Propriétés diophantiennes de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs

Tanguy Rivoal

Thèse de Doctorat de l'Université de Caen

Spécialité : Mathématiques

présentée par :

M. Tanguy RIVOAL

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Caen

sur le sujet :

Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs

Soutenue le 29 juin 2001 devant le jury composé de :

M. AMOROSO Francesco	Université de Caen	Directeur
M. COHEN Henri	Université de Bordeaux 1	Examinateur
M. NESTERENKO Yuri	Université de Moscou	Rapporteur
M. REYSSAT Eric	Université de Caen	Examinateur
M. VIOLA Carlo	Université de Pise	Examinateur
M. WALDSCHMIDT Michel	Université de Paris 6	Rapporteur

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 D'Euler à Apéry

Le problème de Bernoulli

Dans son ouvrage *Tractatus de seriebus infinitis* (1689), Jakob Bernoulli pose le problème de l'évaluation de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$: il écrit « Si quelqu'un détermine et nous communique ce qui a jusqu'ici échappé à tous nos efforts, grande sera notre gratitude ». Il revient à L. Euler de résoudre ce problème en 1735, de façon très ingénieuse [1] :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Euler donne par la suite plusieurs démonstrations de cette identité et parvient plus généralement à déterminer la valeur de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^s$ aux entiers pairs, en montrant que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n},$$

où les nombres rationnels B_{2n} sont les nombres de Bernoulli, que l'on peut définir par leur série génératrice exponentielle

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

En revanche, ni Euler, ni personne après lui, n'est parvenu à une expression aussi simple pour les nombres $\zeta(2n+1)$ (n entier ≥ 1). On peut

[1] Voir [Du, ch.3] par exemple.

cependant citer une formule essentiellement due à Ramanujan et considérée comme l'analogue naturel de la formule d'Euler [2]

$$(-\beta)^{-n}\left(\frac{1}{2}\zeta(2n+1)+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^{-2n-1}}{e^{2\beta k}-1}\right)=$$
$$\alpha^{-n}\left(\frac{1}{2}\zeta(2n+1)+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^{-2n-1}}{e^{2\alpha k}-1}\right)+2^{2n}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k B_{2k}B_{2n+2-2k}}{(2k)!(2n+2-2k)!}\alpha^{n+1-k}\beta^k$$

où α et β sont tels que $\alpha\beta=\pi^2$. Malgré son intérêt, la formule de Ramanujan ne permet pas de décider si les nombres $\zeta(2n+1)$ s'expriment rationnellement à l'aide de π^{2n+1}.

Rationnels ou irrationnels ?

Un problème lié au précédent est la détermination de la nature arithmétique des nombres $\zeta(s)$ pour les entiers $s \geq 2$: s'agit-il de nombres rationnels ou irrationnels, de nombres algébriques ou transcendants, et plus généralement existe-t-il ou non des relations de dépendances algébriques entre eux ?

La transcendance de π démontrée par Lindemann en 1882 [L] et la formule d'Euler permettent de répondre complètement à cette question pour le cas pair : pour tout entier $n \geq 1$, le nombre $\zeta(2n)$ est transcendant, et on pourrait aussi ajouter que ces nombres sont algébriquement dépendants.

La situation est beaucoup plus mystérieuse pour les nombres $\zeta(2n+1)$. La formule de Ramanujan n'a pas été exploitée comme la formule d'Euler, même s'il n'est pas impossible qu'elle le soit un jour. Et ce n'est qu'en 1978 que R. Apéry [A1] est parvenu à montrer l'irrationalité de $\zeta(3)$: bien que sa méthode ait été accueillie avec scepticisme et jugée peu orthodoxe [3] , elle n'en a pas moins été rapidement validée et aurait sans doute été appréciée [4] par Euler.

[2] Voir [Ber] pour une démonstration de cette formule et de bien d'autres.

[3] [VdP] et [MF] décrivent l'exposé surréaliste d'Apéry aux Journées Arithmétiques de Luminy en 1978.

[4] Peut-être l'aurait-elle été un peu moins par G. H. Hardy, qui aurait un jour affirmé qu'il donnerait sa chaire à Cambridge à quiconque parvenait à ce résultat.

1.2 Depuis Apéry

La démonstration d'Apéry [5] peut être résumée ainsi : il existe une constante $c > 0$ et des rationnels

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{n}^2 \in \mathbb{Z}, \qquad b_n \in d_n^{-3}\mathbb{Z}$$

(où $d_n = \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n)$) tels que

$$0 < |a_n\zeta(3) - b_n| \leq c(\sqrt{2} - 1)^{4n}.$$

L'estimation élémentaire $d_n \leq 3^n$ suffit pour conclure que $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

Les intégrales de Beukers

La méthode d'Apéry n'a pas pu être à ce jour généralisée aux nombres $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, etc. Elle a cependant donné lieu à de nombreux développements, initiés en partie par les travaux de F. Beukers. Dans [Beu1], celui-ci donne une nouvelle démonstration du théorème d'Apéry en considérant les polynômes de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n(1-x)^n)$$

et l'intégrale

$$I_n = -\frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-xy}\log(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Beukers évalue I_n de deux façons différentes et montre que

$$I_n = a_n\zeta(3) - b_n = -\frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n}{(1-(1-(1-x)y)z)^{n+1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

les nombres a_n et b_n étant les mêmes que ceux d'Apéry.

Cette approche s'est révélée très importante pour aborder le problème de la mesure d'irrationalité de $\zeta(3)$. On appelle mesure d'irrationalité d'un irrationnel α tout réel $\mu \geq 2$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $q_0(\varepsilon) > 0$ tel que $|\alpha - p/q| > 1/q^{\mu+\varepsilon}$ pour tous les entiers p et q avec $q > q_0(\varepsilon)$. Le minimum $\mu(\alpha)$ de tels réels μ est *la* mesure d'irrationalité de α. Dans le cas de $\zeta(3)$, Apéry a montré que $\mu(\zeta(3)) \leq 13,41782$. L'étude de plus en plus fine

[5] Elle est décrite dans [A2], [Coh], [Re1] et [VdP].

d'intégrales de type Beukers [6] a permis de majorer $\mu(\zeta(3))$ successivement par 12,74359 [DV], 8,8302837 [Hat1] et 7,377956 [Hat5].

Le record actuel est $\mu(\zeta(3)) \leq 5,513891$ par Rhin et Viola [RV2]. Leur méthode repose sur deux points essentiels : ils s'affranchissent tout d'abord des polynômes de type Legendre et des intégrations par parties successives de Hata [Hat1], [Hat5] en montrant que sous certaines conditions sur les entiers $h, j, k, l, q, r, s \geq 0$ l'intégrale

$$I(h,j,k,l,q,r,s) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^h(1-x)^l y^k (1-y)^s z^j (1-z)^q}{(1-(1-xy)z)^{q+h-r+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

est égale à $a + 2b\zeta(3) \in \mathbb{Q} + 2\mathbb{Z}\zeta(3)$. L'autre point important est la détermination d'un « bon » dénominateur de a : pour cela, ils étudient l'action d'un groupe de transformations birationnelles laissant invariants certains multiples rationnels de $I(h,j,k,l,q,r,s)$.

En 1994, D. Vasilyev [Va1] a introduit pour tout entier $k \geq 2$ une généralisation naturelle $J_n(k)$ de l'intégrale de Beukers I_n. Par exemple pour $k = 5$,

$$J_n(5) = \int_{[0,1]^5} \frac{\prod_{i=1}^5 u_i^n (1-u_i)^n \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 \mathrm{d}u_4 \mathrm{d}u_5}{(1-(1-(1-(1-(1-u_1)u_2)u_3)u_4)u_5)^{n+1}}.$$

Il montre que si k est impair, alors $J_0(k) = 2\zeta(k)$. Dans [Va2], il prouve également que, $d_n^5 J_n(5) = A_n + B_n\zeta(3) + C_n\zeta(5)$ où A_n, B_n et C_n sont entiers et $d_n^5 J_n(5) \to 0$: la présence de $\zeta(3)$ rend malheureusement impossible la démonstration directe de l'irrationalité de $\zeta(5)$. Après des calculs numériques avec Maple, il conjecture que pour tout $k \geq 2$, $J_n(2k+1)$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire à coefficients rationnels des nombres 1 et $\zeta(2j+1)$, avec $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Approximants de Padé et $\zeta(3)$

Certains approximants de Hermite-Padé des fonctions polylogarithmes

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^s} \qquad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } s \geq 1).$$

ont été explicitement construits par E. Nikishin [Ni] en 1979 : ayant fixé des entiers a et b tels que $1 \leq b \leq a$, il détermine, pour $|z| > 1$, des polynômes

[6] Des intégrales de type Beukers existent également pour log(2), $\zeta(2)$ et d'une façon déguisée pour π : on pourra consulter respectivement [Ru], [RV1] et [Hat4] pour les meilleures mesures d'irrationalité connues de ces trois nombres, ainsi que [Vi] pour un exposé général.

$P_{l,n}(z)$ de degré $\leq n$ si $l = 1, \ldots, b$ et de degré $\leq n-1$ si $l = 0, b+1, \ldots, a$, tels que l'ordre en $z = \infty$ de la fonction

$$N_{n,a,b}(z) = P_{0,n}(z) + \sum_{l=1}^{a} P_{l,n}(z)\mathrm{Li}_l(1/z)$$

soit au moins $an + b$. En particulier, il obtient la formule explicite

$$N_{n,a,b}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-an-b+1)}{k^a(k+1)^a\cdots(k+n-1)^a(k+n)^b} z^{-k},$$

ce qui lui permet de montrer que si p et q sont des entiers tels que

$$q < 0 < p \quad \text{et} \quad |q| > p^a(4a)^{a(a-1)},$$

alors les nombres 1, $\mathrm{Li}_1(p/q), \ldots, \mathrm{Li}_a(p/q)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Cependant, ce travail et les raffinements de Chudnovski [Chu] et de Hata [Hat2], [Hat3] ne donnent aucun renseignement arithmétique sur $\mathrm{Li}_s(1) = \zeta(s)$ et $\mathrm{Li}_s(-1) = (1-2^{1-s})\zeta(s)$ $(s \geq 2)$.

Néanmoins, en 1981, Beukers [Beu3] montre comment la démonstration d'Apéry peut être naturellement replacée dans le cadre des approximants de Padé des fonctions polylogarithmes. Pour cela, il cherche à déterminer des polynômes $A_n(z)$, $B_n(z)$, $C_n(z)$ et $D_n(z)$ de degré au plus n tels que $B_n(1) = 0$ et tels que les deux séries entières en $1/z$

$$U_n(z) = A_n(z)\mathrm{Li}_2(1/z) + B_n(z)\mathrm{Li}_1(1/z) + C_n(z)$$

$$V_n(z) = 2A_n(z)\mathrm{Li}_3(1/z) + B_n(z)\mathrm{Li}_2(1/z) + D_n(z)$$

aient un ordre $\geq n+1$ en $z = \infty$. Il montre que ce problème admet une solution unique [7] (à une constante multiplicative près) : en particulier $A_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{n}^2 z^k$, et en posant

$$R_n(k) = \left(\frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n)}{k(k+1)\cdots(k+n)}\right)^2,$$

on a

$$U_n(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} R_n(k)z^{-k} \quad \text{et} \quad V_n(z) = -\sum_{k=1}^{+\infty} R_n^{(1)}(k)z^{-k}.$$

[7]Les séries $U_n(z)$ et $V_n(z)$ avaient déjà été considérées par Gutnik [G] en 1979 pour montrer que, pour tout rationnel q, au moins un des deux nombres $3\zeta(3) + q\zeta(2)$ et $\zeta(2) + 2q\log(2)$ est irrationnel. Dans [Beu2], Beukers donne sans démonstration des généralisations de ce résultat, en remarquant qu'elles ne sont malheureusement pas celles attendues.

Beukers ajoute qu'un calcul immédiat montre que l'on retrouve l'approximation[8] d'Apéry pour $\zeta(3)$.

« Dans l'esprit de Fourier »

C'est en 1996 que Yu. Nesterenko [Ne2] effectue le « calcul immédiat » de Beukers : ce calcul nécessite de transformer la série $V_n(1)$ de Beukers en une intégrale complexe à laquelle s'applique la méthode du col. Nesterenko ajoute que si l'on pouvait obtenir une estimation élémentaire de $V_n(1)$, on aurait alors une démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ aussi simple que celle donnée par Fourier pour e.

Dans un message électronique [B], K.Ball m'a indiqué que la série suivante pouvait résoudre le problème de Nesterenko :

$$B_n = n!^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(k + \frac{n}{2}\right) \frac{(k-1)\cdots(k-n)(k+n+1)\cdots(k+2n)}{k^4(k+1)^4\cdots(k+n)^4}.$$

On peut en effet dans ce cas déterminer le comportement asymptotique de B_n de façon élémentaire, grâce à la formule de Stirling. A priori,

$$B_n = \alpha_n\zeta(4) + \beta_n\zeta(3) + \gamma_n\zeta(2) + \delta_n$$

où α_n, β_n, γ_n et δ_n sont rationnels : cependant la forme très particulière de B_n entraîne que $\alpha_n = \gamma_n = 0$. On peut montrer que $d_n\beta_n \in \mathbb{Z}$ et $d_n^4\delta_n \in \mathbb{Z}$ mais cela ne permet pas de retrouver l'irrationalité de $\zeta(3)$. Toutefois, nous reviendrons sur ce problème au chapitre 5.

1.3 De l'irrationalité à l'indépendance linéaire

Il est temps de décrire nos résultats. Les tentatives, par les intégrales de Beukers ou les approximants de Padé, pour généraliser la démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ échouent toutes sur le point suivant : aucune ne parvient à isoler un des nombres $\zeta(2n+1)$ $(n \geq 2)$ dans une suite d'approximations rationnelles qui concilient arithmétique (dénominateur raisonnable) et asymptotique (convergence rapide de la suite vers 0).

