



Représentation géométrique des arrangements de droites du plan

Guillaume Allègre

► **To cite this version:**

Guillaume Allègre. Représentation géométrique des arrangements de droites du plan. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2003. Français. tel-00004631

HAL Id: tel-00004631

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004631>

Submitted on 11 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée par

Guillaume ALLÈGRE

pour obtenir le titre de

Docteur de l'université Joseph Fourier - Grenoble I

Spécialité : Mathématiques appliquées

Représentation géométrique des arrangements de droites du plan

soutenue le 17 novembre 2003

Composition du jury :

- **M. Georges-Pierre BONNEAU, président**
- **M. Dominique MICHELUCCI, rapporteur**
- **M. Jean-Claude YAKOUBSOHN, rapporteur**
- **M. Bernard LACOLLE, directeur**
- **M. Nicolas SZAFRAN, examinateur**

Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG, équipe MGA

Remerciements

Le travail exposé dans ce mémoire a été réalisé au sein de l'équipe *Modélisation Géométrique et Approximation* du Laboratoire de Modélisation et Calcul (LMC-IMAG) à Grenoble, sous la direction de M. Bernard LACOLLE, professeur à l'UJF.

Je voudrais tout d'abord remercier M. Bernard LACOLLE, pour m'avoir proposé le sujet de cette thèse, m'avoir encadré tout en me laissant une autonomie appréciable, et surtout m'avoir soutenu lorsque cela s'est avéré nécessaire.

Merci à toute l'équipe des doctorants du laboratoire, trop nombreuse pour être énumérée ici, pour l'ambiance conviviale qui a régné tout au long de ces années de thèse, résultant en des conditions de travail privilégiées. Merci aux participants au séminaire inter-thésards de géométrie, qui ont toujours abouti à des échanges fructueux d'idées, à mes collègues de bureau successifs, Manuela, François, Cyril, Jocelyn et Ayman. Un merci particulier à François pour toutes nos discussions et digressions diverses, et toute l'aide mathématique, technique et logicielle qu'il m'a apportée, ainsi qu'à Sophie, Jocelyn et François (toujours) pour m'avoir aidé dans les derniers moments à mettre au point mon exposé de soutenance.

Merci à mes rapporteurs, M. Dominique MICHELUCCI et M. Jean-Claude YAKOUBSOHN, pour leurs remarques, questions et commentaires qui m'ont permis de préciser et corriger les premières versions de ce mémoire, et à Georges-Pierre BONNEAU pour avoir accepté de présider mon jury.

Merci enfin à Cécile, pour son soutien, et pour tout le reste...

Table des matières

Introduction	13
I Outils et méthodes pour l'étude des arrangements	15
Introduction à la première partie	17
1 Contexte	19
1.1 Définitions	21
1.1.1 Arrangements d'hyperplans	21
1.1.2 Arrangements de droites	21
1.2 Plongements projectif et euclidien d'un arrangement	22
1.2.1 Plan projectif	22
1.2.2 Représentation euclidienne du plan projectif	23
1.3 Équivalence d'arrangements	24
1.3.1 Relations d'incidence et graphe d'incidence	24
1.3.2 Représentation d'un arrangement combinatoire	24
1.3.3 Équivalence	27
1.3.4 D'autres définitions de l'équivalence	27
1.4 Dénombrement	30
1.4.1 Cellules et faces	30
1.4.2 Théorème de la zone	33
1.4.3 Dénombrement des arrangements de droites	33

2	Isotopie, perturbation, stabilité	37
2.1	Paramétrisation dans le plan euclidien	39
2.1.1	Paramétrisation	39
2.1.2	Orientation	40
2.2	Isotopie	40
2.2.1	Isotopie globale	40
2.2.2	Isotopie itérative	42
2.2.3	Propriétés de l'isotopie	44
2.3	Perturbations, stabilité	48
2.3.1	Perturbations des droites	48
2.3.2	Conditions de stabilité	49
3	Construction et implémentation	53
3.1	Géométrie projective : définitions et notations	55
3.1.1	Points et droites à l'infini	56
3.1.2	Dualité : arrangements de droites et configurations de points	57
3.2	Choix d'implémentation	58
3.2.1	Calcul géométrique	58
3.2.2	Structures : brins et sommets étoilés	59
3.2.3	Opérateurs d'Euler	60
3.3	Construction effective d'un arrangement	61
3.3.1	Construction incrémentale	61
3.3.2	Construction globale ou par squelette	62
3.4	Comparaisons	67
3.4.1	Coûts de calcul	67
3.4.2	Optimisation et accès aux données	67
3.4.3	Parallélisation	69

**II Représentation géométrique des arrangements et Op-
timisation** **71**

Introduction à la deuxième partie et état de l’art **73**

4 Du projectif à l’euclidien **77**

- 4.1 Le choix de la représentation 79
- 4.2 Les critères de découpage 79
 - 4.2.1 Droites et zones de découpage 80
 - 4.2.2 Règles de découpage 81
 - 4.2.3 Étude exhaustive avec 6 droites 82

5 Optimisation de la représentation euclidienne **89**

- 5.1 Introduction au problème 91
 - 5.1.1 Notations 91
 - 5.1.2 Critères 92
- 5.2 Le critère angulaire μ 93
 - 5.2.1 Définition 93
 - 5.2.2 Le critère μ et la conjecture de Ringel 93
- 5.3 Critère d’allongement λ 98
 - 5.3.1 Définition 98
 - 5.3.2 Calcul de λ 98
 - 5.3.3 Optimisation de λ et contraintes géométriques 100
- 5.4 D’autres critères ? 100
- 5.5 Optimisation et isotopie 101
 - 5.5.1 Isotopie itérative 101
 - 5.5.2 De la zone au domaine d’isotopie 102
 - 5.5.3 Choix de la droite à bouger 103
 - 5.5.4 Algorithme d’optimisation 104
- 5.6 Quelques résultats 105

6 Cas particuliers	109
6.1 Optimisation : étude pour des petits nombres de droites	111
6.1.1 Cas $n = 4$ droites	111
6.1.2 Cas $n = 5$ droites	115
6.2 Arrangements démontables	117
6.2.1 Généralités	117
6.2.2 Représentation des arrangements démontables	119
6.2.3 Implémentation algorithmique	121
Perspectives	123

Table des figures

1.1	Arrangement simple ($n = 3$), en euclidien (a) et en projectif (b)	23
1.2	Arrangement euclidien simple ($n = 3$) et son graphe d'incidence	25
1.3	Le même arrangement en projectif, et son nouveau graphe d'incidence .	25
1.4	Reconnaissance combinatoire de la consécuitivité d'arêtes	26
1.5	Les 3 arrangements euclidiens, non-équivalents, proviennent du "même" arrangement projectif, selon le choix de la "droite à l'infini" (en pointillés)	28
1.6	Un arrangement de 5 droites et les vecteurs positions de certaines cellules	29
1.7	D'un arrangement simple à un arrangement dégénéré : déficit de cellules	32
1.8	La zone de D_4 dans $\mathcal{A}(D_1, D_2, D_3)$	33
1.9	Les six (ou sept) arrangements euclidiens de 5 droites	36
2.1	Δ recouvert par les ouverts \mathcal{O}_l , illustration simplifiée en 2d	43
2.2	Construction du domaine d'isotopie de D_k	45
2.3	Une translation (a) et une rotation (b) dans l'espace des paramètres . .	46
2.4	D'un déplacement à une séquence de (translation, rotation)	47
3.1	Représentation du plan projectif plongé dans \mathbb{R}^3 (proj. sur $z = -1$) . .	55
3.2	Sommet étoilé constitué de brins	59
3.3	Construction incrémentale de l'arrangement : étapes 1,2,3	63
3.4	Construction par squelette d'un arrangement 2d : étapes 0, 1 et 2 . . .	66
3.5	Temps d'exécution des algorithmes incrémental (en haut) et par sque- lettes (en bas, temps cumulés par étapes) en fonction du nombre de droites	68
3.6	Deux représentations du même arrangement, générant des <i>wiring dia- grams</i> différents	74

4.1	Les 3 arrangements euclidiens, non-équivalents, proviennent du “même” arrangement projectif, selon le choix de la “droite à l’infini” (en pointillés)	80
4.2	Deux arrangements projectifs de 7 droites avec $p = (7, 12, 3, 0, 0)$	81
4.3	Les 4 arrangements projectifs à 6 droites	82
4.4	Les 10 arrangements euclidiens de type projectif I $p = (6, 9, 0, 1)$: 7 symétriques, 3 chiraux	83
4.5	Les 18 arrangements euclidiens de type projectif II $p = (6, 8, 2, 0)$, tous chiraux	85
4.6	Les 13 arrangements euclidiens de type projectif III $p = (7, 6, 3, 0)$, tous chiraux	86
4.7	Les 2 arrangements euclidiens de type projectif IV $p = (10, 0, 6, 0)$, tous deux chiraux	87
5.1	Arrangements “presque dégénérés”, selon des critères angulaire (a) et d’allongement (b)	91
5.2	Les notations relatives à D_i , avec ici $a_i < 0$, $b_i > 0$, $d_i < 0$	92
5.3	Maximisation du critère μ sur 4 droites	93
5.4	Deux arrangements réfutant la conjecture de Ringel	94
5.5	Le contre-exemple de Richter et Sturmfels	95
5.6	Réfutation de la conjecture affaiblie - 1	96
5.7	Réfutation de la conjecture affaiblie - 2	97
5.8	3 droites définissant une arête	98
5.9	De la zone au domaine d’isotopie ; dans l’espace euclidien primal	102
5.10	De la zone au domaine d’isotopie ; dans le dual : domaine d’isotopie	103
5.11	Optimisation d’un arrangement de 7 droites : configuration de départ en haut $\lambda = 0,0031$, d’arrivée en bas $\lambda = 0,0603$, 8 itérations, amélioration $\times 20$	106
5.12	Optimisation d’un arrangement de 12 droites : configuration de départ en haut $\lambda = 0,0023$, d’arrivée en bas $\lambda = 0,0141$, 5 itérations, amélioration $\times 6$	107
5.13	Optimisation de l’arrangement de 5 droites “pentagone” : configuration de départ en haut $\lambda = 0,0389$, d’arrivée en bas $\lambda = 0,6181$, 6 itérations, amélioration $\times 16$	108

6.1	$n = 4$: représentations à $\lambda_{opt} = \varphi^{-1}$ et sous contrainte $\mu = 1$: $\lambda_{max} = \sqrt{2} - 1$	111
6.2	Arrangements symétriques à $n = 4$	112
6.3	Graphes des rapports de longueurs en fonction de θ_2	114
6.4	Réalisation optimale pour (ABC) isocèle en B : $\lambda_{optB} = 0.5$	115
6.5	Les 6 arrangements euclidiens de 5 droites optimisés	116
6.6	Arrangement issu d'un pentagone régulier	117
6.7	Arrangements démontables (a, c) et non démontable (b)	118

Liste des tableaux

- 1.1 Nombre de cellules en fonction du nombre n de droites 31
- 1.2 Dénombrement des arrangements de droites, selon Grünbaum 34
- 1.3 Dénombrement des configurations de points, selon Aichholzer *et al.* 35

- 4.1 Dénombrement des arrangements de 6 droites 84

Introduction

Les arrangements de droites du plan sont représentatifs de toute une classe d'objets qui mêlent calculs géométriques et structures combinatoires. Parmi les autres objets de cette classe, on peut citer des généralisations comme les arrangements planaires de *pseudolines*, de courbes, de segments... mais aussi les arrangements d'hyperplans dans l'espace euclidien de dimension quelconque, les polytopes, etc. La difficulté qui caractérise l'étude informatique de ces objets, leur construction algorithmique, est la nécessité d'assurer la cohérence entre les calculs géométriques (intersections, prédicats d'orientation...) et les relations combinatoires, ou topologiques ; et ce, à toutes les étapes de l'opération effectuée : construction, parcours, recherche...

Si, parmi tous les autres objets de cette classe, les arrangements de droites ont été particulièrement étudiés en Géométrie Algorithmique, c'est qu'ils présentent à la fois une grande simplicité géométrique, puisque les objets de base sont de simples droites du plan, et une grande richesse combinatoire, puisque les structures combinatoires utilisées (graphe d'incidence, complexe cellulaire...) sont exactement les mêmes que pour des objets plus compliqués. Les arrangements de droites constituent donc des objets de choix pour tester à moindre coût des structures de données et algorithmes qui visent à quelque généralité dans cette classe d'objets.

À leur propos, les questions posées, et les manières de les résoudre, ont été extrêmement diverses, puisqu'elles regroupent des problèmes de dénombrement [19], de construction effective [13], et qu'elles ont motivé des outils diversifiés, jusqu'aux plus abstraits avec la théorie des matroïdes orientés [4].

L'une des motivations premières de notre étude était la recherche de structures de données couplées à des algorithmes, à la fois efficaces pour la construction d'arrangements de droites et permettant d'exploiter l'information minimale définissant cet arrangement. Cette partie de notre travail fait d'ailleurs l'objet du troisième chapitre de ce mémoire.

Mais incidemment, nous nous sommes intéressés à la question de la représentation d'un arrangement, qui est finalement devenue la majeure partie de notre travail. En effet, la littérature classique sur le sujet traite très peu des problèmes de repré-

sentation, si ce n'est pour proposer d'autres types de représentation, comme les *wiring diagrams* [17] ou la vision duale des configurations de points. Ces représentations alternatives conservent généralement la combinatoire des arrangements, mais en évacuant complètement la géométrie. La comparaison avec la théorie des graphes, où la question de la meilleure représentation d'un graphe planaire est devenue un classique et un domaine de recherche très actif, nous a amenés à penser que l'étude des arrangements de droites souffrait d'une lacune importante sur cette question, puisque les aspects combinatoires l'avaient presque toujours emporté sur les aspects graphiques.

Nous proposons donc ici une définition de l'isotopie d'un ensemble de droites, qui est intuitivement le pendant géométrique de l'équivalence combinatoire, et qui nous sert de base théorique pour effectuer des transformations géométriques sur les droites. L'exposé de ces notions fait l'objet du deuxième chapitre. C'est dans la deuxième partie du mémoire (chapitres 4 à 6) que nous exploitons ces bases théoriques pour les appliquer à la représentation d'un arrangement. Nous essayons tout d'abord, de manière heuristique, de déterminer comment mettre en valeur graphiquement les propriétés remarquables (symétries, combinatoire) d'un arrangement, spécialement lors du passage du cadre projectif au cadre euclidien (chapitre 4), puis nous essayons de quantifier objectivement le degré de lisibilité d'un arrangement, et de l'améliorer par une optimisation géométrique basée sur l'isotopie (chapitres 5 et 6). Ce faisant, nous faisons la liaison avec la conjecture de Ringel (1956), qui a encore motivé des travaux récents [31].

Première partie

Outils et méthodes pour l'étude des arrangements

Introduction à la première partie

Nous l'avons dit, les questions combinatoires relatives aux arrangements de droites ont été particulièrement étudiées, et font l'objet de nombreuses publications. Les conséquences de cette diversité sont paradoxales : selon les questions particulières que l'on peut se poser, les formalisations et les conventions adoptées sur le sujet peuvent être consensuelles, comme pour le formalisme de base ou les grands théorèmes comme le théorème de la zone, ou au contraire, dépendre fortement des auteurs, comme c'est notamment le cas pour les questions d'équivalence combinatoire. Ce sujet ouvre aussi une grande variété de questions, des plus simples aux plus difficiles à résoudre, avec notamment un grand nombre de questions encore ouvertes, sur lesquelles les avancées se font lentement, et souvent de manière très expérimentale.

C'est tout ce contexte que nous allons détailler dans le premier chapitre, en exposant de manière claire mais concise les bases bien établies du domaine, faisant partie de la littérature classique (définitions, contexte projectif et euclidien, relations combinatoires), mais en nous étendant un peu plus sur les notions moins bien définies, ou pour lesquelles un choix est à faire parmi les différentes manières d'aborder la question que l'on peut trouver dans la littérature (choix d'une équivalence, etc.). Nous aborderons également brièvement la question du dénombrement, dans lesquelles se mêlent des résultats très classiques et des avancées récentes.

Dans le chapitre suivant, nous développerons la notion d'isotopie, qui est intuitivement l'équivalent géométrique de la notion d'équivalence pour la combinatoire. Dans ce chapitre, essentiellement original, nous poserons quelques bases théoriques qui nous permettront d'effectuer ensuite des opérations géométriques sur les arrangements, sans en perturber la combinatoire. Ceci nous servira de fondement à toute la deuxième partie centrée sur la représentation des arrangements. Nous étudierons enfin la notion de perturbation et de stabilité des arrangements, et notamment les relations avec les outils de l'isotopie et les résultats théoriques qui peuvent en découler.

Nous verrons enfin dans un troisième chapitre comment construire un arrangement en termes d'implémentation logicielle, c'est à dire comment calculer la com-

binatoire à partir des données géométriques brutes, ainsi que les questions plus théoriques d'informations minimales que le problème soulève. Du point de vue de l'implémentation, nous comparerons également un algorithme classique théoriquement optimal, avec un algorithme sous-optimal mais intéressant que nous avons implémenté parallèlement.

Chapitre 1

Contexte

Résumé

Dans ce premier chapitre, nous allons présenter tout le contexte des arrangements de droites, essentiellement tiré de la littérature en Géométrie Algorithmique.

Nous commençons (section 1.1) par définir les arrangements de droites comme complexes cellulaires de dimension 2, cas particulier des arrangements d'hyperplans de l'espace \mathbb{R}^d , en différenciant les arrangements réalisés, donnés sous forme géométrique, des arrangements abstraits, donnés uniquement sous forme combinatoire.

Nous présentons ensuite (section 1.2) les deux contextes d'étude possible des arrangements de droites, euclidien et projectif, en soulignant les difficultés de représentation du deuxième dans le premier.

Nous définissons ensuite (section 1.3) l'essentiel des propriétés combinatoires des arrangements : incidence de cellules et graphe d'incidence, qui est la structure canonique permettant de résumer les propriétés combinatoires d'un arrangement. Après avoir montré comment exploiter le graphe d'incidence pour trouver les relations de consécuitivité des arêtes, caractéristiques d'un arrangement de droites, nous l'utilisons encore, de façon plus classique, pour définir une relation d'équivalence entre arrangements, base de toute notre étude. Nous comparons également cette définition de l'équivalence avec d'autres, qu'on peut trouver dans la littérature.

Nous nous intéressons enfin (section 1.4) au dénombrement des cellules de toutes dimensions dans les arrangements simples, puis dégénérés, en donnant les résultats explicites en dimensions deux et trois, et les ordres de grandeur en dimension supérieure. Ceci nous conduit à énoncer le fameux théorème de la zone, base de l'algorithme incrémental de construction. Nous évoquons enfin la question difficile du dénombrement des arrangements combinatoirement différents, en rapprochant les résultats de la littérature d'un résultat personnel.

Sommaire

1.1 Définitions	21
1.1.1 Arrangements d'hyperplans	21
1.1.2 Arrangements de droites	21
1.2 Plongements projectif et euclidien d'un arrangement	22
1.2.1 Plan projectif	22
1.2.2 Représentation euclidienne du plan projectif	23
1.3 Équivalence d'arrangements	24
1.3.1 Relations d'incidence et graphe d'incidence	24
1.3.2 Représentation d'un arrangement combinatoire	24
Consécutivité des arêtes	25
Reconstruction des droites	26
1.3.3 Équivalence	27
1.3.4 D'autres définitions de l'équivalence	27
Graphe d'adjacence	27
Vecteurs position	28
Cell-tuples	29
1.4 Dénombrement	30
1.4.1 Cellules et faces	30
Arrangements simples dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{P}^2	30
Arrangements dégénérés dans le plan projectif	32
1.4.2 Théorème de la zone	33
1.4.3 Dénombrement des arrangements de droites	33
Résultats directs	33
Configurations de points	35

1.1 Définitions

1.1.1 Arrangements d'hyperplans

Si nous traitons essentiellement d'arrangements de droites dans le plan, nous pouvons toutefois définir nos objets d'étude, les arrangements, dans le cas plus général des arrangements d'hyperplans dans un espace euclidien de dimension finie d . Nous utilisons la notion d'arrangement d'hyperplans définie dans [5, p. 337].

Définition 1. Soit \mathcal{H} un ensemble de n hyperplans de \mathbb{R}^d . \mathcal{H} découpe l'espace en polytopes, bornés ou non, d'intérieurs disjoints.

Ces polytopes et leurs faces constituent un complexe cellulaire qu'on appelle d -arrangement de \mathcal{H} , noté $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.

On considère en général dans la suite des arrangements *simples*, c'est-à-dire tels que d hyperplans quelconques de \mathcal{H} se coupent en un point et $d + 1$ hyperplans aient une intersection vide. Dans le cas contraire, l'arrangement est dit *dégénéré* et on ne traitera ce cas qu'à l'occasion de quelques remarques.

1.1.2 Arrangements de droites

De ce qui précède, on tire notre définition dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 :

Définition 2. Étant donné un ensemble fini de n droites $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$, l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ est le complexe cellulaire résultant de la décomposition de \mathbb{R}^2 en composantes connexes (*cellules*) de dimensions 0 (*sommets*, intersections des droites), 1 (*arêtes*, limitées par un ou deux sommets, portées chacune par une droite), et 2 (*faces*, bornées par les arêtes, et constituant des polygones convexes, bornés ou non).

Dans la suite nous noterons \mathcal{D}_n un ensemble de n droites, et $\mathcal{A}(\mathcal{D}_n)$ la structure d'arrangement qui en résulte, telle que définie en 1.3.1. Nous noterons encore \mathcal{A}_n une structure d'arrangement abstraite, définie uniquement par sa combinatoire. Nous pourrions ainsi distinguer un *arrangement réalisé* $\mathcal{A}(\mathcal{D}_n)$ d'un arrangement abstrait \mathcal{A}_n .

1.2 Plongements projectif et euclidien d'un arrangement

On remarque avec la définition précédente, que parmi toutes les cellules de dimension non-nulle (arêtes et faces, ici), certaines sont bornées (segments pour les arêtes, polygones fermés pour les faces), d'autres non (demi-droites pour les arêtes, polygones ouverts pour les faces). La même chose vaut aussi pour toutes les dimensions supérieures, dans le cas d'arrangements d'hyperplans dans \mathbb{R}^d .

Ce problème disparaît si l'on considère les arrangements non plus dans un espace euclidien, mais dans l'espace projectif de même dimension. Dans ce cas, toutes les cellules sont "bornées", quelle que soit leur dimension.

Ce gain de régularité simplifie nombre de questions, comme le dénombrement, ou le traitement des cas dégénérés, puisque le problème des hyperplans parallèles disparaît. Il introduit en revanche une difficulté de représentation, puisque les supports classiques de dessin, feuille de papier ou écran d'ordinateur, sont naturellement assimilables à des portions de plan euclidien, mais difficilement au plan projectif.

C'est pourquoi, dans toute la suite, nous considérerons alternativement les arrangements dans un contexte euclidien ou projectif, selon la question traitée.

1.2.1 Plan projectif

Sans entrer ici dans les questions géométriques (cf section 3.1), le plan projectif \mathbb{P}^2 peut être défini comme l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 quotienté par la relation de colinéarité entre vecteurs. Il peut encore être représenté comme la sphère unité de \mathbb{R}^3 quotientée par antipodation : deux points de la sphère sont antipodaux si le segment qui les relie passe par l'origine O . Ces deux points de \mathbb{R}^3 représentent alors le même point de \mathbb{P}^2 .

Il en résulte les propriétés bien connues suivantes :

Propriétés intrinsèques

1. Le plan projectif \mathbb{P}^2 est compact.
2. Le plan projectif \mathbb{P}^2 n'a pas d'orientation.
3. Deux droites quelconques (non confondues) se coupent en un point unique.

Remarque : le plan projectif \mathbb{P}^2 n'est ni affine, ni vectoriel [5, p. 159].

1.2.2 Représentation euclidienne du plan projectif

Lorsqu'on essaie de représenter le plan projectif, on est forcé de le faire dans une portion du plan euclidien, ce qui conduit aux propriétés suivantes :

1. Si deux droites sont représentées parallèles dans le plan euclidien, leur point d'intersection est dit à l'infini.
2. Le parcours d'une droite dans le plan projectif est cyclique : dans la représentation euclidienne, un point partant "à l'infini" revient "de l'autre côté".
3. Le passage "à l'infini" change l'orientation locale d'un repère, ce qui revient à dire que le plan projectif n'a pas d'orientation.

Exemple :

La figure 1.1 montre l'unique arrangement de 3 droites dans le contexte euclidien (a), puis projectif (b). De l'un à l'autre, le nombre d'arêtes passe de 9 à 6 et le nombre de faces de 7 à 4.

Par exemple, les arêtes a_4 et a_6 (demi-droites) en euclidien fusionnent en une seule arête a_3 en projectif. De même pour a_7 et a_9 de (a), qui forment l'unique arête a_5 de (b). Dès lors, les faces ouvertes f_2 (bordée par a_4, a_2, a_7) et f_7 (bordée par a_6, a_9) de (a) fusionnent en l'unique face f_2 (bordée par a_2, a_3, a_5) de (b).

Cette face f_2 projective est compacte, mais dans la représentation euclidienne (b), elle est coupée par la "droite à l'infini". Si l'on parcourt la frontière de f_2 , par exemple en quittant le sommet s_3 par l'arête a_5 , on garde tout d'abord f_2 à droite, puis, après le "passage à l'infini", on retrouve f_2 à gauche de a_5 . Ceci illustre les propriétés 2 (parcours cyclique et passage à l'infini) et 3 (pas d'orientation dans \mathbb{P}^2).

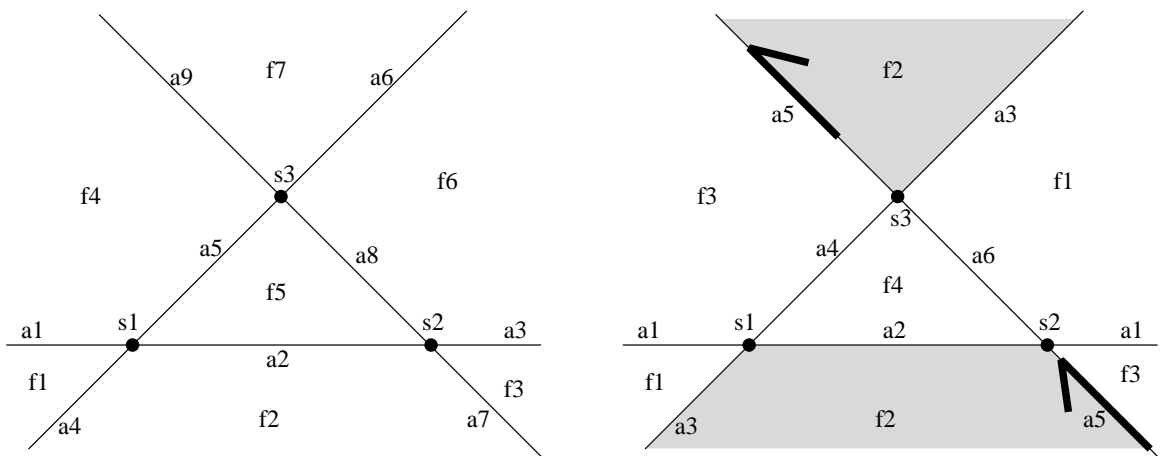


FIG. 1.1 – Arrangement simple ($n = 3$), en euclidien (a) et en projectif (b)

1.3 Équivalence d'arrangements

1.3.1 Relations d'incidence et graphe d'incidence

Définition 3. Dans un arrangement d'hyperplans $\mathcal{A}(\mathcal{H})$, deux cellules c, c' sont dites *incidentes* si leurs dimensions d, d' sont telles que $|d - d'| = 1$ et si l'une appartient à la frontière de l'autre.

Si on suppose $d = d' - 1$, on note l'incidence $c \prec c'$, comme [6]. De même, si la cellule c^d est incidente à toutes les cellules $(c_i^{d+1})_{1 \leq i \leq m}$, on notera $c \prec (c_1^{d+1}, \dots, c_m^{d+1})$.

Dans un arrangement de droites, on a donc des incidences point-arête et arête-face.

De là, on définit le graphe d'incidence :

Définition 4. Le graphe d'incidence de l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ est constitué :

- d'un ensemble de nœuds, chacun correspondant à une cellule de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$
- d'un ensemble d'arcs, chacun symbolisant une relation d'incidence entre deux cellules de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.

Le graphe d'incidence n'est généralement pas planaire, mais par convention de représentation, les nœuds sont “étagés” selon la dimension des cellules correspondantes (cf figure 1.2).

Ainsi défini, le graphe d'incidence s'applique à tout complexe cellulaire. Dans notre cas particulier d'un arrangement de droites, chaque arête possède un prédécesseur et un successeur. Cela peut se représenter sur le graphe d'incidence en rajoutant des arcs reliant les arêtes portées par la même droite (figure 1.2). Cependant, ce n'est qu'une convention de représentation car il ne s'agit pas ici d'une relation d'incidence.

Remarque : Si l'on considère un arrangement dans l'espace projectif au lieu de l'espace euclidien, le graphe d'incidence est légèrement modifié : les nœuds correspondant aux cellules infinies disparaissent, et le graphe gagne en régularité. Ainsi, dans le plan projectif, toutes les arêtes sont bornées par deux sommets et bordent deux faces. Il en résulte que les nœuds correspondant dans le graphe d'incidence sont tous de degré 4, contrairement au cas euclidien (cf figures 1.2, 1.3).

1.3.2 Représentation d'un arrangement combinatoire

Partant de la combinatoire d'un arrangement de droites, donné par exemple sous la forme de son graphe d'incidence G , la question est de savoir si on peut

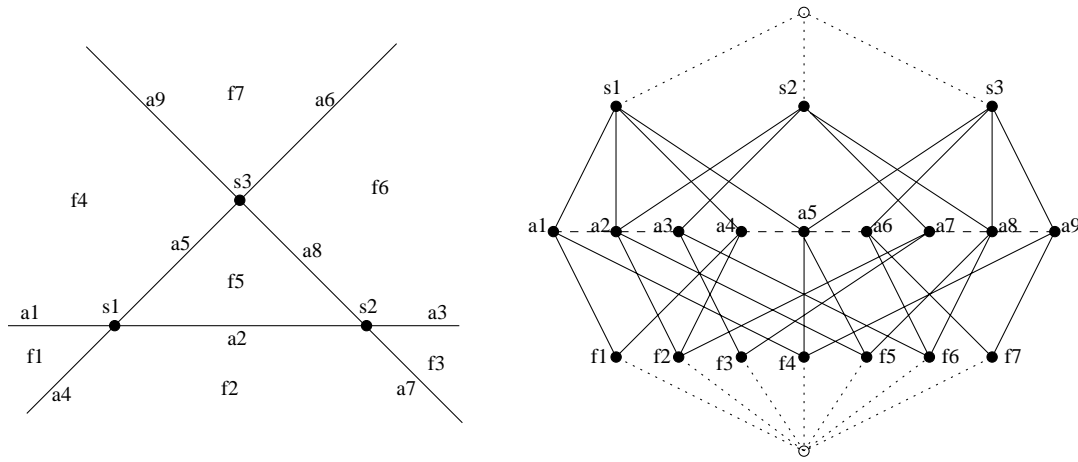


FIG. 1.2 – Arrangement euclidien simple ($n = 3$) et son graphe d'incidence

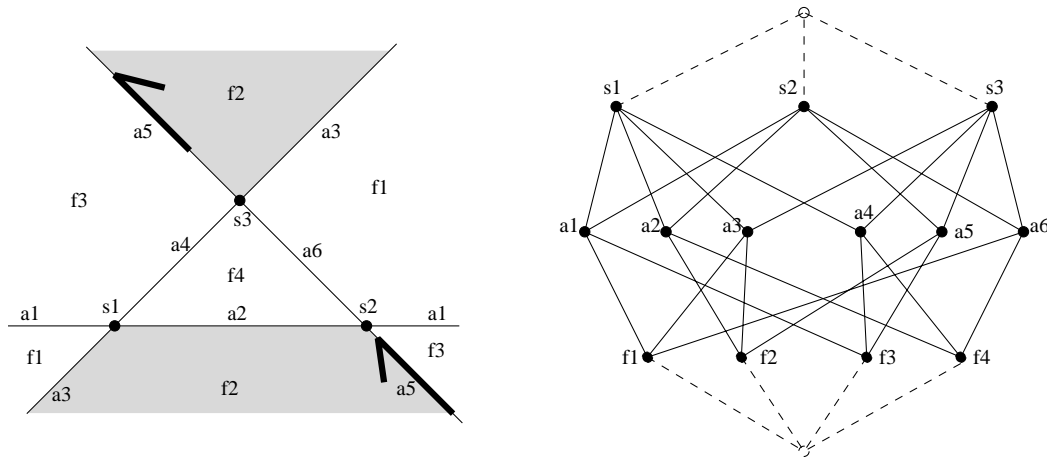


FIG. 1.3 – Le même arrangement en projectif, et son nouveau graphe d'incidence

retrouver une réalisation de \mathcal{A}_n , c'est-à-dire retrouver un ensemble de droites \mathcal{D}_n tel que $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}(\mathcal{D}_n)$.

La première étape est d'identifier les droites de \mathcal{D}_n , autrement dit de regrouper les arêtes données par G selon les droites qui les portent. Nous allons voir que c'est possible si \mathcal{A}_n provient d'un arrangement euclidien simple.

Consécutivité des arêtes

Définition 5. Dans un arrangement de droites, deux arêtes sont dites *consécutives* si elles sont portées par la même droite et incidentes à un même sommet.

Dans le cas général, il existe donc deux arêtes consécutives à une arête donnée.

Propriété 1 (Caractérisation de la consécutivité). Dans le cas d'un arrangement simple, tous les sommets sont incidents à 4 arêtes, et 2 arêtes consécutives

sont reconnaissables sur le graphe d'incidence : a_1 et a_2 sont consécutives si et seulement si

- il existe un sommet s incident à a_1 et a_2 ;
- les 2 faces incidentes à a_2 sont distinctes des 2 faces incidentes à a_1 .

Preuve :

S'il existe un sommet s incident à a_1 et a_2 , notons a_3 et a_4 les deux autres arêtes incidentes à s : $s \prec (a_1, a_2, a_3, a_4)$ (voir fig. 1.4).

Pour $i = 3, 4$, il existe deux faces $f_{i,1}, f_{i,2}$ telles que $f_{i,1}$ soit incidente à a_1 et a_i , $f_{i,2}$ soit incidente à a_2 et a_i : $(a_1, a_i) \prec f_{i,1}$ et $(a_2, a_i) \prec f_{i,2}$.

Les arêtes restantes a_3 et a_4 sont alors elles-même consécutives. □

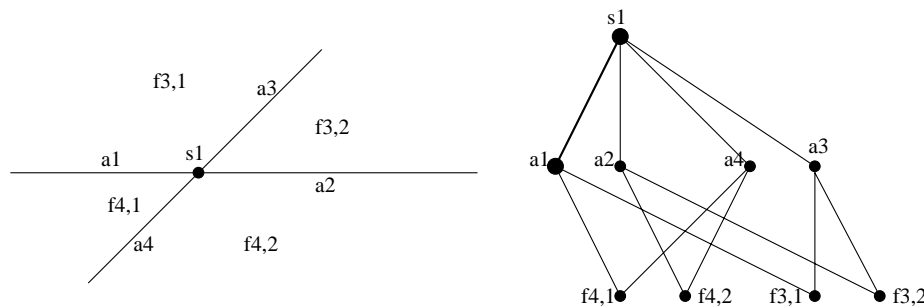


FIG. 1.4 – Reconnaissance combinatoire de la consécutive d'arêtes

Dès lors, à partir du simple graphe d'incidence, on peut vérifier si deux arêtes données sont consécutives. Cette vérification se fait à coût constant (indépendant de la taille du graphe), car sur un graphe d'incidence, le degré des noeuds-arêtes vaut au plus 4.

