



Plongement de graphes dans l'hypercube

Mohamed Kobeissi

► **To cite this version:**

Mohamed Kobeissi. Plongement de graphes dans l'hypercube. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2001. Français. tel-00004683

HAL Id: tel-00004683

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004683>

Submitted on 16 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I
U.F.R. IMA

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE I

Discipline : Informatique

présentée et soutenue publiquement

par

Mohamed KOBESSI

le 12 octobre 2001

PLONGEMENT DE GRAPHES DANS L'HYPERCUBE

JURY

Abdelhafid BERRACHEDI RAPPORTEUR

Sylvain GRAVIER EXAMINATEUR

Jean-Marie LABORDE EXAMINATEUR

Michel MOLLARD DIRECTEUR DE THÈSE

Andre RASPAUD RAPPORTEUR

Nguyen huy XUONG PRÉSIDENT

À Mes parents,

À Mes soeurs,

À Varuna.

Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au sein du laboratoire LEIBNIZ-IMAG, dont je tiens à remercier le directeur Nicolas Balacheff et l'ancien directeur Philippe Jorrand.

Ma reconnaissance va ensuite à mon directeur de thèse Michel Mollard, chargé de recherche au CNRS, pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant de réaliser une thèse sous sa direction. Qu'il trouve ici tous mes remerciements pour sa présence permanente tant sur le plan professionnel que personnel.

Mes remerciements vont aux membres du jury :

à Nguyen Huy Xuong, professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, d'avoir bien voulu examiner ce travail et présider ce jury ;

à André Raspaud, professeur à l'Université Bordeaux I, pour l'intérêt qu'il a montré pour mon travail et avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse. Je le remercie pour ses commentaires et ses remarques qui m'ont permis d'améliorer ce document ;

à Abdelhafid Berrachedi, professeur à l'Université Sciences et Techniques Houari Boumediène (USTHB, Alger), pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse, je le remercie pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et de ses remarques m'ayant permis d'améliorer ce document ;

à Jean-Marie Laborde, directeur de recherche au CNRS, d'avoir accepté de participer à ce jury ;

à Sylvain Gravier, chargé de recherche au CNRS pour l'intérêt qu'il a bien voulu

porter à mon travail et d'avoir examiner ma thèse. Je le remercie pour ses conseils et ses suggestions à travers nos discussions pendant ces trois années de thèse.

Je remercie également Gerd Finke, professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble et responsable de le Formation Doctorale : Recherche Opérationnelle, Combinatoire et Optimisation.

Je remercie ensuite mes collègues du laboratoire Leibniz, Virginie, Haris, Eric, Yann, Cécile et plus particulièrement Nadia et Ammar. sans oublier les autres membres du département, pour leur soutien tout au long de ces années.

Mes derniers mots seront pour ma famille ; mes parents, mes deux soeurs, mon oncle Salim ainsi qu'à Varuna. Je leur dis merci d'avoir cru en moi et de m'avoir encouragé tout le long des années de thèse.

Table des matières

Introduction	13
1 Éléments de théorie des graphes	17
1.1 Graphes	17
1.1.1 Définitions générales	17
1.1.2 Quelques graphes	19
1.1.3 Chaînes et cycles	19
1.2 Connexité dans les graphes	20
1.2.1 Graphes particuliers	21
1.3 Opérations classiques	24
1.3.1 Produit cartésien	24
1.3.2 Isomorphisme	26
1.3.3 Distances, décompositions en couches	26
1.4 Intervalles	27
1.5 Graphes médians et graphes distance monotones	28
1.5.1 Autres graphes	28

2	L'hypercube	29
2.1	Le graphe de l'hypercube	29
2.2	Décomposition en couches de l'hypercube	34
2.3	Quelques caractérisations de l'hypercube	35
2.4	Projection et anti-projection	38
3	Hamiltonicité de l'hypercube	41
3.1	Décomposition Hamiltonienne de graphes	41
3.2	Décomposition du produit cartésien de graphes	42
3.3	Hamiltonicité de l'hypercube	44
3.4	Problèmes ouverts	46
4	Chaînes et cycles dans Q_n	49
4.1	Chaînes hamiltoniennes dans Q_n	49
4.2	Cycles disjoints dans Q_n	53
4.3	Théorème principal	60
5	Plongement de graphes dans l'hypercube	77
5.1	Définitions générales	78
5.2	Graphes et dimensions cubiques	80
5.2.1	Décider si un graphe G est cubique	81
5.3	Complexité	82
5.4	Plongement dans Q_n	83
5.4.1	Plongement des cycles dans l'hypercube	85

5.5	Plongement d'arbres binaires complets dans l'hypercube	85
5.5.1	Plongements d'arbres dans l'hypercube obtenus par transformation des arbres binaires	88
5.5.2	Autres plongements d'arbres	89
5.5.3	Plongements des chenilles	90
5.6	Plongements des grilles et des échelles	92
5.6.1	Grille binaire	93
5.6.2	Échelles	93
5.7	Plongement des quasi-étoiles et des double quasi-étoiles	95
5.8	$MD(a_1, \dots, a_k)$ graphes	97
5.9	Théorème principal	100
5.10	$MD(a_1, \dots, a_k)$ graphes subdivisés	106
5.11	Problèmes ouverts	108
	Bibliographie	109

Table des figures

1.1	un exemple de graphe	18
1.2	le graphe complet K_5	22
1.3	le graphe équilibré $K_{3,3}$	23
1.4	le produit cartésien $K_4 \square K_2$	25
1.5	décomposition en couches de G	26
2.1	les premiers hypercubes	30
2.2	décomposition canonique de Q_3	30
2.3	chaînes disjointes dans Q_n	32
2.4	cycle hamiltonien dans Q_n	33
2.5	décomposition en couches de Q_4	34
3.1	décomposition hamiltonienne de K_5	42
3.2	décomposition hamiltonienne de $C_3 \square C_4$	43
4.1	cas 1 - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 1$	54
4.2	cas 2 - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 3$	55
4.3	cas 3 - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 2$	55

4.4	contre exemple pour $n = 3$	57
4.5	<i>cas 3.1</i> - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 1$	61
4.6	<i>cas 3.2</i> - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 2$	62
4.7	<i>cas 3.3</i> - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 3$	63
5.1	le graphe $K_{2,3}$	81
5.2	arbre équilibré à 16 sommets qui n'est pas plongeable dans Q_4	84
5.3	arbres binaires complets	86
5.4	arbre binaire complet double-racine $BDR(3)$	87
5.5	l'arbre D_2	88
5.6	l'arbre D_1^2	89
5.7	l'arbre 4-aires T_2^4	89
5.8	le graphe d'une chenille de degré 4	90
5.9	grille binaire	92
5.10	une échelle de rangs 2, 0, 2 et 4	94
5.11	$K_{1,n}$	95
5.12	la quasi-étoile $S(1, 1, 1, 1, 4)$	96
5.13	la double quasi-étoile $S(1, 4; 2, 3)$	96
5.14	le graphe $MD(2,4,8)$	98
5.15	plongement de $S(3,4,4)$ dans $MD(4,6)$, les arêtes ajoutées sont en pointillées	99
5.16	plongement de $S(1,2,4;3,4)$ dans $MD(4,4,6)$, les arêtes ajoutées sont en pointillées	99

5.17	plongement de $MD(2,4,8)$ dans Q_4	101
5.18	plongement de $MD(2,2,10)$ dans Q_4	102
5.19	plongement de $MD(a_1, a_2, a_3)$ dans Q_n	102
5.20	plongement de $MD(a_1, a_2, a_3, a_4)$ dans Q_n	103
5.21	plongement de $MD(6,8,8,8)$ dans Q_5	104
5.22	le graphe $MD(2;2,4,6)$	106
5.23	plongement de $MD(2;2,2)$ dans Q_3	107

Introduction

Que ce soit dû à un regain actuel d'utilisation pratique (réseaux, architectures parallèles, codage), à son utilisation pour modéliser des problèmes ou tout simplement à l'intérêt de sa structure, l'hypercube est un objet d'étude particulièrement intéressant en informatique et en combinatoire.

Nous nous intéressons ici à divers problèmes concernant l'hypercube. Le but principal de ce manuscrit est de montrer que certaines familles de graphes sont des graphes plongeables dans l'hypercube (chapitre 5). Un problème d'une autre nature sera traité dans le chapitre 4, il concerne la partition de l'hypercube en des cycles sommet-disjoints. Un théorème principal sera énoncé et qui servira pour montrer que les *MD*-graphes sont des graphes plongeables de façon optimale dans l'hypercube.

Les définitions générales utilisées dans les différents chapitres de cette thèse et dans l'introduction ont été regroupées dans le chapitre "Eléments de théorie des graphes".

Le chapitre 2 est consacré à la présentation de l'hypercube et ses caractéristiques. On vérifie facilement que l'hypercube possède la propriété suivante : Entre toute paire (x, y) de sommets distincts de l'hypercube, il existe soit exactement deux chaînes de longueur 2, soit pas de chaînes de longueur 2 (on dit que Q_n est un $(0, 2)$ -graphe). De tels graphes sont réguliers.

Plusieurs caractérisations de l'hypercube sont ensuite données. En particulier, Laborde, Rao-Hebbare et Mulder ont indépendamment prouvé que l'hypercube était maximal (pour son ordre par rapport à son degré) pour cette propriété.

Après avoir rappelé la définition de la décomposition hamiltonienne de graphes et donné plusieurs résultats connus dans le chapitre 3, nous rapellons que l'hypercube de dimension n est décomposable en cycles hamiltoniens si n est pair en utilisant un théorème énoncé par Aubert et Schneider, et que l'hypercube est décomposable en cycles hamiltoniens plus un couplage parfait si n est impair.

Le chapitre 4 est lui consacré à un autre type de problèmes qui consiste en la recherche des chaînes et des cycles ayant certaines propriétés sur l'hypercube. Il est connu que l'hypercube est un graphe hamiltonien. Nous prouvons certaines propriétés sur les chaînes dans l'hypercube, et rappelons un résultat de Nebeskỳ qui dit que l'hypercube de dimension n peut être partitionné en k chaînes sommet-disjointes de longueurs paires si k est inférieure à $n - 1$.

Pour notre part, nous montrons un résultat similaire en ce qui concerne les cycles, à savoir que l'hypercube de dimension n peut aussi être partitionné en k cycles sommet-disjointes de longueur paires si $k \leq n - 2$, et qui utilisent des arêtes de même direction dans l'hypercube. Tous ces résultats seront utilisés dans le dernier chapitre.

Le problème de plongement de graphes dans l'hypercube fera l'objet du chapitre 5. Dans ce chapitre, nous introduisons une nouvelle famille de graphes, les *MD* graphes. Nous avons montré que les quasi-étoiles et les double quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans les *MD* graphes. Nous avons en outre réussi à montrer que les *MD* graphes sont eux même des graphes plongeables dans Q_n , ce qui nous remontre que les quasi-étoiles, mais également prouve que les doubles quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans Q_n . Ce qui résout à un problème ouvert posé par Havel [34] depuis 1984. Il est à noter que tous ces plongements sont optimaux.

Plusieurs problèmes et conjectures sur la décomposition de l'hypercube en des cycles ayant certaines propriétés et sur les plongements optimaux de quelques familles de graphes ont été regroupés à la fin des trois derniers chapitres.

Chapitre 1

Eléments de théorie des graphes

1.1 Graphes

Nous donnons ici les définitions nécessaires à la lecture de ce manuscrit et quelques propriétés fondamentales. On adoptera la terminologie de Berge [8]. D'autres références pour la théorie des graphes se trouvent dans l'ouvrage de Bondy et Murty [12].

1.1.1 Définitions générales

Un *graphe orienté* G est constitué d'un ensemble V fini d'éléments $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, appelés *sommets*, et d'une famille E d'éléments du produit cartésien $V \times V$, appelés *arcs*. Un élément de $V \times V$ peut apparaître plusieurs fois dans la famille E . Le nombre de sommets du graphe est appelé *ordre* du graphe et est noté n . Dans un grand nombre de cas, la distinction entre extrémité initiale et extrémité terminale des arcs n'est pas pertinente. Aussi a-t-on introduit la notion de graphe non orienté, où l'on substitue à l'arc (x,y) l'ensemble formé par les deux sommets x et y , que l'on note xy et que l'on appelle *arête* du graphe.

Un graphe G est *simple* s'il ne contient pas de boucles (arc du type xx) et s'il ne contient pas plus qu'une arête entre deux sommets. Sauf spécifications contraires,

on considère uniquement des graphes simples, finis et non orientés.

Un exemple de graphes à 7 sommets et 5 arêtes est montré dans l'exemple suivant

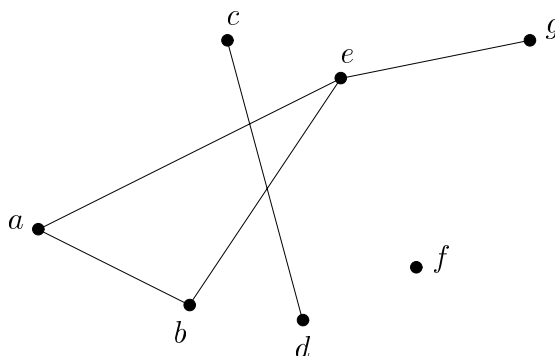


Figure 1.1 – un exemple de graphe

Arêtes incidentes

Deux sommets sont dits *adjacents* s'ils sont extrémités d'une même arête, qui leur est alors incidente. Deux arêtes ayant une extrémité x en commun sont dites *incidentes* en x . Les *voisins* d'un sommet x d'un graphe G sont les sommets y de G tel que xy soit une arête de G .

Degré

Le *degré* d'un sommet u de G , noté $d(u)$ ($d_G(u)$ s'il y a risque de confusion), est le nombre de voisins de u . Un sommet de degré 0 est dit *isolé*, un sommet de degré 1 est un sommet *pendant*. Si tous les sommets de G sont de même degré d , alors G est *régulier* de degré d , on dira qu'il est d -régulier. Noter que :

- Pour tout graphe G ,
$$\sum_{u \in G} d_G(u) = 2|E(G)|,$$

- Dans un graphe G , le nombre de sommets de degré impair est pair.

Dans tout ce manuscrit, on adoptera la notation suivante :

$$\delta(G) = \min_{u \in G} d_G(u) \quad \text{et} \quad \Delta(G) = \max_{u \in G} d_G(u)$$

1.1.2 Quelques graphes

Soient $G = (V, E)$ et $H = (W, F)$ deux graphes.

Le graphe $G' = (V', E')$ dont l'ensemble des sommets V' est inclus dans V et l'ensemble des arêtes E' est la restriction de E à $V' \times V'$ est appelé *sous-graphe* de G engendré par V' .

On dit que $G' = (V', E')$ est un *graphe partiel* de G si $V' = V$ et $E' \subseteq E$ (G' peut être vu comme étant obtenu à partir de G en supprimant des arêtes).

L'union des deux graphes G et H (resp. intersection), noté $G \cup H$ (resp. $G \cap H$), est le graphe dont l'ensemble des sommets est $V \cup W$ et l'ensemble des arêtes est $E \cup F$ (resp. $E \cap F$).

Le graphe complémentaire du graphe G noté $\overline{G} = (V, \overline{E})$, est le graphe sur le même ensemble de sommets où on relie deux sommets de \overline{G} par une arête si et seulement si ils ne sont pas adjacents dans G .

1.1.3 Chaînes et cycles

On appelle *chaîne* entre deux sommets x et y d'un graphe G , une suite de sommets x_1, \dots, x_k dont deux consécutifs sont adjacents, avec $x_1 = x$ et $x_k = y$. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois le même sommet est dite *élémentaire*, une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite *simple*. Une chaîne élémentaire est donc une chaîne simple. On appelle *cycle* dans un graphe, une chaîne simple dont les extrémités initiale et finale sont confondues. Dans la suite, sans spécifications contraires, on parlera seulement de chaîne et de cycle élémentaires.

Chaînes et cycles hamiltoniens

On appelle chaîne (resp. cycle) *hamiltonienne* (resp. *hamiltonien*) une chaîne (resp. cycle) passant, une fois et une seule, par tous les sommets d'un graphe G .

Un graphe G qui possède un cycle hamiltonien est dit *graphe hamiltonien*.

Longueur de chaînes et de cycles

La *longueur* d'une chaîne (resp. cycle) est le nombre d'arêtes de cette chaîne (resp. cycle) et on note P_n (resp. C_n) la chaîne élémentaire à n sommets, de longueur $n - 1$ (resp. n).

Couplage dans un graphe

Etant donné un graphe simple $G=(X,E)$, on appelle *couplage* un ensemble E_0 d'arêtes tel que les arêtes de E_0 sont deux à deux non-incidentes.

Couplage parfait

Un sommet x est *saturé* par un couplage E_0 s'il existe une arête de E_0 incidente à x . Un couplage qui sature tous les sommets du graphe est appelé un *couplage parfait*.

1.2 Connexité dans les graphes

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *connexe* s'il possède la propriété suivante :

$$\forall x, y \in V, \exists \text{ une chaîne entre } x \text{ et } y.$$

Pour un graphe quelconque la relation binaire de connexité $R \subset V \times V$, définie par :

$$xRy \iff x = y \text{ ou } \exists \text{ une chaîne entre } x \text{ et } y$$

est une relation d'équivalence. Le sous-graphe de G , engendré par une classe d'équivalence de cette relation s'appelle *composante connexe* du graphe G . En d'autres termes, un graphe est connexe s'il possède une seule composante connexe.

Distance et diamètre

Etant donnés deux sommets x et y d'un graphe G , on appelle *distance* entre x et y et on note $d_G(x, y)$ ($d(x, y)$ s'il n'y a pas de confusion), la longueur d'une plus courte chaîne entre x et y . Une telle chaîne s'appelle *géodésique*. Le *diamètre* de G , noté $D(G)$ (D s'il n'y a pas de confusion) est défini par :

$$D(G) = \max_{x, y \in G} d(x, y)$$

La distance entre deux arêtes xy et uv d'un graphe G est définie par :

$$d(xy, uv) = \min\{d(x, u), d(x, v), d(y, u), d(y, v)\}$$

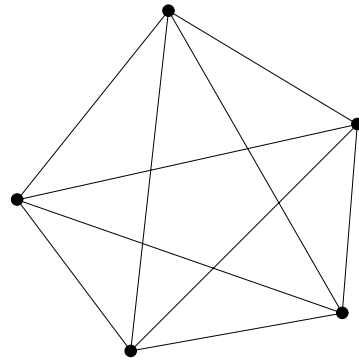
1.2.1 Graphes particuliers

Cette section est consacrée aux graphes complets, bipartis et autres que nous rencontrerons tout au long de ce manuscrit, ainsi qu'une caractérisation des graphes bipartis.

Graphe complet

Un graphe simple G d'ordre n , qui vérifie $\delta(G) = \Delta(G) = n - 1$, est dit graphe *complet* à n sommets, noté K_n , et s'appelle une *n-clique*. La figure 1.2 montre le graphe complet à 5 sommets, K_5 .

Le graphe complet à n sommets est un graphe qui contient $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes, le diamètre de K_n est égal à 1.

Figure 1.2 – le graphe complet K_5

Graphes bipartis

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* s'il existe une partition de V en deux classes V_1 et V_2 , telle que tout élément de E a une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 .

Une définition équivalente des graphes bipartis est donnée dans la proposition qui suit :

Proposition 1.1 *Un graphe G est biparti si et seulement si il n'admet pas de cycle de longueur impaire.*

Graphes bipartis complets

Un graphe biparti G est *complet* si tout sommet de V_1 est adjacent à tout sommet de V_2 . Un tel graphe est noté $K_{p,q}$ où $p = |V_1|$ et $q = |V_2|$.

Le graphe $K_{p,q}$ a $p + q$ sommets et pq arêtes, le degré d'un sommet de V_1 est q et le degré d'un sommet V_2 est p . Le diamètre d'un tel graphe est égal à 2.

Graphes équilibrés

Un graphe G est dit *équilibré* si et seulement si :

- G est biparti,
- chaque sous ensemble de la bipartition contient le même nombre de sommets.

Les cycles de longueurs pairs sont des graphes équilibrés, les graphes bipartis complets où $p = q$ sont aussi de tels graphes. La figure 1.3 qui suit montre le graphe équilibré $K_{3,3}$.

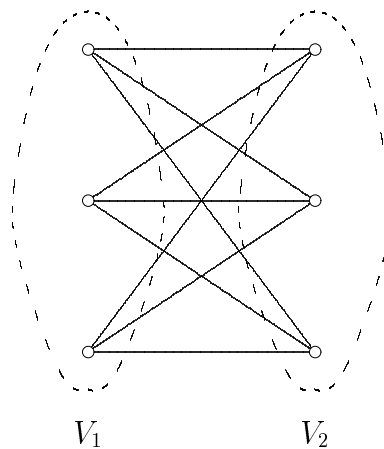


Figure 1.3 – le graphe équilibré $K_{3,3}$

Sommet-connexité et arête-connexité

La *sommet-connexité* (resp. *arête-connexité*), d'un graphe connexe G , notée $\kappa(G)$ (resp. $\lambda(G)$), est le nombre minimum de sommets (resp. arêtes) qu'il faut supprimer pour que G ne soit plus connexe.

On dit que G est *k-connexe* si $\kappa(G) \geq k$, c'est-à-dire que G est connexe et reste connexe après suppression d'au plus $k - 1$ sommets. De la même façon, on dit que G est *k-arête-connexe* si $\lambda(G) \geq k$, c'est-à-dire que G est connexe et reste connexe après suppression d'au plus $k - 1$ arêtes.

Un graphe connexe G est dit *connexe-minimal* si, en supprimant une arête quelconque, G n'est plus connexe.

Propriété 1.1 *Tout graphe G connexe contient un graphe connexe-minimal comme graphe partiel.*

La proposition suivante relie la connexité et le degré minimum dans un graphe G

Proposition 1.2 *Pour tout graphe G , $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.*

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle. Un *isthme* dans un graphe G est une arête e de G tel que $G \setminus \{e\}$ n'est pas connexe. Dans un arbre, toute arête est un isthme.

Les assertions suivantes sont équivalentes pour un graphe T

Théorème 1.1 *i) T est un arbre,*

ii) Il existe une chaîne unique entre toute paire de sommets disjoints x et y de T ,

iii) T est connexe-minimal,

iv) T ne contient pas de cycles, et si on rajoute une arête entre deux sommets non-adjacents x et y de T , on crée un cycle.

Les graphes connexes admettent la propriété suivante

Proposition 1.3 *Un graphe G est connexe si et seulement si il contient un arbre T comme graphe partiel.*

1.3 Opérations classiques

1.3.1 Produit cartésien

On appelle produit cartésien de deux graphes $G = (V, E)$ et $H = (V', E')$, noté $G \square H$, le graphe K dont l'ensemble de sommets est le produit cartésien $V(G) \times$

$V(H)$ et où deux sommets (u, u') et (v, v') sont adjacents si et seulement si :

$$u = v \quad \text{et} \quad u'v' \in E'$$

ou

$$u' = v' \quad \text{et} \quad uv \in E.$$

La figure 1.4 montre le produit cartésien $K_4 \square K_2$.

Il est à noter que le nombre de sommets dans $G \square H$ est $|V| \cdot |V'|$ et que le nombre d'arêtes est $|V| \cdot |E'| + |V'| \cdot |E|$.

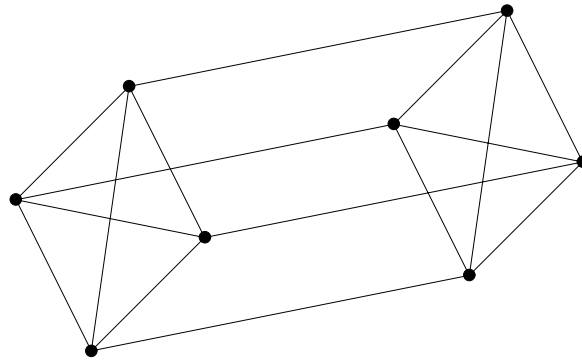


Figure 1.4 – le produit cartésien $K_4 \square K_2$

Proposition 1.4 *Le diamètre de la somme cartésienne de deux graphes G et G' est la somme des diamètres de ces graphes.*

Preuve: Soient (x, x') et (y, y') deux sommets de $G \square G'$. Soit $P = x, x_1, \dots, x_{k-1}, y$ une chaîne géodésique dans G entre x et y , et soit $P' = x', x'_1, \dots, x'_{j-1}, y'$ une chaîne géodésique dans G' entre x' et y' .

La chaîne $(x, x'), (x_1, x'), \dots, (x_{k-1}, x'), (y, x'), (y, x'_1), \dots, (y, x'_{j-1}), (y, y')$ est une chaîne entre (x, x') et (y, y') dans $G \square G'$. P et P' sont de longueurs respectives k et j , alors $k + j \leq D(G) + D(G')$ et donc $D(G \square G') \leq D(G) + D(G')$.

Pour établir l'égalité, il suffit de prendre deux sommets (x, x') et (y, y') du graphe $G \square G'$ tels que $d_G(x, y) = D(G)$ et $d_{G'}(x', y') = D(G')$. \square

1.3.2 Isomorphisme

Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont dits isomorphes si et seulement si il existe une application bijective $\varphi : V \rightarrow V'$ qui vérifie la condition suivante :

$$xy \in E \iff \varphi(x)\varphi(y) \in E'$$

pour toute paire de sommets x, y dans V .

1.3.3 Distances, décompositions en couches

Notons $N(x)$ l'ensemble des voisins d'un sommet x (parfois noté $N_1(x)$), et soient $N_i(x) = \{y \in V ; d(x, y) = i\}$ l'ensemble des sommets de V qui sont à distance i de x .

Une *décomposition en couches* de G , à partir d'un sommet x donné, est formée de l'ensemble $\{x, N_1(x), N_2(x), \dots, N_k(x)\}$.