[8] Trois autres preuves de l'irrationalité de $\zeta(3)$ ont été obtenues par des techniques d'approximation de Padé, par Sorokin [So1], [So3] (dans deux problèmes d'approximation voisins de celui de [Beu3]) et par M. Prévost [P] (dans un contexte totalement différent). Dans les trois cas, comme dans tous ceux vus jusqu'à présent, il est remarquable que l'on retrouve systématiquement l'approximation originale d'Apéry.

En revanche, en suivant Nikishin, il est plus facile de construire des approximations simultanées des nombres $\zeta(s)$ et cette démarche, qui revient à abandonner l'irrationalité pour l'indépendance linéaire, peut être fructueuse. Par exemple, E. Reyssat [Re2], en utilisant les approximants de Hermite-Padé [9] de la famille de fonctions $(\log(1-z)^k)_{k\geq 0}$, établit en particulier la transcendance de $\log(a/b)$: en fait, il montre implicitement que pour tout rationnel $a/b > 0$, une infinité des puissances $\log(a/b)^k$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, ce qui suffit.

Les résultats

Notre première approche a été d'introduire une perturbation de la série de Nikishin, en considérant

$$N_{n,a,r}(z) = n!^{a-r} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-rn)}{k^a(k+1)^a\cdots(k+n)^a} z^{-k}$$

où $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 1$, a et r entiers tels $1 \leq r < a$. L'ordre du zéro en $z = \infty$ de $N_{n,a,r}(z)$ n'est plus maximal (cas des approximants de Padé) et est maintenant paramétré par l'entier r que l'on peut chercher à optimiser dans un but arithmétique : $N_{n,a,r}(z)$ s'écrit comme une combinaison linéaire de 1, $\mathrm{Li}_1(1/z)$, $\mathrm{Li}_2(1/z), \ldots,$ $\mathrm{Li}_a(1/z)$ et en spécialisant en z rationnel, le critère d'indépendance linéaire de Nesterenko [Ne1] nous permet de montrer le

Théorème 2.1 *Soit a un entier ≥ 2 et $\alpha = p/q$ un nombre rationnel, $|\alpha| < 1$. Notons $\delta_\alpha(a)$ la dimension du $\mathbb{Q}-$espace vectoriel engendré par $1, \mathrm{Li}_1(\alpha)$, $\mathrm{Li}_2(\alpha), \ldots, \mathrm{Li}_a(\alpha)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $A(\varepsilon, p, q)$ tel que si $a \geq A(\varepsilon, p, q)$,*

$$\delta_\alpha(a) \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\log(2)} \log(a).$$

En ne tenant pas compte de la valeur divergente $\mathrm{Li}_1(1)$, ce théorème est encore valable si $\alpha = 1$: pour tout entier $a \geq 2$, la dimension de l'espace vectoriel engendré sur les rationnels par 1, $\zeta(2)$, $\zeta(3), \ldots, \zeta(a)$ est minorée par $c_0 \log(a)$, où c_0 est une constante effective. Cette minoration est triviale puisque la formule d'Euler et la transcendance de π implique que cette dimension est a priori $\geq a/2$.

Cependant, si les $\zeta(2n)$ « parasites » pouvaient être éliminés des combinaisons linéaires, cela prouverait en particulier l'existence d'une infinité de valeurs irrationnelles de la fonction ζ aux entiers impairs. Le résultat de

[9] Ces approximants avaient déjà introduits par Malher [Ma] dans le même but.

Vasilyev sur l'intégrale $J_n(5)$ montre qu'une telle combinaison linéaire n'est pas impossible à construire mais l'attaque directe de sa conjecture semble conduire à des calculs inextricables.

Notre deuxième approche a alors été de reconsidérer la série de Ball B_n dont une des propriétés remarquables est d'éliminer $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$ et de conserver $\zeta(3)$. Au chapitre 3, nous construisons une série $S_{n,a,r}(z)$ dont la structure mélange la perturbation de la série de Nikishin et une généralisation de la propriété de dichotomie de B_n. L'étude de $S_{n,a,r}(z)$ permet de prouver les deux théorèmes suivants.

Théorème 3.1 *Soit a un entier impair ≥ 3 et notons $\delta(a)$ la dimension du $\mathbb{Q}-$espace vectoriel engendré par $1,\ \zeta(3),\ \zeta(5),\ \ldots,\ \zeta(a)$. On a alors*

$$\delta(a) \geq \frac{1}{3}\log(a).$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $A(\varepsilon)$ tel que si $a \geq A(\varepsilon)$,

$$\delta(a) \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\log(2)}\log(a).$$

Théorème 3.2 *Il existe un entier impair j, $5 \leq j \leq 169$ tel que 1, $\zeta(3)$ et $\zeta(j)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

Au chapitre 4, nous améliorons la majoration $j \leq 169$ du Théorème 3.2 en ne recherchant que l'irrationalité de $\zeta(j)$. Nous introduisons pour cela une série qui mélange la propriété de dichotomie et le « décalage » produit par la série de Beukers-Gutnik-Nesterenko : $\zeta(3)$ disparaît des combinaisons linéaires de ζ impairs, ce qui permet de montrer le

Théorème 4.1 *Il existe un nombre entier impair j tel que $5 \leq j \leq 21$ et $\zeta(j) \notin \mathbb{Q}$.*

Enfin, au chapitre 5, nous motivons une conjecture dont la démonstration permettrait de résoudre le problème posé par la série Ball et améliorerait le Théorème 4.1, en remplaçant 21 par 19. Nous envisageons également quelques extensions possibles des résultats de cette thèse.

Chapitre 2

Indépendance linéaire des valeurs des polylogarithmes

L'étude diophantienne des valeurs des fonctions polylogarithmes $\mathrm{Li}_s(z)$, définies pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ et $s \geq 1$ par

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k^s},$$

en des points rationnels a été abordée dans [Ni], [Chu], [Hat2], [Hu], par exemple. Nikishin [Ni] montre que, pour tout entier $a \geq 1$, si $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$ et $|q| > p^a(4a)^{a(a-1)}$, alors les nombres $1, \mathrm{Li}_1(p/q)$, $\mathrm{Li}_2(p/q), \ldots$, $\mathrm{Li}_a(p/q)$ sont $\mathbb{Q}-$linéairement indépendants. Nous abordons ce problème sous un angle différent en montrant le

Théorème 2.1. *Soit a un entier ≥ 2 et $\alpha = p/q$ un nombre rationnel, $|\alpha| < 1$. Notons $\delta_\alpha(a)$ la dimension du $\mathbb{Q}-$espace vectoriel engendré par $1, \mathrm{Li}_1(\alpha)$, $\mathrm{Li}_2(\alpha), \ldots, \mathrm{Li}_a(\alpha)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $A(\varepsilon, p, q)$ tel que si $a \geq A(\varepsilon, p, q)$,*

$$\delta_\alpha(a) \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\log(2)} \log(a).$$

En particulier, pour tout rationnel α, $|\alpha| < 1$, l'ensemble $\{\mathrm{Li}_s(\alpha), s \geq 1\}$ contient une infinité de nombres irrationnels. La restriction aux nombres rationnels n'est pas essentielle : on peut facilement étendre le Théorème 2.1 aux nombres algébriques réels. Pour une raison technique, le cas des algébriques complexes est plus délicat. La démonstration repose sur la série suivante

$$N_{n,a,r}(z) = n!^{a-r} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-rn)}{k^a(k+1)^a\cdots(k+n)^a} z^{-k}$$

où $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$, a et r entiers tels $1 \leq r < a$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour simplifier l'exposé, nous noterons $N_n(z)$ cette série et nous l'écrirons sous la forme

$$N_n(z) = n!^{a-r} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-rn)_{rn}}{(k)_{n+1}^a} z^{-k}$$

où $(\alpha)_k$ est le symbole de Pochhammer :

$$(\alpha)_0 = 1 \quad \text{et} \quad (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) \quad \text{si} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Il est utile de noter que cette série est une fonction hypergéométrique généralisée :

$$\begin{aligned} N_n(z) &= z^{-rn-1} n!^{a-r} \frac{\Gamma(rn+1)\Gamma(rn+2)^a}{\Gamma((r+1)n+1)^a} \\ &\quad \times {}_{a+1}F_a \left(\begin{matrix} rn+1,\, rn+1 \ldots,\, rn+1 \\ (r+1)n+2, \ldots,\, (r+1)n+2 \end{matrix} \middle| z^{-1} \right) . \end{aligned}$$

Le paragraphe 2 est consacré à l'étude précise de cette série : le Lemme 2.1 montre que la série $N_n(z)$ fournit bien des combinaisons linéaires à coefficients polynomiaux des fonctions $\mathrm{Li}_s(1/z)$. Le Lemme 2.2 donne une expression intégrale similaire à celles de [Beu1] et de [DV, §1.3], ce qui permet d'estimer $S_n(z)$ (Lemme 2.3). Nous suivons ensuite Nikishin [Ni] pour la démonstration des Lemmes 2.4 et 2.5, qui concernent les propriétés asymptotiques et arithmétiques des coefficients des combinaisons linéaires. Pour conclure, nous appliquons le critère d'indépendance linéaire de Nesterenko [Ne1].

2.1 Résultats auxiliaires

Dans toute la suite, on pose $D_\lambda = \frac{1}{\lambda!}\frac{\mathrm{d}^\lambda}{\mathrm{d}t^\lambda}$ et

$$R_n(t) = n!^{a-r} \frac{(t-rn)_{rn}}{(t)_{n+1}^a}.$$

Pour $l \in \{1, \ldots, a\}$ et $j \in \{0, \ldots, n\}$, on note aussi

$$c_{l,j,n} = D_{a-l}\left(R_n(t)(t+j)^a\right)_{|t=-j} \in \mathbb{Q}\,, \tag{2.1}$$

$$P_{0,n}(z) = -\sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k^l} z^{j-k} \text{ et } P_{l,n}(z) = \sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} z^j\ . \tag{2.2}$$

Les $P_{l,n}(z)$ sont donc des polynômes à coefficients rationnels.

Lemme 2.1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$, on a*

$$N_n(z) = P_{0,n}(z) + \sum_{l=1}^{a} P_{l,n}(z)\mathrm{Li}_l(1/z) \ . \tag{2.3}$$

Démonstration. En décomposant $R_n(t)$ en fractions partielles, on obtient :

$$R_n(t) = \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} \frac{c_{l,j,n}}{(t+j)^l}.$$

D'où si $|z| > 1$

$$\begin{aligned} N_n(z) &= \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{z^k}\frac{1}{(k+j)^l} \\ &= \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} z^j \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{z^k}\frac{1}{k^l} - \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{z^k}\frac{1}{k^l}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{a} \mathrm{Li}_l(1/z) \sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} z^j - \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k^l} z^{j-k} \end{aligned}$$

ce qui n'est rien d'autre que (2.3).

Lemme 2.2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$,*

$$N_n(z) = \frac{(rn)!}{n!^r} \int_{[0,1]^a} \left(\frac{\prod_{l=1}^{a} x_l^r(1-x_l)}{(z - x_1x_2\cdots x_a)^r}\right)^n \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_a}{z - x_1x_2\cdots x_a} \ . \tag{2.4}$$

Démonstration. La série $N_n(z)$ est une fonction hypergéométrique généralisée dont les paramètres sont tels qu'elle peut s'exprimer sous la forme intégrale voulue pour $|z| > 1$ (voir [Sl], p.108).

Lemme 2.3. *Pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $|z| > 1$, la suite $|N_n(z)|^{1/n}$ admet une limite que l'on note $\varphi_{r,a}(z)$. De plus, on a l'encadrement*

$$0 < \varphi_{r,a}(z) \leq \frac{1}{|z|^r r^{a-r}} \ . \tag{2.5}$$

Démonstration. La formule de Stirling implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(rn)!}{n!^r}\right)^{1/n} = r^r.$$

Pour z *réel*, $|z| > 1$, l'existence et la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} |N_n(z)|^{1/n} = r^r \max_{\underline{x}\in[0,1]^a} \left| \frac{\prod_{l=1}^a x_l^r(1-x_l)}{(z-x_1x_2\cdots x_a)^r} \right| \neq 0$$

résulte de la formule intégrale (2.4). Notons que l'on ne peut pas conclure aussi facilement dans le cas z *complexe*. Majorons maintenant $N_n(z)$. Si $k \in \{0,\ldots,rn\}$ alors $R_n(k) = 0$. Supposons $k \geq rn+1$; on a alors

$$\begin{aligned} R_n(k)|z|^{-k} &= n!^{a-r}\frac{(k-rn)_{rn}}{(k)_{n+1}^a}|z|^{-k} &\leq n^{(a-r)n}\frac{k^{rn}}{k^{a(n+1)}}|z|^{-rn} \\ &= \left(\frac{n}{k}\right)^{(a-r)n}|z|^{-rn}\frac{1}{k^a} &\leq \left(\frac{1}{|z|^r r^{a-r}}\right)^n \frac{1}{k^a}\ . \end{aligned}$$

Donc

$$|N_n(z)| \leq \sum_{k=rn+1}^{+\infty} R_n(k)|z|^{-k} \leq \left(\frac{1}{|z|^r r^{a-r}}\right)^n \sum_{k=rn+1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$$

et

$$\varphi_{r,a}(z) \leq \frac{1}{|z|^r r^{a-r}}\ .$$

Lemme 2.4. *Pour tout $l \in \{0,\ldots,a\}$ et tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$,*

$$\limsup_{n\to+\infty} |P_{l,n}(z)|^{1/n} \leq r^r 2^{a+r+1}|z|\ . \tag{2.6}$$

Démonstration. On majore d'abord les coefficients $c_{l,j,n}$. Pour cela on utilise la formule de Cauchy :

$$c_{l,j,n} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z+j|=1/2} R_n(z)(z+j)^{l-1}\mathrm{d}z$$

où $|z+j| = 1/2$ désigne le cercle de centre $-j$ et de rayon $1/2$. Sur ce cercle, on a

$$|(z-rn)_{rn}| \leq (j+2)_{rn} \qquad \text{et} \qquad |(z)_{n+1}| \geq 2^{-3}(j-1)!(n-j-1)!\ .$$

