Si $x$ est un point efficace, cette proposition est vraie d'après l'énoncé.
Si $x$ est dominé, il suffit de prendre un point efficace $y$ qui le domine. Une des conditions suivantes est donc vraie.
(1) il existe un sous-ensemble $I_a$ tel que $Z_j(\bar{x}) > Z_j(y) \geq Z_j(x)$,
ou
(2) $Z(\bar{x}) = Z(y) \geq Z(x)$.

Cette propriété nous permet de disposer d'un test opérationnel pour l'identification des solutions $a$-efficaces lorsque le nombre des points efficaces est petit.

#### Robustesse par rapport à l'ensemble critères

Une autre propriété évidente est la robustesse des points $a$-efficaces par rapport à l'ensemble des critères. En effet, les solutions $a$-efficaces demeurent efficaces même si le décideur ne prend en compte que $(a \Leftrightarrow 1)$ critères lorsqu'il choisit sa solution. Cette propriété de robustesse devant l'omission d'un certain nombre de critères est généralement réclamée par les décideurs [STEWART 96].

#### Une structure d'ordre sur les ensembles $a$-efficaces

Une autre propriété triviale, mais néanmoins importante est le fait que les ensembles de points $a$-efficaces, $a$ variant de 1 à $a_{max}$, sont emboîtés les un dans les autre au sens suivant : l'ensemble des points $a$-efficaces est inclus dans l'ensemble des points $(a \Leftrightarrow 1)$-efficaces $(a \geq 2)$.
Notons $E_a$ l'ensemble des points $a$-efficaces, on peut donc écrire

$$E_{a_{max}} \subseteq E_{a_{max}-1} \cdots \subseteq E_2 \subseteq E_1.$$

### 3.3.3 La procédure OMAP1

La procédure OMAP1 consiste à réduire l'ensemble des points efficaces en utilisant (comme conditions supplémentaires) les conditions d'$a$-efficacité. Nous remarquons que ces conditions deviennent plus restrictives lorsque $a$ augmente. Ainsi, nous suggérons de rechercher les points $a$-efficaces d'une manière progressive en augmentant $a$ à chaque étape. Cette procédure converge puisque soit ce processus atteint une étape où aucune solution ne vérifie la dernière condition obtenue en augmentant $a$ d'une unité, soit il existe une solution qui maximise tous les critères. Les dernières solutions identifiées sont évidemment les solutions $a_{max}$-efficaces.

### 3.3.4 Analyse de OMAP1

Cette méthode permet de choisir les solutions partiellement efficaces par rapport à un ensemble de coalitions de critères. Ces coalitions sont choisies d'une manière séquentielle. A chaque étape, nous considérons des conditions d'efficacité partielle relatives à des coalitions dont le coefficient d'importance est de plus en plus faible. Cette manière de procéder suppose que :

- plus le coefficient d'importance d'une coalition est grand, plus la condition d'efficacité partielle par rapport à cette coalition est importante aux yeux du décideur;
- le décideur cherche à choisir les solution les moins vulnérables par rapport aux coalitions les plus importantes.

## 3.4 OMAP2

La méthode OMAP2 est une version plus générale de l'approche OMAP. Elle est fondée sur des hypothèses plus faibles que OMAP1 et permet d'avoir des résultats "plus précis"[7]. En contre partie, les solutions obtenues en appliquant cette version ont moins de propriétés que celles de OMAP1 (cf. [Othmani 97a]).

### 3.4.1 Idée générale

Rappelons que OMAP est basée sur la notion d'efficacité partielle ainsi que sur la procédure de choix des coalitions et l'agrégation de leurs points de vue. Dans OMAP1, nous choisissons ces coalitions d'une manière progressive, en testant à chaque étape le "comportement" des solutions par rapport aux nouvelles coalitions introduites dans l'ensemble des coalitions décisives. Si aucune solution ne vérifie toutes les nouvelles conditions d'efficacité partielle, on arrête le processus de recherche. Donc, d'une part, OMAP1 utilise l'$a$-efficacité qui englobe toutes les conditions d'efficacité partielle par rapport aux coalitions de $(p + 1 \Leftrightarrow a)$ critères. D'autre part, elle utilise une hypothèse *forte* sur le fait que les priorités sur les coalitions sont calculées en utilisant la somme des poids des critères qui composent chaque coalition. Les modifications que nous pouvons donc apporter à OMAP1 consisteraient :

- à utiliser des tests d'efficacité partielle plus fins. Nous introduirons le principe d'efficacité partielle maximale pour accomplir cette modification;

7. Pour plus détails, voir la section 3.4.4.

– à affaiblir les hypothèses de construction des priorités sur les coalitions. Pour atteindre ce but, nous introduirons la notion de hiérarchie de coalitions.

### 3.4.2 Hiérarchie de coalitions

Afin de déterminer les coalitions de critères qui sont considérées dans l'analyse détaillée du problème, des informations préférentielles sur l'importance relative des coalitions sont recueillies auprès du décideur. Ces informations permettent de construire une relation binaire, "plus important que", sur l'ensemble des coalitions. Le sens sémantique de cette relation est : une coalition $A$ est plus importante qu'une coalition $B$ si l'efficacité partielle de la solution par rapport à $A$ est plus importante, au yeux du décideur, que son efficacité partielle par rapport à $B$.
Cette relation doit vérifier les propriétés fondamentales suivantes :
- l'asymétrie,
- la monotonie : si une coalition $A$ contient une coalition $B$, alors $A$ est plus importante que $B$. C'est une condition nécessaire pour que la procédure de choix soit monotone. Cette dernière est une condition souvent réclamée dans le contexte de la prise de décision [Grabisch 97] [Roubens 97] [Tanguiane 91].

Dans la méthode que nous proposons, ces propriétés sont formulées en utilisant la notion de hiérarchie de coalitions.

**Définition 3.4.1.** *Une hiérarchie $(H, \succ)$ est définie par un ensemble non vide de coalitions de critères $H \subseteq \mathcal{P}(I)$[8] et une relation binaire $\succ$ (plus important que) sur $H$ qui vérifient les propriétés suivantes. Pour tout $A, B \in H$ :*

1. $(A \succ B) \Rightarrow \neg(B \succ A)$ *(condition d'asymétrie).*
2. $(B \supset A) \Rightarrow (B \succ A)$ *(condition de monotonie).*
3. $[\neg(B \succ A)] \wedge [\neg(A \succ B)] \Leftrightarrow (A \sim B)$.

Notons que la relation $\sim$ correspond à une importance égale entre deux coalitions (une relation d'indifférence symétrique et réflexive), et que la relation d'importance des coalitions admise dans OMAP1 vérifie les conditions citées ci-dessus.

#### Exemples

**Exemple 1** Dans le cas d'un problème d'optimisation de trois critère $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$, un exemple de hiérarchie, $(\mathcal{P}(I), \succ_0)$, est représenté par le graphe $G_0$ suivant :

8. $\mathcal{P}(I)$ désigne l'ensemble de toutes les parties de $I$.

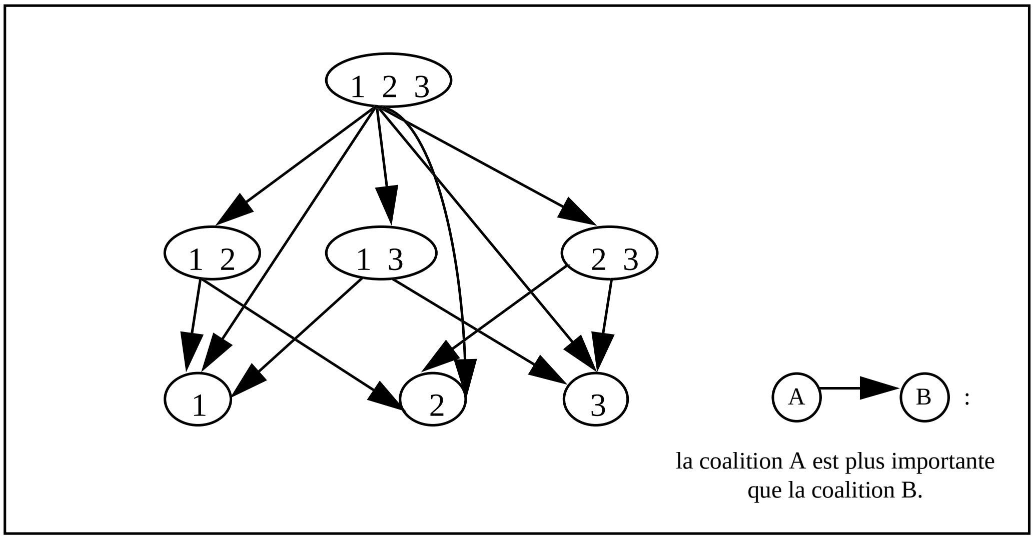


FIG. 3.1 –*Graphe associé à la hiérarchie* $(\mathcal{P}\ (I), \succ_0)$.

La hiérarchie $(\mathcal{P}(I), \succ_0)$ est engendrée uniquement par la condition de monotonie. On l'appelle hiérarchie de base, puisque $G_0$ est un sous-graphe de tout graphe représentant une hiérarchie $(\mathcal{P}(I), \succ)$.

**Exemple 2** Une autre hiérarchie particulière, $(\mathcal{P}(I), \succ_\omega)$, est celle engendrée par une fonction poids $\omega$ vérifiant la condition d'additivité[9]. Cette hiérarchie est fréquemment utilisée, d'une manière explicite ou implicite, dans les méthodes de décision multicritère. Dans le cas d'un problème d'optimisation en présence de trois critère $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ ayant la même importance relative ($\omega(Z_k) = 1,\ k = 1, 2, 3$), la hiérarchie $(\mathcal{P}(I), \succ_\omega)$ est la suivante :
$\{Z_1, Z_2, Z_3\} \succ \{Z_1, Z_2\} \sim \{Z_1, Z_3\} \sim \{Z_2, Z_3\} \succ \{Z_1\} \sim \{Z_2\} \sim \{Z_3\}$.

### 3.4.3 Efficacité partielle maximale

#### Principe d'efficacité partielle maximale

Dans OMAP1, l'utilisation de l'$a$-efficacité ne permet pas une analyse fine du comportement des solutions par rapport aux coalitions. Pour affiner cette étude, nous proposons d'utiliser l'efficacité partielle comme moyen direct d'analyse, et le principe d'efficacité partielle maximale comme forme d'agrégation des différents points de vues des coalitions.

**Principe d'efficacité partielle maximale** : *une procédure de choix vérifie le principe d'efficacité partielle maximale, si la solution obtenue est partiellement efficace par*

9. $\omega : \mathcal{P}(I) \to R^+$ tel que :
- $\forall A, B \in \mathcal{P}\ (I) : A \succ B$ si $\omega(A) > \omega(B)$,
- $\forall A, B$ tel que $A \cap B = \emptyset : \omega(A \cup B) = \omega(A) + \omega(B)$.

*rapport au plus grand nombre possible de "coalitions importantes".*

L'ambiguïté de l'expression *"coalitions importantes"*, sera levé lors de la formalisation de ce principe et de la présentation de la procédure OMAP2.

Pour formaliser ce principe, nous notons
- $E_H$ l'ensemble des points partiellement efficaces par rapport à toutes les coalitions d'une hiérarchie $(H, \succ)$;
- $Card(H)$ le nombre de coalitions de $H$;
- $\Delta(H, H') = H/(H \cap H')$, les éléments de $H$ qui n'appartiennent pas à $H'$.

**Définition 3.4.2.** *Une hiérarchie $(H, \succ)$ est maximale par rapport à la propriété d'efficacité partielle si :*

1. *$E_H$ est non vide.*
2. *Pour toute hiérarchie $(H', \succ)$ tel que $E_{H'} \neq \emptyset$:*
   *a. $\forall A' \in \Delta(H', H)$, $\exists A \in \Delta(H, H')$: $A \succ A'$,*
   *ou*
   *b. $(\forall A' \in \Delta(H', H), \forall A \in \Delta(H, H')$: $A \sim A') \wedge (Card(H) \geq Card(H'))$.*

**Définition 3.4.3.** *Un point vérifie la propriété d'efficacité partielle maximale s' il appartient à $E_H$, où $(H, \succ)$ est une hiérarchie maximale par rapport à l'efficacité partielle.*

**Remarque** La condition (2) de la définition 3.4.2 traduit
1. la prise en compte, d'une manière prioritaire, des conditions d'efficacité partielle par rapport aux coalitions les plus importantes.
2. le choix d'une solution qui vérifie le plus grand nombre possible de conditions d'efficacité partielle.

### La procédure OMAP2

Suite à la présentation du concept de hiérarchie de coalitions et du principe d'efficacité maximale, nous nous proposons de les utiliser pour construire un ensemble de solutions réalisables candidates au choix final. Cet ensemble doit être aussi restreint que possible.
Supposons que, suite à une première étape de dialogue avec le décideur[10], nous disposons d'une hiérarchie de toutes les coalitions $(\mathcal{P}(I), \succ)$. Nous présentons dans ce qui suit une procédure qui utilise cette information afin de réduire l'ensemble des solutions réalisables candidates au choix final.
Cette procédure est résumée dans les étapes suivantes :

1. Appliquer le principe de Pareto qui consiste à départager les solutions réalisables en solutions dominées et solutions non dominées. Ceci correspond à l'application

10. Pour une présentation détaillée de cette étape de dialogue, voir section 4.3.2.

de la condition d'efficacité partielle par rapport à l'ensemble $\{I\}$ de tous les critères qui est toujours la coalition la plus importante de $(\mathcal{P}(I),$ $\succ)$.
On pose $E'_1$ l'ensemble des solutions efficaces.

2. Départager les éléments de $E'_1$ en utilisant la propriété d'efficacité partielle par rapport aux coalitions les plus importantes de la hiérarchie $(H_1, \succ) = (\mathcal{P}(I) \backslash \{I\}, \succ)$[11]. Notons $A^1_1, \cdots, A^1_{m_1}$ ces coalitions.
On pose :
- $E'_2$ l'ensemble des solutions de $E'_1$ qui vérifient le plus grand nombre de conditions d'efficacité partielle par rapport aux coalitions $A^1_1, \cdots, A^1_{m_1}$ ;
- $j = 2$.

3. Départager les éléments de $E'_j$ en utilisant la propriété d'efficacité partielle par rapport aux coalitions les plus importantes de la hiérarchie $(H_j, \succ) =$ $(H_{j-1} \backslash \{A^{j-1}_1, \cdots, A^{j-1}_{m_{j-1}}\}, \succ\ )$. On pose $E'_{j+1}$ l'ensemble des solutions de $E_j$ qui vérifient le plus grand nombre de conditions d'efficacité partielle par rapport aux coalitions $A^j_1, \cdots, A^j_{m_j}$.

4. Si $E'_{j+1} \neq \emptyset$, poser $j = j + 1$ et aller à l'étape 3. Sinon aller à l'étape 5.

5. La phase finale de cette procédure correspond à l'étape où l'ensemble des solutions vérifiant les nouvelles conditions d'efficacité partielle devient vide. Le dernier ensemble des solutions obtenues, $E'_j$, non vide est noté $E'_{J_{max}}$.

L'ensemble $\{A^1_1, \cdots, A^1_{m_1}, \cdots, A^{J_{max}}_1, \cdots, A^{J_{max}}_{m_{J_{max}}}\}$ est appelé l'ensemble des coalitions décisives. C'est l'ensemble des coalitions prises en compte par le décideur pour affiner la construction de l'ensemble de choix final.

### 3.4.4 Comparaison de OMAP1 et OMAP2

Ce paragraphe est consacré à la comparaison de OMAP1 et OMAP2 à partir d'un exemple illustratif. Considérons un problème d'optimisation de quatre critères $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$, et supposons que la hiérarchie de coalitions dont nous disposons est la hiérarchie de base, $(\mathcal{P}(I), \succ_0)$, engendrée uniquement par la condition de monotonie.

La description algorithmique de l'application de la méthode OMAP2 serait :
- $E'_1$, l'ensemble des solutions efficaces par rapport à $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$.
- $E'_2$, l'ensemble des solutions de $E'_1$ qui vérifient le plus grand nombre de conditions d'efficacité partielle par rapport aux coalitions $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$, $\{Z_1, Z_2, Z_4\}$, $\{Z_1, Z_3, Z_4\}$, $\{Z_2, Z_3, Z_4\}$.
- $E'_3$, l'ensemble des solutions de $E'_2$ qui vérifient le plus grand nombre de conditions d'efficacité partielle par rapport aux coalitions $\{Z_1, Z_2\}$, $\{Z_1, Z_3\}$ $\{Z_1, Z_4\}$, $\{Z_2, Z_3\}$,

11. $\mathcal{P}(I) \backslash \{I\}$ désigne l'ensemble de toutes les coalitions différentes de $\{I\}$.

$\{Z_2, Z_4\}$,$\{Z_3, Z_4\}$.
- $E'_4$, l'ensemble des solutions de $E'_3$ qui vérifient le plus grand nombre de conditions d'efficacité partielle par rapport aux coalitions $\{Z_1\}$, $\{Z_2\}$, $\{Z_3\}$, $\{Z_4\}$.

La description algorithmique de l'application de la méthode OMAP1 serait :
- $E_1$, l'ensemble des solutions efficaces par rapport à $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$.
- $E_2$, l'ensemble des solutions de $E_1$ qui vérifient les conditions d'efficacité partielle par rapport aux coalitions $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$, $\{Z_1, Z_2, Z_4\}$, $\{Z_1, Z_3, Z_4\}$, $\{Z_2, Z_3, Z_4\}$.
- $E_3$, l'ensemble des solutions de $E_2$ qui vérifient les conditions d'efficacité partielle par rapport aux coalitions $\{Z_1, Z_2\}$, $\{Z_1, Z_3\}$ $\{Z_1, Z_4\}$, $\{Z_2, Z_3\}$, $\{Z_2, Z_4\}$,$\{Z_3, Z_4\}$.
- $E_4$, l'ensemble des solutions de $E_3$ qui vérifient les conditions d'efficacité partielle par rapport aux coalitions $\{Z_1\}$, $\{Z_2\}$, $\{Z_3\}$, $\{Z_4\}$.

Premièrement, nous remarquons que $E'_k = E_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ dès que $E_k$ est non vide, et que le test d'arrêt de OMAP2 ($E'_k = \emptyset$) se produit après celui de OMAP1 ($E_k = \emptyset$). Nous en déduisons donc que l'ensemble de solutions obtenues par OMAP2 est inclus dans l'ensemble de solutions de OMAP1. Donc si le nombre des points $a_{max}$-efficaces est trop grand pour permettre un choix final, OMAP2 peut être utilisée comme moyen supplémentaire pour départager ces points.

## 3.5 Champs d'application de OMAP

Après avoir présenté l'approche OMAP, il est important de cerner le domaine d'application où le recours à cette démarche est particulièrement justifié. Ce domaine est délimité par les conditions suivantes :

1. les procédures OMAP1 et OMAP2 sont conçues pour résoudre des problèmes avec un ensemble contenant au moins trois critères et ce n'est qu'à partir de cinq critères qu'elles acquièrent leur pleine signification,
2. les critères sont incommensurables, c'est-à-dire qu'ils ont des échelles incomparables,
3. le contexte de décision multicritère est plutôt de nature non compensatoire.

L'approche OMAP est donc clairement appropriée aux problèmes de décision de groupe et aux problèmes de décision publique de type non compensatoire avec de nombreux critères. On peut noter que le domaine d'application de OMAP ressemble à celui des méthodes de surclassement telle que TACTIC [Vansnick 86a] ou telle que la règle de prudence [Raynaud 97].

Un exemple de problème pour lequel OMAP semble appropriée est celui de la gestion des ressources en eaux. C'est un problème de décision publique, en variables continues et de nature multicritère. Ce problème a généralement des objectifs incommensurables :

– le développement de l'économie nationale (usage énergétique, usage touristique),

- le maintien d'une qualité satisfaisante de l'environnement (réduire la pollution des ressources en eaux),
- le bien être social (usage domestique et santé des résidents),
- le développement régional (usage agricole et industriel).