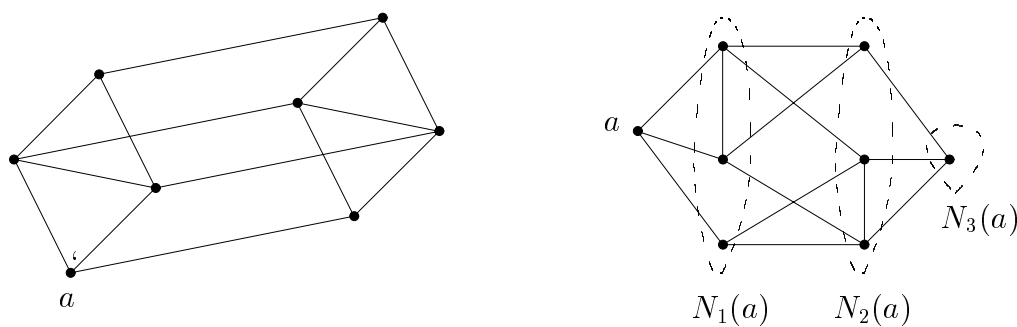


Figure 1.5 – décomposition en couches de G

A noter que dans une décomposition en couches d'un graphe G , il n'y a des arêtes qu'entre couches successives ou bien dans une même couche (figure 1.5).

1.4 Intervalles

L'intervalle $I_G(u, v)$ (noté aussi $I(u, v)$ s'il n'y a pas confusion) est l'ensemble des sommets de G appartenant aux chaînes géodésiques entre u et v .

$$I(u, v) = \{w \in V; w \text{ appartient à une chaîne géodésique entre } u \text{ et } v\}$$

Trivialement, un sommet $w \in I(u, v)$ si et seulement si $d(u, w) + d(w, v) = d(u, v)$.

Par abus de langage, on désignera par intervalle aussi bien l'ensemble $I(u, v)$ que le sous-graphe engendré par $I(u, v)$.

Le lecteur pourra se référer à [57] pour une étude détaillée de la notion d'intervalle. Toutefois, nous citons les propositions de base suivantes

Proposition 1.5 *Soient u et v deux sommets d'un graphe G , alors*

- i) $u, v \in I(u, v)$,*
- ii) $I(u, v) = I(v, u)$,*
- iii) Si $w \in I(u, v)$, alors $I(u, w) \subset I(u, v)$,*
- iv) Si $w \in I(u, v)$, alors $I(u, w) \cap I(w, v) = \{w\}$,*
- v) Si $w \in I(u, v)$ et $z \in I(u, w)$, alors $w \in I(z, v)$.*

Proposition 1.6 *Pour tout triplet u, v et w d'un graphe G , il existe un sommet z dans $I(u, w) \cap I(u, v)$ tel que*

$$I(z, w) \cap I(z, v) = \{z\}$$

Proposition 1.7 *Soient u, v, w et z quatre sommets d'un graphe G . z est l'unique sommet de $I(u, w) \cap I(u, v)$ tel que $I(z, w) \cap I(z, v) = \{z\}$ si et seulement si*

$$I(u, w) \cap I(u, v) = I(u, z)$$

1.5 Graphes médians et graphes distance monotones

Certains types de graphes ont été défini en utilisant la notion de l'intervalle, parmi ceux-ci les graphes médians et les graphes distance monotones.

Définition 1.1 *Un graphe médian est un graphe tel que, pour tout triplet x, y, z de sommets, l'intersection des trois intervalles $I(x,y)$, $I(y,z)$ et $I(z,x)$ est réduite à un sommet.*

Burosh, Havel et Laborde [14] ont introduit la notion de graphe distance monotone

Définition 1.2 *Un graphe connexe est dit distance monotone si, pour tout intervalle $I(x,y)$ et tout sommet z hors de l'intervalle, il existe un sommet z' dans $I(x,y)$ tel que $d(z, z') > d(x, y)$.*

Il est clair qu'un intervalle $I(x,y)$ est tel que, pour tout z, z' dans l'intervalle, $d(z, z') \leq d(x, y)$. Dans un graphe distance monotone, la propriété de la définition 1.2 est donc caractéristique des sommets de l'intervalle.

1.5.1 Autres graphes

Plusieurs autres types de graphes peuvent être défini par les intervalles, les graphes intervalle réguliers, les graphes intervalle-diamétraux et les graphes sphériques, les définitions de ces graphes ne seront pas données ici, le lecteur pourra se référer à [10] pour une étude plus détaillée.

Ces définitions serviront dans le chapitre suivant pour donner quelques caractérisations de l'hypercube.

Chapitre 2

L'hypercube

Les hypercubes occupent une place importante dans la littérature de l'informatique et de la combinatoire, l'objectif de ce chapitre est de citer quelques propriétés des hypercubes qui sont utilisées dans la suite. Une présentation générale des hypercubes sera donnée, ainsi que quelques propriétés élémentaires de ce type de graphe qui seront utiles dans les chapitres suivants. Enfin, nous décrivons plusieurs caractérisations différentes d'un hypercube.

2.1 Le graphe de l'hypercube

Définition 2.1 *L'hypercube de dimension n (noté Q_n) est le graphe de 2^n sommets qui peuvent être considérés comme étant tous les vecteurs booléens sur $\{0, 1\}^n$, et où deux sommets sont adjacents si et seulement si les vecteurs associés à ces sommets diffèrent exactement en une seule composante.*

Notons que $Q_0 = K_1$, $Q_1 = K_2$ et que d'une manière générale, Q_n peut être défini récursivement en utilisant le produit cartésien par $Q_{n+1} = Q_n \square K_2$.

Il est donc clair que Q_n ($n \geq 1$) est isomorphe à

$$\underbrace{K_2 \square K_2 \dots \square K_2}_{n \text{ fois}}. \quad (2.1)$$

et donc que $Q_{n+d} = Q_n \square Q_d$.

La figure 2.1 montre les hypercubes de petites dimensions.

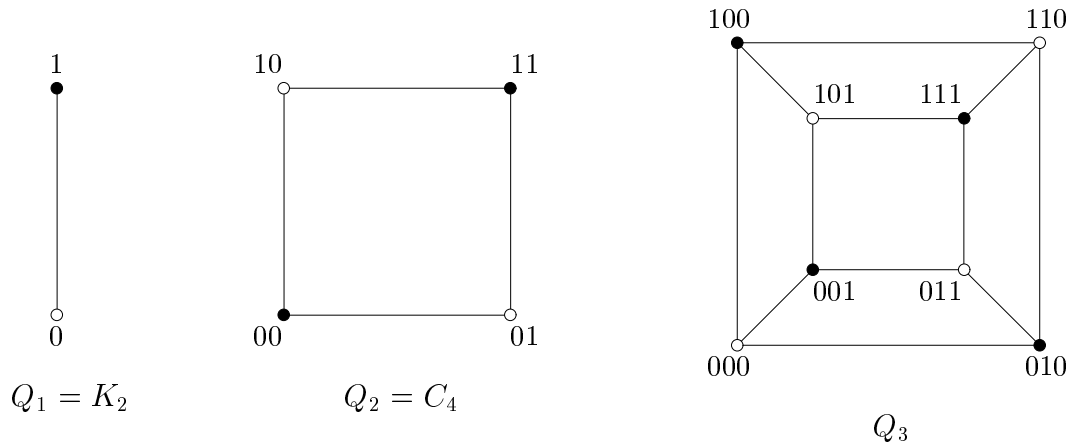


Figure 2.1 – les premiers hypercubes

Une *direction* i dans l'hypercube de dimension n ($i \leq n$) est l'ensemble d'arêtes de Q_n dont les extrémités ont des vecteurs associés qui diffèrent à la $i^{\text{ème}}$ composante.

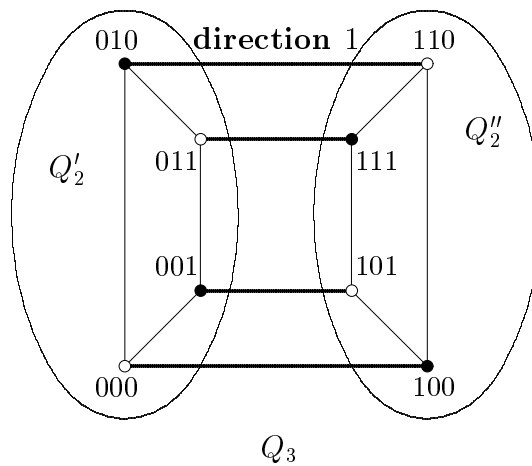


Figure 2.2 – décomposition canonique de Q_3

La figure 2.2 montre une décomposition de Q_3 en deux copies de Q_2 suivant la direction 1 (les arêtes en gras).

Il est facile de voir qu'une direction définit un couplage parfait de 2^{n-1} arêtes qui décompose Q_n en deux copies disjointes de Q_{n-1} (noté par Q'_{n-1}, Q''_{n-1}). Une telle décomposition s'appelle *canonique* suivant la direction i . Des arêtes de même direction sont appelées *parallèles*. Il est facile à voir qu'il y a n directions distinctes dans l'hypercube de dimension n .

La notation suivante sera utilisée dans ce manuscrit : Pour $u \in V(Q'_{n-1})$ (resp. $V(Q''_{n-1})$), le sommet $u' \in V(Q''_{n-1})$ (resp. $V(Q'_{n-1})$) tel que uu' soit une arête du couplage qui relie Q'_{n-1} à Q''_{n-1} est notée $u|_{Q''_{n-1}}$ (resp. $u|_{Q'_{n-1}}$). De même, pour $uv \in E(Q'_{n-1})$ on note $u'v' = uv|_{Q''_{n-1}}$, l'arête de Q''_{n-1} tels que u' et v' soient définis comme précédemment (u' et $u'v'$ seront utilisés s'il n'y a pas de confusion).

Quelques propriétés élémentaires de l'hypercube

L'hypercube de dimension n est un graphe équilibré, n -régulier avec 2^n sommets et donc $n \cdot 2^{n-1}$ arêtes.

En utilisant la relation 2.1 et la proposition 1.4 (page 25), on obtient que le diamètre de l'hypercube Q_n est égal à n .

De plus, pour deux sommets x et y qui sont à distance k dans Q_n , il existe $k!$ chaînes géodésiques entre x et y .

On peut montrer, par induction, qu'entre deux sommets quelconques de l'hypercube, il existe n chaînes deux à deux sommet-disjointes, ce qui prouve que sa sommet-connexité (et donc son arête-connexité) est égale au degré n .

La proposition suivante est une proposition plus forte

Proposition 2.1 *Il existe $n-1$ chaînes de longueur inférieure ou égale à n et une chaîne de longueur inférieure ou égale à $n+1$, deux à deux sommet-disjointes, entre toute paire de sommets dictints de l'hypercube de dimension n .*

Preuve: La preuve se fait par induction sur n . Il est facile à voir que le résultat est vrai pour $n = 2$. Supposons par hypothèse d'induction que le résultat est vrai pour $n - 1$ et considérons Q_n .

Soient x et y deux sommets de Q_n et soit $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ une décomposition canonique de Q_n . Deux cas sont à distinguer :

cas 1 : Il existe une décomposition $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ de Q_n tel que x et y appartiennent à Q'_{n-1} .

Par hypothèse d'induction, il existe $n-1$ chaînes P_1, P_2, \dots, P_{n-1} dans Q'_{n-1} , de longueur inférieure ou égale à n . Dans Q''_{n-1} , soit P' une chaîne de longueur inférieure ou égale à $n - 1$ entre x' et y' . La chaîne $P'_1 = \{xx' \cup P' \cup y'y\}$ est une chaîne de longueur inférieure ou égale à $n + 1$ entre x et y .

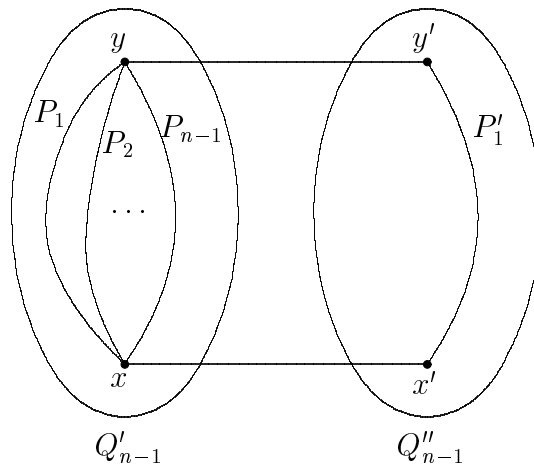


Figure 2.3 – chaînes disjointes dans Q_n

Les chaînes P_1, P_2, \dots, P_{n-1} et P'_1 sont les chaînes voulues dans Q_n (figure 2.3).

cas 2 : Pour toute décomposition $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ de Q_n , $x \in Q'_{n-1}$ et $y \in Q''_{n-1}$.

Dans ce cas, puisqu'ils diffèrent de chaque composante, x et y sont à distances n dans Q_n (x et y sont appelés *antipodaux*).

Les n chaînes sont construites en partant de x et en prenant les directions $i, i+1, \dots$

(modulo n), pour $i = 1, \dots, n$. Ces chaînes sont deux à deux sommet-disjointes de longueur n . \square

on montre aussi, par induction sur n , que Q_n est hamiltonien.

Assertion 2.1 *L'hypercube est hamiltonien, de plus par toute arête passe un cycle hamiltonien.*

Preuve: Q_2 est hamiltonien. Supposons maintenant que Q_{n-1} vérifie cette propriété. Soit uv une arête de Q_n et soit $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ une décomposition canonique de Q_n tel que $uv \in Q'_{n-1}$. Par hypothèse d'induction, il existe un cycle hamiltonien C_1 dans Q'_{n-1} qui passe par uv . Soit xy une arête de C_1 , par hypothèse d'induction, il existe un cycle hamiltonien C_2 dans Q''_{n-1} qui passe par $x'y'$. Le cycle $C = C_1 \cup C_2 \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$ est un cycle hamiltonien dans Q_n , et qui passe par l'arête uv . \square

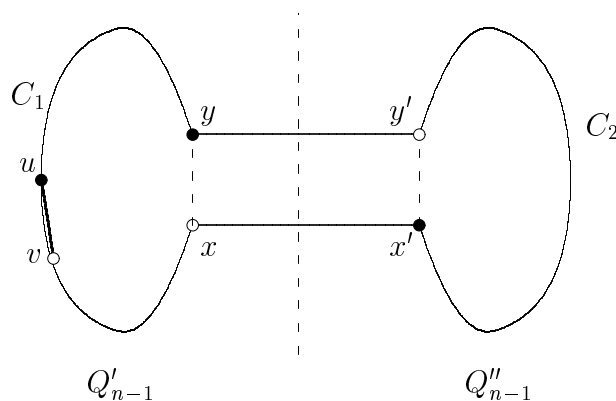


Figure 2.4 – cycle hamiltonien dans Q_n

A noter que dans l'hypercube de dimension n ($n \geq 2$), toute paire d'arêtes adjacentes de Q_n appartient à exactement un cycle de longueur 4. Il est à noter aussi, que dans un cycle de l'hypercube, le nombre d'arêtes dans une direction donnée i est toujours pair. Nous utiliserons par la suite souvent la conséquence que si un cycle passe par une arête xy , il existe une autre arête de ce cycle de même direction que xy .

A noter aussi que toute arête xy de Q_n appartient à exactement $n - 1$ cycles de longueur 4 dans Q_n .

2.2 Décomposition en couches de l'hypercube

Soit $\{x, N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x)\}$ une décomposition en couches à partir d'un sommet x quelconque de Q_n . On a les propriétés suivantes :

Propriété 2.1 *i) Pour tout sommet y de $N_2(x)$, il existe exactement deux arêtes reliant y à des sommets de $N_1(x)$,*

ii) $|N_i(x)| = C_n^i$.

Il est facile à voir que le nombre de sommets qui sont à distance impaire d'un sommet quelconque x de Q_n est égale à 2^{n-1} , et que le nombre de sommets qui sont à distance paire de x est égale à $2^{n-1} - 1$.

La figure 2.5 montre une décomposition en couches de Q_4 à partir du sommet 0000.

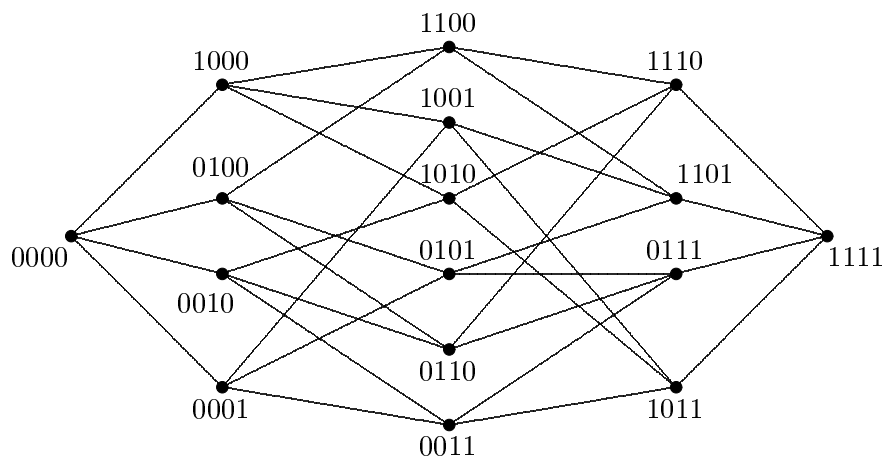


Figure 2.5 – décomposition en couches de Q_4

On peut facilement vérifier les conditions *i)* et *ii)* de la propriété 2.1 sur cette figure. On peut aussi remarquer qu'il n'y a pas d'arêtes entre deux sommets quelconques dans une même couche (l'hypercube est un graphe biparti).

L'hypercube possède aussi la propriété suivante :

Propriété 2.2 *Pour tout sommet y de $N_i(x)$ et tout sommet z de $N_{i-1}(x)$ ($i \geq 2$), le nombre d'arêtes entre y et $N_{i-1}(x)$ est égale au nombre d'arêtes entre z et $N_{i-2}(x)$ plus 1. Plus précisément, le nombre d'arêtes entre y et $N_{i-1}(x)$ est égale à i .*

2.3 Quelques caractérisations de l'hypercube

Il existe plus d'une trentaine de caractérisation de l'hypercube à ce jour. Foldes [23] à donné une des premières caractérisations de l'hypercube :

Théorème 2.1 *Un graphe connexe $G=(V,E)$ est un hypercube si et seulement si G satisfait aux conditions suivantes :*

(1) *G est biparti,*

(2) *Pour toute paire x, y de sommets de G , le nombre de chaînes géodésiques entre x et y est $d(x,y)!$.*

Laborde - Rao Hebbare [46] et Mulder [56] ont indépendamment démontré le théorème 2.2 suivant qui repose sur le concept de $(0, 2)$ -graphe.

Définition 2.2 *Un graphe connexe G est un $(0, 2)$ -graphe si et seulement si toute paire d'arêtes adjacentes de G appartient à exactement un cycle de longueur 4.*

Cette même définition peut se formuler de manière équivalente en termes de sommets et de chaînes.

Définition 2.3 *Un graphe connexe G est un $(0, 2)$ -graphe si et seulement si pour toute paire (x, y) de sommets distincts de G , il existe soit exactement 2 chaînes de longueur 2 reliant x à y , soit aucune chaîne de longueur 2 reliant x à y .*

Les propositions suivantes sur les $(0, 2)$ -graphes sont données par Mulder [56]

Proposition 2.2 *Si G est un $(0, 2)$ -graphe alors G est régulier.*

Proposition 2.3 *Soit G un $(0, 2)$ -graphe de degré n . Alors*

$$|V(G)| \leq 2^n$$

Pour un degré donné n , existe-t-il des $(0, 2)$ -graphes pour lesquels leur ordre atteint la borne donnée dans la proposition 2.3 ?

Il se trouve que pour n donné, l'hypercube est le seul $(0, 2)$ -graphe n -régulier d'ordre 2^n .

Théorème 2.2 *Soit $G=(V, E)$ un $(0, 2)$ -graphe. Alors*

- (1) G est régulier (notons n son degré),
- (2) $|V(G)| \leq 2^n$,
- (3) $|V(G)| = 2^n$ si et seulement si G est un hypercube de dimension n .

Une variante de cette caractérisation de l'hypercube en tant que $(0, 2)$ -graphe à été donné par Mollard [50]

Proposition 2.4 *Soit un $(0, 2)$ -graphe n -régulier, alors*

- (1) $D(G) \leq n$,

(2) $D(G) = n$ si et seulement si G est le graphe de l'hypercube Q_n .

Le théorème suivant donne une autre caractérisation de l'hypercube en tant que $(0, 2)$ -graphe [10]

Théorème 2.3 *Soit G un $(0, 2)$ -graphe tel qu'il existe une décomposition en couches où tout cycle de longueur 4 rencontre 3 couches, alors G est un hypercube.*

Une autre caractérisation de l'hypercube a été donnée par Van den Cruyce [17], elle utilise la notion de graphe convexe.

Définition 2.4 *Soit un graphe $G=(V,E)$ et soit $S \subseteq V(G)$ un ensemble de sommets. Le sous-graphe engendré par S est dit convexe si pour toute paire (x,y) de sommets distincts de S , tous les sommets qui appartiennent à une chaîne géodésique entre x et y , sont dans S .*

La caractérisation suivante de l'hypercube s'ensuit :

Théorème 2.4 *Un graphe G est un hypercube de dimension n si et seulement si l'ensemble des sous graphes convexes de G est $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$.*

Caractérisation de l'hypercube par les intervalles

La caractérisation suivante de l'hypercube en terme d'intervalles est due à Mulder [7].

Théorème 2.5 *Soit G un graphe biparti connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) G est un hypercube,

- (ii) Tout intervalle dans G engendre un hypercube,
- (iii) Tout intervalle dans G engendre un $(0,2)$ -graphe,
- (iv) Tout intervalle $I(u,v)$ dans G contient exactement $2^{d(u,v)}$ sommets,
- (iv) Tout intervalle $I(u,v)$ dans G engendre un graphe avec exactement $d(u,v) \cdot 2^{d(u,v)-1}$ arêtes.

La caractéristion suivante en terme de graphes médians est donnée par Mulder [57]

Théorème 2.6 *Un graphe connexe $G = (V, E)$ est un hypercube si et seulement si G est un graphe médian régulier.*

D'autres caractérisations de l'hypercube en terme d'intervalles ont été données, en particulier des caractérisations en termes de graphes distance monotones [14], de graphes intervalle-réguliers et de graphe sphériques [10] peuvent être trouvées.

2.4 Projection et anti-projection

Une projection (resp. anti-projection) d'un sommet u d'un graphe G sur un ensemble de sommets S de G est un sommet v de S à distance minimum (resp. maximum) de u . Pour tout ensemble de sommets S de G et pour tout sommet u , on désigne par $P(u, S)$ (resp. $AP(u, S)$) l'ensemble des projections (resp. anti-projection) de u sur S .

On considère les propriétés suivantes :

$$P1 : \text{Pour tout } u, v \text{ et } w, |P(u, I(v, w))| = 1,$$

$$P2 : \text{Pour tout } u, v \text{ et } w, |AP(u, I(v, w))| = 1.$$

Un graphe vérifiant l'une de ces deux propriétés est un graphe biparti.

Mollard [52] a donné la caractérisation suivante de l'hypercube en considérant les anti-projections sur les intervalles.

Proposition 2.5 *Un graphe G est un hypercube si et seulement si G vérifie la propriété P2.*

Berrachedi [10] a donné un résultat analogue en considérant les projections sur les intervalles.

Proposition 2.6 *Un $(0,2)$ -graphe qui vérifie la propriété P1 est un hypercube.*

Chapitre 3

Hamiltonicité de l'hypercube

S'il a été prouvé que l'hypercube de dimension paire est décomposable en cycles hamiltoniens, le but de ce chapitre est de montrer un résultat de même nature pour les hypercubes de dimensions impaires (théorème 3.9). La définition de la décomposition de graphes est donnée dans la première section ainsi que les premiers résultats. La deuxième partie de ce chapitre sera consacrée à la décomposition de produit cartésien des graphes ainsi qu'une large vue sur les résultats antérieurs. La troisième section sera elle consacrée à la décomposition hamiltonienne des hypercubes. Deux problèmes ouverts seront exposés à la fin de ce chapitre.

3.1 Décomposition Hamiltonienne de graphes

Définition 3.1 *Un graphe G est décomposable en cycles hamiltoniens (ou cycles hamiltoniens et un couplage parfait) si on peut partitionner l'ensemble de ses arêtes en cycles hamiltoniens (ou cycles hamiltoniens et un couplage parfait).*

Il est très connu que K_n est décomposable en cycles hamiltoniens si n est impair et en cycles hamiltoniens plus un couplage parfait si n est pair. Le théorème suivant cité dans Berge [8] est un théorème de Walecki(1872) et Dirac(1972).

Théorème 3.1 *Le graphe K_{2n+1} peut être décomposé en n cycles hamiltoniens, et K_{2n} peut être décomposé en n cycles hamiltoniens plus un couplage parfait.*

La figure 3.1 montre une décomposition de K_5 en 2 cycles hamiltoniens.

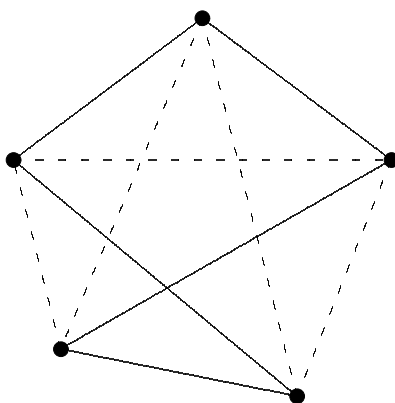


Figure 3.1 – décomposition hamiltonienne de K_5

3.2 Décomposition du produit cartésien de graphes

On rappelle que le problème d'hamiltonicité dans les produits de graphes a été beaucoup étudié. En particulier, la décomposition du produit cartésien de graphes complets en sous-graphes hamiltoniens a été traité par Aubert et Schneider [5] qui ont donné le théorème 3.2 suivant

Théorème 3.2 *$K_m \square K_n$ est décomposable en $\frac{1}{2}(m+n-2)$ cycles hamiltoniens lorsque $m+n$ est pair ou en $\frac{1}{2}(m+n-3)$ cycles hamiltoniens et un couplage parfait lorsque $m+n$ est impair.*

La preuve de ce théorème repose sur le lemme suivant

Lemme 3.1 *Considérons $G = \bigcup_{i=1}^k G_i$ et $G' = \bigcup_{j=1}^{k+r} G'_j$*

où les G_i (resp. G'_j) sont des ensembles mutuellement disjoints d'arêtes ; alors

$$G \square G' = \left(\bigcup_{i=1}^k (G_i \square G'_i) \right) \cup \left(\bigcup_{a \in E(G)} (a \square \bigcup_{j=k+1}^{k+r} G'_j) \right)$$

Remarque : Le cas particulier du théorème 3.2 où $m = n$ a été montré indépendamment par Myers [58].