Donc

$$\begin{aligned} |c_{l,j,n}| &\leq n!^{a-r}\frac{(rn+j)!}{j!^{a+1}(n-j)!^a}\cdot\frac{j^a(n-j)^a(rn+j+1)}{j+1}\cdot 8^a \\ &\leq \binom{rn+j}{j}\binom{n}{j}^a\frac{(rn)!}{n!^r}(rn+1)2^a\ . \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\binom{rn+j}{j} \le 2^{rn+j}\,, \quad \binom{n}{j}^a \le 2^{na}\,, \quad \frac{(rn)!}{n!^r} \le r^{rn}\ ,$$

on obtient $|c_{l,j,n}| \le (r^r 2^{a+r+1})^n (rn+1)2^a$, d'où

$$\limsup_{n\to+\infty} |c_{l,j,n}|^{1/n} \le r^r 2^{a+r+1}\ .$$

Si $l \in \{1,\ldots,a\}$, on a $P_{l,n}(z) = \sum_{j=0}^n c_{l,j,n} z^j$ et donc

$$\limsup_{n\to+\infty} |P_{l,n}(z)|^{1/n} \le r^r 2^{a+r+1} |z|\ .$$

Il nous reste à majorer $P_{0,n}(z)$, dont on a déterminé l'expression (2.2)

$$P_{0,n}(z) = -\sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k=1}^{j} \frac{z^{j-l}}{k^l}\ .$$

Comme

$$\left|\sum_{k=1}^{j} \frac{z^{j-l}}{k^l}\right| \le |z|^n \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k} \le n|z|^n\ ,$$

on a là aussi

$$\limsup_{n\to+\infty} |P_{0,n}(z)|^{1/n} \le r^r 2^{a+r+1} |z|\ .$$

Lemme 2.5. *Pour tout* $l \in \{0,\ldots,a\}$

$$d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z] \tag{2.7}$$

où $d_n = \mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n)$.

Démonstration. L'évaluation du dénominateur des coefficients $c_{l,j,n}$ repose sur une réécriture de $R_n(t)$. Fixons les entiers n et j. On décompose alors le numérateur de $R_n(t)$ en r produits de n facteurs consécutifs :

$$R_n(t)(t+j)^a = \prod_{l=1}^{r} F_l(t) \times H(t)^{a-r}$$

où pour $l \in \{1,\ldots,r\}$

$$F_l(t) = \frac{(t-nl)_n}{(t)_{n+1}}(t+j)\,, \quad H(t) = \frac{n!}{(t)_{n+1}}(t+j)\ .$$

Décomposons $F_l(t)$ et $H(t)$ en fractions partielles :

$$F_l(t) = 1 + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} \frac{(j-p)f_{p,l}}{t+p}\,, \quad H(t) = \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} \frac{(j-p)h_p}{t+p}$$

où

$$f_{p,l} = \frac{(-p-nl)_n}{\prod\limits_{\substack{h=0\\h\neq p}}^{n}(-p+h)} = \frac{(-1)^n((l-1)n+p+1)_n}{(-1)^p p!(n-p)!} = (-1)^{n-p}\binom{nl+p}{n}\binom{n}{p}$$

et

$$h_p = \frac{n!}{\prod\limits_{\substack{h=0\\h\neq p}}^{n}(-p+h)} = \frac{(-1)^p n!}{p!(n-p)!} = (-1)^p\binom{n}{p}$$

sont des entiers. On a alors pour tout entier $\lambda \geq 0$:

$$\begin{aligned}
(D_\lambda F_l(t))_{|t=-j} &= \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n}(-1)^\lambda \frac{(j-p)f_{p,l}}{(p-j)^{\lambda+1}}\,,\\
(D_\lambda H(t))_{|t=-j} &= \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n}(-1)^\lambda \frac{(j-p)h_p}{(p-j)^{\lambda+1}}
\end{aligned}$$

avec $\delta_{0,\lambda} = 1$ si $\lambda = 0$, $\delta_{0,\lambda} = 0$ si $\lambda > 0$. On a donc montré que $d_n^\lambda(D_\lambda F_l)_{|t=-j}$ et $d_n^\lambda(D_\lambda H)_{|t=-j}$ sont des entiers pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$. Grâce à la formule de Leibniz

$$D_{a-l}(R(t)(t+j)^a) = \sum_{\mu}(D_{\mu_1}F_1)\cdots(D_{\mu_r}F_r)(D_{\mu_{r+1}}H)\cdots(D_{\mu_a}H)$$

(où la somme est sur les multi-indices $\mu \in \mathbb{N}^a$ tels que $\mu_1 + \cdots + \mu_a = a - l$), on en déduit alors que $d_n^{a-l}c_{l,j,n} \in \mathbb{Z}$ et donc que $d_n^{a-l}P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

2.2 Démonstration du Théorème 2.1

Pour démontrer la Proposition 2.1 ci-dessous, nous utiliseront le critère d'indépendance linéaire suivant.

Théorème 2.2 (Critère de Nesterenko). *Soit N réels $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ et supposons qu'il existe N suites $(p_{l,n})_{n\geq 0}$ tels que :*

i) $\forall i = 1, \dots, N$, $p_{l,n} \in \mathbb{Z}$;

ii) $\alpha_1^{n+o(n)} \leq |\sum_{l=1}^{N} p_{l,n}\theta_l| \leq \alpha_2^{n+o(n)}$ *avec* $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1$;

iii) $\forall l = 1, \dots, N$, $|p_{l,n}| \leq \beta^{n+o(n)}$ *avec* $\beta > 1$.

Dans ces conditions,

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\,\theta_1 + \mathbb{Q}\,\theta_2 + \cdots + \mathbb{Q}\,\theta_N) \geq \frac{\log(\beta) - \log(\alpha_1)}{\log(\beta) - \log(\alpha_1) + \log(\alpha_2)} .$$

Proposition 2.1. *Soit a un entier ≥ 2 et $\alpha = p/q$ un nombre rationnel tel que $|\alpha| < 1$. Pour tout entier r tel que $1 \leq r < a$, on a la minoration*

$$\delta_\alpha(a) \geq \frac{a\log(r) + (a+r+1)\log(2) - (r+1)\log|\alpha|}{a + (a+r+1)\log(2) + r\log(r) + \log|q|} . \tag{2.8}$$

Démonstration. D'après le Théorème des nombres premiers,

$$d_n = e^{n+o(n)} . \tag{2.9}$$

Fixons $\alpha = p/q$ avec $|\alpha| < 1$ et définissons pour tout entier $n \geq 0$

$$p_{l,n} = d_n^a p^n P_{l,n}(q/p) \ \text{ pour } \ l \in \{1, \dots, a\} \ \text{ et } \ \ell_n = d_n^a p^n S_n(q/p) .$$

(2.2) montre que pour tout $n \geq 0$

$$\ell_n = p_{0,n} + \sum_{l=1}^{a} p_{l,n}\mathrm{Li}_l(\alpha) .$$

(2.7) montre que pour tout $l \in \{0, \dots, a\}$ et pour tout $n \geq 0$, $p_{l,n} \in \mathbb{Z}$.
(2.5) et (2.9) montrent que

$$\log|\ell_n| = n\log(\kappa) + o(n) \quad \text{avec} \quad \kappa = e^a|p|\varphi_{r,a}(1/\alpha) .$$

Enfin, (2.6) et (2.9) impliquent que pour tout $l = 0, \dots, a$:

$$\log|p_{l,n}| \leq n\log(\tau) + o(n) \quad \text{avec} \quad \tau = e^a|q|2^{a+r+1}r^r .$$

En appliquant le Théorème 2.2, on obtient donc la minoration

$$\delta_\alpha(a) \geq \frac{(a+r+1)\log(2) + r\log(r) - \log|\alpha| - \log(\varphi_{r,a}(1/\alpha))}{a + (a+r+1)\log(2) + r\log(r) + \log|q|} .$$

En utilisant la majoration de $\varphi_{r,a}(1/\alpha)$ donnée au Lemme 2.3, on en déduit la minoration (2.8).

Démonstration du Théorème 2.1. Dans les conditions de la Proposition 2.1, choisissons $r = r(a)$ comme l'entier $< a$ le plus proche de $a(\log(a))^{-2}$. On a alors

$$a\log(r) + (a+r+1)\log(2) - (r+1)\log|\alpha| = (1+o(1))a\log(a)$$

et

$$a + (a+r+1)\log(2) + r\log(r) + \log|q| = (1+\log(2))a + o(a)\ .$$

D'où

$$\delta_\alpha(a) \geq \frac{(1+o(1))\log(a)}{1+\log(2)+o(1)}\ ,$$

ce qui prouve le Théorème 2.1.

Chapitre 3

Indépendance linéaire d'une infinité des nombres $\zeta(2n+1)$

Dans ce chapitre, nous démontrons qu'une infinité de valeurs de la fonction ζ aux entiers impairs sont irrationnels. De façon plus précise, nous prouvons le

Théorème 3.1. *Soit a un entier impair ≥ 3 et notons $\delta(a)$ la dimension du $\mathbb{Q}-$espace vectoriel engendré par $1,\ \zeta(3),\ \zeta(5),\ \ldots,\ \zeta(a)$. On a alors*

$$\delta(a) \geq \frac{1}{3}\log(a)\ .$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $A(\varepsilon)$ tel que si $a \geq A(\varepsilon)$,

$$\delta(a) \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\log(2)}\log(a).$$

Nous montrons également le

Théorème 3.2. *Il existe un entier impair j, $5 \leq j \leq 169$ tel que 1, $\zeta(3)$ et $\zeta(j)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

Pour démontrer ces théorèmes, nous introduisons la série

$$S_{n,a,r}(z) = n!^{a-2r}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k-rn)_{rn}(k+n+1)_{rn}}{(k)_{n+1}^{a}}z^{-k}$$

où n, r et a sont des entiers vérifiant $n \geq 0$, $1 \leq r < a/2$: ces conditions assurent que $S_{n,a,r}(z)$ converge pour tout nombre complexe z de module ≥ 1.

Comme nous l'a fait remarquer l'arbitre de [BR], cette série, que nous écrirons $S_n(z)$, est elle aussi une fonction hypergéométrique généralisée :

$$S_n(z) = z^{-rn-1} n!^{a-2r} \frac{\Gamma(rn+1)^{a+1}\Gamma((2r+1)n+2)}{\Gamma((r+1)n+2)^{a+1}} \times {}_{a+2}F_{a+1}\left(\begin{matrix} rn+1, \ldots, rn+1, (2r+1)n+2 \\ (r+1)n+2, \ldots, (r+1)n+2 \end{matrix} \middle| z^{-1} \right) .$$

Les démonstrations sont similaires à celle du Théorème 2.1 : le Lemme 3.1 montre que la série $S_n(1)$ fournit des combinaisons linéaires à coefficients rationnels en les ζ impairs lorsque n est pair. Après avoir donné une expression intégrale de type Beukers [Beu1] (Lemme 3.2), nous en déduisons l'estimation de $S_n(1)$ (Lemme 3.3). Les Lemmes 3.4 et 3.5 concernent les propriétés asymptotiques et arithmétiques des coefficients des combinaisons linéaires. Enfin, pour conclure, nous appliquons de nouveau le critère d'indépendance linéaire de Nesterenko [Ne1].

3.1 Résultats auxiliaires

Dans toute la suite, on pose

$$R_n(t) = n!^{a-2r} \frac{(t-rn)_{rn}(t+n+1)_{rn}}{(t)_{n+1}^a} .$$

Pour $l \in \{1, \ldots, a\}$ et $j \in \{0, \ldots, n\}$, on note aussi

$$c_{l,j,n} = D_{a-l} \left(R_n(t)(t+j)^a \right)_{|t=-j} \in \mathbb{Q} , \tag{3.1}$$

$$P_{0,n}(z) = -\sum_{l=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k^l} z^{j-k} \quad \text{et} \quad P_{l,n}(z) = \sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} z^j . \tag{3.2}$$

Les $P_{l,n}(z)$ sont donc des polynômes à coefficients rationnels.