Un algorithme très semblable “recherche du successeur” permet donc, pour un sommet s et une arête incidente a_1 donnés, de trouver l'arête a_2 consécutive à a_1 en s . Cet algorithme parcourt uniquement le graphe d'incidence, et il effectue cette recherche en coût constant : au pire 12 parcours d'arcs (du graphe) et 6 comparaisons de noeuds.

Reconstruction des droites

Maintenant, il est facile de reconstituer les droites (à savoir l'enchaînement des arêtes) à partir du graphe d'incidence, grâce à l'algorithme direct :

Pour chaque arête A non-bornée non parcourue :

- marquer A comme parcourue
- en son extrémité non parcourue S , chercher l'arête incidente A'

- remplacer A par A' (son successeur)
- et continuer jusqu'à une arête non-bornée (sans successeur)
- enregistrer la séquence des arêtes parcourues en une nouvelle droite

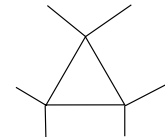
On applique ainsi $n(n - 1)$ fois l'algorithme "recherche du successeur", ce qui permet de reconstituer les n droites : on obtient l'ordre des arêtes sur chaque droite (géométrie) à partir du simple graphe d'incidence (combinatoire).

1.3.3 Équivalence

Définition 6. Deux arrangements d'hyperplans sont dits (combinatoirement) *équivalents* si leurs graphes d'incidence sont isomorphes (au sens des graphes), c'est-à-dire s'il existe une bijection entre cellules (renumérotation) respectant les dimensions et les relations d'incidence.

Remarque : Cette notion reposant sur le graphe d'incidence, elle donne lieu à deux interprétations, projective et euclidienne. En particulier, deux arrangements équivalents dans l'espace projectif peuvent être différents dans l'espace euclidien. Ceci est illustré dans le plan pour 5 droites, figure 1.5.

Remarque : Il est trivial de construire un complexe cellulaire qui possède la même combinatoire qu'un arrangement de droites, mais qui n'en soit pas un : il suffit de briser l'alignement des arêtes ; par exemple le complexe ci-contre est équivalent à celui de la fig. 1.2.



1.3.4 D'autres définitions de l'équivalence

Nous avons choisi une équivalence par isomorphie de graphes d'incidence, mais on trouve dans la littérature d'autres définitions de l'équivalence, dépendant évidemment de la structure choisie pour l'information combinatoire.

Graphe d'adjacence

Dans un des premiers ouvrages sur le sujet s'intéressant à la combinatoire [19], et dans un contexte projectif, B. Grünbaum utilise, sous une forme implicite, le même type d'équivalence (équivalence combinatoire de d -complexes, p. 394), mais propose également d'utiliser le graphe d'adjacence des faces (cellules de même dimension que l'espace), et indique qu'en dimension 2, ces deux types d'équivalence sont équivalents.

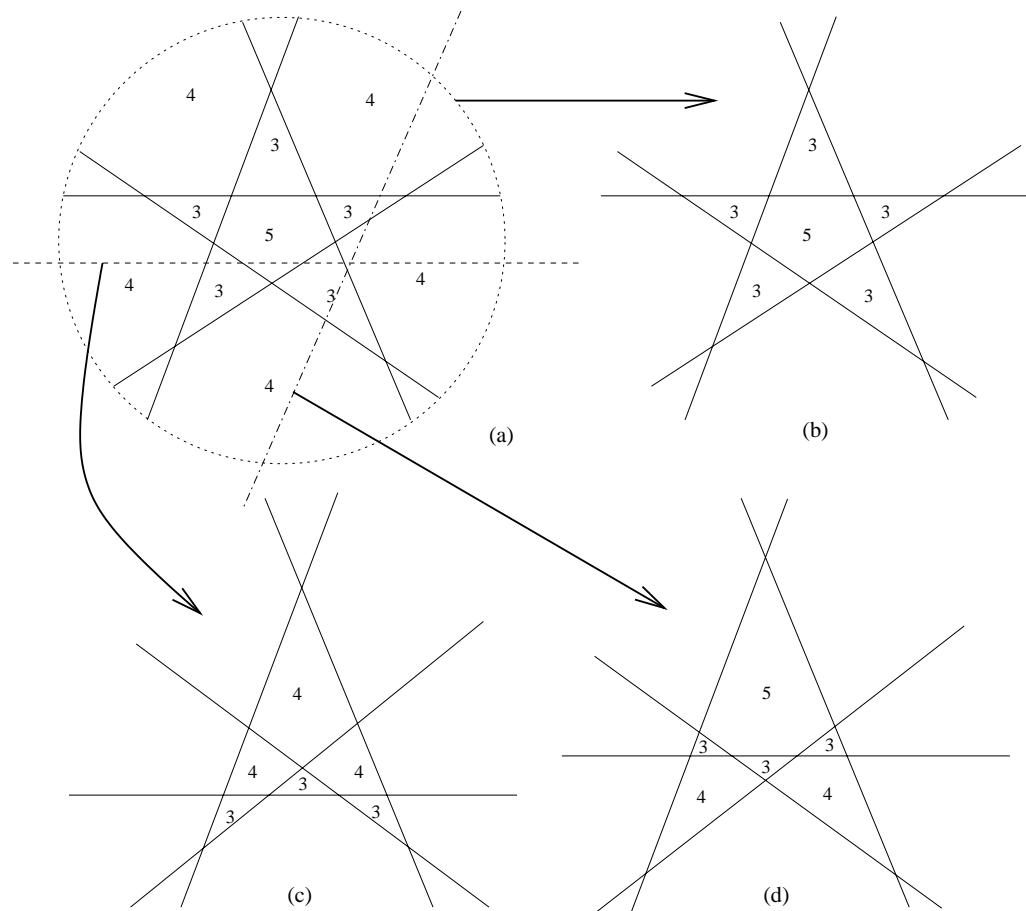


FIG. 1.5 – Les 3 arrangements euclidiens, non-équivalents, proviennent du “même” arrangement projectif, selon le choix de la “droite à l’infini” (en pointillés)

Vecteurs position

On trouve dans [13, p. 11] une définition de l’équivalence combinatoire fondée sur la notion de vecteurs position : pour toute droite non verticale d_i d’un arrangement et tout point p du plan euclidien, on définit $v_i(p) = +1$ si $p \in d_i^+$, $= 0$ si $p \in d_i$ et $= -1$ si $p \in d_i^-$ (*i.e.* p est au-dessus, sur ou en-dessous de d_i respectivement), et pour tout p on définit son *vecteur position* $u(p) = (v_1(p), \dots, v_n(p))$. Alors l’ensemble des points du plan quotienté par l’égalité des vecteurs positions définit des classes d’équivalence qui sont les cellules de l’arrangement (fig 1.6), dont le nombre de composantes nulles du vecteur position indiquent la dimension k . Les notions d’incidence et d’adjacence qui en dérivent correspondent également aux nôtres.

L’équivalence combinatoire entre deux arrangements se définit alors par l’existence d’une bijection entre les droites, et entre les k -cellules, qui préserve les vecteurs position. Nous ne l’adoptons pas pour deux raisons : tout d’abord, elle n’est ap-

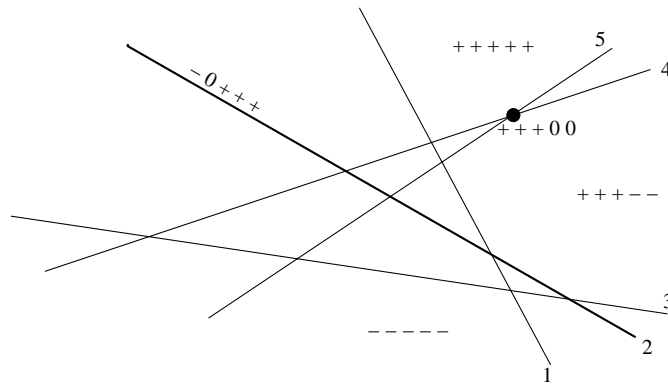
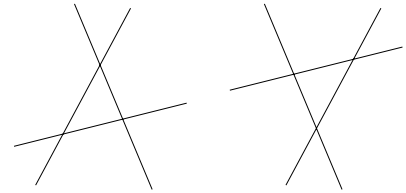


FIG. 1.6 – Un arrangement de 5 droites et les vecteurs positions de certaines cellules

plicable qu'à l'espace euclidien (et non projectif), puisqu'elle utilise la séparation du plan par une droite en deux demi-plans distinguables. D'autre part, dans le plan euclidien, elle privilégie une direction (verticale, par exemple), par rapport à laquelle tous les points, et toutes les cellules du plan sont repérés.

En conséquence, cette définition considère comme non-équivalents deux arrangements image l'un de l'autre par une rotation globale des droites, tels que ceux de la figure ci-contre. Nous voulons éviter cette limitation, car nous allons justement nous intéresser aux transformations géométriques de l'arrangement qui respectent la combinatoire.



Remarque : cette équivalence fondée sur les vecteurs positions est trop forte pour nos applications, mais elle implique bien celle par isomorphisme du graphe d'incidence que nous utilisons. Cette définition est centrale dans toute la présentation faite par H. Edelsbrunner.

Cell-tuples

Dans [6], Brisson propose une structure combinatoire élégante (par son pouvoir unificateur) qu'il nomme *cell tuple* (cell-uplet). Un *cell tuple* est une séquence de $d + 1$ cellules successivement incidentes, et il considère l'ensemble des *cell tuples* présents dans un complexe cellulaire, muni de quelques opérateurs de parcours. D'une présentation agréable et rigoureusement formalisée, cette structure est en fait exactement équivalente au graphe d'incidence, puisque chaque *cell tuple* correspond à un chemin reliant le "haut" et le "bas" du graphe. Par exemple, pour l'arrangement de la figure 1.2, un *cell tuple* serait (s_2, a_3, f_3) .

Le graphe d'incidence permet d'éviter de stocker explicitement l'ensemble des *cell tuples*. Pour une notion d'équivalence identique, il est donc plus compact.

1.4 Dénombrement

Cette section traite de ce que l'on peut compter à propos des arrangements : nombre de cellules de chaque dimension pour un arrangement de n droites, nombre d'arrangements combinatoirement différents eux-mêmes. Il regroupe des résultats connus dans la littérature, depuis ceux de Grünbaum [19] jusqu'à ceux de Aichholzer *et al* [2], [3], ainsi que quelques résultats dérivés, obtenus comme résultat d'un algorithme de recherche exhaustive.

1.4.1 Cellules et faces

Pour le problème général des arrangements **simples** de n hyperplans dans l'espace de dimension d (projectif ou euclidien), il est bien connu que le nombre de k -cellules, noté $c_k^d(n)$ ne dépend pas de l'arrangement. On trouve ces nombres dans [13] pour le cas euclidien, et dans [19, p. 393] pour le cas projectif :

$$c_k^d(n) = \sum_{i=0}^k C_{d-i}^{k-i} C_n^{d-i} = C_n^{d-k} \sum_{i=0}^k C_{n+k-d}^i \quad \text{en euclidien}$$

$$c_k^d(n) = C_n^{d-k} \sum_{i=0}^k C_{n+k-d-1}^i \quad \text{en projectif}$$

Soit, en ordre de grandeur, un nombre de cellules $c_k^d(n)$ en $O(n^d)$, pour chacune des dimensions k de 0 à d , ce qui constitue l'un des résultats fondamentaux en ce qui concerne le dénombrement d'arrangements.

Il est bien connu également que dans le cas d'un arrangement dégénéré, les nombres de cellules sont inférieurs au cas d'un arrangement simple, quelle que soit leur dimension [19, p. 393]. Nous allons détailler un peu ces résultats dans le plan.

Arrangements simples dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{P}^2

Dans le cas d'un arrangement simple de n droites, il est aisé de dénombrer le nombre de cellules de chaque dimension (sommets, arêtes, faces). Dans le plan euclidien, nous pouvons même distinguer les cellules bornées des cellules non bornées, ce qui nous servira par la suite pour le dénombrement d'arrangements dégénérés. Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

		Euclidien	Projectif
sommets = $c_0^d(n)$		$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
arêtes	bornées	$n(n-2)$	$n(n-1)$
	non bornées	$2n$	
	total = $c_1^d(n)$	n^2	
faces	bornées	$\frac{n(n-3)}{2} + 1$	$\frac{n(n-1)}{2} + 1$
	non bornées	$2n$	
	total = $c_2^d(n)$	$\frac{n(n+1)}{2} + 1$	

TAB. 1.1 – Nombre de cellules en fonction du nombre n de droites

On remarque en particulier que dans le plan euclidien, le nombre de cellules bornées est en $O(n^2)$ (cas général) alors que le nombre de cellules non bornées est en $O(n)$ (cas particuliers). Ceci, bien que n'apparaissant pas dans les résultats généraux, se généralise d'ailleurs aux arrangements d'hyperplans de \mathbb{R}^d : le nombre de cellules bornées est en $O(n^d)$, et le nombre de cellules non bornées en $O(n^{d-1})$.

Preuve :

Les preuves sont élémentaires. On peut par exemple utiliser la suivante.

Tout d'abord, le passage du dénombrement euclidien au dénombrement projectif. Chaque cellule bornée d'un arrangement euclidien reste invariante si on la considère en projectif. En revanche, pour les cellules non bornées, en euclidien, il y a regroupement : chaque paire de demi-droites portées par la même droite en euclidien, se regroupent en une seule arête en projectif en se rejoignant "à l'infini" (cf exemple section précédente), et de même, chaque paire de faces non bornées en euclidien "fusionne" en une unique face en projectif. Il est alors facile d'en déduire que le nombre de cellules en projectif est égal au nombre de cellules bornées plus la moitié des cellules non bornées en euclidien.

Considérons maintenant un arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ de $n-1$ droites dans le plan euclidien et D une n^e droite, en position générale.

D est coupée $(n-1)$ fois, et porte donc 2 arêtes non bornées (demi-droites) et $n-2$ arêtes bornées (segments).

On en déduit que le nombre d'arêtes non bornées (resp bornées) vaut : $\hat{a}(n) = 2n$ et $\bar{a}(n) = n(n-2)$.

Pour les faces, chaque arête bornée (resp non bornée) ajoute une face bornée (resp non bornée) :

$$\begin{aligned}\bar{f}(n) &= \bar{f}(n-1) + (n-2) \\ \hat{f}(n) &= \hat{f}(n-1) + 2\end{aligned}$$

Ce qui conduit par un calcul récurrent aux formules du tableau.

□

Arrangements dégénérés dans le plan projectif

Dans un contexte euclidien, les arrangements peuvent être dégénérés pour deux raisons : (1) au moins trois droites sont concourantes en un même point - et l'on a alors un ou plusieurs *faisceaux* - et (2) plusieurs droites sont parallèles.

Dans le plan projectif, seul le premier problème peut se poser. Il est donc plus facile d'y dénombrer les faces d'un arrangement dégénéré.

Proposition 2. *Soit un arrangement dégénéré de n droites dans le plan projectif. On note m le nombre de faisceaux, n_0 le nombre de droites n'appartenant à aucun faisceau, et n_1, \dots, n_m le nombre de droites appartenant à chacun des faisceaux, de sorte que $n = n_0 + n_1 + \dots + n_m$. Alors, le nombre de sommets, arêtes et faces est donnée par :*

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}(\sum_{i \neq j=1}^m n_i n_j + n_0(n - n_0)) + m \\ a &= n(n - 1) - \sum_{i=1}^m n_i(n_i - 2) = n_0(n - 1) + \sum_{i=1}^m n_i(n - n_i + 1) \\ f &= 1 + \frac{1}{2}n(n - 1) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m n_i(n_i - 3) - m = 1 - m + \frac{1}{2}(n_0(n - 1) + \sum_{i=1}^m n_i(n + 2 - n_i)) \end{aligned}$$

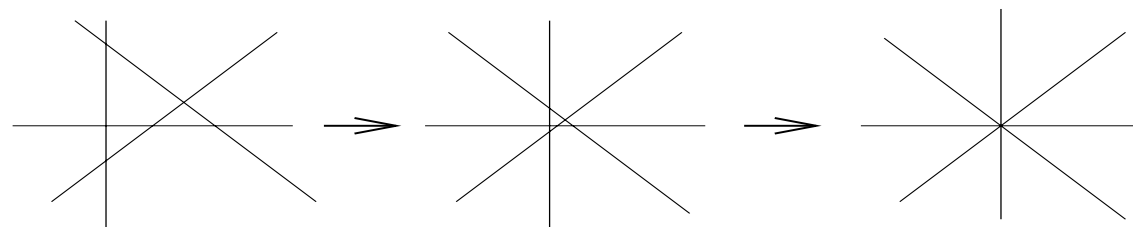


FIG. 1.7 – D'un arrangement simple à un arrangement dégénéré : déficit de cellules

Preuve :

La manière la plus directe de prouver ces résultats est le dénombrement direct pour s , et le calcul du "déficit" en cellules à partir d'un arrangement simple pour le nombre d'arêtes et le nombre de sommets.

Il est facile de voir (fig. 1.7) qu'un arrangement dégénéré en un point, c'est-à-dire comportant en ce point un faisceau de n_i droites (avec $2 < n_i < n$), implique un déficit de cellules. Ce déficit correspond aux cellules correspondantes d'un arrangement euclidien simple de n_i droites. Toutes les cellules bornées (arêtes, faces) disparaissent purement, et tous les sommets sont fusionnés en un unique sommet.

Pour chaque faisceau, d'indice $i \leq m$, le déficit est donc de $n_i(n_i - 2)$ arêtes et de $1 + n_i(n_i - 3)/2$ faces, et les déficits dus à tous les faisceaux se cumulent, ce qui conduit aux formules énoncées. \square

1.4.2 Théorème de la zone

Le théorème de la zone est un énoncé central dans l'étude des arrangements, important aussi bien pour la combinatoire que pour l'algorithmique. Il permet en effet de conclure à l'optimalité de l'algorithme incrémental de construction, que nous allons voir section 3.3.1. En voici l'énoncé tel que fourni par [5] :

Définition 7. Soit $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ un d -arrangement d'un ensemble \mathcal{H} de n hyperplans et H un hyperplan qui n'appartient pas à \mathcal{H} .

Le complexe constitué des k -cellules, $0 \leq k \leq d$, de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ coupées par H , et de leurs sous-cellules est appelé la *zone* de H dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.

Proposition 3. La complexité de toute zone d'un arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ de n hyperplans de \mathbb{R}^d est $O(n^{d-1})$.

Dans notre cas, cela signifie que dans un arrangement (euclidien ou projectif) de n droites, la zone d'une droite quelconque est constituée de $O(n)$ arêtes et $O(n)$ faces, conformément au raisonnement mené dans la preuve précédente.

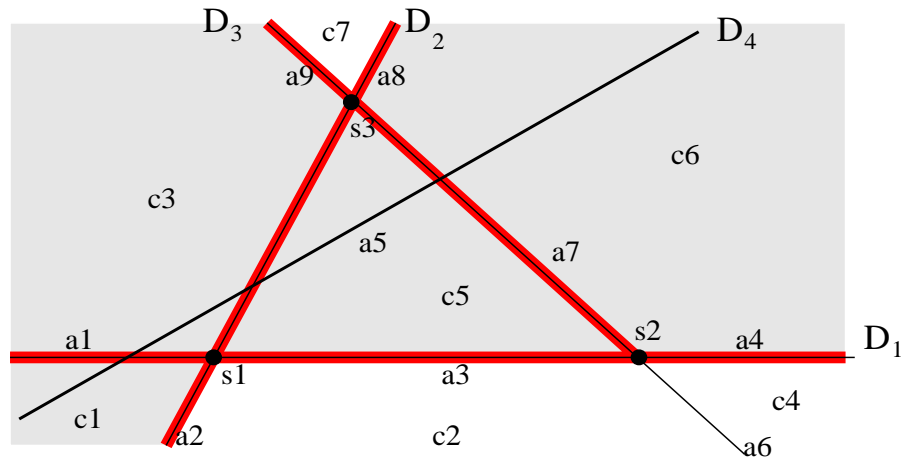


FIG. 1.8 – La zone de D_4 dans $\mathcal{A}(D_1, D_2, D_3)$.

Remarque : Il est à noter que la démonstration de ce théorème en dimension quelconque a tout d'abord fait l'objet d'une démonstration incomplète.

1.4.3 Dénombrement des arrangements de droites

Résultats directs

Dans [19], et [20], B. Grünbaum s'est intéressé au nombre d'arrangements de droites, à équivalence près, et fournit les premiers résultats suivants (p. 394) :

$n =$	3	4	5	6	7
simples/proj.	1	1	1	4	11
tous/proj.	1	2	4	16	
simples/eucl. non or.	1	1	6	43	922(?)
simples/eucl. orienté	1	1	7	79	1765(?)

TAB. 1.2 – Dénombrement des arrangements de droites, selon Grünbaum

Le cas des arrangements chiraux

Notons que Grünbaum distingue le plan euclidien non orienté du plan euclidien orienté.

Dans le plan euclidien, un arrangement est dit *symétrique* s'il possède une représentation ayant un axe de symétrie, et *chiral* dans le cas contraire : son image dans un miroir ne lui est pas superposable.

Dans le cadre non orienté, deux arrangements chiraux sont considérés comme identiques, alors qu'ils sont considérés comme différents dans le cas orienté.

L'équivalence telle que nous l'avons définie correspond au dénombrement dans l'espace euclidien **non orienté**, et nous nous placerons toujours dans ce cas, à moins de préciser le contraire.

Les deux derniers résultats du tableau 1.2 (922 et 1765), dûs à Klee, sont mis en doute par Grünbaum. Ils sont pourtant confirmés par notre logiciel. En effet, nous complétons ce tableau par nos propres recherches systématiques, qui ont donné les résultats suivants pour les configurations simples dans le plan euclidien orienté, et le plan projectif :

$n =$	3	4	5	6	7	8
simples/eucl.	1	1	7	79	1765	>87000
simples/proj.	1	1	1	4	11	>131

L'algorithme d'énumération qui a permis d'établir ces résultats, encore partiels est un algorithme probabiliste rudimentaire, consistant à tirer un grand nombre d'arrangements au hasard, puis à tester leur équivalence combinatoire, selon le critère d'ordre des intersections le long de chaque droite. En toute rigueur, il ne s'agit donc que d'une *borne inférieure* du nombre de classes d'équivalence, car rien n'interdit de "rater" un arrangement "peu probable". Cependant, nous avons utilisé des générateurs aléatoires différents, et une heuristique d'arrêt de dénombrement quand le nombre de représentants de la classe la moins représentée était supérieur à 10, ce qui nous permet d'espérer l'exactitude des résultats obtenus.

En réalité, l'erreur de Klee, relevée par Grünbaum, est qu'il n'a pas dénombré le nombre d'arrangements de droites, mais le nombre d'arrangements de *pseudolines*. Cependant, comme il a été établi depuis [17, chap 5], pour $n \leq 8$, tout arrangement

de *pseudolines* est étirable en arrangement de droites. Les résultats donnés par Klee et rapportés par Grünbaum pour 7 droites sont donc justes.

Dans le plan euclidien, les premiers arrangements non-triviaux commencent à 5 droites, puisqu'on en dénombre 7 différents, dans le contexte euclidien orienté, et 6 dans le contexte euclidien non-orienté, qui correspond à notre définition de l'équivalence. Ils sont tous présentés figure 1.9, avec leur enveloppe afin de les identifier rapidement. Notons que sur les 7 arrangements, 5 sont symétriques et 2 sont chiraux. La figure 1.9 ne montre que l'un de ces deux (le premier, en haut à gauche).

Configurations de points

Dans [2] puis [3], Aichholzer *et al.* s'intéressent au problème dual de celui qui nous préoccupe : le dénombrement (et même l'énumération complète) des *configurations de points*, jusqu'à $n = 10$ points.

Les configurations de points sont les manières de placer n points dans le plan. Les transformations de dualité, projective ou euclidienne, permettent donc de passer d'un arrangement de n droites à une configuration de n points, et inversement.

Comme pour les arrangements de droites, on peut définir une notion d'équivalence :

Définition 8. Deux configurations de points sont équivalentes s'il existe une renumérotation qui permette de retrouver la même suite des orientations de tous les triplets parmi les n points.

L'aspect particulièrement intéressant de ces résultats (tableau 1.3) est que l'article signale, sans toutefois le démontrer, que dans le plan projectif le dénombrement des configurations de points est exactement équivalent au dénombrement des arrangements de droites, alors que cette équivalence est, hélas, fautive dans le plan euclidien.

$n =$	4	5	6	7	8	9	10
config. proj.	1	1	4	11	135	4381	312 114
config. eucl.	2	3	16	135	3315	158 817	14 309 547

TAB. 1.3 – Dénombrement des configurations de points, selon Aichholzer *et al.*

Nous pouvons toutefois comparer les résultats fournis par Grünbaum, trouvés par notre logiciel, et fournis par Aichholzer, et constater qu'ils sont cohérents.

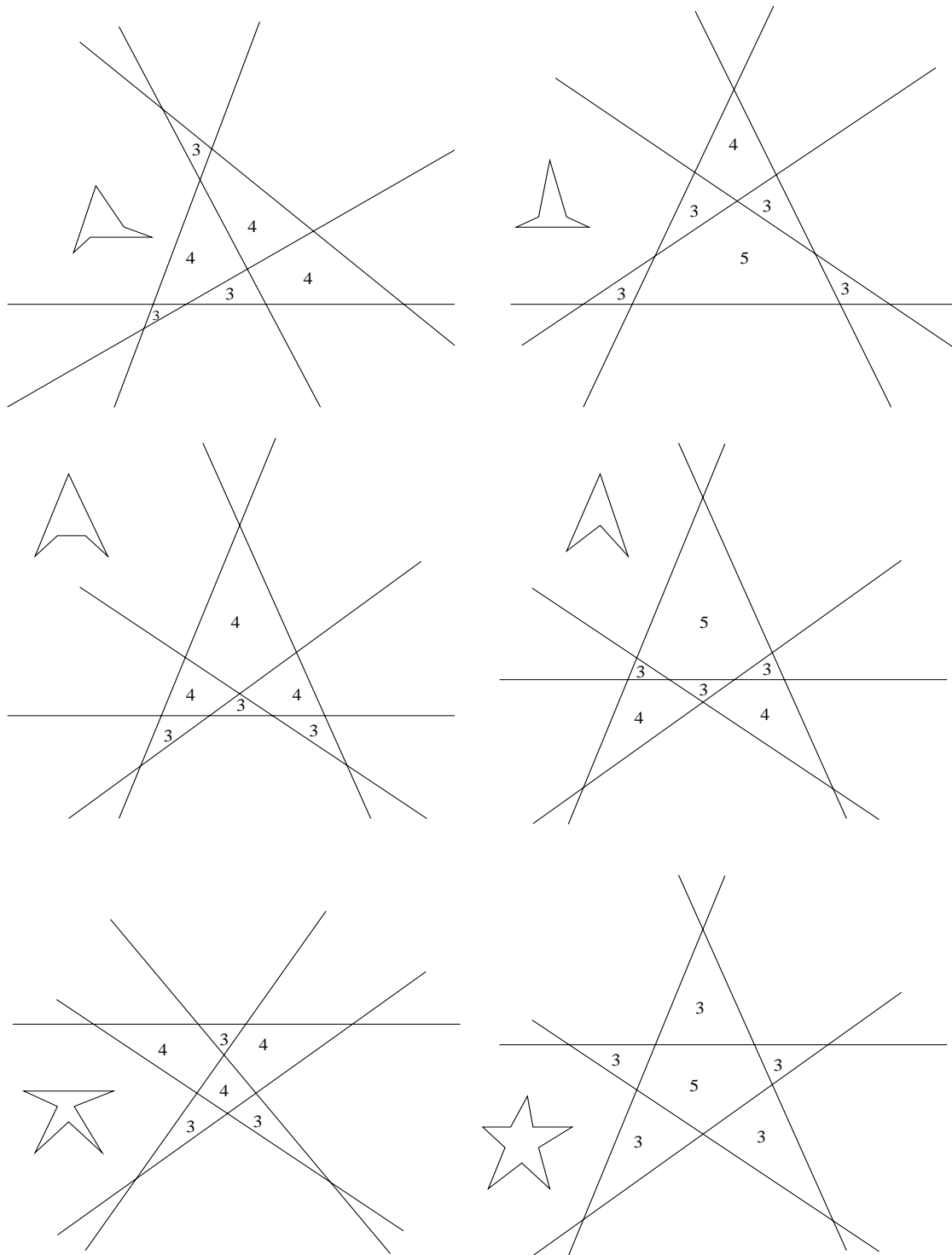


FIG. 1.9 – Les six (ou sept) arrangements euclidiens de 5 droites

Chapitre 2

Isotopie, perturbation, stabilité

Résumé

Ce chapitre est essentiellement constitué d'un apport personnel : une définition de la notion intuitive d'isotopie de droites, qui est un déplacement global de droites ne changeant pas la nature de l'arrangement. Cette définition se veut à la fois suffisamment rigoureuse et suffisamment souple pour nos futures applications.

Cette isotopie est une condition suffisante uniquement géométrique pour assurer l'équivalence combinatoire de deux arrangements. Elle permet donc de travailler avec des opérations géométriques élémentaires "compatibles".

Après avoir défini une paramétrisation générale pour les droites, nous partons de l'isotopie globale, que nous définissons la plus proche possible de l'intuition, puis nous la simplifions en passant à l'isotopie itérative, qui manipule une seule droite à la fois, puis avec les séquences de translation-rotation. Nous montrons l'équivalence de ces trois outils, de plus en plus simples géométriquement.

Dans une deuxième partie, nous nous intéressons à la perturbation d'un arrangement, et aux conditions de stabilité que l'on peut espérer, en déterminant des bornes explicites d'erreur.

Sommaire

2.1	Paramétrisation dans le plan euclidien	39
2.1.1	Paramétrisation	39
2.1.2	Orientation	40
2.2	Isotopie	40
2.2.1	Isotopie globale	40
2.2.2	Isotopie itérative	42
2.2.3	Propriétés de l'isotopie	44
	Isotopie et équivalence combinatoire	45
	De l'isotopie aux séquences $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$	46
	Isotopie et dualité	47
2.3	Perturbations, stabilité	48
2.3.1	Perturbations des droites	48
2.3.2	Conditions de stabilité	49
	Bornes de stabilité	49

La notion d'équivalence définie chapitre 1 est parfaitement rigoureuse, mais de nature combinatoire. Pour pouvoir travailler sur un arrangement de droites à l'aide de transformations géométriques, nous sommes amenés à définir une "équivalence géométrique", intuitivement par "déformation continue" d'un arrangement. Nous parlerons alors d'isotopie au lieu d'équivalence.

Cette notion d'isotopie est évoquée, sans être précisément définie, dans [4]. Pour la formaliser, nous nous restreignons au plan euclidien, rapporté à un repère orthonormé, et nous choisissons une paramétrisation pour les droites, telle que chacune soit représentée par un couple de réels.

Enfin, nous définissons l'isotopie de façon à permettre les transformations géométriques naturelles, de manière compatible avec l'invariance combinatoire.

2.1 Paramétrisation dans le plan euclidien

2.1.1 Paramétrisation

Nous adoptons pour les droites du plan euclidien (ramené à un repère orthonormé arbitraire) la paramétrisation suivante : $D_i(a_i, b_i)$ où $a_i x + b_i y + 1 = 0$ est l'équation de D_i .

Alors le point $P_{ij} = D_i \cap D_j$ aura pour coordonnées

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_i b_j - a_j b_i} \begin{pmatrix} b_i - b_j \\ a_j - a_i \end{pmatrix}$$

Remarque : Cette paramétrisation exclut les droites passant par l'origine O . Ce n'est pas très gênant pour notre application, puisque nous pouvons choisir arbitrairement O , et éventuellement en changer.

Son avantage est qu'elle est très proche de la formulation de l'équation en projectif (coordonnées homogènes) $ax + by + cz = 0$, ce qui permet facilement un passage de l'euclidien vers le projectif. De même, cette paramétrisation n'exclut aucune direction de droite, contrairement à une équation fonctionnelle $y = ax + b$, qui est à la base de la présentation d'Edelsbrunner [13]. Dans sa thèse [29], Vo Phi avait quant à lui privilégié la représentation "normalisée" $a_i x + b_i y - c_i = 0$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$, $c_i > 0$, qui rend l'étude technique relativement plus compliquée.

2.1.2 Orientation

Si l'on s'intéresse à la position de P_{ij} par rapport à D_k , elle est donnée par le signe de :

$$a_k x_{ij} + b_k y_{ij} + 1 = a_k \frac{b_i - b_j}{a_i b_j - a_j b_i} + b_k \frac{a_j - a_i}{a_i b_j - a_j b_i} + 1$$

ou, de manière équivalente, par le signe de

$$s_{i,j,k} = a_k(b_i - b_j) + b_k(a_j - a_i) + (a_i b_j - a_j b_i) = \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Remarque : ce déterminant donne de façon équivalente l'orientation du triangle P_{ij}, P_{jk}, P_{ki} .

2.2 Isotopie

Dans toute la suite, on considère une famille de n droites paramétrées comme on vient de le voir $\mathcal{D} = (D_i(a_i, b_i))_{1 \leq i \leq n}$, et on s'intéresse à la manière de la déformer globalement, d'une position $\mathcal{D}^0 = (D_i^0(a_i^0, b_i^0))_i$ à une position $\mathcal{D}^1 = (D_i^1(a_i^1, b_i^1))_i$, $1 \leq i \leq n$. Ainsi, chaque droite sera représentée uniquement et complètement par un couple de réels.

2.2.1 Isotopie globale

Nous allons procéder en deux étapes naturelles, commençant par l'étude du *déplacement global*, dont découlera l'*isotopie globale*.

Définition 9. Déplacement global

Un repère euclidien étant donné, nous définissons un *déplacement global* de l'ensemble des droites de la position $\Delta^0 = (a_1^0, b_1^0, \dots, a_n^0, b_n^0)$ à la position $\Delta^1 = (a_1^1, b_1^1, \dots, a_n^1, b_n^1)$ par une fonction biunivoque et bicontinue. Nous rajouterons l'hypothèse que la courbe ainsi obtenue est rectifiable.

$$\Delta = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

telle que

$$\forall i, \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} a_i^0 \\ b_i^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} (1) = \begin{pmatrix} a_i^1 \\ b_i^1 \end{pmatrix}$$

Ce déplacement global est dit *isotope* pour \mathcal{D} si

$$\forall (i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall t \in [0, 1], \quad \begin{vmatrix} a_i(t) & a_j(t) & a_k(t) \\ b_i(t) & b_j(t) & b_k(t) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ et } \begin{vmatrix} a_i(t) & a_j(t) \\ b_i(t) & b_j(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

Autrement dit si les déterminants restent de signe constant au cours du déplacement global.

Remarque : ainsi, aucune paire de droites ne deviennent parallèles, et aucun triplet de sommets ne change d'orientation, ni ne s'aplatit au cours du déplacement. Intuitivement, il est clair que cela conserve la combinatoire de l'arrangement, et nous avons donc un critère analytique qui assure cette conservation.

