



Modèles stochastiques et méthodes statistiques pour la fiabilité des systèmes

Olivier Gaudoin

► **To cite this version:**

Olivier Gaudoin. Modèles stochastiques et méthodes statistiques pour la fiabilité des systèmes. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2002. tel-00004452

HAL Id: tel-00004452

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004452>

Submitted on 3 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire d'habilitation

présenté par

Olivier Gaudoin

en vue de l'obtention du diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches de l'

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Spécialité Mathématiques Appliquées

Modèles stochastiques et méthodes statistiques pour la fiabilité des systèmes

Soutenance le 7 juin 2002 devant le jury composé de

Guy MAZARE	Professeur, INP Grenoble	Président
Gilles CELEUX	Directeur de Recherches, INRIA Rhône-Alpes	Rapporteur
Christiane COCOZZA-THIVENT	Professeur, Université de Marne-la-Vallée	Rapporteur
Bo LINDQVIST	Professeur, Université de Trondheim	Rapporteur
André LANNOY	Ingénieur-Chercheur, EDF	Examineur
Alain LE BRETON	Professeur, Université Joseph Fourier Grenoble 1	Examineur
Jean-Louis SOLER	Professeur, INP Grenoble	Examineur

Habilitation préparée au sein du Laboratoire de Modélisation et Calcul de l'IMAG

Remerciements

La recherche est pour moi une activité collective plus qu'individuelle. Je remercie chaleureusement tous les co-auteurs de mes travaux, dont voici la liste. Parmi eux, je distingue tout particulièrement Jean-Louis Soler, qui m'a accompagné depuis le début de ma thèse jusqu'à aujourd'hui.

FLORENT ARNOUX, Ingénieur, BNP-Paribas

CYRIL BRACQUEMOND, Ancien doctorant, Ingénieur, Péchiney

MARCEL CHEVALIER, Ingénieur, Schneider Electric

EMMANUELLE CRÉTOIS, Maître de Conférences, Université Pierre Mendès France, Grenoble II

STANISLAS DI PIAZZA, Ingénieur, PSA Peugeot-Citroën

LAURENT DOYEN, Doctorant, Institut National Polytechnique de Grenoble

JEAN-BAPTISTE DURAND, Doctorant, INRIA Rhône-Alpes

MHAMED-ALI EL AROUI, Maître de Conférences, Institut Supérieur de Gestion, Tunis

CHRISTIAN LAVERGNE, Professeur, Université Montpellier III

CHRISTELLE LE GARREC, Ingénieur, Ligeron S.A.

DILIP ROY, Professeur, Burdwan University, Inde

JEAN-LOUIS SOLER, Professeur, Institut National Polytechnique de Grenoble

MIN XIE, Professeur, National University of Singapore

BO YANG, Doctorant, National University of Singapore

ZHENLIN YANG, Professeur, National University of Singapore

CRISTINA-ANCA ZAHALCA, Ancienne doctorante, Ingénieur, CETOP consultants

Il faut se garder de favoriser la formation universitaire et théorique par rapport à la mise en pratique, sous peine d'intellectualiser et d'étouffer les pratiques plus contemplatives. En revanche, trop insister sur l'application pratique au détriment de l'étude interdira de comprendre. L'équilibre, tout est là.

Le Dalaï-Lama, extrait de "L'art du bonheur"

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Présentation générale	7
1.2	Fiabilité des logiciels	7
1.3	Tests d'adéquation aux modèles de croissance de fiabilité	8
1.4	Fiabilité en environnement aléatoire stressant	8
1.5	Fiabilité en temps discret	9
1.6	Efficacité de la maintenance	9
2	Fiabilité des logiciels	11
2.1	Problématique	11
2.2	Terminologie	12
2.3	Modélisation du processus des défaillances et corrections d'un logiciel	12
2.4	Modèles de fiabilité des logiciels	14
2.4.1	Classification	14
2.4.2	Les modèles proportionnels	16
2.5	Tests de tendance	20
2.6	Travaux récents et perspectives	22
3	Tests d'adéquation aux modèles de croissance de fiabilité	25
3.1	Problématique	25
3.2	Tests d'adéquation au Power Law Process	26
3.3	Les tests CPIT	27
3.3.1	Test CPIT d'adéquation au Power-Law Process	28
3.3.2	Tests CPIT d'adéquation au modèle de Jelinski-Moranda	28
3.4	Les tests préquentiels	29
3.5	Comparaison des tests et application à des données réelles	30
3.6	Travaux récents et perspectives	30
4	Fiabilité en environnement aléatoire stressant	33
4.1	Problématique	33
4.2	Influence de l'environnement stressant sur la durée de vie des composants	34
4.2.1	Modélisation de l'action du stress	34
4.2.2	Stress ponctuels	36
4.2.3	Stress en créneaux	37
4.2.4	Stress diffus	38
4.3	Influence de l'environnement sur la durée de vie des systèmes	39
4.3.1	Modélisation et indicateur d'influence du stress	39
4.3.2	Stress ponctuels	40
4.3.3	Etude statistique	41
4.4	Perspectives	43

5	Fiabilité en temps discret	45
5.1	Problématique	45
5.2	Les grandeurs de la fiabilité en temps discret	45
5.2.1	Definitions et notions de vieillissement	45
5.2.2	Modèles de durée de vie en temps discret	46
5.2.3	Une nouvelle définition du taux de défaillance en temps discret	47
5.3	Etude statistique	47
5.3.1	Estimation non paramétrique	47
5.3.2	Tests d'adéquation	48
5.4	Perspectives	51
6	Efficacité de la maintenance	53
6.1	Problématique	53
6.2	Premiers résultats	53
6.2.1	Modèles à réduction de l'intensité de défaillance	54
6.2.2	Modèles à réduction de l'âge	55
6.2.3	Intensité de défaillance minimale	56
6.2.4	Prise en compte simultanée des maintenances correctives et préventives	56
6.3	Perspectives	57
7	Conclusions et perspectives	59
	Bibliographie	61

Chapitre 1

Introduction

1.1 Présentation générale

Mes travaux de recherche portent sur les probabilités et la statistique appliquées à la sûreté de fonctionnement. Plus précisément, il s'agit d'une part de construire des modèles stochastiques du processus des défaillances et réparations de systèmes divers, et d'autre part de mettre en oeuvre des méthodes statistiques pour exploiter les données de défaillances et de maintenances relevées par les praticiens dans le but d'évaluer et de prévoir la fiabilité de ces systèmes. Il s'agit donc de développer des méthodes mathématiques rigoureuses dans un but résolument applicatif. Tous mes travaux ont pour origine un problème concret et se sont faits pour beaucoup d'entre eux en collaboration étroite avec l'industrie.

Ma recherche s'est effectuée depuis le début au sein du Laboratoire de Modélisation et Calcul (LMC) de l'Université Joseph Fourier de Grenoble, membre de la fédération IMAG (Institut d'Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble). Elle s'est insérée pendant quelques années dans le cadre du projet Modèles Aléatoires et Informatique (MAI) de l'IMAG, puis depuis peu au sein de l'action de recherche concertée locale Modèles Aléatoires pour la Fiabilité et la Maintenance des Systèmes (FIMA), entre le LMC et l'INRIA Rhône-Alpes.

Les différents problèmes que j'ai abordés peuvent être classés selon le domaine d'application concerné. J'ai tout d'abord travaillé dans le cadre de ma thèse sur la fiabilité des logiciels. Ces travaux se sont poursuivis jusqu'à aujourd'hui en s'orientant vers les tests d'adéquation aux modèles de croissance de fiabilité. Dans un deuxième temps, je me suis intéressé à la fiabilité de composants électroniques en environnement aléatoire stressant. Plus récemment, les problèmes liés aux dispositifs électromécaniques m'ont amené à travailler sur la fiabilité et le vieillissement en temps discret. Enfin, le dernier thème émergent concerne la modélisation et l'évaluation de l'efficacité de la maintenance des systèmes réparables.

Ce mémoire est structuré en chapitres consacrés à chacun de ces thèmes. Un résumé des résultats obtenus est présenté dans la suite de ce premier chapitre.

1.2 Fiabilité des logiciels

Dans le cadre de ma thèse [50], je me suis intéressé à la fiabilité des logiciels. A ce moment-là, les travaux dans le domaine étaient assez disparates et pour certains manquaient de rigueur. En prenant en compte les caractéristiques propres au logiciel (par rapport à la fiabilité des matériels, domaine largement étudié), j'ai proposé une modélisation stochastique très générale du processus des défaillances et corrections successives d'un logiciel [61]. L'évolution du système résulte de l'interaction complexe de trois processus aléatoires ponctuels : les sollicitations, les défaillances et les corrections. J'ai déduit de cette modélisation une classification des modèles

usuels de fiabilité des logiciels, reposant sur le formalisme des processus aléatoires ponctuels auto-excités.

En supposant que le profil opérationnel est poissonnien homogène et que la correction est markovienne, on aboutit à la construction d'une classe de modèles mathématiquement exploitables, les modèles proportionnels. Avec J.L. Soler, nous avons effectué une étude complète du plus simple d'entre eux, supposant un effet déterministe des corrections [62]. Avec C. Lavergne, nous avons généralisé ce dernier en rendant aléatoire l'effet de la correction [60]. Ce modèle généralisé peut s'écrire comme un modèle linéaire mixte à composantes de la variance, dans lequel une des composantes est connue. Nous avons alors développé des méthodes pour estimer la seconde composante [59]. Mais tous ces modèles présupposent que la fiabilité des systèmes étudiés est croissante. Il ne faut donc les utiliser qu'après s'être assuré de la croissance de la fiabilité. Pour cela, j'ai étudié plusieurs tests de tendance et montré l'optimalité du test de Laplace [51].

Les modèles et méthodes présentés ici ont été utilisés opérationnellement dans le cadre de collaborations avec EDF [52] et Bull [58], et ont été implémentés dans le logiciel `LogiFiab` [35].

Plus récemment, j'ai proposé un modèle à double taux de correction, permettant de prendre en compte d'éventuelles corrections imparfaites [54] et j'ai montré l'intérêt d'utiliser une famille large de modèles, la famille puissance généralisée [2]. Enfin, avec J.B. Durand, nous commençons à porter un regard original sur la fiabilité des logiciels à l'aide des chaînes de Markov cachées. Cette méthode permet d'identifier les étapes successives du processus de correction, bien mieux qu'avec les modèles traditionnels [43].

1.3 Tests d'adéquation aux modèles de croissance de fiabilité

A la fin de ma thèse, il s'est avéré qu'il existait un très grand nombre de modèles de croissance de fiabilité, mais que peu de méthodes permettaient de choisir parmi ceux-ci un modèle pertinent pour une application particulière. La seule méthode utilisée dans le domaine, celle dite du U-plot, était une méthode empirique qui n'avait pas été validée théoriquement. J'ai donc orienté mes travaux vers l'étude des tests d'adéquation aux modèles de croissance de fiabilité.

J'ai commencé par étudier les tests d'adéquation au modèle le plus utilisé, le modèle de Duane ou Power-Law Process. Avec E. Crétois, nous avons effectué une étude exhaustive des tests disponibles, mis en évidence leurs qualités et leurs défauts, et comparé leurs puissances [26]. Parallèlement, j'ai étudié l'application de la méthode CPIT à plusieurs modèles de croissance de fiabilité [53, 55]. Avec M.A. El Aroui, nous sommes parvenus à prouver la validité de la méthode U-plot, que nous désignons maintenant plus justement sous le nom de méthode des tests préquentiels, pour le modèle de Duane [27]. Une étude plus générale de cette méthode est en cours [46]. Enfin, avec M. Xie et B. Yang, nous avons développé un nouveau test d'adéquation au modèle de Duane, dont l'intérêt est d'être basé sur une méthode graphique simple couramment utilisée dans l'industrie [66]. La généralisation de ce test à d'autres modèles est en cours [67].

1.4 Fiabilité en environnement aléatoire stressant

Dans le cadre d'une collaboration avec Thomson-TCS, je me suis intéressé à la caractérisation de la mortalité aléatoire de composants électroniques en environnement aléatoire stressant. En effet, l'excellente qualité de conception de ces composants fait que leurs défaillances sont maintenant essentiellement imputables à des conditions environnementales stressantes de toute nature (électrique, mécanique, thermique,...). Avec J.L. Soler, nous avons étudié deux types possibles d'influence du stress sur la durée de vie des systèmes, en prenant en compte différents types de stress (ponctuels, en créneaux, diffus) et la mémorisation par le composant des stress subis

[64]. Dans tous les cas, le taux de défaillance du composant a été explicité et il s'est avéré que, la plupart du temps, il tendait rapidement vers une constante, ce qui va dans le sens d'une conjecture généralement faite par les praticiens.

Ce travail s'est poursuivi dans le cadre de la thèse de C.A. Zahalca [146]. Le but de la thèse était de généraliser l'approche précédente à des systèmes constitués d'un grand nombre de composants. Il faut alors prendre en compte la structure du système. Un indicateur a été défini permettant de mesurer la corrélation entre l'influence du stress et la configuration du système. L'étude de cet indicateur aboutit à conjecturer que plus un système est fiable, plus il est sensible au stress. Un modèle général d'influence du stress sur la durée de vie des systèmes a été proposé [65]. L'étude statistique de ce modèle a été effectuée dans le cas des stress ponctuels poissonniens homogènes [147, 69]. Cela a permis d'appliquer ces méthodes à des données de défaillance de câbles électriques soumis à des chocs de tension de type foudre. Sur cet exemple, le modèle proposé semble bien pertinent et la sensibilité des câbles au stress a pu être évaluée [68].

1.5 Fiabilité en temps discret

La quasi-totalité des études de fiabilité supposent que le temps est continu. Or certaines durées de vie ne peuvent pas se mesurer en temps calendaire. C'est le cas par exemple des appareils électromécaniques pour lesquels la durée de vie s'exprime comme le nombre de sollicitations du système jusqu'à défaillance. Il faut alors redéfinir les notions usuelles de la fiabilité pour les adapter à un cadre discret.

La thèse de C. Bracquemond [12], en collaboration avec Schneider Electric, présente une première approche du traitement de données de fiabilité en temps discret. Nous avons en particulier mis en évidence un certain nombre de différences gênantes entre les notions usuelles de fiabilité en temps continu et en temps discret. Ces différences sont dues à la définition du taux de défaillance en temps discret. Avec M. Xie, nous avons alors proposé une nouvelle définition de ce taux, qui résout les problèmes rencontrés [17, 18]. Nous avons proposé un estimateur non paramétrique de ce taux et étudié ses propriétés [15]. Avec E. Crétois, nous avons étudié les tests d'adéquation aux modèles de fiabilité en temps discret et proposé d'utiliser des tests basés sur la transformation de Smirnov généralisée [14]. La démarche globale aboutit à une analyse complète de données de fiabilité en temps discret, qui a été appliquée par Schneider Electric [13].

1.6 Efficacité de la maintenance

Tout au long de leur vie, les systèmes industriels sont soumis à des actions de maintenance préventive, dont le but est de ralentir le processus d'usure et de retarder l'occurrence des défaillances, et à des actions de maintenance corrective, dont le but est de remettre un système défaillant en état de fonctionnement. Cependant, l'évaluation de l'efficacité de ces actions de maintenance est un problème difficile qui a rarement été étudié. Dans la plupart des modèles de fiabilité des systèmes réparables, on suppose soit que la maintenance remet le système à neuf ("aussi bon que neuf"), soit qu'elle remet le système dans l'état où il était juste avant la défaillance ("aussi mauvais que vieux"). Il est clair que la réalité est entre ces deux extrêmes [56].

D'un point de vue probabiliste, les modèles correspondants aux deux situations précédentes sont les processus de renouvellement et les processus de Poisson non homogènes. Le but de la thèse de L. Doyen, débutée en septembre 2001, est de proposer des modèles intermédiaires, à l'aide d'une modélisation si possible réaliste des effets des maintenances, et d'effectuer l'analyse statistique de ces modèles. Les premiers résultats sont encourageants. Ils mettent en évidence une

classification en deux types d'effets : réduction de l'âge et réduction de l'intensité de défaillance. On voit également apparaître l'existence d'une intensité d'usure minimale, sorte de borne inférieure en deçà de laquelle aucune maintenance ne permettra d'aller [41]. Ce travail est l'occasion d'une collaboration avec EDF.

Chapitre 2

Fiabilité des logiciels

2.1 Problématique

Le développement de l'informatique et son utilisation dans les domaines les plus variés ont rendu notre société de plus en plus dépendante du bon fonctionnement des ordinateurs. La taille et la complexité des systèmes à base de logiciel a cru exponentiellement et continuera de croître dans le futur. Par ailleurs, il est extrêmement difficile et coûteux de détecter et corriger des fautes dans un logiciel. Par exemple, Microsoft a publié en 1999 [113] les résultats d'une étude dans laquelle il est dit d'une part qu'un programmeur professionnel fait en moyenne 6 fautes pour 1000 lignes de code écrites, et d'autre part qu'il faut en moyenne 12 heures de travail pour détecter et corriger une faute. Sachant qu'un logiciel commercial standard fait en moyenne 350 000 lignes de code et les applications plus complexes plusieurs millions de lignes de code, on comprend que, même en mettant en oeuvre les techniques les plus sophistiquées pour développer des systèmes informatiques sûrs de fonctionnement, les logiciels contiendront toujours des fautes, susceptibles d'engendrer des défaillances.

Or les défaillances des logiciels peuvent avoir des conséquences allant de la simple gêne à la catastrophe. Parmi les défaillances logicielles célèbres, on peut citer celle du logiciel d'autocommutation téléphonique d'AT&T qui a privé 10 millions d'habitants de New-York de téléphone pendant 9 heures en septembre 1991, et le bug qui a provoqué l'explosion de la fusée Ariane 5 en juin 1996. Il est donc impératif de tout faire pour éviter que de tels problèmes se reproduisent. Pour cela, on utilise des techniques de génie logiciel sophistiquées dont le but est de produire des logiciels sûrs de fonctionnement : prévention des fautes, élimination des fautes, tolérance aux fautes, ... [82, 83].

Mais il ne suffit pas d'avoir utilisé tous les moyens possibles pour développer un logiciel fiable, encore faut-il s'assurer qu'il l'est effectivement : il faut des méthodes pour atteindre des objectifs de fiabilité et d'autres pour savoir si ces objectifs sont atteints. Par conséquent, il est très important de pouvoir prévoir l'occurrence des défaillances, et donc d'évaluer ou mesurer la fiabilité des logiciels. Cette évaluation permettra d'abord de quantifier la confiance de l'utilisateur envers son système, puis de s'assurer que le logiciel a atteint un niveau de fiabilité conforme aux objectifs exprimés dans les spécifications. Par exemple, pour le nouveau métro parisien sans conducteur Meteor, les objectifs annoncés sont un taux de panne par rame et par heure inférieur à 10^{-9} pour le matériel et inférieur à 10^{-11} pour le logiciel. Si les mesures de fiabilité montrent que l'objectif n'est pas atteint, elles peuvent permettre d'évaluer l'effort de test à fournir pour atteindre l'objectif, et en particulier d'estimer le temps nécessaire pour y parvenir. Par conséquent, les mesures de fiabilité fournissent un critère d'arrêt des tests. Une expérience menée à AT&T en 1987 a montré que la mise en place des mesures de fiabilité a permis une réduction de 15% de la période de tests, ce qui a entraîné un gain de 4% sur le coût total du projet, alors que le surcoût des mesures n'a représenté que 0.2% de ce coût total [113].

2.2 Terminologie

La **fiabilité** d'un logiciel est la probabilité qu'il fonctionne sans défaillances pendant une durée donnée et dans un environnement spécifié. C'est donc une notion temporelle. Le temps considéré peut être le temps d'exécution CPU ou le temps calendaire. Notons que pour certains systèmes, le temps n'est pas l'élément primordial : ce qui compte, c'est qu'une exécution se déroule correctement. Alors, la fiabilité est définie comme la probabilité qu'une exécution soit correcte. Nous ne nous sommes pas pour l'instant intéressés à ce type de système, et nous conserverons dans la suite la définition temporelle de la fiabilité.

Une **défaillance** se produit quand le résultat fourni par le logiciel n'est pas conforme au résultat prévu par les spécifications. Pour éclaircir cette notion, on peut considérer qu'un logiciel est un système qui, par l'intermédiaire d'un programme, transforme des données d'entrée en résultats ou données de sortie. L'exécution d'un programme peut donc être vue comme une application de l'ensemble des données d'entrée dans l'ensemble des données de sortie. Les spécifications définissent quelle doit être la donnée de sortie pour chaque donnée d'entrée possible. Si, pour une donnée d'entrée particulière, la sortie fournie par le programme n'est pas celle prévue par les spécifications, il y a défaillance. On voit ainsi apparaître une relation forte entre donnée d'entrée et défaillance.

Une **faute logicielle** ou **bug** est un défaut du programme qui, exécuté dans certaines conditions, entraînera une défaillance. Une faute est un phénomène intrinsèque au programme, elle existe même quand le logiciel n'est pas utilisé. A l'inverse, une défaillance est un phénomène dynamique : le programme doit être exécuté pour qu'elle se manifeste. Une faute est créée quand le programmeur fait une erreur. Aussi, on emploie souvent le terme de **faute de conception**.

Le **profil opérationnel** définit le choix des entrées et la fréquence de sollicitation du logiciel, en associant à chaque entrée ou groupe d'entrées sa probabilité d'être fournie au programme à un instant donné. Le profil opérationnel peut être très différent en phase de test et en vie opérationnelle.

Quand une défaillance survient, on cherche à détecter la faute qui a provoqué cette défaillance et à l'éliminer. On effectue alors une **correction** ou **débogage**. Une correction, comme d'ailleurs un changement de spécifications, peut être interprétée comme une modification du programme. Elle a pour but de réduire l'occurrence d'apparition des défaillances, donc elle devrait augmenter la fiabilité du logiciel.

Les premières études de fiabilité des logiciels se sont inspirées des méthodes traditionnellement utilisées en fiabilité des matériels. Mais il s'est rapidement avéré que des différences importantes existaient entre la fiabilité des matériels et celle des logiciels. La plus importante de ces différences tient aux causes des défaillances. Les défaillances des matériels sont essentiellement dues à l'usure et aux facteurs environnementaux, tandis que celles des logiciels sont dues à des fautes de conception, c'est-à-dire à des erreurs humaines. La maintenance des matériels ralentit mais n'empêche pas l'usure des systèmes, tandis que la correction des logiciels augmente leur fiabilité.

Il était donc nécessaire de construire une théorie spécifique pour la fiabilité des logiciels.

2.3 Modélisation du processus des défaillances et corrections d'un logiciel

Les premiers articles dans le domaine datent du milieu des années 70, sous l'impulsion de Jelinski-Moranda [74], Littlewood-Verral [94] et Musa [101]. D'origines diverses, ces travaux étaient assez disparates et pour certains manquaient de rigueur. Ma première contribution dans ce domaine a donc consisté à proposer une démarche unificatrice, utilisant le cadre des processus

aléatoires ponctuels auto-excités. Elle a abouti à une modélisation stochastique très générale du processus des défaillances et corrections successives d'un logiciel [50, 61].

On note $\{T_i\}_{i \geq 1}$ le processus des instants de défaillance successifs d'un logiciel dont le fonctionnement a débuté à l'instant $T_0 = 0$. A chaque défaillance, le logiciel est corrigé ou pas, puis relancé. Usuellement, les durées de correction sont considérées comme négligeables ou ne sont pas comptabilisées. On définit alors le processus des durées inter-défaillances successives $\{X_i\}_{i \geq 1}$ où $\forall i \geq 1, X_i = T_i - T_{i-1}$. Enfin, on note $\{N_t\}_{t \geq 0}$ le processus de comptage des défaillances : N_t est le nombre de défaillances survenues entre 0 et t .