# Chapitre 4

# Propriétés fondamentales de l'approche OMAP

Ce chapitre est consacré à l'analyse des propriétés de OMAP. Dans une première section, nous présentons la démarche utilisée dans OMAP comme étant l'attitude d'un décideur qui souhaite concilier les différents critères tout en tentant de minimiser la distorsion des données initiales du problème . Nous étudions, dans la deuxième section, l'aspect non compensatoire de OMAP. Cette étude de l'aspect non compensatoire évoque aussi les conditions d'indépendance de critères que nous sommes amenés à supposer. Dans la troisième section, les importances relatives des critères sont discutées d'une manière plus détaillée et la robustesse par rapport aux poids est examinée. Les deux dernières sections s'attachent à étudier les relations entre OMAP et les autres méthodes multicritères, en particulier avec la règle de prudence[1].

## 4.1 OMAP, une approche de conciliation

Dans le précédent chapitre, nous avons montré que l'approche OMAP consiste à identifier et à choisir les alternatives les moins vulnérables et les moins sujets à contestations de la part des coalitions les plus importantes de critères. Dans cette section, nous montrons que OMAP peut être interprétée en outre comme une approche de conciliation des critères conflictuels. La démarche que nous utilisons consiste à ajouter un nouveau critère afin de concilier les critères contradictoires (cf. [Othmani 97a]). Cette démarche a déjà été employée par Arrow et Raynaud dans le cadre de la prudence dans les fonctions de choix ou de rangement (cf. [Arrow 86]).

Avant de développer cette interprétation, nous rappelons quelques résultats concernant les points $a$-efficaces dans le cas où les poids des critères sont quelconques et nous introduisons la notion de solution $a$-efficace maximale. Ces résultats seront utilisés dans la suite de l'exposé.

1. Notons que ces cinq sections sont indépendantes.

### 4.1.1 OMAP1 avec poids

Nous supposons que la hiérarchie de critères $(\mathcal{P}(I), \succ_\omega)$ est définie à l'aide d'une fonction $\omega : \mathcal{P}(I) \to R^+$ qui vérifie la condition d'additivité.

Considérons le préordre total engendré par $\omega$ sur $\mathcal{P}(I)$ de la manière suivante :
pour tout $A, B \in \mathcal{P}(I)$
- $A \succ B$ si $\omega(A) > \omega(B)$;
- $A \sim B$ si $\omega(A) = \omega(B)$.

Les classes d'équivalence des coalitions de critères définies par ce préordre sont notées :
$C_{\omega_i} = \{A \in \mathcal{P}(I) | \omega(A) = \omega_i\}$ $(\omega_i \in R^+)$.

Notons :
- $C_{\omega_1}, \cdots, C_{\omega_K}$ les $K$ classes d'équivalence des coalitions avec $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_K$. Le poids $\omega_K$ est égal au poids de la coalition de tout les critères $\omega(I)$;
- $A_{\omega_i}$, coalition appartenant à la classe d'équivalence $C_{\omega_i}$;
- $a$, un entier non nul inférieur ou égal à $K$.

**Définition 4.1.1.** *Un point $\bar{x} \in X$ est a⇔efficace si et seulement si pour tout $x \in X$, il n'existe aucune coalition $A_{\omega_i}$ qui vérifie les conditions :*
*(i) $Z_k(x) \geq Z_k(\bar{x})$ pour tout $k \in A_{\omega_i}$,*
*(ii) $Z_k(x) > Z_k(\bar{x})$ pour au moins un $k \in A_{\omega_i}$, et*
*(iii) $\omega_i \geq \omega_{K+1-a}$.*

Un point $\bar{x} \in X$ est $a$⇔efficace si et seulement si $Z(\bar{x})$ est un vecteur critères non partiellement dominé par rapport à toutes les coalitions des classes $C_{\omega_{K+1-a}}, \cdots, C_{\omega_K}$. En d'autres termes, $\bar{x}$ est partiellement efficace par rapport aux coalitions dont le poids est strictement supérieur à $\omega_{K-a}$ .

**Théoreme 4.1.1.** *Un point $\bar{x}$ est a⇔efficace si et seulement si une de ces conditions est vérifiée pour tout $x \in X$ :*
*(i') il existe une coalition $A_{\omega_j}$ telle que*
*1. $Z_k(\bar{x}) > Z_k(x)$ pour tout $k \in A_{\omega_j}$,*
*2. $\omega_j > (\omega_K \Leftrightarrow \omega_{K+1-a})$.*
*(ii') $Z(\bar{x}) \geq Z(x)$.*

**Preuve** Soient $x, \bar{x}$ deux éléments de $X$.

Montrons que la condition est nécessaire.
Supposons que ni (i'), ni (ii') ne soient vérifiées :
- il n'existe pas de coalition dont le poids est strictement supérieur à $\omega_K \Leftrightarrow \omega_{K+1-a}$, et qui vérifie (i'.1); en conséquence, les coalitions qui vérifient (i'.1) ont un poids inférieur

à $\omega_K \Leftrightarrow \omega_{K+1-a}$;
- il existe un critère $r$ tel que $Z_r(x) > Z_r(\bar{x})$. Posons $I_r = I \backslash \{r\}$.

Soit $A_{\omega_{max}}$ une coalition qui vérifie (i'.1) et dont le poids est maximum. Soit ${}^cA_{\omega_{max}}$ le complémentaire (dans $I_r$) de cette coalition. Tous les critères de cette coalition ${}^cA_{\omega_{max}}$ vérifient : $Z_k(x) \geq Z_k(\bar{x})$. Le poids de ${}^cA_{\omega_{max}}$ est supérieur à $\omega_{K+1-a} \Leftrightarrow \omega_r$. Soit la coalition $A_{\omega_i} =^c A_{\omega_{max}} \cup \{r\}$. Cette coalition vérifie les conditions de la définition 4.1.1. Le vecteur critères $Z(\bar{x})$ est donc $a$-dominé. Ainsi, si $\bar{x}$ est $a$-efficace alors il vérifie l'une des conditions (i') ou (ii').

Montrons que la condition est nécessaire.
Soient $x$ et $\bar{x}$ deux éléments de $X$. Supposons que l'une des conditions (i') ou (ii') soit vérifiée.
S'il existe une coalition $A_{\omega_i}$ dont le poids est supérieur à $\omega_{K+1-a}$, et qui vérifie les conditions (i) et (ii), alors le nombre maximum de critères tels que $Z_k(\bar{x}) > Z_k(x)$ est égal au cardinal du complémentaire de $A_{\omega_i}$. Le poids du complémentaire de $A_{\omega_i}$, étant égal à $\omega_K \Leftrightarrow \omega_i$, est inférieur à $\omega_K \Leftrightarrow \omega_{K+1-a}$. Comme toute coalition vérifiant (i'.1) est incluse dans le complément de $A_{\omega_i}$, alors son poids est inférieur à $\omega_K \Leftrightarrow \omega_{K+1-a}$. Ainsi, il n'existe pas de coalition qui vérifie simultanément (i'.1) et (i'.2). De plus (ii') n'est pas vérifié puisqu'il existe au moins un critère de $A_{\omega_i}$ tel que $Z_k(x) > Z_k(\bar{x})$, ce qui contredit l'hypothèse. Il n'existe donc pas de coalition qui vérifie les conditions de la définition 4.1.1, en conséquence, $\bar{x}$ est $a$⇔efficace.

**Définition 4.1.2.** *Soient $\bar{x} \in X$, $a$ et $\tilde{a}$ deux entiers non nul et inférieurs ou égaux à $\omega_K$. Si $\bar{x}$ est $a$⇔efficace et s'il n'existe aucun autre point $\tilde{a}$⇔efficace tel que $\tilde{a} > a$, alors $\bar{x}$ est $a_{max}$⇔efficace.*

**Définition 4.1.3.** *Nous appelons un point $a$⇔efficace maximal un point qui est a-efficace et tel que $\frac{\omega_K}{2} \geq \omega_{K-a}$.*

**Corollaire 4.1.1.** *S'il existe un vecteur critère $Z(\bar{x})$ tel que $\bar{x}$ est a-efficace, et $\frac{\omega_K}{2} > \omega_{K-a}$; alors il est unique. Ainsi, si $\omega_K$ est impair, alors le vecteur critère correspondant au point $a$⇔efficace maximal est unique.*

**Preuve** Soient $\bar{x}$ et $\bar{y}$ deux points $a$⇔efficace de $(P)$ tel que $\frac{\omega_K}{2} > \omega_{K-a}$, et $Z(\bar{x}) \neq Z(\bar{y})$
D'après le théorème 4.1.1, il existe
une coalition $A_{\omega_i}$ telle que :
- $Z_k(\bar{x}) > Z_k(\bar{y})$ pour tout $k \in A_{\omega_i}$,
- $\omega_i > (\omega_K \Leftrightarrow \omega_{K+1-a})$, soit $\omega_i \geq (\omega_K \Leftrightarrow \omega_{K-a})$;
et une coalition $A_{\omega_j}$ telle que :
- $Z_k(\bar{y}) > Z_k(\bar{x})$ pour tout $k \in A_{\omega_j}$,
- $\omega_j > (\omega_K \Leftrightarrow \omega_{K+1-a})$, soit $\omega_j \geq (\omega_K \Leftrightarrow \omega_{K-a})$.

Comme $A_{\omega_i} \cap A_{\omega_j} = \emptyset$, alors le poids de $A_{\omega_i} \cup A_{\omega_j}$ est supérieur à $2(\omega_K \Leftrightarrow \omega_{K-a})$. Or $2(\omega_K \Leftrightarrow \omega_{K-a}) = \omega_K + (\omega_K \Leftrightarrow 2\omega_{K-a})$, quantité strictement supérieure à $\omega_K$ si $\frac{\omega_K}{2} > \omega_{K-a}$, ce qui est absurde.
Ainsi $Z(\bar{x}) = Z(\bar{y})$.

### 4.1.2 OMAP1, une méthode de conciliation

Notre démarche consiste à ajouter au problème $(P)$ un critère supplémentaire $Z_0$, dit de conciliation, et de résoudre $(P_0)$, nouveau problème ainsi obtenu. Notre objectif est d'essayer de dégager une solution au problème $(P)$ en utilisant l'aspect conciliateur du critère $Z_0$ tout en tentant de minimiser la distorsion des données initiales. Pour mesurer cette distorsion des données, nous proposons d'utiliser le poids $\omega_0$ représentant l'importance relative de $Z_0$ par rapport aux autres critères.
Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que les critères $Z_1, ..., Z_p$ sont d'importances égales ($\omega(Z_i) = 1$ pour $i = 1, \cdots, p$). Le problème $(P_0)$ est le suivant :

$$(P_0) \text{ Maximiser } Z(x) = (Z_0(x), Z_1(x), Z_2(x), \cdots, Z_p(x))$$
$$\text{s.c. } x \in X.$$

**Théoreme 4.1.2.** *Supposons que le problème $(P)$ n'admette pas de point a-efficace maximal. Si $(P_0)$ permet de dégager un point $a \Leftrightarrow$efficace maximal, alors $\omega_0$ est nécessairement supérieur ou égal à $(p \Leftrightarrow 2a_{max})$.*

**Preuve** Notons $I_0$ l'ensemble des indices des critères du problème $P_0$. Supposons que $\omega_0$ soit strictement inférieur à $(p \Leftrightarrow 2a_{max})$.
Par hypothèse, le poids $\omega(I_0)$ de la coalition $\{I_0\}$, égal à $p + \omega_0$, est strictement inférieur à $p + (p \Leftrightarrow 2a_{max}) = 2(p \Leftrightarrow a_{max})$. La moitié des poids des critères de $I_0$ est donc strictement inférieure à $(p \Leftrightarrow a_{max})$.
Par ailleurs, par définition de $a_{max}$, il n'existe aucune solution $x$ de $X$ qui est $a$-efficace tel que $a$ est strictement supérieur à $a_{max}$. Donc pour tout $x$, on peut trouver une solution $y$ telle qu'il existe une coalition $A_{\omega_i}$, dont le poids $\omega_i$ est strictement supérieur à $(p \Leftrightarrow a_{max})$, et qui vérifie :
(i) $Z_k(y) \geq Z_k(x)$ pour tout $k \in A_{\omega_i}$, et
(ii) $Z_k(y) > Z_k(x)$ pour au moins un $k \in A_{\omega_i}$.
Ainsi, toute solution $x$ de $X$ est partiellement dominée par rapport à une coalition dont le poids est strictement supérieur à la moitié des poids des critères de $I_0$. Dans ces conditions, il n'existe pas de point $a \Leftrightarrow$efficace maximal, ce qui est contraire à l'hypothèse; et $\omega_0$ est nécessairement supérieur ou égal à $(p \Leftrightarrow 2a_{max})$.

On note par $\underline{\omega}_0$ le seuil $(p \Leftrightarrow 2a_{max})$ et par $\underline{P}_0$ le problème correspondant.

**Théoreme 4.1.3.** *Les points a-efficaces maximaux possibles de $(\underline{P}_0)$ sont nécessairement des points $a_{max}$-efficaces de $(P)$.*

**Preuve** Soit $x_0$ un point $a \Leftrightarrow$efficace maximal du problème $(\underline{P}_0)$. Supposons que $x_0$ ne soit pas un point $a_{max}$-efficace de $(P)$. Il existe donc une solution $x$ qui domine partiellement $x_0$ par rapport à une coalition $A_{(p+1-a_{max})}$ du problème $(P)$. Or, cette coalition est aussi une coalition du problème $(\underline{P}_0)$, alors le point $x_0$ est dominé par rapport à une coalition dont le poids est strictement supérieur à la moitié des poids des critères de $I_0$; ce qui contredit l'hypothèse. Le point $x_0$ est donc un point $a_{max}$-efficace de $(P)$.

Soit $\succ_0$ l'ordre strict défini sur $X$ par le critère $Z_0$ de la façon suivante :

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \succ x_2 \text{ si } Z_0(x_1) > Z_0(x_2).$$

Rappelons qu'un maximum $M$ d'un ensemble $X$ ordonné par la relation stricte $\succ$ est une alternative de $X$ telle que $M \succ x$, $\forall x \in X \backslash \{M\}$.

**Théoreme 4.1.4.** *Si $x$ est à la fois un point $a_{max}$-efficace de $(P)$ et un maximum de $(X, \succ_0)$, alors ce point est un point $a \Leftrightarrow$efficace maximal de $(\underline{P}_0)$.*

**Preuve** Soit $x$ un point $a_{max}$-efficace de $(P)$. Tout point $y$ de $X$ vérifie donc l'une des conditions suivantes:
(i) il existe une coalition $A_{a_{max}} \in \mathcal{P}(I)$ telle que :
$Z_k(x) > Z_k(y)$ pour tout $k \in A_{a_{max}}$,
(ii) $(Z_1(x), \cdots Z_p(x)) \geq (Z_1(y), \cdots, Z_p(y))$.

Comme $x$ est un maximum de $(X, \succ_0)$, alors $Z_0(x) > Z_0(y)$.
Ainsi, si $y$ vérifie la condition (ii), il vérifie la condition $(\text{ii})_0$ :
$(Z_0(x), Z_1(x), \cdots Z_p(x)) \geq ((Z_0(x), Z_1(y), \cdots Z_p(y))$;
et si $y$ vérifie la condition (i), alors la coalition $A \cup \{Z_0\}$ dont le poids est égal à $a_{max} + p \Leftrightarrow 2a_{max} = p \Leftrightarrow a_{max}$ vérifie la condition $(\text{i})_0$: $Z_k(x) > Z_k(y)$ pour tout $k \in A \cup \{Z_0\}$.
Le point $x$ est donc un point $a$-efficace maximal de $(P_0)$.

**Corollaire 4.1.2.** *Le poids $\underline{\omega}_0$ est le plus petit $\omega_0$ possible tel qu'il existe un critère $Z_0$ et un poids $\omega_0$ qui rendent non vide l'ensemble des points $a$-efficaces maximaux de $P_0$.*

**Preuve** Le poids $\omega_0$ est différent de zéro. En effet, s'il avait été nul, $(P)$ aurait eu au moins un point $a \Leftrightarrow$efficace maximal.
Le poids $\omega_0$ étant égal à $\underline{\omega}_0$, on peut se demander si le choix d'un critère $Z_0$ convenable peut donner comme point $a \Leftrightarrow$efficace maximal de $(\underline{P}_0)$ un quelconque des points $a_{max} \Leftrightarrow$efficaces de $(P)$. Les théorèmes 4.1.3 et 4.1.4 répondaient évidemment à cette question.

Nous concluons donc que le décideur qui souhaite concilier les critères conflictuels, en utilisant le minimum de pouvoir pour dégager une solution finale, doit faire son choix parmi l'ensemble des points $a_{max}$⇔efficaces. Enfin, nous signalons que ces résultats peuvent être étendus aux points qui vérifient l'axiome d'efficacité partielle maximale.

## 4.2 OMAP, une approche non compensatoire

En s'inspirant de l'approche OMAP, nous proposons dans cette section une règle de rangement notée $\succ_{OMAP}$. Nous introduisons cette règle pour les raisons suivantes :

- d'une part, elle pourra être utilisée dans les problématiques de rangement;

- d'autre part, elle nous permettra d'analyser d'une manière formelle l'aspect non compensatoire de l'approche OMAP.

### 4.2.1 La règle de rangement $\succ_{OMAP}$

La procédure de rangement $\succ_{OMAP}$ (lue " préféré selon OMAP") repose sur le principe intuitif suivant : *moins une solution est vulnérable, plus elle est préférée.*

D'une manière plus formelle, considérons l'ensemble $\mathcal{P}(I)$ des coalitions de critères de notre problème d'optimisation $(P)$. Supposons que, suite à la construction d'une hiérarchie de coalitions, nous disposons d'un préordre sur $\mathcal{P}(I)$.

Soient $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1}, \cdots, \mathcal{C}_K$ les classes d'équivalences de ce préordre telles que pour tout $(A, B) \in \mathcal{C}_k \times \mathcal{C}_{k+1}$, la coalition $A$ soit plus importante que $B$, $(k = 1, \cdots, K \Leftrightarrow 1)$.

Soient $x$ et $y \in X$, notons par $\Pi_k(x, y)$ le nombre de coalitions $\mathcal{X}_i$ de $\mathcal{C}_k$ telles que $x$ est partiellement efficace par rapport à $\mathcal{X}_i$ et $y$ est partiellement dominée par rapport à $\mathcal{X}_i$.

Soit $\mathcal{I}_{xy} = \{k \in \{1, \cdots, K\} | \Pi_k(x, y) \neq \Pi_k(y, x)\}$.

La relation $\succ_{OMAP}$ peut alors être définie :

**Définition 4.2.1.** *$x \succ_{OMAP} y$ si et seulement si $\mathcal{I}_{xy} \neq \emptyset$ et $\Pi_k(x, y) > \Pi_k(y, x)$ pour le plus petit $k$ dans $\mathcal{I}_{xy}$, et $x \sim_{OMAP} y$ si $x \not\succ_{OMAP} y$ et $y \not\succ_{OMAP} x$*[2].

2. Notons que l'inexistence des incomparabilités entre les alternatives se justifie par le fait que la comparaison des alternatives est faite par un décideur qui n'utilise que les principes de OMAP lors de la comparaison.

### 4.2.2 Les structures de préférences non compensatoires

Avant d'étudier la structure sous-jacente à la procédure $\succ_{OMAP}$, nous allons présenter les définitions et les propositions usuelles sur les structures de préférences non compensatoires, extraites des travaux de Fisburn et de Bouyssou & Vansnick (cf. [FISHBURN 76], [BOUYSSOU 85], [BOUYSSOU 86] et [VANSNICK 86a]).

En termes vagues, la notion de compensation correspond à l'existence de "taux de substituation" (tradeoffs) entre critères, c'est-à-dire à la possibilité de compenser un "désavantage" sur un critère par un large "avantage" sur un autre critère. Une relation de préférence est donc non compensatoire si ce type de situations ne se produit pas [BOUYSSOU 86].

Les notations suivantes sont utilisées dans la suite de cet exposé.

- $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_p$, le produit cartésien des ensembles non vide $X_i$;
- $\Omega = \{1, 2, \cdots, p\}$, ensemble des indices des attributs;
- $\mathcal{P}(\Omega)$, ensemble des parties de $\Omega$;
- $(X, \succ)$, structure de préférence définie par une relation binaire asymétrique $\succ$ ("préféré à") sur $X$. La relation $\sim$ sur $X$ est définie par $x \sim y$ si et seulement si $x \not\succ y$ et $y \not\succ x$;
- $(x_i, (y_j)_{j \neq i}) = (y_1, y_2, \cdots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \cdots, y_p)$; un élément de $X$,
- $S$, ensemble de toutes les paires des sous-ensembles disjoints de $\Omega$:

$$S = \{(A, B) \mid A, B \in \mathcal{P}(\Omega),\ et\ A \cap B = \emptyset\};$$

- $\dot{\supset}$, relation binaire sur $S^2$ définie par: $(A, B) \dot{\supset} (C, D)$ si et seulement si $A \supseteq C$ et $B \subseteq D$ avec au moins une inclusion stricte.