Remarque : le choix de la paramétrisation $ax + by + 1 = 0$ interdit à toute droite de passer par l'origine au cours de son déplacement. En effet, dans ce cas, il ne peut exister de fonction Δ continue : les a_i et b_i correspondant tendraient alors vers l'infini.

Remarque : par l'hypothèse de bicontinuité, l'image de Δ est une courbe ouverte simple dans \mathbb{R}^{2n} . Cela signifie que les droites ne repassent pas deux fois par la même configuration globale pendant le déplacement.

L'hypothèse que cette courbe est rectifiable nous permettra de toujours considérer un ordre naturel des points sur cette courbe, qui est l'ordre de leurs abscisses curvilignes.

Définition 10. Domaine d'isotopie d'un arrangement

L'ensemble des $(a_i, b_i)_{i, 1 \leq i \leq n}$ vérifiant les conditions ci-dessus est une partie de \mathbb{R}^{2n} appelée *domaine d'isotopie de l'arrangement* \mathcal{D} , notée $\Gamma_{\mathcal{D}}$.

Remarque : $\Gamma_{\mathcal{D}}$ dépend bien sûr des paramètres des droites, donc du choix initial du repère.

Lemme 4. *Le domaine d'isotopie $\Gamma_{\mathcal{D}}$ d'un arrangement de droites $\mathcal{D} = (D_i(a_i, b_i))_{1 \leq i \leq n}$ est un ouvert de \mathbb{R}^{2n} .*

Preuve :

Le domaine d'isotopie est une intersection finie d'images réciproques d'ouverts (\mathbb{R}_*^+ ou \mathbb{R}_*^-) par la fonction déterminant, donc une intersection finie d'ouverts de \mathbb{R}^{2n} . □

Définition 11. Isotopie globale

On appelle *transformation isotope globale* (ou *isotopie globale*) toute suite finie de déplacements globaux isotopes sur \mathcal{D} , éventuellement décrits dans des repères différents.

Remarque : une définition mathématique globale de l'isotopie globale serait probablement possible en construisant un espace de "paramètres" des droites adéquat, mais cela semble complexe. Nous avons préféré garder l'idée intuitive d'une succession de déplacements globaux, car elle convient parfaitement à nos applications.

On peut également élargir intuitivement la notion de domaine d'isotopie à l'isotopie globale, en le définissant comme l'ensemble des arrangements obtenus par isotopie globale. De même, on peut affirmer que ce domaine d'isotopie est ouvert, dans le même sens que le déplacement global.

2.2.2 Isotopie itérative

L'isotopie itérative est une simple restriction de l'isotopie globale à une succession de déplacements isotopes d'une seule droite. Pour résumer, dans l'isotopie globale, toutes les droites bougent en même temps, alors que l'isotopie itérative, que nous allons définir, ne permet aux droites de bouger que l'une après l'autre.

L'idée intuitive est claire, néanmoins, nous formalisons à nouveau pour préciser les notations :

Définition 12. Déplacement isotope d'une droite

Nous définissons un *déplacement* de la droite $D_k(a_k, b_k)$ en $D'_k(a'_k, b'_k)$ par deux fonctions continues $a, b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, telles que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (1) = \begin{pmatrix} a'_k \\ b'_k \end{pmatrix}$$

Ce déplacement est dit *isotope* pour \mathcal{D} si

$$\forall t \in [0, 1], \quad \forall (i, j), (1 \leq i, j \leq n, i \neq j \neq k) : \begin{vmatrix} a_i & a_j & a(t) \\ b_i & b_j & b(t) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ et } \begin{vmatrix} a_i & a(t) \\ b_i & b(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

Définition 13. Domaine d'isotopie d'une droite

L'ensemble des $(a(t), b(t))$ vérifiant la condition ci-dessus est appelé le *domaine d'isotopie de la droite* D_k .

C'est une simple restriction de la définition 10.

Définition 14. Isotopie itérative

On appelle *transformation isotope itérative* ou *isotopie itérative* toute suite finie de déplacements isotopes sur \mathcal{D} , éventuellement décrits dans des repères différents.

Proposition 5. *Les deux formes d'isotopie, globale et itérative, sont strictement équivalentes.*

Preuve :

Il est clair qu'une isotopie itérative est une isotopie globale.

La réciproque est un peu moins directe. Il suffit de démontrer qu'un déplacement global Δ peut se décomposer en une succession de déplacements élémentaires d'une seule droite.

Soit donc $\Delta \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^{2n})$ un tel déplacement.

L'image de Δ est une courbe incluse dans le domaine d'isotopie $\Gamma_{\mathcal{D}}$, ouvert d'après le lemme. Pour tout point $\Delta(t)$ de Δ , $t \in [0, 1]$, il existe donc un voisinage ouvert de forme un pavé de \mathbb{R}^{2n} , $\Pi_{1 \leq i \leq n} [\underline{a}_i(t), \bar{a}_i(t)] \times [\underline{b}_i(t), \bar{b}_i(t)]$. Ceci constitue un recouvrement de l'image de Δ par une famille d'ouverts (indénombrable), tous inclus dans $\Gamma_{\mathcal{D}}$.

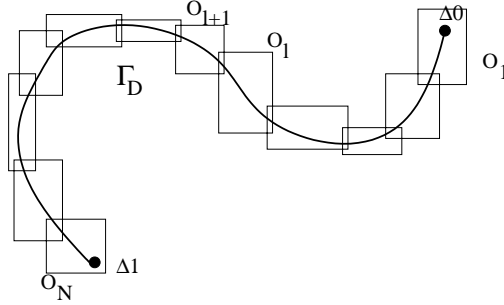


FIG. 2.1 – Δ recouvert par les ouverts \mathcal{O}_l , illustration simplifiée en 2d

Or l'image de Δ est un compact, car $[0, 1]$ est compact. On peut donc extraire de la famille de pavés de \mathbb{R}^{2n} une famille finie de pavés ouverts, qui recouvre l'image de Δ . Notons la

$$\mathcal{O} = (\Pi_{i=1}^n [\underline{a}_i^l, \bar{a}_i^l] \times [\underline{b}_i^l, \bar{b}_i^l])_l, \quad l \in \llbracket 1, N \rrbracket$$

avec une numérotation qui respecte l'ordre des ouverts le long de la courbe (voir fig 2.1).

Il suffit maintenant de décomposer sur chacun des pavés ouverts \mathcal{O}_l le déplacement Δ en déplacements élémentaires d'une droite. La forme des ouverts permet de le faire facilement en décomposant les trajets sur chacune des paires de coordonnées : nous utilisons le schéma suivant, qui effectue un trajet "en escalier" dans l'espace des paramètres, assurant ainsi que le trajet ne sort pas des pavés \mathcal{O}_l .

$$\begin{aligned} (a_1^0, b_1^0, a_2^0, b_2^0, \dots, a_n^0, b_n^0) &\longmapsto (a_1^1, b_1^1, a_2^0, b_2^0, \dots, a_n^0, b_n^0) \longmapsto (a_1^1, b_1^1, a_2^1, b_2^1, a_3^0, b_3^0, \dots, a_n^0, b_n^0) \longmapsto \dots \\ \dots &\longmapsto (a_1^1, b_1^1, \dots, a_{n-1}^1, b_{n-1}^1, a_n^0, b_n^0) \longmapsto (a_1^1, b_1^1, \dots, a_{n-1}^1, b_{n-1}^1, a_n^1, b_n^1) \end{aligned}$$

Ainsi, on construit une séquence d'au plus n déplacements dans le sous-domaine \mathcal{O}_l de Γ , chaque déplacement n'affectant qu'une seule droite $D_i(a_i, b_i)$.

Le recouvrement de Δ permet de passer de \mathcal{O}_l à \mathcal{O}_{l+1} , en recommençant le même processus. En définitive, on peut décomposer le déplacement Δ en au plus $n \times N$ déplacements isotopes, chacun n'affectant qu'une seule droite, et restant dans le domaine d'isotopie Γ . \square

Remarque : cette proposition permet de décomposer une isotopie globale en isotopie itérative, mais elle n'est pas constructive. Entre autre, elle ne fournit pas le nombre minimum de déplacements élémentaires nécessaires, ce qui serait intéressant dans une implémentation réelle.

Proposition 6. *Le domaine d'isotopie Γ_{D_k} d'une droite D_k est un ouvert convexe du plan des paramètres \mathbb{R}^2 , intersection de demi-plans, et ne contenant pas l'origine.*

Preuve :

$$\text{Soit } \bar{s}_i = \text{sgn} \begin{vmatrix} a_i & a(0) \\ b_i & b(0) \end{vmatrix} = \pm 1 \quad \text{et} \quad \bar{s}_{ij} = \text{sgn} \begin{vmatrix} a_i & a_j & a(0) \\ b_i & b_j & b(0) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \pm 1 \quad \text{et}$$

$$\bar{\Delta}_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (u, v) \longmapsto \begin{vmatrix} a_i & u \\ b_i & v \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\Delta}_{ij} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (u, v) \longmapsto \begin{vmatrix} a_i & a_j & u \\ b_i & b_j & v \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Alors $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ (fig. 2.2), avec

$$\Gamma_1 = \bigcap_i \bar{\Delta}_i^{-1}(\bar{s}_i \mathbb{R}_*^+) \tag{2.1}$$

$$\Gamma_2 = \bigcap_{ij} \bar{\Delta}_{ij}^{-1}(\bar{s}_{ij} \mathbb{R}_*^+) \tag{2.2}$$

Γ_1 est le domaine de paramètres pour lequel la droite $D_k(u, v)$ ne devient pas parallèle aux autres droites : c'est en réalité un cône de \mathbb{R}^2 , limité par deux demi-droites partant de l'origine. Ces deux demi-droites correspondent aux droites "encadrant" D_k dans la position de départ. En particulier, O est exclu de Γ_1 .

Γ_2 est le domaine de paramètres pour lequel la droite $D_k(u, v)$ ne franchit aucun autre sommet de \mathcal{D} . C'est l'intersection de demi-plans ouverts, limités par des droites ne passant pas par l'origine. Γ_2 peut être borné ou non.

□

2.2.3 Propriétés de l'isotopie

D'après ce qui précède, nous pouvons parler d'isotopie en général sans plus préciser.

Définition 15. On dira que deux familles de droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont *isotopes* si l'on peut obtenir \mathcal{D}_2 par transformation isotope de \mathcal{D}_1 . Par extension, on parlera de deux arrangements isotopes si les familles de droites sous-jacentes le sont.

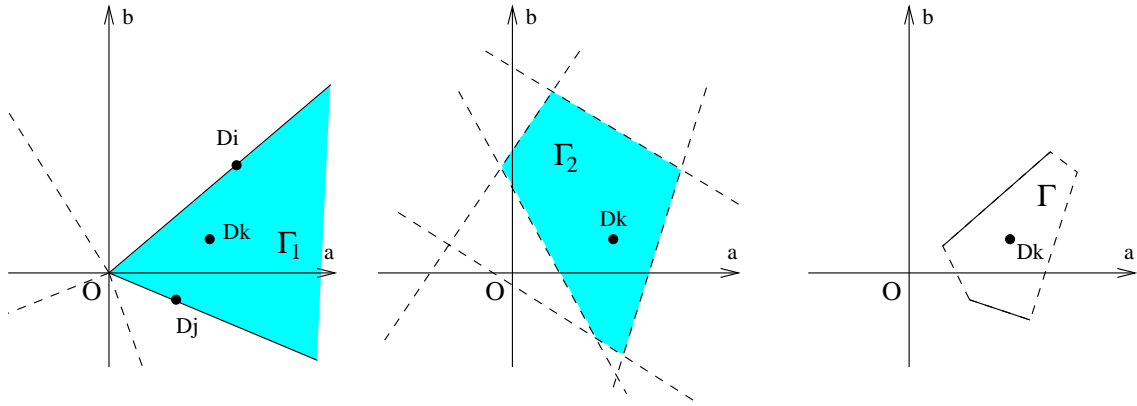


FIG. 2.2 – Construction du domaine d'isotopie de D_k

Propriétés 7. *L'isotopie possède les propriétés suivantes :*

1. *L'isotopie est une relation d'équivalence.*
2. *L'isotopie opère ainsi sur un arrangement réalisé $\mathcal{A}(\mathcal{D}_n)$ ou même un simple ensemble de droites \mathcal{D}_n alors que l'équivalence est définie de façon abstraite sur un arrangement combinatoire \mathcal{A}_n .*

Preuve :

Les démonstrations sont élémentaires. □

Isotopie et équivalence combinatoire

Propriété 8. *L'isotopie de deux arrangements implique évidemment leur équivalence combinatoire (euclidienne). La réciproque est fausse.*

Preuve :

La démonstration de l'implication est encore élémentaire si l'on sait que l'ordre des sommets sur chaque droite suffit à définir la combinatoire d'un arrangement. Une démonstration constructive de ce résultat est fournie par l'algorithme de construction par squelette, chapitre 3.

Pour la réciproque, il faut se référer à [17, p. 100] : le résultat est cité comme conséquence du très abstrait *théorème d'universalité de Mnëv*, qui s'appuie sur la théorie des matroïdes. Dans l'espace \mathbb{R}^{2n} des paramètres des droites, la région qui a "les mêmes signes" de déterminants qu'un arrangement donné peut être non-connexe. Toujours d'après Goodman, le plus petit arrangement de droites **connu** possédant cette particularité comporte 14 droites, et il est démontré qu'il n'en existe pas à moins de 10 droites.

Ceci prouve que l'équivalence combinatoire n'implique pas nécessairement l'isotopie, puisqu'on peut trouver deux réalisations distinctes d'un arrangement de droites, situées dans deux composantes connexes différentes, donc n'admettant pas de déformation continue de l'une à l'autre. □

Nous avons déjà simplifié en passant de l'isotopie globale à l'isotopie itérative, et en montrant leur équivalence. Nous pouvons faire mieux en ramenant l'isotopie itérative à deux opérations géométriques élémentaires, sans perte de généralité.

De l'isotopie aux séquences $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$

Proposition 9. *Tout déplacement élémentaire de $D_i(a_i, b_i)$ peut se décomposer en une suite de séquences $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$, définies par :*

- \mathcal{T} translation continue de D_i parallèlement à elle-même, et
- \mathcal{R} rotation continue de D_i d'angle θ autour de l'origine O ,

où chaque étape n'entraîne pas de franchissement d'un sommet de $\mathcal{A}(\mathcal{D} \setminus D_i)$.

Preuve :

La démonstration est similaire à celle de la proposition 5, mais cette fois $\Delta = (a, b)$ est à valeurs dans \mathbb{R}^2 et plus dans \mathbb{R}^{2n} , et le domaine d'isotopie de notre déplacement élémentaire Δ de D_i^0 à D_i^1 est plan. Δ a donc réellement pour image une courbe du plan (a, b) , contenue dans le domaine d'isotopie $\Gamma_{\mathcal{D}}$.

Examinons tout d'abord l'effet d'une translation et d'une rotation de droite $D_i(a_i, b_i)$ dans le domaine des paramètres (a, b) :

Remarquons que pour une droite d'équation $D_i : a_i x + b_i y + 1 = 0$, une translation est aussi une homothétie (globale). La droite restant parallèle à elle-même, le rapport a_i/b_i reste constant, et le passage de D_i^0 à D_i^1 (cf fig. 2.3, gauche) par translation se fait toujours le long d'une demi-droite passant par l'origine et par D_i^0 : les points de cette demi-droite sont les seules positions accessibles pour D_i après une simple translation.

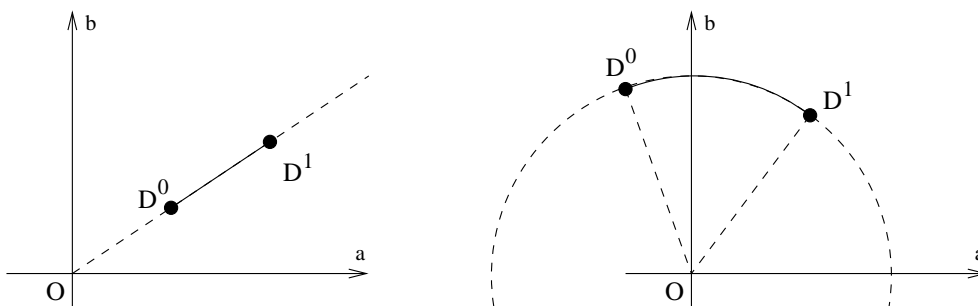


FIG. 2.3 – Une translation (a) et une rotation (b) dans l'espace des paramètres

Pour une rotation de droite, d'angle θ autour de l'origine, ce n'est pas plus compliqué : elle correspond à une rotation identique de son vecteur normal (a_i, b_i) . Les positions (a, b) accessibles pour D_i se situent donc sur un cercle centré en O et passant par D_i^0 . Une rotation de la position D_i^0 à D_i^1 a donc un arc de cercle pour trajectoire dans l'espace des paramètres (fig. 2.3, droite).

Pour prouver la propriété qui nous intéresse, nous nous intéressons cette fois à des ouverts de forme particulière : des arcs de couronnes, centrés en O .

Comme précédemment, un seul ouvert de cette forme ne peut pas forcément contenir toute la courbe Im_{Δ} sans sortir de Γ_D , mais en revanche, Γ_D étant ouvert, on peut le recouvrir par des ouverts de cette forme. De plus, la courbe étant compacte, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $\mathcal{O} = (O_i), i \leq N$, avec une numérotation respectant l'ordre des ouverts rencontrés le long de la trajectoire de Δ .

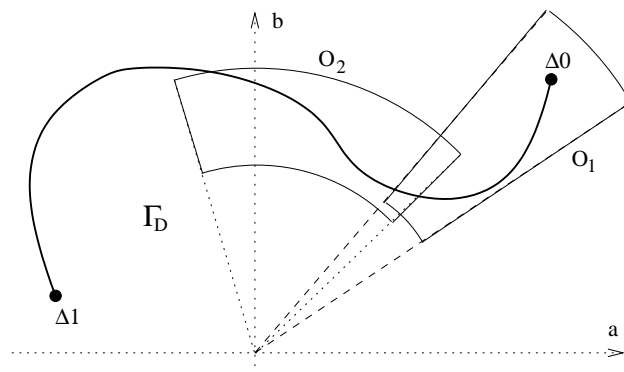


FIG. 2.4 – D'un déplacement à une séquence de (translation, rotation)

Il suffit maintenant de décomposer sur chacun des ouverts O_i la portion de déplacement Δ en une translation \mathcal{T} suivie d'une rotation \mathcal{R} (ou l'inverse), la forme choisie pour les ouverts nous assurant de pouvoir procéder sans sortir de Γ_D .

En définitive, on peut décomposer le déplacement Δ en N séquences $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$ ou $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$. □

Corollaire 10. *Par suite, toute isotopie itérative peut se décomposer de la même manière en séquences d'opérations $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$.*

Preuve :

Il suffit de composer les décompositions de chaque isotopie itérative en déplacements élémentaires et de chaque déplacement élémentaire en séquences $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$. □

Remarque : On peut relâcher légèrement la contrainte précédente, en admettant une suite de séquences $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$ où chaque \mathcal{R} est une rotation non plus autour de l'origine mais autour de l'un quelconque des points de D_i .

La démonstration serait analogue à la précédente, mais plus fastidieuse car la forme des ouverts nécessaires serait bien plus technique à décrire.

Isotopie et dualité

Nous pouvons remarquer qu'en nous plaçant dans l'espace des paramètres, la notion d'isotopie que nous avons définie s'applique par dualité aux configurations de points, chaque droite de l'espace euclidien (primal) étant définie par un point de l'espace dual. La condition de respect des orientations des intersections, définie

en 2.1.2, se traduit par une conservation du signe d'un déterminant, et s'interprète donc dans l'espace des paramètres : les mouvements admissibles des points correspondant aux droites déplacées sont ceux qui respectent l'orientation de chacun des triplets de points. C'est équivalent à respecter le "type d'ordre" (*order type*) de la configuration de points, tel qu'il est défini dans [18].

2.3 Perturbations, stabilité

À partir des résultats établis section 2.1 pour le respect de l'orientation d'un triplet de sommets, nous pouvons nous intéresser au problème voisin de la stabilité globale d'un arrangement : si nous perturbons globalement toutes les droites $D_i(a_i, b_i)$, l'arrangement va-t-il se transformer ? Plus précisément, de combien pouvons nous perturber l'ensemble des droites de façon à conserver le même arrangement ?

2.3.1 Perturbations des droites

Nous perturbons une ou plusieurs droites de l'arrangement en autorisant une erreur contrôlée sur chaque paramètre.

Notation 16. Nous notons $\tilde{D}_i(\tilde{a}_i, \tilde{b}_i)$ chaque droite perturbée, avec

$$\begin{aligned}\tilde{a}_i &= a_i + \varepsilon_i & \forall i, |\varepsilon_i| \leq \varepsilon \\ \tilde{b}_i &= b_i + \eta_i & \forall i, |\eta_i| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

Ainsi ε_i, η_i sont les erreurs sur les paramètres a_i, b_i , et $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ est le contrôle de l'erreur, autrement dit le rayon de la boule (pour la norme Max) dans laquelle les paramètres a_i, b_i sont perturbés.

Nous allons encore noter, pour tout $i, j, k \leq n$, $M_{ij} = \max(|a_i|, |b_i|, |a_j|, |b_j|)$, $M_{ijk} = \max(|a_i|, |b_i|, |a_j|, |b_j|, |a_k|, |b_k|)$, et plus généralement $M = \max(|a_i|, |b_i|)$ pour $1 \leq i \leq n$.

Alors, pour i, j quelconques :

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= \tilde{a}_i \tilde{b}_j - a_i b_j = (a_i + \varepsilon_i)(b_j + \eta_j) - a_i b_j \\ &= a_i \eta_j + b_j \varepsilon_i + \varepsilon_i \eta_j \\ |\delta_{ij}| &\leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon \max(|a_i|, |b_j|)\end{aligned}$$

On trouve alors

$$|\delta_{ij}| = |\tilde{a}_i \tilde{b}_j - a_i b_j| \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon M_{ij} \tag{2.3}$$

2.3.2 Conditions de stabilité

Grâce à la majoration précédente, nous pouvons trouver des conditions sur ε pour assurer que notre perturbation conserve la même combinatoire, autrement dit, que notre perturbation reste une isotopie :

Notation 17. Pour tout triplet d'indices $i, j, k \in [1, n]$, posons encore les notations analogues à 2.1.1 :

$$s_{i,j,k} = \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \tilde{s}_{i,j,k} = \begin{vmatrix} \tilde{a}_i & \tilde{a}_j & \tilde{a}_k \\ \tilde{b}_i & \tilde{b}_j & \tilde{b}_k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$s_{i,j} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \quad \tilde{s}_{i,j} = \begin{vmatrix} \tilde{a}_i & \tilde{a}_j \\ \tilde{b}_i & \tilde{b}_j \end{vmatrix}$$

Bornes de stabilité

Proposition 11. Avec les notations 16 et 17, posons encore les intervalles de \mathbb{R} suivants :

$$E_o = \bigcap_{i,j,k} \left[0, \sqrt{M_{ijk}^2 + \frac{1}{6}|s_{ijk}|} - M_{ijk} \right]$$

$$E_{np} = \bigcap_{i,j} \left[0, \sqrt{M_{ij}^2 + \frac{1}{2}|s_{ij}|} - M_{ij} \right]$$

Si $\varepsilon \in E_o \cap E_{np}$, alors l'arrangement $\mathcal{A}(\tilde{D}_i)$ est équivalent à l'arrangement d'origine $\mathcal{A}(D_i)$.

Preuve :

Pour conserver le même arrangement combinatoire malgré la perturbation géométrique des droites, on veut assurer, comme pour l'isotopie, deux conditions : que l'orientation de chaque triplet de sommets reste la même (condition d'orientation), et qu'aucune paire de droites ne deviennent parallèles.

Conservation de l'orientation

Comme on l'a vu, la conservation de l'orientation de chaque triplet de sommets (P_{ij}, P_{ik}, P_{jk}) se traduit par la non-annulation du déterminant perturbé \tilde{s}_{ijk} . Or

$$s_{ijk} = a_k b_i - a_k b_j + a_j b_k - a_i b_k + a_i b_j - a_j b_i$$

D'où

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{ijk} - s_{ijk} &= (\tilde{a}_k \tilde{b}_i - a_k b_i) - (\tilde{a}_k \tilde{b}_j - a_k b_j) + (\tilde{a}_j \tilde{b}_k - a_j b_k) - (\tilde{a}_i \tilde{b}_k - a_i b_k) \\ &\quad + (\tilde{a}_i \tilde{b}_j - a_i b_j) - (\tilde{a}_j \tilde{b}_i - a_j b_i) \\ &= \delta_{ki} - \delta_{kj} + \delta_{jk} - \delta_{ik} + \delta_{ij} - \delta_{ji} \end{aligned}$$

Et finalement, d'après l'inéquation 2.3

$$|\tilde{s}_{ijk} - s_{ijk}| \leq 6\varepsilon^2 + 12\varepsilon M_{ijk} \quad (2.4)$$

L'inégalité 2.4 nous fournit une condition suffisante : si $|s_{ijk}| > 6\varepsilon^2 + 12\varepsilon M_{ijk}$, alors \tilde{s}_{ijk} ne peut s'annuler. Il suffit de résoudre l'inéquation, en forme (simple) de trinôme du second degré en ε :

$$f(\varepsilon) = 6\varepsilon^2 + 12\varepsilon M_{ijk} - |s_{ijk}| < 0 \quad (2.5)$$

Le discriminant étant $\Delta'_{ijk} = 36M_{ijk}^2 + 6|s_{ijk}| > 0$, l'équation associée a toujours deux racines, et notre inéquation a pour solution $\varepsilon \in]\varepsilon_1, \varepsilon_2[$ avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{-6M_{ijk} - \Delta'_{ijk}}{6} = -\sqrt{M_{ijk}^2 + \frac{1}{6}|s_{ijk}|} - M_{ijk} < 0 \\ \varepsilon_2 &= \sqrt{M_{ijk}^2 + \frac{1}{6}|s_{ijk}|} - M_{ijk} > 0 \end{aligned}$$

Or ε est positif par construction, donc seule la borne ε_2 intervient dans la solution de 2.5 :

$$\varepsilon \in E_{o,ijk} = \left[0, \sqrt{M_{ijk}^2 + \frac{1}{6}|s_{ijk}|} - M_{ijk} \right[$$

Et ceci doit être vrai pour **chaque** triplet de sommets i, j, k , d'où la condition suffisante annoncée pour conserver les orientations : $\varepsilon \in E_o = \bigcap_{i,j,k} E_{o,ijk}$.

Condition de non-parallélisme

De façon analogue, la condition de conservation du non-parallélisme pour deux droites D_i, D_j se traduit par la non-annulation du déterminant $\tilde{s}_{ij} = \tilde{a}_i \tilde{b}_j - \tilde{a}_j \tilde{b}_i$. Or

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{ij} - s_{ij} &= \tilde{a}_i \tilde{b}_j - \tilde{a}_j \tilde{b}_i - a_i b_j + a_j b_i \\ &= \delta_{ij} - \delta_{ji} \\ |\tilde{s}_{ij} - s_{ij}| &\leq 2\varepsilon^2 + 4\varepsilon M_{ij} \end{aligned}$$

Il suffit là encore de prendre $|s_{ij}| > 2\varepsilon^2 + 4\varepsilon M_{ij}$ pour empêcher \tilde{s}_{ij} de s'annuler, ce qui conduit à l'inéquation

$$f(\varepsilon) = 2\varepsilon^2 + 4\varepsilon M_{ij} - |s_{ij}| < 0 \quad (2.6)$$

avec un discriminant $\Delta'_{ij} = 4M_{ij}^2 + 2|s_{ij}| > 0$, l'inéquation en ε a encore un intervalle ouvert de solutions, de bornes

$$\varepsilon_1 = -\sqrt{M_{ij}^2 + \frac{1}{2}|s_{ij}|} - M_{ij} < 0 \quad \varepsilon_2 = \sqrt{M_{ij}^2 + \frac{1}{2}|s_{ij}|} - M_{ij} > 0$$

Là encore, ε étant positif par construction, cela nous conduit à un intervalle solution tronqué sur les réels positifs :

$$\varepsilon \in E_{np,ij} = \left[0, \sqrt{M_{ij}^2 + \frac{1}{2}|s_{ij}|} - M_{ij} \right[$$

Cette condition étant à respecter pour chaque paire de droites D_i, D_j , la condition de non parallélisme est assurée si $\varepsilon \in E_{np} = \bigcap_{i,j} E_{np,ij}$. \square

Remarque : Par construction, ces boules ouvertes de rayon ε sont incluses dans le domaine d'isotopie de l'arrangement.

Chapitre 3

Quelques aspects de la construction des arrangements de droites et de son implémentation

Résumé

Ce chapitre présente les aspects pratiques de la construction des arrangements de droites, tels que nous les avons implémentés.

Nous commençons par un rappel sur la géométrie projective, qui est le cadre le plus général de nos calculs, notamment le passage du calcul projectif au calcul euclidien, et la définition de la transformation de dualité que nous utilisons.

Nous détaillons ensuite les structures de données (brins et sommets étoilés) et les primitives que nous avons utilisées pour notre implémentation. Nous passons ensuite à la description de deux algorithmes de construction. Le premier, incrémental, est l'algorithme canonique décrit dans la littérature, car il est démontré optimal. Nous en proposons un second, dit algorithme de construction par squelettes, qui effectue une construction globale et non incrémentale.

Nous comparons enfin ces deux algorithmes, et montrons l'efficacité du second, même s'il est théoriquement sous-optimal. Nous essayons en particulier d'analyser les raisons de cette divergence entre les coûts de calcul théorique et pratique, et nous tentons de tirer parti des particularités de l'algorithme global pour la conception d'un algorithme de calcul parallèle.

Sommaire

3.1	Géométrie projective : définitions et notations	55
	Notations	55
	Calculs	56
3.1.1	Points et droites à l’infini	56
3.1.2	Dualité : arrangements de droites et configurations de points	57
	Dualité dans le plan projectif	57
	Dualité polaire dans le plan euclidien	57
	Autres dualités	58
3.2	Choix d’implémentation	58
3.2.1	Calcul géométrique	58
3.2.2	Structures : brins et sommets étoilés	59
	Définitions	59
	Implémentation	60
3.2.3	Opérateurs d’Euler	60
3.3	Construction effective d’un arrangement	61
3.3.1	Construction incrémentale	61
	Algorithme en pseudo-code	61
	Analyse	62
3.3.2	Construction globale ou par squelette	62
	Algorithme de construction par squelette	64
	Analyse	65
	Généralisation en dimension 3	65
3.4	Comparaisons	67
3.4.1	Coûts de calcul	67
3.4.2	Optimisation et accès aux données	67
3.4.3	Parallélisation	69

3.1 Géométrie projective : définitions et notations

Dans la suite, nous nous placerons tantôt dans l'espace (le plan) projectif, tantôt dans l'espace (le plan) euclidien, selon les opérations ou transformations géométriques à effectuer. Nous allons donc définir une représentation du plan projectif effective, qui permette aisément le passage en euclidien.

Notations

Par commodité, nous noterons par \mathcal{M} (cursif) les objets de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , par \mathbf{M} (gras) les objets du plan projectif \mathbb{P}^2 , et par M les objets du plan euclidien \mathbb{R}^2 .

Le plan projectif \mathbb{P}^2 est formellement défini comme l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^3 , autrement dit comme l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 quotienté par la relation d'équivalence $\mathcal{R} : x\mathcal{R}y$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda x = y$. Nous allons utiliser cette définition de \mathbb{P}^2 complétée d'une projection permettant de passer de \mathbb{R}^3 ou \mathbb{P}^2 à \mathbb{R}^2 . Nous utilisons ainsi les coordonnées homogènes : un triplet (α, β, γ) représente un point \mathbf{M} de \mathbb{P}^2 , en même temps qu'un vecteur \mathcal{M} de \mathbb{R}^3 .

D'autre part, nous choisissons dans \mathbb{R}^3 , rapporté à un repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un

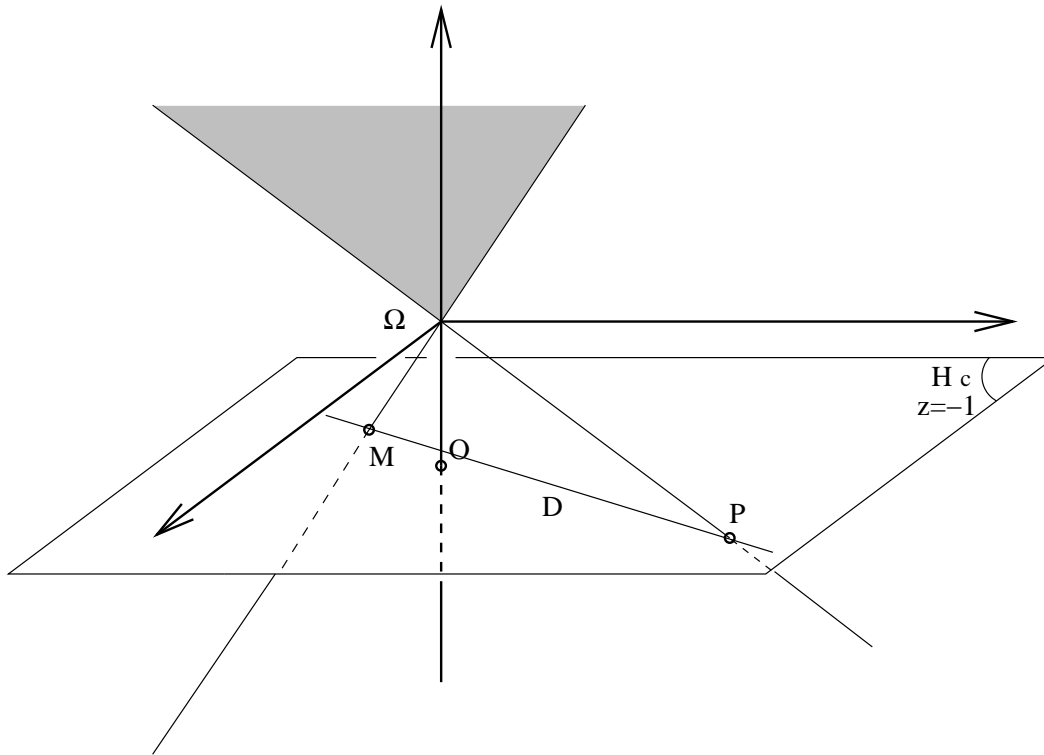


FIG. 3.1 – Représentation du plan projectif plongé dans \mathbb{R}^3 (proj. sur $z = -1$)

plan \mathcal{H} de projection, quelconque mais ne passant pas par l'origine, défini par $(f, g, h) \in \mathbb{R}^3$ tel que son équation soit $\mathcal{H} : fx + gy + hz + 1 = 0$.
Ce plan permet, par projection, d'obtenir pour tout point \mathbf{M} de \mathbb{P}^2 (ou \mathcal{M} de \mathbb{R}^3) un représentant M dans \mathcal{H} , assimilé à \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow & \mathbb{P}^2 &\longrightarrow H \\ \mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma) &\longmapsto & \mathbf{M}(\alpha, \beta, \gamma) &\longmapsto M = (\mathcal{OM}) \cap \mathcal{H} \end{aligned}$$

Si on ne le précise pas autrement, on prend pour \mathcal{H} le plan canonique \mathcal{H}_c de \mathbb{R}^3 défini par $z = -1$, autrement dit $(f_c = 0, g_c = 0, h_c = 1)$.