La fiabilité du logiciel à l'instant t exprime la probabilité que le logiciel fonctionne encore correctement pendant une durée quelconque à partir de t . Pour exprimer que cette probabilité peut dépendre du passé du processus de défaillance, on utilise un conditionnement par une tribu \mathcal{H}_t , qui sera définie en (2.3) :

$$R_t(\tau) = \mathbb{P}(N_{t+\tau} - N_t = 0 | \mathcal{H}_t) = \mathbb{P}(T_{N_t+1} - t > \tau | \mathcal{H}_t) \quad (2.1)$$

La durée moyenne d'attente de la prochaine défaillance à l'instant t (Mean Time To Failure) est :

$$MTTF_t = \mathbb{E}(T_{N_t+1} - t | \mathcal{H}_t) \quad (2.2)$$

Comme on l'a vu plus haut, la défaillance est étroitement liée aux données d'entrée du logiciel. On note E l'ensemble de toutes les données d'entrée admissibles du système, supposé invariant au cours du temps, et on le munit d'une tribu \mathcal{A} d'évènements d'entrée de référence.

A partir de l'instant initial, le logiciel est sollicité à des instants aléatoires $\{S_j\}_{j \geq 1}$ avec des données d'entrée aléatoires $\{Z_j\}_{j \geq 1}$. Le profil opérationnel, qui définit les conditions d'utilisation du logiciel, n'est autre que la loi de probabilité du processus aléatoire $\{(S_j, Z_j)\}_{j \geq 1}$. On peut aussi le décrire à l'aide du processus ponctuel spatial $\{\mathcal{S}_U\}_{U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{A}}$, où \mathcal{S}_U est le nombre aléatoire de couples (S_j, Z_j) tombant dans la région U de l'espace produit $\mathbb{R}^+ \otimes E$.

Une faute logicielle est une partie A de l'espace des entrées E . On appelle **faute totale** à l'instant t , et on note F_t , l'ensemble de toutes les données d'entrée pouvant provoquer une défaillance à l'instant t . Une défaillance se produit suite à la $n^{\text{ème}}$ sollicitation si l'entrée correspondante Z_n active une quelconque des fautes à cet instant, c'est à dire si $Z_n \in F_{S_n}$. On confondra l'instant de la défaillance avec l'instant de la sollicitation qui l'a engendrée, ce qui suppose les durées d'exécution négligeables ou non comptabilisées.

Une correction est une transformation du programme qui a pour but d'éliminer une partie des fautes de ce programme. On peut donc considérer une correction comme une application de \mathcal{A} dans \mathcal{A} qui a une faute totale avant correction F_t^- fait correspondre une faute totale après correction F_t^+ . La correction est de bonne qualité si $F_t^+ \subset F_t^-$, c'est à dire si on a éliminé une partie de la faute totale sans introduire de nouvelle faute. Dans tous les autres cas, la correction est imparfaite. Modéliser un processus de correction consistera donc à exprimer F_t^+ à l'aide de F_t^- .

Comme on a défini le processus des défaillances, on peut définir le processus des corrections à l'aide des instants de correction successifs $\{C_i\}_{i \geq 1}$ ou du processus de comptage des corrections $\{K_t\}_{t \geq 0}$. En général, on suppose que la correction est immédiate, c'est-à-dire que l'on fait une correction à chaque défaillance : $\forall t, K_t = N_t$. Mais on peut aussi supposer que la correction est différée, si on attend que plusieurs défaillances se soient produites avant d'effectuer une correction [135]. La faute totale n'étant modifiée qu'aux instants de correction, on notera $F_i = F_{C_i}^+$ et on s'intéressera au **processus de faute** $\{F_i\}_{i \geq 0}$. Il est logique de supposer que la correction d'une faute à un instant donné ne dépend que de l'état de la faute à cet instant et non de ses états passés, ce qui implique que le processus de faute sera supposé markovien.

Finalement, l'évolution du système au cours du temps résulte de l'interaction complexe de trois processus aléatoires ponctuels : celui des sollicitations, celui des défaillances et celui des

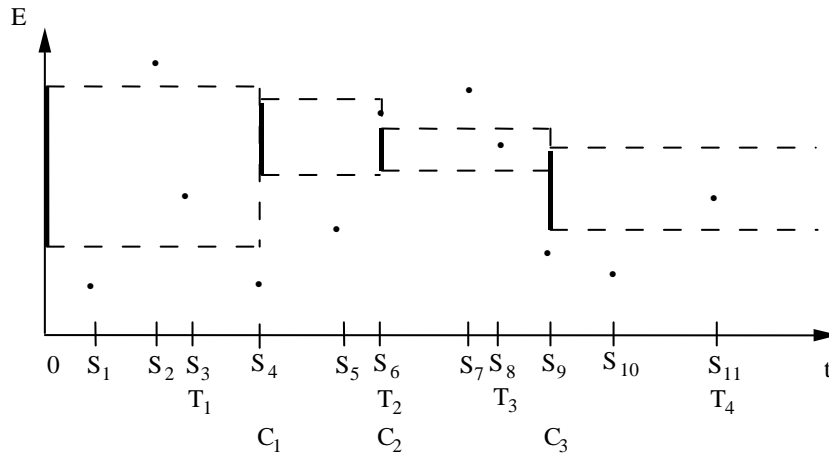


FIG. 2.1 – Une trajectoire du processus des défaillances et corrections d'un logiciel

corrections et de leur effet sur les fautes. Le processus résultant $\{\mathcal{S}_{[0,t] \times A}, N_t, K_t, F_t\}_{t \geq 0, A \in \mathcal{A}}$ sera appelé **processus des défaillances-corrrections** du système. La figure 2.1 présente une trajectoire de ce processus.

La loi de probabilité du processus de défaillance est entièrement déterminée par la donnée de l'**intensité conditionnelle de défaillance** (voir par exemple Snyder-Miller [134]) :

$$\lambda_t = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \mathbb{P}(N_{t+dt} - N_t = 1 | \mathcal{H}_t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \mathbb{P}(\mathcal{S}_{]t, t+dt] \times F_{K_t}} = 1 | \mathcal{H}_t) \quad (2.3)$$

où \mathcal{H}_t est la tribu, dans l'espace probabilisé de référence, engendrée par le passé du processus des défaillances-corrrections à l'instant t .

2.4 Modèles de fiabilité des logiciels

2.4.1 Classification

Construire un modèle de fiabilité, c'est proposer une forme particulière pour l'intensité de défaillance λ_t . Nous avons proposé [50] une classification des modèles de fiabilité des logiciels en fonction de la forme de leur intensité de défaillances.

Il s'avère que tous les modèles usuels font partie de la classe des **processus ponctuels auto-excités**, ce qui signifie que [134] :

- Le passé du processus ne dépend que du nombre et des instants des défaillances survenues : $\mathcal{H}_t = \sigma(N_t, T_1, \dots, T_{N_t})$.
- La probabilité d'occurrence simultanée de deux défaillances ou plus est négligeable : $P(N_{t+dt} - N_t \geq 2) = o(dt)$.

Les propriétés bien connues de ces processus permettent de calculer toutes les grandeurs caractéristiques de la fiabilité à l'aide de l'intensité de défaillance. Par exemple :

$$R_t(\tau) = \exp\left(-\int_t^{t+\tau} \lambda_s ds\right) \quad MTTF_t = \int_0^{+\infty} R_t(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

Le plus simple des processus ponctuels auto-excités est le processus de Poisson homogène (HPP). Il correspond à une intensité de défaillance constante: $\lambda_t = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Dans ce cas, les durées inter-défaillances X_i sont indépendantes et de même loi exponentielle $\exp(\lambda)$. Cela correspond à l'hypothèse que le logiciel n'est jamais corrigé et est relancé en l'état à chaque défaillance, ce qui est le cas des logiciels en clientèle.

On distingue 4 grandes classes de modèles :

1. $\lambda_t = \lambda(N_t)$. Dans ce cas, les durées inter-défaillances X_i sont indépendantes et de lois exponentielles. Les plus connus des modèles de cette classe sont :
 - le modèle de Jelinski-Moranda [74] (JM) : $\lambda_t = \phi(N - N_t)$, $\phi \in \mathbb{R}^+$, $N \in \mathbb{N}$. Les X_i sont de lois $\exp(\phi(N - i + 1))$.
 - le modèle Géométrique de Moranda [99] (MG) : $\lambda_t = \lambda c^{N_t}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $c \in]0, 1]$. Les X_i sont de lois $\exp(\lambda c^{i-1})$.

Proposé en 1972, le modèle de Jelinski-Moranda est le tout premier modèle de fiabilité des logiciels. Il consiste à supposer que le logiciel contient à l'instant initial un nombre N de fautes, qu'à chaque défaillance la faute incriminée est repérée et parfaitement éliminée, sans ajout de nouvelle faute, et que l'intensité de défaillance est proportionnelle au nombre de fautes résiduelles, ϕ étant le coefficient de proportionnalité. Il est équivalent de considérer que les N fautes sont indépendantes et que leurs durées d'apparition (latences) sont de même loi $\exp(\phi)$. Ce modèle a fait couler beaucoup d'encre, et a été beaucoup critiqué car il est peu réaliste de supposer que toutes les fautes d'un logiciel ont la même sévérité.

2. $\lambda_t = \phi(t)(N - N_t)$. Il s'agit de généraliser le modèle de Jelinski-Moranda : on a toujours N fautes indépendantes et de même sévérité, mais leurs latences sont de loi quelconque, de taux de hasard $\phi(t)$. Outre le modèle de Jelinski-Moranda, on retrouve dans cette classe le modèle de Littlewood [92], pour lequel les latences sont de loi de Pareto.
3. $\lambda_t = \lambda(N_t, t - T_{N_t})$. Cette propriété est caractéristique des modèles où les durées inter-défaillances X_i sont indépendantes. Outre les modèles de la classe 1, on y retrouve le modèle de Littlewood-Verral [94], pour lequel les X_i sont de lois de Pareto, et le modèle de Schick-Wolverton [129], pour lequel les X_i sont de lois de Rayleigh.
En fait, les modèles de Littlewood et Littlewood-Verral peuvent également être construits à partir de considérations bayésiennes.

4. $\lambda_t = \lambda(t)$. Dans ce cas, $\{N_t\}_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson non homogène (NHPP). Les plus connus des modèles de cette classe sont :
 - le modèle de Duane [42] ou Power-Law Process [28] (PLP) : $\lambda(t) = \alpha \beta t^{\beta-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in \mathbb{R}^+$.
 - le modèle de Goel-Okumoto [70] (GO) : $\lambda(t) = \lambda e^{-\phi t}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in \mathbb{R}$.
 - le modèle "en forme de S" de Yamada-Ohba-Osaki [141] (S) : $\lambda(t) = \alpha \beta^2 t e^{-\beta t}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in \mathbb{R}^+$.
 - tous les modèles dits "à correction imparfaite" de Pham et ses co-auteurs [115, 113].

Les NHPP sont de très loin les modèles les plus utilisés en fiabilité des logiciels. Cela s'explique par leur simplicité : l'intensité de défaillance est simplement une fonction du temps. Notons que la continuité de cette fonction implique que le logiciel après correction est pratiquement dans le même état qu'avant la défaillance. Cette propriété, qui peut paraître peu réaliste, est connue sous le nom de *principe de réparation minimale* en fiabilité des matériels.

Ce travail de classification n'a été publié qu'en français et n'a donc pas été lu à l'étranger, ce qui explique que, quelques années plus tard, Chen et Singpurwalla ont publié un travail tout à fait similaire [20]. D'autres classifications de modèles ont été proposées depuis, par exemple dans les livres de Musa-Iannino-Okumoto [103], Xie [139], Lyu [95] et Pham [113].

2.4.2 Les modèles proportionnels

Ainsi que l'a souligné Littlewood [93], il y a deux sources d'incertitude dans le processus des défaillances-corrrections d'un logiciel : l'incertitude liée aux conditions d'utilisation du logiciel (sollicitations et entrées), résumée par le profil opérationnel, et l'incertitude liée à l'effet des corrections, résumée par le processus de faute. La modélisation générale proposée dans la section 2.3 permet de construire des modèles de fiabilité des logiciels prenant en compte de manière explicite ces deux sources d'incertitude.

Concernant le couple sollicitations-entrées, l'hypothèse la plus simple, et néanmoins réaliste aux dires des praticiens, consiste à supposer que le profil opérationnel est poissonnien homogène. Cela signifie que les instants de sollicitations $\{S_j\}_{j \geq 1}$ forment un processus de Poisson homogène sur \mathbb{R}^+ d'intensité μ , et que les données d'entrée $\{Z_j\}_{j \geq 1}$ sont indépendantes entre elles, de même loi de probabilité Q sur (E, \mathcal{A}) , et indépendantes des instants de sollicitation. De ce fait, le processus \mathcal{S} est un processus de Poisson spatial sur $\mathbb{R}^+ \otimes E$ d'intensité la mesure $\mu L \otimes Q$, où L est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^+ . L'intensité de défaillances dans ce profil opérationnel est alors donnée par :

$$\lambda_t = \mu Q(F_{K_t}) \quad (2.5)$$

L'incertitude sur les entrées est traduite par le paramètre μ et la loi Q , et l'incertitude sur la correction par le processus de faute $\{F_i\}_{i \geq 0}$.

On peut alors en déduire, rejoignant une idée de Soler [136], que, quand le profil opérationnel est poissonnien homogène et que la correction est immédiate, il existe un processus de Markov $\Lambda = \{\Lambda_i\}_{i \geq 1}$, tel que, conditionnellement à $\{\Lambda_i = \lambda_i\}_{i \geq 1}$, les durées inter-défaillances X_i sont indépendantes et de lois exponentielles de paramètres λ_i respectivement.

$\Lambda_i = \mu Q(F_{i-1})$ est le taux du défaut du logiciel après la $(i-1)^{\text{ème}}$ correction. Proposer un modèle de fiabilité des logiciels dans ce contexte revient à proposer un modèle pour le processus $\{\Lambda_i\}_{i \geq 1}$. Par exemple, les modèles de la classe 1 dans la classification présentée en 2.4.1 sont obtenus en supposant les Λ_i déterministes.

Avec J.L. Soler, nous avons proposé dans [62] une famille de modèles simples, appelés **modèles proportionnels**, basée sur la relation :

$$\forall i \geq 1, \Lambda_{i+1} = \Lambda_i e^{-\Theta_i} \quad (2.6)$$

où les Θ_i représentent les qualités des corrections successives (Λ_i et Θ_i sont supposés indépendants) :

- $\Theta_i = 0 \implies \Lambda_{i+1} = \Lambda_i$: la correction n'a aucun effet
- $\Theta_i > 0 \implies \Lambda_{i+1} < \Lambda_i$: la correction diminue le taux de défaillance du logiciel, donc est de bonne qualité
- $\Theta_i < 0 \implies \Lambda_{i+1} > \Lambda_i$: la correction augmente le taux de défaillance du logiciel, donc est de mauvaise qualité

2.4.2.1. Le modèle proportionnel déterministe

Le modèle le plus simple consiste à supposer l'effet des corrections déterministe et constant :

- $\Lambda_1 = \lambda \in \mathbb{R}^+$ est l'intensité de défaillance initiale

- $\forall i \geq 1, \Theta_i = \theta \in \mathbb{R}$ représente la qualité des corrections

Dans ce cas, les durées inter-défaillances X_i sont indépendantes et de lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda e^{-(i-1)\theta}$.

En posant $c = e^{-\theta}$, on voit qu'il s'agit du modèle géométrique de Moranda [99], présenté en 2.4.1, dans lequel on autorise la possibilité de mauvaise correction ($c > 1$). Comme Moranda n'avait fait que définir le modèle, nous en avons effectué une étude statistique complète dans [50, 62].

Au vu de l'observation des n premières durées inter-défaillances X_1, \dots, X_n , les estimateurs de maximum de vraisemblance de λ et θ sont définis par :

$$\hat{\lambda}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n e^{-(i-1)\hat{\theta}_{MV}} X_i} \quad \sum_{i=1}^n (n - 2i + 1) e^{-(i-1)\hat{\theta}_{MV}} X_i = 0 \quad (2.7)$$

Les propriétés de ces estimateurs ont été étudiées en partie dans [62], puis complétées par El Aroui et Lavergne dans [47].

Par ailleurs, le modèle peut s'écrire sous la forme d'un modèle linéaire :

$$Y = A\beta + \epsilon \quad (2.8)$$

$$\text{où } Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -\ln \lambda \\ \theta \end{pmatrix}, \forall i, Y_i = \ln X_i + \gamma_\epsilon \text{ (où } \gamma_\epsilon \text{ est la constante}$$

d'Euler), et ϵ est un vecteur aléatoire centré de matrice de covariance $\frac{\pi^2}{6} I_n$, I_n désignant la matrice identité d'ordre n . On peut noter que, dans ce modèle, les résidus ϵ_i ne sont pas gaussiens, mais sont des translatées de variables aléatoires de loi de Gumbel.

Cette écriture fournit des estimateurs des moindres carrés, que l'on peut comparer aux estimateurs de maximum de vraisemblance :

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{MC} &= \exp \left(-\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n (2n - 3i + 2) Y_i \right) \\ \tilde{\theta}_{MC} &= \frac{6}{n(n+1)(n-1)} \sum_{i=1}^n (2i - n - 1) Y_i \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.4.2.2. Le modèle proportionnel lognormal

Le défaut majeur du modèle proportionnel déterministe est évidemment l'hypothèse très irréaliste que la qualité de la correction est constante au cours du temps (égale à θ). Il est plus juste de supposer que les qualités des corrections successives Θ_i sont des variables aléatoires. On définit un nouveau modèle appelé *modèle proportionnel lognormal*, à l'aide des hypothèses suivantes :

- $\Lambda_1 = \lambda \in \mathbb{R}^+$ est l'intensité de défaillance initiale
- $\forall i \geq 1, \Lambda_{i+1} = \Lambda_i e^{-\Theta_i}$, où les Θ_i sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, représentant les qualités des corrections successives.

Le nom du modèle vient du fait que les Λ_i sont ici des variables aléatoires de lois lognormales.

Avec C. Lavergne, nous avons étudié ce modèle en détail [60]. Le calcul de la fonction de vraisemblance étant inextricable, on utilise le fait que, comme le précédent, ce modèle peut s'écrire comme un modèle linéaire :

$$Y = A\beta + \epsilon' \quad (2.10)$$

où Y , A et β sont définis comme dans la section précédente, et ϵ' est un vecteur aléatoire non gaussien, centré, de matrice de covariance $\frac{\pi^2}{6}I_n + \sigma^2V$, où V est la matrice de terme générique $V_{ij} = \min(i, j) - 1$.

On voit qu'il s'agit ici d'un modèle linéaire mixte à deux composantes de la variance, l'une étant connue, égale à $\frac{\pi^2}{6}$, et l'autre, σ^2 , étant inconnue.

Pour estimer β , on utilise l'estimateur des moindres carrés ordinaires $\tilde{\beta}_{MC} = ({}^tAA)^{-1} {}^tAY$. Les expressions des estimateurs de λ et θ sont les mêmes qu'en (2.9), mais leurs propriétés sont beaucoup dégradées, notamment en termes de vitesse de convergence.

Si les deux composantes de la variance étaient inconnues, on utiliserait pour les estimer les procédures usuelles comme on peut les trouver par exemple dans le livre de Rao-Kleffe [118]. Mais dans la mesure où l'une d'entre elles est connue, il a fallu développer des méthodes spécifiques [59].

Dans un premier temps, on peut penser à utiliser pour estimer σ^2 une forme quadratique des observations du type tYMY . Si on impose à l'estimateur d'être sans biais et invariant par translation de β , on obtient une expression simple de celui-ci :

$$\tilde{\sigma}_{MC}^2 = \frac{15}{n^2 - 4} \left[\|Y - A\tilde{\beta}_{MC}\|^2 - (n - 2)\frac{\pi^2}{6} \right] \quad (2.11)$$

Malheureusement, cet estimateur n'est pas consistant.

On propose alors une adaptation de la méthode MINQUE (MINimum Norm Quadratic Unbiased Estimator) de Rao [117]. Pour traiter le cas général, notons c^2 la composante de la variance connue et supposons que le paramètre du modèle est de dimension p . Le principe de la méthode MINQUE est d'utiliser une valeur a priori de la matrice de covariance de Y . Dans notre cas, puisque c^2 est connue, on n'a besoin que d'une valeur a priori α^2 de σ^2 . L'estimateur MINQUE de σ^2 est sans biais, invariant par translation de β et minimise une certaine norme. Son expression est :

$$\tilde{\sigma}_{MINQUE}^2(\alpha) = \frac{{}^tYR(\alpha)Y - \frac{\text{tr}R(\alpha)}{\text{tr}R(\alpha)R(\alpha)}{}^tYR(\alpha)R(\alpha)Y}{n - p - \frac{[\text{tr}R(\alpha)]^2}{\text{tr}R(\alpha)R(\alpha)}} \quad (2.12)$$

où $R(\alpha) = B(\alpha)^{-1} (I_n - A({}^tAB(\alpha)^{-1}A)^{-1} {}^tAB(\alpha)^{-1})$ et $B(\alpha) = V + \frac{c^2}{\alpha^2}I_n$.

Mais la démarche MINQUE est mal adaptée à notre cas de figure, car elle traite les deux composantes de la variance de la même manière, la connaissance de c^2 n'intervenant que dans le choix des valeurs a priori et pas dans la procédure d'estimation. Aussi avons-nous proposé une adaptation de cette méthode qui prend en compte dès le départ la connaissance de c^2 . Le principe est de choisir une métrique plus adaptée que l'identité, qui soit telle que, si le rapport c^2/σ^2 était connu, on retrouverait les estimateurs de Gauss-Markov usuels. La métrique en question est $B(\alpha)^{-1}$, définie ci-dessus. Les détails sont dans [59]. Le changement de métrique fait que l'estimation de β est également modifiée. Finalement, on obtient les estimateurs sans biais suivants :

$$\tilde{\beta}_{GM}(\alpha) = ({}^tAB(\alpha)^{-1}A)^{-1} {}^tAB(\alpha)^{-1}Y$$

$$\tilde{\sigma}_{GM}^2(\alpha) = \frac{{}^tYR(\alpha)Y - c^2 \operatorname{tr}R(\alpha)}{n - p - \frac{c^2}{\alpha^2} \operatorname{tr}R(\alpha)} \quad (2.13)$$

Ces estimateurs sont conçus à partir d'une idée de base plus adaptée au problème que les estimateurs des moindres carrés et MINQUE. Cependant, le calcul de leur variance est extrêmement complexe et il n'a pas été possible de prouver théoriquement qu'ils étaient de meilleure qualité. Nous avons quand même pu comparer les différents estimateurs de σ^2 proposés à l'aide de simulations [59]. Il s'avère que la qualité des estimateurs dépend à la fois de l'ordre de grandeur de la vraie valeur de σ^2 et du choix de la valeur a priori α^2 . Globalement, le meilleur estimateur est $\tilde{\sigma}_{GM}^2$ avec comme valeur a priori $\alpha^2 = \tilde{\sigma}_{MC}^2$.