Aubert et Schneider [6] ont également montré le théorème 3.3, sur la décomposition du produit cartésien d'un cycle et de l'union de deux cycles hamiltoniens en cycles hamiltoniens.

Théorème 3.3 *Soit G un graphe d'ordre m décomposable en deux cycles hamiltoniens et C un cycle d'ordre n , alors $G \square C$ est décomposable en trois cycles hamiltoniens.*

Le théorème 3.4 sur la décomposition hamiltonienne du produit cartésien de deux cycles a été montré par Kotzig [45]

Théorème 3.4 *$C_r \square C_n$ peut être décomposé en deux cycles hamiltoniens.*

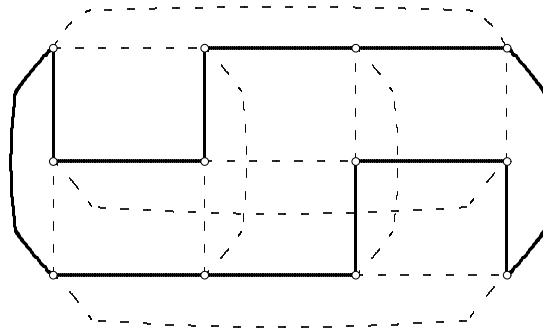


Figure 3.2 – décomposition hamiltonienne de $C_3 \square C_4$

La figure 3.2 montre une décomposition en deux cycles (un en gras et l'autre en pointillé) du produit cartésien $C_3 \square C_4$.

La décomposition hamiltonienne du produit cartésien de deux graphes quelconques à également été exploré.

La conjecture suivante est dûe à Bermond [9]

Conjecture 3.1 *Si G_1 est décomposable en p_1 cycles hamiltoniens et si G_2 est décomposable en p_2 cycles hamiltoniens, alors $G_1 \square G_2$ est décomposable en $p_1 + p_2$ cycles hamiltoniens.*

Aubert et Schneider [6] ont réussi à montré cette conjecture dans un cas particulier

Théorème 3.5 *Si G_1 est décomposable en p_1 cycles hamiltoniens et si G_2 est décomposable en p_2 cycles hamiltoniens, p_1 et p_2 tel que $p_2 \leq p_1 \leq 2p_2$, alors $G_1 \square G_2$ est décomposable en $p_1 + p_2$ cycles hamiltoniens.*

Un corollaire immédiat de ce théorème est le suivant

Corollaire 3.1 *Si deux graphes G_1 et G_2 sont décomposables en p cycles hamiltoniens, alors le produit cartésien $G_1 \square G_2$ est décomposable en $2p$ cycles hamiltoniens.*

Après cette exploration des résultats bien connus, nous nous intéressons dans la section suivante à la décomposition hamiltonienne de graphes de type hypercube.

3.3 Hamiltonicité de l'hypercube

L'hypercube est un graphe hamiltonien (assertion 2.1 page 33). Un certain nombre de résultats sont connus sur le nombre de cycles hamiltoniens différents de l'hypercube.

Petit historique

L'hypercube étant un graphe régulier de degré n , il existe au plus $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^1$ cycles hamiltoniens disjoints (c'est à dire sans arêtes communes).

Est-il vrai que si n est pair, il existe exactement $\frac{n}{2}$ cycles hamiltoniens disjoints (on aurait donc une partition de l'ensemble des arêtes de l'hypercube en cycles hamiltoniens).

Koester a remarqué que Q_6 était décomposable en 3 cycles hamiltoniens.

Ringel [62] a conjecturé l'existence d'une décomposition de l'hypercube de dimension pair en cycles hamiltoniens et l'a prouvé lorsque n est une puissance de 2.

Mollard [50] a indépendamment retrouvé ces deux derniers résultats comme corollaire des 2 théorèmes suivants

Théorème 3.6 *Soit G un graphe hamiltonien, alors le produit cartésien $G \square G$ possède au moins deux cycles hamiltoniens disjoints.*

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 3.5

Théorème 3.7 *Soit G un graphe hamiltonien qui possède p cycles hamiltoniens disjoints, alors le produit cartésien $G \square G$ possède au moins $2p$ cycles hamiltoniens disjoints.*

Comme conséquence immédiate du théorème 3.7, nous pouvons donner le corollaire suivant

Corollaire 3.2 *Si $n = 2^p$, alors l'hypercube de dimension n est un graphe possédant 2^{p-1} cycles hamiltoniens disjoints.*

La résolution de la conjecture de Ringel a été obtenu par Aubert et Schneider comme conséquence immédiate du théorème 3.5 (résultat non publié communiqué par Bermond).

¹ $[x]$ désigne la partie entière de x

Théorème 3.8 *L'hypercube de dimension $2n$ est décomposable en n cycles Hamiltoniens.*

La preuve de la décomposition hamiltonienne de Q_n dans le cas n impair se trouve dans les papiers suivants [2] :

Théorème 3.9 *L'hypercube de dimension $2n+1$ est décomposable en n cycles Hamiltoniens plus un couplage parfait.*

A titre anecdotique, remarquons que le théorème 3.9 reste valable pour $n = 0$!

3.4 Problèmes ouverts

Pour terminer ce chapitre, nous poserons deux questions dont l'une concerne la décomposition de graphes quelconques et l'autre sur une extension possible du théorème 3.8.

Question 1 : Si G est un graphe hamiltonien, est-il vrai que le produit cartésien $\underbrace{G \square G \square \dots \square G}_{n \text{ fois}}$ possède n cycles hamiltoniens disjoints ?

La réponse à cette question est oui dans le cas particulier où n est une puissance de 2, par application répétée du théorème 3.7.

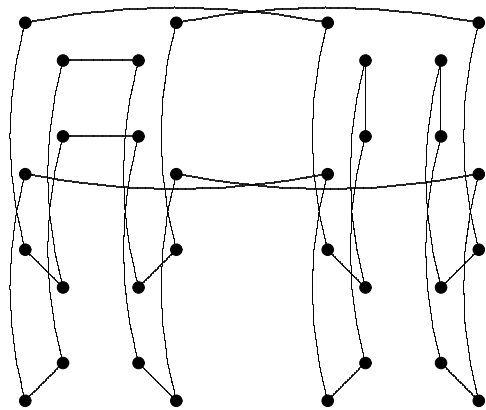
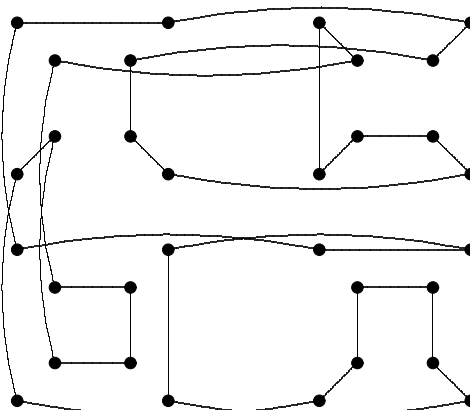
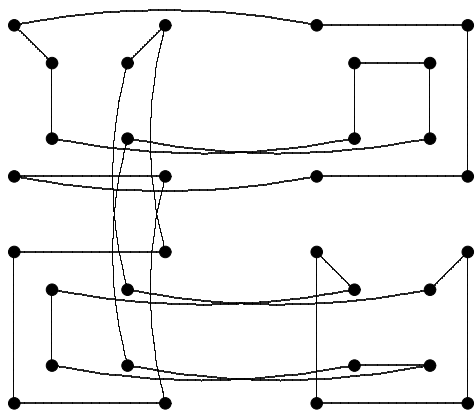
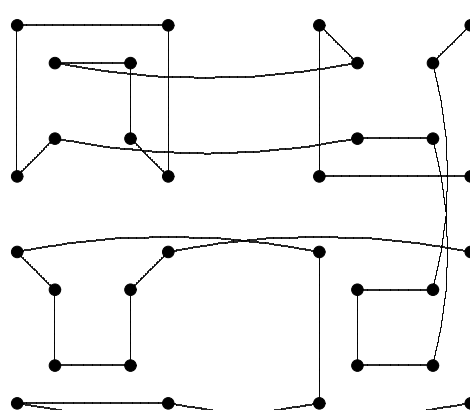
La deuxième question m'a été posé par Luis Goddyn lors d'une conférence sur la théorie des graphes qui s'est déroulée à Vancouver (Juillet 2000).

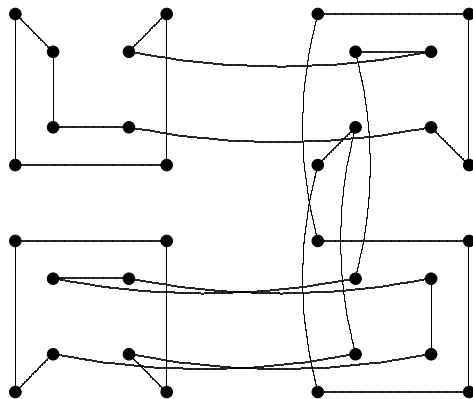
Question 2 : Peut-on trouver n cycles hamiltoniens dans l'hypercube de dimension n tel que chaque arête de l'hypercube appartient à exactement 2 de ces cycles ?

Comme Q_{2n} est décomposable en cycles hamiltoniens (théorème 3.8), la réponse à cette question est positive dans le cas où n est pair.

Pour $n = 3$, il est facile à voir qu'il n'existe pas trois cycles hamiltoniens dans Q_3 qui vérifient cette propriété.

Alspach a exhibé les cinq cycles hamiltoniens suivants dans Q_5 qui vérifient cette propriété.

 C_1  C_2  C_3  C_4

 C_5

Le cas $n \geq 7$ reste toujours ouvert.

Chapitre 4

Chaînes et cycles dans Q_n

Un type de problèmes sur l'hypercube consiste en la recherche de chaînes et de cycles ayant certaines propriétés, et parmi ceux-ci les chaînes et les cycles hamiltoniens.

Nous rappellons quelques résultats connus sur les chaînes hamiltoniennes dans la première section de ce chapitre. Dans la deuxième section, nous donnons trois résultats préliminaires sur les cycles hamiltoniens.

La troisième section est consacrée au résultat principal de chapitre, à savoir que, sous certaines conditions, l'hypercube de dimension n peut être partitionné en des cycles sommet-disjoints (théorème 4.2). Ce théorème sert à montrer, dans le chapitre suivant, que trois familles de graphes (les quasi-étoiles, les doubles quasi-étoiles et les MD -graphes) sont des graphes plongeables dans l'hypercube.

4.1 Chaînes hamiltoniennes dans Q_n

Le but de cette section est de donner quelques propriétés usuelles sur les chaînes hamiltoniennes dans Q_n . Certains de ces résultats sont intéressants en tant que tel, mais ils sont aussi utilisés dans le chapitre 5 pour étudier le problème de plongement de quelques familles de graphes dans l'hypercube.

Lemme 4.1 Soient x et y deux sommets à distance impaire dans l'hypercube de dimension n ($n \geq 2$). Il existe une chaîne hamiltonienne P dans Q_n , d'extrémités x et y .

Preuve: La preuve se fait par induction. Le résultat est évident pour $n = 2$. Supposons que le résultat est vrai pour $n - 1$, et considérons Q_n . Il est toujours possible de trouver une décomposition canonique $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ de Q_n , tels que $x \in Q'_{n-1}$ et $y \in Q''_{n-1}$.

Soit u un sommet voisin de x dans Q'_{n-1} , tel que u' soit différent de y .

Par hypothèse d'induction, il existe une chaîne hamiltonienne P' dans Q'_{n-1} d'extrémités x et u , et une chaîne hamiltonienne P'' dans Q''_{n-1} d'extrémités y et u' .

La chaîne $P = P' \cup P'' \cup uu'$ est la chaîne voulue dans Q_n . \square

Lemme 4.2 Soient Q_n pour $n \geq 1$, u un sommet quelconque de Q_n , et soit $W \in V(Q_n)$ un ensemble de sommets de Q_n tel que $|W| \leq n - 1$. Il existe une chaîne hamiltonienne P dans Q_n d'extrémités u et v , avec $v \notin W$.

Preuve: Dans Q_n , il existe 2^{n-1} sommets qui sont à distance impaire d'un sommet donné x . Comme $n - 1 < 2^{n-1}$, il existe donc un sommet v à distance impaire de u , tel que v n'appartient pas à W . Le résultat s'en déduit par application du lemme 4.1. \square

La propriété 4.1 sera souvent utilisée par la suite dans ce chapitre

Propriété 4.1 Soient u_1v_1 et u_2v_2 deux arêtes de même direction dans Q_n . Il existe une décomposition canonique $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ de Q_n , tels que $u_1v_1 \in E(Q'_{n-1})$ et $u_2v_2 \in E(Q''_{n-1})$.

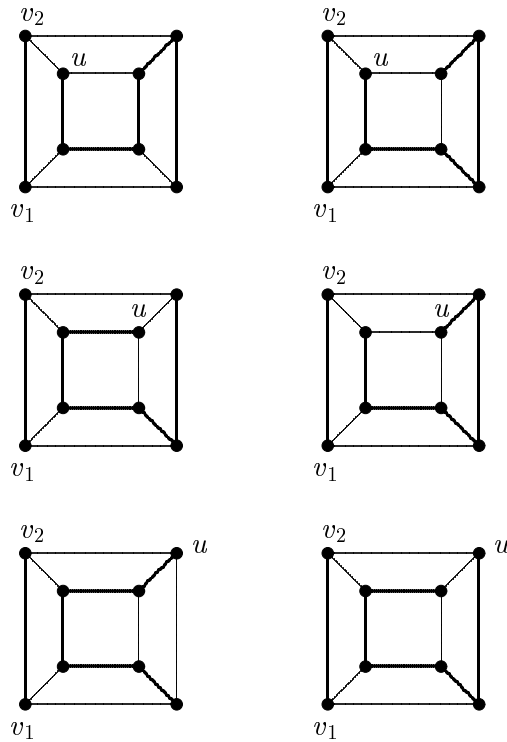
Preuve: Supposons, sans perte de généralité, que $d(u_1, u_2) = d(v_1, v_2) = k$. Les sommets u_1 et u_2 diffèrent donc exactement de k composantes i_1, \dots, i_k , de même pour les sommets v_1 et v_2 . Une décomposition canonique suivant l'une des directions i_j , $1 \leq j \leq k$ possède la propriété voulue. \square

Lemme 4.3 Pour $n \geq 2$, soient :

(1) u, v_1, v_2 , 3 sommets distincts de Q_n tel que $v_1v_2 \in E(Q_n)$,

(1) $W \subset V(Q_n) - v_1 - v_2$ un ensemble de sommets de Q_n tel que $|W| \leq n - 2$.
Il existe une chaîne hamiltonienne P dans $Q_n - v_1 - v_2$ d'extrémités u et v , tel que $v \notin W$.

Preuve: La preuve de ce lemme se fait par induction sur n . Le cas $n = 2$ est évident. Pour $n = 3$, les 6 cas possibles sont montrés dans la figure qui suit.



Supposons, par hypothèse d'induction, que le lemme est vrai pour $n - 1$ ($n \geq 4$), et considérons Q_n .

Par la propriété 4.1, il existe donc une décomposition canonique $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ de Q_n tel que

$$|W \cap V(Q''_{n-1})| \leq n - 3 \quad \text{et} \quad |W \cap V(Q'_{n-1})| \leq n - 3.$$

Supposons, sans perte de généralité, que $v_1, v_2 \in V(Q''_{n-1})$.

Deux cas sont à distinguer

- $u \in V(Q'_{n-1})$.

A noter que $n - 1 \geq 3$. D'après le lemme 4.2, il existe une chaîne hamiltonienne P' dans Q'_{n-1} d'extrémités u et v , tel que v soit différent de v'_1 et de v'_2 . Par hypothèse d'induction, il existe une chaîne hamiltonienne P'' dans $Q''_{n-1} - v_1 - v_2$ d'extrémités v' et w , tel que $w \notin W \cap V(Q''_{n-1})$.

La chaîne $P' \cup vv' \cup P''$ est la chaîne voulue dans Q_n .

- $u \in V(Q''_{n-1})$.

Par hypothèse d'induction, il existe une chaîne hamiltonienne P'' dans $Q''_{n-1} - v_1 - v_2$ d'extrémités u et v . Par le lemme 4.2, il existe une chaîne hamiltonienne P' dans Q'_{n-1} d'extrémités v' et w , tel que $w \notin W \cap V(Q'_{n-1})$. La chaîne voulue dans Q_n est obtenue en combinant ces deux chaînes.

Ce qui complète la preuve. □

Dans le but de montrer qu'une famille de graphes, les quasi-étoiles (voir chapitre 5), est plongeable dans l'hypercube, Nebeský [61] a montré le théorème suivant sur la partition de l'hypercube en des chaînes sommet-disjointes de longueurs paires. Théorème à rapprocher des résultats que nous venons de prouver.

Théorème 4.1 *Soient n et k deux entiers tels que :*

$$1 \leq k \leq n \quad \text{si} \quad 1 \leq n \leq 3 \quad \text{et}$$

$$1 \leq k < n \quad \text{si} \quad n \geq 4.$$

et soient :

(1) u_1, u_2, \dots, u_k , k sommets distincts de Q_n ,

(2) a_1, a_2, \dots, a_k des nombres pairs tels que $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 2^n$,

(3) W_1, W_2, \dots, W_k des ensembles de sommets de Q_n , avec $|W_1| \leq n-k, \dots, |W_k| \leq n-k$.

Il existe k chaînes sommet-disjointes P_1, P_2, \dots, P_k de Q_n , d'ordres respectifs a_1, a_2, \dots, a_k , tel que P_i soit d'extrémités u_i et v_i avec $v_i \notin W_i$.

4.2 Cycles disjoints dans Q_n

Le but de cette section est de donner quelques lemmes préliminaires sur les cycles dans l'hypercube qui possèdent certaines caractéristiques. Ces lemmes seront ensuite utilisés pour démontrer le résultat principal de ce chapitre (théorème 4.2).

Assertion 4.1 Soient xy et uv deux arêtes parallèles de Q_n ($n \geq 2$) tel que $d(x, u) = d(y, v) = 1$. Il existe un cycle hamiltonien C dans Q_n qui contient xy et uv comme seule arête dans cette direction.

Preuve: La preuve de cette assertion se fait en utilisant la décomposition canonique de Q_n suivant la direction de l'arête uv . Considérons une telle décomposition. Par l'assertion 2.1 page 33, il existe un cycle hamiltonien C_1 dans Q'_{n-1} qui contient l'arête ux , et un cycle hamiltonien C_2 dans Q''_{n-1} qui contient l'arête vy . Le cycle $C = C_1 \cup C_2 \cup \{uv \cup xy\} \setminus \{ux \cup vy\}$ est le cycle voulu. \square

Lemme 4.4 Pour ($n \geq 2$) soient :

(1) uv une arête quelconque de Q_n ,

(2) $W \subset E(Q_n)$ un ensemble d'arêtes parallèles de Q_n , distinctes de uv , de même direction que uv tel que $|W| \leq n-2$.

Il existe un cycle hamiltonien C dans Q_n qui contient uv , tel que $E(C) \cap W = \emptyset$.

Preuve: $|W| \leq n - 2$, il existe donc une arête xy dans $Q_n \setminus W$ qui forme un cycle C_4 avec uv (on choisit une des arêtes qui forment les $(n - 1)$ cycles de longueur 4 avec xy). Par l'assertion 4.1, un cycle C avec la propriété requise existe. \square

Lemme 4.5 Pour $n \geq 4$ soient :

(1) u_1v_1, u_2v_2 deux arêtes parallèles de Q_n ,

(2) $W \subset E(Q_n)$ un ensemble d'arêtes parallèles de Q_n , distincts de u_1v_1 et de u_2v_2 , de même direction que u_1v_1 tel que $|W| \leq n - 3$.

Il existe un cycle hamiltonien C dans $Q_n - u_2 - v_2$ qui contient u_1v_1 , tel que $E(C) \cap W = \emptyset$.

Preuve: La preuve de ce lemme se fait par induction sur n .

Pour $n = 4$, la construction des cycles est donnée dans les figures 4.1, 4.2 et 4.3 qui suivent. Trois cas sont à distinguer selon la distance entre les deux arêtes u_1v_1 et u_2v_2 . Il est à noter que $|W| \leq 1$ (W est vide ou réduit à une seule arête).

cas 1 : u_1v_1 et u_2v_2 sont à distance 1 dans Q_4 .

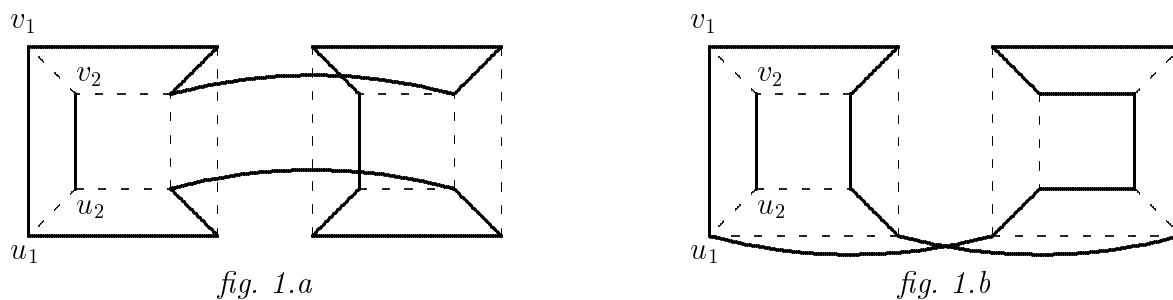


Figure 4.1 - cas 1 - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 1$

Suivant l'arête dans W , on utilisera les cycles des figures 1.a ou 1.b, les arêtes parallèles à u_1v_1 utilisées dans les 2 cas sont disjointes.

cas 2 : u_1v_1 et u_2v_2 sont à distance 3 dans Q_4 .

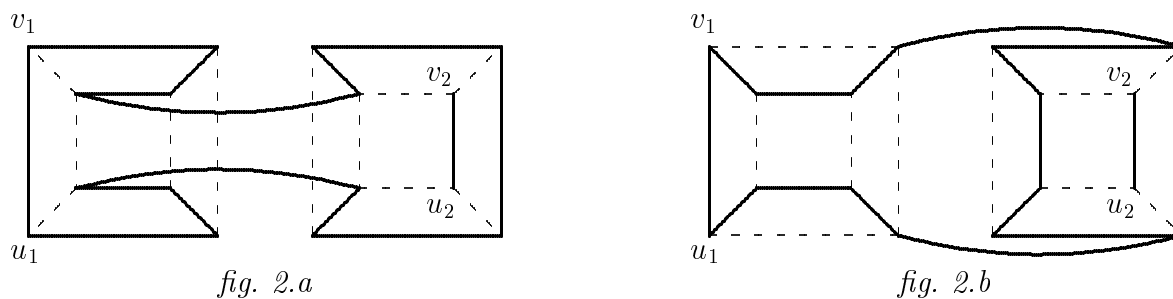


Figure 4.2 – cas 2 - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 3$

Suivant l'arête dans W , on utilisera les cycles des figures 1.a ou 1.b, les arêtes parallèles à u_1v_1 utilisées dans les 2 cas sont disjointes.

cas 3 : u_1v_1 et u_2v_2 sont à distance 2 dans Q_4 .

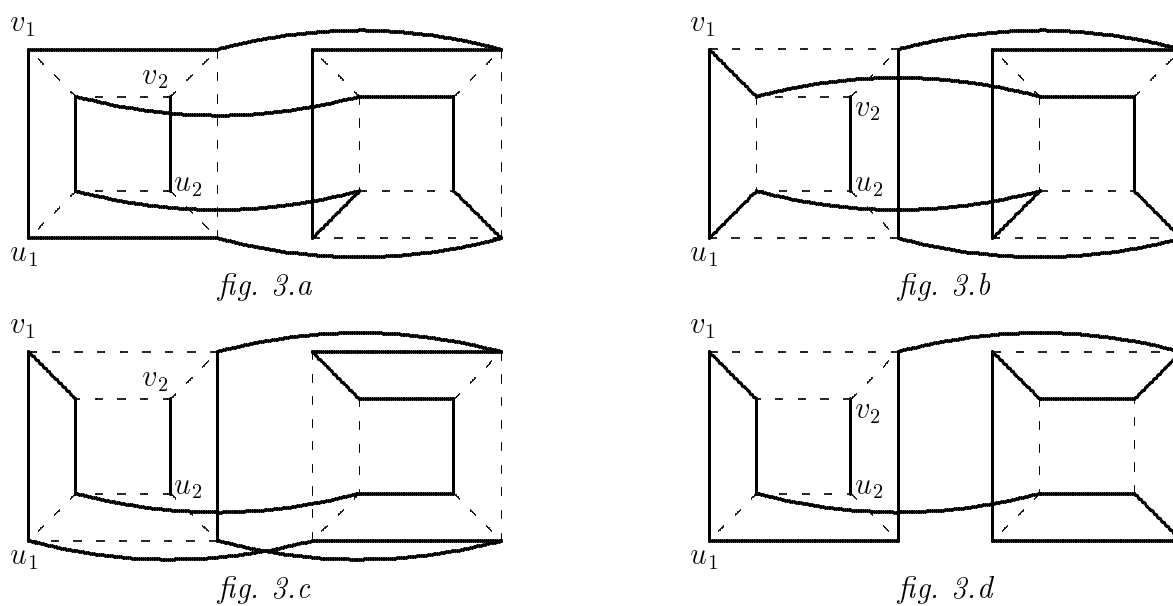


Figure 4.3 – cas 3 - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 2$

Le troisième cas où les 2 arêtes sont à distance deux nécessite 4 cycles, quelque soit l'arête considérée dans W , au moins un des cycles construit vérifie la propriété voulue.

Supposons maintenant, par hypothèse d'induction, que le lemme est vrai pour Q_{n-1} ($n \geq 5$), et considérons Q_n .

D'après la propriété 4.1, il est toujours possible de trouver une décomposition canonique $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ de Q_n , tels que

$$\begin{cases} |W \cap E(Q'_{n-1})| \leq n - 4 \\ |W \cap E(Q''_{n-1})| \leq n - 4 \\ u_2 v_2 \in E(Q''_{n-1}) \end{cases}$$

Soient $u'_2 v'_2 = u_2 v_2|_{Q'_{n-1}}$, $W_1 = W \cap E(Q'_{n-1})$ et $W_2 = W \cap E(Q''_{n-1})$.