**Définition 4.2.2.** *Pour tout $i \in \Omega$, et tout $x_i$ et $y_i$ de $X_i$, nous définissons une relation binaire $\succ_i$ sur $X_i$ par $x_i \succ_i y_i$ si et seulement si $(x_i, (a_j)_{j \neq i}) \succ (y_i, (a_j)_{j \neq i})$ pour tout $(a_j)_{j \neq i} \in \times_{j \neq i} X_j$.*[3]

L'asymétrie de $\succ$ implique évidemment l'asymétrie de chaque $\succ_i$.

**Définition 4.2.3.** *Pour toute paire ordonnée $(x, y) = ((x_1, \cdots, x_p), (y_1, \cdots, y_p)) \in X^2$, nous notons $P(x, y) = \{i \in \Omega \mid x_i \succ_i y_i\}$.*

3. Nous supposons que $X_i$ est un attribut essentiel: $x_i \succ_i y_i$ pour quelques $x_i$ et $y_i \in X_i$.

Ainsi $P(x,y)$ désigne l'ensemble des attributs qui préfèrent $x$ à $y$. Les sous-ensembles $P(x,y)$ et $P(y,x)$ sont évidemment disjoints.

**Définition 4.2.4.** [Fishburn 76] $(X,\succ)$ *est une N.P.S. régulière (Structure de Préférence Non compensatoire) si et seulement si, pour tout* $x,y,z,w \in X$

$$[(P(x,y),P(y,x)) = (P(z,w),P(w,z))] \Rightarrow [x \succ y \Rightarrow w \succ z] \tag{4.1}$$

$$[P(x,y) \neq \emptyset, P(y,x)) = \emptyset] \Rightarrow x \succ y \tag{4.2}$$

En d'autres termes, la préférence entre $x$ et $y$, pour une N.P.S., ne dépend que des sous-ensembles de $\Omega$ qui préfèrent $x$ à $y$ et $y$ à $x$[4]. Cette propriété caractérise toutes les structures de préférences non compensatoires. Une seconde propriété de ce type de structures est la propriété de l'indépendance conditionnelle :

$$(x_i,(x_j)_{j\neq i}) \succ (y_i,(x_j)_{j\neq i}) \; ssi \; (x_i,(y_j)_{j\neq i}) \succ (y_i,(y_j)_{j\neq i})$$

**Définition 4.2.5.** *Nous notons par* $\succ\!\succ$ *et* $\approx$ *les relations binaires sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *définies par*
$A \succ\!\succ B$ *ssi* $A \cap B = \emptyset$, *et* $[\forall (x,y) \in X^2 : ((P(x,y),P(y,x)) = (A,B) \Rightarrow x \succ y]$, *et*
$A \approx B$ *ssi* $A \cap B = \emptyset$, *et* $[\forall (x,y) \in X^2 : ((P(x,y),P(y,x)) = (A,B) \Rightarrow x \sim y]$.

**Définition 4.2.6.** [Fishburn 76] *Une N.P.S.* $(X,\succ)$ *est dite*
*A1. regulière si* $A \succ\!\succ \emptyset$ *pour tout* $A \subseteq \Omega$;
*A2. monotone si* $[(A,B) \overset{\bullet}{\supset} (C,D)$ *et* $C \succ\!\succ D] \Rightarrow A \succ\!\succ B$;
*A3. fortement monotone si* $[(A,B) \overset{\bullet}{\supset} (C,D)$ *et* $C \succ\!\succ D$ *ou* $C \approx D] \Rightarrow A \succ\!\succ B$;
*A4. additive si* $[A \cap C = \emptyset, (A \cup C) \cap (B \cup D) = \emptyset,$
$A \succ\!\succ B$ *et* $C \succ\!\succ D$ *ou* $C \approx D] \Rightarrow A \cup C \succ\!\succ B \cup D$;
*A5. super-additive si* $[(A \cup C) \cap (B \cup D) = \emptyset,\ A \succ\!\succ B$ *et* $C \succ\!\succ D] \Rightarrow A \cup C \succ\!\succ B \cup D$;
*A6. décisive si* $[(A,B) \in S$ *et* $(A,B) \neq (\emptyset,\emptyset)] \Rightarrow A \succ\!\succ B$ *ou* $B \succ\!\succ A$;
*A7. acyclique par rapport aux attributs si la relation* $\succ\!\succ$ *est acyclique;*
*A8. acyclique si la relation* $\succ$ *sur* $X$ *est acyclique;*
*A9. partiellement ordonnée si la relation* $\succ$ *sur* $X$ *est un ordre partiel strict;*
*A10. faiblement ordonnée si la relation* $\succ$ *est un ordre faible;*
*A11. doublement essentielle si pour chaque* $i \in \Omega$ *il existe* $a_i, b_i, c_i \in X_i$ *tel que* $a_i \succ_i b_i$ *et* $b_i \succ_i c_i$;
*A12. lexicographique si il existe une permutation* $\sigma$ *sur* $\Omega$ *telle que, pour tout* $x,y \in X$, $x \succ y$ *si* $x_i \not\sim y_i$ *pour un* $i$ *et* $x_{\sigma(i)} \succ_{\sigma(i)} y_{\sigma(i)}$ *pour le plus petit* $i$ *tel que* $x_{\sigma(i)} \not\sim_{\sigma(i)} y_{\sigma(i)}$

**Théoreme 4.2.1.** [Fishburn 76] *Supposons que* $(\mathcal{X},\succ)$ *est une N.P.S. Alors*
*(a)* $A10 \Rightarrow A4 \Rightarrow A3 \Rightarrow A2 \Rightarrow A1$;

4. La condition (4.1) est connue aussi sous le nom de condition d'indépendance par rapport aux alternatives irrelevantes. D'ailleurs, Tanguiane (91, pp. 17-20) présente cette condition comme une caractérisation de l'approche ordinale pour l'agrégation des préférences (par opposition à l'approche cardinale qui prend en compte les intensités de préférences).

*(b)* $[A9 \;\&\; A11] \Rightarrow A5 \Rightarrow A1$;
*(c)* $[A5 \;\&\; A6] \Rightarrow A4$;
*(d)* $A10 \Rightarrow A9 \Rightarrow A8 \Rightarrow A7$;
*(e)* $A9 \Rightarrow A2$;
*(f)* $[A5 \;\&\; A6 \;\&\; A7] \Rightarrow A12$;
*(g)* $[A10 \;\&\; A11] \Rightarrow A12$;

**Définition 4.2.7.** [Bouyssou *85*] *$(X, \succ)$ est une structure de préférence concordante de type $\rho$, notée $(CPS\rho)$, où $\rho$ est un rationnel supérieur ou égal à 1 ssi*
$\exists f_1, f_2, \cdots, f_p \in R^+$ *tels que pour tout* $x, y \in X$
$x \succ y$ *ssi* $\sum_{i \in P(x,y)} f_i > \rho \sum_{j \in P(y,x)} f_j$.

### 4.2.3 OMAP, une approche non compensatoire

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que la procédure de rangement $\succ_{OMAP}$ peut-être formalisée comme une structure de préférence non compensatoire et concordante. Pour utiliser le même formalisme que celui de Fishburn (76), notons

- $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_l$, le produit cartésien de toutes les coalitions de critères;
- $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_i, \cdots, \tilde{x}_l)$, un élément de $\mathcal{X}$ (les restrictions du vecteur critère de $x$ sur les coalitions [5]);
- $\Omega = \{1, \cdots, l\}$, l'ensemble des indices des attributs $\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_l$;
- $|.|$, le cardinal d'un ensemble.

Associons à chaque attribut $\mathcal{X}_i$ la relation binaire asymétrique $\succ_i$ définie par :
pour tout $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i \in \mathcal{X}_i$, $\tilde{x}_i \succ_i \tilde{y}_i$ si et seulement si $\tilde{x}_i$ est efficace (i.e., $x$ est partiellement efficace par rapport à $\mathcal{X}_i$), et $\tilde{y}_i$ est dominée (i.e., $y$ est partiellement dominée par rapport à $\mathcal{X}_i$).

Nous sommes donc en présence d'un nouveau problème de décision multi-attribut construit à partir des données du problème initial $(P)$.

Notons

- $P(\tilde{x}, \tilde{y}) = \{i \in \Omega \mid \tilde{x}_i \succ_i \tilde{y}_i\}$,
- $P_k(\tilde{x}, \tilde{y}) = \{i \in \Omega \mid \tilde{x}_i \succ_i \tilde{y}_i \text{ et } \mathcal{X}_i \in \mathcal{C}_k\}$,
- $\mathcal{I}_{\tilde{x}\tilde{y}} = \{k \in \{1, \cdots, K\} \text{ tel que } |P_k(\tilde{x}, \tilde{y})| \neq |P_k(\tilde{y}, \tilde{x})|\}$.

La relation $\succ$ peut être définie comme suit :

5. $x$ est une solutions réalisable du problème d'optimisation initial $(P)$.

$\tilde{x} \succ \tilde{y}$ si et seulement si $\mathcal{I}_{\tilde{x}\tilde{y}} \neq \emptyset$ et $|P_k(\tilde{x}, \tilde{y})| > |P_k(\tilde{y}, \tilde{x})|$ pour le plus petit $k$ dans $\mathcal{I}_{\tilde{x}\tilde{y}}$, et
$\tilde{x} \sim \tilde{y}$ si $\tilde{x} \not\succ \tilde{y}$ et $\tilde{y} \not\succ \tilde{x}$.
En remarquant que $\Pi_k(x, y) = |P_k(\tilde{x}, \tilde{y}|$, nous en déduisons que

$$x \succ_{OMAP} y \iff \tilde{x} \succ \tilde{y}.$$

Nous allons donc utiliser cette formalisation pour monter le caractère non compensatoire de OMAP.

**Théoreme 4.2.2.** $(\mathcal{X}, \succ)$ *est une N.P.S. qui vérifie les propriétés A10, A9, A8, A7, A4, A3,A2,A1.*

**Preuve** Dans une première étape, nous montrons que $(\mathcal{X}, \succ)$ est une structure de préférence non compensatoire. Dans une seconde étape nous montrons que $\succ$ est un ordre faible.

**$\succ$ est asymétrique**

Soient $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{X}$, supposons que $\tilde{x} \succ \tilde{y} : \mathcal{I}_{\tilde{x}\tilde{y}} \neq \emptyset$ et $|P_k(\tilde{x}, \tilde{y})| > |P_k(\tilde{y}, \tilde{x})|$ pour le premier $k$ dans $\mathcal{I}_{\tilde{x}\tilde{y}}$.
Si $\tilde{y} \succ \tilde{x}$ alors $|P_k(\tilde{x}, \tilde{y})| < |P_k(\tilde{y}, \tilde{x})|$ pour le premier $k$ dans $\mathcal{I}_{\tilde{x}\tilde{y}}$, ce qui contredit l'hypothèse.
Ainsi, $(\mathcal{X}, \succ)$ est asymétrique.

**condition de non compensation**

Soient $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w} \in \mathcal{X}$ tel que $(P(\tilde{x}, \tilde{y}), P(\tilde{y}, \tilde{x})) = (P(\tilde{z}, \tilde{w}), P(\tilde{w}, \tilde{z}))$, d'où

$$(|P_k(\tilde{x}, \tilde{y})|, |P_k(\tilde{y}, \tilde{x}))|) = (|P_k(\tilde{z}, \tilde{w})|, |P_k(\tilde{w}, \tilde{z})|) \text{ pour tout k=1,...,K.}$$

Ainsi si $\tilde{x} \succ \tilde{y}$ alors $\tilde{z} \succ \tilde{w}$.
Ceci peut s'interpréter par le fait que la comparaison de deux alternatives par la règle $\succ_{OMAP}$ ne dépend que des conditions d'efficacité partielle vérifiées par ces deux alternatives. Comme l'efficacité est une notion non compensatoire, cette règle est donc non compensatoire.

**$\succ$ est un ordre faible**

Il suffit de montrer que $\succ$ est transitive, et que $\sim$ est réflexive et transitive. Soient $\tilde{x}, \tilde{y}$ et $\tilde{z} \in \mathcal{X}$ tels que $\tilde{x} \succ \tilde{y}$ et $\tilde{y} \succ \tilde{z}$, montrons que $\tilde{x} \succ \tilde{z}$. Pour cela nous utilisons le formalisme suivant :
Nous décrivons l'état de $\tilde{x}, \tilde{y}$ et $\tilde{z}$ par rapport à un attribut $\mathcal{X}_i$ par le triplet $(a, b, c) \in \{e, d\}^3$ (e (resp. d) signifie que $\tilde{x}_i$ est efficace (resp. dominée) par rapport à $\mathcal{X}_i$).
Nous notons par $P_k(a, b, c)$ le nombre d'occurrences de la configuration de l'état $(a, b, c)$ lorsque $\mathcal{X}_i$ varie dans $\mathcal{C}_k$.
Pour un k fixé :
$|P_k(\tilde{x}, \tilde{y})| = P_k(e, d, d) + P_k(e, d, e)$,

$|P_k(\tilde{y},\tilde{x})| = P_k(d,e,d) + P_k(d,e,e),$
$|P_k(\tilde{y},\tilde{z})| = P_k(d,e,d) + P_k(e,e,d),$
$|P_k(\tilde{z},\tilde{y})| = P_k(e,d,e) + P_k(d,d,e),$
$|P_k(\tilde{x},\tilde{z})| = P_k(e,d,d) + P_k(e,e,d),$
$|P_k(\tilde{z},\tilde{x})| = P_k(d,d,e) + P_k(d,e,e),$

Soit $k_0$ (resp. $k_1$) le plus petit $k$ de $\mathcal{I}_{\tilde{x}\tilde{y}}$ (resp. $\mathcal{I}_{\tilde{y}\tilde{z}}$) tel que $|P_k(\tilde{x},\tilde{y})| > |P_k(\tilde{y},\tilde{x})|$ (resp. $|P_k(\tilde{y},\tilde{z}) > P_k(\tilde{z},\tilde{y})|$). Supposons, sans perte de généralité que $k_0 = \min(k_0,k_1)$. Nous avons donc

$$|P_{k_0}(\tilde{x},\tilde{y})| > |P_{k_0}(\tilde{y},\tilde{x})| \; et \; |P_{k_0}(\tilde{y},\tilde{z})| = |P_{k_0}(\tilde{z},\tilde{y})|$$

D'où

$$P_{k_0}(e,d,d) + P_{k_0}(e,d,e) > P_{k_0}(d,e,d) + P_{k_0}(d,e,e) \tag{4.3}$$
$$P_{k_0}(d,e,d) + P_{k_0}(e,e,d) = P_{k_0}(e,d,e) + P_{k_0}(d,d,e) \tag{4.4}$$

En additionnant (4.3) et (4.4), nous obtenons:

$$P_{k_0}(e,d,d) + P_{k_0}(e,e,d) > P_{k_0}(d,d,e) + P_{k_0}(d,e,e).$$

Ainsi pour le plus petit $k$ de $\mathcal{I}_{\tilde{y}\tilde{z}}$ : $|P_k(\tilde{x},\tilde{z})| > P_k(\tilde{z},\tilde{x})|$.

Nous avons $\tilde{x} \sim \tilde{y}$ si et seulement si $\mathcal{I}_{\tilde{x}\tilde{y}} = \emptyset$, c'est-à-dire que $|P_k(\tilde{x},\tilde{y})| = |P_k(\tilde{y},\tilde{x})|$ pour tout k. La relation $\sim$ est évidement réflexive et pour montrer la transitivité de cette relation, il suffit d'utiliser le même raisonnement que précédemment.

L'ensemble $\mathcal{X}$ constitue donc une N.P.S. faiblement ordonnée (A10). D'après le théorème de Fishburn (1976), la relation $\succ$ vérifie alors les propriétés A9, A8, A7, A4, A3, A2, A1.

**Théoreme 4.2.3.** $(\mathcal{X},\succ)$ *est une CSP1.*
**Preuve** Pour montrer que $(\mathcal{X},\succ)$ est une N.P.S. concordante, il suffit de choisir $f_k = M_k$ ($M_k \in R^+$) pour toute coalition $\mathcal{X}_i \in \mathcal{C}_k$, avec $M_1 \gg M_2 \cdots \gg M_K$[6].
Dans notre cas,

$$\sum_{i \in P(\tilde{x},\tilde{y})} f_i > \rho \sum_{j \in P(\tilde{y},\tilde{x})} f_j$$

est équivalent à

$$\sum_{k=1}^{K} M_k |P_k(\tilde{x},\tilde{y})| > \sum_{k=1}^{K} M_k |P_k(\tilde{y},\tilde{x})|$$

6. $M_i \gg M_j$ signifie que $M_i$ est très grand par rapport à $M_j$.

puisque la comparaison entre $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ se fait suivant la différence $|P_k(\tilde{x},\tilde{y})| \Leftrightarrow |P_k(\tilde{y},\tilde{x})|$ d'une façon lexicographique ($k$ allant de 1 jusqu'à $K$).

**Théoreme 4.2.4.** *La relation $\succ$ implique une indépendance au sens des préférences entre les sous-ensembles des critères du problème $(P)$.*

Cette condition est une conséquence directe du fait que la relation $\succ$ est une N.P.S. (voir [Bouyssou 84]).

L'hypothèse sous-jacente à la règle $\succ_{OMAP}$ qui concerne l'indépendance des critères exige une indépendance au sens des préférences entre les sous-ensembles des critères. Cette condition d'indépendance est plus faible que l'indépendance au sens des préférences entre les critères utilisée dans la plupart des méthodes multicritères.

# 4.3 Importance des critères

## 4.3.1 Importance des critères dans les méthodes non compensatoires

L'importance attribuée aux différents critères dans une structure de préférence non compensatoire correspond généralement au nombre de voix accordées à chacun des critères dans le cadre d'une procédure de vote. Elle peut aussi être définie par une relation "plus important que" entre les critères (procédure lexicographique) ou entre les coalitions disjointes des critères (méthode majoritaire).

Notons que dans le cas non compensatoire, les coefficients d'importance relative, $\omega_k$, des critères $Z_k$ sont indépendants du codage de l'échelle du critère [Mousseau 93]. En d'autres termes, la substitution du critère $Z_k$ par une fonction monotone croissante $\phi(Z_k)$ n'affecte pas la valeur d'$\omega_k$.

## 4.3.2 OMAP et importance des critères

**Importances des critères : Sens et évaluation**

Rappelons le sens de la relation d'importance entre les coalitions de critères dans l'approche OMAP. Pour toute paire de coalitions $(A,B)$ de $\mathcal{P}(I)^2$, $A$ est plus importante que $B$ si pour toute paire d'alternatives $(x,y)$ vérifiant la condition (1) : " *$A$ préfère $x$ à $y$,*[7] *$B$ préfère $y$ à $x$, et les autres coalitions sont indifférentes entre $x$ et $y$*"; alors $x$ est préférable à $y$.

Il existe différentes manières de construire ce type de relation. Ces méthodes diffèrent selon la procédure de recueil des informations auprès du décideur (le type de

7. $x$ (resp. $y$) partiellement efficace (resp. dominée) par rapport à $A$.

question et l'ordre dans lequel elles sont posées), et selon la procédure de déduction qui utilise les informations obtenues[8]. Dans notre cas, nous proposons une procédure de recueil d'information indirecte qui pose au décideur des questions de comparaisons par paires d'alternatives. Pour la comparaison de chaque paire de coalitions, nous choisissons des alternatives qui vérifient la condition (1). L'utilisation de cette information est donc immédiate. Notons que cette méthode exige un nombre important de questions vu le nombre de coalitions à comparer. Par contre, si nous utilisons des coefficients d'importances $\omega_k$ $(k = 1, \cdots, p)$ pour construire cette relation en supposant l'existence d'une fonction poids additive (cas de la procédure OMAP1), la procédure de déduction consistera en une résolution d'un système d'inéquations construit de la manière suivante : $A, B$ étant deux coalitions, si $(x, y)$ vérifient la condition (1) et $x$ est préférable à $y$ alors ces conditions se traduisent par l'inéquation suivante $\sum_{k\in A}\omega_k > \sum_{k\in B}\omega_k$.

