



Orthogonalité des B-splines de Chebyshev cardinales dans un espace de Sobolev pondéré

Khaled Melkemi

► To cite this version:

Khaled Melkemi. Orthogonalité des B-splines de Chebyshev cardinales dans un espace de Sobolev pondéré. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1999. Français. NNT : . tel-00004843

HAL Id: tel-00004843

<https://theses.hal.science/tel-00004843>

Submitted on 18 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Présentée par
Khaled MELKEMI

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I

(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Discipline : **Mathématiques Appliquées**

Orthogonalité des B-splines de Chebyshev cardinales dans un espace de Sobolev pondéré

Soutenue publiquement le 14 décembre 1999 devant le jury :

M.	Anestis ANTONIADIS	<i>Président</i>
M.	Albert COHEN	<i>Rapporteur</i>
M.	Tom LYCHE	<i>Rapporteur</i>
M.	Patrick CHENIN	<i>Examineur</i>
M.	Pierre-Jean LAURENT	<i>Examineur</i>
Mme.	Marie-Laurence MAZURE	<i>Examineur</i>

Thèse préparée au sein du Laboratoire de Modélisation et Calcul - Grenoble

À la mémoire de mon père,
à ma mère.

Avant Propos

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à Madame Marie-Laurence MAZURE, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble I et directeur de cette thèse, pour m'avoir initié, dans un esprit de rigueur, à un domaine de recherche très enrichissant. Sa générosité, ses conseils et sa gentillesse ont contribué à améliorer la rédaction de cette thèse. Qu'elle soit assurée de ma profonde reconnaissance.

Je remercie Monsieur Pierre-Jean LAURENT, Professeur émérite à l'Université Joseph Fourier - Grenoble I, qui a énormément contribué par ses remarques précieuses et ses encouragements. Nos discussions ont été, toujours pour moi, une source stimulante de réflexion. Je le remercie également pour avoir fait accepté de faire partie du jury.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur Anistis ANTONIADIS, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble I, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

J'aimerais remercier chaleureusement Monsieur Albert COHEN, Professeur à l'Université Pierre & Marie Curie - Paris VI et membre de l'Institut Universitaire de France, et Monsieur Tom LYCHE, Professeur à l'Université d'Oslo (Norvège), qui m'ont fait l'honneur de rapporter sur cette thèse. Je suis très sensible à l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur Patrick CHENIN, Maître de conférences à l'Université Joseph Fourier - Grenoble I, pour sa sympathie, sa gentillesse et sa générosité et pour avoir accepté de faire partie du jury.

Par ailleurs, je tiens à exprimer ma sympathie à Monsieur H. G. TER MORSCHE, Professeur à l'Université Technologique d'Eindhoven (Pays-Bas) et Monsieur Amos RON, Professeur à l'Université de Wisconsin-Madison (Etats-Unis), qui ont eu la gentillesse de me communiquer des informations et des documents concernant une partie de leurs travaux.

Je remercie mes collègues étudiants chercheurs et amis du Laboratoire de Modélisation et Calcul qui m'ont apporté leur soutien moral tout au long de ce travail et pour l'excellente ambiance qui règne au sein du LMC.

Résumé

Ce travail porte sur l'étude théorique et numérique des splines de Chebyshev. Ces fonctions généralisent les splines polynomiales tout en préservant l'essentiel de leurs propriétés. Elles offrent de plus un intérêt particulier pour le design géométrique grâce aux paramètres de forme qu'elles fournissent.

Dans un premier temps, nous étudions les splines basées sur un espace de Chebyshev invariant par translations, et les propriétés de la B-spline correspondante.

Dans un deuxième temps, nous montrons, sous certaines hypothèses, que la base des B-splines de Chebyshev est orthonormale dans un espace de Sobolev pondéré par une suite unique de nombres positifs. La meilleure approximation dans l'espace de splines de Chebyshev au sens de la norme associée au produit scalaire précédent est alors un projecteur local.

Enfin, pour l'implémentation numérique des résultats précédents, nous utilisons une méthode de quadratures adaptées. Quelques exemples illustrant les effets de forme obtenus sont présentés.

Ces résultats généralisent un résultat prouvé récemment par Ulrich Reif dans le cas particulier des splines polynomiales.

Mots clés : B-spline, splines de Chebyshev, espaces de Sobolev, orthogonalité, meilleure approximation

Abstract

This work concerns the theoretical and numerical study of Chebyshevian splines. These functions generalize the polynomial splines and preserve most of their properties. Moreover, Chebyshevian splines have turned out to be useful in geometric design due to the shape parameters they provide.

Firstly, we study the splines based on translation invariant Chebyshevian spaces. Then we show, under some conditions, that the Chebyshevian B-spline bases are orthonormal in a weighted Sobolev space associated with unique sequence of positive real numbers. Due to the properties of the B-splines, the best approximation in the space of Chebyshevian splines with respect to the associated norm is then a local projector.

Finally, for the numerical implementation of the previous results, we use an adapted quadrature method. Some examples illustrating the possible shape effects are presented.

These results extend the results recently obtained by Ulrich Reif in the particular case of polynomial splines.

Key words : B-splines, Chebyshevian splines, Sobolev spaces, orthogonality, best approximation.

Table des matières

Introduction	11
1 Espaces de Chebyshev	15
1.1 Systèmes et espaces de Chebyshev	15
1.2 ECC-espaces et fonctions-poids	20
1.3 Espaces invariants par translation	24
1.4 Splines de Chebyshev	29
2 Splines cardinales basées sur un espace de Chebyshev invariant par translations	31
2.1 B-splines de Chebyshev	31
2.2 B-spline adjointe	43
2.3 Transformée de Fourier d'une B-spline de Chebyshev	45
2.4 La B-spline N_{λ}^m comme fonction de λ	51
2.5 Le cas complexe	54
3 Orthonormalité des splines de Chebyshev (Première partie)	61
3.1 Un résultat fondamental	62
3.2 Orthogonalité par rapport à un produit scalaire de Sobolev pondéré	77
3.3 Cas général	84
4 Orthonormalité des B-splines de Chebyshev (deuxième partie)	91
5 Approximation par des splines de Chebyshev uniformes	109
5.1 Formule de Taylor généralisée	109
5.2 Approximation par des splines de Chebyshev dans un espace de Sobolev . .	113
5.3 Approche Numérique	116
A Les différences divisées	123
A.1 Interpolation de Lagrange et différences divisées	123
A.2 Interpolation d'Hermite et différences divisées	125

A.3 Différences divisées et fonctions analytiques	128
---	-----

Introduction

En design géométrique aussi bien qu'en théorie de l'approximation, il est important de choisir, dans un espace de fonctions donné, une base *bien adaptée* au problème traité. Par bien adaptée, on entend généralement le fait que les propriétés de la fonction ou de la courbe peuvent se déduire facilement de sa représentation dans cette base. A titre d'exemple, il est difficile, voire impossible, de prévoir les caractéristiques géométriques d'une courbe paramétrique plane, polynomiale de degré inférieur ou égal à n (telles que localisation, convexité, monotonie dans une direction donnée, ...) à partir de sa représentation dans la base canonique

$$P(t) = \sum_{k=0}^n t^k a_k, \quad t \in [0, 1],$$

c'est-à-dire à partir des points $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^2$. Au contraire, si l'on écrit P dans la base de Bernstein:

$$P(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} b_k, \quad t \in [0, 1],$$

l'allure de la courbe associée et ses caractéristiques géométriques se déduisent de celles du polygone défini par les points $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}^2$, appelés *points de contrôle* de la courbe.

De la même façon, la base des B-splines est fréquemment utilisée dans de nombreux domaines des Mathématiques Appliquées. Le *polygone de contrôle* défini par les coefficients dans cette base donne ici encore une bonne idée intuitive de l'allure de la courbe et de ses caractéristiques géométriques. De plus, la compacité du support des B-splines entraîne une influence locale de ces coefficients (ou *points de contrôle*).

Les techniques utilisées pour approcher une fonction par une spline sont les quasi-interpolants ou la meilleure approximation au sens d'une norme. Les quasi-interpolants standards sont très efficaces puisque les points de contrôle de la spline sont calculés directement à partir d'un nombre fini de valeurs de la fonction. Cependant cette méthode n'est en général pas optimale au sens où elle n'exprime pas une meilleure approximation par rapport à une norme dans un espace fonctionnel [28].

Si l'on cherche la meilleure approximation d'une fonction au sens d'une norme associée à un produit scalaire, on est conduit à la résolution d'un système linéaire de grande

dimension. On perd en général la propriété de localité de la représentation. C'est le cas en particulier de la meilleure approximation au sens de la norme de L^2 .

Récemment, Ulrich Reif [27] a montré qu'il existe un produit scalaire pondéré unique de type Sobolev pour lequel la base des B-splines cardinales est orthonormée. Par conséquent, on peut dans ce cas effectuer plus facilement le calcul de la meilleure approximation puisque celui-ci se réduit en fait à la détermination des coefficients de Fourier. De plus la représentation préserve le caractère local des B-splines.

Ce que nous venons d'exposer concerne les B-splines polynomiales. Or, pour certaines applications, il peut être utile de remplacer l'espace des polynômes par un espace de Chebyshev approprié. Cette opération fournit en particulier des *paramètres de forme*. L'intérêt de ces paramètres est notamment de permettre de modifier légèrement la forme de la courbe tout en gardant son allure générale.

Les splines de Chebyshev ont été largement étudiées dans les années récentes (L.L. Schumaker, T. Lyche, N. Dyn, A. Ron, P.J. Barry, H. Pottmann, P.-J. Laurent, M.-L. Mazure, ...). Les B-splines de Chebyshev possèdent essentiellement les mêmes propriétés que les B-splines polynomiales (compacité du support, positivité sur l'intérieur du support, ...). L'objet de ce travail est la généralisation du théorème d'U. Reif aux B-splines de Chebyshev, ce qui permettra d'étendre à ce cadre plus large les avantages de la relation d'orthogonalité.

Après une présentation générale des espaces de Chebyshev, nous montrons dans le Chapitre 1 que tout espace de Chebyshev invariant par translation est le noyau d'un opérateur différentiel à coefficients constants. Cette invariance par translation est essentielle pour pouvoir considérer des B-splines uniformes.

Le Chapitre 2 est consacré à l'étude des espaces de splines uniformes basées sur un espace de Chebyshev invariant par translation. A partir d'un opérateur différentiel à coefficients réels et constants qui s'écrit

$$\prod_{k=1}^m (D - \lambda_k I),$$

où D désigne l'opérateur de dérivation et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des nombres réels ou complexes, nous présentons une construction de la B-spline de Chebyshev, ainsi que ses propriétés. Nous montrons en particulier que ses valeurs s'expriment comme différences divisées de fonctions exponentielles.

Au Chapitre 3 nous prouvons que dans le cas où tous les nombres λ_k sont réels, il existe un unique produit scalaire pondéré de type Sobolev par rapport auquel les translatées de la B-spline de Chebyshev sont orthonormées.

Le Chapitre 4 traite le cas où les nombres λ_k sont complexes. Une étude particulière est faite dans le cas d'imaginaires purs.

Une application numérique est présentée dans le Chapitre 5. Nous proposons une approche numérique pour le calcul de la meilleure approximation d'une fonction dans l'espace des splines de Chebyshev associées au noyau d'un opérateur différentiel à coefficients réels et constants. Des expérimentations numériques illustrent l'effet des paramètres de forme.

Chapitre 1

Espaces de Chebyshev

Ce chapitre est consacré à un rappel sur la théorie des espaces de Chebyshev. Nous commençons par les définitions et les propriétés des systèmes de Chebyshev, de Chebyshev généralisés et de Chebyshev généralisés complets, que nous noterons respectivement C-systèmes, EC-systèmes et ECC-systèmes (suivant la littérature anglo-saxonne : Chebyshevian, Extended Chebyshevian et Extended Complete Chebyshevian system).

Pour une étude détaillée des systèmes et espaces de Chebyshev nous renvoyons à [9], [32], [20].

1.1 Systèmes et espaces de Chebyshev

Dans ce paragraphe I désigne un intervalle réel d'intérieur non vide. Nous travaillerons dès le départ avec des fonctions indéfiniment dérivables sur I , bien que cette hypothèse simplificatrice puisse à l'évidence être largement affaiblie.

Étant donné $n + 1$ fonctions $g_0, \dots, g_n \in C^\infty(I)$, pour toute suite $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ de points de I , nous introduisons la notation suivante :

$$M \begin{pmatrix} t_0, \dots, t_n \\ g_0, \dots, g_n \end{pmatrix} := (g_i(t_j))_{i,j=0,\dots,n} \quad (1.1)$$

(*collocation matrix* dans la littérature anglo-saxonne). Plus généralement, partant d'une suite $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ de points de I , cette suite peut s'écrire sous la forme :

$$(t_0, t_1, \dots, t_n) = (\xi_1^{[\mu_1]}, \dots, \xi_r^{[\mu_r]}),$$

où les points ξ_i satisfont : $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_r$, et les entiers $\mu_1, \dots, \mu_r$ sont strictement positifs et satisfont $\mu_1 + \dots + \mu_r = n + 1$. La notation $\xi_i^{[\mu_i]}$ signifie que le point ξ_i est répété exactement μ_i fois. Dans ce cas nous définissons la matrice $M \begin{pmatrix} t_0, \dots, t_n \\ g_0, \dots, g_n \end{pmatrix}$ comme

suit :

$$M \begin{pmatrix} t_0, \dots, t_n \\ g_0, \dots, g_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} g_0(\xi_1) & g'_0(\xi_1) & \dots & g_0^{(\mu_1-1)}(\xi_1) & \dots & g_0^{(\mu_r-1)}(\xi_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_n(\xi_1) & g'_n(\xi_1) & \dots & g_n^{(\mu_1-1)}(\xi_1) & \dots & g_n^{(\mu_r-1)}(\xi_r) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Définition 1.1. Soient $g_0, \dots, g_n$ des fonctions C^∞ sur l'intervalle I .

1. On dit que le système $(g_0, \dots, g_n)$ est un système de Chebyshev (C-système) sur I si, quelle que soit la suite $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ de points de I

$$\det M \begin{pmatrix} t_0, \dots, t_n \\ g_0, \dots, g_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

2. On dit que le système $(g_0, \dots, g_n)$ est un système de Chebyshev généralisé (EC-système) sur I si, quelle que soit la suite $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ de points de I ,

$$\det M \begin{pmatrix} t_0, \dots, t_n \\ g_0, \dots, g_n \end{pmatrix} \neq 0. \quad (1.3)$$

3. On dit que le système $(g_0, \dots, g_n)$ est un système de Chebyshev généralisé complet (ECC-système) sur I si, pour tout entier $k = 0, \dots, n$, $(g_0, \dots, g_k)$ est un système de Chebyshev généralisé sur I .

On a de façon évidente les implications suivantes :

$$\text{ECC-système sur } I \implies \text{EC-système sur } I \implies \text{C-système sur } I.$$

Si $(g_0, \dots, g_n)$ est un C-système sur I , alors les fonctions $g_0, \dots, g_n$ sont linéairement indépendantes sur I . Notons $\mathcal{G}_n$ le sous-espace vectoriel (de dimension $n+1$) de $C^\infty(I)$ que ces fonctions engendrent. Il est facile de vérifier que toute autre base de $\mathcal{G}_n$ est à son tour un C-système sur I . De la même façon, si $(g_0, \dots, g_n)$ est un EC-système sur I , toute autre base de $\mathcal{G}_n$ est un EC-système. Par contre, en ce qui concerne les ECC-systèmes, il n'en sera pas de même, ne serait-ce que parce que l'ordre intervient de façon essentielle dans la définition. Nous illustrerons ceci de façon plus précise plus loin. Ces remarques justifient les définitions suivantes.

Définition 1.2. Soit $\mathcal{G}_n$ un sous-espace vectoriel de dimension $n+1$ de C^∞ . On dit que

1. $\mathcal{G}_n$ est un espace de Chebyshev (C-espace) sur I si toute base $(g_0, \dots, g_n)$ de $\mathcal{G}_n$ est un système de Chebyshev sur I .
2. $\mathcal{G}_n$ est un espace de Chebyshev généralisé (EC-espace) sur I si toute base $(g_0, \dots, g_n)$ de $\mathcal{G}_n$ est un système de Chebyshev généralisé sur I .
3. $\mathcal{G}_n$ est un espace de Chebyshev généralisé complet (ECC-espace) sur I s'il existe une base $(g_0, \dots, g_n)$ de $\mathcal{G}_n$ qui soit un système de Chebyshev généralisé et complet sur I .

De façon évidente, nous avons à nouveau :

$$\text{ECC-espace sur } I \implies \text{EC-espace sur } I \implies \text{C-espace sur } I.$$

Bien sûr, si $\mathcal{G}_n$ est un C-espace (ou EC-espace, ou ECC-espace) sur I , c'est un C-espace (ou EC-espace, ou ECC-espace) sur tout intervalle $J \subset I$.

Des définitions 1.1 et 1.2, on peut déduire facilement les résultats bien connus suivants.

Proposition 1.3. *Soit $\mathcal{G}_n$ un sous-espace vectoriel de dimension $n + 1$ de C^∞ . Alors $\mathcal{G}_n$ est un ECC-espace sur I si et seulement s'il existe une suite emboîtée*

$$\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1 \subset \dots \subset \mathcal{G}_{n-1} \subset \mathcal{G}_n$$

de sous-espaces de $\mathcal{G}_n$ telle que, pour $i = 0, \dots, n$, $\mathcal{G}_i$ soit un EC-espace de dimension $i + 1$ sur I .

Proposition 1.4. *Soit $\mathcal{G}_n$ un sous-espace vectoriel de dimension $n + 1$ de $C^\infty(I)$.*

- (i) L'espace $\mathcal{G}_n$ est C-espace sur I si et seulement si tout élément non nul de $\mathcal{G}_n$ admet au plus n zéros distincts dans I .*
- (ii) L'espace $\mathcal{G}_n$ est un EC-espace sur I si et seulement si tout élément non nul de $\mathcal{G}_n$ admet au plus n zéros (comptés avec leur multiplicités) dans I .*

En particulier une fonction $g \in C^\infty(I)$ est un EC-système (ou C-système) si et seulement si elle ne s'annule pas sur I .

Exemples 1.5.

1.5.1. Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à n sur $\mathbb{R}$. De la proposition 1.4 on peut déduire que $\mathcal{P}_n$ est un EC-espace sur $\mathbb{R}$ tout entier, et, par conséquent, via la proposition 1.3, que $\mathcal{P}_n$ est un ECC-espace sur $\mathbb{R}$.

1.5.2. Pour $n = 1$, soit $g_0(x) = \sin \alpha x$, $g_1(x) = -\cos \alpha x$, où $\alpha > 0$ est un réel donné. Pour $t_0 < t_1$,

$$\det M \begin{pmatrix} t_0 & t_1 \\ g_0 & g_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \alpha t_0 & \sin \alpha t_1 \\ -\cos \alpha t_0 & -\cos \alpha t_1 \end{vmatrix} = \sin [\alpha(t_1 - t_0)],$$

tandis que

$$\det M \begin{pmatrix} t_0 & t_0 \\ g_0 & g_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \alpha t_0 & \alpha \cos \alpha t_0 \\ -\cos \alpha t_0 & \alpha \cos \alpha t_0 \end{vmatrix} = \alpha.$$

Par conséquent, il est clair que l'espace $\mathcal{G}_1$ engendré par g_0, g_1 est EC-espace de dimension 2 sur tout intervalle strictement contenu dans $[a, a + \frac{\pi}{\alpha}]$, $a \in \mathbb{R}$. Par contre, ce n'est pas

un EC-espace sur $[a, a + \frac{\pi}{\alpha}]$, puisque

$$\det M \begin{pmatrix} a & a + \frac{\pi}{\alpha} \\ g_0 & g_1 \end{pmatrix} = \sin \pi = 0$$

1.5.3. Pour $n = 2$, considérons les fonctions

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = \cos x, \quad g_2(x) = \sin x,$$

et $\mathcal{G}_2$ l'espace engendré par ces fonctions. On remarque que

$$\det M \begin{pmatrix} t_0 & t_0 & t_0 \\ g_0 & g_1 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos t_0 & -\sin t_0 & -\cos t_0 \\ \sin t_0 & \cos t_0 & -\sin t_0 \end{vmatrix} = 1, \quad t_0 \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs pour $t_0 < t_1 < t_2$, on peut vérifier que

$$\begin{aligned} \det M \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 \\ g_0 & g_1 & g_2 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos t_0 & \cos t_1 & \cos t_2 \\ \sin t_0 & \sin t_1 & \sin t_2 \end{vmatrix} \\ &= -4 \sin \left(\frac{t_0 - t_1}{2} \right) \sin \left(\frac{t_1 - t_2}{2} \right) \sin \left(\frac{t_2 - t_0}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\det M \begin{pmatrix} t_0 & t_0 & t_1 \\ g_0 & g_1 & g_2 \end{pmatrix} = 1 - \cos(t_1 - t_0).$$

Par conséquent, $\mathcal{G}_2$ est un EC-espace sur tout intervalle strictement contenu dans $[a, a + 2\pi]$, mais pas sur $[a, a + 2\pi]$.

1.5.4. Pour $n = 2$, considérons les fonctions

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = \operatorname{ch} x, \quad g_2(x) = \operatorname{sh} x,$$

On montrera de la même façon que l'espace $\mathcal{G}_2$ engendré par ces 3 fonctions est un EC-espace sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Partant à nouveau de $n+1$ fonctions $g_0, \dots, g_n \in C^\infty(I)$ quelconques, pour tout $x \in I$, nous pouvons considérer la matrice carrée d'ordre $n+1$ suivante :

$$\mathcal{W}(g_0, \dots, g_n)(x) := \left(g_i^{(j)}(x) \right)_{i,j=0,\dots,n}. \quad (1.4)$$

Le déterminant de cette matrice, à savoir la fonction définie sur I par :

$$W(g_0, \dots, g_n)(x) := \det \mathcal{W}(g_0, \dots, g_n)(x), \quad x \in I, \quad (1.5)$$

est appelé le *Wronskien* des fonctions $g_0, \dots, g_n$.

Supposons que $(g_0, \dots, g_n)$ soit un EC-système sur I . Alors, comme cas particulier de (1.3), nous obtenons

$$W(g_0, \dots, g_n)(x) \neq 0 \quad \text{pour tout } x \in I.$$

La réciproque n'est bien sûr pas vraie comme le prouve l'exemple 1.5.3. Par contre, les ECC-systèmes peuvent être caractérisés en termes de Wronskien comme suit :

Proposition 1.6. *Considérons $n+1$ fonctions $g_0, \dots, g_n \in C^\infty(I)$. Le système $(g_0, \dots, g_n)$ est un ECC-système sur I si et seulement si pour tout $k = 0, \dots, n$, $W(g_0, \dots, g_k)(x)$ ne s'annule pas sur I .*

Pour la preuve de ce résultat nous renvoyons à [20] et [9]. Illustrons cette caractérisation intéressante par les exemples suivants :

Exemples 1.7.

1.7.1. Soit $g_i(x) = x^i$, $i = 0, \dots, n$. Le système $(g_0, \dots, g_n)$ est un ECC-système sur $\mathbb{R}$. Ceci résulte du fait que, pour tout $k = 0, \dots, n$,

$$W(g_0, \dots, g_n)(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^k & kx^{k-1} & \dots & k! \end{vmatrix} = 0!1!\dots k!$$

Remarquons que, par contre, le système $(g_n, g_{n-1}, \dots, g_0)$ n'est pas un ECC-système sur $\mathbb{R}$ puisque g_n s'annule en 0. Cet exemple simple met en évidence le fait que, dans un ECC-espace, une base donnée n'est pas nécessairement un ECC-système.

1.7.2. Considérons les fonctions $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = \operatorname{sh}x$ et $g_2(x) = \operatorname{ch}x$. D'après l'exemple 1.5.4. le système (g_0, g_1, g_2) est un EC-système sur $\mathbb{R}$. C'est en fait un ECC-système sur $\mathbb{R}$, puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$W(g_0)(x) = 1, \quad W(g_0, g_1)(x) = \operatorname{ch}x, \quad W(g_0, g_1, g_2)(x) = 1.$$

La proposition 1.6 aboutit facilement au résultat suivant :

Corollaire 1.8. *Soient $g_0, \dots, g_n$, $n+1$ éléments de $C^\infty(I)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $(g_0, \dots, g_n)$ est ECC-système sur I .

(ii) g_0 ne s'annule pas sur I et

$$\left(\left(\frac{g_1}{g_0} \right)', \dots, \left(\frac{g_n}{g_0} \right)' \right)$$

est un ECC-système sur I .

Preuve.

L'hypothèse (i) implique que la fonction g_0 est un EC-système sur I , donc ne s'annule pas sur I .

Inversement, soit $g_0 \in C^\infty(I)$ une fonction qui ne s'annule pas sur I . Alors en écrivant pour tout $k \leq n$, $g_k = g_0 \times \frac{g_k}{g_0}$ et en calculant $g_k^{(i)}$ par la formule de Leibniz, on prouve facilement que

$$\begin{aligned} W(g_0, \dots, g_n) &= g_0^{k+1} W\left(\mathbb{I}, \frac{g_1}{g_0}, \dots, \frac{g_n}{g_0}\right) \\ &= g_0^{k+1} W\left(\left(\frac{g_1}{g_0}\right)', \dots, \left(\frac{g_n}{g_0}\right)'\right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

D'où le résultat annoncé, grâce à la proposition 1.6. ■

1.2 ECC-espaces et fonctions-poids

Donnons-nous $n+1$ fonctions $w_0, \dots, w_n \in C^\infty(I)$ et supposons que chacune d'elles n'a pas de zéro dans I . Notons D l'opérateur de dérivation sur $C^\infty(I)$. On peut alors associer aux fonctions $w_0, \dots, w_n$, que nous appellerons *fonctions-poids* sur I , les opérateurs différentiels définis sur $C^\infty(I)$ comme suit :

$$D_0 u := u, \quad D_k u := D \left(\frac{u}{w_{k-1}} \right), \quad k = 1, \dots, n+1. \quad (1.7)$$

Introduisons également les opérateurs différentiels $L_0, \dots, L_{n+1}$ définis par :

$$L_k = D_k \circ D_{k-1} \circ \dots \circ D_0, \quad k = 0, \dots, n+1. \quad (1.8)$$

Proposition 1.9. *L'espace vectoriel $\mathcal{G}_n = \text{Ker } L_{n+1}$ est un ECC-espace de dimension $n+1$ sur I .*

Preuve.

Pour $k = 0, \dots, n$ notons $\mathcal{G}_k := \text{Ker } L_{k+1}$. D'après (1.7) et (1.8), L_k est un opérateur différentiel linéaire d'ordre k exactement. En effet, on peut vérifier facilement que :

$$L_k u = \frac{1}{w_0 w_1 \dots w_{k-1}} u^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} a_j u^{(j)}, \quad (1.9)$$

où les a_j , $j = 0, \dots, k-1$, sont des éléments de $C^\infty(I)$. La suite emboîtée

$$\{0\} \subset \mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1 \subset \dots \subset \mathcal{G}_{n-1} \subset \mathcal{G}_n,$$

est donc telle que chaque $\mathcal{G}_i$ est de dimension $i+1$, $i = 0, \dots, n$. Pour chaque entier $i = 0, \dots, n$, choisissons une fonction g_i telle que $g_i \in \mathcal{G}_i \setminus \mathcal{G}_{i-1}$. Le système $(g_0, \dots, g_n)$ ainsi obtenu est alors un ECC-système sur I . En effet, utilisant la proposition 1.6 il suffit de prouver que pour $k \leq n$, le Wronskien $W(g_0, \dots, g_k)$ ne s'annule pas sur I .

Introduisons la matrice

$$\mathcal{L}(g_0, \dots, g_n)(x) := (L_j g_i(x))_{i,j=0,\dots,n}. \quad (1.10)$$

Selon (1.9),

$$\det \mathcal{L}(g_0, \dots, g_n) = W(g_0, \dots, g_n) \prod_{i=0}^n \frac{1}{w_0 w_1 \dots w_{i-1}}. \quad (1.11)$$

Or, puisque $g_i \in \mathcal{G}_i = \text{Ker } L_{i+1}$, nous savons que $L_j g_i = 0$ pour $j \geq i+1$. Par ailleurs $g_i \notin \mathcal{G}_{i-1} = \text{Ker } L_i$, en sorte que $L_i g_i \neq 0$. De plus, d'après (1.8), $L_{i+1} g_i = D_{i+1}(L_i g_i)$. Par conséquent la fonction g_i satisfait

$$D \left(\frac{L_i g_i}{w_i} \right) = 0,$$

c'est-à-dire,

$$L_i g_i = \alpha_i w_i, \quad (1.12)$$

où α_i est un nombre réel non nul.

En résumé, pour $x \in I$, la matrice $\mathcal{L}(g_0, \dots, g_n)(x)$ est triangulaire inférieure de diagonale $(\alpha_0 w_0(x), \dots, \alpha_n w_n(x))$, où les nombres $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont des réels non nuls. Si bien que

$$\det \mathcal{L}(g_0, \dots, g_n)(x) = \prod_{i=0}^n \alpha_i w_i(x), \quad x \in I. \quad (1.13)$$

De (1.11) et (1.13), on déduit que, pour tout $x \in I$:

$$W(g_0, \dots, g_n)(x) = \prod_{i=0}^n \alpha_i w_i(x)^{n+1-i} \neq 0. \quad (1.14)$$

On montre de même que $W(g_0, \dots, g_k)(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ et tout $k \leq n$. ■

Nous dirons que l'espace $\mathcal{G}_n = \text{Ker } L_{n+1}$ est l'espace ECC associé à $w_0, \dots, w_n$ et noterons :

$$\mathcal{G}_n = \text{ECC}(w_0, \dots, w_n). \quad (1.15)$$

Dans la preuve précédente, nous pouvons choisir $g_0, \dots, g_n$ de façon à ce que $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 1$. Le système ECC $(g_0, \dots, g_n)$ satisfait alors les conditions suivantes :

$$L_j g_i(x) = 0, \quad \text{pour } j \geq i+1, \quad L_i g_i(x) = w_i(x), \quad x \in I \quad (1.16)$$

Pour a fixé dans I , c'est en particulier le cas pour le système suivant :

$$\begin{aligned} g_0(x) &= w_0(x) \\ g_1(x) &= w_0(x) \int_a^x w_1(s) ds \\ &\vdots \\ g_n(x) &= w_0(x) \int_a^x w_1(s_1) \int_a^{s_1} \dots \int_a^{s_{n-1}} w_n(s_n) ds_n \dots ds_1 \end{aligned} \quad (1.17)$$

traditionnellement appelé système ECC *canonique* au point a .

Proposition 1.10. *Soit $\mathcal{G}_n$ un espace ECC de dimension $n+1$ sur I . Alors il existe (au moins) un système $(w_0, \dots, w_n)$ de fonctions-poids tel que $\mathcal{G}_n = \text{ECC}(w_0, \dots, w_n)$.*

Preuve.

Soit $(g_0, \dots, g_n)$ une base de $\mathcal{G}_n$ qui soit un ECC-système sur I . Si $n = 0$, le résultat évident, il suffit de prendre $w_0 = g_0$.

Étant donné un entier $n \geq 1$, supposons le résultat vrai pour $n-1$. D'après le corollaire 1.8, nous savons d'une part la fonction g_0 ne s'annule pas sur I , d'autre part que le système

$$\left(\left(\frac{g_1}{g_0} \right)', \dots, \left(\frac{g_n}{g_0} \right)' \right)$$

est un ECC sur I . Définissons la fonction-poids w_0 par $w_0 := g_0$ et l'opérateur différentiel d'ordre 1 associé sur $C^\infty(I)$

$$D_1 u := \left(\frac{u}{w_0} \right)'.$$

Le système $(D_1 g_1, \dots, D_1 g_n)$ étant un ECC sur I d'après le corollaire 1.8, l'hypothèse de récurrence nous permet d'affirmer l'existence des fonctions poids $w_1, \dots, w_n$ telles que l'espace engendré par $D_1 g_1, \dots, D_1 g_n$ (c'est-à-dire l'espace $D_1 \mathcal{G}_n$) soit associé à ces fonctions-poids, i.e :

$$D_1 \mathcal{G}_n = \text{ECC}(w_1, \dots, w_n).$$

Cela signifie que $D_1 \mathcal{G}_n = \text{Ker} (D_{n+1} \circ \dots \circ D_2)$, où

$$D_i u = D \left(\frac{u}{w_{i-1}} \right), \quad i = 2, \dots, n+1.$$

Il en résulte aisément que :

$$\mathcal{G}_n = \text{ECC}(w_0, \dots, w_n).$$

■

Exemples 1.11.

1.11.1. L'espace $\mathcal{P}_n$ des polynômes de degré $\leq n$ est le noyau de l'opérateur différentiel d'ordre $n+1$, D^{n+1} . Par conséquent

$$\mathcal{P}_n = \text{ECC}(\underbrace{\mathbb{I}, \dots, \mathbb{I}}_{(n+1)\text{fois}})$$

1.11.2. Soit $\mathcal{G}_n$ un ECC-espace de dimension $n+1$ sur I , et $(g_0, \dots, g_n)$ une base de $\mathcal{G}_n$ telle que $(g_0, \dots, g_n)$ soit un ECC système sur I . Il est possible de déterminer des fonctions-poids $w_0, \dots, w_n$ telles que $\mathcal{G}_n = \text{ECC}(w_0, \dots, w_n)$ grâce à la formule (1.14). Il suffit de prendre par exemple

$$w_0 = g_0, \quad w_j := \frac{1}{w_0 \dots w_{j-1}} \times \frac{W(g_0, \dots, g_j)}{W(g_0, \dots, g_{j-1})}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.18)$$

A un même espace ECC il peut être possible d'associer ainsi plusieurs systèmes de fonctions poids, en partant de différents ECC-systèmes de cet espace. Par exemple, multiplier chaque élément d'un système de poids par une constante non nulle ne change pas l'espace ECC associé. Voir aussi l'exemple 1.11.3. ci-dessous.

1.11.3. L'espace $\mathcal{G}_2$ engendré par les fonctions $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = \text{sh}x$, $g_2(x) = \text{ch}x$, est un ECC-espace de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. Nous savons d'après l'exemple 1.5.4. que (g_0, g_1, g_2) est un ECC-système sur $\mathbb{R}$. A partir de cet ECC-système, la formule (1.18) conduit aux fonctions-poids :

$$w_0(x) = 1, \quad w_1(x) = \text{ch}x, \quad w_2(x) = \frac{1}{(\text{ch}x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.19)$$

On peut vérifier, que:

$$W(g_2)(x) = \text{ch}x, \quad W(g_2, g_1)(x) = 1 \quad \text{et} \quad W(g_2, g_1, -g_0)(x) = 1,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Grâce à la proposition 1.6, ceci prouve que le système $(g_2, g_1, -g_0)$ est également un ECC-système sur $\mathbb{R}$, auquel correspondent les fonctions-poids

$$w_0(x) = \operatorname{ch} x, \quad w_1(x) = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}, \quad w_2(x) = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.20)$$

1.11.4. Soit $w, w_0, \dots, w_n \in C^\infty(I)$ des fonctions qui ne s'annulent pas sur I . Si $\mathcal{G}_n = \operatorname{ECC}(w_0, \dots, w_n)$, l'espace $\mathcal{F}_n := \{wu, u \in \mathcal{G}_n\}$ est un ECC-espace sur I et

$$\mathcal{F}_n = \operatorname{ECC}(ww_0, w_1, \dots, w_n).$$

En fait si $(g_0, \dots, g_n)$ est un ECC-système sur I , $(wg_0, \dots, wg_n)$ est aussi un ECC-système sur I comme le prouve l'égalité

$$W(wg_0, \dots, wg_n) = w^{n+1}W(g_0, \dots, g_n).$$

Grâce aux propositions 1.9 et 1.10, nous voyons que les fonctions-poids permettent de fabriquer tous les ECC-espaces possibles, donc des EC-espaces particuliers sur un intervalle I donné. Le résultat suivant, pour la preuve duquel nous référons à [20], montre que si l'intervalle I est fermé borné, tout EC-espace sur I peut inversement être obtenu à partir de fonctions-poids.

Proposition 1.12 *Si l'intervalle I est fermé borné, tout EC-espace sur I est un ECC-espace sur I .*

1.3 Espaces invariants par translation

Nous considérons ici un sous-espace $\mathcal{G}_n$ de $C^\infty(\mathbb{R})$. Cet espace est dit invariant par translation si, pour tout élément $u \in \mathcal{G}_n$, et tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) := u(x + a)$ appartient encore à $\mathcal{G}_n$.

Proposition 1.13. *Supposons l'espace $\mathcal{G}_n$ invariant par translation. Supposons également qu'il existe un intervalle $I = [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, tel que la restriction $\mathcal{G}_{n|I}$ de $\mathcal{G}_n$ à I soit un EC-espace de dimension $n + 1$. Alors $\mathcal{G}_n$ est le noyau d'un opérateur différentiel linéaire d'ordre $n + 1$ à coefficients constants.*

Preuve.

Puisque l'intervalle I est fermé borné $\mathcal{G}_{n|I}$ est aussi un ECC-espace sur I . Par conséquent, il existe des fonctions poids $w_0, \dots, w_n \in C^\infty(I)$ telles que :

$$\mathcal{G}_{n|I} = \operatorname{ECC}(w_0, \dots, w_n),$$

c'est-à-dire $\mathcal{G}_{n|I} = \operatorname{Ker} L_{n+1}$, où L_{n+1} est l'opérateur associé à ces poids, défini sur $C^\infty(I)$ comme en (1.8). D'après (1.9), pour tout $u \in C^\infty(I)$,

$$L_{n+1}u(x) = \sum_{j=0}^{n+1} a_j(x)u^{(j)}(x), \quad x \in I, \quad (1.21)$$

où $a_{n+1}(x) = \frac{1}{w_0(x) \dots w_n(x)}$. Donc $\mathcal{G}_{n|I}$ est l'ensemble des fonctions $u \in C^\infty(I)$ qui satisfont l'égalité :

$$\sum_{j=0}^{n+1} a_j(x) u^{(j)}(x) = 0, \quad x \in I. \quad (1.22)$$

Fixons un élément $u \in \mathcal{G}_n$ et un réel a quelconque. La fonction $v(x) := u(x+a)$, $x \in \mathbb{R}$, étant un élément de $\mathcal{G}_n$, $v|_I \in \mathcal{G}_{n|I}$. Par conséquent $v|_I$ satisfait l'équation (1.22), i.e :

$$\sum_{j=0}^{n+1} a_j(x) v^{(j)}(x) = 0, \quad x \in I,$$

ou encore :

$$\sum_{j=0}^{n+1} a_j(x) u^{(j)}(x+a) = 0, \quad x \in I. \quad (1.23)$$

Choisissons un point $\gamma \in I$. L'égalité ci-dessus nous montre que l'on a en particulier :

$$\sum_{j=0}^{n+1} a_j(\gamma) u^{(j)}(\gamma+a) = 0. \quad (1.24)$$

L'égalité (1.24) est valide quel que soit le nombre réel a fixé à l'avance, ce qui signifie que

$$\sum_{j=0}^{n+1} a_j(\gamma) u^{(j)}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.25)$$

Soit Λ_{n+1} l'opérateur différentiel linéaire d'ordre $n+1$ à coefficients constants défini par :

$$\Lambda_{n+1} u := u^{(n+1)} + \sum_{j=0}^n a_j(\gamma) w_0(\gamma) \dots w_n(\gamma) u^{(j)}. \quad (1.26)$$

D'après (1.25) nous venons de montrer que $\mathcal{G}_n \subset \text{Ker } \Lambda_{n+1}$. Or l'espace $\mathcal{G}_n$ est de dimension au moins égale à $n+1$ puisque sa restriction à l'intervalle I est de dimension $n+1$. Par conséquent, $\mathcal{G}_n = \text{Ker } \Lambda_{n+1}$. ■

Remarques 1.14.

L'opérateur différentiel Λ_{n+1} auquel nous avons abouti en (1.26) a été obtenu à partir d'un point γ choisi dans l'intervalle I . Puisque son coefficient dominant est égal à 1, nous pouvons en déduire que les fonctions $a_j w_0 w_1 \dots w_n$, $j = 0, \dots, n$, sont constantes sur l'intervalle I . Illustrons la proposition 1.13 par quelques exemples simples.