Pour terminer, on peut remarquer que le modèle proportionnel déterministe est un modèle proportionnel lognormal particulier pour lequel $\sigma^2 = 0$. Par conséquent, on peut tester l'hypothèse que la qualité de correction est constante au cours du temps en testant " $\sigma^2 = 0$ " contre " $\sigma^2 > 0$ " dans ce modèle. Pour ce faire, on montre la normalité asymptotique de $\tilde{\sigma}_{MC}^2$ et on en déduit un test asymptotiquement de seuil γ [60] consistant à rejeter l'hypothèse " $\sigma^2 = 0$ " si :

$$\tilde{\sigma}_{MC}^2 > \frac{15\pi^2}{n^2 - 4} \sqrt{\frac{11n}{90}} u_{2\gamma} \quad (2.14)$$

où $u_{2\gamma}$ est le quantile d'ordre $1 - \gamma$ de la loi normale centrée-réduite. La puissance de ce test a été évaluée à l'aide de simulations.

Nous avons appliqué ce test à de nombreux jeux de données réelles, dont les données de Musa [102] qui sont un étalon dans le domaine de la fiabilité des logiciels. Dans la majorité des cas, l'hypothèse de constance de la correction a été rejetée, ce qui tend à montrer qu'il est préférable d'utiliser le modèle lognormal plutôt que le modèle déterministe. Cependant, les paramètres sont moins bien estimés dans le modèle lognormal que dans le modèle déterministe, ce qui nous conduit finalement à recommander plutôt l'usage du modèle le plus simple. On verra dans le chapitre suivant que cette recommandation est confirmée par l'usage de tests d'adéquation.

2.4.2.3. Le modèle à double taux de correction

L'hypothèse de base des modèles proportionnels est que le taux de défaillance après une correction est proportionnel à ce qu'il était avant la défaillance. Ce faisant, on ne prend pas en compte une caractéristique souvent observée, qu'on appelle **correction imparfaite** (imperfect debugging). Une correction peut être imparfaite de deux façons :

- la faute ayant entraîné la défaillance peut n'être pas complètement éliminée
- la correction peut introduire de nouvelles fautes

Les travaux dans le domaine prennent souvent en compte l'une de ces deux possibilités [143, 109, 142, 115], mais rarement les deux à la fois [148, 112]. Dans [54], nous avons proposé un modèle de correction imparfaite basé sur notre modélisation générale du processus de défaillance-correction des logiciels.

Si on revient au processus de faute $\{F_i\}_{i \geq 1}$, les deux sources de correction imparfaite peuvent se traduire en disant qu'à la $i^{\text{ème}}$ correction, on enlève une partie A_i de la faute totale F_{i-1} et on rajoute une partie B_i du complémentaire de la faute totale \bar{F}_{i-1} . Ainsi, on a :

$$\forall i \geq 1, F_i = (F_{i-1} - A_i) \cup B_i \quad (2.15)$$

Quand le profil opérationnel est poissonnien homogène, on a mis en évidence l'existence du processus des taux de défaillance successifs $\{\Lambda_i\}_{i \geq 1}$, avec $\Lambda_i = \mu Q(F_{i-1})$. L'équation (2.15) permet de montrer qu'il existe alors deux suites de variables aléatoires $\{\alpha_i\}_{i \geq 1}$ et $\{\beta_i\}_{i \geq 1}$, à valeurs dans $[0, 1]$, telles que :

$$\forall i \geq 1, \Lambda_i = (1 - \alpha_i - \beta_i) \Lambda_{i-1} + \mu \beta_i \quad (2.16)$$

α_i représente un taux de bonne correction et β_i un taux de mauvaise correction. Les modèles proportionnels correspondent au cas où on n'ajoute jamais de nouvelle faute, c'est-à-dire $\forall i, \beta_i = 0$.

Dans [54], nous avons étudié le modèle le plus simple, pour lequel les deux types de taux sont déterministes et constants. Nous lui avons donné le nom de *modèle à double taux de correction* :

- $\forall i \geq 1, \alpha_i = \alpha \in [0, 1]$ est le taux de bonne correction
- $\forall i \geq 1, \beta_i = \beta \in [0, 1]$ est le taux de mauvaise correction
- $\Lambda_1 = \lambda \in \mathbb{R}^+$ est l'intensité de défaillance initiale.

Alors, les durées inter-défaillances X_i sont indépendantes et de lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda_i = (1 - \alpha - \beta)^{i-1} \left(\lambda - \frac{\mu\beta}{\alpha + \beta} \right) + \frac{\mu\beta}{\alpha + \beta}$.

On peut remarquer que $\lim_{i \rightarrow +\infty} \lambda_i = \frac{\mu\beta}{\alpha + \beta} \neq 0$. Cela signifie qu'il existe une intensité de défaillance résiduelle non nulle, ou qu'il restera toujours des fautes dans le logiciel. Comme on l'a vu en 2.1, cette hypothèse est réaliste, mais est pourtant rarement prise en compte dans les modèles de fiabilité des logiciels. Dans ces conditions, les taux de défaillance successifs peuvent s'écrire :

$$\lambda_i = \lambda_\infty + \gamma^{i-1} (\lambda - \lambda_\infty) \quad (2.17)$$

Sous cette forme, le modèle est similaire au processus de Poisson géométrique hybride défini dans [99], bien qu'il soit construit de façon tout-à-fait différente.

Ce modèle a été appliqué sur des jeux de données réelles [54]. Bien qu'inadéquat dans la majorité des cas, il s'avère plus adapté à certains jeux de données que les modèles classiques.

2.5 Tests de tendance

On a vu qu'il était complexe de modéliser dans le détail le processus des défaillances-corrrections d'un logiciel. Mais on peut parfois se contenter d'informations plus simples sur le comportement global de ce processus. En particulier, la détermination de la tendance de la fiabilité est un point central. En effet, il est clair qu'un concepteur ou utilisateur d'un système souhaite savoir si sa fiabilité s'est améliorée, détériorée ou est restée stable durant sa période d'utilisation. Dans le cas du logiciel, les corrections sont supposées augmenter la fiabilité, ce qui fait que les modèles de base présupposent que la fiabilité est croissante. En toute rigueur, il ne faudrait utiliser ces modèles qu'après s'être assuré que la fiabilité est effectivement croissante. D'autres modèles, comme celui de Yamada-Ohba-Osaki [141], supposent que la fiabilité a commencé par décroître puis s'est mis à croître. Il est donc important d'être capable de vérifier si la fiabilité s'est effectivement comporté de cette façon. Enfin, tester la tendance de la fiabilité sert à évaluer l'efficacité du processus de correction.

La plupart du temps, on traite le problème en constatant empiriquement, souvent à l'aide de graphes, que les défaillances ont tendance à se produire de plus en plus rarement ou de plus en plus souvent. Il est évidemment plus satisfaisant de fournir une réponse statistique, c'est-à-dire de donner un test d'hypothèses permettant de déterminer, au vu des défaillances successives du logiciel, et avec une probabilité d'erreur donnée, si sa fiabilité s'est améliorée ou pas.

Formellement, un **test de tendance de fiabilité** est un test de l'hypothèse nulle \mathcal{H}_0 : "il n'y a pas de tendance de fiabilité" contre l'hypothèse alternative \mathcal{H}_1 : "il y a croissance de fiabilité" ou éventuellement \mathcal{H}_2 : "il y a décroissance de fiabilité".

Pour traduire ces hypothèses en termes statistiques, il faut définir précisément ce qu'est la croissance de fiabilité. On dira qu'il y a **croissance de fiabilité** si les durées inter-défaillances sont de plus en plus grandes, c'est-à-dire si les variables aléatoires X_i sont stochastiquement croissantes. Tous les ordres stochastiques sont possibles, mais on utilise en général l'ordre stochastique usuel [100].

La première utilisation systématique de ces tests en fiabilité est due à Ascher et Feingold [3]. Ceux-ci recommandent l'usage du test de Laplace, en se basant sur un résultat de Cox et Lewis [25]. Le test de Laplace repose sur une statistique, notée U , qui prend deux formes différentes suivant le plan d'essai dans lequel on se trouve :

Plan d'essai 1 : Le processus est stoppé à un instant T . Les observations sont le nombre N_T de défaillances survenues et les instants T_1, \dots, T_{N_T} de ces défaillances. La statistique de Laplace est :

$$U = \sqrt{\frac{12}{N_T T^2}} \left(\sum_{i=1}^{N_T} T_i - N_T \frac{T}{2} \right) \quad (2.18)$$

Plan d'essai 2 : Le processus est stoppé au bout de n défaillances. Les observations sont les instants T_1, \dots, T_n de ces défaillances. La statistique de Laplace est :

$$U = \sqrt{\frac{12}{(n-1)T_n^2}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} T_i - (n-1) \frac{T_n}{2} \right) \quad (2.19)$$

S'il y a croissance de fiabilité, les X_i seront de plus en plus grands, donc les T_i seront dans l'ensemble plus proches de 0 que de T (ou T_n), et U sera "plutôt petit". Inversement, s'il y a décroissance de fiabilité, U sera "plutôt grand". Sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 d'absence de tendance, U sera proche de zéro. Mais pour effectuer le test, on a besoin de la loi de U sous \mathcal{H}_0 . Usuellement, on réduit l'hypothèse d'absence de tendance à l'hypothèse selon laquelle le processus des défaillances est un processus de Poisson homogène (HPP). Bien que réductrice, cette hypothèse est assez plausible dans la pratique et le HPP correspond bien à l'absence de tendance dans la quasi-totalité des modèles de fiabilité des logiciels.

Un résultat classique des HPP est que, conditionnellement à $[N_T = n]$, le vecteur (T_1, \dots, T_n) a la même loi que la statistique d'ordre d'un échantillon de taille n de loi uniforme sur $[0, T]$. De même, conditionnellement à $[T_n = t_n]$, le vecteur (T_1, \dots, T_{n-1}) a la même loi que la statistique d'ordre d'un échantillon de taille $n-1$ de loi uniforme sur $[0, t_n]$. Il est facile d'en déduire que, sous l'hypothèse HPP, la statistique de Laplace U converge en loi vers la loi normale centrée-réduite, ce qui permet de construire le test.

Dans [50], j'ai comparé sur des données réelles le test de Laplace à d'autres tests pouvant être utilisés dans ce contexte, que sont les tests de Spearman, Kendall et Gnedenko. On constate que le test de Laplace nécessite un nombre pas trop petit d'observations pour pouvoir détecter une tendance, et qu'il détecte bien les tendances globales. Les tests de Spearman et Kendall détectent des tendances locales et sont utilisables même pour de très petits échantillons.

Dans [51], j'ai étudié l'optimalité du test de Laplace pour détecter une tendance dans le cadre de quelques uns des principaux modèles de fiabilité des logiciels. Par exemple, le modèle de Goel-Okumoto [70] est le NHPP d'intensité $\lambda e^{-\phi t}$. Tester la croissance de fiabilité dans ce modèle, c'est tester " $\phi = 0$ " contre " $\phi > 0$ ". Pour éliminer le paramètre nuisible λ , il faut utiliser les résultats sur les tests conditionnels dans les structures exponentielles [86, 8]. On peut alors

montrer que le test de Laplace, dans les deux plans d'essai, est uniformément le plus puissant parmi les tests sans biais (UMPB) pour tester la croissance, la décroissance, ou la stabilité de la fiabilité. Ces résultats englobent celui de Cox et Lewis.

Pour le Power-Law Process (PLP) [42, 28], qui est le NHPP d'intensité $\alpha\beta t^{\beta-1}$, on montre que le test basé sur les statistiques :

$$V = 2 \sum_{i=1}^{N_T} \ln \frac{T}{T_i} \text{ (plan d'essai 1) ou } V = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \ln \frac{T_n}{T_i} \text{ (plan d'essai 2)}$$

est UMPB. Le résultat classique sur les HPP vu plus haut permet de voir que, dans le plan d'essai 1, conditionnellement à $[N_T = n]$, V est sous \mathcal{H}_0 de loi du χ^2 à $2n$ degrés de liberté, et dans le plan d'essai 2, V est (inconditionnellement) sous \mathcal{H}_0 de loi du χ^2 à $2(n-1)$ degrés de liberté. Ce test peut être vu comme une version logarithmique du test de Laplace.

Pour le modèle de Musa-Okumoto [104], NHPP d'intensité $\alpha/(\alpha\beta t + 1)$, il n'existe pas de test UMP ni UMPB. Il faut alors utiliser la notion de puissance locale [49]. On montre que le test de Laplace est localement le plus puissant pour ce modèle. On obtient le même résultat pour le modèle de Moranda. En revanche, le test de Laplace ne possède aucune propriété particulière pour le modèle de Littlewood-Verral.

Finalement, notre étude justifie l'utilisation du test de Laplace quand on souhaite se prononcer sur la tendance de la fiabilité. Cette utilisation s'est depuis généralisée dans le domaine ([76] et chapitre 10 de [95]).

Quand le modèle sous-jacent est le modèle de Moranda ou, ce qui revient au même, le modèle proportionnel déterministe, une approche tout à fait différente consiste à remarquer que la tendance de la fiabilité est liée au paramètre θ . L'hypothèse \mathcal{H}_0 d'absence de tendance correspond à " $\theta = 0$ ", l'hypothèse \mathcal{H}_1 de croissance de fiabilité à " $\theta > 0$ " et l'hypothèse \mathcal{H}_2 de décroissance de fiabilité à " $\theta < 0$ ". On peut donc effectuer un test de tendance basé sur l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ , $\hat{\theta}_n$. Comme on connaît la fonction de répartition de $\hat{\theta}_n$, il est facile de construire ce test [62]. On connaît le seuil exact de ce test, alors que celui du test de Laplace n'est qu'asymptotique. Une étude de puissance a été menée qui montre que le test de Laplace est le plus puissant pour les petites valeurs de θ (c'est logique puisqu'il est localement le plus puissant), mais qu'il devient moins puissant que ce nouveau test quand θ augmente, la différence étant d'autant plus grande que n est petit.

2.6 Travaux récents et perspectives

Les modèles et méthodes présentés jusqu'ici permettent d'effectuer une analyse statistique fine de données de fiabilité des logiciels : analyse de tendance et utilisation de modèles pour évaluer quantitativement les caractéristiques de fiabilité des systèmes étudiés. Ces travaux ont été utilisés opérationnellement dans le cadre de deux collaborations avec EDF [52] et Bull [58], et ont été implémentés dans le logiciel **LogiFiab** [35]. Ce logiciel a par ailleurs été utilisé pour l'enseignement de la fiabilité à Grenoble, mais aussi à Compiègne et Saint-Etienne.

Devant la multiplicité des modèles et leurs résultats souvent contradictoires, il est devenu indispensable de disposer de moyens permettant de choisir un modèle approprié pour chaque jeu de données particulier. C'est pourquoi j'ai orienté mes recherches dans le domaine vers l'étude des tests d'adéquation aux modèles de croissance de fiabilité, qui font l'objet du chapitre suivant de ce mémoire. A cette occasion, j'ai montré l'intérêt d'utiliser une famille large de modèles, la famille puissance généralisée [2]. L'étude de cette famille mériterait à mon sens d'être approfondie.

Enfin, avec J.B. Durand, nous commençons [43] à porter un regard original sur la fiabilité des logiciels. L'idée est issue de la propriété vue dans la section 2.4.2 : quand le profil opérationnel est poissonnien homogène et que la correction est immédiate, il existe un processus de Markov

$\Lambda = \{\Lambda_i\}_{i \geq 1}$, tel que, conditionnellement à $\{\Lambda_i = \lambda_i\}_{i \geq 1}$, les durées inter-défaillances X_i sont indépendantes et de lois exponentielles de paramètres λ_i respectivement. Le processus Λ n'est pas observé, c'est donc une chaîne de Markov cachée. Un état de cette chaîne correspond à un état du processus de faute et un changement d'état à une correction. Grâce aux techniques des chaînes de Markov cachées, il est possible d'identifier les étapes successives du processus de correction, bien mieux qu'avec les modèles traditionnels. Par exemple, pour le premier jeu de données de Musa [102], on peut identifier clairement trois états cachés et les instants de changement d'état, ce qui permet de penser qu'il y a eu deux corrections majeures dans le processus de débogage, et de savoir quand elles ont eu lieu. Cette méthodologie ne permettra pas de prévoir le futur du processus des défaillances, mais elle permet une analyse du processus de correction qui peut s'avérer précieuse pour les développeurs des systèmes en question.

Chapitre 3

Tests d'adéquation aux modèles de croissance de fiabilité

3.1 Problématique

Le livre récent de Pham [113] recense plus d'une cinquantaine de modèles de fiabilité des logiciels. Quand on a relevé des données de défaillances et que l'on souhaite en déduire une prévision du comportement futur du système, il est capital de choisir un modèle approprié, car les prévisions faites par différents modèles sur le même jeu de données peuvent être très différentes (voir des exemples dans [58]). Or la multiplicité des modèles existant ne facilite pas ce choix.

Les praticiens choisissent souvent de prendre le modèle le plus simple, c'est-à-dire ici le Power-Law Process (PLP). Sinon on utilise des méthodes graphiques ou, au mieux, la méthode du U-plot, présentée plus loin. Mais cette méthode, au départ empirique, n'avait pas été validée empiriquement. En particulier, aucun risque d'erreur n'était associé au choix ou au rejet de tel ou tel modèle. C'est pourquoi j'ai orienté mes recherches vers l'étude de tests d'adéquation pour ces modèles.

Les caractéristiques propres aux logiciels n'interviennent pas dans cette étude. Aussi, nous abandonnons ici la référence au logiciel pour nous intéresser, plus largement, aux modèles de croissance de fiabilité, tels que ceux présentés en section 2.4. En fait, la démarche sera valable pour n'importe quel modèle de fiabilité des systèmes réparables pouvant s'écrire comme un processus ponctuel auto-excité.

Les tests d'adéquation sont un domaine abondamment étudié quand il s'agit de déterminer si des observations indépendantes et de même loi (i.i.d.) sont issues de telle ou telle loi de probabilité. Citons les tests du khi-deux [71], les tests basés sur la fonction de répartition empirique [31], les tests lisses de Neyman [119], ainsi que des tests spécifiques, comme le test de Shapiro-Wilk pour la loi normale. Dans le cas des modèles de croissance de fiabilité, les observations sont les n premiers instants de défaillance T_1, \dots, T_n ou les n premières durées inter-défaillances X_1, \dots, X_n , qui ne sont pas i.i.d. La première idée est naturellement d'essayer de transformer les observations de façon à se ramener au cas i.i.d., pour pouvoir utiliser les méthodes précédentes. Mais, les nouvelles observations doivent être calculables, donc la transformation ne doit pas dépendre des paramètres du modèle testé. Par conséquent, il est impossible, par exemple, d'utiliser la transformation usuelle d'un processus de Poisson non homogène en processus de Poisson homogène.

Heureusement, d'autres transformations sont possibles :

- des transformations spécifiques : voir l'exemple du Power-Law Process en section 3.2.
- la transformation CPIT (voir section 3.3),

- la transformation préquentielle ou méthode du U-plot (voir section 3.4),

Avec E. Crétois, nous avons effectué une étude exhaustive des tests d'adéquation disponibles pour le PLP. Nous avons mis en évidence leurs qualités et leurs défauts, et comparé leurs puissances [26]. Parallèlement, j'ai étudié l'application de la méthode CPIT à plusieurs modèles de croissance de fiabilité [53, 55]. Avec M.A. El Aroui, nous sommes parvenus à prouver la validité de la méthode U-plot, que nous désignons maintenant plus justement en utilisant le terme de tests préquentiels, pour le PLP [27]. Une étude plus générale de cette méthode est en cours [46]. Enfin, avec M. Xie et B. Yang, nous avons développé un nouveau test d'adéquation au PLP, dont l'intérêt est d'être basé sur une méthode graphique simple couramment utilisée dans l'industrie [66].

3.2 Tests d'adéquation au Power Law Process

Le modèle de Duane ou Power Law Process (PLP) est le processus de Poisson non homogène d'intensité :

$$\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \beta \in \mathbb{R}^+ \quad (3.1)$$

Ce modèle a d'abord été proposé par Duane [42] dans un contexte applicatif. Puis il a été étudié théoriquement par Crow [28], Rigdon-Basu [121, 122] et d'autres. Le modèle a d'abord été appelé *processus de Weibull* car l'intensité $\lambda(t)$ a la même expression que le taux de hasard de la loi de Weibull. Mais pour éviter la confusion avec un processus de renouvellement dont la loi générique est une loi de Weibull, ce modèle est maintenant appelé *processus de puissance* ou *Power-Law Process* (PLP).

Le PLP peut décrire aussi bien une croissance de fiabilité (pour $\beta < 1$) qu'une décroissance de fiabilité (pour $\beta > 1$). Quand $\beta = 1$, on retrouve le processus de Poisson homogène (HPP), qui est un processus de renouvellement particulier.

La popularité du PLP auprès des praticiens s'explique en grande partie par le fait que c'est un des seuls modèles de fiabilité des systèmes réparables pour lequel les estimateurs de maximum de vraisemblance des paramètres, basés sur l'observation des n premiers instants de défaillance T_1, \dots, T_n , ont une expression explicite simple :

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{T_n^{\hat{\beta}}} \quad \hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n-1} \ln \frac{T_n}{T_i}} \quad (3.2)$$

Les propriétés de ces estimateurs ont été étudiées en détail par Coccozza-Thivent [24]. Par ailleurs, le PLP possède une propriété très utile : $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, on pose $Z_i = \ln(T_n/T_{n-i})$. Alors le vecteur (Z_1, \dots, Z_{n-1}) a la même loi que la statistique d'ordre d'un échantillon de taille $n-1$ de la loi exponentielle de paramètre β .

Ainsi, on peut tester l'adéquation des T_i au PLP en testant l'adéquation des Z_i à un échantillon ordonné de loi exponentielle par n'importe laquelle des méthodes citées en introduction. C'est ce qu'on fait Rigdon [120] et Park-Kim [110] en utilisant les tests de Kolmogorov-Smirnov (KS), Cramér-von mises (CM) et Anderson-Darling (AD). Une étude exhaustive menée par Stephens dans [31] montre qu'il n'existe pas de test d'adéquation à la loi exponentielle à recommander dans tous les cas de figure. Ses remarques, qui corroborent les nôtres (voir [26] et section 3.5), nous ont amenés à retenir en priorité le test d'Anderson-Darling.

Klefsjö-Kumar [79] ont proposé de tester l'adéquation des Z_i à la loi exponentielle par la méthode TTT (Temps Total en Test). Dans [26], nous avons montré que cette méthode revenait en fait à utiliser le test de Laplace sur des observations modifiées par la transformation de Durbin [88].

Récemment, avec M. Xie et B. Yang [66], nous avons proposé un test graphique simple d'adéquation au PLP. Le principe est que, quand le processus des défaillances est un PLP, le nombre moyen de défaillances observées à l'instant t est $E(N_t) = \alpha t^\beta$. Par conséquent, $\ln E(N_t) = \ln \alpha + \beta \ln t$.

Ainsi, sous l'hypothèse que les observations proviennent d'un PLP, les points $(\ln T_i, \ln i)_{1 \leq i \leq n}$, doivent être approximativement alignés. On peut donc dans un premier temps tracer le nuage de ces points et juger visuellement si ces points semblent suffisamment alignés ou pas. Pour être plus précis, on peut effectuer une régression linéaire sur les $(\ln T_i, \ln i)_{1 \leq i \leq n}$. Nous avons montré que, sous l'hypothèse PLP, la loi du coefficient de détermination R^2 de cette régression était indépendante des paramètres α et β . Nous avons tabulé les quantiles de cette loi et on peut ainsi effectuer un test d'adéquation consistant à rejeter l'hypothèse PLP au seuil α si R^2 est inférieur au quantile d'ordre α de cette loi.