### Robustesse de OMAP1 par rapport aux poids

Devant l'instabilité de la structure de préférence des décideurs, la robustesse de la solution finale est une propriété souhaitable pour ne pas dire indispensable. Une étude de robustesse est donc nécessaire.

Pour fixer les idées, supposons que les critères aient la même importance relative, c'est-à-dire que $\omega_k = 1, \forall k \in I$. Soit $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_p)$ le vecteur des variations des poids des critères.

Nous nous proposons d'étudier la robustesse de la méthode OMAP1 dans le cas d'un exemple particulier avant d'étudier le cas général. Considérons un problème d'optimisation $(P)$ en présence des critères $Z_1(.)$, $Z_2(.)$, $Z_3(.)$, et avec la hiérarchie de coalitions suivante :

$$\begin{array}{c} \{Z_1(.), Z_2(.), Z_3(.)\} \quad \succ \\ \{Z_1(.), Z_2(.)\} \sim \{Z_1(.), Z_3(.)\} \sim \{Z_2(.), Z_3(.)\} \quad \succ \\ \{Z_1(.)\} \sim \{Z_2(.)\} \sim \{Z_3(.)\}. \end{array}$$

Pour que le problème $(P')$ avec des poids d'importance : $\omega(Z_1) = 1 + \epsilon_1$, $\omega(Z_2) = 1 + \epsilon_2$, $\omega(Z_3) = 1 + \epsilon_3$ $(\epsilon_1,\ \epsilon_2,\ \epsilon_3 > 0)$ ait la même solution que le problème $(P)$ il suffit que la hiérarchie de coalitions correspondante au problème $(P')$ préserve les relations d'importances de la hiérarchie de $(P)$. On obtient ainsi les conditions suffisantes suivantes :

$$\begin{array}{c} 1 > \epsilon_1 \Leftrightarrow \epsilon_2 \Leftrightarrow \epsilon_3, \\ 1 > \epsilon_2 \Leftrightarrow \epsilon_1 \Leftrightarrow \epsilon_3, \\ 1 > \epsilon_3 \Leftrightarrow \epsilon_1 \Leftrightarrow \epsilon_2. \end{array}$$

Dans le cadre général où nous sommes en présence de $p$ critères avec $\omega(Z_k) = 1 + \epsilon_k$, il suffit que la hiérarchie de coalitions correspondante au problème $(P')$ préserve les

8. Pour plus de détails, voir [Mousseau 93].

relations d'importances de la hiérarchie du problème $(P)$. Plus précisément, il suffit que toute coalition de $(p+1 \Leftrightarrow a)$ critères demeure plus importante que toute coalition de $(p \Leftrightarrow a)$ critères dans la hiérarchie de $(P')$. Formellement, les conditions suffisantes sont

$$\sum_{i \in I_{p+1-a}} 1 + \epsilon_i > \sum_{j \in I_{p-a}} 1 + \epsilon_j \quad \textit{pour } a = 1, ..., p.$$

Le polyèdre de variations est donc défini par les inéquations

$$1 > \sum_{i \in I_{p+1-a}} \epsilon_i \Leftrightarrow \sum_{j \in I_{p-a}} \epsilon_j \quad \textit{pour } a = 1, ..., p.$$

Nous concluons que la méthode OMAP1 est robuste par rapport aux poids.

## 4.4 OMAP et prudence

### 4.4.1 Principe de prudence

Avant d'étudier la relation entre OMAP et la notion de prudence développé par Arrow et Raynaud (86), nous énonçons les différentes formes de prudence utilisées jusqu'à maintenant.
Notons
- $S(x, y)$, le nombre de critères $k$ tels que $Z_k(x) > Z_k(y)$ (qui rangent $x$ avant $y$).
- $E(x, y)$, le nombre de critères $k$ tels que $Z_k(x) = Z_k(y)$ (qui sont indifférent entre $x$ et $y$).

Le coefficient de surclassement de $x$ par rapport $y$, peut être défini de différentes manières :

– Si les arguments de l'affirmation "$x$ surclasse $y$" sont mesurés uniquement par le nombre de critères qui préfèrent strictement $x$ à $y$, le coefficient de surclassement est défini par $a_>(x, y) = S(x, y)$. Nous parlerons dans ce cas de surclassement strict.

– Si les arguments de l'affirmation "$x$ surclasse $y$" sont mesurés par le nombre de critères qui préfèrent strictement $x$ à $y$, et le nombre de critères qui sont indifférents entre les deux, le coefficient de surclassement est défini par $a(x, y) = S(x, y) + \frac{E(x,y)}{2}$.

Nous définissons la propriété de $m$-prudence de la manière suivante:
Soient $m$ un multiple de $\frac{1}{2}$ appartenant à $[0, p]$, et $m'$ un entier inférieur ou égal à $p$.

**Définition 4.4.1.** *Une solution $x$ est $m$-prudente si* $\min_{y \in X} \ a(x, y) \ \geq \ m$.

**Définition 4.4.2.** *Une solution $x$ est strictement $m$-prudente si* $\min_{y \in X} \ a_>(x, y) \ \geq \ m'$.

Rappelons qu'une solution est (strictement) prudente si elle est (strictement) m-prudente, et s'il n'existe pas d'autre solution (strictement) $\tilde{m}$-prudente tel que $\tilde{m}$ soit strictement supérieur à $(m')$ $m$.

### 4.4.2 Concept d'$a$-efficacité et principe de prudence

#### Condition d'$a$-efficacité et prudence

Premièrement, remarquons que :

- pour $x$ et $y \in X$, $Z(x)$ $a$-domine $Z(y)$ si et seulement si $S(x,y) > 0$ et $S(x,y) + E(x,y) \geq (p + 1 \Leftrightarrow a)$,
- une solution $x$ est $a$-efficace si et seulement si pour tout $y \in X$: $S(x,y) \geq a$ ou $S(x,y) + E(x,y) \;=\; p$.

Ces remarques nous permettent de mettre en évidence la relation entre l'$a$-efficacité et la prudence.

**Théoreme 4.4.1.** *Soit $x$ une solution $a$-efficace.*
*(i) Si $a \leq \frac{p}{2}$ alors $x$ est $a$-prudente,*
*(ii) si $a \geq \frac{p}{2}$ alors $x$ est $\frac{p}{2}$-prudente.*

**Preuve** Si $x$ est $a$-efficace alors pour tout $y \in X$: $S(x,y) \geq a$ ou $S(x,y) + E(x,y) = p$

$$S(x,y) + \frac{E(x,y)}{2} \geq a \text{ } ou \text{ } \frac{S(x,y) + E(x,y)}{2} = \frac{p}{2}$$

$$S(x,y) + \frac{E(x,y)}{2} \geq a \text{ } ou \text{ } S(x,y) + \frac{E(x,y)}{2} \geq \frac{p}{2}$$

$$S(x,y) + \frac{E(x,y)}{2} \geq \min(a, \frac{p}{2})$$

$$\min_{y \in X} a(x,y) \geq \min(a, \frac{p}{2})$$

$$si\ a \leq \frac{p}{2}\ alors\ x\ est\ a \Leftrightarrow prudente,$$

$$si\ a \geq \frac{p}{2}\ alors\ x\ est\ \frac{p}{2} \Leftrightarrow prudente.$$

Nous déduisons que dans les cas courants où les solutions prudentes sont des solutions $m$-prudente avec $m \leq \frac{p}{2}$ [Arrow 86], les points $a_{max}$-efficaces sont des solutions prudentes.

#### Condition d'$a$-efficacité forte et prudence stricte

Comme nous avons défini l'$a$-efficacité, nous proposons la notion d'$a$-efficacité forte comme une extension de l'efficacité forte.

**Définition 4.4.3.** *Une solution $x \in X$ est fortement $a$-efficace si et seulement si il n'existe aucune solution $y$ différente de $x$ telle que $Z_k(y) \geq Z_k(x)$ pour tout $k$ appartenant à un sous-ensemble $I_{(p+1-a)}$.*

Une solution fortement $a$-efficace est donc une solution qui vérifie les conditions d'efficacité forte par rapport à toutes les coalitions de $(p+1 \Leftrightarrow a)$[9]. Nous pouvons montrer sans difficulté qu'une solution $x \in X$ est fortement $a$-efficace si et seulement si pour tout $y \in X \backslash \{x\}$, il existe $I_a \subseteq I$ tel que $Z_k(x) > Z_k(y)$ pour tout $k \in I_a$. Nous en déduisons donc que la notion d'$a$-efficacité forte est équivalente à l'$a$-prudence stricte.

**Définition 4.4.4.** *Soient $x \in X$, $a$ et $\tilde{a} \in I$. Si $\bar{x}$ est fortement $a \Leftrightarrow$efficace et s'il n'existe aucun autre point fortement $\tilde{a} \Leftrightarrow$efficace tel que $\tilde{a} > a$, alors $x$ est fortement $a_{max} \Leftrightarrow$efficace.*

Nous remarquons que les propriétés de $a_{max}$-efficacité forte et de prudence stricte sont équivalentes.

## 4.5 Relations entre OMAP et les autres méthodes multicrtières

### 4.5.1 Relations entre OMAP et les méthodes de surclassement

#### OMAP1 et Electre I

La partie concordance de Electre I coïncide avec l'application de la propriété de l'$a$-dominance faible. En effet, $x$ $a$-domine faiblement $y$ si le nombre de critères $Z_k$ tel que $Z_k(x) \geq Z_k(y)$ est supérieur à $(p+1 \Leftrightarrow a)$. Or dans dans la partie concordance de Electre I, $x$ surclasse $y$ si le poids des critères $Z_k$ tels que $Z_k(x) \geq Z_k(y)$ est supérieur à $c$.
D'où évidemment la relation entre le seuil de concordance $c$ et le degré de dominance $a$.

#### OMAP1 et la règle "Minimum en faveur"

**L'$a$-efficacité faible** Comme nous avons défini l'$a$-efficacité, nous proposons la notion d'$a$-efficacité faible comme une extension de l'efficacité faible.

**Définition 4.5.1.** *Soient $Z^1$ et $Z^2 \in \mathcal{Z}$, $Z^1$ $a$-domine fortement $Z^2$ si et seulement si il existe $I_{(p+1-a)} \subseteq I$ tel que $Z^1_k > Z^2_k$ pour tout $k \in I_{(p+1-a)}$.*

**Définition 4.5.2.** *Une solution $x \in X$ est faiblement $a$-efficace si et seulement si $Z(x)$ est non fortement $a$-dominé.*

Une solution faiblement $a$-efficace est donc une solution qui vérifie les conditions d'efficacité faible par rapport à toutes les coalitions de $(p+1 \Leftrightarrow a)$. Nous pouvons

9. Notons que les points fortement $a$-efficaces sont $a$-efficaces.

montrer sans difficulté qu'une solution $x \in X$ est faiblement $a$-efficace si et seulement si pour tout $y \in X$, il existe $I_a \subseteq I$ tel que $Z_k(x) \geq Z_k(y)$ pour tout $k \in I_a$ [10].

**Définition 4.5.3.** *Soient $x \in X$, $a$ et $\tilde{a} \in I$. Si $\bar{x}$ est faiblement $a$⇔efficace et s'il n'existe aucun autre point faiblement $\tilde{a}$⇔efficace tel que $\tilde{a} > a$, alors $x$ est faiblement $a_{max}$⇔efficace.*

**La règle Minimum en Faveur et l'$a_{max}$-efficacité faible** La règle de minimum en faveur étudiée par Bouyssou et Pirlot [BOUYSSOU 96] est définie de la manière suivante :

**Définition 4.5.4.** *Une relation binaire valuée est une fonction*[11]

$$\mathrm{R} : X^2 \rightarrow [0,1]$$
$$(x,y) \rightarrow \mathrm{R}(x,y).$$

Dans tout ce qui suit, $\mathrm{R}(x,y)$ exprime la crédibilité de la proposition "$x$ au moins aussi bon que $y$". Notons que cette relation est réflexive ($\mathrm{R}(x,x)$=1, pour tout $x \in X$).

La règle minimum en faveur est une règle de choix $C$ défini par son ensemble de choix

$$C(X,\mathrm{R}) = \{x \in X |\min_{y \in X\setminus\{x\}} \mathrm{R}(x,y) \geq \min_{y \in X\setminus\{z\}} \mathrm{R}(z,y) \text{ pour tout } z \in X\}.$$

Nous montrons sans difficulté que l'$a_{max}$-efficacité faible peut être interprétée comme une règle minimum en faveur.

Rappelons que $p$ est le nombre de critères ($p$ assez grand). Considérons la fonction binaire valuée définie de la manière suivante:

$$\mathrm{R} : X^2 \rightarrow [0,1]$$
$$(x,y) \rightarrow \mathrm{R}(x,y) = \frac{a(x,y)}{p},$$

$a(x,y)$ ($\in \{1,\cdots,p\}$) étant le nombre de critères tel que $Z_k(x) \geq Z_k(y)$ [12].

Nous remarquons facilement que la règle $C$ consiste en fait à choisir les points $a_{max}$-efficaces faible. En reprenant certaines caractéristiques de cette règle étudiée par Bouyssou et Pirlot (1996), la règle de choix des points $a_{max}$-efficaces faibles est donc

- ordinale : pour toutes les transformations $\Phi$ strictement croissantes sur $[0,1]$, nous avons $C(X,\mathrm{R}) = C(X,\Phi[\mathrm{R}])$, où $\Phi[\mathrm{R}]$ est une relation valuée définie sur $X$ telle

10. Notons que les points $a$-efficaces sont faiblement $a$-efficaces.
11. Pour une présentation détaillée des relations de préférences valuées, voir [OVCHINNIKOV 91].
12. $a(x,y)$ est le coefficient de surclassement de $x$ par rapport à $y$.

que $\Phi[\mathrm{R}](x,y) = \Phi(\mathrm{R}(x,y))$ pour tout $x, y \in X$.
Dans notre cas, cette propriété s'interprète de la manière suivante : l'$a_{max}$-efficacité faible ne dépend que des coefficients du surclassement.

– continue : pour toute séquence de relations valuées ($\mathrm{R}_i$, $i = 1, 2, \cdots$) définies sur $X$ qui convergent vers R (pour tout $\epsilon > 0 \in R$, il existe un entier $h$ tel que, pour tout $j \geq h$, $|\mathrm{R}_j(x,y) \Leftrightarrow \mathrm{R}(x,y)| < \epsilon$, pour tout $x, y \in X$) nous avons
$[x \in C(X, \mathrm{R}_i)$ pour tout $\mathrm{R}_i$ de la séquence$] \Rightarrow [x \in C(X, \mathrm{R})]$.

Dans notre cas, cette propriété s'interprète de la manière suivante : si un ensemble de problèmes d'optimisation multicritère ($P_i$, $i = 1, 2, \cdots$) qui convergent vers le problème $P$ ( tous les coefficients de surclassement relatifs à chaque paire d'alternatives $a^i(x,y)$ convergent vers $a(x,y)$), alors l'$a_{max}$ - efficacité faible d'une solution par rapport à ces problèmes implique l'$a_{max}$-efficacité faible par rapport à $P$.

### 4.5.2 OMAP1 et la méthode majoritaire

Dans ce paragraphe, nous allons présenter une nouvelle interprétation du vainqueur de Condorcet en montrant le lien qui existe entre la notion d'$a$-efficacité et celle de vainqueur Condorcet.

Rappelons que $|.|$ désigne le cardinal d'un ensemble.

**Définition 4.5.5.** [DEMANGE *80*] *Une alternative $x$ de $X$ est un quasi-vainqueur de Condorcet du problème (P) si :*

$$\forall y \in X \backslash \{x\}, \qquad |\{k \mid Z_k(y) > Z_k(x)\}| < \frac{p}{2}.$$

Or une alternative $x$ de $X$ est une alternative faiblement $a$-efficace si et seulement si

$$\forall y \in X \backslash \{x\}, \qquad |\{k \mid Z_k(y) > Z_k(x)\}| < p + 1 \Leftrightarrow a$$

Donc si
- $p$ est pair, un point faiblement $(\frac{p}{2} + 1)$-efficace est un quasi-vainqueur de Condorcet,
- $p$ est impair, un point faiblement $(\frac{p+1}{2})$-efficace est un quasi-vainqueur de Condorcet.

Remarquons que si les fonctions critères $Z_k(.)$ sont strictement quasi-concaves, alors tout quasi-vainqueur de Condorcet est vainqueur de Condorcet [MCKELVEY 76].

Rechercher les vainqueurs de Condorcet revient donc à sélectionner les points les moins vulnérables par rapport aux coalitions formées par au moins $(\frac{p}{2} + 1)$ ou $(\frac{p+1}{2})$ critères.

# Chapitre 5

# OMAP : les cas convexe et linéaire

Ce chapitre est dédié à l'analyse technique de l'approche OMAP. Dans la première section, nous examinons les propriétés des points $a$-efficaces dans le cas convexe, et nous présentons des techniques de construction de l'ensemble $a$-efficace dans le cas d'un problème particulier. Dans une deuxième section, nous traitons le cas linéaire en exploitant les techniques classiques de calcul des points efficaces. Dans la troisième section, nous présentons une analyse quantitative et qualitative des expérimentations effectuées sur l'application de OMAP1 dans le cas linéaire.

## 5.1 OMAP dans le cas convexe

En optimisation monobjectif, les problèmes convexes sont plus faciles à traiter que les problèmes non convexes. Ceci est dû aux propriétés des fonctions concaves (ex : les maxima locaux sont généralement des maxima globaux). Nous pouvons donc nous attendre à ce que dans le cas multicritère, l'investigation des problèmes convexes donne des résultats plus intéressants que le cas non convexe. Pour mener à bien cette investigation, nous allons rappeler quelques résultats classiques de l'optimisation multiobjectif convexe. Ensuite nous discuterons des propriétés des points $a$-efficaces.

### 5.1.1 Optimisation convexe multiobjectif

#### Définitions préliminaires

**Définition 5.1.1.** *Un ensemble $X$ est convexe si pour tout $\lambda \in [0,1]$ et pour tout $x_1, x_2 \in X$,*

$$\lambda x_1 + (1 \Leftrightarrow \lambda) x_2 \in X.$$

**Définition 5.1.2.** *Une fonction $f : R^p \to R$ est concave si pour tout $\lambda \in (0,1)$ et pour tout $x_1, x_2 \in X$,*

$$f(\lambda x_1 + (1 \Leftrightarrow \lambda) x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 \Leftrightarrow \lambda) f(x_2). \quad (1)$$

*Une fonction concave est strictement concave si l'inéquation (1) est stricte pour tout* $x_1 \neq x_2$.

**Définition 5.1.3.** *Une fonction* $f : R^p \to R$ *est quasi-concave si pour tout* $\lambda \in (0,1)$ *et pour tout* $x_1, x_2 \in X$,

$$f(\lambda x_1 + (1 \Leftrightarrow \lambda)x_2) \geq min\{f(x_1), f(x_2)\}. \qquad (2)$$

*Une fonction quasi-convave est strictement quasi-convave si l'inéquation (2) est stricte pour tout* $x_1 \neq x_2$.

Soit le problème d'optimisation multiobjectif :

$$(P) \qquad \max_{x \in X}(Z_1(x), Z_2(x), ..., Z_p(x)),$$

avec $Z_k : X \to R$ pour $k = 1, 2, ..., p$ et $X \subseteq R^n$ l'ensemble des solutions réalisables. Cet ensemble a généralement la forme suivante :

$$X = \{x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m, x \geq 0\},$$

où les $g_i(x)$ sont des fonctions de $X$ dans $R$.

### Résultats classiques

Soit le problème "paramétrique" suivant :

$$(PP) \qquad \max_{x \in X} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k Z_k(x), \qquad avec \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1, \; et \; \lambda_k \geq 0 \; pour \; tout \; k.$$

Nous l'appelons problème scalaire équivalent à $(P)$, compte tenu des résultats suivants [1]:

**Théoreme 5.1.1.** [GEOFFRION 68] *Soit* $\lambda_k > 0$ *fixé pour tout* $k$. *Si* $x_0$ *est une solution optimale de* $(PP)$ *alors* $x_0$ *est une solution efficace de* $(P)$.