Calculs

Ainsi, en coordonnées homogènes, on définit :

- un point $\mathbf{M}(\alpha, \beta, \gamma)$ de \mathbb{P}^2 par la droite (\mathcal{OM}) de \mathbb{R}^3 dont il est issu, pour laquelle (α, β, γ) sont les coordonnées du vecteur directeur $\overrightarrow{\mathcal{OM}}$.
- une droite $\mathbf{D}(a, b, c)$ de \mathbb{P}^2 par le plan de \mathbb{R}^3 dont elle est issue, pour lequel (a, b, c) sont les coordonnées d'un vecteur normal.

d'où

$$\mathbf{M}(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{D}(a, b, c) \iff \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$$

- l'intersection de deux droites $\mathbf{D}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{D}_2(a_2, b_2, c_2)$ de \mathbb{P}^2 est le point $\mathbf{M}(\alpha, \beta, \gamma)$ tel que

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ a_2 c_1 - a_1 c_2 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

- réciproquement, la droite passant par deux points $\mathbf{M}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\mathbf{M}_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ est $\mathbf{D}(a, b, c)$ telle que :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 \\ \alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2 \\ \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \end{pmatrix}$$

Ces calculs ne dépendent pas du plan \mathcal{H} de projection : ils sont "intrinsèquement projectifs".

3.1.1 Points et droites à l'infini

Nous avons vu chapitre 1 que le problème des points et droites "à l'infini" ne se pose que dans le plan euclidien, ou plus exactement, quand on cherche à donner une représentation euclidienne du plan projectif; dans le plan projectif, aucune

droite ni aucun point n'est distingué des autres.

Dans la représentation que nous avons choisie, la droite “à l'infini” dans \mathbb{R}^2 est issue du plan \mathcal{H} , passant par \mathcal{O} parallèle à H (donc du plan horizontal $z = 0$ si $H = H_c$), et tout point (de \mathbb{P}^2) issu d'une droite (de \mathbb{R}^3) contenue dans ce plan \mathcal{H} , est également projeté “à l'infini”.

Le grand avantage de cette représentation est que nous pouvons modifier (éventuellement continûment) le choix des éléments à l'infini, en changeant (continûment) le plan de projection \mathcal{H} , sans modifier les calculs intrinsèquement projectifs.

3.1.2 Dualité : arrangements de droites et configurations de points

En toute rigueur, la dualité est définie dans l'espace projectif. Dans \mathbb{P}^n , elle transforme tout objet de dimension d en objet de dimension $n-d-1$; par exemple dans \mathbb{P}^2 , les droites sont transformées en points, et réciproquement. De plus les relations d'incidence sont conservées par dualité ; en conséquence, les relations d'inclusion et d'appartenance sont inversées : dans \mathbb{P}^2 , si $\mathbf{p} \in \mathbf{D}$ alors $\hat{\mathbf{D}} \in \hat{\mathbf{p}}$ dans l'espace dual.

Dualité dans le plan projectif

L'utilisation des coordonnées homogènes du plan projectif permet de définir la relation de dualité entre droite et plan de façon triviale : un point \mathbf{p} est défini par un triplet (α, β, γ) , et une droite \mathbf{D} par un autre triplet (a, b, c) , qui définit l'équation de la droite : $ax + by + cz = 0$.

Ainsi, la dualité entre plan et droite se résume en une interprétation différente du même triplet : $\mathbf{p}(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \hat{\mathbf{p}}(\alpha, \beta, \gamma)$, la droite d'équation $x.\alpha + y.\beta + z.\gamma = 0$

Dualité polaire dans le plan euclidien

Ce que nous avons appelé chapitre 2 *espace des paramètres* de D_i cache en réalité un espace dual.

Dans le plan euclidien, on dérive la dualité du plan projectif, en normalisant les coordonnées homogènes pour les transformer en coordonnées euclidiennes. Pour cela, on a besoin de la relation liant les coordonnées homogènes, *i.e.* de l'équation du plan de projection $hx + ky + lz + m = 0$. On choisit généralement comme dualité euclidienne celle qui se rapproche le plus de la dualité projective, à savoir la *dualité polaire*

$$Dual_p : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}_*^2, \text{ droite d'équation } ax + by + 1 = 0 \longmapsto (a, b)$$

Avec en particulier la (simple) propriété suivante.

Propriété 12 (Distances à l'origine). *Si $D(ax + by + 1 = 0)$ a pour dual $P(a, b)$, alors*

$$d(D, O) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{d(P, O)}$$

Preuve :

$N = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est le vecteur normal à D . Soit $H = \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix}$ le projeté de O sur D . $H \in \lambda N \cap D$ se résume en un système : $x_H = \lambda a$, $y_H = \lambda b$, $ax_H + by_H + 1 = 0$, soit $\lambda(a^2 + b^2) = -1$. D'où :

$$\|\overrightarrow{OH}\| = |\lambda| \|N\| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

□

Autres dualités

Nous pouvons trouver dans le plan euclidien d'autres définitions de la dualité, par ex. la dualité 2 utilisée par [12], $Dual_2 : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}_*^2$, droite d'équation $ax + by = 1 \longmapsto \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2}\right)$

Cette dernière effectue une homothétie sur les points duaux, de sorte que toute droite passe par son point dual. Mais cette propriété n'est pas particulièrement intéressante pour nos applications, et complique les calculs.

3.2 Choix d'implémentation

Toute la difficulté des implémentations en géométrie algorithmique consiste en la gestion simultanée de l'information et des calculs géométriques (intersections, test d'orientation) d'une part, et de l'information et des algorithmes topologiques (incidence, adjacence) d'autre part.

Nous devons adopter des conventions de calcul et des structures de données qui soient suffisamment robustes, aisément extensibles et adaptées à la combinatoire des arrangements.

3.2.1 Calcul géométrique

Nous avons choisi d'utiliser autant que possible le cadre projectif pour nos calculs, avec la possibilité de passer à la représentation euclidienne à tout moment, par le choix d'un plan de projection \mathcal{H} , comme décrit précédemment. Pour cela,

nous avons privilégié la programmation objet, généralement bien adaptée aux objets géométriques, et permettant ici le maximum d’opérations communes entre les objets euclidiens et les objets projectifs. Nous avons utilisé le langage C++ pour la majorité de notre code. Les fonctions de calcul projectif, et de projection dans le plan euclidien sont l’adaptation directe des formules données en 3.1.

3.2.2 Structures : brins et sommets étoilés

Pour les structures combinatoires, on trouve dans la littérature de nombreuses propositions, des plus informatiques (proches de la machine), aux plus abstraites (proches des concepts mathématiques). On peut citer les arêtes ailées, ou DCEL, [10] pour les structures 2d, et pour des structures en dimension quelconque les cartes généralisées, ou n - G -maps, [25, 26, 27], et les *cell-tuples* de [6].

Ayant à traiter des objets aussi particuliers que des arrangements de droites, nous avons choisi un compromis entre la plus grande généralité que fournissent les cartes et une solution ne convenant qu’aux arrangements.

Définitions

Nous avons emprunté aux cartes la notion de *brins*, ou demi-arêtes, qui constituent les atomes de notre structure de données. Ainsi (figure 3.2), l’arête a_1 qui relie les sommets s_1 et s_2 est constituée de deux brins : b_1 , rattaché à s_1 et “allant vers” s_2 , et b_5 , rattaché à s_2 et allant vers s_1 . Ces deux brins b_1 et b_5 sont “connectés” par une relation de pseudo-adjacence.

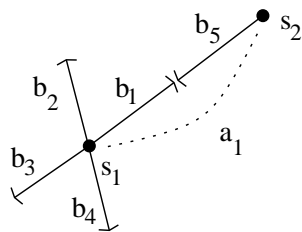


FIG. 3.2 – Sommet étoilé constitué de brins

Afin de constituer une structure globale, les brins ainsi définis ne sont pas isolés, mais sont groupés, autour de sommets, en une structure que nous appellerons “sommets étoilés de brins”. Autour de chaque sommet, un sens de rotation étant défini (le même sens positif pour tous dans le plan euclidien ; dans le plan projectif, un sens fixé arbitrairement), chaque brin peut être associé à trois (ou quatre) autres :

- son successeur, *succ* par rotation autour du sommet de rattachement (p. ex. $b_2 = succ(b_1)$)

- son prédécesseur, **pred** ($b_4 = prec(b_1)$)
- l’autre brin constituant la même arête, **swap** ($b_5 = swap(b_1)$)
- éventuellement, le brin rattaché au même sommet, aligné avec le premier, mais constituant une autre arête, **trans** ($b_3 = trans(b_1)$).

Nous avons défini ainsi quatre opérateurs, correspondant respectivement à la rotation dans les deux sens autour d’un sommet (**succ**, **pred**), au basculement de sommet incident à une arête donnée (**swap**), et à la traversée rectiligne d’un sommet (**trans**). Notons que ce dernier opérateur est toujours défini dans le cas d’un arrangement de droites, mais pas dans le cas d’un complexe cellulaire général, comme une triangulation quelconque.

Remarque : Cette structure permet aussi bien de représenter des arrangements dégénérés (auquel cas, plus de 4 brins sont rattachés à un sommet), ou même tout complexe cellulaire 2d : il suffit dans ce cas d’ignorer **trans**.

Les brins permettent de représenter à la fois les arrangements euclidiens, comportant des arêtes non bornées, et les arrangements projectifs, où les demi-arêtes se rejoignent “à l’infini”.

Implémentation

Informatiquement parlant, notre structure est en fait représentée par une liste de brins, chacun contenant quatre pointeurs (ou plus exactement quatre itérateurs de liste, en C++) vers d’autres brins, représentant les opérateurs **succ**, **pred**, **swap** et **trans**.

3.2.3 Opérateurs d’Euler

Les opérateurs d’Euler correspondent aux primitives de gestion de la structure de données permettant l’évolution de notre objet géométrique : insertion de sommets sur une arête existante, ajout d’une arête entre deux sommets, etc. Ces deux opérateurs suffisent pour construire la structure d’un complexe cellulaire 2d quelconque. Néanmoins, dans le cas des arrangements de droites, toute structure n’est pas possible, et pour assurer à tout moment la cohérence de la structure construite avec un modèle d’arrangement de droites, nous pouvons définir des opérateurs de plus haut niveau.

3.3 Construction effective d'un arrangement

Dans toute la suite du chapitre, nous supposons donné un ensemble \mathcal{D} de n droites, sous forme de leur paramétrisation canonique $a_i x + b_i y + 1 = 0$, et nous cherchons à construire l'arrangement combinatoire $\mathcal{A}(\mathcal{D})$, du graphe d'incidence, et des structures de données que nous venons de définir.

En effet, les deux algorithmes que nous proposons utilisent différemment les structures de brins, et nous avons choisi d'imposer comme sortie commune le graphe d'incidence construit explicitement, afin de pouvoir comparer les deux implémentations.

3.3.1 Construction incrémentale

L'algorithme classique dans la littérature pour la construction d'un arrangement de droites est la méthode incrémentale de suivi de zone.

L'idée en est simple : partant d'un arrangement construit de n droites, on ajoute une $(n + 1)^{\text{e}}$ droite. Sa zone, d'après le théorème du même nom, section 1.4.2 est en $O(n)$, donc on aura un algorithme optimal si l'on peut mettre à jour réellement les incidences de cette zone en $O(n)$. L'algorithme de construction incrémentale, tel que décrit dans [13, chap. 7] réalise cela. En voici une adaptation, plus proche de ce que nous avons réellement implémenté :

Algorithme en pseudo-code

```
# Saisie droites
  Pour i=1 a n lire droite D_i

# Initialisation
  Calcule nombre de sommets, faces, cellules
  Mise a zero des sommets, faces, cellules
  Construit l'arrangement (D_1, D_2)

# Boucle principale
  Pour i=3 a n

    Pour j=1 a (i-1)
      Calcule S_i,j = Intersection(D_i, D_j)
      Extraire D_m minimisant param(S_i,j)
    FinPour j
```

```

# Calcul de la zone
Parcourir les aretes Ac de D_m jusqu'a Intersecte(D_i, Ac)
  Repeter
    Cc := cellule bordee par Ac, != Cp #(cellule precedente)
    Parcourir les aretes A'c bordant Cc
      jusqu'a (Intersecte(D_i,A'c) OU A'c == Ac)
    Si A'c==Ac SortieRepeter
    Ac := A'c
  FinRepeter

# Mise a jour du graphe
Dedoubler les cellules de la zone (aretes, cellules)
(en preservant les incidences internes)

Ajouter les sommets, aretes portes par D_i

Mettre a jour les incidences entre
  -les cellules de D_i et les anciennes cellules de la zone
  -les cellules de D_i et les cellules doubles de la zone

FinPour i
Fin

```

Analyse

L'action de l'algorithme est illustrée par la figure 3.3, pour les 3 étapes clés : initiale, parcours de zone, création des nouvelles cellules. Ici pour le passage de 3 à 4 droites, dans le plan euclidien.

Cet algorithme, de coût théorique optimal $O(n^2)$, étant bien décrit dans la littérature [13], nous ne le détaillerons pas plus avant.

3.3.2 Construction globale ou par squelette

Nous étudions ici un autre algorithme de construction d'un arrangement, avec une vision différente du problème : d'une part, il effectue la construction "globalement" et non plus de façon incrémentale ; d'autre part, nous nous efforçons de découpler les opérations de calcul de l'exploration topologique.

Pour y parvenir, nous procédons par récurrence sur la dimension :

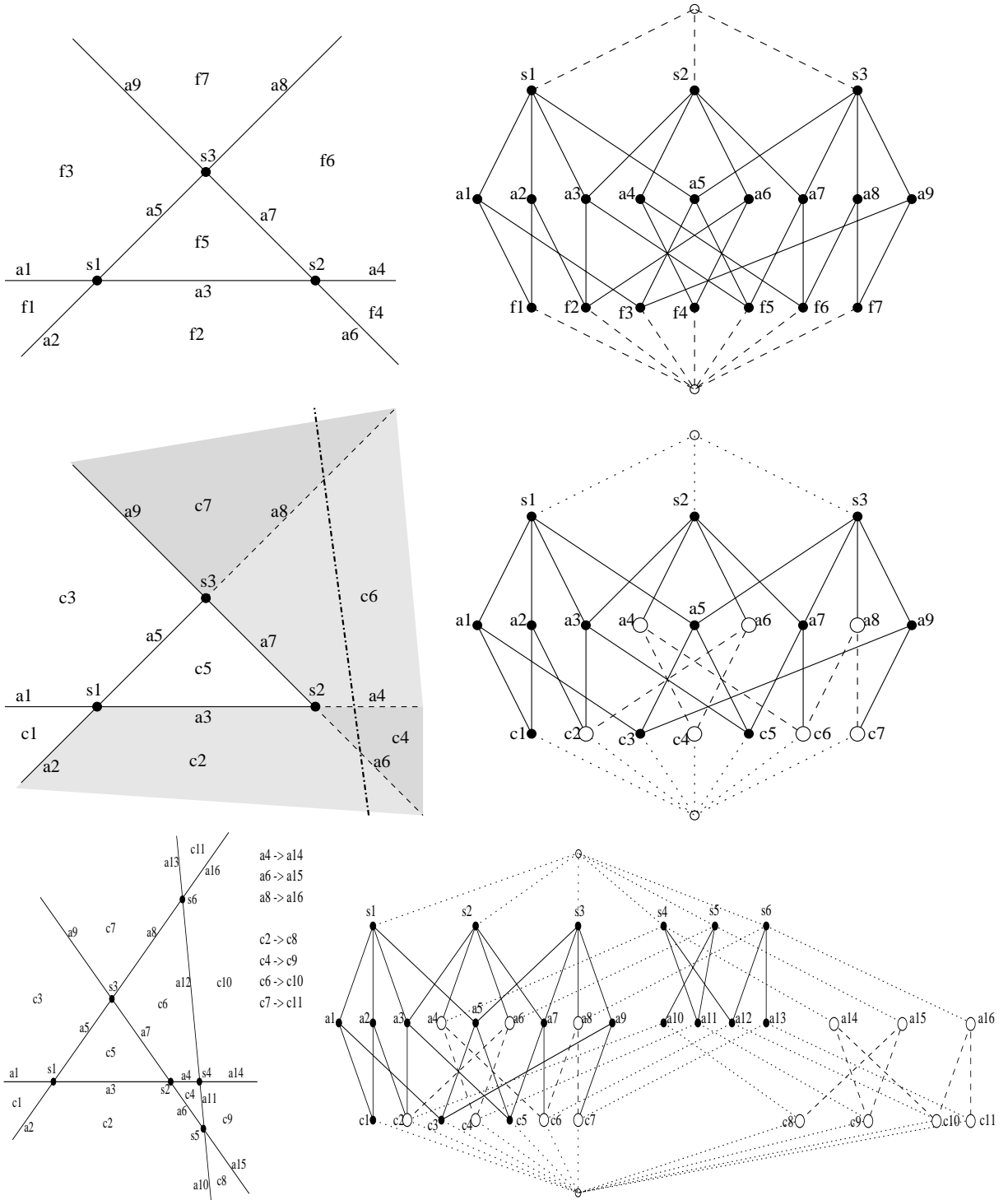


FIG. 3.3 – Construction incrémentale de l'arrangement : étapes 1,2,3

Définition 18. On appelle d -squelette de l'arrangement l'ensemble des k -cellules de l'arrangement, avec $0 \leq k \leq d$, et leurs relations d'incidence.

et on construit successivement les squelettes de niveau 0 (sommets intersections), 1 (arêtes-sommets) et 2 (faces-arêtes).

Algorithme de construction par squelette

Voici une présentation sommaire de l'algorithme utilisé :

```
# Saisie droites
  Pour i=1 a n lire droite D_i

# Initialisation
  Calcule nombre de sommets, faces, cellules
  Mise a zero des sommets, faces, cellules

# Calcule intersections :  $O(n^2)$ 
  Pour i=1 à n
    Pour j=1 à (i-1)
      Calcule  $S_{i,j} = \text{Intersection}(D_i, D_j)$ 
    FinPour j
  FinPour i

# Tri des sommets sur chaque droite :  $O(n^2 \log n)$ 
  Pour i=1 à n
    TriRapide (Sommets de  $D_i$ )
  FinPour i

# Construction du 1-squelette :  $O(n^2)$ 
  Pour i=1 à n
    Construction des incidences sommets-aretes sur  $D_i$   $\#(O(n))$ 
  FinPour i

# Construction du 2-squelette :  $O(n^2)$ 
  Pour chaque arete non marquee  $\#(O(n^2))$ 
    -Construire la cellule de gauche; marquer les aretes du bord  $\#(O(1))$ 
    -Construire la cellule de droite; marquer les aretes du bord
  FinPour (arete)

Fin
```

Analyse

On calcule tout d’abord les intersections des droites, qui constituent les sommets (*i.e.* le 0-squelette). Pour cela, on utilise une représentation (intermédiaire) paramétrique euclidienne des droites, qui permet d’obtenir, outre les coordonnées des sommets, un paramètre “abscisse rectiligne” de chacun des sommets sur chacune des droites qui le porte.

Cette étape a naturellement un coût en $O(n^2)$.

On utilise ces abscisses dans la construction du 1-squelette, c’est-à-dire la définition (numérotation) des arêtes à partir des sommets. L’algorithme repose sur un tri, qui ordonne les sommets sur chaque droite, selon leur abscisse rectiligne. Les arêtes sont naturellement définies par deux sommets consécutifs après tri. Notre implémentation utilise un tri rapide (*quicksort*) qui est en moyenne optimal pour un tri, pour un coût de $O(n \log n)$. Pour tout l’arrangement (n droites), cette étape est donc en $O(n^2 \log n)$.

Enfin, pour retrouver les faces à partir des arêtes (2-squelette), on parcourt les arêtes non marquées. Chacune doit délimiter 2 faces : droite et gauche. En chaque sommet, la structure de sommet étoilé permet de repartir par l’arête (le brin) qui tourne dans le sens choisi : direct ou inverse, ce qui permet de construire les 2 faces, gauche et droite. En fin d’exécution, chaque arête est marquée 2 fois.

Chaque opération élémentaire de l’étape correspond au marquage d’une arête. On effectue donc $O(n^2)$ opérations élémentaires, ce qui donne le coût de l’étape.

En définitive, nous avons un algorithme en $O(n^2 \log n)$, ce qui est évidemment moins bon que l’algorithme incrémental, avec une étape limitante constitué d’un tri (rapide), en $n \times (n \log n)$. Mais nous allons voir qu’en pratique les résultats sont bien plus serrés.

Généralisation en dimension 3

Nous avons également étendu cet algorithme pour des arrangements de plans dans l’espace 3d (euclidien seulement). Bien entendu le coût augmente en conséquence : la génération du 0-squelette passe en $O(n^3)$, et celle du 1-squelette en $O(n^3 \log n)$. Mais, hormis que les droites passent en nombre $O(n^2)$, les étapes 0, 1, 2 ne changent pas. L’élaboration du 3-squelette est un peu plus complexe : elle nécessite de trouver les 3-cellules (volumiques) à partir des faces reconnues dans l’étape précédente. Elle repose sur une file des faces à traiter et un test d’orientation dans l’espace. Nous n’avons pas traité le cas projectif.

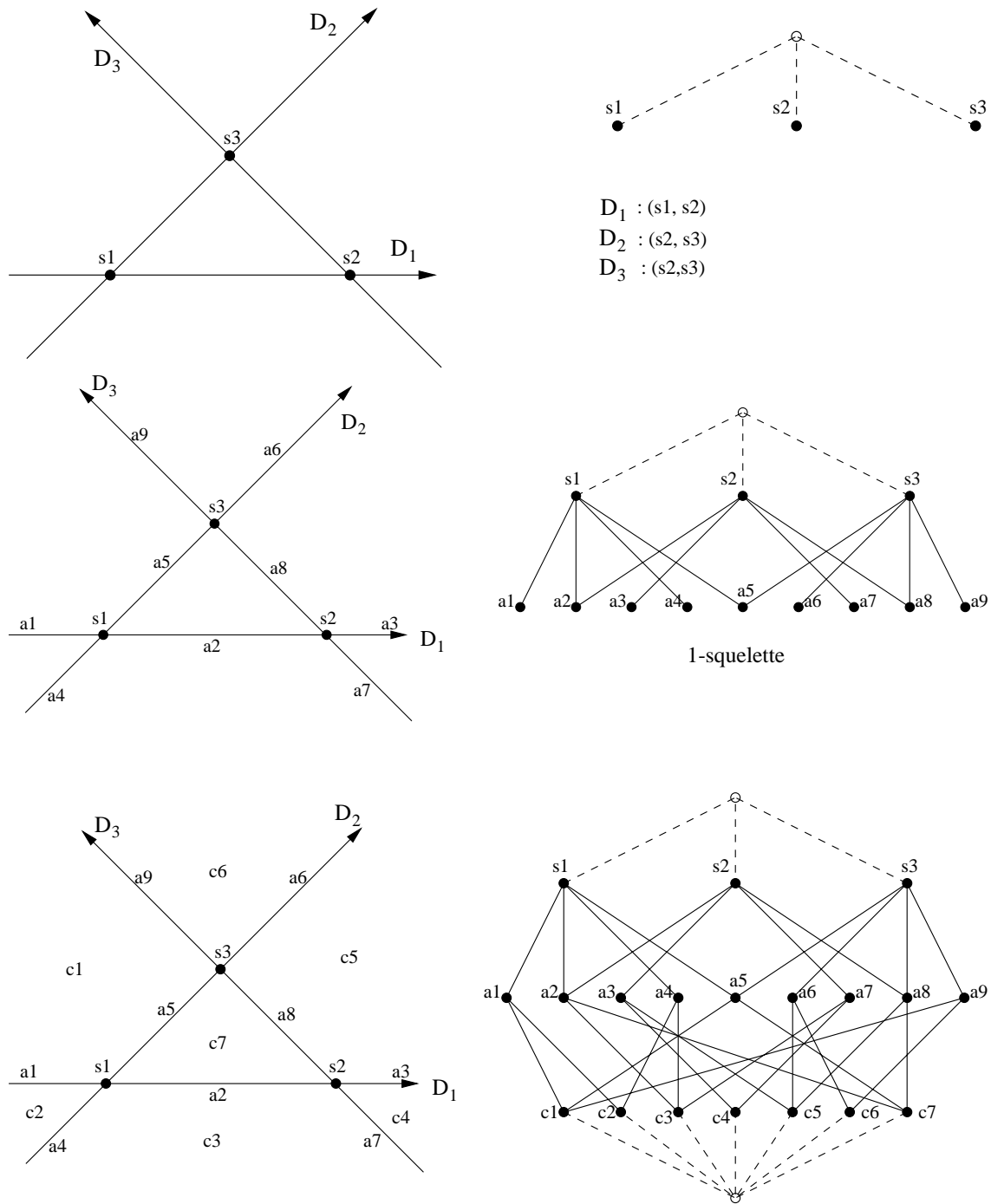


FIG. 3.4 – Construction par squelette d'un arrangement 2d : étapes 0, 1 et 2

3.4 Comparaisons

3.4.1 Coûts de calcul

La figure 3.5 représente les temps de calcul en secondes des 2 algorithmes de construction de l'arrangement en fonction du nombre de droites. Pour la construction globale par squelette, en plus du temps total, on a fait figurer les durées de toutes les étapes intermédiaires ; le graphique indique les durées cumulées. Les mesures ont été faites sur un PC sous Linux, équipé d'un processeur Pentium II à 233 MHz. Nous nous sommes bornés à un millier de droites, car c'est environ à ce niveau que la mémoire utilisée pour construire le graphe d'incidence, quadratique, atteint la limite physique de la RAM. Ces courbes de temps de calcul se révèlent assez surprenantes, par plusieurs aspects, que nous allons détailler, et que nous allons essayer d'expliquer.

En premier lieu, nous constatons que l'algorithme par squelettes, théoriquement en $O(n^2 \log n)$ se révèle en pratique légèrement plus efficace que l'algorithme incrémental, en $O(n^2)$. En particulier, rappelons que pour l'algorithme par squelette, aisément découpable en étapes, l'étape pénalisante est le tri (*quicksort*), en $O(n^2 \log n)$, alors que les autres étapes sont en $O(n^2)$. Or nous constatons qu'en pratique, le tri ne représente qu'environ 10% à 12% du temps total de calcul, du moins jusqu'à 1000 droites. Et c'est l'étape quadratique finale de construction des faces qui est la plus coûteuse en temps de calcul.

D'autre part, nous constatons une surprenante régularité dans la courbe de l'algorithme par squelette (pourtant bien expérimentale), avec une croissance presque parfaitement quadratique, alors que la courbe de l'algorithme incrémental, bien que strictement croissante, est plus "accidentée", moins lisse.

3.4.2 Optimisation et accès aux données

Bien sûr, il est toujours difficile de comparer des implémentations réelles d'algorithmes pour en déduire une supériorité de l'un sur l'autre. En particulier, même si nous avons essayé d'optimiser les deux implémentations en termes de calculs et d'accès aux données, nous devons signaler que l'algorithme de reconstruction globale par squelettes, est plus simple à programmer et, partant, plus simple à optimiser. En effet, le découpage en étapes intermédiaires parfaitement cadrées permet pendant la programmation une vision globale de la tâche à effectuer, et des étapes critiques en temps d'exécution. Dans le cas de l'algorithme incrémental, la complexité de chaque itération est bien plus grande, et ne permet pas vraiment une optimisation aussi poussée.

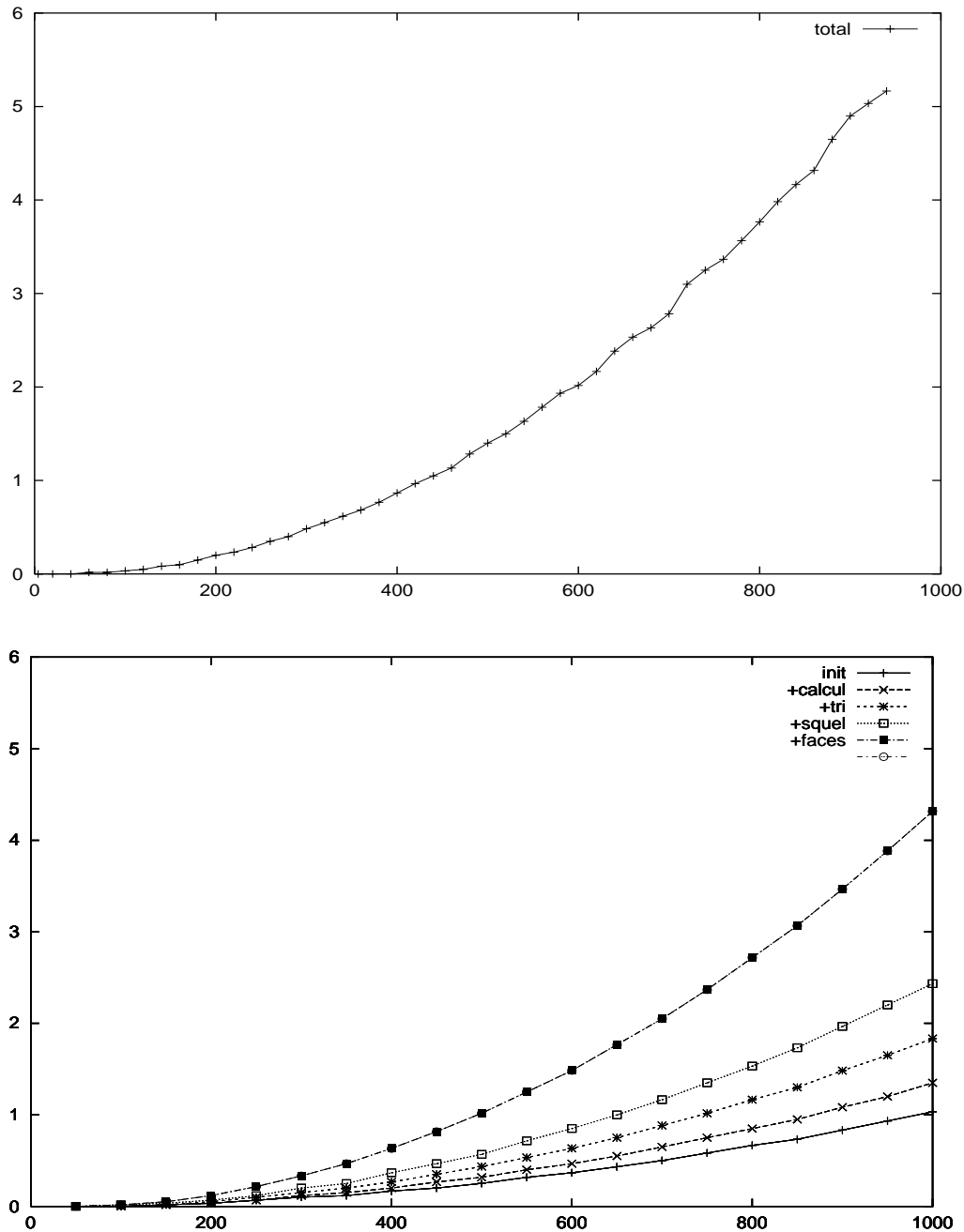


FIG. 3.5 – Temps d'exécution des algorithmes **incrémental** (en haut) et par **squelettes** (en bas, temps cumulés par étapes) en fonction du nombre de droites

D'autre part, une raison plus fondamentale de l'efficacité pratique de l'algorithme global est sans doute due à l'architecture des ordinateurs actuels : même si l'ensemble des données combinatoires permettant de construire l'arrangement occupe une place mémoire en n^2 , les deux algorithmes parcourent la mémoire différemment, et l'algorithme par squelettes tire parti d'une certaine "localité" des structures en mémoire, et donc probablement des systèmes de cache équipant le

processeur.

En effet, l'algorithme incrémental classique effectue à chaque itération un parcours de zone, en $O(n)$ itérations, ce qui démontre justement son optimalité théorique. Mais le mécanisme de construction des nouvelles faces, par dédoublement des faces traversées, implique que très vite les $O(n)$ structures de données (brins ou arêtes) composant cette zone sont "dispersées" parmi les $O(n^2)$ cases mémoires utilisées au total. Au contraire, l'algorithme de construction par squelette, plus rudimentaire, travaille sur des données "locales" pour toutes ses étapes, sauf la dernière. En effet, sa conception assure qu'il crée et stocke consécutivement les cellules (sommets et arêtes) issues de la même droite, au cours des premières étapes : initialisation, calcul et tri, construction du 1-squelette (arêtes). La dernière étape, la construction des faces, est la seule à accéder à des données potentiellement "dispersées" en mémoire. En particulier, remarquons que le tri, étape en $O(n^2 \log n)$, s'effectue en pratique sous la forme de n tris indépendants, portant chacun sur un tableau d'abscisses rectilignes de points, de taille $n - 1$.

Ainsi, nous pensons que la raison principale de l'efficacité pratique de l'algorithme par squelettes est qu'il utilise au mieux le cache du processeur, de l'ordre de 256 Ko sur le Pentium Intel utilisé, ce qui permet parfaitement de stocker entièrement les données en cours d'accès, jusqu'au millier de droites que nous avons utilisé. Il est également probable que sa simplicité à programmer, et donc à optimiser, joue en sa faveur.

Il est possible que pour des très grands nombres de droites (10000, ou plus), l'algorithme incrémental reprenne le dessus en pratique, mais nous n'avons pas pu mener ces expérimentations, et le cas que nous rencontrons n'est pas exceptionnel : les algorithmes "optimaux" sont souvent surpassés par des algorithmes plus rudimentaires avec des entrées "raisonnables".

3.4.3 Parallélisation

Un deuxième point à l'avantage de l'algorithme par squelette est qu'il est très facilement parallélisable, jusqu'à n processeurs, c'est-à-dire autant de processeurs que de droites. En effet, la "localité" des structures de données, dont nous venons de parler, permet de distribuer les droites indépendamment sur les processeurs, pour toutes les étapes initiales, jusqu'à la construction du squelette. Mais ici, même la dernière étape est parallélisable, puisque la recherche des faces encore non identifiées ne dépend pas du tout de la liste des faces identifiées. Nous n'avons pas utilisé cette possibilité en pratique, mais il fait peu de doute qu'elle soit réalisable. Cet aspect n'a toutefois pas été explicitement pris en compte lors de la conception de l'algorithme par squelette, et demanderait sans doute quelques adaptations mineures pour une implémentation directe.

En revanche, la parallélisation de l'algorithme incrémental paraît extrêmement difficile, si ce n'est impossible, par sa nature essentiellement itérative : puisque à une étape donnée de la construction, l'ensemble des structures construites précédemment peut être parcourue, chaque itération est trop dépendante des précédentes pour espérer un gain d'une parallélisation.

Deuxième partie

Représentation géométrique des arrangements et Optimisation

Introduction à la deuxième partie et état de l’art

Cette seconde partie s’intéresse au problème de la “meilleure” représentation (dans un sens encore à définir) d’un arrangement de droites. De nombreux travaux se sont intéressés à ce sujet, mais plutôt dans le domaine des dessins de graphes, c’est-à-dire que peu d’efforts ont porté sur la conservation de la notion d’arrangements de droites. Le problème étant toujours de trouver un compromis entre la fidélité aux caractéristiques de l’arrangement lui-même, et le souci de simplification afin d’apporter au “lecteur” le maximum d’informations pertinentes pour une vue d’ensemble de l’arrangement, la plupart des solutions proposées transforment l’arrangement de droites en une autre structure géométrique ou combinatoire, en général visuelle, mais dans le contexte de la conservation des arrangements de droites, les résultats sont peu nombreux, voire décevants.