Lemme 3.1. *On a :*

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{l=2}^{a} P_{l,n}(1)\zeta(l) . \tag{3.3}$$

De plus,

$$\text{si } (n+1)a+l \text{ est impair, alors } P_{l,n}(1) = 0 . \tag{3.4}$$

En particulier, si n est pair et a impair ≥ 3, $P_{l,n}(1) = 0$ pour tout $l \in \{2, \ldots, a\}$ pair et $S_n(1)$ est alors une combinaison linéaire uniquement en les ζ impairs :

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{l=1}^{(a-1)/2} P_{2l+1,n}(1)\zeta(2l+1) \ . \tag{3.5}$$

Démonstration. En décomposant $R_n(t)$ en fractions partielles, on obtient :

$$R_n(t) = \sum_{l=1}^{a} \sum_{j=0}^{n} \frac{c_{l,j,n}}{(t+j)^l} \ .$$

Mutatis mutandis, on peut répéter la démonstration du Lemme 2.1 de la première partie et on a pour $|z| \geq 1$, $z \neq 1$

$$S_n(z) = \sum_{l=1}^{a} P_{l,n}(z)\mathrm{Li}_l(1/z) + P_{0,n}(z) \ .$$

Comme $2r < a$, le degré total de la fraction rationnelle $R_n(t)$ est ≤ -2, donc $P_{1,n}(1) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Res}_{t=-j}(R_n(t)) = 0$ et

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z|>1}} (P_{1,n}(z)\mathrm{Li}_1(1/z)) = 0 \ .$$

Comme $\mathrm{Li}_s(1) = \zeta(s)$, on en déduit (3.3). Montrons maintenant (3.4) et pour cela reformulons (3.1) sous la forme

$$c_{l,j,n} = (-1)^{a-l} D_{a-l}(\Phi_{n,j}(x))_{|x=j}$$

où

$$\Phi_{n,j}(x) = R_n(-x)(j-x)^a = n!^{a-2r} \frac{(-x-rn)_{rn}(-x+n+1)_{rn}}{(-x)_{n+1}^a}(j-x)^a \ .$$

On a

$$\Phi_{n,n-j}(n-x) = n!^{a-2r} \frac{(x-(r+1)n)_{rn}(x+1)_{rn}}{(x-n)_{n+1}^a}(x-j)^a \ . \tag{3.6}$$

En appliquant l'identité $(\alpha)_l = (-1)^l(-\alpha-l+1)_l$ aux trois symboles de Pochhammer de (3.6), on obtient

$$\begin{aligned} \Phi_{n,n-j}(n-x) &= n!^{a-2r} \frac{(-1)^{rn}(-x+n+1)_{rn}(-1)^{rn}(-x-rn)_{rn}}{(-1)^{(n+1)a}(-x)_{n+1}^a}(-1)^a(j-x)^a \\ &= (-1)^{na}\Phi_{n,j}(x) \ . \end{aligned}$$

Donc pour tout $k \geq 0$,

$$\Phi^{(k)}_{n,n-j}(n-x) = (-1)^k(-1)^{na}\Phi^{(k)}_{n,j}(x) \ .$$

En particulier avec $k = a - l$ et $x = j$, on a

$$c_{l,n-j,n} = (-1)^{a-l}(-1)^{an}c_{l,j,n} \ ,$$

ce qui implique la relation

$$P_{l,n}(1) = (-1)^{(n+1)a+l}P_{l,n}(1) \ .$$

Si $(n+1)a + l$ est impair, on en déduit que $P_{l,n}(1) = 0$.

Définissons maintenant l'intégrale

$$I_n(z) = \int_{[0,1]^{a+1}} \left(\frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r(1-x_l)}{(z - x_1x_2\cdots x_{a+1})^{2r+1}} \right)^n \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{a+1}}{(z-x_1x_2\cdots x_{a+1})^2}$$

qui est définie a priori pour tout complexe z tel que $|z| > 1$.

Lemme 3.2. *La série $S_n(z)$ admet la représentation intégrale, pour $|z| \geq 1$:*

$$S_n(z) = \frac{((2r+1)n+1)!}{n!^{2r+1}} z^{(r+1)n+1} I_n(z) \ . \tag{3.7}$$

Démonstration. La série $S_n(z)$ est une fonction hypergéométrique généralisée dont les paramètres sont tels qu'elle peut s'exprimer sous la forme intégrale voulue pour $|z| > 1$ (voir par exemple [Sl], p. 108). Il s'agit de montrer que cette représentation est encore valide si $|z| = 1$. Pour cela posons $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ et définissons la fonction

$$F(x,z) = \begin{cases} \frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r(1-x_l)}{(z-x_1\cdots x_{a+1})^{2r+1}} & \text{si } (x,z) \in [0,1]^{a+1} \times E \text{ et } (x,z) \neq (1,1,\ldots,1) \ ; \\ 0 & \text{si } (x,z) = (1,1,\ldots,1) \ . \end{cases}$$

La fonction $F(x,z)$ est continue sur $[0,1]^{a+1} \times E$: en effet, pour $x \in [0,1]^{a+1}$, il est clair que pour tout $l = 1, \ldots, a+1$, on a $1 - x_1 \cdots x_{a+1} \geq 1 - x_l$, d'où

$$(1 - x_1 \cdots x_{a+1})^{a+1} \geq \prod_{l=1}^{a+1}(1 - x_l) \ .$$

Donc pour tout $(x,z) \in [0,1]^{a+1} \times E$ tel que $(x,z) \neq (1,1,\ldots,1)$,

$$|F(x,z)| \leq F(x,1) \leq \prod_{l=1}^{a+1} \left(x_l^r (1-x_l)^{\frac{a-2r}{a+1}} \right) \ .$$

Il en résulte que la fonction $F(x,z)$ est continue sur $[0,1]^{a+1} \times E$, puisque $a > 2r$. Par ailleurs, la fonction $G(x,z) = (z - x_1 \cdots x_{a+1})^{-2}$ est intégrable sur $[0,1]^{a+1}$, ce qui résulte de la continuité, pour $|t| \leq 1$, de la fonction

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w}{(1-uvwt)^2} = t^{-1}\mathrm{Li}_2(t) \ .$$

Notons $\tilde{S}_n(z)$ le membre de droite de (3.7) et $u(x,z) = F(x,z)^n G(x,z)$. Alors :

- pour tout $z \in E$, $|u(x,z)| \leq u(x,1)$ et $u(x,1)$ est intégrable sur $[0,1]^{a+1}$;
- pour tout $x \in [0,1]^{a+1}$, $x \neq (1,\ldots,1)$, la fonction $u(x,z)$ est continue sur E.

Donc $\tilde{S}_n(z)$ est continue sur E. Comme $S_n(z)$ est aussi continue sur E et $S_n(z) = \tilde{S}_n(z)$ si $|z| > 1$, cette dernière égalité est encore vraie sur E, ce qui termine la démonstration du Lemme 3.2.

Considérons maintenant le polynôme

$$Q_{r,a}(s) = rs^{a+2} - (r+1)s^{a+1} + (r+1)s - r \ .$$

On remarque que $Q_{r,a}(s) = s^{a+1}(rs - r - 1) + ((r+1)s - r) < 0$ sur $[0, \frac{r}{r+1}]$. De plus

$$Q'_{r,a}(s) = r(a+2)s^{a+1} - (r+1)(a+1)s^a + r + 1$$

et

$$Q''_{r,a}(s) = (a+1)s^{a-1}(r(a+2)s - (r+1)a) \ .$$

D'où $Q'_{r,a}(0) = r+1 > 0$, $Q'_{r,a}(1) = 2r - a < 0$ et $Q''_{r,a}(s) < 0$ sur $[0,1]$. On en déduit que $Q_{r,a}$ a une seule racine s_0 dans $[0,1[$ et que $s_0 \in]\frac{r}{r+1}, 1[$.

Lemme 3.3. *La suite* $|S_n(1)|^{1/n}$ *admet une limite notée* $\varphi_{r,a}$ *telle que*

$$\varphi_{r,a} = ((r+1)s_0 - r)^r (r + 1 - rs_0)^{r+1} (1 - s_0)^{a-2r} \ .$$

De plus, on a l'encadrement

$$0 < \varphi_{r,a} \leq \frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}} \ . \tag{3.8}$$

Démonstration. En vertu de la formule de Stirling,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{((2r+1)n+1)!}{n!^{2r+1}} \right)^{1/n} = (2r+1)^{2r+1} \ .$$

Compte-tenu de l'expression intégrale (3.7), $\lim_{n\to+\infty} |S_n(1)|^{1/n}$ existe et vaut

$$\varphi_{r,a} = (2r+1)^{2r+1} \max_{(x_1,\dots,x_{a+1})\in[0,1]^{a+1}} \left(\frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r(1-x_l)}{(1-x_1x_2\cdots x_{a+1})^{2r+1}} \right) .$$

Posons

$$F(x) = F(x_1,\dots,x_{a+1}) = \frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r(1-x_l)}{(1-x_1x_2\cdots x_{a+1})^{2r+1}}$$

et $f(x) = \log(F(x))$: pour tout $l \in \{1,\dots,a+1\}$, les extrema de F doivent vérifier

$$\frac{\partial f}{\partial x_l}(x) = \frac{1}{x_l}\left(r - \frac{x_l}{1-x_l} + (2r+1)\frac{x_1x_2\cdots x_{a+1}}{1-x_1x_2\cdots x_{a+1}} \right) = 0$$

Le maximum de F est donc atteint sur la diagonale $x_1 = x_2 = \cdots = x_{a+1}$ et on a

$$\varphi_{r,a} = (2r+1)^{2r+1} \max_{s\in[0,1]} \left(\frac{s^{r(a+1)}(1-s)^{a+1}}{(1-s^{a+1})^{2r+1}} \right) .$$

On vérifie que ce maximum est atteint pour $s = s_0$, racine dans $]0,1[$ du polynôme $Q_{r,a}$. De la relation $rs_0^{a+2} - (r+1)s_0^{a+1} + (r+1)s_0 - r = 0$, on déduit que

$$s_0^{a+1} = \frac{(r+1)s_0 - r}{r+1-rs_0}$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi_{r,a} &= (2r+1)^{2r+1} \frac{s_0^{r(a+1)}(1-s_0)^{a+1}}{(1-s_0^{a+1})^{2r+1}} \\ &= ((r+1)s_0 - r)^r (r+1-rs_0)^{r+1}(1-s_0)^{a-2r} \\ &\le \frac{(2r+1)^{r+1}}{(r+1)^{a-r+1}} \le \frac{(2r+2)^{r+1}}{(r+1)^{a-r+1}} \le \frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}} \end{aligned}$$

en utilisant l'encadrement $\frac{r}{r+1} < s_0 < 1$.

Lemme 3.4. *Pour tout* $l \in \{0,\dots,a\}$,

$$\limsup_{n\to+\infty} |P_{l,n}(1)|^{1/n} \le 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1} . \tag{3.9}$$

Démonstration. Si $l \in \{1,\dots,a\}$, il suffit de majorer les coefficients $c_{l,j,n}$ puisque l'on a $P_{l,n}(1) = \sum_{j=0}^n c_{l,j,n}$. Pour cela on utilise la formule de Cauchy :

$$c_{l,j,n} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z+j|=1/2} R_n(z)(z+j)^{l-1} \mathrm{d}z$$

où $|z+j| = 1/2$ désigne le cercle de centre $-j$ et de rayon $1/2$. Sur ce cercle, on a

$$|(z-rn)_{rn}| \leq (j+2)_{rn}\,, \qquad |(z+n+1)_{rn}| \leq (n-j+2)_{rn}$$

et

$$|(z)_{n+1}| \geq 2^{-3}(j-1)!(n-j-1)!\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}|c_{l,j,n}| &\leq \frac{(rn+j+1)!}{(j+1)!(j!(n-j)!)^r}\frac{((r+1)n-j+1)!}{(n-j+1)!(j!(n-j)!)^r}\left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)^{a-2r}(2n^2)^a \\ &\leq (2r+1)^{(2r+1)n+2}2^{(a-2r)n}(2n^2)^a\end{aligned}$$

en remarquant que les coefficients multinômiaux

$$\frac{(rn+j+1)!}{(j+1)!(j!(n-j)!)^r} \quad \text{et} \quad \frac{((r+1)n-j+1)!}{(n-j+1)!(j!(n-j)!)^r}$$

sont majorés respectivement par $(2r+1)^{rn+j+1}$ et $(2r+1)^{(r+1)n-j+1}$. On a donc

$$\limsup_{n\to+\infty} |P_{l,n}(1)|^{1/n} \leq 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}\,.$$

Il nous reste à majorer $P_{0,n}(1)$ (dont on a déterminé l'expression (3.1)) :

$$P_{0,n}(1) = -\sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k^l}\,.$$

Comme

$$\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k^l} \leq \sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k} \leq j \leq n\,,$$

on a bien là aussi

$$\limsup_{n\to+\infty} |P_{0,n}(1)|^{1/n} \leq 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}\,.$$

Lemme 3.5. *Pour tout $l \in \{0,\ldots,a\}$,*

$$d_n^{a-l}P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z] \tag{3.10}$$

où $d_n = \mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n)$.