1.14.1. Considérons tout d'abord l'espace $\mathcal{G}_2$ engendré par les fonctions 1, $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{ch}x$. Nous avons vu en 1. 11. 3. que, sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{G}_2 = \operatorname{ECC}(w_0, w_1, w_2)$, où $w_0(x) = 1$, $w_1(x) = \operatorname{ch}x$, $w_2(x) = \frac{1}{(\operatorname{ch}x)^2}$. Donc $\mathcal{G}_2 = \operatorname{Ker} L_3$, où l'opérateur L_3 est défini conformément aux formules (1.7) et (1.8). On constate donc que

$$L_1 u(x) = u'(x), \quad L_2 u(x) = \frac{u''(x)}{\operatorname{ch}x} - \frac{u'(x)\operatorname{sh}x}{(\operatorname{ch}x)^2},$$

$$L_3 u(x) = \operatorname{ch}x \left[u'''(x) - u'(x) \right] = \frac{1}{w_0(x)w_1(x)w_2(x)} \Lambda_3 u(x),$$

où $\Lambda_3 u = u''' - u$.

1.14.2. Sur $[0, \frac{3\pi}{2}[$ considérons les fonctions-poids $w_0(x) = 1 + \sin x$, $w_1(x) = w_2(x) = \frac{1}{w_0(x)}$ et l'espace associé $\operatorname{EC}(w_0, w_1, w_2) = \operatorname{Ker} L_3$, où, d'après la définition (1.7),

$$L_3 u(x) = (1 + \sin x) \left[u''(x) + u'(x) \right] = \frac{1}{w_0(x)w_1(x)w_2(x)} \left(u'''(x) + u'(x) \right).$$

Donc l'espace $\operatorname{EC}(w_0, w_1, w_2)$ est la restriction à l'intervalle $[0, \frac{2\pi}{2}[$ du noyau $\mathcal{G}_2 = \operatorname{Ker} \Lambda_3$, où $\Lambda_3 u = u''' + u'$, c'est-à-dire, de l'espace $\mathcal{G}_2$ engendré par les fonctions 1, $\cos x$, $\sin x$ (cf. exemple 1.5.3).

Intéressons-nous maintenant à la réciproque : est-ce que le noyau d'un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants est un EC-espace, au moins sur un certain intervalle ?

Proposition 1.15. *Soit Λ_{n+1} un opérateur différentiel linéaire à coefficients réels constants, d'ordre $n + 1$, défini par :*

$$\Lambda_{n+1} u = u^{(n+1)} + \sum_{j=0}^n a_j u^{(j)} = \prod_{s=0}^n (D - \lambda_s I), \quad (1.27)$$

où $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{C}$. Soit $\mathcal{G}_n := \operatorname{Ker} \Lambda_{n+1}$ le noyau de cet opérateur différentiel. Alors

1. Si $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$, $\mathcal{G}_n$ est un ECC-espace sur $\mathbb{R}$.
2. Sinon, $\mathcal{G}_n$ est un ECC-espace sur tout intervalle strictement contenu dans un intervalle de la forme

$$\left[a, a + \frac{\pi}{\max_{j \in J_n} |\operatorname{Im}(\lambda_j)|} \right],$$

où $a \in \mathbb{R}$ et J_n est le sous-ensemble de $\{0, \dots, n\}$ constitué des indices j pour lesquels $\lambda_j \notin \mathbb{R}$.

Preuve.

1. Supposons que $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = (\ell_1^{[\mu_1]}, \dots, \ell_r^{[\mu_r]})$$

où les ℓ_i sont des nombres réels deux à deux distincts et où les entiers strictement positifs $\mu_1, \dots, \mu_r$ satisfont $\mu_1 + \dots + \mu_r = n + 1$. Dans ce cas, $\mathcal{G}_n$ admet pour base les fonctions

$$e^{\ell_1 x}, x e^{\ell_1 x}, \dots, x^{\mu_1-1} e^{\ell_1 x}, e^{\ell_2 x}, \dots, e^{\ell_r x}, x e^{\ell_r x}, \dots, x^{\mu_r-1} e^{\ell_r x}.$$

Vérifions que cette base est un ECC-système sur $\mathbb{R}$. D'après l'exemple 1.11.4, nous pouvons (quitte à diviser par $e^{\ell_1 x}$) supposer que $\ell_1 = 0$. En appliquant (éventuellement plusieurs fois) le corollaire 1.8 ((ii) $\implies$ (i)), il suffit de prouver que

$$(e^{\ell_2 x}, \dots, x^{\mu_2-1} e^{\ell_2 x}, e^{\ell_r x}, x e^{\ell_r x}, \dots, x^{\mu_r-1} e^{\ell_r x})$$

est ECC-système sur $\mathbb{R}$. Quitte à tout multiplier par $e^{-\ell_2 x}$ (exemple 1.11.4), on peut itérer. A terme, il suffit de vérifier que tout système de la forme $(1, x, \dots, x^{\mu_r-1})$ est un ECC-système sur $\mathbb{R}$, ce que nous savons d'après l'exemple 1.11.1.

2. Supposons que certains λ_i ne sont pas réels. On peut supposer que $\lambda_0, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n \notin \mathbb{R}$. Comme précédemment, en utilisant le fait que la multiplication par une fonction non nulle transforme un système ECC en un système ECC (exemple 1.11.4) et le corollaire 1.8 ((ii) $\implies$ (i)), il suffit de se ramener au cas où aucun λ_i n'est réel. L'opérateur Λ_{n+1} étant à coefficients réels, les λ_i sont deux à deux conjugués et $n+1 = 2m$. Supposons que

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = (\ell_1^{[m_1]}, \overline{\ell_1}^{[m_1]}, \dots, \ell_r^{[m_r]}, \overline{\ell_r}^{[m_r]}), \quad (1.28)$$

où $m_i > 0$, $m_1 + \dots + m_r = m$ et $\ell_k \neq \ell_j, \overline{\ell_j}$ pour $k \neq j$. Dans un premier temps, nous supposons que $r = 1$, auquel cas :

$$\Lambda_{n+1} = (D - \ell_1 I)^{m_1} (D - \overline{\ell_1} I)^{m_1} = M_1^{m_1},$$

où M_1 désigne l'opérateur d'ordre 2 défini par :

$$M_1 = D^2 - \operatorname{Re}(\ell_1)D + |\ell_1|^2 I.$$

Considérons la suite emboîtée d'espaces :

$$\{0\} \subset \operatorname{Ker} M_1 \subset \operatorname{Ker} M_1^2 \subset \dots \subset \operatorname{Ker} M_1^{m_1} = \mathcal{G}_n.$$

Si $l_1 = \beta_1 + i\gamma_1$, ($\gamma_1 \neq 0$), l'espace M_1^k est de dimension $2k$ et a pour base les fonctions

$$e^{\beta_1 x} \cos \gamma_1 x, e^{\beta_1 x} \sin \gamma_1 x, x e^{\beta_1 x} \cos \gamma_1 x, x e^{\beta_1 x} \sin \gamma_1 x, \dots \\ \dots, x^{k-1} e^{\beta_1 x} \cos \gamma_1 x, x^{k-1} e^{\beta_1 x} \sin \gamma_1 x.$$

Fixons un intervalle fermé I strictement contenu dans $[a, a + \frac{\pi}{|\gamma_1|}]$. Nous savons, grâce à exemple 1.5.2, que $\text{Ker } M_1$ est ECC-espace sur I . Choisissons une base u_1, v_1 de $\text{Ker } M_1$ qui soit un ECC-système sur I . Ceci signifie que la matrice $A_1(x)$, de type 2×2 , définie par :

$$A_1(x) := \begin{pmatrix} u_1(x) & Du_1(x) \\ v_1(x) & Dv_1(x) \end{pmatrix},$$

satisfait $\det A_1(x) \neq 0$, pour tout $x \in I$, et que, d'autre part $u_1(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Puis choisissons u_2, v_2 de façon à ce que $M_1 u_2 = u_1$ et $M_1 v_2 = v_1$. Les fonctions u_1, v_1, u_2 et v_2 forment une base de $\text{Ker } M_1^2$. Plus généralement, définissons u_k et v_k par :

$$M_1 u_k = u_{k-1}, \quad M_1 v_k = v_{k-1}, \quad k = 2, \dots, m_1. \quad (1.29)$$

La famille $\{u_1, v_1, \dots, u_{m_1}, v_{m_1}\}$ forme alors une base de l'espace $\mathcal{G}_n = \text{Ker } M_1^{m_1}$. Nous allons vérifier que c'est un ECC-système sur I . Si, pour $k = 1, \dots, m_1$:

$$M_1^{2k} = D^{2k} + a_1^k D^{2k-1} + \dots + a_{2k}^k I, \quad (1.30)$$

introduisons la matrice carrée d'ordre $2m$ suivante :

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_2^1 & 0 & a_4^2 & 0 & \dots & a_{2m_1-2}^{m_1-1} & 0 \\ 0 & 1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^2 & a_4^2 & \dots & a_{2m_1-3}^{m_1-1} & a_{2m_1-2}^{m_1-1} \\ 0 & 0 & 1 & a_1^1 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_{2m_1-4}^{m_1-1} & a_{2m_1-3}^{m_1-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots & a_1^{m_1-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Appelons $C_j, j = 1, \dots, 2m_1$, les colonnes de la matrice produit

$$\mathcal{R} := \mathcal{W}(u_1, v_1, \dots, u_{m_1}, v_{m_1}) \cdot Q. \quad (1.31)$$

La matrice Q a été définie de sorte que, pour tout $k = 0, \dots, m_1 - 1$:

$$\begin{aligned} C_{2k+1} &= (M_1^k u_1, M_1^k v_1, \dots, M_1^k u_{m_1}, M_1^k v_{m_1})^T, \\ C_{2k+2} &= (DM_1^k u_1, DM_1^k v_1, \dots, DM_1^k u_{m_1}, DM_1^k v_{m_1})^T. \end{aligned} \quad (1.32)$$

La relation (1.29) de définition des fonctions u_k et v_k montre clairement que :

$$M_1^k u_j = M_1^k v_j = 0 \quad \text{pour } k \geq j, \quad M_1^{j-1} u_j = u_1, \quad M_1^{j-1} v_j = v_1. \quad (1.33)$$

Par conséquent la matrice $\mathcal{R}$ définie en (1.31) est triangulaire inférieure par blocs 2×2 :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & A_1 \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

Par conséquent, $\det \mathcal{R} = (\det A_1)^{m_1}$, ce qui, grâce à (1.31), montre que:

$$W(u_1, v_1, \dots, u_{m_1}, v_{m_1})(x) \neq 0, \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Du fait de la structure de Q , nous obtiendrons un résultat similaire pour tout sous mineur principal de la matrice $\mathcal{W}(u_1, v_1, \dots, u_{m_1}, v_{m_1})$. Nous avons donc ainsi vérifié, par la proposition 1.6, que $(u_1, v_1, \dots, u_{m_1}, v_{m_1})$ est un ECC-système sur I .

Pour comprendre le cas général (1.28), il suffit de considérer le cas $r = 2$, pour lequel :

$$\mathcal{G}_n = \text{Ker } M_1^{m_1} \oplus \text{Ker } M_2^{m_2},$$

avec $M_2 = (D - \ell_2 I)(D - \overline{\ell_2} I)$. Si $\ell_2 = \beta_2 + i\gamma_2$, $\gamma_2 \neq 0$, I sera ici un intervalle fermé contenu strictement dans $[a, a + \frac{\pi}{\max\{|\gamma_1|, |\gamma_2|\}}]$. Remarquons tout d'abord que pour $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.

$$M_j(\text{Ker } M_i^{m_i}) = \text{Ker } M_i^{m_i}.$$

Choisissons d'abord des fonctions $\tilde{u}_1, \tilde{v}_1$ en sorte que le système $(M_1^{m_1}\tilde{u}_1, M_1^{m_1}\tilde{v}_1)$ soit un ECC-système sur I , ensuite des fonctions $\tilde{u}_k$ et $\tilde{v}_k$ telles que :

$$M_2\tilde{u}_k = \tilde{u}_{k-1}, \quad M_2\tilde{v}_k = \tilde{v}_{k-1}, \quad k = 2, \dots, m_2.$$

Le système $(u_1, v_1, \dots, u_{m_1}, v_{m_1}, \tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{u}_{m_2}, \tilde{v}_{m_2})$ est une base de $\mathcal{G}_n$. On vérifiera que c'est un ECC-système sur I en multipliant la matrice $\mathcal{W}(u_1, v_1, \dots, \tilde{u}_{m_2}, \tilde{v}_{m_2})$ à droite par une matrice Q triangulaire supérieure à diagonale unité, dont les colonnes $2m_1 + 1, \dots, 2m_1 + 2m_2$ seront fabriquées grâce aux coefficients des opérateurs $M_1^{m_1}, M_2M_1^{m_1}, \dots, M_2^{m_2-1}M_1^{m_1}$. ■

1.4 Splines de Chebyshev

Nous supposons ici que l'espace $\mathcal{G}_n \subset C^\infty(I)$ est un EC-espace de dimension $n+1$ sur I .

Supposons donnés r points distincts $\xi_1, \dots, \xi_r$ dans I et r entiers $\mu_1, \dots, \mu_r \geq 1$ tels que $\mu_1 + \dots + \mu_r = n+1$. Alors, d'après la définition même d'un EC-espace, nous pouvons affirmer que tout problème d'interpolation d'Hermite :

Trouver $G \in \mathcal{G}_n$ satisfaisant :

$$G^{(k)}(\xi_i) = \alpha_i^k, \quad k = 0, \dots, \mu_i - 1, \quad i = 1, \dots, r,$$

admet une solution unique, quelles que soient les données α_i^k du problème. Comme cas particulier,

1. étant donné $a \in I$, il existe une et une seule fonction $G \in \mathcal{G}_n$ telle que

$$G^{(k)}(a) = \alpha_k, \quad k = 0, \dots, n$$

où $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont donnés à l'avance,

2. étant donnés deux points distincts $a, b \in I$, et deux entiers naturels K et L tels que $K + L = n - 1$, il existe une et une seule fonction $G \in \mathcal{G}_n$ telle que :

$$\begin{aligned} G^{(k)}(a) &= \alpha_k, & 0 \leq k \leq K, \\ G^{(\ell)}(b) &= \beta_\ell, & 0 \leq \ell \leq L, \end{aligned}$$

où $\alpha_0, \dots, \alpha_K$ et $\beta_0, \dots, \beta_L$ sont donnés.

Considérons maintenant une suite de points de l'intervalle I :

$$t_0 < t_1 < \dots < t_q < t_{q+1},$$

et une suite $m_1, \dots, m_q$ d'entiers tels que $0 \leq m_i \leq n$ pour tout $i = 1, \dots, q$. Nous définissons l'espace $\mathcal{S}$ des splines correspondant comme l'ensemble des fonctions (continues) $S : [t_0, t_{q+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

- (i) pour $i = 1, \dots, q$, S est C^{n-m_i} au point t_i ,
- (ii) pour $i = 0, \dots, q$, il existe une fonction $G_i \in \mathcal{G}_n$ telle que :

$$S(x) = G_i(x), \quad x \in [t_i, t_{i+1}].$$

Déterminer une fonction $S \in \mathcal{S}$ est donc équivalent à déterminer une suite $(G_0, \dots, G_q)$ d'éléments de $\mathcal{G}_n$ satisfaisant pour $i = 1, \dots, q$, les $n - m_i + 1$ conditions :

$$G_i^{(k)}(t_i) = G_{i-1}^{(k)}(t_i), \quad k = 0, \dots, n - m_i.$$

D'après les remarques ci-dessus sur l'unicité de la solution de tout problème d'interpolation, supposant connue la fonction G_{i-1} , la fonction $G_i \in \mathcal{G}_n$ peut être déterminée par la donnée de

$$G_i^{(n-m_i+1)}(t_i), \dots, G_i^{(n)}(t_i). \quad (1.35)$$

La fonction G_0 quant à elle peut être déterminée par la donnée de $G_0(t_0), \dots, G_0^{(n)}(t_0)$, ce qui correspond à (1.35) pour $i = 0$, avec la convention $m_0 := n + 1$. En conclusion, toute spline $S \in \mathcal{S}$ est parfaitement déterminée par les données :

$$S^{(n-m_i+1)}(t_i^+), \dots, S^{(n)}(t_i^+), \quad i = 0, \dots, q.$$

Par conséquent la dimension de l'espace $\mathcal{S}$ est égale à

$$\sum_{i=0}^q m_i = n + m + 1, \quad \text{où } m := m_1 + \dots + m_q.$$

Chapitre 2

Splines cardinales basées sur un espace de Chebyshev invariant par translations

Dans ce chapitre nous étudierons des espaces de splines basées sur des espaces de Chebyshev, ceci en vue de l'extension du résultat d'Ulrich Reif. Ce résultat utilise de façon essentielle l'invariance par translation des espaces des polynômes. C'est pourquoi nous nous limiterons à des espaces de Chebyshev invariants par translation, c'est-à-dire, d'après le chapitre précédent, à des noyaux d'opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants. Nous nous focaliserons particulièrement sur les propriétés des B-splines des espaces de splines correspondants.

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, de nombreux auteurs se sont intéressés aux splines de Chebyshev. Citons notamment S. Karlin et Z. Zeigler [10], T. Lyche [12, 17, 19], L. L. Schumaker [33, 34, 32], N. Dyn et A. Ron [7, 6] et, plus récemment H. Pottmann [25, 26], P.-J. Laurent et M. -L. Mazure ([21, 22]). L'ouvrage de base auquel nous renvoyons le lecteur est le livre de L. L. Schumaker [32]. Le fait de considérer uniquement des noyaux d'opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants permet ici une présentation de la B-spline associée plus légère que dans [32]. Dans ce cadre, signalons que certains résultats énoncés dans ce chapitre se trouvent dans [7].

2.1 B-splines de Chebyshev

Étant donné un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et un m -uplet $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, nous noterons de façon systématique L_λ^m l'opérateur différentiel linéaire d'ordre m , à coefficients constants,

défini sur $C^\infty(\mathbb{R})$ par :

$$L_\lambda^m := \prod_{k=1}^m (D - \lambda_k I), \quad (2.1)$$

où, comme dans le chapitre précédent, D est l'opérateur de dérivation et I est l'identité. Nous savons que le noyau de cet opérateur différentiel,

$$\mathcal{N}_\lambda^m := \text{Ker } L_\lambda^m,$$

est un espace EC sur $\mathbb{R}$ tout entier. Il est possible de trouver une permutation σ de $\{1, \dots, m\}$ telle que

$$(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(m)}) = (\ell_1^{[\mu_1]}, \dots, \ell_r^{[\mu_r]}),$$

où $\ell_1, \dots, \ell_r$ sont des réels distincts et $\mu_1, \dots, \mu_r$ des entiers ≥ 1 tels que $\mu_1 + \dots + \mu_r = m$. Nous savons alors que la famille des fonctions

$$e^{\ell_i x}, x e^{\ell_i x}, \dots, x^{\mu_i-1} e^{\ell_i x}, \quad i = 1, \dots, r, \quad (2.2)$$

forme une base de $\mathcal{N}_\lambda^m$. Cependant, Il peut être judicieux d'adopter de nouveaux choix de bases dans cet espace. Ceci est l'objet des deux lemmes ci-dessous.

Lemme 2.1. *Pour $i = 1, \dots, m$, désignons par u_i l'élément de $\mathcal{N}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i = \text{Ker } L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i$ qui satisfait les conditions initiales :*

$$u_i^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0, \dots, i-2, \\ 1 & \text{si } j = i-1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Les fonction $u_1, \dots, u_m$ ainsi définies forment une base de $\mathcal{N}_\lambda^m$.

Preuve.

Remarquons tout d'abord que les égalités

$$\begin{aligned} L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i u_i &= L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1})}^{i-1} [L_{\lambda_i}^1 u_i] = 0, \\ L_{\lambda_i}^1 u_i &= u_i' - e^{\lambda_i} u_i, \end{aligned}$$

nous permettent facilement de constater que :

$$L_{\lambda_i}^1 u_i = u_{i-1}, \quad i = 2, \dots, m. \quad (2.4)$$

Par ailleurs, puisque $L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i = \prod_{k=1}^i (D - \lambda_k I)$, l'opérateur $L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i$ s'écrit comme une combinaison linéaire des opérateurs $I, D, \dots, D^i$, dont le coefficient de D^i est égal à 1. Par conséquent, les conditions (2.3) peuvent être remplacées par :

$$L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_j)}^j u_i(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0, \dots, i-2, \\ 1 & \text{si } j = i-1, \end{cases} \quad (2.5)$$

ceci pour tout $i = 1, \dots, m$.

Supposons donnés m réels $a_1, \dots, a_m$ tels que $a_1 u_1 + \dots + a_m u_m = 0$. Appliquons l'opérateur $L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})}^{m-1}$ aux deux membres de cette égalité, ce qui donne :

$$a_1 L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})}^{m-1} u_1 + \dots + a_m L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})}^{m-1} u_m = 0. \quad (2.6)$$

Or, pour $i = 1, \dots, m-1$,

$$L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})}^{m-1} u_i = L_{(\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{m-1})}^{m-1-i} [L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i u_i] = 0.$$

Donc la relation (2.6) se réduit simplement :

$$a_m L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})}^{m-1} u_m(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour $x = 0$, d'après (2.5) on obtient $a_m = 0$. Nous obtenons donc

$$a_1 u_1 + \dots + a_{m-1} u_{m-1} = 0.$$

L'égalité

$$L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2})}^{m-2} (a_1 u_1 + \dots + a_{m-1} u_{m-1}) = 0$$

permettra de monter de la même façon que $a_{m-1} = 0$ et ainsi de suite. De proche en proche, on obtient :

$$a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0.$$

■

Par exemple, lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, la base introduite dans le lemme 2.1 est la base $(u_1, \dots, u_m)$ de $\mathcal{P}_{m-1}$ définie par $u_i(x) = \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}$, $i = 1, \dots, m$.

Lemme 2.2. *Les fonctions $u_m, u_m(\cdot + 1), \dots, u_m(\cdot + m - 1)$ forment également une base de l'espace $\mathcal{N}_\lambda^m$.*

Preuve.

Donnons-nous m réels $a_0, \dots, a_{m-1}$ et considérons l'opérateur linéaire Λ qui, à toute fonction réelle u de la variable réelle x associe la fonction Λu définie par :

$$\Lambda u(x) := a_0 u(x) + a_1 u(x+1) + \dots + a_{m-1} u(x+m-1), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Supposons que $\Lambda u_m = 0$, soit :

$$a_0 u_m(x) + a_1 u_m(x+1) + \dots + a_{m-1} u_m(x+m-1) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

et montrons que cela implique $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$. De façon évidente, l'opérateur Λ commute avec tout opérateur différentiel linéaire à coefficients constants. On aura alors, en utilisant (2.4)

$$L_{\lambda_m}^1 (\Lambda u_m) = 0 = \Lambda (L_{\lambda_m}^1 u_m) = \Lambda u_{m-1} = 0.$$

De proche en proche, on pourra ainsi montrer que

$$\Lambda u_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.8)$$

Explicitons les relations (2.8) au point $x = 0$. On obtient :

$$\begin{cases} a_0 u_1(0) + a_1 u_1(1) + \dots + a_{m-1} u_1(m-1) = 0, \\ a_0 u_2(0) + a_1 u_2(1) + \dots + a_{m-1} u_2(m-1) = 0, \\ \vdots \\ a_0 u_m(0) + a_1 u_m(1) + \dots + a_{m-1} u_m(m-1) = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

La matrice de ce système considéré comme un système linéaire en $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ est la matrice $M \begin{pmatrix} 0, 1, \dots, m-1 \\ u_1, u_2, \dots, u_m \end{pmatrix}$. Or nous savons que l'espace $\mathcal{N}_\lambda^m$ est un ECC-espace sur $\mathbb{R}$. Donc toute base de $\mathcal{N}_\lambda^m$ est un C-système sur $\mathbb{R}$. C'est en particulier le cas de la base $(u_1, \dots, u_m)$. Par suite, le déterminant du système (2.9) est non nul et $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$. ■

Définition 2.3. On définit l'espace des splines cardinales de Chebyshev associé à l'opérateur L_λ^m , par :

$$\mathcal{S}_\lambda^m = \{S \in C^{m-2}(\mathbb{R}) \text{ telles que } S|_{[k, k+1[} \in \mathcal{N}_\lambda^m|_{[k, k+1[}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemple 2.4.

Supposons ici que $m = 1$, auquel cas $\lambda = \lambda_1 \in \mathbb{R}$. On définit la fonction N_λ^1 par :

$$N_\lambda^1(x) := e^{\lambda x} \chi_{[0,1[}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Il est possible d'exprimer les éléments de $\mathcal{S}_\lambda^1$ à partir des translatées entières de la fonction N_λ^1 . En effet, si S est un élément de $\mathcal{S}_\lambda^1$, nous connaissons une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$S(x) = a_k e^{\lambda x}, \quad x \in [k, k+1[.$$

Par conséquent, nous pouvons écrire S sous la forme :

$$S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k N_\lambda^1(x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

où, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k = a_k e^{\lambda k}$.

On peut remarquer que la fonction N_λ^1 définie en (2.10) s'écrit aussi :

$$N_\lambda^1 = G_\lambda^1(x) - G_\lambda^1(x-1), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

où la fonction G_λ^1 est définie par :

$$G_\lambda^1(x) = e^{\lambda x} \chi_{[0,+\infty[}(x). \quad (2.13)$$

Sur $[0, +\infty[$ cette fonction satisfait $L_\lambda^1 G_\lambda^1 = 0$ (où, conformément à (2.1) : $L_\lambda^1 = D - \lambda I$), et la condition initiale $G_\lambda^1(0) = 1$. Par conséquent, c'est la fonction de Green associée à l'opérateur L_λ^1 .

Revenons au cas général $m \in \mathbb{N}^*$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$. Pour généraliser les relations (2.10) et (2.12) de l'exemple 2.4, nous allons considérer la fonction de Green G_λ^m associé à l'opérateur L_λ^m défini en (2.1).

Cette fonction est définie par :

$$G_\lambda^m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ u_m(x) & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

où u_m est l'élément de l'espace $\mathcal{N}_\lambda^m$ dont les conditions initiales sont données par (2.3). Ainsi, pour $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$,

$$G_\lambda^m(x) = \frac{x_+^{m-1}}{(m-1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où $x_+ = \max\{x, 0\}$. D'après (2.4), la fonction de Green satisfait sur $[0, +\infty[$ la relation :

$$L_{\lambda_m}^1 G_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}^m(x) = G_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})}^{m-1}(x), \quad x \in [0, +\infty[, \quad (2.15)$$

ce qui permet de définir aussi la fonction de Green par récurrence sous la forme

$$G_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}^m(x) = \begin{cases} \int_0^x e^{\lambda_m y} G_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})}^{m-1}(x-y) dy & \text{si } x \in [0, +\infty[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.16)$$

La fonction de Green permet d'exprimer les discontinuités de la dérivée d'ordre $m-1$ dans l'espace $\mathcal{S}_\lambda^m$. Plus précisément, étant donné un point $a \in \mathbb{R}$ et deux éléments f, g appartenant à $\mathcal{N}_\lambda^m$, si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} f^{(\ell)}(a) &= g^{(\ell)}(a), & \ell &= 0, \dots, m-2, \\ f^{(m-1)}(a) &= g^{(m-1)}(a) + \alpha, \end{aligned}$$

alors nous pouvons écrire :

$$f(x) = g(x) + \alpha G_\lambda^m(x-a), \quad \text{pour tout } x \geq a, \quad (2.17)$$

et réciproquement. Pour $m \geq 2$, la fonction $s \in C^{m-2}(\mathbb{R})$ définie par

$$s(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq a, \\ f(x) & \text{si } x > a, \end{cases}$$

peut s'écrire :

$$s(x) = g(x) + \alpha G_\lambda^m(x-a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $G_\lambda^m(\cdot - k)$ est un élément particulier de l'espace $\mathcal{S}_\lambda^m$.

Partant d'une spline $S \in \mathcal{S}_\lambda^m$ donnée, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, notons s_k l'élément de $\mathcal{N}_\lambda^m$ tel que :

$$S(x) = s_k(x), \quad x \in [k, k+1[. \quad (2.18)$$

Nous savons que S est C^{m-2} sur $\mathbb{R}$ et présente des discontinuités de sa dérivée $(m-1)$ ème aux points entiers. Notons α_k , $k \in \mathbb{Z}$, ces discontinuités, i.e,

$$\begin{aligned} \alpha_k &:= S^{(m-1)}(k^+) - S^{(m-1)}(k^-), \\ &= s_k^{(m-1)}(k) - s_{k-1}^{(m-1)}(k). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nous pouvons appliquer (2.17) aux fonctions s_{k-1}, s_k , ce qui donne :

$$s_k(x) = s_{k-1}(x) + \alpha_k G_\lambda^m(x - k), \quad x \in [k, +\infty[, \quad (2.20)$$

d'où, puisque $G_\lambda^m(x - k) = 0$ pour tout $x < k$:

$$S(x) = s_{k-1}(x) + \alpha_k G_\lambda^m(x - k), \quad x \in [k-1, k+1]. \quad (2.21)$$

En utilisant (2.17) de proche en proche, on obtient d'une part :

$$s_{k+j}(x) = s_{k-1}(x) + \sum_{\ell=k}^{k+j} \alpha_\ell G_\lambda^m(x - \ell), \quad x \in [k+j, +\infty[,$$

et d'autre part :

$$S(x) = s_{k-1}(x) + \sum_{\ell=k}^{k+j} \alpha_\ell G_\lambda^m(x - \ell), \quad x \in [k, k+j+1]. \quad (2.22)$$

Définition 2.5. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, et tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, on définit l'opérateur aux différences Δ_λ^m d'ordre m associé à λ par :

$$\Delta_\lambda^m := \Delta_{\lambda_m}^1 \circ \Delta_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})}^{m-1}, \quad (2.23)$$

où, pour $\mu \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Delta_\mu^1 f(x) := f(x) - e^\mu f(x-1), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

La définition ci-dessus généralise la notion classique d'opérateur aux différences qui correspond au cas particulier $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. Le résultat bien connu que toute différence d'ordre m d'un polynôme de degré inférieur ou égal à $m-1$ est nulle s'étend sous la forme suivante :

Proposition 2.6. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, l'opérateur aux différences Δ_λ^m s'annule sur $\mathcal{N}_\lambda^m$.

Preuve.

1. On peut remarquer que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\Delta_\alpha^1 \circ \Delta_\beta^1 = \Delta_\beta^1 \circ \Delta_\alpha^1.$$

En effet, pour chaque fonction f , on a :

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha^1(\Delta_\beta^1 f)(x) &= \Delta_\beta^1 f(x) - e^\alpha \Delta_\beta^1 f(x-1) \\ &= f(x) - e^\beta f(x-1) - e^\alpha (f(x-1) - e^\beta f(x-2)) \\ &= f(x) - (e^\alpha + e^\beta) f(x-1) + e^{\alpha+\beta} f(x-2) \\ &= \Delta_\beta^1(\Delta_\alpha^1 f)(x). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Par conséquent, pour chaque permutation σ de $\{1, \dots, m\}$, on a

$$\Delta_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}^m = \Delta_{(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(m)})}^m. \tag{2.26}$$

2. L'opérateur aux différences Δ_λ^m étant de façon évidente linéaire, pour montrer qu'il est nul sur l'espace $\mathcal{N}_\lambda^m$, il suffit de vérifier qu'il est nul sur une base de $\mathcal{N}_\lambda^m$. Par ailleurs, du fait de la commutativité montrée ci-dessus, l'opérateur Δ_λ^m ne dépend pas de l'ordre des λ_i . Nous pouvons donc, sans perte de généralité, supposer que $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (\ell_1^{[\mu_1]}, \dots, \ell_r^{[\mu_r]})$, où $\ell_1, \dots, \ell_r$ sont des réels distincts et où les entiers $\mu_i \geq 1$ satisfont $\mu_1 + \dots + \mu_r = m$. Nous utiliserons la base de $\mathcal{N}_\lambda^m$ rappelée en (2.2). Puisque,

$$\Delta_\lambda^m = \Delta_{\ell_1^{[\mu_1]}}^{\mu_1} \circ \dots \circ \Delta_{\ell_r^{[\mu_r]}}^{\mu_r},$$

il suffit en fait, toujours grâce à la commutativité, de vérifier que, pour tout entier $\mu \in \mathbb{N}^*$ et pour tout nombre réel ℓ , l'opérateur Δ_ℓ^μ s'annule sur les fonctions

$$e^{\ell x}, x e^{\ell x}, \dots, x^{\mu-1} e^{\ell x}.$$

Notons $v_k(x) = x^k e^{\ell x}$. Il suffit de montrer, que $\Delta_{\ell^{[k+1]}}^{k+1} v_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or, l'égalité

$$\begin{aligned} \Delta_\ell^1 v_k(x) &= v_k(x) - e^\ell v_k(x-1) \\ &= e^{\ell x} [x^k - (x-1)^k] \end{aligned}$$

montre, d'une part que $\Delta_\ell^1 v_0 = 0$, d'autre part que pour tout $k \geq 1$, $\Delta_\ell^1 v_k$ s'écrit comme combinaison linéaire des fonctions $v_0, \dots, v_{k-1}$. Puisque

$$\Delta_{\ell^{[k+1]}}^{k+1} = \Delta_{\ell^{[k]}}^k \circ \Delta_\ell^1,$$

on peut aisément conclure par récurrence sur k . ■

Il est facile de vérifier qu'en fait, pour tout fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Delta_\lambda^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} e^{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}} \right) f(x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.27)$$

avec la convention $\sum_{i_1 < \dots < i_k} e^{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}} = 1$ si $k = 0$. Cette formule se prouve par récurrence sur m et généralise la formule (2.25) ci-dessus.

Les opérateurs aux différences introduits ci-dessus permettent de généraliser la notion de B-spline comme suit (voir aussi [32], [7]).

Proposition 2.7. *Pour tout entier $m \geq 1$ et tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, la fonction*

$$N_\lambda^m := \Delta_\lambda^m G_\lambda^m \quad (2.28)$$

appartient à l'espace $\mathcal{S}_\lambda^m$ des splines associées à l'espace $\mathcal{N}_\lambda^m$.

Preuve.

Par définition même de l'opérateur aux différences Δ_λ^m , N_λ^m est une combinaison linéaire des $m + 1$ fonctions $G_\lambda^m(\cdot - k)$, $k = 0, \dots, m$. L'invariance par translation de l'espace $\mathcal{N}_\lambda^m$ et le fait que la fonction de Green soit C^{m-2} sur $\mathbb{R}$, nulle à gauche de 0 et satisfasse $L_\lambda^m G_\lambda^m(x) = 0$ pour $x \geq 0$ permettent de conclure. ■

Définition 2.8. *La fonction N_λ^m est appelée la B-spline de Chebyshev d'ordre m associée à l'opérateur L_λ^m .*

Remarques 2.9.

2.9.1. La B-spline d'ordre 1 associée à l'opérateur $L_\lambda^1 = D - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est donc la fonction N_λ^1 définie en (2.10).

2.9.2. D'après (2.27), on peut écrire plus précisément N_λ^m sous la forme :

$$N_\lambda^m(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} e^{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}} \right) G_\lambda^m(x - k) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.29)$$

Par ailleurs l'expression (2.29) montre clairement que $N_\lambda^m(x) = 0$ pour $x < 0$. D'autre part, si $x \geq m$, chacune des quantités $x - k$, $k = 0, \dots, m$ est positive. Le calcul de $N_\lambda^m(x)$ revient donc à appliquer l'opérateur Δ_λ^m à une fonction de l'espace $\mathcal{N}_\lambda^m$. La proposition 2.6 prouve alors que $N_\lambda^m(x) = 0$. Le support de toute B-spline de Chebyshev d'ordre m est donc contenu dans l'intervalle $[0, m]$. Nous verrons plus loin qu'il est en fait exactement

égal à $[0, m]$.

2.9.3. Sachant que $N_\lambda^m(x) = 0$ pour $x \leq 0$, par comparaison avec (2.22), l'égalité (2.29) nous renseigne sur les discontinuités de la dérivée $(m-1)$ ème de la B-spline :

$$(N_\lambda^m)^{(m-1)}(k^+) - (N_\lambda^m)^{(m-1)}(k^-) = (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} e^{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}}, \quad 0 \leq k \leq m. \quad (2.30)$$

Par exemple, les discontinuités de la B-spline polynomiale d'ordre m , $N^m := N_{(0[m])}^m$, sont données par :

$$(N^m)^{(m-1)}(k^+) - (N^m)^{(m-1)}(k^-) = (-1)^k \binom{m}{k}, \quad 0 \leq k \leq m.$$

2.9.4. L'opérateur aux différences Δ_λ^m ne dépendant pas de l'ordre des λ_i , il en est de même pour la B-spline N_λ^m . On pourra donc si besoin, supposer dans la suite que $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (\ell_1^{[\mu_1]}, \dots, \ell_r^{[\mu_r]})$ avec $\ell_1, \dots, \ell_r$ distincts et $\mu_1, \dots, \mu_r \geq 1$.

Le résultat suivant est classique dans le cas polynomial.

Proposition 2.10. ([36]) *Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, la B-spline N_λ^m s'obtient comme convolution des m B-splines d'ordre 1, $N_{\lambda_i}^1$, $i = 1, \dots, m$, c'est-à-dire :*

$$N_\lambda^m = N_{\lambda_1}^1 * \dots * N_{\lambda_m}^1, \quad (2.31)$$

ou encore, pour $m \geq 2$,

$$N_\lambda^m(x) = \int_0^1 e^{\lambda_m t} N_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})}^{m-1}(x-t) dt. \quad (2.32)$$

Preuve.

Supposons $m \geq 2$ et notons $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$. Par définition de la B-spline d'ordre m :

$$N_\lambda^m = \Delta_{\tilde{\lambda}}^{m-1} (\Delta_{\lambda_m}^1 G_\lambda^m). \quad (2.33)$$

Calculons tout d'abord $\Delta_{\lambda_m}^1 G_\lambda^m$:

$$\begin{aligned} \Delta_{\lambda_m}^1 G_\lambda^m(x) &= G_\lambda^m(x) - e^{\lambda_m} G_\lambda^m(x-1) \\ &= \int_0^x e^{\lambda_m u} G_{\tilde{\lambda}}^{m-1}(x-u) du - \int_0^{x-1} e^{\lambda_m(u+1)} G_{\tilde{\lambda}}^{m-1}(x-1-u) du \end{aligned}$$

Le changement de variable $t = u + 1$ transforme la deuxième intégrale en

$$\int_1^x e^{\lambda_m t} G_{\tilde{\lambda}}^{m-1}(x-t) dt,$$

ce qui permet d'écrire :

$$\Delta_{\lambda_m}^1 G_{\lambda}^m(x) = \int_0^1 e^{\lambda_m t} G_{\tilde{\lambda}}^{m-1}(x-t) dt,$$

c'est-à-dire :

$$\Delta_{\lambda_m}^1 G_{\lambda}^m(x) = N_{\lambda_m}^1 * G_{\tilde{\lambda}}^{m-1}. \quad (2.34)$$

Il est facile de vérifier que, pour tout réel μ , et toutes fonctions f, g telles que le produit de convolution soit défini,

$$\Delta_{\mu}^1 (f * g) = f * (\Delta_{\mu}^1 f).$$

Compte tenu de cette remarque, il résulte de (2.33) et (2.34) que :

$$N_{\lambda}^m = N_{\lambda_m}^1 * \Delta_{\tilde{\lambda}}^{m-1} (G_{\tilde{\lambda}}^{m-1}).$$

Si l'on suppose établi que

$$\Delta_{\tilde{\lambda}}^{m-1} (G_{\tilde{\lambda}}^{m-1}) = \bigstar_{i=1}^m N_{\lambda_i}^1,$$

le résultat cherché en découle. ■

Chacune des B-splines d'ordre 1 étant strictement positive sur l'intervalle $[0, 1[$, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.11. *Le support de toute B-spline de Chebyshev N_{λ}^m d'ordre m est égal à $[0, m]$. De plus N_{λ}^m est strictement positive sur l'intérieur de son support.*

La proposition 2.10 conduit également au résultat suivant :

Corollaire 2.12 *Étant donné m réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ et un entier i tel que $1 \leq i \leq m-2$, on a :*

$$L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i N_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}^m = \Delta_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i N_{(\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_m)}^{m-i}. \quad (2.35)$$

Preuve.