**Théoreme 5.1.2.** [SAWARAGI 85] *Si* $X$ *est un ensemble convexe et* $Z_k(.)$, *pour tout* $k$, *une fonction concave sur* $X$, *alors* $x_0$ *est une solution faiblement efficace si et seulement si* $x_0$ *est une solution optimale de* $(PP)$ *pour un* $\lambda$ *ayant des composantes positives.*

Soland (1979) a introduit un problème paramétrique équivalent dans un cadre plus général. Soit l'ensemble $G$ des fonctions $g(.)$ strictement croissantes sur $\mathcal{Z}$. On considère le problème suivant :

$$(P_{(g,b)}) \;\; \max g(Z(x))$$
$$s.c. \; x \in X \quad et \quad Z(x) \geq b, \; (b \in R^k).$$

**Théoreme 5.1.3.** [SOLAND 79] *Soit* $g$ *un élément arbitraire de* $G$. *Une solution* $x_0$ *est efficace si et seulement si* $x_0$ *est une solution optimale d'un programme* $(P_{(g,b)})$ *pour un* $b \in R^k$.

1. Pour un recueil des résultats dans le cas convexe, voir [EHRGOTT 97].

### 5.1.2 Les points $a$-efficaces dans le cas convexe

Nous supposons, dans ce qui suit, que l'ensemble $X$ est convexe et que les fonctions objectifs sont concaves.

#### Existence des points $a$-efficaces

Rappelons qu'un point $a$-efficace est un point partiellement efficace par rapport aux coalitions formées de $(p+1-a)$ critères. D'après le théorème 5.1.1., la maximisation simultanée des combinaisons strictement positives des sous-ensembles de $(p+1-a)$critères est donc une condition suffisante de l'$a$-efficacité. D'une manière analogue, d'après le théorème 5.1.2., la maximisation simultanée des combinaisons positives des sous-ensembles de $(p+1-a)$ critères est une condition nécessaire de l'$a$-efficacité faible.

On note $\Psi_{p+1-a}$ l'ensemble des coalitions de $(p+1-a)$ critères.

**Proposition 5.1.1.** *Le point $x$ est dit faiblement $a$-efficace de $(P)$ si et seulement si pour tout $I^i_{p+1-a} \in \Psi_{p+1-a}$, il maximise la fonction "paramétrique" suivante :*

$$\sum_{k \in I^i_{p+1-a}} \lambda^i_k Z_k(x), \qquad avec \quad \lambda^i_k \geq 0 \; pour\ tout\ k \in I^i_{p+1-a}.$$

Notons que d'autres conditions d'existence peuvent être formulées en utilisant le problème paramétrique de Soland (1979).

**Remarque 1.** *Comme un point faiblement $(\frac{p}{2}+1)$-efficace est un vainqueur de Condorcet (lorsque $p$ est pair), la condition d'existence d'un vainqueur de Condorcet est donc la maximisation simultanée des combinaisons positives des sous-ensembles de $(\frac{p}{2}+1)$ critères*[2].

#### Connexité de l'ensemble $a$-efficace : un problème ouvert?

La connexité des points efficaces est une propriété très importante dans le cas convexe. En effet, cette connexité permet de rechercher les points efficaces en utilisant des procédures de recherche locale.

L'un des résultats les plus récents dans ce domaine est celui de Warburton (1983)[3].

**Théoreme 5.1.4.** [Warburton *83*]
*(i) Si tous les $Z_k(.)$ sont continues et quasi-concaves et si $X$ est un ensemble convexe*

2. Dans ce cadre, nous pensons que cette condition et les conditions de symétrie pour la règle majoritaire proposé par Plott (cf. [Plott 67] [McKelvey 80]) sont équivalentes. De même, les conditions vérifiées par les points faiblement $a$-efficaces (voir proposition 5.1.1.) sont similaires aux conditions de symétries généralisées qui sont vérifiées par l'ensemble de choix d'une règle de vote sur un ensemble continu d'alternatives (pour plus de détails sur ces conditions, voir [McKelvey 87]).

3. Pour plus de détails sur ce domaine, voir [Naccache 78].

*et compact, alors l'ensemble des solutions faiblement efficaces de* $(P)$ *est connexe.*

*(ii) Si tous les* $Z_k(.)$ *sont continues et strictement quasi-concaves et si* $X$ *est un ensemble convexe et compact, alors l'ensemble des solutions efficaces de* $(P)$ *est connexe.*

Evidemment, d'après ce théorème, la convexité de l'ensemble $X$ ainsi que la concavité des fonctions objectifs sont des conditions nécessaires pour la connexité des points $a$-efficaces. Cependant, le problème de la connexité des ensembles $a$-efficaces $(a > 1)$ reste un problème ouvert et suggère des études plus approfondies.

### Un cas particulier

Ce cas particulier est dû à Gerald H. Kramer (cf. [KRAMER 77]). Le problème multiobjectif proposé par Kramer est le suivant

Soit
- $x = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \in R^n$,
- $s^1, \cdots, s^j, \cdots, s^p$, $p$ points de $R^n$.

$$(Pl) \qquad \min ||x \Leftrightarrow s^j||, \qquad j = 1, \cdots, p,$$

$$avec \qquad ||x|| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce problème peut s'interpréter comme le problème de localisation d'un service; $s^j$ $(j = 1, \cdots, p)$ représentent la localisation de la population concernée.

Deux résultats intéressants concernant les points faiblement $a$-efficaces de ce problème ont été développés par Kramer.

Notons par :
$|.|$, le cardinal d'un ensemble,
$E_{a_{max}}$, l'ensemble des points faiblement $a_{max}$-efficaces,
$d(x, B) = \inf_{y \in B} ||x \Leftrightarrow y||$, la distance entre un point $x \in R^n$ et un ensemble $B \subset R^n$.

**Proposition 5.1.2.** *L'ensemble des points faiblement a-efficaces est l'intersection des domaines convexes délimités par les ensembles de* $(p + 1 \Leftrightarrow a)$ *points* $s^j$.

Cette proposition permet de déterminer graphiquement l'ensemble $E_{a_{max}}$ pour $n = 2, 3$. Dans l'exemple de problème de localisation $(s^1, \cdots, s^5)$, la "meilleure" localisation du service public doit appartenir à l'ensemble $E_2$ égal à l'ensemble $E_{a_{max}}$ (voir figure 5.1).

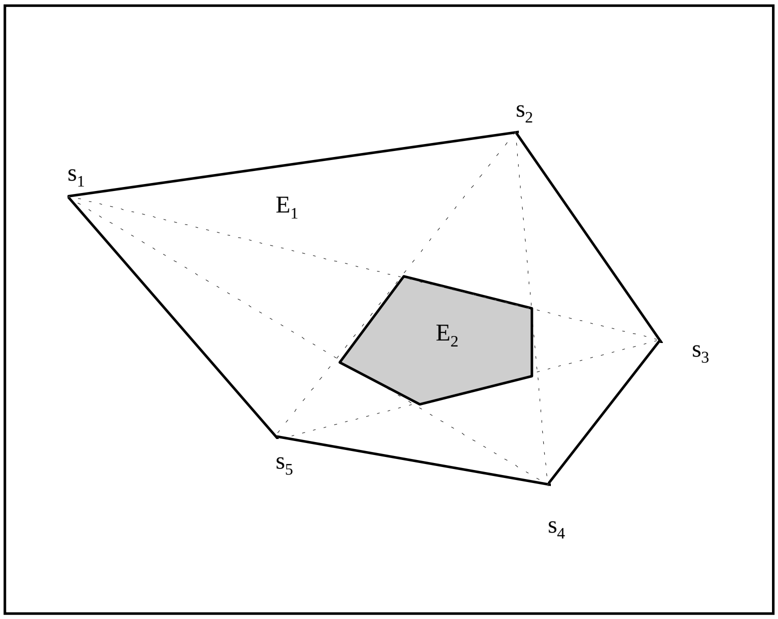


FIG. 5.1 –*Construction graphique des ensembles faiblement a-efficaces.*

Le second résultat présenté par Kramer concerne la convergence de certaines "trajectoires" de $R^n$ vers l'ensemble $E_{a_{max}}$.

Soit $(x^t)$ une séquence de points de $R^n$ vérifiant la condition suivante

$$|\{i \in I : Z_i(x^{t+1}) > Z_i(x^t)\}| = \max_{y \in R^k} |\{i \in I : Z_i(y) > Z_i(x^t)\}| \quad (b).$$

**Théoreme 5.1.5.** *Soit $(x^t)$ une séquence de points vérifiant la condition $(b)$. Pour tout $t$, si $x^t$ n'appartient pas à $E_{a_{max}}$, alors*

$$d(x^{t+1}, E_{a_{max}}) < d(x^t, E_{a_{max}}).$$

La convergence de ce type de séquence de points vers l'ensemble $E_{a_{max}}$, peut être utilisée pour l'approximation de cet ensemble.

# 5.2 OMAP dans le cas linéaire

## 5.2.1 Définitions et notations

Les problèmes d'optimisation linéaire multiobjectif représentent la classe de problèmes multiobjectifs la plus étudiée. Une question qui s'impose est celle de savoir si les différents concepts définis préalablement sont exploitables et opérationnels dans ce cas. Dans la suite de cette étude, nous allons essayer de répondre à cette question.

Dans le cas linéaire, le problème $(P)$ s'écrit :

$$\begin{array}{c} \text{Maximiser } (C_1 x, C_2 x, ..., C_p x) \\ \text{s.c. } Ax \leq b. \end{array}$$

où l'on note
$C_k$, le gradient du vecteur critère $Z_k$ $(k = 1, ..., p)$,
$A$, la matrice des coefficients des contraintes,
$b$, un vecteur de $R^m$, et
$x$, le vecteur des variables de décisions $(\in R^n)$.

### 5.2.2 Structure des ensembles $a$-efficaces

Sans perte de généralité, nous supposons que l'ensemble décrit par le système des contraintes est un polytope. Rappelons que l'ensemble des points efficaces est généralement constitué par un ensemble de faces de ce polytope et que ces points sont connectés entre eux (cf. [Steuer 86]). Comme les points partiellement efficaces sont simultanément des points efficaces de différents problèmes, alors ils décrivent eux aussi des faces de ce polytope (de même pour les points $a$-efficaces).

**Proposition 5.2.1.** *Dans le cas linéaire, l'ensemble des points a-efficaces est une réunion de faces du polytope des contraintes .*

### 5.2.3 Méthode de calcul

Grâce à cette structure, nous pouvons calculer les points $a$-efficaces dans le cas linéaire. Dans une première étape, les points extrêmes $a$-efficaces sont identifiés et dans une seconde étape nous cherchons, parmi ces points, les ensembles qui délimitent les faces $a$-efficaces. La première étape utilise l'algorithme suivant :

Soit
- $E_a$ l'ensemble des points $a$-efficaces,
- $E_A$ l'ensemble des points partiellement efficaces par rapport à la coalition $A$.

**Algorithme**

1- Initialisation
$a = 1$,
$E_a = E_1$.
2- Répéter:
pour toute coalition $A$ de $(p + 1 \Leftrightarrow a)$ critères faire:

identifier $E_A$,
$E_a \leftarrow E_a \cap E_A$,
si $E_a = \emptyset$ alors arrêter.
$a = a + 1$.
jusqu'à: $E_a = \emptyset$.

Notons que pour calculer les points extrêmes partiellement efficaces, nous pouvons utiliser les différentes techniques proposées dans la littérature (fondées sur la méthode du Simplex) [Armand 91], [Ecker 78], [Evans 73], [Yu 74]. De même, nous pouvons nous inspirer des méthodes de calcul des faces pour identifier les faces $a$-efficaces [Armand 93], [Ecker 80], [Gal 77], [Sayin 96].

Dans le même ordre d'idée que l'algorithme présenté ci-dessus, une étude de stabilité peut être effectuée. Pour déterminer les variations des $C_k$ (gradients des critères) ou (et) la variation de $b$ (coefficient des contraintes) qui gardent invariant l'ensemble des points $a$-efficaces, il suffit d'effectuer une étude de stabilité pour chacun des problèmes relatifs aux coalitions de $(p + 1 \Leftrightarrow a)$ critères (cf. [Gal 81], [Gal 86b]), et d'identifier l'ensemble de ces variations comme étant l'intersection des domaines de variation déterminés dans l'étape précédente.

Il faut noter que cette méthode de calcul des points $a$-efficaces peut se heurter à des problèmes de complexité et de temps de calcul lorsque la taille du problème est grande. Dans ce cas, nous suggérons d'utiliser des méthodes approximatives et des heuristiques pour le calcul des points efficaces de chacun des problèmes partiels (cf. [Solanki 93]).

### 5.2.4 Caractérisation graphique des points a-efficaces

R.E. Steuer a présenté un test graphique pour la détection des points efficaces dans le cas où une visualisation est possible (cf. [Steuer 86]). Ce test peut être étendu, sans aucune difficulté, pour détecter les points $a$-efficaces.

Le test de Steuer est une application du résultat suivant :

Soit $C = (C_1, \cdots, C_k, \cdots, C_p)$, et $C_k$ le gradient du critère $Z_k$.

**Proposition 5.2.2.** *Soit un point $\bar{x} \in X$ et $C(\bar{x}) = \{\bar{x} + y \mid y \in X,\ Cy \geq 0$ et $Cy \neq 0\} \cup \{\bar{x}\}$. Alors $\bar{x}$ est efficace si et seulement si $\{\bar{x}\} = C(\bar{x}) \cap X$.*[4]

Ce résultat peut être généralisé de la manière suivante.

Notons
- $C_a^l$, vecteur des gradients des critères dont les indices appartiennent à $I^l_{(p+1-a)}$.

4. Pour la preuve de ce résultat, voir [Steuer 86].

- $\Psi_k$, ensemble des parties de $I$ dont le cardinal est égal à $k$.

**Proposition 5.2.3.** *Soit un point $\bar{x} \in X$ et $C_a^l(\bar{x}) = \{\bar{x}+y \mid y \in X,\ C_a^l y \geq 0$ et $C_a^l y \neq 0\} \cup \{\bar{x}\}$. Alors $\bar{x}$ est a-efficace si et seulement si*

$$\{\bar{x}\} = \bigcup_{I^l \in \Psi_{(p+1-a)}} C_a^l(\bar{x}) \cap X.$$

### Exemple de détection graphique

Soit $(P_e)$ le programme multiobjectif suivant:

$$\max\{Z_1(x) = 2x_1 + x_2\}$$

$$\max\{Z_2(x) = x_1 + 4x_2\}$$

$$\max\{Z_3(x) = x_3\}$$

$$\begin{aligned} s.c. \quad & 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous avons :
$I_2^1 = \{1,2\}, I_2^2 = \{1,3\}$ et $I_2^3 = \{2,3\}$.
Nous constatons que le point A est le seul point 2-efficace de $(P_e)$. En effet, si on construit le cône $D(x) = C_2^1(x) \cup C_2^2(x) \cup C_2^3(x)$ pour les points représentants les différentes faces du polytope, on remarque que A est le seul point qui vérifie $D(x) \cap X = \{x\}$ (voir figure 5.2).

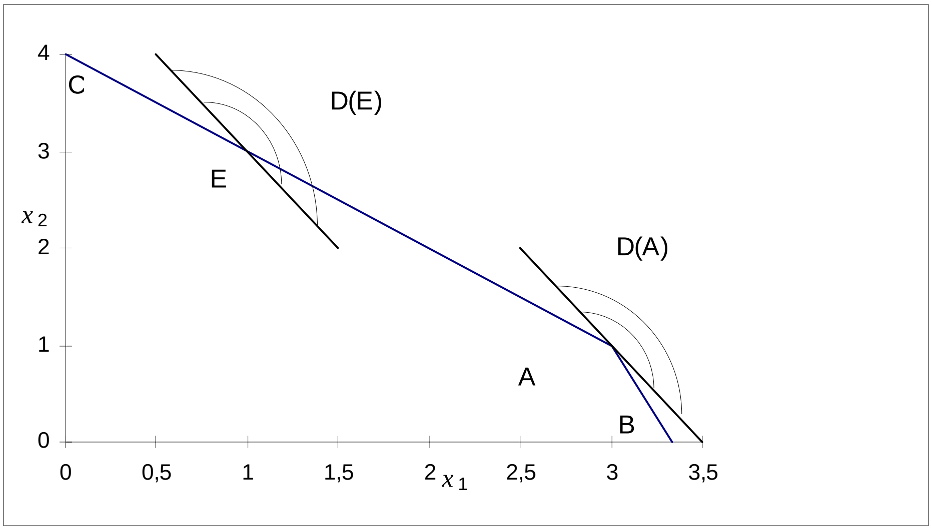


FIG. 5.2 –*Détection graphique des points 2-efficaces.*

### 5.2.5 Simulations et résultats numériques

Nous avons appliqué la procédure décrite au 5.2.3 pour identifier les points extrêmes $a$-efficaces de 55 problèmes d'optimisation linéaire multiobjectif. Cette procédure utilise comme noyau, pour le calcul des points extrêmes efficaces, le programme ADBASE (cf. [STEUER 95]). A l'issue de ces expériences, nous avons constaté que le principe d'$a$-efficacité permet de réduire considérablement l'ensemble de choix final.

Dans ces expérimentations, nous avons calculé les points extrêmes efficaces, 2-efficaces et 3-efficaces pour des problèmes au nombre d'objectifs variable. Les résultats de ces simulations sont résumés dans le tableau suivant :

| nombre d'objectifs | nombre moyen des points extrêmes | | |
|---|---|---|---|
| | efficaces | 2-efficaces | 3-efficaces |
| 5 | 59 | 3 | 0 |
| 6 | 89 | 7 | 0 |
| 7 | 185 | 21 | 0 |
| 8 | 200 | 21 | 3 |
| 9 | 194 | 33 | 7 |
| 10 | 357 | 102 | 13 |
| 11 | 382 | 124 | 29 |
| 12 | 441 | 157 | 32 |
| 13 | 364 | 125 | 42 |
| 14 | 534 | 258 | 104 |
| 15 | 496 | 239 | 89 |

TAB. 5.1 – *Nombre des points extrêmes a-efficaces en fonction du nombre d'objectifs.*

Une lecture rapide de ce tableau montre que l'application de l'$a$-efficacité réduit d'une manière significative l'ensemble des points efficaces. Plus précisément, la proportion moyenne des points 2-efficaces (resp. 3-efficaces) parmi les points efficaces est de 26% (resp. 7%). C'est-à-dire un taux de réduction moyen du nombre des points $a$-efficaces de 26% à chaque augmentation de $a$. Nous pouvons donc avancer que l'application de OMAP est effective sur le plan de la réduction de l'ensemble de choix final.

Pour étudier la variation du nombre des points extrêmes $a$-efficaces en fonction du nombre des critères, nous avons tracé, dans le graphique suivant, la variation des fractions des points 2-efficaces et 3-efficaces (parmi les points efficaces) en fonction du nombre de critères.

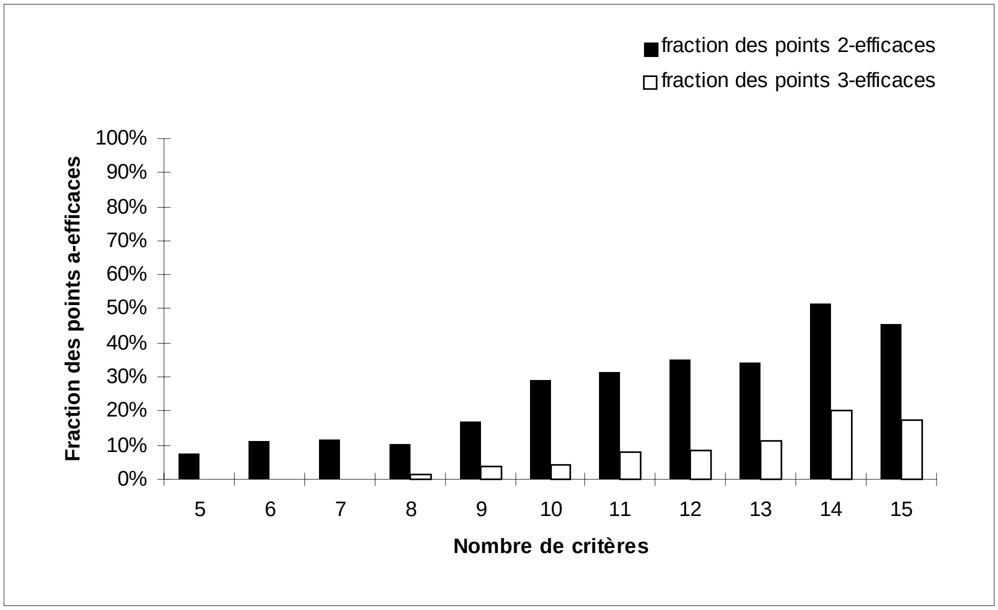


FIG. 5.3 –*Réduction du nombre des points a-efficaces.*

Ce graphique nous permet de constater que la proportion des points $a$-efficaces, lorsque $a$ est plus grand que un, augmente lorsque le nombre de critères augmente. L'application de OMAP1 devient donc signifiante lorsque le nombre de critères est grand. Ceci n'est pas un résultat surprenant, étant donné la relation entre les méthodes de surclassement et OMAP.