Démonstration. Décomposons le numérateur de $R_n(t)$ en $2r$ produits de n facteurs consécutifs :

$$R_n(t)(t+j)^a = \left(\prod_{l=1}^{r} F_l(t)\right) \times \left(\prod_{l=1}^{r} G_l(t)\right) \times H(t)^{a-2r}$$

où pour $l \in \{1, \ldots, r\}$:

$$F_l(t) = \frac{(t-nl)_n}{(t)_{n+1}}(t+j)\,, \qquad G_l(t) = \frac{(t+nl+1)_n}{(t)_{n+1}}(t+j)$$

et

$$H(t) = \frac{n!}{(t)_{n+1}}(t+j)\ .$$

Décomposons $F_l(t)$, $G_l(t)$ et $H(t)$ en fractions partielles :

$$F_l(t) = 1 + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} \frac{(j-p)f_{p,l}}{t+p}\ ,\ G_l(t) = 1 + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} \frac{(j-p)g_{p,l}}{t+p}\ ,\ H(t) = \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} \frac{(j-p)h_p}{t+p}$$

où

$$f_{p,l} = \frac{(-p-nl)_n}{\prod\limits_{\substack{h=0\\h\neq p}}^{n}(-p+h)} = \frac{(-1)^n((l-1)n+p+1)_n}{(-1)^p p!(n-p)!} = (-1)^{n-p}\binom{nl+p}{n}\binom{n}{p}\,,$$

$$g_{p,l} = \frac{(-p+nl+1)_n}{\prod\limits_{\substack{h=0\\h\neq p}}^{n}(-p+h)} = \frac{(-1)^p((l+1)n-p)!}{(nl-p)!p!(n-p)!} = (-1)^p\binom{n(l+1)-p}{n}\binom{n}{p}$$

et

$$h_p = \frac{n!}{\prod\limits_{\substack{h=0\\h\neq p}}^{n}(-p+h)} = \frac{(-1)^p n!}{p!(n-p)!} = (-1)^p\binom{n}{p}$$

sont des entiers. On a alors pour tout entier $\lambda \geq 0$:

$$(D_\lambda F_l(t))_{|t=-j} = \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} (-1)^\lambda \frac{(j-p)f_{p,l}}{(p-j)^{\lambda+1}}\ ,$$

$$(D_\lambda G_l(t))_{|t=-j} = \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} (-1)^\lambda \frac{(j-p)g_{p,l}}{(p-j)^{\lambda+1}} ,$$

$$(D_\lambda H(t))_{|t=-j} = \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} (-1)^\lambda \frac{(j-p)h_p}{(p-j)^{\lambda+1}}$$

avec $\delta_{0,\lambda} = 1$ si $\lambda = 0$, $\delta_{0,\lambda} = 0$ si $\lambda > 0$. On a donc montré que

$$d_n^\lambda (D_\lambda F_l)_{|t=-j} , \quad d_n^\lambda (D_\lambda G_l)_{|t=-j} \quad \text{et} \quad d_n^\lambda (D_\lambda H)_{|t=-j}$$

sont des entiers pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$. Grâce à la formule de Leibniz

$$D_{a-l}(R(t)(t+j)^a) = \\ \sum_{\mu} (D_{\mu_1}F_1)\cdots(D_{\mu_r}F_r)(D_{\mu_{r+1}}G_1)\cdots(D_{\mu_{2r}}G_r)(D_{\mu_{2r+1}}H)\cdots(D_{\mu_a}H)$$

(où la somme est sur les multi-indices $\mu \in \mathbb{N}^a$ tels que $\mu_1 + \cdots + \mu_a = a - l$), on en déduit alors que $d_n^{a-l} c_{l,j,n} \in \mathbb{Z}$ et donc que $d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

3.2 Démonstrations des Théorèmes 3.1 et 3.2

Le Théorème 2.2 (critère de Nesterenko) permet de montrer la Proposition 3.1 ci-dessous, dont les Théorèmes 3.1 et 3.2 sont des conséquences.

Proposition 3.1. *Soit a un entier impair ≥ 3. Pour tout entier r tel que $1 \leq r < a/2$, on a la minoration*

$$\delta(a) \geq \frac{(a-2r)\log(2) + (2r+1)\log(2r+1) - \log(\varphi_{r,a})}{a + (a-2r)\log(2) + (2r+1)\log(2r+1)} \tag{3.11}$$

où $\varphi_{r,a} = ((r+1)s_0 - r)^r (r+1-rs_0)^{r+1}(1-s_0)^{a-2r}$ et s_0 est l'unique racine dans $]0,1[$ du polynôme $Q(s) = rs^{a+2} - (r+1)s^{a+1} + (r+1)s - r$. En particulier

$$\delta(a) \geq \frac{\log(r) + \frac{a-r}{a+1}\log(2)}{1 + \log(2) + \frac{2r+1}{a+1}\log(r+1)} . \tag{3.12}$$

Démonstration. Définissons, pour tout entier $n \geq 0$, $\ell_n = d_{2n}^a S_{2n}(1)$ et

$$p_{0,n} = d_{2n}^a P_{0,2n}(1), \ \ p_{l,n} = d_{2n}^a P_{2l+1,2n}(1) \ \text{ pour } \ l \in \{1, \ldots, (a-1)/2\} .$$

(3.5) montre que pour tout $n \geq 0$, ℓ_n est une combinaison linéaire en les ζ impairs :

$$\ell_n = p_{0,n} + \sum_{l=1}^{(a-1)/2} p_{l,n}\zeta(2l+1) \ .$$

(3.10) montre que pour tout $l \in \{0, \ldots, (a-1)/2\}$ et tout $n \geq 0$, $p_{l,n} \in \mathbb{Z}$. (2.9) et le lemme 3.3 montrent que

$$\log|\ell_n| = 2n\log(\kappa) + o(n) \quad \text{avec} \quad \kappa = e^a \varphi_{r,a} \ .$$

Enfin, (2.9) et (3.9) impliquent que pour tout $l \in \{0, \ldots, (a-1)/2\}$:

$$\log|p_{l,n}| \leq 2n\log(\tau) + o(n) \quad \text{avec} \quad \tau = e^a 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1} \ .$$

En appliquant le Théorème 2.2 (critère de Nesterenko), on en déduit (3.11). En utilisant la majoration (3.8) et l'encadrement $2r \leq 2r+1 \leq 2(r+1)$, on obtient l'inégalité (3.12).

Démonstration du Théorème 3.2. On choisit $a = 169$ et $r = 10$ dans la minoration (3.11) de la Proposition 3.1 : un calcul par ordinateur montre que

$$s_0 \approx 0,90909093 \quad \text{et} \quad \log(\varphi_{10,169}) \approx -505,73453$$

d'où $\delta(169) > 2,001$. Il existe donc deux entiers impairs j et k tels que $3 \leq j, k \leq 169$ et 1, $\zeta(j)$ et $\zeta(k)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. L'irrationalité de $\zeta(3)$ nous permet de supposer $k = 3$, ce qui prouve le Théorème 3.2.

Démonstration du Théorème 3.1. Supposons a impair. Nous allons distinguer plusieurs cas :

- $3 \leq a \leq 167 < e^6$: le Théorème d'Apéry donne $\delta(3) \geq 2$, d'où $\delta(a) \geq 2 \geq \frac{1}{3}\log(a)$.
- $169 \leq a \leq 8.10^3 - 1 < e^9$: le Théorème 3.2 donne $\delta(169) \geq 3$ d'où $\delta(a) \geq 3 \geq \frac{1}{3}\log(a)$.
- $8.10^3 + 1 \leq a \leq 10^5 - 1 < e^{12}$: la Proposition 3.1 (avec $r = 200$) donne $\delta(8.10^3 + 1) > 3$ d'où $\delta(a) \geq 4 \geq \frac{1}{3}\log(a)$.
- $10^5 + 1 \leq a \leq 10^6 - 1 < e^{15}$: la Proposition 3.1 (avec $r = 600$) donne $\delta(10^5 + 1) > 4$ d'où $\delta(a) \geq 5 \geq \frac{1}{3}\log(a)$.
- $a \geq 10^6 + 1$: en choisissant $r = [a^{3/5} + 1] < a/2$ dans (3.12) de la Proposition 3.1, on obtient

$$\delta(a) \geq \frac{3}{5c(a)}\log(a)$$

où $c(a) = 1+\log(2)+\frac{2a^{3/5}+3}{a+1}\log(a^{3/5}+1)$ est décroissante et $c(10^6+1) < 9/5$. Donc là aussi $\delta(a) \geq \frac{1}{3}\log(a)$.

Montrons maintenant la deuxième partie : on choisit pour cela $r = r(a)$ comme l'entier $< a/2$ le plus proche de $a(\log(a))^{-2}$. On a alors

$$\log(r) + \frac{a-r}{a+1}\log(2) = (1+o(1))\log(a)$$

et

$$1+\log(2)+\frac{2r+1}{a+1}\log(r+1) = 1+\log(2)+o(1)\ .$$

D'où

$$\delta(a) \geq \frac{(1+o(1))\log(a)}{1+\log(2)+o(1)}\ ,$$

ce qui prouve le Théorème 3.1.

Chapitre 4

Irrationalité d'au moins un des neuf nombres $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$

Le Théorème 3.2 du chapitre précédent montre qu'il existe un entier impair j tel que $5 \leq j \leq 169$ et 1, $\zeta(3)$ et $\zeta(j)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$: ce résultat implique l'irrationalité de $\zeta(j)$ mais est bien sûr plus fort. Dans cette partie, nous améliorons la majoration $j \leq 169$ en ne recherchant que l'irrationalité de $\zeta(j)$:

Théorème 4.1. *Il existe un entier impair j tel que $5 \leq j \leq 21$ et $\zeta(j) \notin \mathbb{Q}$.*

La démonstration de ce théorème repose sur la série suivante

$$S_{n,a}(z) = n!^{a-6} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}k^2} \left\{ \left(k + \frac{n}{2}\right) \frac{(k-n)_n^3 (k+n+1)_n^3}{(k)_{n+1}^a} \right\} z^{-k}$$

où z est un nombre complexe de module ≥ 1 et a un entier ≥ 6. L'étude de $S_{n,a}(z)$, que nous écrirons désormais $S_n(z)$, est similaire à celle de la série considérée dans le troisième chapitre :

- Le Lemme 4.1 montre que, si a est pair, la série $S_n(1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire (à coefficients rationnels) de 1 et des $\zeta(j)$ pour j impair, $j \in \{4, \ldots, a+2\}$.
- Le Lemme 4.2 détermine un dénominateur commun aux coefficients de cette combinaison linéaire.
- L'estimation du comportement de $|S_n(1)|^{1/n}$ est délicate puisqu'une expression intégrale de type Beukers [Beu1] n'est pas connue pour $S_n(1)$. Néanmoins, en suivant Nesterenko [N2], le Lemme 4.4 montre que $S_n(1)$ peut s'écrire comme la partie réelle d'une intégrale complexe : le comportement asymptotique de cette intégrale est alors déterminé au Lemme 4.5 par la méthode du col (Lemme 4.3).

• Enfin, il n'y a pas lieu ici de borner la hauteur des coefficients de la combinaison : cela n'est nécessaire que pour l'indépendance linéaire.

4.1 Résultats auxiliaires

Posons
$$R_n(t) = n!^{a-6}\left(t+\frac{n}{2}\right)\frac{(t-n)_n^3(t+n+1)_n^3}{(t)_{n+1}^a}$$
et $c_{l,j,n} = D_{a-l}(R_n(t)(t+j)^a)_{|t=-j}$: on a alors la décomposition en éléments simples
$$R_n''(t) = \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n}\frac{l(l+1)c_{l,j,n}}{(t+j)^{l+2}}\ . \tag{4.1}$$

Définissons également les polynômes à coefficients rationnels
$$P_{0,n}(z) = -\sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{l(l+1)c_{l,j,n}}{2k^{l+2}}z^{j-k} \quad \text{et} \quad P_{l,n}(z) = \sum_{j=0}^{n}c_{l,j,n}z^j\ . \tag{4.2}$$
où $l\in\{1,\ldots,a\}$

Lemme 4.1. *Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|z|>1$, on a*
$$S_n(z) = P_{0,n}(z) + \sum_{l=1}^{a}\frac{l(l+1)}{2}P_{l,n}(z)\mathrm{Li}_{l+2}(1/z)$$
et $P_{1,n}(1)=0$. De plus, si a est pair, alors pour tout $n\geq 0$ et pour tout entier pair $l\in\{2,\ldots,a\}$, on a $P_{l,n}(1)=0$ et donc
$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{j=2}^{a/2} j(2j-1)P_{2j-1,n}(1)\zeta(2j+1)\ .$$

Démonstration. De la décomposition (4.1) de $R_n(t)$, on déduit que si $|z| > 1$

$$\begin{aligned} S_n(z) &= \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} \frac{l(l+1)c_{l,j,n}}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{-k}}{(k+j)^{l+2}} \\ &= \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} \frac{l(l+1)c_{l,j,n}}{2} z^j \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{l+2}} z^{-k} - \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k^{l+2}} z^{-k} \right) \\ &= P_{0,n}(z) + \sum_{l=1}^{a} \frac{l(l+1)}{2} P_{l,n}(z)\mathrm{Li}_{l+2}(1/z) \ . \end{aligned}$$

Comme le degré total de la fraction rationnelle $R_n(t)$ est ≤ -2, on a

$$P_{1,n}(1) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Res}_{t=-j}(R_n(t)) = 0 \ .$$

On peut réécrire $c_{l,j,n} = (-1)^{a-l} D_{a-l}(\Phi_{n,j}(x))_{|x=j}$ où

$$\Phi_{n,j}(x) = n!^{a-6} \left(\frac{n}{2} - x\right) \frac{(-x-n)_n(-x+n+1)_n}{(-x)_{n+1}^a}(j-x)^a \ .$$

On a

$$\Phi_{n,n-j}(n-x) = n!^{a-6} \left(x - \frac{n}{2}\right) \frac{(x-2n)_n(x+1)_n}{(x-n)_{n+1}^a}(x-j)^a \ . \tag{4.3}$$

En appliquant l'identité $(\alpha)_l = (-1)^l(-\alpha - l + 1)_l$ aux trois symboles de Pochhammer de (4.3), on obtient

$$\begin{aligned} &\Phi_{n,n-j}(n-x) \\ &\quad = -n!^{a-6} \left(\frac{n}{2} - x\right) \frac{(-1)^n(-x+n+1)_n(-1)^n(-x-n)_n}{(-1)^{(n+1)a}(-x)_{n+1}^a}(-1)^a(j-x)^a \\ &\quad = (-1)^{na+1}\Phi_{n,j}(x) \ . \end{aligned}$$

Donc pour tout $k \geq 0$,

$$\Phi_{n,n-j}^{(k)}(n-x) = (-1)^{k+na+1}\Phi_{n,j}^{(k)}(x) \ .$$

En particulier, avec $k = a - l$ et $x = j$, on a

$$c_{l,n-j,n} = (-1)^{a(n+1)+l+1} c_{l,j,n} \ ,$$

ce qui implique la relation

$$P_{l,n}(1) = (-1)^{(n+1)a+l+1} P_{l,n}(1) \ .$$

Si $(n+1)a + l$ est pair, on en déduit que $P_{l,n}(1) = 0$.

Lemme 4.2. *Pour tout* $l \in \{1, \ldots, a\}$ *on a*

$$2d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z] \quad \textit{et} \quad 2d_n^{a+2} P_{0,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$$

où $d_n = \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n)$.