Pour toute fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, grâce à un changement de variable, le produit de convolution de f et $N_{\lambda_1}^1$, s'écrit :

$$(N_{\lambda_1}^1 * f)(x) = \int_0^1 e^{\lambda_1 t} f(x-t) dt = e^{\lambda_1 x} \int_{x-1}^x e^{-\lambda_1 y} f(y) dy.$$

Par dérivation, on obtient donc :

$$\begin{aligned} (N_{\lambda_1}^1 * f)'(x) &= \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \int_{x-1}^x e^{-\lambda_1 y} f(y) dy + e^{\lambda_1 x} [e^{-\lambda_1 x} f(x) - e^{-\lambda_1 (x-1)} f(x-1)] \\ &= \lambda_1 (N_{\lambda_1}^1 * f)(x) + f(x) - e^{\lambda_1} f(x-1), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$L_{\lambda_1}^1 (N_{\lambda_1}^1 * f) = \Delta_{\lambda_1}^1 f(x). \quad (2.36)$$

Nous pouvons appliquer la formule (2.36) avec $f = N_{(\lambda_2, \dots, \lambda_m)}^{m-1}$ à condition que la B-spline d'ordre $m-1$ soit continue, c'est-à-dire si $m \geq 3$. On obtient alors l'égalité (2.35) correspondant au cas $i = 1$. Le cas général s'obtiendra facilement par récurrence, en utilisant le fait que les opérateurs L_{λ}^1 et Δ_{μ}^1 commutent. ■

La proposition suivante généralise la relation (2.11).

Proposition 2.13. ([32]) *Pour tout spline $S \in \mathcal{S}_{\lambda}^m$, il existe une unique suite $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de nombres réels telle que :*

$$S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k N_{\lambda}^m(x - k), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.37)$$

Preuve.

Fixons deux entiers quelconques $j \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{N}$, et considérons la restriction $\mathcal{S}_{j,\ell}$ de l'espace $\mathcal{S}_{\lambda}^m$ à l'intervalle $[j, j + \ell + 1]$. Du paragraphe 1.4, nous déduisons que

$$\dim \mathcal{S}_{j,\ell} = m + \ell. \quad (2.38)$$

Chaque fonction $N_{\lambda}^m(\cdot - k)$ étant un élément de $\mathcal{S}_{\lambda}^m$, sa restriction à $[j, j + \ell + 1]$ est un élément de l'espace $\mathcal{S}_{j,\ell}$. Compte tenu du fait que $\text{supp} N_{\lambda}^m(\cdot - k) = [k, k + m]$, seules les $m + \ell$ fonctions $N_{\lambda}^m(\cdot - k)_{|[j, j + \ell + 1]}$, $k = j - m + 1, \dots, j + \ell$, sont des éléments non nuls de $\mathcal{S}_{j,\ell}$. Il nous suffit en fait de prouver que ces fonctions forment une base de $\mathcal{S}_{j,\ell}$. En effet, si nous supposons ceci montré, il existera une unique suite $(c_k)_{j-m+1 \leq k \leq j+\ell}$ telle que

$$S(x) = \sum_{k=j-m+1}^{j+\ell} c_k N_{\lambda}^m(x - k), \quad x \in [j, j + \ell + 1]. \quad (2.39)$$

Considérons maintenant l'intervalle $[j - 1, j + \ell + 2]$, (ou tout autre intervalle contenant $[j, j + \ell + 1]$). Du fait que les restrictions des fonctions $N_{\lambda}^m(\cdot - k)$, $k = j - m, \dots, j + \ell + 1$, à $[j - 1, j + \ell + 2]$ forment une base de l'espace $\mathcal{S}_{j-1, \ell+1}$, il existera une unique suite $(\gamma_k)_{j-m \leq k \leq j+\ell+1}$ telle que

$$S(x) = \sum_{k=j-m}^{j+\ell+1} \gamma_k N_{\lambda}^m(x - k), \quad x \in [j - 1, j + \ell + 2]. \quad (2.40)$$

Si l'on se limite à des éléments x de l'intervalle $\in [j, j + \ell + 1]$, pour $k = j - m$ et $k = j + \ell + 1$, nous avons $N_{\lambda}^m(x - k) = 0$. Par conséquent, l'égalité (2.40) conduit à :

$$S(x) = \sum_{k=j-m+1}^{j+\ell} \gamma_k N_{\lambda}^m(x - k), \quad x \in [j, j + \ell + 1],$$

ce qui, par comparaison à (2.39), prouvera que $\gamma_k = c_k$ pour tout $k = j - m + 1, \dots, j + \ell$. Le résultat annoncé sera alors prouvé.

Pour montrer que les $m + \ell$ fonctions $N_\lambda^m(\cdot - k)_{|[j, j + \ell + 1]}$, $k = j - m + 1, \dots, j + \ell$, forment une base de l'espace $\mathcal{S}_{j, \ell}$, en vertu de l'égalité (2.38), il suffit de vérifier qu'elles sont linéairement indépendantes. Supposons donc que

$$\sum_{k=j-m+1}^{j+\ell} \beta_k N_\lambda^m(x - k) = 0 \quad \text{pour tout } x \in [j, j + \ell + 1]. \quad (2.41)$$

Considérant séparément l'intervalle $[j, j + 1]$ et l'intervalle $[j + 1, j + \ell + 1]$, compte tenu du support de chaque $N_\lambda^m(\cdot - k)$, la relation (2.41) peut s'écrire :

$$\sum_{k=j-m+1}^j \beta_k N_\lambda^m(x - k) = 0, \quad x \in [j, j + 1], \quad (2.42)$$

$$\sum_{k=j-m+2}^{j+\ell} \beta_k N_\lambda^m(x - k) = 0, \quad x \in [j + 1, j + \ell + 1].$$

Une récurrence sur l'entier ℓ permet de voir qu'il suffit de montrer que l'hypothèse (2.42) implique $\beta_k = 0$ pour $k = j - m + 1, \dots, j$. Nous sommes donc ramenés à prouver que les m fonctions $N_\lambda^m(\cdot - k)_{|[0, 1]}$, $k = -m + 1, \dots, 0$, forment une base pour la restriction de l'espace $\mathcal{N}_\lambda^m$ à l'intervalle $[0, 1]$.

Écrivons l'égalité (2.29), sous la forme simplifiée :

$$N_\lambda^m(x) = G_\lambda^m(x) + a_1 G_\lambda^1(x + 1) + \dots + a_m G_\lambda^m(x - m), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.43)$$

où $a_k := (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} e^{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}}$. Regardons ce que la relation (2.43) donne pour $x \in [0, 1]$ et pour les fonctions $N_\lambda^m(\cdot - k)$, $k = -m + 1, \dots, 0$. Du fait que G_λ^m est nulle à gauche de 0, nous obtenons pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{pmatrix} N_\lambda^m(x) \\ N_\lambda^m(x + 1) \\ \vdots \\ N_\lambda^m(x + m - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_\lambda^m(x) \\ G_\lambda^m(x + 1) \\ \vdots \\ G_\lambda^m(x + m - 1) \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

L'égalité (2.44) montre que le problème consiste à prouver que les fonctions $G_\lambda^m, G_\lambda^m(\cdot + 1), \dots, G_\lambda^m(\cdot + m - 1)$ sont linéairement indépendants sur $[0, 1]$. De par la définition (2.14)

de la fonction de Green, cela revient à prouver que les fonctions $u_m, u_m(\cdot + 1), \dots, u_m(\cdot + m - 1)$ sont linéairement indépendantes sur $[0, 1]$. Le lemme 2.2 nous dit qu'elles forment une base de l'espace $\mathcal{N}_\lambda^m$, donc un EC-système sur $\mathbb{R}$ tout entier, par conséquent un EC-système sur $[0, 1]$. Donc en particulier $u_m|_{[0,1]}, u_m(\cdot + 1)|_{[0,1]}, \dots, u_m(\cdot + m - 1)|_{[0,1]}$ forment une base de l'espace $\mathcal{N}_\lambda^m|_{[0,1]}$. ■

2.2 B-spline adjointe

L'adjoint de l'opérateur L_λ^m défini en (2.1) est l'opérateur L_λ^{m*} tel que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_\lambda^m f(t) g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) L_\lambda^{m*} g(t) dt, \quad f, g \in H^{m-1}(\mathbb{R}). \quad (2.45)$$

Cet opérateur est donné par :

$$L_\lambda^{m*} = (-1)^m \prod_{k=1}^m (D + \lambda_k I). \quad (2.46)$$

Définition 2.14. Soit L_λ^m l'opérateur différentiel définie en (2.1).

1. On définit l'espace adjoint des splines de Chebyshev $\mathcal{S}_\lambda^{m*}$ associé à l'opérateur L_λ^m , comme l'espace des splines cardinales associées à l'opérateur adjoint L_λ^{m*} .
2. La B-spline adjointe de N_λ^m est définie comme la B-spline N_λ^{m*} associée à l'opérateur L_λ^{m*} .

Par conséquent, si $\mathcal{N}_\lambda^{m*} := \text{Ker } L_\lambda^{m*}$,

$$\mathcal{S}_\lambda^{m*} = \{f \in C^{m-2}(\mathbb{R}) : f|_{[k, k+1[} \in \mathcal{N}_\lambda^{m*}, k \in \mathbb{Z}\},$$

et d'après (2.46),

$$N_\lambda^{m*} = N_{-\lambda}^m, \quad (2.47)$$

soit

$$N_{\lambda_1}^{1*} = e^{-\lambda_1 x} \chi_{[0,1[}, \quad (2.48)$$

et, en utilisant (2.32) :

$$N_\lambda^{m*}(x) = \int_0^1 e^{-\lambda_m t} N_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})}^{m-1}(x - t) dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.49)$$

La proposition suivante nous explique le lien exact entre N_λ^{m*} et N_λ^m .

Proposition 2.15. Pour tout $m \geq 2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}^m$, on a la relation suivante :

$$N_\lambda^{m*}(x) = e^{-\sum_{k=1}^m \lambda_k} N_\lambda^m(m - x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.50)$$

Pour $m = 1$ l'égalité (2.50) est vérifiée seulement sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Preuve.

On montre cette propriété par récurrence sur m . Pour $m = 1$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} N_{\lambda_1}^{1*}(x) &= e^{-\lambda_1 x} \chi_{[0,1]}(x) \\ &= e^{-\lambda_1} e^{\lambda_1(1-x)} \chi_{[0,1]}(x), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, pour $x \neq 0, 1$, $N_{\lambda_1}^{1*}(x) = e^{-\lambda_1} e^{\lambda_1(1-x)} = e^{-\lambda_1} N_{\lambda_1}^1(1-x)$. Etant donné un entier $m \geq 2$, supposons que l'on ait :

$$N_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})}^{m-1*}(x) \stackrel{pp}{=} e^{-\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k} N_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})}^{m-1}(m-1-x).$$

En utilisons (2.32) et la relation précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned} N_{\lambda}^{m*}(x) &= \int_0^1 e^{-\lambda_m t} N_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})}^{m-1*}(x-t) dt \\ &= e^{-\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k} \int_0^1 e^{-\lambda_m t} N_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})}^{m-1}(m-1-x+t) dt, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, avec le changement de variable $s = 1 - t$,

$$\begin{aligned} N_{\lambda}^{m*}(x) &= e^{-\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k} \int_0^1 e^{-\lambda_m s} e^{\lambda_m s} N_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})}^{m-1}(m-x-s) ds \\ &= e^{-\sum_{k=1}^m \lambda_k} N_{\lambda}^m(m-x), \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. ■

La relation (2.50) nous montre que si $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 0$, la fonction N_{λ}^{m*} est l'image de la fonction N_{λ}^m par la symétrie par rapport à l'axe $x = \frac{m}{2}$. Dans le cas polynomial, on sait que la B-spline est symétrique par rapport à l'axe $x = \frac{m}{2}$. La relation (2.50) confirme cette propriété pour $\lambda_k = 0$, $k = 1, \dots, m$, puisque dans ce cas, $N_{\lambda}^m = N_{\lambda}^{m*}$. Elle nous donne de plus une condition nécessaire et suffisante sur l'opérateur L_{λ}^m , pour que la B-spline associée soit symétrique.

Corollaire 2.16. *Les opérateurs différentiels d'ordre m à coefficients réels constants dont la B-spline associée est symétrique, (par rapport à l'axe $x = \frac{m}{2}$), sont les opérateurs de la forme suivante :*

$$D^{\mu_0} \prod_{i=1}^r (D^2 - \ell_i^2)^{\mu_i}, \quad (2.51)$$

où les nombres $\ell_1, \dots, \ell_r \in \mathbb{R}^*$ satisfont $\ell_i^2 \neq \ell_j^2$ pour $i \neq j$, et où les entiers $\mu_0 \in \mathbb{N}$, $\mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{N}^*$ satisfont $\mu_0 + 2 \sum_{k=1}^r \mu_k = m$.

Preuve.

L'opérateur différentiel défini en (2.51) est l'opérateur L_λ^m correspondant à

$$\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (0^{[\mu_0]}, \ell_1^{[\mu_1]}, (-\ell_1)^{[\mu_1]}, \dots, \ell_r^{[\mu_r]}, (-\ell_r)^{[\mu_r]}).$$

Donc $\sum_{i=1}^m \lambda_k = 0$ et de façon évidente, λ et $-\lambda$ coïncident à une permutation près, si bien que $N_\lambda^{m*} = N_{-\lambda}^m = N_\lambda^m$. Par conséquent la formule (2.50) montre que N_λ^m est symétrique par rapport à l'axe $x = \frac{m}{2}$.

Inversement, supposons que N_λ^m soit symétrique par rapport à l'axe $x = \frac{m}{2}$. La relation (2.50) s'écrit alors

$$N_\lambda^{m*} = e^{-\sum_{k=1}^m \lambda_k} N_\lambda^m.$$

Compte tenu de la Proposition 2.13, l'égalité précédente prouve que les espaces de splines $\mathcal{S}_\lambda^m$ et $\mathcal{S}_\lambda^{m*}$ sont aussi égaux, et par conséquent les espaces $\mathcal{N}_\lambda^{m*} = \text{Ker } L_\lambda^{m*}$ et $\mathcal{N}_\lambda^m = \text{Ker } L_\lambda^m$ sont égaux. Ceci ne peut se produire que si $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ et $(-\lambda_1, \dots, -\lambda_m)$ coïncident à une permutation près, donc si l'opérateur L_λ^m correspondant est de type (2.51). ■

2.3 Transformée de Fourier d'une B-spline de Chebyshev

Dans cette section, nous allons étudier un certain nombre de propriétés des B-splines de Chebyshev liées à leur transformée de Fourier.

Proposition 2.17. ([36, 7]) *La transformée de Fourier de la B-spline N_λ^m est donnée par :*

$$\widehat{N}_\lambda^m(w) = \prod_{s=1}^m g(\lambda_s - iw), \quad (2.52)$$

où g est la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (2.53)$$

Preuve.

En utilisant la proposition 2.10 et la propriété bien connue $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$, il suffit de vérifier que pour $s = 1, \dots, m$,

$$\widehat{N}_{\lambda_s}^1 = g(\lambda_s - iw).$$

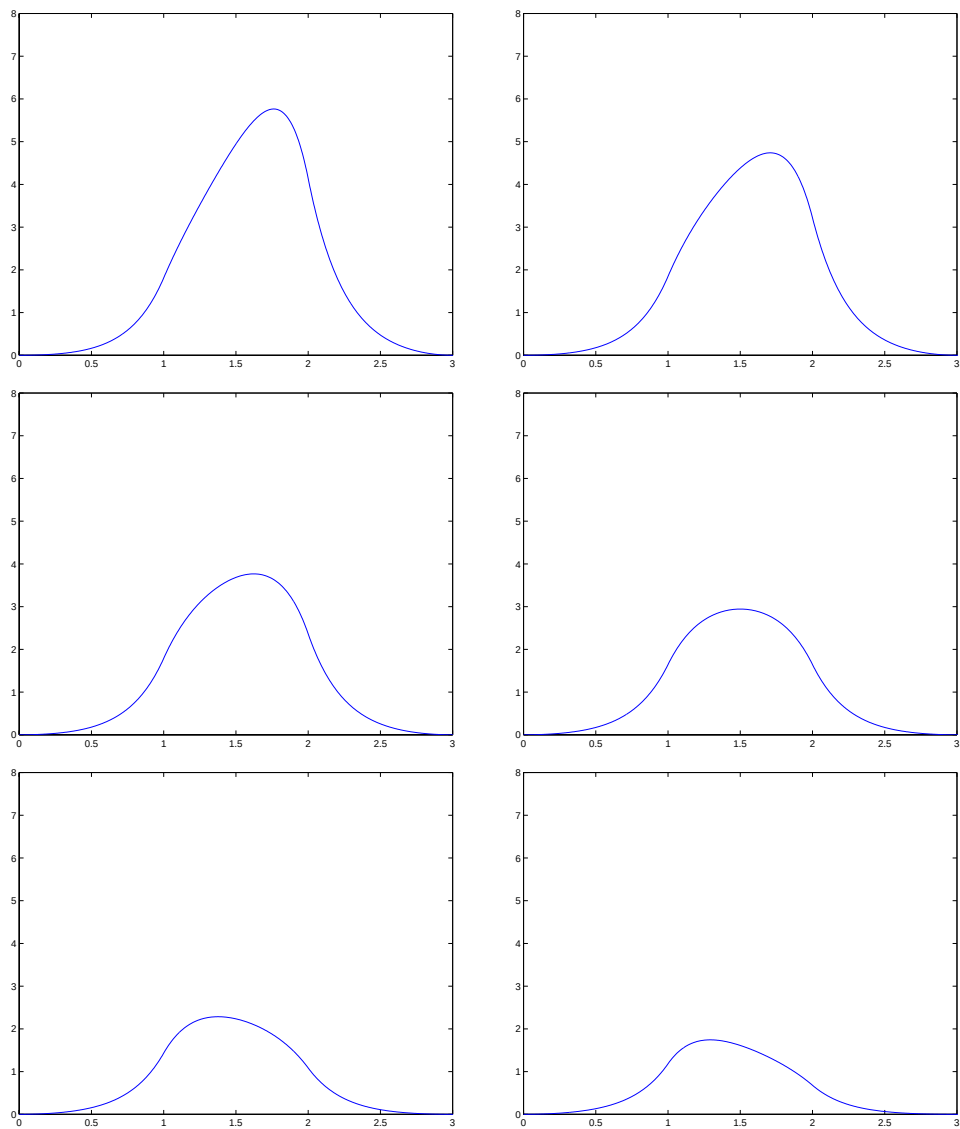


FIG. 2.1 – La B-spline de Chebyshev N_λ^3 , (de gauche à droite et de haut en bas) avec $\lambda = (1.5, -4, 4)$, $\lambda = (1, -4, 4)$, $\lambda = (0.5, -4, 4)$, $\lambda = (0, -4, 4)$, $\lambda = (-0.5, -4, 4)$ et $\lambda = (-1, -4, 4)$

Ceci résulte de manière évidente de l'égalité :

$$\begin{aligned}\widehat{N_{\lambda_s}^1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} N_{\lambda_s}^1(x) e^{-iwx} dx \\ &= \int_0^1 e^{(\lambda_s - iw)x} dx.\end{aligned}$$

■

Dans le cas polynomial, il est bien connu que la somme des B-splines est égale à 1, c'est-à-dire :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} N^m(x - j) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cette identité est un cas particulier du résultat suivant :

Proposition 2.18. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$. Pour tout $k = 1, \dots, m$, et tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-\lambda_k(x-j)} N_{\lambda}^m(x - j) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_k t} N_{\lambda}^m(t) dt = \widehat{N_{\lambda}^m}(-i\lambda_k). \quad (2.54)$$

Preuve.

Considérons la fonction 1-périodique φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-\lambda_k(x-j)} N_{\lambda}^m(x - j). \quad (2.55)$$

Pour $x \in [0, 1]$, la somme dans (2.55) se réduit à :

$$\varphi(x) = \sum_{j=-m+1}^0 e^{-\lambda_k(x-j)} N_{\lambda}^m(x - j),$$

donc φ satisfait clairement les conditions de Dirichlet pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, si bien que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2}(\varphi(x^+) + \varphi(x^-)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2in\pi x},$$

où les c_n sont les coefficients de Fourier de la fonction φ . Pour $m \geq 2$, la B-spline N_{λ}^m étant continue sur $\mathbb{R}$, il en est de même de φ . Pour $m = 1$, bien que la B-spline N_{λ}^1 ne soit pas continue, la fonction φ l'est. Elle est en fait constante. En effet, pour $x \in [k, k+1[$ $\varphi(x) = e^{-\lambda_1(x-k)} e^{\lambda_1(x-k)} = 1$, donc $\varphi = \mathbb{I}$. Par conséquent, quelle que soit la valeur de m nous avons finalement :

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2in\pi x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.56)$$

Calculons les coefficients de Fourier c_n :

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 \varphi(u) e^{-2in\pi u} du \\ &= \int_0^1 \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-\lambda_k(u-j)} N_\lambda^m(u-j) e^{-2in\pi u} du \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-\lambda_k(u-j)} N_\lambda^m(u-j) e^{-2in\pi u} du, \end{aligned}$$

puisque'il s'agit en fait d'une somme finie. Donc :

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-j}^{-j+1} e^{-\lambda_k t} N_\lambda^m(t) e^{-2in\pi t} dt, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_k t} N_{\lambda_k}^m(t) e^{-2in\pi t} dt. \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} N_{\lambda_k}^m(t) e^{-i(2n\pi - i\lambda_k)t} dt, \\ &= \widehat{N_\lambda^m}(2n\pi - i\lambda_k). \end{aligned}$$

D'après (2.52), nous avons donc

$$c_n = \prod_{s=1}^m g(\lambda_s - \lambda_k - 2in\pi). \quad (2.57)$$

En particulier pour $s = k$, d'après (2.53) :

$$g(\lambda_s - \lambda_k - 2in\pi) = g(-2in\pi) = 0 \quad \text{si } n \neq 0,$$

et l'égalité (2.57) montre que

$$c_n = 0 \quad \text{pour tout } n \neq 0.$$

De (2.56) et (2.57) on déduit donc que si $m \geq 2$,

$$\varphi(x) = c_0 = \widehat{N_\lambda^m}(-i\lambda_k) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

qui n'est autre que l'égalité (2.54). ■

Dans le cas où l'un au moins des nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ est égale à 0, c'est-à-dire, dans le cas où la fonction constante $\mathbb{I}$ appartient à l'espace des splines $\mathcal{S}_\lambda^m$, la formule (2.54) conduit à la décomposition suivante de cette fonction dans la base des B-splines :

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} N_\lambda^m(\cdot - j), \\ &= \prod_{k \in K} \frac{\lambda_k}{e^{\lambda_k} - 1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} N_\lambda^m(\cdot - j), \end{aligned}$$

où K est l'ensemble des indices $k \in \{1, \dots, m\}$ tels que $\lambda_k \neq 0$.

La proposition précédente se généralise sous la forme suivante :

Proposition 2.19. *Supposons $m \geq 2$. Soient $\ell_1, \dots, \ell_r$ des nombres réels distincts et $\mu_1, \dots, \mu_r$ des entiers strictement positifs, tels que $\mu_1 + \dots + \mu_r = m$. Considérons le m -uplet $\lambda := (\ell_1^{[\mu_1]}, \dots, \ell_r^{[\mu_r]})$. Alors, pour tout $k = 1, \dots, r$, et tout $p = 0, \dots, \mu_r - 1$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} (x - j)^p e^{-\ell_k(x-j)} N_\lambda^m(x - j) = i^p D^p \widehat{N_\lambda^m}(-i\ell_k). \quad (2.58)$$

Preuve.

Désignons par $\psi(x)$ la quantité qui apparaît dans le premier membre de (2.58). La fonction ψ est 1-périodique et on peut montrer comme pour φ que

$$\psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{2in\pi x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.59)$$

On peut calculer les coefficients de Fourier $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de ψ comme précédemment ceux de φ , ce qui donne :

$$C_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p N_\lambda^m(x) e^{-i(2n\pi - i\ell_k)x} dx,$$

c'est-à-dire :

$$C_n = \widehat{M_p}(2n\pi - i\ell_k), \quad (2.60)$$

où M_p est la fonction définie par :

$$M_p(x) = x^p N_\lambda^m(x).$$

Les propriétés classiques de la transformation de Fourier nous indiquent que :

$$\widehat{M_p}(w) = i^p D^p \widehat{N_\lambda^m}(w). \quad (2.61)$$

D'après la proposition 2.17, ici :

$$\widehat{N_\lambda^m}(w) = \prod_{s=1}^r g(\ell_s - iw)^{\mu_s}.$$

Par conséquent, puisque $p \leq \mu_k - 1$, le calcul de $D^p \widehat{N_\lambda^m}(w)$ montre que

$$D^p \widehat{N_\lambda^m}(2n\pi - i\ell_k) = 0 \quad \text{pour } n \neq 0.$$

Des égalités (2.60) et (2.61) il résulte donc que

$$C_n = 0, \quad \text{pour } n \neq 0,$$

et par suite l'égalité (2.59) se réduit à (2.58). ■

Corollaire 2.20. *Les données sont les mêmes que dans la proposition 2.19. Pour chaque $k = 1, \dots, r$ et tout $p = 0, \dots, \mu_k - 1$, il existe un polynôme β_p^k de degré exact p , tel que :*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^p e^{\ell_k j} N_\lambda^m(x - j) = \beta_p^k(x) e^{\ell_k x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.62)$$

Preuve.

La démonstration, pour k fixé, se fait par récurrence sur p . Pour tout $p \leq \mu_k - 1$, désignons par A_p le second membre de l'égalité (2.58), i.e, $A_p := i^p D^p \widehat{N_\lambda^m}(-i\ell_k)$. Le cas $p = 0$ correspond directement à la Proposition 2.18, qui nous dit que :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{\ell_k j} N_\lambda^m(x - j) = A_0 e^{\ell_k x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Donc $\beta_0^k(x) = A_0$ et il nous reste seulement à vérifier que $A_0 \neq 0$. Or, d'après la proposition 2.17,

$$A_0 = \widehat{N_\lambda^m}(-i\ell_k) = \prod_{s=1}^r g(\ell_s - \ell_k)^{\mu_s},$$

et la fonction g définie en (2.53) ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par conséquent $A_0 \neq 0$.

Supposons la propriété établie pour tout $r < p$, $1 \leq p \leq \mu_r - 1$. La relation (2.58) s'écrit :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{r=0}^p (-1)^r \binom{p}{r} x^{p-r} j^r e^{\ell_k j} N_\lambda^m(x - j) = A_p e^{\ell_k x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où A_p est une constante (réelle). Pour x fixé, la somme infinie se réduit en fait à une somme finie, donc on peut intervertir les signes somme, ce qui donne :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^p j^p e^{\ell_k j} N_\lambda^m(x - j) + \sum_{r=0}^{p-1} (-1)^r x^{p-r} \binom{p}{r} \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^r e^{\ell_k j} N_\lambda^m(x - j) = A_p e^{\ell_k x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

L'hypothèse de récurrence nous dit que, pour $r = 0, \dots, p-1$, il existe un polynôme β_r^k , de degré exact r , tel que :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^r e^{\ell_k j} N_\lambda^m(x - j) = \beta_r^k(x) e^{\ell_k x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

De la relation précédente on déduit alors :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^p e^{\ell_k j} N_\lambda^m(x - j) = (-1)^p e^{\ell_k x} \left[A_p - \sum_{r=0}^{p-1} (-1)^r \binom{p}{r} x^{p-r} \beta_r^k(x) \right], \quad x \in \mathbb{R},$$

qui est l'égalité (2.62) annoncée, où β_p est le polynôme de degré $\leq p$ défini par :

$$\beta_p^k(x) := (-1)^p \left[A_p - \sum_{r=0}^{p-1} (-1)^r \binom{p}{r} x^{p-r} \beta_r^k(x) \right]. \quad (2.63)$$

Il reste seulement à vérifier que le degré de ce polynôme β_p^k est exactement égal à p . Nous allons en fait montrer, par récurrence sur p , que son coefficient dominant est égal à A_0 , ce qui assurera le fait qu'il soit non nul.

Pour $p = 0$, $\beta_0^k(x) = A_0$. Supposons que le résultat vrai pour tout $r \leq p-1$. Alors, d'après (2.63), le coefficient A du terme x^p dans β_p^k vaut :

$$A = (-1)^{p+1} A_0 \sum_{r=0}^{p-1} (-1)^r \binom{p}{r}.$$

L'égalité $\sum_{r=0}^p (-1)^r \binom{p}{r} = (1-1)^p = 0$ permet de remplacer la somme $\sum_{r=0}^{p-1} (-1)^r \binom{p}{r}$ par $(-1)^{p+1}$, d'où alors le résultat attendu $A = A_0$. ■

2.4 La B-spline N_λ^m comme fonction de λ

Nous nous intéressons ici au comportement de la B-spline N_λ^m par rapport à λ . Puisqu'elle est définie à partir de la fonction de Green G_λ^m , il est naturel de revenir à cette fonction de Green.

Étant donné des réels $x_1, \dots, x_{i+1}$ et une fonction f définie sur un intervalle contenant ces points (éventuellement différentiable) nous désignerons par $\delta_{x_1, \dots, x_{i+1}}^i f$ la différence divisée d'ordre i de la fonction f , basée sur les points $x_1, \dots, x_{i+1}$.

En particulier si les points $x_1, \dots, x_{i+1}$ sont tous distincts, il est bien connu que cette différence divisée s'exprime sous la forme

$$\delta_{x_1, \dots, x_{i+1}}^i f = \sum_{p=1}^{i+1} \frac{f(x_p)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{i+1} (x_p - x_j)}. \quad (2.64)$$

Lorsque les points ne sont pas supposés distincts, le calcul de $\delta_{x_1, \dots, x_{i+1}}^1 f$ fait appel aux dérivées de f . Nous renvoyons le lecteur non averti de ce domaine à l'annexe située en fin de document.

Proposition 2.21 *Pour $x \geq 0$, définissons la fonction $f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_x(t) := e^{tx}$. Alors pour tout $m \geq 1$ et tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, la fonction de Green de l'opérateur*

$L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}^m$ satisfait :

$$G_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}^m(x) = \delta_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}^{m-1} f_x, \quad x \in [0, +\infty[. \quad (2.65)$$

Preuve.

Revenons aux fonction u_i introduites dans le lemme 2.1. Puisque nous sommes amenés à bouger λ , nous changeons ici de notation et définissons, pour $i \leq m$, la fonction $u_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i$ par d'une part la condition :

$$L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i u_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i = 0, \quad (2.66)$$

d'autre part les conditions initiales (cf. (2.3)) :

$$u_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i(j)(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0, \dots, i-2, \\ 1 & \text{si } j = i-1. \end{cases} \quad (2.67)$$

Il est clair que cette fonction ne dépend pas de l'ordre de $\lambda_1, \dots, \lambda_i$.

a. Supposons que $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ soient tous distincts.

La relation (2.4) s'écrit :

$$Du_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i(x) = \lambda_i u_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i(x) + u_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1})}^{i-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.68)$$

Mais du fait de l'indépendance de la fonction $u_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i$ de l'ordre des nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_i$, nous avons aussi :

$$Du_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i(x) = \lambda_1 u_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i(x) + u_{(\lambda_2, \dots, \lambda_i)}^{i-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.69)$$

Des égalités (2.68) et (2.69) nous tirons :

$$u_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i(x) = \frac{u_{(\lambda_2, \dots, \lambda_i)}^{i-1}(x) - u_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1})}^{i-1}(x)}{\lambda_i - \lambda_1}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.70)$$

Par conséquent, les quantités $u_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i(x)$ peuvent être calculées de façon progressive suivant un schéma analogue au schéma de calcul des différences divisées par rapport à des points distincts. De plus $u_{\lambda_1}^1$ est la fonction de $\mathcal{N}_{\lambda_1}^1$ qui satisfait $u_{\lambda_1}^1(0) = 1$, donc

$$u_{\lambda_1}^1(x) = e^{\lambda_1 x} = f_x(\lambda_1) = \delta_{\lambda_1}^0 f_x. \quad (2.71)$$

Les relations (2.70) et (2.71) montrent donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$u_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i(x) = \delta_{\lambda_1, \dots, \lambda_i}^{i-1} f_x, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.72)$$

L'égalité (2.65) s'en déduit puisque $G_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}^m(x) = u_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}^m(x)$ pour $x \geq 0$ (cf. (2.14)).

b. Supposons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = a$.

On a toujours $u_a^1(x) = e^{ax}$ et, d'après (2.4) :

$$L_a^1 u_{(a^{[i]})}^i = u_{(a^{[i-1]})}^{i-1}, \quad i = 2, \dots, m. \quad (2.73)$$

Supposons que, pour $i \geq 2$, $u_{(a^{[i-1]})}^{i-1}(x) = \frac{x^{i-2}}{(i-2)!} e^{ax}$. Résolvons l'équation (2.73) par variation de la constante. Nous cherchons $u_{(a^{[i]})}^i(x)$ sous la forme :

$$u_{(a^{[i]})}^i(x) = C(x) e^{ax},$$

et l'équation (2.73) montre que $C'(x) = \frac{x^{i-2}}{(i-2)!}$, donc $C(x) = \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} + K$, $K \in \mathbb{R}$. La condition $u_{(a^{[i]})}^i(0) = 0$ montre que $K = 0$. On a donc prouvé par récurrence que :

$$u_{(a^{[i]})}^i(x) = \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} e^{ax}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.74)$$

Or, la différence divisée d'ordre $i-1$ de la fonction f_x en les points $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_i = a$ vaut :

$$\underbrace{\delta_{a, \dots, a}^{i-1}}_{i \text{ fois}} f_x = \frac{f_x^{(i-1)}(a)}{(i-1)!},$$

c'est-à-dire,

$$\underbrace{\delta_{a, \dots, a}^{i-1}}_{i \text{ fois}} f_x = \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} e^{ax}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.75)$$

Par comparaison de (2.75) et (2.74), nous avons donc montré à nouveau que :

$$u_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i(x) = \delta_{\lambda_1, \dots, \lambda_i}^{i-1} f_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.76)$$

La formule (2.65) se déduit à nouveau par (2.14).

c. Cas général

Puisque la fonction $u_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}^m$ ne dépend pas de l'ordre des λ_i on peut supposer que $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (\ell_1^{[\mu_1]}, \dots, \ell_r^{[\mu_r]})$.

En rassemblant les deux cas particuliers précédents, nous voyons, à partir de (2.70) et (2.76), que le schéma de calcul progressif de $u_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}^m(x)$ se fait suivant le schéma classique de calcul de la différence divisée $\delta_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}^{m-1} f_x$ dans le cas où les λ_i ne sont pas tous distincts (cf. annexe). ■

Par exemple, lorsque $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont tous distincts nous pouvons déduire de (2.65) que

$$G_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}^m(x) = \sum_{k=1}^m \frac{e^{\lambda_k x}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m (\lambda_k - \lambda_j)}, \quad x \geq 0.$$

Corollaire 2.22. Soit $\lambda^\sharp = (\lambda_1^\sharp, \dots, \lambda_m^\sharp) \in \mathbb{R}^m$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda^\sharp} N_\lambda^m(x) = N_{\lambda^\sharp}^m(x). \quad (2.77)$$

Preuve.

De la relation (2.65) et du Corollaire A.3 (annexe), nous pouvons déduire, pour un $x \in \mathbb{R}$ fixé :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda^\sharp} G_\lambda^m(x) = G_{\lambda^\sharp}^m(x). \quad (2.78)$$

La B-spline N_λ^m est définie par $\Delta_\lambda^m G_\lambda^m$, c'est-à-dire, comme explicité en (2.29) :

$$N_\lambda^m(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} e^{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}} \right) G_\lambda^m(x - k), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, quel que soit l'entier $k = 0, \dots, m$, d'après (2.78) $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda^\sharp} G_\lambda^m(x - k) = G_{\lambda^\sharp}^m(x - k)$. L'égalité précédente conduit de façon évidente à (2.77). ■

2.5 Le cas complexe

Ce que nous venons d'exposer concerne les opérateurs différentiels à coefficients constants

$$D^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k$$

dont le polynôme caractéristique associé $x^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k$ n'a que des racines réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Or, dans les applications, on peut rencontrer des espaces associés à des opérateurs qui ne vérifient pas cette condition. En fait, généralement, on autorise certaines des racines $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ à être complexes, sachant quelles seront alors deux à deux conjuguées. Si ceci est réalisé, à une permutation près

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (\ell_1^{[\mu_1]}, \dots, \ell_p^{[\mu_p]}, \ell_{p+1}^{[\mu_{p+1}]}, \overline{\ell_{p+1}^{[\mu_{p+1}]}}^{[\mu_{p+1}]}, \dots, \ell_r^{[\mu_r]}, \overline{\ell_r^{[\mu_r]}}^{[\mu_r]}),$$

où $\ell_1, \dots, \ell_p \in \mathbb{R}$ et sont distincts, $\ell_{p+1}, \overline{\ell_{p+1}}, \dots, \ell_r, \overline{\ell_r} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et sont tous distincts, et $\mu_1 + \dots + \mu_p + 2(\mu_{p+1} + \dots + \mu_r) = m$. Alors l'espace $\mathcal{N}_\lambda^m = \text{Ker } L_\lambda^m$ admet pour base les fonctions :

$$\begin{aligned} x^j e^{\ell_s x}, & \quad s = 1, \dots, p, \quad j = 0, \dots, \mu_s - 1 \\ x^j e^{\beta_s x} \cos \gamma_s x, & \quad s = p+1, \dots, r, \quad j = 0, \dots, \mu_s - 1 \\ x^j e^{\beta_s x} \sin \gamma_s x, & \quad s = p+1, \dots, r, \quad j = 0, \dots, \mu_s - 1, \end{aligned}$$

où, pour $s = p+1, \dots, r$, $\ell_s = \beta_s + i\gamma_s$, avec $\gamma_s \neq 0$.

Néanmoins, rien n'empêche de considérer l'espace $\mathcal{N}_\lambda^m = \text{Ker } L_\lambda^m$ même dans le cas où l'opérateur L_λ^m n'est pas à coefficients réels. On peut alors définir l'espace des splines $\mathcal{S}_\lambda^m$ associé à l'opérateur L_λ^m comme dans la définition 2.3 et la B-spline N_λ^m par l'intermédiaire de la fonction de Green comme en (2.28).

L'expression des valeurs de la fonction de Green comme différences divisées de fonctions exponentielles donnée en (2.65) est encore valable ici. Chaque fonction $f_x(t) = e^{tx}$ étant analytique sur $\mathbb{C}$, nous pouvons déduire du corollaire A.5 (annexe) que, pour tout réel x , et tout $\lambda^\sharp \in \mathbb{C}^m$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda^\sharp} G_\lambda^m(x) = G_{\lambda^\sharp}^m(x). \quad (2.79)$$

Comme conséquence immédiate, nous obtiendrons, comme dans le corollaire 2.22

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda^\sharp} N_\lambda^m(x) = N_{\lambda^\sharp}^m(x). \quad (2.80)$$

Proposition 2.23. *Si l'opérateur différentiel $L_\lambda^m = \prod_{s=1}^m (D - \lambda_s I)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$, est à coefficients réels, la B-spline associée N_λ^m est une fonction réelle.*

Preuve.