La généralisation de ce test à d'autres modèles est en cours [67].

3.3 Les tests CPIT

Le principe des tests CPIT, proposés par O'Reilly-Quesenberry [107], est d'effectuer un conditionnement par une statistique exhaustive de façon à se débarrasser des paramètres inconnus des modèles testés. Pour cela, on utilise le théorème CPIT, du à Rosenblatt [124]:

Théorème CPIT (*Conditional Probability Integral Transformation*):

- Soit (T_1, \dots, T_n) un vecteur aléatoire de loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, dépendant d'un paramètre inconnu θ .
- On suppose qu'il existe une statistique $S_n(T_1, \dots, T_n)$ exhaustive pour θ .
- Soit $\tilde{F}_n(t_1, \dots, t_n) = P(T_1 \leq t_1, \dots, T_n \leq t_n | S_n = s_n)$.
- On pose $v_1 = P(T_1 \leq t_1 | S_n = s_n)$ et $v_i = P(T_i \leq t_i | T_1 = t_1, \dots, T_{i-1} = t_{i-1}, S_n = s_n)$ pour $i \in \{2, \dots, n\}$.
- Le rang d'absolue continuité r est la plus grande valeur de i telle que \tilde{F}_i soit absolument continue (en général, $r = n - \dim \theta$).

Alors, V_1, \dots, V_r sont indépendantes et de loi uniforme sur $[0, 1]$, $U[0, 1]$.

On peut alors tester l'uniformité des V_i par les méthodes usuelles. Dans le cas des modèles de croissance de fiabilité, la plupart du temps, $\{T_i\}_{i \geq 1}$ est markovien et on obtient :

$$v_i = P(T_i \leq t_i | T_{i-1} = t_{i-1}, S_n = s_n) \quad (3.3)$$

O'Reilly-Stephens [108] ont testé l'adéquation d'un échantillon à la loi exponentielle par la procédure CPIT. Remarquons que cela revient à tester que le processus des défaillances est un HPP. Dans ce cas, la statistique exhaustive est T_n et on montre facilement que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad V_i = 1 - \left(\frac{T_n - T_i}{T_n - T_{i-1}} \right)^{n-i} \quad (3.4)$$

Il ne reste plus qu'à tester l'adéquation des V_i à la loi $U[0, 1]$. O'Reilly-Stephens ont conclu que ces tests n'étaient pas parmi les plus puissants des tests d'exponentialité, mais que leur puissance était satisfaisante sur un éventail raisonnablement large d'alternatives.

Notre travail a consisté à construire les tests d'adéquation CPIT au Power-Law Process et aux modèles de Jelinski-Moranda et Goel-Okumoto.

3.3.1 Test CPIT d'adéquation au Power-Law Process

Dans le cas du PLP, la statistique exhaustive est $(T_n, \sum_{i=1}^{n-1} \ln T_i)$. Il faut donc calculer

$$v_i = P(T_i \leq t_i | T_{i-1} = t_{i-1}, T_n = t_n, \sum_{j=i}^{n-1} \ln T_j = \sum_{j=i}^{n-1} \ln t_j) \quad (3.5)$$

v_i ne dépend pas des paramètres, donc on peut donner n'importe quelle valeur à α et β . Pour $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, le PLP est un HPP(1). Donc les calculs peuvent être faits comme si $\{N_t\}_{t \geq 0}$ était un HPP(1).

Dans [53], nous avons montré que, pour $i \in \{1, \dots, n-2\}$:

$$V_i = 1 - \frac{\sum_{k=0}^{n-i} C_{n-i}^k (-1)^k \left[\sup(0, \sum_{j=1}^{n-i} Z_j - k Z_{n-i}) \right]^{n-i-1}}{\sum_{k=0}^{n-i} C_{n-i}^k (-1)^k \left[\sup(0, \sum_{j=1}^{n-i} Z_j - k Z_{n-i+1}) \right]^{n-i-1}} \quad (3.6)$$

où $Z_i = \ln \frac{T_n}{T_{n-i}}$.

3.3.2 Tests CPIT d'adéquation au modèle de Jelinski-Moranda

Dans le modèle de Jelinski-Moranda [74], les durées inter-défaillances X_i sont indépendantes et de lois respectives $\exp((\phi(N-i+1)))$. Il est facile de déterminer que $(T_n, \sum_{i=1}^{n-1} T_i)$ est une statistique exhaustive pour (N, ϕ) , et il faut donc calculer :

$$v_i = P(T_i \leq t_i | T_{i-1} = t_{i-1}, T_n = t_n, \sum_{j=i}^{n-1} T_j = \sum_{j=i}^{n-1} t_j) \quad (3.7)$$

Dans [55], nous avons montré que, pour $i \in \{1, \dots, n-2\}$:

$$V_i = 1 - \frac{\sum_{k=0}^{n-i} C_{n-i}^k (-1)^k \left[\sup(0, \sum_{j=i}^{n-1} W_j - k - (n-i-k)W_i) \right]^{n-i-1}}{\sum_{k=0}^{n-i} C_{n-i}^k (-1)^k \left[\sup(0, \sum_{j=i}^{n-1} W_j - k - (n-i-k)W_{i-1}) \right]^{n-i-1}} \quad (3.8)$$

où $W_i = \frac{T_i}{T_n}$.

On remarque une grande similitude entre les statistiques des tests CPIT pour PLP et JM, bien qu'il n'existe pas de lien simple entre les 2 modèles. Un travail similaire avec une version légèrement différente du théorème CPIT, a été effectué par Lee-Finelli [87].

Un point remarquable est que la loi conditionnelle de (T_1, \dots, T_{n-1}) sachant $[T_n = t_n]$ est la même pour les modèles de Jelinski-Moranda et Goel-Okumoto. Par conséquent, les tests CPIT sont identiques pour JM et GO, ce qui signifie que les deux modèles sont indistingables par cette procédure.

3.4 Les tests préquentiels

La **méthode du U-plot** a été proposée par Keiller-Littlewood-Miller-Sofer [77] à partir des travaux de Dawid [34]. Pendant longtemps, elle a été la seule méthode de choix de modèles utilisée dans le domaine de la fiabilité des logiciels.

Il s'agit d'une approche dite "préquentielle", c'est-à-dire prédictive et séquentielle. Le but est de vérifier séquentiellement si un modèle permet de prévoir correctement x_i à partir de x_1, \dots, x_{i-1} . La démarche est la suivante :

1. On choisit un entier $p < n$.
2. On estime $F_{X_i}(x \mid X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}; \theta)$ par $F_i(x \mid x_1, \dots, x_{i-1}; \hat{\theta}(x_1, \dots, x_{i-1}))$, pour $i \in \{p+1, \dots, n\}$.
3. On calcule $\tilde{u}_i = F_i(x_i \mid x_1, \dots, x_{i-1}; \hat{\theta}(x_1, \dots, x_{i-1}))$, pour $i \in \{p+1, \dots, n\}$.
4. On note $\tilde{F}_{n,p}$ la fonction de répartition empirique des \tilde{u}_i . On appelle *U-plot* le graphe de $\tilde{F}_{n,p}$.

D'après Keiller et al [77], "si le modèle et la procédure d'estimation sont de bonne qualité, les \tilde{u}_i seront proches de réalisations de variables aléatoires indépendantes de loi $U[0, 1]$ ".

Usuellement, on dessine les U-plot pour plusieurs modèles candidats, et on considère que le "meilleur" modèle est celui pour lequel le U-plot est "le plus proche" de la fonction de répartition de la loi $U[0, 1]$, c'est-à-dire la diagonale du carré unité.

Une mesure naturelle de cette proximité est la distance de Kolmogorov-Smirnov :

$$\tilde{K}_{n,p} = \sqrt{n-p} \sup_{t \in [0,1]} \left| \tilde{F}_{n,p}(t) - t \right| \quad (3.9)$$

Keiller et al précisent tout de suite : "le U-plot est un outil de comparaison de modèles, mais pas un test d'adéquation car on ne connaît pas la loi asymptotique de $\tilde{K}_{n,p}$ sous \mathcal{H}_0 ".

Or Downs-Scott [40] ont effectué des simulations qui montrent que, sous les hypothèses HPP et JM, la loi de $\tilde{K}_{n,p}$ semble bien être celle de Kolmogorov-Smirnov. Nos propres simulations [27] montrent qu'il semble que cela soit aussi vrai pour les modèles PLP, GO et MG. Si ces résultats sont exacts, cela signifie que l'on peut utiliser cette méthode pour effectuer des tests d'adéquation. C'est ce que nous nous sommes attachés à prouver.

Pour cela, on définit le **processus empirique uniforme préquentiel** par :

$$\tilde{B}_{n,p} = \sqrt{n-p} [\tilde{F}_{n,p} - Id] \quad (3.10)$$

Ce processus peut se décomposer en :

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{n,p} &= \frac{1}{\sqrt{n-p}} \sum_{i=1}^{n-p} \left[\mathbb{1}_{\{\tilde{U}_i \leq t\}} - F_{\tilde{U}_i}(t) \right] + \sqrt{n-p} \left[F_{\tilde{U}_i}(t) - t \right] \\ &= \tilde{W}_{n,p} + d_{n,p}(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Avec E. Crétois et M.A. El Aroui [27], en utilisant cette décomposition et un théorème de Shorack [132], nous avons montré, pour le PLP, la convergence du processus empirique uniforme préquentiel vers le pont brownien, avec :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i &= 1 - e^{-\hat{\alpha}_{p+i-1} \left(T_{p+i}^{\hat{\beta}_{p+i-1}} - T_{p+i-1}^{\hat{\beta}_{p+i-1}} \right)} \\ &= 1 - \exp \left[-(p+i-1) \left[\exp \left(-(p+i-1) \frac{\ln T_{p+i}/T_{p+i-1}}{\sum_{j=1}^{p+i-2} \ln T_{p+i-1}/T_j} \right) - 1 \right] \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Par conséquent, la méthode du U-plot fournit bien des tests d'adéquation au HPP et au PLP : il suffit de comparer la valeur de $\tilde{K}_{n,p}$ aux quantiles de la loi de Kolmogorov-Smirnov. Par ailleurs, on peut de la même façon appliquer les tests de Cramér-von Mises et Anderson-Darling, ce qui fait qu'on dispose de procédures non seulement théoriquement correctes mais en plus plus puissantes que la méthode du U-plot traditionnelle.

On peut remarquer que le point clé est que l'approche préquentielle rend les \tilde{U}_i indépendants dans les deux cas étudiés : si on estime θ en utilisant toutes les observations à chaque étape, les \tilde{U}_i obtenus ne seront pas indépendants.

3.5 Comparaison des tests et application à des données réelles

Dans [53, 26, 55, 27, 66], nous avons évalué la puissance des tests proposés, en nous restreignant au cas particulier du PLP. Les qualités et défauts des différents tests ont été mis en évidence. Il est très difficile d'établir une hiérarchie de ces tests. Suivant la nature des données, on recommandera plutôt tel ou tel test. Seul le test du χ^2 est à déconseiller systématiquement.

Globalement, le meilleur test d'adéquation au PLP est le test d'Anderson-Darling d'exponentialité des Z_i . L'inconvénient de ce test est qu'il n'est applicable qu'au PLP et à ses dérivés. En particulier, il ne permet pas de tester l'adéquation aux modèles MG ou GO.

Les tests CPIT sont peu puissants, mais ce sont les seuls tests d'adéquation connus aux modèles JM et GO. Les tests préquentiels sont plus puissants que les tests CPIT et sont très probablement applicables à ces modèles, ainsi qu'à d'autres. Ce résultat est en cours de démonstration [46]. C'est la seule possibilité connue à ce jour pour tester l'adéquation de données au modèle MG.

Les tests d'adéquation présentés ont également été appliqués à des données réelles. Pour les données de Musa [102] (durées inter-défaillances de 9 logiciels de contrôle commande de l'armée américaine, en période de test et en vie opérationnelle), les résultats sont les suivants :

- Le PLP est pratiquement toujours rejeté.
- Le modèle MG est acceptable pour les jeux de données notés M1 et M3, éventuellement pour M2 et M17.
- Le modèle GO est acceptable pour M4, éventuellement pour M17.

Il est très intéressant de voir que le modèle le plus utilisé par les praticiens est en fait à déconseiller dans ce cas de figure. Par ailleurs, on voit que d'autres modèles sont plus pertinents. Cela remet en cause l'utilisation du PLP en fiabilité des logiciels, et justifie le besoin de tests d'adéquation.

3.6 Travaux récents et perspectives

Un premier dérivé du PLP, le "log-power model" a été proposé par Zhao-Xie [149]. Puis Knaffl-Morgan [80] ont généralisé le PLP en définissant la **famille puissance généralisée** (Generalized Power Family). Un modèle de cette famille (on notera un tel modèle un GPFM) est un NHPP tel que :

$$E(N_t) = \alpha[k(t)]^\beta, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \beta \in \mathbb{R}^+ \quad (3.13)$$

où k est une fonction connue, positive et strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , telle que $k(0) = 0$. Le PLP correspond à $k(t) = t$ et le modèle log-power à $k(t) = \ln(1+t)$.

Cette famille de modèles présente un double intérêt. D'une part, elle généralise le PLP en autorisant des formes très variées pour l'intensité de défaillance, et d'autre part, elle est très facile d'utilisation, grâce à ses liens étroits avec le PLP. En effet, si T_1, \dots, T_n sont les instants

d'occurrence d'un GPFM, alors, en posant $\forall i, U_i = k(T_i)$, U_1, \dots, U_n sont distribuées comme les instants d'occurrence d'un PLP.

Par conséquent, toutes les propriétés des PLP sont aussi vraies pour les GPFM, après changement de variable. En particulier, tester l'adéquation des T_i à un GPFM, c'est tester l'adéquation des U_i au PLP. Nous avons appliqué cette démarche pour construire des tests d'adéquation au modèle log-power dans [57].

Le seul véritable problème est le choix de k . Voici quelques critères de choix possibles :

- L'échec du PLP pour les données de Musa vient en grande partie du fait que la fiabilité dans ce modèle croît trop vite. Par conséquent, on peut choisir pour k une fonction à croissance lente.
- Si $k(t)$ définit un GPFM, alors $k[k(t)]$ et $\frac{k(t)}{1+k(t)}$ aussi.
- N'importe quelle fonction de répartition de variable aléatoire positive convient.
- On peut s'inspirer de l'allure de la courbe du nombre cumulé de défaillances en fonction du temps.

En prenant en compte toutes ces considérations, nous avons obtenu [2], pour tous les jeux de données de Musa, des GPFM acceptables, au sens d'un non rejet de l'hypothèse testée pour des seuils aux alentours de 10%. Le modèle log-power a été retenu pour les jeux de données M1 et M3, et pour les autres, on a trouvé des modèles non encore utilisés comme par exemple :

- M3 : $k(t) = \ln[1 + \ln(1 + t)]$
- M4 : $k(t) = \frac{t}{4500 + t}$
- M17 : $k(t) = \sqrt{t}/[1 + \sqrt{t}]$

Ces premiers résultats ne sont pas complètement satisfaisants dans la mesure où les fonctions k trouvées comprennent souvent des valeurs numériques qui sont en fait des paramètres que l'on devrait estimer. Cependant, ceci montre que la famille puissance généralisée est suffisamment large pour pouvoir contenir des modèles adaptés à pratiquement tous les jeux de données envisageables. Du travail reste à faire pour déterminer de bons critères de choix d'un GPFM.

Chapitre 4

Fiabilité en environnement aléatoire stressant

4.1 Problématique

Pendant longtemps, les durées de vie des systèmes ont été modélisées à l'aide de lois de probabilité simples comme les lois exponentielle, de Weibull ou lognormale. Ces lois reflètent l'usure propre des systèmes étudiés, mais ne prennent pas en compte le fait que les défaillances des systèmes sont de plus en plus imputables à leur environnement de fonctionnement. On appelle **stress** l'ensemble des conditions et facteurs extérieurs, variables et généralement imprévisibles, susceptibles d'affecter le bon fonctionnement d'un système. Ces stress peuvent être de toute nature (climatiques, mécaniques, radiatifs, électriques,...) et leurs durées de manifestation de tout ordre (ponctuels, constants, en créneaux, progressifs, diffus, ...). Le problème est de déterminer l'influence de ces stress sur la durée de vie des systèmes.

De nombreuses modélisations de ces effets ont été proposées depuis une trentaine d'année. Dans [146], une classification de ces modèles en 5 grandes familles a été proposée :

- les modèles résistance-contrainte (stress-strength) : Disney-Lipon-Sheth [38], Ringler [123], Johnson [75]
- les modèles de chocs de Marshall et ses co-auteurs [97, 48, 98]
- les modèles de défaillances de cause commune : Yuan-Lai-Ko [144], Dhillon-Viswanath [37], Hoyland-Rausand [73]
- les modèles à effet multiplicatif de Singpurwalla et ses co-auteurs [90, 30, 133] et Lefevre-Malice [85]
- les modèles de durée de vie accélérée : Viertl [138], Nelson [106], Bagdonavicius-Nikulina [4]

A l'occasion d'une collaboration avec Thomson-TCS [63], nous avons été, avec J.L. Soler, amenés à nous intéresser à ce type de modèles. Plus précisément, il s'agissait de caractériser la mortalité aléatoire de composants électroniques soumis à des stress, en explicitant le taux de défaillance qui en résulte, sous diverses hypothèses de types de stress. La principale originalité de ce travail a été d'introduire, à la suite de discussions avec les praticiens, la notion de **mémorisation des stress**.

Plus tard, la thèse de C.A. Zahalca [146] a poursuivi ce travail en le généralisant à des systèmes constitués de plusieurs composants. La structure du système joue alors un rôle prépondérant et il s'avère qu'influence du stress et configuration du système sont étroitement liées. Un modèle général d'influence du stress sur la durée de vie des systèmes a été proposé. Une étude statistique a été effectuée dans le cas où le stress est ponctuel, poissonnien et homogène, ce qui a permis d'appliquer avec succès ces techniques à des données réelles.

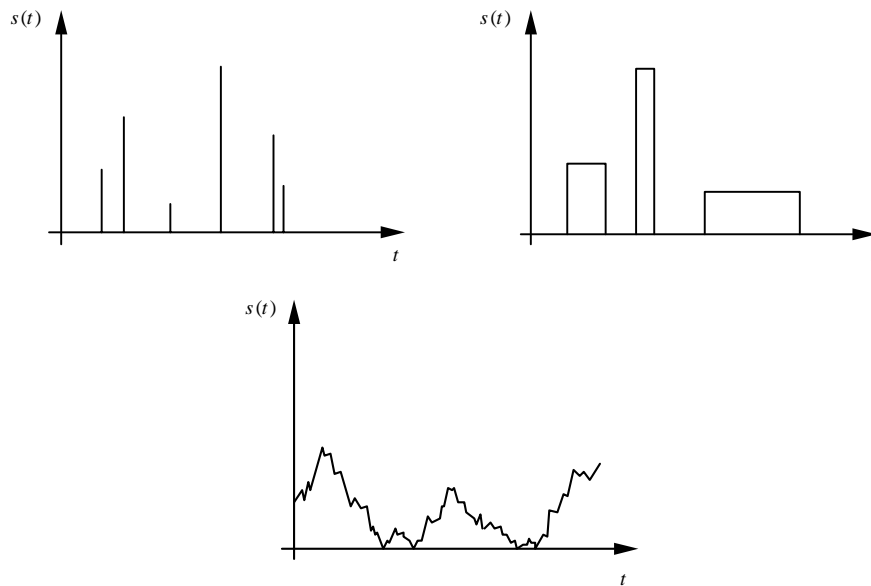


FIG. 4.1 – *Stress ponctuel, en créneaux et diffus*

4.2 Influence de l'environnement stressant sur la durée de vie des composants

4.2.1 Modélisation de l'action du stress

On s'intéresse à la durée de vie d'un composant soumis à des stress pendant son fonctionnement. Un stress est variable et se répartit de façon aléatoire au cours du temps. Nous avons privilégié dans notre étude les trois types de stress suivants (voir figure 4.1) :

- Les **stress ponctuels** sont des impulsions (par exemple des chocs) qui surviennent à des instants aléatoires avec des amplitudes aléatoires.
- Les **stress en créneaux** sont tels que des périodes sans stress et des périodes de stress se succèdent, et, pour une période de stress donnée, l'amplitude du stress reste constante.
- Les **stress diffus** sont des stress dont l'intensité est continue et extrêmement agitée. C'est le cas par exemple des vibrations.

Un stress étant caractérisé par une répartition aléatoire dans le temps, qui peut-être aussi bien discrète que continue, nous avons choisi d'unifier tous les types de stress en les représentant à l'aide de mesures de Stieltjes. L'intensité s d'un stress est la densité au sens de Stieltjes de la mesure de stress correspondante S [64]. Ainsi, $S(t)$ représente la totalité du stress subi par le composant entre l'instant 0 et l'instant t . Les stress ponctuels correspondent à une mesure ponctuelle et les stress continus à une mesure continue.

Dans le but de prendre en compte des effets de mémorisation des stress observés par les praticiens, nous avons introduit la notion de **mémoire** des stress. Par exemple, on dira que :

- La mémoire est **instantanée** si le composant n'est sensible qu'au stress qu'il subit à l'instant présent.

- La mémoire est **cumulative** si le composant est sensible à l'accumulation de tous les stress survenus entre l'instant initial et l'instant présent.

Plus généralement, on considère qu'un composant qui subit un stress à un instant t donné peut éventuellement en garder une mémoire. Cette mémoire peut se répartir dans le futur de façon ponctuelle ou continue selon une certaine intensité m . On représente alors cette répartition par la mesure de Stieltjés déterministe M sur \mathbb{R}^+ , dont m est la densité au sens de Stieltjés. La mémoire instantanée correspond à la mesure de Dirac en 0, et la mémoire cumulative à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^+ .

On peut ainsi prendre en compte tous les types de mémorisation. Par exemple, une mémoire **atténuante** correspond à un oubli progressif des stress survenus et se modélise à l'aide d'une fonction m décroissante. Une mémoire **cicatrisante** correspond à un stress que l'on oublie après une durée c , ce qui se modélise par une fonction $m(t) = \mathbb{1}_{[0,c]}(t)$.

L'accumulation de mémoire de tous les stress survenus entre 0 et t constitue la **quantité de stress influent** à l'instant t . On la représente par la mesure $S_I = S * M$, convolution des mesures de stress et de mémoire :

$$\forall t \geq 0, S_I(t) = \int_0^t M(t-u) dS(u) \quad (4.1)$$

L'**action du stress** sur la défaillance du composant à l'instant t est logiquement une fonction de la quantité de stress influent qui doit vérifier certaines conditions [146]. Nous avons choisi de nous limiter au cas le plus simple qui consiste à supposer que l'action du stress est proportionnelle à la quantité de stress influent :

$$\forall t \geq 0, A(t) = \alpha S_I(t) \quad (4.2)$$

où le coefficient α représente la **sensibilité** du composant au stress. L'intensité de l'action du stress a est la densité au sens de Stieltjés de la mesure A .