Deux cas sont à distinguer suivant que l'arête $u_1 v_1$ appartient à Q'_{n-1} ou à Q''_{n-1} .

cas 1 : $u_1 v_1 \in E(Q'_{n-1})$.

$$\text{Soit } W'_1 = \begin{cases} W_1 \cup \{u'_2 v'_2\} & \text{si } u_1 v_1 \neq u'_2 v'_2 \\ W_1 & \text{si } u_1 v_1 = u'_2 v'_2 \end{cases}$$

Il est clair que $|W'_1| \leq n - 3$. Par le lemme 4.4, il existe un cycle hamiltonien C'_1 dans Q'_{n-1} qui contient $u_1 v_1$, tel que $E(C'_1) \cap W'_1 = \emptyset$.

Soit xy une arête de C'_1 de même direction que $u_1 v_1$ et soit $x'y' = xy|_{Q''_{n-1}}$ ($x'y' \neq u_2 v_2$). Par hypothèse d'induction, il existe un cycle hamiltonien C''_1 dans $Q''_{n-1} - u_2 - v_2$ qui contient $x'y'$ tel que $E(C''_1) \cap W_2 = \emptyset$ (ou $E(C''_1) \cap W_2 = \{x'y'\}$ si $x'y' \in W_2$).

Le cycle $C_1 = C'_1 \cup C''_1 \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$ est le cycle voulu.

cas 2 : $u_1 v_1 \in E(Q''_{n-1})$.

Par hypothèse d'induction, il existe un cycle hamiltonien C''_1 dans $Q''_{n-1} - u_2 - v_2$ qui contient $u_1 v_1$, tel que $E(C''_1) \cap W_2 = \emptyset$.

Soit xy une arête de C''_1 de même direction que $u_1 v_1$, et soit $x'y' = xy|_{Q'_{n-1}}$. Par le lemme 4.4, il existe un cycle hamiltonien C'_1 dans Q'_{n-1} qui contient $x'y'$, tel que $E(C'_1) \cap W_1 = \emptyset$ (ou $E(C'_1) \cap W_1 = \{x'y'\}$ si $x'y' \in W_1$).

Le cycle $C_1 = C'_1 \cup C''_1 \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$ est le cycle voulu.

Ce qui complète la preuve. \square

A noter que ce lemme n'est pas vérifié pour $n = 3$, il suffit pour cela de considérer les deux arêtes xy et uv de Q_3 qui soient à distance 2 comme le montre la figure 4.4.

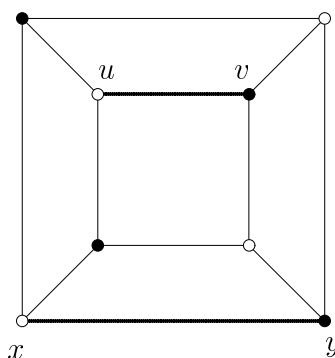


Figure 4.4 – contre exemple pour $n = 3$

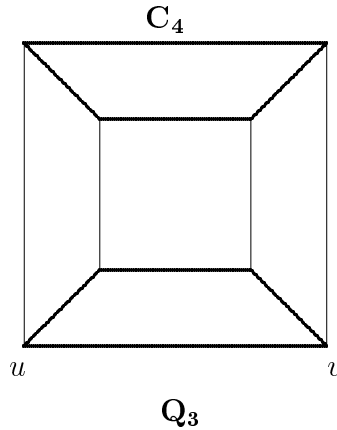
Il est facile de voir qu'il n'existe pas de cycle hamiltonien dans $Q_3 - x - y$ qui utilise l'arête uv .

Lemme 4.6 *Pour $n \geq 3$ soient :*

- (1) uv une arête de Q_n ,
- (2) C_4 un cycle de longueur 4 qui contient deux arêtes de même direction que uv , et distinctes de uv ,
- (3) $W \subset E(Q_n)$ un ensemble d'arêtes parallèles de même direction que uv ($uv \notin W$), tel que $|W| \leq n - 3$.

Il existe un cycle hamiltonien C dans $Q_n \setminus C_4$ qui contient uv , tel que $E(C) \cap W = \emptyset$.

Preuve: Vérification immédiate pour $n = 3$, le seul cas possible est montré sur la figure 4.2 suivante



On suppose maintenant, par hypothèse d'induction, que le lemme est vérifié pour Q_{n-1} ($n \geq 4$), et on considère Q_n . Deux cas sont à distinguer :

cas 1 : Il existe une décomposition canonique $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ de Q_n tel que le cycle C_4 et l'arête uv appartiennent à Q'_{n-1} .

Soient $W' = W \cap E(Q'_{n-1})$, $W'' = W \cap E(Q''_{n-1})$, et soit ab une arête de W' (si $W' \neq \emptyset$).

$$\text{On note } W'_{11} = \begin{cases} W' & \text{si } |W'| \leq n-4 \\ W' \setminus ab & \text{si } |W'| = n-3 \end{cases}$$

Clairement $|W'_{11}| \leq n-4$. Par hypothèse d'induction, il existe un cycle hamiltonien C'_1 dans $Q'_{n-1} \setminus C_4$ qui contient uv tel que $E(C'_1) \cap W'_{11} = \emptyset$.

Si $ab \in C'_1$. Par le lemme 4.4, il existe un cycle hamiltonien C'_2 dans Q''_{n-1} qui contient $a'b'$, tel que $E(C'_2) \cap W'' = \emptyset$ (ou $E(C'_2) \cap W'' = \{a'b'\}$ si $a'b' \in W''$). Le cycle $C = C'_1 \cup C'_2 \cup \{aa' \cup bb'\} \setminus \{ab \cup a'b'\}$ est le cycle voulu.

Si $ab \notin C'_1$ (ou si ab n'existe pas), on choisit une arête xy sur le cycle C'_1 de même direction que uv . Par le lemme 4.4, il existe un cycle hamiltonien C'_2 dans Q''_{n-1} qui contient $x'y'$, tel que $E(C'_2) \cap W'' = \emptyset$ (ou $E(C'_2) \cap W'' = \{x'y'\}$ si $x'y' \in W''$). Le cycle $C = C'_1 \cup C'_2 \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$ est le cycle voulu.

cas 2 : Une telle décomposition n'existe pas.

Dans ce cas le cycle C_4 contient une arête à distance maximale de uv , on peut alors choisir une décomposition canonique $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ de Q_n tel que le cycle C_4 appartient à Q'_{n-1} , l'arête uv appartient à Q''_{n-1} , et $|W'| \leq n - 4$.

Comme uv appartient à $n - 1$ cycles de longueur 4 dans Q_n , il existe donc une arête xy de même direction que uv dans Q''_{n-1} , qui forme un cycle C'_4 de longueur 4 avec uv , tel que $x'y' = xy|_{Q'_{n-1}}$ n'appartient pas au cycle C_4 . Par l'assertion 4.1, il existe un cycle hamiltonien C''_1 dans Q''_{n-1} qui contient xy et uv comme seule arête de même direction. Par hypothèse d'induction, il existe un cycle hamiltonien C'_1 dans $Q'_{n-1} \setminus C_4$ qui contient $x'y'$ tel que $E(C'_1) \cap W' = \emptyset$ (ou $E(C'_1) \cap W' = \{x'y'\}$ si $x'y' \in W'$). Le cycle $C = C'_1 \cup C''_1 \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$ est le cycle voulu dans Q_n .

Ce qui complète la preuve. □

4.3 Théorème principal

Par analogie avec le théorème 4.1 de Nebeský page 52 qui a montré que l'hypercube peut être partitionné en des chaînes sommet-disjointes de longueurs paires, tel que les extrémités de chaque chaîne évitent un ensemble de sommets donné, nous allons montrer dans cette section que l'hypercube de dimension n peut aussi être partitionné (théorème 4.2) en des cycles sommet-disjointes tels que chaque cycle évite les arêtes d'un ensemble donné W .

Ce résultat nous montre que des cycles sommet-disjointes C_1, \dots, C_k d'ordres respectifs a_1, \dots, a_k (a_i pair), avec $k \leq n - 2$, peuvent être plongés dans l'hypercube de dimension n (voir définition page 78), et $a_1 + \dots + a_k \leq 2^n$. dans tout ce chapitre, une arête est peut être considérée comme un cycle de longueur 2.

La preuve de ce théorème nécessite le lemme préliminaire suivant

Lemme 4.7 *Pour $n \leq 4$ et $k \leq n - 2$, soient :*

- (1) $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_kv_k$ k arêtes parallèles de Q_n ,
- (2) a_1, a_2, \dots, a_k des nombres pairs tels que $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 2^n$,
- (3) W_1, W_2, \dots, W_k des ensembles d'arêtes de Q_n , non nécessairement disjoints, de même direction que u_1v_1 ($u_iv_i \notin W_i$), avec $|W_1| \leq n - (k + 1), \dots, |W_k| \leq n - (k + 1)$.

Il existe k cycles sommets-disjointes C_1, C_2, \dots, C_k dans Q_n , d'ordres respectifs a_1, a_2, \dots, a_k , qui passent respectivement par u_iv_i , tels que $E(C_i) \cap W_i = \emptyset$ ($i = 1, \dots, k$).

Preuve: Le résultat est vrai pour $k = 1$ par le lemme 4.4 page 53.

Reste à le vérifier pour $n = 4$ et $k = 2$, cette vérification sera donnée par les 3 figures suivantes.

Soient u_1v_1 et u_2v_2 deux arêtes parallèles de Q_4 , a_1 et a_2 deux entiers positifs tels

que $a_1 + a_2 = 16$.

On peut supposer, sans perte de généralité, que $a_1 \geq a_2$. Quatres cas sont à distinguer selon les valeurs de a_1 et a_2 .

cas 1 : $a_1 = 14$ et $a_2 = 2$.

Dans ce cas, il suffit d'appliquer le lemme 4.5 page 54.

cas 2 : $a_1 = 12$ et $a_2 = 4$.

Soit $W'_2 = \{u_1v_1\} \cup W_2$. $|W'_2| \leq 2$, il existe donc une arête xy qui n'appartient pas à W'_2 , et qui forme un cycle C_2 de longueur 4 avec u_2v_2 . Le cycle C_1 peut ainsi être construit en appliquant le lemme 4.6.

cas 3 : $a_1 = 10$ et $a_2 = 6$.

Ce cas sera divisée en trois sous cas, selon la distance entre les deux arêtes u_1v_1 et u_2v_2 . La construction des cycles sera donnée dans les figures 4.5, 4.6 et 4.7 qui suivent. Il est à noter que $|W_1| \leq 1$ et que $|W_2| \leq 1$.

cas 3.1 : u_1v_1 et u_2v_2 sont à distances 1 dans Q_4 .

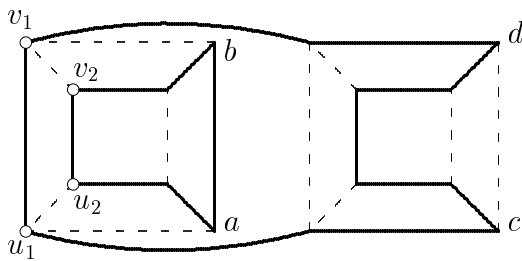


fig. 4.5-a : $W_1 = cd, W_2 \neq ab$

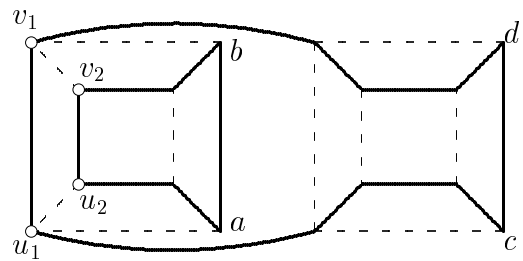


fig. 4.5-b : $W_1 \neq cd, W_2 \neq ab$

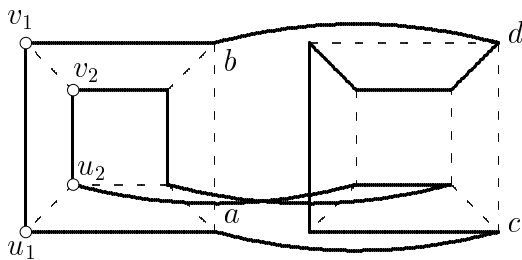


fig. 4.5-c : $W_1 = ab, W_2 = cd$

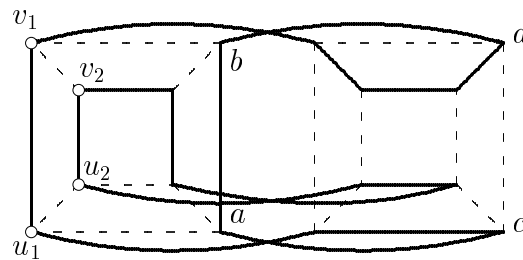


fig. 4.5-d : $W_1 \neq ab, W_2 = cd$

Figure 4.5 – cas 3.1 - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 1$

cas 3.2 : u_1v_1 et u_2v_2 sont à distances 2 dans Q_4 .

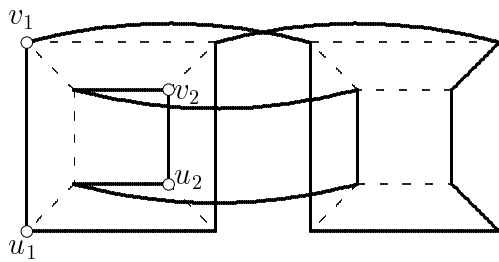


fig. 4.6-a

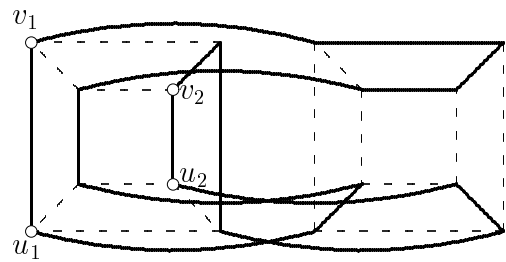


fig. 4.6-b

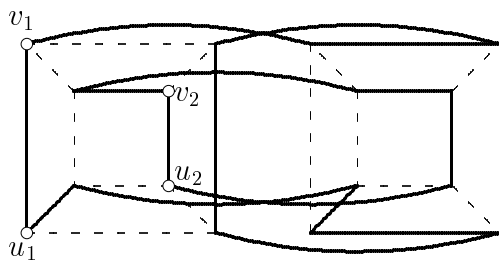


fig. 4.6-c

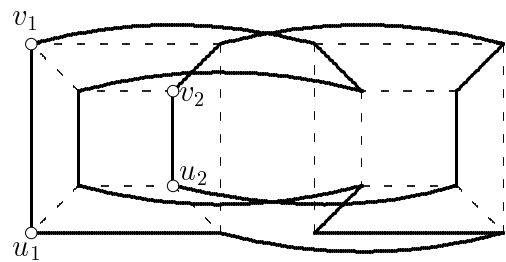


fig. 4.6-d

Figure 4.6 – *cas 3.2* - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 2$

cas 3.3 : u_1v_1 et u_2v_2 sont à distances 3 dans Q_4 .

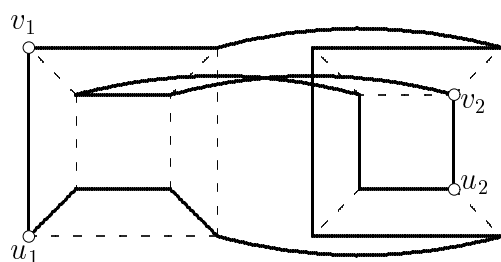


fig. 4.7-a

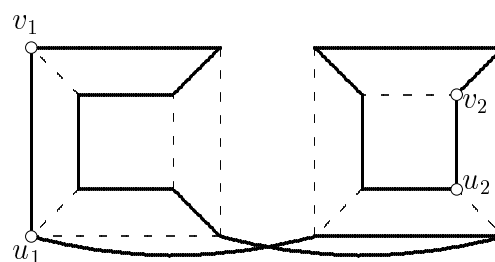


fig. 4.7-b

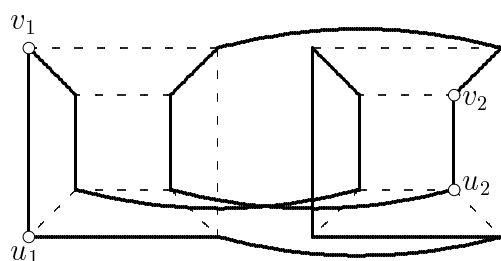


fig. 4.7-c

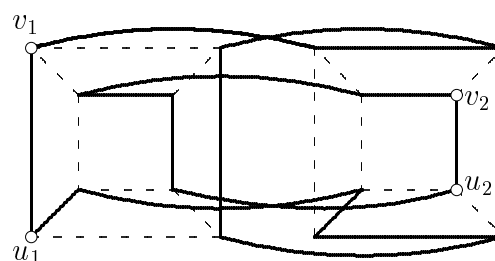


fig. 4.7-d

Figure 4.7 – cas 3.3 - $d(u_1v_1, u_2v_2) = 3$

Le même raisonnement que dans le cas 3.1 peut également s'appliquer aux deux cas 3.2 et 3.3

cas 4 : $a_1 = 8$ et $a_2 = 8$.

Par la propriété 4.1, il est toujours possible de trouver une décomposition canonique $\{Q'_3, Q''_3\}$ de Q_4 , tels que u_1v_1 appartient à Q'_3 et u_2v_2 appartient à Q''_3 . Des cycles qui possèdent la propriété requise peuvent être facilement construits.

Ce qui complète la preuve. □

Théorème 4.2 Pour $n \geq 3$ et $k \leq n - 2$, soient :

- (1) $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_kv_k$ k arêtes parallèles de Q_n ,
- (2) a_1, a_2, \dots, a_k des nombres pairs tels que $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 2^n$,
- (3) W_1, W_2, \dots, W_k des ensembles d'arêtes de Q_n , non nécessairement disjoints, de même direction que u_1v_1 ($u_iv_i \notin W_i$), avec $|W_1| \leq n - (k + 1), \dots, |W_k| \leq n - (k + 1)$.

Il existe k cycles sommets-disjoints C_1, C_2, \dots, C_k dans Q_n , d'ordres respectifs a_1, a_2, \dots, a_k , qui passent respectivement par u_iv_i , tels que $E(C_i) \cap W_i = \emptyset$ ($i = 1, \dots, k$).

Nous dirons que Q_n admet la propriété $H(n, k)$ si cet ensemble vérifie la propriété du théorème 4.2 précédent.

Preuve: La preuve de ce théorème se fera par induction sur n . $H(3, k)$ et $H(4, k)$ sont vraies par le lemme 4.7.

Supposons, par hypothèse d'induction, $H(n - 1, k)$ pour Q_{n-1} , et considérons Q_n .

Pour toute décomposition canonique $\{G', G''\}$ de Q_n , et pour $i = 1, \dots, k$ on définit

$$\left\{ \begin{array}{l} I(G') = \{i ; u_iv_i \in E(G')\} \\ I(G'') = \{i ; u_iv_i \in E(G'')\} \\ k(G') = |I(G')| \\ k(G'') = |I(G'')| \\ U(G') = \{u_iv_i ; i \in I(G')\} \\ U(G'') = \{u_iv_i ; i \in I(G'')\} \\ A(G') = \sum_{i \in I(G')} a_i, \quad A(G'') = \sum_{i \in I(G'')} a_i \end{array} \right.$$

Deux cas se présentent :

cas 1 : Il existe une décomposition canonique $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ de Q_n , tel que $A(Q'_{n-1}) = A(Q''_{n-1}) = 2^{n-1}$.

Soit $I' = I(Q'_{n-1}), I'' = I(Q''_{n-1}), k' = |I'|$ et $k'' = |I''|$.

Puisque k' et k'' sont non nuls, il est donc clair que $k' \leq k - 1 \leq n - 3$, et que $k'' \leq n - 3$.

Pour $i \in I'$, soit

$$\begin{cases} W'_i = W_i \cap E(Q'_{n-1}) \\ u'_i v'_i = u_i v_i \cap E(Q'_{n-1}) \text{ et} \\ a'_i = a_i \end{cases}$$

Il est clair que $|W'_i| \leq (n - 1) - (k' + 1)$, $u'_i v'_i$ sont des arêtes parallèles de Q'_{n-1} et a'_i sont des entiers positifs tels que $\sum_{i \in I'} a_i = 2^{n-1}$.

Par hypothèse d'induction, il existe donc k' cycles sommet-disjoints $C'_1, C'_2, \dots, C'_{k'}$ dans Q'_{n-1} qui contiennent $u'_i v'_i$, d'ordres respectifs a'_i ($i = 1, \dots, k'$), tels que $E(C'_i) \cap W'_i = \emptyset$.

Pour $i \in I''$, soit

$$\begin{cases} W''_i = W_i \cap E(Q''_{n-1}) \\ u''_i v''_i = u_i v_i \cap E(Q''_{n-1}) \text{ et} \\ a''_i = a_i \end{cases}$$

Il est clair que $|W''_i| \leq (n - 1) - (k'' + 1)$, $u''_i v''_i$ sont des arêtes parallèles de Q''_{n-1} et a''_i sont des entiers positifs tels que $\sum_{i \in I''} a_i = 2^{n-1}$.

Par hypothèse d'induction, il existe donc k'' cycles sommet-disjoints $C''_1, C''_2, \dots, C''_{k''}$ dans Q''_{n-1} qui contiennent $u''_i v''_i$, d'ordres respectifs a''_i ($i = 1, \dots, k''$), tels que $E(C''_i) \cap W''_i = \emptyset$.

Les cycles $C'_1, C'_2, \dots, C'_{k'}, C''_1, C''_2, \dots, C''_{k''}$ sont les cycles recherchés dans Q_n .

cas 2 : $A(Q'_{n-1}) \neq A(Q''_{n-1})$ pour toute décomposition canonique $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ de Q_n suivant une direction non parallèle à u_1v_1 .

Ce cas sera divisé en plusieurs cas et sous-cas, qui correspondent à quatre cas particuliers ($k = 1, 2, 3$ et 4), plus le cas général ($k \geq 5$).

cas 2.1 : $k = 1$. C'est le cas du lemme 4.4 page 53.

cas 2.2 : $k = 2$. Supposons, sans perdre de généralités, que $a_1 > a_2$.

cas 2.2.1 : $a_2 = 2$. C'est le cas du lemme 4.5 page 54.

cas 2.2.2 : $a_2 = 4$.

Soit $W'_2 = \{u_1v_1\} \cup W_2$ alors $|W'_2| \leq n - 2$. Comme une arête de Q_n appartient exactement à $n - 1$ cycles de longueur 4, il existe donc une arête xy qui n'appartient pas à W'_2 , et qui forme un cycle C_2 de longueur 4 avec u_2v_2 . Le cycle C_1 peut ainsi être construit en appliquant le lemme 4.6 page 57.

cas 2.2.3 : $a_2 \geq 6$.

Soit $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ une décomposition canonique de Q_n tels que $|W_1 \cap E(Q''_{n-1})| \leq n - 4$, $|W_1 \cap E(Q'_{n-1})| \leq n - 4$, et l'arête u_1v_1 appartient à $E(Q'_{n-1})$.

$$\text{On note } \begin{cases} W'_1 = W_1 \cap E(Q'_{n-1}) \\ W''_1 = W_1 \cap E(Q''_{n-1}) \\ W'_2 = W_2 \cap E(Q'_{n-1}) \quad \text{et} \\ W''_2 = W_2 \cap E(Q''_{n-1}) \end{cases}$$

cas 2.2.3.1 : $u_2v_2 \in E(Q'_{n-1})$ et $W'_2 = \emptyset$.

Soient $a'_2 = a_2$ et $a'_1 = a_1 - 2^{n-1}$. Par hypothèse d'induction, il existe deux cycles sommet-disjoints C'_1 et C_2 dans Q'_{n-1} qui contiennent u_1v_1 et u_2v_2 , d'ordres respectifs a'_1 et a'_2 , tel que $E(C'_1) \cap W'_1 = \emptyset$.

Si $a_1 > 2^{n-1} + 2$, on choisit une arête ab du cycle C'_1 de même direction que u_1v_1 . Par le lemme 4.4, il existe un cycle hamiltonien C''_1 dans Q''_{n-1} qui contient $a'b'$

tel que $E(C_1'') \cap W_1'' = \emptyset$ (ou $E(C_1'') \cap W_1'' = \{a'b'\}$ si $a'b' \in W_1''$). Les 2 cycles $C_1 = C_1' \cup C_1'' \cup \{aa' \cup bb'\} \setminus \{ab \cup a'b'\}$ et C_2 sont les cycles voulus.

Si $a_1 = 2^{n-1} + 2$, on prend l'arête u_1v_1 au lieu de ab . On fait la même construction, le cycle $C_1 = u_1v_1 \cup C_1' \cup \{u_1u_1' \cup v_1v_1'\} \setminus \{u_1'v_1'\}$, C_2 reste inchangé.

cas 2.2.3.2 : $u_2v_2 \in E(Q'_{n-1})$ et $W_2' \neq \emptyset$.

Soient $a_2' = 4$ et $a_1' = 2^{n-1} - 4$. Par hypothèse d'induction, il existe deux cycles sommet-disjoints C_1' et C_2' dans Q'_{n-1} qui contiennent u_1v_1 et u_2v_2 , d'ordres respectifs a_1' et a_2' , tels que $E(C_1') \cap W_1' = \emptyset$.

Soit ab une arête du cycle C_1' de même direction que u_1v_1 , et soit xy l'arête du cycle C_2' de même direction que u_2v_2 . Par hypothèse d'induction, il existe deux cycles sommet-disjoints C_1'' et C_2'' dans Q''_{n-1} qui contiennent $a'b'$ et $x'y'$, d'ordres respectifs $2^{n-1} - a_2 + 4$ et $a_2 - 4$, tels que $E(C_1'') \cap W_1'' = \emptyset$ (ou $E(C_1'') \cap W_1'' = \{a'b'\}$ si $a'b' \in W_1''$) et $E(C_2'') \cap W_2'' = \emptyset$ (ou $E(C_2'') \cap W_2'' = \{x'y'\}$ si $x'y' \in W_2''$).

Les deux cycles $C_1 = C_1' \cup C_1'' \cup \{aa' \cup bb'\} \setminus \{ab \cup a'b'\}$ et $C_2 = C_2' \cup C_2'' \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$ sont les cycles voulus dans Q_n .

cas 2.2.3.3 : $u_2v_2 \in E(Q''_{n-1})$ et $W_2'' = \emptyset$.

$$\text{Soit } W_{11}' = \begin{cases} W_1' \cup \{u_2'v_2'\} & \text{si } u_2'v_2' \neq u_1v_1 \\ W_1' & \text{si } u_2'v_2' = u_1v_1 \end{cases}$$

Il est clair que $|W_{11}'| \leq n - 3$. D'après le lemme 4.4, il existe un cycle hamiltonien C_1' dans Q'_{n-1} qui contient u_1v_1 , tel que $E(C_1') \cap W_{11}' = \emptyset$.