Puisque l'opérateur est à coefficients réels, la fonction de Green G_λ^m est à valeurs réelles. Il suffit de vérifier que, pour tout fonction f réelle et tout $z \in \mathbb{C}$, $(\Delta_z^1 \circ \Delta_{\bar{z}}^1)f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or nous avons vu dans la preuve de la Proposition 2.6 que :

$$(\Delta_z^1 \circ \Delta_{\bar{z}}^1)f(x) = f(x) - (e^z + e^{\bar{z}})f(x-1) + e^{z+\bar{z}}f(x-2).$$

Il suffit donc de remarquer que $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$ et $e^z + e^{\bar{z}} \in \mathbb{R}$. ■

Si l'on définit comme précédemment, la fonction $N_{\lambda_k}^1$ par :

$$N_{\lambda_k}^1(x) = e^{\lambda_k x} \chi_{[0,1]}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

on peut montrer à nouveau que

$$N_\lambda^m = N_{\lambda_1}^1 * \dots * N_{\lambda_m}^1. \quad (2.81)$$

Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$,

$$\begin{aligned} N_{z_1}^1 * N_{z_2}^1(x) &= \int_0^1 e^{z_1 t} e^{z_2(x-t)} \chi_{[0,1]}(x-t) dt \\ &= e^{z_1 x} \int_0^x e^{(z_2 - z_1)y} dy. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$N_{(z_1, z_2)}^2(x) = \begin{cases} \frac{e^{z_2 x} - e^{z_1 x}}{z_2 - z_1} & \text{si } x \in [0, 1], \\ \frac{e^{z_2} e^{z_1(x-1)} - e^{z_1} e^{z_2(x-1)}}{z_2 - z_1} & \text{si } x \in [1, 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.82)$$

En particulier, si $z_1 = z := \beta + i\gamma$ et $z_2 = \bar{z}$, avec $\gamma \neq 0$, les résultats précédents prouvent que :

$$N_{z_1}^1 * N_{z_2}^1(x) = N_{(z, \bar{z})}^2(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\gamma x)}{\gamma} e^{\beta x} & \text{si } x \in [0, 1], \\ \frac{\sin \gamma(2-x)}{\gamma} e^{\beta x} & \text{si } x \in [1, 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.83)$$

Donc $N_{(z, \bar{z})}^2 > 0$ sur $]0, 2[$ si et seulement si $|\gamma| < \pi$. En regroupant les termes deux à deux conjugués dans la formule (2.31), on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.24. *Soit $L_\lambda^m = \prod_{s=1}^m (D - \lambda_s I)$ un opérateur différentiel à coefficients réels, où $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$. Pour que la B-spline associée N_λ^m soit positive sur $]0, m[$ il suffit que $|\operatorname{Im}(\lambda_s)| < \pi$ pour $s = 1, \dots, m$.*

La condition précédente n'est qu'une condition suffisante, pas nécessaire (sauf lorsque $m = 2$), comme le prouvent les illustrations données en Figure 2.2.

Dans le cas complexe, les propositions 2.18 et 2.19 restent valides telles quelles. Le corollaire 2.20 également à ceci près que les polynômes β_p^k intervenant dans (2.62) sont seulement de degré inférieur ou égal à p . En effet, comme nous l'avons vu dans la preuve du corollaire 2.20, le degré exact égal à p résultait du fait que lorsque $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont tous réels, alors :

$$\widehat{N_\lambda^m}(-i\lambda_k) \neq 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.84)$$

Or cette propriété n'est plus garantie lorsque l'on autorise $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ à être complexes. En effet, si $x \in \mathbb{C}$, la fonction g définie en (2.53) satisfait :

$$g(x) = 0 \iff x \in 2i\pi\mathbb{Z}^*,$$

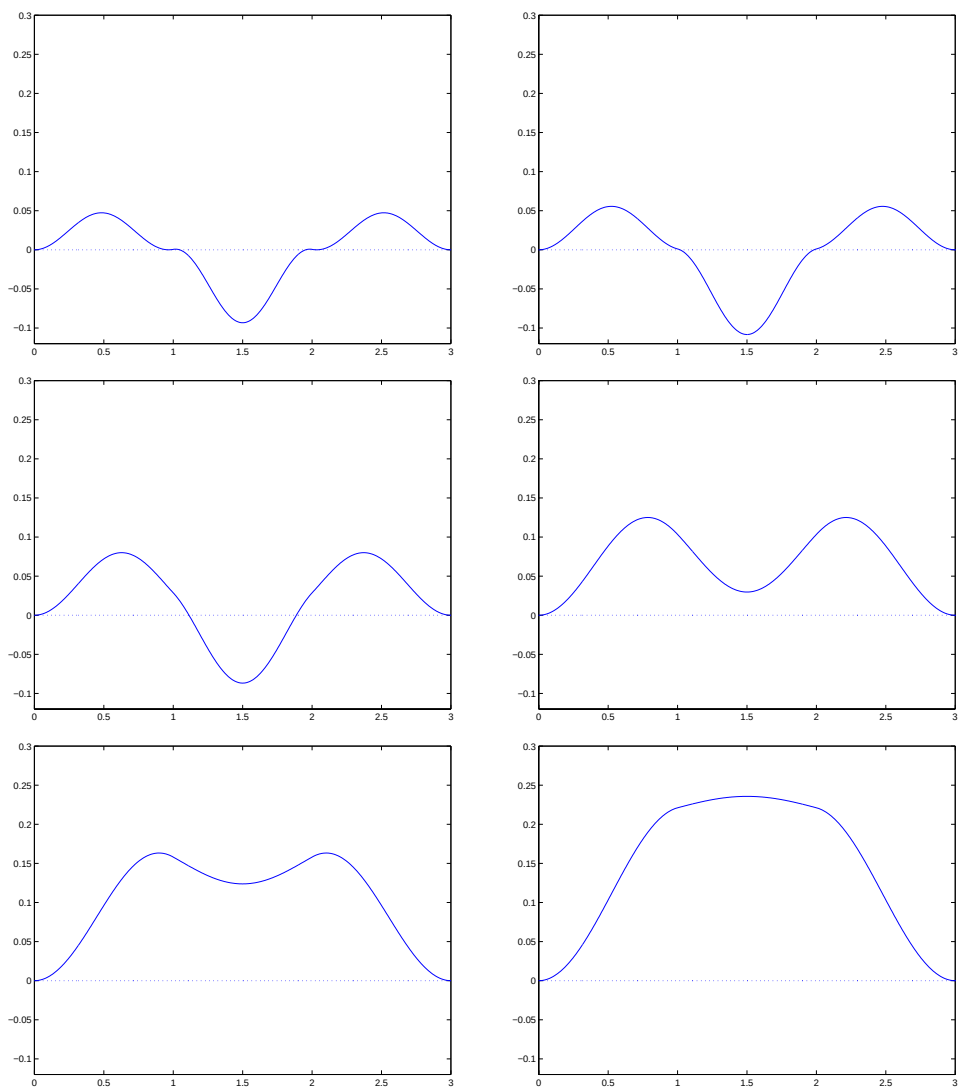


FIG. 2.2 – La positivité ou non positivité des B -splines de Chebyshev, de gauche à droite et de haut en bas : N_λ^3 avec $\lambda = (0, -6.5i, 6.5i)$, $\lambda = (0, -6i, 6i)$, $\lambda = (0, -5i, 5i)$, $\lambda = (0, -4i, 4i)$, $\lambda = (0, -3.5i, 3.5i)$ et $\lambda = (0, -3i, 3i)$.

si bien que, pour $w \in \mathbb{C}$, d'après (2.52) :

$$\widehat{N_\lambda^m}(w) \neq 0 \iff \lambda_s - iw \notin 2i\pi\mathbb{Z}^*, \quad s = 1, \dots, m. \quad (2.85)$$

Par conséquent, les conditions (2.84) sont réalisées si et seulement si :

$$\lambda_s - \lambda_k \notin 2i\pi\mathbb{Z}^*, \quad k, s = 1, \dots, m. \quad (2.86)$$

Nous pouvons donc affirmer que les polynômes β_p^k , qui interviennent dans le corollaire 2.20, sont de degré exact égal à p si et seulement si la condition (2.86) est satisfaite. Cette condition de degré exact égal à p est essentielle dans la preuve des résultats énoncés dans les chapitres qui suivent.

Supposons que la condition (2.86) ne soit pas satisfaite. Il existe alors un entier $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\widehat{N_\lambda^m}(-i\lambda_k) = 0$. L'égalité (2.54) donne alors :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{\lambda_k j} N_\lambda^m(x - j) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nous avons donc exhibé une suite $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, à savoir, $c_j = e^{\lambda_k j}$, qui est non nulle, et telle que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{\lambda_k j} N_\lambda^m(\cdot - j) = 0.$$

Il est important d'éviter ce genre d'"accident" lorsqu'on s'intéresse à l'approximation de fonctions par des éléments de $\mathcal{S}_\lambda^m$ comme nous le ferons au chapitre 5.

Pour terminer, nous devons donc nous assurer de la validité de la proposition 2.13 lorsque les λ_i sont éventuellement complexes. Il est nécessaire de modifier légèrement la preuve. Si nous reprenons les fonctions u_i définies en (2.3), on peut calculer leur Wronskien grâce à (2.4) :

$$W(u_1, \dots, u_m)(x) = e^{\lambda_1 x} \dots e^{\lambda_m x},$$

donc il ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, il en résulte facilement que la condition (2.38) est ici encore satisfaite quels que soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Comme précédemment, le résultat de la proposition 2.13 sera montré si et seulement si nous pouvons prouver que les fonctions $u_m, u_m(\cdot + 1), u_m(\cdot + m - 1)$ sont linéairement indépendantes sur $[0, 1]$.

Reprenons pour cela l'opérateur Λ défini par :

$$\Lambda u = a_0 u + a_1 u(\cdot + 1) + \dots + u(\cdot + m - 1),$$

introduit en (2.7) et supposons que

$$\Lambda u_m(x) = 0, \quad x \in [0, 1]. \quad (2.87)$$

Comme précédemment, on déduira de (2.87) que $\Lambda u_i(x) = 0$ pour tout $i \leq m$ et tout $x \in [0, 1]$, et, en conséquence, que $\Lambda u(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et tout fonction complexe u solution de $L_\lambda^m u = 0$. Supposant que $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (\ell_1^{\mu_1}, \dots, \ell_r^{\mu_r})$ où les ℓ_j sont deux à deux distincts, écrivons cette propriété pour $u(x) = x^k e^{\ell_j x}$, pour un entier j donné, $1 \leq j \leq r$, et pour $0 \leq k \leq \mu_j - 1$. Après des combinaisons simples de ces μ_j égalités et simplification par $e^{\ell_j x}$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 e^{\ell_j} + a_2 e^{2\ell_j} + \dots + a_{m-1} e^{(m-1)\ell_j} = 0, \\ a_1 e^{\ell_j} + 2a_2 e^{2\ell_j} + \dots + (m-1) e^{(m-1)\ell_j} = 0, \\ \vdots \\ a_1 e^{\ell_j} + 2^{\mu_j-1} a_2 e^{2\ell_j} + \dots + (m-1)^{\mu_j-1} e^{(\mu_j-1)\ell_j} = 0. \end{array} \right.$$

Nous avons donc en fait montré que la condition (2.87) est satisfaite si et seulement si la fonction $f(x) = a_0 + a_1 e^x + \dots + a_{m-1} e^{(m-1)x}$ satisfait :

$$f^{(k)}(\ell_j) = 0, \quad k = 0, \dots, \mu_j - 1, \quad j = 1, \dots, r,$$

ou encore si et seulement si le polynôme $a_0 + a_1 x + \dots + a_{m-1} x^{m-1}$ admet chaque e^{ℓ_j} pour racine d'ordre μ_j . Si $e^{\ell_1}, \dots, e^{\ell_r}$ sont deux à deux distincts, c'est-à-dire si

$$\ell_k - \ell_s \notin 2i\pi\mathbb{Z}^*, \quad k, s = 1, \dots, r, \quad (2.88)$$

ceci n'est possible que si $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$. Mais ceci n'est plus vrai lorsque la condition (2.88) n'est pas satisfaite. Ainsi, la proposition 2.13 est finalement valide si et seulement si les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ satisfont (2.86).

Citons le résultat suivant, dû à Amos Ron [29] :

Étant donné une fonction continue ψ définie sur $\mathbb{R}$, à support compact, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) la condition $\sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \psi(x - j) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ implique $c_j = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$,
- (ii) pour tout $w \in \mathbb{C}$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\widehat{\psi}(w + 2n\pi) \neq 0. \quad (2.89)$$

Appliqué à la fonction $\psi := N_\lambda^m$, $m \geq 2$, ce résultat fournit une alternative à la preuve des conditions de validité de la proposition 2.13. En effet, supposons que $\psi = N_\lambda^m$ satisfasse (ii). En particulier, si nous fixons un entier $r \in \{1, \dots, m\}$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\widehat{N_\lambda^m}(-i\lambda_r + 2n\pi) \neq 0$, c'est-à-dire, d'après (2.85), tel que :

$$\lambda_s - \lambda_r - 2ni\pi \notin \mathbb{Z}^*, \quad s = 1, \dots, m. \quad (2.90)$$

Le cas particulier $s = r$ s'écrit $-2in\pi \notin \mathbb{Z}^*$, ce qui prouve que $n = 0$. Par conséquent les conditions (2.90), vraies pour tout r , ne sont autres que la condition (2.86).

Réciproquement, supposons la condition (2.86) satisfaite et considérons un $w \in \mathbb{C}$ quelconque. Si, pour $s = 1, \dots, m$, nous avons $\lambda_s - iw \notin 2i\pi\mathbb{Z}^*$, d'après (2.85) la condition (2.89) est réalisée avec $n = 0$. Si, au contraire, il existe un entier $s_0 \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\lambda_{s_0} - iw \in 2i\pi\mathbb{Z}^*$, c'est-à-dire,

$$\lambda_{s_0} - iw = 2i\pi k_0, \quad k_0 \in \mathbb{Z}^*,$$

alors, pour $s = 1, \dots, m$,

$$\lambda_s - i(w + 2k_0\pi) = \lambda_s - \lambda_{s_0} \notin 2i\pi\mathbb{Z}^*.$$

Par conséquent d'après (2.85), $\widehat{N_\lambda^m}(w + 2k_0\pi) \neq 0$. Nous constatons donc bien que la fonction N_λ^m satisfait (i) si et seulement si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ vérifient (2.86).

Une façon simple d'assurer (2.86) est d'imposer que les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ satisfassent:

$$|\operatorname{Im}\lambda_k| < \pi, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.91)$$

Supposons maintenant que le m -uplet $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ soit tel que l'opérateur L_λ^m soit à coefficients réels. Observons tout d'abord que la condition (2.91) est aussi la condition suffisante énoncée dans la proposition 1.15 pour obtenir que l'espace $\mathcal{N}_\lambda^m$ soit un EC-espace sur chaque intervalle $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$. Nous savons aussi, par la proposition 2.24, que cette condition assure la positivité de la B-spline N_λ^m sur l'intérieur de son support. En conclusion, l'ensemble des résultats énoncés dans le cas réel est valide dès que la condition (2.91) est satisfaite, ce nous supposons désormais.

Chapitre 3

Orthonormalité des splines de Chebyshev (Première partie)

Dans ce chapitre, nous allons généraliser le résultat d'Ulrich Reif aux B-splines de Chebyshev. Partant d'un $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ fixé une fois pour toutes, nous nous intéressons à la B-spline N_λ^m correspondante, associée à l'opérateur différentiel

$$L_\lambda^m = \prod_{s=1}^m (D - \lambda_s I),$$

défini comme au chapitre précédent. Pour $i = 0, \dots, m$, nous noterons pour simplifier L_i l'opérateur différentiel $L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i$, soit :

$$L_0 := I, \quad L_i := \prod_{s=1}^i (D - \lambda_s I), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.1)$$

Étant donné une suite $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{m-1})$ de nombres réels, nous pouvons alors définir, pour deux fonctions f, g quelconques de l'espace de Sobolev $H^{m-1}(\mathbb{R})$, la quantité

$$(f, g)_\omega := \sum_{i=0}^{m-1} \omega_i \int_{-\infty}^{+\infty} L_i f(x) L_i g(x) dx. \quad (3.2)$$

Nous obtenons ainsi une forme bilinéaire sur $H^{m-1}(\mathbb{R}) \times H^{m-1}(\mathbb{R})$. Dans le cas particulier où $\omega_0, \dots, \omega_{m-1}$ sont strictement positifs, cette forme bilinéaire est un produit scalaire sur $H^{m-1}(\mathbb{R})$. Dans un premier temps, c'est par rapport à un tel produit scalaire pondéré que nous considérerons notre problème d'orthogonalité des translatées entières de la B-spline N_λ^m . Ceci nous permettra dans un deuxième temps de résoudre le problème d'orthogonalité par rapport au produit scalaire pondéré utilisant les dérivées ordinaires et non les opérateurs L_i , c'est-à-dire, comme dans le cas polynomial considéré par Ulrich Reif.

3.1 Un résultat fondamental

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Supposons que les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ soient tels que les carrés $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_m^2$ soient deux à deux distincts. Alors, il existe une unique suite $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{m-1})$ de nombres réels strictement positifs telle que les translatées entières de la B-spline N_λ^m soient orthonormales par rapport au produit scalaire pondéré $(\cdot, \cdot)_\omega$ correspondant défini sur $H^{m-1}(\mathbb{R})$ par (3.2), c'est-à-dire, une suite unique $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{m-1})$ de réels strictement positifs telle que*

$$(N_\lambda^m(\cdot - j), N_\lambda^m(\cdot - n))_\omega = \delta_{j,n}, \quad j, n \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Nous aurons besoin du résultat suivant

Lemme 3.2. *Pour tout entier $i = 0, \dots, m-1$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_i N_\lambda^m(x) L_i N_\lambda^m(x - n) dx = e^{\sum_{s=1}^m \lambda_s} L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m + n). \quad (3.4)$$

Preuve.

D'après la proposition 2.15, la B-spline N_λ^m est liée à son adjointe par la relation :

$$N_\lambda^m(x - n) = e^{\sum_{s=1}^m \lambda_s} N_\lambda^{m*}(m + n - x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

cette égalité ayant lieu seulement sur $\mathbb{R} \setminus \{n, n+1\}$ dans le cas particulier $m = 1$. Par ailleurs la B-spline N_λ^m et son adjointe N_λ^{m*} sont C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et C^{m-2} sur $\mathbb{R}$, tandis que les opérateurs différentiels L_i et L_i^* sont d'ordre i , c'est-à-dire, d'ordre au plus égal à $m-1$. Par conséquent, l'égalité (3.5) conduit dans tous les cas à :

$$L_i N_\lambda^m(x - n) \stackrel{\text{pp}}{=} e^{\sum_{s=1}^m \lambda_s} L_i^* N_\lambda^{m*}(m + n - x). \quad (3.6)$$

La relation (3.6) implique :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_i N_\lambda^m(x) L_i N_\lambda^m(x - n) dx = e^{\sum_{s=1}^m \lambda_s} (L_i N_\lambda^m) * (L_i^* N_\lambda^{m*})(m + n). \quad (3.7)$$

Par comparaison des seconds membres de (3.7) et (3.4), on constate que, pour obtenir (3.4), il suffit de prouver l'égalité

$$(L_i N_\lambda^m) * (L_i^* N_\lambda^{m*})(x) = L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Les deux B-splines N_λ^m et N_λ^{m*} étant éléments de $H^{m-1}(\mathbb{R})$, le produit de convolution $(L_i N_\lambda^m) * (L_i^* N_\lambda^{m*})$ est non seulement bien défini mais aussi continu sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, la B-spline d'ordre $2m$, $N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}$ étant C^{2m-2} sur $\mathbb{R}$, la fonction $L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}$ est elle aussi

continue sur $\mathbb{R}$. C'est pourquoi, pour montrer l'égalité (3.8), il suffit de montrer que les deux fonctions $(L_i N_\lambda^m) * (L_i^* N_\lambda^{m*})$ et $L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}$ sont égales presque partout, ou encore, de prouver l'égalité (3.8) au sens des distributions. Ceci s'obtient comme conséquence de l'égalité :

$$N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m} = N_\lambda^m * N_{-\lambda}^m = N_\lambda^m * N_\lambda^{m*},$$

qui résulte facilement de la proposition 2.10. ■

Preuve du Théorème 3.1.

Nous procéderons en deux étapes. Tout d'abord nous montrerons l'existence et l'unicité d'une unique suite $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{m-1})$ de réels satisfaisant (3.3). Dans un deuxième temps, nous prouverons que les réels $\omega_0, \dots, \omega_{m-1}$ sont strictement positifs. Pour l'instant, nous ne faisons aucune hypothèse sur les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Nous en introduirons quand cela sera nécessaire.

1. Existence et unicité de $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{m-1})$.

Pour tout $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$, et tous entiers $j, n \in \mathbb{Z}$, il est clair que

$$(N_\lambda^m(\cdot - j), N_\lambda^m(\cdot - n))_\omega = (N_\lambda^m, N_\lambda^m(\cdot - (j - n)))_\omega.$$

Par ailleurs, le support de la B-spline, N_λ^m est égal à $[0, m]$. Il résulte de ces deux remarques que ω satisfera (3.3) si et seulement si

$$(N_\lambda^m, N_\lambda^m(\cdot - n))_\omega = \delta_{0,n}, \quad n = 0, \dots, m-1. \quad (3.9)$$

D'après la définition (3.2) de la forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_\omega$, en utilisant l'égalité (3.4) nous pouvons remplacer (3.9) par :

$$\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(n + m) = e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s} \delta_{0,n}, \quad n = 0, \dots, m-1. \quad (3.10)$$

En notant A la matrice carrée d'ordre m définie par $A = (A_{n,i})_{0 \leq i, n \leq m-1}$, où :

$$A_{n,i} := L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(n + m), \quad n, i = 0, \dots, m-1, \quad (3.11)$$

le système (3.10) s'écrit :

$$A \cdot \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \vdots \\ \omega_{m-1} \end{pmatrix} = e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Si l'on applique la relation (2.54) à la B-spline $N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}$ d'ordre $2m$, on obtient, pour un entier k fixé, $k = 1, \dots, m$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\lambda_k n} N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(x - n) = M_k e_k(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.13)$$

où la fonction e_k est définie sur $\mathbb{R}$ par $e_k(x) = e^{\lambda_k x}$, et M_k est le nombre réel non nul :

$$M_k := \widehat{N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}}(-i\lambda_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_k t} N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(t) dt. \quad (3.14)$$

L'opérateur différentiel $L_i L_i^*$ est d'ordre $2i$, c'est-à-dire, d'ordre au plus égal à $2m - 2$, et la B-spline $N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}$ est C^{2m-2} sur $\mathbb{R}$. Par suite, en appliquant $L_i L_i^*$ aux deux membres de (3.13), on obtient :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\lambda_k n} L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(x - n) = M_k L_i L_i^*(e_k)(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Écrivons l'égalité (3.15) pour $x = m$. Puisque $N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}$ est nulle en dehors de $]0, 2m[$, on obtient :

$$\sum_{n=-m+1}^{m-1} e^{\lambda_k n} L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m - n) = M_k L_i L_i^*(e_k)(m). \quad (3.16)$$

Selon le corollaire 2.16, la B-spline $N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}$ présente une symétrie par rapport au centre de son support, c'est-à-dire, par rapport à l'axe $x = m$. En d'autres termes :

$$N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m + x) = N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m - x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.17)$$

En appliquant successivement les opérateurs L_i et L_i^* aux deux membres de (3.17), nous obtenons :

$$L_i^* L_i N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m + x) = L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m - x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Les opérateurs L_i et L_i^* commutant, on peut écrire aussi bien :

$$L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m + x) = L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m - x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.18)$$

En utilisant la relation (3.18) pour $x = n$, $n = 1, \dots, m - 1$, l'égalité (3.16) devient :

$$L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m) + \sum_{n=1}^{m-1} (e^{\lambda_k n} + e^{-\lambda_k n}) L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m + n) = M_k L_i L_i^* e_k(m). \quad (3.19)$$

Définissons maintenant la matrice $B = (B_{kn})_{0 \leq k, n \leq m-1}$ par :

$$B_{kn} := e^{\lambda_{k+1} n} + e^{-\lambda_{k+1} n} - \delta_{0n}, \quad n, k = 0, \dots, m - 1, \quad (3.20)$$

et posons $C = (C_{k,i})_{0 \leq k, i \leq m-1} := BA$. Pour tous entiers $k, i = 0, \dots, m-1$, on a :

$$\begin{aligned} C_{ki} &= \sum_{n=0}^{m-1} B_{kn} A_{ni} \\ &= A_{0,i} + \sum_{n=1}^{m-1} (e^{\lambda_{k+1}n} + e^{-\lambda_{k+1}n}) A_{ni}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après (3.11) :

$$C_{ki} = L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m) + \sum_{n=1}^{m-1} (e^{\lambda_{k+1}n} + e^{-\lambda_{k+1}n}) L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m+n).$$

L'égalité (3.19) prouve donc que :

$$C_{ki} = M_{k+1} L_i L_i^* e_{k+1}(m), \quad k, i = 0, \dots, m-1. \quad (3.21)$$

Puisque

$$L_i L_i^* = (-1)^i \prod_{s=1}^i (D - \lambda_s I)(D + \lambda_s I) = (-1)^i \prod_{s=1}^i (D^2 - \lambda_s^2 I),$$

nous avons notamment :

$$L_i L_i^* e_{k+1}(x) = (-1)^i \prod_{s=1}^i (\lambda_{k+1}^2 - \lambda_s^2) e^{\lambda_{k+1}x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

d'où l'on déduit, d'après (3.21) :

$$C_{ki} = (-1)^i M_{k+1} e^{\lambda_{k+1}m} \prod_{s=1}^i (\lambda_{k+1}^2 - \lambda_s^2), \quad k, i = 0, \dots, m-1. \quad (3.22)$$

Supposons désormais que $\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2$ sont deux à deux distincts.

Puisque les réels $M_1, \dots, M_m$ sont non nuls, les relations (3.22) montrent en particulier que :

$$C_{ki} = 0, \quad i > k, \quad C_{ii} \neq 0.$$

Par conséquent la matrice C est triangulaire inférieure à éléments diagonaux non nuls.

Revenons à la détermination de $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{m-1})$, autrement dit à la résolution du système (3.12). Par multiplication à gauche de ses deux membres par la matrice B , le système (3.12) est transformé en :

$$C \cdot \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \vdots \\ \omega_{m-1} \end{pmatrix} = e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Compte tenu de la nature de la matrice C , ce nouveau système admet une solution unique $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{m-1})$ et est donc équivalent à (3.12). Nous avons ainsi montré l'existence et l'unicité des coefficients $\omega_0, \dots, \omega_{m-1}$.

2. Stricte positivité de $\omega_0, \dots, \omega_{m-1}$.

D'après (3.21), le nouveau système (3.23) que nous avons désormais à résoudre se présente sous la forme explicite suivante :

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \omega_i M_{k+1} e^{\lambda_{k+1} m} \prod_{s=1}^i (\lambda_{k+1}^2 - \lambda_s^2) = e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s}, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

c'est-à-dire en fait :

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \omega_i \prod_{s=1}^i (\lambda_k^2 - \lambda_s^2) = \frac{e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s}}{M_k e^{\lambda_k m}}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.24)$$

Introduisons le polynôme P défini par :

$$P(x) := \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \omega_i \prod_{s=1}^i (x - \lambda_s^2). \quad (3.25)$$

Nous pouvons alors remplacer le système (3.24) par les relations :

$$P(\lambda_k^2) = \frac{e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s}}{M_k e^{\lambda_k m}}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.26)$$

Calculons les quantités apparaissant au second membre de (3.26). D'après (3.14), le calcul de M_k fait intervenir la transformée de Fourier de la B-spline $N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}$. Or, la proposition 2.17 nous dit que :

$$\widehat{N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}}(w) = \prod_{s=1}^m g(\lambda_s - iw) g(-\lambda_s - iw),$$

où $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ si $x \neq 0$, et $g(0) = 1$. Donc, pour $k = 1, \dots, m$:

$$M_k = \widehat{N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}}(-i\lambda_k) = \prod_{s=1}^m g(\lambda_s - \lambda_k) g(-\lambda_s - \lambda_k). \quad (3.27)$$

Pour $s \neq k$, l'hypothèse faite sur les λ_i^2 implique $\lambda_s \pm \lambda_k \neq 0$. Donc

$$\begin{aligned} g(\lambda_s - \lambda_k) g(-\lambda_s - \lambda_k) &= \frac{(e^{\lambda_s - \lambda_k} - 1)(e^{-\lambda_s - \lambda_k} - 1)}{\lambda_k^2 - \lambda_s^2} \\ &= \frac{e^{2\lambda_k} - e^{\lambda_s - \lambda_k} - e^{-\lambda_s - \lambda_k} + 1}{\lambda_k^2 - \lambda_s^2} \\ &= 2e^{-\lambda_k} \frac{\operatorname{ch} \lambda_k - \operatorname{ch} \lambda_s}{\lambda_k^2 - \lambda_s^2}. \end{aligned}$$

Pour $s = k$, nous obtenons $g(0)g(-2\lambda_k)$, c'est-à-dire, si $\lambda_k \neq 0$

$$\frac{e^{-2\lambda_k} - 1}{-2\lambda_k} = e^{-\lambda_k} \frac{\text{sh}\lambda_k}{\lambda_k},$$

et dans le cas où $\lambda_k = 0$, $g(0)^2 = 1$, qui est la limite de la quantité précédente lorsque $\lambda_k \rightarrow 0$.

Considérons les fonctions φ_a définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\varphi_a(x^2) = \begin{cases} \frac{\text{ch}x - \text{cha}}{x^2 - a^2} & \text{si } x^2 \neq a^2, \\ \frac{\text{sha}}{2a} & \text{si } x^2 = a^2. \end{cases} \quad (3.28)$$

avec, une fois pour toute, la convention $\frac{\text{sh}x}{x} = 1$ si $x = 0$. Les calculs précédents et la formule (3.27) montrent que :

$$M_k = 2^m e^{-\lambda_k m} \prod_{s=1}^m \varphi_{\lambda_s}(\lambda_k^2), \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.29)$$

Les relations (3.26) deviennent donc :

$$P(\lambda_k^2) = f_\lambda(\lambda_k^2), \quad k = 1, \dots, m, \quad (3.30)$$

où la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_\lambda := \frac{e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s}}{2^m} \prod_{s=1}^m \frac{1}{\varphi_{\lambda_s}}. \quad (3.31)$$

De (3.30), on peut conclure que P est le polynôme de degré inférieur ou égal à $m - 1$ qui interpole la fonction f_λ aux m points distincts $\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2$. Par ailleurs ce polynôme P est donné en (3.25) par son expression dans la base de Newton

$$1, x - \lambda_1^2, (x - \lambda_1^2)(x - \lambda_2^2), \dots, (x - \lambda_1^2) \dots (x - \lambda_{m-1}^2).$$

On sait que les coefficients d'un polynôme d'interpolation dans une base de Newton s'expriment comme différences divisées de la fonction à interpoler. Plus précisément, on peut déduire de (3.25) et (3.30) que :

$$(-1)^i \omega_i = \delta_{\lambda_1^2, \dots, \lambda_{i+1}^2} f_\lambda, \quad i = 0, \dots, m - 1. \quad (3.32)$$

a. Stricte positivité de ω_0 .

D'après (3.32) et (3.31), nous savons que :

$$\omega_0 = \delta_{\lambda_1^2}^0 f_\lambda = f_\lambda(\lambda_1^2) = \frac{e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s}}{2^m} \prod_{s=1}^m \frac{1}{\varphi_{\lambda_s}(\lambda_1^2)}.$$

Chaque fonction φ_{λ_s} définie en (3.28) est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. Donc $\omega_0 > 0$.

b. Stricte positivité de ω_{m-1} .

Compte tenu de (3.32), il existe un point $\xi \geq 0$ tel que

$$\omega_{m-1} = (-1)^{m-1} \frac{f^{(m-1)}(\xi)}{(m-1)!}.$$

La première idée qui vient à l'esprit pour montrer la positivité de ω_{m-1} consiste donc à prouver que la dérivée $(m-1)$ ème de f_λ a pour signe $(-1)^{m-1}$. Cependant ce résultat semble impossible à atteindre. Nous allons donc écrire ω_{m-1} comme une différence divisée d'ordre $m-1$ d'une autre fonction pour laquelle nous serons en mesure d'affirmer que sa dérivée $(m-1)$ ème a le signe approprié pour nous permettre de conclure.

Puisque les points $\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2$ sont distincts, d'après l'égalité (2.64),

$$\delta_{\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2}^{m-1} f_\lambda = \sum_{p=1}^m \frac{f_\lambda(\lambda_p^2)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^m (\lambda_p^2 - \lambda_j^2)},$$

ce qui, grâce à (3.31) et (3.28), conduit à :

$$\delta_{\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2}^{m-1} f_\lambda = \frac{e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s}}{2^{m-1}} \sum_{p=1}^m \frac{\frac{\lambda_p}{\operatorname{sh} \lambda_p}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^m (\operatorname{ch} \lambda_p - \operatorname{ch} \lambda_j)}.$$

Autrement dit, toujours en utilisant (2.64) :

$$\delta_{\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2}^{m-1} f_\lambda = \frac{e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s}}{2^{m-1}} \delta_{\operatorname{ch} \lambda_1, \dots, \operatorname{ch} \lambda_m}^{m-1} h, \quad (3.33)$$

où la fonction h satisfait $h(\operatorname{ch} x) = \frac{x}{\operatorname{sh} x}$, i. e. :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Argcht}}{\sqrt{t^2 - 1}} & \text{si } t > 1, \\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases} \quad (3.34)$$

Des égalités (3.33) et (3.32) on déduit donc l'existence d'un réel $\xi \in]1, +\infty[$ tel que :

$$\omega_{m-1} = (-1)^{m-1} \frac{e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s}}{2^{m-1}} h^{(m-1)}(\xi).$$

Le lemme 3.3 ci-après nous permet d'affirmer que $(-1)^{m-1} h^{(m-1)}(\xi) > 0$. Par suite $\omega_{m-1} > 0$.

c. Stricte positivité de ω_i , $0 < i < m-1$.

Fixons un entier i , $0 < i < m-1$. La relation (2.64) et la définition (3.31) de la fonction f_λ permettent d'écrire

$$\delta_{\lambda_1^2, \dots, \lambda_{i+1}^2}^i f_\lambda = \frac{e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s}}{2^{m-1}} \sum_{p=1}^{i+1} \frac{\frac{\lambda_p}{\operatorname{sh} \lambda_p} \prod_{s=i+2}^m \frac{\lambda_p^2 - \lambda_s^2}{\operatorname{ch} \lambda_p - \operatorname{ch} \lambda_s}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{i+1} (\operatorname{ch} \lambda_p - \operatorname{ch} \lambda_j)},$$

c'est-à-dire,

$$\delta_{\lambda_1^2, \dots, \lambda_{i+1}^2}^i f_\lambda = \frac{e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s}}{2^{m-1}} \delta_{\operatorname{ch} \lambda_1, \dots, \operatorname{ch} \lambda_{i+1}}^i \tilde{h}, \quad (3.35)$$

où $\tilde{h}$ est la fonction définie par :

$$\tilde{h}(\operatorname{ch} x) = \frac{x}{\operatorname{sh} x} \prod_{s=i+2}^m \frac{x^2 - \lambda_s^2}{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} \lambda_s},$$

soit,

$$\tilde{h}(x) = h(x) \prod_{s=i+2}^m \frac{(\operatorname{Argch} x)^2 - \lambda_s^2}{x - \operatorname{ch} \lambda_s}, \quad x \in [1, +\infty[. \quad (3.36)$$

La fonction $\tilde{h}$ introduite en (3.36) est alors bien définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et les points $\operatorname{ch} \lambda_1, \dots, \operatorname{ch} \lambda_{i+1}$ sont des points distincts de cet intervalle. Par ailleurs, en utilisant les lemmes 3.3 et 3.4 ci-après, $\tilde{h}$ est C^∞ sur $[1, +\infty[$. Par conséquent, les relations (3.32) et (3.35) impliquent l'existence d'un réel $\xi \in [1, +\infty[$ tel que

$$\omega_i = \frac{e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s}}{2^{m-1}} (-1)^i \tilde{h}^{(i)}(\xi).$$

La stricte positivité de ω_i résultera du fait que $(-1)^i \tilde{h}^{(i)}(x) > 0$ pour $x \in [1, +\infty[$. La fonction $\tilde{h}$ se présentant comme un produit de fonctions définies sur $[1, \operatorname{ch} \lambda_{i+2}[$ et C^∞ sur $[1, +\infty[$, cette propriété sera une conséquence immédiate des Lemmes 3.3, 3.4 et 3.5 ci-dessous. ■

Dans tout la suite, nous ferons de façon répétée appel au résultat classique suivant : si une fonction f est continue sur $]a, b]$ (avec $a < b$) et si $f'(x)$ tend vers une limite ℓ quand x tend vers a^+ , la fonction f est dérivable (à droite) au point a et $f'(a) = \ell$.

Lemme 3.3. *La fonction h définie en (3.34) est C^∞ sur $[1, +\infty[$ et satisfait, pour tout $i \in \mathbb{N}$:*

$$(-1)^i h^{(i)}(x) > 0, \quad x \geq 1. \quad (3.37)$$

Preuve.

La fonction h est continue sur $[1, +\infty[$ et est évidemment C^∞ sur $]1, +\infty[$. Écrivons $h(x)$ sous la forme :

$$h(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} h_0(x), \quad h_0(x) := \text{Argch} x, \quad x > 1. \quad (3.38)$$

La fonction h_0 est donc définie sur $[1, +\infty[$. Par dérivation de (3.38) on obtient, pour $x > 1$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} h_0'(x) - x(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} h_0(x) \\ &= (x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} h_1(x), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} h_1(x) &= (x^2 - 1) h_0'(x) - x h_0(x) \\ &= (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} - x \text{Argch} x. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Donc la fonction h_1 est définie sur $[1, +\infty[$. On pourra écrire de même :

$$h''(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{5}{2}} h_2(x), \quad x > 1,$$

où

$$\begin{aligned} h_2(x) &:= (x^2 - 1) h_1'(x) - 3x h_1(x) \\ &:= (2x^2 + 1) \text{Argch} x - 3x \sqrt{x^2 - 1}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Plus généralement, une simple vérification prouve que, pour tout $i \geq 0$,

$$h^{(i)}(x) = (x^2 - 1)^{-i-\frac{1}{2}} h_i(x), \quad x \in]1, +\infty[, \quad (3.41)$$

où le passage de h_i à h_{i+1} se fait de la façon suivante :

$$h_{i+1}(x) := (x^2 - 1) h_i'(x) - (2i + 1) x h_i(x). \quad (3.42)$$

Les fonctions h_i sont définies sur $[1, +\infty[$ et sont C^∞ sur $]1, +\infty[$. Les premières étapes, à savoir les égalités (3.38), (3.39) et (3.40), ainsi que les suivantes :

$$h_1'(x) = \text{Argch} x, \quad h_2'(x) = -4x \text{Argch} x - 4\sqrt{x^2 - 1}, \quad h_2''(x) = 4 \text{Argch} x,$$

suggèrent que les fonctions h_i satisfont les propriétés ci-dessous :

(i) h_i est C^i sur $[1, +\infty[$,

- (ii) il existe un réel $A_i > 0$ tel que $(-1)^i h_i^{(i)}(x) = A_i \operatorname{Argch} x$ pour $x \geq 1$,
 (iii) $h_i^{(j)}(1) = 0$, pour tout $j = 0, \dots, i$.

Supposons ces trois propriétés satisfaites par h_i . La relation de récurrence (3.42) permet de calculer les dérivées de h_{i+1} . Pour $k \geq 2$ nous avons :

$$\begin{aligned} h_{i+1}^{(k)}(x) &= (x^2 - 1)h_i^{(k+1)}(x) + 2kxh_i^{(k)}(x) + k(k-1)h_i^{(k-1)}(x) \\ &\quad - (1+2i) \left[xh_i^{(k)}(x) + kh_i^{(k-1)}(x) \right] \\ &= (x^2 - 1)h_i^{(k+1)}(x) + (2k-1-2i)xh_i^{(k)}(x) + kh_i^{(k-1)}(x), \end{aligned} \quad (3.43)$$

ces égalités étant valides sur $[1, +\infty[$ lorsque $k \leq i-1$, et, a priori, seulement sur $]1, +\infty[$ pour $k = i, i+1$. Par ailleurs, l'hypothèse (ii) implique que, pour $x > 1$:

$$h_i^{(i+1)}(x) = (-1)^i A_i (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}, \quad h_i^{(i+2)}(x) = (-1)^{(i+1)} A_i x (x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}.$$

Par conséquent, la formule (3.43) donne, pour $x > 1$:

$$\begin{aligned} h_{i+1}^{(i)}(x) &= (-1)^i A_i \sqrt{x^2 - 1} + (-1)^{i+1} A_i x \operatorname{Argch} x - i(i+2)h_i^{(i-1)}(x) \\ h_{i+1}^{(i+1)}(x) &= -(i+1)^2 h_i^{(i)}(x), \end{aligned}$$

c'est-à-dire $(-1)^{i+1} h_{i+1}^{(i+1)}(x) = A_{i+1} \operatorname{Argch} x$, où $A_{i+1} = A_i(i+1)^2$. Il est alors facile de conclure que h_{i+1} vérifie (i), (ii), (iii).