Il reste maintenant à exprimer directement comment la durée de vie d'un composant dépend de l'action du stress. Nous avons supposé que les défaillances du composant étaient de deux types : les défaillances propres, dues à l'usure intrinsèque du composant, qui surviendraient même en l'absence de stress, et les défaillances dues au stress. En supposant les deux sources de défaillance indépendantes, on obtient que le taux de défaillance du système stressé est de la forme :

$$\forall t \geq 0, \lambda(t) = \lambda_p(t) + \lambda_s(t) \quad (4.3)$$

Pour le taux de défaillance propre $\lambda_p(t)$, on utilisera un modèle de fiabilité usuel, du type exponentiel ou Weibull. Pour le taux de défaillance dû au stress $\lambda_s(t)$, nous avons étudié deux types de modélisations :

- Les *modèles de type I* sont les modèles résistance-contrainte. Ils sont basés sur une hypothèse physique : la défaillance survient dès que l'intensité de l'action du stress dépasse la résistance du composant. Si on note U_t la résistance du composant au stress à l'instant t , la durée d'attente de la première défaillance due au stress peut s'écrire :

$$T_s = \inf\{t \geq 0; a(t) \geq U_t\} \quad (4.4)$$

Alors la fiabilité du composant stressé s'écrit :

$$\forall t \geq 0, R_s(t) = P \left(\sup_{\tau \in [0,t]} \{a(\tau) - U_\tau\} < 0 \right) \quad (4.5)$$

On voit que l'on est dans un cadre classique de temps d'atteinte : il s'agit de déterminer le moment où le processus aléatoire $\{a(t) - U_t\}_{t \geq 0}$ atteint la borne 0. La résistance au stress peut être déterministe ou aléatoire, fonction du temps ou pas. Par exemple, quand la mémoire est instantanée et que la résistance et le stress sont des mouvements browniens indépendants, on retrouve le modèle d'Ebrahimi-Ramalingham [44]. Ces modèles ont beaucoup été étudiés mais, curieusement, le calcul explicite du taux de défaillance n'a été que rarement abordé.

- Le *modèle de type II* est basé sur une hypothèse mathématique : conditionnellement au stress, le taux de défaillance cumulé du composant est égal à la mesure d'action du stress :

$$\forall t \geq 0, \Lambda_S(t) = A(t) \quad (4.6)$$

Alors la fiabilité du composant stressé s'écrit :

$$\forall t \geq 0, R_s(t) = \mathbb{E} \left[e^{-A(t)} \right] \quad (4.7)$$

Dans le cas d'une action proportionnelle du stress, on a :

$$\forall t \geq 0, R_s(t) = \mathbb{E} \left[e^{-\alpha \int_0^t M(t-u) dS(u)} \right] \quad (4.8)$$

Pour les deux types de modèles, le taux de défaillance dû au stress se déduit de la fiabilité en écrivant :

$$\forall t \geq 0, \lambda_s(t) = -\frac{d}{dt} \ln R_s(t) \quad (4.9)$$

Dans [64], nous avons calculé, pour plusieurs types de stress et de mémoire et dans les deux classes de modèles, le taux de défaillance du composant stressé. Quelques uns de ces résultats sont résumés ci-après.

4.2.2 Stress ponctuels

Les stress ponctuels sont des impulsions qui surviennent à des instants aléatoires $\{X_i\}_{i \geq 1}$ avec des amplitudes aléatoires $\{Z_i\}_{i \geq 1}$.

Si on note $\{N_t\}_{t \geq 0}$ le processus de comptage des stress, la fonction de répartition de la mesure de stress est :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \quad (4.10)$$

Pour un composant de mémoire M , l'action du stress est donc :

$$A(t) = \alpha \sum_{i=1}^{N_t} Z_i M(t - X_i) \quad (4.11)$$

On suppose que les amplitudes des stress sont indépendantes entre elles et indépendantes des instants d'occurrence des stress, de même loi de fonction de répartition H et de transformée de Laplace ϕ . En général le processus de comptage des stress est supposé de Poisson non homogène d'intensité $\xi(t)$. On dira que le stress est homogène si $\forall t \geq 0, \xi(t) = \xi$.

Voici quelques expressions de taux de défaillance du composant stressé, issues de [64] :

1. Modèles de type I

- Résistance déterministe fonction du temps $u(t)$, mémoire instantanée :

$$\lambda_s(t) = [1 - H(u(t))] \xi(t) \quad (4.12)$$

- Résistance constante u , mémoire cumulative, amplitudes de loi $\exp(\eta)$:

$$\lambda_s(t) = \xi(t) \frac{I_0\left(2\sqrt{\eta u \Xi(t)}\right)}{\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{\eta u}{\Xi(t)}\right)^{j/2} I_j\left(2\sqrt{\eta u \Xi(t)}\right)} \quad (4.13)$$

où $\Xi(t) = \int_0^t \xi(u) du$ et I_j est la fonction de Bessel modifiée du premier type d'ordre j .

- Résistance aléatoire de loi $\exp(\nu)$, mémoire instantanée, amplitudes de loi $\exp(\eta)$, stress homogène :

$$\lambda_s(t) = \frac{1}{t} \frac{\Gamma(\nu/\eta + 1) - \Gamma(\nu/\eta + 1, \xi t)}{\Gamma(\nu/\eta) - \Gamma(\nu/\eta + 1, \xi t)} \quad (4.14)$$

où $\Gamma(a, x)$ est la fonction gamma incomplète.

2. Modèle de type II. La fiabilité s'écrit :

$$R_s(t) = e^{-\int_0^t \xi(y) [1 - \phi(\alpha M(t-y))] dy} \quad (4.15)$$

Quand le processus de stress est homogène, on en déduit le taux de défaillance :

$$\lambda_s(t) = \xi [1 - \phi(\alpha M(t))] \quad (4.16)$$

L'intérêt du modèle de type II est de fournir une expression explicite du taux de défaillance quel que soit le type de mémoire.

4.2.3 Stress en créneaux

Les stress en créneaux sont constitués d'une succession de périodes sans stress et de périodes de stress. On note X_i la durée de la $i^{\text{ème}}$ période sans stress, Y_i la durée de la $i^{\text{ème}}$ période de stress, et Z_i l'amplitude de stress (supposée constante) sur cette période. Les trois processus aléatoires $\{X_i\}_{i \geq 1}$, $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ et $\{Z_i\}_{i \geq 1}$ sont supposés indépendants et constitués respectivement de variables aléatoires indépendantes et de mêmes lois.

Soit $T_i = \sum_{j=1}^{i-1} (X_j + Y_j) + X_i$ l'instant d'occurrence du $i^{\text{ème}}$ stress et N_t le nombre de stress survenus entre 0 et t . Alors la fonction de répartition de la mesure de stress est :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i Y_i + Z_{N_t} \min(Y_{N_t}, t - T_{N_t}) \quad (4.17)$$

Pour un composant de mémoire M , l'action du stress est donc :

$$A(t) = \alpha \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \int_{t-T_i-Y_i}^{t-T_i} M(s) ds \quad (4.18)$$

L'expression du taux de défaillance du composant stressé dépend de l'état initial du processus de stress. On note ce taux $\lambda_{s,c}$ quand l'instant initial est dans une période sans stress et $\lambda_{s,s}$ quand l'instant initial est dans une période de stress. Parmi les résultats obtenus dans [64], on peut citer les suivants :

1. *Modèles de type I*, résistance constante u , mémoire instantanée, durées des périodes de calme de loi $\exp(\xi)$, durées des périodes de stress de loi $\exp(\mu)$, amplitudes des stress de fonction de répartition H .

$$\lambda_{s,c}(t) = s_1 s_2 \frac{(\mu + s_2) - (\mu + s_1)e^{(s_1-s_2)t}}{-s_1(\mu + s_2) + s_2(\mu + s_1)e^{(s_1-s_2)t}} \quad (4.19)$$

$$\lambda_{s,s}(t) = s_1 s_2 \frac{s_1(\mu + s_2) - s_2(\mu + s_1)e^{(s_1-s_2)t}}{-s_1^2(\mu + s_2) + s_2^2(\mu + s_1)e^{(s_1-s_2)t}}$$

où s_1 et s_2 sont les racines de l'équation du second degré $s^2 + (\mu + \xi)s + \mu\xi [1 - H(u)]$ ($s_1 < s_2 < 0$).

2. *Modèle de type II*, mémoire instantanée, durées des périodes de calme de loi $\exp(\xi)$, durées des périodes de stress de loi $\exp(\mu)$, amplitudes des stress égales à 1

$$\lambda_{s,c}(t) = \frac{a\xi e^{-\xi t} - bs_4 e^{s_4 t} - cs_3 e^{s_3 t}}{ae^{-\xi t} + be^{s_4 t} + ce^{s_3 t}} \quad (4.20)$$

$$\lambda_{s,s}(t) = \frac{s_4(\alpha + s_3)e^{s_4 t} - s_3(\alpha + s_4)e^{s_3 t}}{-(\alpha + s_3)e^{s_4 t} + (\alpha + s_4)e^{s_3 t}}$$

où s_3 et s_4 sont les racines de l'équation du second degré $s^2 + (\alpha + \xi + \mu)s + \alpha\xi$ ($s_3 < s_4 < 0$) et a , b et c sont des fractions rationnelles dont l'expression exacte peut être trouvée dans [64].

Pour les deux types de modèles, un des taux de défaillance est croissant, l'autre est décroissant et les deux ont la même limite quand t tend vers l'infini.

4.2.4 Stress diffus

Les stress diffus sont des stress dont l'intensité est une fonction positive extrêmement agitée. Si on considère le stress total subi par le composant a un instant donné comme la somme d'un grand nombre de stress élémentaires de toutes sortes, et si on suppose que les conditions d'utilisation du composant sont sensiblement les mêmes au cours du temps, on pourra modéliser le stress par un processus gaussien stationnaire. Comme par ailleurs le stress est positif, on supposera au bout du compte qu'un stress diffus est un stress d'intensité $s(t) = X_t^2$, où $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. On note β la dérive et σ la diffusion de ce processus. On peut alors calculer le taux de défaillance du système stressé dans certains cas, comme par exemple :

1. *Modèles de type I*, résistance constante u , mémoire instantanée. En utilisant les résultats de Darling-Siebert [32] sur les instants de première sortie d'une bande d'un processus de diffusion, on peut montrer que :

$$\lambda_s(t) = \frac{\pi^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (2k+1) e^{-\frac{t(2k+1)^2 \pi^2}{8u^2}}}{8u^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-\frac{t(2k+1)^2 \pi^2}{8u^2}}} \quad (4.21)$$

2. *Modèle de type II*, mémoire instantanée. En utilisant les résultats de Lipster-Shiryaev [91] sur les transformées de Laplace de formes quadratiques de processus de diffusion, on peut montrer que :

$$\lambda_s(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\omega(\omega + \beta)^2 e^{\omega t} + \omega(\omega - \beta)^2 e^{-\omega t}}{(\omega + \beta)^2 e^{\omega t} + (\omega - \beta)^2 e^{-\omega t}} - \beta \right] \quad (4.22)$$

où $\omega = \sqrt{\beta^2 + 2\alpha\sigma^2}$.

On pourrait ainsi multiplier les exemples. Le principal résultat de cette étude est que, dans la quasi-totalité des cas étudiés, quand le stress est homogène, le taux de défaillance du composant stressé est monotone (mais pas forcément croissant) et tend rapidement vers une constante. Cela confirme une conjecture fréquemment faite par les praticiens. Le fait de pouvoir calculer cette limite en fonction des paramètres du problème est d'un intérêt pratique évident.

4.3 Influence de l'environnement sur la durée de vie des systèmes

4.3.1 Modélisation et indicateur d'influence du stress

Après avoir étudié l'influence d'un environnement aléatoire stressant sur la durée de vie d'un composant, il était logique de s'intéresser à cette influence sur un système constitué de plusieurs composants. C'est l'objet de la thèse de C.A. Zahalca [146].

Quand on passe de l'aspect composant à l'aspect système, il faut prendre en compte à la fois la structure ou configuration du système, donnée par sa fonction de structure, sa fonction de marche ou ses chemins de marche [7] et la dépendance entre les durées de vie des composants.

Il est clair que le fait que tous les composants d'un système soient soumis au même stress rend leurs durées de vie dépendantes. Cependant, on peut très bien supposer, comme Lindley-Singpurwalla [90], que, conditionnellement au stress, ces durées de vie sont indépendantes. Cette hypothèse centrale sera adoptée dans toute la suite.

Nous avons retenu comme modèle d'influence du stress le modèle de type II de la section précédente, car c'est celui qui permet de mieux manier la notion de mémoire.

Considérons un système constitué de n composants identiques et indépendants, de taux de défaillance propre constant λ , de sensibilité au stress α , de mémoire M , soumis à un stress S . On note a_i le nombre de chemins de marche de longueur i du système, T_1, \dots, T_n les durées de vie des n composants et T la durée de vie du système. Alors les hypothèses effectuées jusque là permettent de calculer [65] :

- La fiabilité du système :

$$\forall t \geq 0, R(t) = P(T > t) = \sum_{j=1}^n b_j e^{-j\lambda t} \mathbb{E} \left[e^{-j\alpha \int_0^t M(t-u) dS(u)} \right] \quad (4.23)$$

$$\text{où } \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, b_j = \sum_{i=1}^j (-1)^{j-i} a_i C_{n-i}^{n-j}.$$

- La durée de vie moyenne du système : $MTTF = \int_0^{+\infty} R(t) dt$.

- La fonction de survie du système: $\forall(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^+$,

$$P(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n) = e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} \mathbb{E} \left[e^{-\alpha \sum_{i=1}^n \int_0^{t_i} M(t_i - u) dS(u)} \right] \quad (4.24)$$

Les praticiens conjecturent souvent que plus un système est fiable, plus il est sensible au stress. Pour étudier cette conjecture, nous avons défini un indicateur d'influence de l'environnement stressant sur la durée de vie du système :

$$I = 1 - \frac{MTTF_p}{MTTF} \quad (4.25)$$

où $MTTF_p$ désigne le $MTTF$ propre du système, c'est à dire sa durée de vie moyenne en environnement non stressant. En effet, si le système stressé a le même $MTTF$ que le système non stressé, l'influence du stress est nulle et $I = 0$. Inversement, plus l'influence du stress est forte, plus le $MTTF$ est petit par rapport au $MTTF$ propre, donc plus I tend vers 1. Nous avons choisi un critère portant sur le $MTTF$ au lieu de la fiabilité, pour qu'il ne dépende pas du temps.

Si on note $MTTF_{p,j/j}$ et $MTTF_{j/j}$ les $MTTF$ propre et en environnement stressant d'un système à j composants en série, et si on note $I_{j/j}$ l'indicateur correspondant, alors l'indicateur d'influence d'un système quelconque à n composants s'écrit :

$$I = \frac{\sum_{j=1}^n b_j MTTF_{p,j/j} I_{j/j}}{\sum_{j=1}^n b_j MTTF_{p,j/j}} \quad (4.26)$$

Dans [65], nous avons comparé les valeurs de l'indicateur I pour plusieurs configurations de systèmes : série, parallèle, k/n . Pour toutes ces configurations simples, nous avons montré que, à condition que la suite $\{I_{j/j}\}_{j \geq 1}$ soit décroissante, la conjecture des praticiens est vérifiée : plus un système est fiable, plus il est sensible au stress. Cette hypothèse est vérifiée par exemple pour des stress ponctuels poissonniens homogènes. Malheureusement, nous n'avons pas pu démontrer ce résultat pour n'importe quel type de stress et n'importe quelle configuration.

4.3.2 Stress ponctuels

On suppose ici que le stress est ponctuel poissonnier homogène d'intensité ξ . Alors, en conservant les notations de la section 4.2.2, la fonction de survie (4.24) du système stressé s'écrit [147] :

$$P(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n) = e^{-\lambda \sum_{j=1}^n t_j^* - \xi t_n^* + \xi \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}^*}^{t_j^*} \phi(\alpha \sum_{i=j}^n M(t_i^* - u)) du} \quad (4.27)$$

où $(t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*)$ est la statistique d'ordre du vecteur (t_1, t_2, \dots, t_n) .

Dans le cas où les composants sont de mémoire instantanée, on obtient :

$$P(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n) = e^{-\sum_{j=1}^n [\lambda + \xi \phi(\alpha(n-j)) - \xi \phi(\alpha(n-j+1))] t_j^*} \quad (4.28)$$

On pose :

- $\forall j \in \{0, \dots, n\}, \theta_j = \xi[1 - \phi(\alpha j)]$
- $\mu_1 = \theta_n - \theta_{n-1} + \lambda$
- $\forall i \in \{2, \dots, n\}, \mu_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j-1} C_i^j \theta_{n-j}$

La fonction de survie peut alors s'écrire :

$$P(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n) = e^{-\sum_{i=1}^n \mu_i t_i - \sum_{i < j} \mu_{ij} \max(t_i, t_j) - \dots - \mu_{1\dots n} \max(t_1, \dots, t_n)} \quad (4.29)$$

La loi du vecteur (T_1, T_2, \dots, T_n) est donc une loi exponentielle multivariée symétrique [97] de paramètres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$.

On peut alors écrire simplement pour n'importe quelle configuration du système la fiabilité, le *MTTF* et l'indicateur d'influence du stress :

$$R(t) = \sum_{j=1}^n b_j e^{-(j\lambda + \theta_j)t}, \quad MTTF = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{j\lambda + \theta_j}, \quad I = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{b_j \theta_j}{j(j\lambda + \theta_j)}}{\sum_{j=1}^n \frac{b_j}{j}} \quad (4.30)$$

Dans [65], nous avons étudié en détail le cas où les stress sont d'amplitude constante z . On montre en particulier que, quand la mémoire est cumulative, la loi de la durée de vie d'un système série est une généralisation de la loi S introduite dans [135].

4.3.3 Étude statistique

Dans [147, 69], nous avons effectué une étude statistique du modèle de durée de vie en environnement aléatoire stressant ponctuel, quand la mémoire est instantanée et les amplitudes des stress constantes. Plus précisément, la fonction de survie dans ce cas s'écrit :

$$P(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n) = e^{-\sum_{j=1}^n (\lambda + \xi e^{-\alpha(n-j)z} - \xi e^{-\alpha(n-j+1)z}) t_j^*} \quad (4.31)$$

où $\mu_1 = \lambda + \xi e^{-n\alpha z} (e^{\alpha z} - 1)$ et $\forall k \geq 2, \mu_k = \xi e^{-n\alpha z} (e^{\alpha z} - 1)^k$.

Les paramètres à estimer sont α, λ, ξ et z . Comme ils sont de natures très différentes, plusieurs méthodes d'estimation sont possibles. Par exemple, le taux de défaillance propre λ peut être estimé en testant les composants dans un environnement propre. L'intensité d'arrivée des stress ξ et l'amplitude des stress z peuvent être estimés en observant directement le stress, indépendamment de son influence sur la défaillance du composant. Enfin α , le coefficient de sensibilité des composants au stress, ne peut être estimé autrement qu'en observant les défaillances du composant en environnement stressant. Au vu de la fonction de survie, il est clair qu'on ne peut pas estimer séparément α et z . On peut estimer le produit αz ou bien α en supposant que z est connu, ce que l'on supposera dans la suite.

Nous avons étudié deux démarches pour estimer ces paramètres. La première s'inspire des résultats connus pour la loi exponentielle multivariée : on estime les paramètres μ_1, \dots, μ_n , puis

on en déduit des estimations de α , λ et ξ . La seconde consiste à estimer directement les paramètres d'intérêt, par la méthode du maximum de vraisemblance.

Les procédures d'estimation dépendent du type de données observées, c'est à dire des **plans d'essai**. On peut observer uniquement la durée de vie du système ou observer les durées de vie de chacun de ses composants. Il faut aussi prendre en compte la structure du système.

Arnold [1] a proposé une méthode d'estimation des paramètres de la loi exponentielle multivariée dans le cas où l'on n'observe que la durée de vie d'un système série et le nombre de composants défaillants à l'instant de la panne. Proschan-Sullo [116] ont estimé les mêmes paramètres dans le cas où on observe les durées de vie de tous les composants d'un système parallèle. Notre travail [69] a consisté dans un premier temps à adapter ces méthodes au cas de la loi exponentielle multivariée symétrique, puis à en déduire des estimateurs des paramètres de notre modèle, et enfin à les généraliser pour d'autres plans d'essai.

Par exemple, plaçons nous dans le cas d'Arnold. On dispose de m systèmes identiques de n composants identiques. Chacun de ces systèmes est soumis à un stress ponctuel poissonnien homogène. Ces m stress sont identiquement distribués mais indépendants, pour garantir l'indépendance des durées de vie des m systèmes.

On note T_{1j}, \dots, T_{nj} les durées de vie des n composants du $j^{\text{ème}}$ système. On suppose que les systèmes sont en configuration série. Leurs durées de vie sont donc les $T_{1j}^* = \min(T_{1j}, \dots, T_{nj})$. On note N_k le nombre de fois parmi les m systèmes où exactement k composants étaient en panne lors de la défaillance du système. Alors on montre que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, un estimateur sans biais et consistant de μ_k est :

$$\widehat{\mu}_k = \frac{m-1}{m} \frac{N_k}{C_n^k W_1} \quad (4.32)$$

où $W_1 = \sum_{j=1}^m T_{1j}^*$. On peut par ailleurs montrer que W_1 est de loi gamma $G(m, \mu)$, N_k est de loi binomiale $\mathcal{B}\left(m, \frac{C_n^k \mu_k}{\mu}\right)$, et que ces deux variables aléatoires sont indépendantes, ce qui permet de déterminer la loi de probabilité de $\widehat{\mu}_k$.

Il y a plusieurs façons d'en déduire des estimateurs des paramètres de notre modèle. Une étude comparative nous a permis de retenir les estimateurs suivants (pour $n \geq 3$) :

$$\widehat{\alpha} = \frac{1}{z} \ln \frac{\sum_{k=2}^n \widehat{\mu}_k C_{n-2}^{k-2}}{\sum_{k=2}^n \widehat{\mu}_k C_{n-3}^{k-2}} \quad (4.33)$$

$$\widehat{\xi} = \frac{\left(\sum_{k=2}^n \widehat{\mu}_k C_{n-2}^{k-2}\right)^3}{\left(\sum_{k=3}^n \widehat{\mu}_k C_{n-3}^{k-3}\right)^2} \quad (4.34)$$

$$\widehat{\lambda} = \sum_{k=1}^n \widehat{\mu}_k C_{n-1}^{k-1} - \frac{\left(\sum_{k=2}^n \widehat{\mu}_k C_{n-2}^{k-2}\right)^2}{\sum_{k=3}^n \widehat{\mu}_k C_{n-3}^{k-3}} \quad (4.35)$$

Une démarche similaire est à effectuer pour tous les plans d'essai. Dans le cas où $n = 2$ (loi exponentielle bivariée), on peut adapter les résultats de Bemis-Bain-Higgins [10].

Une étude comparative des qualités des différents estimateurs obtenus en fonction de la structure du système et des valeurs théoriques des paramètres a été effectuée dans [146]. Sans surprise, on constate que l'estimation est d'autant meilleure que l'on dispose de beaucoup d'information, et l'information est maximum quand le système est à configuration parallèle et que l'on dispose des durées de vie de tous les composants. L'estimation de α est d'autant meilleure que les stress sont forts et fréquents, mais l'estimation conjointe de α et λ est d'autant meilleure que les stress sont faibles et rares.

Enfin on peut tester l'influence du stress sur les composants en testant " $\alpha = 0$ " contre " $\alpha \neq 0$ ". Dans le cas des systèmes série présentés plus haut, il faut connaître λ . Alors le test consistant à rejeter l'hypothèse nulle au seuil γ si $N_1 < m$ ou $N_1 = m$ et $2n\lambda W_1$ est inférieur au quantile d'ordre γ de la loi χ_{2m}^2 , est uniformément le plus puissant.