Soit ab une arête du cycle C_1' de même direction que u_1v_1 et soit $a'b' = ab|_{Q''_{n-1}}$, on a dans tous les cas $a'b' \neq u_2v_2$.

Par hypothèse d'induction, il existe deux cycles sommet-disjoints C_1'' et C_2 dans Q''_{n-1} qui contiennent $a'b'$ et u_2v_2 , d'ordres respectifs $a_1 - 2^{n-1}$ et a_2 , tels que $E(C_1'') \cap W_1'' = \emptyset$ (ou $E(C_1'') \cap W_1'' = \{a'b'\}$ si $a'b' \in W_1''$).

Les deux cycles $C_1 = C_1' \cup C_1'' \cup \{aa' \cup bb'\} \setminus \{ab \cup a'b'\}$ et C_2 sont les cycles voulus.

cas 2.2.3.4 : $u_2v_2 \in E(Q_{n-1}'')$ et $W_2'' \neq \emptyset$.

Comme une arête de Q_n appartient à $n - 1$ cycles de longueur 4, il existe donc une arête xy dans Q_{n-1}'' , qui forme un cycle C_2'' de longueur 4 avec u_2v_2 , telle que l'arête $x'y' = xy|_{Q_{n-1}'}$ soit différente de u_1v_1 .

Soit ab une arête de W_1' (si $W_1' \neq \emptyset$), et soit

$$W_{11}' = \begin{cases} W_1' & \text{si } (u_2'v_2' = u_1v_1) \text{ ou } (u_2'v_2' \neq u_1v_1 \text{ et } u_2'v_2' \in W_1') \\ W_1' \cup \{u_2'v_2'\} \setminus ab & \text{si } u_2'v_2' \neq u_1v_1 \text{ et } W_1' \neq \emptyset \\ u_2'v_2' & \text{si } u_2'v_2' \neq u_1v_1 \text{ et } W_1' = \emptyset \end{cases}$$

Il est clair que $|W_{11}'| \leq n - 4$. Par hypothèse d'induction, il existe donc deux cycles sommet-disjoints C_1' et C_2' dans Q_{n-1}' qui contiennent u_1v_1 et $x'y'$, d'ordres respectifs $a_1 - 2^{n-1} + 4$ et $a_2 - 4$, tels que $E(C_1') \cap W_{11}' = \emptyset$ et $E(C_2') \cap W_2' = \emptyset$ (ou $E(C_2') \cap W_2' = \{x'y'\}$ si $x'y' \in W_2'$).

Si $ab \in C_1'$. Par le lemme 4.6, il existe un cycle hamiltonien C_1'' dans $Q_{n-1}'' \setminus C_2''$ qui contient $a'b'$, tel que $E(C_1'') \cap W_1'' = \emptyset$ (ou $E(C_1'') \cap W_1'' = \{a'b'\}$ si $a'b' \in W_1''$). Les deux cycles $C_1 = C_1' \cup C_1'' \cup \{aa' \cup bb'\} \setminus \{ab \cup a'b'\}$ et $C_2 = C_2' \cup C_2'' \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$ sont les cycles voulus.

Si $ab \notin C_1'$, on choisit une arête cd du cycle C_1' de même direction que u_1v_1 . Par le lemme 4.6, il existe un cycle hamiltonien C_1'' dans $Q_{n-1}'' \setminus C_2''$ qui contient $c'd'$, tel que $E(C_1'') \cap W_1'' = \emptyset$ (ou $E(C_1'') \cap W_1'' = \{c'd'\}$ si $c'd' \in W_1''$). Les deux cycles $C_1 = C_1' \cup C_1'' \cup \{cc' \cup dd'\} \setminus \{cd \cup c'd'\}$ et $C_2 = C_2' \cup C_2'' \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$ sont les cycles voulus.

cas 2.3 : $k \geq 3$.

Nous allons tout d'abord prouver qu'il existe une décomposition canonique $\{G_1, G_2\}$ de Q_n tel que $A(G_1) > A(G_2)$ et $1 \leq k(G_2) \leq k - 2$. (4.1)

Nous allons procéder par l'absurde. Supposons que cette décomposition canonique n'existe pas, on peut donc supposer que pour toute décomposition canonique

$\{G^*, G^{**}\}$ de Q_n , si $A(G^*) > A(G^{**})$ et $1 \leq k(G^{**})$, alors $k(G^{**}) = k - 1$. (4.2)

Comme $k \geq 3$, alors il existe une décomposition canonique $\{G_{11}, G_{12}\}$ de Q_n tel que $A(G_{11}) > A(G_{12})$ et $k(G_{12}) \geq 1$. D'après la relation (4.2), $k(G_{12}) = k - 1$, et donc $k(G_{11}) = 1$. Donc il existe $i; 1 \leq i \leq k$, tel que $U(G_{11}) = \{u_i v_i\}$. Comme $A(G_{11}) > A(G_{12})$ alors $a_i > 2^{n-1}$.

Comme $k(G_{12}) = k - 1 \geq 2$, il existe une décomposition canonique $\{G_{21}, G_{22}\}$ de Q_n tel que

$$U(G_{12}) \cap E(G_{21}) \neq \emptyset \neq U(G_{12}) \cap E(G_{22})$$

Supposons, sans perdre de généralité, que $A(G_{21}) > A(G_{22})$. Comme $U(G_{12}) \cap E(G_{22}) \neq \emptyset$ alors $k(G_{22}) \geq 1$. D'après la relation (4.2), $k(G_{22}) = k - 1$, et donc $k(G_{21}) = 1$. Donc il existe $j; 1 \leq j \leq k$, tel que $U(G_{21}) = \{u_j v_j\}$. Comme $A(G_{21}) > A(G_{22})$ alors $a_j > 2^{n-1}$. Comme $U(G_{12}) \cap E(G_{21}) \neq \emptyset$ et $U(G_{21}) = \{u_j v_j\}$, on peut voir que $u_j v_j \in E(G_{12})$. Donc $i \neq j$, et $a_i + a_j > 2^n$, ce qui contredit notre hypothèse. La relation (4.1) est donc prouvée.

Ce cas sera à nouveau divisé en deux cas particuliers ($k = 3$ et $k = 4$), plus le cas général.

cas 2.3.1 : $k = 3$.

Soit $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ une décomposition canonique de Q_n tels que $A(Q'_{n-1}) > A(Q''_{n-1})$ et $k(Q''_{n-1}) = 1$.

Supposons, sans perte de généralité, que $u_1 v_1$ et $u_2 v_2$ appartiennent à Q'_{n-1} , et que $a_1 \geq a_2$.

Soient $W'_1 = W_1 \cap E(Q'_{n-1})$, $W'_2 = W_2 \cap E(Q'_{n-1})$ et $u'_3 v'_3 = u_3 v_3|_{Q'_{n-1}}$.

Si $W'_1 \neq \emptyset$, soit ab une arête de W'_1 . Deux cas se présentent

cas 2.3.1.1 : $2 \leq a_2 \leq 2^{n-1} - 4$.

$$\text{Soit } W'_{11} = \begin{cases} W'_1 & \text{si } (u'_3 v'_3 = u_1 v_1) \text{ ou } (u'_3 v'_3 \in W'_1) \\ W'_1 \cup \{u'_3 v'_3\} \setminus ab & \text{si } u'_3 v'_3 \neq u_1 v_1 \text{ et } W'_1 \neq \emptyset \\ u'_3 v'_3 & \text{si } u'_3 v'_3 \neq u_1 v_1 \text{ et } W'_1 = \emptyset \end{cases}$$

Puisque $n \geq 5$ et que $|W'_1| \leq n - 4$, il est clair que $|W'_{11}| \leq n - 4$.

Soient $a'_2 = a_2$ et $a'_1 = 2^{n-1} - a_2$. Par hypothèse d'induction, il existe deux cycles sommet-disjoints C'_1 et C_2 dans Q'_{n-1} , d'ordres respectifs a'_1 et a'_2 , qui contiennent u_1v_1 et u_2v_2 , tels que $E(C'_1) \cap W'_{11} = \emptyset$ et $E(C_2) \cap W'_2 = \emptyset$.

Si $ab \in C'_1$, on remarquera que dans ce cas $a'b' \neq u_3v_3$. Par hypothèse d'induction, il existe deux cycles sommet-disjoints C''_1 et C_3 dans Q''_{n-1} , d'ordres respectifs $2^{n-1} - a_3$ et a_3 , qui contiennent $a'b'$ et u_3v_3 , tels que $E(C''_1) \cap W''_1 = \emptyset$ (ou $E(C''_1) \cap W''_1 = \{a'b'\}$ si $a'b' \in W''_1$) et $E(C_3) \cap W''_3 = \emptyset$. Les cycles $C_1 = C'_1 \cup C''_1 \cup \{aa' \cup bb'\} \setminus \{ab \cup a'b'\}$, C_2 et C_3 sont les cycles voulus.

Si $ab \notin C'_1$ ou W'_1 est vide, on choisit une arête xy du cycle C'_1 de même direction que u_1v_1 , on remarquera que $x'y' \neq u_3v_3$. Par hypothèse d'induction, il existe deux cycles sommet-disjoints C''_1 et C_3 dans Q''_{n-1} , d'ordres respectifs $2^{n-1} - a_3$ et a_3 , qui contiennent $x'y'$ et u_3v_3 , tels que $E(C''_1) \cap W''_1 = \emptyset$ (ou $E(C''_1) \cap W''_1 = \{x'y'\}$ si $x'y' \in W''_1$) et $E(C_3) \cap W''_3 = \emptyset$. Les cycles $C_1 = C'_1 \cup C''_1 \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{xy \cup x'y'\}$, C_2 et C_3 sont les cycles voulus.

cas 2.3.1.2 : $a_2 = 2^{n-1} - 2$.

Si $u'_3v'_3 \neq u_1v_1$, alors la même construction que dans le cas 2.3.1.1 marche en prenant comme cycle $C_1 = \{u_1v_1\} \cup C''_1 \cup \{u_1u'_1 \cup v_1v'_1\} \setminus \{u'_1v'_1\}$.

Si $u'_3v'_3 = u_1v_1$, alors on utilisera une décomposition canonique $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ de Q_n tels que u_1v_1 et u_3v_3 appartiennent à Q'_{n-1} , et u_2v_2 appartient à Q''_{n-1} . La même construction que dans le cas 2.3.1.1 marche (en interchangeant a_2, u_2v_2 et a_3, u_3v_3).

cas 2.3.2 : $k = 4$ (donc $n \geq 6$).

D'après la relation (4.1), il existe une décomposition canonique $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ de Q_n tels que $A(Q'_{n-1}) > A(Q''_{n-1})$ et $1 \leq k(Q''_{n-1}) \leq 2$.

Soit $k'' = k(Q''_{n-1})$.

case 2.3.2.1 : $k'' = 1$.

Supposons, sans perdre de généralité, que u_1v_1, u_2v_2 et u_3v_3 appartiennent à Q'_{n-1} , et que $a_1 \geq a_2 \geq a_3$. On peut facilement voir que $a_3 \leq 2^{n-1} - 8$ (4.3).

Soient $W'_1 = W_1 \cap E(Q'_{n-1})$, $W'_2 = W_2 \cap E(Q'_{n-1})$, $W'_3 = W_3 \cap E(Q'_{n-1})$, et soit $u'_4v'_4 = u_4v_4|_{Q'_{n-1}}$.

D'après la relation (4.3), on en déduit qu'il existe deux entiers pairs strictement positifs a'_1 et a'_2 , tels que $a'_1 + a'_2 + a_3 = 2^{n-1}$.

Pour $i = 1, 2$ si $W'_i \neq \emptyset$, soit $a_i b_i$ une arête de W'_i , et soit

$$W'_{1i} = \begin{cases} W'_i & \text{si } (u'_4v'_4 = u_i v_i) \text{ ou } (u'_4v'_4 \in W'_i) \\ W'_i \cup \{u'_4v'_4\} \setminus a_i b_i & \text{si } (u'_4v'_4 \neq u_i v_i) \text{ et } W'_i \neq \emptyset \\ u'_4v'_4 & \text{si } W'_i = \emptyset \end{cases}$$

Puisque $n \geq 6$ et $|W'_i| \leq n - 5$, il est clair que $|W'_{1i}| \leq n - 5$. Par hypothèse d'induction, il existe donc trois cycles sommets-disjoints C'_1, C'_2 , et C_3 dans Q'_{n-1} , d'ordres respectifs a'_1, a'_2 , et a_3 , qui contiennent u_1v_1, u_2v_2 , et u_3v_3 respectivement, tels que $E(C'_1) \cap W'_{11} = \emptyset$, $E(C'_2) \cap W'_{12} = \emptyset$ et $E(C_3) \cap W'_3 = \emptyset$.

Pour $i = 1, 2$, si $a_i b_i \in C_i$ on pose $x_i y_i = a'_i b'_i$, sinon $x_i y_i$ est une arête quelconque de C_i de même direction que $u_i v_i$, sur les cycles d'ordres respectifs a'_1 et a'_2 . Par construction des ensembles W'_{1i} , $x_i y_i \neq u_4 v_4$.

Par hypothèse d'induction, il existe trois cycles sommets-disjoints C''_1, C''_2 , et C_4 dans Q''_{n-1} , d'ordres respectifs $a_1 - a'_1, a_2 - a'_2$ et a_4 , qui contiennent $x'_1 y'_1, x'_2 y'_2$ et $u_4 v_4$, tels que $E(C''_1) \cap W''_1 = \emptyset$ (ou $E(C''_1) \cap W''_1 = \{x'_1 y'_1\}$, si $x'_1 y'_1 \in W''_1$), $E(C''_2) \cap W''_2 = \emptyset$ (ou $E(C''_2) \cap W''_2 = \{x'_2 y'_2\}$, si $x'_2 y'_2 \in W''_2$) et $E(C_4) \cap W''_4 = \emptyset$.

En combinant les cycles C'_1 et C''_1 , C'_2 et C''_2 avec les deux cycles C_3 et C_4 , nous avons les quatres cycles voulus dans Q_n .

case 2.3.2.2 : $k'' = 2$.

Supposons, sans perdre de généralité, que $u_1 v_1$ et $u_2 v_2$ soient dans Q'_{n-1} , et que $a_1 \geq a_2$.

Soient $W'_1 = W_1 \cap E(Q'_{n-1})$ et $W'_2 = W_2 \cap E(Q'_{n-1})$, et si $W'_1 \neq \emptyset$ soit $a_1 b_1$ une arête de W'_1 .

Deux cas sont à distinguer suivant la valeur de a_2 :

cas 2.3.2.2.1 : $a_2 \leq 2^{n-1} - 4$

Soient $a'_2 = a_2$ et $a'_1 = 2^{n-1} - a_2$.

Soit

$$W'_{11} = \begin{cases} W'_1 \cup \{u'_3v'_3\} \cup \{u'_4v'_4\} \setminus a_1b_1 & \text{si } W'_1 \neq \emptyset, a_1b_1 \neq u'_3v'_3 \text{ et } a_1b_1 \neq u'_4v'_4 \\ u'_3v'_3 \cup u'_4v'_4 & \text{si } W'_1 = \emptyset \end{cases}$$

Puisque $n \geq 6$ et $|W'_{11}| \leq n - 5$, il est clair que $|W'_{11}| \leq n - 4$. Par hypothèse d'induction, il existe donc deux cycles sommets-disjoints C'_1, C'_2 dans Q'_{n-1} , d'ordres respectifs a'_1 et a'_2 , qui contiennent u_1v_1 et u_2v_2 , tels que $E(C'_1) \cap W'_{11} = \emptyset$ et $E(C'_2) \cap W'_2 = \emptyset$.

Si $a_1b_1 \in C'_1$, posons $xy = a_1b_1$ sinon soit xy une arête quelconque sur le cycle C'_1 de même direction que u_1v_1 , on remarquera que dans tous les cas $x'y' \neq u'_3v'_3$ et $x'y' \neq u'_4v'_4$. Par hypothèse d'induction, il existe trois cycles sommets-disjoints C''_1, C_3 et C_4 dans Q''_{n-1} , d'ordres respectifs $a_1 - a'_1, a_3$ et a_4 , qui contiennent $x'y', u_3v_3$ et u_4v_4 , tels que $E(C''_1) \cap W''_1 = \emptyset$ (ou $E(C''_1) \cap W''_1 = \{x'y'\}$ si $x'y' \in W''_1$), $E(C_3) \cap W''_3 = \emptyset$ et $E(C_4) \cap W''_4 = \emptyset$.

En combinant les cycles C'_1 et C''_1 , avec les trois cycles C_2, C_3 et C_4 , nous avons les quatres cycles voulus dans Q_n .

cas 2.3.2.2.2 : $a_2 = 2^{n-1} - 2$

Dans ce cas, on a forcément $a_1 = 2^{n-1} - 2$. On prend $a'_2 = a_2$ et $a'_1 = 2$.

Si $u'_3v'_3 \neq u_1v_1$ et $u'_4v'_4 \neq u_1v_1$, alors la même construction que dans le cas précédent marche, en prenant pour C_1 le cycle $\{u_1v_1\} \cup C''_1 \cup \{u_1u'_1 \cup v_1v'_1\} \setminus \{u'_1v'_1\}$, les cycles C_2, C_3 et C_4 restent inchangés.

Si $u'_3v'_3 = u_1v_1$ ou $u'_4v'_4 = u_1v_1$ (supposons ici, sans perdre de généralité, que $u'_3v'_3 = u_1v_1$). Dans ce cas il est toujours possible de trouver une nouvelle décomposition canonique de Q_n qui vérifie la condition (4.1), tels que les arêtes u_1v_1 et u_3v_3 soient toutes les deux dans Q'_{n-1} . Il suffit d'appliquer le cas 2.3.2.1 à cette nouvelle décomposition.

cas 2.3.3 : $k \geq 5$ (donc $n \geq 7$).

Soit $\{Q'_{n-1}, Q''_{n-1}\}$ une décomposition canonique de Q_n tels que $A(Q'_{n-1}) > A(Q''_{n-1})$ et $1 \leq I(Q''_{n-1}) \leq k - 2$.

On note $I' = I(Q'_{n-1})$, $k' = |I'|$ et soit $a = \min_{i \in I'} a_i$.

Nous allons tout d'abord prouver que $a \leq 2^{n-1} - 4(k' - 1)$. (4.4)

On va procéder par l'absurde, supposons que $a > 2^{n-1} - 4(k' - 1)$. Comme a est pair, alors $a \geq 2^{n-1} - 4(k' - 1) + 2$. (4.5)

Comme $k'' \geq 1$, alors $a \leq \frac{2^n - 2k''}{k'}$. (4.6)

Si $k' = 2$, alors -en combinant (4.5) et (4.6)- et puisque $k' \leq n - 3$ on a, $2^{n-1} - 2 \leq 2^{n-1} - k''$, ce qui est une contradiction ($k'' \geq 3$).

Si $k' \geq 3$, alors -en combinant (4.5) et (4.6)- on a

$$2^{n-1} - 4(n - 4) + 2 \leq 2^{n-1} - 4(k' - 1) + 2 \leq \frac{2^n - 2k''}{k'} \leq \frac{2^n - 2k''}{3}$$

Donc $2^{n-2} \leq 6n - 24$, ce qui est une contradiction pour $n \geq 5$. La relation (4.4) est donc prouvée.

On en déduit qu'il existe des ensembles disjoints non vides $I^\#, I^b$ de I' et des entiers a'_i pairs qui satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} I' = I^\# \cup I^b \\ a'_i = a_i \quad \text{si } i \in I^\# \\ 4 \leq a'_i < a_i \quad \text{si } i \in I^b \\ \sum_{i \in I'} a'_i = 2^{n-1} \end{array} \right.$$

Pour cela, on observe qu'en partant de $I^b = \emptyset$ et qu'en diminuant successivement les valeurs des a'_i , sauf pour les indices i_0 tel que a_{i_0} est plus grand que 2, la somme des a'_i parcourt les entiers pairs de $A(Q'_1)$ jusqu'à $a + 4(k - 1)$.

Soient $U' = \{u_i v_i ; i \in I'\}$, $U'' = \{u_i v_i ; i \in I''\}$ et soit $k_b = |I^b|$.

Pour $i \in I''$, soit $u'_i v'_i = u_i v_i|_{Q'_{n-1}}$ et soit $W' = \{u'_i v'_i, i \in I''; u'_i v'_i \notin U'\}$.

Pour $i \in I'$, soit $W'_i = W_i \cap E(Q'_{n-1})$ et si $W'_i \neq \emptyset$ soit $a_i b_i$ une arête de W'_i .

On note

$$W'_{i1} = \begin{cases} W'_i & \text{si } i \in I^\# \\ W'_i \cup W' \setminus \{a_i b_i\} & \text{si } i \in I^b \text{ et } (W'_i \neq \emptyset \text{ ou } a_i b_i \in W_i) \\ W' & \text{si } i \in I^b \text{ et } W'_i = \emptyset \end{cases}$$

Puisque $W'_i \leq n - (k + 1)$ et que $|W'| \leq |I''| = k - k'$, il est clair que $|W'_{i1}| \leq (n - 1) - (k' + 1)$.

Par hypothèse d'induction, il existe k' cycles sommet-disjoints $C'_1, C'_2, \dots, C'_{k'}$ dans Q'_{n-1} qui contiennent $u_i v_i$, d'ordres respectifs a'_i , tels que $E(C'_i) \cap W'_{i1} = \emptyset$.

Soit $I_1 = \{i \in I^b; a_i b_i \in C'_i\}$ et $I_2 = \{i \in I^b; a_i b_i \notin C'_i\}$.

Pour $i \in I_2$, soit $x_i y_i$ une arête du cycle C'_i de la même direction que $u_i v_i$.

On note

$$\begin{aligned} k''_2 &= k'' + k_b \\ W''_i &= W_i \cap E(Q''_{n-1}) \quad \text{pour } i \leq 1 \leq k \\ u''_i v''_i &= \begin{cases} u_i v_i & \text{si } i \in I'' \\ a'_i b'_i & \text{si } i \in I_1 \\ x'_i y'_i & \text{si } i \in I_2 \end{cases} \\ a''_i &= \begin{cases} a_i & \text{si } i \in I'' \\ a_i - a'_i & \text{si } i \in I^b \end{cases} \end{aligned}$$

Il est clair que $k''_2 \leq k'' + k' - 1 = k - 1$, et que les a''_i sont des entiers positifs pairs tels que $\sum_{i \in I'' \cup I^b} a_i = 2^{n-1}$.

Comme $k''_2 \leq k - 1$, alors $|W''_i| \leq n - (k + 1) \leq (n - 1) - (k'' + 1)$. Par hypothèse d'induction, il existe donc k''_2 cycles sommet-disjoints $C''_1, \dots, C''_j, \dots, C''_{k''_2}$ dans Q''_{n-1} qui contiennent les arêtes $u''_{i(j)} v''_{i(j)}$, d'ordres respectifs $a''_{i(j)}$, tels que $E(C''_j) \cap W''_{i(j)} = \emptyset$.

Pour $i = 1, \dots, k$, on définit les cycles C_i par :

$$C_i = \begin{cases} C'_i & \text{si } i \in I^\# \\ C'_i \cup C''_i \cup \{a_i a'_i \cup b_i b'_i\} \setminus \{a_i b_i \cup a'_i b'_i\} & \text{si } i \in I_1 \text{ et } a_i - a'_i \geq 4 \\ C'_i \cup C''_i \cup \{a_i a'_i \cup b_i b'_i\} \setminus \{a_i b_i\} & \text{si } i \in I_1 \text{ et } a_i - a'_i = 2 \\ C'_i \cup C''_i \cup \{x_i x'_i \cup y_i y'_i\} \setminus \{x_i y_i \cup x'_i y'_i\} & \text{si } i \in I_2 \text{ et } a_i - a'_i \geq 4 \\ C'_i \cup C''_i \cup \{x_i x'_i \cup y_i y'_i\} \setminus \{x_i y_i\} & \text{si } i \in I_2 \text{ et } a_i - a'_i = 2 \\ C''_i & \text{si } i \in I'' \end{cases}$$

Les cycles C_1, \dots, C_k sont les cycles voulus dans Q_n . Ce qui complète la preuve du théorème. \square

Il est à noter que la condition " $k \leq n - 2$ " est la meilleure possible dans le théorème précédent :

Pour tout n , on peut trouver $n - 1$ arêtes parallèles dans Q_n , et $n - 1$ entiers positifs pairs a_1, \dots, a_{n-1} , avec $a_1 + \dots + a_{n-1} = 2^n$, telle que la condition du théorème ne soit pas satisfaite.

En effet, soit xy une arête quelconque de Q_n , et soient $u_1 v_1, \dots, u_{n-1} v_{n-1}$ les $(n - 1)$ autres arêtes de même direction que xy , qui forment avec xy un cycle de longueur 4 dans Q_n . Soient a_1, \dots, a_{n-1} des entiers positifs pairs tels que $a_1 + \dots + a_{n-1} = 2^n$ avec $a_i \geq 6$ pour tout i . Puisque les voisins de x sont les sommets $u_1 \dots, u_{n-1}$ et les voisins de y les sommets $v_1 \dots, v_{n-1}$, un cycle qui passe par x doit être un cycle de longueur 4, $xyu_i v_i$. Q_n ne peut donc pas être partitionné en des cycles sommet-disjoints C_1, \dots, C_n qui passent par $u_1 v_1, \dots, u_{n-1} v_{n-1}$ et d'ordres respectifs $a_1 + \dots + a_{n-1}$ (les sommets x et y ne peuvent appartenir à aucun de ces cycles).

Chapitre 5

Plongement de graphes dans l'hypercube

La mise en oeuvre d'algorithmes parallèles sur des architectures multiprocesseurs à mémoire distribuée a conduit au développement de la notion de *plongement* d'un graphe G dans un graphe H .

Bien souvent, un algorithme distribué \mathcal{A} est décrit en supposant l'existence d'une topologie logique S , sur laquelle \mathcal{A} est défini. Parmi les topologies logiques les plus utilisées, se trouvent les arborescences et les hypercubes.