Enfin, de la propriété (ii), nous déduisons que $(-1)^i h_i^{(i)}(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$, ce qui implique que la fonction $(-1)^i h_i^{(i-1)}$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Puisque, d'après (iii), $h_i^{(i-1)}(1) = 0$, nous pouvons en déduire que $(-1)^i h_i^{(i-1)}(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$. De proche en proche, nous arriverons ainsi à :

$$(-1)^i h_i(x) > 0 \quad \text{pour } x \in]1, +\infty[,$$

ce qui permet, grâce à (3.41), de conclure que

$$(-1)^i h^{(i)}(x) > 0, \quad x \in [1, +\infty[.$$

Il nous reste de montrer, de proche en proche, que h est i fois dérivable en 1 et que $(-1)^i h^{(i)}(1) > 0$. Pour cela, il suffit en fait de vérifier que, pour tout $i \geq 0$, $(-1)^i h^{(i)}(x)$ tend vers une limite strictement positive quand x tend vers 1^+ . Nous savons déjà que h est continue en 1^+ et que $h(1) = 1 > 0$.

Nous ferons pour cela appel à un résultat connu sur la fonction $g(x) = \frac{x}{\operatorname{sh} x}$. cette fonction se développe en série entière sous la forme [1] :

$$g(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k x^{2k}, \quad |x| < \pi, \quad (3.44)$$

où les coefficients A_k satisfont $(-1)^k A_k > 0$. Ces coefficients font intervenir les nombres de Bernoulli B_n , $n \geq 0$. Plus précisément

$$A_k = (-1)^k \frac{2(2^{2k-1} - 1)B_{2k}}{(2k)!}, \quad k \geq 1. \quad (3.45)$$

Rappelons que les nombres de Bernoulli sont définis à l'aide du développement en série entière de la fonction ϕ définie par :

$$\phi(x) = \frac{x}{e^x - 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(avec comme toujours la convention que $\phi(0) = 1$), appelée fonction génératrice des nombres de Bernoulli [5] :

$$\phi(x) = 1 - \frac{x}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Puisque $h(\operatorname{ch} x) = g(x)$, l'égalité (3.44) nous permet donc d'écrire la fonction h sous la forme :

$$h(\operatorname{ch} x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k x^{2k}, \quad |x| < \pi. \quad (3.46)$$

La fonction h étant indéfiniment dérivable sur $]1, +\infty[$, nous pouvons, pour $x \in]0, \pi[$, dériver les deux membres de (3.46), ce qui donne :

$$h'(\operatorname{ch} x) \operatorname{sh} x = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} k A_k x^{2k-1}, \quad x \in]0, \pi[.$$

Divisant les deux membres de cette égalité par $\operatorname{sh} x \neq 0$, nous aboutissons à :

$$h'(\operatorname{ch} x) = h(\operatorname{ch} x) g_1(x), \quad x \in]0, \pi[, \quad (3.47)$$

où la fonction g_1 est définie par :

$$g_1(x) := 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) A_{k+1} x^{2k}, \quad |x| < \pi.$$

Sachant que h est continue sur $[1, +\infty[$, en faisant tendre x vers 0 dans les deux membres de (3.47) on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = h(1) g_1(0),$$

soit :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h'(x) = g_1(0) = 2A_1.$$

Nous avons donc prouvé que h est dérivable en 1 et que $(-1)^1 h'(1) = -2A_1 > 0$. Par ailleurs, l'égalité (3.47) est désormais vraie sur $[0, \pi[$ tout entier.

Par dérivation de l'égalité (3.47) sur $]0, \pi[$, puis division par $\operatorname{sh} x$, nous aboutirons de même à :

$$h''(\operatorname{ch} x) = h'(\operatorname{ch} x)g_1(x) + [h(\operatorname{ch} x)]^2 g_2(x), \quad x \in]0, \pi[, \quad (3.48)$$

La fonction g_2 étant définie par :

$$g_2(x) = 2^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(k+2)A_{k+2}x^{2k}, \quad |x| < \pi.$$

Par passage à la limite en 0, la relation (3.48) conduit à :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} h'' &= h'(1)g_1(0) + [h(1)]^2 g_2(0), \\ &= g_1(0)^2 + g_2(0). \end{aligned}$$

Or, $g_2(0) = 2^2 A_2 > 0$, ce qui nous permet de conclure que h est deux fois dérivable en 1 et que $h''(1) > 0$. De plus l'égalité (3.48) est vraie sur $[0, \pi[$.

Définissons plus généralement, les fonctions g_i , $i \geq 1$, par :

$$g_i(x) := 2^i \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(k+2) \dots (k+i)A_{k+i}x^{2k}, \quad |x| < \pi,$$

si bien que, d'une part :

$$(-1)^i g_i(0) = 2^i i! (-1)^i A_i > 0, \quad i \geq 1, \quad (3.49)$$

et d'autre part

$$\frac{1}{\operatorname{sh} x} g'_i(x) = h(\operatorname{ch} x) g_{i+1}(x), \quad x \in]0, \pi[. \quad (3.50)$$

Supposons que, pour un entier $N \geq 1$ donné, nous ayons montré les trois propriétés ci-dessous :

- (1) h est N fois dérivable sur $[1, +\infty[$,
- (2) $(-1)^i h^{(i)}(1) > 0$ pour tout $i \leq N$,
- (3) pour tout $x \in [0, \pi[$ la quantité $h^{(N)}(\operatorname{ch} x)$ s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients strictement positifs d'un certain nombre (≥ 1) de termes de la forme :

$$h^{(i_1)}(\operatorname{ch} x) \dots h^{(i_k)}(\operatorname{ch} x) g_r(x), \quad (3.51)$$

avec $1 \leq r \leq N$ et $i_1 + \dots + i_k + r = N$.

Procédant comme précédemment, nous dériverons $h^{(N)}(\text{ch}x)$ sur $]0, \pi[$, puis diviserons par $\text{sh}x$ les deux membres de l'égalité obtenue, pour $x \in]0, \pi[$. A la suite de ces deux opérations, en tenant compte de l'égalité (3.50), la quantité (3.51) aura donné naissance aux termes suivants :

$$g_r(x) \sum_{s=1}^k h^{(i_s+1)}(\text{ch}x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^k h^{(i_j)} h(\text{ch}x) + h(\text{ch}x) g_{r+1}(x) \prod_{j=1}^k h^{(i_j)}(\text{ch}x), \quad x \in]0, \pi[.$$

Dans chaque terme ci-dessus, la somme des ordres de dérivation est égale à $i_1 + \dots + i_k + r + 1 = N + 1$. Par conséquent, la propriété (3) est vraie au rang $N + 1$. De plus, en faisant tendre x vers 0, nous obtiendrons $\lim_{x \rightarrow 0} (-1)^{N+1} h^{(N+1)}(\text{ch}x)$ comme combinaison linéaire à coefficients strictement positifs des quantités :

$$\begin{aligned} & (-1)^r g_r(0) \sum_{s=1}^k (-1)^{i_s+1} h^{(i_s+1)}(1) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^k (-1)^{i_j} h^{(i_j)}(1) \\ & + h(1) (-1)^{r+1} g_{r+1} g_{r+1}(0) \prod_{j=1}^k (-1)^{i_j} h^{(i_j)}(1), \end{aligned}$$

qui, d'après (3.49) et l'hypothèse de récurrence (2), sont toutes strictement positives. Nous avons ainsi montré que les trois propriétés (1), (2) et (3) sont vraies au rang $N + 1$. Donc elles sont vraies pour tout $N \in \mathbb{N}$. En particulier $(-1)^i h^{(i)}(1) > 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. ■

Lemme 3.4. Soit $a \geq 0$ et θ est la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$\theta(x) := \begin{cases} \frac{(\text{Argch}x)^2 - a^2}{x - \text{cha}} & \text{pour } x \neq \text{cha}, \\ \frac{2a}{\text{sha}} & \text{pour } x = \text{cha}. \end{cases}$$

Cette fonction est C^∞ sur $[1, +\infty[$ et satisfait pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$(-1)^i \theta^{(i)}(x) > 0, \quad x \in [1, +\infty[.$$

Preuve.

Écrivons $\theta(x)$, pour $x \neq \text{cha}$, sous la forme :

$$\theta(x) = (x - \text{cha})^{-1} \theta_0(x), \quad \theta_0(x) := (\text{Argch}x)^2 - a^2.$$

La fonction θ_0 est définie sur $[1, +\infty[$ et, a priori, indéfiniment dérivable sur $]1, +\infty[$. Elle satisfait

$$\theta'_0(x) = 2 \frac{\text{Argch}x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2h(x), \quad x \in]1, +\infty[, \quad (3.52)$$

donc de fait, grâce au lemme 3.3, nous pouvons affirmer que θ_0 est C^∞ sur $[1, +\infty[$. Plus généralement, supposant que la fonction θ soit i fois dérivable sur $[1, +\infty[\setminus\{\text{cha}\}$, avec :

$$\theta^{(i)}(x) = (x - \text{cha})^{-(i+1)}\theta_i(x), \quad x \in [1, +\infty[\setminus\{\text{cha}\}, \quad (3.53)$$

où θ_i est définie et C^∞ sur $[1, +\infty[$, nous en déduisons que θ est $(i+1)$ fois dérivable sur $[1, +\infty[\setminus\{\text{cha}\}$ et que :

$$\theta^{(i+1)}(x) = (x - \text{cha})^{-(i+2)}\theta_{i+1}(x), \quad x \in [1, +\infty[\setminus\{\text{cha}\},$$

avec

$$\theta_{i+1}(x) := (x - \text{cha})\theta_i'(x) - (i+1)\theta_i(x). \quad (3.54)$$

L'hypothèse sur θ_i fait que nous pouvons définir θ_{i+1} sur $[1, +\infty[$, et que θ_{i+1} est à son tour C^∞ sur $[1, +\infty[$. Par dérivation de (3.54) nous obtenons :

$$\theta_{i+1}'(x) = \theta_i''(x)(x - \text{cha}) - i\theta_i'(x), \quad x \in [1, +\infty[. \quad (3.55)$$

Supposant que :

$$\theta_i'(x) = 2(x - \text{cha})^i h^{(i)}(x), \quad x \in [1, +\infty[, \quad (3.56)$$

nous aurons :

$$\theta_i''(x) = 2i(x - \text{cha})^{i-1}h^{(i)}(x) + 2(x - \text{cha})^i h^{(i+1)}(x),$$

et l'égalité (3.55) donnera :

$$\theta_{i+1}'(x) = 2(x - \text{cha})^{i+1}h^{(i+1)}(x), \quad x \in [1, +\infty[$$

Par conséquent, l'égalité (3.56), vraie pour $i = 0$ d'après (3.52), est vraie pour tout $i \geq 0$. Du lemme 3.3 et de (3.56) il résulte que :

$$\begin{aligned} \theta_i'(x) &> 0, & \text{pour tout } x \in [1, \text{cha}[\\ (-1)^i \theta_i'(x) &> 0 & \text{pour tout } x \in]\text{cha}, +\infty[\end{aligned} \quad (3.57)$$

Si l'on suppose par ailleurs que $\theta_i(\text{cha}) = 0$ (ce qui est vrai pour $i = 0$), les relations (3.54) et (3.56) montrent que $\theta_{i+1}(\text{cha}) = 0$. Par conséquent $\theta_i(\text{cha}) = 0$ pour tout $i \geq 0$. Ceci, ajouté à (3.57), prouve que :

$$\begin{aligned} \theta_i(x) &< 0, & \text{pour tout } x \in]1, \text{cha}[\\ (-1)^i \theta_i(x) &> 0, & \text{pour tout } x \in]\text{cha}, +\infty[. \end{aligned} \quad (3.58)$$

La propriété (3.58) et l'égalité (3.53) prouvent alors que

$$(-1)^i \theta^{(i)}(x) > 0, \quad x \in [1, +\infty[- \setminus \{\text{cha}\}.$$

Il reste maintenant à montrer que θ est C^∞ en cha et que $(-1)^i \theta^{(i)}(\text{cha}) > 0$. Il suffit donc de vérifier que $\lim_{x \rightarrow \text{cha}} (-1)^i \theta^{(i)}(x) > 0$, cette limite étant entendue comme $\lim_{x \rightarrow 1^+} (-1)^i \theta^{(i)}(x) > 0$ dans le cas $a = 0$.

De l'égalité (3.56) nous déduisons

$$\begin{aligned}\theta_i'(\text{cha}) &= \theta_i''(\text{cha}) = \dots = \theta_i^{(i)}(\text{cha}) = 0, \\ \theta_i^{(i+1)}(\text{cha}) &= 2i!h^{(i)}(\text{cha}).\end{aligned}$$

Comme de plus $\theta_i(\text{cha}) = 0$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\theta_i(x) &= \frac{(x - \text{cha})^{i+1}}{(i+1)!} \theta^{(i+1)}(\text{cha}) + (x - \text{cha})^{i+1} \varepsilon(x), \\ &= \frac{2(x - \text{cha})^{i+1} h^{(i)}(\text{cha})}{i+1} + (x - \text{cha})^{i+1} \varepsilon(x),\end{aligned}$$

où $\lim_{x \rightarrow \text{cha}} \varepsilon(x) = 0$. Revenant à la relation (3.53), nous obtenons donc

$$\theta^{(i)}(x) = \frac{2h^{(i)}(a)}{i+1} + \varepsilon(x),$$

ce qui prouve donc :

$$\lim_{x \rightarrow \text{cha}} (-1)^i \theta^{(i)}(x) = \frac{2(-1)^i h^{(i)}(\text{cha})}{i+1},$$

quantité qui est strictement positive d'après le lemme 3.3. Ceci permet de montrer de proche en proche, que θ est indéfiniment dérivable au point cha et que $(-1)^i \theta^{(i)}(\text{cha}) > 0$ pour tout $i \geq 0$. ■

Lemme 3.5. Soit I un intervalle d'intérieur non vide, et $f_1, \dots, f_p$, p fonctions supposées C^r sur I et qui satisfont

$$(-1)^i f_k^{(i)}(x) > 0, \quad x \in I, \quad i = 0, \dots, r, \quad k = 1, \dots, p.$$

Alors la fonction produit $f = \prod_{k=1}^p f_k$ satisfait à son tour

$$(-1)^i f^{(i)}(x) > 0 \quad x \in I, \quad i = 0, \dots, r.$$

Preuve.

Il suffit de montrer le résultat pour $p = 2$. Ceci découle de façon immédiate de fait que, pour $i \leq r$, et $x \in I$:

$$\begin{aligned}(-1)^i f^{(i)}(x) &= (-1)^i (f_1 f_2)^{(i)}(x) = (-1)^{(i)} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} f_1^{(k)}(x) f_2^{(i-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \underbrace{[(-1)^k f_1^{(k)}(x)]}_{>0} \underbrace{[(-1)^{(i-k)} f_2^{(i-k)}(x)]}_{>0}.\end{aligned}$$

3.2 Orthogonalité par rapport à un produit scalaire de Sobolev pondéré

Pour tout suite $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$, l'expression

$$\langle f, g \rangle_\rho := \sum_{i=0}^{m-1} \rho_i \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(i)}(x) g^{(i)}(x) dx, \quad (3.59)$$

définit également une forme bilinéaire sur $H^{m-1}(\mathbb{R}) \times H^{m-1}(\mathbb{R})$, pondérée par ρ , qui est le même type de produit scalaire pondéré que celui utilisé par Ulrich Reif dans le cas où $\rho_0, \dots, \rho_{m-1}$ sont strictement positifs. Nous nous intéressons maintenant au problème de l'orthogonalité des translatées entières par rapport à un tel produit scalaire.

Théorème 3.6. *Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, tel que $\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2$ soient deux à deux distincts. Alors il existe une unique suite $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_{m-1})$ de nombres réels strictement positifs telle que les translatées entières de la B-spline N_λ^m soient orthonormales par rapport au produit scalaire pondéré $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ correspondant, c'est-à-dire telle que :*

$$\langle N_\lambda^m(\cdot - j), N_\lambda^m(\cdot - n) \rangle_\rho = \delta_{j,n}, \quad j, n \in \mathbb{Z}. \quad (3.60)$$

Preuve.

Reprenant pas à pas la démonstration du lemme 3.2 en remplaçant l'opérateur L_i par l'opérateur D^i de dérivation d'ordre i , il est facile de vérifier que, pour tout $i = 0, \dots, m-1$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N_\lambda^{m(i)}(x) N_\lambda^{m(i)}(x - n) dx = (-1)^i e^{\sum_{s=1}^m \lambda_s} N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}{}^{(2i)}(m + n). \quad (3.61)$$

1. Existence et unicité de ρ .

La démarche est exactement la même que dans le cas de ω .

On constate d'abord que pour obtenir (3.60) on peut se contenter de résoudre

$$\langle N_\lambda^m, N_\lambda^m(\cdot - n) \rangle_\rho = \delta_{0,n}, \quad n = 0, \dots, m-1, \quad (3.62)$$

c'est-à-dire, en utilisant (3.61), de résoudre le système :

$$\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \vdots \\ \rho_{m-1} \end{pmatrix} = e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

où $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ni})_{0 \leq n, i \leq m-1}$ est donnée par :

$$\mathcal{A}_{ni} := (-1)^i N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}{}^{(2i)}(m + n), \quad n, i = 0, \dots, m-1.$$

Pour $k = 1, \dots, m$ fixé, partons à nouveau de la relation (3.13), et appliquons à ses deux membres l'opérateur différentiel $(-1)^i D^{2i}$. On obtient, toujours en tenant compte du support de la B-spline $N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}$ et de sa symétrie :

$$\begin{aligned} (-1)^i D^{2i} N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m) + \sum_{n=1}^{m-1} (e^{\lambda_k n} + e^{-\lambda_k n}) (-1)^i D^{2i} N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m+n) \\ = (-1)^i M_k D^{2i} e_k(m). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Par conséquent, par multiplication à gauche des deux membres de (3.63) par la matrice B définie par (3.20), on obtient

$$\mathcal{C} \cdot \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \vdots \\ \rho_{m-1} \end{pmatrix} = e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.65)$$

où, d'après (3.64), la matrice $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{k,i})_{0 \leq k, i \leq m-1}$ est donnée par :

$$\mathcal{C}_{ki} = (-1)^i M_{k+1} e_k^{(2i)}(m) = (-1)^i M_{k+1} \lambda_{k+1}^{2i} e^{\lambda_{k+1} m}, \quad k, i = 0, \dots, m-1. \quad (3.66)$$

De façon explicite, le système (3.66) s'écrit :

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \rho_i \lambda_k^{2i} = \frac{e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s}}{M_k e^{\lambda_k m}}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.67)$$

Introduisons le polynôme Q , de degré inférieur ou égal à $m-1$, défini dans la base canonique par :

$$Q(x) := \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \rho_i x^i, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.68)$$

Nous pouvons alors remplacer les égalités (3.67) par :

$$Q(\lambda_k^2) = \frac{e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s}}{M_k e^{\lambda_k m}}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.69)$$

Les seconds membres de (3.69) étant identiques à ceux des égalités (3.26) obtenues précédemment, le système (3.63) est finalement équivalent aux m égalités :

$$Q(\lambda_k^2) = f_\lambda(\lambda_k^2), \quad k = 1, \dots, m,$$

où f_λ est la fonction définie en (3.31). Il apparaît donc que Q est le polynôme de degré inférieur ou égal à $m-1$ qui interpole la fonction f_λ en les m points distincts $\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2$.

L'existence et l'unicité de ce polynôme d'interpolation prouve l'existence et l'unicité de la suite $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_{m-1})$ satisfaisant (3.60).

2. Stricte positivité des ρ_i .

Le polynôme Q n'est autre que le polynôme P rencontré au cours de la preuve du Théorème 3.1. Il est donné en (3.68) dans la base canonique alors que le polynôme P était écrit précédemment dans la base de Newton.

Le théorème 3.1 nous dit en fait que, si l'on écrit le polynôme Q dans la base de Newton

$$1, (x - \lambda_1^2), \dots, (x - \lambda_1^2) \dots (x - \lambda_{m-1}^2),$$

c'est-à-dire, si

$$Q(x) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \prod_{k=1}^i (x - \lambda_k^2),$$

alors les coefficients α_i satisfont :

$$(-1)^i \alpha_i > 0, \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (3.70)$$

La stricte positivité des coefficients $\rho_0, \dots, \rho_{m-1}$ se déduit immédiatement de (3.70) grâce au Lemme 3.7 ci-dessous. ■

Lemme 3.7. *Étant donné n nombres réels $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, considérons l'écriture d'un polynôme Q de degré inférieur ou égal à n , d'une part dans la base canonique, d'autre part dans la base de Newton $1, (x - a_1), \dots, (x - a_1) \dots (x - a_n)$, à savoir :*

$$Q(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i, \quad Q(x) = \sum_{i=0}^n \beta_i \prod_{k=1}^i (x - a_k).$$

Si les coefficients $\beta_0, \dots, \beta_n$ satisfont :

$$(-1)^i \beta_i > 0, \quad i = 0, \dots, n,$$

les coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ satisfont à leur tour :

$$(-1)^i \alpha_i > 0, \quad i = 0, \dots, n,$$

Preuve.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout $r \leq k$, désignons par σ_r^k la fonction symétrique de degré r en $(x_1, \dots, x_k)$:

$$\sigma_r^k(x_1, \dots, x_k) := \sum_{\substack{|J|=r \\ J \subset \{1, \dots, k\}}} \prod_{j \in J} x_j, \quad \text{pour } r \geq 1,$$

et, par convention, $\sigma_0^k(x_1, \dots, x_k) := 1$. De l'égalité :

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k) = x^k + \sum_{r=1}^k (-1)^{k-r} \sigma_{k-r}^k(a_1, \dots, a_k) x^r,$$

on déduit facilement l'expression des coefficients α_i en fonction des β_i , à savoir :

$$\begin{aligned} (-1)^s \alpha_s &= \sum_{i=s}^n (-1)^i \beta_i \sigma_{i-s}^i(a_1, \dots, a_i), \\ &= (-1)^s \beta_s + \sum_{i=s+1}^n \underbrace{(-1)^i \beta_i}_{>0} \underbrace{\sigma_{i-s}^i(a_1, \dots, a_i)}_{\geq 0}, \quad s = 0, \dots, n, \end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$(-1)^s \alpha_s \geq (-1)^s \beta_s > 0, \quad s = 0, \dots, n.$$

■

Nous avons travaillé avec deux types de formes bilinéaires pondérées, les premières par rapport aux opérateurs L_i , les deuxièmes par rapport aux dérivées ordinaires. Dans chacun des cas nous avons mis en évidence l'existence et l'unicité d'une telle forme bilinéaire (qui est alors un produit scalaire) rendant orthonormées les translatées entières de la B-spline. Il est naturel de s'interroger sur les liens entre ces deux produits scalaires. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 3.8. *Si $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{m-1})$ et $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_{m-1})$ sont les deux m -uplets obtenus dans les théorèmes 3.1 et 3.6 respectivement, les produits scalaires pondérés correspondants, définis en (3.2) et (3.59) sont identiques. Autrement dit, pour toutes fonctions $u, v \in H^{m-1}(\mathbb{R})$,*

$$(u, v)_\omega = \langle u, v \rangle_\rho.$$

Preuve.

Étant donné deux éléments f, g de $H^{m-1}(\mathbb{R})$, si $m \geq 2$, on peut calculer :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} L_1 f L_1 g &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f' g' - \lambda_1 (f' g + f g') + \lambda_1^2 f g] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f' g' + \lambda_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f g. \end{aligned} \tag{3.71}$$

De même, si $m \geq 3$, on peut appliquer le résultat précédent à $F := L_{\lambda_2}^1 f$, $G := L_{\lambda_2}^1 g$, ce qui donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_2 f L_2 g = \int_{-\infty}^{+\infty} F' G' + \lambda_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F G. \tag{3.72}$$

Puisque l'on a $F' = (f')$, $G' = L_{\lambda_2}^1(g')$, on peut appliquer deux fois (3.71) avec l'opérateur $L_{\lambda_2}^1$ au lieu de L_1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F'G' = \int_{-\infty}^{+\infty} L_{\lambda_2}^1(f') L_{\lambda_2}^1(g') = \int_{-\infty}^{+\infty} f''g'' + \lambda_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f'g' \quad (3.73)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} FG = \int_{-\infty}^{+\infty} L_{\lambda_2}^1 f L_{\lambda_2}^1 g = \int_{-\infty}^{+\infty} f'g' + \lambda_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} fg. \quad (3.74)$$

Les relations (3.72), (3.73) et (3.74) conduisent finalement à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_2 f L_2 g = \int_{-\infty}^{+\infty} f''g'' + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \int_{-\infty}^{+\infty} f'g' + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} fg. \quad (3.75)$$

Considérons plus généralement un entier k , $1 \leq k < m-1$, et supposons que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_k f L_k g = \sum_{j=0}^k \sigma_{k-j}^k(\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(j)} g^{(j)}. \quad (3.76)$$

En posant $F := L_{\lambda_{k+1}}^1 f$, $G := L_{\lambda_{k+1}}^1 g$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_{k+1} f L_{k+1} g = \int_{-\infty}^{+\infty} L_k F L_k G = \sum_{j=0}^k \sigma_{k-j}^k(\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} F^{(j)} G^{(j)} \quad (3.77)$$

De fait que l'on peut écrire $F^{(j)} = L_{\lambda_{k+1}}(f^{(j)})$, $G^{(j)} = L_{\lambda_{k+1}}(g^{(j)})$, on peut appliquer (3.71) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F^{(j)} G^{(j)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} L_{\lambda_{k+1}}(f^{(j)}) L_{\lambda_{k+1}}(g^{(j)}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(j+1)} g^{(j+1)} + \lambda_{k+1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(j)} g^{(j)}. \end{aligned}$$

L'égalité (3.77) devient alors :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} L_{k+1} f L_{k+1} g &= \sum_{j=0}^k \sigma_{k-j}^k(\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(j+1)} g^{(j+1)} \\ &\quad + \sum_{j=0}^k \lambda_{k+1}^2 \sigma_{k-j}^k(\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(j)} g^{(j)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k+1)} g^{(k+1)} + \lambda_{k+1}^2 \sigma_{k-j}^k(\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} fg \\ &\quad + \sum_{j=1}^k [\sigma_{k-j+1}^k(\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2) + \lambda_{k+1}^2 \sigma_{k-j}^k(\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2)] \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(j)} g^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} \sigma_{k+1-j}^{k+1}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_{k+1}^2) \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(j)} g^{(j)}. \end{aligned}$$

Donc l'égalité (3.76) est vraie au rang $k + 1$, par conséquent elle est vraie pour tout $k = 0, \dots, m - 1$.

En tenant compte de la relation (3.76), nous pouvons donc écrire le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_\omega$ sous la forme :

$$\begin{aligned} (f, g)_\omega &= \sum_{k=0}^{m-1} \omega_k \sum_{j=0}^k \sigma_{k-j}^k(\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(j)} g^{(j)} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^k \omega_k \sigma_{k-j}^k(\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(j)} g^{(j)}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Or d'après l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \omega_k \prod_{s=1}^k (x - \lambda_s^2) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \rho_k x^k,$$

nous savons que

$$\sum_{k=j}^{m-1} \omega_k \sigma_{k-j}^k(\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2) = \rho_j, \quad j = 0, \dots, m - 1.$$

Par conséquent, la relation (3.78) s'écrit en fait $(f, g)_\omega = \langle f, g \rangle_\rho$ ■

Remarques 3.9.

3.9.1. Considérons à nouveau des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, tels que les points $\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2$ soient tous distincts. La méthode utilisée pour montrer l'existence et l'unicité des réels $\omega_0, \dots, \omega_{m-1}$ ou de $\rho_0, \dots, \rho_{m-1}$ rentre en fait dans le cadre général suivant.

Étant donné $m - 1$ réels $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$, considérons les opérateurs différentiels associés

$$T_0 := I, \quad T_i = \prod_{s=1}^i (D - \tau_s I), \quad i = 1, \dots, m - 1. \quad (3.79)$$

Partant de l'égalité (3.13), on peut appliquer l'opérateur $T_i T_i^*$ à ses deux membres, ce qui donne, pour $i = 0, \dots, m - 1$ et $x = m$,

$$T_i T_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m) + \sum_{n=1}^{m-1} (e^{\lambda_k n} + e^{-\lambda_k n}) T_i T_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m + n) = M_k T_i T_i^* e_k(m). \quad (3.80)$$

Par ailleurs, si l'on introduit, pour $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$, la forme bilinéaire $[\cdot, \cdot]_\alpha$ sur $H^{m-1}(\mathbb{R})$:

$$[f, g]_\alpha := \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \int_{-\infty}^{+\infty} T_k f(x) T_k g(x) dx,$$

résoudre $[N_\lambda^m(\cdot - \ell), N_\lambda^m(\cdot - n)]_\alpha = \delta_{\ell, n}$, pour $\ell, n \in \mathbb{Z}$, consiste à résoudre

$$[N_\lambda^m, N_\lambda^m(\cdot - n)]_\alpha = \delta_{0, n}, \quad n = 0, \dots, m-1,$$

ou encore, en généralisant le Lemme 3.2, à résoudre :

$$\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m-1} \end{pmatrix} = e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.81)$$

où $\mathcal{A}$ est maintenant définie par :

$$\mathcal{A}_{n,i} := T_i T_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m+n), \quad i, n = 0, \dots, m-1.$$

Par multiplication à gauche des deux membres de (3.81) par la matrice B définie en (3.20), on constate, grâce à (3.80), que le système (3.81) est transformé en :

$$\mathcal{C} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m-1} \end{pmatrix} = e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.82)$$

où la matrice $\mathcal{A}$ est définie par :

$$\mathcal{A}_{k,i} := M_{k+1} T_i T_i^* e_{k+1}(m), \quad k, i = 0, \dots, m-1.$$

Puisque $T_i T_i^* = (-1)^i \prod_{s=1}^i (D^2 - \tau_s^2)$, nous avons en fait

$$\mathcal{A}_{k,i} := (-1)^i M_{k+1} e^{\lambda_{k+1} m} \prod_{s=1}^i (\lambda_{k+1}^2 - \tau_s^2), \quad k, i = 0, \dots, m-1.$$

Ceci nous permet d'expliciter le système (3.82) sous la forme

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \alpha_i \prod_{s=1}^i (\lambda_k^2 - \tau_s^2) = \frac{e^{-\sum_{s=0}^m \lambda_s}}{M_k e^{\lambda_k m}}, \quad k = 1, \dots, m,$$

c'est-à-dire finalement, sous la forme

$$R(\lambda_k^2) = f_\lambda(\lambda_k^2), \quad k = 1, \dots, m, \quad (3.83)$$

où R est le polynôme de degré inférieur ou égal à $m-1$ défini par :

$$R(x) := \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \alpha_i \prod_{s=1}^i (x - \tau_s^2). \quad (3.84)$$

et où la fonction f_λ est la fonction introduite en (3.34).

Les relations (3.83) prouvent que le système (3.82) est satisfait si et seulement si le polynôme R défini en (3.84) est le polynôme de degré inférieur ou égal à $m-1$ qui interpole la fonction f_λ aux m points distincts $\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2$. Ceci prouve à nouveau l'existence et l'unicité de la solution $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1})$ du système (3.81). De plus, le polynôme R n'est autre que le polynôme Q ou le polynôme P obtenus précédemment. Les coefficients $(-1)^i \alpha_i$ sont ici ses coefficients dans la base

$$1, (x - \tau_1^2), (x - \tau_1^2)(x - \tau_2^2), \dots, (x - \tau_1^2) \dots (x - \tau_{m-1}^2).$$

Les Théorèmes 3.1 et 3.6 affirment que chacun des cas particuliers (1) et (2) ci-dessous :

- (1) $\tau_1 = \dots = \tau_m = 0$,
- (2) $(\tau_1^2, \dots, \tau_{m-1}^2) = (\lambda_{\sigma(1)}^2, \dots, \lambda_{\sigma(m-1)}^2)$ où σ est n'importe quelle permutation de $\{1, \dots, m\}$.

conduisent à des coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}$ strictement positifs.

3.9.2. Partant d'une suite $\mathcal{T} = (\tau_1, \dots, \tau_{m-1})$ de nombres réels, nous savons lui associer une unique suite $\alpha(\mathcal{T}) = (\alpha_0(\mathcal{T}), \dots, \alpha_{m-1}(\mathcal{T}))$ pour laquelle les translatées entières de N_λ^m sont orthonormées par rapport au produit scalaire $[\cdot, \cdot]_{\alpha(\mathcal{T})}$, défini à partir des opérateurs T_i introduits en (3.79). Exactement comme dans la preuve du Théorème 3.8, il est facile de vérifier que :

$$[\cdot, \cdot]_{\alpha(\mathcal{T})} = (\cdot, \cdot)_\omega = \langle \cdot, \cdot \rangle_\rho. \quad (3.85)$$

Par suite, même si les coefficients $\alpha_i(\mathcal{T})$ ne sont pas tous positifs, la forme bilinéaire associée $[\cdot, \cdot]_{\alpha(\mathcal{T})}$ est un produit scalaire, et ce produit scalaire est indépendant de $\mathcal{T}$. Pour calculer ce produit scalaire, on peut donc faire appel à n'importe quelle suite $\mathcal{T}$ particulière, par exemple $\mathcal{T} = (\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(m-1)})$, où σ est une permutation quelconque de $\{1, \dots, m\}$. Une fois calculés les coefficients $\alpha_i(\mathcal{T})$, la suite $\alpha(\tilde{\mathcal{T}})$ associée à une autre suite $\tilde{\mathcal{T}} = (\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_{m-1})$, pourra être obtenue à partir de l'égalité :

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \alpha_i(\tilde{\mathcal{T}}) \prod_{s=0}^i (x - \tilde{\tau}_s^2) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \alpha_i(\mathcal{T}) \prod_{s=0}^i (x - \tau_s^2).$$

3.3 Cas général

Nous avons montré le théorème 3.1 et 3.6 sous l'hypothèse que les nombres $\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2$ sont deux à deux distincts. Dans ce paragraphe, nous allons essayer de lever cette hypothèse.

Théorème 3.10. *Quels que soient les nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, il existe une unique suite $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_{m-1})$ de nombres réels strictement positifs telle que la famille des*

B -spline $N_\lambda^m(\cdot - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, soit orthonormale par rapport au produit scalaire pondéré $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ correspondant, c'est-à-dire telle que :

$$\langle N_\lambda^m(\cdot - j), N_\lambda^m(\cdot - n) \rangle_\rho = \delta_{j,n}, \quad j, n \in \mathbb{Z}. \quad (3.86)$$

Preuve.

Appelons tout d'abord $\theta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ la bijection qui, à un m -uplet $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ associe le m -uplet $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{m-1}) = \theta(\rho)$ tel que :

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \rho_i x^{2i} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \omega_i \prod_{k=1}^i (x^2 - \lambda_k^2). \quad (3.87)$$

Comme observé dans le théorème 3.8, nous avons :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho = (\cdot, \cdot)_{\theta(\rho)}, \quad \rho \in \mathbb{R}^m.$$

Par conséquent, montrer l'existence et l'unicité d'un m -uplet ρ satisfaisant (3.86), équivaut à montrer l'existence et l'unicité de $\theta(\rho) = \omega$ tel que :

$$(N_\lambda^m(\cdot - j), N_\lambda^m(\cdot - n))_\omega = \delta_{j,n}, \quad j, n \in \mathbb{Z}. \quad (3.88)$$

De plus si nous établissons la positivité de $\omega_0, \dots, \omega_{m-1}$, la positivité de $\rho_0, \dots, \rho_{m-1}$ s'en déduira immédiatement grâce à (3.87) et au lemme 3.7.

1. Existence et unicité de ω .

Supposons pour simplifier l'exposé que $\lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \dots \leq \lambda_m^2$. Il existe alors un entier $r \geq 0$, des entiers $\mu_0 \geq 0$, $\mu_1, \dots, \mu_r > 0$ tels que $\mu_0 + \dots + \mu_r = m$, et des nombres réels $\ell_1, \dots, \ell_r$ tels que :

$$\ell_0 := 0 < \ell_1 < \dots < \ell_r, \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_{\mu_0} = 0,$$

et pour $i = 1, \dots, r$:

$$\lambda_j = \pm \ell_i \quad \text{pour } \mu_0 + \dots + \mu_{i-1} + 1 \leq j \leq \mu_0 + \dots + \mu_i.$$

A une permutation près, nous avons donc :

$$(\lambda, -\lambda) = (0^{[2\mu_0]}, \ell_1^{[\mu_1]}, (-\ell_1)^{[\mu_1]}, \dots, \ell_r^{[\mu_r]}, (-\ell_r)^{[\mu_r]}).$$

Appliquons le corollaire 2.20 à la B -spline $N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}$. Pour $q = 0, \dots, \mu_0 - 1$, il existe un polynôme β_{2q}^0 de degré exact $2q$, tel que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{2q} N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(x - n) = \beta_{2q}^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.89)$$

Pour $k = 1, \dots, r$, et $q = 0, \dots, \mu_k - 1$, il existe un polynôme β_q^k de degré q tel que :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^q e^{\ell_k x} N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(x - n) = \beta_q^k(x) e^{\ell_k x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.90)$$

Comme dans la première partie de la preuve du Théorème 3.1, nous prendrons les images de (3.89) et (3.90) par les opérateurs $L_i L_i^*$. Utilisant à nouveau le fait que le support de la B-spline $N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}$ est égal à $[0, 2m]$ et que cette B-spline présente une symétrie par rapport à l'axe $x = m$, nous aboutirons à :

$$L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m) + 2 \sum_{n=1}^{m-1} n^{2q} L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m + n) = (L_i L_i^* \beta_{2q}^0)(m), \quad q = 0, \dots, \mu_0, \quad (3.91)$$

et pour $k = 1, \dots, r$, $q = 0, \dots, \mu_r - 1$:

$$L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m) + 2 \sum_{n=1}^{m-1} n^{2q} L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(m + n) = (L_i L_i^* \beta_q^k e_k)(m), \quad (3.92)$$

où $e_k(x) = e^{\ell_k x}$. Pour $s = 0, \dots, r$, l'opérateur $(D \pm \ell_s I)$ laisse “invariante” chaque fonction $\beta_q^k e_k$, $k > s$, $q = 0, \dots, \mu_k - 1$, en ce sens qu'elle la transforme en une fonction du même type. Autrement dit :

$$(D \pm \ell_s I)(\beta_q^k e_k) = \tilde{\beta}_q^k e_k,$$

où $\tilde{\beta}_q^k$ est un polynôme de degré exact q . Par contre, pour $s = 1, \dots, r$, et $q = 0, \dots, \mu_s - 1$,

$$(D - \ell_s I)(D + \ell_s I)(\beta_q^k e_k) = \tilde{\beta}_{q-1}^k e_k,$$

où le degré exact de $\tilde{\beta}_{q-1}^k$ est $q - 1$. Enfin pour $s = 0$, et $q = 0, \dots, \mu_0$:

$$(D - \ell_0 I)(D + \ell_0 I)(\beta_{2q}^0) = D^2 \beta_{2q}^0 = \tilde{\beta}_{2q-2}^0,$$

où le degré exact de $\tilde{\beta}_{2q-2}^0$ est $2q - 2$. Définissons les fonctions $E_0, \dots, E_{m-1}$ par

$$(E_0, \dots, E_{m-1}) := (\beta_0^0, \beta_2^0, \dots, \beta_{2\mu_0-2}^0, \beta_0^1 e_1, \dots, \beta_{\mu_1-1}^1 e_1, \dots, \beta_0^r e_r, \dots, \beta_{\mu_r-1}^r e_r).$$

Les remarques précédentes montrent que, pour $i, j = 0, \dots, m - 1$:

$$L_i L_i^* E_j = 0 \quad \text{pour } i > j, \quad L_i L_i^* E_i(m) \neq 0. \quad (3.93)$$

Reprenons la résolution du système (3.12) que nous avons ici encore à résoudre. Nous multiplierons cette fois-ci les deux membres de (3.12) à gauche par la matrice $\tilde{B} = (\tilde{B}_{qn})_{0 \leq q, n \leq m-1}$, où, pour $q = 0, \dots, \mu_0 - 1$

$$\tilde{B}_{q0} := 1, \quad \tilde{B}_{qn} := 2n^{2q}, \quad n = 1, \dots, m - 1,$$

et pour $q = 0, \dots, \mu_{k-1} - 1$, $k = 1, \dots, r$:

$$\tilde{B}_{q0} := 0; \quad \tilde{B}_{n,q} := n^q e^{\ell_k n} + (-n)^q e^{-\ell_k n}, \quad n = 1, \dots, m-1.$$

Le système (3.12) est alors transformé en le système :

$$\tilde{C} \cdot \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \vdots \\ \omega_{m-1} \end{pmatrix} = e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.94)$$

où, d'après les égalités (3.91) et (3.92),

$$\tilde{C}_{qi} = L_i L_i^* E_q(m), \quad q, i = 0, \dots, m-1.$$

Les relations (3.93) prouvent que la matrice $\tilde{C}$ est triangulaire inférieure à éléments diagonaux non nuls, ce qui prouve l'existence et l'unicité de $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{m-1})$.