Dans [68], nous avons appliqué l'ensemble de la démarche à des données réelles provenant du Laboratoire de Tests et Essais de la société Elcaro (Roumanie). Il s'agit de tests sur des câbles électriques à isolation en polyéthylène réticulé. Des chocs de surtension de type foudre ont été simulés selon un processus de Poisson homogène. L'intensité d'occurrence des stress ξ et l'amplitude de ceux-ci z sont donc connus car maîtrisés par l'utilisateur. Le taux de défaillance propre des câbles, λ , a été déterminé préalablement par des tests en environnement non stressant. Ainsi, le seul paramètre restant à estimer est la sensibilité au stress α . Nous sommes ici dans le cas simple où le système est réduit à un seul composant.

Les données sont les instants de pannes de 3 lots de 15 câbles, pour deux types de câbles et deux amplitudes de stress. Des tests d'adéquation nous ont permis de retenir l'hypothèse de mémoire cumulative pour les deux lots correspondant aux câbles les plus stressés, et de mémoire instantanée pour le troisième. Les estimations de α pour les trois lots sont très proches, ce qui tend à confirmer la pertinence de notre modélisation.

4.4 Perspectives

La première des perspectives est logiquement de démontrer la conjecture selon laquelle plus un système est fiable, plus il est sensible au stress. Mais peut-être faudrait-il pour cela trouver un autre critère d'influence du stress que notre indicateur I .

Nous n'avons pu obtenir des résultats statistiques exploitables que pour des systèmes à configuration série. Quand les systèmes ne sont pas à configuration série, le problème se complexifie notablement. Par exemple, pour les configurations parallèles, on ne dispose de résultats explicites que pour les systèmes à 2 ou 3 composants. Un test d'influence du stress est également possible, inspiré de Samanta [128]. Mais pour les autres configurations, on ne dispose pour l'instant d'aucun résultat pratiquement exploitable. Il reste donc du travail à effectuer dans cette direction. De la même façon, la plupart de nos résultats portent sur les stress ponctuels, il faudrait les étendre à d'autres types de stress.

Le principal point innovant de notre démarche est la notion de mémoire. Une direction de recherche attrayante est l'estimation non paramétrique de cette mémoire. On peut également penser à des tests portant sur la mémoire, par exemple tester une hypothèse nulle de mémoire instantanée contre une hypothèse alternative de mémoire cumulative.

Nos modèles utilisent la loi exponentielle multivariée symétrique. Pour les valider, il faudrait disposer de tests d'adéquation à cette loi. Or s'il existe des tests d'adéquation à la loi exponentielle multivariée générale [29], il n'en existe pas à notre connaissance pour la loi symétrique.

Enfin, nous ne nous sommes intéressés ici qu'aux systèmes non réparables. Or les systèmes réparables sont naturellement eux aussi soumis à des stress. Une généralisation de notre étude aux systèmes réparables serait donc intéressante.

Chapitre 5

Fiabilité en temps discret

5.1 Problématique

La quasi-totalité des études de fiabilité supposent que le temps est continu. Or certaines durées de vie ne peuvent pas se mesurer en temps calendaire. C'est le cas par exemple des appareils électromécaniques pour lesquels la durée de vie s'exprime comme le nombre de sollicitations du système jusqu'à défaillance. On rencontre également un temps discret quand les durées de vie s'expriment en nombre de cycles ou nombre de mois de bon fonctionnement. Par ailleurs, il arrive fréquemment que les données de fiabilité disponibles résultent du regroupement de données continues. Dans toutes ces situations, il faut redéfinir les notions usuelles de la fiabilité pour les adapter à un cadre discret.

Notre travail sur ce thème s'est effectué dans le cadre de la thèse de C. Bracquemond [12], sous forme d'une convention CIFRE avec Schneider Electric. La demande de Schneider Electric concernait essentiellement l'analyse de données discrètes de fiabilité, provenant de tests d'endurance mécanique de matériels électromécaniques non réparables. Pour pouvoir traiter ce type de données, nous nous sommes intéressés à des durées de vie modélisées par des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^* .

5.2 Les grandeurs de la fiabilité en temps discret

5.2.1 Définitions et notions de vieillissement

On considère que la durée de vie d'un système en temps discret est le nombre K de sollicitations nécessaires pour que le système défaille, ou, de manière équivalente, K est le rang de la première sollicitation pour laquelle le système ne fonctionne pas.

La première mention d'un taux de défaillance (ou taux de hasard) en temps discret est due à Barlow-Marshall-Proshan [6]. Ces travaux n'ont pas eu de suite significative, jusqu'à la mise en place plus précise des concepts de base par Salvia-Bollinger [127].

Les grandeurs de base de la fiabilité des systèmes non réparables en temps discret, analogues à leurs homologues en temps continu, sont les suivantes :

- La probabilité que le système défaille à la $k^{\text{ème}}$ sollicitation est :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p(k) = \mathbb{P}(K = k)$$

- La fonction de répartition de K est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad F(k) = \mathbb{P}(K \leq k) = \sum_{i=1}^k p(i)$$

- La fiabilité, qui traduit la probabilité que le système fonctionne encore à la $k^{\text{ème}}$ sollicitation est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad R(k) = \mathbb{P}(K > k) = 1 - F(k) = 1 - \sum_{i=1}^k p(i)$$

- Le taux de défaillance (ou de hasard) est :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda(k) = \mathbb{P}(K = k | K \geq k) = \frac{\mathbb{P}(K = k)}{\mathbb{P}(K \geq k)} = \frac{p(k)}{R(k-1)}$$

Le taux de défaillance donne la probabilité conditionnelle de défaillance du système à l'instant k , sachant qu'il a fonctionné jusqu'à l'instant $k-1$.

- Le taux de défaillance (ou de hasard) cumulé est :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Lambda(k) = \sum_{i=1}^k \lambda(i).$$

La plupart des relations bien connues qui lient ces différentes grandeurs en temps continu, ont leur équivalent en temps discret, mais pas toutes. Par exemple, comme l'avait déjà noté Lawless [84], le taux de hasard cumulé et la fiabilité sont liées en temps continu par la relation $\Lambda(t) = -\ln R(t)$. Or, en temps discret, il est clair que $\Lambda(k) \neq -\ln R(k)$.

Entre autres conséquences, cela entraîne qu'il y a, en temps discret, deux façons différentes de définir la notion de "taux de défaillance croissant en moyenne" (IFRA) [7] :

La loi de probabilité de la variable aléatoire K est dite :

- IFRA1 si et seulement si $\left\{ R(k)^{\frac{1}{k}} \right\}_{k \geq 1}$ est une suite décroissante.
- IFRA2 si et seulement si $\left\{ \frac{\Lambda(k)}{k} \right\}_{k \geq 1}$ est une suite croissante.

Shaked-Shantikumar-Valdez-Torrès [130] ont ainsi étudié les relations entre les différentes notions de vieillissement en temps discret (IFR, IFRA, NBU, DMRL). Nous avons poursuivi leurs travaux, notamment en établissant quelques relations supplémentaires et en montrant la complétude de la classe IFRA1 : si on considère un système cohérent constitué de n composants indépendants dont les durées de vie sont à valeurs dans \mathbb{N}^* , alors, si les lois des durées de vie des composants sont IFRA1, la loi de la durée de vie du système est IFRA1.

5.2.2 Modèles de durée de vie en temps discret

Nous avons effectué un travail de synthèse des lois de durée de vie en temps discret, en les classant en 3 familles [16]. De cette étude, on peut extraire quelques remarques :

- L'équivalent en temps discret de la loi exponentielle est bien sûr la loi géométrique, qui correspond à l'hypothèse d'absence de vieillissement (et de rajeunissement).
- Il y a plusieurs équivalents possibles en temps discret de la loi de Weibull. Nous avons retenu la loi dite "de Weibull discrète de type I", proposée par Nakagawa-Osaki [105], définie par son taux de défaillance :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda(k) = 1 - q^{k^\beta - (k-1)^\beta}, \quad q \in]0, 1[, \beta \in \mathbb{R}^+ \quad (5.1)$$

- On peut proposer de nombreux modèles issus d'un schéma d'urne de type Pólya, comme celui utilisé récemment dans [23].

5.2.3 Une nouvelle définition du taux de défaillance en temps discret

Outre la relation sur le taux de hasard cumulé déjà mentionnée, nous avons mis en évidence un certain nombre de différences gênantes entre les notions usuelles de fiabilité en temps continu et en temps discret. Par exemple :

- Le taux de défaillance en temps discret est borné (par 1), ce qui n'est pas le cas du taux de défaillance des principales lois de fiabilité en temps continu (comme la loi de Weibull).
- Le taux de défaillance en temps discret ne peut pas être convexe. Or la convexité du taux de défaillance s'interprète usuellement comme une accélération du vieillissement en fin de vie des systèmes.
- Le taux de défaillance des systèmes série n'est pas additif. En effet, considérons un système constitué de n composants indépendants en série de taux de défaillance respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors le taux de défaillance du système est :

$$\lambda(k) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i(k)) \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i(k) \quad (5.2)$$

Ces différences sont dues à la définition du taux de défaillance en temps discret. Avec M. Xie, nous avons alors proposé [18] d'utiliser plutôt comme taux de défaillance la suite $\{r(k)\}_{k \geq 1}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad r(k) = \ln \frac{R(k-1)}{R(k)} = -\ln[1 - \lambda(k)] \quad (5.3)$$

Cette définition résout les problèmes rencontrés : r n'est pas borné, il peut être convexe, la propriété d'additivité pour les systèmes série est vérifiée. De plus, si on pose $H(k) = \sum_{i=1}^k r(i)$, on retrouve la relation $H(k) = -\ln R(k)$ et les deux définitions de la notion IFRA avec ce nouveau taux sont équivalentes.

Il s'est avéré récemment qu'un travail similaire avait été effectué par Roy-Gupta [125]. Nous avons alors contacté D. Roy et effectué une synthèse de nos travaux respectifs dans [17].

5.3 Etude statistique

C. Bracquemond [12] a étudié les propriétés des estimateurs de maximum de vraisemblance des paramètres des principaux modèles de base de fiabilité en temps discret. Notre contribution personnelle porte sur l'estimation non paramétrique et les tests d'adéquation.

5.3.1 Estimation non paramétrique

Soient K_1, \dots, K_n n variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans \mathbb{N}^* . Dans notre cas, il s'agira de durées de vie discrètes de systèmes identiques et indépendants.

Les fréquences empiriques, fonction de répartition empirique et fiabilité empirique sont respectivement définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{K_i=k\}}, \quad \mathbb{F}_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{K_i \leq k\}}, \quad \text{et} \quad \mathbb{R}_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{K_i > k\}} \quad (5.4)$$

Les propriétés usuelles de la fiabilité empirique en temps continu se transposent aisément en temps discret.

Alors, il est naturel de définir le taux de défaillance empirique en temps discret de la façon suivante :

$$\forall k \leq \max(K_1, \dots, K_n), \quad \lambda_n(k) = \frac{\mathbb{P}_n(k)}{\mathbb{R}_n(k-1)} \quad (5.5)$$

Nous avons établi un certain nombre de résultats pour ce taux de défaillance empirique [15] :

- Pour n et k fixés, on connaît la loi exacte de $\lambda_n(k)$. On montre que $\lambda_n(k)$ est un estimateur biaisé mais asymptotiquement sans biais de $\lambda(k)$. Le biais est connu, mais on ne peut pas facilement en déduire un estimateur sans biais.
- Pour k fixé, on a la convergence presque sûre de $\lambda_n(k)$ vers $\lambda(k)$.
- Pour k fixé, on établit la normalité asymptotique de $\lambda_n(k)$ et on peut en déduire des intervalles de confiance asymptotiques pour $\lambda(k)$. Ces résultats peuvent également être utilisés avec la transformation du logit, ce qui permet d'obtenir des intervalles de confiance compris dans l'intervalle $[0, 1]$.
- On montre la convergence des vecteurs fini-dimensionnels du processus empirique associé au taux de défaillance : $\{\sqrt{n}(\lambda_n(k) - \lambda(k))\}_{k \geq 1}$ vers des vecteurs gaussiens centrés et de matrice de covariance diagonale, ce qui permet de construire des bandes de confiance asymptotiques pour λ . On peut noter qu'il est beaucoup plus facile d'établir des bandes de confiance pour le taux de défaillance que pour la fiabilité.

Des résultats similaires peuvent être montrés pour l'estimateur empirique du nouveau taux de défaillance $r(k)$.

Il est clair que le sens de variation de λ_n est un indicateur précieux sur le vieillissement des systèmes. Mais il faut beaucoup de données pour pouvoir en tirer des enseignements précis, ce qui est rarement le cas en pratique.

5.3.2 Tests d'adéquation

Pour pouvoir effectuer une analyse pertinente de données de fiabilité en temps discret, il est nécessaire de disposer de méthodes permettant de pouvoir choisir des modèles adaptés à chaque jeu de données étudié. Avec E. Crétois, nous avons donc étudié les tests d'adéquation aux modèles de fiabilité en temps discret [14].

On distingue usuellement deux types de tests :

Cas 1 : test d'adéquation à une loi entièrement spécifiée :

$$\mathcal{H}_0 : "F = F_0"$$

Cas 2 : test d'adéquation à une famille paramétrée de lois :

$$\mathcal{H}_0 : "F \in \{F(\cdot, \theta); \theta \in \Theta\}"$$

Dans les deux cas, l'hypothèse alternative est $\mathcal{H}_1 = \bar{\mathcal{H}}_0$.

Les tests du χ^2 et les tests lisses de Neyman peuvent être utilisés de la même façon dans un cadre continu et dans un cadre discret. Mais le test du χ^2 n'est pas suffisamment puissant pour être efficace dans notre contexte caractérisé par un petit nombre de données.

Nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux tests basés sur la fonction de répartition et la fonction génératrice empiriques. Les premiers tests ont pour but de généraliser les tests de Kolmogorov-Smirnov, Cramér-von Mises, Anderson-Darling et autres au cas des lois discrètes. Pour un test d'adéquation à une loi entièrement spécifiée, les résultats sont dus entre

autres à Pettitt-Stephens [111] et Choulakian-Lockart-Stephens [22]. Les statistiques de test correspondantes sont :

$$KS_n = \sqrt{n} \max_k |\mathbb{F}_n(k) - F_0(k)| \quad (5.6)$$

$$W_n^2 = n \sum_{k=1}^{\infty} [\mathbb{F}_n(k) - F_0(k)]^2 p_0(k) \quad (5.7)$$

$$A_n^2 = n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\mathbb{F}_n(k) - F_0(k)]^2 p_0(k)}{F_0(k)(1 - F_0(k))} \quad (5.8)$$

La principale différence entre le cas continu et le cas discret réside dans le fait que la loi de ces statistiques de test sous \mathcal{H}_0 dépend de la loi testée pour les lois discrètes, alors qu'elle n'en dépend pas pour les lois continues.

Le cas des tests d'adéquation à une famille de lois a été étudié par Henze [72] et Spinelli-Stephens [137]. Le principe est bien sûr de remplacer le paramètre inconnu θ par son estimateur de maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$. Malheureusement, la loi des statistiques de test sous \mathcal{H}_0 dépend de la vraie valeur du paramètre inconnu θ , ce qui n'est pas le cas en temps continu quand θ est un paramètre de position ou d'échelle. Par conséquent, il est nécessaire d'utiliser une procédure de bootstrap paramétrique pour pouvoir mettre en oeuvre ces tests, ce qui est un frein important à leur utilisation pratique.

L'idée d'utiliser la fonction génératrice empirique pour tester l'adéquation d'un échantillon à une loi discrète est due à Kocherlakota-Kocherlakota [81]. Pour $t \in]-1, 1[$, la fonction génératrice de la variable aléatoire K est $\varphi(t; \theta) = \mathbb{E}(t^K)$. Il est donc logique de définir la fonction génératrice empirique de l'échantillon K_1, \dots, K_n par :

$$\forall t \in]-1, 1[, \varphi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t^{K_i} \quad (5.9)$$

Le test proposé par Kocherlakota-Kocherlakota utilise une valeur t_0 fixée et est basé sur le fait que, dans le cas 2, sous \mathcal{H}_0 , la variable aléatoire :

$$KK_n = \frac{\varphi_n(t_0) - \varphi(t_0; \hat{\theta}_n)}{\sigma_{(t_0; \hat{\theta}_n)}} \quad (5.10)$$

converge en loi vers la loi normale centrée réduite, où $\sigma_{(t_0; \hat{\theta}_n)}$ dépend de t_0 , $\hat{\theta}_n$ et de la famille de lois testée.

Pour éviter l'arbitraire du choix de la valeur t_0 , Rueda, Perez-Abreu et O'Reilly [126] ont proposé d'utiliser plutôt la statistique :

$$RPO_n = n \int_0^1 (\varphi(t; \hat{\theta}_n) - \varphi_n(t))^2 dt \quad (5.11)$$

Enfin, Baringhaus-Henze [5] ont eu l'idée de construire un test d'adéquation à la loi de Poisson en exprimant la fonction génératrice de cette loi comme l'unique solution d'une équation différentielle de la forme $\psi(t; \varphi; \varphi'; \theta) = 0$. La statistique de test est alors :

$$BH_n = n \int_0^1 [\psi(t; \varphi_n; \varphi'_n; \hat{\theta}_n)]^2 dt \quad (5.12)$$

Dans ces deux derniers cas, il est nécessaire d'utiliser le bootstrap paramétrique pour mettre en oeuvre les tests.

Dans [14], nous avons explicité ces statistiques de test dans le cas de la loi géométrique, ce qui, à notre connaissance n'avait pas été fait auparavant, sauf pour le test de Neyman. Nous

avons également effectué une étude comparative des puissances de ces différents tests. Il s'avère que ces tests sont soit peu puissants, soit lourds à mettre en oeuvre. Aussi avons-nous essayé de proposer une démarche qui aboutisse à un test facile à utiliser et raisonnablement puissant.

L'idée est d'exploiter le lien fort entre la loi géométrique et la loi exponentielle. Plus précisément, nous transformons les données discrètes en données continues et nous effectuons un test d'adéquation à la loi continue correspondante. Nous utilisons pour cela la transformation de Smirnov généralisée [71], en l'appliquant aux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^* :

Transformation de Smirnov généralisée : Soit K une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* , de fonction de répartition F_0 . Soit U une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}[0, 1]$, indépendante de K . Alors la variable aléatoire $T = F_0(K - 1) + p_0(K)U$ est de loi $\mathcal{U}[0, 1]$.

Si on dispose d'un échantillon K_1, \dots, K_n et de variables aléatoires U_1, \dots, U_n indépendantes entre elles, indépendantes des K_i et de loi $\mathcal{U}[0, 1]$, on effectue la transformation ci-dessus n fois : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, T_i = F_0(K_i - 1) + p_0(K_i)U_i$. Tester l'adéquation des K_i à la loi de fonction de répartition F_0 , c'est tester l'adéquation des T_i à la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Pour tester l'adéquation des K_i à une famille paramétrée de lois, on remplace la fonction de répartition F_0 par la fonction de répartition estimée $F(\cdot, \hat{\theta}_n)$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose donc :

$$\hat{T}_i = F(K_i - 1; \hat{\theta}_n) + p(K_i; \hat{\theta}_n)U_i \quad (5.13)$$

Malheureusement, comme dans le cas continu, on ne peut pas tester l'adéquation des K_i à cette famille de lois en testant l'adéquation des \hat{T}_i à la loi uniforme sur $[0, 1]$, car l'estimation de θ par $\hat{\theta}_n$ modifie la loi asymptotique de la statistique de test par rapport au cas où θ est connu. Un traitement au cas par cas pour chaque famille de lois est nécessaire, comme pour les lois continues [31].

Si K est de loi géométrique de paramètre p , alors $T = 1 - (1 - pU)(1 - p)^{K-1}$ est de loi $\mathcal{U}[0, 1]$. Mais on peut remarquer aussi que :

$$E = K - 1 + \frac{\ln(1 - pU)}{\ln(1 - p)} \quad (5.14)$$

est de loi exponentielle de paramètre $-\ln(1 - p)$. En fait, $K = \lfloor E \rfloor + 1$. On peut donc tester l'adéquation des K_i à la loi géométrique de paramètre p connu, en testant l'adéquation des $E_i = K_i - 1 + \frac{\ln(1 - pU_i)}{\ln(1 - p)}$ à la loi exponentielle de paramètre $-\ln(1 - p)$.

Dans le cas où le paramètre p est inconnu, l'idée naturelle est de tester l'adéquation des

$$\hat{E}_i = K_i - 1 + \frac{\ln(1 - \hat{p}_n U_i)}{\ln(1 - \hat{p}_n)}, \quad \text{où } \hat{p}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n K_i} \quad (5.15)$$

à la famille des lois exponentielles, par exemple par le test d'Anderson-Darling.

Pour valider ce test, il faut vérifier que la loi asymptotique de la statistique de test ainsi définie est la même que celle de la statistique d'Anderson-Darling pour tester l'adéquation d'un échantillon à la loi exponentielle. Pour cela, il faut montrer que le processus empirique associé aux \hat{E}_i converge vers le même processus gaussien que le processus empirique associé à un échantillon exponentiel classique. Nous n'avons pas encore pu prouver théoriquement ce résultat, mais nous avons effectué des simulations qui nous laissent penser qu'il est correct.

Nous avons donc mis en oeuvre ce test et nous l'avons comparé aux autres tests d'adéquation à la loi géométrique. Il s'avère que ce test réalise un bon compromis entre facilité d'utilisation et puissance.

Finalement, notre étude de puissance nous amène à recommander, pour tester l'adéquation d'un échantillon à la loi géométrique, le test de Baringhaus-Henze et le test d'Anderson-Darling basé sur la transformation de Smirnov généralisée.

5.4 Perspectives

Il reste à achever la démonstration de la validité du test basé sur la transformation de Smirnov généralisée. Ce test peut se généraliser facilement à d'autres lois de probabilité que la loi géométrique, par exemple la loi de Weibull discrète de type I.

Pour que ces méthodes puissent être largement utilisées en pratique, il faut les adapter au cas où les observations sont censurées. Il faut également les généraliser aux systèmes réparables. Par ailleurs, il faudrait pouvoir ajouter au vieillissement discret à la sollicitation une composante continue due au vieillissement dans le temps.

Chapitre 6

Efficacité de la maintenance

6.1 Problématique

Tout au long de leur vie opérationnelle, tous les systèmes industriels complexes (centrales nucléaires, automobiles, ...) sont soumis à des opérations de maintenance préventive et corrective. La maintenance préventive a pour but de ralentir le vieillissement des systèmes et donc de retarder l'apparition des défaillances, tandis que la maintenance corrective doit remettre en fonctionnement les systèmes défaillants. La sûreté de fonctionnement de ces systèmes dépend naturellement étroitement de l'efficacité de ces opérations de maintenance. Dans la pratique, on observe que la maintenance permet effectivement de différer notablement la fin de vie des systèmes complexes, mais on n'a pas d'évaluation quantitative précise de l'efficacité de ces opérations.

La plupart des modèles classiques de fiabilité des systèmes réparables (Rigdon-Basu [122]) ne permettent pas de prendre en compte l'effet des maintenances autrement que dans une logique du tout ou rien : la maintenance est supposée remettre le système à neuf ("AGAN : As Good As New") ou le laisser dans l'état où il était juste avant la défaillance ("ABAO : As Bad As Old"). Ces hypothèses sont clairement trop simplificatrices : la maintenance va en général ralentir l'usure des systèmes sans pour autant les remettre à neuf.