Démonstration. On écrit $R_n(t)(t+j)^a = F(t)^3 \times G(t)^3 \times H(t)^{a-6} \times I(t)$ où $I(t) = t + n/2$ et

$$F(t) = \frac{(t-n)_n}{(t)_{n+1}}(t+j) \ , \ G(t) = \frac{(t+n+1)_n}{(t)_{n+1}}(t+j) \ , \ H(t) = \frac{n!}{(t)_{n+1}}(t+j) \ .$$

Décomposons $F(t)$, $G(t)$ et $H(t)$ en fractions partielles :

$$F(t) = 1 + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^{n} \frac{j-p}{t+p} f_p \ , \quad G(t) = 1 + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^{n} \frac{j-p}{t+p} g_p \ , \quad H(t) = \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^{n} \frac{j-p}{t+p} h_p$$

où

$$f_p = \frac{(-p-n)_n}{\prod\limits_{\substack{h=0 \\ h \neq p}}^{n} (-p+h)} = \frac{(-1)^n (p+1)_n}{(-1)^p p!(n-p)!} = (-1)^{n-p} \binom{n+p}{n} \binom{n}{p} \in \mathbb{Z} \ ,$$

$$g_p = \frac{(-p+n+1)_n}{\prod\limits_{\substack{h=0 \\ h \neq p}}^{n} (-p+h)} = \frac{(-1)^p (2n-p)!}{(n-p)!p!(n-p)!} = (-1)^p \binom{2n-p}{n} \binom{n}{p} \in \mathbb{Z}$$

et

$$h_p = \frac{n!}{\prod\limits_{\substack{h=0 \\ h \neq p}}^{n} (-p+h)} = \frac{(-1)^p n!}{p!(n-p)!} = (-1)^p \binom{n}{p} \in \mathbb{Z} \ .$$

On a alors pour tout entier $\lambda \geq 0$:

$$(D_\lambda F(t))_{|t=-j} = \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^{n} (-1)^\lambda \frac{j-p}{(p-j)^{\lambda+1}} f_p \ ,$$

$$(D_\lambda G(t))_{|t=-j} = \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} (-1)^\lambda \frac{j-p}{(p-j)^{\lambda+1}} g_p \ ,$$

$$(D_\lambda H(t))_{|t=-j} = \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} (-1)^\lambda \frac{j-p}{(p-j)^{\lambda+1}} h_p$$

avec $\delta_{0,\lambda} = 1$ si $\lambda = 0$, $\delta_{0,\lambda} = 0$ si $\lambda > 0$. On a donc montré que

$$d_n^\lambda (D_\lambda F)_{|t=-j} \ , \quad d_n^\lambda (D_\lambda G)_{|t=-j} \quad \text{et} \quad d_n^\lambda (D_\lambda H)_{|t=-j}$$

sont des entiers pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$. De plus, $2(D_\lambda I)_{|t=-j} \in \mathbb{Z}$. Grâce à la formule de Leibniz

$$D_{a-l}(R(t)(t+j)^a) = \sum_{\mu} (D_{\mu_1}F)(D_{\mu_2}F)(D_{\mu_3}F) \times (D_{\mu_4}G)(D_{\mu_5}G)(D_{\mu_6}G)(D_{\mu_7}H)\cdots(D_{\mu_a}H)(D_{\mu_{a+1}}I)$$

(où la somme est sur les multi-indices $\mu \in \mathbb{N}^{a+1}$ tels que $\mu_1+\cdots+\mu_{a+1} = a-l$), on en déduit alors que $2d_n^{a-l}c_{l,j,n} \in \mathbb{Z}$. Les expressions (4.2) des polynômes $P_{0,n}(z)$ et $P_{l,n}(z)$ permettent de conclure.

4.2 Démonstration du Théorème 4.1

Pour estimer $S_n(1)$, nous suivons la démarche utilisée par [N] et [HP] qui consiste à exprimer $S_n(1)$ à l'aide d'une intégrale complexe à laquelle on peut appliquer la méthode du col, méthode dont nous rappelons tout d'abord le principe (voir par exemple [C, pp. 91-94] ou [D, pp. 279-285]).

Soit w une fonction analytique au voisinage d'un point z_0. On appelle chemin de descente de $\mathrm{Re}(w)$ en z_0 tout chemin du plan issu de z_0 et le long duquel $\mathrm{Re}(w(z))$ est strictement décroissante quand z s'éloigne de z_0. Les chemins de plus grande descente de $\mathrm{Re}(w)$ en z_0 sont les chemins tels que $\mathrm{Re}(w)$ a (localement) la décroissance la plus rapide parmi tous les chemins de descente : il est en fait équivalent de demander que $\mathrm{Im}(w)$ soit constante le long de ces chemins, c'est à dire que la phase de e^w soit stationnaire.

Supposons w telle que $w'(z_0) = 0$ et $w''(z_0) = |w''(z_0)|e^{i\alpha_0} \neq 0$. Notons θ la direction d'une droite Δ passant par z_0, c'est-à-dire $\theta = \arg(z - z_0)$ où $z \in \Delta$. Il existe exactement deux chemins de plus grande descente de $\mathrm{Re}(w)$ en z_0, dont les directions des tangentes en z_0 sont $\theta_+ = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_0}{2}$ et $\theta_- = -\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_0}{2}$: ces directions *critiques* sont opposées. Il peut s'avérer difficile de déterminer exactement les chemins de plus grande descente. On peut s'affranchir de ce problème en considérant n'importe quelle direction θ en z_0 telle que $\cos(\alpha_0+2\theta)<0$: au voisinage de z_0,

$$w(z)=w(z_0)+\frac{1}{2}w''(z_0)(z-z_0)^2+O((z-z_0)^3)$$

et sur un chemin L dont les deux directions en z_0 vérifient la condition ci-dessus, on a alors $\mathrm{Re}(\frac{1}{2}w''(z_0)(z-z_0)^2)<0$ et $\mathrm{Re}(w)$ admet un maximum local en z_0 le long de L. Convenons de dire qu'un chemin L est *admissible* en z_0 si les deux directions θ en z_0 vérifient $\cos(\alpha_0+2\theta)<0$ et si $\mathrm{Re}(w(z_0))$ est le maximum *global* de $\mathrm{Re}(w)$ le long de L.

Lemme 4.3 (Méthode du col). *Soit g et w deux fonctions analytiques dans un ouvert simplement connexe $\mathcal{D}$ du plan. Supposons qu'il existe $z_0\in\mathcal{D}$ tel que $w'(z_0)=0$ et $w''(z_0)=|w''(z_0)|e^{i\alpha_0}\neq 0$. Si L est un chemin inclus dans $\mathcal{D}$ et admissible en z_0, alors*

$$\int_L g(z)e^{nw(z)}\mathrm{d}z\sim g(z_0)\sqrt{\frac{2\pi}{n|w''(z_0)|}}\,e^{i(\pm\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_0}{2})}e^{nw(z_0)}\quad(n\to+\infty)\qquad(4.4)$$

où le choix de $\pm$ dépend de l'orientation de L. De plus, cette estimation est encore valable si L est un chemin que l'on peut déformer en un chemin admissible en z_0.

Nous appliquons maintenant cette méthode à l'estimation asymptotique de $S_n(1)$. Considérons l'intégrale complexe

$$J_n(u)=\frac{n}{2i\pi}\int_L R_n(nz)\left(\frac{\pi}{\sin(n\pi z)}\right)^3e^{nuz}\mathrm{d}z$$

où u est un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(u)\leq 0$ et $|\mathrm{Im}(u)|\leq 3\pi$, L est une droite verticale orientée de $+i\infty$ à $-i\infty$ et contenue dans la bande $0<\mathrm{Re}(z)<1$, ce qui assure que l'intégrale $J_n(u)$ converge.

Lemme 4.4. *Dans ces conditions, on a*
i)

$$J_n(u)=\frac{(-1)^nn^2}{2i\pi}n!^{a-6}\times\int_L\left(z+\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(nz)^{a+3}\Gamma(n-nz+1)^3\Gamma(nz+2n+1)^3}{\Gamma(nz+n+1)^{a+3}}e^{nuz}\mathrm{d}z\,.$$

ii)

$$S_n(1)=\mathrm{Re}\left(J_n(i\pi)\right).$$

Démonstration. *i)* Comme $(\alpha)_n = \Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)$ et $(t-n)_n^3 = (-1)^n(1-t)_n^3$, on a

$$\begin{aligned} R_n(t) &= (-1)^n n!^{a-6}\left(t+\frac{n}{2}\right)\frac{(1-t)_n^3(t+n+1)_n^3}{(t)_{n+1}^a} \\ &= (-1)^n n!^{a-6}\left(t+\frac{n}{2}\right)\frac{\Gamma(n-t+1)^3\Gamma(t+2n+1)^3\Gamma(t)^a}{\Gamma(1-t)^3\Gamma(t+n+1)^3\Gamma(t+n+1)^a}\ . \end{aligned}$$

De plus, la formule des compléments $\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \pi/\sin(\pi t)$ (pour $t \notin \mathbb{Z}$) implique que

$$R_n(t)\left(\frac{\pi}{\sin \pi t}\right)^3 = (-1)^n n!^{a-6}\left(t+\frac{n}{2}\right)\frac{\Gamma(t)^{a+3}\Gamma(n-t+1)^3\Gamma(t+2n+1)^3}{\Gamma(t+n+1)^{a+3}}\ .$$

On a donc

$$\begin{aligned} &\int_{L'} R_n(t)\left(\frac{\pi}{\sin(\pi t)}\right)^3 e^{ut}\mathrm{d}t \\ &\qquad = (-1)^n n!^{a-6}\int_{L'}\left(t+\frac{n}{2}\right)\frac{\Gamma(t)^{a+3}\Gamma(n-t+1)^3\Gamma(t+2n+1)^3}{\Gamma(t+n+1)^{a+3}}e^{ut}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

où L' est une droite verticale quelconque contenue dans $0 < \mathrm{Re}(t) < n$. Le changement de variable $t = nz$ et le théorème de Cauchy justifient que

$$\begin{aligned} J_n(u) = &\frac{(-1)^n n^2}{2i\pi} n!^{a-6} \\ &\times \int_L \left(z+\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(nz)^{a+3}\Gamma(n-nz+1)^3\Gamma(nz+2n+1)^3}{\Gamma(nz+n+1)^{a+3}}e^{nuz}\mathrm{d}z\ . \end{aligned}$$

ii) Soit $c \in]0, n[$ et soit $T \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ tel que $T > n+1$. Considérons le contour rectangulaire $\mathcal{R}_T$ orienté dans le sens direct, de sommets $c \pm iT$ et $T \pm iT$: la fonction $F(t,u) = R_n(t)(\pi/\sin(\pi t))^3 e^{ut}$ est méromorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}(t) > 0$ et ses pôles sont les entiers $k \geq n+1$. En appliquant le théorème des résidus, il découle que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{R}_T} F(t,u)\mathrm{d}t = \sum_{k=n+1}^{[T]} \mathrm{Res}_{t=k}(F(t,u))\ .$$

où

$$\mathrm{Res}_{t=k}(F(t,u)) = \frac{\pi^2+u^2}{2}R_n(k)(-e^u)^k + uR_n'(k)(-e^u)^k + \frac{1}{2}R_n''(-e^u)^k\ .$$

Sur les trois côtés $[c - iT, T - iT]$, $[T - iT, T + iT]$ et $[T + iT, c + iT]$, on a $R_n(t) = O(T^{-2})$.

Sur $[T - iT, T + iT]$, en posant $t = T + iy$, on a

$$\sin(\pi t) = (-1)^N \cosh(\pi y)$$

et donc $|\sin(\pi t)| \geq \frac{1}{2} e^{\pi |y|}$. Comme $|e^{ut}| = e^{\mathrm{Re}(u)T - \mathrm{Im}(u)y}$, on en déduit que

$$R_n(t) \left(\frac{\pi}{\sin(\pi t)} \right)^3 e^{ut} = O\left(T^{-2} e^{\mathrm{Re}(u)T} e^{-(\mathrm{Im}(u)y + 3\pi|y|)} \right) = O\left(T^{-2} \right)$$

puisque $\mathrm{Re}(u) \leq 0$ et $|\mathrm{Im}(u)| \leq 3\pi$.

De façon similaire, sur les deux côtés $[c - iT, T - iT]$ et $[T + iT, c + iT]$, en posant $t = x \pm iT$ avec $x > 0$, on a

$$2i \sin(\pi t) = e^{\mp \pi T} e^{i\pi x} - e^{\pm \pi T} e^{-i\pi x}$$

et donc $|\sin(\pi t)| \geq |\sinh(\pi T)| \gg e^{\pi T}$. Comme $|e^{ut}| = e^{\mathrm{Re}(u)x - \mathrm{Im}(u)T}$, on en déduit que

$$R_n(t) \left(\frac{\pi}{\sin(\pi t)} \right)^3 e^{ut} = O\left(T^{-2} e^{\mathrm{Re}(u)x} e^{-(\mathrm{Im}(u)T + 3\pi T)} \right) = O\left(T^{-2} \right) \ .$$

Donc

$$\begin{aligned} J_n(u) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c+i\infty}^{c-i\infty} F(t,u) \mathrm{d}t = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{R}_T} F(t,u) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{Res}_{t=k}(F(t,u)) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{\pi^2 + u^2}{2} R_n(k)(-e^u)^k + u R_n'(k)(-e^u)^k + \frac{1}{2} R_n''(k)(-e^u)^k \right) \ . \end{aligned}$$

En particulier

$$J_n(i\pi) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(i\pi R_n'(k) + \frac{1}{2} R_n''(k) \right)$$

et donc $S_n(1) = \mathrm{Re}(J_n(i\pi))$.