Si l'on supprime l'hypothèse $\lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \dots \leq \lambda_m^2$, le même raisonnement transformera le système (3.12) initial en un système dont la matrice est non pas directement triangulaire inférieure à éléments diagonaux non nuls, mais seulement après une permutation de ses colonnes, donc le résultat reste inchangé.

2. Stricte positivité des ω_i .

Revenons au système initial que nous avons à résoudre, écrit sous les différentes formes (3.9), (3.10) ou (3.12). Désignons désormais la matrice A introduite en (3.12) par $A(\lambda)$. Son terme général $A_{n,i}(\lambda)$ défini en (3.11) est donc

$$A_{n,i}(\lambda) := L_i L_i^* N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}(n+m), \quad n, i = 0, \dots, m-1, \quad (3.95)$$

D'après le Corollaire 2.12, puisque $2i \leq 2m - 2i$, ce terme général s'écrit aussi

$$A_{n,i}(\lambda) = (-1)^i \Delta_{(\lambda_1, -\lambda_1, \dots, \lambda_i, -\lambda_i)}^{2i} N_{(\lambda_{i+1}, -\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_m, -\lambda_m)}^{2m-2i}(m+n), \quad (3.96)$$

avec la convention $\Delta_{(\nu_1, \dots, \nu_j)}^j = I$, si $j = 0$.

Nous savons donc que, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}^m$, il existe un unique m -uplet $\omega(\lambda) = (\omega_0(\lambda), \dots, \omega_{m-1}(\lambda))$ tel que :

$$A(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} \omega_0(\lambda) \\ \vdots \\ \omega_{m-1}(\lambda) \end{pmatrix} = e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.97)$$

Par ailleurs, nous savons aussi que, si

$$\lambda \in \Lambda := \{(\nu_1, \dots, \nu_m) \in \mathbb{R}^m, \nu_i^2 \neq \nu_j^2, \text{ pour tout } i, j = 1, \dots, m, i \neq j\},$$

$\omega_i(\lambda) > 0$ pour $i = 0, \dots, m-1$.

Fixons un élément $\lambda^\sharp = (\lambda_0^\sharp, \dots, \lambda_m^\sharp) \in \mathbb{R}^m$. Le Corollaire 2.22 nous dit que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda^\sharp} N_{(\lambda_{i+1}, -\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_m, -\lambda_m)}^{2m-2i}(x) = N_{(\lambda_{i+1}^\sharp, -\lambda_{i+1}^\sharp, \dots, \lambda_m^\sharp, -\lambda_m^\sharp)}^{2m-2i}(x),$$

et par suite, en tenant compte de (3.96)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda^\sharp} A_{n,i}(\lambda) = A_{n,i}(\lambda^\sharp).$$

Le second membre de (3.97) étant de façon évidente continu par rapport à λ , les formules de Cramer pour la résolution du système (3.97) nous montrent que :

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \lambda^\sharp \\ \lambda \in \Lambda}} \omega(\lambda) = \omega(\lambda^\sharp). \quad (3.98)$$

Faisons tendre $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ vers $\lambda^\sharp$ tout en imposant que λ reste dans l'ensemble Λ . Du fait que $\omega_i(\lambda) > 0$ pour $i \leq m-1$, l'égalité (3.98) nous permet de conclure que :

$$\omega(\lambda^\sharp) \geq 0, \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (3.99)$$

Les translatées entières de la B-spline $N_{\lambda^\sharp}^m$ sont donc orthonormales par rapport à la forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_{\omega(\lambda^\sharp)}$ définie conformément à la formule (3.2). D'après (3.99) cette forme bilinéaire est un semi-produit scalaire. Pour prouver que c'est un produit scalaire sur $H^{m-1}(\mathbb{R})$, il nous suffit de vérifier que $\omega_0(\lambda^\sharp) > 0$. Nous allons en fait montrer ici encore que $\omega_i(\lambda^\sharp) > 0$ pour $i = 0, \dots, m-1$.

a. Stricte positivité de $\omega_0(\lambda^\sharp)$.

La première ligne du système (3.94) s'écrit ici :

$$\omega_0(\lambda^\sharp) = 2^{-m} e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s} \left(\frac{2\lambda_1^\sharp}{\sinh \lambda_1} \right)^k \prod_{s=k+1}^m \frac{\lambda_1^{\sharp 2} - \lambda_s^{\sharp 2}}{\operatorname{ch} \lambda_1^\sharp - \operatorname{ch} \lambda_s^\sharp},$$

ce qui prouve comme précédemment que $\omega_0(\lambda^\sharp) > 0$.

b. Stricte positivité de ω_{m-1} .

D'après les formules (3.32) et (3.35), nous savons que, pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$\omega_{m-1}(\lambda) = \frac{e^{-\sum_{s=0}^m \lambda_s}}{2^{m-1}} \delta_{\operatorname{ch} \lambda_1, \dots, \operatorname{ch} \lambda_m}^{m-1} h.$$

Faisant tendre λ vers $\lambda^\sharp$ tout en respectant $\lambda \in \Lambda$, nous savons que le premier membre tend vers $\omega_{m-1}(\lambda^\sharp)$, tandis que le second membre tend vers

$$\frac{e^{-\sum_{s=0}^m \lambda_s^\sharp}}{2^{m-1}} \delta_{\text{ch}\lambda_1^\sharp, \dots, \text{ch}\lambda_m^\sharp}^{m-1} h,$$

différence divisée de la fonction h en des points non nécessairement distincts. Dans tous les cas, nous pouvons encore conclure à l'existence d'un point $\xi^\sharp$ de l'intervalle $[\min(\text{ch}\lambda_1^\sharp, \dots, \text{ch}\lambda_m^\sharp), \max(\text{ch}\lambda_1^\sharp, \dots, \text{ch}\lambda_m^\sharp)]$ tel que

$$\delta_{\text{ch}\lambda_1^\sharp, \dots, \text{ch}\lambda_m^\sharp}^{m-1} h = \frac{h^{(m-1)}(\xi^\sharp)}{(m-1)!}.$$

Nous pouvons donc encore conclure, grâce au lemme 3.3, que $\omega_{m-1}(\lambda^\sharp) > 0$.

c. Stricte positivité de ω_i , $1 \leq i \leq m-2$.

Fixons un entier i , $1 \leq i \leq m-2$. Grâce aux formules (3.32) et (3.35), le calcul de $\omega_i(\lambda)$, pour $\lambda \in \Lambda$, fait intervenir la différence divisée d'ordre i

$$\delta_{\text{ch}\lambda_1, \dots, \text{ch}\lambda_{i+1}}^i \tilde{h}, \quad (3.100)$$

où malheureusement $\tilde{h}$ définie en (3.36) dépend de $\text{ch}\lambda_{i+1}, \dots, \text{ch}\lambda_m$. Utilisant la propriété (3.98) nous allons donc faire tendre λ vers $\lambda^\sharp$ en faisant ici attention à cette difficulté particulière.

Fixons les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_{i+1}$, de façon à ce que $\text{ch}\lambda_1, \dots, \text{ch}\lambda_{i+1}$ soient deux à deux distincts et distincts de $\text{ch}\lambda_{i+2}^\sharp, \dots, \text{ch}\lambda_m^\sharp$. Faisons tendre $\lambda_{i+2}, \dots, \lambda_m$ vers $\lambda_{i+2}^\sharp, \dots, \lambda_m^\sharp$, tout en respectant la contrainte $\lambda \in \Lambda$. Le calcul de la différence divisée (3.100) est ici purement algébrique, et ce passage à la limite fait donc converger cette différence divisée vers

$$\delta_{\text{ch}\lambda_1, \dots, \text{ch}\lambda_{i+1}}^i \tilde{h}^\sharp, \quad (3.101)$$

où $\tilde{h}^\sharp$ est prolongée par continuité sur $[1, +\infty[$ à partir de

$$\tilde{h}^\sharp(x) := h(x) \prod_{s=i+2}^m \frac{(\text{Argch}x)^2 - \lambda_s^{\sharp 2}}{x - \text{ch}\lambda_s^\sharp}, \quad x \neq \text{ch}\lambda_{i+2}^\sharp, \dots, \text{ch}\lambda_m^\sharp.$$

Cette fonction $\tilde{h}^\sharp$, indépendante de $\lambda_1, \dots, \lambda_{i+1}$, est, d'après les lemmes 3.3 et 3.4, C^∞ sur $[1, +\infty[$. Dans un deuxième temps, nous ferons converger $\lambda_1, \dots, \lambda_{i+1}$ vers $\lambda_1^\sharp, \dots, \lambda_{i+1}^\sharp$. Ce deuxième passage à la limite fait tendre la différence divisée (3.101) vers

$$\delta_{\text{ch}\lambda_1^\sharp, \dots, \text{ch}\lambda_{i+1}^\sharp}^i \tilde{h}^\sharp,$$

différence divisée en des points non nécessairement distincts (cf. annexe corollaire A.3). Dans tous les cas, nous avons encore :

$$\delta_{\text{ch}\lambda_1^\sharp, \dots, \text{ch}\lambda_{i+1}^\sharp}^i \tilde{h}^\sharp = \frac{(\tilde{h}^\sharp)^{(i)}(\xi)}{i!},$$

où $\xi \in [\min(\text{ch}\lambda_1^\sharp, \dots, \text{ch}\lambda_{i+1}^\sharp), \max(\text{ch}\lambda_1^\sharp, \dots, \text{ch}\lambda_{i+1}^\sharp)]$, et nous pouvons en déduire grâce aux lemmes 3.3, 3.4 et 3.5 que $\omega_i(\lambda^\sharp) > 0$. ■

Chapitre 4

Orthonormalité des B-splines de Chebyshev (deuxième partie)

Nous allons dans ce chapitre examiner ce qui se passe dans le cas complexe. Nous partons d'un $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ fixé tel que l'opérateur différentiel L_λ^m soit à coefficients réels, c'est-à-dire, un λ pour lequel il existe une permutation σ de $\{1, \dots, m\}$ telle que :

$$(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_m}) = (\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(m)}). \quad (4.1)$$

Nous pouvons toujours introduire les opérateurs différentiels L_i , $i = 0, \dots, m$, comme en (3.1), mais, pour $i = 1, \dots, m-1$, ces opérateurs ne sont plus nécessairement tous à coefficients réels. Rien n'empêche cependant de définir, pour $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$ et pour $f, g \in H^{m-1}(\mathbb{R})$, l'expression :

$$\begin{aligned} (f, g)_\omega &:= \sum_{i=0}^{m-1} \omega_i \int_{-\infty}^{+\infty} L_i f(x) L_i g(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \omega_i L_i^* L_i g(x) \right) dx. \end{aligned} \quad (4.2)$$

C'est ici encore une forme bilinéaire sur $H^{m-1}(\mathbb{R}) \times H^{m-1}(\mathbb{R})$, mais cette fois-ci à valeurs dans $\mathbb{C}$, sauf cas particulier, même lorsque $\omega \in \mathbb{R}^m$.

De même, pour $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$, l'expression

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_\rho &:= \sum_{i=0}^{m-1} \rho_i \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(i)}(x) g^{(i)}(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \rho_i g^{(2i)}(x) \right) dx, \end{aligned} \quad (4.3)$$

définie aussi une forme bilinéaire sur $H^{m-1}(\mathbb{R}) \times H^{m-1}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$ dans le cas où $\rho \in \mathbb{R}^m$.

Théorème 4.1. *Considérons un m -uplet $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ tel que l'opérateur L_λ^m associé soit à coefficients réels et supposons que :*

$$|\operatorname{Im} \lambda_k| < \pi, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.4)$$

1. *Il existe une unique suite $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_{m-1})$ rendant orthonormales les translatées de la B-spline N_λ^m par rapport à la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ définie en (4.3). C'est une suite réelle.*

2. *Si, pour tout $k = 1, \dots, m$, la partie imaginaire de λ_k est suffisamment petite, alors $\rho_k > 0$ pour $k = 0, \dots, m-1$.*

Preuve.

1. Sous l'hypothèse (4.4) nous savons que tous les résultats obtenus dans le chapitre 2 pour le cas réel sont maintenus. Par conséquent, le problème de l'existence et de l'unicité de la suite de ρ se traite comme dans le cas réel. Il nous reste à montrer que cette suite est réelle. Rappelons que, dans les cas, nous avons à résoudre le système (3.63), i.e :

$$\mathcal{A}(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \vdots \\ \rho_{m-1} \end{pmatrix} = e^{-\sum_{s=1}^m \lambda_s} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

où les coefficients de la matrice $\mathcal{A}(\lambda)$ sont :

$$\mathcal{A}(\lambda) := (-1)^i N_{(\lambda, -\lambda)}^{2m}{}^{(2i)}(m+n), \quad n, i = 0, \dots, m-1.$$

La matrice $\mathcal{A}(\lambda)$ est donc réelle, ainsi que le second membre du système (4.5). Le fait que l'unique solution $(\rho_0, \dots, \rho_{m-1})$ de (4.5) soit réelle en découle de façon immédiate.

2. Ici encore, grâce au corollaire 2.22, nous constatons que

$$\mathcal{A}(\lambda^\sharp) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda^\sharp} \mathcal{A}(\lambda), \quad n, i = 0, \dots, m-1. \quad (4.6)$$

Notons à nouveau $\rho(\lambda) = (\rho_0(\lambda), \dots, \rho_{m-1}(\lambda))$ l'unique solution de (4.5). De (4.6) nous pouvons conclure que :

$$\rho(\lambda^\sharp) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda^\sharp} \rho(\lambda). \quad (4.7)$$

Écrivons, pour $s = 1, \dots, m$, $\lambda_s = \beta_s + i\gamma_s$, où β_s et γ_s sont réels. Soit $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_m)$. De (4.7) nous déduisons en particulier :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \beta} \rho(\lambda) = \rho(\beta).$$

Or, puisque $\beta_1, \dots, \beta_m$ sont réels, les résultats obtenus au chapitre précédent nous assurent que :

$$\rho_i(\beta) > 0, \quad i = 0, \dots, m-1.$$

Donc pour λ suffisamment près de β , c'est-à-dire, lorsque les parties imaginaires γ_s , $s = 1, \dots, m$ sont suffisamment petites, nous aurons encore :

$$\rho_i(\lambda) > 0, \quad i = 0, \dots, m-1.$$

■

Nous allons examiner un cas particulier où nous donnerons des conditions suffisantes assurant la positivité des ρ_i . Partant désormais de nombres réels $\mu_1, \dots, \mu_m$ tels que $|\mu_k| < \pi$, $k = 1, \dots, m$, et $\mu_1, \dots, \mu_m = 0$, considérons les nombres complexes $\lambda_k = i\mu_k$, $k = 1, \dots, m$. Même si l'opérateur L_λ^m n'est pas à coefficients réels, on peut montrer l'existence et l'unicité d'une unique suite $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$ telle que les fonctions $N_\lambda^m(\cdot - k)$ (non nécessairement réelles) soient orthonormales pour la forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_\omega$ associée. Dans un premier temps, supposons que les points $\mu_1^2, \dots, \mu_m^2$ sont deux à deux distincts. Reprenant l'expression des ω_k données en (3.32), en tenant compte du fait que $\operatorname{ch} x = \cosh x$, et $\operatorname{sh} x = \sinh x$, nous pouvons ici écrire :

$$(-1)^k \omega_k = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{p=1}^{k+1} \frac{\frac{\mu_p}{\sin \mu_p} \prod_{s=k+2}^m \frac{\mu_s^2 - \mu_p^2}{\cos \mu_p - \cos \mu_s}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{k+1} (\cos \mu_p - \cos \mu_j)}, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (4.8)$$

c'est-à-dire,

$$(-1)^k \omega_k = \frac{1}{2^{m-1}} \delta_{\cos \mu_1, \dots, \cos \mu_{k+1}}^k \widetilde{H}_k(x), \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (4.9)$$

où ici la fonction continue $\widetilde{H}_k$ est définie sur $] -1, 1]$ par :

$$\widetilde{H}_k(\cos x) := \frac{x}{\sin x} \prod_{s=k+2}^m \frac{\mu_s^2 - x^2}{\cos x - \cos \mu_s}, \quad \cos x \neq \cos \mu_{k+2}, \dots, \cos \mu_m,$$

soit

$$\widetilde{H}_k(x) := \frac{\operatorname{Arccos} x}{\sqrt{1-x^2}} \prod_{s=k+2}^m \frac{\mu_s^2 - (\operatorname{Arccos} x)^2}{x - \cos \mu_s}, \quad x \in] -1, 1] \setminus \{\cos \mu_{k+2}, \dots, \cos \mu_m\}.$$

Comme dans le chapitre précédent, nous établirons, les lemmes suivants :

Lemme 4.2. *La fonction H définie sur $] -1, 1]$ par*

$$H(x) := \begin{cases} \frac{\operatorname{Arccos} x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in] -1, 1[, \\ 1 & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

est C^∞ sur $] -1, 1]$ et satisfait :

$$(-1)^i H^{(i)}(x) > 0, \quad x \in] -1, 1].$$

Preuve.

La fonction H est clairement C^∞ sur $] -1, 1[$. Nous montrerons tout d'abord que H est indéfiniment dérivable en 1^- et que $(-1)^k H^{(k)}(1) > 0$. Il suffit pour cela de vérifier que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (-1)^i H^{(i)}(x) > 0$. Comme dans le lemme 3.3, la démonstration se fera grâce au développement en série entière de la fonction $\frac{x}{\sin x}$, qui s'obtient à partir de celui de $\frac{x}{\operatorname{sh} x}$ par le fait que $x \in \mathbb{C}$, $\operatorname{sh} x = i \sin ix$. Nous aurons donc ici :

$$H(\cos x) = \frac{x}{\sin x} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k A_k x^{2k}, \quad [0, \pi[, \quad (4.10)$$

les coefficients A_k étant ceux que nous avons rencontrés en (3.45). Par dérivation de (4.10) pour $\cos x \neq 1$:

$$-H'(\cos x) \sin x = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k k A_k x^{2k-1}, \quad x \in]0, \pi[,$$

soit

$$H'(\cos x) = 2H(\cos x)G_1(x), \quad x \in]0, \pi[,$$

où

$$G_1(x) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (k+1) A_{k+1} x^{2k}, \quad x \in]-\pi, \pi[.$$

Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} H'(x) = 2H(1)G_1(0) = 2A_1 < 0.$$

On poursuivra comme dans le lemme 3.3.

Comme dans le lemme 3.3, cette méthode ne permet pas facilement d'atteindre le fait que $(-1)^k H^{(k)}(x) > 0$ sur $] -1, 1[$. La démonstration sera là encore calquée sur celle du lemme 3.3. Nous écrivons donc $H(x)$ sous la forme :

$$H(x) = (1-x^2)^{-1/2} H_0(x), \quad H_0(x) = \operatorname{Arccos} x, \quad x \in] -1, 1[.$$

Par dérivation, on a également

$$H'(x) = (1 - x^2)^{-3/2} H_1(x), \quad x \in]-1, 1[,$$

où $H_1(x) = x \operatorname{Arccos} x - \sqrt{1 - x^2}$ est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] - 1, 1[$, avec $H'_1(x) = \operatorname{Arccos} x$. Par conséquent H_1 est C^1 sur $] - 1, 1]$ et $H_1(1) = H'_1(1) = 0$.

Plus généralement, on montrera facilement par récurrence que

$$H^{(i)}(x) = (1 - x^2)^{-1/2-i} H_i(x), \quad x \in]-1, 1[, \quad (4.11)$$

où la fonction H_i est définie sur $] - 1, 1]$ et satisfait :

- H_i est C^i sur $] - 1, 1]$,
- $H_i^{(i)} = A_i \operatorname{Arccos} x$, $x \in]-1, 1]$, où $A_i > 0$,
- $H_i^{(j)}(1) = 0$, pour $j = 0, \dots, i$.

La relation de récurrence qui lie H_i et H_{i+1} est la suivante :

$$H_{i+1}(x) = (1 + 2i)xH_i(x) + (1 - x^2)H'_i(x), \quad x \in]-1, 1],$$

Des trois propriétés précédentes, nous pouvons déduire successivement que $H_i^{(i)}(x) > 0$ sur $] - 1, 1[$, $H_i^{(i-1)}(x) < 0$ sur $] - 1, 1[$, ... et finalement

$$(-1)^i H_i(x) > 0, \quad x \in]-1, 1[.$$

En revenant à (4.11), on déduit donc que

$$(-1)^i H^{(i)}(x) > 0, \quad x \in]-1, 1[.$$

■

Lemme 4.3. Soit a un nombre réel et θ la fonction définie sur $] - 1, 1]$ par :

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{a^2 - (\operatorname{Arccos} x)^2}{x - \cos a} & \text{si } x \neq \cos a, \\ \frac{2a}{\sin a} & \text{si } x = \cos a, \end{cases}$$

avec la convention $\frac{x}{\sin x} = 1$ si $x = 0$. Cette fonction est C^∞ sur $] - 1, 1]$ et satisfait

$$(-1)^i \theta(x) > 0, \quad x \in]-1, 1].$$

Preuve.

Pour $x \neq \cos a$, nous pouvons écrire $\theta(x) = (1 - \cos a)^{-1}\theta_0(x)$, où $\theta_0(x) = a^2 - (\operatorname{Arccos} x)^2$. La fonction θ_0 est définie sur $[-1, 1]$, C^∞ sur $] -1, 1[$ a priori. Cependant pour $x \in] -1, 1[$

$$\theta'_0(x) = 2 \frac{\operatorname{Arccos} x}{\sqrt{1-x^2}} = 2H(x). \quad (4.12)$$

Par conséquent θ_0 est en fait C^∞ sur $] -1, 1]$. Supposons que

$$\theta^{(i)}(x) = (x - \cos a)^{-i-1}\theta_i(x), \quad (4.13)$$

où θ_i est définie et C^∞ sur $] -1, 1]$, nous aurons, par dérivation de (4.12) sur $] -1, 1] \setminus \{\cos a\}$:

$$\theta^{(i+1)}(x) = (x - \cos a)^{-i-1}\theta_{i+1}(x), \quad x \in] -1, 1] \setminus \{\cos a\},$$

où

$$\theta_{i+1}(x) := -(i+1)\theta_i(x) + (x - \cos a)\theta'_i(x). \quad (4.14)$$

La fonction θ_{i+1} est donc définie et C^∞ sur $] -1, 1]$. De plus $\theta_{i+1}(\cos a) = -(i+1)\theta_i(\cos a)$. Puisque $\theta_0(\cos a) = 0$, nous avons prouvé que $\theta_i(\cos a) = 0$ pour tout $i \geq 0$.

Par ailleurs, par dérivation de (4.14), nous obtenons :

$$\theta_{i+1}'(x) = -i\theta_i'(x) + (x - \cos a)\theta_i''(x), \quad x \in] -1, 1].$$

Si nous supposons que

$$\theta_i'(x) = 2(x - \cos a)^i H^{(i)}(x), \quad x \in] -1, 1], \quad (4.15)$$

nous pouvons en déduire que :

$$\theta_i''(x) = 2i(x - \cos a)^{i-1} H^{(i)}(x) + 2(x - \cos a)^i H^{(i+1)}(x),$$

et l'égalité (4.14) donne :

$$\theta_{i+1}(x) = 2(x - \cos a)^{i+1} H^{(i+1)}(x).$$

Par conséquent, en tenant compte de (4.11), l'égalité (4.15) est prouvée pour tout $i \geq 0$. D'après le lemme 4.2, nous pouvons donc affirmer que

$$\theta_i'(x) > 0, \quad \text{pour tout } x \in] -1, \cos a[,$$

$$(-1)^i \theta_i'(x) > 0, \quad \text{pour tout } x \in] \cos a, 1].$$

Sachant par ailleurs que $\theta_i(\cos a) = 0$, nous obtenons :

$$\theta_i(x) < 0 \quad \text{pour tout } x \in] -1, \cos a[,$$

$$(-1)^i \theta_i(x) > 0, \quad \text{pour tout } x \in]\cos a, 1].$$

Revenant à (4.13), les propriétés précédentes nous permettent de déduire que :

$$(-1)^i \theta_i(x) > 0, \quad x \in]-1, 1] \setminus \{\cos a\}.$$

Par ailleurs, du fait que $\theta_i(\cos a) = 0$, la relation (4.15) montre que $\cos a$ est un zéro d'ordre $i + 1$ de la fonction θ_i . De plus nous avons aussi :

$$\theta_i^{(i+1)}(\cos a) = i! 2H^{(i)}(\cos a).$$

En utilisant le développement limité de la fonction θ_i au point $\cos a$ et la relation (4.13), on en déduira facilement que, pour tout $i \geq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \cos a} (-1)^i \theta^{(i)}(x) = \frac{2(-1)^i H^{(i)}(\cos a)}{i + 1},$$

ce qui prouvera à la fois que θ est C^∞ en $\cos a$ et que :

$$(-1)^i \theta^{(i)}(\cos a) = \frac{2(-1)^i H^{(i)}(\cos a)}{i + 1} > 0.$$

■

Les lemmes précédents ainsi que le lemme 3.5 montrent que la fonction $\widetilde{H}_k$ satisfait

$$(-1)^k \widetilde{H}_k^{(k)}(x) > 0, \quad x \in]-1, 1].$$

D'autre part de l'égalité (4.9) nous déduisons l'existence d'un point $\xi_k \in]-1, 1]$ tel que

$$(-1)^k \omega_k = \frac{1}{2^{m-1}} \frac{\widetilde{H}_k^{(k)}(\xi_k)}{k!},$$

et par conséquent $\omega_k > 0$, pour $k = 1, \dots, m - 1$.

Le passage de $\omega_0, \dots, \omega_{m-1}$ à $\rho_0, \dots, \rho_{m-1}$ se fait maintenant grâce à l'égalité :

$$\begin{aligned} \omega_0 - \omega_1(x + \mu_1^2) + \omega_2(x + \mu_1^2)(x + \mu_2^2) + \dots + (-1)^{m-1} \omega_{m-1}(x + \mu_1^2) \dots (x + \mu_{m-1}^2) \\ = \rho_0 - \rho_1 x + \dots + (-1)^{m-1} \rho_{m-1} x^{m-1} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Nous avons donc :

$$\begin{cases} (-1)^{m-1} \rho_{m-1} = (-1)^{m-1} \omega_{m-1}, \\ (-1)^{m-2} \rho_{m-2} = (-1)^{m-2} \omega_{m-2} + (-1)^{m-1} \omega_{m-1} \sigma_1^{m-1}(\mu_1^2, \dots, \mu_{m-1}^2), \\ \vdots \\ \rho_0 = \omega_0 - \omega_1 \mu_1^2 + \omega_2 \mu_1^2 \mu_2^2 + \dots + (-1)^{m-1} \omega_{m-1} \mu_1^2 \dots \mu_{m-1}^2. \end{cases} \quad (4.17)$$

On voit donc ρ_{m-1} est strictement positif. Par contre, la positivité des ω_k n'implique donc pas de façon automatique celle des coefficients $\rho_0, \dots, \rho_{m-1}$. Nous allons établir des conditions suffisantes pour assurer cette positivité.

Écrivons les égalités (4.9) sous la forme :

$$(-1)^k \omega_k = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{p=1}^{k+1} A_p \prod_{s=k+2}^m (\mu_s^2 - \mu_p^2), \quad k = 0, \dots, m-1. \quad (4.18)$$

où pour $p = 1, \dots, m$,

$$A_p := \frac{\mu_p}{\sin \mu_p} \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^m (\cos \mu_p - \cos \mu_j)}. \quad (4.19)$$

Des relations (4.18) et (4.19), nous déduisons alors :

$$(-1)^{m-1} \rho_{m-1} 2^{m-1} = (-1)^{m-1} \omega_{m-1} 2^{m-1} = \sum_{p=1}^m A_p, \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} (-1)^{m-2} \rho_{m-2} 2^{m-1} &= \sum_{p=1}^{m-1} A_p (\mu_m^2 - \mu_p^2) + (\mu_1^2 + \dots + \mu_{m-1}^2) \sum_{p=1}^m A_p \\ &= (\mu_1^2 + \dots + \mu_m^2) \sum_{p=1}^m A_p - \sum_{p=1}^m A_p \mu_p^2. \end{aligned}$$

D'une façon générale, nous pourrions écrire :

$$(-1)^{m-1-j} \rho_{m-1-j} 2^{m-1} = \sum_{p=1}^{m-1} A_p B_p^j, \quad (4.21)$$

où l'expression du second membre ne dépend pas de l'ordre de $\mu_1, \dots, \mu_m$. Nous pouvons donc nous contenter du calcul du terme B_n^j . Or, dans l'égalité

$$(-1)^{m-1-j} \rho_{m-1-j} = \sum_{k=0}^j (-1)^{m-1-j+k} \omega_{m-1-j+k} \sigma_k^{m-1-j+k} (\mu_1^2, \dots, \mu_{m-1-j+k}^2)$$

obtenue en (4.17), le terme A_m n'est présent que dans le dernier terme de la somme, ce qui, à cause de l'égalité (4.20) conduit à :

$$B_m^j = \sigma_j^{m-1} (\mu_1^2, \dots, \mu_{m-1}^2). \quad (4.22)$$

Pour tout entier $s \geq 1$, de façon évidente :

$$\sigma_s^{m-1}(\mu_1^2, \dots, \mu_{m-1}^2) = \sigma_s^m(\mu_1^2, \dots, \mu_m^2) - \mu_m^2 \sigma_{s-1}^{m-1}(\mu_1^2, \dots, \mu_{m-1}^2).$$

En itérant cette relation, l'égalité (4.22) devient :

$$B_m^j = \sum_{r=0}^j (-1)^r \sigma_{j-r}^m(\mu_1^2, \dots, \mu_m^2) \mu_m^{2r}.$$

Par conséquent, l'égalité (4.21) peut s'écrire :

$$(-1)^{m-1-j} \rho_{m-1-j} 2^{m-1} = \sum_{p=1}^m \sum_{r=0}^j (-1)^r \sigma_{j-r}^m(\mu_1^2, \dots, \mu_m^2) A_p \mu_p^{2r},$$

ou encore, en tenant compte de (4.19) et (2.64) :

$$\rho_{m-1-j} 2^{m-1} = (-1)^{m-1} \delta_{\cos \mu_1, \dots, \cos \mu_m}^{m-1} \Phi_j, \quad (4.23)$$

où la fonction continue Φ_j est définie sur $] -1, 1]$ par :

$$\Phi_j(x) := \sum_{r=0}^j (-1)^{j-r} \sigma_{j-r}^m(\mu_1^2, \dots, \mu_m^2) (\operatorname{Arccos} x)^{2r+1} (1-x^2)^{-1/2}, \quad x \in] -1, 1[. \quad (4.24)$$

Généralisant le lemme 4.2, nous allons tout d'abord étudier la fonction

$$(\operatorname{Arccos} x)^{2r+1} (1-x^2)^{-1/2}.$$

Lemme 4.4. *Étant donné un entier $r \geq 0$, la fonction φ_r définie par*

$$\varphi_r(x) := (\operatorname{Arccos} x)^{2r+1} (1-x^2)^{-1/2}, \quad x \in] -1, 1[,$$

et prolongée par continuité en 1 ($\varphi_0(1) := 1$, $\varphi_r(1) := 0$ si $r \geq 1$) est C^∞ sur $] -1, 1]$. De plus, pour tout $i \geq 0$, sa dérivée i -ème s'écrit :

$$\varphi_r^{(i)}(x) = (1-x^2)^{-1/2-i} \theta_i^r(x), \quad x \in] -1, 1[, \quad (4.25)$$

où la fonction θ_i^r est C^i sur $] -1, 1]$ et satisfait :

$$\theta_i^{r(j)}(1) = 0, \quad j = 0, \dots, i, \quad (4.26)$$

$$\theta_i^{r(i)}(x) = \sum_{k=0}^r A_k^{r,i} (\operatorname{Arccos} x)^{2k+1}, \quad x \in] -1, 1], \quad (4.27)$$

les coefficients $A_k^{r,i}$ pouvant être calculés par :

$$\begin{aligned} A_r^{r,i} &= (i!)^2, \\ A_k^{r,i+1} &= (i+1)^2 A_k^{r,i} + (2k+2)(2k+3) A_{k+1}^{r,i}, \quad k = 0, \dots, r-1, \\ A_k^{r,0} &= \delta_{k,r}, \quad 0 \leq k \leq r. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Preuve.

Pour $r = 0$ nous avons $\varphi_0 = H$ donc les résultats découlent du lemme 4.2. Supposons donc $r \geq 1$. Nous pouvons alors écrire :

$$\varphi_r(x) = F(x)^r H(x), \quad x \in]-1, 1], \quad (4.29)$$

où la fonction F est définie sur $] -1, 1]$ par

$$F(x) := (\operatorname{Arccos} x)^2.$$

On constate donc que la fonction F est dérivable sur $] -1, 1]$ et satisfait :

$$F'(x) = -2H(x), \quad x \in]-1, 1]. \quad (4.30)$$

Il résulte donc du lemme 4.2 que φ_r est indéfiniment dérivable sur $] -1, 1]$ comme produit de fonctions indéfiniment dérivables sur $] -1, 1]$. Pour $i = 0$, nous avons effectivement :

$$\varphi_r(x) = (1 - x^2)^{-1/2} \theta_0^r(x), \quad x \in]-1, 1],$$

où θ_0^r est la fonction continue sur $] -1, 1]$ définie par :

$$\theta_0^r(x) := (\operatorname{Arccos} x)^{2r+1} = \sum_{k=0}^r A_k^{r,0} (\operatorname{Arccos} x)^{2k+1},$$

les coefficients $A_k^{r,0}$ vérifiant la troisième ligne de (4.28). De plus, on peut vérifier que :

$$(1 - x^2) \theta_0^{r''}(x) - x \theta_0^{r'}(x) = 2r(r+1) \theta_0^{r-1}(x), \quad x \in]-1, 1[. \quad (4.31)$$

Les fonction θ_i^r obéissent à la relation de récurrence déjà obtenue dans la preuve du lemme 4.2, à savoir :

$$\theta_{i+1}^r(x) = (1 + 2i)x \theta_i^r(x) + (1 - x^2) \theta_i^{r'}(x), \quad x \in]-1, 1[. \quad (4.32)$$

Supposant la fonction θ_i^r C^i sur $] -1, 1]$ et satisfaisant (4.27) la fonction θ_{i+1}^r est C^{i-1} sur $] -1, 1]$, et par dérivation de (4.32) à l'ordre $(i+1)$ sur $] -1, 1[$, nous avons :

$$\begin{aligned} \theta_{i+1}^{r(i+1)}(x) &= (1 + 2i) \left[x \theta_i^{r(i+1)}(x) + (i+1) \theta_i^{r(i)}(x) \right] + (1 - x^2) \theta_i^{r(i+2)}(x) \\ &\quad - 2x(i+1) \theta_i^{r(i+1)}(x) - i(i+1) \theta_i^{r(i)}(x), \quad x \in]-1, 1[, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\theta_{i+1}^{r(i+1)}(x) = (1 - x^2) \theta_i^{r(i+2)}(x) - x \theta_i^{r(i+1)}(x) + (i+1)^2 \theta_i^{r(i)}(x), \quad x \in]-1, 1[. \quad (4.33)$$

L'hypothèse (4.27) s'écrit en fait :

$$\theta_i^{r(i)}(x) = \sum_{k=0}^r A_k^{r,i} \theta_0^k(x), \quad x \in]-1, 1],$$

et conduit donc à :

$$\theta_i^{r(i+1)}(x) = \sum_{k=0}^r A_k^{r,i} \theta_0^{k'}(x), \quad \theta_i^{r(i+2)}(x) = \sum_{k=0}^r A_k^{r,i} \theta_0^{k''}(x), \quad x \in]-1, 1[.$$

Si bien que l'égalité (4.33) devient :

$$\theta_{i+1}^{r(i+1)}(x) = \sum_{k=0}^r A_k^{r,i} \left[(1-x^2) \theta_0^{k''}(x) - x \theta_0^{k'}(x) \right] + (i+1)^2 \sum_{k=0}^r A_k^{r,i} \theta_0^k(x), \quad x \in]-1, 1[,$$

ou encore, en utilisant (4.31) :

$$\begin{aligned} \theta_{i+1}^{r(i+1)}(x) &= \sum_{k=1}^r A_k^{r,i} 2k(2k+1) \theta_0^{k-1}(x) + (i+1)^2 \sum_{k=0}^r A_k^{r,i} \theta_0^k(x), \\ &= \sum_{k=0}^r A_k^{r,i+1} \theta_0^k(x), \quad x \in]-1, 1[, \end{aligned} \quad (4.34)$$

où les $A_k^{r,i+1}$ satisfont $A_k^{r,i+1} = (i+1)^2 A_k^{r,i}$, et la deuxième ligne de (4.28). La première ligne de (4.28) résulte alors de $A_r^{r,0} = 1$. Enfin l'égalité (4.34) prouve que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \theta_{i+1}^{r(i+1)}(x) = 0$.

Supposant que $\theta_i^{r(j)}(1) = 0$ pour tout $j \leq i$, par dérivation de (4.32) à tout ordre $k \leq i$, on vérifierait de même d'une part que $\theta_{i+1}^{r(k)}(1) = 0$ pour $k \leq i-1$, et d'autre part que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \theta_{i+1}^{r(i)}(x) = 0$. Ceci prouve donc que la fonction θ_{i+1}^r est C^{i+1} sur $] -1, 1[$ et satisfait $\theta_{i+1}^{r(k)}(1) = 0$ pour tout $k \leq i+1$. Ceci termine la preuve du lemme. ■

Chaque fonction φ_r satisfait $(-1)^r \varphi_r(x) > 0$ pour $x \in]-1, 1[$. En effet, ceci résulte du lemme 3.3, puisque, d'après (4.29) et (4.30), φ_r s'écrit comme un produit de fonctions qui satisfont cette propriété sur $] -1, 1[$. Le résultat peut également se déduire du lemme 4.4. En effet, d'après (4.27) et (4.28), les coefficients $A_k^{r,i}$ étant ≥ 0 et $A_r^{r,i} > 0$, nous avons $\theta_i^{r(i)}(x) > 0$ pour $x \in]-1, 1[$. Du fait que, d'après (4.26), la fonction θ_i^r satisfait $\theta_i^{r(j)}(1) = 0$ pour $j \leq i$, nous pouvons en déduire successivement que $\theta_i^{r(i-1)}(x) < 0$ pour $x \in]-1, 1[$, puis $\theta_i^{r(i-2)}(x) > 0$ etc... jusqu'à $(-1)^i \theta_i^r(x) > 0$ pour $x \in]-1, 1[$. Nous allons appliquer une propriété similaire à la fonction Φ_j définie en (4.24).