Une méthode pour implémenter sur un réseau R un algorithme \mathcal{A} et sa structure logique associée S , consiste à "simuler" S sur R . Cette simulation peut être faite en utilisant uniquement la structure du graphe S , en le *plongeant* dans le graphe de R (voir la définition dans la section 5.1).

Par exemple, l'arbre binaire complet à $2^n - 1$ sommets n'est pas un sous-graphe de l'hypercube de dimension n (voir la proposition 5.2), mais on peut le plonger dans cet hypercube en remplaçant simplement une arête de l'arbre binaire par une chaîne de longueur 2 dans l'hypercube. De ce fait, un algorithme \mathcal{A} , défini sur l'arbre binaire, peut être exécuté sur l'hypercube de sorte qu'une communication entre seulement deux voisins sur l'arbre binaire est remplacée par une communication entre deux sommets à distance 2 sur l'hypercube. La dégradation du temps

d'exécution se traduit par au plus un facteur 2.

Le problème de plongement de graphes dans l'hypercube à été traité par plusieurs auteurs. Ainsi, Havel [36, 37, 38, 33], Harary [27, 28, 29], Nebeský [59, 60] et plusieurs auteurs ont donné des familles de graphes qui sont plongeables dans l'hypercube.

Nous nous intéressons dans ce chapitre à trois familles de graphes plongeables dans Q_n , et plus particulièrement aux double quasi-étoiles. Pour cela, nous considérons une famille de graphes, que nous appellerons les MD -graphes¹, nous montrons que les doubles quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans un certain MD -graphes, nous montrons ensuite que les MD -graphes sont eux même des graphes plongeables dans Q_n . Nous en déduisons que les doubles quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans Q_n . Ce qui répondra à une question ouverte posée par Havel [33]. Notons que l'on retrouvera de la même façon que les quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans Q_n .

5.1 Définitions générales

Définition 5.1 *Un plongement d'un graphe G dans un graphe H est défini par la donnée d'une application injective φ de l'ensemble des sommets de G dans l'ensemble des sommets de H , et d'une application P_φ de l'ensemble des arêtes de G dans l'ensemble des chaînes de H , qui associe à chaque arête xy de G , une chaîne reliant les sommets $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ dans H .*

Beaucoup de paramètres ont été définis pour mesurer l'efficacité des plongements (voir [40]). Nous donnerons la définition de ceux d'entre eux qui sont le plus souvent étudiés, à savoir la dilatation, l'expansion et la congestion.

¹La notion de MD -graphes à été introduite dans [42]

Dilatation

La *dilatation* d'un plongement φ d'un graphe G dans un graphe H , notée $dil(\varphi)$ est la longueur maximale des chaînes $P_\varphi(xy)$ de H , associées aux arêtes xy de G . Dans le cas où l'on considère des chaînes de plus courte longueur, la longueur de $P_\varphi(xy)$ est alors égale à la distance $d_H(\varphi(x), \varphi(y))$ et la dilatation s'exprime uniquement en fonction de φ , par :

$$dil(\varphi) = \max_{xy \in E(G)} d_H(\varphi(x), \varphi(y))$$

Dire que G est plongeable avec dilatation 1 est équivalent à dire que G est un sous-graphe de H . Dans ce cas, l'image de l'arête xy de G est l'arête $\varphi(x)\varphi(y)$ de H . Si de plus $|V(G)| = |V(H)|$, alors G est un graphe partiel de H .

Dans ce chapitre, nous nous intéressons essentiellement aux plongements de dilatation 1, tout en rappelant des résultats sur les plongements de dilatation quelconque dans l'hypercube.

Expansion

L'*expansion* d'un plongement d'un graphe G dans un graphe H est le rapport du nombre de sommets de H , sur le nombre de sommets de G . Ce paramètre est une mesure du degré d'utilisation des processeurs dans le cas d'un algorithme modélisé par G , et implémenté sur le réseau de processeurs modélisé par H .

une expansion égale à 1 peut correspondre à une utilisation optimale, ou du moins très efficace, des processeurs.

Congestion

La *congestion* d'un plongement φ d'un graphe G dans un graphe H , notée $cong(\varphi)$, est le maximum, pris sur toutes les arêtes e de H , du nombre de chaînes $P_\varphi(xy)$ de H , images d'arêtes de G , qui contiennent e .

Dans la littérature, le calcul de la congestion n'est généralement fait que pour un

plongement qui optimise d'abord des contraintes sur la dilatation et l'expansion. Cependant, il semblerait que ce paramètre soit plus important que la dilatation (dépendant des modèles de communication) et qu'il serait intéressant de le minimiser, sans tenir compte de la dilatation.

Plongement optimal

Chercher un plongement d'expansion minimum d'un graphe G dans un graphe d'une famille donnée, revient donc à plonger G dans le graphe H de cette famille ayant le plus petit nombre de sommets possible, supérieur ou égal à celui de G . On dit que H est *optimal* pour G .

La seule borne inférieure connue pour la dilatation, valable pour tous les graphes si l'expansion du plongement vaut 1 (l'application φ est alors bijective), est donnée par la proposition suivante

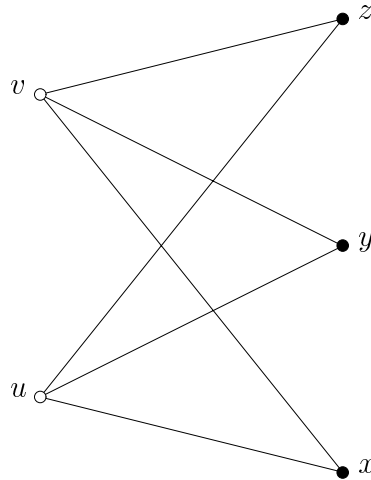
Proposition 5.1 *Si l'expansion d'un plongement φ d'un graphe G dans un graphe H vaut 1, alors la dilatation de φ est au moins égale au rapport du diamètre de H , sur le diamètre de G .*

5.2 Graphes et dimensions cubiques

Un graphe G est dit *cubique* s'il admet un plongement de dilatation 1 dans Q_n pour un certain n . Le plus petit entier n pour lequel G est plongeable dans Q_n est appelé *dimension cubique*, noté $cd(G)$.

Firsov [22] a remarqué que les arbres sont des graphes cubiques. Il a aussi montré que tout graphe cubique est nécessairement biparti, mais la réciproque n'est pas vraie en général. Un exemple de graphe biparti est le graphe $K_{2,3}$ ci-dessous (figure 5.1).

$K_{2,3}$ n'est pas un graphe cubique, il n'admet pas de plongement dans Q_n quelque soit la valeur de n . En effet, supposons qu'il existe un tel plongement, comme

Figure 5.1 – le graphe $K_{2,3}$

u et v sont à distance 2 dans $K_{2,3}$, alors leurs images respectives $p = \varphi(u)$ et $q = \varphi(v)$ seront aussi à distance 2 dans Q_n . Or, deux sommets à distance 2 dans Q_n appartiennent à exactement 2 chaînes sommet-disjointes de longueurs 2 dans Q_n , ce qui n'est pas possible car les 3 chaînes sommet-disjointes de longueurs 2 dans $K_{2,3}$ doivent se plonger dans 3 chaînes sommet-disjointes dans Q_n .

5.2.1 Décider si un graphe G est cubique

A noter qu'un graphe G est cubique si et seulement si toutes ses composantes connexes le sont. Havel et Morávek [39] ont donné les conditions nécessaires et suffisantes suivantes pour dire si un graphe G donné est cubique.

Conditions nécessaires et suffisantes

Un graphe G peut être plongé dans Q_n si et seulement si on peut étiqueter les arêtes de G par des entiers appartenant à l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, de telle sorte que

- 1) Toutes les arêtes de G incidentes à un même sommet x admettent des étiquetages différents,

- 2) Pour toute chaîne P de G , il existe un entier $i \in \{1, \dots, n\}$ qui apparaît un nombre impair de fois dans l'étiquetage des arêtes de P ,
- 3) Pour tout cycle C de G , aucun entier i de $\{1, \dots, n\}$ n'apparaît un nombre impair de fois dans l'étiquetage des arêtes de C .

En utilisant ces conditions, Havel et Liebl [36, 37] ont montré, indépendamment du résultat de Firsov, que les arbres sont des graphes cubiques et ont donné des plongements efficaces des arbres binaires dans l'hypercube. Ils ont aussi montré que les cycles sont des graphes cubiques si et seulement si ils sont d'ordres pairs.

Subdivision de graphes

Pour terminer cette section, nous donnons la définition de la *subdivision* de graphes, qui sera utilisée plus tard dans ce chapitre.

Définition 5.2 *La subdivision d'une arête uv est le remplacement de uv par une chaîne $u = u_0, \dots, u_i, \dots, u_p = v$ où les u_i sont de nouveaux sommets pour $i = 1, \dots, p - 1$. Une subdivision d'un graphe G est un graphe où les arêtes de G ont été subdivisés.*

5.3 Complexité

Chercher un plongement de dilatation 1 d'un graphe G dans un graphe H n'est pas un problème facile, c'est un problème NP-complet. Le théorème suivant a été montré par Garey et Graham [25]

Théorème 5.1 *(subgraph isomorphism problem) Le problème suivant est NP-complet*

Données : G et H deux graphes.

Question : G est-il (isomorphe à) un sous-graphe partiel de H ?

Arfati, Papadimitriou et Papageorgiou [4] ont étendu ce résultat dans le cas où H est le graphe de l'hypercube :

Théorème 5.2 *Le problème suivant est NP-complet*

Données : G un graphe, n un entier.

Question : G est-il un sous-graphe partiel de Q_n ?

Enfin, Wagner et Corneil [63] ont montré que ce problème reste NP-complet même dans le cas particulier où G est un arbre et où H est le graphe de l'hypercube Q_n .

Théorème 5.3 *Le problème suivant est NP-complet*

Données : T un arbre et n un entier.

Question : T est-il un sous-graphe partiel de Q_n ?

5.4 Plongement dans Q_n

Le graphe de Q_n est biparti connexe et est tel que chaque ensemble de la bipartition contient le même nombre de sommets, Q_n est donc un graphe *équilibré*.

Si G est un graphe plongeable dans un graphe H , G est connexe et H biparti, alors G est biparti. Si de plus $|V(G)| = |V(H)|$ et H équilibré alors G est aussi équilibré.

On notera $G \subseteq^d Q_n$ si G est un graphe plongeable dans Q_n avec dilatation d . Si la dilatation vaut 1, on note simplement $G \subseteq Q_n$. $G \not\subseteq Q_n$ est utilisé pour dire que le graphe G n'est pas plongeable dans Q_n . Dans tout ce chapitre, on parlera de plongement de dilatation 1 si aucune précision n'est donnée.

A noter que si G est un graphe plongeable dans H , H est plongeable dans H' , alors G est aussi plongeable dans H' .

Conditions nécessaires pour un graphe G plongeable dans Q_n

Si un graphe G est plongeable dans le graphe Q_n , alors nécessairement

- $|V(G)| \leq 2^n$,
- G est biparti,
- le degré maximum de G , $\Delta(G) \leq n$.

Si de plus $|V(G)| = 2^n$, alors G doit être équilibré.

Toutes ces conditions sont nécessaires pour un graphe G qui est plongeable dans Q_n , mais pas suffisantes, comme le montre l'exemple suivant (figure 5.2) :

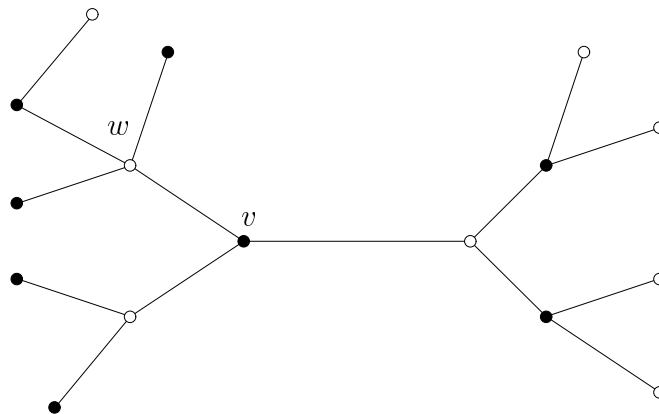


Figure 5.2 – arbre équilibré à 16 sommets qui n'est pas plongeable dans Q_4

Cet arbre T n'est pas plongeable dans Q_4 pour la simple raison que dans T tous les sommets sont à distance au plus 3 du sommet v , alors que dans Q_n , pour tout sommet donné v , il existe un unique sommet u tel que $d(u, v) = n$ (Q_n est *antipodal*). L'antipodal de v devrait être à distance 4 dans Q_4 .

On peut ainsi construire, pour tout n , un arbre équilibré T à 2^n sommets avec $\Delta(T) = 4$, qui ne soit pas plongeable dans Q_n . En fait, T peut être construit avec exactement un sommet de degré 4 (le sommet de degré 4 est noté w).

Ce qui a motivé la conjecture suivante de Havel [33] :

Conjecture 5.1 *Tout arbre T équilibré à 2^n sommets tel que $\Delta(T) \leq 3$, est plongeable dans Q_n .*

Cette conjecture a été démontré dans plusieurs cas particuliers, dans le cas des arbres binaires, des chenilles ainsi que dans d'autres cas que nous allons détailler dans ce qui suit.

5.4.1 Plongement des cycles dans l'hypercube

L'hypercube est hamiltonien, il s'ensuit que le cycle C_{2^n} est plongeable avec dilatation 1 dans Q_n , et que $cd(C_n) = \lceil \log_2(n) \rceil$.

5.5 Plongement d'arbres binaires complets dans l'hypercube

Les résultats qui suivent sont détaillés dans [36], [47] et [54]. En accord avec la définition générale donnée dans la section 5.1, on appelle *hypercube optimal* d'un graphe G d'ordre N , le plus petit hypercube dont le nombre de sommets est supérieur ou égal à celui de G , soit Q_n , avec $n = \lceil \log_2(N) \rceil$.

Tout arbre est plongeable dans l'hypercube d'après la section 5.2. On s'intéressera donc à la recherche de plongement optimal de ces arbres dans l'hypercube.

Définition 5.3 *L'arbre binaire complet B_n est le graphe défini inductivement comme suit*

- B_1 est le graphe complet $K_{1,2}$,

- Pour $n \geq 2$, B_n est formé de deux copies disjointes B'_{n-1} et B''_{n-1} , et d'un sommet u , tel que u soit relié par une arête à l'unique sommet de degré 2 de B'_{n-1} et par une autre arête à l'unique sommet de degré 2 de B''_{n-1} .

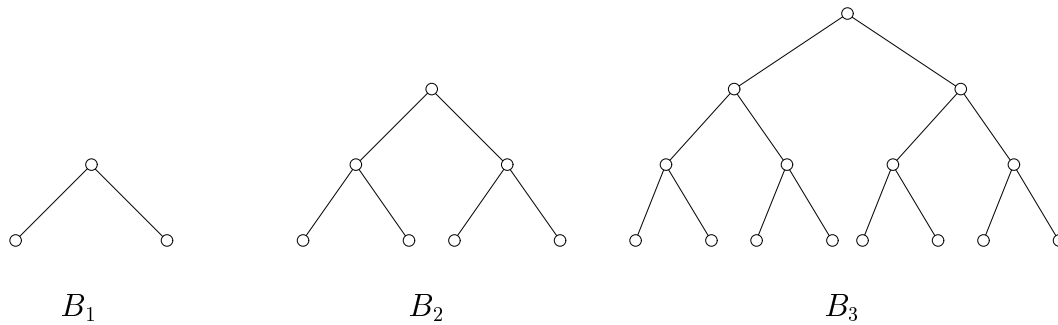


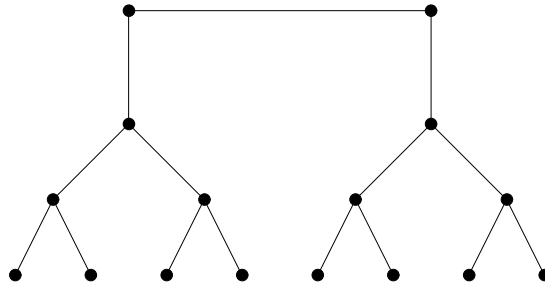
Figure 5.3 – arbres binaires complets

B_n est donc un graphe qui possède 2^n sommets de degré 1, un seul sommet de degré 2 et $2^n - 2$ sommets de degré 3. Cet unique sommet de degré 2 sera appelé la *racine* de l'arbre. B_n est un arbre de hauteur n ayant $2^{n+1} - 1$ sommets.

Proposition 5.2 *L'arbre binaire complet de hauteur n , B_n , ne peut se plonger avec dilatation 1 dans son hypercube optimal Q_{n+1} , pour n supérieur ou égal à 1.*

Preuve: Les deux graphes sont bipartis. Le graphe B_n étant connexe, un plongement de dilatation 1 doit envoyer chaque partie de la bipartition de B_n dans une classe de la bipartition de Q_n . Or, l'hypercube a le même nombre de sommets dans les deux classes de la bipartition, alors que le nombre de sommets de l'arbre B_n dans une classe de la bipartition est strictement supérieur à 2^n , si n est strictement supérieur à 1. \square

Par contre, en modifiant très peu B_n , on obtient un arbre qui se plonge avec dilatation 1 dans son hypercube optimal. Soit $BDR(n)$ l'arbre obtenu en dédoublant la racine de l'arbre binaire complet B_n en deux sommets x et y . Ces deux sommets sont adjacents entre eux et chacun est adjacent à la racine d'un sous-arbre B_{n-1} . Cet arbre est appelé *arbre binaire complet double-racine*. $BDR(n)$ est un arbre binaire ayant 2^{n+1} sommets, comme Q_{n+1} (voir figure 5.4).

Figure 5.4 – arbre binaire complet double-racine $BDR(3)$

Proposition 5.3 *L'arbre binaire complet double-racine $BDR(n)$ peut se plonger avec dilatation 1 dans son hypercube optimal Q_{n+1} .*

La preuve de cette proposition se fait par induction, elle ne sera pas détaillée ici. Une preuve générale est donnée dans [55].

Le corollaire suivant s'en déduit

Corollaire 5.1 *L'arbre binaire complet B_n peut se plonger dans son hypercube optimal Q_{n+1} avec dilatation 2 et une seule arête dilatée.*

Remarque : Par "arête dilatée", nous entendons une arête xy de B_n qui, par l'application P_φ du plongement, se transforme en une chaîne de longueur au moins 2.

Preuve: $B_n \subseteq^2 BDR(n)$ par construction, $BDR(n) \subseteq Q_{n+1}$ par la proposition 5.3, d'où $B_n \subseteq^2 Q_{n+1}$. \square

La proposition suivante sur le plongement des arbres binaires se déduit facilement de la proposition 5.3

Proposition 5.4 *L'arbre binaire complet peut être plongé avec dilatation 1 dans l'hypercube de dimension égale à la dimension optimale plus 1.*

Preuve: $B_n \subseteq BDR(n+1)$, $BDR(n+1) \subseteq Q_{n+2}$ par la proposition 5.3, donc $B_n \subseteq Q_{n+2}$, ce qui complète la preuve. \square

5.5.1 Plongements d'arbres dans l'hypercube obtenus par transformation des arbres binaires

Dans cette section, nous décrivons une famille d'arbres plongeables dans l'hypercube, qui est obtenu par simple transformation des arbres binaires.

Soit le graphe D_n , qui est formé de l'arbre binaire complet B_n auquel on ajoute un sommet relié par une arête à la racine de l'arbre, D_n est donc un arbre à 2^{n+1} sommets. La figure 5.5 suivante montre l'arbre D_2 .

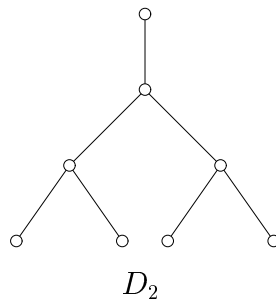


Figure 5.5 – l'arbre D_2

Ce graphe n'est pas équilibré, et Havel [36] a montré que D_n (et donc B_n) est un graphe plongeable dans l'hypercube Q_{n+2} , et donc que $cd(D_n) = n + 2$.

Pour $n \geq 2$, et pour $k \geq 1$, D_n^k est défini comme suit

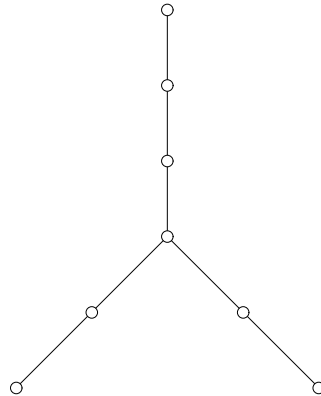
$$D_n^1 = D_n$$

et

D_n^k est le graphe pris en subdivisant chaque arête de l'arbre binaire par $k - 1$ sommets et l'arête supplémentaire par k sommets.

Il est clair que $|V(D_n^k)| = k \cdot 2^{n+1}$ (voir figure 5.6). Havel [33] a donné la proposition suivante concernant le plongement de ces graphes dans l'hypercube, par exemple pour $k = 2$ ce graphe est équilibré et vérifie la conjecture 5.1.

Proposition 5.5 *Pour $n \geq 2$, $|V(D_n^2)| = 2^{n+2}$, et D_n^2 est un graphe plongeable dans Q_{n+2} .*

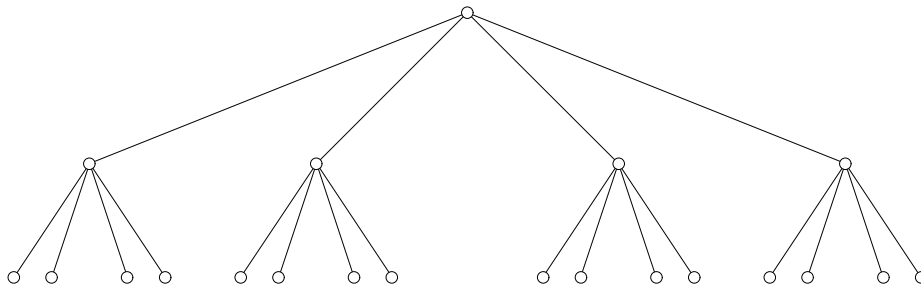
Figure 5.6 – l'arbre D_1^2

Une généralisation de cette proposition est donnée aussi par Havel [33]

Proposition 5.6 *Pour $n \geq 2$ et $s \geq 1$, $|V(D_n^{(2s)})| = 2^{n+s+1}$, et $D_n^{(2s)}$ est un graphe plongeable dans Q_{n+s+1} .*

5.5.2 Autres plongements d'arbres

Les arbres n -aires complets sont tout naturellement une généralisation des arbres binaires, où le degré de la racine est égal à n . Un tel arbre de degré n et de hauteur k est noté T_k^n .

Figure 5.7 – l'arbre 4-aires T_2^4

Havel [37] a donné la proposition suivante concernant le plongement de ces arbres dans l'hypercube

Proposition 5.7 T_2^n est un arbre plongeable dans l'hypercube, et $cd(T_2^n) = \lfloor \frac{3n+1}{2} \rfloor$.

La question reste ouverte de savoir si un arbre binaire quelconque (arbre de degré maximum 3) peut se plonger avec dilatation 2 dans son hypercube optimal (ce qui serait le meilleur possible, au vu de la proposition 5.2), ou dilatation 1 dans l'hypercube de dimension la dimension optimale plus un.

Si l'arbre binaire est de bipartition équilibrée, c'est-à-dire a le même nombre de sommets dans chaque classe de la bipartition, on retrouve la conjecture 5.1 de Havel [33].

Cette conjecture est vérifiée pour certaines classes particulières d'arbres, à savoir les chenilles de degré maximum 3.

5.5.3 Plongements des chenilles

Définition 5.4 Une chenille (figure 5.8) est un arbre avec au moins trois sommets, qui devient une chaîne si tous les sommets pendants de cet arbre sont supprimés.

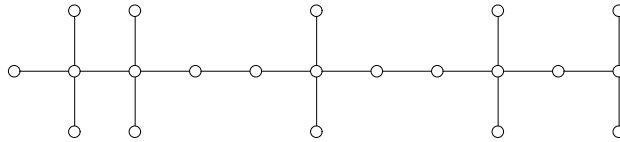


Figure 5.8 – le graphe d'une chenille de degré 4

Une chaîne P dans une chenille C est appelé *épine dorsale* de C si toute arête de C est incidente à un sommet de P . Les sommets de P sont appelés sommets épinaux. A noter que l'épine d'une chenille n'est pas unique.

Pour $k \geq 1$, soit l_i ($i = 1, \dots, k$) des entiers positifs tel que $k + l_1 + \dots + l_k \geq 3$. D'après [21], $CAT[l_1, \dots, l_k]$ denote la chenille qui est formée par une épine P à k sommets, l_i étant le nombre de sommets non épinaux adjacents au sommet i de P . Le nombre de sommets dans $CAT[l_1, \dots, l_k]$ est $k + l_1 + \dots + l_k$, et $CAT[0, l_2, \dots, l_k]$ (k sommets épinaux) est isomorphe à $CAT[l_2 + 1, \dots, l_k]$ ($k - 1$ sommets épinaux).

Pour simplifier la notation, des parenthèses et des puissances seront employés : $CAT[(3)^4] = CAT[3, 3, 3, 3]$ et $CAT[0, (2, 0)^3, (0, 2)^2] = CAT[0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 2]$.

Quelques plongements connus

Soit \mathcal{C} l'ensemble des chenilles de degré au plus 3, et soit \mathcal{C}_n le sous ensemble de \mathcal{C} formé par les chenilles équilibrées à 2^n sommets.

Soit C une chenille dans \mathcal{C} et soit P son épine (on note v_1, \dots, v_s l'ensemble des sommets de P).

Pour $x, y \in V(P)$, on note $C_{x,y}$ le sous-graphe de C engendré par les sommets v_x, \dots, v_y .

Havel et Liebl [38] ont montré le théorème 5.4 suivant sur les chenilles de degré maximum 3, ce qui prouve la conjecture 5.1 dans ce cas particulier.