Les réponses apportées commencent avec les *wiring diagrams* présentés dans [17, chap. 5], développés pour l’étude des arrangements de *pseudo-lines*. Cette représentation résulte du choix de ne conserver d’un arrangement que la combinatoire, et plus précisément la consécutive des intersections. Dans le cas des arrangements de vraies droites, elle sacrifie l’aspect rectiligne de nos objets, en contrepartie de la remise en perspective du sujet dans le cadre plus général des *pseudo-lines*. L’un de ses défauts est qu’elle privilégie une direction horizontale, ou de façon équivalente nécessite le choix d’une direction de balayage, et aboutit à des *wiring diagrams* différents pour un même arrangement, selon ce choix (fig. 3.6).

D’autres approches se sont penchées sur la possibilité de représentations partielles d’un arrangement, comme les polygones inducteurs et les chemins inducteurs évoqués dans [28]. Un polygone inducteur est un polygone ayant autant de côtés que le nombre de droites de l’arrangement qu’il résume, droites obtenues par prolongement de ses côtés. Figure 3.6, est représenté un polygone inducteur (*CBDE*) de l’arrangement de 4 droites. Outre le fait que l’existence d’un polygone inducteur n’est pas établie pour tout arrangement, cette représentation partielle ne permet pas de visualiser toute la combinatoire d’un arrangement.

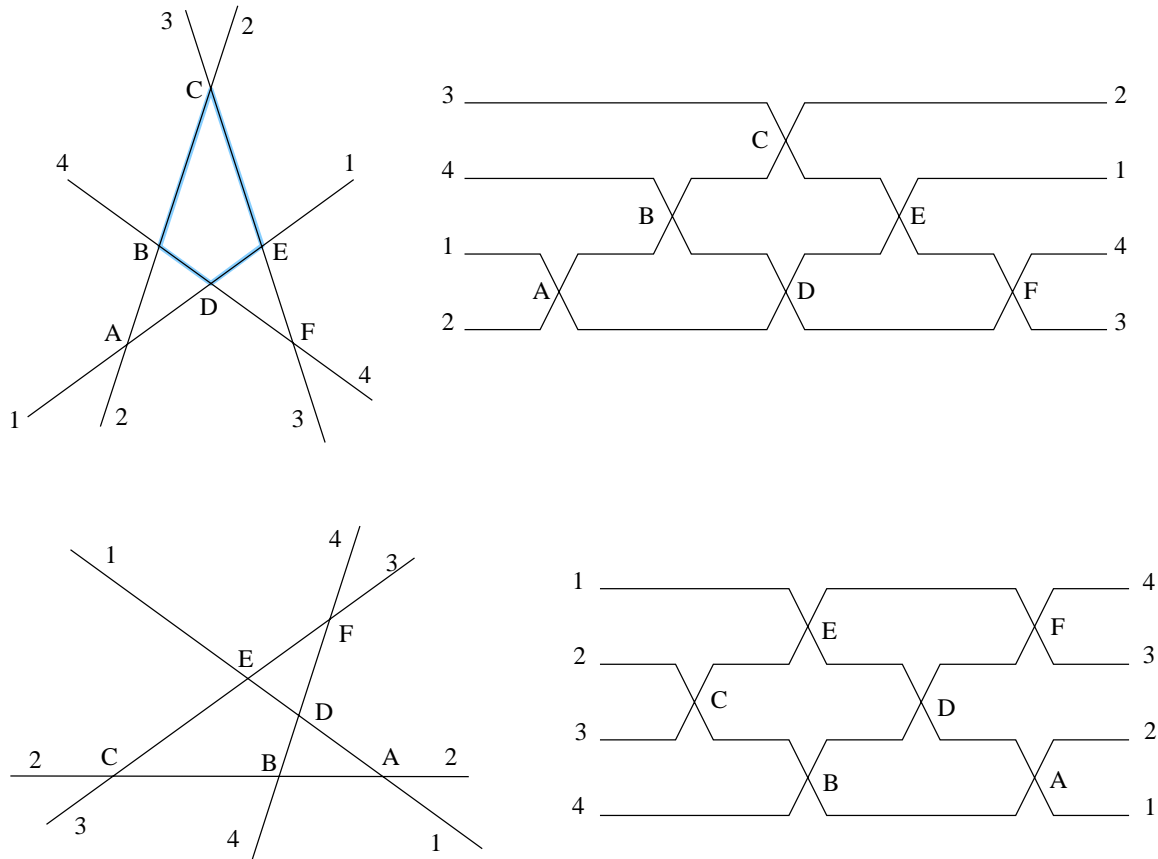


FIG. 3.6 – Deux représentations du même arrangement, générant des *wiring diagrams* différents

D'autres encore ont privilégié la simplification "destructive" des arrangements eux-mêmes [12], au prix de la perte de certaines droites, sélectionnées comme moins représentatives. Mais cette simplification, même si elle peut être utile à des applications très particulières, n'entre pas dans notre propos, puisque nous désirons avant tout conserver la combinatoire de départ.

On peut encore citer deux logiciels permettant de visualiser les arrangements, *HypArr* [35] permettant de visualiser des arrangements d'hyperplans, projetés en 3D, dans le cadre de la thèse de Nora Sleumer [34], et, plus proche de nos préoccupations, *ArrangePak*, [37], qui permet dans une certaine mesure d'optimiser à la main la représentation de certains arrangements.

Pour notre part, nous avons choisi de conserver l'aspect classique des arrangements de droites, mais d'en optimiser le dessin. Le problème qui nous intéresse se partage alors en deux étapes.

En premier lieu, partant d'un arrangement projectif de droites, nous devons déterminer la projection euclidienne qui le représente le mieux, ce qui ne peut se faire que sur des critères combinatoires. Ce sera l'objet du court chapitre 4.

En second lieu, nous nous intéressons à un arrangement euclidien, qu'il nous soit donné tel quel, ou qu'il résulte de la transformation décrite précédemment. Nous définissons alors des critères qui permettent d'évaluer la clarté de sa représentation géométrique, et nous cherchons, pour un arrangement de combinatoire donnée, à optimiser ces critères, en liaison avec les contraintes géométriques qu'ils font apparaître. Cette étude, théorique et algorithmique, fera l'objet du chapitre 5.

Enfin, le chapitre 6 constitue une étude systématique des cas particuliers qui se sont révélés à notre problème : arrangements pour 3 à 5 droites, et critères optimaux correspondant, et diverses classes d'arrangements particuliers, comme les arrangements démontables...

Chapitre 4

De l'arrangement projectif à sa représentation euclidienne

Résumé

Dans ce chapitre, nous évoquons la représentation euclidienne d'un arrangement projectif. Si les règles géométriques de "projection", vues chapitre précédent, ne posent pas de problème, nous montrons qu'il reste à faire un choix : celui du plan de projection, ou, de façon équivalente, de la droite "à l'infini", qui indique quelles faces projectives seront "découpées" (dans un sens que nous définirons) lors du passage en euclidien.

Le "meilleur" choix de cette droite à l'infini est un problème difficile, car il implique de reconnaître quelles sont les propriétés intéressantes de l'arrangement projectif (symétries, faces singulières...) qu'il faudrait conserver en euclidien. Toutefois, nous proposons quelques règles heuristiques à prendre en compte pour faire ce choix, puis nous terminons par une énumération des possibilités pour le cas à 6 droites, en soulignant les propriétés remarquables de chacun des 4 arrangements projectifs, et en exhibant, pour chacun, la meilleure représentation euclidienne.

Sommaire

4.1	Le choix de la représentation	79
4.2	Les critères de découpage	79
4.2.1	Droites et zones de découpage	80
4.2.2	Règles de découpage	81
4.2.3	Étude exhaustive avec 6 droites	82
	Les 4 types projectifs	82
	Retour sur le dénombrement des arrangements de 6 droites	84

4.1 Le choix de la représentation

Si nous préférons étudier certains arrangements dans le plan projectif, pour des raisons de simplicité de la combinatoire, nous ne pouvons pas en revanche visualiser directement l'espace projectif. Pour nous, qui vivons dans un espace (en première approximation) euclidien, tout ce que nous pouvons envisager est la projection dans un plan euclidien du plan projectif. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, cette opération dépend du choix du plan de projection, qui lui-même détermine le choix de la "droite à l'infini" dans le plan euclidien.

Combinatoirement, ce choix se traduit par des arrangements euclidiens différents (non équivalents) provenant d'un seul arrangement projectif. On a vu, section 1.4.3 que les 6 arrangements euclidiens simples de 5 droites (7 si on prend en compte l'orientation) correspondent à un seul arrangement projectif.

Réciproquement, si l'on dispose d'un arrangement projectif, on peut se demander quelle projection adopter pour le visualiser en euclidien, autrement dit que choisir comme droite à l'infini. L'exemple de la figure 4.1 est sans doute suffisamment parlant : (a) figure un arrangement projectif composé de 11 faces : une pentagonale, bordée d'une première couronne de 5 faces triangulaires, et d'une deuxième couronne de 5 faces quadrangulaires, ce qui constitue à l'évidence une symétrie par rotation, d'ordre 5. Nous avons figuré en divers pointillés 3 des choix possibles pour la droite "à l'infini", ainsi que l'arrangement euclidien obtenu si nous choisissons de "découper" selon telle droite (les flèches indiquent la relation).

À l'évidence, seul le premier découpage (b) conserve cette symétrie. Sa caractéristique est d'avoir conservé au "centre" de la représentation l'unique face pentagonale, alors que dans les autres représentations, cette face est rejetée plus près du "bord" de l'arrangement (d), ou carrément coupée par la droite à l'infini (c), ce qui fait disparaître la face pentagonale des faces bornées. Les représentations euclidiennes (c) et (d), ainsi que les 3 autres représentations visibles figure 1.9 rendent plus difficile la visualisation de la symétrie de l'arrangement projectif.

On peut maintenant se demander s'il est possible de déterminer automatiquement comment réaliser un tel découpage, qui respecte au maximum les particularités d'un arrangement.

4.2 Les critères de découpage

Étant donné que nous partons d'un arrangement projectif, le choix de la meilleure zone de découpage ne peut s'appuyer que sur des critères combinatoires, car le passage du projectif à l'euclidien fausserait tous les critères géométriques éventuellement retenus.

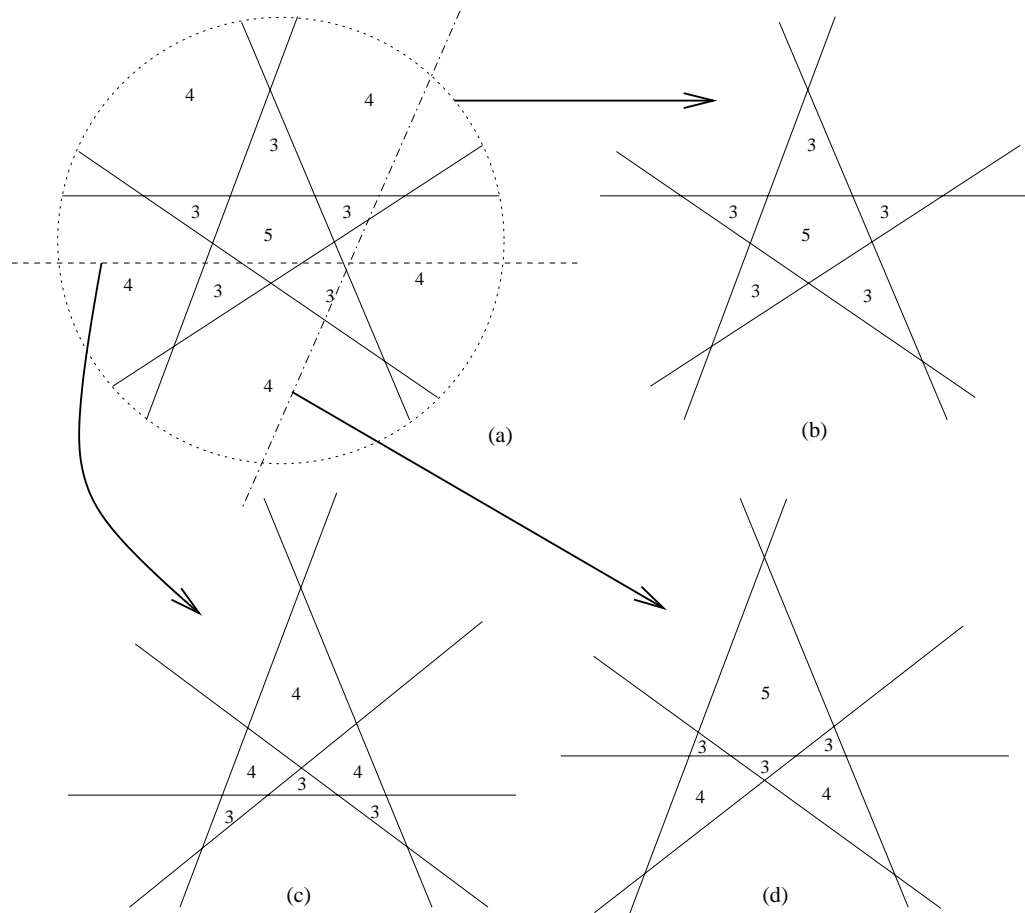


FIG. 4.1 – Les 3 arrangements euclidiens, non-équivalents, proviennent du “même” arrangement projectif, selon le choix de la “droite à l’infini” (en pointillés)

4.2.1 Droites et zones de découpage

Remarquons tout d’abord que le choix d’une droite à l’infini revient à introduire dans l’arrangement projectif \mathcal{A} donné, de n droites, une $(n + 1)^e$ droite (qui se retrouvera à l’infini). Appelons la *droite de découpage* Δ , et notons \mathcal{A}_Δ l’arrangement \mathcal{A} augmenté de cette droite de découpage. Alors la zone de Δ dans \mathcal{A}_Δ se retrouvera elle aussi “à l’infini”, à savoir que dans la représentation euclidienne, toutes les cellules de cette zone seront coupées et représentées en deux parties, comme sur la figure 4.1. C’est pourquoi cette zone sera appelée zone de découpage.

Notons que la zone de découpage traverse toujours n faces, qui seront appelées “faces découpées” ou “faces à l’infini”.

4.2.2 Règles de découpage

Cet exemple nous permet de lister quelques règles **heuristiques** pour déterminer cette zone de découpage. Ces règles porteront sur les faces (ou 2-cellules) contenues dans la zone, car ce sont elles qui portent le plus d'informations.

- les faces extra-ordinaires doivent être exclues de la zone de découpage. Dans l'exemple de la figure 4.1, la face extraordinaire est le pentagone, puisqu'elle est unique. Nous devons donc éviter de le couper. Il reste cependant plusieurs choix.
- de façon générale, les faces ayant le plus grand nombre de côtés sont les plus intéressantes, les faces triangulaires étant les plus communes.
- l'idée est alors de placer la ou les faces les plus intéressantes le plus près possible du "centre" de l'arrangement euclidien, et donc le plus loin possible des "bords". Cela revient à placer dans \mathcal{A} la droite de découpage Δ , non seulement en dehors des faces intéressantes, mais le plus loin possible de celles-ci.

En définitive, ces règles visent dans l'idéal à repérer de façon combinatoire les symétries de l'arrangement projectif, afin de les mettre en évidence dans la représentation euclidienne.

Visuellement, nous distinguons facilement les faces par leur nombre de côtés, inclus entre 3 et n . Nous pouvons en tirer une caractéristique de l'arrangement projectif :

Définition 19. Pour un arrangement, projectif ou euclidien, de n droites, nous notons p_k le nombre de faces à k côtés, $3 \leq k \leq n$, et p le $(n-2)$ -uplet (p_3, \dots, p_n) .

Toutefois, p ne caractérise pas complètement l'arrangement projectif, car à partir de $n \geq 7$, il existe des arrangements projectifs différents de même vecteur p , par exemple figure 4.2 d'après [19, p. 395].

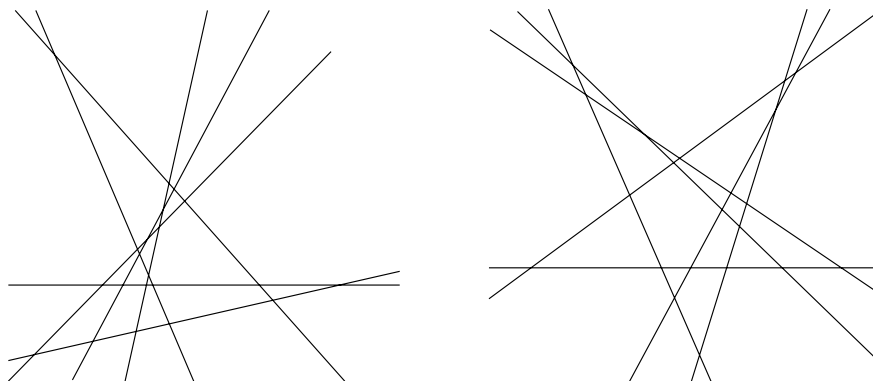


FIG. 4.2 – Deux arrangements projectifs de 7 droites avec $p = (7, 12, 3, 0, 0)$

4.2.3 Étude exhaustive avec 6 droites

Les 4 types projectifs

Nous venons d'illustrer nos principes grâce à l'arrangement projectif unique à 5 droites. Voyons ce qu'il en est avec 6 droites. Nous avons vu section 1.4.3 qu'il en existe quatre types, que nous noterons I, II, III, IV. Ici, ces types peuvent se caractériser par leur 4-uplet p : I (6,9,0,1) ; II (6,8,2,0) ; III (7,6,3,0) ; IV (10,0,6,0). La figure 4.3 montre ces 4 arrangements projectifs, chacun dans une représentation euclidienne.

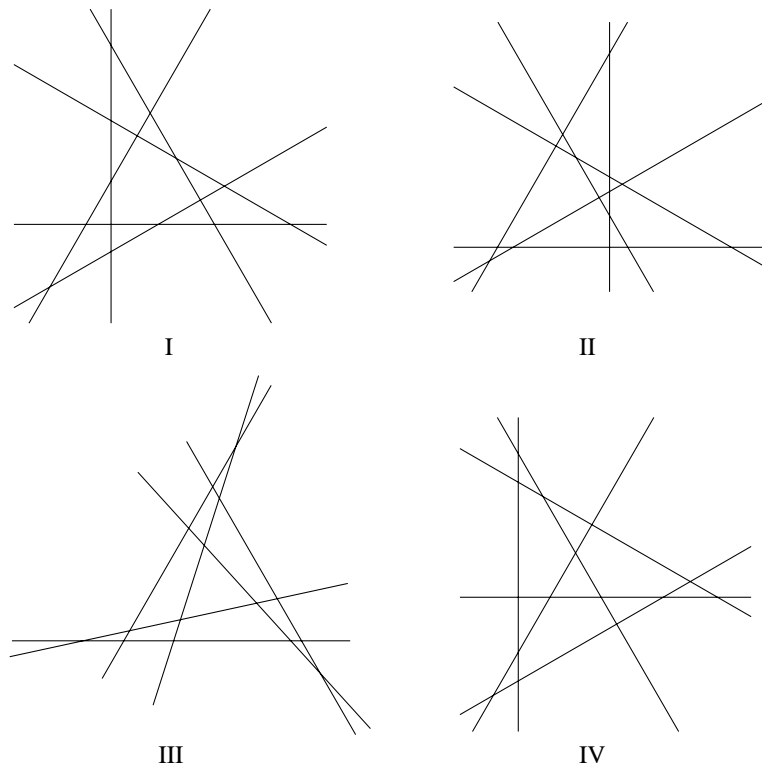


FIG. 4.3 – Les 4 arrangements projectifs à 6 droites

Or ces 4 types d'arrangements projectifs peuvent être représentés dans le plan euclidien de bien des manières différentes, selon le choix de la zone de découpage, comme le montrent les 4 figures 4.4 à 4.7. Nous allons décrire les particularités des ces 4 arrangements projectifs en nous basant sur leur représentation euclidienne la plus “canonique” possible, figure 4.3.

Type I Comme pour le cas à 5 droites, l'arrangement à 6 droites de type I est intrinsèquement symétrique : il est constitué d'une face hexagonale, entourée d'une couronne de 6 faces triangulaires, puis d'une double couronne de 6, puis 3 faces quadrangulaires (type Ia, fig. 4.4). Cette représentation possède naturellement un

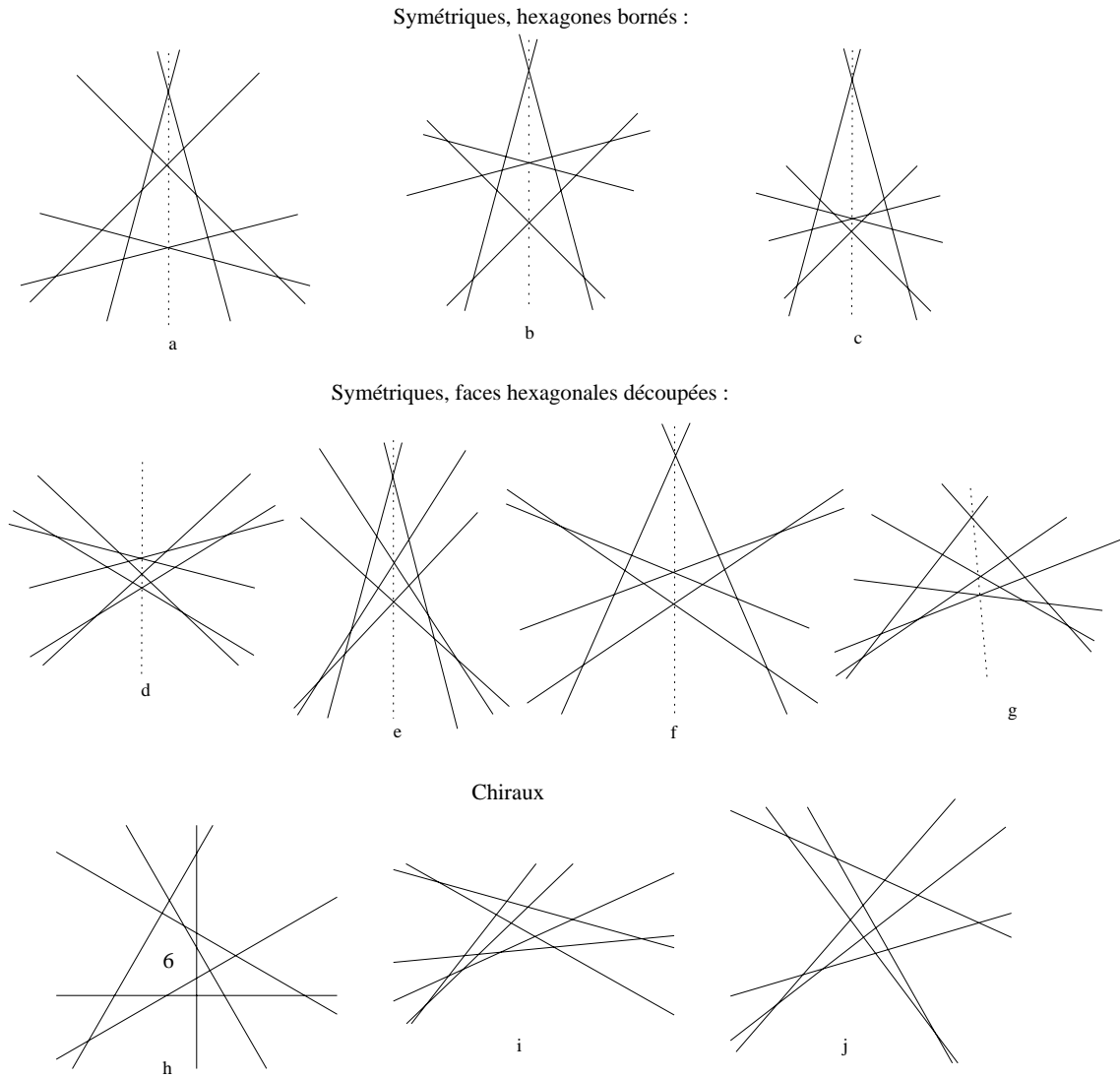


FIG. 4.4 – Les 10 arrangements euclidiens de type projectif I $p = (6, 9, 0, 1)$: 7 symétriques, 3 chiraux

axe de symétrie. D'un point de vue euclidien, elle peut être représentée de 10 (ou 13) manières différentes, dont 7 possèdent un axe de symétrie, et 3 sont chirales, c'est à dire non superposables à leur image dans un miroir. Comme nous l'avons vu chapitre 1, nous pouvons considérer que ces 3 représentations chirales en forment 6 dans l'espace euclidien orienté. Mais seule la représentation Ia, la seule à placer l'hexagone au centre, met en évidence cette symétrie.

Type II L'arrangement de type II est plus difficile à décrire, car il ne possède pas de symétrie, ni axiale, ni par rotation. Il est constitué de 2 faces pentagonales, 8 faces quadrangulaires et 6 faces triangulaires. Parmi toutes ses représentations euclidiennes, seules deux évitent de découper les pentagones : il s'agit de *a* et *b*,

fig. 4.5. *a* découpe 1 seul triangle (et 5 quadrangles), alors que *b* en découpe 2 (et 4 quadrangles). Les 18 représentations euclidiennes sont chirales, et en forment donc 36 dans l'espace euclidien orienté.

Type III L'arrangement de type III est constitué de 7 triangles, 6 quadrangles et 3 pentagones. Du point de vue de sa représentation euclidienne, il constitue plutôt une exception car il comporte bien une symétrie par rotation d'ordre 3, mais c'est un triangle qui en occupe le centre, comme on peut le voir figure 4.3. Parmi les 13 représentations euclidiennes, toutes chirales, aucune ne permet de représenter les 3 pentagones sous forme de faces bornées. Par raison de symétrie, nous avons donc choisi de les représenter tous à l'infini.

En définitive, l'arrangement est "centré" sur une face triangulaire, entouré par une couronne de 6 faces quadrangulaires, elle-même entourée d'une couronne de 6 triangles et 3 pentagones. Ici, nous avons dû privilégier la recherche de la symétrie sur la tendance à faire figurer les plus "grosses" faces au centre, puisque c'est l'arrangement III.m qui représente le mieux cette symétrie.

Type IV Enfin, l'arrangement de type IV ne peut être représenté en euclidien que de deux manières (IV.a et IV.b figure 4.7), toutes deux chirales. Il est constitué de 10 triangles et 6 hexagones, centrés sur une face triangulaire. Nous avons comme précédemment une symétrie par rotation, d'ordre 3 : le triangle central est entouré d'une couronne de 3 triangles et 3 pentagones, puis d'une seconde couronne de 6 triangles et 3 pentagones.

Retour sur le dénombrement des arrangements de 6 droites

Nous pouvons noter enfin que nous retrouvons pour 6 droites les résultats de dénombrement des arrangements **simples**, cités en 1.4.3, mais de façon plus détaillée :

plan	type I	type II	type III	type IV	total
projectif	1	1	1	1	4
eucl. non or.	10	18	13	2	43
eucl. orienté	13	36	26	4	79

TAB. 4.1 – Dénombrement des arrangements de 6 droites

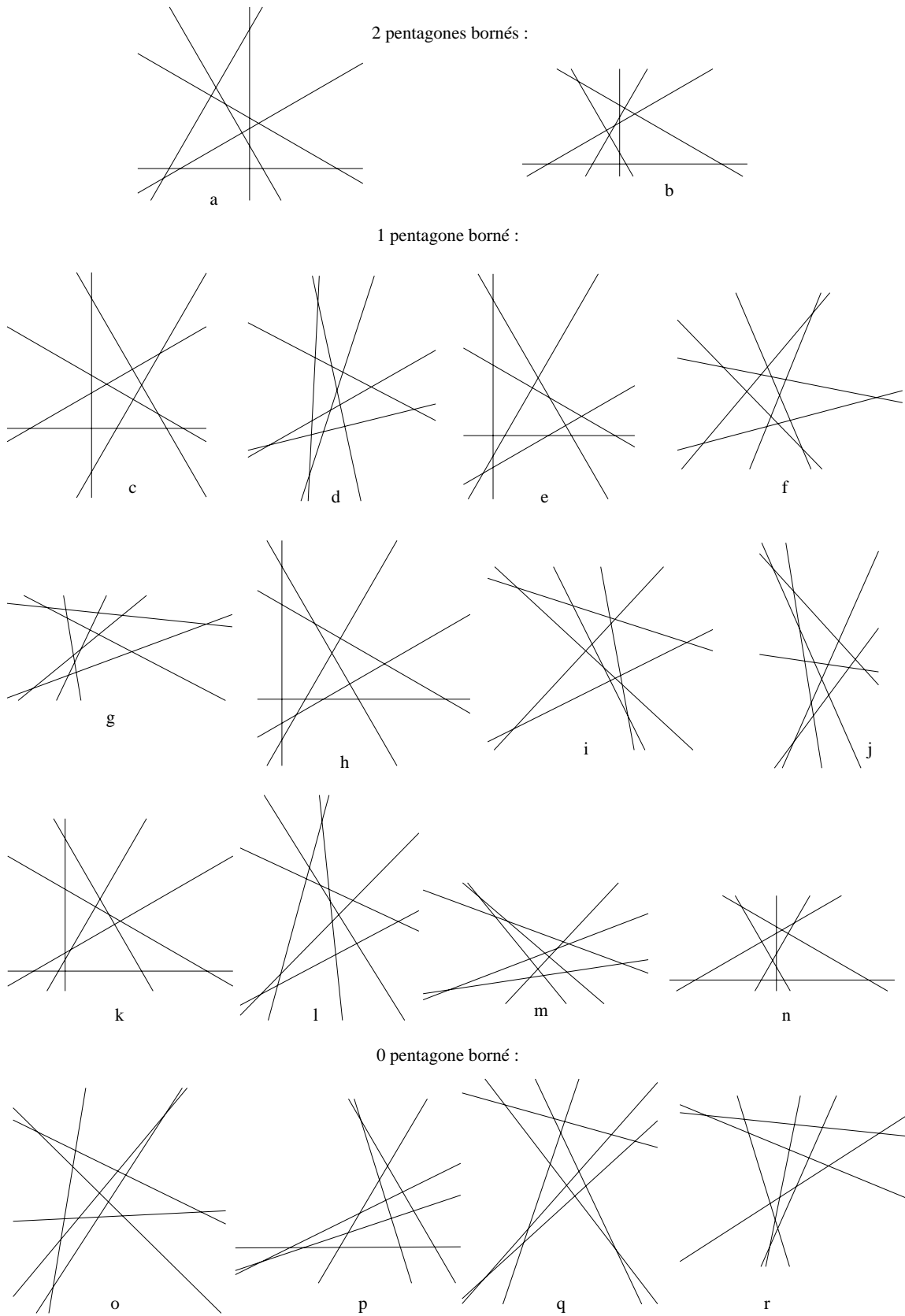


FIG. 4.5 – Les 18 arrangements euclidiens de type projectif II $p = (6, 8, 2, 0)$, tous chiraux

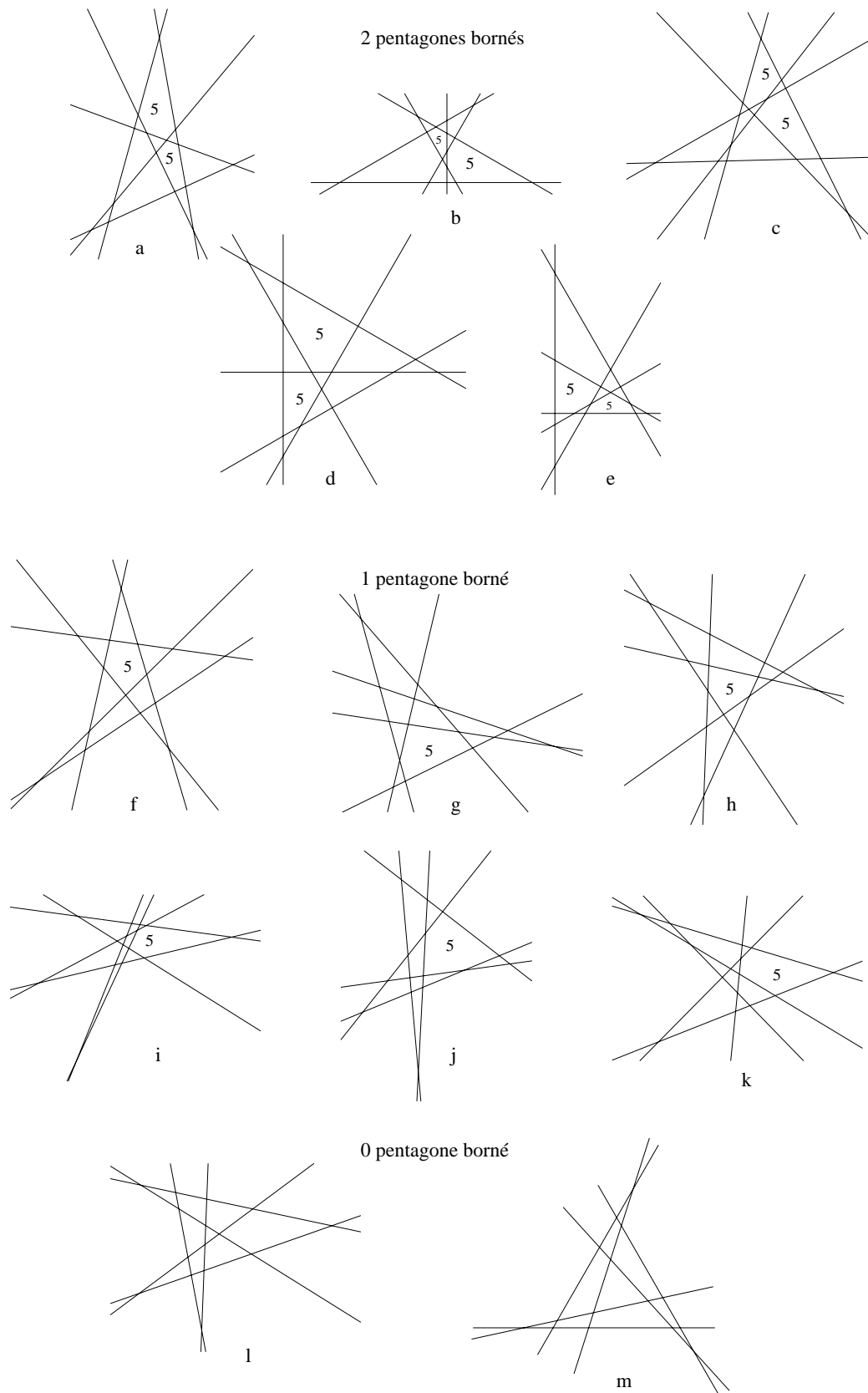


FIG. 4.6 – Les 13 arrangements euclidiens de type projectif III $p = (7, 6, 3, 0)$, tous chiraux

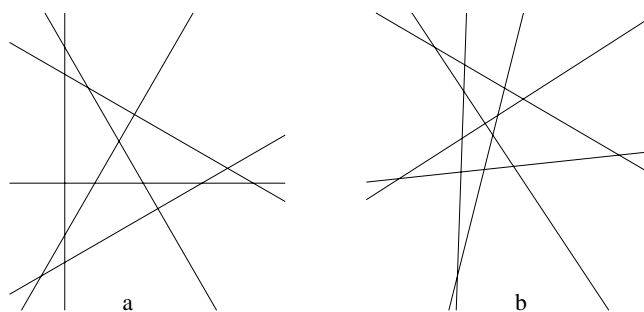


FIG. 4.7 – Les 2 arrangements euclidiens de type projectif IV $p = (10, 0, 6, 0)$, tous deux chiraux

Chapitre 5

Optimisation de la représentation euclidienne

Résumé

Dans ce chapitre, essentiellement original, nous insistons sur les problèmes de représentation d'un arrangement euclidien, en nous efforçant d'obtenir des figures aisément "lisibles".