### 5.2.6 Exemple d'optimisation multiobjectif

Après cette analyse quantitative de OMAP, nous proposons d'effectuer une analyse qualitative de OMAP à travers un exemple. Considérons le programme multiobjectif suivant:

$$Maximiser \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 & 0 & 8 & 7 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 8 & 7 & 7 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 6 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 9 & 2 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1211 \\ 486 \\ 352 \\ 373 \\ 542 \\ 346 \\ 292 \\ 374 \end{pmatrix}$$

Ce programme comporte 7 fonctions objectifs, 8 contraintes et 7 variables de décision. Il possède 96 points extrêmes efficaces dont 17 points 2-efficaces. Les deux tableaux suivants présentent les scores de ces points 2-efficaces et les performances du point idéal et du point nadir.

| $x$ | $Z_1(x)$ | $Z_2(x)$ | $Z_3(x)$ | $Z_4(x)$ | $Z_5(x)$ | $Z_6(x)$ | $Z_7(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1450,4 | 865,3 | 136,4 | 83,0 | 187,5 | 195,5 | 628,6 |
| B | 1311,0 | 475,9 | 82,6 | 62,6 | 248,5 | 597,9 | 680,9 |
| C | 1363,9 | 977,1 | 210,3 | 133,5 | 263,2 | 110,7 | 585,4 |
| D | 1343,6 | 1239,3 | 136,4 | 136,4 | 721,8 | 35,2 | 521,8 |
| E | 1053,1 | 508,2 | 211,6 | 159,3 | 441,9 | 630,1 | 616,5 |
| F | 1163,5 | 492,4 | 192,8 | 152,5 | 213,9 | 670,4 | 606,6 |
| G | 1232,6 | 929,5 | 93,6 | 120,2 | 770,3 | 355,4 | 563,4 |
| H | 1257,0 | 1351,1 | 210,3 | 186,9 | 797,5 | -49,6 | 478,5 |
| I | 894,0 | 1345,9 | 522,4 | 438,4 | 521,2 | 199,0 | 270,7 |
| J | 880,3 | 1393,7 | 522,4 | 445,3 | 589,4 | 178,6 | 257,1 |
| K | 942,2 | 520,1 | 303,4 | 235,5 | 379,9 | 698,1 | 551,2 |
| L | 875,0 | 974,2 | 272,4 | 254,3 | 1038,5 | 400,1 | 474,0 |
| M | 740,3 | 1415,7 | 468,7 | 380,7 | 1185,0 | 15,0 | 349,3 |
| N | 904,8 | 1356,8 | 533,3 | 427,6 | 510,4 | 123,3 | 292,4 |
| O | 869,5 | 1480,3 | 533,3 | 445,3 | 686,8 | 70,4 | 257,1 |
| P | 707,6 | 1190,4 | 415,4 | 352,0 | 1185,0 | 236,1 | 390,3 |

TAB. 5.2 –*Ensemble des points extrêmes 2-efficaces.*

| $x$ | $Z_1(x)$ | $Z_2(x)$ | $Z_3(x)$ | $Z_4(x)$ | $Z_5(x)$ | $Z_6(x)$ | $Z_7(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| idéal | 1465,7 | 1480,3 | 635,6 | 445,3 | 1249,5 | 877,5 | 680,9 |
| Nadir | 461,0 | 93,5 | 42,6 | -88,1 | 13,2 | -49,6 | 145,9 |

TAB. 5.3 –*Scores des points idéal et nadir.*

D'après l'analyse de ces tableaux, on remarque que le principe d'$a$-efficacité permet de dégager les solutions qui ont :
- soit des scores moyens sur tous les critères (E,K,L,P,...);
- soit de "très bons" scores sur le plus grand nombre possible de critères (A,B,I,J, ...).

# Chapitre 6

# Extensions de l'approche OMAP

Dans ce chapitre, Nous présentons quelques extensions de l'approche OMAP. Nous commençons par une évaluation sommaire de cette approche pour montrer ses limites ainsi que ses extensions possibles. La première extension serait d'intégrer la notion de rejet sous la forme de principes ou seuils de rejet. Ensuite nous exposons quelques idées d'extensions de OMAP pour les problèmes qui contiennent à la fois des critères commensurables et incommensurables, et les problèmes qui contiennent à la fois des critères qualitatifs et quantitatifs. Nous proposons également quelques utilisations de l'efficacité partielle dans le cadre d'un processus d'apprentissage.

## 6.1 Evaluation de OMAP : ses limites

Dans ce travail, nous avons essayé de développer une approche qui permette de résoudre les problèmes d'optimisation multiobjectif d'une manière non compensatoire. La propriété la plus intéressante de cette approche est, à notre avis, qu'elle s'appuie sur des axiomes raisonnables. En effet, diverses interprétations de cette approche ont été présentées : prendre une décision la moins vulnérable possible ou concilier les critères conflictuels en agissant sur les données du problème avec le moins de pouvoir possible. Cependant, comme toute approche, OMAP a ses points faibles. A titre d'exemples, nous citons les deux points suivants :

- il est difficile d'affirmer, a priori, que OMAP permette d'obtenir un ensemble de solutions assez restreint pour que le décideur puisse choisir. Dans ce cas, l'utilisation d'axiomes de choix supplémentaires nous semble indispensable pour opérer une discrimination entre les solutions;

- si le décideur estime que la décision qu'il doit prendre ne doit pas avoir de *très mauvaises* conséquences sur certains critères, les deux versions présentées de OMAP ne sont pas adaptées. En effet, l'exemple de la section 5.2.6. montre que les solutions d'OMAP pourraient avoir des mauvaises performances sur certains critères[1]. Pour étendre OMAP à ce type de situations, nous pouvons envisager l'utilisation de la notion de seuils d'exigence ou de rejet sur certains critères.

## 6.2 OMAP avec principe de rejet

Dans différents contextes, la décision que nous devons prendre ne doit pas avoir des mauvaises conséquences sur certaines performances du système étudié. Un exemple d'un tel système est celui de la santé pour lequel nous sommes en présence de plusieurs critères de décision : budget, qualité de soins, accessibilité aux soins [PELLETIER 98].

Dans cette section, nous proposons une extension qui pourrait s'appliquer à ce type de situation; celle où le décideur cherche à choisir une solution ayant des performances moyennes. Tout d'abord, nous présentons quelques méthodes de décision multicritère qui utilisent la notion de décision par rejet. Ensuite, nous proposons quelques possibilités d'intégration de cette notion dans OMAP.

### 6.2.1 La notion de rejet en décision multicritère

Différentes méthodes de décision multicritère ont intégré cette notion de rejet sous forme de seuil (ex : les méthodes Electre avec ses seuils de discordance[2]) ou d'éloignement d'une situation ayant des performances médiocres dans le cas des méthodes d'optimisation (ex : la programmation par compromis [ZELENY 82], [ZELENY 74]). Cette notion a été étudiée par Raynaud, entre autres, sous la forme de rejet prudent (cf. [RAYNAUD 97]). Dans ce qui suit nous allons présenter d'une façon sommaire la notion de rejet prudent et la programmation par compromis dont nous nous sommes inspirées pour intégrer la notion de rejet dans OMAP.

#### Le rejet prudent

Le choix prudent consiste dans le choix d'une solution la moins vulnérable possible. D'une façon analogue, Raynaud (97) a défini la notion de rejet prudent afin de rejeter les solutions les plus vulnérables. Elle consiste à rejeter les solutions $\underline{x}$ telles que le plus petit nombre de critères qui préfèrent $y$ à $x$ lorsque $y$ varie, est le plus grand possible. D'une manière plus formelle, et en reprenant les mêmes notations de la section 1.6.2., un rejet prudent est défini par :

**Définition 6.2.1.** *Une alternative $\underline{x}$ est un rejet prudent si et seulement si*

$$\min_{y \in X} a(y, \underline{x}) = \max_{x \in X} \min_{y \in X} a(y, x).$$

1. Le point H minimise le critère $Z_6(.)$ dans l'exemple (voir les tableaux 5.2 et 5.3).
2. Pour une présentation de la famille des méthodes Electre, voir [ROY 93].

Raynaud suggère d'utiliser, dans certains contextes, le choix prudent et le rejet prudent simultanément afin de garder les solutions qui possèdent des coefficients de surclassement moyens par rapport aux autres alternatives. Le rejet prudent est donc une manière d'appréhender la notion de décision par rejet en faisant appel à des axiomes.

**La programmation par compromis**

La programmation par compromis[3] proposée par Zeleny (74, 82) repose sur le principe suivant : une *bonne* solution d'un problème multicritère est une solution *proche* de la solution idéale et *éloignée* de la solution anti-idéale.

Le problème d'optimisation multicritère revient donc à choisir les métriques (par exemple les normes $L_p$) pour mesurer la proximité d'une certaine situation. On obtient le problème suivant :

$$\min[\sum_{i=1}^{p} \| Z_i(x) \Leftrightarrow Z_i^* \|_q]^{\frac{1}{q}},$$

$$\max[\sum_{i=1}^{p} \| Z_i(x) \Leftrightarrow Z_{i*} \|_l]^{\frac{1}{l}},$$

$$x \in X.$$

### 6.2.2 OMAP avec principe de rejet

La méthode OMAP1 sélectionne les points $a_{max}$-efficaces (faibles) comme candidats au choix final. Pour rejeter parmi ces candidats potentiels les solutions qui ont de *mauvais* scores sur certains critères, nous reprenons l'idée de Zeleny de proximité d'une *très bonne* situation et d'éloignement d'une *très mauvaise* situation. Comme les critères sont incommensurables, nous proposons comme *mesure* de la proximité d'une solution par rapport au point idéal la notion d'$a$-efficacité (faible). Il nous reste donc à proposer une *mesure* de la proximité du point anti-idéal. Pour introduire cette notion, nous considérons le problème suivant :

$$(\overline{P}) \text{ Minimiser } Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), ..., Z_p(x))$$
$$\text{s.c. } x \in X.$$

Un point $x$ est faiblement $b$-efficace de $(\overline{P})$ si et seulement si pour tout $y \in X$, il existe un sous-ensemble de $b$ critères $I_b$ tel que $Z_k(x) \leq Z_k(y)$ pour tout $k \in I_b$. Notons par $E_b^{min}$ l'ensemble des points faiblement $b$-efficaces de $(\overline{P})$.

Si $x$ appartient à $E_b^{min}$, il s'avère, lorsqu'on le compare à chacune des autres solutions, qu'il est aussi mauvais sur au moins $b$ critères. Nous posons donc comme mesure de la proximité du point anti-idéal la condition d'appartenance à l'ensemble $E_b^{min}$. Evidemment, plus $b$ est grand, plus le point faiblement $b$-efficace est proche de l'anti-idéal.

3. Compromise programming.

Nous suggérons de rejeter les points qui appartiennent à $E_b^{min}$ de l'ensemble des points faiblement $a$-efficaces, que nous notons $E_a^{max}$. Dans ce qui suit, nous allons essayer de caractériser les points qui appartiennent à $E_b^{min} \cap E_a^{max}$.

**Proposition 6.2.1.** *Une solution $x \in E_b^{min} \cap E_a^{max}$ si et seulement si pour tout $y \in X$, il existe $(I_b, I_a) \subset I^2$ tel que :*

$$Z_i(x) \geq Z_i(y) \forall i \in I_a,$$

$$Z_j(x) \leq Z_j(y) \forall j \in I_b.$$

Si $x$ appartient à $E_b^{min} \cap E_a^{max}$, il s'avère, lorsqu'on le compare à chacune des autres solutions, qu'il est aussi mauvais sur au moins $b$ critères et aussi bon sur au moins $a$ critères. Cette interprétation nous permet d'avancer que ces points ont généralement des scores assez contrastés sur les critères. Nous remarquons par ailleurs que, s'il existe un point $x$ qui minimise $b$ critères et maximise $a$ critères, alors $x \in E_b^{min} \cap E_a^{max}$.

Dans le même ordre d'idée, nous avançons la conjecture suivante que nous allons prouver pour le cas de deux critères. Nous présentons ensuite, à travers deux exemples, la nécessité de la convexité du domaine admissible des vecteurs critères comme condition d'application de OMAP avec rejet.

**conjecture 6.2.1.** *Supposons que $X$ est convexe, et que les $Z_k(.)$ sont des fonctions linéaires et prennent leurs valeurs dans $[0, 1]$. Si $x \in E_b^{min} \cap E_a^{max}$, alors il existe $(I_{\min(a,b)}, J_{\min(a,b)}) \subset I^2$ tel que :*
*- $\forall i \in I_{\min(a,b)}$: $Z_i(x) = 1$;*
*- $\forall j \in J_{\min(a,b)}$: $Z_j(x) = 0$.*

**Proposition 6.2.2.** *Supposons que $X$ est convexe, et que $Z_1(x)$ et $Z_2(x)$ sont des fonctions linéaires qui prennent leurs valeurs dans $[0, 1]$. Si $x \in E_1^{min} \cap E_1^{max}$ alors ($Z_1(x) = 0$ et $Z_2(x) = 1$) ou ($Z_1(x) = 1$ et $Z_2(x) = 0$).*

**Preuve** Soit $x \in E_1^{min} \cap E_1^{max}$ tel que $(Z_1(x), Z_2(x)) \neq (0, 1), (1, 0)$, alors il existe $y$ et $z \in X$ vérifiant :

$$Z_1(y) \leq Z_1(x) \leq Z_1(z) \text{ } et \text{ } (Z_1(y) \neq Z_1(z)),$$

$$Z_2(z) \leq Z_2(x) \leq Z_2(y) \text{ } et \text{ } (Z_2(y) \neq Z_2(z)).$$

Soit $\alpha \in [0, 1]$ tel que:

$$Inf\{\frac{Z_1(x) \Leftrightarrow Z_1(z)}{Z_1(y) \Leftrightarrow Z_1(z)}, \frac{Z_2(x) \Leftrightarrow Z_2(z)}{Z_2(y) \Leftrightarrow Z_2(z)}\} < \alpha < Sup\{\frac{Z_1(x) \Leftrightarrow Z_1(z)}{Z_1(y) \Leftrightarrow Z_1(z)}, \frac{Z_2(x) \Leftrightarrow Z_2(z)}{Z_2(y) \Leftrightarrow Z_2(z)}\}$$

alors

$$Z(\alpha y + (1 \Leftrightarrow \alpha) z) > Z(x), \text{ } ou$$

$$Z(\alpha y + (1 \Leftrightarrow \alpha)z) < Z(x)$$

Ce qui contredit l'hypothèse. D'où $(Z_1(x), Z_2(x)) = (0, 1)$ ou $(1, 0)$.

La convexité de l'ensemble $\mathcal{Z}$ est une condition nécessaire pour l'application du principe de rejet que nous proposons. En effet, les exemples suivants montrent que si $\mathcal{Z}$ est non convexe (exemple 2), ce principe de rejet élimine, non seulement les points A et B qui ont de très mauvais scores sur un des critères, mais aussi le point C qui possède des scores moyens. Cependant, nous remarquons que ceci n'est pas le cas lorsque $\mathcal{Z}$ est convexe (exemple 1).

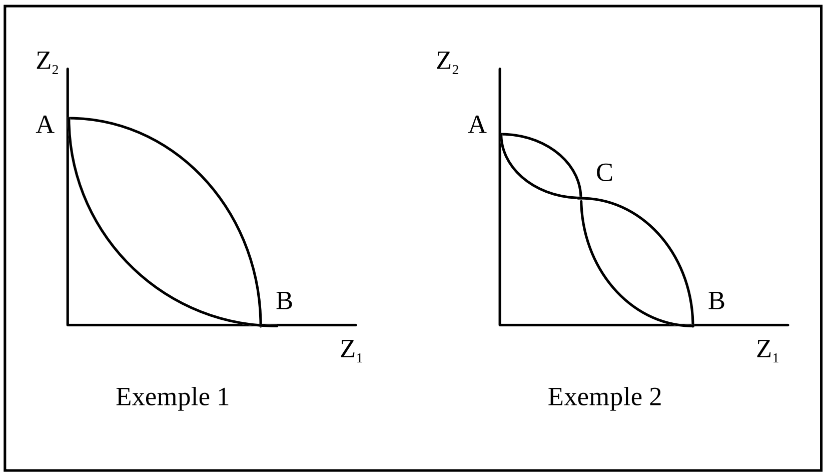


FIG. 6.1 –*Exemples illustrant la nécessité de la convexité de* $\mathcal{Z}$ .

Pour récapituler, **une solution de la méthode OMAP avec principe rejet est une solution appartenant à l'ensemble** $E_a^{max} \setminus E_b^{min}$. La sévérité du rejet dépend de la valeur de $b$: **plus $b$ est petit, plus le rejet est sévère**.

### 6.2.3 OMAP et seuils

H. Simon [SIMON 57] a proposé la notion de solution satisfaisante[4]. Elle correspond à un modèle comportemental du décideur qui spécifie des niveaux de satisfaction sur les différents critères. Selon Simon, la spécification de ces valeurs permet de partager l'ensemble des solutions réalisables en solutions satisfaisantes et insatisfaisantes. Dans notre cas, nous allons essayer d'étendre l'approche OMAP pour décrire des modèles comportementaux similaires à celui proposé par Simon.

Nous supposons que des seuils de satisfaction (resp. de rejet) ont été repérés sur les critères, et nous introduisons les deux modèles suivants.

4. Satisficing solution.

Notons
- $S_k$, seuil de satisfaction qui correspond au critère $Z_k$, avec $k = 1, \cdots, p$;
- $r_k$, seuil de rejet qui correspond au critère $Z_k$, avec $k = 1, \cdots, p$.

Soit $(P)$ le problème d'optimisation avec les seuils de satisfaction $S_1, \cdots, S_p$. Ce modèle suppose que le décideur est indifférent à l'augmentation des performances des solutions sur chacun des critères $Z_k$ à partir des seuils $S_k$.

$$(P) \text{ Maximiser } \{\min(Z_k(x) \Leftrightarrow S_k, 0)\} \; k = 1, \cdots, p$$
$$\text{s.c. } x \in X$$

Un point $\bar{x}$ est un point faiblement $a\Leftrightarrow$efficace de $(P)$ si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe un sous-ensemble de $a$ critères $I_a$ tel que pour tout $k \in I_a$ :

$$(Z_k(\bar{x}) \geq Z_k(x)) \; ou \; (Z_k(\bar{x}) \geq S_k).$$

On note $E_a^{max}(S)$, l'ensemble des points faiblement $a$-efficaces de $(P)$.

Soit $(\overline{P})$ le problème d'optimisation avec les seuils $r_1, \cdots, r_p$. Ce modèle suppose que le décideur est indifférent à la diminution des performances des solutions sur les critères à partir des seuils $r_k$. Ces seuils seront appelés les seuils de rejet.

$$(\overline{P}) \text{ Minimiser } \{\max(Z_k(x) \Leftrightarrow r_k, 0)\} \; k = 1, \cdots, p$$
$$\text{s.c. } x \in X$$

Un point $\bar{x}$ est un point faiblement $b\Leftrightarrow$efficace de $(\overline{P})$ si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe un sous-ensemble de $b$ critères $I_b$ tel que pour tout $k \in I_b$ :

$$(Z_k(\bar{x}) \leq Z_k(x)) \; ou (Z_k(\bar{x}) \leq r_k).$$

On note $E_b^{min}(r)$, l'ensemble des points faiblement $b$-efficaces de $(\overline{P})$.

Afin d'étendre l'approche OMAP à ce type de modèle, nous reprenons la même idée que celle avancée dans le paragraphe 6.2.2. Il s'agit de rejeter de l'ensemble $E_a^{max}(S)$, les points qui appartiennent à $E_b^{min}(r)$. Dans ce qui suit, nous allons essayer de caractériser les points qui appartiennent à $E_b^{min}(r) \cap E_a^{max}(S)$.