Nous utilisons maintenant la formule de Stirling sous la forme suivante

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e} \right)^z \left(1 + O\left(\frac{1}{|z|} \right) \right)$$

où $|z| \to \infty$, $|\arg(z)| < \pi$ et où les fonctions $\sqrt{z}$ et $z^z = e^{z\log(z)}$ sont définies avec la détermination principale du logarithme. Sur la droite L, les quantités $|nz|$, $|n-nz+1|$, $|nz+2n+1|$ et $|nz+n+1|$ sont équivalentes à des multiples constants de n, d'où

$$J_n(i\pi) = i(-1)^{n+1}(2\pi)^{\frac{a}{2}-1}n^{2-\frac{a}{2}}\int_L g(z)e^{nw(z)}\mathrm{d}z \cdot \left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right) \qquad (4.5)$$

avec

$$g(z) = \left(z + \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{1-z}^{\,3}\sqrt{z+2}^{\,3}}{\sqrt{z}^{\,a+3}\sqrt{z+1}^{\,a+3}}$$

et

$$\begin{aligned} w(z) \quad = \quad & (a+3)z\log(z) - (a+3)(z+1)\log(z+1) \\ & +3(1-z)\log(1-z) + 3(z+2)\log(z+2) + i\pi z\ , \end{aligned}$$

les différentes fonctions racines et logarithmes de g et w étant de nouveau définies à l'aide de la détermination principale du logarithme. L'expression (4.5) de $J_n(i\pi)$ se prête maintenant à une estimation par la méthode du col.

Dorénavant, nous supposons $a = 20$. Alors

$$w'(z) = 23\log(z) - 23\log(z+1) + 3\log(z+2) - 3\log(1-z) + i\pi$$

et l'équation $w'(z) = 0$ possède une seule solution z_0 vérifiant $0 < \mathrm{Re}(z_0) < 1$:

$$z_0 = x_0 + i\,y_0 \approx 0,9922341203 - i\,0,01200539829\ .$$

On a

$$w(z_0) \approx -22,02001640 + i\,3,104408624$$

et

$$w''(z_0) \approx 216,7641546\,e^{-i\,0.9471277165}\ .$$

Notons α_0 l'argument de $w''(z_0)$; on constate que $\theta = \pi/2$ et $\theta = -\pi/2$ vérifient $\cos(\alpha_0 + 2\theta) < 0$. Montrons que la droite L : $\mathrm{Re}(z) = x_0$ est admissible, c'est à dire que $\mathrm{Re}(w)$ admet un maximum global en z_0 le long de L. Posons $f(y) = \frac{\partial \mathrm{Re}(w)}{\partial y}(x_0 + iy)$; donc

$$\begin{aligned} f(y) \quad & = \quad -\mathrm{Im}(w')(x_0 + iy) \\ & = \quad -23\arg(x_0 + iy) + 23\arg(x_0 + 1 + iy) \\ & \qquad -3\arg(x_0 + 2 + iy) + 3\arg(1 - x_0 - iy) - \pi\ . \end{aligned}$$

On a
$$\lim_{y\to-\infty} f(y) = 2\pi \quad \text{et} \quad \lim_{y\to+\infty} f(y) = -4\pi\ .$$
Par ailleurs, $\arg(z) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$ pour $\mathrm{Re}(z) > 0$, d'où
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} &= -\frac{23x_0}{x_0^2+y^2} + \frac{23(x_0+1)}{(x_0+1)^2+y^2} - \frac{3(x_0+2)}{(x_0+2)^2+y^2} - \frac{3(1-x_0)}{(1-x_0)^2+y^2} \\ &= \frac{N(y^2)}{(x_0^2+y^2)((x_0+1)^2+y^2)((x_0+2)^2+y^2)((1-x_0)^2+y^2)}\ ,\end{aligned}$$
où l'on a noté
$$\begin{aligned}N(t) = 14t^3 &+ 2(7x_0^2+7x_0+44)t^2 + 2(-7x_0^4-14x_0^3-124x_0^2-117x_0+37)t \\ &+2(-7x_0^5-21x_0^4+16x_0^3+67x_0^2-9)x_0\ .\end{aligned}$$
On vérifie que $N(t)$ a une seule racine dans $[\,0,+\infty\,[$. Donc $f(y)$ ne s'annule que pour $y = y_0$. La fonction $y \to \mathrm{Re}(w(x_0+iy))$ est donc strictement croissante sur $]-\infty, y_0\,]$, puis strictement décroissante sur $[\,y_0, +\infty[$. En conséquence, la droite L : $\mathrm{Re}(z) = x_0$ est admissible en z_0 pour $\mathrm{Re}(w)$.

Lemme 4.5. *On a :*
$$J_n(i\pi) \sim c_0(-1)^{n+1}n^{-8}e^{nw(z_0)} \quad (n \to +\infty)$$
où $c_0 = g(z_0)(2\pi)^9\sqrt{2\pi/|w''(z_0)|}e^{-i\alpha_0/2} \neq 0$. *De plus, il existe une suite d'entiers* $\varphi(n)$ *telle que*
$$\lim_{n\to+\infty} |S_{\varphi(n)}(1)|^{1/\varphi(n)} = e^{Re(w(z_0))}\ .$$

Démonstration. L'estimation de $J_n(i\pi)$ résulte de l'estimation générale (4.4), appliquée à (4.5) et à la droite admissible L : $\mathrm{Re}(z) = x_0$. Pour montrer la dernière affirmation, notons $c_0 = r\,e^{i\beta}$ et $v_0 = \mathrm{Im}(w(z_0))$, de sorte que
$$\begin{aligned}S_n(1) &= \mathrm{Re}(J_n(i\pi)) \\ &= r(-1)^{n+1}n^{-8}e^{n\mathrm{Re}(w(z_0))}(\mathrm{Re}(u_n)\cos(nv_0+\beta) - \mathrm{Im}(u_n)\sin(nv_0+\beta))\end{aligned}$$
où u_n est une suite de nombres complexes qui converge vers 1. Remarquons que $v_0 \approx 3,104$ n'est pas un multiple entier de π et donc il existe une suite d'entiers $\varphi(n)$ telle que $\cos(\varphi(n)v_0+\beta)$ converge vers une limite $l \neq 0$. On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty}(\mathrm{Re}(u_{\varphi(n)})\cos(\varphi(n)v_0+\beta) - \mathrm{Im}(u_{\varphi(n)})\sin(\varphi(n)v_0+\beta)) = l \neq 0$$

et donc
$$\lim_{n\to+\infty} |S_{\varphi(n)}(1)|^{1/\varphi(n)} = e^{\mathrm{Re}(w(z_0))} \ .$$

Démonstration du Théorème 4.1. Posons $p_{0,n} = 2d_n^{22}P_{0,n}(1)$ et $p_{l,n} = 2l(2l-1)d_n^{22}P_{2l-1,n}(1)$ pour $l \in \{2, \ldots, 10\}$. Le Lemme 4.2 implique que ce sont des entiers. Définissons également $\ell_n = 2d_n^{22}S_n(1)$: le Lemme 4.1 montre que
$$\ell_n = p_{0,n} + \sum_{l=2}^{10} p_{l,n}\zeta(2l+1) \ .$$

Enfin, d'après le Théorème des nombres premiers, $d_n = e^{n+o(n)}$. Le Lemme 4.5 montre que
$$\lim_{n\to+\infty} |\ell_{\varphi(n)}|^{1/\varphi(n)} \approx e^{-0{,}02} \in \,]\,0,1\,[\ ,$$
ce qui prouve le Théorème 4.1.

Chapitre 5

Problèmes et généralisations

5.1 Une conjecture et quelques conséquences

Revenons plus en détail sur la série de Ball mentionnée dans l'introduction

$$B_n = n!^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(k + \frac{n}{2}\right) \frac{(k-1)\cdots(k-n)(k+n+1)\cdots(k+2n)}{k^4(k+1)^4\cdots(k+n)^4} \ .$$

A priori, on a

$$B_n = \alpha_n \zeta(4) + \beta_n \zeta(3) + \gamma_n \zeta(2) + \delta_n$$

où α_n, β_n, γ_n et δ_n sont rationnels. Les mêmes arguments que ceux développés aux chapitres 3 et 4 montrent que $\alpha_n = \gamma_n = 0$ et que $d_n\beta_n$ et $d_n^4\delta_n$ sont entiers pour tout $n \geq 0$. Ball a remarqué (voir aussi la deuxième preuve du Lemme 3 de [BR]) que la convergence de $B_n^{1/n}$ peut être estimée élémentairement. Ecrivons $R_n(k) = k^{-a}\tilde{R}_n(k)$ où

$$\tilde{R}_n(k) = n!^2 \left(k + \frac{n}{2}\right) \frac{(k-n)_n(k+n+1)_n}{(k)_n^4} \ .$$

Puisque $\tilde{R}_n(k) = 0$ pour $0 \leq k \leq n$, on voit facilement qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\max_{k \geq 0} \tilde{R}_n(k) = \max_{n+1 \leq k \leq cn} \tilde{R}_n(k) \ .$$

Notons M_n ce maximum : comme $\sum\limits_{k \geq n+1} k^{-4} < 1$ et $\tilde{R}_n(k) \geq 0$, on a

$$\frac{1}{(cn)^4} M_n \leq S_n(1) \leq M_n \ .$$

Il suffit donc de montrer que $M_n^{1/n}$ converge et de déterminer la valeur de cette limite. La formule de Stirling montre que pour $n \leq k \leq cn$

$$\tilde{R}_n(k) = \rho_n(k) \frac{k^{5k}(k+2n)^{k+2n} n^{2n}}{(k+n)^{5(k+n)}(k-n)^{k-n}}$$

où $\rho_n(k)^{1/n}$ tend vers 1. Posons

$$F(x) = \frac{x^{5x}(x+2)^{x+2}}{(x+1)^{5(x+1)}(x-1)^{x-1}} \; .$$

Alors

$$\max_{x\in[1,c]} F(x) = \lim_{n\to+\infty} \max_{n\leq k\leq cn} F\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} M_n^{1/n} \; .$$

De plus, on peut choisir c de telle sorte que $\max\limits_{x\in[1,c]} \tilde{F}(x) = \max\limits_{x\in[1,+\infty[} \tilde{F}(x)$.
Donc

$$\lim_{n\to+\infty} B_n^{1/n} = \max_{x\in[1,+\infty[} F(x) \; .$$

Un calcul montre que $\max\limits_{x\in[1,+\infty[} F(x) = F(x_0)$ où $x_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{5+4\sqrt{2}}-1)$ est l'unique solution > 1 de l'équation $x^5(x+2) - (x+1)^5(x-1) = 0$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} B_n^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} M_n^{1/n} \approx 0,029437262 \; .$$

La suite $d_n^4 B_n$ ne tend donc pas vers 0 et on ne redémontre pas l'irrationalité de $\zeta(3)$. Pourtant des calculs numériques montrent que les nombres β_n semblent être les nombres d'Apéry $a_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 \binom{n+j}{n}^2$, ce qui est surprenant au vue de l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\beta_n = (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^4 \binom{n+j}{n} \binom{2n-j}{n} \left(\frac{n}{2} - j\right) \\ \times \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k-j} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+j} - \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^n \frac{4}{k-j} + \frac{1}{n/2-j} \right) \; .\end{aligned}$$

Le programme Ekhad de Zeilberger [1] montre cependant que B_n vérifie la récurrence d'ordre 2 satisfaite par les nombres d'Apéry :

$$(n+1)^3 u_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)u_n + n^3 u_{n-1} = 0 \; .$$

[1] Ekhad est un programme (pour Maple) de calcul de récurrence des suites hypergéométriques, téléchargeable librement à http ://www.math.temple.edu/~zeilberg/programs.html

Puisque $\zeta(3)$ *est* irrationnel, β_n vérifie aussi cette récurrence. Comme $\beta_0 = a_0$ et $\beta_1 = a_1$, on a bien l'improbable identité $\beta_n = a_n$! De façon similaire, on prouve que $\delta_n = b_n$ et donc que $d_n^3\delta_n \in \mathbb{Z}$. S'il était possible de montrer cela élémentairement et sans supposer l'irrationalité de $\zeta(3)$, le problème de Nesterenko, rappelé dans l'introduction, serait résolu.

Ce phénomène de dénominateur « plus petit que prévu » semble être commun à toute une classe de séries que nous allons décrire. Introduisons pour cela les notations suivantes

$$R_{n,a,b,r}(t) = n!^{a-2br}\left(t+\frac{n}{2}\right)\frac{(t-rn)_{rn}^b(t+n+1)_{rn}^b}{(t)_{n+1}^a}$$

et

$$S_{n,a,b,r,\ell}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\ell!}R_{n,a,b,r}^{(\ell)}(k)z^{-k}$$

où n, a, b, r, ℓ sont des entiers tels que $n \geq 0$, $r \geq 1$, $a > 2br$ et $\ell \in \{0,\ldots,b-1\}$, ce qui assure la convergence de la série $S_{n,a,b,r,\ell}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 1$. En reprenant les démonstrations des Lemmes 4.1 et 4.2, on montre qu'il existe des polynômes $P_{0,n,a,b,r,\ell}(z)$ et $P_{l,n,a,b,r}(z)$ (pour $l \in \{1,\ldots,a\}$) tels que

$$S_{n,a,b,r,\ell}(z) = P_{0,n,a,b,r,\ell}(z) + \sum_{l=1}^{a}(-1)^\ell\binom{\ell+l-1}{\ell}P_{l,n,a,b,r}(z)\mathrm{Li}_{l+\ell}(1/z)$$

et tels que pour tout $\ell \in \{0,\ldots,b-1\}$ et tout $l \in \{1,\ldots,a\}$,

$$d_n^{a+\ell}P_{0,n,a,b,r,\ell}(z) \in \mathbb{Z}[z] \quad \text{et} \quad d_n^{a-l}P_{l,n,a,b,r}(z) \in \mathbb{Z}[z]\,.$$

De plus, $P_{1,n,a,b,r}(1) = 0$ et en supposant a pair et b impair, pour tout $l \geq 2$ pair, $P_{l,n,a,b,r}(1) = 0$. Par exemple, $B_n = S_{n,4,1,1,0}(1)$ et on retrouve bien $\alpha_n = \gamma_n = 0$ et $d_n\beta_n$, $d_n^4\delta_n \in \mathbb{Z}$.
Nous avons vu ci-dessus qu'en fait β_n, $d_n^3\delta_n$ sont déjà des entiers : motivés par ce résultat, des calculs avec Maple ont suggéré que plus généralement les dénominateurs pouvaient être améliorés pour $z = 1$.