Théorème 5.4 *Toute chenille équilibrée à 2^n sommets de degré maximum 3 est plongeable dans Q_n .*

Leur preuve repose sur le lemme suivant :

Lemme 5.1 *Pour $n \geq 2$, soit $C \in \mathcal{C}_{n+1}$. Soit P une épine de C et $s = |V(P)|$. Il existe x, y dans P ($1 \leq x < y < s$) tel que $C_{x,y}$ soit dans \mathcal{C}_n .*

Harary et Lewinter[32] ont montré un résultat identique pour les chenilles de degré maximum 4

Théorème 5.5 *Toute chenille équilibrée à 2^n sommets de degré maximum 4 est plongeable dans Q_n .*

Havel, Laborde et Mollard [21] ont donné d'autres plongements de ce type de graphes. Ils ont aussi montré, en utilisant les propriétés de l'hypercube, que certaines chenilles particulières n'admettent pas de plongement optimal dans Q_n .

Lemme 5.2 Pour $n \geq 3$ et pour $k \geq 0$,

$$CAT[n-1, (0, n-3)^k, 0, n-1] \not\subseteq Q_n.$$

La preuve de ce lemme est détaillée dans [21], elle utilise le fait que deux sommets à distance 2 appartiennent à exactement 2 chaînes de longueurs 2 dans l'hypercube.

La proposition suivante sur le plongement des chenilles est aussi dûe à ces mêmes auteurs [21]

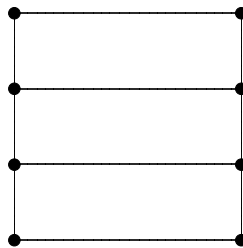
Proposition 5.8 *i) Pour $n \geq 4$, $CAT[(3)^{2^n}] \subseteq Q_{n+2}$,*

ii) Pour $0 \leq n \leq 3$, $CAT[(3)^{2^n}] \not\subseteq Q_{n+2}$.

La preuve de *ii)* repose sur des considérations de degré maximum et le lemme 5.2. La preuve de *i)* se fait par une simple induction.

5.6 Plongements des grilles et des échelles

Définition 5.5 Une n -grille $M = M(d_1 \times d_2, \dots \times d_n)$ est le produit cartésien de n chaînes P_1, P_2, \dots, P_n d'ordres respectifs d_1, d_2, \dots, d_n .



$$M(2 \times 4) = P_2 \square P_4$$

Figure 5.9 – grille binaire

5.6.1 Grille binaire

Une grille est dite *binnaire* si d_i est une puissance de 2 pour tout i . Un exemple de grille binaire est montré dans la figure 5.9 ci-dessus.

En particulier, si $d_i = 2$ pour tout i , alors M est l'hypercube de dimension n .

Harary et Lewinter [28] ont montré que les grilles binaires sont des graphes plongables dans l'hypercube en utilisant le lemme suivant

Lemme 5.3 *Si A et B sont deux graphes plongables dans U et W respectivement, alors $A \square B$ est plongable dans $U \square W$.*

Preuve: On a $V(A \square B) \subseteq V(U \square W)$, et par définition du produit cartésien, on a $E(A \square B) \subset E(U \square W)$. \square

Plongements des grilles binaires dans l'hypercube

Théorème 5.6 *La n -grille est un graphe plongable dans Q_m si et seulement si $d_1.d_2 \dots d_n \leq 2^m$.*

Preuve: La condition nécessaire vient du fait que $|V(M)| = d_1.d_2 \dots d_n$, alors que $|V(Q_m)| \leq 2^m$.

Maintenant supposons que $d_1.d_2 \dots d_n = 2^m$. Dans ce cas M est le produit cartésien de chaînes d'ordres d_i (ou d_i est une puissance de 2 pour tout i). Chaque chaîne d'ordre d_i se plonge dans son hypercube optimal de dimension $\log d_i$ car l'hypercube est hamiltonien, la preuve s'en suit en utilisant le lemme 5.3. \square

5.6.2 Échelles

Définition 5.6 *Soient $\mathbf{P}_1 = a_1, a_2, \dots, a_k$ et $\mathbf{P}_2 = b_1, b_2, \dots, b_k$ deux chaînes d'ordres k , tels que les sommets a_i et b_i ($i = 1, \dots, k$) sont reliés par des chaînes*

d'ordres r_1, \dots, r_k de telle sorte que les extrémités de r_i soient reliées l'une par une arête à a_i et l'autre par une autre arête à b_i pour $i = 1, \dots, k$ (a_i et b_i seront reliés par une arête si $r_i = 0$). Le graphe qui en résulte est appelée une échelle E , et les chaînes entre a_i et b_i sont appelées les rangs de cette échelle.

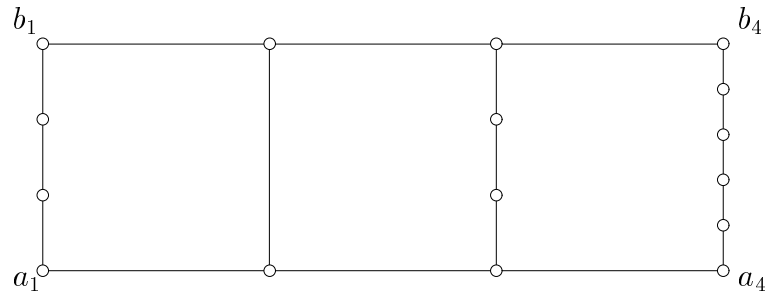


Figure 5.10 – une échelle de rangs 2, 0, 2 et 4

Le théorème 5.7 suivant sur le plongement des échelles dans l'hypercube est dû à Bezrukov [11]

Théorème 5.7 *Toute échelle équilibrée E est plongeable dans son hypercube optimal.*

La preuve de ce théorème se fait par une simple induction, il suffit de le vérifier pour une échelle E équilibrée à 2^n sommets (sinon on rajoute à E un rang d'ordre $2^n - |V(E)|$).

Il en déduit facilement le corollaire suivant sur le plongement des chenilles dans l'hypercube s'en déduit facilement

Corollaire 5.2 *Soit C une chenille de degré maximum 3, telle que toute arête de $C \setminus P$ soit subdivisée en un nombre pair de sommets. Alors C est plongeable dans son hypercube optimal.*

5.7 Plongement des quasi-étoiles et des double quasi-étoiles

Après avoir rappelé des résultats sur le plongement de certains graphes dans l'hypercube, nous nous intéressons à présent dans cette section à deux familles de graphes, à savoir les quasi-étoiles et les doubles quasi-étoiles.

Par opposé aux plongements précédents qui concernaient les graphes à faible degré, on s'intéresse ici aux plongements de graphes ayant un degré maximum par rapport à l'hypercube.

Une *étoile* est, comme son nom l'indique, un arbre avec exactement un sommet u qui n'est pas pendant. Ce sommet est appelé *jonction*, et son degré est le nombre d'arêtes qui sont incidentes à u . Un tel arbre est noté $K_{1,n}$

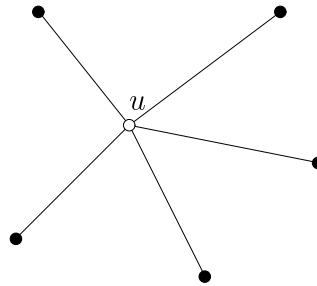


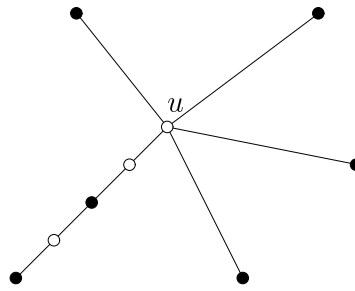
Figure 5.11 – $K_{1,n}$

Il est évident qu'une étoile est cubique et que $cd(K_{1,n}) = n$.

Une *quasi-étoile* est une étoile dont les arêtes sont subdivisées. Le lemme 5.4 donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une quasi-étoile soit équilibrée.

Lemme 5.4 *Une quasi-étoile est équilibrée si et seulement si elle possède exactement une seule chaîne de longueur impaire.*

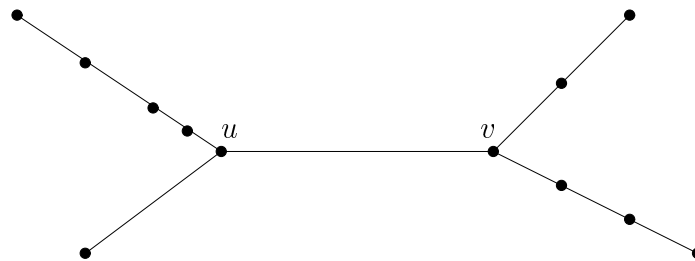
Le degré d'une quasi-étoile est le nombre de chaînes qui sont incidentes à u . On notera $S(a_1, a_2, \dots, a_k)$ une quasi-étoile ayant k chaînes incidentes à u , d'ordres respectifs a_1, a_2, \dots, a_k . Une quasi-étoile de degré k , à 2^n sommets, est appelée k -quasi-étoile équilibrée.

Figure 5.12 – la quasi-étoile $S(1, 1, 1, 1, 4)$

Une *double étoile* est formée de deux étoiles dont les jonctions u et v sont reliées par une arête. À noter que u et v ne sont pas forcément de même degré.

Une *double quasi-étoile* est une subdivision d'une double étoile, dans laquelle l'arête qui relie u et v n'est pas subdivisée.

Une double quasi-étoile dont les sommets u et v sont de degrés respectifs k et s ($k \geq s$), est notée $S(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_s)$. La figure suivante montre un exemple d'un tel graphe

Figure 5.13 – la double quasi-étoile $S(1, 4; 2, 3)$

Il est clair qu'une double quasi-étoile est équilibrée si et seulement si le nombre de chaînes d'ordres impairs qui sont incidentes à u est égal au nombre de chaînes d'ordres impairs qui sont incidentes à v . Une double quasi-étoile équilibrée $S(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_s)$ est appelée k -double quasi-étoile équilibrée.

Havel [33] a montré que les 3-quasi-étoiles équilibrées à 2^n sommets sont plongeables dans Q_n , Nebeský [60] a étendu ce résultat aux 4-quasi-étoiles équilibrées et 5-quasi-étoiles équilibrées. Limaye [48] a prouvé ce même résultat pour $k = 6$. Harary et

Lewinter [29] ont cru prouvé le théorème général suivant concernant le plongement des quasi-étoiles

Théorème 5.8 *Toute k -quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets, avec $k \leq n$, est plongeable dans Q_n .*

Leur "preuve" reposait sur le lemme suivant :

"Étant donné un ensemble de sommets $\{v_1, \dots, v_s\}$ qui appartiennent à la même classe de la bipartition de Q_n , et $\{e_1, \dots, e_s\}$ un ensemble d'entiers positifs tels que $\sum e_i = 2^n$. Il existe s chaînes sommet-disjointes $\{P_1, \dots, P_s\}$ d'ordres respectifs e_1, \dots, e_s , tels que v_i soit une extrémité de P_i ".

Il est facile de voir que ce lemme est faux en prenant v_1, \dots, v_s comme étant les voisins d'un sommet donné v (avec $s = n$), et aucun des entiers e_i qui soit égal à 2. Néanmoins, ce théorème reste vrai par le résultat de Nebeskỳ [61].

La preuve du théorème 5.8 se fait par induction, en utilisant le théorème 4.1 page 52. Une preuve complète est donnée dans [61]. Ce résultat sera aussi une conséquence immédiate de notre théorème 5.9 page 100 sur le plongement des MD -graphes dans l'hypercube.

La conjecture suivante concernant les doubles quasi-étoiles est due à Havel [33]

Conjecture 5.2 *Toute double quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets, de degré maximum n , est un graphe partiel de Q_n .*

Nous nous proposons de montrer cette conjecture dans de ce chapitre.

5.8 $MD(a_1, \dots, a_k)$ graphes

Dans cette section, nous introduisons une nouvelle famille de graphes, notée par MD -graphes. Nous prouvons que les quasi-étoiles et les doubles quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans un certain MD -graphes.

Définition 5.7 Soit uv une arête donnée. On désigne par $MD(a_1, \dots, a_k)$ graphe, le graphe formé par l'arête uv et de k ($k \geq 1$) chaînes distinctes d'ordres respectifs a_1, \dots, a_k où les a_i sont des entiers positifs pairs, tels que les extrémités de chaque chaîne soient reliées l'une par une arête à u et l'autre extrémité par une arête à v , et tels que $a_1 + \dots + a_k = 2^n - 2$ (figure 5.14).

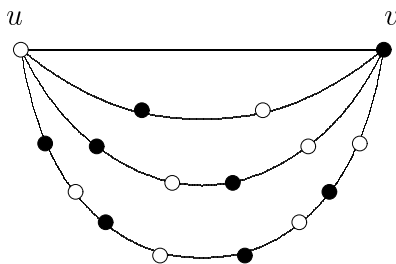


Figure 5.14 – le graphe $MD(2,4,8)$

Il est clair que $MD(a_1, \dots, a_k)$ est biparti si et seulement si a_i est pair pour tout i . On peut facilement voir qu'un MD -graphe biparti est *équilibré*. On note ce graphe, un MD -graphe k -équilibré.

Propriété 5.1 Toute k -quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets est plongable dans un certain MD -graphe $(k-1)$ -équilibré.

Preuve: Soit $S(a_1, \dots, a_k)$ une k -quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets. On peut supposer, sans perdre de généralité, que a_1 est impair. Soit v le sommet adjacent à u sur la chaîne d'ordre a_2 , et soit w_1, \dots, w_k les sommets extrémités des chaînes d'ordres a_1, \dots, a_k . On ajoute une arête entre w_1 et w_2 et des arêtes entre w_i et v pour $i = 3, \dots, k$. $S(a_1, \dots, a_k)$ est donc un graphe plongable dans $MD(a_1 + a_2 - 1, a_3, \dots, a_k)$, et S est équilibrée implique que MD est équilibré (Figure 5.15). \square

Propriété 5.2 Toute k -double quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets est plongable dans un certain MD -graphe k -équilibré.

Preuve: Soit $S(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_s)$ une k -double quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets. On peut supposer, sans perdre de généralité, que $a_1, \dots, a_i; b_1, \dots, b_i$ sont

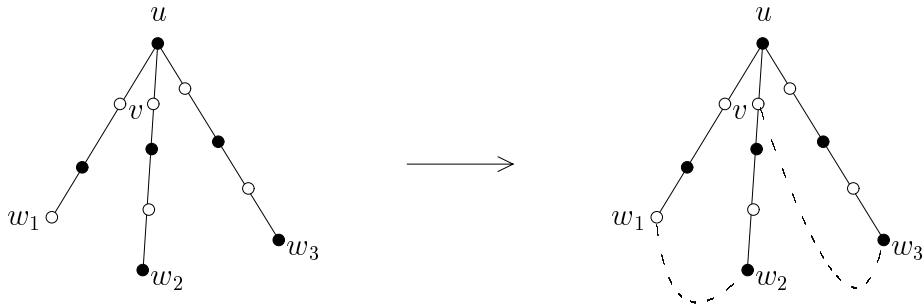


Figure 5.15 – plongement de $S(3,4,4)$ dans $MD(4,6)$, les arêtes ajoutées sont en pointillées

des entiers impairs et que $a_{i+1}, \dots, a_k; b_{i+1}, \dots, b_s$ sont des entiers pairs. Soient w_1, \dots, w_k les sommets extrémités sur les chaînes d'ordres a_1, \dots, a_k et soient y_1, \dots, y_s les sommets extrémités sur les chaînes d'ordres b_1, \dots, b_s . On ajoute des arêtes entre w_i et y_i pour $i = 1, \dots, s$, et des arêtes entre v et w_i pour $i = s+1, \dots, k$. $S(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_s)$ est donc un graphe plongeable dans $MD(a_1 + b_1, \dots, a_s + b_s, a_{s+1}, \dots, a_k)$, et S est équilibrée implique que MD est équilibré (Figure 5.16). \square

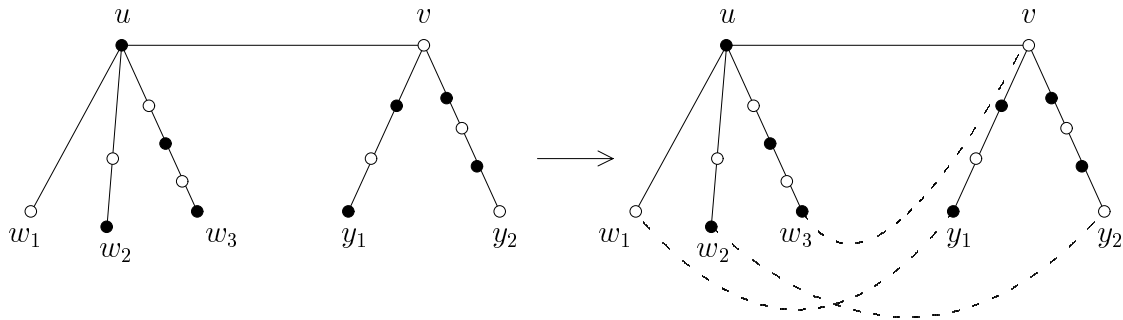


Figure 5.16 – plongement de $S(1,2,4;3,4)$ dans $MD(4,4,6)$, les arêtes ajoutées sont en pointillées

5.9 Théorème principal

Le but de cette section est de montrer que les MD -graphes équilibrés à 2^n sommets sont des graphes plongeables dans Q_n . Nous en déduisons, indépendamment du résultat de Nebeskỳ [60], que les quasi-étoiles équilibrées à 2^n sommets sont plongeables dans Q_n . Nous en déduisons également que les doubles quasi-étoiles équilibrées à 2^n sommets sont aussi des graphes plongeables dans Q_n , ce qui résoudra la conjecture 5.2 page 97.

Théorème 5.9 *Tout MD -graphe k -équilibré à 2^n sommets, avec $k \leq n - 1$, est plongeable dans Q_n .*

Comme conséquence directe de ce théorème, nous avons les deux corollaires suivants :

Corollaire 5.3 *Toute k -quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets, avec $k \leq n$, est plongeable dans Q_n .*

Corollaire 5.4 *Toute k -double quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets, avec $k \leq n - 1$, est plongeable dans Q_n .*

Preuve: Soit un $MD(a_1, \dots, a_k)$ graphe à 2^n sommets. Supposons, sans perdre de généralité, que $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$. (5.1)

Le cas $k = 1$ est vérifiée puisque Q_n est hamiltonien. La preuve de ce théorème sera divisé en plusieurs cas.

cas 1 : $k = 2$.

Soient $a'_1 = \frac{a_1}{2}$, $a'_2 = \frac{a_2}{2}$, B_1 et B_2 les chaînes adjacentes à u , d'ordres respectifs a'_1 et a'_2 , et soient u_1, v_1 les extrémités de B_1 et B_2 autre que u . Soient B'_1 et B'_2 les chaînes adjacentes à v , d'ordres respectifs a'_1 et a'_2 , et soient u'_1, v'_1 les extrémités de B'_1 et B'_2 autre que v . Soit P_1 la chaîne d'ordre 2^{n-1} formée par $B_1 \cup B_2 \cup \{u\}$, et soit P_2 la chaîne d'ordre 2^{n-1} formée par $B'_1 \cup B'_2 \cup \{v\}$. Considérons maintenant

une décomposition canonique de Q_n en Q'_{n-1} et Q''_{n-1} . Q'_{n-1} est hamiltonien, soit A un plongement de P_1 dans Q'_{n-1} , notons $x = \phi(u_1), y = \phi(v_1)$ et $z = \phi(u)$. Soit A' le même plongement de P_2 dans Q''_{n-1} , on aura $x' = \phi(u'_1), y' = \phi(v'_1)$ et $z' = \phi(v)$. Le graphe formé par $A \cup A' \cup \{xx'\} \cup \{yy'\} \cup \{zz'\}$ est isomorphe à $MD(a_1, a_2)$ (Figure 5.17).

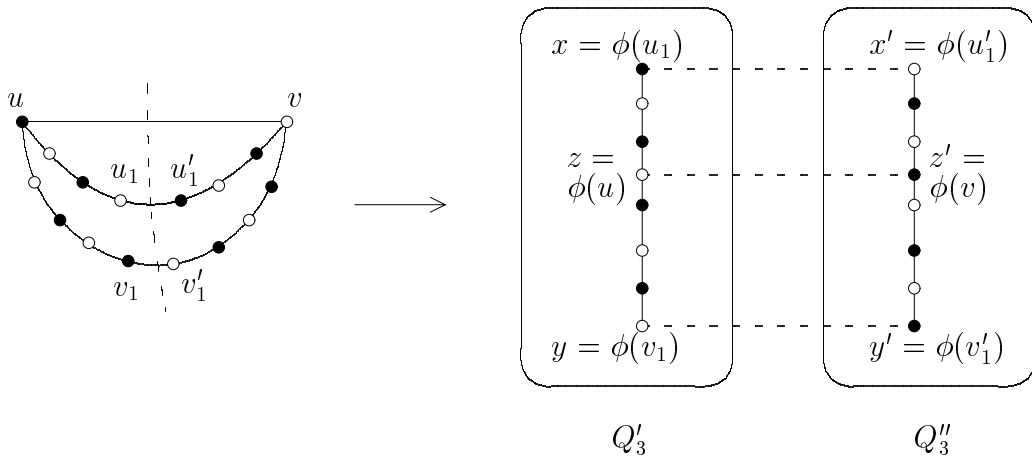


Figure 5.17 – plongement de $MD(2,4,8)$ dans Q_4

cas 2 : $k \geq 3$.

Nous supposons, par hypothèse d'induction, que $MD(a_1, \dots, a_{k*})$ à 2^{n-1} sommets et plongeable dans Q_{n-1} pour $k* \leq n - 2$, et soit un $MD(a_1, \dots, a_k)$ à 2^n sommets ($k \leq n - 1$).

cas 2.1 : $k = 3$.

Pour $n = 4$, il est immédiat de construire des plongements de $MD(2, 2, 10)$, $MD(2, 4, 8)$, $MD(2, 6, 6)$ et $MD(4, 4, 6)$ dans le graphe de Q_4 . Un exemple d'un tel plongement est montré dans la figure 5.18 suivante

Pour $n \geq 5$, soit $a'_3 = 2^{n-1} - 2 - a_1 > 0$. On remarquera que $a'_3 < a_3$, par hypothèse d'induction, $MD(a_1, a'_3)$ étant équilibré à 2^{n-1} sommets, est plongeable dans Q'_{n-1} . Il existe donc un plongement MD' de $MD(a_1, a'_3)$ dans Q'_{n-1} , notons $x = \phi(u)$ et $y = \phi(v)$.

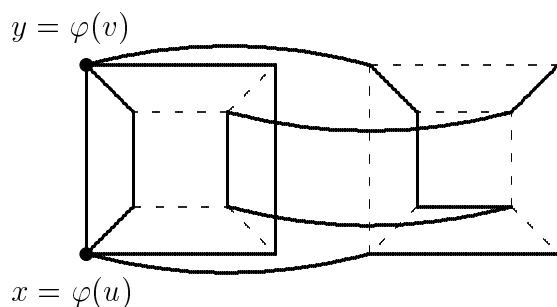


Figure 5.18 – plongement de $MD(2, 2, 10)$ dans Q_4

Soit u_1v_1 une arête de même direction que xy , sur la chaîne d'ordre a'_3 (cette arête existe puisque cette chaîne forme un cycle pair avec xy). Dans Q''_{n-1} , par le théorème 4.2, il existe deux cycles sommet-disjoints C_1 et C_2 d'ordres respectifs $a_3 - a'_3$ et a_2 qui contiennent $u'_1v'_1$ et $x'y'$. Le graphe formé par $MD' \cup C_1 \cup C_2 \cup \{xx' \cup yy' \cup u_1u'_1 \cup v_1v'_1\} \setminus \{u_1v_1 \cup u'_1v'_1 \cup x'y'\}$ est isomorphe à $MD(a_1, a_2, a_3)$ (voir figure 5.19).

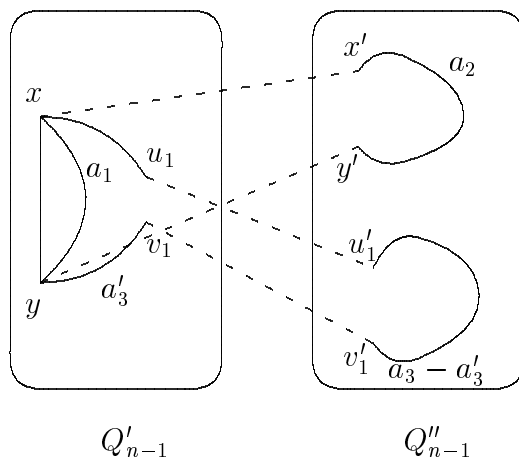


Figure 5.19 – plongement de $MD(a_1, a_2, a_3)$ dans Q_n

cas 2.2 : $k = 4$.

On note $a'_4 = 2^{n-1} - 2 - a_1 - a_2$. On remarquera que $a'_4 < a_4$, deux cas sont à distinguer

cas 2.2.1 : $a'_4 > 0$

Par hypothèse d'induction, $MD(a_1, a_2, a'_4)$ est équilibré à 2^{n-1} sommets, est plongeable dans Q'_{n-1} . Il existe donc un plongement MD' de $MD(a_1, a_2, a'_4)$ dans Q'_{n-1} , notons $x = \phi(u)$ et $y = \phi(v)$. Soit u_1v_1 une arête de même direction que xy sur la chaîne d'ordre a'_4 (cette arête existe toujours pour la même raison). Dans Q''_{n-1} , par le théorème 4.2, il existe deux cycles sommet-disjoints C_1 et C_2 d'ordres respectifs $a_4 - a'_4$ et a_3 qui contiennent $u'_1v'_1$ et $x'y'$. Le graphe formé par $MD' \cup C_1 \cup C_2 \cup \{xx' \cup yy' \cup u_1u'_1 \cup v_1v'_1\} \setminus \{u_1v_1 \cup u'_1v'_1 \cup x'y'\}$ est isomorphe à $MD(a_1, a_2, a_3, a_4)$ (figure 5.20).