Un point $x \in E_b^{min}(r) \cap E_a^{max}(S)$ si et seulement si pour tout $y \in X$, il existe $(I_b, I_a) \subset I^2$ tel que :

$$\forall i \in I_a : \; (Z_i(\bar{x}) \geq Z_i(x)) \; ou \; (Z_i(\bar{x}) \geq S_i), \; et$$
$$\forall j \in I_b : \; (Z_j(\bar{x}) \leq Z_j(x)) \; ou (Z_j(\bar{x}) \leq r_j).$$

En d'autres termes, un point qui vérifie cette condition est, comparé à chacune des autres solutions, aussi mauvais ou au dessous des seuils de rejet sur au moins $b$ critères et aussi bon ou au dessus des seuils de satisfaction sur au moins $a$ critères. Nous remarquons par ailleurs, que s'il existe un point tel que $Z_i(\bar{x}) \geq S_i$ pour $a$ critères et $Z_j(\bar{x}) \leq r_j$ pour $b$ critères, alors il appartient à $E_a^{max}(S) \cap E_b^{min}(r)$.

Dans le même ordre d'idée que la conjecture 6.2.1, nous avançons la conjecture suivante :

**conjecture 6.2.2.** *Supposons que $X$ est convexe, et que les fonctions $Z_k(x)$ sont linéaires et prennent leurs valeurs dans $[0,1]$. Si $x \in E_b^{min} \cap E_a^{max}$ alors il existe $(I_{\min(a,b)}, J_{\min(a,b)}) \subset I^2$ tel que*
*- $\forall i \in I_{\min(a,b)}$: $Z_i(x) \geq S_i$;*
*- $\forall j \in J_{\min(a,b)}$: $Z_j(x) \leq r_j$.*

### 6.2.4 OMAP et point de référence

Dans le cas des méthodes qui utilisent la notion de point de référence, le problème revient à choisir la métrique utilisée pour mesurer la proximité de ce point. Evidemment l'utilisation suppose une certaine commensurabilité entre critères. Dans le cas d'incommensurabilité nous proposons la notion de la non $a$-dominance par rapport au point de référence comme mesure de la proximité de ce point. Cette notion est une extension d'une forme de dominance proposée par Malakooti (89).

#### Dominance et point de référence

Le concept de dominance par rapport au point de référence est proposé par Malakooti pour identifier les points les plus proches d'un point de référence (cf. [Malakooti 89]). Cette notion qui utilise seulement l'aspect ordinal des critères est appropriée pour le cas d'incommensurabilité.

**Définition 6.2.2.** *Soit $x^r$ un point de référence. Un point $\bar{x} \in X$ est dominé par rapport au point de référence si et seulement si il existe un autre $x \in X$ tel que*
*a) $Z(x) \neq Z(\bar{x})$, et*
*b) pour tout $i$ :*
*b1) $Z_i(x^r) \leq Z_i(x) \leq Z_i(\bar{x})$,*
*ou*
*b2) $Z_i(\bar{x}) \leq Z_i(x) \leq Z_i(x^r)$.*

Nous remarquons que si le point de référence coïncide avec le point idéal ou si $Z(\bar{x}) \leq Z(x^r)$, alors la dominance par rapport à un point de référence est équivalente à la dominance.

**Exemple** : Considérons l'exemple de maximisation de deux objectifs $Z_1$ et $Z_2$, en présence d'un point de référence C (voir figure 6.2).

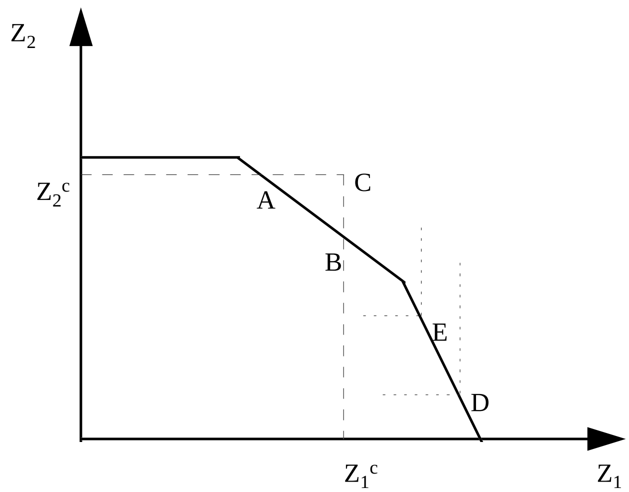


FIG. 6.2 –*Exemple d'un ensemble non dominé par rapport à un point de référence.*

Dans cette exemple, les points non dominés par rapport au point de référence C sont les points du segment [A,B], et le point D est dominé par le point E.

### Concept d'a-dominance et point de référence

Comme la dominance par rapport à un point de référence est un outil peu discriminant, nous le renforçons en proposant la notion de $a$-dominance par rapport au point de référence.

**Définition 6.2.3.** *Soit $x^r$ un point de référence. Un point $\bar{x} \in X$ est a-dominé par rapport à un point de référence si et seulement si il existe un $x \in X$ et un sous-ensemble $I_{(p+1-a)}$ tels que*
*a) $Z_i(\bar{x}) \neq Z_i(x)$ pour au moins un $i \in I_{(p+1-a)}$, et*
*b) pour tout $i \in I_{(p+1-a)}$ :*
*b1) $Z_i(x^r) \leq Z_i(x) \leq Z_i(\bar{x})$,*
*ou*
*b2) $Z_i(\bar{x}) \leq Z_i(x) \leq Z_i(x^r)$.*

Il suffit donc de choisir les points non $a$-dominés par rapport à $x^r$ comme étant les points les plus proches de $x^r$. Evidemment, plus $a$ est grand, plus le point non $a$-dominé est proche de $x^r$.

# 6.3 Autres extensions de OMAP

## 6.3.1 OMAP et les problèmes à critères qualitatifs

Un exemple de problème impliquant des critères quantitatifs et qualitatifs est le problème de localisation des points de prélèvement d'eau en présence des critères tels que le risque de contamination (qualitatif) et le coût du prélèvement (quantitatif) (cf. [El Magnouni 93]). Dans ce type de problème, l'approche OMAP peut être appliquée via une discrétisation de l'ensemble des points efficaces et de l'application du test d'$a$-efficacité (voir 3.3.2.) pour approcher l'ensemble des points $a$-efficaces.

## 6.3.2 OMAP et les problèmes avec des critères commensurables

Dans certaines situations, la famille des critères est composée de sous-familles de critères telles que les échelles de toute paire de critères appartenant à la même sous-famille sont comparables et les échelles de toute paire de critères appartenant à des sous-familles différentes sont incomparables. Dans ce cas, nous pouvons appliquer l'approche OMAP de deux manières possibles. La première consiste à construire des critères d'agrégation explicites correspondant à chacune des sous-familles de critères, et à appliquer OMAP à ces critères d'agrégation évidemment incommensurables. La seconde consiste à supposer qu'il existe des critères d'agrégation implicites correspondant à chacune des sous-famille de critères, et à appliquer simultanément une méthode interactive (comme celle de Zionts & Wallenuis (76)) pour les sous-familles de critères et la méthode OMAP1 à ces critères d'agrégation. Evidemment, cette extension mérite une étude plus approfondie. Notons que Wendell (cf. [Wendell 80] ) a utilisé une approche similaire dans le cas d'une situation multi-décideur et bi-objectif.

## 6.3.3 OMAP et les méthodes d'apprentissage

### L'$a$-efficacité et les méthodes interactives

Rappelons que les méthodes interactives sont fondées sur des procédures de sélection locale qui réduisent à chaque itération l'ensemble du "plus grand intérêt". Une utilisation possible de la notion d'$a$-efficacité comme méthode de sélection locale serait de rechercher les solutions localement $a$-efficaces dans l'ensemble de "plus grand intérêt". Nous définissons ci-dessous le concept de $a$-efficacité locale que l'on peut utiliser pour la sélection locale.

**Définition 6.3.1.** *Une solution $\bar{x}$ est dite localement a-efficace si $\bar{x} \in X$ et s'il existe un voisinage $U$ de $\bar{x}$ tel qu'il n'existe aucune autre solution $x \in U \cap X$ qui vérifiant $Z(x) \neq Z(\bar{x})$ et $Z_k(x) \geq Z_k(\bar{x})$ pour $(p + 1 \Leftrightarrow a)$ critères (c'est-à-dire si $\bar{x}$ est a-efficace par rapport à $U \cap X$).*

### L'efficacité partielle, un outil d'apprentissage

La dernière extension que nous proposons est l'utilisation de la notion d'efficacité partielle comme moyen d'apprentissage et d'exploration de l'ensemble des points efficaces. Elle consiste à caractériser les points efficaces par leur efficacité partielle relativement à chacune des coalitions des critères, puis à explorer de manière interactive l'ensemble des points efficaces en interrogeant le décideur sur les conditions d'efficacité partielle qu'il souhaite voir vérifiées par la solution. Les étapes suivantes résument la méthode.

**Etape 0 :** Présenter au décideur un point efficace initial décrit par certaines conditions d'efficacité partielle ainsi que quelques informations préliminaires telles que la matrice des gains.
**Etape 1 :** Demander au décideur de fixer les conditions d'efficacité partielles qu'il souhaiterait garder et les nouvelles conditions qu'il souhaiterait ajouter. Si les conditions exigées sont inconsistantes, aller à l'étape 3.
**Etape 2 :** Présenter au décideur un échantillon contrasté de solutions qui vérifient ces conditions. S'il est satisfait par une de ces solutions , alors arrêter la recherche, sinon aller à l'étape 1.
**Etape 3 :** Présenter au décideur les causes possibles des inconsistances, et aller à l'étape 1.

Cet algorithme permet d'explorer librement l'ensemble des points efficaces, et permet au décideur d'analyser son problème dans le cadre d'un processus d'apprentissage. Cependant, cette procédure effectue des calculs importants à chaque étape, et exige des efforts cognitifs importants de la part du décideur. Pour la rendre plus réaliste, nous pouvons la combiner avec des règles d'inférences d'un système expert similaire à celles utilisées dans le système EXTRA (cf. [PASCHE 87]).

## 6.4 Conclusion

Pour conclure ce chapitre, nous insistons sur le fait qu'il faut considérer OMAP non comme une approche statique mais plutôt comme une approche évolutive en fonction du contexte de son application. Le décideur confronté à une situation voisine du champ d'application de OMAP, peut utiliser ou s'inspirer des concepts présentés dans cette approche pour construire ses propres outils.

# Conclusion

Les problèmes d'optimisation multicritère sont très variés et correspondent à des situations de décision très différentes. A titre d'exemples, nous distinguons les problèmes de décision publique ou privée, avec des critères commensurables ou incommensurables, avec un grand ou un petit nombre de critères, ou encore dans un contexte déterministe ou incertain. Evidemment chacune de ces situations exige des modélisations et des approches de résolutions différentes.

La première préoccupation de l'approche présentée dans ce travail est le développement de quelques concepts qui peuvent être appliqués à la résolution de certains types de problèmes d'optimisation multicritère. Cette approche a des propriétés intéressantes. En effet :

- Elle est nouvelle dans la mesure où elle essaye de s'attaquer à des situations multicritères pour lesquelles les méthodes de résolutions sont absentes ou artificielles. Ces situations englobent les problèmes d'optimisation en présence de critères nombreux et incommensurables.

- Elle est axiomatisée. D'une part, elle est fondée sur des concepts tels que l'efficacité partielle, la hiérarchie de coalitions, l'$a$-efficacité qui sont motivés et justifiés par des interprétations intelligibles. D'autre part, l'analyse et les choix effectués pendant la résolution reposent sur des principes qui peuvent sembler raisonnables.

- Elle est robuste par rapport aux poids des critères, par rapport aux changements d'échelles des critères, puisqu'elle est ordinale; et elle permet de prendre des critères nouveaux ou de supprimer des critères pendant le processus de résolution sans pour autant remettre en cause toutes les étapes de l'analyse.

- Elle est une extension des anciennes approches dans la mesure où ses résultats coïncident avec les résultats de certaines méthodes de surclassement lorsque nous l'appliquons aux cas des problèmes discrets.

- Elle est évolutive puisque ces fondements peuvent être facilement modifiés pour convenir au mieux à la description des situations concrètes.

Dans l'état actuel de nos travaux, la réalisation de cette approche n'est pas achevée. Néanmoins les simulations numériques que nous avons effectuées montrent l'efficacité de cette méthode pour la réduction de l'ensemble des points efficaces. Par contre, la résolution numérique se heurte pour le moment au nombre important de calculs effectués à chaque étape. A notre avis ce problème demeure un problème secondaire, puisque l'on peut réduire la complexité des calculs en utilisant des méthodes d'approximation.

Enfin, nos perspectives seraient :

- Premièrement, sur le plan pratique, d'intégrer d'une manière axiomatisée les seuils qui nous paraissent des paramètres importants des modèles non compensatoires. En effet, dans certains cas, les informations ordinales véhiculées par les différents traitements de OMAP (conditions d'efficacité partielle ou d'$a$-efficacité) demeurent insuffisantes pour caractériser d'une manière efficace les solutions candidates au choix final. L'utilisation des seuils, qui sont des notions cardinales, peut permettre une meilleure caractérisation des solutions et d'enrichir ainsi les informations utiles pour la prise de décision.

- Deuxièmement, toujours au niveau pratique, d'utiliser les concepts d'efficacité et d'analyse partielle dans les processus d'apprentissage. A notre avis, cette piste est la plus prometteuse pour l'implémentation informatique d'OMAP.

- Troisièmement, sur le plan théorique, de chercher à étayer l'intuition suivante : les conditions d'efficacité partielle permettent une "bonne" caractérisation des solutions efficaces lorsque le nombre des critères est grand.
  Plus explicitement, nous pensons que les conditions d'efficacité partielle permettent de segmenter l'ensemble des points efficaces en plusieurs classes d'équivalence. Chacune de ces classes serait formée des solutions qui vérifient les mêmes conditions d'efficacité partielle et ayant des scores "très proches" sur tous les critères. Cette piste nous paraît prometteuse au vu des résultats analogues prouvés par Tanguiane [Tanguian 96] sur la "coïncidence statistique" entre les résultats des méthodes ordinales et cardinales lorsqu'elles sont appliquées à un nombre d'alternatives fini et en présence d'un grand nombre de critères;

- Enfin, sur le plan général, d'étudier les possibilités d'élargir les concepts proposés au cadre de l'optimisation non déterministe. En effet, les différents outils de l'analyse partielle peuvent être facilement étendus aux notions d'efficacité stochastique présentées dans [Ben Abdelaziz 97].

Pour conclure, nous mentionnons que, actuellement, l'approche OMAP n'est encore qu'à un état embryonnaire. Des améliorations tant sur le plan théorique que sur le plan pratique sont prévues pour que l'on puisse utiliser OMAP d'une manière opérationnelle.

# Bibliographie

[Aksoy 96] Y. Aksoy, T. W. Butler & E. D. Minor. *Comparative studies in interactive multiple objective mathematical programming.* European journal of operational research, vol. 89, pages 408–422, 1996.

[Al-shemmeri 97] T. Al-shemmeri, B. Al-kloub & A. Pearmam. *Model choice in multicriteria decision aid.* European of operational research, vol. 97, pages 550–560, 1997.

[Arbel 94] A. Arbel. *Anchoring Points and cones of opportunities in interior multiobjective linear programming.* J. Opl. Res. Soc., vol. 45, no. 1, pages 83–96, 1994.

[Armand 91] P. Armand & C. Malivert. *Determination of the efficient set in mutiobjective linear programming.* Journal of optimization theory and applications, vol. 70, no. 3, pages 467–498, 1991.

[Armand 93] P. Armand. *Finding all maximal efficient faces in multiobjective linear programming.* Mathematical programming, vol. 61, pages 357–375, 1993.

[Arrow 86] J. K. Arrow & H. Raynaud. Social choice and multicriterion decision making. MIT press, Cambridge, 1986.

[Bell 88] D. E. Bell, H. Raiffa & A. Tversky, editeurs. Decision making: descriptive, normative, and prescriptive interactions. Cambridge university press, Great Britain, troisième edition, 1988.

[Ben Abdelaziz 97] F. Ben Abdelaziz, P. Lang & R. Nadeau. *Notions d'efficacité en programmation linéaire multiobjectif stochastique.* document du Lamsade 101, Université Paris-Dauphine, 1997.

[Benayoun 71] R. Benayoun, J. de Montgolfier, J. Tergny & O. Laritchev. *Linear programming with multiple objectives functions: step method: (* STEM*).* Mathematical programming, vol. 1, pages 366–375, 1971.

[Bouchet 93] P. Bouchet. *Approche axiomatique en decision multicritère: cas des varibles mixtes.* thése de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1993.

[Bouyssou 84] D. Bouyssou. *Approches descriptives et constructives d'aide à la décision: fondements et comapraison.* thése de doctorat, Université Paris-Dauphine, 1984.

[Bouyssou 85] D. Bouyssou & J. C. Vansnick. *Noncompensatory and generalized noncompensatory preferences structures.* cahier du Lamsade 59, Université Paris-Dauphine, 1985.

[Bouyssou 86] D. Bouyssou. *Some remarks on the notion of compensation in* MCDM. European journal of operational research, vol. 26, pages 150–160, 1986.

[Bouyssou 89] D. Bouyssou. *Problèmes de construction de critères.* cahier du lamsade 91, Université Paris-Dauphine, 1989.

[Bouyssou 93] D. Bouyssou, P. Perny, M. Pirlot, A. Tsoukias & P. vincke. *A manifesto for the new MCDA era.* Journal of multi-criteria decision analysis, vol. 2, pages 125–128, 1993.

[Bouyssou 96] D. Bouyssou & M. Pirlot. *Choosing and ranking on the basis of fuzzy preference relations with min in favor.* working paper, ESSEC, 1996.

[Bouyssou 97] D. Bouyssou & M. Pirlot. *Conjoint mesurement without additivity and transitivity.* In N. Meskens & M. Roubens, editeurs, International conference on methods and applications of multicriteria decision Making, FUCAM, pages 166–169, May 1997.

[Buchanan 94] J. T. Buchanan. *An experimental evaluation of interactive* MCDM *Methods and the decision making process.* J. Opl. Res. soc., vol. 45, no. 9, pages 1050–1059, 1994.

[Buchanan 97] J. T. Buchanan, E. J. Henig & M. O. Henig. *Objectivity and subjectivity in the decision making process.* Reseach report series 1997-1, university of Waikato, New Zelend, 1997.

[Charnes 77] A. Charnes & W. W. Cooper. *Goal programming and multiple objective optimization.* European journal of operational research, vol. 1, pages 39–54, 1977.

[Choo 80] E.U. Choo & D.R. Atkins. *An interactive algorithm for multicriteria programming.* Computers and operations research, vol. 7, pages 81–87, 1980.

[COHON 75] J. L. COHON & D. H. MARKS. *A review and evaluation of multiobjective programming techniques.* Water resources research, vol. 11, no. 2, pages 208–220, 1975.

[DEBREU 59] G. DEBREU. Theory of the value. Dunod, deuxième edition, 1959. Traduction sous le titre *Théorie de la valeur* , 1984.

[DEMANGE 80] G. DEMANGE. *Gagnant à la majorité et généralisation dans les modèles spatiaux.* thése de doctorat, Univeristé Paris IX, 1980.

[ECKER 78] J. G. ECKER & I. A. KOUADA. *Finding all efficient extreme points for multiple objective linear programs.* Mathematical programming, vol. 14, pages 249–261, 1978.

[ECKER 80] J. G. ECKER, N. S. HENGNER & I. A. KOUADA. *Generating all maximal efficient faces for multiple objective linear programs.* Journal of optimization theory and applications, vol. 30, no. 3, pages 353–381, 1980.

[EHRGOTT 97] M. EHRGOTT. *Classification and methodology in multiple criteria optimization.* PhD thesis, Universitat Kaiserslautern, Germany, 1997.

[EL MAGNOUNI 93] S. EL MAGNOUNI. *Méthodologie d'aide à la décision pour l'évaluation et la gestion multicritère des ressources en eau souterrraine.* thése de doctorat, INPL, 1993.

[EVANS 73] J. P. EVANS & R. E. STEUER. *A revised simplex method for linear multiple objective programs.* Mathematical programming, vol. 5, pages 54–72, 1973.

[FERHAT 96] A. B. FERHAT. *Méthodes interactives en programmation mathématique utilisant des relations de surclassement comme modéle de préférence.* thése de doctorat, Université Paris-Dauphine, 1996.

[FISHBURN 67] P. C. FISHBURN. *Methods of estimating additive utilities.* Management science, vol. 13, no. 7, pages 435–453, 1967.