Conjecture. *Dans les conditions de la définition de $S_{n,a,b,r,\ell}(z)$, si a est pair et b impair, alors*

$$2d_n^{a+\ell-1}P_{0,n,a,b,r,\ell}(1) \in \mathbb{Z}$$

et pour tout l impair de $\{3,\ldots,a-1\}$,

$$2d_n^{a-l-1}P_{l,n,a,b,r}(1) \in \mathbb{Z}\,.$$

La démonstration de cette conjecture, outre une nouvelle preuve de l'irrationalité de $\zeta(3)$ avec la série de Ball, aurait comme conséquence d'améliorer le théorème 4.1. Ce théorème a été démontré à l'aide de la série $S_{n,20,3,1,2}(1)$; l'utilisation de la série $S_{n,18,3,1,2}(1)$ prouverait l'irrationalité de l'un des huit nombres $\zeta(j)$ avec j impair dans $\{5, \ldots, 19\}$.

5.2 Valeurs de la fonction ζ aux entiers impairs dans un intervalle

Avec les notations du paragraphe 5.1, considérons la série

$$S_n(z) = S_{n,\beta+2,\alpha-2,r,\alpha-3}(z)$$

où α est impair, β est pair et $1 \leq 2r(\alpha-2) < \beta+4$. Pour tout entier $n \geq 0$ le nombre réel $2d_n^{\alpha+\beta-1}S_n(1)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients entiers de 1 et des $\zeta(j)$ pour j impair dans $\{\alpha, \ldots, \alpha+\beta\}$. En fixant α, on peut chercher le plus petit entier pair $\beta = \beta(\alpha)$ tel que la suite $2d_n^{\alpha+\beta-1}S_n(1)$ tend vers 0 : cela impliquerait alors l'existence d'un irrationnel $\zeta(j)$ avec j impair dans $\{\alpha, \ldots, \alpha+\beta\}$. Deux problèmes se présentent :

1) majorer $S_n(1)$;

2) montrer la non nullité de $S_n(1)$, au moins pour une infinité d'entiers n.

La majoration de $S_n(1)$ peut se faire élémentairement. En effet

$$R^{(\alpha-3)}_{n,\beta+2,\alpha-2,r}(k) = 0$$

pour $k \leq rn$ et, pour $k \geq rn+1$,

$$|R^{(\alpha-3)}_{n,\beta+2,\alpha-2,r}(k)| \leq \rho(n,\alpha,\beta,r) R_{n,\beta+2,\alpha-2,r}(k) ,$$

où $\lim_{n\to+\infty} \rho(n,\alpha,\beta,r)^{1/n} = 1$. Donc

$$\limsup_{n\to+\infty} |S_n(1)|^{1/n} \leq \limsup_{n\to+\infty} S_{n,\beta+2,\alpha-2,r,0}(1)^{1/n} .$$

La dernière limite peut se majorer facilement, comme dans la démonstration du Lemme 2.3 :

$$\limsup_{n\to+\infty} S_{n,\beta+2,\alpha-2,r,0}(1)^{1/n} \leq \left(\frac{1}{r}\right)^{\beta+2-2(\alpha-2)r} \left(2+\frac{1}{r}\right)^{(\alpha-2)r} .$$

Des majorations plus fines peuvent être obtenues par la méthode utilisée au paragraphe 5.1 pour estimer la convergence de $B_n^{1/n}$.

En revanche, même si $S_n(1)$ peut s'exprimer comme une somme d'intégrales complexes (cf. chapitre 4 et [HP]), la non nullité de cette série n'est pas immédiate et reste un problème ouvert. En l'admettant, on peut montrer l'existence d'une constante explicite $\lambda > 1$ telle que pour tout $\alpha \geq 3$, l'intervalle $[\alpha, \lambda\alpha]$ contient un entier impair j tel que $\zeta(j) \notin \mathbb{Q}$.

Par exemple, le choix $r = 3$ et $\beta = 104\alpha$ est tel que pour tout entier impair $\alpha \geq 5$,

$$e^{\beta+\alpha-1}\left(\frac{1}{r}\right)^{\beta+2-2(\alpha-2)r}\left(2+\frac{1}{r}\right)^{(\alpha-2)r} < 1$$

et on peut donc choisir $\lambda = 104$. Un calcul plus fin permettrait sans aucun doute d'améliorer cette constante.

5.3 Liens avec l'approximation de Padé

Nous avons vu dans l'introduction que les séries utilisées par Nikishin et Beukers apparaissent naturellement comme solution unique de problèmes d'approximants de Padé : nos séries ont été introduites en oubliant cet aspect, qui n'était pas essentiel. Cependant, il est bien sous-jacent, comme le montre l'exemple suivant. Cherchons à déterminer des polynômes $A_n(z)$, $B_n(z)$, $C_n(z)$ et $D_n(z)$ de degré au plus n et deux séries entières en $1/z$

$$U_n(z) = A_n(z)\mathrm{Li}_2(1/z) + B_n(z)\mathrm{Li}_1(1/z) + C_n(z)$$

et

$$V_n(z) = z^n A_n(1/z)\mathrm{Li}_2(1/z) - z^n B_n(1/z)\mathrm{Li}_1(1/z) + D_n(z)$$

ayant un ordre $\geq n+1$ en $z = \infty$, avec $B_n(1) = 0$: en suivant la démarche de [Beu3], on peut montrer qu'à une constante multiplicative près

$$U_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k-n)_n(k+n+1)_n}{(k)_{n+1}^2} z^{-k} .$$

On peut énoncer des problèmes d'approximations similaires à ceux ci-dessus pour « motiver » les séries introduites aux chapitres 2,3 et 4. Par exemple, la série $N_{n,a,r}(z)$ du chapitre 2 est solution du problème suivant : les entiers a et r tels que $1 \leq r < a$ étant fixés, déterminer, pour tout $l \in \{1, \ldots, a\}$, des polynômes $P_{l,n}(z)$ de degré au plus n tels que l'ordre en $z = \infty$ de la fonction

$$P_{0,n}(z) + \sum_{l=1}^{a} P_{l,n}(z)\mathrm{Li}_l(1/z)$$

soit au moins $rn+1$. Mais l'unicité n'est en rien assurée : pour l'obtenir, il est probable que des conditions supplémentaires sur les polynômes des approximations doivent être énoncées, comme dans [So2] et [So3]. Les techniques d'Huttner [Hu] (en utilisant la monodromie des fonctions polylogarithmes) pourraient également être pertinentes dans ce contexte.

Références bibliographiques

[A1] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astérisque **61** (1979), 11-13.

[A2] R. Apéry, *Interpolation de fractions continues et irrationalité de certaines constantes*, Bulletin de la section des sciences du C.T.H.S III (1981), 37-53.

[B] K. Ball, communication personnelle.

[BR] K. Ball et T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. math. **146** (2001), no. 1, 193-207.

[Ber] B.C. Berndt, *Modular transformations and generalizations of several formulae of Ramanujan*, Rocky Mountain J. of Maths, **7** (1977), 147-189.

[Beu1] F. Beukers, *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$*, Bull. Lond. Math. Soc. **11** (1979), no. 3, 268-272 .

[Beu2] F. Beukers, *The values of Polylogarithms*, « Topics in classical number theory », 219-228, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Budapest (1981).

[Beu3] F. Beukers, *Padé approximations in Number Theory* dans « Padé approximation and its applications », Amsterdam 1980, LNM 888, 90-99, Springer (1981).

[Beu4] F. Beukers, *Irrationality proofs using modular forms*, Journées Arithmétiques de Besançon (Besançon, 1985). Astérisque No. 147-148 (1987).

[Chu] G. Chudnovski, *Padé approximations to the generalized hypergeometric functions I*, J. Math. pures et appl. **58** (1979), 445-476.

[Coh] H. Cohen, *Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ (d'après Apéry)*, Séminaire de Théorie des Nombres de Grenoble, VI.1-VI.9 (1978).

[Cop] E. T. Copson, *Asymptotic expansions*, Cambridge University Press (1967).

[Di] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Collection "Méthodes", Hermann (1980).

[Du] W. Dunham, *Euler, the master of us all*, Dolciani Mathematical Expositions, **22**, édité par The Mathematical Association of America (1999).

[DV] R. Dvornicich and C. Viola, *Some remarks on Beukers' integrals*, dans Number Theory, Vol. II, 637-657, Budapest (1987). Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 51, Budapest.

[G] L.A. Gutnik, *The irrationality of certain quantities involving* $\zeta(3)$, Russ. Math. Surv. **34** (1979), no. 3, 200 . En russe dans Acta Arith. **42** (1983), no. 3, 255-264.

[Hat1] M. Hata, *Legendre type polynomials and irrationality measures*, J. Reine Angew. Math. **407** (1990), 99-125.

[Hat2] M. Hata, *On the linear independance of the values of polylogarithmic functions*, J. Math. pures et appl **69** (1990), 133-173.

[Hat3] M. Hata, *Rationals approximations to the dilogarithm*, Trans. Amer. Math. Soc. **336** (1993), 363-387.

[Hat4] M. Hata, *Rational approximations to* π *and some other numbers*, Acta. Arith. **63** (1993), 335-349.

[Hat5] M. Hata, *A new irrationality measure for* $\zeta(3)$, Acta. Arith. **92** (2000), no. 1, 47-57.

[HP] T. G. Hessami Pilerhood, *Linear independence of vectors with polylogarithmic coordinates*, Mosc. Univ. Math. Bull. **54** (1999), no. 6, 40-42.

[Hu] M. Huttner, *Équations différientielles fuchsiennes ; Approximations du dilogarithme, de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Pub. IRMA. Lille (1997).

[L] F. Lindemann, *Über die Zalh* π, Math. Annalen **20** (1882), 213-225.

[Ma] K. Mahler, *On the approximation of logarithms of algebraic numbers*, Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. Serie A **245** (1953), 371-398.

[MF] M. Mendès-France, *Roger Apéry et l'irrationnel*, La Recherche **97**, Vol. 10, février 1979.

[Ne1] Yu.V. Nesterenko, *On the linear independence of numbers*, Mosc. Univ. Math. Bull.**40** (1985), no. 1, 69-74, traduction de Vest. Mosk. Univ., Ser. I (1985), no. 1, 46-54.

[Ne2] Yu.V. Nesterenko, *A few remarks on* $\zeta(3)$, Math. Notes, **59** (1996), no. 6, 625-636.

[Ni] E.M. Nikishin, *On the irrationality of the values of the functions* $F(x, s)$, Mat. Sbornik **37** (1979), no. 3, 381-388.

[P] M. Prévost, *A new proof of the irrationality of* $\zeta(3)$ *using Padé approximants*, J. Comp. Appl. Math. **67** (1996), 219-235.

[Re1] E. Reyssat, *Irrationalité de* $\zeta(3)$*, selon Apéry*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 20ème année (1978-1979), exposé no. 6, 6pp.

[Re2] E. Reyssat, *Mesures de transcendance pour les logarithmes de nombres rationnels*, « Approximations diophantiennes et nombres transcendants », Luminy 1982, 235-245, Progress in Mathematics, Birkhäuser (1983).

[RV1] G. Rhin and C. Viola, *On a permutation group related to* $\zeta(2)$, Acta Arith. **77** (1996), 23-56.

[RV2] G. Rhin and C. Viola, *The group structure for* $\zeta(3)$, Acta Arith. **97** (2001), no. 3, 269-293.

[Ri1] T. Rivoal, *La fonction Zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris **331** (2000), 267-270.

[Ri2] T. Rivoal, *Au moins un des neuf nombres* $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$ *est irrationnel*, à paraître à Acta Arith. (2002).

[Ru] E.A. Rukhadze, *A lower bound for the approximation of* ln(2) *by rationals numbers*, Vestnik Moskov. Univ. Ser I Mat. Mekh **6** (1987), 25-29 (en russe).

[Sl] L.J.Slater, *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press (1966).

[So1] V.N. Sorokin, *Hermite-Padé approximation for Nikishin systems and the irrationality of* $\zeta(3)$, Russian Math. Surveys **49** (1994), no. 2, 176-177, traduction de Uspekhi Mat. Nauk, **49** (1994), no. 2, 167-168.

[So2] V.N. Sorokin, *A transcendence measure for* π^2, Mat. Sbornik **187** (1996), no. 12, 1819-1852.

[So3] V.N. Sorokin, *Apéry's Theorem*, Mosc. Univ. Math. Bull. **53** (1998), no. 3, 48-52.

[VdP] A. Van der Poorten, *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, Math. Intellig. **1** (1979), 195-203.

[Va1] D.V. Vasilyev, *Some formulas for Riemann zeta function at integers points*, Mosc. Univ. Math. Bull. **51** (1996), no. 1, 41-43,.

[Va2] D.V. Vasilyev, *On small linear forms for the values of the Riemann zeta function at odd integers*, soumis à Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus (2000).

[Vi] C. Viola, *On Siegel's method in diophantine approximation to transcendental numbers*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **53** (1995), no. 4, 455-469.