D'un point de vue probabiliste, la suite des instants de défaillance et maintenance d'un système réparable est usuellement modélisée à l'aide de processus aléatoires ponctuels. Les situations AGAN et ABAO correspondent aux processus de renouvellement et aux processus de Poisson non homogènes. Le but de la thèse de L. Doyen est de proposer des modèles intermédiaires, à l'aide d'une modélisation des effets des maintenances représentative de la réalité industrielle, et d'effectuer l'analyse statistique de ces modèles. L'application pratique de ces résultats devrait être assurée dans le cadre d'une collaboration avec EDF.

Un certain nombre de travaux ont déjà été réalisés dans le domaine : Malik [96], Brown-Proschan [19], Block-Borges-Savits [11], Kijima [78], Baxter-Kijima-Tortorella [9], Pham-Wang [114]. La finalité des modèles proposés dans ces articles est la plupart du temps la construction d'une politique de maintenance optimale, et on cherche rarement à évaluer l'efficacité de la maintenance. Par ailleurs, il est très rare de prendre en compte à la fois les effets des maintenances préventives et correctives. Enfin, l'étude statistique de ces modèles n'a été abordée que très récemment : Shin-Lim-Lie [131], Dorado-Hollander-Sethuraman [39], Lim [89], Yun-Choung [145].

6.2 Premiers résultats

Ce travail n'ayant débuté qu'en 2001, on ne peut présenter ici que quelques premiers résultats [41] et des perspectives sur le travail de thèse de L. Doyen.

Dans un premier temps, on se contente de supposer que les maintenances ne sont que correctives. On se retrouve alors dans une situation similaire à celle rencontrée en fiabilité des logiciels : le processus des défaillances est un processus aléatoire ponctuel dont la loi est entièrement déterminée par son intensité λ_t . Dans la mesure où nos travaux ont vocation à s'appliquer à des systèmes essentiellement matériels qui vieillissent, les modèles développés seront, contrairement au cas des logiciels, des modèles de décroissance de fiabilité. Comme pour les logiciels, les durées de réparation sont supposées négligeables ou ne sont pas comptabilisées. On utilisera les mêmes notations que dans le chapitre 2 : les instants successifs de défaillance (et donc aussi de maintenances correctives) sont notés T_i , et le nombre de défaillances survenues à l'instant t est noté N_t .

Il est naturel de supposer qu'en l'absence de maintenance, le système a un vieillissement progressif continu. On considèrera donc qu'avant la première maintenance, l'intensité de défaillance est une fonction déterministe du temps $\lambda(t)$, continue et croissante, appelée intensité initiale. L'hypothèse ABAO de réparation minimale consiste à supposer que le processus des défaillances est le NHPP d'intensité $\lambda_t = \lambda(t)$. Inversement, l'hypothèse AGAN de remise à neuf consiste à supposer que le processus des défaillances est un processus de renouvellement dont $\lambda(t)$ est le taux de hasard de la loi générique. Ce processus a donc pour intensité $\lambda_t = \lambda(t - T_{N_t})$.

Une première classification de modèles a été proposée, qui consiste à distinguer deux types d'effets de la maintenance : réduction de l'intensité de défaillance et réduction de l'âge virtuel.

6.2.1 Modèles à réduction de l'intensité de défaillance

L'idée de base de ce type de modèles est de considérer que l'effet de la maintenance porte sur l'intensité de défaillance elle-même. Alors, si on note $\lambda_{T_i}^-$ et $\lambda_{T_i}^+$ les valeurs de l'intensité de défaillance juste avant et juste après la $i^{\text{ème}}$ maintenance, ces modèles sont caractérisés par l'expression de $\lambda_{T_i}^+$ en fonction de $\lambda_{T_i}^-$.

Par exemple, on dira qu'il y a réduction arithmétique de l'intensité de défaillance s'il existe une quantité $S(i, T_1, \dots, T_i)$ telle que :

$$\lambda_{T_i}^+ = \lambda_{T_i}^- - S(i, T_1, \dots, T_i) \quad (6.1)$$

et on aura une réduction géométrique de l'intensité de défaillance si on a :

$$\lambda_{T_i}^+ = \lambda_{T_i}^- S(i, T_1, \dots, T_i) \quad (6.2)$$

Si on suppose de plus qu'entre deux défaillances, l'intensité λ_t est parallèle à l'intensité initiale $\lambda(t)$, alors un modèle à réduction arithmétique de l'intensité sera défini par une intensité de défaillances de la forme :

$$\lambda_t = \lambda(t) - Z(N_t, T_1, \dots, T_{N_t}) \quad (6.3)$$

De la même façon, on définit un modèle à réduction géométrique de l'intensité par :

$$\lambda_t = \lambda(t) Z(N_t, T_1, \dots, T_{N_t}) \quad (6.4)$$

Les quantités $Z(N_t, T_1, \dots, T_{N_t})$ ne peuvent pas être quelconques puisqu'il faut respecter quelques contraintes comme par exemple la positivité de λ_t . Dans le cas d'une réduction arithmétique, il faut que $Z(N_t, T_1, \dots, T_{N_t})$ soit inférieur à $\lambda(T_{N_t})$. La façon la plus simple de faire est de poser $Z(N_t, T_1, \dots, T_{N_t}) = \rho \lambda(T_{N_t})$, avec $0 \leq \rho \leq 1$. On définit ainsi le **modèle à réduction arithmétique de l'intensité de type 1 (ARI₁)** par l'intensité :

$$\lambda_t = \lambda(t) - \rho \lambda(T_{N_t}) \quad (6.5)$$

On peut montrer que cela revient à considérer que chaque maintenance effectue une réduction arithmétique de l'intensité proportionnelle à son accroissement depuis la dernière défaillance, c'est-à-dire pour tout i :

$$\lambda_{T_i}^+ = \lambda_{T_i}^- - \rho \left[\lambda_{T_i}^+ - \lambda_{T_i}^- \right] \quad (6.6)$$

Une autre idée simple est de considérer que la maintenance réduit l'intensité d'un facteur proportionnel à sa valeur avant la défaillance, c'est-à-dire :

$$\lambda_{T_i}^+ = \lambda_{T_i}^- - \rho \lambda_{T_i}^- = (1 - \rho) \lambda_{T_i}^- \quad (6.7)$$

Alors l'intensité de ce modèle est :

$$\lambda_t = \lambda(t) - \rho \sum_{j=0}^{N_t} (1 - \rho)^j \lambda(T_{N_t-j}), \quad (6.8)$$

On peut remarquer que le modèle ARI_1 consiste à ne prendre que le premier terme dans la somme ci-dessus. On peut donc englober les deux modèles précédemment définis dans une classe plus large, paramétrée par un entier m , définie par une intensité de défaillance de la forme :

$$\lambda_t = \lambda(t) - \rho \sum_{j=0}^{\min(m-1, N_t)} (1 - \rho)^j \lambda(T_{N_t-j}), \quad (6.9)$$

L'intensité s'exprime à l'aide des m derniers instants de défaillance. On voit donc apparaître une propriété markovienne de mémoire m . Le modèle défini par l'intensité (6.9) est donc appelé **modèle à réduction arithmétique de l'intensité de mémoire m (ARI_m)**. Dans ces conditions, le modèle défini par l'intensité (6.8) peut être appelé **modèle à réduction arithmétique de l'intensité de mémoire infinie (ARI_∞)**.

De la même façon, on peut définir des modèles à réduction géométrique de l'intensité. Par exemple, le modèle à réduction géométrique de l'intensité de mémoire 1 (GRI_1) est défini par :

$$\lambda_t = \frac{\lambda(t)}{[\lambda(T_{N_t})]^\rho} \quad (6.10)$$

Une transformation logarithmique simple permet de passer des modèles ARI aux modèles GRI.

6.2.2 Modèles à réduction de l'âge

Le principe de cette classe de modèles est de considérer que la maintenance a pour effet de "rajeunir" le système, au sens où son intensité de défaillance à l'instant t est égale à l'intensité initiale à un instant $A_t = A(t; N_t, T_1, \dots, T_{N_t})$. Si on considère que l'**âge réel** à l'instant t d'un système mis en fonctionnement à l'instant 0 est t , alors A_t peut être considéré comme l'**âge virtuel** du système à l'instant t .

Un modèle à réduction de l'âge est défini par une intensité de défaillance de la forme :

$$\lambda_t = \lambda(A_t) \quad (6.11)$$

Les contraintes pesant sur A_t sont les mêmes que celles qui pèsent sur λ_t dans les modèles à réduction d'intensité quand l'intensité initiale est $\lambda(t) = t$. On peut donc construire des modèles à réduction d'âge par analogie avec les modèles à réduction d'intensité. Par exemple, on définit :

- le **modèle à réduction arithmétique de l'âge de mémoire 1 (ARA_1)** :

$$\lambda_t = \lambda(t - \rho T_{N_t}) \quad (6.12)$$

Il s'avère que ce modèle n'est autre que celui qui a été introduit par Malik [96], puis formalisé par Shin-Lim-Lie [131].

- le **modèle à réduction arithmétique de l'âge de mémoire m (ARA $_m$)** :

$$\lambda_t = \lambda \left(t - \rho \sum_{j=0}^{\min(m-1, N_t)} (1 - \rho)^j T_{N_t-j} \right) \quad (6.13)$$

On remarque que les cas ABAO, AGAN et le modèle de Malik sont des modèles ARA $_m$ particuliers.

- le **modèle à réduction géométrique de l'âge de mémoire 1 (GRA $_1$)** :

$$\lambda_t = \lambda \left(\frac{t}{T_{N_t}^\rho} \right) \quad (6.14)$$

6.2.3 Intensité de défaillance minimale

Nous avons commencé à étudier les modèles à réduction d'intensité et à réduction d'âge : forme de leur intensité, comparaison entre des ARI et des ARA de même mémoire ou de même paramètre ρ , etc...

Un des points les plus remarquables est que, pour tous ces modèles, il existe ce que nous avons appelé une intensité d'usure minimale, définie de la façon suivante.

On considère un processus ponctuel d'intensité λ_t . On appelle **intensité d'usure minimale**, si elle existe, la fonction déterministe $\lambda^{\min}(t)$ qui vérifie :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad P(\lambda_t \geq \lambda^{\min}(t)) &= 1 \\ \forall \epsilon > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad P(\lambda_t \leq \lambda^{\min}(t) + \epsilon) &> 0 \end{aligned}$$

$\lambda^{\min}(t)$ est une borne inférieure en deça de laquelle la maintenance ne permet pas d'aller. En pratique, cela signifie que le système considéré vieillit plus vite qu'un système dont l'intensité de défaillances est $\lambda^{\min}(t)$ et moins vite qu'un système dont l'intensité de défaillances est l'intensité initiale $\lambda(t)$.

Par exemple, les intensités d'usure minimale pour les modèles précédemment définis sont :

- ARI $_m$: $\lambda^{\min}(t) = (1 - \rho)^m \lambda(t)$
- ARA $_m$: $\lambda^{\min}(t) = \lambda((1 - \rho)^m t)$

Dans les modèles étudiés, quand la mémoire est égale à 1, la maintenance a pour effet de ramener l'intensité de défaillance exactement au niveau de l'intensité d'usure minimale. Quand la mémoire est supérieure à 1, l'intensité de défaillance est toujours strictement supérieure à $\lambda^{\min}(t)$.

6.2.4 Prise en compte simultanée des maintenances correctives et préventives

Les modèles précédents ne considèrent que les maintenances correctives. Or, dans la réalité industrielle, les maintenances qui augmentent le plus la durée de vie des systèmes sont les maintenances préventives. Pour prendre en compte à la fois les maintenances préventives et les maintenances correctives, nous avons dans un premier temps fait les hypothèses suivantes :

- Les maintenances préventives sont planifiées à l'avance et sont effectuées à des instants déterministes τ_i . On note ν_t le nombre de maintenances préventives effectuées à l'instant t .

- L'effet des maintenances préventives est modélisé par l'un des modèles précédemment définis.
- Les maintenances correctives sont du type ABAO.

Sous ces hypothèses, le processus des défaillances du système soumis aux deux types de maintenances est un NHPP. Par exemple, le modèle de type ARI_m est défini par l'intensité :

$$\lambda_t = \lambda(t) - \rho \sum_{j=0}^{Min(m-1, \nu_t)} (1 - \rho)^j \lambda(\tau_{\nu_t - j}) \quad (6.15)$$

A l'aide des propriétés bien connues des NHPP, on peut dégager les principales caractéristiques de ces modèles. On peut également jouer sur le choix des τ_i , c'est-à-dire choisir une politique de maintenance préventive. Nous avons par exemple établi quelques propriétés dans le cas de maintenances préventives périodiques.

Bien sûr, les hypothèses choisies sont discutables. Elles permettent d'obtenir des modèles faciles à manipuler, mais elles ne sont pas forcément réalistes. En particulier, il faut certainement considérer que l'effet des maintenances correctives n'est pas ABAO.

6.3 Perspectives

Dans tous les modèles proposés, le paramètre ρ représente l'efficacité de la maintenance. Donc évaluer l'efficacité de la maintenance, c'est estimer ρ . Par conséquent, nous allons nous intéresser à l'estimation de ρ . Il faut par ailleurs également estimer l'intensité initiale. Nous disposons déjà de premiers résultats de simulation, pour lesquels nous avons supposé que l'intensité initiale était celle d'un Power-Law Process de paramètres α et β . Nous avons ainsi une idée du biais et de la variance des estimateurs de maximum de vraisemblance des paramètres ρ , α et β pour les modèles ARI_m et ARA_m . Il reste maintenant à obtenir des résultats théoriques. Il serait intéressant de construire des intervalles de confiance et des tests d'hypothèses portant sur ρ . Le rôle de la mémoire m est également à étudier.

Ce travail devrait se faire en collaboration avec EDF. Nous souhaitons construire ensemble des modèles prenant en compte les effets des deux types de maintenance, qui soient représentatifs de la réalité industrielle. On peut évidemment aller au delà des modèles à réduction d'intensité ou d'âge. A terme, nous utiliserons nos résultats pour évaluer l'efficacité des opérations de maintenance sur des systèmes réels, à partir du retour d'expérience.

Chapitre 7

Conclusions et perspectives

Comme on a pu le voir tout au long de ce mémoire, mes travaux se situent toujours dans l'optique du traitement le plus exhaustif possible d'un problème. A partir d'une problématique industrielle concrète, j'essaie d'aller depuis la construction abstraite d'un modèle stochastique le plus représentatif possible de la réalité, jusqu'à son utilisation opérationnelle sur des données de retour d'expérience. Pour cela, j'utilise des outils probabilistes et statistiques variés : processus aléatoires, tests non paramétriques, modèles linéaires, chaînes de Markov cachées, etc... Je ne prétends pas apporter de contribution majeure à l'étude théorique de ces domaines, mais j'espère en proposer des applications originales, utiles et mathématiquement rigoureuses.

En plus des 5 grands thèmes traités dans les chapitres 2 à 6, j'ai été amené à aborder ponctuellement quelques problèmes très ciblés, directement liés à des applications :

- La modélisation d'un processus englobant production et défaillances [21].
- Une étude sur la constance des paramètres de sûreté de fonctionnement en exploitation [36].
- La mesure de l'impact d'une mauvaise estimation du paramètre de forme de la loi de Weibull sur l'estimation du MTTF et de la fiabilité, quand on utilise la transformation dite "Weibull à exponentielle" [140].

Un certain nombre de perspectives de recherche à court terme ont été listées dans les différents chapitres de ce mémoire et constituent des prolongements des travaux déjà effectués. Rappelons-en quelques unes :

- Approfondir l'étude de l'utilisation des chaînes de Markov cachées en fiabilité des logiciels.
- Etablir un résultat théorique global sur les tests d'adéquation préquentiels.
- Généraliser le test d'adéquation graphique au Power-Law Process à d'autres modèles.
- Approfondir l'étude de la famille puissance généralisée.
- Démontrer la conjecture selon laquelle plus un système est fiable, plus il est sensible au stress.
- Etudier précisément l'influence de stress non ponctuels sur des configurations non série.
- Estimer la mémoire que les composants gardent des stress subis.
- Démontrer la validité du test d'adéquation aux lois discrètes basé sur la transformation de Smirnov généralisée.
- Prendre en compte simultanément les composantes discrète et continue du vieillissement.
- Mesurer simultanément les effets des maintenances préventives et correctives.

En fiabilité comme dans beaucoup d'autres branches, les situations rencontrées ont souvent plusieurs facettes complémentaires. Citons les dualités systèmes réparables ou non réparables,

fiabilité des logiciels ou des matériels, temps continu ou temps discret, système vu comme une entité (“boîte noire”) ou comme un ensemble de composants (“boîte blanche”), données complètes ou censurées, durées de bon fonctionnement ou de réparation, etc... Quand on a traité une facette d’un problème, une perspective naturelle est de traiter les autres facettes. On peut ainsi construire facilement d’autres directions de recherche à partir des problèmes que j’ai traités jusqu’à maintenant.

Parmi celles-ci, j’ai l’intention de m’intéresser plus particulièrement à la fiabilité des systèmes réparables en temps discret. En effet, d’une part les travaux présentés dans le chapitre 5 ont vocation à se généraliser à des systèmes matériels réparables, et d’autre part certains logiciels ont un fonctionnement discret. C’est le cas par exemple des logiciels réactifs synchrones, étudiés en particulier au laboratoire Logiciels, Systèmes et Réseaux (LSR) à Grenoble. Nous espérons construire sur ce thème une collaboration constructive entre le LMC et le LSR.

Tout au long de mes travaux, j’ai été régulièrement confronté à certains types de problèmes que je n’ai pas eu le temps de traiter et qui pourtant mériteraient largement de l’être. Parmi ceux-ci, j’en retiens deux principaux.

Tout d’abord, dans la pratique, les données de retour d’expériences sont souvent en très petit nombre, incomplètes ou très fortement censurées. Dans ce cas, les techniques statistiques reposant sur des résultats asymptotiques ne peuvent pas s’appliquer. On peut alors utiliser la statistique bayésienne ou des méthodes de traitement des données manquantes, comme l’algorithme EM et ses dérivés, qui s’annoncent prometteuses.

Le deuxième point concerne la disponibilité des systèmes. Bien qu’ayant beaucoup travaillé sur les systèmes réparables, j’ai jusqu’à maintenant négligé les durées de réparation. Si cela peut se justifier dans de nombreux cas, il existe des situations où la prise en compte des durées de réparation est indispensable. Dans ce cas, on utilise en général des techniques markoviennes, dont la principale limite réside dans l’explosion combinatoire des états. On emploie alors de plus en plus des techniques de simulation. J’aimerais pouvoir m’intéresser à la disponibilité des systèmes informatiques, problème important et jusqu’à présent presque pas étudié.

Au delà de ces perspectives techniques, je souhaiterais mettre en avant des caractéristiques plus générales de mes activités de recherche à venir. Tout d’abord, la majeure partie des travaux effectués en France en sûreté de fonctionnement sont de nature probabiliste. Je souhaite développer de préférence un point de vue statistique, allant de la théorie jusqu’à l’exploitation de données réelles, sans pour autant négliger l’aspect probabiliste. En cela mes travaux se rapprochent plus de ce qui peut se faire en ce moment aux Etats-Unis ou en Extrême-Orient. Dans cette veine, je compte développer la collaboration déjà fructueuse que j’ai mise en place entre le LMC et la National University of Singapore, ainsi que ma participation au groupe de travail européen de l’European Safety and Reliability Data Association (ESReDA).

Par ailleurs, il est intéressant de constater que la sûreté de fonctionnement est largement pluridisciplinaire. Rien que sur le site grenoblois, des recherches sur ce thème sont menées dans plusieurs laboratoires d’informatique et d’automatique (LSR, TIMA, LAG), sans parler de l’industrie. Dans d’autres endroits, les mécaniciens et les chimistes se penchent sur ces problèmes. Je souhaiterais contribuer au dialogue entre ces diverses communautés. J’ai déjà commencé une action dans ce sens au sein de la Société Française de Statistique et de l’Institut de Sûreté de Fonctionnement, et c’est l’approche que je compte développer par le biais de l’action de recherche concertée locale FIMA, entre le LMC et l’INRIA Rhône-Alpes, dont je suis responsable depuis mai 2001.

Bibliographie

- [1] ARNOLD B., Parameter estimation for multivariate exponential distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 63, 848-852, 1968.
- [2] ARNOUX F., GAUDOIN O. ET MAKNI C., The generalized power family in software reliability data analysis, *Proc. 2nd Int. Conf. on Mathematical Methods in Reliability, MMR 2000*, Bordeaux, 107-110, 2000.
- [3] ASCHER H. ET FEINGOLD H., *Repairable systems reliability: modeling, inference, misconceptions and their causes*, Marcel Dekker, 1984.
- [4] BAGDONAVICIUS V. ET NIKULIN M., *Accelerated life models: Modeling and statistical analysis*, Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [5] BARINGHAUS L. ET HENZE N., A goodness of fit test for the Poisson distribution based on the empirical generating function, *Statistics and Probability Letters*, 13, 269-274, 1992.
- [6] BARLOW R.E., MARSHALL A.W. ET PROSCHAN F., Properties of probability distributions with monotone hazard rate, *Annals of Statistics*, 34, 375-389, 1963.
- [7] BARLOW R.E. ET PROSCHAN F., *Statistical theory of reliability and life testing - Probability models*, Silver Spring, 1981.
- [8] BARRA J.R., *Notions fondamentales de statistique mathématique*, Dunod, 1971.
- [9] BAXTER L.A., KIJIMA M. ET TORTORELLA M., A point process model for the reliability of a maintained system subject to general repair, *Communications in Statistics - Stochastic Models*, 12, 37-65, 1996.
- [10] BEMIS B., BAIN L. ET HIGGINS J., Estimation and hypothesis testing for the parameters of the bivariate exponential distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 67, 927-929, 1972.
- [11] BLOCK H., BORGES W.S. ET SAVITS T.H., Age-dependent minimal repair, *Journal of Applied Probability*, 22, 370-385, 1985.
- [12] BRACQUEMOND C., *Modélisation stochastique du vieillissement en temps discret*, Thèse de l'INP Grenoble, 2001.
- [13] BRACQUEMOND C., CHEVALIER M. ET GAUDOIN O., Modelling the ageing of non-repairable systems in discrete time, *Proc. 12th European Safety & Reliability Int. Conf., ESREL 2001*, Turin, Italie, 229-236, 2001.
- [14] BRACQUEMOND C., CRÉTOIS E. ET GAUDOIN O., A comparative study of goodness-of-fit tests for the geometric distribution and application to discrete time reliability, article soumis, 2001.
- [15] BRACQUEMOND C. ET GAUDOIN O., On the empirical failure rate for discrete distributions, en cours de rédaction, 2002.
- [16] BRACQUEMOND C. ET GAUDOIN O., A survey on discrete lifetime distributions and their practical statistical inference, en cours de rédaction, 2002.