La fonction Φ_j s'écrivant :

$$\Phi_j(x) = \sum_{r=0}^j (-1)^{j-r} \sigma_{j-r}^m(\mu_1^2, \dots, \mu_m^2) \varphi_r(x), \quad x \in]-1, 1[, \quad (4.35)$$

l'égalité (4.23) devient :

$$\rho_{m-1-j} 2^{m-1} = (-1)^{m-1} \sum_{r=0}^j (-1)^{j-r} \sigma_{j-r}^m(\mu_1^2, \dots, \mu_m^2) \delta_{\cos \mu_1, \dots, \cos \mu_m}^{m-1} \varphi_r. \quad (4.36)$$

Les deux membres de (4.36) étant des fonctions continues du m -uplet $(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$, la relation (4.36) est encore vraie si l'hypothèse $\mu_k^2 \neq \mu_\ell^2$ pour $k \neq \ell$ n'est plus satisfaite. Par suite l'égalité (4.23) est vraie quels que soient les réels $\mu_1, \dots, \mu_m$ tels que $\mu_1, \dots, \mu_m = 0$. Nous nous placerons désormais dans ce cadre plus large.

De l'égalité (4.23) nous déduisons l'existence d'un $\nu_j \in [\min_{1 \leq i \leq m} \cos \mu_i, \max_{1 \leq i \leq m} \cos \mu_i]$ tel que

$$\rho_{m-1-j} 2^{m-1} = (-1)^{m-1} \frac{\Phi_j^{(m-1)}(\nu_j)}{(m-1)!}. \quad (4.37)$$

Pour assurer la positivité de ρ_{m-1-j} il suffit donc de choisir $\mu_1, \dots, \mu_m$ de façon à ce que :

$$(-1)^{m-1} \Phi_j^{(m-1)}(x) > 0, \quad x \in]-1, 1]. \quad (4.38)$$

Or, à partir de (4.35) et du lemme 4.4, nous obtenons :

$$\Phi_j^{(m-1)}(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}-i} \Theta_j(x), \quad (4.39)$$

la fonction Θ_j étant définie sur $] -1, 1]$ par :

$$\Theta_j(x) := \sum_{r=0}^j (-1)^{j-r} \sigma_{j-r}^m \theta_{m-1}^r(x), \quad (4.40)$$

où, pour simplifier, nous posons $\sigma_{j-r}^m := \sigma_{j-r}^m(\mu_1^2, \dots, \mu_m^2)$. Par conséquent, l'égalité (4.27) conduit à :

$$\begin{aligned} \Theta_j^{(m-1)}(x) &= \sum_{r=0}^j (-1)^{j-r} \sigma_{j-r}^m \sum_{k=0}^r A_k^{r,m-1} (\text{Arccos } x)^{2k+1}, \\ &= \sum_{k=0}^j B_k^j (\text{Arccos } x)^{2k+1}, \quad x \in]-1, 1], \end{aligned} \quad (4.41)$$

les coefficients B_k^j étant donnés par :

$$B_k^j := \sum_{r=k}^j (-1)^{j-r} \sigma_{j-r}^m A_k^{r,m-1}, \quad k = 0, \dots, j. \quad (4.42)$$

D'après (4.40) et (4.27), $\Theta_j^{(k)}(1) = 0$ pour tout $k \leq m-1$. Par conséquent la propriété (4.38) sera assurée dès que

$$\Theta_j^{(m-1)}(x) > 0, \quad x \in]-1, 1]. \quad (4.43)$$

L'égalité (4.41) montre que la condition (4.43) est automatiquement satisfaite dès que chaque coefficient B_k^j , $k \leq j-1$, est ≥ 0 , étant entendu que le coefficient $B_j^j = A_j^{j,i}$ est strictement positif puisqu'il vaut $(i!)^2$.

Compte tenu de l'égalité (4.42) nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Proposition 4.5. *Pour que le coefficient ρ_{m-1-j} soit strictement positif, il suffit que les j conditions suivantes soient satisfaites :*

$$\sum_{r=k}^j (-1)^{j-r} \sigma_{j-r}^m A_k^{r,m-1} \geq 0, \quad k = 0, \dots, j-1, \quad (4.44)$$

où les coefficients $A_k^{r,i}$ sont définis par (4.28).

Exemples 4.6. Illustrons ces résultats dans le cas qui nous intéresse, à savoir, lorsque les nombres $\lambda_k = i\mu_k$, $k = 1, \dots, m$, satisfont (4.1). Rappelons que le coefficient ρ_{m-1} est toujours strictement positif.

4.7.1. Supposons $m = 2$, $\lambda_1 = i\mu$ et $\lambda_2 = -i\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$. Le coefficient ρ_0 est strictement positif dès que

$$\sigma_1^2(\mu^2, \mu^2) A_0^{0,1} \leq A_0^{1,1},$$

c'est-à-dire, $2\mu^2 \leq 6$ où $\mu^2 \leq 3$.

4.7.2. Supposons $m = 3$, $\lambda = 0$, $\lambda_2 = i\mu$, $\lambda_3 = -i\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$. Appelons $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ les coefficients relatifs aux nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dans cet ordre. De l'égalité:

$$\omega_0 - \omega_1 x + \omega_2 (x + \mu^2) = \rho_0 - \rho_1 x + \rho_2 x^2,$$

on déduit en particulier que $\rho_0 = \omega_0$. Par conséquent, $\rho_0 > 0$.

Écrivons l'unique condition suffisante (4.44) assurant la positivité de ρ_1 :

$$\sigma_1^3(0, \mu^2, \mu^2) A_0^{0,2} \leq A_0^{1,2},$$

c'est-à-dire $8\mu^2 \leq 30$, ou $\mu^2 \leq \frac{15}{4}$.

4.7.3. Supposons $m = 4$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = i\mu$, $\lambda_4 = -i\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$. Si $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont les coefficients calculés à partir de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. dans cet ordre, nous avons :

$$\omega_0 - \omega_1 x + \omega_2 x(x + \mu^2) - \omega_3 x^2(x + \mu^2) = \rho_0 - \rho_1 x + \rho_2 x^2 - \rho_3 x^3,$$

donc en particulier, $\rho_0 = \omega_0 > 0$, $\rho_1 = \omega_1 > 0$. D'après (4.44) le coefficient ρ_2 est strictement positif dès que :

$$\sigma_1^4(0, 0, \mu^2, \mu^2) A_0^{0,3} \leq A_0^{1,3},$$

soit $72\mu^2 \leq 294$ ou $\mu^2 \leq \frac{49}{12}$.

Remarquons pour finir qu'une formule analogue à (4.21) existe dès que les nombres $\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2$ sont distincts. On peut en effet écrire :

$$\rho_{m-1-j} = (-1)^{m-1} \frac{e^{-\sum_{s=0}^m \lambda_s}}{2^{m-1}} \sum_{p=1}^m A_p \sum_{r=0}^j (-1)^r \sigma_{j-r}^m(\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2) \lambda_p^{2r}, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

où

$$A_p := \frac{\lambda_p}{\operatorname{sh} \lambda_p} \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^m (\operatorname{ch} \lambda_p - \operatorname{ch} \lambda_j)}, \quad p = 1, \dots, m.$$

La formule ci-dessus permet de retrouver le fait que $\rho_0, \dots, \rho_{m-1}$ sont réels quand $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ satisfont (4.1).

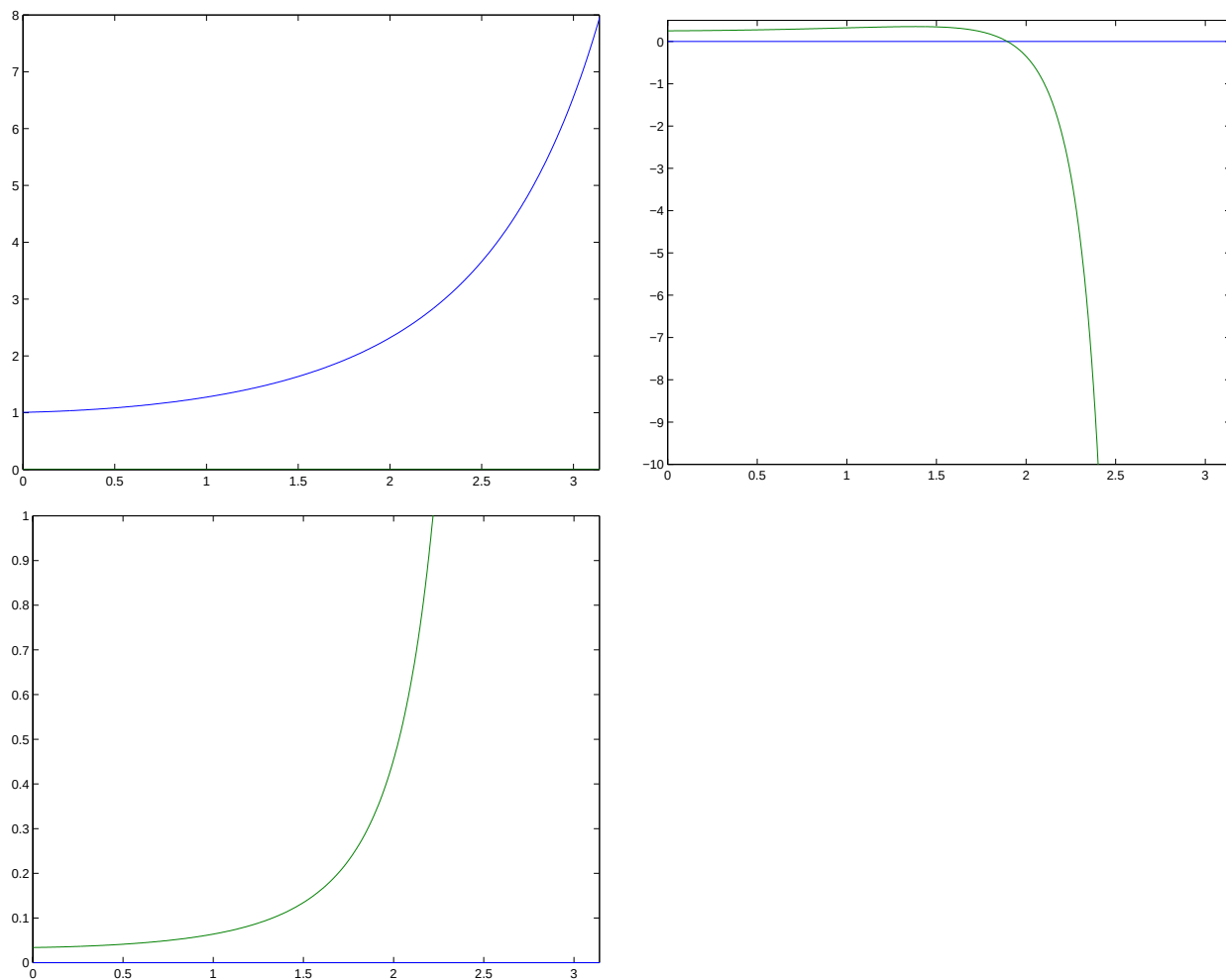


FIG. 4.1 – Pour $\lambda = (0, i\mu, -i\mu)$, les coefficients ρ_0 (en haut à gauche), ρ_1 (en haut à droite), ρ_2 , en fonction de μ .

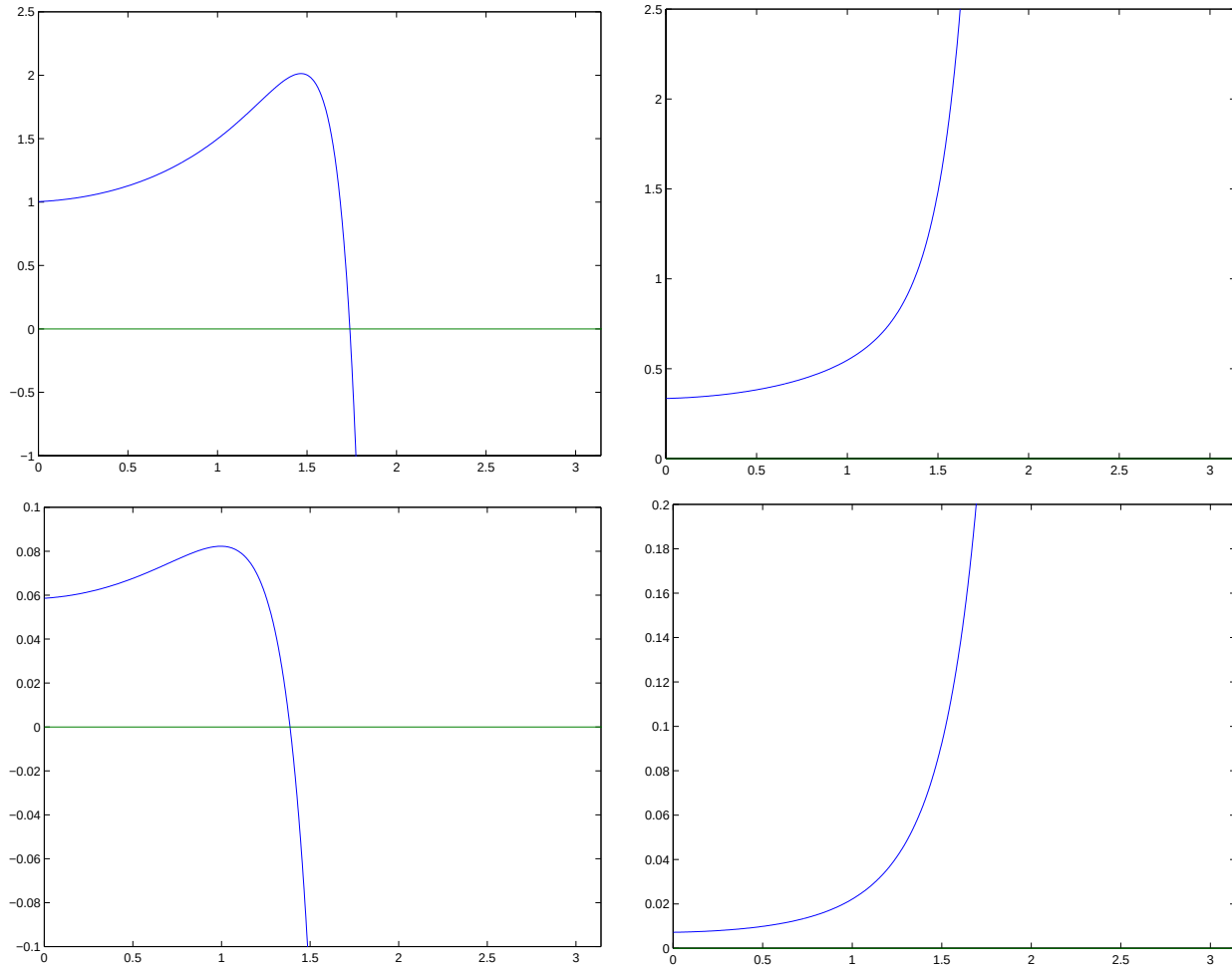


FIG. 4.2 – Pour $\lambda = (0, 0, i\mu, -i\mu)$, les coefficients ρ_0 (en haut à gauche), ρ_1 (en haut à droite), ρ_2 et ρ_3 en fonction de μ .

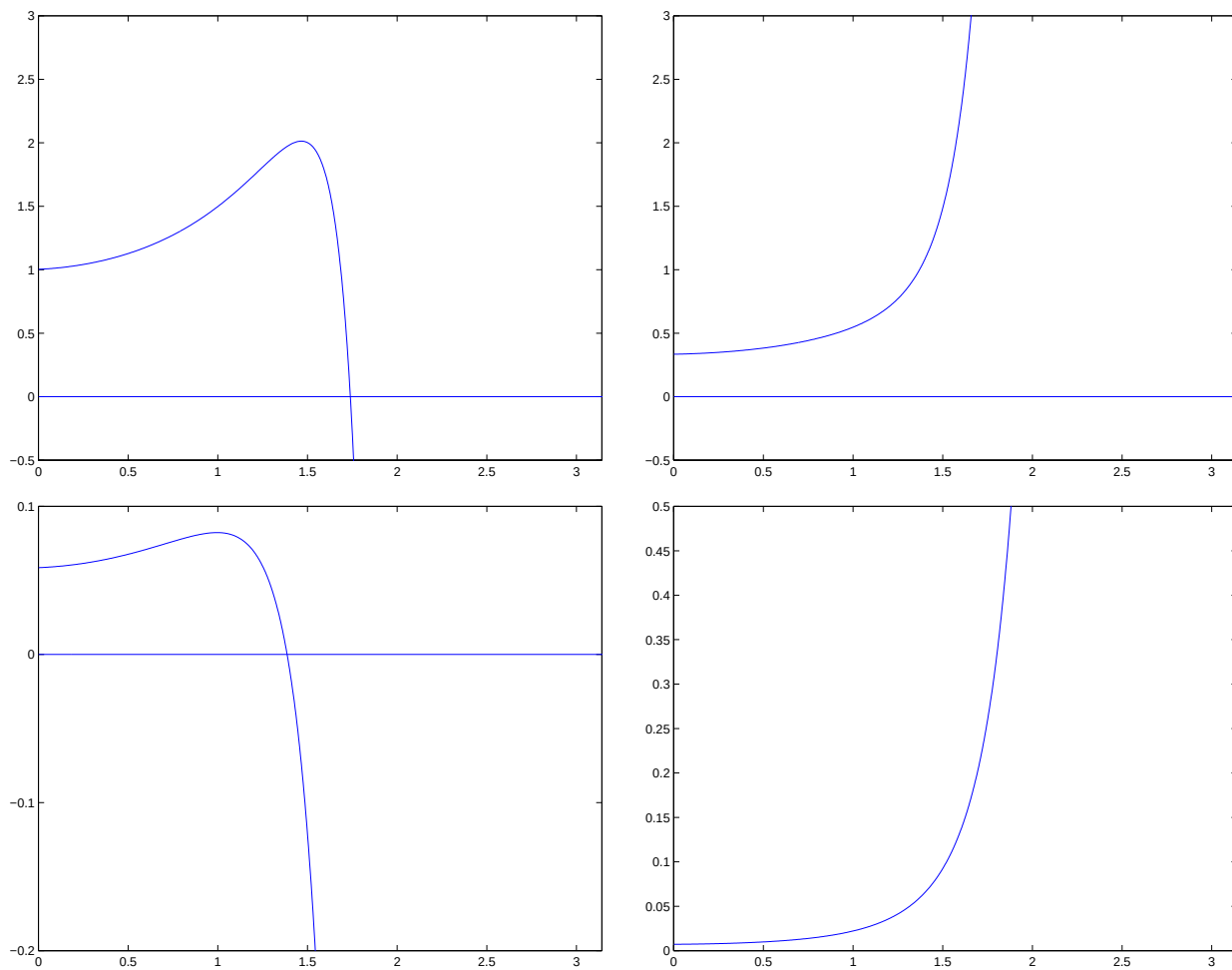


FIG. 4.3 – Pour $\lambda = (i\mu, -i\mu, i\mu, -i\mu)$, les coefficients ρ_0 (en haut à gauche), ρ_1 (en haut à droite), ρ_2 et ρ_3 en fonction de μ .

Chapitre 5

Approximation par des splines de Chebyshev uniformes

Nous présentons ici une application directe des chapitres précédents. En effet, la propriété d'orthonormalité d'une base est très importante pour les calculs. Lorsque l'on dispose d'une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel, le calcul de la meilleure approximation d'une fonction f dans cet espace se réduit au calculs des produits scalaires de la fonction f avec les fonctions de bases.

5.1 Formule de Taylor généralisée

Dans cette section, on étudie l'approximation de l'espace des fonctions $C^m([a, b])$ par l'espace $\mathcal{N}_\lambda^m$. Pour simplifier, nous noterons par L_i l'opérateur $L_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i$ et par G_i la fonction $G_{(\lambda_1, \dots, \lambda_i)}^i$.

Le théorème suivant nous donne la formule de Taylor généralisée [32]:

Théorème 5.1. *Soit f une fonction de classe C^m sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, on a*

$$f(x) = \sum_{k=1}^m L_{k-1}f(a)G_k(x-a) + \int_a^b G_m(x-t)L_m f(t)dt. \quad (5.1)$$

Preuve.

Fixons un point $x \in [a, b]$ et montrons les relations (5.1) par récurrence sur m . Supposons $m = 1$, c'est-à-dire, $\lambda = \lambda_1 \in \mathbb{R}$. Puisque $G_1(t) = 0$ pour $t < 0$ et $G_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ pour $t \geq 0$, nous avons alors :

$$\int_a^b G_{\lambda_1}^1(x-t)L_{\lambda_1}^1 f(t)dt = \int_a^x e^{\lambda_1(x-t)} f'(t)dt - \lambda_1 \int_a^x e^{\lambda_1(x-t)} f(t)dt. \quad (5.2)$$

L'intégration par partie de la première intégrale nous donne :

$$\begin{aligned} \int_a^x e^{\lambda_1(x-t)} f'(t) dt &= [f(t) e^{\lambda_1(x-t)}]_{t=a}^{t=x} + \lambda_1 \int_a^x e^{\lambda_1(x-t)} f(t) dt \\ &= f(x) - f(a) e^{\lambda_1(x-a)} + \lambda_1 \int_a^x e^{\lambda_1(x-t)} f(t) dt. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Les relations (5.2) et (5.3) aboutissent à :

$$f(x) = f(a) e^{\lambda_1(x-a)} + \int_a^b G_{\lambda_1}^1(x-t) L_{\lambda_1}^1 f(t) dt, \quad (5.4)$$

ce qui n'est autre que la formule (5.1) puisque $L_0 = I$.

Supposons que la relation (5.1) soit vérifiée pour $m-1$, c'est-à-dire que :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m-1} L_{k-1} f(a) G_k(x-a) + \int_a^b G_{m-1}(x-t) L_{m-1} f(t) dt. \quad (5.5)$$

En posant $g = L_{m-1} f$, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b G_m(x-t) L_m f(t) dt &= \int_a^x G_m(x-t) g'(t) dt - \lambda_m \int_a^x G_m(x-t) g(t) dt \\ &= [g(t) G_m(x-t)]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x G_m'(x-t) g(t) dt \\ &\quad - \lambda_m \int_a^x G_m(x-t) g(t) dt. \end{aligned}$$

Puisque $m \geq 2$, G_m est continue en 0. et $G_m(0)$. On obtient donc :

$$\int_a^b G_m(x-t) L_m f(t) dt = -L_{m-1} f(a) G_m(x-a) + \int_a^x L_{\lambda_m}^1 G_m(x-t) L_{m-1} f(t) dt.$$

De l'égalité (2.15), il résulte que $L_{\lambda_m} G_m(x-t) = G_{m-1}(x-t)$ pour tout $t \leq x$, donc :

$$\int_a^b G_{m-1}(x-t) L_{m-1} f(t) dt = L_{m-1} f(a) G_m(x-a) + \int_a^b G_m(x-t) L_m f(t) dt. \quad (5.6)$$

Par suite, l'égalité (5.1) se déduit aisément de (5.5) et (5.6). ■

Pour toute fonction f , on note u_f la fonction de $\mathcal{N}_{\lambda}^m|_{[a,b]}$ définie par :

$$u_f(x) := \sum_{k=1}^m L_{k-1} f(a) G_k(x-a), \quad x \in [a, b]. \quad (5.7)$$

Puisque $L_k G_j(t) = 0$ pour tout $j \leq k$ et pour tout $t \leq 0$, et $L_k G_{k+1}(0) = G_{\lambda_{k+1}}(0) = 1$, cette fonction satisfait :

$$L_k u_f(a) = L_k f(a), \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Par conséquent, de la définition des opérateurs L_k , on déduit que :

$$D^k u_f(a) = D^k f(a), \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Si l'on approche la fonction $f \in C^{m-1}([a, b])$ par $u_f \in \mathcal{N}_{\lambda}^m|_{[a, b]}$ définie par (5.7), alors nous obtenons l'estimation suivante [32] :

Théorème 5.2. *Pour toute fonction f de $C^m[a, b]$, on a :*

$$\|L_k(f - u_f)\|_{\infty} \leq C(b-a)^{m-k} \|L_m f\|_{\infty}, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (5.8)$$

où C est une constante ne dépendant que de m, k et f .

Pour montrer ce théorème, on utilise le lemme suivant :

Lemme 5.3. *Il existe un réel $M > 0$ tel que :*

$$|G_{\lambda}^m(x-y)| \leq M \frac{(x-y)_+^{m-1}}{(m-1)!}, \quad \forall x, y \in [a, b]. \quad (5.9)$$

Preuve.

La relation (5.9) est triviale lorsque $x < y$. Supposons donc $x - y \geq 0$. Notons $\lambda_{\min} := \min_{1 \leq i \leq m} \lambda_i$ et $\lambda_{\max} := \max_{1 \leq i \leq m} \lambda_i$. D'après (2.65), pour $x \geq 0$,

$$G_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}^m(x) = \delta_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}^{m-1} f_x,$$

où $f_x(t) = e^{tx}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il existe alors $\xi \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ tel que :

$$\begin{aligned} G_{\lambda}^m(x-y) &= \frac{1}{(m-1)!} f_{x-y}^{(m-1)}(\xi) \\ &= \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} e^{\xi(x-y)}. \end{aligned}$$

En posant $M = \max_{x \in [0, b-a]} \max_{t \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} e^{xt}$, on obtient (5.9). (Voir [32] pour la démonstration dans le cas générale des espaces de Chebyshev.) ■

Preuve du théorème 5.2.

Étant donné une fonction $u \in C^1([a, b])$ et une fonction g continue sur $[a, b]$, la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) := \int_a^x u(x-t)g(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

a pour dérivée :

$$\varphi'(x) = u(0)g(x) + \int_a^x u'(x-t)g(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Par conséquent :

$$L_1\varphi(x) = u(0)g(x) + \int_a^x L_1u(x-t)g(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

En itérant, si u est supposée C^k sur $[a, b]$, nous aurons, pour $k \leq m$:

$$L_k\varphi(x) = g(x) \sum_{i=0}^{k-1} u^{(i)}(0) + \int_a^x L_ku(x-t)g(t)dt, \quad x \in [a, b]. \quad (5.10)$$

Appliquons ceci à la fonction

$$\varphi := \int_a^b G_\lambda^m(\cdot - t)g(t)dt.$$

Puisque, d'après (2.15) $L_k G_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}^m = G_{(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m)}^{m-k}$, l'égalité (5.10) donne dans ce cas, pour tout $k \leq m-1$:

$$L_k\varphi(x) = \int_a^b G_{(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m)}^{m-k}(x-t)g(t)dt. \quad (5.11)$$

Considérons maintenant une fonction $\varphi \in C^m[a, b]$. La formule de Taylor généralisée (5.1) s'écrit :

$$f(x) = u_f(x) + \int_a^b G_m(x-t)L_m f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

où u_f est définie par (5.7). De (5.11) nous pouvons déduire que :

$$L_k f(x) - L_k u_f(x) = \int_a^b G_{(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m)}^{m-k}(x-t)L_m f(t)dt, \quad x \in [a, b]. \quad (5.12)$$

En appliquant le résultat du lemme 5.3 à la fonction de Green $G_{(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m)}^{m-k}$, on obtient l'existence d'un $M > 0$ tel que :

$$0 \leq G_{(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m)}^{m-k}(x-t) \leq M \frac{(x-t)_+^{m-k-1}}{(m-k-1)!}, \quad x, t \in [a, b].$$

Par conséquent, de (5.12) nous tirons :

$$\begin{aligned} |L_k f(x) - L_k u_f(x)| &\leq \int_a^b |G_{(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m)}^{m-k}(x-t)| \cdot |L_\lambda^m f(t)| dt \\ &\leq \frac{M}{(m-k-1)!} \|L_\lambda^m f\|_\infty \int_a^x (x-t)^{m-k-1} dt \\ &= C (x-a)^{m-k} \|L_\lambda^m f\|_\infty, \quad x \in [a, b]. \end{aligned}$$

où $C := \frac{M}{(m-k)!}$, d'où l'inégalité (5.8). ■

5.2 Approximation par des splines de Chebyshev dans un espace de Sobolev

Dans cette section, nous nous intéressons à l'approximation d'une fonction donnée par une spline de Chebyshev. Pour tout $h > 0$, notons $\mathcal{S}_{\lambda,h}^m$ l'espace des splines de Chebyshev associé à l'opérateur L_λ^m et la subdivision $h\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{S}_{\lambda,h}^m = \{S \in C^{m-2}(\mathbb{R}) / S|_{[hk, h(k+1)]} \in \mathcal{N}_\lambda^m, k \in \mathbb{Z}\}. \quad (5.13)$$

Cet espace peut être caractérisé par la proposition suivante.

Proposition 5.4. *Pour toute fonction S , on a :*

$$S \in \mathcal{S}_{\lambda,h}^m \iff S(h \cdot) \in \mathcal{S}_{h\lambda}^m. \quad (5.14)$$

Preuve.

Il est facile de vérifier l'équivalence :

$$v \in \mathcal{N}_\lambda^m \iff v(h \cdot) \in \mathcal{N}_{h\lambda}^m.$$

Une fonction S appartient à $\mathcal{S}_{\lambda,h}^m$ si et seulement si elle est C^{m-2} , pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe une fonction $v_k \in \mathcal{N}_\lambda^m$ telle que :

$$S(t) = v_k(t), \quad t \in [hk, h(k+1)],$$

c'est-à-dire,

$$S(hu) = v_k(hu), \quad u \in [k, k+1[.$$

L'équivalence précédente prouve donc (5.13). ■

Corollaire 5.5. *Supposons que $|\operatorname{Im}(\lambda_k)| < \pi$ pour tout $k = 1, \dots, m$. Alors pour tout $h \in]0, 1]$ et pour tout $S \in \mathcal{S}_{\lambda,h}^m$, il existe des coefficients $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ uniques tels que :*

$$S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k N_{h\lambda}^m\left(\frac{x}{h} - k\right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.15)$$

Preuve.

En utilisant la proposition 5.4, il suffit de vérifier que tout élément $S \in \mathcal{S}_{h\lambda}^m$ se décompose de manière unique sous la forme

$$S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k N_{h\lambda}^m(x - k), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ceci a effectivement lieu puisque l'hypothèse sur les parties imaginaires fait que, pour tout $h \in]0, 1]$, $h\lambda_s - h\lambda_k \notin 2i\pi\mathbb{Z}^*$, $s, k = 1, \dots, m$. ■

On définit la fonction $N_{\lambda,h}^m$ par

$$N_{\lambda,h}^m(x) = N_{h\lambda}^m\left(\frac{x}{h}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.16)$$

La famille $\{N_{\lambda,h}^m(\cdot - kh), k \in \mathbb{Z}\}$ est alors une base de $S_{\lambda,h}^m$. Par conséquent, le théorème 3.6 d'orthogonalité des B-splines nous donne le résultat suivant :

Proposition 5.6. *On note $\rho(\lambda) = (\rho_0(\lambda), \dots, \rho_{m-1}(\lambda))$, la suite de nombres positifs telle que :*

$$\langle N_{\lambda}^m(\cdot - i), N_{\lambda}^m(\cdot - j) \rangle_{\rho(\lambda)} = \delta_{i,j} \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

La famille $\{N_{\lambda,h}^m(\cdot - jh), j \in \mathbb{Z}\}$ est orthonormée par rapport au produit scalaire pondéré $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\rho(h,\lambda)}$, si et seulement si

$$\rho_k(h, \lambda) = h^{2k-1} \rho(h\lambda), \quad k = 0, \dots, m-1. \quad (5.17)$$

Preuve.

Par un changement de variable, on obtient pour tout $k = 0, \dots, m-1$

$$\int_{\mathbb{R}} D^k N_{\lambda,h}^m(x - ih) D^k N_{\lambda,h}^m(x - jh) dx = \frac{1}{h^{2k-1}} \int_{\mathbb{R}} D^k N_{h\lambda}^m(x - i) D^k N_{h\lambda}^m(x - j) dx.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \langle N_{\lambda,h}^m(\cdot - ih), N_{\lambda,h}^m(\cdot - jh) \rangle_{\rho(h,\lambda)} &= \sum_{k=0}^{m-1} \rho_k(h, \lambda) \int_{\mathbb{R}} D^k N_{h\lambda}^m(x - ih) D^k N_{h\lambda}^m(x - jh) dx, \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho_k(h, \lambda)}{h^{2k-1}} \int_{\mathbb{R}} D^k N_{h\lambda}^m(x - i) D^k N_{h\lambda}^m(x - j) dx. \end{aligned}$$

Du fait de l'unicité de la suite $\rho(\lambda)$, cette quantité sera égale à $\delta_{i,j}$ pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$ si et seulement si l'égalité (5.17) est satisfaite. ■

Pour une fonction $f \in H^{m-1}(\mathbb{R})$ donné et un nombre $h > 0$ donné, on considère le problème d'approximation suivant :

$$\text{Trouver une fonction } \bar{g} \in \mathcal{S}_{\lambda,h}^m \text{ telle que : } \|f - \bar{g}\|_{\rho(h,\lambda)} = \min_{g \in \mathcal{S}_{\lambda,h}^m} \|f - g\|_{\rho(h,\lambda)}. \quad (5.18)$$

où $\|\cdot\|_{\rho}$ est la norme de Sobolev pondérée associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\rho}$, c'est-à-dire :

$$\|f\|_{\rho} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{\rho}}.$$

Notons que cette norme est équivalente à la norme de Sobolev standard $\|f\|_m$, puisque

$$\left(\min_i \rho_i \right) \|f\|_m \leq \|f\|_{\rho} \leq \left(\max_i \rho_i \right) \|f\|_m.$$

Une conséquence de l'orthonormalité de la base des B-splines est le théorème classique suivant.

Théorème 5.7. *La solution du problème (5.18) est donnée par*

$$\bar{g}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, N_{\lambda,h}^m(\cdot - hj) \rangle_{\rho(h,\lambda)} N_{\lambda,h}^m(x - hj), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (5.19)$$

De plus, la norme de l'erreur est donnée par

$$\|f - \bar{g}\|_{\rho(h,\lambda)}^2 = \|f\|_{\rho(h,\lambda)}^2 - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\langle f, N_{\lambda,h}^m(\cdot - jh) \rangle_{\rho(h,\lambda)} \right)^2.$$

Notons $P_{\lambda,h}$ l'opérateur de projection orthogonale sur $S_{\lambda,h}^m$ par rapport au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\rho(h,\lambda)}$, c'est-à-dire, l'opérateur tel que :

$$\bar{g} = P_{\lambda,h}f.$$

Il est important de remarquer que cet opérateur $P_{\lambda,h}$ est local. En effet, pour un $x \in \mathbb{R}$ fixé, $(P_{\lambda,h}f)(x)$ ne dépend que de la restriction de f sur l'intervalle $[x - mh, x + mh]$. Ceci est dû à la compacité du support de la B-spline $N_{\lambda,h}^m$.

De plus, le théorème suivant nous donne une estimation de l'erreur d'approximation, en montrant que l'ordre de convergence de h tends vers 0 .

Théorème 5.8. *On note $H_{\infty}^m(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions bornées ainsi que leur dérivées successives jusqu'à l'ordre m . Pour toute fonction $f \in H_{\infty}^m(\mathbb{R}) \cap H^{m-1}(\mathbb{R})$ et $k \in \{1, \dots, m-1\}$ il existe une constante positive C (dépend seulement de m, k et λ) telle que*

$$\|D^k(P_{\lambda,h}f - f)\|_{\infty} \leq Ch^{m-k} \|D^m f\|_{\infty}. \quad (5.20)$$

Preuve.

Soit $Q_{\lambda,h} : H_{\infty}^m(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_{\lambda,h}$ le standard quasi-interpolant associé à L_{λ} (Voir[32], page 393). On a alors

$$\|D^k \Delta_{\lambda,h}\|_{\infty} \leq C_1 h^{m-k} \|D^m f\|_{\infty}, \quad (5.21)$$

avec la notation $\Delta_{\lambda,h} = P_{\lambda,h}f - f$ et la constante C_1 ne dépend que de m, k et λ .

Comme $\mathcal{S}_{\lambda,h}$ est invariant par $P_{\lambda,h}$, c'est-à-dire, $P_{\lambda,h}Q_{\lambda,h} = Q_{\lambda,h}$, alors

$$\begin{aligned} \|D^k(f - P_{\lambda,h}f)\|_{\infty} &= \|D^k(\Delta_{\lambda,h} - P_{\lambda,h}\Delta_{\lambda,h})\|_{\infty} \\ &\leq C_1 h^{m-k} \|D^m f\|_{\infty} + \|D^k P_{\lambda,h}\Delta_{\lambda,h}\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

En utilisant l'égalité $\int_{\mathbb{R}} D^n N_{\lambda,h}^m(x - jh)dx = h^{1-n} \int_{\mathbb{R}} D^n N_{h\lambda}^m(x)dx$, on obtient pour le second membre :

$$\begin{aligned}
\|D^k P_{\lambda,h} \Delta_{\lambda,h}\|_{\infty} &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} | \langle \Delta_{\lambda,h}, N_{\lambda,h}^m(\cdot - jh) \rangle_{\rho(\lambda,h)} | \|N_{\lambda,h}^m(\cdot - jh)\|_{\infty} \\
&\leq h^{-k} \|D^k N_{h\lambda}^m\|_{\infty} \sup_{j \in \mathbb{Z}} | \langle \Delta_{\lambda,h}, N_{\lambda,h}^m(\cdot - jh) \rangle_{\rho(\lambda,h)} | \\
&\leq \|D^k N_{h\lambda}^m\|_{\infty} \sum_{n=0}^{m-1} h^{2n-1-k} \rho_n(h\lambda) \sup_{j \in \mathbb{Z}} | \langle D^n \Delta(\lambda, h), D^n N_{\lambda,h}^m(\cdot - jh) \rangle | \\
&\leq C_2 h^{m-k} \|D^m f\|_{\infty},
\end{aligned}$$

où C_2 est une constante qui dépend seulement de m , k et λ . L'inégalité (5.20) en découle avec $C = C_1 + C_2$. ■

Comme l'opérateur $P_{\lambda,h}$ est local, on peut l'appliquer à des fonctions non bornées tout en préservant l'optimalité de l'ordre de convergence.

Corollaire 5.9. *Soit la fonction $f \in C^m(\mathbb{R})$. Alors $P_{\lambda,h}$ est bien défini localement et il existe une constante positive C telle que*

$$|D^k(P_{\lambda,h}f - f)(x)| \leq Ch^{m-k} \|D^m f|_{[x-mh, x+mh]}\|_{\infty}. \quad (5.23)$$

Preuve.

Application directe du théorème précédent. ■

5.3 Approche Numérique

Le Théorème 5.7 nous montre l'intérêt de l'orthonormalité des B-splines. En effet, le calcul de la meilleure approximation d'une fonction au sens de la norme de Sobolev pondérée se réduit au calcul des coefficients de type Fourier :

$$c_j = \langle f, N_{h\lambda}^m(\cdot - kh) \rangle_{\rho(h,\lambda)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.24)$$

Cependant, en pratique, on ne peut pas calculer ces quantités (5.24) exactement. Par conséquent, nous avons besoin de construire un algorithme pour les approcher numériquement.

De façon classique, une *méthode de quadrature* approche l'intégrale d'une fonction, multipliée éventuellement par une fonction-poids, par une combinaison linéaire des valeurs de cette fonction en des points particuliers appelés *noeuds*.

L'idée de la méthode de quadrature est donc de trouver des poids η_k et des noeuds x_k tels que :

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{k=0}^r \eta_k f(x_k). \quad (5.25)$$

Les questions principales qui se posent sont le choix des noeuds et la détermination des poids η_k . Pour les noeuds, on a deux options. On peut, d'une part fixer les abscisses et on détermine les poids à partir d'un système linéaire à résoudre. D'autre part, on peut considérer que les noeuds sont aussi des inconnues. Le premier cas est plus facile à résoudre mais le second est plus *précis*. Les noeuds doivent souvent être choisis équidistants pour deux raisons. Premièrement, dans de nombreuses applications, la fonction f est donnée seulement par ses valeurs en des points équidistants. La deuxième raison provient des propriétés de translation de l'espace des splines.

Considérons le problème de la détermination des poids η_k . La technique classique consiste à choisir les poids de façon à ce que la formule (5.25) soit exacte pour les polynômes. On peut généraliser cette technique en remplaçant l'espace des polynômes par un espace de Chebyshev. Ceci mène à la définition suivante.

Définition 5.10. *L'ordre de la méthode de quadrature est le plus grand entier q tel qu'il existe un espace de Chebyshev $\mathcal{E}_q$ de dimension q vérifiant :*

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{k=0}^r \eta_k f(x_k), \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{E}_q.$$

Dans cette section, on propose une méthode numérique pour calculer les coefficients c_k définis en (5.24). Il s'agit d'approcher le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ par une forme bilinéaire discrète.