Pour cela, nous proposons deux critères numériques, μ et λ , pour quantifier cette lisibilité, le premier s'attachant à la répartition des angles des droites, et le second à l'allongement de l'arrangement. Nous montrons les liens de ces critères avec des contraintes géométriques sur les réalisations, en particulier avec la conjecture de Ringel, qui a une longue histoire en géométrie combinatoire.

Pour finir, nous utilisons les propriétés de l'isotopie définie précédemment pour améliorer la représentation d'un arrangement au regard de ces critères de lisibilité, et nous proposons un algorithme effectuant cette optimisation, ainsi que quelques résultats obtenus.

Sommaire

5.1	Introduction au problème	91
5.1.1	Notations	91
5.1.2	Critères	92
5.2	Le critère angulaire μ	93
5.2.1	Définition	93
5.2.2	Le critère μ et la conjecture de Ringel	93
	La conjecture de Ringel	93
	Une version affaiblie de la conjecture	95
5.3	Critère d'allongement λ	98
5.3.1	Définition	98
5.3.2	Calcul de λ	98
5.3.3	Optimisation de λ et contraintes géométriques	100
5.4	D'autres critères ?	100
	Conditions sur les critères	100
	Combinaison des critères	101
5.5	Optimisation et isotopie	101
5.5.1	Isotopie itérative	101
5.5.2	De la zone au domaine d'isotopie	102
5.5.3	Choix de la droite à bouger	103
5.5.4	Algorithme d'optimisation	104
5.6	Quelques résultats	105

5.1 Introduction au problème

À partir de maintenant, nous nous intéressons au dessin d'un arrangement euclidien, exclusivement. Cet arrangement a pu être obtenu comme choix d'une représentation euclidienne d'un arrangement projectif, comme décrit au chapitre précédent, ou donné tel quel, peu importe. Nous devons faire maintenant avec les contraintes euclidiennes : cellules bornées et non bornées, de toutes tailles.

Un arrangement simple réalisé de droites $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ étant donné, il n'est pas forcément "lisible", c'est-à-dire que sa représentation géométrique peut être difficile à appréhender d'un coup d'œil. C'est notamment le cas si deux droites ont des pentes proches (sont peu séparées), ou si l'arrangement comporte à la fois des cellules (arêtes, faces) très petites et très grandes (fig 5.1).

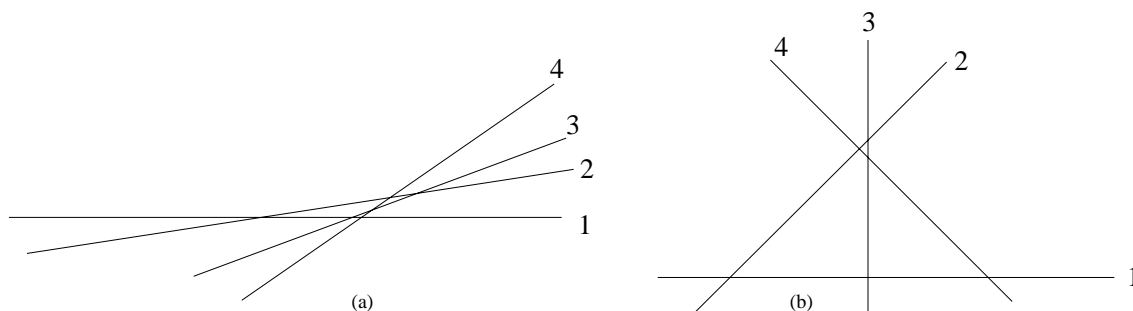


FIG. 5.1 – Arrangements “presque dégénérés”, selon des critères angulaire (a) et d’allongement (b)

L'idée est alors de modifier l'arrangement par isotopie : on conserve sa combinatoire tout en modifiant sa géométrie, conformément à la définition de l'isotopie que nous avons donnée chapitre 2. Évidemment, cela doit être couplé à la définition d'un critère numérique de “lisibilité”. Nous définissons donc tout d'abord deux critères évidents, que nous étudions puis utilisons dans un algorithme itératif d'optimisation graphique.

5.1.1 Notations

Dans tout ce chapitre, nous nous plaçons dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé (O, i, j) . Nous allons utiliser l'isotopie et les notions associées, définies chapitre 2, et nous adoptons donc des notations et conventions similaires : chaque droite D_i de l'arrangement étudié possède une double représentation par les paramètres (a_i, b_i) de l'équation $a_i x + b_i y + 1 = 0$, et par les paramètres (θ_i, d_i) , où $\theta_i \in [0, \pi[$ est l'angle de la droite à l'horizontale (Ox) , et d_i est la distance

(algébrique) de la droite à l'origine, de sorte que :

$$\cos(\theta_i) = \varepsilon \frac{-b_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}, \quad \sin(\theta_i) = \varepsilon \frac{a_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}, \quad d_i = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}},$$

avec $\varepsilon = \text{sgn}(a_i)$.

De la sorte, chaque droite D_i admet aussi une équation paramétrique :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = d_i \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin \theta_i \\ \cos \theta_i \end{pmatrix}}_{N_i} + t \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{pmatrix}}_{V_i}$$

qui fait apparaître le vecteur directeur V_i et le vecteur normal N_i de D_i , ainsi que le projeté P_i de l'origine sur D_i : $\overrightarrow{OP_i} = d_i N_i$. Rappelons que nous notons P_{ij} le sommet intersection de D_i et D_j .

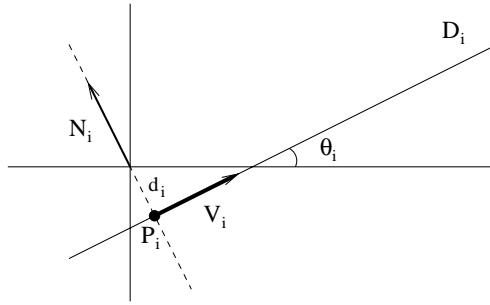


FIG. 5.2 – Les notations relatives à D_i , avec ici $a_i < 0$, $b_i > 0$, $d_i < 0$

D'autre part, on suppose que les droites de \mathcal{D} sont numérotées selon les angles croissants, et de plus que la première droite est horizontale (ce qu'il est toujours possible d'obtenir, quitte à effectuer une rotation globale, comme nous l'avons vu en 2.2.3), de sorte que : $0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < \pi$ (d'où $a_1 = 0$). Les inégalités sont strictes car l'arrangement n'est pas dégénéré.

Nous obtenons une double paramétrisation des droites D_i , à la fois dans le plan des $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et dans l'espace des $(\theta, d) \in [0, \pi[\times \mathbb{R}$. C'est une petite contrainte, qui se révèle nécessaire à l'utilisation, car la paramétrisation (a, b) se prête bien à la définition d'une dualité, qui permettra par la suite de construire le domaine d'isotopie, alors que la paramétrisation (θ, d) simplifie les opérations géométriques élémentaires et, bien évidemment, le calcul des écarts angulaires entre droites.

5.1.2 Critères

Afin de quantifier la bonne représentation d'un arrangement, nous allons donc définir deux critères numériques, μ (comme mesure angulaire), qui mesure la répartition angulaire des droites, et λ (comme longueur), qui mesure l'allongement

de l'arrangement, c'est-à-dire le rapport de la plus courte à la plus longue arête bornée.

5.2 Le critère angulaire μ

5.2.1 Définition

Le critère le plus naturel est sans doute la séparation angulaire des droites, que nous pouvons définir comme suit.

Définition 20. Avec les conventions précédentes, et en notant par commodité $\theta_{n+1} = \pi$, on peut définir un critère de mesure $\mu \in [0, 1]$

$$\mu = \frac{\text{Min } (\theta_{i+1} - \theta_i)}{\text{Max } (\theta_{i+1} - \theta_i)}$$

autrement dit, le rapport entre les écarts angulaires inter-droites minimal et maximal.

Maximiser μ (fig. 5.3) revient à faire tendre l'arrangement vers une **équirépartition** des angles : $0, \frac{\pi}{n}, 2\frac{\pi}{n}, \dots, (n-1)\frac{\pi}{n}$. Contrairement à ce que l'on peut penser, cette équirépartition n'est en général pas possible : si n est grand, on ne peut l'atteindre qu'exceptionnellement.

Inversement, $\mu = 0$ signifie que deux droites sont parallèles (arrangement dégénéré), et μ proche de 0 dénote deux droites "presque" parallèles. Ainsi, on peut penser que plus μ est grand, plus l'arrangement est "lisible".

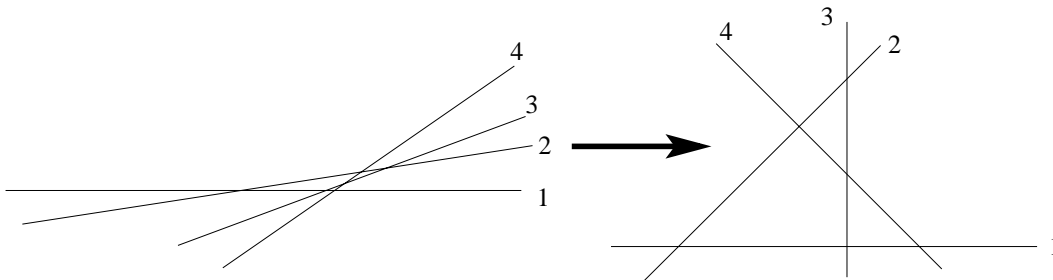


FIG. 5.3 – Maximisation du critère μ sur 4 droites

5.2.2 Le critère μ et la conjecture de Ringel

La conjecture de Ringel

En 1956, G. Ringel a émis une conjecture (fausse) dont l'idée est proche de ce critère [32], cité par Las Vergnas dans [4, p. 41]. Cette conjecture peut être

résumée de la façon suivante :

Les pentes de tout arrangement simple de droites peuvent être fixées arbitrairement.

Si cette conjecture était vraie, on pourrait toujours trouver une représentation de l'arrangement à $\mu = 1$, c'est à dire à angles équirépartis.

Hélas, on sait depuis 1986 que cette conjecture est fausse, comme indiqué par [4]. En figure 5.4, en particulier, deux arrangements de 6 droites réfutant la conjecture. Le premier est exhibé dans [4, p. 42], tandis que le second a été trouvé par notre algorithme d'optimisation systématique, et nous pensons que ce sont les deux seuls arrangements de six droites dans ce cas.

Définition 21. Nous qualifierons par la suite d'*auto-bloquant*, un tel arrangement réfutant la conjecture de Ringel.

Il est intéressant de noter, toujours d'après [4], le temps qui a séparé l'énoncé de cette conjecture de sa résolution : en 1986, Las Vergnas a donné dans [36] un contre-exemple à la conjecture de Ringel, basé sur des considérations théoriques sur les matroïdes orientés et menant à un contre-exemple à 32 droites. Il a fallu attendre 1991 pour que Richter et Sturmfels publient dans [31] le contre-exemple minimal, à 6 droites, présenté figure 5.4, a) et 5.5.

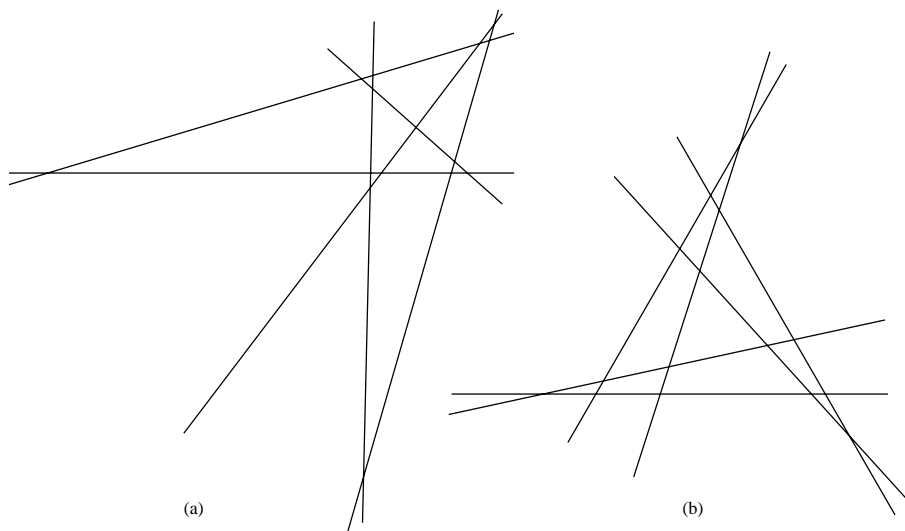


FIG. 5.4 – Deux arrangements réfutant la conjecture de Ringel

Exemple :

Nous reproduisons ici la preuve donnée par Las Vergnas dans [4] : considérons l'arrangement de 6 lignes présenté figure 5.4, a), et le "zoom" sur la partie "centrale" de la figure 5.5, où les droites sont numérotées. Les droites D_1 à D_6 ont des pentes $\alpha_1 < \dots < \alpha_6$.

Choisissons d'imposer les pentes $\beta_1 = -1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 1, \beta_5 = 9, \beta_6 = 10$. Nous allons montrer qu'on ne peut pas prendre β_4 de façon arbitraire dans l'intervalle $]1, 9[$ en respectant la combinatoire. Par exemple, on ne peut pas prendre $\beta_4 = \frac{3}{2}$.

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que P est l'origine et que Q est en $(1, 10)$. Le point R , lui, est en $(r, 0)$, et le point $S = D_3 \cap D_5$ a pour coordonnées : $(\frac{9r+9}{8}, \frac{9r+81}{8})$. D'autre part, la figure impose une majoration de la pente de (QR) : $\beta_{(QR)} = \frac{10}{1-r} < \beta_1 = -1$, d'où $r > 11$. D'où la pente de (PS) : $\beta_{(PS)} = 1 + \frac{8}{r+1} > \frac{5}{3}$. Ainsi $\beta_4 > \beta_{(PS)} > \frac{5}{3}$.

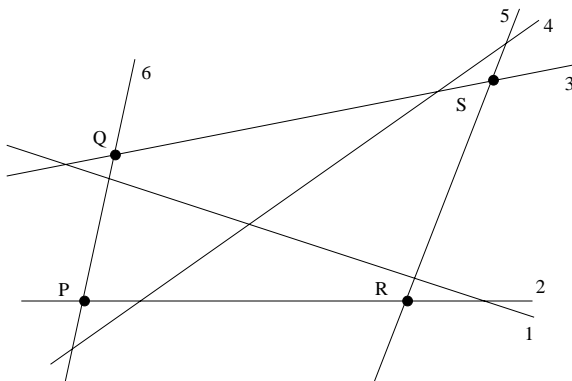


FIG. 5.5 – Le contre-exemple de Richter et Sturmfels

Une version affaiblie de la conjecture

En réalité, pour l'étude de μ , ce qui nous intéresse c'est la version affaiblie de la conjecture, comme suit :

Les angles de tout arrangement de n droites peuvent être fixés de façon équirépartie dans $[0, \pi[$, à $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n}$ radians

Mais cette conjecture affaiblie est fautive également, et le contre-exemple de la fig. 5.4 b marche ici. Cela nous empêche définitivement d'espérer atteindre toujours $\mu = 1$ pour tout arrangement.

Preuve :

Considérons l'arrangement figure 5.6. Notre but est de montrer que nous ne pouvons pas représenter cet arrangement avec des angles inter-droites tous de $\pi/6$ radians.

Nous supposons tout d'abord que nous pouvons le faire, et nous utilisons une représentation symétrique d'ordre 3 : les droites D_1, D_2, D_3 , d'angles respectifs $0, \pi/3, 2\pi/3$ forment naturellement un triangle équilatéral (ABC) , avec $A = D_1 \cap D_3, B = D_3 \cap D_5, C = D_5 \cap D_1$, de barycentre G .

Nous posons également les droites D_2, D_4, D_6 selon les angles $\alpha, \alpha + \pi/3, \alpha + 2\pi/3$, avec $\alpha \in]0, \pi/3[$, de sorte que ces trois droites forment aussi un triangle équilatéral $(A'B'C')$, avec $A' = D_2 \cap D_4, B' = D_4 \cap D_6, C' = D_6 \cap D_2$. On note encore P_2, Q_2, R_2 les inter-

sections de D_2 avec D_1, D_3, D_5 respectivement, P_4, Q_4, R_4 celles de D_4 avec D_3, D_5, D_1 , et enfin P_6, Q_6, R_6 celles de D_6 avec D_5, D_1, D_3 (respectivement).

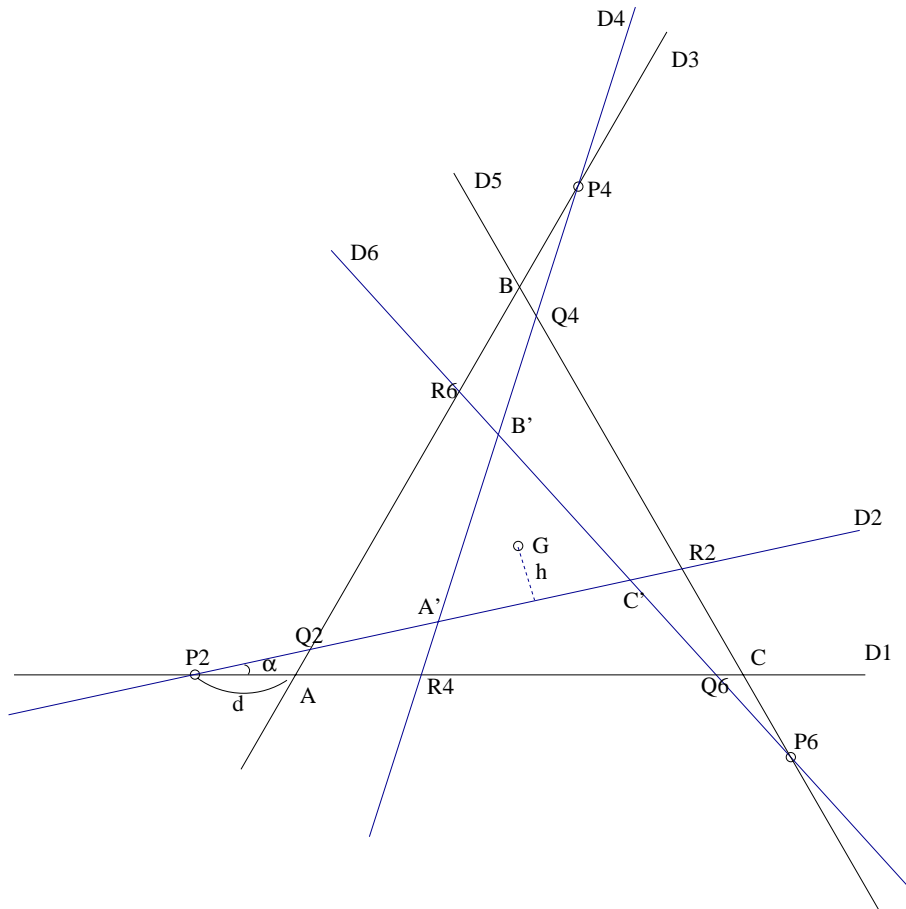


FIG. 5.6 – Réfutation de la conjecture affaiblie - 1

Nous supposons dans un premier temps que $(A'B'C')$ a aussi G pour barycentre, de sorte que l'ensemble de l'arrangement soit paramétrable par uniquement 2 paramètres : l'angle α et la distance algébrique $d = \overline{P_2A} = \overline{P_4B} = \overline{P_6C}$, et on note h la distance de G à $[A'C']$. Ainsi, les droites D_1, D_3, D_5 restent fixes, alors que D_2, D_4, D_6 bougent en fonction de α et d .

Les contraintes de combinatoire se traduisent par le respect de l'ordre des intersections le long de chaque droite. En particulier, d doit rester positive (P_2 à gauche de A). Il résulte de ces contraintes que $(A'B'C')$ est l'image de (ABC) par une similitude \mathcal{S} , de centre G , d'angle α et de rapport $\rho(\alpha, d)$, fonction non explicitée de α et d .

Pour une distance d fixée, *i.e.* un point P_2 fixé, nous voyons que l'angle α est en fait limité par la condition suivante : la droite $D_2(\alpha)$ doit rester au-dessus de A et **en-dessous de G** . En effet, si au cours de son balayage D_2 rencontre G , l'arrangement change de combinatoire, pour devenir équivalent à la figure 5.7 (a) : les sommets A' et C' s'inversent le long de D_2 . On en déduit la contrainte supplémentaire : au cours du déplacement de D_2 (et D_4, D_6), h doit constamment rester strictement positive.

Enfin, nous observons :

si d est constante et α augmente alors h diminue : $\frac{\partial h}{\partial \alpha} < 0$

si α est constante et d augmente alors h diminue : $\frac{\partial h}{\partial d} < 0$

Il en résulte que l'angle maximal limite pour α est atteint quand d tend vers 0 (P_2 tend vers A), et cet angle limite est celui de la droite (AG) , soit $\pi/6$.

On a donc en définitive $\alpha < \pi/6$, et l'on ne peut pas représenter l'arrangement avec des angles exactement multiples de $\pi/6$.

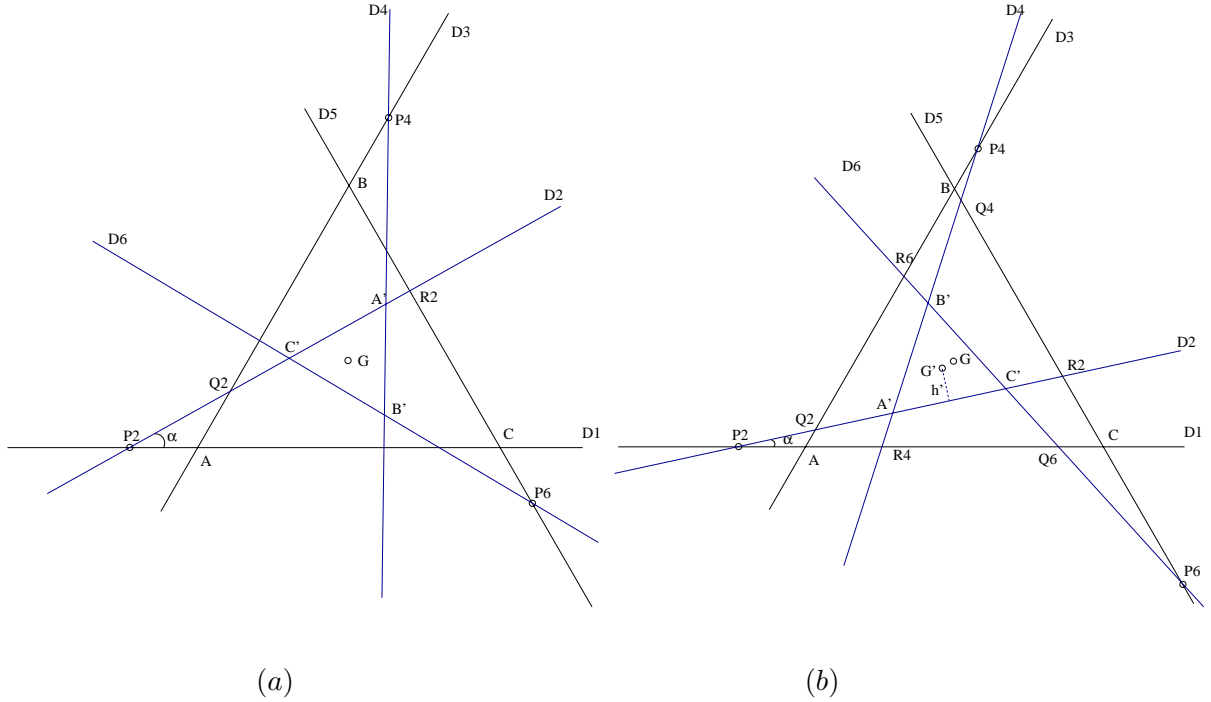


FIG. 5.7 – Réfutation de la conjecture affaiblie - 2

Supposons maintenant que le petit triangle $(A'B'C')$ ne soit plus contraint à avoir G comme centre de gravité, et notons le sien G' , et h' la distance de G' à $(A'B'C')$. Cette fois, l'arrangement est paramétré par 4 réels : l'angle α , et les 3 distances algébriques (positives) $d_2 = \overline{P_2A}$, $d_4 = \overline{P_4B}$, $d_6 = \overline{P_6C}$.

Notons maintenant $d_m = \min(d_2, d_4, d_6)$ et $d_M = \max(d_2, d_4, d_6)$. Nous nous ramenons au premier cas, en définissant $h_m(\alpha, d_2, d_4, d_6)$ (resp. $h_M(\alpha, d_2, d_4, d_6)$) comme la distance de G au triangle équilatéral T_m (resp. T_M) centré en G de paramètres (α, d_m) (resp. α, d_M). Alors, par raison de symétrie, nous avons :

$$h_M(\alpha, d_2, d_4, d_6) \leq h'(\alpha, d_2, d_4, d_6) \leq h_m(\alpha, d_2, d_4, d_6)$$

Et le raisonnement mené dans le cas centré s'applique encore. □

Remarque : Nous présenterons toutefois au chapitre suivant une classe particulière d'arrangements, dits *démontables*, qui satisfont la conjecture de Ringel, et qu'on peut donc représenter à $\mu = 1$.

5.3 Critère d'allongement λ

5.3.1 Définition

Nous l'avons vu, un critère μ proche de 0 se traduit par un arrangement peu lisible. Cependant, la réciproque n'est pas garantie : nous pouvons avoir un $\mu = 1$ optimal, et cependant, un arrangement peu esthétique, comme sur la figure 5.1 *b*, où nous avons deux “grandes” faces, et une petite. Pour éviter à la fois cela et les faces démesurément aplaties ou allongées, nous définissons un critère d'allongement, analogue à celui qu'on peut trouver dans l'optimisation des triangulations.

Définition 22. Toujours dans le contexte euclidien défini en 5.1.1, le critère $\lambda \in [0, 1]$ est défini comme le rapport des longueurs entre la plus courte et la plus longue des arêtes bornées.

Comme μ , le critère λ est encore maximal pour les “meilleurs” arrangements, diminue pour les arrangements moins esthétiques, et s'annule pour les arrangements dégénérés, une arête de longueur nulle signifiant que deux sommets sont confondus, donc que trois droites (au moins) sont concourantes.

Remarque : $\lambda = 1$ peut-il être atteint ? C'est évidemment le cas pour $n = 3$, pour un arrangement correspondant à un triangle équilatéral prolongé, mais c'est la seule possibilité. Pour $n \geq 4$, on a toujours $\lambda < 1$.

Nous verrons les meilleurs λ pour $n = 4, 5$ au chapitre 6.

5.3.2 Calcul de λ

Supposons maintenant que l'on s'intéresse à une arête de l'arrangement. Cette arête est portée par une droite \mathbf{D}_i , dite *droite porteuse* et limitée par deux autres droites \mathbf{D}_j et \mathbf{D}_k ¹, dites *droites frontières* et jouant des rôles symétriques, figure 5.8 Nous pouvons la noter α_{jk}^i , et sa longueur l_{jk}^i .

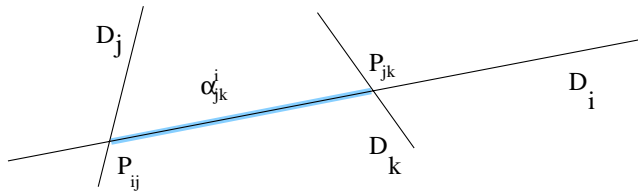


FIG. 5.8 – 3 droites définissant une arête

¹Nous utilisons ces artifices typographiques selon les index i, j, k pour mieux faire apparaître, dans les formules qui vont suivre, quels facteurs dépendent de quelles droites

Proposition 13. *Avec les conventions précédentes, et les droites $D_\gamma : a_\gamma x + b_\gamma y + 1 = 0$, pour $\gamma = i, j, k$, on a :*

$$l_{jk}^i = \frac{|\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j \mathbf{b}_i + \mathbf{a}_j b_k - a_k \mathbf{b}_j + a_k \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i b_k|}{|\mathbf{a}_i b_k - a_k \mathbf{b}_i| |\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j \mathbf{b}_i|} \sqrt{\mathbf{a}_i^2 + \mathbf{b}_i^2}$$

Preuve :

Il ne s'agit que de calculs, fastidieux mais sans difficultés :

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{1}{a_i b_j - a_j b_i} \begin{pmatrix} b_i - b_j \\ a_j - a_i \end{pmatrix} & P_{ik} &= \frac{1}{a_i b_k - a_k b_i} \begin{pmatrix} b_i - b_k \\ a_k - a_i \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{P_{ij} P_{ik}} &= \begin{pmatrix} \frac{b_i - b_k}{a_i b_k - a_k b_i} - \frac{b_i - b_j}{a_i b_j - a_j b_i} \\ \frac{a_k - a_i}{a_i b_k - a_k b_i} - \frac{a_j - a_i}{a_i b_j - a_j b_i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{(a_j b_i - a_i b_j) + (a_k b_j - a_j b_k) + (a_i b_k - a_k b_i)}{(a_i b_k - a_k b_i)(a_i b_j - a_j b_i)} \begin{pmatrix} -b_i \\ a_i \end{pmatrix} \\ \|\overrightarrow{P_{ij} P_{ik}}\| &= \left| \frac{(a_j b_i - a_i b_j) + (a_k b_j - a_j b_k) + (a_i b_k - a_k b_i)}{(a_i b_k - a_k b_i)(a_i b_j - a_j b_i)} \right| \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \end{aligned}$$

□

Considérant que, selon les bases de l'isotopie itérative, on s'autorise à déplacer les droites de l'arrangement, mais une seule à la fois, quelles sont les formes des fonctions correspondantes ?

Si l'on bouge une droite frontière $D_j(\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j)$ (ou symétriquement D_k) :

$$l_{jk}^i(a_j, b_j) = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \left| \frac{\mathbf{a}_j(b_k - b_i) + \mathbf{b}_j(a_i - a_k) + (a_k b_i - a_i b_k)}{(-\mathbf{a}_j b_i + a_i \mathbf{b}_j)(a_i b_k - a_k b_i)} \right|$$

La longueur de l'arête l_{jk}^i est ainsi une fonction homographique des paramètres (a_j, b_j) .

Si l'on bouge la droite porteuse $\mathbf{D}_i(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$:

$$l_{jk}^i(a_i, b_i) = \sqrt{\mathbf{a}_i^2 + \mathbf{b}_i^2} \left| \frac{\mathbf{a}_i(b_j - b_k) + \mathbf{b}_i(a_k - a_j) + (a_j b_k - a_k b_j)}{\mathbf{a}_i^2 b_j b_k + \mathbf{b}_i^2 a_j a_k - \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i (a_j b_k + a_k b_j)} \right|$$

Cette fois, la forme est plus compliquée encore.

L'allongement λ étant un rapport de longueurs de cette expression, il paraît extrêmement difficile d'effectuer une optimisation analytique ou exacte de λ , même pour le déplacement d'une seule droite. C'est pourquoi nous avons opté pour une optimisation approchée de ce critère.

5.3.3 Optimisation de λ et contraintes géométriques

Le critère λ conduit naturellement à la définition suivante :

Définition 23. Pour une réalisation (ou représentation) donnée d'un arrangement, on appelle *arêtes critiques* les arêtes les plus courtes et les plus longues de cette réalisation.

On appelle *droites critiques* les droites portant ou limitant les arêtes critiques.

Remarque : Les arêtes critiques sont utilisées pour le calcul de λ , mais elles ne sont pas fixes : au cours de l'isotopie qui mène à l'optimisation de λ , elles vont changer. C'est ce phénomène qui nous intéresse pour la suite.

Il est remarquable que l'optimisation de λ conduit naturellement à la formation dans l'arrangement de faces respectant des contraintes géométriques, la plupart du temps sous la forme de symétrie axiale et de triangles isocèles et/ou semblables. En effet, un λ optimal repose très souvent sur une situation d'équilibre entre les longueurs des arêtes, l'arête critique la plus courte (plus rarement la plus longue) étant en fait multiple : deux ou plusieurs arêtes critiques sont délimitées par une même droite frontière D_f et "s'équilibrent". Le moindre déplacement de D_f raccourcit l'une au profit de l'autre, ce qui nous éloigne de λ_{opt} .

Des exemples caractéristiques de ce comportement où apparaissent des triangles isocèles et semblables, définis par des arêtes critiques, sont donnés dans le chapitre suivant avec l'étude de la représentation optimale pour 4 et 5 droites.

5.4 D'autres critères ?

Conditions sur les critères

D'autres critères géométriques que l'allongement λ et la mesure angulaire μ seraient envisageables. Cependant, pour être retenu un critère doit être invariant par rotation et homothétie globale sur l'arrangement, et plus généralement par toute transformation qui ne perturbe pas l'aspect (au sens intuitif) de l'arrangement.

Parmi les critères classiques utilisés dans des domaines proches, comme l'optimisation de maillages, nous n'en avons pas trouvé d'autre intéressant. Nous avons envisagé une variante de λ avec pour critère un rapport σ de surfaces, entre la plus "petite" et la plus "grande" face bornée de l'arrangement, critère utilisé pour caractériser certains maillages. Cependant, ce critère ne nous convient pas, car il est invariant par affinité orthogonale : pour une affinité de rapport κ , la surface de chaque face est multipliée par κ , ce qui ne change rien au rapport σ . Ceci permet "d'aplatir" à volonté un arrangement, sans perturber σ , ce qui à l'évidence

ne correspond pas à nos attentes, un tel aplatissement devant être pénalisé par un bon critère.

Combinaison des critères

En définitive, λ nous paraît un critère très satisfaisant ; mais l'algorithme d'optimisation que nous lui appliquons, tel que nous allons le décrire dans la section suivante, pourrait s'appliquer à n'importe quel autre critère que nous pourrions préférer dans certains cas particuliers.

Optimisation sous contrainte En particulier, il est possible de combiner les critères λ et μ , de plusieurs façons.

En premier lieu, il n'est pas possible en général, de représenter un arrangement à angles équirépartis. Cependant, pour des petits nombres n de droites, le critère $\mu = 1$ peut assez souvent être atteint. On peut donc envisager d'optimiser λ sous contrainte $\mu = 1$, c'est-à-dire à angles contraints et équirépartis. Voir la section 6.1.1 pour un tel exemple.

Critère combiné D'autre part, λ et μ sont deux critères numériques à valeurs dans $[0, 1]$. On peut donc utiliser pour critère une combinaison convexe ν :

$$\nu(\mathcal{A}) = \alpha \mu(\mathcal{A}) + \beta \lambda(\mathcal{A}) \quad \text{avec } \alpha + \beta = 1, \alpha > 0, \beta > 0$$

5.5 Optimisation et isotopie

L'algorithme d'optimisation géométrique d'un arrangement que nous avons développé est très proche des concepts évoqués dans la section 2.2, et utilise en particulier le critère λ , l'isotopie itérative et un calcul du domaine d'isotopie pour chaque droite déplacée. Nous allons faire ici la liaison entre la théorie développée précédemment et la pratique utilisée dans notre algorithme.

5.5.1 Isotopie itérative

L'isotopie itérative nous permet de déplacer une seule droite à la fois, en respectant la combinatoire globale, pourvu qu'on ne sorte pas de son domaine d'isotopie (déf. 13, p. 42). C'est exactement ce que réalise l'algorithme d'optimisation, en itérant sur les droites, pour essayer d'augmenter λ à chaque pas. Il se pose alors deux problèmes : le choix de la droite à bouger, et le calcul effectif du domaine d'isotopie, afin de ne pas en faire sortir la droite déplacée lors de l'optimisation.