- [17] BRACQUEMOND C., GAUDOIN O., ROY D. ET XIE M., On some discrete notions of aging, In *System and Bayesian Reliability*, A volume in honor of Richard E. Barlow, Y. Hayakawa, T. Irony and M. Xie eds., World Scientific, Singapore, 185-197, 2001.
- [18] BRACQUEMOND C., GAUDOIN O. ET XIE M., Redefining failure rate function for discrete distributions, article soumis, 2001.
- [19] BROWN M. ET PROSCHAN F., Imperfect repair, *Journal of Applied Probability*, 20, 851-859, 1983.
- [20] CHEN Y. ET SINGPURWALLA N., Unification of software reliability models by self-exciting point processes, *Advances in Applied Probability*, 29, 337-352, 1997.
- [21] CHEVALIER M. ET GAUDOIN O., Estimation des taux de production et défaillance d'un processus industriel, *2ème Conférence Nationale Qualité et Sécurité de Fonctionnement*, Angers, 1997.
- [22] CHOULAKIAN V., LOCKHART R.A. ET STEPHENS M.A., Cramér-von Mises tests for discrete distributions, *Canadian Journal of Statistics*, 22, 125-137, 1994.
- [23] CLAROTTI C.A., LANNOY A. ET PROCACCIA H., Probability risk analysis of ageing components which fail on demand - A Bayesian model : Application to maintenance optimization of diesel engine linings, In *Ageing of materials and methods for the assessment of lifetimes of engineering plant*, Penny ed, Balkema, Rotterdam, 85-93, 1997.
- [24] COCOZZA-THIVENT C., *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, Springer, 1997.
- [25] COX D.R. ET LEWIS P.A.W., *The statistical analysis of series of events*, Methuen & co., 1966.
- [26] CRÉTOIS E. ET GAUDOIN O., New results on goodness-of-fit tests for the power-law process and application to software reliability, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 5, 3, 249-267, 1998.
- [27] CRÉTOIS E., EL AROUI, M.A. ET GAUDOIN O., U-plot method for testing the goodness-of-fit of the power-law process, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 28, 7, 1731-1747, 1999.
- [28] CROW L.H., Reliability analysis for complex repairable systems, in *Reliability and biometry - Statistical analysis of lifelength*, SIAM Philadelphia, 379-410, 1974.
- [29] CSÖRGO S. ET WELSH A.H., Testing for exponential and Marshall-Olkin distributions, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 23, 287-300, 1989.
- [30] CURRIT A. ET SINGPURWALLA N.D., On the reliability function of a system of components sharing a common environment, *Journal of Applied Probability*, 16, 763-771, 1988.
- [31] D'AGOSTINO R.B. ET STEPHENS M.A., *Goodness-of-fit techniques*, Marcel Dekker, 1986.
- [32] DARLING D.A. ET SIEGERT A.J.F., The first passage problem for a continuous Markov process, *Annals of Mathematical Statistics*, 24, 624-639, 1953.
- [33] DAVID F.N. ET JOHNSON N.L., The probability integral transformation when the parameters are estimated from the sample, *Biometrika*, 35, 182-190, 1948.
- [34] DAWID A., Statistical theory, the prequential approach, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 147, 278-292, 1984.
- [35] DEGOTT F.R. ET GAUDOIN O., **LogiFiab**: Manuel utilisateur et Descriptif technique, Rapport Technique LMC, Février 1993.
- [36] DI PIAZZA S., GAUDOIN O. ET LE GARREC C., Constance des paramètres de Sécurité de Fonctionnement en exploitation, *12ème Colloque National de Sécurité de Fonctionnement*, $\lambda\mu$ 12, Montpellier, 2000.

- [37] DHILLON B.S. ET VISWANATH H.C., On common cause failures - bibliography, *Microelectronics and Reliability*, 30, 1179-1195, 1990.
- [38] DISNEY R., LIPSON C. ET SHETH N., The determination of the probability of failure by stress/strength inference theory, *Proc. 14th Ann. Symp. Reliability and Maintainability*, 417-422, 1968.
- [39] DORADO C., HOLLANDER M. ET SETHURAMAN J., Nonparametric estimation for a general repair model, *The Annals of Statistics*, 25, 3, 1140-1160, 1997.
- [40] DOWNS T. ET SCOTT A., Evaluating the performance of software reliability models, *IEEE Transactions on Reliability*, R-41, 4, 533-538, 1992.
- [41] DOYEN L. ET GAUDOIN O., Modelling and assessment of maintenance efficiency for repairable systems, *Proc. 13th European Safety & Reliability Int. Conf., ESREL 2002*, Lyon, 2002.
- [42] DUANE J.T., Learning curve approach to reliability monitoring, *IEEE Transactions on Aerospace*, AS-2, 2, 563-566, 1964.
- [43] DURAND J.B. ET GAUDOIN O., Assessing the efficiency of software debugging process with hidden Markov chains, en cours de rédaction, 2002.
- [44] EBRAHIMI N. ET RAMALLINGAM T., Estimation of system reliability in Brownian stress-strength models based on sample paths, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 45, 9-19, 1993.
- [45] EL AROUI M.A., The prequential goodness-of-fit approach : a study of the exponential distribution case, *Sequential analysis*, 18, 3-4, 189-202, 1999.
- [46] EL AROUI M.A. ET GAUDOIN O., On prequential goodness-of-fit tests for discrete time stochastic processes, en cours de rédaction, 2002.
- [47] EL AROUI M.A. ET LAVERGNE C., Semi-parametric approach and generalized linear models in software reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, R-45, 3, 463-470, 1996.
- [48] ESARY J.D., MARSHALL A.W. ET PROSCHAN F., Shock models and wear processes, *The Annals of Probability*, 1, 4, 627-649, 1973.
- [49] FERGUSON T.S., *Mathematical statistics, a decision theoretic approach*, Academic Press, 1967.
- [50] GAUDOIN O., *Outils statistiques pour l'évaluation de la fiabilité des logiciels*, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I, 1990.
- [51] GAUDOIN O., Optimal properties of the Laplace trend test for software-reliability models, *IEEE Transactions on Reliability*, R 41, 4, 525-532, 1992.
- [52] GAUDOIN O., La fiabilité du logiciel : mythe ou réalité?, Rapport EDF-DER n°HI-56/93/002, 1993.
- [53] GAUDOIN O., CPIT goodness-of-fit tests for the power-law process, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 27, 1, 165-180, 1998.
- [54] GAUDOIN O., Software reliability models with two debugging rates, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 6, 1, 31-42, 1999.
- [55] GAUDOIN O., CPIT goodness-of-fit tests for reliability growth models, In *Statistical and Probabilistic Models in Reliability*, D. Ionescu & N. Limnios eds, Birkhäuser, Boston, 27-37, 1999.
- [56] GAUDOIN O., Some statistical methods in maintenance management, In *Handbook on Maintenance Management - Optimisation and Data*, L. Petterson ed., An ESReDA working group report, Statistical Series n°5, Det Norske Veritas, Oslo, à paraître, 2002.

- [57] GAUDOIN O., CRÉTOIS E. ET XIE M., Goodness-of-fit tests for the log-power software reliability model, *Int. Workshop on Reliability Modeling*, Singapour, 1998.
- [58] GAUDOIN O. ET EL AROUI M.A., Analyse statistique des données de sûreté de fonctionnement des machines UNIX récoltées par l'outil ASRX, Rapport de contrat LMC - Bull, 1997.
- [59] GAUDOIN O. ET LAVERGNE C., Estimation in a two variance component model when one component is known, *Statistics*, 25, 97-106, 1994.
- [60] GAUDOIN O., LAVERGNE C. ET SOLER J.L., A generalized geometric de-eutrophication software-reliability model, *IEEE Transactions on Reliability*, R-44, 4, 536-541, 1994.
- [61] GAUDOIN O. ET SOLER J.L., Modèles pour l'étude de la fiabilité des systèmes présentant des fautes de conception. Application à l'évaluation de la fiabilité des logiciels, *Revue de statistique appliquée*, XXXX, 2, 91-98, 1992.
- [62] GAUDOIN O. ET SOLER J.L., Statistical analysis of the geometric de-eutrophication software-reliability model, *IEEE Transactions on Reliability*, R 41, 4, 518-524, 1992.
- [63] GAUDOIN O. ET SOLER J.L., Fiabilité de composants soumis à des stress, Rapport de contrat LMC - Thomson TCS, 1996.
- [64] GAUDOIN O. ET SOLER J.L., Failure rate behavior of components subjected to random stresses, *Reliability Engineering and System Safety*, 58, 1, 19-30, 1997.
- [65] GAUDOIN O., SOLER J.L. ET ZAHALCA C.A., Influence induced by a random stress environment on system reliability, en cours de rédaction, 2002.
- [66] GAUDOIN O., XIE M. ET YANG B., A simple goodness-of-fit test for the power-law process based on the Duane plot, *IEEE Transactions on Reliability*, à paraître, 2003.
- [67] GAUDOIN O., XIE M. ET YANG B., More goodness-of-fit tests for the log-power software reliability model, en cours de rédaction, 2002.
- [68] GAUDOIN O. ET ZAHALCA C., Reliability of XLPE cables under lightning impulse voltages, *Proc. 2nd Int. Conf. on Mathematical Methods in Reliability, MMR 2000*, Bordeaux, 435-438, 2000.
- [69] GAUDOIN O. ET ZAHALCA C.A., Estimating the stress sensitivity of a system subjected to a point stress, en cours de rédaction, 2002.
- [70] GOEL A.L. ET OKUMOTO K., Time dependent error detection rate model for software reliability and other performance measures, *IEEE Transactions on Reliability*, R-28, 1, 206-211, 1979.
- [71] GREENWOOD P.E. ET NIKULIN M.S., *A guide to chi-squared testing*, Wiley, 1996.
- [72] HENZE N., Empirical distribution function goodness of fit tests for discrete models, *Canadian Journal of Statistics*, 24, 81-93, 1996.
- [73] HOYLAND A. ET RAUSAND M., *System reliability theory - Models and statistical methods*, Wiley, 1994.
- [74] JELINSKI Z. ET MORANDA P.B., Statistical computer performance evaluation, in *Software reliability research*, 465-497, W. Freiberger ed, Academic press, New-York, 1972.
- [75] JOHNSON A., Stress-strength models for reliability, in *Handbook of statistics, vol. 7*, P.R. Krishnaiah et Rao C.R. eds, 27-54, Elsevier, 1988.
- [76] KANOUN K. ET LAPRIE J.C., Software reliability trend analysis : from theoretical to practical considerations, *IEEE Transactions on Software Engineering*, SE-20, 9, 740-777, 1994.

- [77] KEILLER P., LITTLEWOOD B., MILLER D. ET SOFER A., Comparison of software reliability predictions, *Proc. 13th IEEE Int. Symp. on Fault Tolerant Computing, FTCS-13*, Milan, IEEE Computer Society Press, 128-134, 1983.
- [78] KIJIMA M., Some results for repairable systems with general repair, *Journal of Applied Probability*, 26, 89-102, 1989.
- [79] KLEFSJÖ B. ET KUMAR U., Goodness-of-fit tests for the power-law process based on the TTT-plot, *IEEE Transactions on Reliability*, R-41, 4, 593-598, 1992.
- [80] KNAFL G.J. ET MORGAN J., Solving ML equations for 2-parameter Poisson process models for ungrouped software failure data, *IEEE Transactions on Reliability*, R-45, 1, 42-53, 1996.
- [81] KOCHERLAKOTA S. ET KOCHERLAKOTA K., Goodness-of-fit tests for discrete distributions, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 15, 815-829, 1986.
- [82] LAPRIE J.C. ED., *Dependability: basic concepts and terminology*, Springer, 1992.
- [83] LAPRIE J.C. ED., *Guide de la sûreté de fonctionnement*, Cepadue, 1995.
- [84] LAWLESS J.F., *Statistical models and methods for lifetime data*, Wiley, 1982.
- [85] LEFEVRE C. ET MALICE M.P., On a system of components with joint lifetimes distributed as a mixture of independent exponential laws, *Journal of Applied Probability*, 26, 202-208, 1989.
- [86] LEHMANN E.L., *Testing statistical hypotheses*, Wiley, 1959.
- [87] LEE L. ET FINELLI G.B., A transformation for testing the fit of an exponential order statistics model, *Stochastic Processes and their Applications*, 33, 299-307, 1989.
- [88] LEWIS P.A.W., Some results on tests for Poisson processes, *Biometrika*, 62, 5-22, 1965.
- [89] LIM T.J., Estimating system reliability with fully masked data under Brown-Prochan imperfect repair model, *Reliability Engineering and System Safety*, 59, 277-289, 1998.
- [90] LINDLEY D.V. ET SINGPURWALLA N.D., Multivariate distributions for the life length of components of a system sharing a common environment, *Journal of Applied Probability*, 23, 318-431, 1986.
- [91] LIPSTER R.S. ET SHIRYAEV A.N., *Statistics of random processes*, Springer-Verlag, 1977.
- [92] LITTLEWOOD B., Stochastic reliability growth: a model for fault removal in computer programs and hardware designs, *IEEE Transactions on Reliability*, R-30, 4, 313-320, 1981.
- [93] LITTLEWOOD B., Predicting software reliability, *Philosophical Transactions of the Royal Society, London*, A-327, 513-527, 1989.
- [94] LITTLEWOOD B. ET VERRAL J., A Bayesian reliability growth model for computer software, *Journal of the Royal Statistical Society - Series C*, 22, 332-336, 1973.
- [95] LYU M.R. ED., *Handbook of software reliability engineering*, IEEE Computer Society Press and Mc Graw-Hill Book Company, 1996.
- [96] MALIK M.A.K., Reliable preventive maintenance scheduling, *AIEE Transactions*, 11, 221-228, 1979.
- [97] MARSHALL A.W. ET OLKIN I., A multivariate exponential distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 62, 30-44, 1967.
- [98] MARSHALL A.W. ET SHAKED M., Multivariate shock models for distributions with increasing hazard rate average, *The Annals of Probability*, 7, 2, 343-358, 1979.
- [99] MORANDA P.B., Event altered rate models for general reliability analysis, *IEEE Transactions on Reliability*, R-28, 5, 376-381, 1979.

- [100] MOSLER K. ET SCARSINI M., *Stochastic orders and applications: a classified bibliography*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, 1993.
- [101] MUSA J.D., A theory of software reliability and its applications, *IEEE Transactions on Software Engineering*, SE-1, 312-327, 1975.
- [102] MUSA J.D., *Software reliability data*, Technical Report, Rome Air Development center, 1979.
- [103] MUSA J.D., IANNINO A. ET OKUMOTO K., *Software reliability: measurement, prediction, applications*, McGraw-Hill, 1987.
- [104] MUSA J.D. ET OKUMOTO K., A logarithmic Poisson execution time model for software reliability measurement, *Proc. 7th Int. Conf. on Software Engineering*, 230-238, 1984.
- [105] NAKAGAWA T. ET OSAKI S., The discrete Weibull distribution, *IEEE Transactions on Reliability*, R-24, 5, 300-301, 1975.
- [106] NELSON W., *Accelerated life testing - Statistical models, tests plans and data analysis*, Wiley, 1990.
- [107] O'REILLY F.J. ET QUESENBERRY C.P., The conditional probability integral transform and applications to obtain composite chi-square goodness-of-fit tests, *Annals of Statistics*, 1, 74-83, 1973.
- [108] O'REILLY F.J. ET STEPHENS M.A., Characterizations and goodness-of-fit tests, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 44, 3, 353-360, 1982.
- [109] OHBA M. ET CHOU X.M., Does imperfect debugging affect software reliability growth?, *Proc. Int. Conf. on Software Engineering*, Pittsburgh, 237-244, 1989.
- [110] PARK W.J. ET KIM Y.G., Goodness-of-fit tests for the power-law process, *IEEE Transactions on Reliability*, R-41, 1, 107-111, 1992.
- [111] PETTITT A.N. ET STEPHENS M.A., The Kolmogorov-Smirnov goodness-of-fit statistics with discrete and grouped data, *Technometrics*, 19, 205-210, 1977.
- [112] PHAM H., Software reliability assessment: imperfect debugging and multiple failure types in software development, EG&G-RAAM-10737, Idaho National Engineering Laboratory, 1995.
- [113] PHAM H., *Software reliability*, Springer, 2000.
- [114] PHAM H. ET WANG H., Imperfect maintenance, *European Journal of Operational Research*, 94, 425-438, 1996.
- [115] PHAM H. ET ZHANG X., A NHPP software reliability model and its comparison, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 4, 3, 269-282, 1997.
- [116] PROSCHAN F. ET SULLO P., Estimating the parameters of the multivariate exponential distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 71, 465-472, 1976.
- [117] RAO C.R., Estimation of variance and variance components: MINQUE theory, *Journal of Multivariate Analysis*, vol 1, 257-275, 1971.
- [118] RAO C.R. ET KLEFFE J., *Estimation of variance components and applications*, North Holland, Elsevier, 1988.
- [119] RAYNER J.C.W. ET BEST D.J., *Smooth tests of goodness-of-fit*, Oxford University Press, 1989.
- [120] RIGDON S.E., Testing goodness-of-fit for the power-law process, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol 18, 12, 4665-4676, 1989.
- [121] RIGDON S.E. ET BASU A.P., The power-law process: a model for the reliability of repairable systems, *Journal of Quality Technology*, vol 21, 4, 251-260, 1989.

- [122] RIGDON S.E. ET BASU A.P., *Statistical methods for the reliability of repairable systems*, Wiley, 2000.
- [123] RINGLER J., Une extension de l'approche résistance-contrainte appliquée à la modélisation des lois de défaillance des composants électroniques, *Revue de statistique appliquée*, XXXI, 2, 19-42, 1983.
- [124] ROSENBLATT M., Remarks on a multivariate transformation, *Annals of Mathematical Statistics*, 23, 470-472, 1952.
- [125] ROY D. ET GUPTA R.P., Classifications of discrete lives, *Microelectronics and Reliability*, 32, 10, 1459-1473, 1992.
- [126] RUEDA R., PEREZ-ABREU V. ET O'REILLY F., Goodness-of-fit test for the Poisson distribution based on the probability generating function, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 20, 3093-3110, 1991.
- [127] SALVIA A.A. ET BOLLINGER R.C., On discrete hazard functions, *IEEE Transactions on Reliability*, R-31, 5, 458-459, 1982.
- [128] SAMANTA M., On tests of independence in a trivariate exponential distribution, *Statistics and Probability Letters*, 1, 279-284, 1983.
- [129] SCHICK G.J. ET WOLVERTON R.W., Assessment of software reliability, *Proc. Operation Research*, Physica-Verlag, 395-422, 1973.
- [130] SHAKED M., SHANTHIKUMAR J.G. ET VALDEZ-TORRES J.B., Discrete hazard rate functions, *Computers and Operations Research* 22, 4, 391-402, 1995.
- [131] SHIN I., LIM T.J. ET LIE C.H., Estimating parameters of intensity function and maintenance effect for repairable unit, *Reliability Engineering and System Safety*, 57, 1-10, 1996.
- [132] SHORACK G., The weighted empirical process of row independent random variables with arbitrary distribution functions, *Statistica Neerlandica*, 33, 4, 169-189, 1979.
- [133] SINGPURWALLA N.D. ET YOUNGREN M.A., Multivariate distributions induced by dynamic environments, *Scandinavian Journal of Statistics*, 20, 3, 251-261, 1993.
- [134] SNYDER D.L. ET MILLER M.I., *Random point processes in time and space*, Springer, 1991.
- [135] SOLER J.L., Croissance de fiabilité des versions d'un logiciel, *Revue de statistique appliquée*, XLIV, 1, 5-20, 1996.
- [136] SOLER J.L., Modélisation des processus de risque, de défaillance et de correction des systèmes présentant des fautes de conception - Application à la fiabilité des logiciels, *Actes du 6ème Colloque National de Fiabilité et Maintenabilité*, Strasbourg, 647-650, 1988.
- [137] SPINELLI J.J. ET STEPHENS M.A., Cramér-Von Mises tests of fit for the Poisson distribution, *Canadian Journal of Statistics*, 25, 257-268, 1997.
- [138] VIERTL R., *Statistical methods for accelerated life testing*, Vandenhoek and Ruprecht, 1988.
- [139] XIE M., *Software reliability modelling*, World Scientific, Singapore, 1991.
- [140] XIE M., YANG Z. ET GAUDOIN O., More on the mis-specification of the shape parameter with Weibull-to-exponential transformation, *Quality and Reliability Engineering International*, 16, 281-290, 2000.
- [141] YAMADA S., OHBA M. ET OSAKI S., S-shaped reliability growth modelling for software error detection, *IEEE Transactions on Reliability*, R-35, 5, 475-478, 1983.

- [142] YAMADA S., TOKUNO K. ET OSAKI S., Imperfect debugging with fault introduction rate for software reliability assessment, *International Journal of Systems Science*, 23, 12, 2241-2252, 1992.
- [143] YAMADA S., TOKUNO K. ET OSAKI S., Software reliability measurement in imperfect debugging environment and its application, *Reliability Engineering and System Safety*, 40, 139-147, 1993.
- [144] YUAN J., LAI M.T. ET KO K.L., Evaluation of system reliability with common-cause failures by a pseudo-environment model, *IEEE Transactions on Reliability*, R-38, 3, 328-332, 1989.
- [145] YUN W.Y. ET CHOUNG S.J., Estimating maintenance effect and parameters of intensity function for improvement maintenance model, *Proc. 5th ISSAT Int. Conf. on Reliability and Quality in Design*, Las Vegas, 164-166, 1999.
- [146] ZAHALCA C.A., *Fiabilité de systèmes en environnement aléatoire stressant*, Thèse de l'INP Grenoble, 1999.
- [147] ZAHALCA C.A. ET GAUDOIN O., Estimation de la sensibilité d'un système à un environnement aléatoire stressant, *Actes des 31èmes Journées de Statistique*, Grenoble, 805-808, 1999.
- [148] ZEEPHONGSEKUL P., XIA G. ET KUMAR S., Software reliability growth model: primary failures generate secondary faults under imperfect debugging, *IEEE Transactions on Reliability*, R-43, 3, 408-413, 1994.
- [149] ZHAO M. ET XIE M., On the log-power NHPP software reliability model, *Proc. 4th Int. Symp. on Software Reliability Engineering*, North Carolina, 14-22, 1993.

Résumé : Ces travaux portent sur les probabilités et la statistique appliquées à la sûreté de fonctionnement. Plus précisément, il s'agit d'une part de construire des modèles stochastiques du processus des défaillances et réparations de systèmes divers, et d'autre part de mettre en oeuvre des méthodes statistiques pour exploiter les données de défaillance et de maintenance dans le but d'évaluer et de prévoir la fiabilité de ces systèmes. Les résultats présentés concernent : la modélisation et l'évaluation de la fiabilité des logiciels, les tests d'adéquation aux modèles de croissance de fiabilité des systèmes réparables, la modélisation de l'influence d'un environnement aléatoire stressant sur la durée de vie des composants et des systèmes, l'étude du vieillissement en temps discret, et l'évaluation de l'efficacité de la maintenance.

Mots-clés : fiabilité, modélisation stochastique, statistique appliquée, processus aléatoires ponctuels, tests d'adéquation, sûreté de fonctionnement, vieillissement, maintenance

Abstract : This work deals with Probability and Statistics applied to Reliability. More precisely, my work aims, on one hand, to build stochastic models of failure and repair of diverse systems, and, on the other hand, to develop statistical methods for the analysis of failure and maintenance data, in order to assess and predict the reliability of these systems. The presented results concern : modelling and assessment of software reliability, goodness-of-fit tests for reliability growth models, modelling of the influence of a stressing random environment on component and system lifetime, study of discrete ageing, and assessment of maintenance efficiency.

Keywords : reliability, stochastic modelling, applied statistics, random point processes, goodness-of-fit tests, dependability, ageing, maintenance