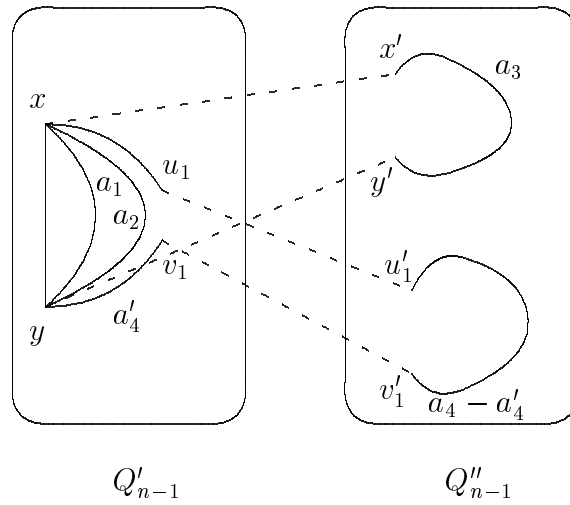
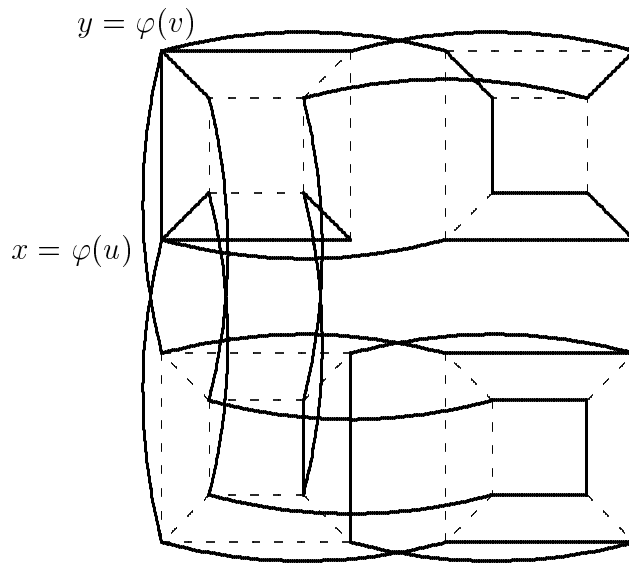


Figure 5.20 – plongement de $MD(a_1, a_2, a_3, a_4)$ dans Q_n

cas 2.2.2 : $a'_4 = 0$

On a donc un $MD(2^{n-2} - 2, 2^{n-2}, 2^{n-2}, 2^{n-2})$.

Pour $n = 5$, le plongement de $MD(6, 8, 8, 8)$ dans Q_5 est donnée dans la figure 5.21.

Figure 5.21 – plongement de $MD(6, 8, 8, 8)$ dans Q_5

Pour $n \geq 6$, soit $a'_2 = 2$ et $a'_4 = 2^{n-2} - 2$. $MD(a_1, a'_2, a'_4)$ est équilibré à 2^{n-1} sommets, est plongable dans Q'_{n-1} . Donc, il existe un plongement MD' de $MD(a_1, a'_2, a'_4)$ dans Q'_{n-1} , notons $x = \phi(u)$ et $y = \phi(v)$.

Soient x_1y_1 et x_2y_2 deux arêtes de même direction que xy , sur les chaînes d'ordres respectifs a'_2 et a'_4 . Dans Q''_{n-1} , par le théorème 4.2, il existe trois cycles sommet-disjoints C_1 , C_2 et C_3 d'ordres respectifs $a_2 - a'_2$, $a_4 - a'_4$ et a_3 qui contiennent $x'_1y'_1$, $x'_2y'_2$ et $x'y'$. Le graphe formé par $MD' \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \{xx' \cup yy' \cup x_1x'_1 \cup y_1y'_1 \cup x_2x'_2 \cup y_2y'_2\} \setminus \{x_1y_1 \cup x'_1y'_1 \cup x_2y_2 \cup x'_2y'_2 \cup x'y'\}$ est isomorphe à $MD(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

Le cas général correspond au cas $k \geq 5$.

cas 2.3 : $k \geq 5$.

Nous allons tout d'abord prouver que $a_3 \leq 2^{n-1} - 4(k-3)$. (1)

On va procéder par l'absurde, pour cela supposons que $a_3 > 2^{n-1} - 4(k-3)$. Comme a_3 est pair, alors $a_3 \geq 2^{n-1} - 4(k-3) + 2$. (2)

Comme les a_i sont des entiers positifs pour tout i , alors par la relation (5.1) page

$$98, a_3 \leq \frac{2^n - 6}{k - 2}. \quad (3)$$

A noter que $k \leq n - 1$, donc -en combinant (2) et (3)- on a

$$2^{n-1} - 4(n - 4) + 2 \leq 2^{n-1} - 4(k - 3) + 2 \leq \frac{2^n - 6}{k - 2} \leq \frac{2^n - 6}{3}$$

Donc $2^{n-3} \leq 3n - 15$, ce qui est faux. Le résultat s'en suit.

Il est clair que $a_3 + a_4 + \dots + a_k \geq 2^{n-1} + 2$, on en déduit d'après (1) qu'il existe des ensembles disjoints I_1 et I_2 de $\{4, \dots, k\}$ et des entiers pairs positifs strictement a'_i qui satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \cup I_2 = \{4, \dots, k\} \\ a'_i = a_i \quad \text{si } i \in I_1 \\ a'_i \leq a_i - 4 \quad \text{si } i \in I_2 \\ a_1 + a_2 + \sum_{i=4}^k a'_i = 2^{n-1} - 2 \end{array} \right.$$

Par l'hypothèse d'induction, $MD(a_1, a_2, a'_4, a'_5, \dots, a'_k)$ est équilibré à 2^{n-1} sommets, est plongeable dans Q'_{n-1} .

Il existe donc un plongement MD' de $MD(a_1, a_2, a'_4, a'_5, \dots, a'_k)$ dans Q'_{n-1} , notons $x = \phi(u)$ et $y = \phi(v)$.

Pour $i \in I_2$, soit $x_i y_i$ une arête de même direction que xy sur le chaîne d'ordre a'_i .

On note $k_2 = |I_2|$. Il est clair que $k_2 + 1 \leq k - 2 \leq (n - 1) - 2$. Par le théorème 4.2, il existe donc $k_2 + 1$ cycles sommet-disjoints C'_3, C'_i dans Q''_{n-1} , qui contiennent $x' y', x'_i y'_i$ ($i \in I_2$), d'ordres respectifs a_3 et a'_i ($i \in I_2$).

Soit $C_3 = C'_3 \cup \{xx' \cup yy'\} \setminus \{x' y'\}$ et $C_i = C'_i \cup \{x_i x'_i \cup y_i y'_i\} \setminus \{x_i y_i \cup x'_i y'_i\}$.

Le graphe formé par $MD' \cup C_3 \bigcup_{i \in I_2} C_i$ est isomorphe à $MD(a_1, \dots, a_k)$. Ce qui complète la preuve. \square

5.10 $MD(a_1, \dots, a_k)$ graphes subdivisés

On peut également se poser la question suivante : Les $MD(a_1, \dots, a_k)$ restent-ils des graphes plongeables dans Q_n si on subdivise l'arête uv ?

Définition 5.8 *Un MD graphe subdivisé, noté $MD(a_0; a_1, \dots, a_k)$, est un $MD(a_1, \dots, a_k)$ graphe dans lequel l'arête uv est subdivisée en un nombre pair de sommets a_0 , et tel que $a_0 + a_1 + \dots + a_k = 2^n - 2$ (Figure 5.22).*

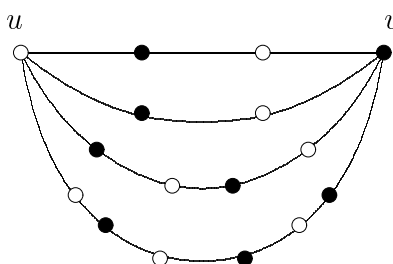


Figure 5.22 – le graphe $MD(2; 2, 4, 6)$

Il est clair que si l'arête uv est subdivisée en un nombre impair de sommets, le graphe qui en résulte ne serait pas plongeable dans l'hypercube car il ne serait pas biparti. On s'intéresse donc uniquement à une subdivision d'ordre pair de l'arête uv .

Il est facile à voir que ces graphes, les $MD(a_0; a_1, \dots, a_k)$, sont plongeables dans Q_n si $k \leq n - 2$. En effet, il suffit de rajouter une arête entre u et v , on aura donc un $MD(a_0, a_1, \dots, a_k)$ graphe avec $k \leq n - 1$, qui est plongeable dans Q_n d'après le théorème 5.9.

Le seul cas qui reste à traiter est lorsque $k = n - 1$. On peut supposer, sans perdre de généralité, que $a_0 \leq a_1, \dots, \leq a_{n-1}$.

La figure 5.23 montre un plongement de $MD(2; 2, 2)$ dans Q_3 , la chaîne d'ordre a_0 étant en gras, celle d'ordre a_1 en pointillé et celle d'ordre a_2 est en trait normal.

Il est également très facile de construire des plongements de $MD(2; 2, 2, 8)$, de $MD(2; 2, 4, 6)$ et de $MD(2; 4, 4, 4)$ dans le graphe de Q_4 , ceci résout le cas $n \leq 4$.

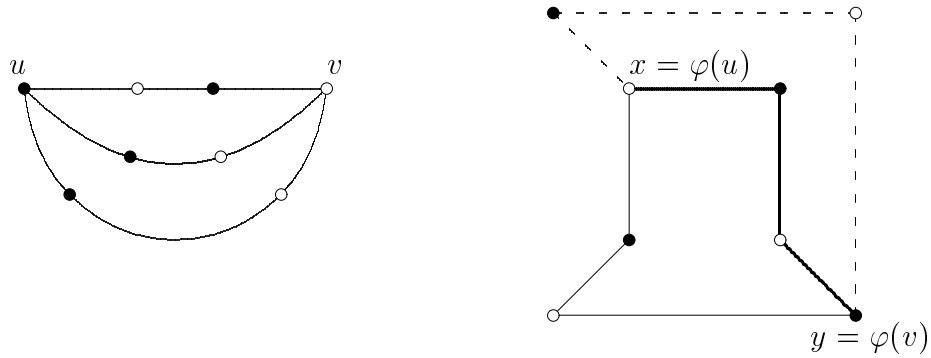
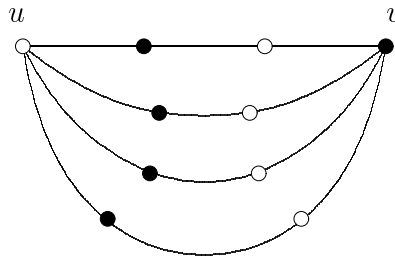


Figure 5.23 – plongement de $MD(2; 2, 2)$ dans Q_3

cas général : $n \geq 5$.

Le problème dans le cas général n'a pas été résolu, mais nous avons la conjecture suivante

Conjecture 5.3 *Un $MD(a_0; a_1, \dots, a_{n-1})$ graphe est plongeable dans le graphe de Q_n si et seulement si, il ne contient pas le graphe de la figure suivante comme sous-graphe induit.*



Considérons un $MD(a_0; a_1, \dots, a_{n-1})$ graphe, et supposons qu'il contienne ce graphe comme sous graphe induit.

Nous allons montrer que ce graphe n'est pas plongeable dans Q_n . Si tel était le cas, il existerait donc un plongement MD' de $MD(a_0; a_1, \dots, a_{n-1})$ dans Q_n tels que $x = \phi(u)$ et $y = \phi(v)$. Deux cas se présentent

cas 1 : $d(x, y) = 1$.

Dans ce cas, x et y sont deux sommets voisins dans l'hypercube Q_n . Mais le sommet u admet n sommets voisins dans le graphe $MD(a_0; a_1, \dots, a_{n-1})$, donc son plongement MD' doit admettre n sommets voisins dans Q_n autre que le sommet $\varphi(u)$, ce qui n'est pas possible dans ce cas.

cas 2 : $d(x, y) = 3$.

x et y sont à distance 3 dans Q_n . Le graphe de la figure précédente peut être considéré comme étant 4 chaînes disjointes de longueur 4 entre u et v . Or, dans Q_n , il existe exactement 3 chaînes disjointes de longueur 4 entre deux sommets à distance 3. Donc ce graphe ne peut pas être plongeable dans Q_n .

Il est à noter que si la conjecture 5.3 est vérifiée, alors la conjecture suivante l'est aussi

Conjecture 5.4 *Une double quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets, de degré maximum est n , et dont l'arête uv est subdivisée en un nombre pair de sommets, est plongeable dans Q_n .*

5.11 Problèmes ouverts

Pour terminer ce chapitre, nous citons quelques problèmes de plongement de graphes dans l'hypercube qui restent ouverts.

On peut se poser la question suivante : les MD graphes subdivisés, où l'on remplace les entiers positifs pairs a_0, a_1, \dots, a_k par des entiers positifs impairs b_0, b_1, \dots, b_k restent-ils des graphes plongeables dans Q_n ?

Plusieurs conjectures sont également citées en ce qui concerne le plongement des arbres dans l'hypercube

Conjecture 5.5 *Tout arbre T avec $\Delta(T) \leq 3$ peut être plongé dans son hypercube de dimension optimale plus 1, avec dilatation 1.*

Conjecture 5.6 *Tout arbre T avec $\Delta(T) \leq 3$ peut être plongé dans son hypercube optimal avec dilatation 2.*

Conjecture 5.7 *Tout arbre T avec $\Delta(T) \leq 5$ peut être plongé dans son hypercube optimal avec dilatation 2.*

Des éléments de réponse sont donnés dans [34]. En particulier, Il est montré que si la conjecture 5.1 page 85 est vraie, cela implique que les conjectures 5.5, 5.6 et 5.7 sont également satisfaites.

Bibliographie

- [1] H.L. Abbott. Hamiltonian circuits and paths in the n -cube. *Canad. Math. Bull.*, (9) :557–562, 1966.
- [2] B. Alspach, J.-C. Bermond, and D. Sotteau. Decomposition into cycles. i. hamilton decompositions, cycles and rays (montreal, pq, 1987). *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, (17) :9–18, 1990.
- [3] L. R. Alvarez. Undirected graphs as graphs of modular lattices. *Canad. Journ. Math.*, (17) :923–932, 1965.
- [4] J. Arfati, C.H. Papadimitriou, and P. Papageorgiou. The complexity of cubical graphs. *Proceedings of 11th International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, pages 51–57, 1984.
- [5] J. Aubert and B. Schneider. Décomposition de $k_n + k_m$ en cycles hamiltoniens. *Discrete Mathematics*, (37) :19–27, 1981.
- [6] J. Aubert and B. Schneider. Décomposition de la somme cartésienne d'un cycle et de l'union de deux cycles hamiltoniens en cycles hamiltoniens. *Discrete Mathematics*, (38) :7–16, 1982.
- [7] H.J. Bandelt and H.M. Mulder. Infinite median graphs, $(0,2)$ -graphs and hypercubes. *Journal of Graph Theory*, (7) :487–492, 1983.
- [8] C. Berge. *Graphes and hypergraphs*. Dunod, Paris, 1973.
- [9] J.C. Bermond. Hamiltonian decomposition of graphs and hypergraphs. *B. Bollobas, ed. Advanced in Graph Theory, Annals of Discrete Mathematics*, 3 :21–28, 1978.

-
- [10] A. Berrachedi. *Sur quelques propriétés métriques du graphe de type hypercube*. PhD thesis, l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène, 1997.
- [11] S. Bezrukov, B. Monien, W. Unger, and G. Wechsung. Embedding ladders and caterpillars into hypercube. *Discrete Applied Mathematics*, (83) :21–29, 1992.
- [12] A.J. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory with Applications*. Springer, 1976.
- [13] M. Buratti. Edge-colourings characterizing a class of cayley graphs and a new characterization of hypercubes. *Discrete Mathematics*, (161) :291–295, 1996.
- [14] G. Burosch, I. Havel, and J.M. Laborde. Distance monotone graphs and a new characterization of hypercubes. *Discrete Mathematics*, (110) :9–16, 1992.
- [15] S.A. Choudum and V. Sunitha. Caterpillars with legs of length at most two span hypercubes.
- [16] J. de Rumeur. *Communications dans les réseaux de processeurs*. Masson, Paris, 1994.
- [17] P. Van den Cruyce. A characterization of the n-cube by convex subgraphs. *Discrete Mathematics*, (41) :109–110, 1982.
- [18] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer, 1991.
- [19] E. Dixon and S. Goodman. On the number of hamiltonian circuits in the n-cubes. *Proc. Ann. Math. Soc. Jo.*, pages 500–504, 1975.
- [20] D. Duffus and I. Rival. Graphs orientable as distributive lattices. *Proc. Amer. Soc.*, (88) :197–200, 1983.
- [21] T. Dvoraák, I. Havel, J.M. Laborde, and M. Mollard. Spanning caterpillars of a hypercube. *Journal of Graph Theory*, 24(1) :9–19, 1997.
- [22] V. Firsov. On isometric embeddings of a graph into a boolean cube. *Cybernetics 1*, pages 112–113, 1965.
- [23] S. Foldes. A characterization of hypercubes. *Discrete Mathematics*, (17) :155–159, 1977.
- [24] M. Foregger. Hamilton decompositions of products of cycles. *Discrete Mathematics*, (24) :251–260, 1978.

-
- [25] M.R. Garey and R.L. Graham. *Computers and Intractability - A guide to theory of NP-completeness*. W.M. Freeman and Company, 1979.
- [26] F. Harary. Recent results and unsolved problems on hypercube theory. *Graph Theory, Combinatorics and Applications*, 2 :621–632, 1991.
- [27] F. Harary and M. Lewinter. Spanning subgraphs of a hypercube ii : double starlike trees. *Math. Comput. Modelling*, 11 :216–217, 1988.
- [28] F. Harary and M. Lewinter. Spanning subgraphs of a hypercube ii : Meshes. *Inter. Jour. Computer Math.*, 25 :20–24, 1988.
- [29] F. Harary and M. Lewinter. The starlike trees which span a hypercube. *Comput. Math. Appl.*, (15) :299–302, 1988.
- [30] F. Harary and M. Lewinter. Spanning subgraphs of a hypercube vi : Survey and unsolved problems. *Graph Theory, Combinatorics and Applications*, 2 :633–637, 1991.
- [31] F. Harary and M. Lewinter. Spanning subgraphs of a hypercube iv : rooted trees. *Math. Comput. Modelling*, 17(11) :85–88, 1993.
- [32] F. Harary, M. Lewinter, and W. Widulski. On two legged caterpillars which span hypercubes. *Congress. Numer.*, (66) :103–108, 1988.
- [33] I. Havel. On hamiltonian circuits and spanning trees of hypercubes. *Časopis pro pěstování matematiky*, (109) :135–152, 1984.
- [34] I. Havel. On certain trees in hypercube. *R. Bodedick, R. Henn (Eds.), Topics in Combinatorics and Graph Theory, Physica-Verlag, Heidelberg*, pages 353–358, 1990.
- [35] I. Havel and J.M. Laborde. On distance monotone graphs. *Colloquia Mathematica Societatis Janos, Combinatorics Eger (Hungary)*, (52) :557–561, 1987.
- [36] I. Havel and P. Liebl. Embedding the dichotomic tree into the n-cube. *Cas. Pest. mat.*, (97) :201–205, 1972.
- [37] I. Havel and P. Liebl. Embedding the polytomic tree into the n-cube. *Cas. Pest. mat.*, (98) :307–314, 1973.
- [38] I. Havel and P. Liebl. One-legged caterpillars span hypercubes. *Journal of Graph Theory*, (10) :69–77, 1986.

-
- [39] I. Havel and J. Morávek. B-valuations of graphs. *Czech. Math. Journ.*, (22) :338–351, 1972.
- [40] C.T. Ho and L. Johnson. Embedding meshes in boolean cubes by graph decomposition. *Journal of parallel and Distributed Computing*, (8) :325–339, 1990.
- [41] M. Kobeissi and M. Mollard. Disjoint cycles and spanning graphs of hypercubes. *soumis à Computers and Matmematics with Applications*.
- [42] M. Kobeissi and M. Mollard. Spanning graphs of hypercubes : starlike and double starlike trees. *accepté à Discrete Math*.
- [43] M. Kobeissi and M. Mollard. A counter-example about embedding graphs into hypercubes. *Computers and Matmematics with Applications*, (41) :669–670, 2001.
- [44] A. Kotlov. The hypercube has a large clique minor.
- [45] A. Kotzig. Every cartesian product of two circuits is decomposable into two hamiltonian circuits. Technical report, Centre de Recherche Mathématique, Montréal, 1973.
- [46] J.M. Laborde and S.P. Rao Hebbare. Another characterization of hypercubes. *Discrete Mathematics*, (39) :161–166, 1982.
- [47] F.T. Leighton. *Introduction to parallel algorithms and architectures*. Morgan Kaufmann, 1991.
- [48] N.B. Limaye. 6-quasistars and n-cubes. Technical Report numéro 563, Institut IMAG, Saint Martin d’hères, France, 1986.
- [49] M. Livingston and Q.F. Stout. Embedding in hypercubes. *Math. Comput. Modelling*, 11 :222–227, 1988.
- [50] M. Mollard. *Les invariants du n-cube*. Docteur de troisième cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble et l’Institut National polytechnique de Grenoble, 12 Novembre 1981.
- [51] M. Mollard. Un nouvel encadrement du nombre de cycles hamiltoniens du n-cubes. *Europ. Jour. Combinatorics*, (9) :49–52, 1988.
- [52] M. Mollard. *Quelques problèmes combinatoires sur l’hypercube et les graphes de Hamming*. PhD thesis, l’Université Joseph Fourier, 1989.

-
- [53] M. Mollard and A. Berrachedi. Median graphes and hypercubes, some new characterizations. *Discrete Mathematics*, 208/209 :71–75, 1999.
- [54] B. Monien and H. Sudborough. Simulating binary trees on hypercubes. *Proceedings of the 1988 Aegean Workshop on Computing*, pages 170–180, 1988.
- [55] B. Monien and H. Sudborough. Embedding one interconnection network in another. *Computing Supplement*, 7, 1990.
- [56] H.M. Mulder. $(0, \lambda)$ -graphs and n-cubes. *Discrete Mathematics*, (28) :179–188, 1979.
- [57] H.M. Mulder. *The interval function of a graph*. Mathematical Centrum, Amsterdam, 1980.
- [58] B.R. Myers. Hamilton factorization of the product of a complete graph with itself. *Networks 2*, pages 1–9, 1972.
- [59] L. Nebeský. On cubes and dichotomic trees. *Cas. Pest. mat.*, (99) :164–167, 1974.
- [60] L. Nebeský. On quasistars in n-cubes. *Cas. Pest. mat.*, (109) :153–156, 1984.
- [61] L. Nebeský. Embedding m-quasistars into n-cubes. *Czechoslovak Mathematical Journal, Praha*, 38(113), 1988.
- [62] G. Ringel. Uber drei kombinatorische probleme am n-dimensionen wurfel und wurfelgitter. *Abh. Math. Sem.*, 20 :10–19, 1954.
- [63] A. Wagner and D.G. Corneil. Embedding trees in a hypercube is np-complete. Technical Report 197/87, Department of Computer Science, University of Toronto, Toronto, Ontario, February 1987.

Index

- (0, 2)–graphe, 35, 36
- échelle, 94
- étoile
 - jonction, 95
- anti-projection, 38
- antipodal, 84
- arête, 17
 - adjacent, 18
- arêtes
 - parallèles, 31
- arbre, 24
 - étoile, 95
 - binaire, 85
 - double quasi-étoile, 96
 - double-étoile, 96
 - isthme, 24
 - quasi-étoile, 95
 - racine, 86
- arcs, 17
- biparti
 - complet, 22
 - graphe, 22
- chaîne, 19, 20
 - élémentaire, 19
 - géodésique, 21
 - hamiltonienne, 20
 - simple, 19
- chenille, 90
 - épine, 90
- clique, 21
- connexe
 - composante, 21
 - graphe, 20
- couplage, 20
 - parfait, 20
- cycle, 19
- décomposition
 - couche, 26
 - cycle, 41
- décomposition canonique, 31
- degré, 18
- dimension cubique, 80
- distance, 21
- graphe
 - équilibré, 22
 - complémentaire, 19
 - complet, 21
 - connexe-minimal, 23
 - convexe, 37
 - cubique, 80
 - diamètre, 21
 - distance monotone, 28

- hamiltonien, 20
- intervalle régulier, 28
- intervalle-diamétral, 28
- k-arête-connexe, 23
- k-connexe, 23
- médian, 28
- non-orienté, 17
- ordre, 17
- orienté, 17
- partiel, 19
- régulier, 18
- simple, 17
- sphérique, 28
- subdivision, 82
- graphes isomorphes, 26
- grille, 92
 - binaire, 93
- hypercube, 29
 - direction, 30
- plongement, 78
 - congestion, 79
 - dilatation, 79
 - expansion, 79
 - optimal, 80
- produit cartésien, 24
- projection, 38
- sommet, 17
 - adjacent, 18
 - isolé, 18
 - pendant, 18
 - saturé, 20
- sommet-connexité, 23
- sous-graphe, 19
- voisin, 18

Résumé Le but principal de ce manuscrit est de montrer que certaines familles de graphes sont des graphes plongeables dans l'hypercube. Un problème d'une autre nature sera traité, il concerne la partition de l'hypercube en des cycles sommet-disjoints de longueur paires. Nous prouvons que l'hypercube de dimension n peut être partitionné en k cycles sommet-disjoints de longueur paires si $k < n - 1$, et qui utilisent des arêtes de même direction dans l'hypercube.

Le problème de plongement de graphes dans l'hypercube fera l'objet du dernier chapitre. Dans ce chapitre, nous introduisons une nouvelle famille de graphes, les MD-graphes. Nous avons montré que les quasi-étoiles et les double quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans certain MD-graphes. Nous avons réussi à montrer que les MD-graphes sont des graphes plongeables dans l'hypercube, ce qui nous remontre que les quasi-étoiles, mais également montre que les doubles quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans Q_n . Ce qui résout un problème ouvert posé par Ivan Havel depuis 1984.

Mots clés hypercube, partition en cycles disjoints, plongement de graphes

Abstract The aim of this thesis is to prove that certain family of graphs are embeddable into hypercube. Another problem will be treated, it concerns the partitioning of hypercube in vertex-disjoints cycles of even length. We prove that hypercube of dimension n can be partitioned into k vertex-disjoints cycles of even length if $k < n - 1$, which use edges of the same direction in the hypercube.

The last chapter concern the problem of embedding graphs into hypercube. In this chapter, we introduce a new family of graphs, the MD-graphs. We prove that quasistar and that double quasistar are embeddable into certain MD-graphs. We also prove that MD-graphs are embeddable in Q_n , which prove that quasistar and that double quasistar are embeddable into hypercubes. This resolve an open question posed by Ivan Havel since 1984.

Keywords hypercube, partitioning into vertex-disjoints cycles, spanning graphs of hypercubes

Laboratoire LEIBNIZ-IMAG, 46, avenue Félix viallet, 38031 Grenoble, France