5.5.2 De la zone au domaine d'isotopie

Ici, nous supposons que nous avons à déplacer une droite D par isotopie. Rappelons que son domaine d'isotopie est une portion du dual du plan euclidien (primal) contenant l'arrangement. Il est entièrement déterminé par les arêtes de la zone de D , mais on peut raffiner cet objet afin de ne stocker que les données réellement utiles au calcul du domaine d'isotopie, comme l'illustrent les figures 5.9 et 5.10.

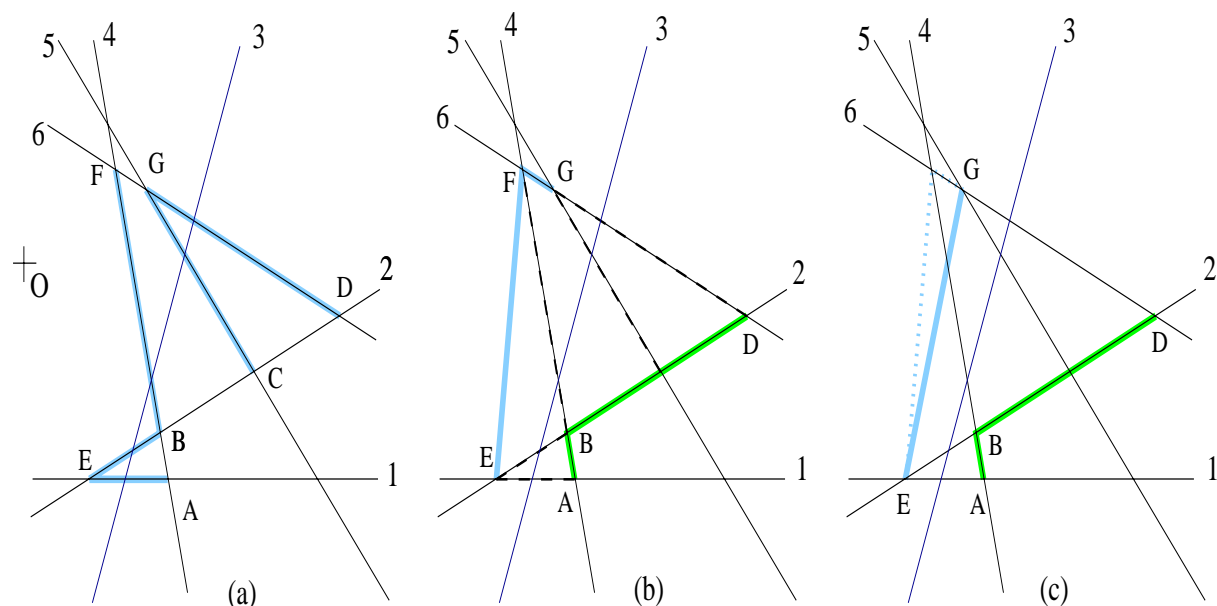


FIG. 5.9 – De la zone au domaine d'isotopie ; dans l'espace euclidien primal

Nous nous intéressons à la zone, et plus particulièrement aux arêtes coupées par la droite à déplacer D (droite 3 fig. 5.9). Sur cet exemple, les arêtes sont AE, EB, BF, CG, DG (5.9 a). Dans le cas général, ce sont $n - 1$ arêtes, connectées ou non, mais en tous les cas, qui ne peuvent pas se croiser autrement qu'en une extrémité commune.

De cette liste d'arêtes, nous tirons les *enveloppes inférieure et supérieure* de la droite, autrement dit la liste des extrémités des arêtes précédentes situées de part et d'autre de la droite, qui forment chacune un chemin, autrement dit un polygone simple ouvert. Ici (5.9 b), ce sont (E, F, G) pour l'enveloppe supérieure et (A, B, C, D) pour l'enveloppe inférieure, que l'on peut réduire à (A, B, D) , le point $C \in [BD]$ étant inutile dans notre structure de données.

Enfin, nous déterminons les *enveloppes convexes inférieure et supérieure*, simplification des précédentes, de sorte que la surface délimitée par chaque enveloppe soit convexe, et présente sa convexité vers l'extérieur de la droite D . Sur notre exemple (5.9 c), l'enveloppe supérieure (E, F, G) se réduit à l'enveloppe convexe supérieure (E, G) , alors que l'enveloppe inférieure (A, B, D) reste elle-même.

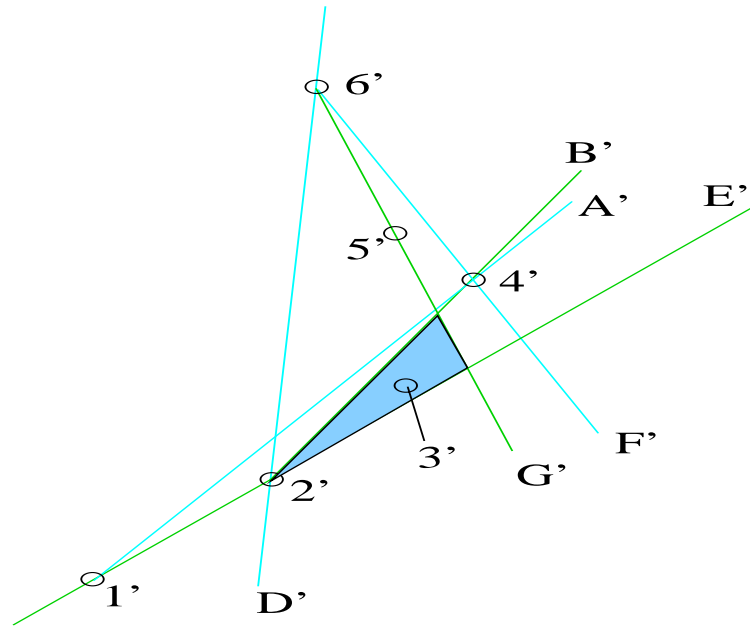


FIG. 5.10 – De la zone au domaine d’isotopie ; dans le dual : domaine d’isotopie

De façon duale, nous avons représenté sur la figure 5.9 les points duaux des droites, $1'$ à $6'$, et les droites duales des sommets de la zone, A' à G' . Le domaine d’isotopie est le triangle grisé délimité par les droites B' , E' et G' : il est obtenu par l’intersection des demi-plans contenant le point $3'$ et limités par les droites duales A' à G' .

Finalement, les sommets du polygone d’isotopie sont les trois points $2' = (BD)'$, $G' \cap E' = (GE)'$ et $A' \cap G' = (AG)'$, *i.e.* les duaux des trois droites 2, $[1, 2 : 5, 6]$ et $[2, 4 : 5, 6]$, avec la notation suivante :

Notation 24. Pour D_1, D_2, D_3, D_4 quatre droites du plan euclidien, non 2 à 2 parallèles, on note $[D_1, D_2 : D_3, D_4]$ la nouvelle droite passant par $D_1 \cap D_2$ et $D_3 \cap D_4$.

Il est en effet important de revenir aux objets du primal, car tout au long de l’algorithme d’optimisation, c’est l’arrangement primal que l’on conserve, et en particulier sa combinatoire, que l’on utilise ici.

5.5.3 Choix de la droite à bouger

Pour une réalisation donnée d’un arrangement, quel que soit n , il n’y a qu’un petit nombre k de droites dont le déplacement peut améliorer λ , les *droites cri-*

tiques :

- la droite portant l'arête la plus courte
- l'une des deux droites bornant l'arête la plus courte
- la droite portant l'arête la plus longue
- l'une des deux droites bornant l'arête la plus longue

Soit, au maximum 6 droites critiques (et 3 au minimum), le déplacement d'une autre droite ne pouvant, au pire, que dégrader λ .

Pour le choix de la droite à bouger, nous avons donc adopté une solution heuristique, qui consiste à choisir la droite bougée au hasard parmi les k droites possibles décrites ci-dessus.

5.5.4 Algorithme d'optimisation

Nous avons insisté sur le fait que la combinatoire de l'arrangement ne change pas au cours d'une isotopie. L'algorithme d'optimisation de λ exploite cette propriété, pour effectuer une seule fois l'ensemble des calculs combinatoires, dans une phase préalable à l'optimisation elle-même. Voici cet algorithme, dans une forme succincte :

```
# Etape préliminaire : combinatoire, zones, enveloppes
Construction de l'arrangement (par squelettes)
  et calcul du critère Lambda

Pour chaque droite Di, i=1 à n
  Calculs dans le primal :
    Parcours de la zone #O(n)
    Construction de l'enveloppe inférieure (resp. supérieure)
    Construction de l'enveloppe convexe inférieure (resp. supérieure)
  Calculs dans le dual :
    Construction du polygone d'isotopie
  Stockage du polygone d'isotopie sous forme de liste
  de droites Di et de quadruplets de droites [Di,Dj:Dk,Dl] = O(n)
Fin Pour i

# Optimisation
Répéter
  Choix aléatoire d'une droite critique Di
  Lecture du polygone d'isotopie Pi de Di
  Construction d'une grille régulière d'échantillonnage de Pi
  Pour chaque ligne Y de la grille
```

```

Pour chaque colonne X de la grille
  Si = Point(X,Y)           # Dans le dual
  D'i = Dual(Si)           # Dans le primal
  Déplacement de Di à D'i :
    Re-calcul des sommets de la zone de Di
  Mise à jour de Lambda
  Retenir Lambda maximal et Xopt, Yopt correspondants
Fin Pour X
Fin Pour Y
Déplacer Di en Dual(Point(Xopt,Yopt))
Mettre à jour Lambda, Lambda_prec

```

Jusqu'a ((Lambda / Lambda_prec < Rconv) OU Arret_utilisateur)

Cet algorithme essaie de maximiser λ sur une grille représentant un échantillonnage régulier du domaine d'isotopie de la droite déplacée, et itère cela jusqu'à ce que le gain sur lambda soit faible, typiquement le rapport de λ à λ_{prec} soit inférieur à 1.01, ou jusqu'à un arrêt provoqué par l'utilisateur du programme.

Une variante de notre programme permet de remplacer le choix aléatoire d'une droite critique par un choix de l'utilisateur, ce qui permet une optimisation "contrainte" par l'utilisateur, et un contrôle visuel du processus.

5.6 Quelques résultats

Les figures suivantes illustrent les résultats de l'algorithme d'optimisation sur deux exemples. Le programme est efficace pour faire apparaître les faces "presque dégénérées" à cause de leur petitesse.

En règle générale, avec $R_{conv} = 1,01$, il s'arrête très vite (au bout d'une dizaine d'itérations) sur une situation de presque équilibre entre arêtes. L'augmentation du nombre d'itérations, par exemple en fixant $R_{conv} = 1,001$ ou $1,0001\dots$ améliore très peu le résultat final. Le gain de lisibilité est pratiquement toujours dû aux quelques premières étapes d'optimisation.

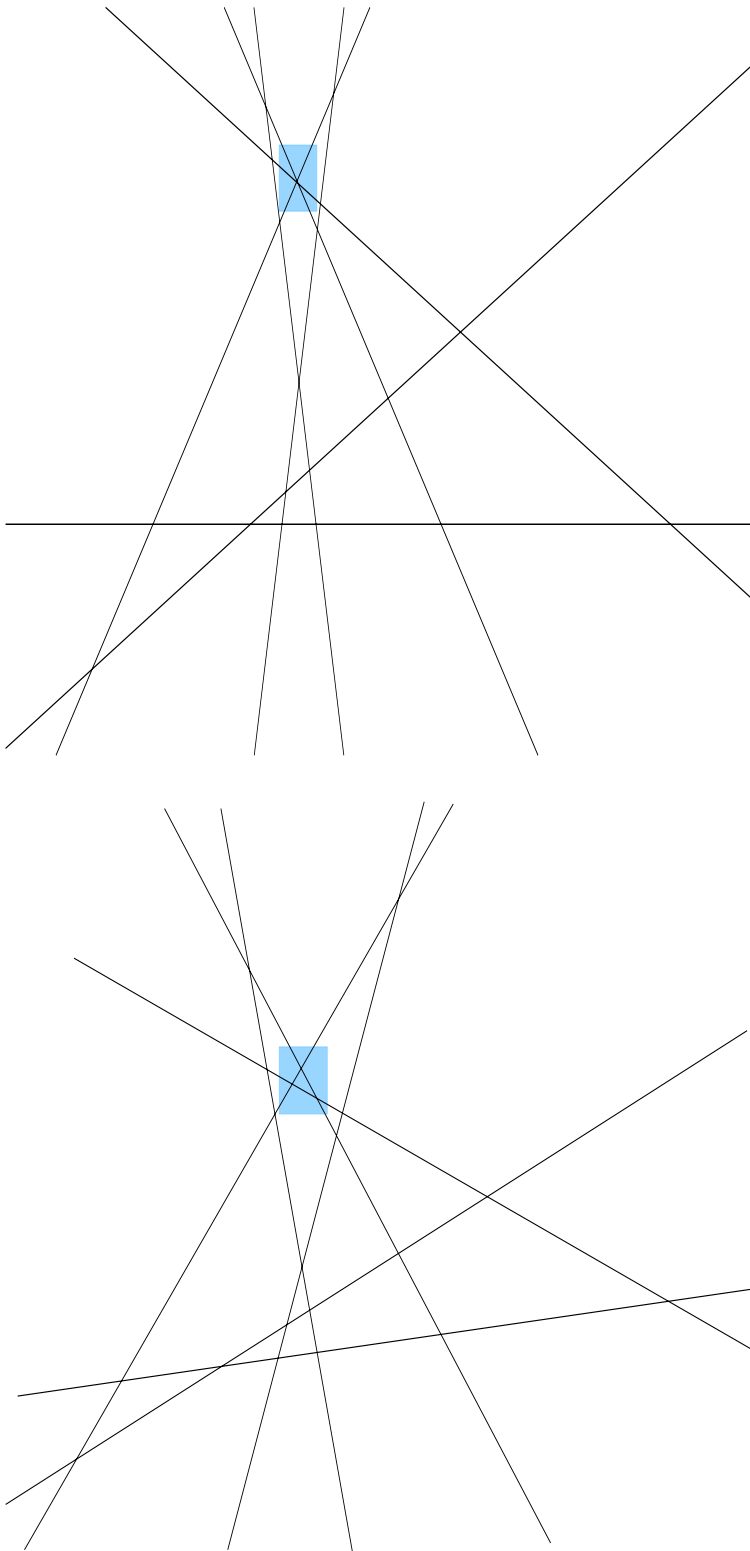


FIG. 5.11 – Optimisation d'un arrangement de 7 droites : configuration de départ en haut $\lambda = 0,0031$, d'arrivée en bas $\lambda = 0,0603$, 8 itérations, amélioration $\times 20$

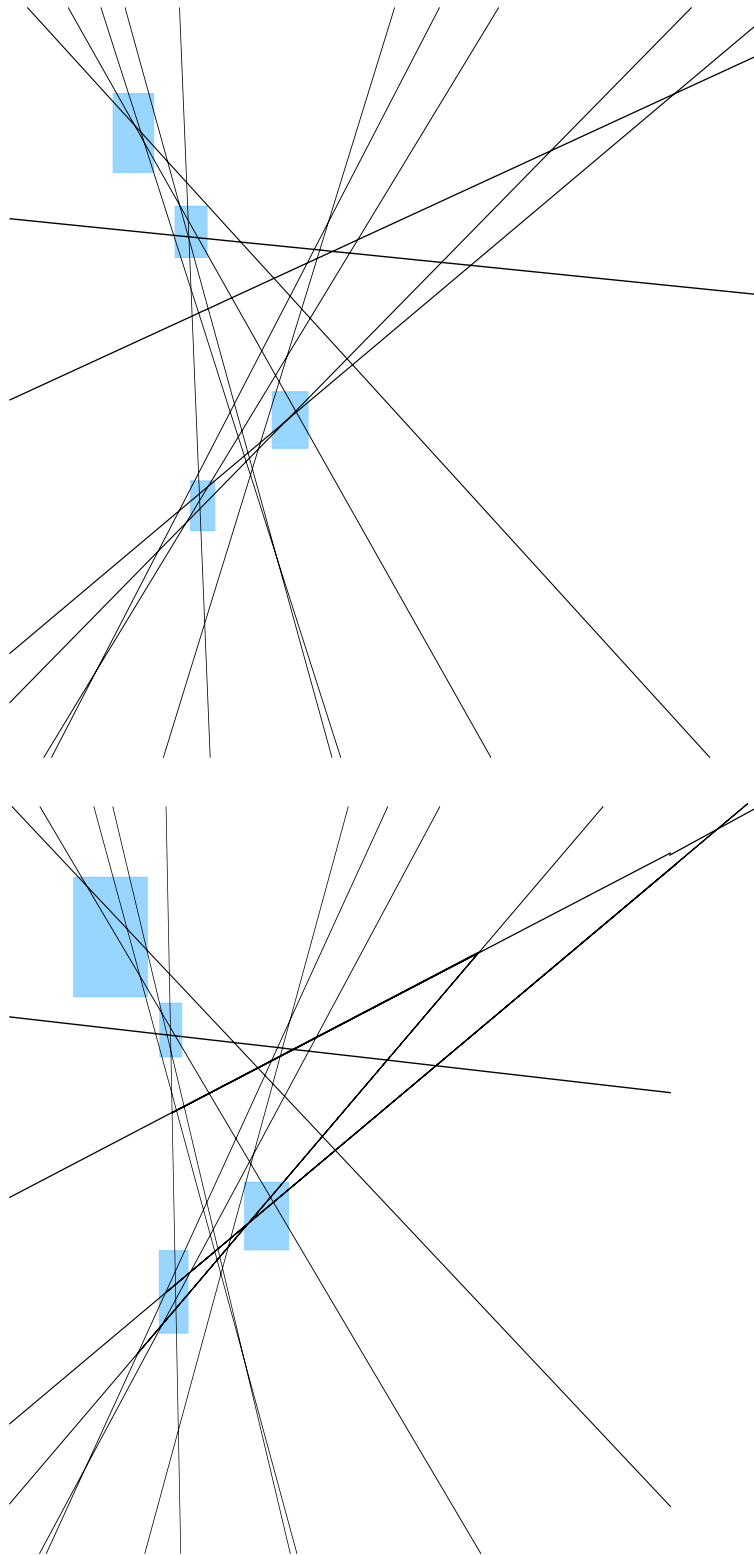


FIG. 5.12 – Optimisation d'un arrangement de 12 droites : configuration de départ en haut $\lambda = 0,0023$, d'arrivée en bas $\lambda = 0,0141$, 5 itérations, amélioration $\times 6$

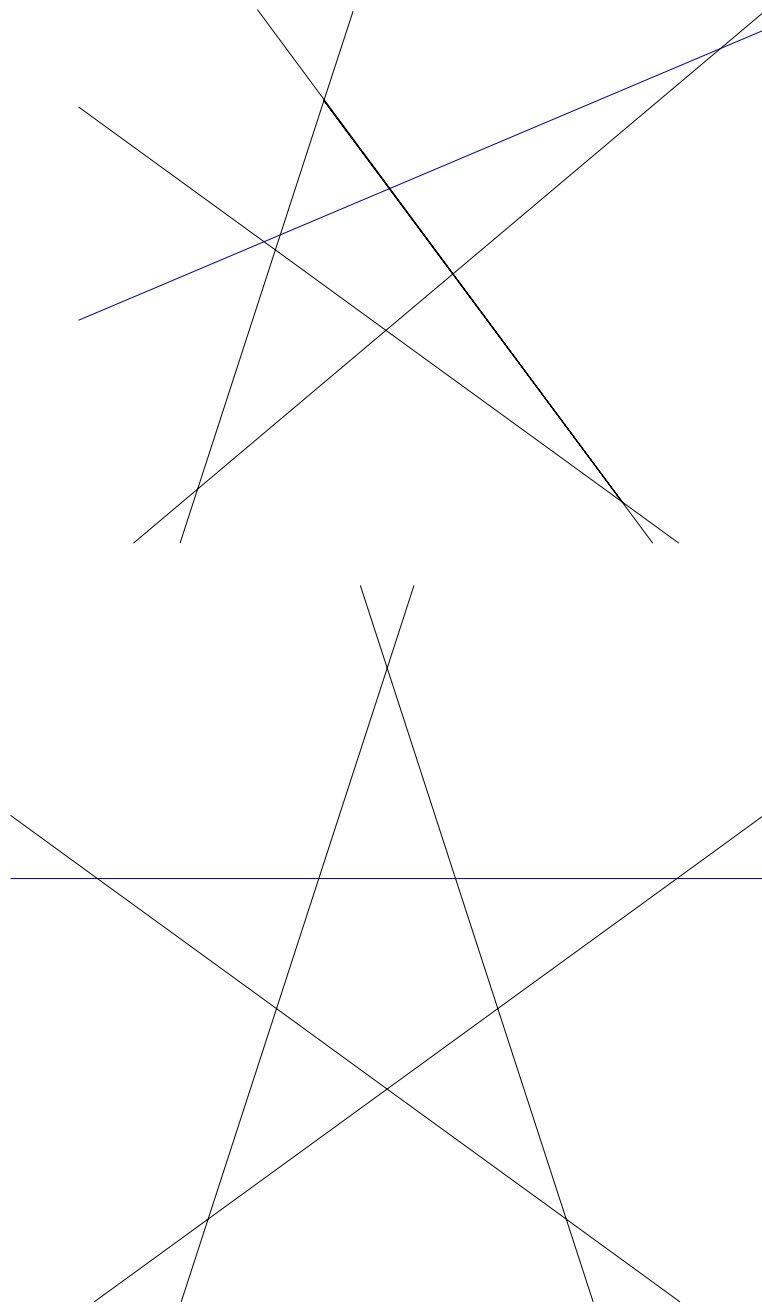


FIG. 5.13 – Optimisation de l’arrangement de 5 droites “pentagone” : configuration de départ en haut $\lambda = 0,0389$, d’arrivée en bas $\lambda = 0,6181$, 6 itérations, amélioration $\times 16$

Chapitre 6

Cas particuliers

Résumé

Dans ce chapitre, nous continuons à étudier l'optimisation de la représentation des arrangements de droites au sens du critère d'allongement λ , en nous attachant aux cas particuliers.

Dans un premier temps, nous nous attardons sur le calcul explicite et analytique de λ pour les configurations optimales à 4 et 5 droites. Ces résultats mettent en évidence le rôle joué par les contraintes géométriques dans les réalisations optimales, qui résultent en l'apparition du nombre d'or sous la forme $\lambda_{opt} = \varphi^{-1}$ pour 4 et 5 droites.

Dans un deuxième temps, nous présentons une classe particulière d'arrangements, les arrangements démontables, qui vérifient tous la conjecture de Ringel. Ceci constitue notre théorème de représentation. Nous proposons enfin une version constructive de ce théorème, sous la forme d'un algorithme de reconstruction permettant de représenter effectivement tout arrangement démontable à angles équirépartis, atteignant ainsi l'optimalité pour le critère μ .

Sommaire

6.1	Optimisation : étude pour des petits nombres de droites	111
6.1.1	Cas $n = 4$ droites	111
6.1.2	Cas $n = 5$ droites	115
6.2	Arrangements démontables	117
6.2.1	Généralités	117
6.2.2	Représentation des arrangements démontables	119
	Théorème de représentation	119
	Conséquences	120
6.2.3	Implémentation algorithmique	121
	Reconstruction	121
	Analyse	121

6.1 Optimisation : étude pour des petits nombres de droites

Dans cette section, nous allons exposer les résultats d'optimisation géométrique obtenus pour les premiers arrangements simples de droites dans le plan euclidien. Ces résultats sont obtenus semi-analytiquement.

6.1.1 Cas $n = 4$ droites

Comme nous l'avons vu chapitre 1.4, pour 4 droites, il n'existe qu'un seul arrangement, ce qui simplifie considérablement notre problème. En outre, le petit nombre de paramètres (4 droites donnent 8 paramètres) nous permet de mener une optimisation analytique, aboutissant au résultat suivant.

Proposition 14. *Pour $n = 4$ nous pouvons obtenir des pentes équiréparties, avec des angles de $\pi/4$: $\mu = \mu_{opt} = 1$, et dans ce cas le critère d'allongement optimal (sous contrainte $\mu = 1$) vaut $\lambda_{max} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414$.*

L'optimisation de λ seul conduit à un $\lambda_{opt} = \varphi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$, pour des angles de $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$ et un critère $\mu = 1/2$.

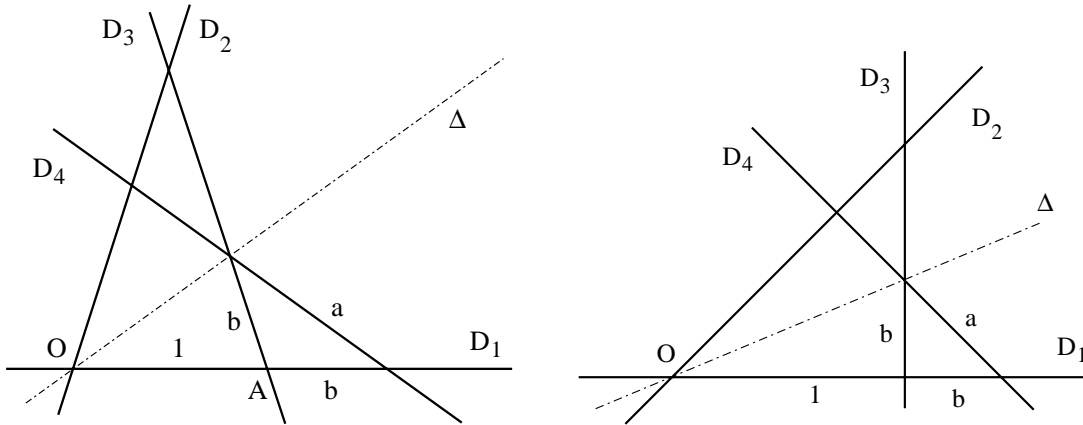


FIG. 6.1 – $n = 4$: représentations à $\lambda_{opt} = \varphi^{-1}$ et sous contrainte $\mu = 1$: $\lambda_{max} = \sqrt{2} - 1$

Preuve :

La figure 6.1, à droite représente l'arrangement optimal (pour le critère λ) à angles équirépartis pour 4 droites. Il s'agit donc d'une optimisation de λ sous contrainte $\mu = 1$.

Les angles de D_1, D_2, D_3, D_4 étant fixés (à numérotation des droites près), on peut choisir l'origine en $O = D_1 \cap D_2$, et la droite D_3 en $x = 1$. Pour des raisons de symétrie, le point d'intersection $C = D_3 \cap D_4$ est situé sur la médiatrice Δ de D_1, D_2 , d'angle $\pi/8$,

ce qui constitue deux triangles rectangles isocèles. En effet, si on déplace légèrement C (donc D_4), on perd l'équilibre entre ces deux triangles isocèles, donc on réduit λ .

Toujours pour des raisons de symétrie, on se retrouve alors avec 8 arêtes, de longueurs 1, a , b (resp. en 2, 2 et 4 exemplaires), cf. figure. On a alors $\lambda = \frac{b}{\text{Max}(1,a)} = \text{Min}(b, b/a)$. Clairement, $b/a = 1/\sqrt{2} \approx 0,707$. D'autre part, $C = D_3 \cap D_4 = D_3 \cap \Delta$ est en $(1, b)$, d'où $b = \tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414$. Donc ici $\lambda = \sqrt{2} - 1$.

Passons maintenant à l'optimisation de λ hors contraintes. On prend toujours D_1 horizontale, mais cette fois, les angles $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ des droites D_2, D_3, D_4 ne sont plus fixés. Toujours pour des raisons de symétrie, on peut supposer que $C \in \Delta$ (figure 6.2), de sorte que les triangles (ACE) et (BCD) sont isocèles en C . Notons $\delta = \theta_2/2$ l'angle de Δ .

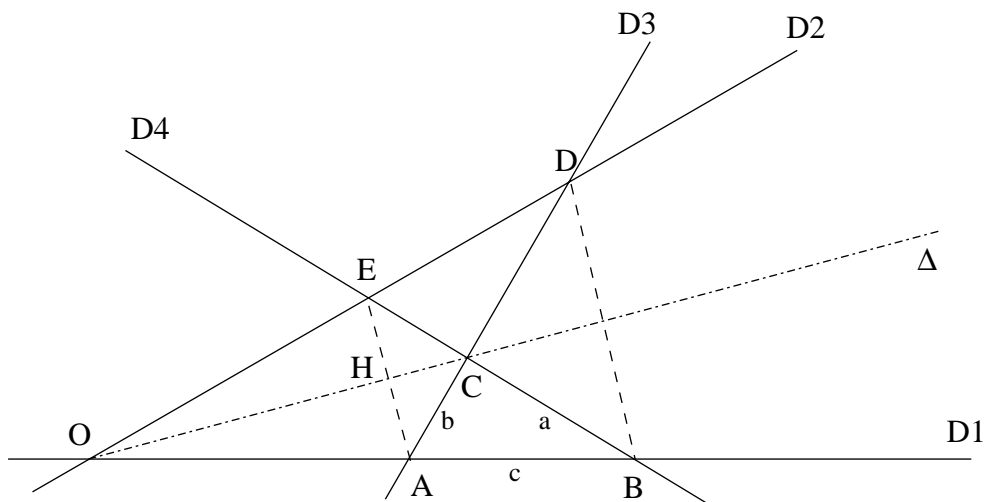


FIG. 6.2 – Arrangements symétriques à $n = 4$

On peut supposer que D_1 et D_2 se coupent en $O(0,0)$ et, quitte à effectuer une homothétie globale, D_1 et D_3 en $A(1,0)$. On peut montrer alors qu'avec cette hypothèse de symétrie, les angles θ_2 et θ_3 suffisent à paramétrer la représentation de l'arrangement, car θ_4 est imposé par les deux premiers :

Dans (ACE) : $\hat{A} = \widehat{CAH} = \hat{E} = \widehat{CEH}$.

D'autre part, $\widehat{OAH} = \pi/2 - \delta$ et $\widehat{CAH} = \hat{A} = \pi - \widehat{OAH} - \theta_3 = \delta - \theta_3 + \pi/2$.

D'où $\hat{A} = \theta_2/2 - \theta_3 + \pi/2$.

Symétriquement, $\widehat{OEH} = \pi/2 - \delta$ et $\widehat{CEH} = \hat{E} = \pi - \widehat{OEH} - \widehat{CED} = \pi - (\pi/2 - \delta) - (\pi + \theta_2 - \theta_4)$. D'où $\hat{E} = \theta_4 - \theta_2/2 - \pi/2$.

Et de $\hat{A} = \hat{E}$, il résulte

$$\theta_4 = \pi - \theta_3 + \theta_2 \tag{6.1}$$

Nous obtenons ainsi deux triangles semblables (ABC) et (CDE) , de longueurs d'arêtes $a = BC = CD$, $b = AC = CE$, $c = AB = DE$.

Calculons maintenant la longueur $b = AC$.

C est l'intersection de Δ , d'équation $y = x \tan \delta$, et de D_3 , passant par $A(1, 0)$, d'équation $y = (x - 1) \tan \theta_3$.

On trouve alors comme coordonnées : $C = \left(\frac{\tan \theta_3}{\tan \theta_3 - \tan \delta}, \frac{\tan \delta \tan \theta_3}{\tan \theta_3 - \tan \delta} \right)$. D'où

$$b^2 = (x_c - 1)^2 + y_c^2 = \frac{\tan^2 \delta (1 + \tan^2 \theta_3)}{(\tan \theta_3 - \tan \delta)^2} \quad \text{et} \quad b = \left| \frac{\tan \delta}{(\tan \theta_3 - \tan \delta) (\cos \theta_3)} \right|$$

λ ne peut être maximal que lorsque les triangles (ABC) et (CDE) sont isocèles, ce qui réduit encore le paramétrage de la représentation au choix de θ_2 seul, comme nous allons le voir. Cela donne les 3 possibilités suivantes pour (ABC) , dont une facile à éliminer.

1er cas : (ABC) est isocèle en A , $AC = b = c = AB$

(L'optimisation à $\mu = 1$ est un cas particulier de ce premier cas, et on pourra vérifier les formules suivantes avec les valeurs établies précédemment)

Alors $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \frac{\pi - \widehat{BAC}}{2} = \frac{\pi - \theta_3}{2}$. Or $\widehat{ABC} = \pi - \theta_4$. D'où

$$2\theta_4 - \theta_3 = \pi \tag{6.2}$$

De 6.1 et 6.2, on tire :

$$\theta_3 = \frac{\pi + 2\theta_2}{3} \quad \text{et} \quad \theta_4 = \frac{2\pi + \theta_2}{3} \quad \text{avec} \quad \theta_2 < \pi; \quad \frac{\pi}{3} < \theta_3 < \pi; \quad \frac{2\pi}{3} < \theta_4 < \pi$$

En remplaçant dans l'expression de b , θ_3 et δ par leur valeur en fonction de θ_2 , on trouve, après simplification (fastidieuse) :

$$b = 2 \sin \left(\frac{\theta_2}{3} + \frac{\pi}{6} \right) - 1 \tag{6.3}$$

D'autre part en décomposant (ACB) en deux triangles rectangles, l'isocélie en A nous permet d'écrire

$$a = 2b \sin \left(\frac{\theta_3}{2} \right) = 2b \sin \left(\frac{\theta_2}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = b(1 + b) \tag{6.4}$$

Ici, $\theta_3 > \pi/3$, donc $2 \sin(\theta_3/2) > 1$ et $a > b$. On a donc

$$\lambda(\theta_2) = \frac{b(\theta_2)}{\max(1, a(\theta_2))} = \min \left(b, \frac{b}{a} \right) (\theta_2)$$

Il ne nous reste qu'à étudier les fonctions $b(\theta_2)$ et $\frac{b}{a}(\theta_2)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$. Il est facile de voir que $b(0) = 0$, $b(\pi) = 1$, et que b est strictement croissante sur $[0, \pi]$. D'autre part, $\frac{b}{a}(\theta_2) = \frac{1}{1+b}(\theta_2)$, vaut 1 en 0, $1/2$ en π , et décroît strictement entre les deux (voir graphe fig. 6.3, gauche).

Il est donc clair que les graphes de ces deux fonctions ont un point d'intersection unique sur $[0, \pi]$, point en lequel est réalisé le maximum de λ . On vérifie facilement, d'une part que ce point est atteint en $\theta_2 = 2\pi/5$, d'autre part qu'on obtient ainsi

$$\lambda_{opt} = \lambda(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

Et cela amène aux angles des droites : $\theta_2 = \frac{2\pi}{5}$, $\theta_3 = \frac{3\pi}{5}$, $\theta_4 = \frac{4\pi}{5}$ qui correspondent, à une symétrie près, à la réalisation de la figure 6.1, gauche.