Soit $m > 1$ et $d = 0, \dots, m-1$ fixés. Pour toutes fonctions $f, g \in H^{m-1}(\mathbb{R})$, on définit la forme bilinéaire suivante :

$$Q_d(f, g) := \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} A_{i,j}^d f\left(\frac{i}{m-1}\right) g\left(\frac{j}{m-1}\right), \quad (5.26)$$

$A_d = (A_{i,j}^d)_{0 \leq i,j \leq m-1}$ étant une matrice symétrique d'ordre m . Cette matrice A_d est déterminée de sorte que :

$$\int_0^1 f^{(d)}(x)g^{(d)}(x)dx = Q_d(f, g), \quad \forall f, g \in \mathcal{N}_\lambda^m. \quad (5.27)$$

En tenant compte de la symétrie de A_d , cela revient à résoudre un système linéaire $\frac{m(m+1)}{2} \times \frac{m(m+1)}{2}$.

On évalue alors l'intégrale $\int_0^1 f^{(d)}(x)g^{(d)}(x)dx$ par la formule approchée

$$\int_0^1 f^{(d)}(x)g^{(d)}(x)dx \approx Q_d(f, g), \quad f, g \in H^{m-1}(\mathbb{R}). \quad (5.28)$$

Exemples 5.11.

5.10.1. Fixons $m = 3$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$. Il faut vérifier l'exactitude de l'approximation pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Pour $d = 0$, on a les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 f(x) = 1, \quad g(x) = 1 & : \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 A_{ij}^0 = 1 \\
 f(x) = 1, \quad g(x) = x & : \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \frac{j}{2} A_{ij}^0 = \frac{1}{2} \\
 f(x) = 1, \quad g(x) = x^2 & : \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \left(\frac{j}{2}\right)^2 A_{ij}^0 = \frac{1}{3} \\
 f(x) = x, \quad g(x) = x & : \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \frac{j}{2} \frac{i}{2} A_{ij}^0 = \frac{1}{3} \\
 f(x) = x, \quad g(x) = x^2 & : \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \frac{j}{2} \left(\frac{i}{2}\right)^2 A_{ij}^0 = \frac{1}{4} \\
 f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 & : \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \left(\frac{j}{2}\right)^2 \left(\frac{i}{2}\right)^2 A_{ij}^0 = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

La solution de ce système est la matrice A^0 donnée par :

$$A^0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{30} \\ \frac{1}{15} & \frac{8}{15} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}.$$

On obtiendrait de même :

$$A^1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 16 & -32 & 16 \\ -32 & 64 & -32 \\ 16 & -32 & 16 \end{pmatrix}.$$

5.10.2. Soit $m = 2$, et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Conformément à (5.27) et (5.26), la détermination de A_0 se fait par les conditions

$$\int_0^1 e^{(\lambda_\ell + \lambda_k)x} dx = \sum_{i,j=0,1} e^{\lambda_k i + \lambda_\ell j}, \quad \ell, k = 1, 2,$$

c'est-à-dire en résolvant le système :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2e^{\lambda_1} & e^{2\lambda_1} \\ 1 & e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} & e^{\lambda_1 + \lambda_2} \\ 1 & 2e^{\lambda_2} & e^{2\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{00}^0 \\ A_{10}^0 \\ A_{11}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{2\lambda_1} - 1}{2\lambda_1} \\ \frac{e^{\lambda_1 + \lambda_2} - 1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ \frac{e^{2\lambda_2} - 1}{2\lambda_2} \end{bmatrix},$$

le quotient $\frac{e^\alpha - 1}{\alpha}$ étant par convention égal à 1 si $\alpha = 0$.

On applique le même raisonnement pour approcher $\int_a^b f^{(d)}(x)g^{(d)}(x)dx$. En effet, si l'on définit les fonctions $\tilde{f}, \tilde{g}$ sur $[0, 1]$ par

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= f(a + \frac{x}{h}), & x \in [0, 1] \\ \tilde{g}(x) &= g(a + \frac{x}{h}), & x \in [0, 1], \end{aligned} \quad (5.29)$$

avec $b - a = h > 0$, alors :

$$\int_a^b f^{(d)}(x)g^{(d)}(x)dx = \frac{1}{h^{2d-1}} \int_0^1 \tilde{f}^{(d)}(x)\tilde{g}^{(d)}(x)dx. \quad (5.30)$$

En approchant le second membre de cette égalité par (5.28), on obtient la formule suivante :

$$\int_a^b f^{(d)}(x)g^{(d)}(x)dx \approx \frac{1}{h^{2d-1}} Q_d(\tilde{f}, \tilde{g}). \quad (5.31)$$

Pour calculer numériquement la projection d'une fonction f sur $\mathcal{S}_{\lambda,h}^m$ au sens du produit scalaire de type Sobolev, il suffit d'approcher les coefficients

$$c_k = f < N_{\lambda,h}^m(\cdot - k) >_{\rho(h,\lambda)}.$$

On a

$$c_k = \sum_{d=0}^{m-1} \rho_d(h, \lambda) \sum_{\ell=0}^{m-1} \int_{\ell h}^{(\ell+1)h} f^{(d)}(x) N_{\lambda,h}^m{}^{(d)}(x - kh) dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.32)$$

Les figures ci-dessous nous montrent la meilleure approximation au sens du produit scalaire $< \cdot, \cdot >_{\rho(h,\lambda)}$ (ligne continue), et la fonction approchée (pointillées). Nous remarquons clairement l'effet de forme, suivant les paramètres λ_k .

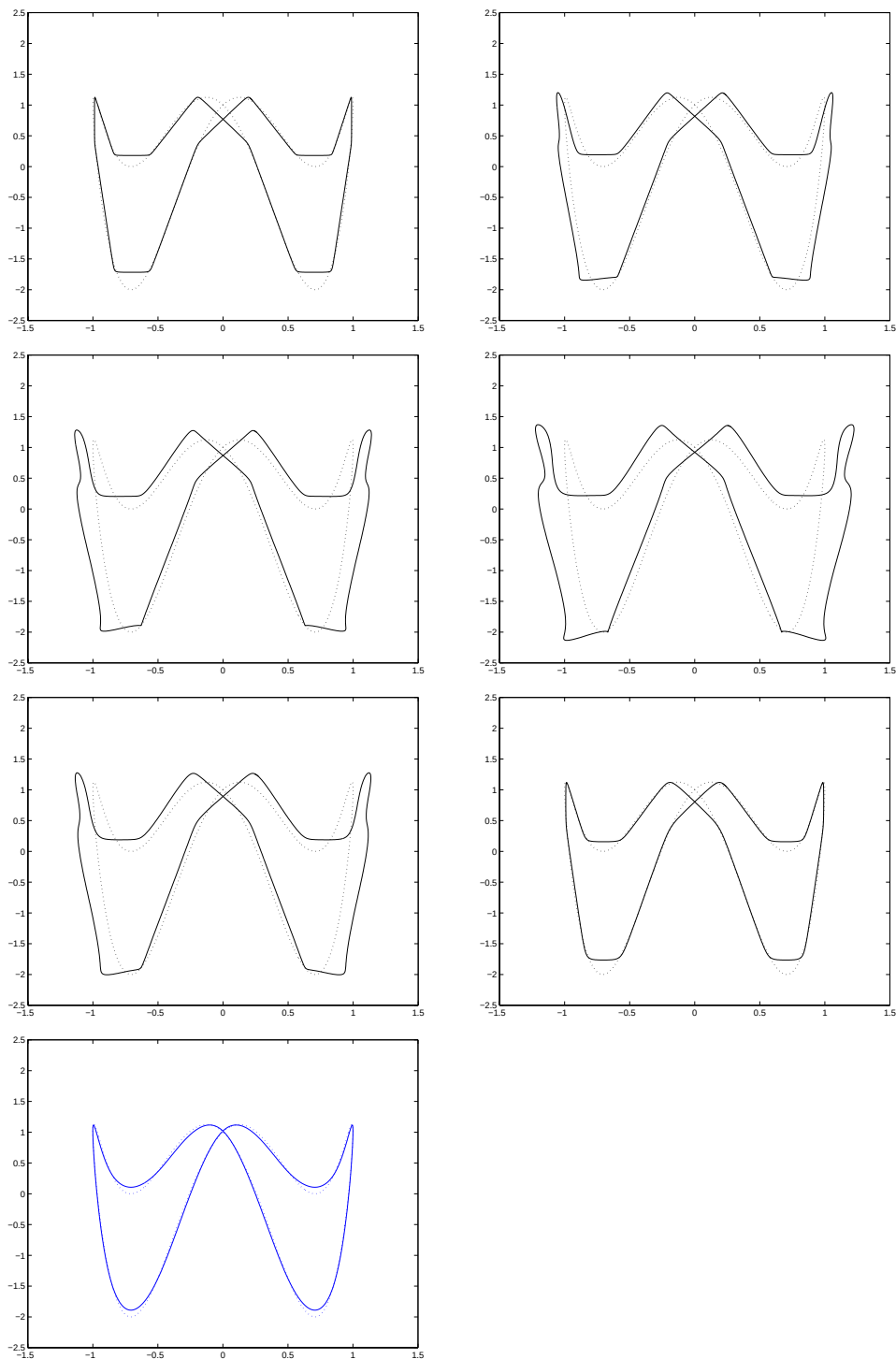


FIG. 5.1 – Approximation par des splines de Chebyshev avec (de gauche à droite de haut en bas) $\lambda = (0, 0, -100, 100)$, $\lambda = (1, -1, 100, -100)$, $\lambda = (2, -2, 100, -100)$, $\lambda = (3, -3, -100, 100)$, $\lambda = (-2, 2, -80, 80)$, $\lambda = (0, 0, 70, -70)$ et $\lambda = (0, 0, 0, 0)$ ($h = \frac{1}{12}$)

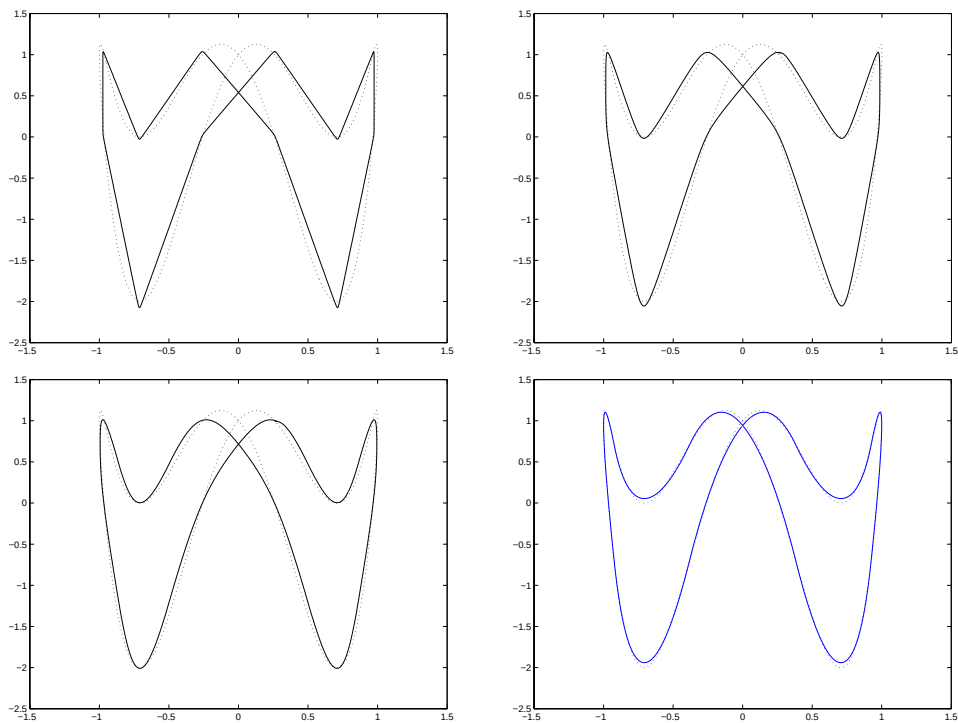


FIG. 5.2 – Approximation par des splines de Chebyshev avec (de gauche à droite de haut en bas) $\lambda = (0, -100, 100)$, $\lambda = (0, -50, 50)$, $\lambda = (0, -25, 25)$ et $\lambda = (0, 0, 0)$ ($h = \frac{1}{12}$).

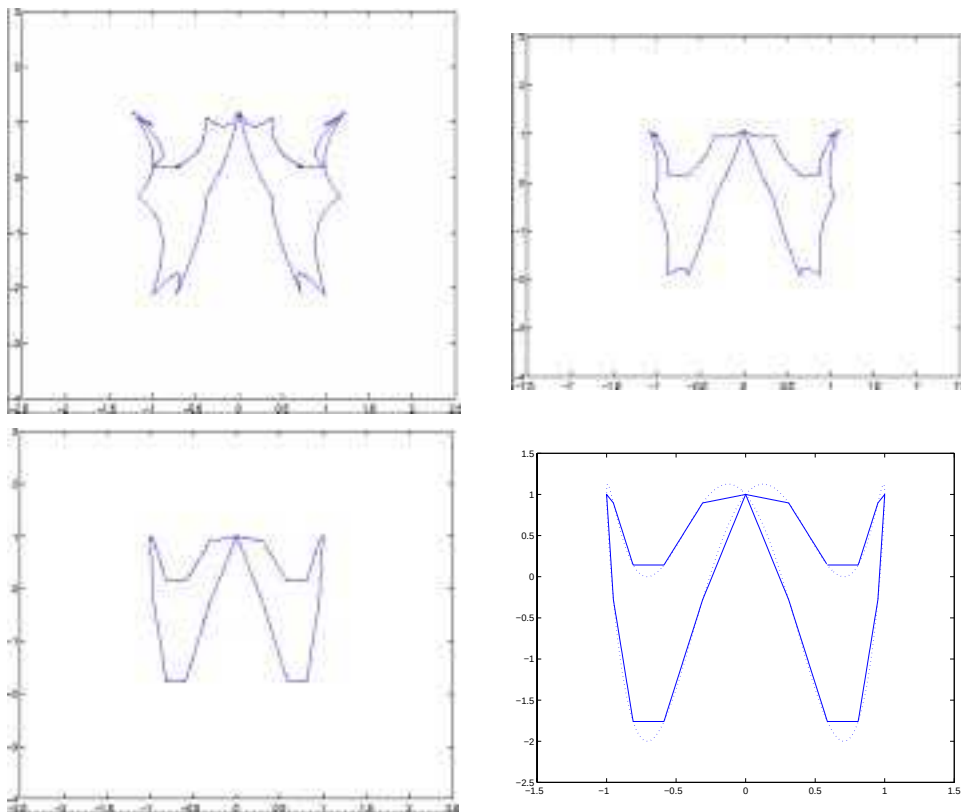


FIG. 5.3 – Approximation par des splines de Chebyshev avec (de gauche à droite de haut en bas) $\lambda = (-30, 30)$, $\lambda = (-20, 20)$, $\lambda = (-1, 1)$ et $\lambda = (0, 0)$ ($h = \frac{1}{20}$).

Annexe A

Les différences divisées

Nos démonstrations s'appuient de façon essentielle sur la notion de différences divisées. C'est pourquoi, pour en faciliter la lecture, nous avons rassemblé dans cette annexe des propriétés basiques autour de cette notion, auxquelles nous avons fait appel tout au long de ce travail.

A.1 Interpolation de Lagrange et différences divisées

Soit $x_0, \dots, x_n$ ($n+1$) points distincts réels ou complexes et f une fonction définie sur un sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ contenant $x_0, \dots, x_n$. On sait qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n , qui interpole f en $x_0, \dots, x_n$, c'est-à-dire, qui prend les mêmes valeurs que f en ces points. Nous appellerons *polynôme d'interpolation en $x_0, \dots, x_n$* et noterons $P[f, x_0, \dots, x_n]$ ce polynôme. Il est donc caractérisé par :

$$\bullet \quad P[f, x_0, \dots, x_n] \in \mathcal{P}_n, \quad (\text{A.1})$$

$$\bullet \quad P[f, x_0, \dots, x_n](x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n. \quad (\text{A.2})$$

Définition A.1 On appelle *différence divisée d'ordre n de f , basée sur les points $x_0, \dots, x_n$* , et on note $\delta_{x_0, \dots, x_n}^n f$, le coefficient du terme de degré n de $P[f, x_0, \dots, x_n]$.

Le polynôme d'interpolation de f en $x_0, \dots, x_n$ est évidemment indépendant de l'ordre des points. il en résulte immédiatement que le nombre $\delta_{x_0, \dots, x_n}^n f$ lui non plus ne dépend pas de l'ordre de $x_0, \dots, x_n$.

Considérons le polynôme Q défini par :

$$Q := P[f; x_0, \dots, x_n] - P[f; x_0, \dots, x_{n-1}]. \quad (\text{A.3})$$

Ce polynôme appartient à $\mathcal{P}_n$ et il satisfait :

$$Q(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Par conséquent il existe une constante C telle que

$$Q(x) = C(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}).$$

Il en résulte que :

$$P[f; x_0, \dots, x_n](x) = P[f; x_0, \dots, x_{n-1}](x) + C(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}),$$

et puisque $P[f; x_0, \dots, x_{n-1}] \in \mathcal{P}_{n-1}$, la constante C est le terme le plus haut degré de $P[f; x_0, \dots, x_n]$, donc $C = \delta_{x_0, \dots, x_n}^n f$. Nous obtenons ainsi les différentes égalités :

$$P[f; x_0, \dots, x_n](x) = P[f; x_0, \dots, x_{n-1}](x) + \delta_{x_0, \dots, x_n}^n f(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} P[f; x_0, \dots, x_{n-1}](x) &= P[f; x_0, \dots, x_{n-2}](x) + \delta_{x_0, \dots, x_{n-1}}^{n-1} f(x - x_0) \dots (x - x_{n-2}) \\ &\vdots \\ P[f; x_0, x_1, x_2](x) &= P[f; x_0, x_1] + \delta_{x_0, x_1, x_2}^2 f(x - x_0)(x - x_1) \\ P[f; x_0, x_1](x) &= P[f; x_0] + \delta_{x_0, x_1}^1 f(x - x_0) \\ P[f; x_0] &= f(x_0) =: \delta_{x_0}^0 f. \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces égalités, il vient :

$$\begin{aligned} P[f; x_0, \dots, x_n](x) &= \delta_{x_0}^0 f + \delta_{x_0, x_1}^1 f(x - x_0) + \dots \\ &\quad + \delta_{x_0, \dots, x_{n-1}}^{n-1} f(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Les différences divisées successives $\delta_{x_0}^0 f, \delta_{x_0, x_1}^1 f, \dots, \delta_{x_0, \dots, x_{n-1}}^{n-1} f$ sont donc les coordonnées du polynôme d'interpolation de f en $x_0, \dots, x_n$ dans la base

$$1, (x - x_0), \dots, (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

appelée la base de Newton associée aux points $x_0, \dots, x_n$ (dans l'ordre).

Le polynôme $P[f; x_0, \dots, x_n]$ ne dépendant pas de l'ordre des x_i , nous pouvons le construire à partir de $x_0, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ comme dans (A.5) ou bien à partir de $x_0, \dots, x_{n-2}, x_n, x_{n-1}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} P[f; x_0, \dots, x_n](x) &= P[f; x_0, \dots, x_{n-2}](x) + \delta_{x_0, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}}^{n-1} f(x - x_0) \dots (x - x_{n-2}) \\ &\quad + \delta_{x_0, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n}^n f(x - x_0) \dots (x - x_{n-2})(x - x_{n-1}), \\ P[f; x_0, \dots, x_n](x) &= P[f; x_0, \dots, x_{n-2}](x) + \delta_{x_0, \dots, x_{n-2}, x_n}^{n-1} f(x - x_0) \dots (x - x_{n-2}) \\ &\quad + \delta_{x_0, \dots, x_{n-2}, x_n, x_{n-1}}^n f(x - x_0) \dots (x - x_{n-2})(x - x_n). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

En retranchant membre à membre les deux égalités ci-dessus écrites pour $x = x_n$, nous en déduirons après simplification par $(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-2})$:

$$\delta_{x_0, \dots, x_n}^n f = \frac{\delta_{x_0, \dots, x_{n-2}, x_n}^{n-1} f - \delta_{x_0, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}}^{n-1} f}{x_n - x_{n-1}}. \quad (\text{A.7})$$

Supposons que pour un ordre n donné, quels que soient les points $x_0, \dots, x_{n-1}$:

$$\delta_{x_0, \dots, x_{n-1}}^{n-1} f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_{n-1})}. \quad (\text{A.8})$$

Appliquant la formule (A.8) à la fois à $\delta_{x_0, \dots, x_{n-2}, x_n}^n f$ et $\delta_{x_0, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}}^n f$, l'égalité (A.7) aboutira à :

$$\delta_{x_0, \dots, x_n}^n f = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}.$$

L'égalité (A.8) est évidemment satisfaite pour l'ordre 0 puisque $\delta_{x_0}^0 f = f(x_0)$. Donc la relation (A.8) est valable quel que soit l'ordre et quels que les points $x_0, \dots, x_n$.

En résumé, les différences divisées d'ordre inférieur ou égal à n en des points distincts de Ω d'une fonction f définie sur Ω satisfont les propriétés suivantes :

(i) pour tout $k \leq n$, tous points distincts $x_0, \dots, x_k \in \Omega$, et toute permutation σ de $\{1, \dots, k\}$,

$$\delta_{x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(k)}}^k f = \delta_{x_0, \dots, x_k}^k f,$$

(ii) pour tout $x_0 \in \Omega$, $\delta_{x_0}^0 f = f(x_0)$,

(iii) pour tout $k = 1, \dots, n$, et tout points distincts $x_0, \dots, x_k$ de Ω ,

$$\delta_{x_0, \dots, x_k}^k f = \frac{\delta_{x_1, \dots, x_k}^{k-1} f - \delta_{x_0, \dots, x_{k-1}}^{k-1} f}{x_k - x_0}.$$

De plus, on peut vérifier facilement que ces trois propriétés caractérisent les différences divisées de f .

A.2 Interpolation d'Hermite et différences divisées

Supposons désormais les points $x_0, \dots, x_n$ non nécessairement distincts. Il existe alors une permutation σ de l'ensemble $\{0, \dots, n\}$ telle que

$$(x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = (\xi_0^{[\mu_0]}, \dots, \xi_r^{[\mu_r]}),$$

où $r \in \mathbb{N}$, $\mu_0, \dots, \mu_r \in \mathbb{N}^*$, et où $\xi_0, \dots, \xi_r$ sont deux à deux distincts. Si f est suffisamment dérivable sur un ouvert contenant les points $x_0, \dots, x_m$, il existe à nouveau un

unique polynôme $P[f; x_0, \dots, x_n]$ qui interpole f en les points $x_0, \dots, x_n$ (interpolation d'Hermite) au sens suivant :

- $P[f; x_0, \dots, x_n] \in \mathcal{P}_n$,
- $P[f; x_0, \dots, x_n]^{(k)}(\xi_j) = f^{(k)}(\xi_j), \quad k = 0, \dots, \mu_j - 1, \quad j = 0, \dots, r.$

La différence divisée $\delta_{x_0, \dots, x_n}^n f$ est définie comme précédemment comme le coefficient du terme x^n de polynôme $P[f; x_0, \dots, x_n]$, et à nouveau ne dépend donc pas de l'ordre des points $x_0, \dots, x_n$.

Définissons le polynôme Q comme en (A.3). Distinguons deux cas suivant que x_n est ou n'est pas égal à l'un des points $x_0, \dots, x_{n-1}$, on obtient ici encore facilement la relation (A.4) qui, itérée, conduit encore à (A.5).

Par exemple si f est dérivable n fois et si $x_0 = \dots = x_n$, le polynôme qui interpole f en $x_0, \dots, x_n$ est son polynôme de Taylor d'ordre n en x_0 , i.e :

$$P[f; \underbrace{x_0, \dots, x_0}_{n+1 \text{ fois}}](x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

donc

$$\delta_{x_0, \dots, x_0}^n f = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.9})$$

A partir de l'égalité (A.6), on obtient encore pour tout $x \notin \{x_0, \dots, x_{n-2}\}$:

$$\delta_{x_0, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}}^{n-1} f + (x - x_{n-1}) \delta_{x_0, \dots, x_{n-1}, x_n}^n = \delta_{x_0, \dots, x_{n-2}, x_n}^{n-1} f + (x - x_n) \delta_{x_0, \dots, x_{n-1}, x_n}^n. \quad (\text{A.10})$$

Par continuité de l'égalité (A.10) de fait valable sur $\mathbb{R}$. En l'écrivant pour $x = x_n$, si l'on suppose $x_n \neq x_{n-1}$, on obtient ici encore l'égalité (A.7)

En résumé, les différences divisées d'ordre $\leq n$ en des points quelconques d'un ouvert Ω sur lequel la fonction f est C^n , satisfont les propriétés suivantes :

- (1) pour tout $k \leq n$, tout $(x_0, \dots, x_k) \in \Omega^{k+1}$, et toute permutation σ de $\{1, \dots, k\}$,

$$\delta_{x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(k)}}^k f = \delta_{x_0, \dots, x_k}^k f,$$

- (2) pour tout $x_0 \in \Omega$, et tout $k \leq n$, $\delta_{x_0, \dots, x_0}^k f = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$,

- (3) pour tout $k = 1, \dots, n$, et tout $(x_0, \dots, x_k) \in \Omega^{k+1}$ tel que $x_0 \neq x_k$,

$$\delta_{x_0, \dots, x_k}^k f = \frac{\delta_{x_1, \dots, x_k}^{k-1} f - \delta_{x_0, \dots, x_{k-1}}^{k-1} f}{x_k - x_0}.$$

Ces propriétés caractérisent les différences divisées de f .

Dans le cas particulier où les points $x_0, \dots, x_n$ sont tous réels, on obtient le résultat classique suivant :

Théorème A.2 *Soit $x_0, \dots, x_n$, $(n+1)$ points d'un intervalle $[a, b]$. Si la fonction f est C^n sur $[a, b]$, il existe un point de l'intervalle $[a, b]$ tel que :*

$$\delta_{x_0, \dots, x_n}^n f = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}. \quad (\text{A.11})$$

Preuve.

Considérons la fonction φ définie sur $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) := f(x) - P[f; x_0, \dots, x_n](x).$$

Elle est C^n sur $[a, b]$. De plus, par définition même du polynôme $P[f; x_0, \dots, x_n]$, si à une permutation près $(x_0, \dots, x_n) = (\xi_0^{[\mu_0]}, \dots, \xi_r^{[\mu_r]})$, avec $\xi_i \neq \xi_j$ pour $i \neq j$, la fonction φ vérifie :

$$\varphi^{(k)}(\xi_j) = 0, \quad k = 0, \dots, \mu_j - 1, \quad k = 0, \dots, r.$$

Par conséquent φ admet $n+1$ zéros (comptés avec leur multiplicité) dans l'intervalle $[a, b]$. En appliquant le théorème de Rolle éventuellement de façon répétée, on obtient l'existence d'un point $\xi \in [a, b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$. Or, pour dériver $P[f; x_0, \dots, x_n]$ à l'ordre n il suffit de dériver son terme de degré n dont le coefficient est, par définition, $\delta_{x_0, \dots, x_n}^n f$. On a donc

$$\varphi^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - n! \delta_{x_0, \dots, x_n}^n f,$$

d'où le résultat. ■

La démonstration de ce théorème utilise de façon essentielle l'hypothèse que les points $x_0, \dots, x_n$ sont réels. En effet, sous cette hypothèse seulement on peut utiliser le théorème de Rolle. Donc ce résultat ne se prolonge pas tel quel au cas où les x_i ne sont pas tous réels.

Corollaire A.3 *Sous les mêmes hypothèses, si $y_0, \dots, y_n$ sont des points donnés de l'intervalle $[a, b]$:*

$$\delta_{y_0, \dots, y_n}^n f = \lim_{\substack{(x_0, \dots, x_n) \rightarrow (y_0, \dots, y_n) \\ x_0, \dots, x_n \in [a, b]}} \delta_{x_0, \dots, x_n}^n f. \quad (\text{A.12})$$

Preuve.

La démonstration se fait par récurrence sur n . Pour $n = 0$, $\delta_{x_0}^n f = f(x_0)$ converge vers $f(y_0) = \delta_{y_0}^0 f$ quand x_0 tend vers y_0 du fait que f est C^0 .

Supposons le résultat vrai pour l'ordre $n-1$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Nous pouvons supposer $y_0 \leq \dots \leq y_n$.

1° cas : Supposons $y_0 = y_n$, auquel cas $y_0 = \dots = y_n$. Les points $x_0, \dots, x_n$ convergent vers y_0 . Le théorème précédent montre que

$$\lim_{x_0, \dots, x_n \rightarrow y_0} \delta_{x_0, \dots, x_n}^n f = \frac{f^{(n)}(y_0)}{n!} = \delta_{y_0, \dots, y_0}^n f.$$

2° cas : Supposons $y_0 \neq y_n$. Nous savons dans ce cas que

$$\delta_{y_0, \dots, y_n}^n f = \frac{\delta_{y_1, \dots, y_n}^{n-1} f - \delta_{y_0, \dots, y_{n-1}}^{n-1} f}{y_n - y_0}. \quad (\text{A.13})$$

L'hypothèse de récurrence nous dit que :

$$\begin{aligned} \delta_{y_0, \dots, y_{n-1}}^{n-1} f &= \lim_{(x_0, \dots, x_{n-1}) \rightarrow (y_0, \dots, y_{n-1})} \delta_{x_0, \dots, x_{n-1}}^{n-1} f, \\ \delta_{y_1, \dots, y_n}^{n-1} f &= \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_n)} \delta_{x_1, \dots, x_n}^{n-1} f. \end{aligned}$$

De (A.13) nous déduisons donc que

$$\begin{aligned} \delta_{y_0, \dots, y_n}^n f &= \lim_{(x_0, \dots, x_n) \rightarrow (y_0, \dots, y_n)} \frac{\delta_{x_1, \dots, x_n}^{n-1} f - \delta_{x_0, \dots, x_{n-1}}^{n-1} f}{x_n - x_0}, \\ &= \lim_{(x_0, \dots, x_n) \rightarrow (y_0, \dots, y_n)} \delta_{x_0, \dots, x_n}^n f. \end{aligned}$$

■

A.3 Différences divisées et fonctions analytiques

Le cas des fonctions analytiques conduit à une expression intéressante des différences divisées.

Théorème A.4 *Supposons la fonction f analytique sur un ouvert du plan complexe contenant une courbe simple fermée C et son intérieur Ω . Alors, quels que soient les points $x_0, \dots, x_n \in \Omega$,*

$$\delta_{x_0, \dots, x_n}^n f = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - x_0) \dots (z - x_n)} dz. \quad (\text{A.14})$$

Preuve.

Notons pour un instant, quels que soient l'entier n et les points $x_0, \dots, x_n \in \Omega$

$$[x_0, \dots, x_n] := \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - x_0) \dots (z - x_n)} dz,$$

expression évidemment indépendante de l'ordre des points $x_0, \dots, x_n$. Pour montrer que $[x_0, \dots, x_n] = \delta_{x_0, \dots, x_n}^n f$, il suffit donc de vérifier les propriétés (2) et (3) ci-dessus.

Étant donné un entier k positif et un point $x_0 \in \Omega$, l'analyticité de f conduit à :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - x_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

On a donc bien

$$\underbrace{[x_0, \dots, x_0]}_{n+1 \text{ fois}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Par ailleurs, pour tout $k > 0$ et tous points $x_0, \dots, x_k \in \Omega$:

$$\begin{aligned} [x_0, \dots, x_{k-1}] - [x_1, \dots, x_k] &= \frac{1}{2i\pi} \int_C \left[\frac{f(z)}{(z - x_0) \dots (z - x_{k-1})} - \frac{f(z)}{(z - x_1) \dots (z - x_k)} \right] dz, \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z) [(z - x_k) - (z - x_0)]}{(z - x_0) \dots (z - x_k)} dz, \\ &= (x_0 - x_n) [x_0, \dots, x_n], \end{aligned}$$

d'où, si $x_0 \neq x_n$:

$$[x_0, \dots, x_n] = \frac{[x_0, \dots, x_{n-1}] - [x_1, \dots, x_n]}{x_0 - x_n}.$$

L'égalité (A.14) est donc montrée. ■

L'égalité (A.14) conduit immédiatement au résultat suivant :

Corollaire A.5 *Sous les mêmes hypothèses, la fonction*

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto \delta_{x_0, \dots, x_n}^n f$$

est continue dans Ω^{n+1} .

Preuve.

Étant donné un élément fixé $x = (x_0, \dots, x_n) \in \Omega^{n+1}$, on peut trouver des nombres $r_0, \dots, r_n > 0$ tels que les boules fermées $\overline{B}(x_i, r_i)$ de centre x_i et de rayon r_i satisfassent :

$$\overline{B}(x_i, r_i) \subset \Omega, \quad i = 0, \dots, n. \quad (\text{A.15})$$

Désignons par K le sous ensemble de $\mathbb{C}^{n+2}$ défini par :

$$K := \mathcal{C} \times \overline{B}(x_0, r_0) \times \dots \times \overline{B}(x_n, r_n),$$

et sur K définissons la fonction φ par :

$$\varphi(z, y_0, \dots, y_n) := \frac{f(z)}{(z - y_0) \dots (z - y_n)}, \quad (z, y_0, \dots, y_n) \in K. \quad (\text{A.16})$$

Du fait des inclusions (A.15) et de l'analyticité de f , la fonction φ est continue sur K , donc uniformément continue sur K puisque K est un compact de $\mathbb{C}^{n+2}$. Donc, $\varepsilon > 0$ étant donné, il est possible de trouver un $\alpha > 0$ tel que, en particulier, quels que soient les éléments $y = (y_0, \dots, y_n)$ et $y' = (y'_0, \dots, y'_n)$ du produit $\prod_{i=0}^n \overline{B}(x_i, r_i)$:

$$\|y - y'\| < \alpha \implies \left| \varphi(z, y) - \varphi(z, y') \right| < \varepsilon \quad \text{pour tout } z \in \mathcal{C}. \quad (\text{A.17})$$

Choisissons $y = (y_0, \dots, y_n) \in \prod_{i=0}^n \overline{B}(x_i, r_i)$ de façon à ce que $\|y - x\| < \alpha$. Nous aurons alors, d'après (A.17) :

$$\left| \varphi(z, y) - \varphi(z, y') \right| < \varepsilon \quad \text{pour tout } z \in \mathcal{C}.$$

Par suite, de (A.14) nous déduisons :

$$\begin{aligned} \left| \delta_{y_0, \dots, y_n}^n f - \delta_{x_0, \dots, x_n}^n f \right| &= \left| \frac{1}{2i\pi} \int_C \varphi(z, y) dz - \frac{1}{2i\pi} \int_C \varphi(z, x) dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_C |\varphi(z, y) - \varphi(z, x)| dz \\ &\leq \frac{L\varepsilon}{2\pi}. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi montré la continuité de la fonction $(y_0, \dots, y_n) \mapsto \delta_{y_0, \dots, y_n}^n f$ au point $(x_0, \dots, x_n)$. ■

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. U. S. Department of commerce, 1964.
- [2] P. J. Barry. de Boor-Fix dual functionals and algorithms for Tchebycheffian B-spline curves. *Constr. Approx.*, pages 385–408, 1996.
- [3] I. Carbone. Shape preserving proprieties of some positive linear operators on unbounded intervals. *Journal of Approximation Theory*, 83:140–156, 1998.
- [4] C. de Boor, R. DeVore, and A. Ron. On the construction of (pre)wavelets. *Constructive Approximation, Special Issue on Wavelets*, 9:123–166, 1993.
- [5] B. Démidovitch and I. Maron. *Éléments de calcul numérique*. Editions Mir, 1973.
- [6] N. Dyn and A. Ron. Recurrence relations for Tchebysheffian B-splines. *Journal d'Analyse Mathématiques*, 51:118–138, 1988.
- [7] N. Dyn and A. Ron. Cardinal translation invariant Tchebycheffian B-splines. *Approximation Theory and its Applications*, 6(2):1–12, 1990.
- [8] J. A. Gregory and M. Sarfraz. A rational cubic spline with tension. *Computer Aided Geometric Design*, 7:1–13, 1990.
- [9] S. Karlin and W. J. Studden. *Tchebysheff Systems*. Willey Interscience, N. Y., 1966.
- [10] S. Karlin and Z. Ziegler. Chybeshevian spline functions. *SIAM, Numer. Anal.*, 3(3):514–543, 1966.
- [11] P. E. Koch and T. Lyche. Exponential B-splines in tension. In *Approximation Theory*, pages 361–364. Academic Press, 1989.
- [12] P. E. Koch and T. Lyche. Construction of exponential B-splines in tension of arbitrary order. In *Curves and Surfaces*, pages 255–258. Academic Press, 1991.
- [13] P. E. Koch, T. Lyche, M. Neamtu, and L. L. Schumaker. Control curves and knot insersion for trigonometric splines. *Av. Comp. Math.*, 3:405–424, 1995.
- [14] P. J. Laurent. *Approximation et Optimisation*. Hermann, 1970.
- [15] Y. Li. On the recurrence relations for b-splines defined by certain l -splines. *Journal of Approximation Theory*, 43:359–369, 1985.
- [16] G. Lorentz. *Bernstein Polynomials*. University of Toronto Press, 1953.

- [17] T. Lyche. A recurrence relation for chebyshevian B-splines. *Constructive Approximation*, 1:155–173, 1985.
- [18] T. Lyche and L. L. Schumaker. L-Spline wavelets. In C. K. Chui, L. Montefusco, and L. Puccio, editors, *Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*, pages 197–212. Academic Press Inc., 1994.
- [19] T. Lyche and R. Winter. A stable recurrence relation for trigonometric B-splines. *Journal of Approximation Theory*, 25:266–179, 1979.
- [20] M.-L. Mazure. Chebyshev spaces. Technical Report 952, LMC-IMAG, Janvier 1996.
- [21] M. L. Mazure. Blossoming: A geometric approach. *Constructive Approximation*, 15:33–68, 1999.
- [22] M. L. Mazure and P.-J. Laurent. piecewise smooth spaces in duality: application to blossoming. *Journal of Approximation Theory*, 98:316–353, 1999.
- [23] M. L. Mazure and H. Pottmann. Tchebysheff curves. In *Total Positivity and its Applications*, pages 187–218. Academic Pub., 1996.
- [24] A. Mühlbach. A recurrence formula for generalized divided differences and some applications. *Approximation Theory*, pages 165–172, 1973.
- [25] H. Pottmann. The geometry of Tchebysheffian splines. *Computer Aided and Geometric design*, 10:181–210, 1993.
- [26] H. Pottmann and M. G. Wagner. Helix splines as an example of affine Tchebysheffian splines. *Advances in Computational math.*, 2:123–142, 1994.
- [27] U. Reif. Orthogonality of cardinal B-splines in weighted Sobolev spaces. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 1996.
- [28] U. Reif. Uniform B-splines approximation in Sobolev spaces. *Numerical Analysis*, 15:1–14, 1997.
- [29] A. Ron. A necessary and sufficient condition for the linear independence of the integer translates of a compactly supported distribution. *Constr. Approx.*, 5:297–308, 1989.
- [30] K. Scherer and L. L. Schumaker. A dual basis for L-splines and applications. *Journal of Approximation Theory*, 29:151–169, 1980.
- [31] J. J. Schoenberg. On trigonometric spline interpolation. *Journal of mathematical mechanics*, 13:795–825, 1964.
- [32] L. L. Schumaker. *Spline Functions: Basic Theory*. wiley, 1981.
- [33] L. L. Schumaker. On recursions for generalized splines. *Journal of Approximation Theory*, 36:16–31, 1982.
- [34] L. L. Schumaker. On hyperbolic splines. *Journal of Approximation Theory*, 38:144–166, 1983.
- [35] D. C. Schweikert. An interpolation curve using a spline tension. *Journal of Mathematical Physics*, 45:312–317, 1966.

- [36] H. G. ter Morsche. *Interpolational and extramal proprieties of L-spline functions*. PhD thesis, Eindoven University of Technology, 1982.