[FISHBURN 68] P. C. FISHBURN. *Utility theory.* Managment science, vol. 14, no. 4, pages 355–378, 1968.

[FISHBURN 76] P. C. FISHBURN. *Noncompensatory preferences.* Synthese, vol. 33, pages 393–403, 1976.

[FISHBURN 77] P. C. FISHBURN. *Condorcet social choice functions.* SIAM J. Apll. Math., vol. 33, no. 469, page 487, 1977.

[FISHBURN 78] P. C. FISHBURN. *Value theory.* In J. MODER & S. E. ELMAGHRABY, editeurs, Handbook of operations research, pages 389–450. Van Nostrand Rienhold company, 1978.

[FISHBURN 89] P. C. FISHBURN. *Foundations of decision analysis: along the way.* Mangement science, vol. 35, no. 4, pages 387–405, 1989.

[FRENCH 84] S. FRENCH. *Interactive multi-objective programming: its aims, applications and demands.* J. Opl. Res. Soc., vol. 35, no. 9, pages 827–833, 1984.

[GAL 77] T. GAL. *A general method for determining the set of all efficient solutions to a linear vectormaximum Problem.* European journal of operational research, vol. 1, pages 307–322, 1977.

[GAL 81] T. GAL & H. LEBERLING. *Relaxation analysis in linear vectorvalued maximization.* European journal of operational research, vol. 8, pages 274–282, 1981.

[GAL 86a] T. GAL. *On efficiency sets in vector maximum problems-a brief survey.* European journal of operational research, vol. 24, pages 253–264, 1986.

[GAL 86b] T. GAL & K. WOLF. *Stability in vector maximization.* European journal of operational research, vol. 25, pages 169–182, 1986.

[GARDINER 94a] L. R. GARDINER & R. E. STEUER. *Unified interactive multiple objective programming.* European journal of operational research, vol. 74, pages 391–406, 1994.

[GARDINER 94b] L. R. GARDINER & R. E. STEUER. *Unified interactive multiple objective programming: an open architecture for accommodating new procedures.* J. Opl. Res. Soc., vol. 45, no. 12, pages 1456–1466, 1994.

[GEHRLEIN 83] W.V. GEHRLEIN. *Condorcet's paradox.* Theory and decision, vol. 15, pages 161–197, 1983.

[GEOFFRION 68] A. GEOFFRION. *Proper efficiency and the theory of vector maximization.* Journal of mathematical analysis and applications, vol. 22, pages 618–630, 1968.

[GEOFFRION 72] A. M. GEOFFRION, J. S. DYER & A. FEINBERG. *An interactive approach for multi-criterion optimization, with an application to the operation of an acamedic departement.* Management science, vol. 19, no. 4, pages 357–368, 1972.

[GERSHON 82] M. GERSHON. *the role of weigths and scales in the application of multiobjective decision making.* European journal of operational research, vol. 15, pages 244–250, 1982.

[GERSHON 84] M. GERSHON & L. DUCKSTIEN. *A procedure for selection of a multiobjecive technique with application to water and mineral resources.* Applied mathematics and computation, vol. 14, pages 245–271, 1984.

[GRABISCH 97] M. GRABISCH & M. ROUBENS. An axiomatic approach of interaction in multicriteria decision making. Working paper, 1997.

[ISERMANN 87] H. ISERMANN & R. E. STEUER. *Computational experience concerning payoff tables and minimum criterion values over the efficient set.* European journal of operational research, vol. 33, pages 91–97, 1987.

[JACQUET-LAGRÈZE 82] E. JACQUET-LAGRÈZE & J. SISKOS. *Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the* UTA *method.* European journal of operational research, vol. 10, pages 151–164, 1982.

[JACQUET-LAGRÈZE 87] E. JACQUET-LAGRÈZE, R. MEZIANI & R. SLOWINSKI. *MOLP with an interactive assessment of a piecewise linear utility function.* Eurpean Journal of Operational Research, vol. 31, pages 350–357, 1987.

[JASZKIEWICZ 97] A. JASZKIEWICZ & R. SLOWINSKI. *Outranking-based interactive exploration of a set of multicriteria alternatives.* journal of multi-criteria decision analysis, vol. 6, pages 93–106, 1997.

[JASZKIEWITCZ 95] A. JASZKIEWITCZ & R. SLOWINSKI. *The light beam search - outranking based interactive procedure for multiple-objective mathematical programming.* In P. M. PARDALOS & al., editeurs, Advances in multicriteria analysis, pages 129–146. Kluwer Academic Publishers, 1995.

[KEENEY 76] R.L. KEENEY & H. RAIFFA. Decisions with multiple objectives : preferences and value tradeoffs. Wiley, New York, 1976.

[KOHLER 78] G. KOHLER. *Choix multicritère et analyse algébrique des données ordinales.* thése de doctoctorat, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1978.

[KOPSIDAS 91] G. C. KOPSIDAS. *A new pareto optimal solution in a lagrange decomposable multi-objective optimization problem.* J. Opl. Res. Soc., vol. 42, no. 5, pages 401–411, 1991.

[KORHONEN 86] P. KORHONEN & J. LAAKSO. *A visual interactive method for solving the multiple criteria problem.* European journal of operational research, vol. 24, pages 277–287, 1986.

[korhonen 92] P. korhonen, H. MOSKOWITZ & J. wallenius. *Multiple criteria decision support- a review.* European journal of operational research, vol. 63, pages 361–375, 1992.

[KORHONEN 96] P. KORHONEN & J. WALLENIUS. *Behavioural issues in MCDM: neglected research questions.* Journal of multi-criteria decision analysis, vol. 5, pages 178–182, 1996.

[KRAMER 77] G. H. KRAMER. *A dynamical model of political equilibrium.* Journal of economic theory, vol. 16, pages 310–334, 1977.

[LEMOIGNE 82] J. L. LEMOIGNE. *Les bonnes décisions sont elles bonnes ou adéquates?* seminaire, Laboratoire Artemis, France, Juin 1982.

[LOTFI 97] V. LOTFI, Y. S. YOON & S. ZIONTS. *Aspiration-Based Search Algorithm (*ASBALG*) for multiple objective linear programming problems: theory and comparative tests.* Mangement science, vol. 43, no. 8, pages 1047–1059, 1997.

[LOWE 84] T. J. LOWE, J. F. THISSE, J.E. WARD & R. E. WENDELL. *On efficient solutions to multiple objective mathematical programs.* Management science, vol. 30, no. 11, pages 1346–1349, 1984.

[LUCE 56] D. LUCE. *Semiorders and a theory of utility discrimination.* Econemtrica, vol. 24, pages 178–191, 1956.

[MALAKOOTI 89] B. MALAKOOTI. *Identifying nondominated alternatives with partial information for multiple-objective discrete and linear programming problems.* IEEE Transcations on Systems, Man and Cybernetics, vol. 19, no. 1, pages 95–107, 1989.

[MATARAZZO 86] B. MATARAZZO. *Multicriterion analysis of preferences by means of pairwise actions and criterion comparisons* MAPPACC . Applied mathematics and computation, vol. 18, pages 119–141, 1986.

[MATARAZZO 88] B. MATARAZZO. *Preference ranking global frequencies in multicriterion analysis (PRAGMA)*. European journal of operational research, vol. 36, pages 36–49, 1988.

[MATARAZZO 90] B. MATARAZZO. PCCA *and k-dominance in* MCDM. Belgian journal of operations research, statictics and computer science, vol. 30, no. 3, pages 56–69, 1990.

[MCKELVEY 76] R. D. MCKELVEY & R. E. WENDELL. *Voting equilibria in multidimensial choices spaces*. Mathematics of operations research, vol. 1, pages 144–158, 1976.

[MCKELVEY 80] R. D. MCKELVEY, P. C. ORDESHOOK & P. UNGAR. *Conditions for voting equilibria in continuous voting distributions*. SIAM J. applied mathematics, vol. 39, pages 161–168, 1980.

[MCKELVEY 87] R. D. MCKELVEY & N. SCHOFIELD. *Generalized symmetry conditions at a core point*. Econemtrica, vol. 55, pages 923–933, 1987.

[MOUSSEAU 93] V. MOUSSEAU. *Problèmes liés à l'èvaluation de l'importance relative des critères en aide multicritère à la décision*. thése de doctorat, Université Paris-Dauphine, 1993.

[NACCACHE 78] P. H. NACCACHE. *Connectedness of the set of nondominated outcomes in multicriteria optimization*. Journal of optimization theory and applications, vol. 25, pages 459–467, 1978.

[OLSON 92] D. L. OLSON. *Review of empirical studies in multiobjective mathematical programming: subject reflection of nonlinear utility and learning*. Decision sciences, vol. 23, pages 1–20, 1992.

[OTHMANI 97a] I. OTHMANI. *Efficacité partielle et optimisation multicritére*, 1997. Cinquième journées des mathématiques de l'optimisation et la décision, Paris.

[OTHMANI 97b] I. OTHMANI. *A new concept for multiple criteria optimization: The a-efficient solution*. In N. MESKENS & M. ROUBENS, editeurs, International conference on methods and applications of multicriteria decision Making, FUCAM, pages 217–220, May 1997.

[OVCHINNIKOV 91] S. OVCHINNIKOV & M. ROUBENS. *On strict preference relations*. Fuzzy sets and systems, vol. 43, no. 3, pages 319–326, 1991.

[PASCHE 87] C. PASCHE. *Une approche de l'analyse multicritère par des systemes experts.* Cahiers du C.E.R.O, vol. 29, no. 1-2, pages 49–59, 1987.

[PASQUIER-DORTHE 90] J. PASQUIER-DORTHE & H. RAYNAUD. *Un outil d'aide à la décision multicritère.* Rapport technique, Université Jopseh Fourier, 1990.

[PELLETIER 98] C. PELLETIER , W. GEORGE , F. PATRICE & I. OTHMANI. *The regional health care planning: a multicriteria problem.* In BORNE & KSSOURI, editeurs, Symposuim on applied mathematics and optimization, $2^{ed}$ IMACS-IEEE, Tunisie, 1998.

[PIRLOT 94] M. PIRLOT. *Why trying to characterize the procedures used in multi-criteria decision aid.* Cahiers de CERO, vol. 36, pages 283–292, 1994.

[PLOTT 67] C. R. PLOTT. *A notion of equilibrium and its possibility under majority rule.* American economic review, vol. 57, pages 787–806, 1967.

[RAYNAUD 97] H. RAYNAUD. L'approche axiomatique en décision multicritère. Manuscrit d'un ouvrage en cours de préparation, 1997.

[REEVES 88] G. R. REEVES & R. C. REID. *Minimum values over the efficient set in multiple objective decision making.* European journal of operational research, vol. 36, pages 334–338, 1988.

[RIVETT 75] B. H. P. RIVETT. *Behavioural problems of utility theory.* In D. J.WHITE, editeur, The role of effectiveness of theories of decision in practice, pages 21–27, 1975.

[ROMERO 85] C. ROMERO. *Multi-objective and Goal-programming approaches as a distance function model.* J. Opl. Res. Soc., vol. 36, no. 3, pages 249–251, 1985. Technical note.

[ROSINGER 91] E. E. ROSINGER. *Beyond preference information based multiple criteria decision making.* European journal of operational research, vol. 53, pages 217–227, 1991.

[ROUBENS 97] M. ROUBENS. *Interaction between criterie forming a coalition.* In N. MESKENS & M. ROUBENS, editeurs, International conference on methods and applications of multicriteria decision Making, FUCAM, pages 193–195, May 1997.

[ROY 85] B. ROY. Méthodologie multicritére d'aide à la décision. Economica, Paris, 1985.

[ROY 90] B. ROY. *Sience de la décision ou science de l'aide à la décision?* cahier du Lamsade 97, Université Paris-Dauphine, 1990.

[ROY 92] A. ROY & J. WALLENIUS. *Non linear multiple objective optimization: An algorithm and some theory.* Mathematical programming, vol. 55, pages 235–249, 1992.

[ROY 93] B. ROY & D. BOUYSSOU. Aide multicritère à la décision : méthodes et cas. Economica, Paris, 1993.

[SAWARAGI 85] Y. SAWARAGI, H. NAKAYAMA & T. TANINO. Theory of multiobjective optimization. Academic press, Orlando, 1985.

[SAYIN 96] S. SAYIN. *An algorithm based on facial decomposition for finding the efficient set in multiple objective linear programming.* operations research letters, vol. 19, pages 87–94, 1996.

[SIMON 57] H. A. SIMON. Models of man. John Wiley & sons, New York, 1957.

[SLOWINSKI 90] R. SLOWINSKI. *Outranking-based interactive procedure for multiple objective programs.* In H. E. BRADELY, editeur, Twelfth IFORS International Conference On Operational Resarch, pages 749–760, 1990.

[SOLAND 79] R. M. SOLAND. *Multicriteria optimization : a general characterization of efficient solutions.* Decision sciences, vol. 10, pages 26–38, 1979.

[SOLANKI 93] R. S. SOLANKI & P. A. APPINOand J. L. COHON. *Approximating the noninferior set in multiobjective linear programming problems.* European journal of operational research, vol. 68, pages 356–373, 1993.

[ STEUER 76] R. E. STEUER. *Multiple objective programming with interval criterion weights.* Managment science, vol. 23, no. 3, pages 305–316, 1976.

[STEUER 83] R. E. STEUER & Eun-Ung CHOO. *An interactive weighted tchebycheff procedure for multiple objective programming.* Mathematical programming, vol. 26, pages 326–344, 1983.

[STEUER 86] R.E. STEUER. Multiple criteria optimization: Theory, computation, and application. Wiley, New York, 1986.

[Steuer 93] R. E. Steuer, J. Silverman & A. W. Whisman. *A combined Tchebycheff/Aspiration criterion vector interactive multiobjective programming procedure.* Management science, vol. 39, no. 10, pages 1255–1260, 1993.

[Steuer 95] R. E. Steuer. *Manuel of the ADBASE: Multiple Objective Linear Programming Package.* Faculty of Management Science, University of Georgia, Athens, Georgia 30602, USA, 1995.

[Stewart 96] T. J. Stewart. *Robustness of additive value functions methods in* MCDM. Journal of multi-criteria decision analysis, vol. 5, pages 301–310, 1996.

[Tanguian 96] A. S. Tanguian. *Solution to Condorcet's Paradox for a large number of voters.* Discussion paper 232, University of Hagen, Germany, 1996.

[Tanguiane 91] A. S. Tanguiane. Aggregation and representation of preferences. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Tecle 91] A. Tecle & L. Duckstein. Concepts on multicriterion decision making. Presented at the international post graduate course, Decision Support Techniques for Integrated Water Resources Management, Wageningen, The Netherlands,, June 1991.

[Tversky 69] A. Tversky. *Intransitivity of preferences.* Psychological review, vol. 76, no. 1, pages 31–48, 1969.

[Vangeldere 77a] J. Vangeldere. *Programmation à objectifs multiples et ordre linèaire.* séminaire, Université de liège, Institut de mathématiques, 1977.

[Vangeldere 77b] J. Vangeldere. *Quelques problémes en programmation à objectifs multiples.* Working paper, Université de liège, Institut de mathématiques, 1977.

[Vansnick 86a] J. C. Vansnick. *On the problem of weights in multiple criteria decision making.* European journal of operational research, vol. 24, pages 288–294, 1986.

[Vansnick 86b] J.C. Vansnick. *De Borda et Condorcet à l'agrégation multicritère.* cahier du Lamsade 70, Université Paris-Dauphine, 1986.

[Vincke 82] P. Vincke. *Aggregation of preferences: a review.* European journal of operational research, vol. 9, pages 17–22, 1982.

[VINCKE 89] P. VINCKE. L'aide multicritère à la décision. Editions de l'Université de Bruxelles, 1989.

[WALLENIUS 75] J. WALLENIUS. *Comparative evaluation of some interactive approaches to muticriterion optimization.* Management science, vol. 21, no. 12, pages 1387–1396, 1975.

[WARBURTON 83] A. R. WARBURTON. *Quasiconcave vector maximization: connectedness of the sets of Pareto-optimal and Weak Pareto-optimal alternatives.* Journal of optimization theory and applications, vol. 40, no. 4, pages 537–557, 1983.

[WENDELL 80] R. E. WENDELL. *Multiple objective mathematical programming with respect to multiple decision-makers.* Operations research, vol. 28, no. 5, pages 1100–1111, 1980.

[WHITE 75] D. J. WHITE. *The nature of decision theory.* In D. J. WHITE, editeur, The role of effectiveness of theories of decision in practice, pages 3–18, 1975.

[WHITE 90] D. J. WHITE. *A Bibliography on the applications of mathematical programming multiple-objective methods.* J. Opl. Res. Soc., vol. 41, no. 8, pages 669–691, 1990.

[WIERCZBICKI 82] A. P. WIERCZBICKI . *A mathematical basis for satisficing decision making.* Mathematical modelling, vol. 3, pages 391–405, 1982.

[YU 74] P. L. YU & M. ZELENY. *The techniques of linear multiobjective programming.* R.A.I.R.O., vol. 3, pages 51–71, 1974.

[ZELENY 74] M. ZELENY. *A concept of compromise programming solution and the method of the displaced ideal.* Computers and operations research, vol. 1, pages 479–796, 1974.

[ZELENY 82] M. ZELENY. Multiple criteria decision making. McGraw-Hill Book company, 1982.

[ZIONTS 76] S. ZIONTS & J. WALLENIUS. *An interactive programming method for solving the multiple criteria problem.* Management science, vol. 22, no. 6, pages 652–663, 1976.

[ZIONTS 79] S. ZIONTS. outline of minicourse on multiple criteria decision making. Mathamtical programming symposium, Montreal, Quebec, Canada, August 1979.

[ZIONTS 83] S. ZIONTS & J. WALLENIUS. *An interactive multiple objective linear programming method for a class of underlying nonlinear utility functions.* Management science, vol. 29, no. 5, pages 519–529, 1983.

# Table des figures

# Liste des tableaux

**Resumé :** L'optimisation multicritère consiste à choisir, en présence de critères multiples, une (des) alternative(s) parmi un nombre infini d'alternatives qui varient généralement dans un domaine continu. Depuis une trentaine d'années, le domaine de l'optimisation multicritère connaît une évolution importante. Cette évolution s'est traduite par le développement d'un grand nombre de méthodes. La multitude des méthodes d'optimisation multicritère est perçue comme une richesse incontestable de ce domaine. D'ailleurs, certains la justifient par la diversité des problèmes ainsi que par l'existence de différentes approches de résolution possibles et légitimes de ces problèmes. Cependant, ce phénomène révèle aussi des faiblesses certaines. En effet, la plupart de ces méthodes manquent de fondements axiomatisés, et il est difficile de choisir la méthode à appliquer face à une situation donnée.

Le travail présenté dans ce mémoire propose une approche axiomatisée d'optimisation multicritère. Cette approche est fondée sur des concepts tels que l'efficacité partielle qui sont motivés et justifiés par des interprétation intelligibles. Elle est Robuste par rapport aux paramètres utilisés, opérationnelle, et évolutive. Elle peut être utilisée dans la résolution de différentes situations multicritères tels que les problèmes comportant des critères nombreux et incommensurables et les problèmes de décisions publiques.

**Multicriteria optimization: foundations and concepts**

**Abstract:** Multicriteria optimization consists in choosing, in the presence of multiple criteria, one (many) alternative(s) among an infinite number of alternatives which generally vary in a continuous domain. Since about thirty years, the field of multicriteria optimization knows a significant evolution. This evolution resulted in the development of a great number of methods. These multicriteria optimization methods are perceived like a richness of this field. Moreover, some justify it by the diversity of the problems and by the existence of various possible and legitimate resolution approaches of these problems. However, this phenomenon reveals also some weaknesses. Indeed, the majority of these methods miss axiomatic foundations, and it is difficult to choose the method to be applied to a given situation.

In this thesis, we propose an axiomatic approach for multicriteria optimization. This approach is based on concepts such as the partial efficiency which are justified by understandable interpretations. It is robust with respect to the parameters and operational. It can be used in the resolution of various multicriteria situations such as the problems involving many incommensurable criteria and the public decision problems.

**Discipline :** Recherche Opérationnelle.

**Mots clés :** optimisation multicritère, programmation multi-objectif, efficacité partielle, décision multicritère, aide à la décision, théorie de la décision.

Laboratoire LEIBNIZ-IMAG, 46, av. Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex 1.