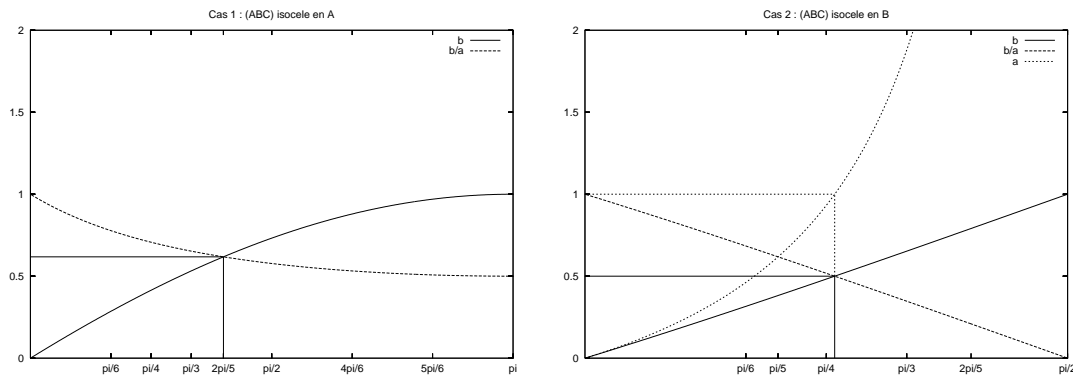


FIG. 6.3 – Graphes des rapports de longueurs en fonction de θ_2

2e cas : (ABC) est isocèle en B , $AB = c = a = BC$

Alors $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = \frac{\pi - \widehat{ABC}}{2} = \frac{\theta_4}{2}$. Or $\widehat{BAC} = \theta_3$, d'où

$$\theta_4 = 2 \theta_3 \tag{6.5}$$

De 6.1 et 6.5, on tire :

$$\theta_3 = \frac{\pi + \theta_2}{3} \quad \text{et} \quad \theta_4 = 2 \frac{\pi + \theta_2}{3} \quad \text{avec} \quad \theta_2 < \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{3} < \theta_3 < \frac{\pi}{2}; \quad \frac{2\pi}{3} < \theta_4 < \pi$$

Ici encore, en remplaçant dans l'expression de b , θ_3 et δ par leurs valeurs, on trouve, après simplification :

$$b = 2 \sin \left(\frac{\theta_2}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + 1 \tag{6.6}$$

D'autre part en décomposant (ACB) en deux triangles rectangles, l'isocélie en B nous permet d'écrire $b = 2a \sin((\pi - \theta_4)/2)$, soit

$$\frac{b}{a} = 2 \sin \left(\frac{\pi - \theta_4}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta_2}{3} \right) = 1 - b \tag{6.7}$$

Étudions rapidement les fonctions $b(\theta_2)$ et $\frac{b}{a}(\theta_2)$ sur $[0, \pi/2]$. On vérifie aisément (voir graphe fig. 6.3, droite) que $b(0) = 0$, $b(\pi/2) = 1$, et b est strictement croissante entre les deux. D'après 6.7, $b/a = 1 - b$, donc $\frac{b}{a}(0) = 1$, $\frac{b}{a}(\pi/2) = 0$ et $\frac{b}{a}$ est strictement décroissante entre les deux. En particulier, $b < a$ sur $[0, \pi/2]$.

La valeur de λ est donc donnée par $\min(b, \frac{b}{a})$, le maximum étant obtenu quand $b = \frac{b}{a} = 1 - b$, d'où $b = 1/2$ et $\lambda_{max} = 1/2$. (valeur atteinte pour une valeur un peu compliquée de l'angle $\theta_2 = \pi/2 - 3 \arcsin(1/4)$), et résulte dans la configuration de la figure 6.4. Ainsi, dans cette configuration (ABC) isocèle en B , λ_{opt} est moins bon que dans le premier cas.

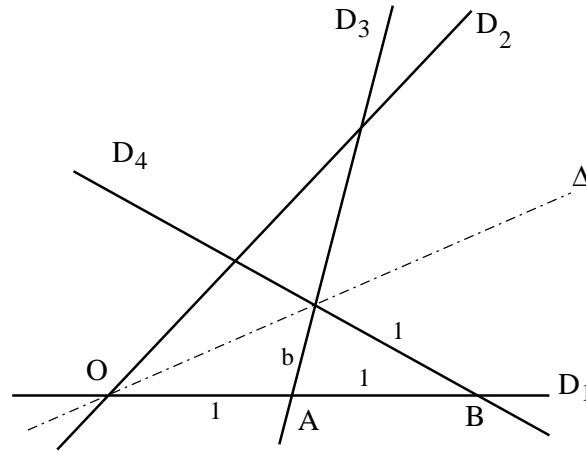


FIG. 6.4 – Réalisation optimale pour (ABC) isocèle en B : $\lambda_{optB} = 0.5$

3e cas : (ABC) est isocèle en C
 Cas impossible, car sinon D_1 et D_2 seraient parallèles.

En définitive, c'est donc le premier cas (isocèle en A) qui réalise le λ optimal. \square

6.1.2 Cas $n = 5$ droites

Comme nous l'avons vu en 1.4, pour 5 droites, il existe 6 arrangements (à une symétrie axiale près), qui sont énumérés figure 6.5. Les arrangements sont représentés dans leur réalisation optimisée, fournie par l'algorithme du chapitre précédent. Pour chacun, le λ optimal, les contraintes d'égalité de longueurs et éventuellement les angles des droites sont donnés sur la figure.

De façon assez naturelle, l'arrangement qui donne le meilleur critère λ est celui engendré par un pentagone régulier. Le λ_{opt} correspondant est alors le même qu'avec 4 droites : $\lambda_{opt} = \varphi - 1$. Cela provient des propriétés géométriques de ce polygone. Les notations sont celles de la figure 6.6.

En effet, il n'existe dans cet arrangement que deux longueurs d'arêtes, $b = AC$ (en 5 exemplaires) et $a = AB$ (en 10 exemplaires), donc $\lambda = \frac{b}{a}$.

On a deux triangles homothétiques, (OBD) et $(OB'D')$, d'où $\frac{B'D'}{OB'} = \frac{BD}{OB}$, soit $\frac{b}{a} = \frac{b+a}{b+2a}$.

On en déduit $b^2 + ab - a^2 = 0$, soit en divisant le tout par a^2 , l'équation bien connue du nombre d'or :

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

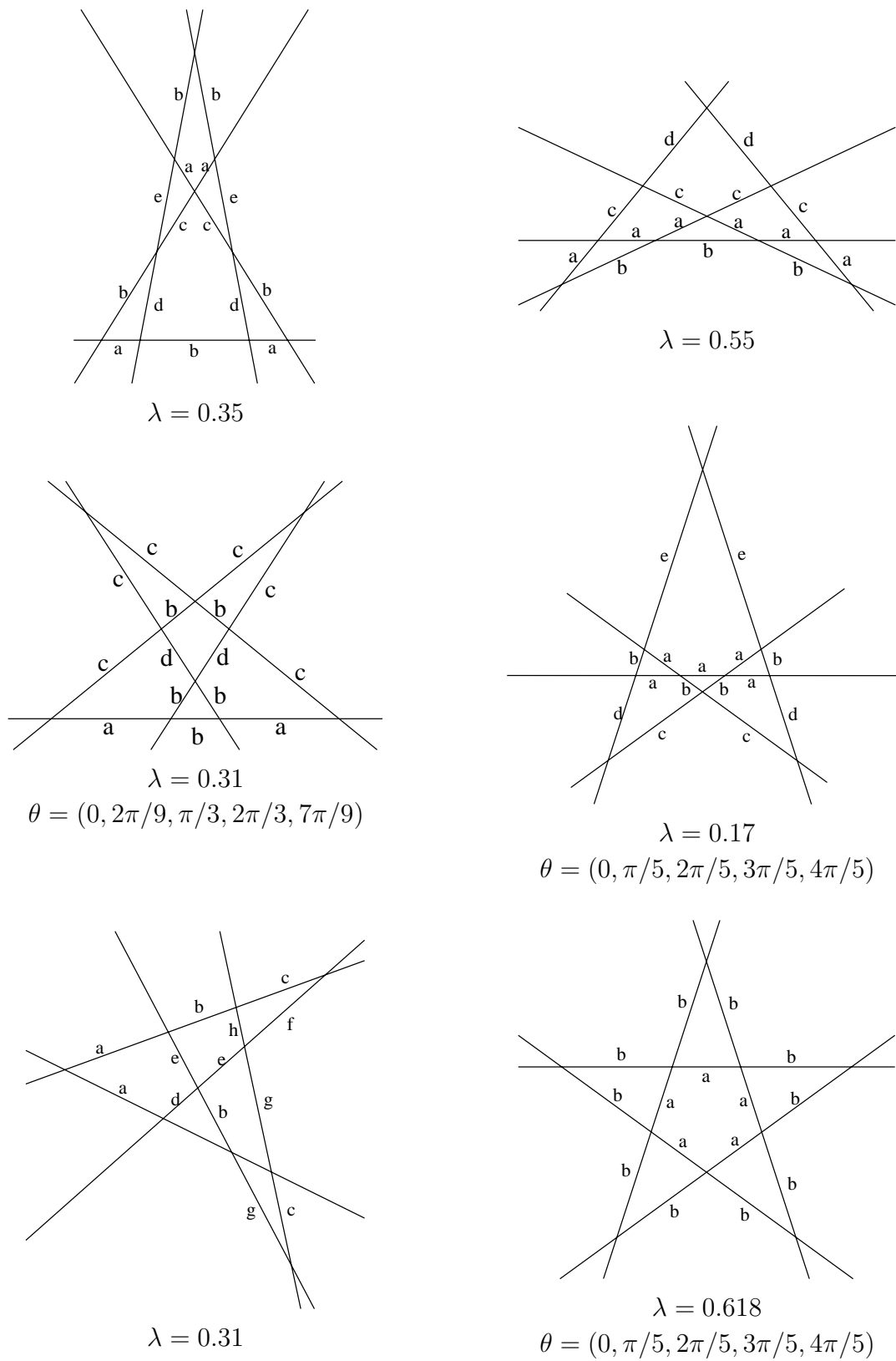


FIG. 6.5 – Les 6 arrangements euclidiens de 5 droites optimisés

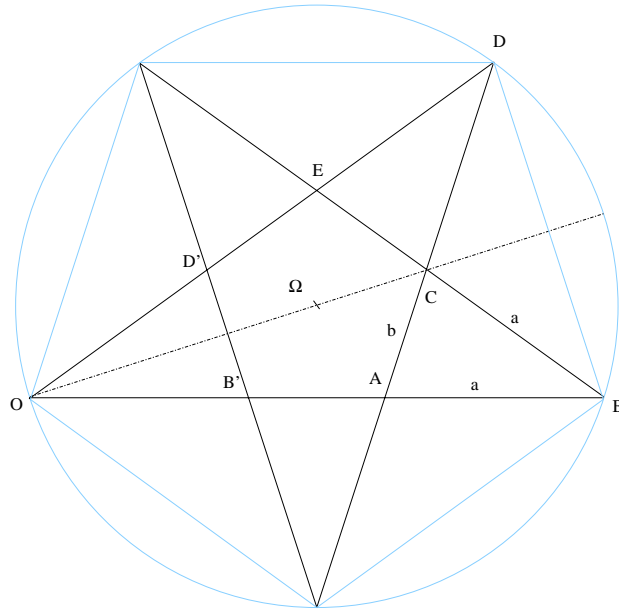


FIG. 6.6 – Arrangement issu d'un pentagone régulier

Et comme $\lambda < 1$, finalement $\lambda = \varphi - 1 = \varphi^{-1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

6.2 Arrangements démontables

Dans cette section, nous présentons la notion (intuitive) d'arrangement démontable, et donnons un théorème permettant de représenter cette classe d'arrangements à pentes fixées.

6.2.1 Généralités

Nous nous plaçons dans le plan **euclidien** et, comme précédemment, pour un arrangement $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ de n droites du plan, nous notons $\theta_i \in [0, \pi[$ l'angle de la droite D_i avec l'horizontale, et nous supposons les droites indexées par ordre d'angles croissants, de façon à avoir $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_n < \pi$. L'arrangement étant supposé simple, les inégalités sont strictes (pas de droites parallèles).

Nous notons encore θ la fonction qui à chaque droite associe son angle ainsi défini : $\theta(D_i) = \theta_i$.

Définition 25. Un arrangement $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ de $n \geq 3$ droites dans le plan euclidien est dit démontable si :

- il existe une droite D_i telle que les sommets issus de $\mathcal{A}(\mathcal{D} \setminus D_i)$ soient tous du même côté de D_i . D_i est alors dite *ôttable* : on peut, sans modifier la com-

binatoire de l'arrangement, l'“enlever” en la tirant vers l'infini, parallèlement à elle-même.

– l'arrangement de $(n - 1)$ droites $\mathcal{D} \setminus D_i$ est lui-même démontable.

On appelle *démontage* de l'arrangement \mathcal{D} un n -uplet $(D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(n)})$, où $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et tel que $\mathcal{D} \setminus \{D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(k)}\}$ est démontable pour tout $0 \leq k \leq n - 1$.

Remarque : la donnée d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ définit de façon équivalente un démontage de \mathcal{D} .

La définition précédente amène naturellement à un ordre de démontage sur les droites, ordre qui n'est pas forcément unique. D'où la définition d'un rang de démontage :

Définition 26. On appelle *rang de démontage de la droite D_i* , et on note r_i , le plus petit rang possible de D_i parmi tous les n -uplets formant les démontages de \mathcal{D} . On appelle *rang de démontage de l'arrangement \mathcal{D}* , et on note $Rd(\mathcal{D}) = (r_1, \dots, r_n)$, le n -uplet constitué des rangs de démontage des droites $D_{i, 1 \leq i \leq n}$.

Exemple :

L'arrangement à 3 droites est évidemment démontable, dans n'importe quel ordre.

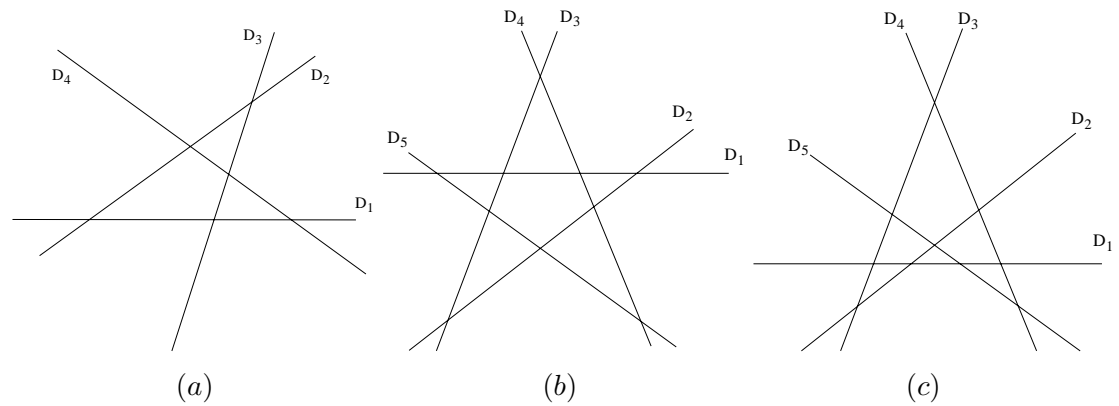


FIG. 6.7 – Arrangements démontables (a, c) et non démontable (b)

Celui à 4 droites (a) est aussi démontable, mais pas dans n'importe quel ordre : on a deux droites “extérieures” de rang 1 (D_1 et D_2 , figure 6.7), et deux droites “intérieures” de rang 2 (D_3 et D_4).

Parmi les 6 arrangements euclidiens à 5 droites, un seul n'est pas démontable : celui correspondant au pentagone régulier (b). Pour exemple, l'arrangement (c) admet 24 démontages, à savoir $(D_3, D_2, [D_1, D_4, D_5])$, $(D_3, D_4, [D_1, D_2, D_5])$, $(D_4, D_3, [D_1, D_2, D_5])$, $(D_4, D_5, [D_1, D_2, D_3])$, où les crochets $[]$ indiquent toutes les permutations possibles des 3 éléments. Il en résulte le rang de démontage : $Rd = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) = (3, 2, 1, 1, 2)$.

Parmi les 43 arrangements euclidiens à 6 droites, énumérés au chapitre 4, 27 sont démontables. Il s'agit de :

- 5 de type I : I.c ; I.g à I.j
- 13 de type II : II.a, II.b ; II.g à II.n ; II.p à II.r
- 9 de type III : III.b à III.e ; III.h à III.k ; III.l
- (aucun de type IV)

En généralisant l'exemple du pentagone régulier pour $n = 5$, il est facile de voir que pour tout n impair, il existe au moins un arrangement non-démontable, celui issu du polygone régulier à n côtés. Cependant, cet exemple n'est pas unique : pour $n = 7$, par exemple, l'arrangement de la figure 4.2, à droite, p.81, n'est pas démontable car aucune droite n'est ôtable.

Plus généralement, même si nous n'avons pas d'énumération explicite, nous observons que quand n augmente, la proportion d'arrangements démontables diminue, comme l'on peut s'y attendre.

Lemme 15. *À permutation circulaire des droites près, le rang de démontage d'un arrangement réalisé \mathcal{D} de $n \geq 3$ droites est invariant par isotopie sur l'arrangement.*

Preuve :

Il suffit de procéder par isotopie itérative.

Chaque déplacement élémentaire, par définition, laisse les sommets du même côté de la droite déplacée, donc pour tout déplacement élémentaire d'une droite D_i en D'_i , D_i est ôtable si et seulement si D'_i l'est.

Par récurrence descendante sur le nombre de droites, cela assure que le rang de démontage de D_i reste invariant par isotopie.

Ceci étant valable pour toutes les droites, il en va de même pour le rang de démontage de l'arrangement \mathcal{D} . □

Ce lemme assure qu'il est bien correct de parler du rang de démontage d'un arrangement, alors qu'on considère dans toute la suite tout arrangement à isotopie près.

6.2.2 Représentation des arrangements démontables

Théorème de représentation

Théorème 16. *Un arrangement démontable \mathcal{D} de $n \geq 3$ droites peut être représenté dans le plan euclidien avec des droites de pentes arbitraires, ou, autrement dit, d'angles arbitrairement fixés $0 \leq \theta'_1 < \dots < \theta'_n < \pi$.*

Preuve :

Nous allons utiliser l'isotopie et les déplacements élémentaires qu'elle permet pour transformer \mathcal{D} , en imposant les pentes des droites.

Plus précisément, supposons \mathcal{D} démontable dans l'ordre $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, d'angles de départ $\theta_1 < \dots < \theta_n$.

Nous utilisons l'hypothèse de récurrence sur m suivante $\text{HR}(m)$: si \mathcal{D}_m est un arrangement démontable de m droites, tel qu'on peut ôter D_m , alors l'arrangement \mathcal{D}_m peut être transformé par isotopie en arrangement à pentes arbitraires.

Remarquons que cette hypothèse est plus restrictive que celle du théorème lui-même car elle impose d'ôter en premier la droite de plus grand angle.

Pour $m = 3$, c'est trivial car on obtient un arrangement de droites correspondant à un triangle prolongé. Il conserve évidemment sa combinatoire quelle que soit l'isotopie appliquée, celle-ci assurant que le triangle ne s'aplatit pas.

Supposons $\text{HR}(m)$, et considérons un arrangement $\mathcal{D}_{m+1} = (D_1^{m+1}, \dots, D_m^{m+1}, D_{m+1}^{m+1})$ de $m + 1$ droites, tel qu'on peut ôter D_{m+1}^{m+1} .

Par HR , l'arrangement issu de $(D_1^{m+1}, \dots, D_m^{m+1})$ est représentable à angles arbitraires par une transformation isotope \mathcal{I} . L'isotopie \mathcal{I} étant une application continue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$, au cours de cette transformation, l'ensemble des sommets de $\mathcal{A}(D_1^{m+1}, \dots, D_m^{m+1})$ reste inclus dans une boule $B(O, r)$.

On peut donc préalablement à \mathcal{I} appliquer, si nécessaire, à D_{m+1}^{m+1} une translation \mathcal{T} l'éloignant de l'origine jusqu'à une distance $R > r$, parallèlement à elle-même. La droite D_{m+1}^{m+1} étant ôtable, ceci constitue un déplacement élémentaire.

Maintenant, D_{m+1}^{m+1} peut subir une rotation autour de l'origine, $\mathcal{R}(O, \theta)$, de façon à l'amener à l'angle voulu.

D_{m+1}^{m+1} ne franchira aucun sommet de $\mathcal{A}(D_1^{m+1}, \dots, D_m^{m+1})$. Les seules contraintes sur D_{m+1}^{m+1} sont les contraintes de non-parallélisme de l'isotopie : $\theta(D_m^{m+1}) < \theta(D_{m+1}^{m+1}) < \theta(D_1^{m+1})$.

La composition de \mathcal{T} , \mathcal{I} et $\mathcal{R}(O, \theta)$ constitue ainsi une nouvelle isotopie, et l'arrangement \mathcal{D}_{m+1} peut être représenté à pentes arbitraires par isotopie, ce qui achève la récurrence.

Le passage de l'hypothèse de récurrence à l'hypothèse du théorème se fait en autorisant une rotation globale de l'arrangement (ce qui constitue bien une isotopie) avant chaque étape de la récurrence, ce qui étend le procédé à un ordre de démontage arbitraire. \square

Conséquences

Ainsi, les arrangements démontables vérifient la conjecture de Ringel énoncée au chapitre précédent (5.2.2). En particulier, ils peuvent être représentés à angles équirépartis ($\mu = 1$). Mais cela n'assure pas pour autant que l'arrangement soit aisément lisible, car le critère d'allongement λ peut être très mauvais.

Remarque : le théorème précédent établit une condition suffisante pour qu'un arrangement vérifie la conjecture de Ringel. Ce n'est toutefois pas une condition nécessaire : l'arrangement issu du pentagone régulier étudié précédemment n'est pas démontable, alors qu'il est réalisable à pentes arbitraires, puisque Richter et

Sturmfels ont démontré dans [31] que le plus petit contre-exemple à la conjecture de Ringel possède 6 droites. Autrement dit, tout arrangement auto-bloquant est non-démontable, mais ces deux notions ne sont pas confondues.

6.2.3 Implémentation algorithmique

Reconstruction

Pour un arrangement démontable, la démonstration précédente assure l'existence d'une représentation à angles arbitraires, mais ne donne pas de construction.

Il existe pourtant un algorithme simple permettant de construire cette représentation; en voici l'idée : il s'agit de "remonter" l'arrangement, c'est-à-dire le construire de façon incrémentale, en ajoutant les droites une à une dans l'ordre inverse du démontage.

Partant d'un arrangement démontable donné $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ et d'un ensemble ordonné de valeurs angulaires $0 \leq \theta'_1 < \dots < \theta'_n < \pi$, on construit un arrangement $\mathcal{D}' = \{D'_1, \dots, D'_n\}$ combinatoirement équivalent à \mathcal{D} , tel que $\forall i, \theta(D'_i) = \theta'_i$. Pour cela, on "remonte" \mathcal{D} et on effectue simultanément les mêmes opérations sur \mathcal{D}' .

Si nous notons $(D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(n)})$ le démontage de \mathcal{D} alors le remontage s'effectue dans l'ordre donné par la suite des indices : $u_1 = \sigma(n), u_2 = \sigma(n-1), \dots, u_i = \sigma(n-i+1), \dots, u_n = \sigma(1)$, ce qui conduit directement à l'algorithme suivant, dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé.

- Pour $i = 1, 2$
 - placer D_{u_i} , d'angle θ_{u_i} , passant par O .
- Pour $i = 3$: placer D_{u_3} , d'angle θ_{u_3} , à distance 1 de O
- Pour $i = 4$ à n
 - calculer une boule $B(O, r)$ contenant les sommets de $\mathcal{A}(D_{u_1}, \dots, D_{u_{i-1}})$
 - placer D_{u_i} d'angle θ_{u_i} , à distance $2r$ de O
- Fin pour i

Analyse

Cet algorithme donne une version constructive du théorème de représentation.

L'algorithme est clairement incrémental, comportant n étapes. A chaque étape i , l'opération coûteuse est le calcul de la boule contenant tous les sommets des droites déjà placées. Pour cela, il faut prendre en compte les $i-1$ situés sur la droite ajoutée.

En définitive, l'algorithme effectue $O(n^2)$ calculs de distances, de même ordre que la complexité de l'algorithme.

Pour tous les arrangements démontables, cet algorithme permet effectivement d'atteindre l'optimalité du critère μ , les valeurs angulaires à atteindre étant fixées aux multiples de π/n .

Perspectives

Les sujets que nous avons abordés dans cette thèse étaient vastes, et, bien que nous ayons fait de petits pas dans quelques directions de recherche, il reste beaucoup à faire pour faire avancer significativement les idées que nous avons proposées, à la fois du point de vue théorique, et pour les implémentations que nous en avons faites dans la pratique.

La première direction serait de compléter la définition de l'isotopie d'un ensemble de droites que nous avons proposée chapitre 2, afin d'obtenir explicitement une seule paramétrisation globale, sans changement de repère intermédiaire. Plus satisfaisante pour l'esprit et pour la fluidité de la théorie, l'existence d'une telle paramétrisation permettrait également de simplifier les démonstration techniques, sans rien changer à l'idée intuitive de l'isotopie.

D'un point de vue logiciel, il serait intéressant de tenter l'implémentation effective de l'algorithme de reconstruction d'un arrangement de droites par niveaux de squelettes sous sa version parallèle, au moins comme test de faisabilité, et de mesurer si conformément à l'intuition le gain en temps de calcul est significatif. Il serait également intéressant d'étendre cet algorithme à d'autres classes de courbes que les droites (à préciser), pouvant se définir par la même information combinatoire minimale, à savoir l'ordre des intersections le long de chaque courbe. Les courbes concernées pourraient être des *pseudolines*, ensemble de courbes qui ne se coupent deux à deux qu'en un seul sommet, comme les droites, ou même des courbes plus générales.

Mais les pistes les plus prometteuses semblent provenir du problème de représentation et des critères d'optimalité. Il serait par exemple intéressant d'étudier des variantes de λ , comme le rapport de la plus courte arête au diamètre de l'arrangement. Il est probable que ce critère λ' ne change pas fondamentalement les résultats des algorithmes d'optimisation, mais il peut peut-être accélérer les calculs, en concentrant l'optimisation sur l'expansion de l'arête la plus courte exclusivement.

Cependant, les deux idées les plus intéressantes à l'heure actuelle semblent être les suivantes. En premier lieu, utiliser l'algorithme d'optimisation de λ pour iden-

tifier les contraintes géométriques à atteindre (triangles isocèles, arêtes de longueurs égales, symétries), reconnaissables sous forme de situations “d’équilibre” entre arêtes critiques. Si l’on arrive à une telle reconnaissance automatique, il est probablement possible d’utiliser ensuite la connaissance de ces contraintes pour déterminer plus efficacement les droites à bouger, par exemple sous la forme de groupes de droites à déplacer ensemble : une symétrie impliquant que deux droites doivent être déplacées simultanément, un triangle isocèle imposant des contraintes à trois droites, etc.

En deuxième lieu, mais à plus long terme, on peut envisager d’essayer de reconnaître automatiquement certains “motifs” parmi les droites de l’arrangement : par exemple, les sous-arrangements “auto-bloquants”, comme les deux exhibés au chapitre 5, qui réfutent la conjecture de Ringel. Ceci permettrait de les traiter comme des cas particuliers, par exemple en leur assignant une réalisation optimale pré-calculée. Les droites concernées réaliseraient alors un “cadre” inamovible, à l’intérieur duquel l’algorithme d’optimisation pourrait se concentrer sur les droites “libres”. Le problème de cette approche est probablement sa grande complexité algorithmique, se traduisant par un coût de calcul important, et peut-être rédhibitoire pour des arrangements dépassant la vingtaine de droites.

Enfin, si les questions générales sont trop complexes pour des arrangements simples généraux, on peut envisager de se concentrer sur des cas particuliers, comme les arrangements démontables, que nous avons définis au chapitre 6. Dans un arrangement non-démontable donné, on peut essayer de trouver le plus petit sous-arrangement non-démontable, afin d’appliquer l’optimisation par “reconnaissance de motif” esquissée plus haut. D’un point de vue seulement combinatoire, on peut également s’intéresser à mesurer la “complexité de montage” d’un arrangement, par le nombre minimal de droites à enlever pour rendre démontable un arrangement qui ne l’est pas initialement. Enfin, nous avons donné par les arrangements démontables une caractérisation combinatoire de certains arrangements compatibles avec la conjecture de Ringel. Il serait plus intéressant encore de combler le fossé qui sépare les arrangements démontables des arrangements auto-bloquants, c’est-à-dire de caractériser de façon combinatoire la totalité des arrangements non auto-bloquants.

Dans tous les cas, il reste un important travail algorithmique à faire sur l’ensemble du sujet, qui permettra peut-être de mettre au jour de nouvelles questions théoriques.

Bibliographie

- [1] P. K. Agarwal. *Intersection and Decomposition Algorithms for Planar Arrangements*. Cambridge University Press, 1991.
- [2] O. Aichholzer, F. Aurenhammer, and H. Krasser. Enumerating order types for small point sets with applications. In *Proc. 17th annual symposium on Computational Geometry*, pages 11–18. ACM Press, 2001.
- [3] O. Aichholzer and H. Krasser. The point set order type data base : A collection of applications and results. In *Proc. 13th Annual Canadian Conference on Computational Geometry CCCG 2001*, pages 17–20, 2001.
- [4] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, and G. Ziegler. *Oriented Matroids*, volume 46 of *Encyclopedia of Mathematics*. Cambridge University Press, 1993.
- [5] J.-D. Boissonnat and M. Yvinec. *Géométrie Algorithmique*. Ediscience, 1995.
- [6] E. Brisson. *Representation of d-Dimensional Geometric Objects*. PhD thesis, University of Washington, Seattle, 1990.
- [7] K. L. Clarkson, H. Edelsbrunner, L. J. Guibas, M. Sharir, and E. Welzl. Combinatorial complexity bounds for arrangements of curves and surfaces. Technical report, Dpt of Computer Science, University of Illinois at Urbana-Champaign, November 1988.
- [8] M. Closson, H. Everett, S. Gartshore, and S. Wismath. Arrangepak, orthopak and vispak 2.0. Technical Report TR-CS-01-98, University of Lethbridge, 1998.
- [9] M. de Berg, P. Bose, O. Cheong, and P. Morin. On simplifying dot maps. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 2002. special issue on 18 European Workshop on Computational Geometry, 2002.
- [10] F.-R. Degott. *Partitionnement du plan par des courbes*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 1991.
- [11] D. P. Dobkin and M. J. Laszlo. Primitives for the manipulation of three-dimensional subdivisions. In *Proc. 3rd ACM Symp. on Comp. Geometry*, 1987.

- [12] D. P. Dobkin and A. Tal. Efficient and small representation of line arrangements with applications. In *Proc. 17th annual symposium on Computational Geometry*, pages 293–301. ACM Press, 2001.
- [13] H. Edelsbrunner. *Algorithms in Combinatorial Geometry*. Springer-Verlag, 1987.
- [14] H. Edelsbrunner, L. Guibas, J. Pach, R. Pollack, R. Seidel, and M. Sharir. Arrangements of curves in the plane-topology, combinatorics, and algorithms. *Theoretical Computer Science*, pages 319–336, 1992.
- [15] D. Eu, E. Guévremont, and G. T. Toussaint. On envelopes of arrangements of lines. *J. Algorithms*, 21(1) :111–148, Jul 1996.
- [16] J. E. Goodman. Proof of a conjecture of burr, grünbaum, and sloane. *Discrete Mathematics*, 1(32) :27–35, 1980.
- [17] J. E. Goodman and J. O’Rourke. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press, 1997.
- [18] J. E. Goodman and R. Pollack. Multidimensional sorting. *SIAM J. Comput.*, 12(3) :484–507, 1983.
- [19] B. Grünbaum. *Convex Polytopes*, chapter 18. John Wiley & Sons, London, 1967.
- [20] B. Grünbaum. Arrangement of hyperplanes. In *Proc. 2nd Louisiana Conf. on Combin., Graph Theory, and Comput.*, pages 41–106, 1971.
- [21] B. Grünbaum. Arrangement and spreads. In *Regional Conf. Ser. Math.*, pages 41–106. Amer. Math. Soc., Providence, 1972.
- [22] L. Guibas and J. Stolfi. Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of voronoï diagrams. *ACM Trans. Graphics*, 4(2) :74–123, 1985.
- [23] J. Hopcroft and R. Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of ACM*, 21(4) :549–568, 1974.
- [24] V. Lang. *Une étude de l’utilisation des ensembles simpliciaux en modélisation géométrique interactive*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1995.
- [25] P. Lienhardt. Subdivisions of n-dimensional spaces and n-dimensional generalized maps. *ACM 0-89791-318-3/89/0006/0228*, 1989.
- [26] P. Lienhardt. Topological models for boundary representation : a comparison with n-dimensional generalized maps. *Computer-aided design*, 23(1), Jan-Feb 1991.
- [27] P. Lienhardt. n-dimensional generalized combinatorial maps and cellular quasi-manifolds. *Intern. J. Comput. Geometry & Applications*, 4(3) :275–324, 1994.

- [28] H. Everett P. Bose and S.K. Wismath. Properties of arrangement graphs. *to appear, ?*
- [29] K. Vo Phi. *Contribution à l'étude des arrangements : équivalences combinatoires et perturbations*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 1994.
- [30] F. P. Preparata and M. I. Shamos. *Computational Geometry, an Introduction*. Springer-Verlag, 1985.
- [31] J. Richter and B. Sturmfels. On the topology and geometric constructions of oriented matroids and convex polytopes. *Transactions Amer. Math. Soc.*, 325 :389–412, 1991.
- [32] G. Ringel. Teilungen der Ebene durch Geraden oder Topologische Geraden. *Math. Z.*, 1(64) :79–102, 1956.
- [33] D. Schmitt. *Sur les diagrammes de Voronoï et de Delaunay d'ordre k dans le plan et dans l'espace*. PhD thesis, Université de Haute-Alsace, 1995.
- [34] N. Sleumer. *Hyperplane Arrangements : Construction, Visualization and Applications*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zürich, 2000.
- [35] N. Sleumer and A. Fussen. Hyparr project. <http://www.jn.inf.ethz.ch/hyparr/>.
- [36] M. Las Vergnas. Order properties of lines in the plane and a conjecture of g. ringel. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 41(2) :246–249, 1986.
- [37] S. Wismath. Arrangepak. <http://www.cs.uleth.ca/~wismath/packages/>.

RÉSUMÉ

Les arrangements de droites du plan sont étudiés en géométrie algorithmique pour leur simplicité géométrique couplée à leur grande richesse combinatoire, ou topologique. Notre contribution porte en partie sur la recherche de structures de données couplées à des algorithmes, efficaces à la fois pour la construction des arrangements et l'exploitation de l'information minimale les définissant.

Mais l'apport principal de notre travail est l'étude de la représentation géo-métrique des arrangements, notamment par la définition d'une équivalence géométrique entre deux ensembles de droites du plan euclidien par *isotopie*, qui justifie théoriquement l'algorithme d'optimisation géométrique que nous proposons. Cet algorithme se base sur des critères de "lisibilité" de la représentation d'un arrangement, que nous proposons et justifions. Nous donnons également des résultats d'optimisation analytique pour les très petits nombres de droites.

ABSTRACT

Lines arrangements in the plane are widely studied in computational geometry, for their geometric simplicity and combinatorial, or topological complexity. Our contribution is partially the search for relevant data structures and algorithms, efficient both for arrangements construction and exploitation of the minimal information characterizing these arrangements. However, our main contribution is the study of the geometric representation of arrangements, by the definition of a geometric equivalence between two sets of lines in the euclidean plane, called *isotopy*. This is the theoretical justification of the geometric optimization algorithm we propose. This algorithm is based on several criteria to quantify the geometric "niceness" of an arrangement representation, that we present. We also give results on analytical optimization of arrangements with very few lines.